



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ**

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ
ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ»**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
που εκπονήθηκε για τη χορήγηση
Διπλώματος Μεταπτυχιακών Σπουδών
από την
Βασιλική Π. Βράντση
(Α.Μ. 4282020003)

**ΘΕΜΑ: Ανάλυση έργων για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών στα διαδραστικά σχολικά
εγχειρίδια των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο**

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Σουλτάνα Καφούση	Καθηγήτρια	ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ	Επιβλέπουσα
Χρυσάνθη Σκουμπουρδή	Καθηγήτρια	ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ	Μέλος
Μιχαήλ Σκουμιός	Αναπληρωτής Καθηγητής	ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ	Μέλος

ΡΟΔΟΣ, 2022

Η έγκριση της παρούσης Διπλωματικής Εργασίας στο πλαίσιο του Π.Μ.Σ. «Διδακτική Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση: Διεπιστημονική Προσέγγιση» του Τμήματος Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού του Πανεπιστημίου Αιγαίου δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων της συγγραφέως.

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση: Διεπιστημονική Προσέγγιση» του Πανεπιστημίου Αιγαίου.

Η εκπόνηση της παρούσας εργασίας αποτελεί το επιστέγασμα μιας συνεχούς και αδιάκοπης προσωπικής προσπάθειας αλλά και υποστήριξης - συμπαράστασης από πολλούς ανθρώπους. Η διπλωματική αυτή εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την επίβλεψη της Καθηγήτριας Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ. του Πανεπιστημίου Αιγαίου κ. Σουλτάνας Καφούση, την οποία ευχαριστώ θερμά για την πολύτιμη καθοδήγηση, βοήθεια καθώς και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε.

Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής, την κ. Χρυσάνθη Σκουμπουρδή, Καθηγήτρια Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ., Πανεπιστημίου Αιγαίου και τον κ. Μιχαήλ Σκουμιό, Αναπληρωτή Καθηγητή Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ., Πανεπιστημίου Αιγαίου, για τις πολύτιμες επισημάνσεις και υποδείξεις οι οποίες συνέβαλαν στην ποιοτική εξέλιξη και αναβάθμιση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Περίληψη

Τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Διαδραματίζουν πολύ σημαντικό ρόλο γιατί είναι τόσο εργαλείο μάθησης αλλά και διδασκαλίας. Επιπλέον αποτελούν «μεσολαβητές» ή «μετακομιστές» των σκοπών και στόχων των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών. Ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών είναι πολλαπλός γιατί καθοδηγούν τη διδασκαλία αφού προσδιορίζουν το περιεχόμενο που θα διδαχθεί, δομούν το τι θεωρείται «Μαθηματικά», δίνουν τη δυνατότητα επιλογής τι θα αξιολογηθεί και καθορίζουν το διάβασμα του/της μαθητή/-τριας.

Η ανάπτυξη και η χρήση ψηφιακών εγχειριδίων καθίσταται ως ένας αναδυόμενος και σημαντικός τομέας που θα απασχολήσει τη μελλοντική κατεύθυνση της έρευνας Μαθηματικών (Fan et al., 2013).

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται η συγκριτική ανάλυση έργων των διαδραστικών σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών του γυμνασίου αναφορικά με το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών.

Στην παρούσα εργασία αναλύθηκαν 21 έργα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου, 228 έργα που περιλαμβάνονται στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου και 111 έργα από αυτό της Γ΄ Γυμνασίου. Το μαθηματικό περιεχόμενο των έργων στα οποία εμπλέκεται το εμβαδόν αναλύθηκε από τρεις παραμέτρους: της διατήρησης, της μεταβατικότητας και της μονάδας μέτρησης (Wilson & Rowland, 1993). Για την ανάλυση των έργων των διαδραστικών σχολικών εγχειριδίων σχετικά με τις γνωστικές απαιτήσεις και τους τύπους πλαισίου χρησιμοποιήθηκε το πλαίσιο ανάλυσης των Wijaya, van den Heuvel-Panhuizen, & Doorman (2015), για τις μαθηματικές πρακτικές που αναπτύσσονται, το πλαίσιο ανάλυσης των Niss & Hojgaard (2019), για τη μορφή απάντησης που απαιτεί η εργασία, χρησιμοποιήσαμε το εργαλείο ανάλυσης της Glasnovic (2018) και για τη θεματολογία των έργων που καλύπτουν, χρησιμοποιήσαμε το εργαλείο των Fan, Xiong, Zhao & Niu (2018).

Τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της διπλωματικής εργασίας ενδέχεται να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς να αναστοχαστούν σχετικά με τα έργα που εμπεριέχονται στα σχολικά εγχειρίδια για το εμβαδόν και να προχωρήσουν σε διαδικασίες βελτίωσής τους εμπλουτίζοντας το σχετικό εκπαιδευτικό υλικό.

Λέξεις κλειδιά: σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών, ανάλυση σχολικών εγχειριδίων, εμβαδόν επίπεδων επιφανειών.

Abstract

Textbooks are an integral part of the educational process. They play a very important role because it is both a learning tool and a teaching tool. In addition, they are "mediators" or "movers" of the aims and objectives of the Curricula. The role of Mathematics textbooks is multiple because they guide teaching as they identify the content to be taught, structure what is considered "Mathematics", give a choice to be evaluated and determine the student's reading.

The development and use of digital textbooks is becoming an emerging and important field that will address the future direction of Mathematics research (Fan et al., 2013).

In the present work, a comparative analysis of works of the interactive high school textbooks of Mathematics regarding the area of flat surfaces is attempted.

In the present work, 21 works from the interactive school textbook of Mathematics of the 1st grade of High School, 228 works included in the interactive school textbook of Mathematics of the 2nd grade of High School and 111 works from that of the 3rd grade of High School were analyzed. The mathematical content of the projects in which the area is involved was analyzed by three parameters: the conservation, the transition and the unit of measurement (Wilson & Rowland, 1993). The analysis framework of Wijaya, van den Heuvel-Panhuizen, & Doorman (2015) was used to analyze the works of the interactive textbooks on cognitive requirements and framework types, for the mathematical practices developed, the Niss & Hojgaard (2019), for the form of answer required by the work, we used the analysis tool of Glasnovic (2018) and for the themes of the works they cover, we used the tool of Fan, Xiong, Zhao & Niu (2018).

The results and conclusions of the dissertation may help teachers to reflect on the projects contained in the textbooks for the area and to proceed with their improvement processes by enriching the relevant educational material.

Keywords: Mathematics textbooks, analysis of textbooks, area of flat surfaces.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ευχαριστίες	3
Περίληψη	4
Abstract	5
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	6
Κατάλογος πινάκων	9
Κατάλογος σχημάτων	11
Κατάλογος εικόνων.....	12
Εισαγωγή	15
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ^ο : ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ	17
1.1 Σημασία σχολικών εγχειριδίων	17
1.2 Σημασία σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών	19
1.3 Έντυπο και διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο.....	20
1.4 Ενδεικτικές έρευνες για την ανάλυση σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση	22
1.4.1 Έρευνες που αφορούν τα γενικά χαρακτηριστικά των έργων των σχολικών εγχειριδίων.....	23
1.4.2 Έρευνες που εστιάζουν στην ανάλυση έργων των σχολικών εγχειριδίων για συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες.....	33
1.5 Σύνοψη 1 ^{ου} Κεφαλαίου	39
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ^ο : ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ.....	40
2.1 Εισαγωγή.....	40
2.2 Ιστορικά στοιχεία	40
2.3 Θεωρητική προσέγγιση του εμβαδού.....	43
2.4 Δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση του εμβαδού επίπεδων επιφανειών	45
2.5 Το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών στα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών Γυμνασίου	48
2.6 Σύνοψη 2 ^{ου} Κεφαλαίου	50

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ^ο : ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ.....	52
3.1 Προβληματική της έρευνας.....	52
3.2 Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα.....	53
3.3 Δείγμα της έρευνας	54
3.4 Μέθοδος έρευνας	54
3.5 Συλλογή δεδομένων	55
3.6 Ανάλυση δεδομένων	57
3.6.1 Οριζόντια ανάλυση.....	58
3.6.2 Κάθετη ανάλυση.....	59
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ^ο : ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	67
Εισαγωγή	67
4.1 Ανάλυση των έργων στην Α΄ Γυμνασίου	67
4.1.1 Οριζόντια ανάλυση	67
4.1.2 Κάθετη ανάλυση	70
4.1.2.1 Μαθηματικό περιεχόμενο.....	70
4.1.2.2 Γνωστικές απαιτήσεις.....	72
4.1.2.3 Μαθηματικές πρακτικές	74
4.1.2.4 Μορφή απάντησης.....	76
4.1.2.5 Τύποι πλαισίου	78
4.1.2.6 Θεματολογία έργων	79
4.2 Ανάλυση των έργων στην Β΄ Γυμνασίου	81
4.2.1 Οριζόντια ανάλυση	81
4.2.2 Κάθετη ανάλυση	86
4.2.2.1 Μαθηματικό περιεχόμενο.....	86
4.2.2.2 Γνωστικές απαιτήσεις.....	87
4.2.2.3 Μαθηματικές πρακτικές	89
4.2.2.4 Μορφή απάντησης.....	91
4.2.2.5 Τύποι πλαισίου	92
4.2.2.6 Θεματολογία έργων	94
4.3 Ανάλυση των έργων στην Γ΄ Γυμνασίου.....	95
4.3.1 Οριζόντια ανάλυση	95
4.3.2 Κάθετη ανάλυση	99

4.3.2.1 Μαθηματικό περιεχόμενο.....	99
4.3.2.2 Γνωστικές απαιτήσεις.....	101
4.3.2.3 Μαθηματικές πρακτικές.....	103
4.3.2.4 Μορφή απάντησης.....	104
4.3.2.5 Τύποι πλαισίου.....	105
4.3.2.6 Θεματολογία έργων.....	106
4.4 Συγκριτική μελέτη για όλους τους άξονες στην κάθετη ανάλυση.....	107
4.4.1 Μαθηματικό περιεχόμενο.....	107
4.4.2 Γνωστικές απαιτήσεις.....	108
4.4.3 Μαθηματικές πρακτικές.....	109
4.4.4 Μορφή απάντησης.....	110
4.4.5 Τύποι πλαισίου.....	110
4.4.6 Θεματολογία έργων.....	111
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ^ο : ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	113
5.1 Εισαγωγή.....	113
5.2 Κυριότερα Ευρήματα ανά ερώτημα.....	113
5.3 Περιορισμοί και προτάσεις για μελλοντική έρευνα.....	116
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....	117
Ξενόγλωσση βιβλιογραφία.....	117
Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία.....	120
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	123

Κατάλογος πινάκων

Πίνακας 1.1	Εννοιολογικό πλαίσιο σχετικά με την ταξινόμηση του πολιτισμού που εκδηλώνεται στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών.	Σελ.	29
Πίνακας 1.2	Χαρακτηριστικά των δομικών στοιχείων στα γερμανικά εγχειρίδια των μαθηματικών.	Σελ.	30
Πίνακας 1.3	Πλαίσιο ανάλυσης για ανάλυση σχολικών βιβλίων των Wijaya, van den Heuvel-Panhuizen, & Doorman (2015).	Σελ.	31
Πίνακας 1.4	Το πλαίσιο που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση των εγχειριδίων μαθηματικών (Charalambous et al., σελ. 123).	Σελ.	34
Πίνακας 1.5	Το πλαίσιο που χρησιμοποιείται για την ανάλυση του περιεχομένου και των προβλημάτων του σχολικού βιβλίου.	Σελ.	35
Πίνακας 1.6	Λέξεις κλειδιά σε κάθε επίπεδο.	Σελ.	36
Πίνακας 1.7	Οι γνωστικές διαδικασίες του πλαισίου (Brändström, 2005, σελ. 49).	Σελ.	37
Πίνακας 1.8	Διαστάσεις των απαιτήσεων του προβλήματος (Li, 2000, σελ. 237).	Σελ.	38
Πίνακας 3.1	Έργα που αφορούν τα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών Γυμνασίου.	Σελ.	55
Πίνακας 4.1	Αριθμός ενοτήτων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών.	Σελ.	67
Πίνακας 4.2	Αριθμός ενοτήτων και έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου όπου το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών διδάσκεται ως αυτόνομη έννοια.	Σελ.	68
Πίνακας 4.3	Μαθησιακοί στόχοι των ενοτήτων όπου το εμβαδόν διδάσκεται ως αυτόνομη έννοια στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου.	Σελ.	68
Πίνακας 4.4	Αριθμός ενοτήτων και έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου όπου το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών διδάσκεται ως βοηθητική έννοια.	Σελ.	68
Πίνακας 4.5	Μαθησιακοί στόχοι των ενοτήτων όπου το εμβαδόν διδάσκεται ως μια βοηθητική αναπαράσταση για την κατανόηση μιας άλλης έννοιας στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου.	Σελ.	69
Πίνακας 4.6	Μαθηματικό περιεχόμενο των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου.	Σελ.	70
Πίνακας 4.7	Γνωστικές απαιτήσεις των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου.	Σελ.	73
Πίνακας 4.8	Μαθηματικές πρακτικές των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου.	Σελ.	74
Πίνακας 4.9	Μορφή απάντησης των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου.	Σελ.	76
Πίνακας 4.10	Τύποι πλαισίου των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου.	Σελ.	78
Πίνακας 4.11	Θεματολογία των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου.	Σελ.	79
Πίνακας 4.12	Αριθμός ενοτήτων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών.	Σελ.	81
Πίνακας 4.13	Αριθμός ενοτήτων και έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου όπου το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών διδάσκεται ως αυτόνομη έννοια.	Σελ.	81
Πίνακας 4.14	Μαθησιακοί στόχοι των ενοτήτων όπου το εμβαδόν διδάσκεται ως	Σελ.	82

	αυτόνομη έννοια στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου.		
Πίνακας 4.15	Αριθμός ενοτήτων και έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου όπου το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών διδάσκεται ως βοηθητική έννοια.	Σελ.	83
Πίνακας 4.16	Μαθησιακοί στόχοι ενοτήτων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου όπου το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών διδάσκεται ως βοηθητική έννοια.	Σελ.	83
Πίνακας 4.17	Μαθηματικό περιεχόμενο των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Γυμνασίου.	Σελ.	86
Πίνακας 4.18	Γνωστικές απαιτήσεις των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Γυμνασίου.	Σελ.	88
Πίνακας 4.19	Μαθηματικές πρακτικές των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Γυμνασίου.	Σελ.	89
Πίνακας 4.20	Μορφή απάντησης των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Γυμνασίου.	Σελ.	91
Πίνακας 4.21	Τύποι πλαισίου των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Γυμνασίου.	Σελ.	92
Πίνακας 4.22	Θεματολογία των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Γυμνασίου.	Σελ.	94
Πίνακας 4.23	Αριθμός ενοτήτων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών.	Σελ.	96
Πίνακας 4.24	Αριθμός ενοτήτων και έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου όπου το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών διδάσκεται ως βοηθητική έννοια.	Σελ.	96
Πίνακας 4.25	Μαθησιακοί στόχοι ενοτήτων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου όπου το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών διδάσκεται ως βοηθητική έννοια.	Σελ.	96
Πίνακας 4.26	Μαθηματικό περιεχόμενο των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Γυμνασίου.	Σελ.	99
Πίνακας 4.27	Γνωστικές απαιτήσεις των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Γυμνασίου.	Σελ.	101
Πίνακας 4.28	Μαθηματικές πρακτικές των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Γυμνασίου.	Σελ.	103
Πίνακας 4.29	Μορφή απάντησης των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Γυμνασίου.	Σελ.	104
Πίνακας 4.30	Τύποι πλαισίου των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Γυμνασίου.	Σελ.	105
Πίνακας 4.31	Θεματολογία των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Γυμνασίου.	Σελ.	106
Πίνακας 4.32	Μαθηματικό περιεχόμενο των έργων στις τάξεις Α-Γ Γυμνασίου.	Σελ.	107
Πίνακας 4.33	Γνωστικές απαιτήσεις των έργων στις τάξεις Α-Γ Γυμνασίου.	Σελ.	108
Πίνακας 4.34	Μαθηματικές πρακτικές των έργων στις τάξεις Α-Γ Γυμνασίου.	Σελ.	109
Πίνακας 4.35	Μορφή απάντησης των έργων στις τάξεις Α-Γ Γυμνασίου.	Σελ.	110
Πίνακας 4.36	Τύποι πλαισίου των έργων στις τάξεις Α-Γ Γυμνασίου.	Σελ.	111
Πίνακας 4.37	Θεματολογία των έργων στις τάξεις Α-Γ Γυμνασίου.	Σελ.	111

Κατάλογος σχημάτων

Σχήμα 1.1	Τα σχολικά βιβλία θεωρούνται ως μια ενδιάμεση μεταβλητή στο πλαίσιο της εκπαίδευσης.	Σελ.	24
Σχήμα 1.2	Διάγραμμα πενταδιάστατου πλαισίου (περιεχόμενο, δραστηριότητες, επίπεδα πολυπλοκότητας, μορφές απάντησης και χαρακτηριστικά πλαισίου (Glasnovic Gracin, 2018, σελ. 6).	Σελ.	26
Σχήμα 1.3	Το πλαίσιο εφαρμογής (Brändström, 2005, σελ. 47).	Σελ.	38
Σχήμα 3.1	Εργαλείο ανάλυσης των έργων για το εμβადόν επίπεδων επιφανειών στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του γυμνασίου.	Σελ.	66
Σχήμα 4.1	Μαθηματικό περιεχόμενο των έργων της Α΄ Γυμνασίου.	Σελ.	71
Σχήμα 4.2	Γνωστικές απαιτήσεις των έργων της Α΄ Γυμνασίου.	Σελ.	73
Σχήμα 4.3	Μαθηματικές πρακτικές των έργων της Α΄ Γυμνασίου.	Σελ.	75
Σχήμα 4.4	Μορφή απάντησης των έργων της Α΄ Γυμνασίου.	Σελ.	77
Σχήμα 4.5	Τύποι πλαισίου των έργων της Α΄ Γυμνασίου.	Σελ.	78
Σχήμα 4.6	Θεματολογία των έργων της Α΄ Γυμνασίου.	Σελ.	80
Σχήμα 4.7	Μαθηματικό περιεχόμενο των έργων της Β΄ Γυμνασίου.	Σελ.	87
Σχήμα 4.8	Γνωστικές απαιτήσεις των έργων της Β΄ Γυμνασίου.	Σελ.	88
Σχήμα 4.9	Μαθηματικές πρακτικές των έργων της Β΄ Γυμνασίου.	Σελ.	90
Σχήμα 4.10	Μορφή απάντησης των έργων της Β΄ Γυμνασίου.	Σελ.	92
Σχήμα 4.11	Τύποι πλαισίου των έργων της Β΄ Γυμνασίου.	Σελ.	93
Σχήμα 4.12	Θεματολογία των έργων της Β΄ Γυμνασίου.	Σελ.	95
Σχήμα 4.13	Μαθηματικό περιεχόμενο των έργων της Γ΄ Γυμνασίου.	Σελ.	100
Σχήμα 4.14	Γνωστικές απαιτήσεις των έργων της Γ΄ Γυμνασίου.	Σελ.	101
Σχήμα 4.15	Μαθηματικές πρακτικές των έργων της Γ΄ Γυμνασίου.	Σελ.	103
Σχήμα 4.16	Μορφή απάντησης των έργων της Γ΄ Γυμνασίου.	Σελ.	104
Σχήμα 4.17	Τύποι πλαισίου των έργων της Γ΄ Γυμνασίου.	Σελ.	105
Σχήμα 4.18	Θεματολογία των έργων της Γ΄ Γυμνασίου.	Σελ.	106

Κατάλογος εικόνων

Εικόνα 3.1	Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου σελ. 67- άσκηση 4 της ενότητας: Α.3.5. «Μονάδες μέτρησης».	Σελ.	56
Εικόνα 3.2	Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου σελ. 107 Μικροπείραμα 1ο κάτω από τη Δραστηριότητα 3η της ενότητας Α.6.6. «Αντιστρόφως ανάλογα ποσά».	Σελ.	56
Εικόνα 3.3	Ερώτηση κατανόησης από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου σελ. 56- ερώτηση κατανόησης 3 της ενότητας: Α.3.1. «Η έννοια της συνάρτησης».	Σελ.	56
Εικόνα 3.4	Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου σελ. 214 Μικροπείραμα κάτω από την Ερώτηση Κατανόησης 3 της ενότητας Β.4.3. «Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου».	Σελ.	57
Εικόνα 3.5	Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου σελ. 50- Άσκηση 17 β΄ ερώτημα της ενότητας: Α.1.5 «Αξιοσημείωτες ταυτότητες».	Σελ.	57
Εικόνα 3.6	Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου σελ. 67- άσκηση 5 της ενότητας: Α.3.5. «Μονάδες μέτρησης».	Σελ.	58
Εικόνα 3.7	Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου σελ. 125- άσκηση 8 της ενότητας: Β.1.3. «Εμβαδά επίπεδων σχημάτων».	Σελ.	58
Εικόνα 3.8	Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου σελ. 215- άσκηση 2 της ενότητας: Β.4.3. «Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου».	Σελ.	58
Εικόνα 3.9	Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου σελ. 118- άσκηση 1 της ενότητας: Β.1.2 «Μονάδες μέτρησης επιφανειών».	Σελ.	60
Εικόνα 3.10	Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου σελ. 131- άσκηση 5 της ενότητας: Β.1.4 «Πυθαγόρειο Θεώρημα».	Σελ.	60
Εικόνα 3.11	Παράδειγμα-εφαρμογή από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου- Σελ.16 Παραδείγματα-Εφαρμογές 3ο της ενότητας: Α.1.2 «Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών».	Σελ.	60
Εικόνα 3.12	Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου - Σελ. 198 Μικροπείραμα Άσκησης 6 της ενότητας Β. 3.6 «Εμβαδόν κυκλικού τομέα».	Σελ.	61
Εικόνα 3.13	Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου- σελ.41 Μικροπείραμα 1ο εφαρμογής 2 της ενότητας Β.1.1 «Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας».	Σελ.	61
Εικόνα 3.14	Ερώτηση κατανόησης από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου - Σελ. 194 Ερώτηση Κατανόησης 4 της Ενότητας Β.3.5 «Εμβαδόν κυκλικού δίσκου».	Σελ.	62
Εικόνα 3.15	Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου - σελ. 124 Μικροπείραμα 1-Άσκησης 3 της ενότητας Β.1.3 «Εμβαδά επίπεδων σχημάτων».	Σελ.	62
Εικόνα 3.16	Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου- σελ.125 άσκηση 17 της ενότητας Β.1.3 «Εμβαδόν επίπεδων επιφανειών».	Σελ.	62
Εικόνα 3.17	Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου - Σελ. 118 Άσκηση 6 της ενότητας Β.1.2 «Μονάδες μέτρησης επιφανειών».	Σελ.	63
Εικόνα 3.18	Ερώτηση κατανόησης από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου σελ.194-ερώτηση κατανόησης 3 της ενότητας: Β.3.5 «Εμβαδόν κυκλικού δίσκου».	Σελ.	64
Εικόνα 3.19	Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου σελ. 198- άσκηση 6 της ενότητας: Β.3.6 «Εμβαδόν κυκλικού τομέα».	Σελ.	65

Εικόνα 3.20	Εφαρμογή από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου-σελ.121 εφαρμογή 2 της ενότητας Β.1.3 «Εμβαδόν επίπεδων επιφανειών».	Σελ.	65
Εικόνα 3.21	Εφαρμογή από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου-σελ. 220 Εφαρμογή 3 της ενότητας Β.4.4 «Η πυραμίδα και τα στοιχεία της».	Σελ.	66
Εικόνα 4.1	Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου σελ. 67- άσκηση 6 της ενότητας: Α.3.5. «Μονάδες μέτρησης».	Σελ.	70
Εικόνα 4.2	Ερώτηση κατανόησης από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου σελ. 109- ερώτηση κατανόησης 1, π.χ. α και γ, της ενότητας: Α. 6.6 «ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.6.6 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά».	Σελ.	70
Εικόνα 4.3	Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου σελ. 67- άσκηση 5 της ενότητας: Α.3.5. «Μονάδες μέτρησης».	Σελ.	72
Εικόνα 4.4	Δραστηριότητα από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου σελ.107- δραστηριότητα 3 της ενότητας: Α.6.6. «Αντιστρόφως ανάλογα ποσά».	Σελ.	72
Εικόνα 4.5	Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου σελ. 50 Μικροπείραμα 1ο – Εισαγωγική δραστηριότητα της ενότητας Α.2.6 «Διαίρεση κλασμάτων».	Σελ.	72
Εικόνα 4.6	Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου σελ. 67- άσκηση 5 της ενότητας: Α.3.5. «Μονάδες μέτρησης».	Σελ.	73
Εικόνα 4.7	Ερώτηση κατανόησης από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου σελ. 10- ερώτηση κατανόησης 1, π.χ. β, δ και στ, της ενότητας: Α.6.3 «Ανάλογα ποσά- Ιδιότητες ανάλογων ποσών».	Σελ.	74
Εικόνα 4.8	Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου - Σελ. 76 Μικροπείραμα 1ο κάτω από ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ 3, της ενότητας: Α.4.3. « Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων».	Σελ.	74
Εικόνα 4.9	Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου - Σελ. 50 Μικροπείραμα 1ο - Κύρια δραστηριότητα, της ενότητας: Α.2.6 « Διαίρεση κλασμάτων».	Σελ.	75
Εικόνα 4.10	Παράδειγμα-εφαρμογή από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου- Σελ.16 Παραδείγματα-Εφαρμογές 3ο της ενότητας: Α.1.2 «Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών».	Σελ.	76
Εικόνα 4.11	Δραστηριότητα από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου- Σελ.16- δραστηριότητα 3η της ενότητας: Α.1.2 «Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών».	Σελ.	76
Εικόνα 4.12	Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου- σελ. 107 Μικροπείραμα 1ο κάτω από τη Δραστηριότητα 3η της ενότητας Α.6.6 «Αντιστρόφως ανάλογα ποσά».	Σελ.	77
Εικόνα 4.13	Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου- Σελ. 78 Μικροπείραμα κάτω από την Άσκηση 2 της ενότητας Α.4.3. «Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων».	Σελ.	80
Εικόνα 4.14	Άσκηση από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου-σελ.37 άσκηση 11 της ενότητας Α.1.5 « Ανισώσεις α΄ βαθμού».	Σελ.	85
Εικόνα 4.15	Άσκηση από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου-σελ.82 άσκηση 5 της ενότητας Α.3.5 «Η συνάρτηση $y=a/x$ - Η Υπερβολή».	Σελ.	86
Εικόνα 4.16	Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου-σελ.24 άσκηση 3 της ενότητας Α.1.3 «Επίλυση τύπων».	Σελ.	87
Εικόνα 4.17	Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου-σελ.118 άσκηση 3 της ενότητας Β.1.3 «Εμβαδά επίπεδων σχημάτων».	Σελ.	88
Εικόνα 4.18	Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου-	Σελ.	89

	σελ.131 άσκηση 7 της ενότητας Β.1.4 «Πυθαγόρειο Θεώρημα».		
Εικόνα 4.19	Εφαρμογή από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου-σελ.153 εφαρμογή 2 της ενότητας Β.2.4 «Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30°, 45° και 60°».	Σελ.	89
Εικόνα 4.20	Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου- σελ. 57 Μικροπείραμα 2ο Άσκησης 5 της ενότητας Α.3.1 «Η έννοια της συνάρτησης».	Σελ.	90
Εικόνα 4.21	Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου-σελ.125 άσκηση 17 της ενότητας Β.1.3 «Εμβαδόν επίπεδων επιφανειών».	Σελ.	91
Εικόνα 4.22	Εφαρμογή από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου-σελ.193 Εφαρμογή 1 της ενότητας Β.3.5 «Εμβαδόν κυκλικού δίσκου».	Σελ.	91
Εικόνα 4.23	Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου- σελ.41 Μικροπείραμα δραστηριότητας 1 της ενότητας Α.2.1 «Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού».	Σελ.	93
Εικόνα 4.24	Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου- σελ.41 Μικροπείραμα 1ο εφαρμογής 2 της ενότητας Β.1.1 «Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας».	Σελ.	94
Εικόνα 4.25	Εφαρμογή από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου-σελ.121 εφαρμογή 2 της ενότητας Β.1.3 «Εμβαδόν επίπεδων επιφανειών».	Σελ.	95
Εικόνα 4.26	Παράδειγμα-εφαρμογή από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου-σελ.31 Παράδειγμα- Εφαρμογή 3 της ενότητας Α.1.2 «Μονώνυμα - Πράξεις με μονώνυμα».	Σελ.	99
Εικόνα 4.27	Παράδειγμα-εφαρμογή από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου- Σελ 114 Παράδειγμα-Εφαρμογή 2 της ενότητας Α.2.5 «Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο».	Σελ.	99
Εικόνα 4.28	Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου - σελ. 40 Μικροπείραμα Ερώτησης Κατανόησης 5 της ενότητας Α.1.4 «Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων».	Σελ.	100
Εικόνα 4.29	Άσκηση από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου - Σελ. 50 Άσκηση 17β της ενότητας Α.1.5 «Αξιοσημείωτες ταυτότητες».	Σελ.	101
Εικόνα 4.30	Παραδείγματα-Εφαρμογές από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου - Σελ. 226 Παραδείγματα-Εφαρμογές 2 της ενότητας Β.1.6 «Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων».	Σελ.	102
Εικόνα 4.31	Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου - Σελ. 226 Άσκηση 2 της ενότητας Β.1.6 «Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων».	Σελ.	102
Εικόνα 4.32	Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου - Σελ. 101 Άσκηση 1 της ενότητας Α.2.3 «Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού».	Σελ.	102
Εικόνα 4.33	Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου - Σελ. 101 Άσκηση 4 της ενότητας Α.2.3 «Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού».	Σελ.	104
Εικόνα 4.34	Παράδειγμα-εφαρμογή από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου- σελ.31 εφαρμογή 3 της ενότητας Α.1.2 «Μονώνυμα - Πράξεις με μονώνυμα».	Σελ.	107

Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως στόχο να αναλύσει τα έργα που αναφέρονται και σχετίζονται με το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του Γυμνασίου. Συγκεκριμένα, επιχειρούμε να αναλύσουμε τρία διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια που τη δεδομένη χρονική στιγμή διδάσκονται στα σχολεία της Ελλάδας.

Το εμβαδόν αποτελεί μια μαθηματική έννοια και συγκεκριμένα του κλάδου της Γεωμετρίας. Αποτελεί μία από τις μαθηματικές έννοιες με την οποία οι μαθητές έρχονται σε επαφή από την προσχολική τους ηλικία μέχρι τις τελευταίες τάξεις του Λυκείου. Αναμφισβήτητα, οι μαθητές/-τριες καλούνται να διαχειριστούν την έννοια του εμβαδού όχι μόνο στη σχολική τους ζωή αλλά και σε καθημερινές τους καταστάσεις, καθώς έχει εκτεταμένες εφαρμογές.

Ο υπολογισμός του εμβαδού μιας επιφάνειας υπήρξε αντικείμενο μελέτης για τους μαθηματικούς από αρχαιοτάτων χρόνων και συνεχίζει να απασχολεί τους μελετητές και ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών και γενικότερα των Θετικών Επιστημών εξαιτίας των εκτεταμένων εφαρμογών του. Μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει πληθώρα ερευνών που εξετάζει τις δυσκολίες των μαθητών/-τριών γύρω από την κατανόηση της έννοιας εμβαδού επίπεδων επιφανειών.

Υπάρχουν έρευνες που επισημαίνουν πως οι μαθητές/-τριες δυσκολεύονται ή αδυνατούν να κατανοήσουν το εμβαδόν καθώς το αντιλαμβάνονται διαισθητικά αλλά δεν το κατανοούν εννοιολογικά (Baturο και Nason, 1996). Άλλες έρευνες επισημαίνουν πως η δυσκολία των μαθητών/-τριών για την κατανόηση του εμβαδού επίπεδων επιφανειών έγκειται στη χρήση των μονάδων μέτρησης αλλά και στη σύγκριση ισεμβαδικών, και όχι μόνο, σχημάτων. Αξιοσημείωτο παράδειγμα αποτελεί ότι οι μαθητές/-τριες μπορούν να συγκρίνουν δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα με το ίδιο πλάτος, ενώ δεν μπορούν εύκολα να κατανοήσουν ότι η αναδιοργάνωση των επιφανειών σε διαφορετικά σχήματα δεν επηρεάζει αριθμητικά το εμβαδόν (Van de Walle, 2007).

Τα σχολικά εγχειρίδια ως οι κύριοι μεσολαβητές των στόχων και σκοπών των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών διαδραματίζουν πολύ σημαντικό ρόλο γιατί αποτέλεσαν και αποτελούν το σημαντικότερο και πιο διαδεδομένο μέσο διδασκαλίας και μάθησης στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Λόγω της σπουδαιότητάς τους ως μέσων διδασκαλίας και μάθησης στη σχολική εκπαίδευση των παιδιών, έχουν αρκετά μακρά ιστορία ως αντικείμενο έρευνας διεθνώς, καθώς διαδραματίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην εκπαιδευτική διαδικασία (Fan, 2013).

Η έρευνα γύρω από την αξιολόγηση των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών δε μετρά πολλές δεκαετίες (Κολέζα, 2009). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι δε δόθηκε η πρέπουσα σημασία στη σχέση ανάμεσα στο περιεχόμενο-δομή και των μαθησιακών συμπεριφορών, διότι ο εκπαιδευτικός θεωρούνταν ο διάυλος μεταξύ του εγχειριδίου και των μαθητών/-τριών (Remillard, 2000). Θεωρήθηκε ότι η ανάλυση περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων δε θα προσέφερε πληροφορίες σχετικά με τη μάθηση, για αυτό και η έρευνα στράφηκε στο πλαίσιο των παιδαγωγικών ικανοτήτων των εκπαιδευτικών (Κολέζα, 2009).

Αναφέρουμε ότι υπάρχουν αρκετές έρευνες που εξετάζουν και αναλύουν τα γενικά χαρακτηριστικά των έργων των σχολικών εγχειριδίων καθώς και άλλες που εστιάζουν στην ανάλυση έργων των σχολικών εγχειριδίων για συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες. Στην

ελληνική και διεθνή πραγματικότητα δεν υπάρχουν συστηματικές έρευνες οι οποίες εστιάζουν στην ανάλυση των έργων των σχολικών διαδραστικών εγχειριδίων των Μαθηματικών στην Δευτεροβάθμια εκπαίδευση στο θέμα του εμβαδού. Επιπλέον, δεν υπάρχουν συγκριτικές μελέτες που να εξετάζουν από τάξη σε τάξη την εξέλιξη της έννοιας του εμβαδού. Στην παρούσα εργασία θα αναλύσουμε τα έργα που αφορούν το εμβαδόν στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του γυμνασίου. Τα διαδραστικά σχολικά βιβλία θεωρούνται ότι προσφέρουν ευκαιρίες για «συμμετοχή, ευελιξία και εξατομίκευση» και αυτά θα αποτελούν τον προσανατολισμό του μέλλοντος. Για το λόγο αυτό η εργασία αυτή θεωρείται επίκαιρη.

Στο πρώτο Κεφάλαιο της παρούσας εργασίας επισημαίνεται η σημασία των σχολικών εγχειριδίων γενικά, και των Μαθηματικών ειδικά, όπως ακόμα γίνεται σύγκριση των έντυπων και διαδραστικών εγχειριδίων ως προς τα χαρακτηριστικά τους. Επιπλέον, γίνεται παρουσίαση από έρευνες που αναλύουν το περιεχόμενο των εγχειριδίων σε σχέση με γενικά χαρακτηριστικά αλλά και για συγκεκριμένες έννοιες των Μαθηματικών.

Το δεύτερο Κεφάλαιο περιέχει ιστορικές πληροφορίες για την έννοια του εμβαδού. Επιπλέον αναφέρεται σε έρευνες που εστιάζουν στις δυσκολίες που παρουσιάζουν οι μαθητές/-τριες στην κατανόηση της έννοιας του εμβαδού. Τέλος, παρουσιάζονται οι στόχοι των ισχυόντων και νέων Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών για τη έννοια του εμβαδού.

Ακολουθεί το τρίτο Κεφάλαιο με τη μεθοδολογία της έρευνας που ακολουθούμε. Πιο συγκεκριμένα αναφέρουμε το δείγμα της έρευνας, το εργαλείο ανάλυσης που χρησιμοποιούμε για τη συλλογή και ανάλυση των δεδομένων.

Στο τέταρτο Κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την ανάλυση των έργων σε όλες τις τάξεις, καθώς και μια συγκριτική μελέτη για όλους τους άξονες στην κάθετη ανάλυση.

Στο τελευταίο Κεφάλαιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα από την ανάλυση των δεδομένων και τα κυριότερα ευρήματα ανά ερευνητικό ερώτημα. Επιπλέον, αναφέρονται οι περιορισμοί της έρευνας καθώς και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

1.1 Σημασία σχολικών εγχειριδίων

Τα σχολικά εγχειρίδια αποτέλεσαν και αποτελούν το σημαντικότερο και πιο διαδεδομένο μέσο διδασκαλίας και μάθησης στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Λόγω της σπουδαιότητάς τους ως μέσων διδασκαλίας και μάθησης στη σχολική εκπαίδευση των παιδιών, έχουν αρκετά μακρά ιστορία ως αντικείμενο έρευνας διεθνώς, καθώς διαδραματίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην εκπαιδευτική διαδικασία (Fan, 2013). Ο τρόπος επιλογής καθώς και η χρήση του σχολικού εγχειριδίου ποικίλει από χώρα σε χώρα. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι σε κάποια εκπαιδευτικά συστήματα δεν κατέχει κύριο ρόλο και η χρήση του δεν κρίνεται τόσο επιτακτική, ενώ σε κάποια άλλα εκπαιδευτικά συστήματα το σχολικό εγχειρίδιο κατέχει βαρύνουσα σημασία και η χρήση του θεωρείται απαραίτητη. Υπάρχουν χώρες που αντιτίθενται με την εξάρτηση από τα σχολικά βιβλία όπως είναι η Φινλανδία και η Μ. Βρετανία (Κουλουμπαρίτση, 2015). Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, το σχολικό εγχειρίδιο έπαιξε πάντα σημαντικό ρόλο στην εκπαιδευτική διαδικασία, κατέχοντας κεντρική θέση σε αυτήν και αποτελώντας το βασικό διδακτικό μέσο. Σε κάθε εκπαιδευτική βαθμίδα, στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, χρησιμοποιείται ένα δεσμευτικό σχολικό εγχειρίδιο που έχει καθοριστεί από το Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα σχολικά εγχειρίδια διαφέρουν και διακρίνονται από άλλα εγχειρίδια. Αυτό συμβαίνει γιατί έχουν ιδιαίτερα τεχνικά χαρακτηριστικά, συγκεκριμένους τρόπους που θα επιλεγεί και θα παρουσιαστεί η πληροφορία και η γνώση, καθώς η αποστολή τους είναι στοχευμένη. Επομένως, το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων άλλοτε εναρμονίζεται με το πολιτισμικό υπόβαθρο κάποιων κοινωνικών ομάδων και άλλοτε όχι (Κουλουμπαρίτση, 2015). Έτσι, σε περίοδο εκπαιδευτικών μεταρρυθμίσεων και αλλαγών το σχολικό εγχειρίδιο αποτέλεσε και αποτελεί μεγάλο διακύβευμα.

Πριν αναφερθούμε στη σημασία των σχολικών εγχειριδίων θα γίνει μια προσπάθεια εννοιολογικής αποσαφήνισης του όρου σχολικό εγχειρίδιο και σχολικό βιβλίο. Οι όροι σχολικό εγχειρίδιο και σχολικό βιβλίο αρκετές φορές συγχέονται ή χρησιμοποιούνται ταυτόσημα. Όπως υποστηρίζουν οι Καψάλης & Χαραλάμπους (2008), υπάρχουν διαφορές στη σημασία των δυο όρων. Στην Ελλάδα όταν αναφερόμαστε στο σχολικό βιβλίο εννοούμε το βιβλίο μαθητή που μπορεί να συνοδεύεται με το τετράδιο εργασιών και το βιβλίο του εκπαιδευτικού (Κουλουμπαρίτση, 2015). Τον κυριότερο ρόλο από αυτά παίζει το βιβλίο του μαθητή γιατί καθοδηγεί τη διδασκαλία οποιουδήποτε μαθήματος στην εκπαιδευτική διαδικασία. Το σχολικό εγχειρίδιο από την άλλη, σύμφωνα με τον Ξωχέλλη (2005), έχει μια πιο πληρέστερη εικόνα για κάποιο γνωστικό αντικείμενο. Στην αγγλόφωνη βιβλιογραφία ο όρος που συναντάται είναι «textbook».

Το σχολικό βιβλίο ή εγχειρίδιο έχει πολλαπλές λειτουργίες και για αυτό θα πρέπει να είναι αποτέλεσμα διεπιστημονικού σχεδιασμού και αξιολόγησης (Κουλουμπαρίτση, 2015).

Τα σχολικά εγχειρίδια, σύμφωνα με τους Καψάλη & Χαραλάμπους (2008), έχουν δομή με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των οποίων διαφέρουν από τα υπόλοιπα βιβλία που τα σημαντικότερα αυτών είναι:

1. Ο τρόπος που θα παρουσιαστεί η διδακτέα ύλη όπως έχει οριστεί από το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών. Αυτό μπορεί να γίνει μέσω γραπτού κειμένου, εικόνων-διαγραμμάτων, επιστημονικών τύπων και συμβόλων.

2. Τα μέρη της ύλης τα οποία οι μαθητές/-τριες θα πρέπει να κατανοήσουν.
3. Οι ασκήσεις/δραστηριότητες που θα απαρτίζονται τα σχολικά εγχειρίδια μπορεί να έχουν σκοπό την εμπέδωση, εξάσκηση, αξιολόγηση και τον έλεγχο της επίτευξης των εκπαιδευτικών και μαθησιακών στόχων που έχουν τεθεί.
4. Οδηγίες, συμβουλές και στοιχεία που βοηθούν τους μαθητές/-τριες να οργανώσουν καλύτερα τη μελέτη τους και να καταφέρουν να λειτουργούν με αυτονομία.

Όπως προαναφέρθηκε, τα σχολικά εγχειρίδια έχουν πολλαπλούς ρόλους και λειτουργίες στο εκάστοτε εκπαιδευτικό σύστημα. Σύμφωνα με την Κουλουμπαρίτση (2015), οι βασικότεροι ρόλοι των σχολικών εγχειριδίων είναι οι εξής:

1. Παιδαγωγικός ρόλος, σύμφωνα με τον οποίο η επιστημονική γνώση πρέπει να εναρμονίζεται και να παρουσιάζεται ανάλογα με την ηλικία και τις ικανότητες των μαθητών.
2. Επιστημονικός ρόλος, ο τρόπος δηλαδή που μεταφέρεται η έγκυρη επιστημονική γνώση σε οποιοδήποτε γνωστικό αντικείμενο.
3. Ιδεολογικός ρόλος, έγκειται στη συμβολή της διαμόρφωσης αξιών, στάσεων όπως και αντιλήψεων.
4. Αισθητικός ρόλος, δηλαδή ο τρόπος που έχουν δημιουργηθεί και σχεδιαστεί τα σχολικά εγχειρίδια συνεισφέρουν στην αισθητική καλλιέργεια των μαθητών.
5. Κοινωνικοποιητικός ρόλος, δηλαδή τα σχολικά εγχειρίδια συνδέουν τους μαθητές/-τριες σε ένα πλαίσιο με κοινές συνθήκες μόρφωσης και μαθησιακών εμπειριών.
6. Οικονομικός ρόλος, διανέμονται δωρεάν.
7. Τεχνικο-εκδοτικός ρόλος, που αναφέρεται γενικότερα στον τρόπο που δομείται ένα σχολικό εγχειρίδιο.

Τα σχολικά εγχειρίδια, ως τα κυριότερα και σημαντικότερα εκπαιδευτικά μέσα, καλούνται να επιτελέσουν δυο πολύ απαιτητικούς και φιλόδοξους στόχους. Συγκεκριμένα να υποστηρίξουν τόσο τη διαδικασία της διδασκαλίας όσο και της μάθησης. Στο σημείο αυτό θα αναφέρουμε τις λειτουργίες των σχολικών εγχειριδίων και τον ωφέλιμο ρόλο ή σημασία που μπορούν να διαδραματίσουν στους δυο τομείς, της μάθησης και της διδασκαλίας.

Ως μέσο διδασκαλίας τα σχολικά εγχειρίδια (Κουλουμπαρίτση, 2015):

- έχουν καθιερωθεί στη σχολική τάξη ως το κυρίαρχο και σημαντικότερο μέσο διδασκαλίας,
- αποδίδουν με παιδαγωγικό τρόπο τις απαιτήσεις του αναλυτικού προγράμματος σπουδών, την επίσημη εκπαιδευτική φιλοσοφία και τις παιδαγωγικές αρχές με τις οποίες αυτό συνάδει,
- κατευθύνουν τον καθηγητή/-τρια και το μαθητή/-τρια κατά την εκπαιδευτική διαδικασία,
- αποτελούν πηγή πληροφόρησης και ενημέρωσης,
- ενημερώνουν τους γονείς αναφορικά με την ποσότητα και το είδος των γνώσεων που θα διδαχθούν οι μαθητές,
- δίνουν κίνητρα μάθησης ανάλογα με τα ενδιαφέροντα των μαθητών/-τριών,
- βοηθούν τον εκπαιδευτικό να διαφοροποιήσει ή/και να εξατομικεύσει τη διδασκαλία του (Ξωχέλλης, 2005),
- συνεισφέρουν στη μοντελοποίηση της διδασκαλίας και της προσδίδουν δομή και συνοχή και
- μεταφέρουν την επιστημονική γνώση μέσω των κειμένων, των εικόνων και των γραφικών αναπαραστάσεων.

Ως μέσο μάθησης τα σχολικά εγχειρίδια (Κουλουμπαρίτση, 2015):

- παρέχουν την ουσιαστική επιστημονική γνώση,
- παρέχουν δραστηριότητες στους μαθητές/-τριες, ανάλογα με τον παιδαγωγικό στόχο που καλούνται να επιτελέσουν (για παράδειγμα, εμπέδωση, εφαρμογή ή δημιουργική επέκταση), τον στόχο του γνωστικού αντικείμενου, τον βαθμό δυσκολίας, τα ενδιαφέροντα των μαθητών/-τριών,
- παρέχουν ευκαιρίες αυτομάθησης και αυτοαξιολόγησης,
- δίνουν ευκαιρίες στους μαθητές/-τριες για συνεργασία μεταξύ τους και
- διαμορφώνουν κουλτούρα μάθησης σε ένα γνωστικό αντικείμενο και γενικότερα σε ένα εκπαιδευτικό σύστημα.

Οι λειτουργίες των σχολικών εγχειριδίων τόσο στον τομέα της διδασκαλίας όσο και της μάθησης δεν έχουν την ίδια βαρύτητα, δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά αλληλεπικαλύπτονται. Αναμφισβήτητα, όταν ένα σχολικό εγχειρίδιο επιτελεί σε υψηλό ποσοστό τις λειτουργίες του, αυτό έχει ως αποτέλεσμα να έχουμε ένα ποιοτικό εκπαιδευτικό υλικό και συνακόλουθα αυτό λειτουργεί θετικά στη διδασκαλία και τη μάθηση.

1.2 Σημασία σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών

Τα σχολικά Μαθηματικά καθώς και το περιεχόμενό τους, το οποίο περιγράφεται από το πρόγραμμα σπουδών των Μαθηματικών, αποτελεί ένα σύνθετο πολιτισμικό συνδυασμό και προϊόν, με την έννοια ότι περιλαμβάνει ή διαφορετικά συνδυάζει την επιστήμη, την ιδεολογία και την παιδαγωγική (Κολέζα, 2009). Τα εγχειρίδια ως οι μετακομιστές των σκοπών και στόχων των προγραμμάτων σπουδών, κάτω από κοινωνικές και πολιτικές συνθήκες, παρέχουν το μεγαλύτερο μέρος της πληροφορίας και γνώσης. Ανεξαρτήτως ποιού προγράμματος σπουδών εφαρμόζεται ως πρακτική, αυτή δε διαχωρίζεται από τις πρακτικές δραστηριότητες του εκπαιδευτικού αλλά εμπλουτίζεται και τεκμηριώνεται μέσω αυτών.

Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα εφαρμόζονται τα νέα διαθεματικά προγράμματα σπουδών. Τα βασικά χαρακτηριστικά τους είναι ότι βασίζονται στις διερευνητικές και ολιστικές προσεγγίσεις, προωθούν την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης, τις δεξιότητες για συνεργασία και ισχυρίζονται ότι η μάθηση είναι μια δημιουργική διαδικασία (Κολέζα, 2009). Τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών εκπροσωπούν τη φιλοσοφία πίσω από τη συγκρότηση των προγραμμάτων σπουδών, τα οποία διέπουν τις εξής αρχές:

- Οι μαθητές/-τριες μαθαίνουν Μαθηματικά μέσω της αλληλεπίδρασης, της έρευνας αλλά και των προκλήσεων.
- Οι μαθητές/-τριες μαθαίνουν Μαθηματικά στα πλαίσια της γενικότερης νοητικής, φυσικής και κοινωνικής τους ανάπτυξης.
- Οι μαθητές/-τριες μαθαίνουν καλύτερα όταν έχουν κίνητρα για μάθηση.
- Η μάθηση των Μαθηματικών πρέπει να συμπεριλάβει έρευνα γύρω από μοτίβα, σχέσεις, διαδικασίες και προβλήματα.
- Οι μαθητές/-τριες μαθαίνουν καλύτερα όταν δίνεται έμφαση σε συναισθηματικούς και πολιτισμικούς παράγοντες.

Στα σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, η μελέτη των Μαθηματικών υποστηρίζεται συνήθως από σχολικά βιβλία, με κάθε μαθητή/-τρια να έχει στην κατοχή του ένα προκαθορισμένο για όλη τη διάρκεια του σχολικού έτους. Το επιλεγμένο εγχειρίδιο Μαθηματικών αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών. Η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών που διδάσκουν Μαθηματικά ακολουθούν

το συγκεκριμένο εγχειρίδιο. Το περιεχόμενο και οι ασκήσεις που απαρτίζουν ένα εγχειρίδιο Μαθηματικών, αποτελούν την κύρια βάση για το πρόγραμμα σπουδών που εφαρμόζεται σε ένα σχολείο. Όπως επισημαίνεται από τους Shield & Dole (2013), διαπιστώθηκε ότι τα σχολικά βιβλία υπολείπονται όσον αφορά τον τρόπο που υιοθετούν ολιστικά το πεδίο εφαρμογής των εθνικών προγραμμάτων σπουδών.

Συνοψίζοντας θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων είναι πολλαπλός και συνεπώς η επιλογή και η εφαρμογή του έχει ιδιαίτερη και βαρύνουσα σημασία. Αυτό συμβαίνει γιατί τα σχολικά εγχειρίδια (Κολέζα, 2009):

- Καθοδηγούν τη διδασκαλία αφού προσδιορίζουν το περιεχόμενο που θα διδαχθεί.
- Έχουν οργάνωση και συνοχή.
- Χρησιμεύουν ως πηγή ιδεών για το πώς θα διδαχθεί μια ενότητα αλλά και αν μπορεί να διαφοροποιηθεί.
- Δομούν το τι θεωρείται «Μαθηματικά» και τι «γνωρίζω Μαθηματικά».
- Δίνουν τη δυνατότητα επιλογής τι θα αξιολογηθεί άμεσα ή έμμεσα.
- Ορίζουν το διάβασμα του μαθητή/-τριας και τη σχολική εργασία.
- Μεταφέρουν πληροφορίες στους γονείς των μαθητών/-τριών σχετικά με το τι διδάχθηκε ή θα διδαχθεί.
- Καθορίζουν σε μεγάλο ποσοστό τις ευκαιρίες μάθησης που μπορούν να έχουν οι μαθητές/-τριες. Ως «ευκαιρία μάθησης» (Opportunity to Learn – OTL) ορίζεται το αν οι μαθητές/-τριες κατάφεραν μέσω της εκπαίδευσής τους να αποκτήσουν ικανότητες που έχουν τεθεί από συγκεκριμένους στόχους (Wijaya, van den Heuvel – Panhuizen & Doorman, 2015).

Επομένως, συνοψίζοντας τους ρόλους που θα μπορούσε εν δυνάμει να επιτελέσει ένα σχολικό εγχειρίδιο για να χαρακτηριστεί ως καλό ή κακό, θα επισημαίναμε το εξής: «καλό» εγχειρίδιο θεωρείται εκείνο που προάγει τη συνεργασία ανάμεσα σε εκπαιδευτικό και μαθητές/-τριες, συμβάλλει στην καλλιέργειά τους και στην ανάπτυξη της δημιουργικότητάς τους, υποστηρίζει τον εκπαιδευτικό και δεν τον περιορίζει (Καψάλης & Χαραλάμπους, 1995; Λυμπεροπούλου & Παπαδάκη, 2008).

1.3 Έντυπο και διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο

Η ένταξη των Τεχνολογιών Πληροφορίας και Επικοινωνιών στην εκπαίδευση με δυναμικά συστήματα πληροφοριών τα οποία είναι βασισμένα σε γνώσεις αλλά και δεξιότητες, τα τελευταία χρόνια είναι ραγδαία. Η διαδικασία έκδοσης αλλά και συγγραφής των ακαδημαϊκών εγχειριδίων αλλάζει με ταχύτατους ρυθμούς. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να εμφανιστεί μια καινούργια κατηγορία βιβλίων σε ψηφιακή μορφή με αρκετές διαφοροποιήσεις αναφορικά με τη διάθεση. Η ανάπτυξη καθώς και η χρήση ψηφιακών εγχειριδίων καθίσταται ως ένας αναδυόμενος και σημαντικός τομέας που θα απασχολήσει τη μελλοντική κατεύθυνση της έρευνας Μαθηματικών (Fan et al., 2013). Αξίζει περαιτέρω έρευνας, δεδομένου ότι τα δυνατά και αδύνατα σημεία των ψηφιακών εγχειριδίων των Μαθηματικών δεν έχουν αποκωδικοποιηθεί πλήρως, όπως υποστηρίζει ο Kilpatrick (2014) σε μια ανασκόπηση που πραγματοποίησε που αφορά στην ιστορία της εξέλιξης των Μαθηματικών σχολικών εγχειριδίων. Με την έλευση του ηλεκτρονικού βιβλίου, η συμβατική τεχνολογία έχει αποκτήσει διαφορετική αξία. Οι δυνατότητες που έχουν ο ηλεκτρονικός λόγος αλλά και οι εικόνες, έχουν αλλάξει τον τρόπο που αντιμετωπίζουμε και αναθεωρούμε το έντυπο βιβλίο. Τα διαδραστικά σχολικά βιβλία θεωρούνται ότι προσφέρουν ευκαιρίες για

«συμμετοχή, ευελιξία και εξατομίκευση», γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με την καθιερωμένη μέχρι τώρα αποδοχή των έντυπων και παραδοσιακών σχολικών εγχειριδίων (Yerushalmy, 2014). Παρά όλα αυτά, ο Yerushalmy (2014) εξηγεί πως έχουν πραγματοποιηθεί λίγες μελέτες για το πώς οι μαθητές χρησιμοποιούν τα σχολικά βιβλία καθώς επίσης δεν ξέρουμε πολλά για το πώς οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές/-τριες εκμεταλλεύονται τις νέες ευκαιρίες που παρέχονται από διαδραστικές ψηφιακές μορφές (Rezat, 2013). Έτσι, η μέχρι τώρα έντυπη μορφή των βιβλίων δοκιμάζεται και αξιολογείται. Παράλληλα όμως δοκιμάζονται και αξιολογούνται οι διαφοροποιήσεις της ψηφιακής μορφής γενικά στο χώρο του βιβλίου.

Η αγορά ενός ηλεκτρονικού βιβλίου δε μετρά πολλά χρόνια που αναδύθηκε και σε αυτό συνέβαλε η ραγδαία εξέλιξη της τεχνολογίας που σκοπό έχει να βελτιώσει τις αναγνωστικές δυνατότητες και όχι μόνο. Αξίζει να τονιστεί ότι αρχικά τα ψηφιακά βιβλία θεωρήθηκαν ως νεωτερισμός. Όπως επισημαίνεται από τις Ιωακειμίδου & Παπαδημητρίου (2018), τα ηλεκτρονικά βιβλία αντιπροσώπευαν μόνο το 1% όλων των βιβλίων, εκτός από το Ηνωμένο Βασίλειο με πωλήσεις που έφταναν το 4% ενώ οι ψηφιακές τους το 8%. Μελλοντικά είναι δύσκολο να προβλέψουμε την εξέλιξη σχετικά με τις προτιμήσεις των αναγνωστών των βιβλίων είτε έντυπων είτε ψηφιακών γιατί αυτό εξαρτάται από πολλούς παράγοντες (Ιωακειμίδου & Παπαδημητρίου, 2018).

Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, το «Νέο Σχολείο» ενστερνίζεται τη διαφοροποιημένη παιδαγωγική και προτάσσει τη χρήση ποικίλων διδακτικών προσεγγίσεων, υλικών και μέσων (Κουλουμπαρίτση, 2015). Στο πλαίσιο αυτό τα ήδη ψηφιοποιημένα σχολικά βιβλία, εντάχθηκαν στην πλατφόρμα του ΥΠΑΙΘ «Ψηφιακό Σχολείο», εμπλουτίστηκαν με περαιτέρω υλικό και εξελίχθηκαν σε διαδραστικό υλικό (Κουλουμπαρίτση, 2015). Ενδεικτικά παραδείγματα για όλα τα γνωστικά αντικείμενα είναι διαθέσιμα στη διεύθυνση: <http://ebooks.edu.gr/ebooks>

Το ηλεκτρονικό ή ψηφιακό βιβλίο ή ο αγγλικός όρος e-book, είναι ένα βιβλίο το οποίο έχει ψηφιακή μορφή. Η ανάγνωσή του πραγματοποιείται από υπολογιστή, κινητό τηλέφωνο ή κάποια άλλη κινητή/ηλεκτρονική συσκευή. Το ψηφιακό βιβλίο σύμφωνα με τις Ιωακειμίδου & Παπαδημητρίου (2018) μπορεί να είναι:

- ένα πιστό αντίγραφο του έντυπου εγχειριδίου,
- ένα αντίγραφο του έντυπου εγχειριδίου με κάποιες ομοιότητες,
- εμπλουτισμένο με διάφορα πολυμεσικά χαρακτηριστικά,
- κείμενο με υπερσυνδέσμους,
- κάποιο λογισμικό το οποίο να παρέχει πρόσβαση σε άλλα ψηφιακά κείμενα,
- συσκευή με συγκεκριμένο λειτουργικό σύστημα.

Συγκρίνοντας ένα έντυπο και ένα ψηφιακό σχολικό εγχειρίδιο μπορούμε να εντοπίσουμε κάποιες αξιοσημείωτες διαφορές μεταξύ τους. Όσον αφορά το ψηφιακό βιβλίο μπορούμε να πούμε ότι έχει βοηθήσει σε πολύ σημαντικό βαθμό στον περιορισμό της ρύπανσης του περιβάλλοντος καθώς δε χρειάζεται η εκμετάλλευση των φυσικών πόρων για την παραγωγή χαρτιού που χρειάζεται για την παραγωγή των έντυπων βιβλίων. Τα eBooks επιπλέον βοηθούν στην εξοικονόμηση του κόστους εκτύπωσης από τις εκδοτικές εταιρείες. Τα περισσότερα πλεονεκτήματα βέβαια συνδέονται με τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών εγχειριδίων. Πιο συγκεκριμένα, δίνεται η δυνατότητα εύρεσης περαιτέρω πληροφοριών σε άλλα κείμενα με υπερσυνδέσμους που είναι ενσωματωμένοι σε αυτά (Ιωακειμίδου & Παπαδημητρίου, 2018). Επίσης, η ποικιλομορφία που παρέχει ένα ηλεκτρονικό βιβλίο με το

συνδυασμό εικόνων, κειμένων, ήχων αλλά και βίντεο, δίνει τη δυνατότητα πρόσβασης σε πληροφορίες σε άτομα με μαθησιακές δυσκολίες αλλά και ιδιαιτερότητες (Liu, 2005). Όλα αυτά έχουν ως αποτέλεσμα οι αναγνώστες να καλλιεργήσουν ή ακόμα και να αναπτύξουν δεξιότητες να διαχειριστούν ένα διαδραστικό περιβάλλον (Ιωακειμίδου & Παπαδημητρίου, 2018).

Όσον αφορά τα μειονεκτήματα που έχουν τα ψηφιακά εγχειρίδια θα μπορούσαμε να πούμε ότι ένα από τα βασικότερα μειονεκτήματα σε σύγκριση με το έντυπο βιβλίο, είναι ότι αυτά δεν είναι πάντοτε διαθέσιμα και προσβάσιμα από όλους (Ιωακειμίδου & Παπαδημητρίου, 2018). Επιπροσθέτως, όπως προαναφέρθηκε, στα ψηφιακά βιβλία παρέχεται η πρόσβαση σε πληθώρα πληροφοριών που αυτό όμως μπορεί να αποσπάσει την προσοχή του αναγνώστη/-στριας. Ένα ακόμα ζήτημα που τίθεται είναι η αξιοπιστία των πληροφοριών που παρέχονται. Στο έντυπο βιβλίο ο καθένας μπορεί να κρατήσει οποιαδήποτε σημείωση χωρίς να απαιτείται ο αναγνώστης να κατέχει κάποιες δεξιότητες χρήσης κάποιου λογισμικού ή εφαρμογής (Ιωακειμίδου & Παπαδημητρίου, 2018). Αναμφισβήτητα, με τη ραγδαία εξέλιξη της τεχνολογίας η αγορά νέας συσκευής μπορεί να είναι απαραίτητη.

Συνοψίζοντας λοιπόν, ο εμπλουτισμός των σχολικών εγχειριδίων με διάφορα μέσα, ζωντανών παραδειγμάτων, εφαρμογών, βίντεο και προσομοιώσεων μπορεί να λειτουργήσει ευεργετικά τόσο στη διδασκαλία όσο και στη μάθηση. Αυτό συμβαίνει γιατί με αυτό τον τρόπο η διδακτέα ύλη των μαθημάτων οπτικοποιείται και έχει κάποιο δυναμισμό, το οποίο μόνο θετικά μπορεί να λειτουργήσει και χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν τα μαθήματα των Φυσικών Επιστημών. Στο πλαίσιο αυτό ο ρόλος του εκπαιδευτικού πρέπει να αναθεωρηθεί.

1.4 Ενδεικτικές έρευνες για την ανάλυση σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση

Η έρευνα γύρω από την αξιολόγηση των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών δε μετρά πολλές δεκαετίες (Κολέζα, 2009). Υπάρχουν αρκετοί λόγοι για αυτό. Ένας από τους σημαντικότερους λόγους για την περιορισμένη έρευνα θα μπορούσε να είναι το γεγονός ότι δε δόθηκε η δέουσα σημασία στη σχέση ανάμεσα στο περιεχόμενο-δομή και των μαθησιακών συμπεριφορών, διότι ο εκπαιδευτικός θεωρούνταν ο δίαυλος μεταξύ του εγχειριδίου και των μαθητών/-τριών (Remillard, 2000). Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να θεωρηθεί ότι η ανάλυση περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων δε θα προσέφερε πληροφορίες σχετικά με τη μάθηση, για αυτό και η έρευνα στράφηκε στο πλαίσιο των παιδαγωγικών ικανοτήτων των εκπαιδευτικών (Κολέζα, 2009). Στις αρχές της δεκαετίας '90, είχαν πραγματοποιηθεί πολλές έρευνες που έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί στηρίζονται σε μεγάλο ποσοστό στα εγχειρίδια για να σχεδιάσουν τη διδασκαλία τους και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι διαδραματίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην ποιότητα της μάθησης (Κολέζα, 2009). Το ενδιαφέρον για τα σχολικά εγχειρίδια έγινε πιο έντονο όταν δημοσιεύτηκαν τα αποτελέσματα του TIMSS (Κολέζα, 2009).

Στην παρούσα εργασία έχει πραγματοποιηθεί μια βιβλιογραφική ανασκόπηση, όπου η βιβλιογραφία που ερευνήθηκε, επιλέγεται από διαφορετικές πηγές δεδομένων, συμπεριλαμβανομένων κυρίως άρθρων περιοδικών. Μετά την ανασκόπηση, η εργασία κατηγοριοποιεί τις έρευνες σε δυο τομείς, ο πρώτος τομέας αναφέρεται σε έρευνες για την

ανάλυση σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών ως προς τα γενικά χαρακτηριστικά τους και ο δεύτερος για συγκεκριμένα θέματα μαθηματικού περιεχομένου και εννοιών.

1.4.1 Έρευνες που αφορούν τα γενικά χαρακτηριστικά των έργων των σχολικών εγχειριδίων

Οι Fan, Zhu & Miao (2013) πραγματοποίησαν μια βιβλιογραφική ανασκόπηση στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών που στόχευε τη συστηματική εξέταση, ανάλυση καθώς και επανεξέταση της έρευνας για τον εντοπισμό μελλοντικών κατευθύνσεων σε αυτό το πεδίο έρευνας. Αυτή η ανασκόπηση εξέταζε άρθρα που κατηγοριοποιήθηκαν με βάση τέσσερις πυλώνες:

- Βιβλιογραφία για το ρόλο των σχολικών βιβλίων στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Αυτή η κατηγορία είναι απαραίτητη για να αντικατοπτρίζει την εστίαση και τη συζήτηση των περισσότερων φιλοσοφικών ή μη εμπειρικών άρθρων που επικεντρώνονται στο ρόλο των σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών
- Μελέτες που επικεντρώνονται στην ανάλυση των σχετικών χαρακτηριστικών των υπό μελέτη εγχειριδίων Μαθηματικών και, στην περίπτωση σύγκρισης σχολικών βιβλίων, στη σύγκριση των ομοιοτήτων και των διαφορών δύο ή περισσότερων σειρών εγχειριδίων Μαθηματικών. Η ανάλυση σχολικών βιβλίων είναι ένας ευρύς όρος που περιλαμβάνει κυρίως (1) ανάλυση ενός μεμονωμένου εγχειριδίου ή μιας σειράς σχολικών βιβλίων, η οποία συχνά εστιάζει στον τρόπο αντιμετώπισης ενός θέματος ή θεμάτων ή στο πώς μια συγκεκριμένη ιδέα ή πτυχή ενδιαφέροντος αντανακλάται στα σχολικά βιβλία, και (2) ανάλυση διαφορετικών σειρών σχολικών βιβλίων από την ίδια χώρα ή, συχνότερα, διαφορετικές χώρες, συχνά με έμφαση στον εντοπισμό των ομοιοτήτων και των διαφορών τους.
- Μελέτες που επικεντρώνονται στον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται τα σχολικά βιβλία από εκπαιδευτικούς ή/και μαθητές, με άλλα λόγια, πώς τα σχολικά βιβλία διαμορφώνουν τον τρόπο διδασκαλίας και εκμάθησης των Μαθηματικών.
- Συμπεριλαμβάνονται σε γενικές γραμμές όλες οι άλλες μελέτες, όπως αυτές για τα ηλεκτρονικά εγχειρίδια και για τη σχέση μεταξύ των σχολικών βιβλίων και των επιδόσεων των μαθητών/-τριών.

Οι ίδιοι ερευνητές επιχειρούν να αναλύσουν τα εγχειρίδια με βάση τους εξής πυλώνες: τον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζονται θέματα Μαθηματικών στα σχολικά εγχειρίδια, τις γνωστικές δεξιότητες που απαιτούνταν από τα βιβλία, τα πολιτισμικά χαρακτηριστικά (όπως το φύλο, η εθνικότητα, η κουλτούρα), την σύγκριση και αξιολόγηση διαφορετικών εγχειριδίων και τέλος σε μεθοδολογικά ζητήματα, δηλαδή τον τρόπο που θα πρέπει να αναλυθούν τα εγχειρίδια ώστε να βοηθήσουν σε περαιτέρω έρευνα και δράση.

Η συγκεκριμένη έρευνα αποκάλυψε ότι έχει πραγματοποιηθεί μεγάλη έρευνα σχετικά με την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων και πως αυτό βοηθάει στη διαδικασία της διδασκαλίας και της μάθησης.

Κάποιοι ερευνητές προσπαθώντας να ανακαλύψουν πως τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών σε διάφορες χώρες διαμορφώνουν τις ευκαιρίες μάθησης, χρησιμοποιούν ποικίλους τρόπους. Αξίζει να τονίσουμε πως δεν έχει προκύψει μια κοινή προσέγγιση που να αφορά στην αξιολόγηση και σύγκριση των ευκαιριών μάθησης καθώς επίσης υπάρχει

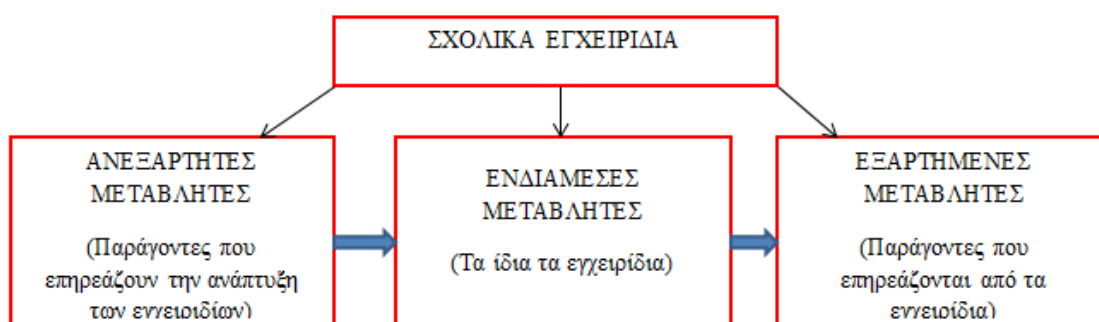
ασυμφωνία μεταξύ με το τι μπορεί να διδαχθεί κανείς από την ανάλυση των Μαθηματικών εγχειριδίων (Charalambous, Delaney, Hsu & Mesa, 2010).

Στην εργασία του Fan (2013) επισημαίνεται ότι για να διερευνηθούν ερευνητικά ζητήματα και μέθοδοι έρευνας σχολικών Μαθηματικών βιβλίων είναι θεμελιώδες να θεωρήσουμε τα σχολικά εγχειρίδια ως μεταβλητές. Τα σχολικά βιβλία ως αντικείμενο έρευνας δεν αφορά μόνο το πώς είναι τα χαρακτηριστικά των σχολικών βιβλίων, αλλά και πώς επηρεάζονται από άλλους παράγοντες και πώς αυτά επηρεάζουν άλλους παράγοντες. Οπότε στο πλαίσιο αυτό μπορούμε να εντοπίσουμε και να διερευνήσουμε τα ζητήματα της έρευνας σχολικών βιβλίων στους ακόλουθους τρεις γενικούς τομείς:

α) θέματα σχετικά με τα ίδια τα σχολικά βιβλία, δηλαδή τα σχολικά βιβλία ως αντικείμενο έρευνας,

β) ζητήματα σχετικά με το πώς διαφορετικοί παράγοντες επηρεάζουν την ανάπτυξη ή την παραγωγή σχολικών βιβλίων ή τη δημιουργία σχολικών βιβλίων και

γ) θέματα σχετικά με το πώς επηρεάζονται άλλοι παράγοντες από τα σχολικά βιβλία.



Σχήμα 1.1: Τα σχολικά βιβλία θεωρούνται ως μια ενδιάμεση μεταβλητή στο πλαίσιο της εκπαίδευσης.

Μια επιπλέον εργασία των O'Halloran, Beezer & Farmer (2018), υιοθετεί μια πολυτροπική προσέγγιση στα εγχειρίδια ψηφιακών Μαθηματικών, έντυπα και διαδικτυακά, για να διερευνήσει πώς ο σχεδιασμός, το περιεχόμενο και τα χαρακτηριστικά διευκολύνουν την κατασκευή μαθηματικών γνώσεων για σκοπούς διδασκαλίας και μάθησης. Συγκεκριμένα, τα ηλεκτρονικά εγχειρίδια ψηφιακών μαθηματικών επιτρέπουν την παρουσίαση και τη σύνδεση της μαθηματικής γνώσης με πολλούς και νέους τρόπους. Για παράδειγμα, το μαθηματικό περιεχόμενο στην ηλεκτρονική έκδοση συνδέεται με ορισμούς, θεωρήματα, παραδείγματα και ασκήσεις που μπορούν να προβληθούν στο αρχικό πλαίσιο στο οποίο παρουσιάστηκε το υλικό και το περιεχόμενο μπορεί επίσης να συνδεθεί με λογισμικό μαθηματικών.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι αναπαραστάσεις διαδραματίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στα σχολικά εγχειρίδια αφού αποτελούν μέσο για τη διδασκαλία αλλά και τη μάθηση των Μαθηματικών. Στα σχολικά εγχειρίδια παρατηρείται πολλές φορές να χρησιμοποιούνται με διαφορετικούς τρόπους πληθώρα μορφών μιας αναπαράστασης. Αυτό επηρεάζει τη διαδικασία της μάθησης αλλά και τη διδασκαλία. Επιπλέον, επηρεάζεται και η ικανότητα των μαθητών/-τριών να λύσουν ένα πρόβλημα. Σύμφωνα με τον Duval (2006), το μαθηματικό συνεπώς και το γεωμετρικό αντικείμενο αναδύεται και αποδίδεται μέσα από τις σχέσεις και τις αλληλεπιδράσεις των αναπαραστάσεων.

Οι Pepin και Haggarty (2001) στη μελέτη που πραγματοποίησαν σχετικά με τη χρήση των σχολικών βιβλίων Μαθηματικών στις αγγλικές, γαλλικές και γερμανικές τάξεις υιοθέτησαν μια προσέγγιση στην ανάλυση του περιεχομένου και της δομής των σχολικών εγχειριδίων. Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση, η ανάλυση του περιεχομένου και της δομής των σχολικών εγχειριδίων επικεντρώνεται στις ακόλουθες περιοχές: τις μαθηματικές προθέσεις, τις παιδαγωγικές προθέσεις, τα κοινωνιολογικά χαρακτηριστικά των σχολικών εγχειριδίων και τις πολιτισμικές παραδόσεις που εκπροσωπούνται στα σχολικά εγχειρίδια.

- Οι μαθηματικές προθέσεις των εγχειριδίων αναφέρονται στα στοιχεία που αποτελούν τη βάση περιεχομένου του βιβλίου, δηλαδή τα μαθηματικά θέματα που παρουσιάζονται σε αυτά και στον τρόπο συγκρότησης της μαθηματικής γνώσης, καθώς και στις πεποιθήσεις που προωθούνται για τη φύση των Μαθηματικών.
- Οι παιδαγωγικές προθέσεις αναφέρονται στους τρόπους με τους οποίους ενισχύεται ή όχι η μάθηση από τον τρόπο που παρουσιάζεται το μαθηματικό περιεχόμενο του εγχειριδίου.
- Κοινωνιολογικά χαρακτηριστικά αναφέρονται σε κοινωνιολογικά στοιχεία που επηρεάζουν τους συγγραφείς και αναγνώστες εγχειριδίων.
- Πολιτισμικές παραδόσεις: στα σχολικά βιβλία αποτυπώνονται χαρακτηριστικά που σχετίζονται με τις πολιτισμικές παραδόσεις και τα στερεότυπα μια χώρας.

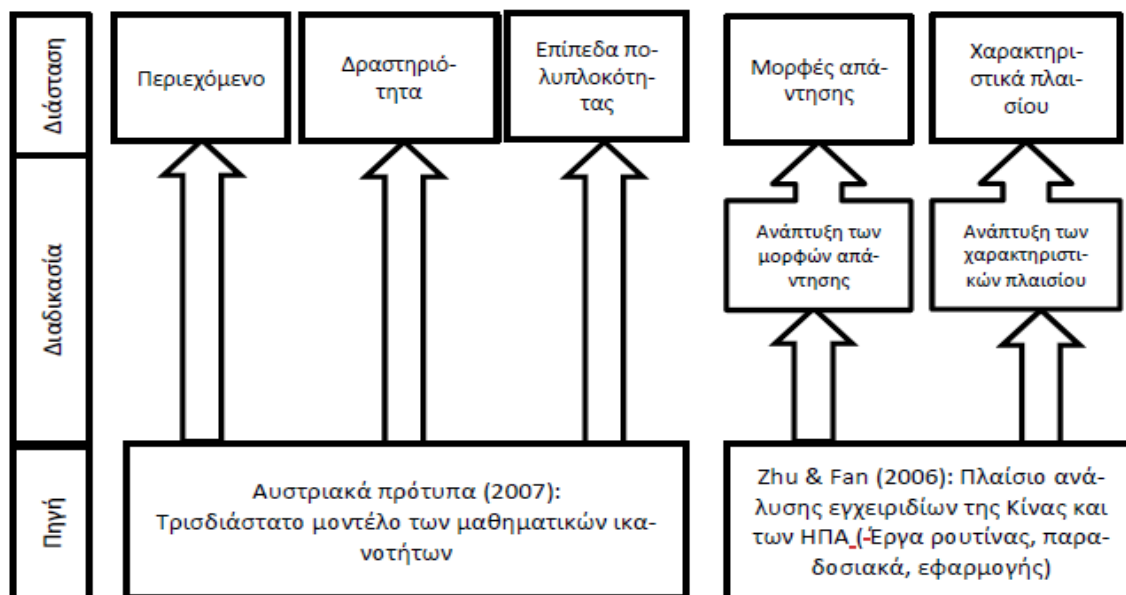
Η Glasnovic Gracin (2018) πραγματοποίησε έρευνα με σκοπό να διερευνήσει τις απαιτήσεις των έργων των κροατικών σχολικών Μαθηματικών εγχειριδίων της 6ης, 7ης και 8ης τάξης. Για την ανάγκη αυτής της έρευνας κατασκευάζει ένα πλαίσιο που απαρτίζεται από πέντε διαστάσεις. Αυτό το πλαίσιο προέκυψε από το συνδυασμό με ήδη χρησιμοποιούμενες διαστάσεις, από το συνδυασμό των αυστριακών εκπαιδευτικών προτύπων (2007) και το πλαίσιο των Zhu & Fan (2006). Οι Zhu και Fan (2006) πραγματοποίησαν μια συγκριτική μελέτη των κινέζικων και αμερικάνικων σχολικών εγχειριδίων της 7ης και 8ης τάξης. Στη μελέτη τους σύγκριναν τον τρόπο με τον οποίον τα επιλεγμένα εγχειρίδια παρουσιάζουν διάφορους τύπους μαθηματικών προβλημάτων. Στο πλαίσιο αυτό προσπαθούν να ορίσουν το πρόβλημα ως μια κατάσταση. Η κατάσταση αυτή απαιτεί απόφαση ή/και απάντηση από κάποιον λύτη ανεξαρτήτως της δυσκολίας της. Με αυτόν τον τρόπο θεωρούν ότι ο ορισμός του προβλήματος ως μια κατάσταση, είναι πιο λειτουργικός και ουσιαστικός για την ανάλυση σχολικών βιβλίων Μαθηματικών. Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, οι Zhu & Fan (2006) ταξινόμησαν τα προβλήματα στις ακόλουθες επτά κατηγορίες:

1. *Προβλήματα ρουτίνας έναντι προβλημάτων μη ρουτίνας.* Ένα πρόβλημα μη ρουτίνας θεωρείται αυτό που για την επίλυσή του δεν απαιτείται απλά η εφαρμογή ενός μαθηματικού τύπου ή αλγορίθμου όπως συμβαίνει στα προβλήματα ρουτίνας.
2. *Παραδοσιακά προβλήματα έναντι μη παραδοσιακών προβλημάτων.* Τα μη παραδοσιακά προβλήματα αποτελούνται από τέσσερις υποκατηγορίες:
 - Η κατασκευή προβλήματος: Οι μαθητές/-τριες δημιουργούν ερωτήσεις με βάση το δοθέν πρόβλημα.
 - Τα προβλήματα «πάζλ» με σκοπό την ψυχαγωγία των μαθητών/-τριών.
 - Τα προβλήματα εργασίας, όπου οι μαθητές καλούνται να εκτελέσουν μια σειρά εργασιών όπως συλλογή δεδομένων, παρατήρηση, ανάλυση, καθορισμό προτύπων ή / και σχέσεων και παρουσίαση αποτελεσμάτων.
 - Τα προβλήματα έκφρασης που σκοπό έχουν οι μαθητές/-τριες να καταφέρουν να εκφράσουν τις ιδέες, ή τις ερωτήσεις/ προβληματισμούς για τη νέα γνώση.
3. *Προβλήματα ανοιχτού τύπου έναντι προβλημάτων κλειστού τύπου.* Ανοιχτό πρόβλημα θεωρείται αυτό που επιδέχεται διαφορετικές ή πολλές σωστές απαντήσεις σε αντίθεση με του κλειστού τύπου.

4. *Προβλήματα εφαρμογής έναντι προβλημάτων μη εφαρμογής.* Ένα πρόβλημα εφαρμογής είναι αυτό που συνδέεται με τις ανάγκες μιας πραγματικής κατάστασης ή προβλήματος.
5. *Προβλήματα ενός βήματος έναντι προβλημάτων πολλαπλών βημάτων.* Τα προβλήματα ενός βήματος λύνονται με την πραγματοποίηση μιας μόνο πράξης, έναντι των πολλαπλών βημάτων που απαιτούνται πολλές πράξεις και διαδικασίες.
6. *Προβλήματα Επαρκών Δεδομένων, Προβλήματα Άσχετων Δεδομένων και Προβλήματα Ανεπαρκών Δεδομένων.* Εάν ένα πρόβλημα περιλαμβάνει περισσότερες πληροφορίες από αυτές που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος, χαρακτηρίζεται ως ένα πρόβλημα άσχετων δεδομένων.
7. *Προβλήματα σε καθαρά μαθηματική μορφή, προβλήματα σε λεκτική μορφή, προβλήματα σε οπτική μορφή και προβλήματα σε συνδυασμένη μορφή.*
 - Μαθηματική μορφή: περιλαμβάνει μόνο μαθηματικές εκφράσεις.
 - Λεκτική μορφή: το πρόβλημα είναι εντελώς λεκτικό.
 - Οπτική μορφή: αποτελείται από σχήματα, εικόνες, γραφήματα, πίνακες, διαγράμματα, χάρτες κ.λπ
 - Συνδυασμένη μορφή: συνδυασμός των παραπάνω μορφών.

Από τη μελέτη των Zhu & Fan (2006), προέκυψε ότι τα κινεζικά αλλά και αμερικανικά εγχειρίδια δεν περιέχουν αρκετά καινοτόμα και μη παραδοσιακά προβλήματα διαφόρων τύπων. Επιπλέον και στα δυο σχολικά εγχειρίδια τα περισσότερα προβλήματα ήταν ρουτίνας, παραδοσιακά, κλειστού τύπου και δεν συνδέονταν με πραγματικές καταστάσεις.

Σε συνέχεια της έρευνας της Glasnovic Gracin (2018), οι διαστάσεις που χρησιμοποιούνταν ήταν το περιεχόμενο, οι γνωστικές απαιτήσεις, ο τύπος ερωτήσεων, τα χαρακτηριστικά πλαισίου με μια νέα διάσταση που ενσωματώνει η ερευνήτρια, τις μαθηματικές δραστηριότητες. Αυτή η πέμπτη διάσταση σκοπό έχει να εξετάσει τι ακριβώς πρέπει να κάνει ο μαθητής/-τρια όταν έχει μια εργασία, να αναπαραστήσει, να υπολογίσει, να επεξηγήσει ή ακόμα και να δώσει επιχειρήματα



Σχήμα 1.2: Διάγραμμα πενταδιάστατου πλαισίου (περιεχόμενο, δραστηριότητες, επίπεδα πολυπλοκότητας, μορφές απάντησης και χαρακτηριστικά πλαισίου (Glasnovic Gracin, 2018, σελ. 6).

Θα αναφερθούμε σε μια ακόμα έρευνα των Gene, Zacharos, Lavidas & Koustourakis (2018) που επικεντρώθηκε στην ανάλυση περιεχομένου σχολικών Μαθηματικών εγχειριδίων. Συγκεκριμένα, εξετάστηκαν και αναλύθηκαν τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών των τάξεων ΣΤ' Δημοτικού και Α' Γυμνασίου. Τα συγκεκριμένα αυτά εγχειρίδια αναλύθηκαν ως προς τη διαθεματικότητα του περιεχομένου τους, δηλαδή αν αυτά έχουν ή όχι διαθεματικό χαρακτήρα. Αναφορικά με τη διαθεματικότητα του περιεχομένου τους, η συγκεκριμένη έρευνα εξετάζει εάν υπάρχει κάποια σύνδεση μεταξύ του περιεχομένου των μαθηματικών εγχειριδίων με διαφορετικές γνώσεις οι οποίες αντλούνται από άλλα μαθήματα του σχολείου. Αυτό το στοιχείο είναι ζητούμενο τόσο στα ελληνικά προγράμματα σπουδών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης όσο και από τους θεσμικούς φορείς της Ευρωπαϊκής Ένωσης για την ανάγκη συγκρότησης μιας κοινής εκπαιδευτικής πολιτικής και κοινότητας.

Τα συγκεκριμένα εγχειρίδια που αναλύθηκαν αναφέρονται σε μαθητές/-τριες 12 και 13 χρονών δυο συνεχόμενων σχολικών τάξεων στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα. Από την ανάλυση των εγχειριδίων αυτών, προέκυψαν τα εξής συμπεράσματα: τα σχολικά εγχειρίδια, που αποτέλεσαν το αντικείμενο της έρευνας, είναι γραμμένα με μάλλον συμβατικό τρόπο, καθώς η πλειονότητα των προτάσεων-μονάδων ανάλυσης που καταγράφηκαν δεν έχουν διαθεματικό χαρακτήρα. Με άλλα λόγια, τα εν λόγω σχολικά εγχειρίδια παρουσιάζουν κυρίως ένα καθαρά μαθηματικό περιεχόμενο και εν μέρει μόνο εμπεριέχουν θέματα από άλλα μαθήματα στην ύλη τους, παρά το γεγονός ότι η δηλωμένη πρόθεση του προγράμματος σπουδών είναι η σύζευξη των Μαθηματικών με άλλα επιστημονικά πεδία. Επιπλέον, από τις διαφοροποιήσεις κατά τη μετάβαση από το δημοτικό στο γυμνάσιο, διαπιστώθηκε μια στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ του έντυπου εκπαιδευτικού υλικού των δύο σχολικών ετών ως προς τον διαθεματικό τους χαρακτήρα: η διαθεματική προσέγγιση είναι πιο έντονη στο εγχειρίδιο της Α' Γυμνασίου.

Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα τα καινούργια σχολικά εγχειρίδια εισήχθησαν το σχολικό έτος 2007-8 και αντικατέστησαν τα προϋπάρχοντα που χρησιμοποιήθηκαν για 20 χρόνια και ακολουθούν τα νέα διαθεματικά προγράμματα σπουδών. Στο 24^ο συνέδριο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (2007) παρουσιάστηκαν τα νέα σχολικά βιβλία, οι καινοτομίες τους αλλά και κάποια αδύναμα χαρακτηριστικά τους (Καραβασίλης & Κόσυβας, 2016). Συγκεκριμένα, η κριτική που ασκήθηκε αφορούσε την έλλειψη συνεργασίας από τις συγγραφικές ομάδες και των τριών τάξεων του Γυμνασίου, στην υποτίμηση της απόδειξης στη Γεωμετρία, το χωρισμό Άλγεβρας-Γεωμετρίας στα σχολικά εγχειρίδια, την εισαγωγή δραστηριοτήτων που δε συνδέονται άμεσα με τη διδακτική ενότητα, την κλειστότητα των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών, την έλλειψη ή/και απουσία επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών, την εφαρμογή δασκαλοκεντρικών μεθόδων διδασκαλίας, ανεπαρκή αριθμό διδακτικών εβδομάδων για την κάλυψη της διδασκόμενης ύλης (περίπου 85 διδακτικές ώρες το χρόνο, όταν για την ίδια ύλη στις περισσότερες χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης διατίθενται 140 ώρες), κ.λπ. σύμφωνα με τον Καλαβάση (2007) (όπως αναφέρεται στο Καραβασίλης & Κόσυβας, 2016).

Οι Λυμπεροπούλου & Παπαδάκη (2008) ανέλυσαν το σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών Α' Γυμνασίου ως προς μορφή, τη δομή, τη γλώσσα και το περιεχόμενο. Συγκεκριμένα:

- Η μορφή ενός σχολικού εγχειριδίου αναφέρεται στην εμφάνισή του αλλά και τον τρόπο με τον οποίο είναι τοποθετημένες οι σελίδες του, οι παράγραφοι και τα κεφάλαια από τα οποία αποτελείται. Συγκεκριμένα, στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου μετράμε έξι διαφορετικά χρώματα. Είναι χαρακτηριστικές οι σελίδες «Ανακεφαλαίωση». Στις σελίδες των σχολικών βιβλίων συναντούμε εικόνες και εικονίδια.
 - Δομή: Το βιβλίο των Μαθηματικών για την Α΄ Γυμνασίου αποτελείται από δέκα (10) κεφάλαια, επτά (7) για την Αριθμητική – Άλγεβρα και τρία (3) για την Γεωμετρία. Κάθε κεφάλαιο είναι χωρισμένο 2 έως 13 το πολύ παραγράφων. Κάθε παράγραφος είναι από δύο έως τέσσερις σελίδες και είναι χωρισμένη σε πέντε μέρη: Δραστηριότητες, Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε, Παραδείγματα – Εφαρμογές, Ασκήσεις – Προβλήματα και Δραστηριότητες για το σπίτι.
 - Γλώσσα: Χρησιμοποιείται το β΄ ενικό πρόσωπο.
 - Περιεχόμενο: Μελετήθηκε η διαθεματική προσέγγιση του σχολικού εγχειριδίου.
- Τα συμπεράσματα αυτής της ανάλυσης έδειξαν ότι στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου δεν καλλιεργείται η ανακάλυψη, η ενεργή συμμετοχή του/της μαθητή/-τριας και υπάρχει ασυνέχεια μεταξύ θεωρίας και πράξης.

Σε έρευνα που διεξήγαγαν οι Καραβασίλης & Κόσσυβας (2016), ανέλυσαν και αξιολόγησαν το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου αν αυτό ενσωματώνει δραστηριότητες υψηλής γνωστικής βαρύτητας. Η συγκεκριμένη έρευνα (Καραβασίλης & Κόσσυβας, 2016) κατέδειξε ότι το σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου:

- καλύπτει επαρκώς το γνωστικό αντικείμενο όπως έχει οριστεί από το Πρόγραμμα Σπουδών,
- περιέχει κάποιες δραστηριότητες που ωφελούν στην ανάπτυξη γνωστικών δεξιοτήτων των μαθητών/-τριών και ακόμα συνεισφέρει στις διδακτικές πρακτικές που μπορούν να ακολουθηθούν από τον/την εκπαιδευτικό,
- προωθεί μια φορμαλιστική θεώρηση των Μαθηματικών,
- προωθεί τη δασκαλοκεντρική διδασκαλία,
- δεν κατέχει σημαντική θέση το πείραμα, η εικασία και ο έλεγχος υποθέσεων,
- δε συνδέει με τις προϋπάρχουσες εμπειρίες των μαθητών/-τριών στα Μαθηματικά τα συμπεράσματα της θεωρίας,
- περιέχει ελάχιστες αυθεντικές δραστηριότητες,
- δεν προωθεί τη συνεργασία και την επικοινωνία και
- δεν αξιοποιεί σε μεγάλο βαθμό τα χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία.

Το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου με τις εισαγωγικές δραστηριότητες που περιέχονται, σύμφωνα με τη Τσικοπούλου (2008), επιδιώκει να αξιοποιήσει τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών/-τριών, να αναπτύξει τη συζήτηση μεταξύ των μαθητών και τον αναστοχασμό καθώς ασχολούνται με ένα μαθηματικό ζήτημα.

Σε ακόμα μια μελέτη που πραγματοποιήθηκε από τον Hadar (2017) διερευνάται πώς λειτουργούν τα σχολικά βιβλία στην εκπαίδευση. Ο σκοπός ήταν να διερευνηθεί η σχέση μεταξύ των ευκαιριών μάθησης που παρέχονται από τα σχολικά βιβλία Μαθηματικών και τα επιτεύγματα των μαθητών/-τριών. Συγκεκριμένα, η μελέτη εξέταζε εάν οι γνωστικές απαιτήσεις των σχολικών βιβλίων, σχετίζονται με τα επιτεύγματα των μαθητών/-τριών. Αν και η εργασία διερεύνησε συγκεκριμένα εγχειρίδια, τα ευρήματά της είναι καθοριστικά για τον τρόπο με τον οποίο οι ευκαιρίες μάθησης σχετίζονται με τα επιτεύγματα γενικότερα. Για την εκπόνηση αυτής της έρευνας, επιλέχθηκαν εγχειρίδια Μαθηματικών της 8ης τάξης που χρησιμοποιήθηκαν από μαθητές/-τριες στην αραβική κοινότητα του Ισραήλ. Στο Ισραήλ, η αραβική κοινότητα ακολουθεί το εθνικό πρόγραμμα σπουδών, αλλά λειτουργεί ως ξεχωριστό

σύστημα στο οποίο η γλώσσα διδασκαλίας είναι η αραβική (Hadar, 2017). Η μελέτη επικεντρώθηκε σε σχολικά βιβλία που χρησιμοποιούνται στην αραβική κοινότητα για τον έλεγχο των συμφραζομένων παραγόντων: διδασκαλία και οργάνωση, επαγγελματική ανάπτυξη εκπαιδευτικών, γλώσσα, θρησκεία, πληθυσμός και άλλα σχολικά χαρακτηριστικά. Τα ευρήματα αυτής της έρευνας δείχνουν ότι εάν ένα σχολικό βιβλίο παρέχει την ευκαιρία στους μαθητές/-τριες να συμμετάσχουν σε εργασίες που απαιτούν υψηλότερα επίπεδα κατανόησης, οι μαθητές/-τριες που χρησιμοποιούν αυτό το βιβλίο θα έχουν υψηλότερες βαθμολογίες. Η μελέτη δείχνει ότι το φύλο και κοινωνικο-οικονομική κατάσταση διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στον τρόπο με τον οποίο οι ευκαιρίες που παρέχονται στα σχολικά βιβλία αλληλεπιδρούν με τις βαθμολογίες των μαθητών/-τριών.

Οι Fan, Xiong, Zhao & Niu (2018) πραγματοποίησαν μελέτη που εστίασε σε θέματα σχετικά με την ανάπτυξη Μαθηματικών εγχειριδίων από πολιτιστική σκοπιά. Συγκεκριμένα πρόκειται για μια συγκριτική μελέτη βιβλίων μεταξύ Σαγκάης και Αγγλίας, η οποία εξετάζει πως εκδηλώνεται η πολιτισμική επιρροή στη διαμόρφωση των σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών. Για τη μελέτη αυτή δημιουργήθηκε ένα εννοιολογικό πλαίσιο που ταξινομεί τον πολιτισμό σε έξι τύπους σε σχέση με τις πεποιθήσεις, τις αξίες και τους τρόπους αλληλεπίδρασης των ανθρώπων σχετικά με αυτούς, για συλλογή και ανάλυση δεδομένων. Οι έξι τύποι πολιτισμού αφορούν τα εξής: (1) γεωγραφία, (2) τεχνουργήματα, χλωρίδα και πανίδα, (3) οργανώσεις, (4) τρόπους συμπεριφοράς και έθιμα, (5) ιστορία και (6) ταυτότητες. Κάθε τύπος ταξινομείται περαιτέρω σε έναν αριθμό υποκατηγοριών, οι οποίες είναι σε μεγάλο βαθμό αυτονόητες, για παράδειγμα, η κουλτούρα για ένα «γεγονός» στην «ιστορία» αφορά το πώς τα μέλη μιας κοινωνίας βλέπουν, αξιολογούν και αλληλεπιδρούν συλλογικά για το γεγονός, π.χ., σχετικά με το τι ήταν το γεγονός (αλήθεια), πόσο σημαντικό είναι (αξία) και πώς πρέπει να παρατηρηθεί (αλληλεπίδραση).

Είδος πολιτισμού	Υπο-τύπος (σημασία)
Γεωγραφία	Πόλεις ή περιφέρειες, γραφικές περιοχές, αρχιτεκτονικές
Αντικείμενα, χλωρίδα και πανίδα	Καθημερινός εξοπλισμός και συσκευές επικοινωνίας, χαρτικά, βιβλία και παιχνίδια, νόμισμα, έργα τέχνης, τροφή, χλωρίδα, πανίδα
Οργανώσεις	Ιδρύματα, ομάδες, επιχειρήσεις
Τρόποι συμπεριφοράς και έθιμα	Αθλητισμός, οργανωμένες εκδηλώσεις, έθιμα της γλώσσας και έκφρασης, έθιμα που απευθύνονται στους ανθρώπους, γιορτές και αργίες
Ιστορία	Εκδηλώσεις, ιστορικά πρόσωπα
Ταυτότητες	Λέξεις και χαρακτήρες, γλώσσα, χώρες

Πίνακας 1.1: Εννοιολογικό πλαίσιο σχετικά με την ταξινόμηση του πολιτισμού που εκδηλώνεται στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ της κινεζικής και της αγγλικής σειράς που σχετίζονται με πολιτισμικούς παράγοντες. Φαίνεται ότι, σε μεγάλο βαθμό, ο πολιτισμός παίζει ουσιαστικό ρόλο στην ανάπτυξη των σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών.

Σε έρευνα του Rezat (2006) αναλύθηκαν οι δομές των ενοτήτων στα γερμανικά σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών για διαφορετικούς βαθμούς και επίπεδα ικανοτήτων. Τα δομικά στοιχεία των εγχειριδίων αυτών αναλύθηκαν σε δυο διαστάσεις, η πρώτη αφορούσε το περιεχόμενο, γλωσσικά χαρακτηριστικά, οπτικά χαρακτηριστικά, τις παιδαγωγικές τους λειτουργίες στη μαθησιακή διαδικασία και τις καταστάσεις και η δεύτερη τη σύγκριση μεταξύ διαφορετικών εγχειριδίων. Τα ευρήματα αποκάλυψαν ότι η δομή των ενοτήτων είναι πολύ παρόμοια σε διαφορετικά εγχειρίδια Μαθηματικών.

στοιχείο χαρακτηριστικό	εισαγωγικές εργασίες	έκθεση	πυρήνες	δουλεμένα παραδείγματα	ασκήσεις και προβλήματα
Χαρακτηριστικά σε όρους περιεχομένου	καταστάσεις	νέο υλικό, διαδικασίες, θεωρήματα, ορισμοί	αποτελέσματα, ορισμοί, θεωρήματα	λεπτομερής εκτέλεση ενός συγκεκριμένου αλγόριθμου ή λύση στρατηγική	εργασίες ρουτίνας; διαφοροποιημένα έργα, ανοιχτές εργασίες; Προβλήματα εφαρμογής;
Γλωσσικά χαρακτηριστικά		γλώσσα κατάλληλη για μαθητές για την ηλικιακή τους ομάδα	σύνοψη		
Οπτικά χαρακτηριστικά			Τυποποιημένος, ξεκάθαρα δομημένος	τονίζεται κατά κάποιον τρόπο	διακριτές σημάνσεις υποδεικνύουν διαφορετικά επίπεδα ικανότητας
Παιδαγωγικά χαρακτηριστικά	Απασχολεί το μαθητή δραστήρια, ανακαλώντας σχετικές προϋπάρχουσες ιδέες; πριν το νέο υλικό; Βοηθάει για να προσεγγίσει το νέο υλικό;	επεξηγηματικός, ανάπτυξη νέων ιδεών, εισαγωγή σε νέες έννοιες	σφαιρική εικόνα, ενοποίηση	παραδειγματικός	Εμπλέκουν το μαθητή δραστήρια; ενοποίηση, παρέχουν ευκαιρίες να εξασκηθεί και να αποκτήσει ιδιαίτερες δεξιότητες;
Περιστασιακές συνθήκες	μάθημα, οι μαθητές προσπαθούν, προβληματίζονται και ανακαλύπτουν μόνοι τους		Επίσης για ιδιωτική μελέτη; Να χρησιμοποιείται σαν βιβλίο παραπομπής;	συμβουλευονται οι μαθητές που χρειάζονται βοήθεια για να κάνουν την άσκηση	

Πίνακας 1.2: Χαρακτηριστικά των δομικών στοιχείων στα γερμανικά εγχειρίδια των μαθηματικών.

Η μελέτη που εκπονήθηκε από τους Wijaya, van den Heuvel-Panhuizen, & Doorman (2015) είχε σκοπό να εξηγήσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι Ινδονησιακοί μαθητές όγδοης

τάξης κατά την επίλυση εργασιών βάσει πλαισίου (context-based). Πραγματοποιήθηκε οριζόντια (γενικά χαρακτηριστικά) και κάθετη ανάλυση περιεχομένου (κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου και δίνει πληροφορίες σχετικά με την ποιότητα και τις διδακτικές πτυχές του περιεχομένου των εγχειριδίων, βλ. Πίνακα 1.3) σε τρία εγχειρίδια μαθηματικών της Ινδονησίας στηριζόμενοι στο πλαίσιο των Charalampous et al. (2010).

Χαρακτηριστικά έργων	Υποκατηγορία	Επεξήγηση
Τύπος πλαισίου	Χωρίς πλαίσιο	Αναφέρεται μόνο σε μαθηματικά αντικείμενα, σύμβολα ή δομές
	«Καμουφλαρισμένο» πλαίσιο	Δεν χρειάζονται εμπειρίες από την καθημερινή ζωή ή τη συλλογιστική της κοινής λογικής.
		Οι μαθηματικές πράξεις που απαιτούνται για την επίλυση των προβλημάτων είναι ήδη προφανείς. Η λύση μπορεί να βρεθεί συνδυάζοντας όλους τους αριθμούς που δίνονται στο κείμενο.
	Σχετικό και ουσιαστικό πλαίσιο	Για να γίνει κατανοητό και να επιλυθεί το πρόβλημα, απαιτείται κοινή λογική συλλογιστικής στο πλαίσιο αυτό.
		Η μαθηματική πράξη δεν δίνεται ρητά.
		Απαιτείται μαθηματική μοντελοποίηση.
Σκοπός της εργασίας βάσει πλαισίου	Εφαρμογή	Η εργασία δίνεται μετά την ενότητα εξήγησης.
	Μοντελοποίηση	Η εργασία δίνεται πριν την ενότητα εξήγησης.
Είδος πληροφοριών	Απαραίτητες	Οι εργασίες περιέχουν ακριβώς τις πληροφορίες που απαιτούνται για την εύρεση της λύσης.
	Ελλιπείς	Οι εργασίες περιέχουν λιγότερες πληροφορίες από τις απαραίτητες, οπότε οι μαθητές πρέπει να αντλήσουν επιπλέον δεδομένα.
	Περιττές	Οι εργασίες περιέχουν περισσότερες πληροφορίες από τις απαραίτητες, οπότε οι μαθητές πρέπει να επιλέξουν πληροφορίες
Είδος γνωστικών απαιτήσεων	Αναπαραγωγή	Αναπαραγωγή αναπαραστάσεων, ορισμών ή γεγονότων.
		Ερμηνεία απλών και οικείων παραστάσεων.
		Απομνημόνευση ή εκτέλεση υπολογισμών/ διαδικασιών ρουτίνας.
	Συνδέσεις	Ενσωμάτωση και σύνδεση μεταξύ διαφορετικών θεματικών εννοιών ή αναπαραστάσεων.
		Επίλυση προβλημάτων μη ρουτίνας.
		Ερμηνεία καταστάσεων και μαθηματικών εκφωνήσεων ενός προβλήματος.
		Συμμετοχή σε απλή μαθηματική συλλογιστική.
	Διερεύνηση	Στοχασμός και απόκτηση γνώσης για τα μαθηματικά.
		Κατασκευή πρωτότυπων μαθηματικών προσεγγίσεων.
		Κοινοποίηση περίπλοκων επιχειρημάτων και σύνθετων συλλογισμών.
		Δημιουργία γενικεύσεων.

Πίνακας 1.3: Πλαίσιο ανάλυσης για ανάλυση σχολικών βιβλίων των Wijaya, van den Heuvel-Panhuizen, & Doorman (2015).

Η ανάλυση αποκάλυψε ότι οι εργασίες βάσει πλαισίου σπάνια διατίθενται σε εγχειρίδια μαθηματικών της Ινδονησίας. Άρα, το σχολικό βιβλίο είναι ένα από τα βασικά υποκειμενικά χαρακτηριστικά που θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη σε διεθνείς έρευνες και διαγωνισμούς. Επομένως, για να είναι σε θέση να παρέχει ισχυρές ενδείξεις για τη σχέση του OTL (ευκαιρία

για μάθηση), όπως προσφέρεται στα σχολικά εγχειρίδια, με τα επιτεύγματα των μαθητών, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τουλάχιστον σε κάθε μαθητή ποιο εγχειρίδιο χρησιμοποιήθηκε για να τον διδάξει.

Οι Alabdulaziz, & Higgins (2021) εκπόνησαν μια κριτική ανασκόπηση που σκόπευε να διερευνήσει τις διεθνείς προοπτικές για την ανάλυση του περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών. Αυτό οδήγησε στο να διερευνηθεί η συμβολή στη γνώση μας σχετικά με τη συμβατότητα του περιεχομένου των εγχειριδίων Μαθηματικών στο Βασίλειο της Σαουδικής Αραβίας (KSA) με τα πρότυπα του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής (ΗΠΑ) μεταξύ 2013 και 2019. Το NCTM είναι ένας διεθνής οργανισμός που υποστηρίζει τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών για τους μαθητές της προνηπιακής ηλικίας έως τη 12^η τάξη. Το NCTM παρουσίασε την πρώτη σύγχρονη σειρά προτύπων θεμάτων στις ΗΠΑ το 1989. Στη συνέχεια, το 2000, αναβαθμίστηκε και επεκτάθηκε όταν το NCTM παρήγαγε Αρχές και Πρότυπα για Σχολικά Μαθηματικά (Alabdulaziz & Higgins, 2021). Αυτό το έγγραφο αποτελεί πλέον τη βάση για τα κρατικά και τοπικά πρότυπα προγράμματος σπουδών μαθηματικών στις ΗΠΑ. Επιπλέον, περιλαμβάνει μια σειρά από έξι αρχές που αποτελούν τη βάση για τις συστάσεις του εγγράφου και 10 πρότυπα που περιγράφουν βασικά τις μαθηματικές δεξιότητες που απαιτούνται από τους μαθητές ετησίως μέχρι τη 12η τάξη (Alabdulaziz & Higgins, 2021). Συγκεκριμένα, το NCTM έχει δύο ταξινομήσεις: πρότυπα περιεχομένου, που περιγράφουν το μαθηματικό περιεχόμενο που πρέπει να μάθουν οι μαθητές σε κάθε τάξη και πρότυπα επεξεργασίας, τα οποία επικεντρώνονται σε διάφορες τεχνικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να αποκτήσουν, να κατανοήσουν και να χρησιμοποιήσουν το περιεχόμενο (Alabdulaziz & Higgins, 2021). Το NCTM καθορίζει διάφορες τεχνικές όπως: (1) επίλυση προβλημάτων, (2) συλλογιστική και απόδειξη, (3) επικοινωνία, (4) συνδέσεις και (5) αναπαράσταση. Τα ακόλουθα είναι τα πέντε πρότυπα περιεχομένου: (1) αριθμός και πράξεις, (2) άλγεβρα, (3) γεωμετρία, (4) μέτρηση και (5) ανάλυση δεδομένων και πιθανότητες (Alabdulaziz & Higgins, 2021).

Αυτή η μελέτη προσπάθησε να εξάγει και να συνθέσει τις συστάσεις μετά τη σύγκρισή τους σύμφωνα με τη μεθοδολογία, τα δείγματα, τους βαθμούς, τον αριθμό των προτύπων NCTM που καλύπτονταν και τα αποτελέσματα των αναλύσεων, καθώς και να προσδιορίσει τους τομείς του προγράμματος σπουδών των Μαθηματικών που κάλυπταν ένα χαμηλό ποσοστό προτύπων NCTM σύμφωνα με τέτοιες μελέτες. Επιπλέον, να βοηθήσει τους ενδιαφερόμενους φορείς να αναπτύξουν αυτά τα προγράμματα σπουδών. Στο πλαίσιο αυτό προτάθηκε η διεξαγωγή μελέτης για την αξιολόγηση του περιεχομένου των Μαθηματικών για τις τάξεις που δεν καλύπτονται στις σπουδές τους, όπως η 1^η και 2^η τάξη του δημοτικού και η 2^η και 3^η τάξη της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Διαπιστώθηκε ότι το πρόγραμμα σπουδών των Μαθηματικών για την 1^η τάξη της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης πέτυχε χαμηλό ποσοστό των προτύπων NCTM.

Οι Sherman, Cayton, Walkington & Funsch (2020) πραγματοποίησαν μια συστηματική ανάλυση του τρόπου με τον οποίο οι τεχνολογικές εργασίες ενσωματώνονται στα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αναλύοντας ένα δείγμα 20 σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών Γυμνασίου των ΗΠΑ. Αυτή η μελέτη εξετάζει τα τρέχοντα εγχειρίδια μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για να απαντήσει στις ερωτήσεις: 1) πόσο συχνά τα σχολικά βιβλία δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ενσωματώνουν εργασίες που χρησιμοποιούν την τεχνολογία και 2) ποιοι τύποι τεχνολογιών χρησιμοποιούνται. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι σε ολόκληρο το δείγμα, σχεδόν το 15% των εργασιών ενσωμάτωσε τεχνολογία και από αυτές, το 21% τη χρησιμοποίησε για να

αναδιοργανώσει τη μαθηματική σκέψη των μαθητών/-τριών. Οι αριθμομηχανές ήταν η κυρίαρχη τεχνολογία που χρησιμοποιήθηκε και πιο πιθανό να χρησιμοποιηθεί σε εγχειρίδια της άλγεβρας παρά της γεωμετρίας.

1.4.2 Έρευνες που εστιάζουν στην ανάλυση έργων των σχολικών εγχειριδίων για συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες

Οι Charalambous, Delaney, Hsu & Mesa (2010) δημοσίευσαν μια συγκριτική μελέτη η οποία αφορούσε τον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζονται η πρόσθεση και αφαίρεση των κλασμάτων στα σχολικά βιβλία της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην Κύπρο, την Ιρλανδία και την Ταϊβάν. Για την ανάγκη αυτής της έρευνας χρησιμοποιήθηκε ένα πλαίσιο που θα διερευνούσε τις ευκαιρίες μάθησης που δίνονται στους μαθητές/-τριες από τα συγκεκριμένα σχολικά εγχειρίδια σε σχέση με την παρουσίαση του περιεχομένου και τις προσδοκίες του εγχειριδίου, όπως αυτές εκδηλώνονται στα σχετικά έργα (tasks). Αξίζει να επισημάνουμε ότι αυτό το πλαίσιο αναλύει το κάθε εγχειρίδιο υπό δυο διαστάσεις. Η πρώτη διάσταση αφορά τα γενικά χαρακτηριστικά των εγχειριδίων και η δεύτερη διάσταση εξετάζει πως αντιμετωπίζεται μια μαθηματική έννοια ή ένα θέμα από τα σχολικά εγχειρίδια.

Στην κατηγορία «μετάδοση γνώσεων στους μαθητές» εξετάστηκαν μόνο τα λυμένα παραδείγματα των εγχειριδίων. Από την κατηγορία «απαιτήσεις από τους μαθητές» δόθηκε έμφαση στις πιθανές γνωστικές απαιτήσεις των εργασιών του βιβλίου και στον τύπο της απάντησης που ζητήθηκε.

Όσον αφορά τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας, βρέθηκαν αρκετές ομοιότητες και διαφορές στα συγκεκριμένα βιβλία που επιλέχθηκαν. Αυτές οι ομοιότητες και διαφορές αφορούσαν την αλληλουχία, τις δομές των κλασμάτων και τις γνωστικές απαιτήσεις των εργασιών. Τα ευρήματα επισήμαναν ότι είναι αναγκαίο να εξεταστούν τα σχολικά εγχειρίδια ώστε να κατανοηθούν οι διαφορές που υπάρχουν στη διδασκαλία και τις επιδόσεις μεταξύ των χωρών. Οι ερευνητές οργάνωσαν τα κριτήρια ανάλυσης του σχολικού εγχειριδίου όπως φαίνονται στον παρακάτω Πίνακα 1.4.

ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟΥ		
Γενικές πληροφορίες		Συνολική δομή εγχειριδίου
<ul style="list-style-type: none"> • Τίτλος • Αριθμός βιβλίων • Σελίδες (Αριθμός και πυκνότητα) • Προφίλ συγγραφέων και συμβουλευτικής επιτροπής • Εκδότης και έτος έκδοσης • Συνοδευτικά υλικά (π.χ. οδηγοί εκπαιδευτικών, υλικά πόρων) 		<ul style="list-style-type: none"> • Αριθμός ενοτήτων/μαθημάτων και μέσος αριθμός σελίδων ανά ενότητα/μάθημα • Δομή ενοτήτων / μαθημάτων • Θέματα που καλύπτονται • Αλληλουχία θεμάτων
ΚΑΘΕΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟΥ		
Μετάδοση των γνώσεων στους μαθητές	Απαιτήσεις από τους μαθητές	Συνδέσεις
<p><i>Μαθηματικό περιεχόμενο</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Κατασκευή συγκεκριμένου θέματος, δομή κ.λπ. (π.χ. μέρος-όλο, λόγος, τελεστής, πηλίκο, μέτρηση κατασκευών κλάσματος) • Ορισμοί, κανόνες, συμβάσεις • Εικονογραφήσεις-αναπαραστάσεις (άσχετες, σχετικές με το πλαίσιο αλλά όχι με το μαθηματικό, υποστηρίζοντας το μαθηματικά) <p><i>Μαθηματικές Πρακτικές</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Λυμένα παραδείγματα • Μοντελοποίηση σκέψης <p><i>Στάσεις</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Ισότητα • Άποψη των μαθηματικών 	<ul style="list-style-type: none"> • Πιθανές γνωστικές απαιτήσεις (απομνημόνευση, διαδικασίες με συνδέσεις, διαδικασίες χωρίς συνδέσεις, κάνει μαθηματικά) • Τύπος απάντησης (μόνο απάντηση, απάντηση και μαθηματική πρόταση, εξήγηση, αιτιολόγηση) 	<ul style="list-style-type: none"> • Συνδέσεις μεταξύ θεματικών ενοτήτων • Συνδέσεις του βιβλίου και της διδασκαλίας στην τάξη • Συνδέσεις με καταστάσεις εκτός του σχολείου

Πίνακας 1.4: Το πλαίσιο που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση των εγχειριδίων μαθηματικών (Charalambous et al., σελ. 123).

Σε ακόμα μια εργασία των Wang & Lu (2018), γίνεται σύγκριση αναφορικά με ποιο περιεχόμενο επιλέγεται και πώς παρουσιάζεται αυτό σε σειρά σχολικών βιβλίων λυκείου από την Κίνα, τη Γαλλία, τη Γερμανία, την Ιαπωνία, τη Ρωσία, το Ηνωμένο Βασίλειο και τις Ηνωμένες Πολιτείες, σύμφωνα με τέσσερις βασικούς τομείς: άλγεβρα, γεωμετρία, στατιστική και πιθανότητες, διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός. Στόχος αυτής της έρευνας είναι η βελτίωση της μεταρρύθμισης των Μαθηματικών μαθημάτων στα γυμνάσια της Κίνας μέσω της συγκριτικής ανάλυσης που επικεντρώνεται στην επιλογή και παρουσίαση μαθηματικού περιεχομένου σε σχολικά βιβλία από διάφορες χώρες σε όλο τον κόσμο. Τα βασικά περιεχόμενα των σχολικών βιβλίων από τις άλλες πέντε χώρες ήταν πιο διαφορετικά. Τα γαλλικά και τα βρετανικά εγχειρίδια είχαν περισσότερα θέματα άλγεβρας, τα γαλλικά και τα ρωσικά περιλάμβαναν περισσότερο περιεχόμενο γεωμετρίας, τα σχολικά βιβλία από τις Ηνωμένες Πολιτείες κάλυπταν περισσότερα στατιστικά στοιχεία και πιθανότητες και η ρωσική και βρετανική σειρά κάλυπτε όλο το φάσμα των θεμάτων λογισμού. Γενικά, η κινεζική σειρά βιβλίων ήταν αρκετά διαφορετική από τη ρωσική, καθώς η πρώτη κάλυπτε πολύ μαθηματικό περιεχόμενο στην άλγεβρα και στη στατιστική και πιθανότητες, ενώ η δεύτερη εστίαζε την προσοχή της στη γεωμετρία και το διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό. Όλα αυτά τα εγχειρίδια κάλυψαν την πλειονότητα των θεμάτων του βασικού συνόλου περιεχομένου, με τα γερμανικά και τα ρωσικά να περιλαμβάνουν το μικρότερο υποσύνολο, ιδιαίτερα στον τομέα της άλγεβρας.

Οι Yang & Sianturi (2017) ανέλυσαν τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της Σιγκαπούρης έναντι της Ινδονησίας με βάση το περιεχόμενο της τριγωνομετρίας. Τα αποτελέσματα του PISA 2015 ανέφεραν ότι οι επιδόσεις των μαθητών στα Μαθηματικά της Σιγκαπούρης και της Ινδονησίας είχαν σημαντικές διαφορές. Η έρευνα αυτή εξέτασε εάν υπάρχει ισχυρή σχέση μεταξύ του εγχειριδίου που χρησιμοποιείται και της επίδοσης των μαθητών στα Μαθηματικά. Εάν τα σχολικά βιβλία διαφέρουν, οι μαθητές/-τριες θα έχουν διαφορετικές ευκαιρίες για μάθηση και η ευκαιρία να μάθουν επηρεάζει την επίδοση των μαθητών. Αυτή η μελέτη διαπίστωσε ότι τα σχολικά βιβλία της Σιγκαπούρης δίνουν μεγαλύτερη έμφαση σε όλες τις έννοιες της τριγωνομετρίας στο ορθογώνιο τρίγωνο και

περαιτέρω στην τριγωνομετρία, ενώ το ινδονησιακό εγχειρίδιο παρείχε περισσότερη συζήτηση για τη γωνία και τις έννοιές της, την τριγωνομετρία στο ορθογώνιο και τη συνάρτηση γραφήματος της τριγωνομετρίας. Επιπλέον, στο βιβλίο της Σιγκαπούρης παρέχονται περισσότερες μαθηματικές ερωτήσεις που απαιτούν ανώτερη γνωστική ζήτηση, ενώ στο βιβλίο της Ινδονησίας παρέχονται περισσότερες ερωτήσεις που απαιτούν χαμηλότερα επίπεδα. Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας κατέδειξαν ότι η διαφορά του σχεδιασμού σχολικών βιβλίων είναι ένας παράγοντας που επηρεάζει τις επιδόσεις των μαθητών/-τριών στα Μαθηματικά στη Σιγκαπούρη και την Ινδονησία.

Οι Hong και Choi, (2014) σύγκριναν τα σχολικά εγχειρίδια δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης της Κορέας και των ΗΠΑ αναφορικά με δραστηριότητες δευτεροβάθμιων εξισώσεων που περιείχαν τα εγχειρίδια. Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν για τη σύγκριση των σχολικών εγχειριδίων ήταν τα εξής:

1. Ποιες ομοιότητες και διαφορές παρατηρούνται στο περιεχόμενο των μαθημάτων δευτεροβάθμιων εξισώσεων των κορεατικών και βασισμένων σε πρότυπα αμερικανικών δευτεροβάθμιων εγχειριδίων;
2. Τι είδους απαντήσεις απαιτούνται από τα προβλήματα που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία;
3. Ποια επίπεδα γνωστικής ζήτησης απαιτούνται από τα προβλήματα στα σχολικά βιβλία;

Η μελέτη των Hong και Choi, (2014) βασίζεται σε ένα δισδιάστατο πλαίσιο για να απαντηθούν ερευνητικά ερωτήματα της μελέτης: οριζόντιες και κάθετες αναλύσεις των Charalambous et al. (2010). Το εργαλείο ανάλυσης δεδομένων για τη συγκεκριμένη έρευνα είναι το εξής:

Οριζόντια ανάλυση	Κάθετη ανάλυση
<ul style="list-style-type: none"> • Εκπαιδευτικά συστήματα • Αριθμός μαθημάτων • Αριθμός προβλημάτων • Τοποθέτηση θεμάτων σε επίπεδο τάξης 	<ul style="list-style-type: none"> • Εισαγωγή και ανάπτυξη θεμάτων • Αναπαραστάσεις που παρέχουν τα σχολικά βιβλία • Επεξεργασμένα παραδείγματα • Γνωστική απαίτηση προβλημάτων • Είδος απαντήσεων

Πίνακας 1.5: Το πλαίσιο που χρησιμοποιείται για την ανάλυση του περιεχομένου και των προβλημάτων του σχολικού βιβλίου.

Συμπερασματικά, προέκυψε ότι η πλειονότητα των δραστηριοτήτων που εξετάστηκαν ήταν χαμηλού επιπέδου γνωστικών απαιτήσεων. Επιπλέον, τα κορεατικά εγχειρίδια σε σύγκριση με αυτά των ΗΠΑ, δίνουν λιγότερες ευκαιρίες στους/στις μαθητές/-τριες να λύσουν και να εξηγήσουν τα μαθηματικά προβλήματα με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων .

Σε μελέτη που πραγματοποίησαν οι Wang, Barmby & Bolden (2017) επιλέχθηκαν έξι αγγλικά εγχειρίδια και ένα υποχρεωτικό εγχειρίδιο της Σαγκάης, της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, και αναλύθηκαν σε σχέση με την κατανόηση που απαιτείται από τους/τις μαθητές/-τριες της γραμμικής συνάρτησης. Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν για αυτή τη συγκριτική μελέτη ήταν τα εξής:

1. Τι έμφαση δίνουν τα παραδείγματα σε επιλεγμένα σχολικά βιβλία όσον αφορά τα επίπεδα κατανόησης της γραμμικής συνάρτησης;
2. Σε κάθε επίπεδο, υπάρχουν διαφορές στην έκφραση των παραδειγμάτων καθώς και στην προτεινόμενη λύση;

Η κατανόηση κατηγοριοποιήθηκε σε πέντε επίπεδα: εξαρτημένη σχέση, συνδετικές αναπαραστάσεις, παρατήρηση τοπικών ιδιοτήτων, ανάλυση αντικειμένων και εφεύρεση.

Λέξεις κλειδιά στο παράδειγμα	Επίπεδο κατανόησης
Σχεδιάζω	Επίπεδο 2 Συνδυετικές αναπαραστάσεις
Κλίση, γ -τομή	Επίπεδο 3 Παρατήρηση τοπικών ιδιοτήτων
Παράλληλος, κάθετος	Επίπεδο 4 Ανάλυση αντικειμένου
Μέσο σημείο, ανισότητες	Επίπεδο 5 Εφεύρεση

Πίνακας 1.6: Λέξεις κλειδιά σε κάθε επίπεδο.

Από αυτή την ανάλυση των σχολικών βιβλίων, έχει αποδειχθεί ότι οι δύο περιοχές έχουν διαφορετικές προσεγγίσεις για την κατανόηση της γραμμικής συνάρτησης. Τα ευρήματα έδειξαν ότι η Σαγκάη χειρίζεται τη γραμμική συνάρτηση χρησιμοποιώντας μια πιο αλγεβρική μέθοδο, ενώ η Αγγλία αντιμετωπίζει τη γραμμική συνάρτηση ως μια μορφή γραφήματος.

Οι Dole και Shield (2008), για την εκπόνηση της έρευνάς τους, ανέπτυξαν ένα πλαίσιο που θα τους βοηθούσε να αναλύσουν δύο σχολικά εγχειρίδια της 8ης τάξης στην Αυστραλία. Συγκεκριμένα έδωσαν ιδιαίτερη σημασία στην αναλογική συλλογιστική και την αξιοποίηση της σχετικής βιβλιογραφίας, καθώς και στις αρχές μεταρρύθμισης που διέπουν το πρόγραμμα σπουδών των Μαθηματικών στην πολιτεία Queensland της Αυστραλίας. Οι μαθηματικές έννοιες που εξετάστηκαν ήταν αυτές του λόγου και της αναλογίας. Οι δείκτες που κατασκεύασαν ήταν:

1. Η προσθετική και η πολλαπλασιαστική σύγκριση εντάσσονται στα συμφραζόμενα.
Δείκτες: (α) δίνονται παραδείγματα «πραγματικά» τόσο των προσθετικών όσο και των πολλαπλασιαστικών συγκρίσεων, β) δίνονται ευκαιρίες που να διαφοροποιούν τις προσθετικές και πολλαπλασιαστικές συγκρίσεις, γ) ενισχύεται εννοιολογικά η κατανόηση καταστάσεων ως προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές μέσα από μια σειρά αυθεντικών, πραγματικών πλαισίων για σύγκριση.
2. Γίνεται επισήμανση των κοινών πολλαπλασιαστικών δομών και της αναλογικής σκέψης.
Δείκτες: α) ορίζεται με σαφήνεια η συγκριτική σχέση αναλογικών καταστάσεων, β) διευκρινίζεται η κοινή πολλαπλασιαστική δομή σε προβλήματα πχ. λόγου, ρυθμού, κλίμακας κ.ά., γ) είναι σαφής η χρήση της αναλογικής σκέψης σε λυμένα παραδείγματα.
3. Η αποτελεσματικότητα στη χρήση μιας σειράς αναπαραστάσεων.
Δείκτες: α) οι πίνακες, τα γραφήματα και οι αριθμογραμμές που χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν αναλογικές καταστάσεις, β) οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται βοηθούν στη δόμηση της πολλαπλασιαστικής σκέψης, γ) οι εφαρμογές που υπάρχουν χρησιμοποιούν τις κατάλληλες έννοιες από τα περιβάλλοντα των μαθητών/-τριών.
4. Οι σχέσεις μεταξύ των κλασμάτων συνδέεται ρητά.
Δείκτες: α) δημιουργούνται συνδέσεις μεταξύ κλασμάτων και ισοδυναμιών, β) προσδιορίζονται οι σχέσεις μέρους-όλου και μερικού -όλου στο λόγο, γ) η ισότητα αναλογιών αργεί λόγω εξάρτησης από άλλες αναπαραστάσεις.

Τα ευρήματα αυτής της έρευνας έδειξαν ότι τα σχολικά εγχειρίδια που εξετάστηκαν περιορίζονταν σε σχέση με τους τρόπους με τους οποίους ανταποκρίνονταν στις απαιτήσεις του αναλυτικού προγράμματος.

Η Brändström (2005) πραγματοποίησε μελέτη για να ελέγξει πώς διαφοροποιούνται τα έργα που αναφέρονται στην έννοια του κλάσματος σε τρία σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών της 7ης τάξης στη Σουηδία. Ο σκοπός αυτής της μελέτης της ήταν τριπλός και αυτό γιατί

στόχευε αρχικά να περιγράψει τη δομή των κεφαλαίων, μετά να δημιουργήσει ένα εργαλείο ανάλυσης έργων και να το εφαρμόσει σε αυτά και τέλος να αναλύσει τα έργα και να τα συγκρίνει με το επίπεδο δυσκολίας που έχει ενσωματωθεί στο εργαλείο ανάλυσης.

Το εργαλείο ανάλυσης εστίαζε σε τέσσερις πυλώνες: α) εικόνες, β) απαιτούμενες πράξεις, γ) γνωστικές διαδικασίες και δ) επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων.

Εικόνες και οι στόχοι που επιτελούν κατηγοριοποιούνται ως εξής: έργο χωρίς εικόνα, διακοσμητική εικόνα και λειτουργική εικόνα.

Απαιτούμενες πράξεις: αναφέρεται στο πλήθος των βημάτων που απαιτείται για την επίλυση ενός προβλήματος. Οπότε «uni» αν χρειάζεται μόνο μια πράξη και «multi» αν χρειάζονται δυο οι παραπάνω πράξεις.

Γνωστικές διαδικασίες όπως ταξινομείται από τον Bloom στον παρακάτω πίνακα 1.7.

Διαδικασίες	Περιγραφή
Ανάκτηση γνώσης	Ανάκτηση της γνώσης από τη μακροπρόθεσμη μνήμη
Κατανόηση	Κατασκευή νοήματος από διδακτικά μηνύματα
Εφαρμογή	Χρήση μιας διαδικασίας σε μια δεδομένη κατάσταση
Ανάλυση	Διαχωρισμός τμημάτων και καθορισμός του τρόπου που τα μέρη ανήκουν μαζί
Αξιολόγηση	Κρίση βάσει κριτηρίων και προτύπων
Δημιουργία	Συνένωση (ή αναδιοργάνωση) κομματιών σε ένα σύνολο

Πίνακας 1.7: Οι γνωστικές διαδικασίες του πλαισίου (Brändström, 2005, σελ. 49).

Επίπεδο γνωστικής απαίτησης:

- Απομνημόνευση: Σε αυτό το επίπεδο ο/η μαθητής/-τρια ανακαλεί από τη μνήμη του τη γνώση για να δώσει τη σωστή απάντηση.
- Διαδικασίες με συνδέσεις σε έννοιες: Γίνεται συχνά χρήση εικόνων και εικονογραφήσεις για να βοηθήσουν το/τη μαθητή/-τρια να κατανοήσει.
- Διαδικασίες χωρίς συνδέσεις με έννοιες: Απαιτείται από το/τη μαθητή/-τρια να εκτελέσει κάποιο αλγόριθμο, χωρίς να σχετίζεται με κάποια έννοια που μαθαίνει ο/η μαθητής/-τρια.
- Κάνοντας μαθηματικά: Είναι η πιο δύσκολη πτυχή γιατί δεν απαιτείται απλώς η εφαρμογή μιας μεθόδου ή αλγορίθμου για την αναζήτηση και εύρεση της λύσης.

Συνοψίζοντας, λοιπόν το εργαλείο που κατασκευάστηκε από την Brändström (2005), φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1.3: Το πλαίσιο εφαρμογής (Brändström, 2005, σελ. 47).

Ο Li (2000) πραγματοποίησε μια συγκριτική μελέτη σχετικά με την πρόσθεση και την αφαίρεση ακεραίων που εντόπισε σε προβλήματα ή μέρη προβλημάτων στα σχολικά εγχειρίδια της 7ης τάξης της Κίνας και των ΗΠΑ. Για την εκπόνηση αυτής της μελέτης δημιούργησε ένα τρισδιάστατο πλαίσιο που περιέχει τις εξής διαστάσεις: (1) τα μαθηματικά χαρακτηριστικά, τον αριθμό των μαθηματικών διαδικασιών που απαιτούνται για τη λύση, (2) τα χαρακτηριστικά πλαισίου, τον τύπο των πληροφοριών πλαισίου στο πρόβλημα και (3) τις απαιτήσεις απόδοσης με βάση (α) τον τύπο απάντησης του προβλήματος και (β) τη γνωστική του απαίτηση (βλ. Πίνακα 1.8)

Διαστάσεις των απαιτήσεων του προβλήματος	
1. Μαθηματικά χαρακτηριστικά	<ul style="list-style-type: none"> • απαιτείται μια απλή διαδικασία υπολογισμού • απαιτούνται πολλαπλές διαδικασίες υπολογισμού
2. Χαρακτηριστικά πλαισίου	<ul style="list-style-type: none"> • καθαρά μαθηματικό πλαίσιο σε αριθμητική ή λεκτική μορφή • επεξηγηματικό πλαίσιο με εικονογραφημένη αναπαράσταση ή ιστορία
3. Απαιτήσεις επιδόσεων	
(α) Τύπος απάντησης:	<ul style="list-style-type: none"> • αριθμητική απάντηση μόνο • αριθμητική έκφραση μόνο • απαιτείται εξήγηση ή λύση
(β) Γνωστικές απαιτήσεις:	<ul style="list-style-type: none"> • διαδικαστική πρακτική • εννοιολογική κατανόηση • επίλυση προβλήματος • ειδική απαίτηση

Πίνακας 1.8: Διαστάσεις των απαιτήσεων του προβλήματος (Li, 2000, σελ. 237).

1.5 Σύνοψη 1^{ου} Κεφαλαίου

Η δύναμη των σχολικών βιβλίων βρίσκεται στη δυνατότητα να παρέχει ένα δομημένο σχέδιο ιδεών που οργανώνουν τη διδασκαλία και τη μάθηση και επιτρέπουν την ανάπτυξη της σκέψης και της κατανόησης του θέματος. Επισημαίνουμε ότι το εγχειρίδιο των μαθηματικών είναι ένα τεχνούργημα που έχει μεγάλη επιρροή στη δραστηριότητα της εκμάθησης των μαθηματικών.

Στην ενότητα αυτή παρουσιάστηκαν εκτενώς έρευνες που αφορούσαν την ανάλυση σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η ανάλυση αυτή αφορούσε το περιεχόμενο γενικά των σχολικών εγχειριδίων είτε συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο. Αξίζει να τονιστεί ότι για την εκπόνηση αυτών των ερευνών χρησιμοποιήθηκαν ήδη υπάρχοντα εργαλεία ανάλυσης έργων είτε δημιουργήθηκαν για την ανάγκη εκπόνησης της έρευνας.

Μια σειρά από αναλύσεις σχολικών βιβλίων έχουν δημοσιευτεί τα τελευταία χρόνια αλλά πολύ λίγες έχουν εξετάσει τον βαθμό στον οποίο η εκπαιδευτική τεχνολογία ενσωματώνεται στα προγράμματα σπουδών. Όπως αναφέρθηκε από τον Yerushalmy (2014), έχουν πραγματοποιηθεί λίγες μελέτες για το πώς οι μαθητές/-τριες χρησιμοποιούν τα σχολικά βιβλία καθώς επίσης δεν ξέρουμε πολλά για το πώς οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές/-τριες εκμεταλλεύονται τις νέες ευκαιρίες που παρέχονται από διαδραστικές ψηφιακές μορφές (Rezat, 2013). Στην παρούσα εργασία επιδιώκουμε να αντιμετωπίσουμε αυτό το κενό στη βιβλιογραφία σχετικά με την ανάλυση περιεχομένου των έργων που αναφέρονται στο εμβαδόν επίπεδων επιφανειών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο : ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

2.1 Εισαγωγή

Το εμβαδόν είναι μια θεμελιώδης έννοια των Μαθηματικών και συγκεκριμένα της Γεωμετρίας. Μεταξύ πολλών μαθηματικών θεμάτων, η έννοια του εμβαδού αποτελεί μία από τις μαθηματικές έννοιες με την οποία οι μαθητές/-τριες έρχονται σε επαφή από την προσχολική τους ηλικία μέχρι τις τελευταίες τάξεις του Λυκείου και αποτελεί ένα βασικό τομέα των μαθηματικών με εκτεταμένες εφαρμογές στην πραγματική ζωή (Lehrer, 2003). Ο υπολογισμός του εμβαδού μιας επιφάνειας υπήρξε αντικείμενο μελέτης για τους μαθηματικούς από αρχαιοτάτων χρόνων και συνεχίζει να απασχολεί τους μελετητές και ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών και γενικότερα των Θετικών Επιστημών.

Στο Κεφάλαιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα αναφερθούμε στο εμβαδόν επίπεδων επιφανειών, τόσο σε ιστορικά στοιχεία αλλά και πως προσεγγίζεται θεωρητικά η έννοια αυτή. Αναμφισβήτητα, η σημασία των προβλημάτων που συνδέονται με τον υπολογισμό εμβαδών και οι δυσκολίες που παρουσιάζουν, οδήγησαν τους μαθηματικούς από την αρχαιότητα στη δημιουργία ή την επινόηση μεθόδων μέτρησης εμβαδών, ιδιαίτερα επιφανειών που περικλείονται από καμπύλες (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Μέτης, Μπρουχούτας, Παπασταυρίδης, Πολύζος & Θωμαΐδης, 2021). Στην παρούσα εργασία θα αναφέρουμε κάποια σημαντικά ιστορικά στοιχεία από τα επιτεύγματα των Αιγυπτίων, των Μεσοποταμίω και των Κινέζων. Πολύ σημαντική συμβολή στα προβλήματα που αφορούσαν το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών ήταν η συμβολή των αρχαίων Ελλήνων και ιδιαίτερα του Αρχιμήδη (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Μέτης, Μπρουχούτας, Παπασταυρίδης, Πολύζος & Θωμαΐδης, 2021). Αξίζει να επισημάνουμε ότι οι ιδέες και οι εφευρέσεις του Αρχιμήδη για το πρόβλημα του εμβαδού υπήρξαν η αφετηρία της δημιουργίας του σύγχρονου ολοκληρωτικού λογισμού (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Μέτης, Μπρουχούτας, Παπασταυρίδης, Πολύζος & Θωμαΐδης, 2021). Σε επόμενη παράγραφο του 2^{ου} Κεφαλαίου θα επισημανθούν οι κυριότερες δυσκολίες των μαθητών/-τριών που αφορούν στην κατανόηση της έννοιας που μελετάμε σε αυτή την εργασία. Και τέλος, θα παρουσιαστούν οι στόχοι που έχουν τεθεί στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών στο Γυμνάσιο. Συγκεκριμένα θα παρουσιάσουμε τους στόχους του Προγράμματος Σπουδών του 2003 στους οποίους στηρίζονται τα υπάρχοντα σχολικά εγχειρίδια και τους στόχους του Προγράμματος Σπουδών του 2021 και αν υπάρχουν διαφορές μεταξύ τους.

2.2 Ιστορικά στοιχεία

Η μέτρηση γενικά είναι μια οικουμενική και ζωτικής σημασίας δραστηριότητα, που απασχόλησε και απασχολεί όλους τους λαούς ανεξαιρέτως σε πολλές κοινωνικές εκφάνσεις, παραδείγματος χάρη στην επιστήμη, στην τεχνολογία αλλά και σε προβλήματα της καθημερινότητας. Αξίζει να αναφέρουμε ότι τα πρώτα γεωμετρικά σχήματα εμφανίστηκαν πριν από 15.000 χρόνια σε κάποια αντικείμενα που εξυπηρετούσαν διακοσμητικές ανάγκες (Αργυρόπουλος, Βλάμος, Κατσούλης, Μαρκάτης & Σίδερης, 2016) και όπως επισημαίνεται από τον Τουμάση (1994), οι Αιγύπτιοι ήταν αυτοί που ασχολήθηκαν πρώτοι με τη μαθηματική επιστήμη. Ο όρος «Γεωμετρία» προέρχεται από δύο λέξεις τη «Γη» και τη «Μέτρηση» (Αργυρόπουλος και συν., 2016). Ο πρώτος ιστορικός της Γεωμετρίας, ο

Εύδημος ο Ρόδιος (περίπου 485-430 π.Χ.), συνέδεσε τη δημιουργία της Γεωμετρίας με την ανάγκη της μέτρησης της γης στην Αίγυπτο, έτσι ώστε να αποκατασταθούν τα όρια των χωραφιών που χανόντουσαν από τις ετήσιες πλημμύρες του Νείλου (Αργυρόπουλος και συν., 2016). Οι γεωργοί ήταν αναγκασμένοι να μετρούν την έκταση των χωραφιών που κατείχαν και οι μέθοδοι που χρησιμοποιούσαν για να υπολογίσουν το εμβαδόν είχαν τις ρίζες τους στους πρώτους αγροτικούς πολιτισμούς (Αργυρόπουλος και συν., 2016). Οι πιο παλιοί από αυτούς είχαν αναπτυχθεί περί το 3.500 π.Χ. κατά μήκος μεγάλων ποταμών, όπως του Τίγρη και του Ευφράτη στη Μεσοποταμία, του Νείλου της Αιγύπτου, των Huang και Yangtze της Κίνας, του Ινδού και του Γάγγη στην Ινδία (Αργυρόπουλος και συν., 2016). Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Φαραώ μετά από τις πλημμύρες του Νείλου όριζε «μετρητές», οι οποίοι υπολόγιζαν εκ νέου τα σύνορα των Αιγύπτων αγροτών για τις οποίες οι Αιγύπτιοι φορολογούνταν (Burton, 2011; Αργυρόπουλος και συν., 2016). Σύμφωνα με τον Ηρόδοτο, ο φόρος που καταβάλλονταν από τους αγρότες ήταν ανάλογος της έκτασης που κατείχαν, όμως σε περίπτωση πλημμυρών ο φόρος προσαρμοζόταν ανάλογα με το μέρος της έκτασης που δεν είχε καταστραφεί όπως καταγραφόταν από τους «μετρητές» (Burton, 2011).

Οι Αιγύπτιοι γραφείς ήξεραν ασφαλώς πώς να υπολογίζουν τα εμβαδά των ορθογωνίων, τριγώνων και τραπεζοειδών με τις συνήθεις μεθόδους μας (Burton, 2011; Katz, 2008). Οι πάπυροι που έχουν φτάσει σε εμάς περιέχουν πολλά συγκεκριμένα παραδείγματα (Burton, 2011). Οι δύο πιο γνωστοί αιγυπτιακοί μαθηματικοί πάπυροι είναι ο πάπυρος Rhind ή ο Αχμής, (περίπου το 1650 π. Χ.) και ο πάπυρος της Μόσχας (περίπου το 1850 π. Χ.) (Burton, 2011). Από τα ιερογλυφικά που υπάρχουν στους τοίχους του Ναού του Χόρου στο Edfu, που χρονολογείται περίπου στα 100 π. Χ., οι Αιγύπτιοι για να υπολογίσουν το εμβαδόν οποιουδήποτε τετραπλεύρου χρησιμοποίησαν τον παρακάτω τύπο: $A = \frac{1}{4}(a + c)(b + d)$, όπου a, b, c και d είναι τα μήκη των διαδοχικών πλευρών (Burton, 2011). Η φόρμουλα είναι προφανώς ανακριβής. Δίνει μια αρκετά ακριβή απάντηση μόνο όταν το τετράπλευρο είναι περίπου ορθογώνιο, δηλαδή αν $a = c$ και $b = d$ (Burton, 2011). Ίσως το καλύτερο επίτευγμα των Αιγυπτίων στη δισδιάστατη γεωμετρία ήταν η μέθοδος τους για τον προσδιορισμό του εμβαδού ενός κύκλου, που εμφανίζεται στο Πρόβλημα 50 στον Πάπυρο Rhind (Burton, 2011; Katz, 2008). Ο Αιγύπτιος γραφέας χρησιμοποιούσε μια διαδικασία που περιγράφεται από τον τύπο $A = (d - d/9)^2 = [(8/9)d]^2$ όπου d η διάμετρος του κύκλου (Burton, 2011; Katz, 2008). Μια σύγκριση με τον τύπο $A = (\pi/4)d^2$ δείχνει ότι η αιγυπτιακή τιμή για τη σταθερά π στην περίπτωση εμβαδού ήταν $256/81 = 3,16049 \dots$ (Burton, 2011; Katz, 2008). Σε ακόμα ένα άλλο πρόβλημα του παπύρου Rhind ζητείται να γίνει σύγκριση του εμβαδού του οκταγώνου και του περιγεγραμμένου τετραγώνου. Συγκεκριμένα, ζητείται να υπολογιστεί το εμβαδόν του οκταγώνου (Burton, 2011; Katz, 2008). Για να λυθεί το πρόβλημα υπολογίζεται το εμβαδόν του εγγεγραμμένου στο τετράγωνο κύκλου, με διάμετρο 9, το εμβαδόν του οκταγώνου διαμέτρου 9 προσεγγίζει το εμβαδόν του κύκλου διαμέτρου 9 (Burton, 2011; Katz, 2008). Το πρόβλημα 52 του παπύρου του Rhind απαιτεί τον υπολογισμό του εμβαδού ενός τραπεζοειδούς (περιγράφεται ως κόλουρο τρίγωνο), τα μήκη των παράλληλων πλευρών του είναι 6 και 4 αντίστοιχα και μια μη παράλληλη πλευρά μήκους 20 μονάδων (Burton, 2011). Ο υπολογισμός γίνεται με τον τύπο: $A = \frac{1}{2}(b + b')h$ (Burton, 2011). Το πρόβλημα 6 του πάπυρου της Μόσχας παρουσιάζει έναν τρόπο για τον υπολογισμό ενός ορθογωνίου. Συγκεκριμένα, δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 12 που έχει το $(1/2+1/4)$ του μήκους για πλάτος και ζητούνται οι διαστάσεις του (μήκος και πλάτος) (Katz, 2008).

Ο πολιτισμός της Μεσοποταμίας είναι ίσως λίγο παλαιότερος από τον αιγυπτιακό, έχοντας αναπτυχθεί στην κοιλάδα του ποταμού Τίγρη και Ευφράτη που αρχίζει κάπου στην πέμπτη

χιλιετία π.Χ. (Katz, 2008). Σήμερα η περιοχή αυτή περιλαμβάνει το Ιράκ και τμήματα της Συρίας και του Ιράν. Αξίζει να τονιστεί ότι οι πολιτιστικές παραδόσεις της Μεσοποταμίας, που συμπεριλαμβάνουν τη γραφή και τα Μαθηματικά είναι αξιοσημείωτες. Ευρήματα όπως αργιλικές πινακίδες από την πόλη Ουρούκ από το 3000 π. Χ. δείχνουν ότι υπάρχουν υπολογισμοί για την εύρεση εμβαδών πεδίων ακόμα και τραπεζοειδών (Katz, 2008; Burton, 2011). Επιπλέον πλάκες με πιθανή χρονολογία από το 2500 π. Χ., οι οποίες χρησιμοποιούνταν σε σχολεία, παριστούν κύκλους εγγεγραμμένους σε 25 τετράγωνα όπου ζητείται να υπολογιστεί το εμβαδόν του κύκλου και του τετραγώνου (Katz, 2008; Burton, 2011). Από πινακίδες που έχουν διασωθεί μπορούμε να συμπεραίνουμε ότι στη Μεσοποταμία ήξεραν πώς να βρουν εμβαδά τριγώνων και τραπεζοειδών. Για να υπολογίσουν το εμβαδόν ενός κύκλου περιφέρειας C , χρησιμοποίησαν τον τύπο $A = \frac{C^2}{12}$ ισοδύναμο με τον τύπο μας $A = \pi \cdot r^2$ αν αντικαταστήσουμε π με 3 ή ακόμα τον τύπο $A = \frac{C}{2} \cdot \frac{D}{2}$, όπου D είναι η διάμετρος του κύκλου (Katz, 2008; Burton, 2011). Σε ακόμα ένα πρόβλημα από αρχαία πινακίδα από τη Μεσοποταμία ζητείται να υπολογιστεί το εμβαδόν ενός ισοσκελούς τραπεζίου του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές έχουν μήκος 30 μονάδες και οι βάσεις του τραπεζίου έχουν μήκος 14 και 50 μονάδες (Katz, 2008; Burton, 2011).

Η κινεζική γεωμετρία ήταν γενικά πρακτική, αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις οι Κινέζοι μαθηματικοί ανέπτυξαν σημαντικές θεωρητικές αρχές για την επίλυση δύσκολων προβλημάτων (Katz, 2008). Το παλαιότερο κινεζικό κείμενο που ασχολείται αποκλειστικά με τα μαθηματικά είναι το Jiuzhang Suanshu «Εννέα Κεφάλαια της Μαθηματικής Τέχνης» (Katz, 2008). Οι Κινέζοι ανέπτυξαν πολυάριθμους τύπους για τον υπολογισμό των εμβαδών και των όγκων των γεωμετρικών πεδίων (Katz, 2008). Πολλοί από αυτούς είναι τυπικοί τύποι, όπως αυτοί για τα εμβαδά των ορθογωνίων και των τριγώνων ή για τον όγκο των παραλληλεπίπεδων. Το κείμενο «Εννέα Κεφάλαια της Μαθηματικής Τέχνης» δίνει επίσης το σωστό τύπο για τον όγκο μιας πυραμίδας (Katz, 2008).

Οι Έλληνες μετέτρεψαν τα μαθηματικά σε έναν κλάδο, μεταμορφώνοντας μια ποικίλη συλλογή από εμπειρικούς κανόνες υπολογισμού σε μια τακτική και συστηματική ενότητα (Burton, 2011). Αν και οι Έλληνες κληρονόμησαν μια συσσωρευμένη ανατολική γνώση, έφτιαξαν με τις δικές τους προσπάθειες τα μαθηματικά πιο βαθιά, πιο αφηρημένα (όχι αποκλειστικά για τη χρήση σε προβλήματα της καθημερινής ζωής) και πιο ορθολογικά από ό,τι προηγήθηκε (Burton, 2011).

Η Γεωμετρία ήταν ένας πολύ καλά ανεπτυγμένος κλάδος των Μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα. Αξίζει να επισημαίνουμε ότι οι Έλληνες μαθηματικοί γνώριζαν αλλά και επιπλέον είχαν τη δυνατότητα να αποδείξουν τους πιο πολλούς τύπους εμβαδού και όγκου που είχαν μελετηθεί. Ένα ξεχωριστό εργαλείο που δημιουργήθηκε από τους Έλληνες της αρχαίας Ελλάδας για τον υπολογισμό των αριθμητικών δεδομένων ήταν ο άβακας ή άβαξ. Οι μεγαλύτεροι γεωμέτρους στην αρχαία Ελλάδα ήταν ο Ευκλείδης (περίπου 300 π. Χ.) και ο Αρχιμήδης (287-212 π. Χ.), οι οποίοι ανακάλυψαν πολλούς τύπους για την εύρεση εμβαδών και όγκων.

Ο Ευκλείδης (περίπου 300 π. Χ.) προσπάθησε να οικοδομήσει ολόκληρη την έκδοση της ελληνικής γεωμετρικής γνώσης, συγκεντρωμένη από την εποχή του Θαλή, σε αξιώματα ειδικής γεωμετρικής φύσης και σε αξιώματα που προορίζονταν να ισχύουν για όλα τα μαθηματικά, τις τελευταίες τις ονόμασε κοινές έννοιες (Burton, 2011). Ο Ευκλείδης υπήρξε από τους μαθηματικούς που ασχολήθηκε διεξοδικά με την έννοια του εμβαδού. Τα *Στοιχεία*

του Ευκλείδη είναι το σημαντικότερο μαθηματικό κείμενο των ελληνικών χρόνων και πιθανώς όλων των εποχών (Katz, 2008). Έχει εμφανιστεί σε περισσότερες εκδόσεις από οποιοδήποτε άλλο έργο εκτός από τη Βίβλο (Katz, 2008). Τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη είναι ένα έργο σε δεκατρία βιβλία (Katz, 2008). Στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη παρουσιάζονται και αποδεικνύονται πολλοί από τους τύπους για την εύρεση των εμβαδών των επιφανειών. Χαρακτηριστικό γεγονός είναι ότι ο Ευκλείδης αποδίδει τους τύπους αυτούς με λέξεις αντί να χρησιμοποιήσει σύμβολα και τείνει να αποδώσει τα εμβαδά σε συνάρτηση με τα εμβαδά άλλων είκοσι (20) σχημάτων. Αξιοσημείωτο παράδειγμα αποτελεί, στην Πρόταση 41 του Βιβλίου Ι των *Στοιχείων*, ο Ευκλείδης υπολογίζει το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου μέσω του εμβαδού τριγώνου ως εξής: «Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει την ίδια βάση με αυτή ενός τριγώνου και οι δύο βάσεις είναι μεταξύ τους παράλληλες τότε το παραλληλόγραμμο είναι διπλάσιο του τριγώνου» (Burton, 2011).

Το έργο του Αρχιμήδη (περίπου 287–212 π.Χ.) αποτελεί την επιτομή των αλεξανδρινών μαθηματικών (Burton, 2011). Ο Αρχιμήδης έζησε μια ή δύο γενιές μετά τον Ευκλείδη και ήταν σύγχρονος του Ερατοσθένη και θεωρείται η μεγαλύτερη δημιουργική ιδιοφυΐα του αρχαίου κόσμου τόσο στον τομέα των Μαθηματικών όσο και της Φυσικής και της Μηχανικής (Burton, 2011). Αυτό που διακρίνει το έργο του Αρχιμήδη στη γεωμετρία από αυτό του Ευκλείδη είναι ότι ο Αρχιμήδης παρουσίαζε συχνά τη μέθοδο ανακάλυψης του θεωρήματος ή/και την ανάλυσή του για την κατάσταση πριν παρουσιάσει μια αυστηρή συνθετική απόδειξη (Katz, 2008). Αξίζει να αναφέρουμε ότι παραδείγματος χάριν απέδειξε ότι το εμβαδόν του κύκλου είναι ίσο με το μισό του γινομένου της ακτίνας του επί την περιφέρειά του (Burton, 2011). Στην Πρόταση 1 από το βιβλίο του «Περί της Μέτρησης Του Κύκλου» εκφράζει το εμβαδόν του κύκλου σε σχέση με το εμβαδόν του τριγώνου ως εξής: «Το εμβαδόν κάθε κύκλου ισούται με το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου, στο οποίο μία από τις πλευρές είναι ίση με την ακτίνα r του κύκλου και μία άλλη με την περίμετρο C » (Burton, 2011).

2.3 Θεωρητική προσέγγιση του εμβαδού

Το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας ως έννοια είναι «ο θετικός αριθμός που εκφράζει την έκταση που καταλαμβάνει η επιφάνεια αυτή στο επίπεδο» (όπως ορίζεται στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου). Ο αριθμός αυτός που εκφράζει το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας στην εμπειρική γεωμετρία της αρχαιότητας εξαρτιόταν άμεσα από τη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιούνταν (Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης & Ρεκούμης, 2016).

Η μέτρηση του εμβαδού επίπεδων επιφανειών αποτελεί μια έννοια πιο αφηρημένη σε σύγκριση με άλλες μετρήσεις και παρά το γεγονός ότι οι μαθητές/-τριες την κατανοούν διαισθητικά, δεν μπορούν να την ορίσουν γιατί δεν την κατανοούν εννοιολογικά (Murphy, 2011). Οι Piaget, Inhelder & Szeminska (1981) ορίζουν τη μέτρηση ως μια διαδικασία που συνδυάζει το μερισμό και τη μετατόπιση, δηλαδή από ένα μέγεθος επιλέγεται ένα μέρος αυτού ως μονάδα μέτρησης και αυτό μετατοπίζεται στο υπόλοιπο του αρχικού μεγέθους. Επιπλέον οι κονστρουκτιβιστές υποστηρίζουν ότι υπάρχουν δυο μοντέλα για τη μέτρηση του εμβαδού: ο εκπαιδευόμενος επιχειρεί: α) με επανατοποθέτηση της μονάδας και χωρίς επικαλύψεις και κενά να καλύψει το μέγεθος και β) με ταυτόχρονη κάλυψη ολόκληρου του μεγέθους με ένα πλήθος μονάδων (Nunes et al., 1993). Όσον αφορά τη διαδικασία της μέτρησης αυτή όπως επισημαίνεται από τους Wilson & Rowland (1993), μπορεί να καθοριστεί από τρεις παραμέτρους: της διατήρησης, της μεταβατικότητας και της μονάδας

μέτρησης, με μια βασική απαίτηση η οποία είναι η κατανόηση «ότι κάθε σχήμα διατηρεί τη μορφή και το μέγεθός του, ανεξάρτητα από τυχόν μετατόπιση ή διαχωρισμό του σε μέρη».

Η έννοια της διατήρησης του εμβαδού είναι αποτέλεσμα μιας γνωστικής διαδικασίας κατά την οποία η αριθμητική τιμή που προκύπτει από τη μέτρηση του εμβαδού μιας επιφάνειας δεν αλλάζει καθώς το σχήμα που ορίζει η επιφάνεια αυτή αλλάζει και παίρνει μια άλλη ποιοτική μορφή (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1981). Αυτό που μπορούμε να πούμε είναι ότι μια επιφάνεια η οποία χωρίζεται ή συγκροτείται σε επιμέρους τμήματα, δε μεταβάλλεται ακόμα και αν τα επιμέρους τμήματα ανασυγκροτηθούν (Αλεξανδρόπουλος, Γλάρος & Μαρκόπουλος, 2009). Η Kordaki (2003) αναφέρει ότι πολύ σημαντικό ρόλο παίζουν τα εργαλεία που χρησιμοποιούν οι μαθητές/-τριες σε δραστηριότητες που αναφέρονται στην αρχή της διατήρησης, τα οποία τους βοηθούν να κατανοήσουν εννοιολογικά την έννοια του εμβαδού. Αρκετοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η χρήση υλικών όπως χαρτιού και ψαλιδιού που παρέχουν τη δυνατότητα στους μαθητές να κόψουν, να μετακινήσουν και να επανενώσουν τα κομμάτια ενός σχήματος, για να κατασκευάσουν ένα καινούριο ισοδύναμο σχήμα βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια της διατήρησης του εμβαδού (Rahim & Sawada, 1990; Καφούση & Σκουμπουρδή, 2008).

Αξίζει να τονιστεί το γεγονός ότι η έννοια της μη μεταβολής ή της σταθερότητας της επιφάνειας ενός σχήματος καθώς αυτό αλλάζει μορφή δίνει τη δυνατότητα τους μαθητές να αναπτύξουν μια μη στατική αλλά δυναμική αντίληψη του εμβαδού (Αλεξανδρόπουλος, Γλάρος & Μαρκόπουλος, 2009, 2013). Όπως επισημαίνεται και από τους Πιττάλης, Μουσουλίδης & Χρίστου (2004) αν καταφέρουν οι μαθητές/-τριες να κατανοήσουν την αρχή της σταθερότητας της επιφάνειας, τότε θα έχουν κατακτήσει και την πρωταρχική διαδικασία για την κατανόηση της μέτρησης.

Όσον αφορά την έννοια της μεταβατικότητας αυτή αναφέρεται στη δυνατότητα να μεταφερθεί ένα μέτρο πχ. μια ράβδος ώστε να γίνει σύγκριση δυο μηκών τα οποία δεν μπορούν να παραταχθούν (Φιλίππου, Χρίστου, Μιχαηλίδης & Αντωνιάδου, 1998).

Όπως επισημαίνεται από τους Φιλίππου και συν. (1998), για να πραγματοποιηθεί μια μέτρηση αρχικά θα πρέπει να οριοθετηθεί το μέγεθος που θα μετρηθεί και στη συνέχεια ακολουθεί ο μερισμός αυτού σε διακριτά και ίσα μέρη. Η μέτρηση περνά τα ακόλουθα στάδια αναγνώριση-οριοθέτηση της επιφάνειας προς μέτρηση, σύγκριση εμβαδών, επιλογή κάποιας μονάδας μέτρησης, η μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιείται κατά σύμβαση και τέλος δραστηριότητες που αφορούν τη μέτρηση και ανακάλυψη τύπων (Φιλίππου και συν., 1998; Καφούση & Σκουμπουρδή, 2008).

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία απαραίτητη προϋπόθεση για να πραγματοποιηθεί μια μέτρηση είναι η σύγκριση μεγεθών η οποία έχει ως αποτέλεσμα να προσδιοριστεί η έννοια της ισότητας (Χασάπης, Ζαχάρος & Τρέσσου, 1997). Τα μεγέθη όπως το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος, του εμβαδού μιας επίπεδης επιφάνειας μπορούν να εκφραστούν με έναν αριθμό. Ο Ευκλείδης όταν ήθελε να αποδείξει ότι δυο σχήματα έχουν ίσα εμβαδά, τότε έδειχνε ότι εάν το ένα από τα δυο σχήματα μπορούσε να χωριστεί σε μέρη τέτοια ώστε αν αναδιοργανωθούν να δημιουργήσουν το άλλο σχήμα (Χασάπης, Ζαχάρος & Τρέσσου, 1997).

2.4 Δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση του εμβαδού επίπεδων επιφανειών

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστούν κάποια ερευνητικά στοιχεία σχετικά με τις δυσκολίες των μαθητών/-τριών γύρω από την κατανόηση της έννοιας εμβαδού επίπεδων επιφανειών. Συγκεκριμένα, θα παρουσιαστούν κάποιες έρευνες οι οποίες αναφέρονται στην κατανόηση της έννοιας του εμβαδού, τις στρατηγικές και τις μεθόδους που χρησιμοποιούν οι μαθητές για τη μέτρηση και τη σύγκριση εμβαδών επίπεδων επιφανειών και, τέλος, τη χρήση του υλικού. Ένας αριθμός μελετών έχει προσπαθήσει να εντοπίσει και να ταξινομήσει την ποικιλία των προσεγγίσεων που χρησιμοποιούν οι μαθητές στην αντιμετώπιση της έννοιας της μέτρησης του εμβαδού (Kordaki & Potari, 2002). Αυτές οι μελέτες δείχνουν ότι υπάρχουν ιεραρχικά επίπεδα κατανόησης αυτής της έννοιας. Ειδικότερα, οι μαθητές/-τριες διερευνούν πρώτα τα χωρικά χαρακτηριστικά μιας επιφάνειας που πρόκειται να μετρηθεί. Δεύτερον, μετασχηματίζουν και συγκρίνουν επιφάνειες χρησιμοποιώντας τις αισθητηριοκινητικές τους ενέργειες χωρίς τη χρήση αριθμών. Τρίτον, χρησιμοποιούν μια ποικιλία μονάδων για τη μέτρηση των επιφανειών και τέλος χρησιμοποιούν τύπους εμβαδών (Inskoop, 1976; Driscoll, 1981).

Οι Baturο και Nason (1996) κάνουν αναφορά σε μια σειρά από έρευνες που επισημαίνουν πως πολλές από τις παρανοήσεις που έχουν οι μαθητές/-τριες σχετικά με την κατανόηση της έννοιας του εμβαδού επίπεδων επιφανειών οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές/-τριες αδυνατούν ή δυσκολεύονται να κατανοήσουν εννοιολογικά την έννοια του εμβαδού. Για να υπολογίσουν οι μαθητές το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας δε χρησιμοποιούν προσεγγιστικές λύσεις γιατί η έννοια αυτή εισαγάγεται στους μαθητές με τη χρήση αλγεβρικών τύπων χωρίς να δίνεται έμφαση στην εννοιολογική κατανόησή του (Patahuddin et al., 2018). Επισημαίνεται ότι άμεση συνέπεια αυτών είναι ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν αριθμούς (Patahuddin et al., 2018) και αδυνατούν να διαχειριστούν την έννοια του εμβαδού επίπεδων επιφανειών χωρίς να κάνουν μετρήσεις (Machaba, 2016) καθώς επίσης δεν μπορούν να ορίσουν το εμβαδόν ως έννοια χωρίς τη χρήση ενός τύπου.

Η έννοια του εμβαδού επίπεδων επιφανειών συνδέεται άρρηκτα με την πράξη του πολλαπλασιασμού. Οι μαθητές/-τριες αρκετά συχνά συνδέουν ή συγχέουν τον κανόνα «μήκος x πλάτος» με την έννοια του εμβαδού. Αναλύοντας τον παραπάνω ισχυρισμό μπορούμε να πούμε ότι οι μαθητές για να υπολογίσουν αριθμητικά το εμβαδόν ενός επίπεδου σχήματος πολλαπλασιάζουν μονάδες μέτρησης και καταλήγουν να βρουν τετραγωνικές μονάδες. Όπως επισημαίνουν οι Baturο και Nason (1996), αυτό έρχεται σε αντίθεση με την έννοια του εμβαδού.

Μια ακόμα δυσκολία των μαθητών/-τριών για την κατανόηση του εμβαδού επίπεδων επιφανειών έγκειται στη χρήση των μονάδων μέτρησης. Παρατηρείται οι μαθητές/-τριες να μην είναι αρκετά εξοικειωμένοι με τις μονάδες μέτρησης αφού εμφανίζουν αρκετές δυσκολίες στη χρήση των μονάδων μέτρησης με αποτέλεσμα κάποιες φορές να μην τις αναφέρουν καθόλου (Σιδηρόπουλος, 2013). Επιπλέον αξίζει να τονιστεί το γεγονός ότι για τον υπολογισμό του εμβαδού χρησιμοποιούνται μονάδες μέτρησης οι οποίες δεν είναι τετραγωνικές και αυτό συνεπάγεται μια πηγή δυσκολίας για την κατανόηση της έννοιας.

Όπως επισημαίνουν οι Φιλίππου και συν. (1998), η έννοια του εμβαδού έχει δυο διαστάσεις, τη στατική η οποία αναφέρεται σε μια επιφάνεια που μπορεί να μετρηθεί και οριοθετείται από ένα σταθερό περίγραμμα-σύνορο και τη δυναμική η οποία επικεντρώνεται στη σχέση

ανάμεσα στο περίγραμμα και την επιφάνεια που περικλείεται. Η δυναμική διάσταση απουσιάζει από τη διδασκαλία και αυτό έχει ως αποτέλεσμα να περιορίζεται η αντίληψη από τους μαθητές για την έννοια του εμβαδού και να δημιουργούνται παρανοήσεις (Φιλίππου και συν., 1998).

Οι μαθητές/-τριες παρατηρείται συχνά να εμφανίζουν δυσκολίες στη σύγκριση ισεμβαδικών, και όχι μόνο, σχημάτων. Όταν συγκρίνουν άμεσα δύο εμβαδά δυσκολεύονται, εκτός από την περίπτωση που συγκρίνουν σχήματα που έχουν κάτι κοινό είτε διάσταση είτε χαρακτηριστικό. Αξιοσημείωτο παράδειγμα αποτελεί το εξής: μπορούν να συγκρίνουν δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα με το ίδιο πλάτος, ενώ δεν μπορούν εύκολα να κατανοήσουν ότι η αναδιοργάνωση των επιφανειών σε διαφορετικά σχήματα δεν επηρεάζει αριθμητικά το εμβαδόν (Van de Walle, 2007). Το εμβαδόν εξακολουθεί να αποτελεί μια σταθερή συνιστώσα με την ιδιότητα ότι δύναται να μη μεταβληθεί ακόμα κι αν η μορφή του αντίστοιχου σχήματος αλλάξει, γεγονός που αποτελεί μια σημαντική πηγή δυσκολίας από πολλούς μαθητές (Piaget et al, 1981).

Η Herendiné-Kónya (2015) πραγματοποίησε έρευνα για να διερευνήσει την προηγούμενη γνώση και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές/-τριες όταν έχουν να αντιμετωπίσουν εργασίες που αφορούν το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας και την περίμετρο. Το ερευνητικό δείγμα περιλάμβανε 84 μαθητές ηλικίας 11-14 ετών από το ίδιο σχολείο στην Ουγγαρία. Η ανάλυση των δεδομένων έγινε με πέντε δραστηριότητες που ζητήθηκε από τους μαθητές να απαντήσουν σχετικά με τον υπολογισμό του εμβαδού και της περιμέτρου. Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας έδειξαν:

1. έλλειψη κατανόησης των δύο γεωμετρικών εννοιών περιμέτρου και εμβαδού,
2. ενώ αναμενόταν ότι οι μεγαλύτεροι μαθητές αποδίδουν καλύτερα λόγω των διευρυμένων γνώσεων, αντίθετα οι γνώσεις που είχαν ήδη για την έννοια του εμβαδού δεν αναπτύχθηκαν απαραίτητα, καθώς οι μαθητές ξέχασαν ακόμα και τις ιδέες που είχαν καθιερωθεί νωρίτερα,
3. οι μαθητές/-τριες σκέφτονται την έννοια του εμβαδού ως προϊόν των πλευρών και
4. οι μαθητές/-τριες μπορούν να ξεχάσουν εύκολα έννοιες και διαδικασίες που έχουν διδαχθεί εάν δεν έχουν τη δυνατότητα να τις χρησιμοποιήσουν και να τις εφαρμόσουν σε εργασίες που αφορούν τις συγκεκριμένες έννοιες.

Όπως επισημάνθηκε και στην προηγούμενη ενότητα η διαδικασία της μέτρησης όπως επισημαίνεται από τους Wilson & Rowland (1993), μπορεί να καθοριστεί από τρεις παραμέτρους: της διατήρησης, της μεταβατικότητας και της μονάδας μέτρησης. Σε έρευνα που εκπονήθηκε από τους Kospentaris, Spyrou & Lappas (2011), είχε σκοπό να διερευνήσει τις στρατηγικές που εφαρμόζουν οι μαθητές/-τριες όταν τους έχουν ανατεθεί εργασίες που αφορούν το εμβαδόν. Για το σκοπό αυτό δόθηκαν στους μαθητές έξι εργασίες σχετικά με τη σύγκριση και τη διατήρηση του εμβαδού. Το δείγμα αποτελούνταν από 20 μαθητές/-τριες (3ης γυμνασίου την προηγούμενη χρονιά και λυκείου) και 30 προπτυχιακοί φοιτητές/-τριες 1ου και 2ου έτους μαθηματικών από το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών. Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν ήταν τα εξής:

1. Ποιες στρατηγικές χρησιμοποιούν οι μαθητές για την επίλυση εργασιών διατήρησης γεωμετρικών περιοχών;
2. Ποια είναι τα ιδιαίτερα προβλήματα σε αυτές τις στρατηγικές σε σχέση με τις τυπικές διαδικασίες γεωμετρίας;
3. Ποιος είναι ο ρόλος της οπτικοποίησης στην επιλογή της στρατηγικής τους;
4. Ποιος είναι ο ρόλος της οπτικοποίησης στην εφαρμογή αυτής της στρατηγικής;

Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης έδειξαν ότι:

1. Σε ορισμένες περιπτώσεις, αν και έγινε υπενθύμιση των τύπων οι μαθητές/-τριες δεν μπορούσαν να τους συσχετίσουν με την εργασία ή επικαλέστηκαν προτάσεις και τύπους απολύτως άσχετους με τα προβλήματα ή δεν μπορούσαν να εφαρμόσουν τον τύπο του τριγώνου επειδή δεν είχαν σωστή κατανόηση της έννοιας του ύψους.
2. Οι μαθητές/-τριες χρησιμοποίησαν αφαιρετική συλλογιστική ή οπτικές εκτιμήσεις σε ασυνεπή μορφή, ανάλογα με τη δυσκολία της εργασίας.
3. Οι μαθητές/-τριες στην περίπτωση της μέτρησης χρησιμοποίησαν π.χ. λανθασμένες μονάδες ή προσεγγίσεις και όσον αφορά το συλλογισμό που ακολούθησαν για να επιλύσουν μια εργασία χρησιμοποίησαν π.χ. λάθος ύψος σε ένα τρίγωνο ή παρέλειψαν ένα βήμα από την απόδειξη κ.λπ.

Στην εργασία των Λυμπεροπούλου, Δακάκης & Μυσιρλής (2014) παρουσιάζεται ο τρόπος εισαγωγής του εμβαδού τριγώνου στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, και επιχειρείται σύγκριση με τον τρόπο που προσεγγίζεται το ζήτημα σε αντίστοιχα βιβλία δυτικοευρωπαϊκών χωρών. Για την εκπόνηση της εργασίας τους συμμετείχαν 53 μαθητές και μαθήτριες της Β Γυμνασίου. Η εργασία δόθηκε στα πρόσωπα της έρευνας χωρίς προειδοποίηση και χωρίς να πραγματοποιηθεί επαναπροσδιορισμός των εννοιών του εμβαδού και του ύψους σχημάτων, τις οποίες είχαν διαπραγματευτεί σε προηγούμενες τάξεις. Οι μαθητές/-τριες εργάστηκαν ατομικά για μία διδακτική περίοδο (45 λεπτά) στα ζητήματα της δραστηριότητας. Στη συνέχεια συγκεντρώθηκαν τα φύλλα εργασίας και επιχειρήθηκε η κατηγοριοποίησή τους βάσει των κειμένων τους. Από τα 53 φύλλα εργασίας, τα 13 δεν ελήφθησαν υπόψη στο στάδιο της ποιοτικής ανάλυσης, αφού οι μαθητές/τριες δεν τεκμηριώναν τις επιλογές τους. Διερευνήθηκαν τα εξής ερωτήματα:

1. Η γεωμετρική «απόδειξη» βοηθάει στην βαθύτερη κατανόηση της έννοιας του εμβαδού τριγώνου ή απλώς εισάγει, έστω και διαισθητικά, την έννοια της απόδειξης και εξασφαλίζει, κατά κάποιο τρόπο, την μαθηματική εγκυρότητα του τύπου $E=(\beta \cdot \upsilon):2$;
2. Ποιες παρανοήσεις ή λανθασμένες αντιλήψεις και πρακτικές μπορεί να δημιουργήσει η έννοια της βάσης του τριγώνου, είτε ορίζεται σαφώς, είτε χρησιμοποιείται γενικώς και αορίστως, εμφανίζεται πάντως στον τύπο;

Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής είναι τα εξής:

1. Τα ευρήματα αναδεικνύουν ότι η χρήση της λέξης «βάση», που αξιολογείται ευρέως στην υποχρεωτική εκπαίδευση για τον υπολογισμό του εμβαδού τριγώνου δημιουργεί διδακτικά εμπόδια στους μαθητές και οδηγεί στην απομνημόνευση τύπων παρά στην κατανόηση του εμβαδού τριγώνου.
2. Το εμβαδόν του ορθογωνίου υπολογίζεται στην υποχρεωτική εκπαίδευση ως γινόμενο του μήκους του επί το πλάτος του. Αυτό το ίδιο εμβαδόν εκφράζεται ως γινόμενο της βάσης του επί το ύψος του, ως αναγκαιότητα για την εισαγωγή του γνωστού τύπου $E = (\beta \cdot \upsilon):2$ για τον υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου.
3. Η έλλειψη προσδιορισμού της έννοιας «βάση τριγώνου», αποτελεί σημαντικό ζήτημα που χρειάζεται επαναπροσδιορισμό στο πλαίσιο της σχολικής εκπαίδευσης.

Αξιοσημείωτα είναι τα ευρήματα της εργασίας των Παπαγιαννακοπούλου & Χατζηκυριάκου (2014) που αφορούν ένα διδακτικό πείραμα στο μάθημα της Γεωμετρίας της Β' Λυκείου στη διδακτική ενότητα ΕΜΒΑΔΑ, με κεντρικό θέμα τον τετραγωνισμό. Αναδεικνύοντας την ευκλείδεια αντίληψη για το εμβαδόν, απέναντι στην κυρίαρχη σήμερα αριθμητική και τυποκρατική αντίληψη, επιχειρούν να παρατηρήσουν τον τρόπο που εξελίσσεται η διδασκαλία και η μάθησή του, καθώς οι μαθητές/-τριες και η καθηγήτρια των Μαθηματικών της τάξης συνεργάζονται και χρησιμοποιούν τα εργαλεία που προσφέρει το ψηφιακό περιβάλλον EuclidDraw. Στην έρευνα συμμετείχαν 22 μαθητές/-τριες της Β' τάξης ενός

επαρχιακού λυκείου. Οι 10 ήταν της θετικής/τεχνολογικής κατεύθυνσης, στην πλειοψηφία τους (6-7) μέτριας επίδοσης (γραπτά 12-16/20). Οι επιδόσεις 10 μαθητών και μαθητριών (σε σύνολο 12) της θεωρητικής κατεύθυνσης, ειδικά στη γεωμετρία, ήταν πολύ χαμηλές (γραπτά με βαθμολογία 0-5 στα 20). Για τις ανάγκες του πειράματος σχεδιάστηκαν δραστηριότητες τέτοιες ώστε να οικοδομούνται προοδευτικά οι ζητούμενες έννοιες, γνώσεις και δεξιότητες που απαιτούνται ώστε να μπορέσει κάποιος να μετασχηματίσει χωρία του επιπέδου σε ισοδύναμα τετράγωνα. Για την ολοκλήρωση του διδακτικού πειράματος απαιτήθηκαν 7 διδακτικές ώρες, οι οποίες κατανεμήθηκαν σε 3 παρεμβάσεις. Σε κάθε παρέμβαση, η καθηγήτρια-ερευνήτρια χρησιμοποιούσε ένα ή δύο φύλλα εργασίας και ένα φύλλο αξιολόγησης. Όση ώρα οι μαθητές/-τριες εργάζονταν στο υπολογιστικό περιβάλλον του EUC, οι κινήσεις τους καταγράφονταν από ένα λογισμικό ψηφιακής καταγραφής οθόνης (screen-recorder). Μετά το πέρας κάθε παρέμβασης, η καθηγήτρια έπαιρνε τα αρχεία των βίντεο που είχαν δημιουργηθεί σε κάθε υπολογιστή. Έτσι αργότερα μπορούσε να δει ακριβώς ό,τι έκανε κάθε ομάδα σε κάθε δραστηριότητα. Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης είναι τα εξής:

1. Οι μαθητές και οι μαθήτριες γέμιζαν τα σχήματα με χρώμα το οποίο φάνηκε ότι τους βοήθησε στα σύνθετα σχήματα και τις κατασκευές.
2. Η αλγεβρική αντίληψη των μαθητών και των μαθητριών έχει αναπτυχθεί άμεσα εις βάρος της γεωμετρικής.
3. Το γεωμετρικό δυναμικό περιβάλλον βρίσκει θετική ανταπόκριση στους μαθητές και μπορεί να βοηθήσει στην καλλιέργεια της γεωμετρικής αντίληψης.

Οι μαθητές/-τριες αναπτύσσουν κάποιες στρατηγικές όσον αφορά την αντιμετώπιση προβλημάτων μέτρησης επίπεδων επιφανειών. Η έρευνα των Χασάπης και συν. (1997) εξετάζει τη συμβολή Πολιτισμικού-Ιστορικού «Εργαλείου» πάνω σε αυτές. Το δείγμα της έρευνας συγκροτήθηκε από 56 μαθητές/τριες δυο τμημάτων της Α΄ Λυκείου ενός ΤΕΛ σε υποβαθμισμένη περιοχή του Πειραιά οι οποίοι εργάστηκαν σε φύλλα εργασίας με την εκτέλεση 5 έργων. Τα κυριότερα ευρήματα αυτής της έρευνας είναι τα εξής:

1. Πολλοί μαθητές συγχέουν τις έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου καθώς και της μεταξύ τους σχέσης.
2. Αρκετοί μαθητές θεωρούν ότι η ισοδυναμία των εμβαδών των επίπεδων σχημάτων συνεπάγεται και ισότητα περιμέτρων.
3. Τα προτεινόμενα εργαλεία "υπαγορεύουν" τρόπους επίλυσης και οργάνωσης δραστηριοτήτων των μαθητών.
4. Η στάση των μαθητών απέναντι στην αντιμετώπιση προβλημάτων που σχετίζονται με τη μέτρηση επιφανειών αλλάζει στο βαθμό που τα εργαλεία που προτείνονται, ενσωματώνουν ένα πολιτισμικό σύστημα αξιών, που στην περίπτωση του εμβαδού έχει σχέση με την ιστορική εξέλιξη της έννοιας αυτής (Χασάπης και συν., 1997). Στην έρευνα αυτή αποδείχθηκε ότι τα εργαλεία που ενσωματώνουν πολιτισμικά και ιστορικά χαρακτηριστικά στην αντιμετώπιση προβλημάτων με εμβαδά και περιμέτρους παίζουν θετικό ρόλο.
5. Η μονάδα μέτρησης έχει την ίδια διάσταση με το μετρούμενο μέγεθος τόσο στον υπολογισμό του εμβαδού όσο και της περιμέτρου.

2.5 Το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών στα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών Γυμνασίου

Τα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα σε όλο τον κόσμο, με τις αδυναμίες ή τις ελλείψεις που πιθανόν να έχουν ή να εμφανίζουν, δίνουν βαρύνουσα και εξέχουσα σημασία στη

διδασκαλία της Γεωμετρίας τόσο αν η αυτή διδάσκεται ως αυτόνομο μάθημα είτε ως μέσο για να δημιουργηθούν ή να αναπτυχθούν άλλες μαθηματικές έννοιες (Φιλίππου & Χρίστου, 1995). Το εμβαδόν αποτελεί μία από τις μαθηματικές έννοιες που υπάρχει στα Αναλυτικά Προγράμματα όλων των τάξεων της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, από το Νηπιαγωγείο μέχρι και την τελευταία τάξη του Δημοτικού, αλλά και στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Πρέπει να τονιστεί ότι το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών διδάσκεται είτε άμεσα είτε έμμεσα σε όλες τις τάξεις.

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τους στόχους που έχουν τεθεί στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών που αφορούν τη διδασκαλία του εμβαδού επίπεδων επιφανειών. Συγκεκριμένα τους στόχους του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών του 2003 στους οποίους στηρίζονται τα υπάρχοντα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του Γυμνασίου και του νέου Προγράμματος Σπουδών του 2021.

Οι στόχοι του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών του 2003 για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών, όπως περιγράφονται στο ΦΕΚ 303/13-3-2003 όπου το ΥΠΑΙΘ δημοσίευσε το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) και το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) Γυμνασίου με γενικό μέρος και ανά γνωστικό αντικείμενο, είναι οι εξής:

1. Να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια του εμβαδού επίπεδης επιφάνειας και ότι αυτό εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιούμε.
2. Να γνωρίζουν οι μαθητές τις μονάδες μέτρησης εμβαδού στο δεκαδικό σύστημα, το διεθνή συμβολισμό τους και τις μεταξύ τους σχέσεις.
3. Να υπολογίζουν το εμβαδόν των επίπεδων σχημάτων: ορθογωνίου, τριγώνου, παραλληλογράμμου και τραπεζίου.
4. Να υπολογίζουν το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου, όταν είναι γνωστή η ακτίνα του.
5. Να υπολογίζουν το εμβαδόν κυκλικού τομέα όταν δίνεται η ακτίνα του κύκλου και το μέτρο του αντίστοιχου τόξου σε μοίρες ή σε ακτίνια.
6. Να υπολογίζουν το εμβαδόν της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας ορθού πρίσματος.
7. Να αναγνωρίζουν οι μαθητές αν ένα στερεό είναι κύλινδρος και να υπολογίζουν το εμβαδόν της κυρτής και της ολικής επιφάνειας ορθού κυλίνδρου.
8. Να υπολογίζουν το εμβαδόν της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.
9. Να αναγνωρίζουν αν ένα στερεό είναι κώνος και να υπολογίζουν το εμβαδόν της κυρτής και της ολικής επιφάνειας.
10. Να αναγνωρίζουν τη σφαίρα και να υπολογίζουν την επιφάνεια της.
11. Να χρησιμοποιούν τη σχέση των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων για τον υπολογισμό εμβαδών.
12. Να αναγνωρίζουν τις σχέσεις περιμέτρων και εμβαδών των όμοιων σχημάτων.
13. Να αναγνωρίζουν και να κατασκευάζουν ισεμβαδικές επιφάνειες με βάση ιδιότητες και σχέσεις.

Οι στόχοι του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών του 2021 για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών, όπως περιγράφονται στο ΦΕΚ 5260/12-11-2021, το ΥΠΑΙΘ δημοσίευσε το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) και το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) Γυμνασίου με γενικό μέρος και ανά γνωστικό αντικείμενο, είναι οι μαθητές/-τριες:

1. Να μετασχηματίζουν επιφάνειες σε ισοδύναμες διασπώντας και ανασυνθέτοντας την επιφάνεια.
2. Να επιλέγουν τις κατάλληλες μονάδες μέτρησης εμβαδού επιφάνειας και να κάνουν μετατροπές από τη μια μονάδα μέτρησης στην άλλη.
3. Να επιβεβαιώνουν τους τύπους εμβαδού τετραγώνου και ορθογώνιου παραλληλογράμμου επιλέγοντας κατάλληλη μονάδα μέτρησης.
4. Με τη διαδικασία της διάσπασης και ανασύνθεσης επιφανειών να προσδιορίζουν τον τύπο του εμβαδού παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπεζίου.
5. Να υπολογίζουν το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου όταν γνωρίζουν την ακτίνα ή τη διάμετρο του κύκλου.
6. Να υπολογίζουν τα εμβαδά κυκλικών τομέων ως μέρη του εμβαδού του κυκλικού δίσκου τους.
7. Να επιλύουν προβλήματα υπολογισμού εμβαδού μεικτόγραμμων σχημάτων αξιοποιώντας διάφορες μεθόδους και στρατηγικές.
8. Να αξιοποιούν την έννοια του εμβαδού για την εξήγηση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.
9. Να διερευνούν τη σχέση των περιμέτρων και των εμβαδών όμοιων σχημάτων.
10. Να αξιοποιούν τα αναπύγματα ορθών πρισμάτων, κυλίνδρων και κώνων για να προσδιορίσουν το εμβαδόν της επιφάνειάς τους.
11. Να επιλύουν προβλήματα υπολογισμού του εμβαδού της επιφάνειας ορθού πρίσματος, κυλίνδρου, κώνου και σφαίρας.

Στους προαναφερθέντες στόχους των Αναλυτικών Προγραμμάτων που αφορούν το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών παρατηρούμε ότι υπάρχουν κάποιες αξιοσημείωτες ομοιότητες αλλά και διαφορές. Αξίζει να επισημάνουμε από την προηγούμενη παράθεση των στόχων τα εξής συμπεράσματα:

1. Δίνεται βαρύτητα στην κατανόηση της έννοιας του εμβαδού στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ.) του 2003, ενώ στα νέα Α.Π.Σ. δε δίνεται, ωστόσο η βαρύτητα είναι η ίδια όσον αφορά τις μονάδες μέτρησης.
2. Βασικός στόχος των νέων Α.Π.Σ. είναι να μπορούν οι μαθητές/-τριες να μετασχηματίζουν επιφάνειες με τη διαδικασία της διάσπασης και ανασύνθεσης επιφανειών και με αυτή τη μέθοδο να επικυρώνουν τους τύπους για τον υπολογισμό του εμβαδού τετραγώνου, ορθογώνιου παραλληλογράμμου.
3. Επιπλέον, στην περίπτωση υπολογισμού εμβαδών μεικτόγραμμων σχημάτων, στα νέα Α.Π.Σ., δίνεται έμφαση για την εύρεση του εμβαδού στη χρήση ποικίλων μεθόδων και πρακτικών.
4. Μια ακόμα προσθήκη στα νέα Α.Π.Σ. είναι ο στόχος οι μαθητές/-τριες να αξιοποιούν την έννοια του εμβαδού για εξηγήσουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα.
5. Στην περίπτωση της εύρεσης της επιφάνειας του κυκλικού τομέα οι μαθητές/-τριες ζητείται να υπολογίσουν το εμβαδό ως μέρος του κυκλικού δίσκου και όχι όπως επισημαίνεται στα Α.Π.Σ. του 2003 να υπολογίζουν το εμβαδόν κυκλικού τομέα όταν δίνεται η ακτίνα του κύκλου και το μέτρο του αντίστοιχου τόξου σε μοίρες ή σε ακτίνα.

2.6 Σύνοψη 2^{ου} Κεφαλαίου

Συνοψίζοντας λοιπόν το Κεφάλαιο επισημαίνουμε η μέτρηση γενικά είναι μια οικουμενική και ζωτικής σημασίας δραστηριότητα, που απασχόλησε και απασχολεί όλους τους λαούς ανεξαιρέτως σε πολλές κοινωνικές εκφάνσεις. Ο υπολογισμός του εμβαδού μιας επιφάνειας υπήρξε αντικείμενο μελέτης για τους μαθηματικούς από αρχαιοτάτων χρόνων και συνεχίζει να απασχολεί τους μελετητές και ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών και

γενικότερα των Θετικών Επιστημών. Η έννοια του εμβαδού καθώς και οι εφαρμογές αυτού αποτελούν ένα σημαντικό θέμα στη Γεωμετρία στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ως θεματική ενότητα, το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών κατέχει αξιοσημείωτη θέση στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών. Αν και στα Α.Π.Σ. των Μαθηματικών έχουν πραγματοποιηθεί πολλές αλλαγές, η θεματική ενότητα του εμβαδού επίπεδων επιφανειών παραμένει ακέραιη.

Η έννοια της μέτρησης της επιφάνειας είναι αρκετά περίπλοκη για να κατανοήσουν οι μαθητές/-τριες, καθώς αποτελείται από ένα δίκτυο συνακόλουθων εννοιών: τη διατήρηση της επιφάνειας, τη μονάδα μέτρησης και τον υπολογισμό της (Piaget et al., 1981). Αρχικά, οι Baturο και Nason (1996) αναφέρουν μια σειρά από έρευνες που επισημαίνουν πως πολλές από τις παρανοήσεις που έχουν οι μαθητές/-τριες σχετικά με την κατανόηση της έννοιας του εμβαδού επίπεδων επιφανειών οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές/-τριες δυσκολεύονται να κατανοήσουν εννοιολογικά την έννοια. Μια ακόμα δυσκολία των μαθητών/-τριών για την κατανόηση του εμβαδού επίπεδων επιφανειών έγκειται στη χρήση και την επιλογή των κατάλληλων μονάδων μέτρησης. Οι μαθητές/-τριες παρατηρείται συχνά να εμφανίζουν δυσκολίες στη σύγκριση ισοεμβαδικών, και όχι μόνο, σχημάτων. Το εμβαδόν δύναται να μη μεταβληθεί ακόμα κι αν η μορφή του αντίστοιχου σχήματος αλλάξει, γεγονός που αποτελεί μια σημαντική πηγή δυσκολίας από πολλούς μαθητές (Piaget et al, 1981).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο: ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1 Προβληματική της έρευνας

Το σχολικό εγχειρίδιο αποτέλεσε και συνεχίζει να αποτελεί δομικό και αναπόσπαστο στοιχείο της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Τα σχολικά εγχειρίδια ως κύριοι μεσολαβητές των στόχων των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών αποτελούν ένα από τα βασικά εργαλεία μάθησης και διδασκαλίας. Συνεπώς ο ρόλος που διαδραματίζει είναι πολύ σημαντικός.

Ο τρόπος επιλογής αλλά και η χρήση του σχολικού εγχειριδίου βρίσκεται διαχρονικά στο επίκεντρο των ερευνητών με σκοπό την ανάλυση στο ρόλο που επιτελεί στη διδακτική διαδικασία. Πολλές έρευνες έχουν διεξαχθεί για να διερευνηθούν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά που κάνουν «καλό» ένα σχολικό εγχειρίδιο ή τα κριτήρια που θα πρέπει να πληροί αυτό. Η επισκόπηση της βιβλιογραφίας μας γνωστοποιεί ότι τα κριτήρια δεν είναι τα ίδια αλλά εξαρτώνται από αυτούς που τα αξιολογούν. Οι μελετητές των σχολικών εγχειριδίων δεν κάνουν χρήση ενιαίων κριτηρίων (Fritzche, 1992) και αυτό επηρεάζει σημαντικά τις τάσεις και αντιλήψεις στο χώρο της εκπαίδευσης.

Το σχολικό βιβλίο θεωρείται πηγή γνώσεων για τους/τις μαθητές/-τριες και αποτελεί το βασικότερο μέσο διδασκαλίας για τους περισσότερους εκπαιδευτικούς καθώς πολλές έρευνες έχουν δείξει ότι το 70% των εργασιών γίνεται βάσει του σχολικού βιβλίου (Μπονίδης 2004). Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί σχεδιάζουν και οργανώνουν τη διδασκαλία τους βάσει του σχολικού βιβλίου καθώς είναι το κύριο μέσο, θεωρείται έγκυρο και αξιόπιστο γιατί είναι εγκεκριμένο από την πολιτεία. Επιπλέον, ο/η μαθητής/-τρια μπορεί να παρακολουθεί την πορεία της διδασκαλίας παρέχοντας ευκαιρίες αυτομάθησης και αυτοαξιολόγησης. Αξίζει να τονιστεί το γεγονός ότι προσφέρεται δωρεάν σε όλους τους μαθητές στο πλαίσιο μιας δημοκρατικής αντιμετώπισης της εκπαίδευσης.

Ο σχεδιασμός και η δόμηση ενός σχολικού εγχειριδίου είναι πολύ σημαντικές διαδικασίες γιατί με αυτόν τον τρόπο διαμορφώνεται το γνωστικό περιεχόμενο ενός αντικειμένου, επηρεάζοντας συνακόλουθα και την παιδαγωγική αξία του (Κουλαϊδής, Δημόπουλος, Σκλαβενίτη & Χρηστίδου, 2001). Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα εστιάσουμε στην ανάλυση έργων για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών των διαδραστικών σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών του Γυμνασίου. Η έννοια του εμβαδού απασχόλησε του μελετητές από την αρχαιότητα και εξακολουθεί να αποτελεί αντικείμενο συνεχούς έρευνας και μελέτης ακόμα και σήμερα. Το εμβαδόν αποτελεί μία από τις μαθηματικές έννοιες που εντοπίζονται στα Αναλυτικά Προγράμματα όλων των τάξεων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Αρκετοί ερευνητές στη μέτρηση του εμβαδού έχουν επισημάνει τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές από τις πρώτες τάξεις του σχολείου σχετικά με την κατανόηση των διαδικασιών μέτρησης αλλά και στις τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η μέτρηση του εμβαδού είναι μια διαδικασία απόδοσης ενός πραγματικού θετικού αριθμού σε μια συγκεκριμένη επιφάνεια. Αν και η μονάδα μέτρησης είναι θεμελιώδης σε αυτή τη διαδικασία, συνήθως παραμελείται στη διδασκαλία των μαθηματικών και η εστίαση είναι μόνο στο αριθμητικό αποτέλεσμα (Kordaki & Potari, 2002). Άρα, δεν δίνεται σημασία στις χωρικές ιδιότητες της επιφάνειας ενώ η διαδικασία της μέτρησης περιορίζεται σε έναν χωρίς λόγο χειρισμό αριθμών (Kordaki & Potari, 2002).

Αναμφισβήτητα διανύουμε μια ψηφιακή εποχή όπου υπάρχει τεράστιος όγκος πληροφοριών και δίνεται η δυνατότητα εύκολης πρόσβασης σε αυτές. Όποτε αυτό το γεγονός έχει σαφώς

επηρεάσει και τα σχολικά εγχειρίδια. Τα διαδραστικά σχολικά βιβλία θεωρούνται ότι προσφέρουν ευκαιρίες για «συμμετοχή, ευελιξία και εξατομίκευση», γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με την καθιερωμένη μέχρι τώρα αποδοχή των έντυπων και παραδοσιακών σχολικών εγχειριδίων (Yerushalmy, 2014). Στην παρούσα εργασία θα αναλύσουμε τα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια και αυτό γιατί και η διαδικασία έκδοσης των παραδοσιακών βιβλίων μεταβάλλεται με πολύ γρήγορους ρυθμούς και αυτά θα αποτελούν τον προσανατολισμό του μέλλοντος.

Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας, όπου θα αναλυθούν τα έργα που σχετίζονται με το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια, αξίζει να επισημάνουμε την έννοια του «έργου». Οι Mason & Johnston-Wilder (2004) ορίζουν το έργο ως μια έννοια που εμπεριέχει όλες εκείνες τις καταστάσεις του βιβλίου οι οποίες απαιτούν απάντηση ανεξαρτήτως αν αυτή δίνεται ή όχι. Ακόμα, σύμφωνα με τις Henningsen & Stein (1997), ως μαθηματικό έργο ορίζονται οι δραστηριότητες εκείνες που υλοποιούνται εντός της σχολικής αίθουσας και έχουν ως στόχο οι μαθητές να επικεντρωθούν σε μια μαθηματική έννοια ή διαδικασία. Στην παρούσα έρευνα ως μαθηματικό έργο ορίζονται οι εφαρμογές-παραδείγματα που έπονται των εισαγωγικών δραστηριοτήτων, οι ερωτήσεις κατανόησης, οι ασκήσεις, δραστηριότητες «για διασκέδαση» και τα μικροπειράματα που υπάρχουν στα ψηφιακά σχολικά εγχειρίδια. Τα έργα για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών που θα μελετήσουμε στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια βρίσκονται είτε ως αυτόνομη έννοια είτε ως βοηθητική αναπαράσταση για την κατανόηση μιας άλλης έννοιας. Επομένως, βασική επιδίωξη και προσδοκία αυτής της έρευνας είναι ότι τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της εργασίας ενδέχεται να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς

3.2 Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Από την ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας και των ερευνών που έχουν διεξαχθεί σχετικά με την αξιολόγηση των σχολικών εγχειριδίων, αποδεικνύεται ότι τα σχολικά εγχειρίδια διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην εκπαιδευτική διαδικασία. Επιπλέον, το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών αποτελεί μια μαθηματική έννοια που δυσκολεύει τους/τις μαθητές/-τριες.

Στην ελληνική και διεθνή πραγματικότητα δεν υπάρχουν συστηματικές έρευνες οι οποίες εστιάζουν στην ανάλυση των έργων των σχολικών διαδραστικών εγχειριδίων των Μαθηματικών στην Δευτεροβάθμια εκπαίδευση στο θέμα του εμβαδού. Επίσης, δεν υπάρχουν συγκριτικές μελέτες από τάξη σε τάξη ώστε να φαίνεται η εξέλιξη της ανάπτυξης του συγκεκριμένου θέματος των σχολικών εγχειριδίων. Η παρούσα έρευνα σκοπό έχει να αναλύσει τα έργα που αφορούν το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του Γυμνασίου. Τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της διπλωματικής εργασίας ενδέχεται να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς να αναστοχαστούν σχετικά με τα έργα που εμπεριέχονται στα σχολικά εγχειρίδια για το εμβαδόν και να προχωρήσουν σε διαδικασίες βελτίωσής τους εμπλουτίζοντας το σχετικό εκπαιδευτικό υλικό. Η παρούσα έρευνα επιχειρεί να δώσει απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα που ακολουθούν:

Ερωτήματα για οριζόντια ανάλυση:

1. Ποιος είναι ο αριθμός ενοτήτων στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών στις τάξεις Α-Γ γυμνασίου για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών;

2. Ποια θέματα καλύπτονται στις σχετικές ενότητες;

Ερωτήματα για κάθετη ανάλυση:

3. Ποιο είναι το μαθηματικό περιεχόμενο των έργων στα οποία εμπλέκεται το εμβαδόν;
4. Ποιες είναι οι γνωστικές απαιτήσεις των έργων;
5. Ποιες μαθηματικές πρακτικές αναπτύσσονται;
6. Ποιες μορφές απάντησης περιλαμβάνουν τα έργα;
7. Ποιοι τύποι πλαισίων χρησιμοποιούνται;
8. Ποια είναι η θεματολογία των έργων;

3.3 Δείγμα της έρευνας

Το δείγμα της έρευνας αποτελούν τα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του Γυμνασίου όπου εξετάστηκαν τα στοιχεία εκείνα που καλούνται «έργα» και σχετίζονται με το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών. Στην παρούσα έρευνα επιλέχθηκαν τα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια:

1. «Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου» (Βανδουλάκης, Καλλιγιάς, Μαρκάκης & Φερεντίνος (2021), το οποίο διδάσκεται στους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου και είναι διαθέσιμο http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2748/Mathimatika_A-Gymnasiou_html-empl/
2. «Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου» (Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης & Ρεκούμης, 2016), το οποίο διδάσκεται στους μαθητές της Β΄ Γυμνασίου και είναι διαθέσιμο http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2196/Mathimatika_B-Gymnasiou_html-empl/
3. «Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου» (Αργυράκης, Βουργάνας, Μεντής, Τσικοπούλου & Χρυσοβέργης, 2021), το οποίο διδάσκεται στους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και είναι διαθέσιμο http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2212/Mathimatika_G-Gymnasiou_html-empl/

3.4 Μέθοδος έρευνας

Για την εκπόνηση της παρούσας έρευνας η μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί είναι η ανάλυση περιεχομένου. Η μέθοδος αυτή είναι ίσως η ταχύτερα αναπτυσσόμενη μέθοδος σε μια ποσοτική έρευνα και έχει περισσότερα από 50 χρόνια χρήσης στην επικοινωνία, στη δημοσιογραφία, στην κοινωνιολογία, στη ψυχολογία και στις επιχειρήσεις (Neuendorf, 2002). Η ανάλυση περιεχομένου συνεπάγεται μια συστηματική ανάγνωση ενός συνόλου κειμένων, εικόνων και συμβολικών θεμάτων, μη απαραίτητο να είναι από την οπτική γωνία του συγγραφέα ή του χρήστη (Krippendorff, 2004). Θα μπορούσε να πει κανείς ότι η ανάλυση περιεχομένου έχει εξελιχθεί σε ρεπερτόριο μεθόδων έρευνας που υπόσχονται να βγάλουν συμπεράσματα από κάθε είδους λεκτικά, εικονογραφικά, συμβολικά και επικοινωνιακά δεδομένα (Neuendorf, 2002; Krippendorff, 2004). Ως τεχνική, η ανάλυση περιεχομένου περιλαμβάνει εξειδικευμένες διαδικασίες. Αρχικά, ως τεχνική δεν εντάσσεται στην προσωπική εξουσία του ερευνητή. Ως ερευνητική τεχνική, η ανάλυση περιεχομένου παρέχει νέες ιδέες, αυξάνει την κατανόηση του ερευνητή συγκεκριμένων φαινομένων ή ενημερώνει για πρακτικές ενέργειες (Krippendorff, 2004). Οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται αναμένεται να είναι αξιόπιστες (Krippendorff, 2004). Πιο συγκεκριμένα, η έρευνα θα πρέπει να οδηγήσει σε ευρήματα που μπορούν να αναπαραχθούν. Δηλαδή, ερευνητές που εργάζονται σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα και ίσως κάτω από διαφορετικές συνθήκες

θα πρέπει να πάρουν τα ίδια αποτελέσματα όταν εφαρμόζεται η ίδια τεχνική στα ίδια δεδομένα (Krippendorff, 2004). Η δυνατότητα αναπαραγωγής είναι η πιο σημαντική μορφή αξιοπιστίας. Η επιστημονική έρευνα πρέπει επίσης να αποφέρει έγκυρα αποτελέσματα, με την έννοια ότι τα αποτελέσματα της ανάλυσης και οι αξιώσεις που προκύπτουν μπορούν να γίνουν δεκτές από ανεξάρτητα διαθέσιμα αποδεικτικά στοιχεία (Krippendorff, 2004). Συνοπτικά, η δομή που θα πρέπει να έχει μια ανάλυση περιεχομένου είναι η εξής σύμφωνα με τον Krippendorff (2004):

1. ένα κείμενο, τα δεδομένα που διαθέτει ένας αναλυτής περιεχομένου για να ξεκινήσει μια αναλυτική προσπάθεια,
2. ένα ερευνητικό ερώτημα που επιδιώκει να απαντήσει ο αναλυτής εξετάζοντας το κείμενο,
3. ένα πλαίσιο της επιλογής του αναλυτή εντός του οποίου θα κατανοήσει το σώμα του κειμένου,
4. ένα αναλυτικό κατασκεύασμα που υλοποιεί ό,τι γνωρίζει ο αναλυτής για τα συμφραζόμενα,
5. συμπεράσματα που προορίζονται να απαντήσουν στο ερευνητικό ερώτημα και
6. επικύρωση αποδεικτικών στοιχείων, που είναι η τελική αιτιολόγηση της ανάλυσης περιεχομένου.

3.5 Συλλογή δεδομένων

Για να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας εργασίας σχετικά με το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του Γυμνασίου, εξετάστηκαν τα μαθηματικά εκείνα έργα που σχετίζονται με την μαθηματική έννοια που εξετάζουμε. Στην έρευνα αυτή ως «έργο» ορίζονται οι εφαρμογές-παράδειγματα που έπονται των εισαγωγικών δραστηριοτήτων, οι ερωτήσεις κατανόησης, οι ασκήσεις, δραστηριότητες «για διασκέδαση» και τα μικροπειράματα που υπάρχουν στα ψηφιακά σχολικά εγχειρίδια. Τα έργα για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών που θα μελετήσουμε στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια βρίσκονται είτε ως αυτόνομη έννοια είτε ως βοηθητική αναπαράσταση για την κατανόηση μιας άλλης έννοιας. Επομένως, από το δείγμα της έρευνας –τα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του Γυμνασίου- καταμετρήθηκαν τα εξής έργα (έντυπο και ψηφιακό εγχειρίδιο):

Πίνακας 3.1: Έργα που αφορούν τα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών Γυμνασίου.

ΤΑΞΗ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ	ΣΥΝΟΛΟ
Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	12	9	21
Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	176	52	228
Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	74	37	111
ΣΥΝΟΛΟ	262	98	360

Για να γίνει πλήρως κατανοητό το πώς καταμετρήθηκαν τα έργα που αφορούν το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών από τα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του

Γυμνασίου, θα παραθέσουμε κάποια παραδείγματα ώστε να αποσαφηνιστεί η επιλογή των έργων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1^ο

4. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει διαστάσεις πλευρών $a = 23 \text{ cm}$ και $b = 45 \text{ cm}$. Να βρεις το εμβαδόν του, σε cm^2 και σε mm^2 .

Εικόνα 3.1: Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου σελ. 67- άσκηση 4 της ενότητας: Α.3.5. «Μονάδες μέτρησης».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2^ο

Ζητείται σπίτι με το μικρότερο κόστος κατασκευής.

1η Δραστηριότητα 2η δραστηριότητα
 3η δραστηριότητα

Ένας μηχανικός θέλει να κτίσει σε ένα μεγάλο οικόπεδο, ένα σπίτι που το περίγραμμά του θα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με σταθερό εμβαδόν 144 m^2 . Οι επιλογές που έχει για τις διαστάσεις x και ψ του σπιτιού είναι πολλές. Αν το κόστος κατασκευής μειώνεται όσο μειώνεται η περίμετρος του ορθογωνίου, ποιές διαστάσεις πρέπει να προτιμήσει ώστε το κόστος κατασκευής να ελαχιστοποιηθεί; Για την επίλυση του προβλήματος θα σας βοηθήσουν οι επόμενες δραστηριότητες.

	A	B
1	Πλευρά x	Πλευρά ψ
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		

Εικόνα 3.2: Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου σελ. 107 Μικροπείραμα 1^ο κάτω από τη Δραστηριότητα 3^η της ενότητας Α.6.6. «Αντιστρόφως ανάλογα ποσά».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3^ο

3. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με πλευρές x και y είναι 100 cm^2 . Η σχέση που εκφράζει το μήκος του y ως συνάρτηση του x , είναι:
- α) $y = 100x$ β) $y = 100 + x$ γ) $y = \frac{100}{x}$ δ) $y = 100 - x$

Εικόνα 3.3: Ερώτηση κατανόησης από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου σελ. 56- ερώτηση κατανόησης 3 της ενότητας: Α.3.1. «Η έννοια της συνάρτησης».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4^ο

Εμβαδόν και όγκος κυλίνδρου.

ΕΚΦΩΝΗΣΗ

Συμπλήρωσε το υπολογιστικό φύλλο που βλέπεις για 4 κυλίνδρους διαφορετικού ύψους u , με την ίδια ακτίνα βάσης ρ που εσύ θα επιλέξεις από το ροοστάτη ακτίνα (ρ)

Όταν διπλασιάζεις το u τι συμβαίνει στα Επ, Εολ και V;

Διπλασίασε κατόπιν την ακτίνα και συμπλήρωσε ξανά το υπολογιστικό φύλλο. Σύγκρινε τις καινούριες τιμές των Επ, Εολ και V με τις προηγούμενες που είχες υπολογίσει

Τι διαπιστώνεις ότι συμβαίνει στα Επ, Εολ και V όταν διπλασιάζεις το ρ ;

ΟΔΗΓΙΕΣ

Επέλεξε πρώτα την ακτίνα βάσης ρ από το ροοστάτη ακτίνα (ρ)

Επέλεξε κατόπιν το ύψος u από το ροοστάτη ύψος (u)

	A	B	C	D	E
1		u	Επ	Εολ	V
2	1ος κύλινδρος	2			
3	2ος κύλινδρος	4			
4	3ος κύλινδρος	6			
5	4ος κύλινδρος	8			
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					

Εικόνα 3.4: Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου σελ. 214 Μικροπείραμα κάτω από την Ερώτηση Κατανόησης 3 της ενότητας Β.4.3. «Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5^ο

17

α) Να αποδείξετε ότι $\beta\gamma = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - (\beta - \gamma)^2}{2}$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου, που έχει υποτείνουσα 10 cm, και οι κάθετες πλευρές του διαφέρουν κατά 2 cm.

Εικόνα 3.5: Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου σελ. 50- Άσκηση 17 β΄ ερώτημα της ενότητας: Α.1.5 «Αξιοσημείωτες ταυτότητες».

3.6 Ανάλυση δεδομένων

Η ανάλυση των δεδομένων θα γίνει σε δυο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία, η οριζόντια ανάλυση, εξετάζει τα γενικά χαρακτηριστικά των βιβλίων, όπως τα φυσικά χαρακτηριστικά και την οργάνωση του περιεχομένου των σχολικών βιβλίων, ενώ στη δεύτερη, κάθετη ανάλυση, εξετάζεται η αντιμετώπιση του τρόπου με τον οποίο τα βιβλία παρουσιάζουν και αντιμετωπίζουν το περιεχόμενο που θα μελετηθεί (Charalambous et al., 2010). Αναφορικά με τα αποτελέσματα που θα προκύψουν από την ανάλυση του περιεχομένου των διαδραστικών σχολικών εγχειριδίων σχετικά με τα έργα που σχετίζονται με το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών, αυτά θα παρουσιαστούν με τα εργαλεία της περιγραφικής στατιστικής (πίνακες συχνοτήτων κ.λπ.).

3.6.1 Οριζόντια ανάλυση

Για την ανάλυση των δεδομένων που θα αφορούν το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών θα αναφέρουμε τον αριθμό ενοτήτων στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών στις τάξεις Α-Γ Γυμνασίου.

Σχετικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα τα έργα για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών βρίσκονται είτε ως αυτόνομη έννοια είτε ως βοηθητική αναπαράσταση για την κατανόηση μιας άλλης έννοιας. Θα καταγραφούν τα θέματα που καλύπτονται στα διαδραστικά βιβλία του γυμνασίου και για τις δυο κατηγορίες. Στην α' κατηγορία ανήκουν τα έργα που βρίσκονται αυτόνομα σε ασκήσεις, εφαρμογές και παραδείγματα και διδάσκονται ως ξεχωριστή ενότητα στα σχολικά εγχειρίδια που μελετάμε και στη β' κατηγορία τα έργα λειτουργούν ως μια βοηθητική αναπαράσταση για την κατανόηση μιας άλλης έννοιας.

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε παραδείγματα από τα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του Γυμνασίου ώστε να αποσαφηνιστεί η επιλογή των έργων που μελετήθηκαν για την εκπόνηση αυτής της εργασίας. Στα δυο πρώτα παραδείγματα, το εμβαδόν διδάσκεται ως αυτόνομη έννοια, ενώ στο 3^ο το εμβαδόν είναι μια βοηθητική έννοια ώστε οι μαθητές/-τριες να υπολογίσουν μια άλλη έννοια, τον όγκο.

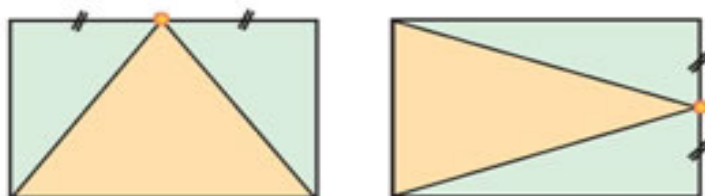
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1^ο

5. Συμπλήρωσε τα κενά: (α) $56 \text{ Km}^2 = \dots\dots\dots \text{ m}^2$ (β) $0,987 \text{ στρέμματα} = \dots\dots\dots \text{ m}^2$, (γ) $350 \text{ στρέμματα} = \dots\dots\dots \text{ m}^2$.

Εικόνα 3.6: Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α' Γυμνασίου σελ. 67- άσκηση 5 της ενότητας: Α.3.5. «Μονάδες μέτρησης».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2^ο

8. Τα παρακάτω ορθογώνια έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Εξηγήστε γιατί τα πράσινα μέρη των δύο ορθογωνίων έχουν ίσα εμβαδά.



Εικόνα 3.7: Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β' Γυμνασίου σελ. 125- άσκηση 8 της ενότητας: Β.1.3. «Εμβαδά επίπεδων σχημάτων».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3^ο

2. Δίνεται πρίσμα με βάση ισόπλευρο τρίγωνο. Αν γνωρίζετε ότι το ύψος του είναι τετραπλάσιο από την πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου της βάσης του και η παράπλευρη επιφάνειά του έχει εμβαδόν 432 cm^2 , να υπολογίσετε τον όγκο του.

Εικόνα 3.8: Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου σελ. 215- άσκηση 2 της ενότητας: Β.4.3. «Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου».

3.6.2 Κάθετη ανάλυση

Το μαθηματικό περιεχόμενο των έργων στα οποία εμπλέκεται το εμβαδόν θα αναλυθούν από τρεις παραμέτρους: της διατήρησης, της μεταβατικότητας και της μονάδας μέτρησης, με μια βασική απαίτηση η οποία είναι η κατανόηση «ότι κάθε σχήμα διατηρεί τη μορφή και το μέγεθός του, ανεξάρτητα από τυχόν μετατόπιση ή διαχωρισμό του σε μέρη» (Wilson & Rowland, 1993). Συγκεκριμένα, όσον αφορά την έννοια της διατήρησης του εμβαδού είναι αποτέλεσμα μιας γνωστικής διαδικασίας κατά την οποία η αριθμητική τιμή που προκύπτει από τη μέτρηση του εμβαδού μιας επιφάνειας δεν αλλάζει καθώς το σχήμα που ορίζει η επιφάνεια αυτή αλλάζει και παίρνει μια άλλη ποιοτική μορφή (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1981). Αυτό που μπορούμε να πούμε είναι ότι μια επιφάνεια η οποία χωρίζεται ή συγκροτείται σε επιμέρους τμήματα, δε μεταβάλλεται ακόμα και αν τα επιμέρους τμήματα ανασυγκροτηθούν (Αλεξανδρόπουλος, Γλάρος & Μαρκόπουλος, 2009). Επιπλέον για την έννοια της μεταβατικότητας αυτή αναφέρεται στη δυνατότητα να μεταφερθεί ένα μέτρο πχ. μια ράβδος ώστε να γίνει σύγκριση δυο μηκών τα οποία δεν μπορούν να παραταχθούν (Φιλίππου, Χρίστου, Μιχαηλίδης & Αντωνιάδου, 1998).

Η ανάλυση των δεδομένων σχετικά με τα είδη των γνωστικών απαιτήσεων και τους τύπους πλαισίου που χρησιμοποιούνται, θα πραγματοποιηθεί από το εργαλείο ανάλυσης της μελέτης που εκπονήθηκε από τους Wijaya, van den Heuvel-Panhuizen, & Doorman (2015) στηριζόμενοι στο πλαίσιο των Charalampous et al. (2010). Συγκεκριμένα έχουμε (βλέπε Πίνακα 1.3):

Χαρακτηριστικά έργων	Υποκατηγορία	Επεξήγηση
Τύπος πλαισίου	Χωρίς πλαίσιο	Αναφέρεται μόνο σε μαθηματικά αντικείμενα, σύμβολα ή δομές
	«Καμουφλαρισμένο» πλαίσιο	Δεν χρειάζονται εμπειρίες από την καθημερινή ζωή ή τη συλλογιστική της κοινής λογικής.
		Οι μαθηματικές πράξεις που απαιτούνται για την επίλυση των προβλημάτων είναι ήδη προφανείς.
		Η λύση μπορεί να βρεθεί συνδυάζοντας όλους τους αριθμούς που δίνονται στο κείμενο.
Σχετικό και ουσιαστικό πλαίσιο	Για να γίνει κατανοητό και να επιλυθεί το πρόβλημα, απαιτείται κοινή λογική συλλογιστικής στο πλαίσιο αυτό.	
	Η μαθηματική πράξη δεν δίνεται ρητά.	
	Απαιτείται μαθηματική μοντελοποίηση.	
Είδος γνωστικών απαιτήσεων	Αναπαραγωγή	Αναπαραγωγή αναπαραστάσεων, ορισμών ή γεγονότων.
		Ερμηνεία απλών και οικείων παραστάσεων.
		Απομνημόνευση ή εκτέλεση υπολογισμών/ διαδικασιών ρουτίνας.
	Συνδέσεις	Ενσωμάτωση και σύνδεση μεταξύ διαφορετικών θεματικών ενοτήτων ή αναπαραστάσεων.
		Επίλυση προβλημάτων μη ρουτίνας.
		Ερμηνεία καταστάσεων και μαθηματικών εκφωνήσεων ενός προβλήματος.
		Συμμετοχή σε απλή μαθηματική συλλογιστική.
	Διερεύνηση	Στοχασμός και απόκτηση γνώσης για τα μαθηματικά.
		Κατασκευή πρωτότυπων μαθηματικών προσεγγίσεων.
		Κοινοποίηση περίπλοκων επιχειρημάτων και σύνθετων συλλογισμών.
	Δημιουργία γενικεύσεων.	

Ακολουθούν επιπλέον παραδείγματα από έργα ώστε να γίνει κατανοητή η επιλογή από τα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια.

Παράδειγμα: Χωρίς πλαίσιο – Αναπαραγωγή

1. Να μετατρέψετε σε m^2 τα παρακάτω μεγέθη:

32 cm^2 , 312 cm^2 , 127 km^2 , 710 dm^2 ,

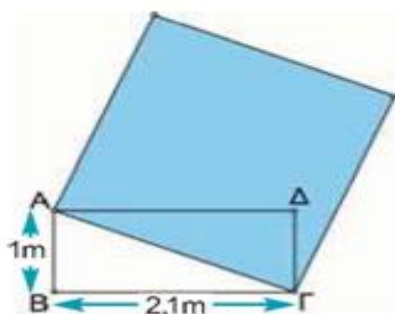
12720 mm^2 , 212 dm^2 , 1280 mm^2 ,

79 km^2 .

Εικόνα 3.9: Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου σελ. 118- άσκηση 1 της ενότητας: B.1.2 «Μονάδες μέτρησης επιφανειών».

Παράδειγμα: Σύνδεση

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μπλε τετραγώνου το οποίο έχει πλευρά ίση με τη διαγώνιο του ορθογώνιου ΑΒΓΔ.



Εικόνα 3.10: Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου σελ. 131- άσκηση 5 της ενότητας: B.1.4 «Πυθαγόρειο Θεώρημα».

Παράδειγμα: Διερεύνηση

3.

Να ερμηνευτούν με γεωμετρικό τρόπο οι επιμεριστικές ιδιότητες:

$$(a + \beta) \cdot \gamma = a \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma \text{ και } (a - \beta) \cdot \gamma = a \cdot \gamma - \beta \cdot \gamma$$

Εικόνα 3.11: Παράδειγμα-εφαρμογή από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου- Σελ.16 Παραδείγματα-Εφαρμογές 3^ο της ενότητας: A.1.2 «Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών».

Παράδειγμα – «Καμουφλαρισμένο» πλαίσιο

Υαλοκαθαριστήρες

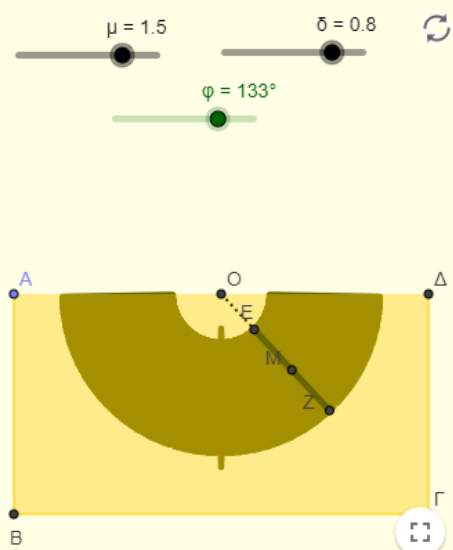
Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ αναπαριστά το παρμπρίζ ενός αυτοκινήτου, το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ τον υαλοκαθαριστήρα του και το ευθ. τμήμα ΟΜ το στέλεχος του υαλοκαθαριστήρα. Το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος ΕΖ.

1. Επιλέξτε το μήκος μ του στελέχους του υαλοκαθαριστήρα να είναι 1.5 και το μήκος ΕΖ του υαλοκαθαριστήρα να είναι 0.8 μονάδες. Μπορείτε να προσδιορίσετε το εμβαδόν του μέρους του παρμπρίζ που μπορεί να καθαριστεί με τον υαλοκαθαριστήρα;
2. Μπορείτε με βάση τους περιορισμούς των δρομέων να προσδιορίσετε το εμβαδόν της μέγιστης και της ελάχιστης επιφάνειας που μπορεί να καθαριστεί με τον υαλοκαθαριστήρα;

Οδηγίες

Μπορείτε να μετακινείτε τον δρομέα μ για να μεταβάλλετε το μήκος ΟΜ του στελέχους του υαλοκαθαριστήρα, τον δρομέα δ για να μεταβάλλετε το μήκος ΕΖ του υαλοκαθαριστήρα και τον δρομέα φ για να δώσετε κίνηση στον υαλοκαθαριστήρα.

Ενεργοποίηση της κίνησης του υαλοκαθαριστήρα



Εικόνα 3.12: Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου - Σελ. 198 Μικροπείραμα Άσκησης 6 της ενότητας Β. 3.6 «Εμβαδόν κυκλικού τομέα».

Παράδειγμα: Σχετικό και ουσιαστικό πλαίσιο

*;Η Αγγελική θέλει να στρώσει με πλακάκια
;τη θεράντα του σπιτιού της σχήματος
;ορθογωνίου με μήκος 150 και πλάτος 270.
;Βρήκε πλακάκια διαφορετικού σχήματος,
;αλλά έχει μπερδευτεί. Ο φίλος της ο
;θανάσης της είπε να μην πονοκεφαλιάζει
;γιατί διαφορετικού σχήματος πλακάκια,
;δίνουν διαφορετικό εμβαδό για τη
;θεράντα της. Έχει δίκιο;
;Βοήθησε την Αγγελική να καταλάβει*

Εικόνα 3.13: Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου- σελ.41 Μικροπείραμα 1^ο εφαρμογής 2 της ενότητας Β.1.1 «Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας».

Όσον αφορά το εργαλείο ανάλυσης που θα χρησιμοποιήσουμε για να αναλύσουμε τα δεδομένα σχετικά με τις μαθηματικές πρακτικές που αναπτύσσονται στο περιεχόμενο που θα μελετήσουμε είναι το εξής:

ΑΞΟΝΑΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ (Niss & Hojgaard, 2019)

- Διατύπωση και λύση προβλήματος (επινόηση διαφορετικών στρατηγικών, ανάλυση λαθών, έλεγχος του αποτελέσματος)
- Συλλογισμός και επιχειρηματολογία (εξηγώ, αιτιολογώ, συγκρίνω, αξιολογώ)
- Μαθηματική επικοινωνία (προφορικός λόγος, γραπτή συμβολική γλώσσα των μαθηματικών, μη λεκτικές μορφές επικοινωνίας)
- Μοντελοποίηση (μετάφραση ενός προβλήματος στη γλώσσα των μαθηματικών)
- Επιλογή και χρήση εργαλείων (χρήση χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων)
- Αναστοχασμός

Παράδειγμα : Διατύπωση και λύση προβλήματος

4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ακτίνα ρ κύκλου	5 cm		2,5 cm	
Εμβαδόν κύκλου E		28,26 cm ²		942 cm ²

Εικόνα 3.14: Ερώτηση κατανόησης από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β' Γυμνασίου - Σελ. 194 Ερώτηση Κατανόησης 4 της Ενότητας Β.3.5 «Εμβαδόν κυκλικού δίσκου».

Παράδειγμα: Επιλογή και χρήση εργαλείων (χρήση ψηφιακών εργαλείων)

Σύγκριση εμβαδών ανόμοιων σχημάτων.

Άσκηση 3

ΟΛΟΚΛΗΡΑ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ2

Να σύρετε ένα ή περισσότερα από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και να εκτιμήσετε αν αλλάζει το εμβαδόν του κίτρινου πολυγώνου. Προσπαθήστε να κάνετε εκτίμηση όχι με βάση αυτό που φαίνεται αλλά με βάση τα μαθηματικά.

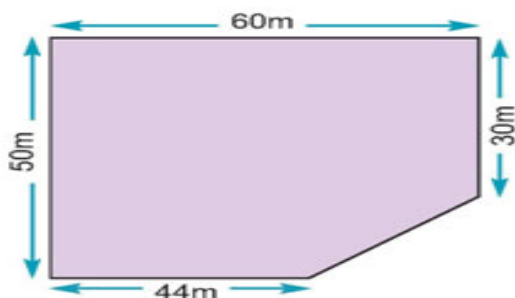
Εικόνα 3.15: Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β' Γυμνασίου - σελ. 124 Μικροπείραμα 1-Άσκησης 3 της ενότητας Β.1.3 «Εμβαδά επίπεδων σχημάτων».

Παράδειγμα- Μοντελοποίηση

17. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το τοπογραφικό διάγραμμα ενός κτήματος το οποίο πωλείται προς 20.000 € το στρέμμα.

α) Να βρεθεί η αξία του κτήματος.

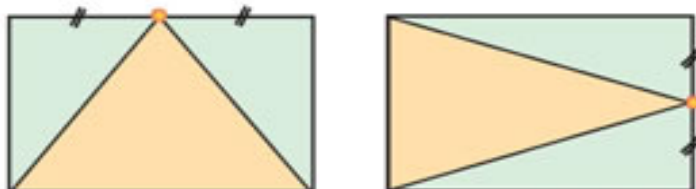
β) Πόσα κλήματα μπορούμε να φυτέψουμε στο κτήμα αυτό, αν κάθε κλήμα απαιτεί 2,5 m² χώρο;



Εικόνα 3.16: Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου-σελ.125 άσκηση 17 της ενότητας Β.1.3 «Εμβαδόν επίπεδων επιφανειών».

Παράδειγμα – Συλλογισμός και επιχειρηματολογία (Εικόνα 3.7)

8. Τα παρακάτω ορθογώνια έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Εξηγήστε γιατί τα πράσινα μέρη των δύο ορθογωνίων έχουν ίσα εμβαδά.



Παράδειγμα: Μαθηματική επικοινωνία

6. Ποια από τις μονάδες μέτρησης εμβαδού θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε, για να μετρήσουμε το εμβαδόν:
- του δωματίου μας,
 - της Κρήτης,
 - ενός αγρού,
 - ενός γραμματόσημου,
 - ενός φύλλου τετραδίου.

Εικόνα 3.17: Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου - Σελ. 118 Άσκηση 6 της ενότητας Β.1.2 «Μονάδες μέτρησης επιφανειών».

Παράδειγμα – Αναστοχασμός (Εικόνα 3.11)

3. *Να ερμηνευτούν με γεωμετρικό τρόπο οι επιμεριστικές ιδιότητες:*
 $(a + \beta) \cdot \gamma = a \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$ και $(a - \beta) \cdot \gamma = a \cdot \gamma - \beta \cdot \gamma$

Για να μελετήσουμε και να αναλύσουμε τα δεδομένα από τα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια σχετικά με το 6^ο ερευνητικό ερώτημα δηλαδή ποια μορφή απάντησης απαιτεί η εργασία, χρησιμοποιήσαμε το εργαλείο ανάλυσης της Glasnovic (2018, βλέπε Σχήμα 1.2).

ΜΟΡΦΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ	Κλειστή απάντηση
	Ανοικτή απάντηση
	Πολλαπλή επιλογή

Αναλυτικότερα, τα έργα κλειστής απάντησης έχουν μια σωστή απάντηση, ανεξαρτήτως αν ο/η μαθητής/-τρια χρειάζεται αρκετές διαφορετικές προσεγγίσεις για να φτάσει στη λύση. Αντίθετα τα έργα ανοικτής απάντησης έχουν διαφορετικές ή πολλές σωστές απαντήσεις, ζητώντας από τους μαθητές να εκφράσουν πιο «ελεύθερα» τις ιδέες τους για να απαντήσουν.

Παράδειγμα Μορφή απάντησης- Πολλαπλή επιλογή

3. Αν τριπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου (O, ρ), τότε το εμβαδόν του:

A: διπλασιάζεται B: τριπλασιάζεται Γ: εξαπλασιάζεται Δ: εννιπλασιάζεται.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

Εικόνα 3.18: Ερώτηση κατανόησης από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου σελ.194-ερώτηση κατανόησης 3 της ενότητας: B.3.5 «Εμβαδόν κυκλικού δίσκου».

Παράδειγμα – Ανοιχτή απάντηση βλ. Εικόνα 3.11

Παράδειγμα – Κλειστή απάντηση βλ. Εικόνα 3.16

Για να αναλύσουμε τα έργα σχετικά με τη θεματολογία των έργων που καλύπτουν χρησιμοποιήσαμε το εργαλείο των Fan, Xiong, Zhao & Niu (2018), οι οποίοι πραγματοποίησαν μελέτη που εστίασε σε θέματα σχετικά με την ανάπτυξη Μαθηματικών εγχειριδίων από πολιτιστική σκοπιά. Για τη μελέτη αυτή δημιουργήθηκε ένα εννοιολογικό πλαίσιο που ταξινομεί τον πολιτισμό σε έξι τύπους σε σχέση με τις πεποιθήσεις, τις αξίες και τους τρόπους αλληλεπίδρασης των ανθρώπων σχετικά με αυτούς, για συλλογή και ανάλυση δεδομένων. Οι έξι τύποι πολιτισμού αφορούν τα εξής: (1) γεωγραφία, (2) αντικείμενα, χλωρίδα και πανίδα, (3) οργανώσεις, (4) τρόπους συμπεριφοράς και έθιμα, (5) ιστορία και (6) ταυτότητες (βλέπε Πίνακα 1.1).

Τύπος 1: Γεωγραφία, αυτός ο τύπος αποτελείται από παράγοντες που σχετίζονται με τη γεωγραφία, όπως πόλεις ή περιοχές, γραφικές περιοχές και αρχιτεκτονική, που έχουν ιδιαίτερη σημασία ή θεωρούνται σημαντικοί από τα μέλη της κοινωνίας.

Τύπος 2: Αντικείμενα, χλωρίδα και πανίδα, αυτός ο τύπος πολιτισμού μπορεί επίσης να ονομαστεί απλά «αντικείμενα» και αφορά το πώς τα μέλη μιας κοινωνίας βλέπουν, ενεργούν και αλληλεπιδρούν με αυτά τα αντικείμενα με συλλογικό τρόπο. Οι όροι «τεχνουργήματα, χλωρίδα και πανίδα» καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα πολιτιστικών πτυχών ή προϊόντων, όπως καθημερινές συσκευές και συσκευές επικοινωνίας. χαρτικά, βιβλία και παιχνίδια, νομίσματα, έργα τέχνης, τροφή, χλωρίδα και πανίδα.

Τύπος 3: Οργανισμοί. Οι άνθρωποι είναι κοινωνικά όντα, που υπάρχουν και αλληλεπιδρούν με ορισμένους οργανισμούς, όπως οικογένειες, κοινότητες, τάξεις, επιχειρήσεις, κοινωνικούς και πολιτικούς οργανισμούς. Κατά μία έννοια, οι οργανισμοί είναι πολιτιστικά προϊόντα της κοινωνίας και ο τρόπος με τον οποίο τα μέλη βλέπουν και αλληλεπιδρούν μαζί τους αντανακλά την κουλτούρα της κοινωνίας.

Τύπος 4: Τρόποι συμπεριφοράς και έθιμα. Οι άνθρωποι ως μέλη μιας συγκεκριμένης ομάδας ή κοινωνίας συχνά ακολουθούν συγκεκριμένους τρόπους ή έθιμα για να εργαστούν, να ζήσουν και να αλληλεπιδράσουν και ως εκ τούτου διαμορφώνουν σχετικά σταθερούς και κοινά αποδεκτούς κανόνες, πρότυπα ή συνήθειες. Αυτοί οι τρόποι συμπεριφοράς και τα έθιμα είναι σημαντικά στοιχεία του πολιτισμού και συχνά διαφέρουν σε διαφορετικές περιοχές ή χώρες.

Τύπος 5: Ιστορία. Η ιστορία και ο πολιτισμός είναι αλληλένδετα, και τα ιστορικά γεγονότα, τα πρόσωπα και οι εξελίξεις σε μια χώρα ή κοινωνία συχνά έχουν σημαντική σημασία στον πολιτισμό της χώρας ή της κοινωνίας και αποτελούν μέρος της πολιτιστικής ταυτότητας.

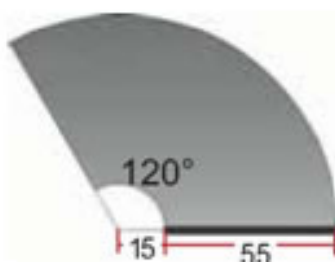
Τύπος 6: Ταυτότητες. Εξετάζεται το ζήτημα των ταυτοτήτων από πολιτισμική άποψη, συμπεριλαμβανομένης της γλώσσας και της χώρας ή της εθνικής ταυτότητας.

Παράδειγμα – Τύπος 1: Γεωγραφία & Τύπος 2: Αντικείμενα, γλωρίδα και πανίδα (Εικόνα 3.17)

6. Ποια από τις μονάδες μέτρησης εμβαδού θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε, για να μετρήσουμε το εμβαδόν:
- α) του δωματίου μας,
 - β) της Κρήτης,
 - γ) ενός αγρού,
 - δ) ενός γραμματόσημου,
 - ε) ενός φύλλου τετραδίου.

Παράδειγμα – Τύπος 2: Αντικείμενα, γλωρίδα και πανίδα

6. Ο υαλοκαθαριστήρας ενός αυτοκινήτου έχει μήκος 55 cm. Το σημείο περιστροφής απέχει από το λάστιχο καθαρισμού 15 cm. Αν ο υαλοκαθαριστήρας διαγράφει γωνία 120° , να υπολογίσετε την επιφάνεια που καθαρίζει.



Εικόνα 3.19: Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου σελ. 198- άσκηση 6 της ενότητας: Β.3.6 «Εμβαδόν κυκλικού τομέα».

Παράδειγμα: Τύπου 2, 3 & 4

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Στο σχολείο της Κάτιας το μαθητικό συμβούλιο εκδίδει μια εφημερίδα που κάθε φύλλο της έχει διαστάσεις 42 cm μήκος και 30 cm πλάτος.

Να υπολογίσετε τη συνολική επιφάνεια του χαρτιού που θα χρησιμοποιηθεί, για να τυπωθούν 800 αντίτυπα της εφημερίδας, αν κάθε αντίτυπο έχει 8 φύλλα.

Εικόνα 3.20: Εφαρμογή από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου- σελ.121 εφαρμογή 2 της ενότητας Β.1.3 «Εμβαδόν επίπεδων επιφανειών».

Παράδειγμα: Τύπου 2, 5 & 6

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Το έτος 3.000 π.Χ. περίπου οι αρχαίοι Αιγύπτιοι έκτισαν την πυραμίδα του Χέοπα, που έχει βάση τετράγωνο πλευράς 233 m και παράπλευρη ακμή 220 m (περίπου).

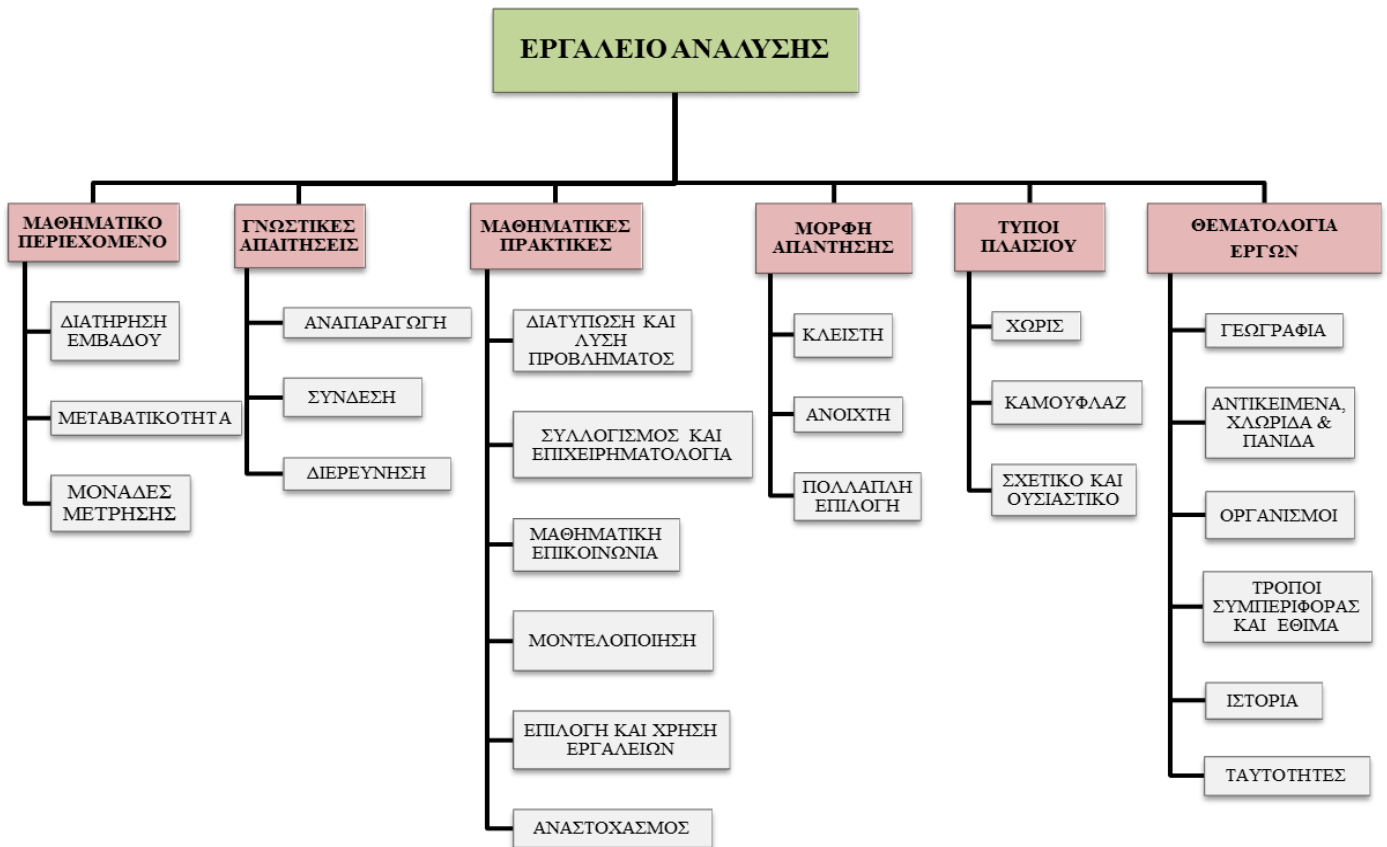
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας αυτής της πυραμίδας.

β) Αν γνωρίζουμε ότι το ύψος της είναι 146 m, να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.



Εικόνα 3.21: Εφαρμογή από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου-σελ. 220 Εφαρμογή 3 της ενότητας Β.4.4 «Η πυραμίδα και τα στοιχεία της».

Ακολουθεί το εργαλείο ανάλυσης που θα χρησιμοποιήσουμε για να αναλύσουμε τα έργα που αναφέρονται και σχετίζονται με το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του Γυμνασίου.



Σχήμα 3.1: Εργαλείο ανάλυσης των έργων για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του γυμνασίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό της παρούσας εργασίας θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των έργων που αφορούν το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του γυμνασίου. Τα αποτελέσματα θα παρουσιαστούν ανά τάξη και θα αφορούν την οριζόντια και την κάθετη ανάλυση. Στη συνέχεια αφού αναλυθούν όλα τα έργα σε κάθε τάξη για όλους τους άξονες, θα παρουσιαστεί μια συγκριτική μελέτη για όλους τους άξονες στην κάθετη ανάλυση με ποσοστά. Στο τέλος της εργασίας θα υπάρχει και το αντίστοιχο Παράρτημα που περιλαμβάνει τα έργα ανά ενότητα με αναλυτικό τρόπο.

4.1 Ανάλυση των έργων στην Α΄ Γυμνασίου

4.1.1 Οριζόντια ανάλυση

Για το 1^ο Ερευνητικό ερώτημα: Ποιος είναι ο αριθμός ενοτήτων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών, προέκυψαν τα εξής:

Πίνακας 4.1: Αριθμός ενοτήτων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών.

ΤΑΞΗ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΝΟΤΗΤΩΝ	ΣΥΝΟΛΟ ΕΝΟΤΗΤΩΝ	ΠΟΣΟΣΤΟ %
Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	1	60	1,67

Στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου υπάρχουν συνολικά 60 ενότητες στο Α΄ Μέρος (ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ-ΑΛΓΕΒΡΑ) και το Β΄ Μέρος (ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ), από αυτές υπάρχει μια ενότητα με το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών. Συγκεκριμένα, η εστίαση της ενότητας αυτής, ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.3.5 Μονάδες μέτρησης, είναι οι μονάδες μέτρησης.

Τα θέματα που καλύπτονται στις σχετικές ενότητες, και απαντούν στο 2ο ερευνητικό ερώτημα της παρούσας διπλωματικής εργασίας, είναι τα εξής:

1^η κατηγορία: θέματα των έργων για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών ως αυτόνομη έννοια.

Αναλυτικότερα:

Α΄ Γυμνασίου (Βανδουλάκης, Καλλιγιάς, Μαρκάκης & Φερεντίνος, γ.γ, 2021).

Πίνακας 4.2: Αριθμός ενοτήτων και έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου όπου το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών διδάσκεται ως αυτόνομη έννοια.

ΤΑΞΗ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΝΟΤΗΤΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΝΤΥΠΩΝ ΕΡΓΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ
Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	1	6	0

Πίνακας 4.3: Μαθησιακοί στόχοι των ενότητων όπου το εμβαδόν διδάσκεται ως αυτόνομη έννοια στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου.

ΤΙΤΛΟΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ	ΜΑΘΗΣΙΑΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΝΤΥΠΩΝ ΕΡΓΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.3.5 Μονάδες μέτρησης	<ol style="list-style-type: none"> Οι μαθητές να κατανοήσουν τη διαδικασία μέτρησης ενός βασικού φυσικού μεγέθους με διαφορετικές μονάδες μέτρησης καθώς και να καταφέρουν να διερευνήσουν τις μεταξύ τους σχέσεις. Η διαδικασία της μετατροπής των μονάδων επιφάνειας. 	6	0

Όπως επισημαίνεται από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι υπάρχει μόνο μια ενότητα που αναφέρεται στο εμβαδόν επίπεδων επιφανειών. Η συγκεκριμένη ενότητα αναφέρεται στις μονάδες μέτρησης και περιέχει έργα υπολογισμού εμβαδού γνωστών σχημάτων καθώς και έργα που επιδιώκεται οι μαθητές να εκτελέσουν πράξεις ώστε να μετατρέψουν μονάδες μέτρησης επιφανειών στα υποπολλαπλάσια και πολλαπλάσια τους.

2^η κατηγορία: θέματα των έργων που λειτουργούν ως μια βοηθητική αναπαράσταση για την κατανόηση μιας άλλης έννοιας.

Πίνακας 4.4: Αριθμός ενότητων και έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου όπου το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών διδάσκεται ως βοηθητική έννοια.

ΤΑΞΗ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΝΟΤΗΤΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΝΤΥΠΩΝ ΕΡΓΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ
Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	6	6	9

Αναλυτικότερα:

Πίνακας 4.5: Μαθησιακοί στόχοι των ενότητων όπου το εμβαδόν διδάσκεται ως μια βοηθητική αναπαράσταση για την κατανόηση μιας άλλης έννοιας στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου.

ΤΙΤΛΟΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ	ΜΑΘΗΣΙΑΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΝΤΥΠΩΝ ΕΡΓΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.2 Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών	1. Να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια και τη χρησιμότητα της επιμεριστικής ιδιότητας $a \cdot (\beta + \gamma) = a \cdot \beta + a \cdot \gamma$, με τη βοήθεια κατάλληλης γεωμετρικής απεικόνισης. 2. Να ερμηνεύουν γεωμετρικά την επιμεριστική ιδιότητα.	3	2
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.2.5 Πολλαπλασιασμός κλασμάτων	Η κατανόηση της έννοιας του πολλαπλασιασμού κλασμάτων και υπολογισμού του γινομένου τους με τη βοήθεια σχήματος.	0	1
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.2.6 Διαίρεση κλασμάτων	1. Η διαίρεση δύο φυσικών αριθμών. 2. Η κατανόηση της έννοιας της διαίρεσης κλασμάτων και υπολογισμού του πηλίκου τους με τη βοήθεια σχήματος.	0	2
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.4.3 Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων	Να δείξουν οι μαθητές σε διάφορα προβλήματα, που προέρχονται από την καθημερινότητα, τις διαδικασίες τις οποίες χρησιμοποιούμε σε διάφορες στρατηγικές επίλυσης. Παραδείγματα αποτελούν ο συμβολισμός του αγνώστου, η μετατροπή της λεκτικής έκφρασης ενός προβλήματος σε μαθηματική, η ανάλυση των δεδομένων σε δεδομένα και ζητούμενα, ο σχεδιασμός και η χρήση ενός πίνακα, η διερεύνηση όσων περιπτώσεων υπάρχουν κλπ, με τελικό σκοπό να βρουν τη λύση του προβλήματος και να κάνουν την επαλήθευση.	0	2
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.6.3 Ανάλογα ποσά - Ιδιότητες ανάλογων ποσών	Η αναγνώριση των αναλόγων ποσών όπως παρουσιάζονται σε προβλήματα της καθημερινότητας με ερωτήσεις κλειστού τύπου «σωστού ή λάθους».	1	0
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.6.6 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά	1. Η διαισθητική και εμπειρική εμπέδωση/κατανόηση της έννοιας της ταυτόχρονης μεταβολής δύο μεγεθών, όπως παραδείγματος χάριν η μεταβολή των διαστάσεων ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου σταθερού εμβαδού. 2. Η αναγνώριση των αναλόγων ποσών όπως παρουσιάζονται σε προβλήματα της καθημερινότητας με ερωτήσεις κλειστού τύπου «σωστού ή λάθους».	2	2

Στις έξι αυτές ενότητες όπου το εμβαδόν διδάσκεται ως μια βοηθητική αναπαράσταση για την κατανόηση μιας άλλης έννοιας, το εμβαδόν συνδέεται με άλλες θεματικές ενότητες των Μαθηματικών όπως πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών, πολλαπλασιασμός και διαίρεση κλασμάτων, παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων, ανάλογα ποσά - ιδιότητες ανάλογων ποσών και αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Τα ψηφιακά έργα είναι περισσότερα από τα έργα σε αυτές τις έξι ενότητες.

Ακολουθούν παραδείγματα για να αποσαφηνιστεί η επιλογή των έργων όπου το εμβαδόν επιπέδων επιφανειών διδάσκεται ως μια αυτόνομη έννοια ή ως μια βοηθητική αναπαράσταση για την κατανόηση μιας άλλης έννοιας.

Παράδειγμα 1^ο (το εμβαδόν διδάσκεται ως αυτόνομη έννοια)

6. Ένα οικόπεδο έχει σχήμα τετραγώνου με πλευρά 210 m. Να υπολογίσεις το εμβαδόν του σε m^2 και σε στρέμματα.

Εικόνα 4.1: Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου σελ. 67- άσκηση 6 της ενότητας: Α.3.5. «Μονάδες μέτρησης».

Παράδειγμα 2^ο (το εμβαδόν διδάσκεται ως μια βοηθητική αναπαράσταση για την κατανόηση μιας άλλης έννοιας).

Ποια από τα παρακάτω ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα;

(Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση)

1. (α) Η βάση και το εμβαδόν ενός τριγώνου, με σταθερό ύψος.

ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

(γ) Το εμβαδόν της ρωγμής ενός πλοίου και ο χρόνος που απαιτείται, για να γεμίσουν τα αμπάρια του με νερό.

Εικόνα 4.2: Ερώτηση κατανόησης από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου σελ. 109- ερώτηση κατανόησης 1, π.χ. α και γ, της ενότητας: Α. 6.6 «ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.6.6 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά».

4.1.2 Κάθετη ανάλυση

Για την κάθετη ανάλυση των περιεχομένων των διαδραστικών σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών του γυμνασίου, θα αναφέρουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν αναφορικά με το μαθηματικό περιεχόμενο, τις γνωστικές απαιτήσεις, τις μαθηματικές πρακτικές, τους τύπους πλαισίων και τη θεματολογία των έργων με τα εργαλεία ανάλυσης που αναφέρθηκαν στο 3^ο Κεφάλαιο της παρούσας εργασίας.

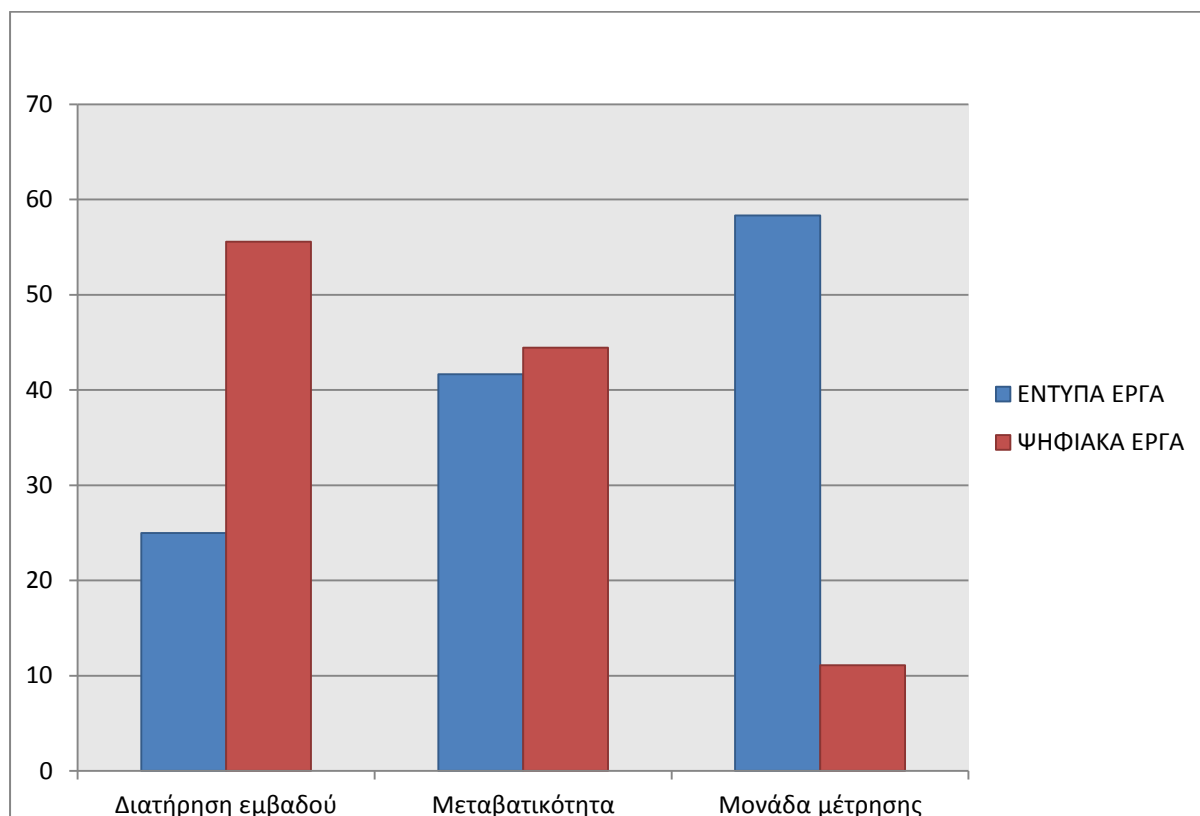
4.1.2.1 Μαθηματικό περιεχόμενο

Πίνακας 4.6: Μαθηματικό περιεχόμενο των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ	ΕΝΤΥΠΑ ΕΡΓΑ (Ε.Ε.)	% Ε.Ε.	ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΡΓΑ (Ψ.Ε.)	% Ψ.Ε.	ΣΥΝΟΛΟ	Σχετικές συχνότητες (%) ΕΡΓΩΝ
Διατήρηση εμβαδού	3	25	5	55,56	8	38,1
Μεταβατικότητα	5	41,67	4	44,44	9	42,9
Μονάδα μέτρησης	7	58,33	1	11,11	8	38,1

Είναι αναγκαίο να τονίσουμε στο σημείο αυτό ότι τα ποσοστά δεν αθροίζουν στο 100%. Αυτό εξηγείται γιατί υπάρχουν έργα όπου η εστίαση δεν είναι μόνο σε μια έννοια του μαθηματικού περιεχομένου όπως η μονάδα μέτρησης αλλά μπορεί να είναι σε δύο έννοιες του εμβαδού. Τέλος, το πλήθος των έργων που υπάρχει στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου είναι 21, από αυτά 12 είναι έντυπα έργα και 9 ψηφιακά.

Ακολουθεί διάγραμμα - ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων % όπου φαίνονται γραφικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση σχετικά με το μαθηματικό περιεχόμενο.



Σχήμα 4.1: Μαθηματικό περιεχόμενα των έργων της Α΄ Γυμνασίου.

Από την ανάλυση των έργων που πραγματοποιήθηκε στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου συμπεραίνουμε ότι τα έργα που εστιάζουν στη μεταβατικότητα του εμβαδού είναι σε ποσοστό 42,9% και αυτά που εστιάζουν στη διατήρηση εμβαδού και τη μονάδα μέτρησης αντιστοιχούν σε ποσοστό 38,1%. Αξίζει επίσης να επισημάνουμε ότι στο ψηφιακό βιβλίο υπάρχει μόνο ένα ψηφιακό έργο που εστιάζει στις μονάδες μέτρησης σε αντίθεση με τα έντυπα έργα που είναι επτά. Επομένως μπορούμε να πούμε ότι στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου που το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας διδάσκεται ως αυτόνομη έννοια μόνο στην ενότητα Α.3.5-Μονάδες μέτρησης, επιδιώκεται οι μαθητές να κατανοήσουν ότι η αριθμητική τιμή του εμβαδού δεν αλλάζει καθώς το σχήμα ανασυγκροτείται ή μεταφέρεται ώστε να συγκριθεί με ένα άλλο μέγεθος, καθώς και να μπορούν να μετατρέπουν από τη μια μονάδα μέτρησης σε άλλη.

Ακολουθούν παραδείγματα για να αποσαφηνιστεί η επιλογή και η κατηγοριοποίηση των έργων στις αντίστοιχες κατηγορίες του μαθηματικού περιεχομένου.

Παράδειγμα 1^ο – Μονάδα μέτρησης

5. Συμπλήρωσε τα κενά: (α) $56 \text{ Km}^2 = \dots\dots\dots \text{ m}^2$ (β) $0,987 \text{ στρέμματα} = \dots\dots\dots \text{ m}^2$, (γ) $350 \text{ στρέμματα} = \dots\dots\dots \text{ m}^2$.

Εικόνα 4.3: Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου σελ. 67- άσκηση 5 της ενότητας: Α.3.5. «Μονάδες μέτρησης».

Παράδειγμα 2^ο – Διατήρηση εμβαδού

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει διαστάσεις x και y . Αν γνωρίζεις ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 144 m^2 , μπορείς να βρεις δεκατέσσερις ακέραιες τιμές των διαστάσεών του και να συμπληρώσεις τον παρακάτω πίνακα;

x																			
y																			

► Ποια σχέση συνδέει τις διαστάσεις του ορθογωνίου με το εμβαδόν του;

Εικόνα 4.4: Δραστηριότητα από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου σελ.107- δραστηριότητα 3 της ενότητας: Α.6.6. «Αντιστρόφως ανάλογα ποσά».

Παράδειγμα 3^ο – Μεταβατικότητα και μονάδας μέτρησης

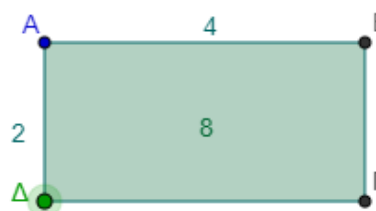
Διαίρεση κλασμάτων μικρότερων της μονάδας

Εισαγωγική Δραστηριότητα Κύρια Δραστηριότητα

Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ αν το εμβαδόν του είναι 12 m^2 και το μήκος της πλευράς του ΑΒ είναι 4 m , να βρεθεί το μήκος της πλευράς του ΑΔ.

Σχηματική Λύση

Μετακινήστε το σημείο Δ ώστε να πετύχετε το ζητούμενο εμβαδόν.

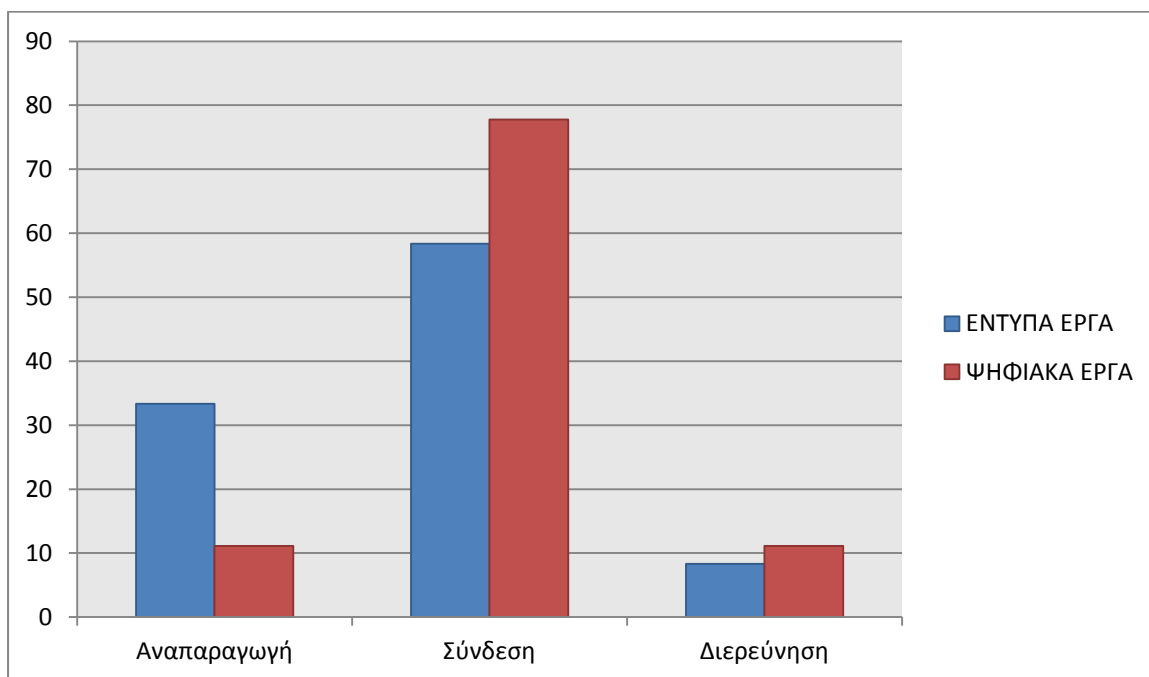


Εικόνα 4.5: Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου σελ. 50 Μικροπείραμα 1^ο – Εισαγωγική δραστηριότητα της ενότητας Α.2.6 «Διαίρεση κλασμάτων».

4.1.2.2 Γνωστικές απαιτήσεις

Πίνακας 4.7: Γνωστικές απαιτήσεις των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου.

ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ	ΕΝΤΥΠΑ ΕΡΓΑ (Ε.Ε.)	% Ε.Ε.	ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΡΓΑ (Ψ.Ε.)	% Ψ.Ε.	ΣΥΝΟΛΟ ΕΡΓΩΝ	Σχετικές συχνότητες (%) ΕΡΓΩΝ
Αναπαραγωγή	4	33,33	1	11,11	5	23,81
Σύνδεση	7	58,33	7	77,78	14	66,67
Διερεύνηση	1	8,34	1	11,11	2	9,52



Σχήμα 4.2: Γνωστικές απαιτήσεις των έργων της Α' Γυμνασίου.

Από την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε σχετικά με τις γνωστικές απαιτήσεις των έργων που μελετήθηκαν προέκυψε ότι τα περισσότερα έργα (ποσοστό 66,67%), είναι έργα σύνδεσης. Συγκεκριμένα στα έργα αυτά ζητείται από τους μαθητές να ενσωματώσουν ή/και να συνδέσουν διαφορετικές θεματικές ενότητες και να επιλύσουν προβλήματα μη ρουτίνας με απλή μαθηματική συλλογιστική. Το 23,81% των έργων είναι έργα αναπαραγωγής, περισσότερα έντυπα έργα, όπου οι μαθητές καλούνται να αναπαραγάγουν ορισμούς και να εκτελέσουν υπολογιστικές πράξεις. Τέλος, έργα υψηλού γνωστικού επιπέδου δηλαδή διερεύνησης είναι μόλις δυο σε ποσοστό 9,52%.

Ακολουθούν παραδείγματα έργων με διαφορετικές γνωστικές απαιτήσεις.

Παράδειγμα 1^ο – Αναπαραγωγή

5. Συμπλήρωσε τα κενά: (α) $56 \text{ Km}^2 = \dots\dots\dots \text{ m}^2$ (β) $0,987 \text{ στρέμματα} = \dots\dots\dots \text{ m}^2$, (γ) $350 \text{ στρέμματα} = \dots\dots\dots \text{ m}^2$.

Εικόνα 4.6: Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α' Γυμνασίου σελ. 67- άσκηση 5 της ενότητας: Α.3.5. «Μονάδες μέτρησης».

Παράδειγμα 2^ο – Σύνδεση

Ποια από τα παρακάτω ποσά είναι ανάλογα:

1. (Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση)

(β) Το εμβαδόν του πατώματος και ο αριθμός των πλακών που είναι στρωμένο



(δ) Το μήκος και το πλάτος ενός ορθογωνίου δεδομένου εμβαδού



(στ) Η πλευρά ενός τετραγώνου και το εμβαδόν του.



Εικόνα 4.7: Ερώτηση κατανόησης από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου σελ. 10- ερώτηση κατανόησης 1, π.χ. β, δ και στ, της ενότητας: Α.6.3 «Ανάλογα ποσά- Ιδιότητες ανάλογων ποσών».

Παράδειγμα 3^ο – Διερεύνηση

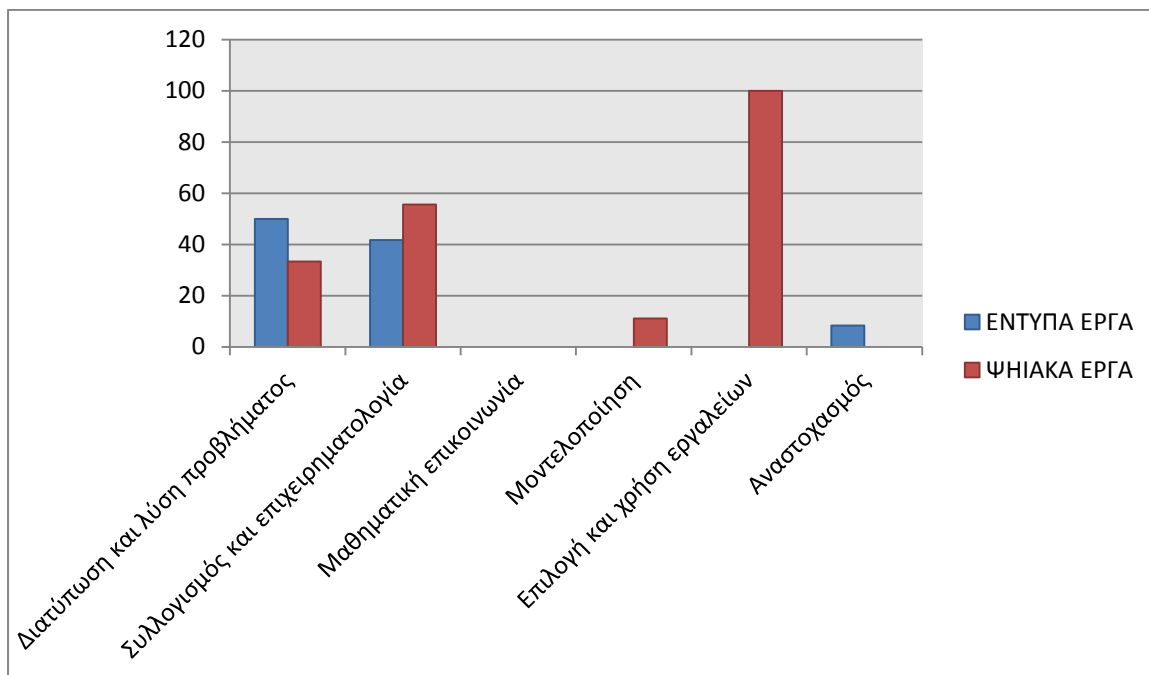
*;Οι τούρτες γενεθλίων που διαθέτει ένα ζαχαροπλαστείο έχουν σχήμα ορθογωνίου και έχουν την ίδια τιμή όταν είναι ίδια η περίμετρος. Τι διαστάσεων τούρτα συμφέρει να αγοράσεις όταν θέλεις να έχει περίμετρο 400 cm;
;Κάνε κλικ στον πάπυρο, για να διαβάσεις τις οδηγίες και να ασχοληθείς με δύο δραστηριότητες που θα σε βοηθήσουν να διερευνήσεις το πρόβλημα.*

Εικόνα 4.8: Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου - Σελ. 76 Μικροπείραμα 1^ο κάτω από ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ 3, της ενότητας: Α.4.3. « Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων».

4.1.2.3 Μαθηματικές πρακτικές

Πίνακας 4.8: Μαθηματικές πρακτικές των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ	ΕΝΤΥΠΑ ΕΡΓΑ (Ε.Ε.)	% Ε.Ε.	ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΡΓΑ (Ψ.Ε.)	% Ψ.Ε.	ΣΥΝΟΛΟ ΕΡΓΩΝ	Σχετικές συχνότητες (%) ΕΡΓΩΝ
Διατύπωση και λύση προβλήματος	6	50	3	33,33	9	42,86
Συλλογισμός και επιχειρηματολογία	5	41,67	5	55,56	10	47,62
Μαθηματική επικοινωνία	0	0	0	0	0	0
Μοντελοποίηση	0	0	1	11,11	1	4,76
Επιλογή και χρήση εργαλείων	0	0	9	100	9	42,86
Αναστοχασμός	1	8,33	0	0	1	4,76



Σχήμα 4.3: Μαθηματικές πρακτικές των έργων της Α΄ Γυμνασίου.

Όπως προκύπτει από τους παραπάνω πίνακες που αναφέρονται στις μαθηματικές πρακτικές που απαιτούνται από τα έργα προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα: 1) τα περισσότερα έργα είναι συλλογισμού και επιχειρηματολογίας (47,62%), 2) 9 από τα έργα που αναλύθηκαν από το σχολικό διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο γίνεται επιλογή και χρήση ψηφιακών κυρίως εργαλείων (GeoGebra και χελωνόκοσμος) και υπάρχει 1 ψηφιακό έργο που χρειάζεται μοντελοποίηση για να επιλυθεί. Επίσης θα επισημάνουμε ότι υπάρχουν έργα όπου αναπτύσσονται δυο πρακτικές και αυτό συμβαίνει κυρίως στα ψηφιακά έργα καθώς γίνεται χρήση εργαλείου και κάποια άλλη πρακτική αναπτύσσεται σε συνδυασμό με τη χρήση του ψηφιακού εργαλείου.

Ακολουθούν παραδείγματα επιλογής και κατηγοριοποίησης των έργων από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου.

Παράδειγμα 1^ο - Πρακτική: διατύπωση και λύση προβλήματος & χρήση και επιλογή εργαλείου.

Εισαγωγική Δραστηριότητα Κύρια Δραστηριότητα

Εάν το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι τα $\frac{4}{9}$ του ΑΕΗΖ και το ΑΒ είναι τα $\frac{2}{3}$ του ΑΕ, τι μέρος του ΑΖ είναι το ΑΔ;

Σχηματική Λύση
Μετακινήστε το Δ στην κατάλληλη θέση και γράψτε την απάντησή σας στα κουτάκια.

Αριθμητής Λάθος!
Παρονομαστής

Αλγεβρική Λύση

$E = \beta \cdot \nu$
 $\frac{4}{9} = \frac{2}{3} \cdot \alpha$
 $\alpha = \frac{4}{9} : \frac{2}{3}$

Παρατηρήστε το γινόμενο $\frac{4}{9} : \frac{2}{3}$ και συγκρίνετέ το με το αποτέλεσμα της σχηματικής λύσης.

Εικόνα 4.9: Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου - Σελ. 50 Μικροπείραμα 1^ο - Κύρια δραστηριότητα, της ενότητας: Α.2.6 «Διαίρεση κλασμάτων».

Παράδειγμα 2^ο – Πρακτική: Αναστοχασμός

3. *Να ερμηνευτούν με γεωμετρικό τρόπο οι επιμεριστικές ιδιότητες:
(α + β)·γ = α·γ + β·γ και (α-β)·γ=α·γ-β·γ*

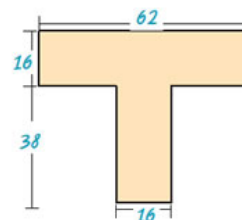
Εικόνα 4.10: Παράδειγμα-εφαρμογή από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου- Σελ.16 Παραδείγματα-Εφαρμογές 3^ο της ενότητας: Α.1.2 «Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών».

Παράδειγμα 3^ο – Πρακτική: Συλλογισμός και επιχειρηματολογία

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Ο Σπύρος υπολόγισε με το μυαλό του το εμβαδόν του διπλανού σχήματος και το βρήκε 1600 τετραγωνικά χιλιοστά.

► Υπολόγισε και συ το εμβαδόν και δώσε μια εξήγηση για το τι ακριβώς έκανες για να το βρεις.



Εικόνα 4.11: Δραστηριότητα από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου- Σελ.16- δραστηριότητα 3^η της ενότητας: Α.1.2 «Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών».

Παράδειγμα 4^ο- Πρακτική: Μοντελοποίηση (βλέπε Εικόνα 4.7)

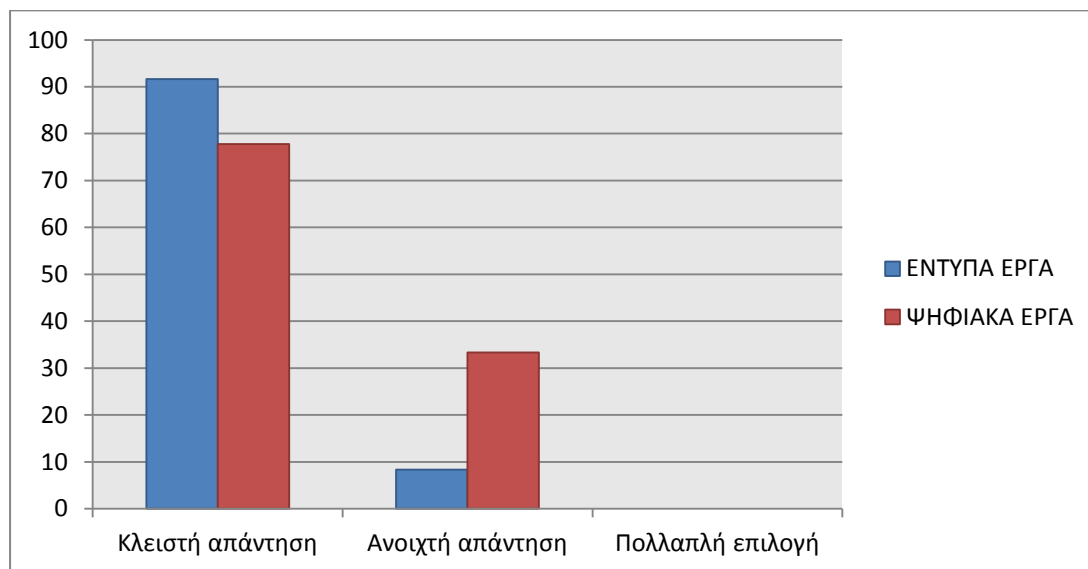
*;Οι τούρτες γενεθλίων που διαθέτει ένα ζαχαροπλαστείο έχουν σχήμα ορθογωνίου και έχουν την ίδια τιμή όταν είναι ίδια η περίμετρος. Τι διαστάσεων τούρτα συμφέρει να αγοράσεις όταν θέλεις να έχει περίμετρο 400 cm;
;Κάνε κλικ στον πάπυρο, για να διαβάσεις τις οδηγίες και να ασχοληθείς με δύο δραστηριότητες που θα σε βοηθήσουν να διερευνήσεις το πρόβλημα.*

4.1.2.4 Μορφή απάντησης

Πίνακας 4.9: Μορφή απάντησης των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου.

ΜΟΡΦΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ	ΕΝΤΥΠΑ ΕΡΓΑ (Ε.Ε.)	% Ε.Ε.	ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΡΓΑ (Ψ.Ε.)	% Ψ.Ε.	ΣΥΝΟΛΟ ΕΡΓΩΝ	Σχετικές συχνότητες (%) ΕΡΓΩΝ
Κλειστή απάντηση	11	91,67	7	77,78	18	85,7
Ανοιχτή απάντηση	1	8,33	3	33,33	4	19,05
Πολλαπλή επιλογή	0	0	0	0	0	0

Αξίζει να τονίσουμε και εδώ ότι από τα έργα που αναλύθηκαν υπήρχε ένα που απαιτούσε και κλειστή και ανοιχτή απάντηση στα επιμέρους ερωτήματα.



Σχήμα 4.4: Μορφή απάντησης των έργων της Α΄ Γυμνασίου.

Όσον αφορά τη μορφή απάντησης των έργων που έχουν αναλυθεί στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου είναι έργα κλειστού τύπου, δηλαδή τα έργα κλειστής απάντησης απαιτούν μια συγκεκριμένη απάντηση, ανεξαρτήτως εάν ο μαθητής εκτελεί αρκετές πράξεις ή ακολουθεί αρκετές προσεγγίσεις για να φτάσει στη λύση. Συγκεκριμένα τα έργα κλειστής απάντησης είναι η πλειοψηφία των έργων 85,7% και τα έργα ανοιχτής απάντησης υπάρχουν σε ποσοστό 19,05%. Αξίζει να επισημανθεί ότι δεν υπάρχουν έργα πολλαπλής επιλογής.

Παράδειγμα 1^ο – Μορφή απάντησης: ανοιχτή (βλέπε **Εικόνα 4.9)**

3. *Να ερμηνευτούν με γεωμετρικό τρόπο οι επιμεριστικές ιδιότητες:*
 $(a + \beta) \cdot \gamma = a \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$ και $(a - \beta) \cdot \gamma = a \cdot \gamma - \beta \cdot \gamma$

Παράδειγμα 2^ο - Μορφή απάντησης: Ανοιχτή και κλειστή απάντηση

Ζητείται σπίτι με το μικρότερο κόστος κατασκευής.

3η δραστηριότητα

Για να σβήσετε τα ίχνη πατήστε **Ctrl+F**

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $P=2\chi+2\psi= 53,16$
 Για ποιές τιμές των χ και ψ γίνεται ελάχιστη;
 Ποιές πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε το κόστος κατασκευής του σπιτιού να γίνει ελάχιστο;

Επέκταση Μπορείτε να επαναλάβετε την εφαρμογή για διαφορετικές τιμές του εμβαδού ρυθμίζοντας το μεταβολέα Ε.

Ε = 144

Εμβαδόν= 144
Περίμετρος=53.16

$\psi=7.58$
 $\chi=19$

	A	B
1	Πλευρά χ	Πλευρά ψ
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		

Εικόνα 4.12: Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου- σελ. 107 Μικροπείραμα 1^ο κάτω από τη Δραστηριότητα 3^η της ενότητας Α.6.6 «Αντιστροφή ανάλογα ποσά».

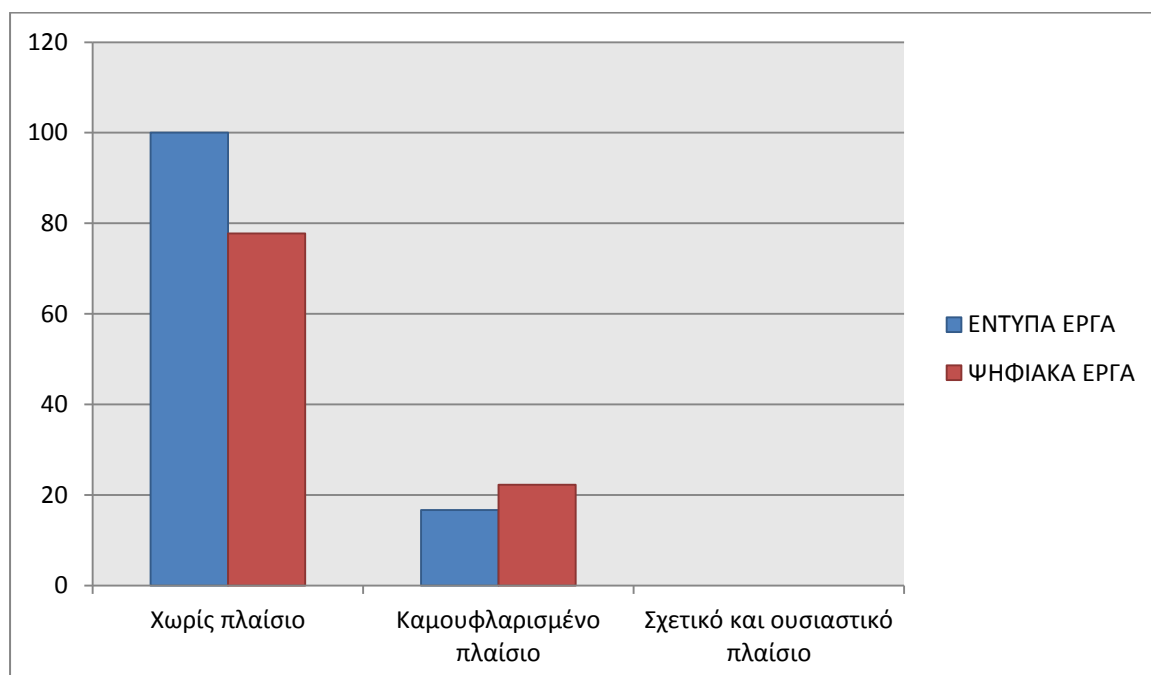
4.1.2.5 Τύποι πλαισίου

Πίνακας 4.10: Τύποι πλαισίου των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου.

ΤΥΠΟΙ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	ΕΝΤΥΠΑ ΕΡΓΑ (Ε.Ε.)	% Ε.Ε.	ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΡΓΑ (Ψ.Ε.)	% Ψ.Ε.	ΣΥΝΟΛΟ ΕΡΓΩΝ	Σχετικές συχνότητες (%) ΕΡΓΩΝ
Χωρίς πλαίσιο	12	100	7	77,78	19	90,48
«Καμουφλαρισμένο» πλαίσιο	2	16,67	2	22,22	4	19,05
Σχετικό και ουσιαστικό πλαίσιο	0	0	0	0	0	0

Επισημαίνουμε ότι το σύνολο των έργων είναι 21, όμως υπάρχουν δυο έργα που έχουν υποερωτήματα που το καθένα εντάσσεται σε διαφορετικό πλαίσιο.

Ακολουθεί διάγραμμα – ραβδόγραμμα όπου παρίστανται γραφικά οι τύποι πλαισίου που υπάρχουν στα έργα που αναλύθηκαν.



Σχήμα 4.5: Τύποι πλαισίου των έργων της Α΄ Γυμνασίου.

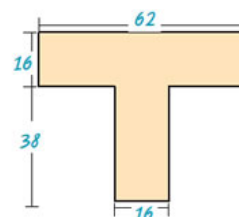
Από τα έργα που αναλύθηκαν με το εργαλείο ανάλυσης των Wijaya, van den Heuvel-Ranhuizen, & Doorman (2015), προέκυψε ότι η συντριπτική πλειοψηφία των έργων (90,48%) είτε έντυπα έργα είτε ψηφιακά, είναι έργα χωρίς πλαίσιο και αναφέρονται μόνο σε μαθηματικά αντικείμενα και σύμβολα. Επίσης υπάρχουν τέσσερα έργα (ποσοστό 19,05%) που είναι παραδείγματα πλαισίου καμουφλάζ όπου η λύση μπορεί να βρεθεί συνδυάζοντας όλους τους αριθμούς που δίνονται στο κείμενο.

Παράδειγμα 1^ο – Χωρίς πλαίσιο (βλέπε εικόνα 4.10)

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Ο Σπύρος υπολόγισε με το μυαλό του το εμβαδόν του διπλανού σχήματος και το βρήκε 1600 τετραγωνικά χιλιοστά.

► Υπολόγισε και συ το εμβαδόν και δώσε μια εξήγηση για το τι ακριβώς έκανες για να το βρεις.



Παράδειγμα 2^ο – Καμουφλαρισμένο πλαίσιο

(Βλέπε Εικόνα 4.1: Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου σελ. 67- άσκηση 6 της ενότητας: Α.3.5. «Μονάδες μέτρησης».

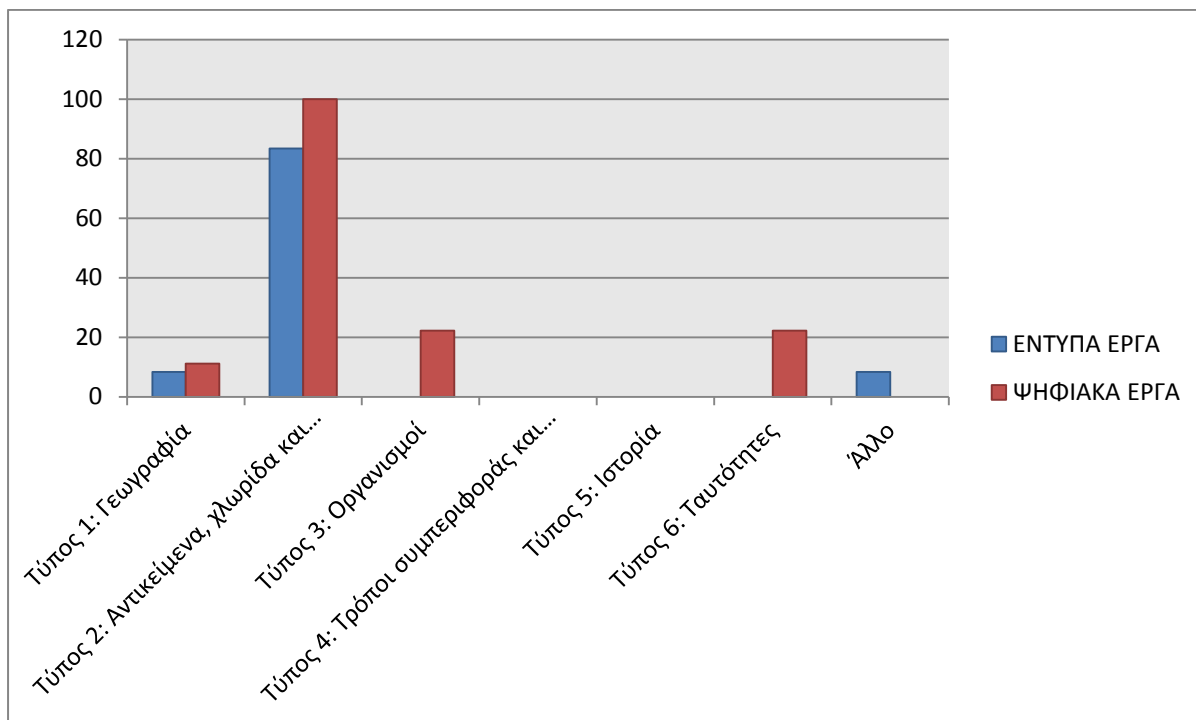
(γ) Το εμβαδόν της ρωγμής ενός πλοίου και ο χρόνος που απαιτείται, για να γεμίσουν τα αμπάρια του με νερό.



4.1.2.6 Θεματολογία έργων

Πίνακας 4.11: Θεματολογία των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου.

ΘΕΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΕΡΓΩΝ	ΕΝΤΥΠΑ ΕΡΓΑ (Ε.Ε.)	% Ε.Ε.	ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΡΓΑ (Ψ.Ε.)	% Ψ.Ε.	ΣΥΝΟΛΟ ΕΡΓΩΝ	Σχετικές συχνότητες (%) ΕΡΓΩΝ
Τύπος 1: Γεωγραφία	1	8,33	1	11,11	2	9,52
Τύπος 2: Αντικείμενα, χλωρίδα και πανίδα	10	83,34	9	100	19	90,48
Τύπος 3: Οργανισμοί	0	0	2	22,22	2	9,52
Τύπος 4: Τρόποι συμπεριφοράς και έθιμα	0	0	0	0	0	0
Τύπος 5: Ιστορία	0	0	0	0	0	0
Τύπος 6: Ταυτότητες	0	0	2	22,22	2	9,52
Άλλο	1	8,33	0	0	1	4,76



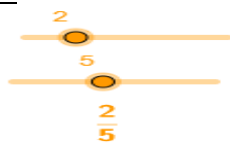
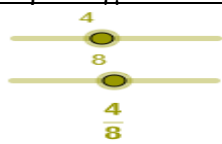
Σχήμα 4.6: Θεματολογία των έργων της Α΄ Γυμνασίου.

Η θεματολογία των έργων χωρίζεται σε έξι κατηγορίες όπως παρουσιάζονται στους παραπάνω πίνακες. Αρχικά θα τονίσουμε ότι κάποια έργα ανήκουν σε δυο κατηγορίες και ένα έργο από τα 21 συνολικά δεν υπάγεται σε καμία κατηγορία. Το θέμα των περισσότερων έργων αναφέρεται σε αντικείμενα, χλωρίδα και πανίδα δηλαδή είναι τύπου 2 σε ποσοστό 90,48%, ένα έργο αναφέρεται στον τύπο 1: Γεωγραφία και 2 από τα 21 συνολικά έργα είναι τύπου 3.

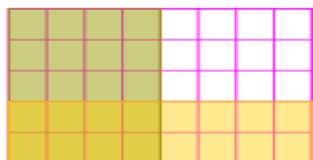
Παράδειγμα τύπου 1: Γεωγραφία (βλέπε Εικόνα 4.1)

6. Ένα οικόπεδο έχει σχήμα τετραγώνου με πλευρά 210 m. Να υπολογίσεις το εμβαδόν του σε m² και σε στρέμματα.

Παράδειγμα τύπου 2 & 3



ΠΡΟΒΛΗΜΑ
 Πόσο είναι τα $\frac{7}{10}$ του εμβαδού μιας τετράγωνης πλακόστρωτης σχολικής αυλής, αν τα $\frac{2}{8}$ της ίδιας αυλής είναι 60 m²;



- ΒΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ**
1. Τα $\frac{2}{8}$ της αυλής που έχει εμβαδό 60 m² πόσες πλάκες είναι σύμφωνα με το σχήμα που βλέπεις στην οθόνη;
 2. Υπολόγισε το εμβαδό της κάθε πλάκας;
 3. Τα $\frac{7}{10}$ της αυλής πόσα πλακάκια είναι σύμφωνα με το σχήμα που βλέπεις στην οθόνη;
 4. Υπολόγισε το εμβαδό τους
 5. Γράψε την εξίσωση που θα σε βοηθούσε εναλλακτικά να λύσεις το πρόβλημα και υπολόγισε το εμβαδό που σου ζητείται Βρήκες το ίδιο με το βήμα 4;

Εικόνα 4.13: Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου- Σελ. 78 Μικροπείραμα κάτω από την Άσκηση 2 της ενότητας Α.4.3. «Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων».

Παράδειγμα – Δεν εντάσσεται σε κάποια κατηγορία (βλέπε εικόνα 4.3)

5. Συμπλήρωσε τα κενά: (α) $56 \text{ Km}^2 = \dots\dots\dots \text{ m}^2$ (β) $0,987 \text{ στρέμματα} = \dots\dots\dots \text{ m}^2$, (γ) $350 \text{ στρέμματα} = \dots\dots\dots \text{ m}^2$.

4.2 Ανάλυση των έργων στην Β΄ Γυμνασίου

4.2.1 Οριζόντια ανάλυση

Για τον αριθμό των ενοτήτων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών στην τάξη της Β΄ Γυμνασίου για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών, προέκυψαν τα εξής:

Πίνακας 4.12: Αριθμός ενοτήτων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών.

ΤΑΞΗ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΝΟΤΗΤΩΝ	ΣΥΝΟΛΟ ΕΝΟΤΗΤΩΝ	ΠΟΣΟΣΤΟ
Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	9	42	21,43

Στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Γυμνασίου υπάρχουν συνολικά 42 ενότητες στο Α΄ Μέρος (ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ-ΑΛΓΕΒΡΑ) και το Β΄ Μέρος (ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ), από αυτές 9 ενότητες εστιάζουν στο εμβαδόν επίπεδων επιφανειών με ποσοστό 21,43%.

Τα θέματα που καλύπτονται στις σχετικές ενότητες, και απαντούν στο 2ο ερευνητικό ερώτημα της παρούσας διπλωματικής εργασίας, είναι τα εξής:

1^η κατηγορία: θέματα των έργων για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών ως αυτόνομη έννοια.

Αναλυτικότερα:

Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης & Ρεκούμης, γ.γ, 2016).

Πίνακας 4.13: Αριθμός ενοτήτων και έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου όπου το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών διδάσκεται ως αυτόνομη έννοια.

ΤΑΞΗ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΝΟΤΗΤΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΝΤΥΠΩΝ ΕΡΓΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ
Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	9	140	34

Πίνακας 4.14: Μαθησιακοί στόχοι των ενοτήτων όπου το εμβαδόν διδάσκεται ως αυτόνομη έννοια στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου.

ΤΙΤΛΟΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ	ΜΑΘΗΣΙΑΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΝΤΥΠΩΝ ΕΡΓΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ
ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.1.1 Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας	Η κατανόηση της έννοιας του εμβαδού και ότι αυτό εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιείται κάθε φορά.	6	8
ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.1.2 Μονάδες μέτρησης επιφανειών	Η εξοικείωση με τις μονάδες μέτρησης εμβαδού και η μετατροπή μονάδων από μικρότερες σε μεγαλύτερες και αντίστροφα.	10	0
ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.1.3 Εμβαδά επίπεδων σχημάτων	Οι μαθητές επιδιώκεται: <ul style="list-style-type: none"> • να γνωρίζουν τους τύπους υπολογισμού εμβαδών επίπεδων σχημάτων, • να μπορούν να αποδείξουν τους τύπους των εμβαδών συνδέοντάς τους με την κατάλληλη σειρά, • να μπορούν να εφαρμόζουν συνδυάζοντας τους τύπους σε αντίστοιχα προβλήματα. 	26	10
ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.3.5 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου	Βασική επιδίωξη είναι οι μαθητές να κατανοήσουν τον υπολογισμό του εμβαδού κυκλικού δίσκου και να μπορούν να εφαρμόζουν κατάλληλα τον τύπο.	16	5
ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.3.6 Εμβαδόν κυκλικού τομέα	Βασική επιδίωξη είναι οι μαθητές να υπολογίζουν το εμβαδόν κυκλικού τομέα, όταν δίνεται η ακτίνα του κύκλου και το μέτρο του αντίστοιχου τόξου σε μοίρες ή σε ακτίνια.	16	4
ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.4.2 Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου	Οι στόχοι της ενότητας είναι οι μαθητές: <ul style="list-style-type: none"> • να αναγνωρίζουν αν ένα στερεό είναι πρίσμα και το είδος του πρίσματος, • να υπολογίζουν το εμβαδόν της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας πρίσματος, • να αναγνωρίζουν αν ένα στερεό είναι κύλινδρος και να υπολογίζουν το εμβαδόν της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας κυλίνδρου. 	15	2
ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.4.4 Η πυραμίδα και τα στοιχεία της	Βασικές επιδιώξεις είναι οι μαθητές: <ul style="list-style-type: none"> • να αναγνωρίζουν τα στοιχεία της πυραμίδας και το είδος της, • να υπολογίζουν το εμβαδόν της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας κανονικής πυραμίδας, 	15	2

	<ul style="list-style-type: none"> να υπολογίζουν τον όγκο μίας πυραμίδας. 		
ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.4.5 Ο κώνος και τα στοιχεία του	Βασική επιδίωξη είναι οι μαθητές να υπολογίζουν το εμβαδόν της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας κώνου.	19	3
ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.4.6 Η σφαίρα και τα στοιχεία της	<p>Βασικές επιδιώξεις είναι οι μαθητές:</p> <ul style="list-style-type: none"> να κατανοήσουν τον ορισμό της σφαίρας και ως στερεό εκ περιστροφής και ως γεωμετρικό τόπο, να αναγνωρίζουν τα στοιχεία της σφαίρας, να υπολογίζουν το εμβαδόν της επιφάνειας συγκρίνοντάς την με την παράπλευρη επιφάνεια κυλίνδρου. 	17	0

2^η κατηγορία: θέματα των έργων που λειτουργούν ως μια βοηθητική αναπαράσταση για την κατανόηση μιας άλλης έννοιας.

Πίνακας 4.15: Αριθμός ενοτήτων και έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β' Γυμνασίου όπου το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών διδάσκεται ως βοηθητική έννοια.

ΤΑΞΗ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΝΟΤΗΤΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΝΤΥΠΩΝ ΕΡΓΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ
Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	14	70	23

Αναλυτικότερα:

Πίνακας 4.16: Μαθησιακοί στόχοι ενοτήτων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Β' Γυμνασίου όπου το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών διδάσκεται ως βοηθητική έννοια.

ΤΙΤΛΟΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ	ΜΑΘΗΣΙΑΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΝΤΥΠΩΝ ΕΡΓΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.1 Η έννοια της μεταβλητής - Αλγεβρικές παραστάσεις	Στόχος είναι οι μαθητές να μπορούν να εκφράζουν με μεταβλητές, διάφορες καταστάσεις/προβλήματα της καθημερινής ζωής και να θυμηθούν τη σημασία και τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας στην απλοποίηση παραστάσεων.	1	2

ΕΝΟΤΗΤΑ: A.1.3 Επίλυση Τύπων	Οι μαθητές επιδιώκεται: α) να επιλύουν έναν τύπο ως προς μια μεταβλητή, θεωρώντας τον ως εξίσωση με άγνωστο τη μεταβλητή αυτή, β) να αναγνωρίζουν στους τύπους ποια μεγέθη είναι δεδομένα και ποια άγνωστα ώστε να κάνουν την αντίστοιχη επίλυση.	4	1
ΕΝΟΤΗΤΑ: A.1.4 Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων	Στόχοι της ενότητας είναι οι μαθητές: • να διακρίνουν τα δεδομένα από τα ζητούμενα του προβλήματος, • να κάνουν εισαγωγή μιας μεταβλητής για να εκφράσουν τον άγνωστο, • να μοντελοποιούν το πρόβλημα, δηλαδή να δημιουργούν την εξίσωση, όπου «μεταφράζουν» το πρόβλημα σε μαθηματική γλώσσα, • να επιλύουν την εξίσωση και να ελέγχουν αν το αποτέλεσμα είναι «ταιριαστό» με το πρόβλημα, • να γράφουν την απάντηση.	1	2
ΕΝΟΤΗΤΑ: A.1.5 Ανισώσεις α' βαθμού	Οι μαθητές επιδιώκεται γραφικά: α) να λύνουν ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο και να παριστάνουν τις λύσεις σε άξονα, β) να βρίσκουν τις κοινές λύσεις δύο ή περισσότερων ανισώσεων α' βαθμού και γ) να λύνουν απλά προβλήματα που ανάγονται σε ανισώσεις α' βαθμού.	1	1
ΕΝΟΤΗΤΑ: A.2.1 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού	Οι μαθητές επιδιώκεται: • να γνωρίζουν την έννοια του συμβόλου \sqrt{a} , με $a \geq 0$, • να υπολογίζουν τετραγωνικές ρίζες θετικών αριθμών με δοκιμές και με τη βοήθεια ενός υπολογιστή τσέπης.	1	1
ΕΝΟΤΗΤΑ: A.2.2 Άρρητοι αριθμοί- Πραγματικοί αριθμοί	Οι μαθητές επιδιώκεται: α) να γνωρίζουν ότι υπάρχουν αριθμοί που δεν μπορούν να γραφούν με τη μορφή a/b , όπου a, b ακέραιοι και $b \neq 0$, β) να γνωρίζουν ότι οι άρρητοι αριθμοί δεν είναι μόνο οι θετικές ή οι αρνητικές ρίζες θετικών ακεραίων ή ρητών, γ) να γνωρίζουν ποιοι αριθμοί αποτελούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών.	1	2
ΕΝΟΤΗΤΑ: A.2.3 Προβλήματα	Οι μαθητές επιδιώκεται να μπορούν να φτιάχνουν αλλά και να λύνουν προβλήματα στα οποία εμφανίζονται άρρητοι αριθμοί.	3	1
ΕΝΟΤΗΤΑ: A.3.1 Η έννοια της συνάρτησης	Βασική επιδίωξη είναι οι μαθητές να εκφράζουν ένα μέγεθος ως συνάρτηση ενός άλλου, εφόσον αυτό είναι δυνατόν να γίνει.	4	1

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.3.5 Η συνάρτηση $y = a/x$ - Η Υπερβολή	α) Ο προσδιορισμός της σχέσης που συνδέει δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά, β) η αναγνώριση ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = a/x$ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων και άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων και να μπορούν επίσης να τη σχεδιάζουν, γ) η αναγνώριση του ρόλου του a για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = a/x$.	1	2
ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.1.4 Πυθαγόρειο θεώρημα	Οι μαθητές επιδιώκεται: • να γνωρίζουν το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του, • να επιλύουν προβλήματα με τη χρήση του Πυθαγόρειου θεωρήματος, • να ελέγχουν αν ένα τρίγωνο με δεδομένες πλευρές είναι ορθογώνιο.	5	4
ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.2.4 Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° , 45° και 60°	Οι μαθητές επιδιώκεται να χρησιμοποιούν το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη γνωστών γωνιών για να υπολογίζουν το ύψος και το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου.	1	0
ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.4.3 Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου	Οι μαθητές επιδιώκεται: • να γνωρίζουν τις μονάδες μέτρησης όγκου στο δεκαδικό μετρικό σύστημα, τις μεταξύ τους σχέσεις και το συμβολισμό τους, • να υπολογίζουν τον όγκο πρίσματος και κυλίνδρου.	13	1
ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.4.4 Η πυραμίδα και τα στοιχεία της	Οι μαθητές επιδιώκεται: • να αναγνωρίζουν τα στοιχεία της πυραμίδας και το είδος της, • να υπολογίζουν το εμβαδόν της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας κανονικής πυραμίδας, • να υπολογίζουν τον όγκο μίας πυραμίδας.	15	2
ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.4.5 Ο κώνος και τα στοιχεία του	Βασική επιδίωξη είναι οι μαθητές να υπολογίζουν το εμβαδόν της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας κώνου.	19	3

Ακολουθούν παραδείγματα για να αποσαφηνιστεί η επιλογή των έργων όπου το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών διδάσκεται ως μια βοηθητική αναπαράσταση για την κατανόηση μιας άλλης έννοιας.

Παράδειγμα 1^ο (το εμβαδόν διδάσκεται ως μια βοηθητική έννοια)

11. Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος 80 m, περίμετρο μικρότερη από 240 m και εμβαδόν μεγαλύτερο από 3000m². Πόσα μέτρα μπορεί να είναι το πλάτος του;

Εικόνα 4.14: Άσκηση από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου-σελ.37 άσκηση 11 της ενότητας Α.1.5 « Ανισώσεις α΄ βαθμού».

Παράδειγμα 2^ο (το εμβαδόν διδάσκεται ως μια βοηθητική έννοια)

5. Θεωρούμε όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν 36cm².

α) Ονομάζοντας x και y τις διαστάσεις ενός τέτοιου ορθογωνίου να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	1	2	3	4	6	12	18	36
y								

Τι έχετε να παρατηρήσετε για τα μεγέθη x και y ;

β) Να εκφράσετε το πλάτος y ενός τέτοιου ορθογωνίου ως συνάρτηση του μήκους x .

γ) Να σχεδιάσετε σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

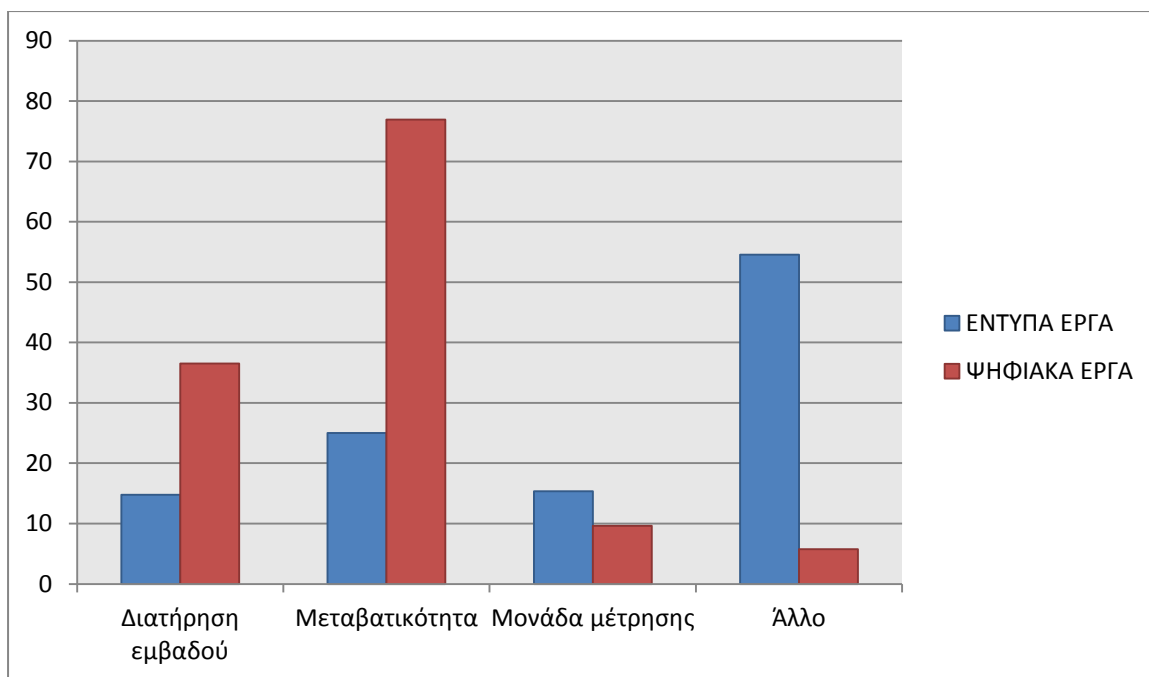
Εικόνα 4.15: Άσκηση από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου-σελ.82 άσκηση 5 της ενότητας Α.3.5 «Η συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$ - Η Υπερβολή».

4.2.2 Κάθετη ανάλυση

4.2.2.1 Μαθηματικό περιεχόμενο

Πίνακας 4.17: Μαθηματικό περιεχόμενο των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Γυμνασίου.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ	ΕΝΤΥΠΑ ΕΡΓΑ (Ε.Ε.)	% Ε.Ε.	ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΡΓΑ (Ψ.Ε.)	% Ψ.Ε.	ΣΥΝΟΛΟ	Σχετικές συχνότητες (%) ΕΡΓΩΝ
Διατήρηση εμβαδού	26	14,77	19	36,54	45	19,74
Μεταβατικότητα	44	25	40	76,92	84	36,84
Μονάδα μέτρησης	27	15,34	5	9,62	32	14,04
Άλλο	96	54,55	3	5,77	99	43,42



Σχήμα 4.7: Μαθηματικό περιεχόμενο των έργων της Β΄ Γυμνασίου.

Αρχικά θα επισημάνουμε ότι το πλήθος των έργων (βλέπε Παράρτημα με τα έργα ανά ενότητα) είναι συνολικά 228 και από αυτά τα 176 είναι έργα που βρίσκονται στο έντυπο βιβλίο και 52 είναι ψηφιακά έργα. Επιπλέον, κάποια έργα δεν εστιάζουν σε ένα μόνο μαθηματικό περιεχόμενο αλλά σε περισσότερα και κάποια σε διαφορετικό περιεχόμενο. Από την ανάλυση των έργων του διαδραστικού σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου σχετικά με το μαθηματικό περιεχόμενο προέκυψε ότι τα περισσότερα έργα αφορούν τη μεταβατικότητα του εμβαδού με ποσοστό 36,84%. Σε ποσοστό 19,74% είναι έργα που αφορούν τη διατήρηση του εμβαδού επίπεδων επιφανειών σύμφωνα με αυτή, η αριθμητική τιμή του εμβαδού μιας επιφάνειας δεν αλλάζει αν το σχήμα ανασυγκροτηθεί. Καθώς στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Γυμνασίου υπάρχουν διδακτικές ενότητες όπου το εμβαδόν διδάσκεται ως αυτόνομη έννοια, υπάρχουν έργα σε ποσοστό 14,04% όπου η εστίαση είναι στις μονάδες μέτρησης και στις μετατροπές τους, καθώς υπάρχουν αρκετά έργα που δεν εστιάζουν σε καμιά από τις έννοιες διατήρηση, μεταβατικότητα και μονάδες μέτρησης εμβαδού. Στη μεταβατικότητα εστιάζουν περισσότερο το ψηφιακά έργα καθώς υπάρχουν έργα στο έντυπο εγχειρίδιο όπως το παράδειγμα που ακολουθεί που δεν εστιάζουν στις προαναφερθείσες έννοιες του μαθηματικού περιεχομένου.

3. Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου:

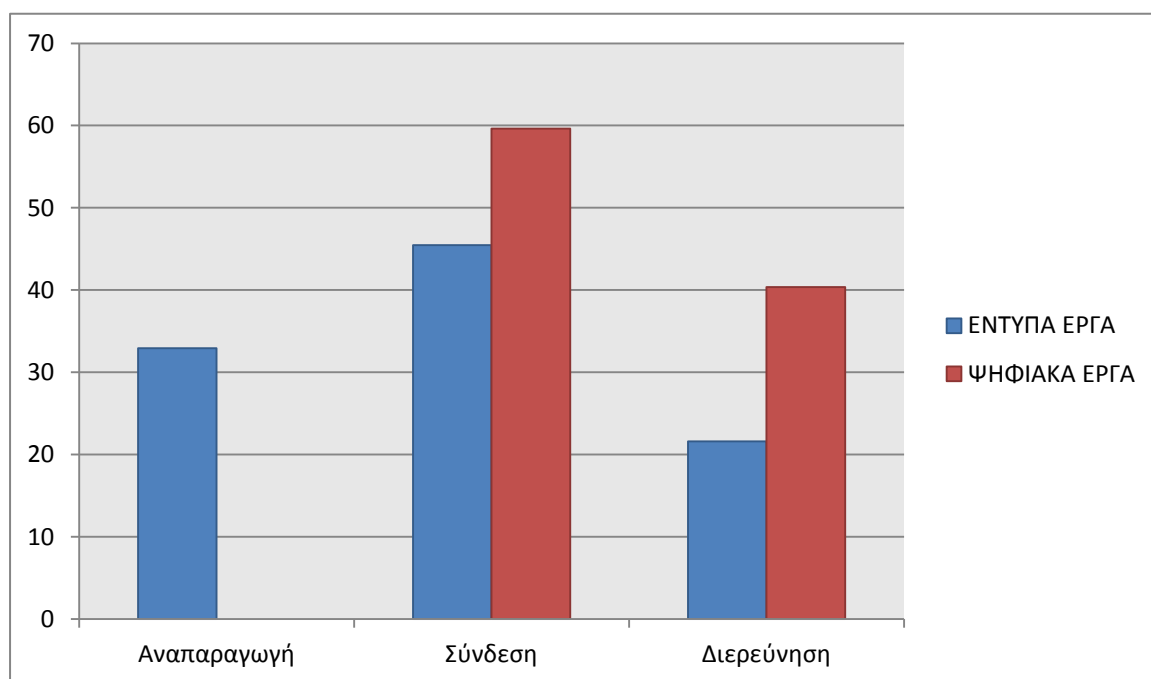
$$E = 2pr, \text{ ως προς } p.$$

Εικόνα 4.16: Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου-σελ.24 άσκηση 3 της ενότητας Α.1.3 «Επίλυση τύπων».

4.2.2.2 Γνωστικές απαιτήσεις

Πίνακας 4.18: Γνωστικές απαιτήσεις των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Γυμνασίου.

ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ	ΕΝΤΥΠΙΑ ΕΡΓΑ (Ε.Ε.)	% Ε.Ε.	ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΡΓΑ (Ψ.Ε.)	% Ψ.Ε.	ΣΥΝΟΛΟ ΕΡΓΩΝ	Σχετικές συχνότητες (%) ΕΡΓΩΝ
Αναπαραγωγή	58	32,95	0	0	58	25,44
Σύνδεση	80	45,46	31	59,62	111	48,68
Διερεύνηση	38	21,59	21	40,38	59	25,88



Σχήμα 4.8: Γνωστικές απαιτήσεις των έργων της Β΄ Γυμνασίου.

Τα περισσότερα έργα είναι έργα σύνδεσης (48,68%) ως προς το είδος των γνωστικών απαιτήσεων. Αυτά τα έργα είναι έργα μεσαίου γνωστικού επιπέδου αφού απαιτείται οι μαθητές να ακολουθήσουν και να εφαρμόσουν έναν αλγόριθμο, μια γνωστή διαδικασία, όπου γίνεται σύνδεση κα ενσωμάτωση μεταξύ διαφορετικών θεματικών ενοτήτων για να επιλύσουν αυτά τα έργα. Επιπλέον σε ποσοστό 25,44% υπάρχουν έργα αναπαραγωγής όπου οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν σε υπολογισμούς και διαδικασίες ρουτίνας και να αναπαράγουν ορισμούς. Τέλος, μόνο 59 έργα είναι έργα διερεύνησης δηλαδή έργα υψηλού γνωστικού επιπέδου.

Ακολουθούν παραδείγματα έργων στις κατηγορίες των γνωστικών απαιτήσεων:

Παράδειγμα 1^ο – Αναπαραγωγή

3. Να μετατρέψετε σε mm^2 τα παρακάτω μεγέθη:

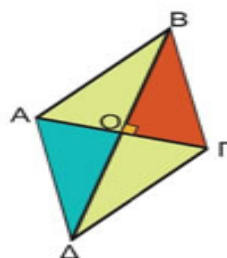
12 km^2 , 431 m^2 , 17 dm^2 , 236 cm^2 .

Εικόνα 4.17: Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου-σελ.118 άσκηση 3 της ενότητας Β.1.3 «Εμβαδά επίπεδων σχημάτων».

Παράδειγμα 2^ο – Σύνδεση

7. Ο χαρταετός του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος με διαγώνιες 12 dm και 16 dm.

Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν της επιφάνειας του χαρταετού.



Εικόνα 4.18: Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου-σελ.131 άσκηση 7 της ενότητας Β.1.4 «Πυθαγόρειο Θεώρημα».

Παράδειγμα 3^ο – Διερεύνηση

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να αποδείξετε ότι το ύψος και το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς α, δίνονται από τους τύπους:

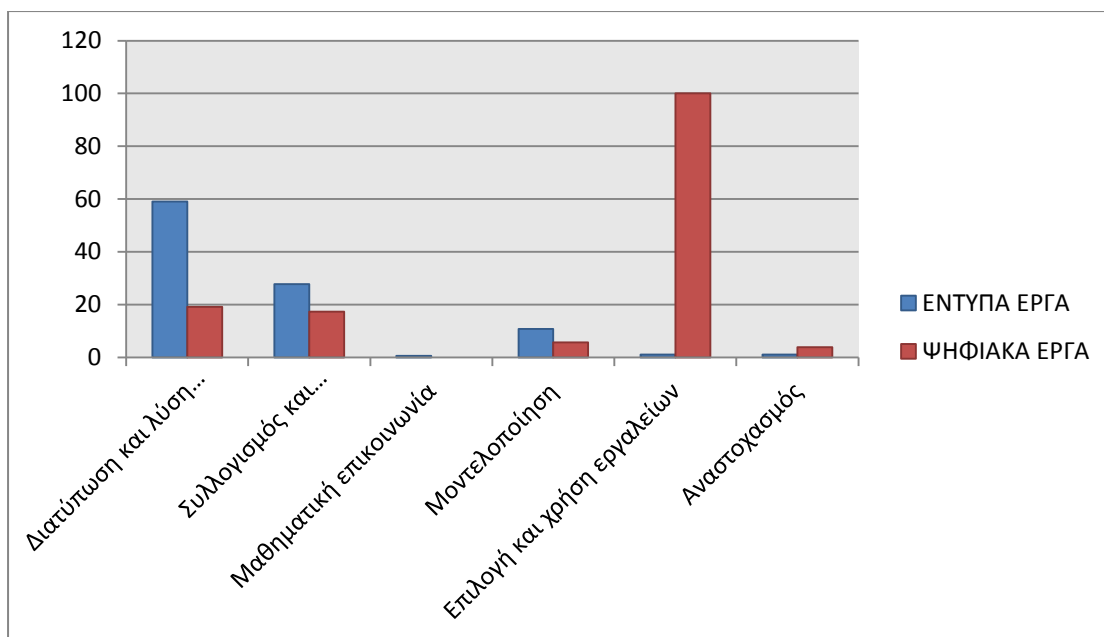
$$u = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \text{ και } E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}.$$

Εικόνα 4.19: Εφαρμογή από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου-σελ.153 εφαρμογή 2 της ενότητας Β.2.4 «Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30°, 45° και 60°».

4.2.2.3 Μαθηματικές πρακτικές

Πίνακας 4.19: Μαθηματικές πρακτικές των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Γυμνασίου.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ	ΕΝΤΥΠΑ ΕΡΓΑ (Ε.Ε.)	% Ε.Ε.	ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΡΓΑ (Ψ.Ε.)	% Ψ.Ε.	ΣΥΝΟΛΟ ΕΡΓΩΝ	Σχετικές συχνότητες (%) ΕΡΓΩΝ
Διατύπωση και λύση προβλήματος	104	59,09	10	19,23	114	50
Συλλογισμός και επιχειρηματολογία	49	27,84	9	17,31	58	25,44
Μαθηματική επικοινωνία	1	0,57	0	0	1	0,44
Μοντελοποίηση	19	10,8	3	5,77	22	9,65
Επιλογή και χρήση εργαλείων	2	1,14	52	100	54	23,68
Αναστοχασμός	2	1,14	2	3,85	4	1,75



Σχήμα 4.9: Μαθηματικές πρακτικές των έργων της Β' Γυμνασίου.

Πρέπει να επισημάνουμε ότι τα έντυπα έργα είναι 176, τα ψηφιακά είναι 52 και συνολικά υπάρχουν στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο 228 έργα. Από τα ψηφιακά έργα, υπάρχουν έργα τα οποία αναπτύσσουν δυο πρακτικές. Από την ανάλυση των δεδομένων σχετικά με τις μαθηματικές πρακτικές που απαιτούνται από τα έργα όπως αυτές κατηγοριοποιήθηκαν, προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα: σε ποσοστό 50% είναι έργα διατύπωσης και λύσης, 25,44% είναι έργα συλλογισμού και επιχειρηματολογίας. Επίσης σε ποσοστό 23,68% υπάρχουν έργα όπου απαιτείται να χρησιμοποιηθεί ένα εργαλείο ψηφιακό (Geogebra, χελωνόκοσμος) και 9,65% των συνολικών έργων η πρακτική που χρειάζεται να εφαρμοστεί είναι η μοντελοποίηση, δηλαδή εφαρμογή μαθηματικών σε καθημερινές καταστάσεις. Συγκρίνοντας τα έργα στο έντυπο βιβλίο και τα έργα που υπάρχουν μόνο στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο, προέκυψε ότι περισσότερα έργα διατύπωσης και λύσης, συλλογισμού και επιχειρηματολογίας όπως και μοντελοποίησης είναι στο έντυπο βιβλίο και στο διαδραστικό τα περισσότερα απαιτούν τη χρήση κάποιου ψηφιακού εργαλείου.

Ακολουθούν παραδείγματα ώστε να γίνει κατανοητό το πώς κατηγοριοποιήθηκαν τα έργα.

Παράδειγμα 1^ο – Επιλογή και χρήση εργαλείων & Αναστοχασμός

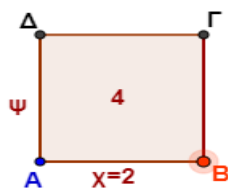
Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ορίζεται από τον δρομέα Ε.

Μπορείτε να υπολογίσετε τις τιμές της πλευράς ψ για τις διάφορες τιμές της πλευράς χ;



Οδηγίες

- 1) Με εμβαδόν 4 τ. μονάδες υπολογίστε το μήκος της πλευράς ψ, όταν το μήκος της πλευράς χ είναι: α) 1 μονάδα, β) 2 μονάδες.
- 2) Επαναλάβετε το προηγούμενο πείραμα για διάφορες τιμές του εμβαδού Ε και του μήκους της πλευράς χ.
- 3) Διατυπώστε έναν κανόνα υπολογισμού της πλευράς ψ στον πίνακα τιμών.



Οδηγίες για τον πίνακα τιμών

Οδηγίες για τις μεταβολές

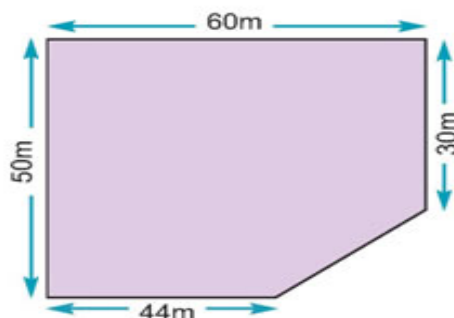
Εικόνα 4.20: Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου- σελ. 57 Μικροπείραμα 2^ο Άσκησης 5 της ενότητας Α.3.1 «Η έννοια της συνάρτησης».

Παράδειγμα 2^ο – Μοντελοποίηση

17. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το τοπογραφικό διάγραμμα ενός κτήματος το οποίο πωλείται προς 20.000 € το στρέμμα.

α) Να βρεθεί η αξία του κτήματος.

β) Πόσα κλήματα μπορούμε να φυτέψουμε στο κτήμα αυτό, αν κάθε κλήμα απαιτεί 2,5 m² χώρο;



Εικόνα 4.21: Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου- σελ.125 άσκηση 17 της ενότητας Β.1.3 «Εμβαδόν επίπεδων επιφανειών».

Παράδειγμα 3^ο – Διατύπωση και λύση προβλήματος

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

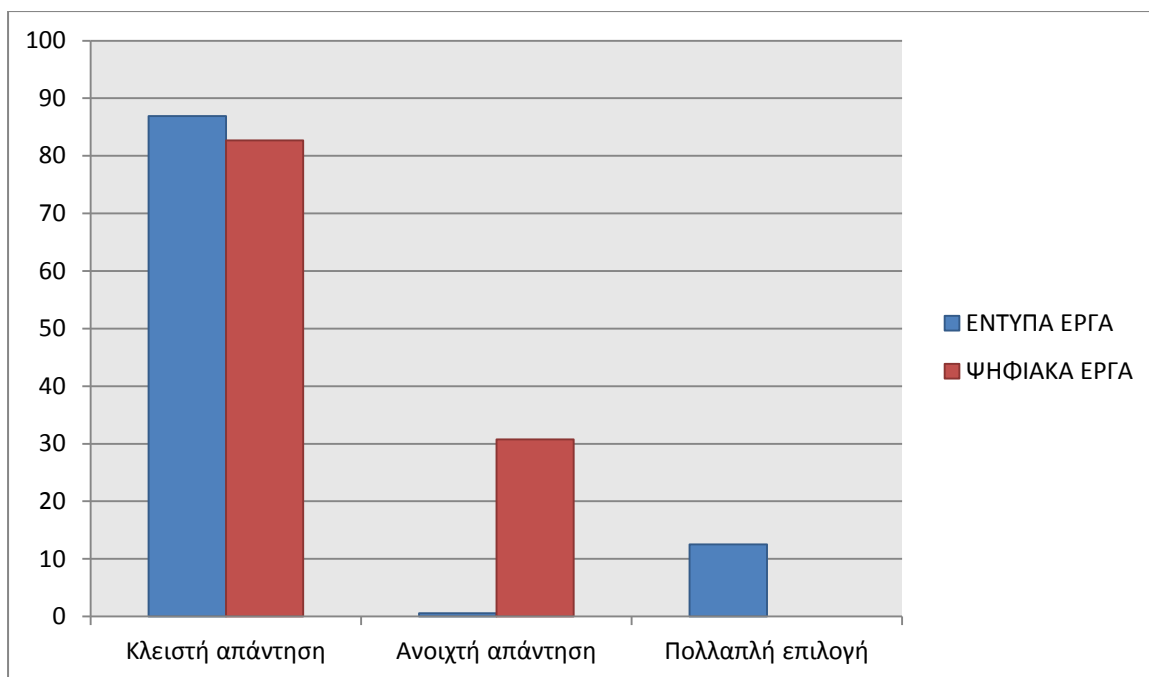
Αν το μήκος ενός κύκλου είναι 6,28 cm, να βρείτε το εμβαδόν του.

Εικόνα 4.22: Εφαρμογή από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου- σελ.193 Εφαρμογή 1 της ενότητας Β.3.5 «Εμβαδόν κυκλικού δίσκου».

4.2.2.4 Μορφή απάντησης

Πίνακας 4.20: Μορφή απάντησης των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Γυμνασίου.

ΜΟΡΦΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ	ΕΝΤΥΠΑ ΕΡΓΑ (Ε.Ε.)	% Ε.Ε.	ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΡΓΑ (Ψ.Ε.)	% Ψ.Ε.	ΣΥΝΟΛΟ ΕΡΓΩΝ	Σχετικές συχνότητες (%) ΕΡΓΩΝ
Κλειστή απάντηση	153	86,93	43	82,69	196	85,96
Ανοιχτή απάντηση	1	0,57	16	30,77	17	7,46
Πολλαπλή επιλογή	22	12,5	0	0	22	9,65



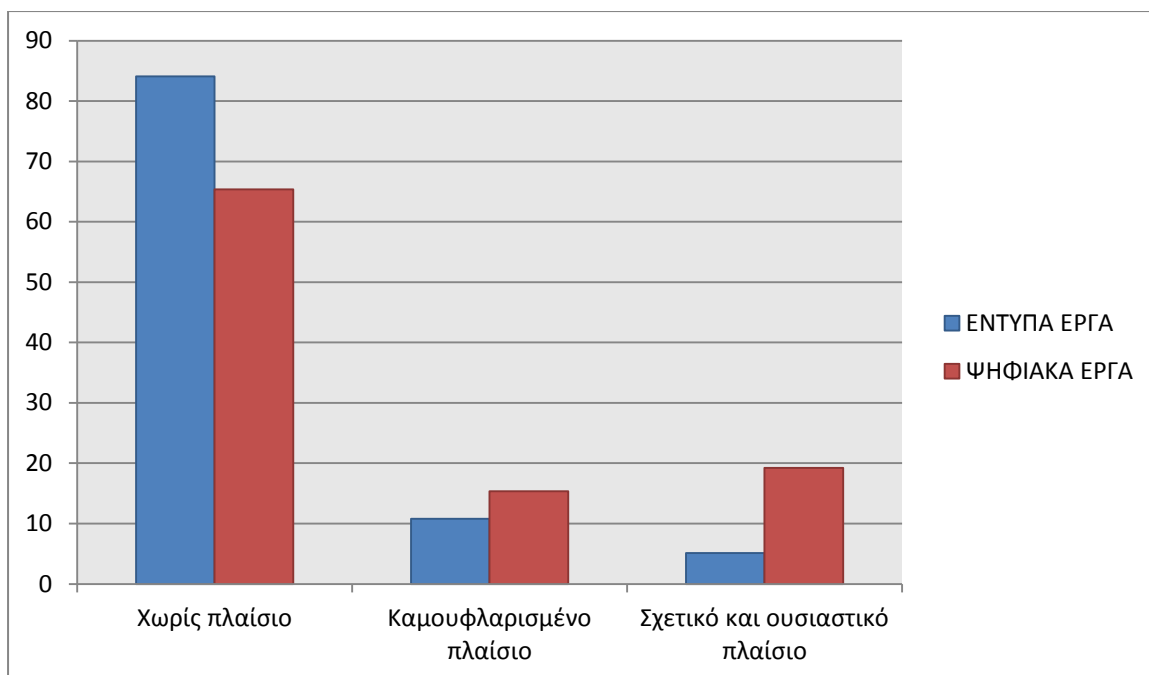
Σχήμα 4.10: Μορφή απάντησης των έργων της Β΄ Γυμνασίου.

Η συντριπτική πλειοψηφία είναι έργα κλειστής απάντησης όπου οι μαθητές πρέπει να δώσουν μια σωστή απάντηση ανεξαρτήτως αν χρειάζονται αρκετές και διαφορετικές προσεγγίσεις ώστε να δώσουν την απάντηση. Επίσης υπάρχουν έργα σε ποσοστό 9,65% όπου οι μαθητές πρέπει να επιλέξουν μεταξύ δεδομένων απαντήσεων, είτε είναι έργα που αφορούν τις μονάδες μέτρησης και τις μετατροπές αυτών είτε έργα που το εμβαδόν διδάσκεται ως αυτόνομη έννοια ή ως μια βοηθητική αναπαράσταση για την κατανόηση μιας άλλης έννοιας. Επιπροσθέτως, στα ψηφιακά έργα, 16 από αυτά απαιτούν ανοιχτή απάντηση.

4.2.2.5 Τύποι πλαισίου

Πίνακας 4.21: Τύποι πλαισίου των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Γυμνασίου.

ΤΥΠΟΙ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	ΕΝΤΥΠΑ ΕΡΓΑ (Ε.Ε.)	% Ε.Ε.	ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΡΓΑ (Ψ.Ε.)	% Ψ.Ε.	ΣΥΝΟΛΟ ΕΡΓΩΝ	Σχετικές συχνότητες (%) ΕΡΓΩΝ
Χωρίς πλαίσιο	148	84,09	34	65,39	182	79,83
«Καμουφλαρισμένο» πλαίσιο	19	10,8	8	15,38	27	11,84
Σχετικό και ουσιαστικό πλαίσιο	9	5,11	10	19,23	19	8,33



Σχήμα 4.11: Τύποι πλαισίου των έργων της Β΄ Γυμνασίου.

Όπως προέκυψε από την ανάλυση των έργων σχετικά με τους τύπους πλαισίου, τα περισσότερα έργα (79,83%) είναι χωρίς πλαίσιο όπου αναφέρονται μόνο σε μαθηματικά αντικείμενα, σύμβολα ή δομές. Σε ποσοστό 11,84% υπάρχουν έργα όπου βρίσκονται σε «Καμουφλαρισμένο» πλαίσιο και 19 από 228 συνολικά έργα (176 έντυπα έργα και 52 ψηφιακά έργα) είναι έργα σε σχετικό και ουσιαστικό πλαίσιο.

Ακολουθούν παραδείγματα σε διαφορετικά πλαίσια.

Παράδειγμα 1^ο – Καμουφλαρισμένο πλαίσιο

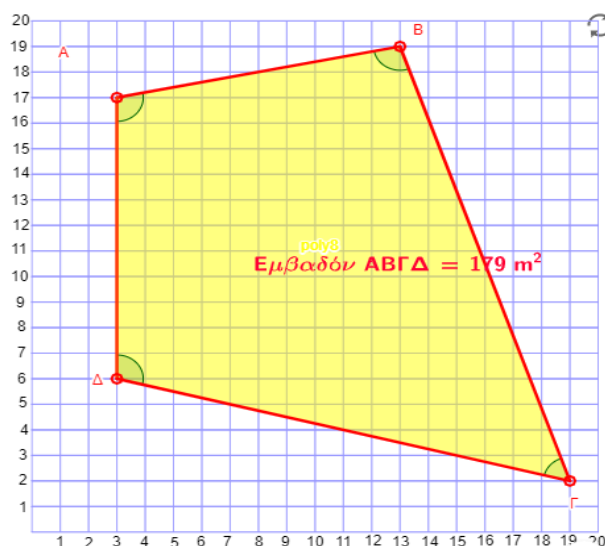
Ο κύριος Δημήτρης έχει ένα οικόπεδο εμβαδού 400 τ.μ. Η Πηνελόπη που είναι αρχιτέκτονας ανέλαβε να του χτίσει ένα σπίτι με εμβαδό 196 m^2 . Το σπίτι πρέπει να έχει σχήμα τετραγώνου. Να σχεδιάσετε το σπίτι στο οικόπεδο που βλέπετε.



Εμβαδό = 196 m^2

Βοηθήστε τη Πηνελόπη να σχεδιάσει το σπίτι στο οικόπεδο.

Βοήθεια



Εικόνα 4.23: Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου- σελ.41 Μικροπείραμα δραστηριότητας 1 της ενότητας Α.2.1 «Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού».

Παράδειγμα 2^ο – Σχετικό και ουσιαστικό πλαίσιο

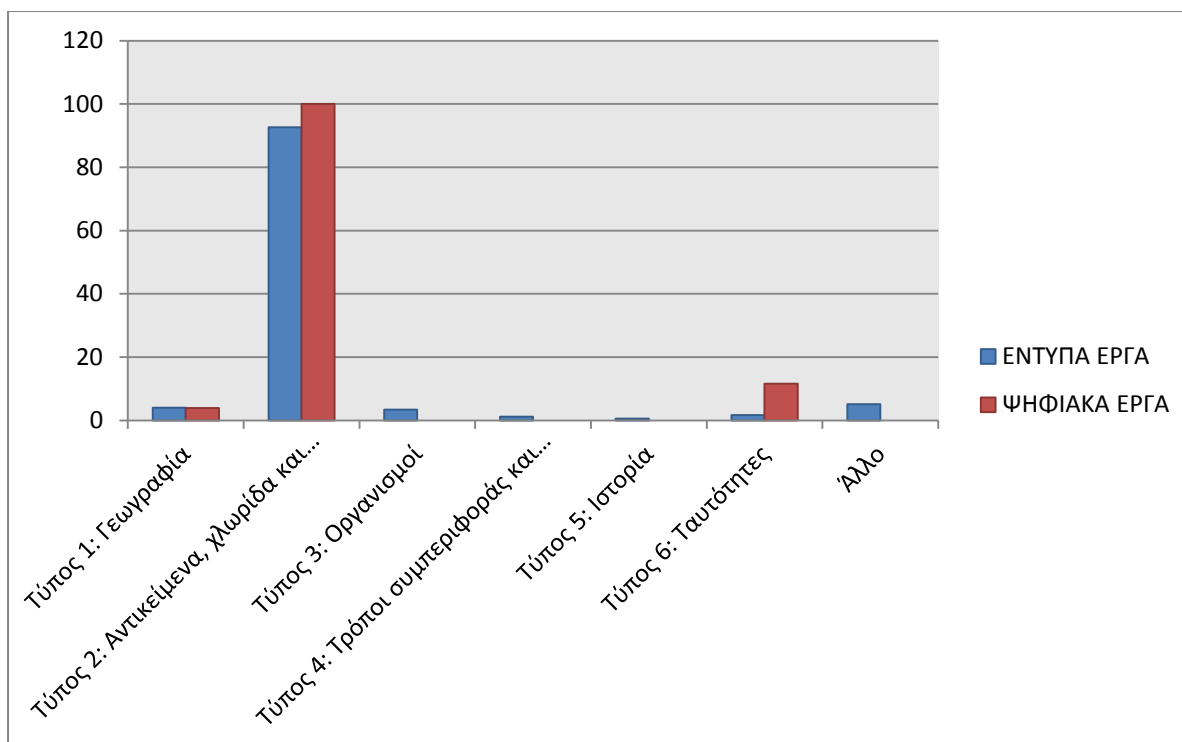
;Η Αγγελική θέλει να στρώσει με πλακάκια
 ;τη θεράντα του σπιτιού της σχήματος
 ;ορθογωνίου με μήκος 150 και πλάτος 270.
 ;Βρήκε πλακάκια διαφορετικού σχήματος,
 ;αλλά έχει μπερδευτεί. Ο φίλος της ο
 ;θανάσης της είπε να μην πονοκεφαλιάζει
 ;γιατί διαφορετικού σχήματος πλακάκια,
 ;δίνουν διαφορετικό εμβαδό για τη
 ;θεράντα της. Έχει δίκιο;
 ;Βοήθησε την Αγγελική να καταλάβει

Εικόνα 4.24: Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου- σελ.41 Μικροπείραμα 1^ο εφαρμογής 2 της ενότητας Β.1.1 «Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας».

4.2.2.6 Θεματολογία έργων

Πίνακας 4.22: Θεματολογία των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Γυμνασίου.

ΘΕΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΕΡΓΩΝ	ΕΝΤΥΠΑ ΕΡΓΑ (Ε.Ε.)	% Ε.Ε.	ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΡΓΑ (Ψ.Ε.)	% Ψ.Ε.	ΣΥΝΟΛΟ ΕΡΓΩΝ	Σχετικές συχνότητες (%) ΕΡΓΩΝ
Τύπος 1: Γεωγραφία	7	3,98	2	3,85	9	3,95
Τύπος 2: Αντικείμενα, χλωρίδα και πανίδα	163	92,61	52	100	215	94,3
Τύπος 3: Οργανισμοί	6	3,41	0	0	6	2,63
Τύπος 4: Τρόποι συμπεριφοράς και έθιμα	2	1,14	0	0	2	0,88
Τύπος 5: Ιστορία	1	0,57	0	0	1	0,44
Τύπος 6: Ταυτότητες	3	1,7	6	11,54	9	3,95
Άλλο	9	5,11	0	0	9	3,95



Σχήμα 4.12: Θεματολογία των έργων της Β΄ Γυμνασίου.

Επισημαίνουμε εκ νέου ότι υπάρχουν έργα που υπάγονται σε δυο κατηγορίες για αυτό το λόγο και το άθροισμα των ποσοστών δεν είναι 100%. Όσον αφορά τη θεματολογία των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου προέκυψε ότι η συντριπτική πλειοψηφία των έργων, 94,3% είναι τύπου 2: Αντικείμενα, χλωρίδα και πανίδα και μόλις 9 έργα είναι τύπου 1.

Παράδειγμα: Τύπου 2, 3 & 4

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Στο σχολείο της Κάτιας το μαθητικό συμβούλιο εκδίδει μια εφημερίδα που κάθε φύλλο της έχει διαστάσεις 42 cm μήκος και 30 cm πλάτος.
 Να υπολογίσετε τη συνολική επιφάνεια του χαρτιού που θα χρησιμοποιηθεί, για να τυπωθούν 800 αντίτυπα της εφημερίδας, αν κάθε αντίτυπο έχει 8 φύλλα.

Εικόνα 4.25: Εφαρμογή από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου-σελ.121 εφαρμογή 2 της ενότητας Β.1.3 «Εμβαδόν επίπεδων επιφανειών».

4.3 Ανάλυση των έργων στην Γ΄ Γυμνασίου

4.3.1 Οριζόντια ανάλυση

Όσον αφορά το 1^ο Ερευνητικό ερώτημα: Ποιος είναι ο αριθμός ενοτήτων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών στην Γ γυμνασίου για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών, προέκυψε ότι:

Πίνακας 4.23: Αριθμός ενοτήτων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών.

ΤΑΞΗ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΝΟΤΗΤΩΝ	ΣΥΝΟΛΟ ΕΝΟΤΗΤΩΝ
Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0	40

Τα θέματα που καλύπτονται στις σχετικές ενότητες, και απαντούν στο 2ο ερευνητικό ερώτημα της παρούσας διπλωματικής εργασίας, είναι τα εξής:

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ (Αργυράκης, Βουργάνας, Μεντής, Τσικοπούλου & Χρυσοβέργης, χ.χ. 2021).

1^η κατηγορία: θέματα των έργων για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών ως αυτόνομη έννοια.

Στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Γυμνασίου το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών δε διδάσκεται ως αυτόνομη έννοια.

2^η κατηγορία: θέματα των έργων που λειτουργούν ως μια βοηθητική αναπαράσταση για την κατανόηση μιας άλλης έννοιας.

Πίνακας 4.24: Αριθμός ενοτήτων και έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου όπου το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών διδάσκεται ως βοηθητική έννοια.

ΤΑΞΗ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΝΟΤΗΤΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΝΤΥΠΩΝ ΕΡΓΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ
Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	23	74	37

Πίνακας 4.25: Μαθησιακοί στόχοι ενοτήτων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου όπου το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών διδάσκεται ως βοηθητική έννοια.

ΤΙΤΛΟΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ	ΜΑΘΗΣΙΑΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΝΤΥΠΩΝ ΕΡΓΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς (επαναλήψεις – συμπληρώσεις)	<ul style="list-style-type: none"> • Η εμπέδωση-υπενθύμιση των τεσσάρων πράξεων και των ιδιοτήτων τους. • Η υπενθύμιση του ορισμού της τετραγωνικής ρίζας και των ιδιοτήτων τους. 	5	5
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.2 Μονώνυμα - Πράξεις με μονώνυμα	<ul style="list-style-type: none"> • Με τύπους του εμβαδού των επίπεδων επιφανειών εισάγονται οι έννοιες της αλγεβρικής παράστασης και του μονωνύμου. • Με τύπους του εμβαδού των επίπεδων επιφανειών, οι μαθητές προσδιορίζουν το 	7	4

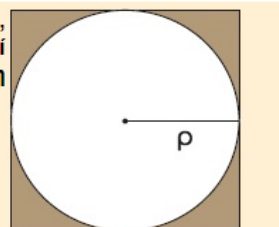
	μονώνυμο και το βαθμό του. • Οι πράξεις μεταξύ μονωνύμων.		
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.3 Πολυώνυμα - Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων	• Η χρήση της αναγωγής ομοίων όρων ώστε να απλοποιούν οι μαθητές μια αλγεβρική παράσταση προσθέτοντας ή αφαιρώντας πολυώνυμα.	1	0
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων	Με τη βοήθεια των γνωστών τύπων του εμβαδού, οι μαθητές επιδιώκεται να μάθουν να πολλαπλασιάζουν μονώνυμο με πολυώνυμο και πολυώνυμο με πολυώνυμο.	5	3
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες	Με χρήση των γνωστών τύπων του εμβαδού οι μαθητές να γνωρίζουν πότε μια ισότητα λέγεται ταυτότητα, ποιές είναι οι βασικές ταυτότητες (διαφορά τετραγώνων κ.λπ.), τις οποίες να μπορούν να τις αποδεικνύουν και να τις χρησιμοποιούν.	4	11
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων	Η μετατροπή μιας παράστασης που είναι άθροισμα σε γινόμενο.	6	3
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.7 Διαίρεση πολυωνύμων	Με τη βοήθεια των γνωστών τύπων του εμβαδού οι μαθητές να μάθουν να βρίσκουν το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης δυο πολυωνύμων και να γράφουν την αντίστοιχη ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.	1	0
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων	Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση ρητών αλγεβρικών παραστάσεων με τη βοήθεια των γνωστών τύπων του εμβαδού επίπεδων επιφανειών.	1	0
ΕΝΟΤΗΤΑ: ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑΣ	Η χρήση και υπενθύμιση του τύπου του εμβαδού του κύκλου.	1	0
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού	Η επίλυση της εξίσωσης της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$	1	4
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.2.3 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού	Η αναγωγή και μοντελοποίηση των προβλημάτων με τη βοήθεια των εξισώσεων 2 ^{ου} βαθμού, αξιοποιώντας γνώσεις προηγούμενων τάξεων.	7	3
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.2.5 Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο	Ο πολλαπλασιασμός ανισοτήτων κατά μέλη με τη χρήση του τύπου του εμβαδού ορθογωνίου.	1	0
ΕΝΟΤΗΤΑ: ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑΣ	Η υπενθύμιση και χρήση του τύπου του εμβαδού ορθογωνίου.	1	1
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης	Οι μαθητές να κατανοήσουν ότι η λύση μιας γραμμικής εξίσωσης δεν είναι ένας αριθμός, αλλά ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών και	2	1

	να προσδιοριστούν οι συντεταγμένες δύο σημείων της.		
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του	Η γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και η κατανόηση πότε έχει μια λύση.	1	0
ΕΝΟΤΗΤΑ: ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑΣ	Η υπενθύμιση και χρήση των τύπων εμβαδού ορθογωνίου και του κύκλου για την αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος.	2	0
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.4.1 Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a \neq 0$	Δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να γνωρίσουν μερικές εκφράσεις που οδηγούν σε συναρτήσεις της μορφής $y = ax^2$, $a \neq 0$.	1	0
ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.4.2 Η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$	Η εύρεση σημείων τομής με τους άξονες και εύρεση εμβαδού τριγώνου	1	0
ΕΝΟΤΗΤΑ: ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑΣ	Η χρήση των τύπων εμβαδού ορθογωνίου τριγώνου, ορθογωνίου και τετραγώνου.	3	1
ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.1.4 Ομοιοθεσία	<ul style="list-style-type: none"> • Η εύρεση του ομοιόθετου ενός σημείου με κέντρο Ο και λόγο έναν οποιοδήποτε θετικό αριθμό, ώστε να μπορούν οι μαθητές να βρίσκουν το ομοιόθετο οποιουδήποτε γεωμετρικού σχήματος. • Η κατανόηση ότι η τιμή του λ καθορίζει, αν το ομοιόθετο ενός σχήματος είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση. • Το ομοιόθετο ενός σχήματος, έχει την ίδια μορφή με το αρχικό. 	1	0
ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων	<ul style="list-style-type: none"> • Η κατανόηση ότι ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. • Οι μαθητές να μάθουν ότι αν όλες οι πλευρές ενός πολυγώνου πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό λ και οι γωνίες του μείνουν αμετάβλητες τότε το εμβαδόν του πολλαπλασιάζεται επί λ^2. 	16	1
ΕΝΟΤΗΤΑ: ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ	Η χρήση των τύπων εμβαδού τραπεζίου, τετραγώνου και τριγώνου στο λόγο εμβαδών ομοίων πολυγώνων.	5	0
ΕΝΟΤΗΤΑ: ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ	Απόδειξη τύπου και υπολογισμός τριγώνου.	1	0

Ακολουθούν παραδείγματα για να αποσαφηνιστεί η επιλογή των έργων όπου το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών διδάσκεται ως μια βοηθητική αναπαράσταση για την κατανόηση μιας άλλης έννοιας.

Παράδειγμα 1^ο

3 Να βρεθεί το μονώνυμο που εκφράζει το εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους, το οποίο περιέχεται μεταξύ του τετραγώνου και του κύκλου. Να προσδιοριστεί ο συντελεστής του, το κύριο μέρος του και ο βαθμός του. Να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή του με προσέγγιση για $\rho = 10$.



Εικόνα 4.26: Παράδειγμα-εφαρμογή από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου-σελ.31 Παράδειγμα- Εφαρμογή 3 της ενότητας Α.1.2 «Μονώνυμα - Πράξεις με μονώνυμα».

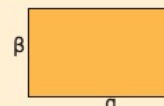
Παράδειγμα 2^ο

2 Για τις διαστάσεις α, β ενός ορθογωνίου ισχύουν $4 \leq \alpha \leq 6$ και $2,5 \leq \beta \leq 4,5$.

Ποιες τιμές μπορεί να πάρει

α) η περίμετρος του ορθογωνίου;

β) το εμβαδόν του ορθογωνίου;



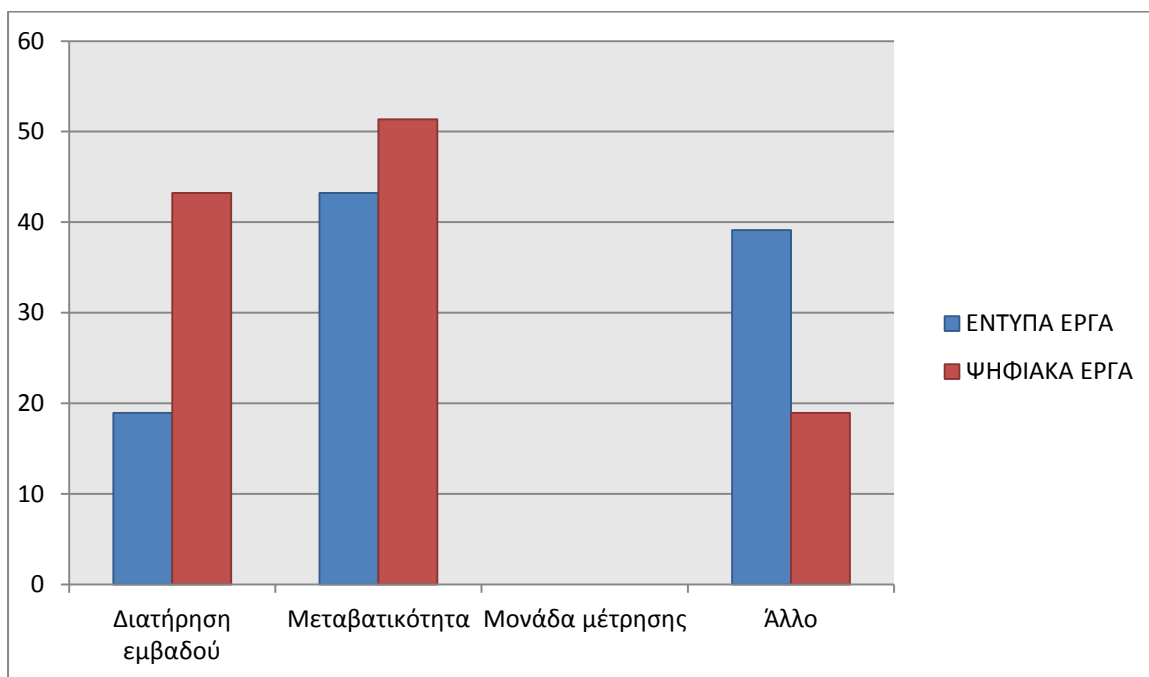
Εικόνα 4.27: Παράδειγμα-εφαρμογή από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου- Σελ 114 Παράδειγμα-Εφαρμογή 2 της ενότητας Α.2.5 «Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο».

4.3.2 Κάθετη ανάλυση

4.3.2.1 Μαθηματικό περιεχόμενο

Πίνακας 4.26: Μαθηματικό περιεχόμενο των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Γυμνασίου.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ	ΕΝΤΥΠΙΑ ΕΡΓΑ (Ε.Ε.)	% Ε.Ε.	ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΡΓΑ (Ψ.Ε.)	% Ψ.Ε.	ΣΥΝΟΛΟ	Σχετικές συχνότητες (%) ΕΡΓΩΝ
Διατήρηση εμβαδού	14	18,92	16	43,24	30	27,03
Μεταβατικότητα	32	43,24	19	51,35	51	45,95
Μονάδα μέτρησης	0	0	0	0	0	0
Άλλο	29	39,13	7	18,92	36	32,43



Σχήμα 4.13: Μαθηματικό περιεχόμενο των έργων της Γ' Γυμνασίου.

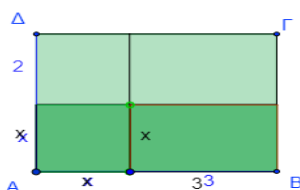
Καταρχάς θα επισημάνουμε ότι τα έργα που υπάρχουν στο έντυπο βιβλίο είναι 74 και τα ψηφιακά έργα είναι 37, συνολικά 111. Από την παραπάνω ανάλυση των έργων που αφορούν το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ' Γυμνασίου, παρατηρούμε ότι τα περισσότερα έργα σε ποσοστό 45,95% και συγκεκριμένα ψηφιακά έργα σχετίζονται με τη μεταβατικότητα του εμβαδού και μόλις το 27,03% αφορά στη διατήρηση του εμβαδού εάν το σχήμα δηλαδή μετασχηματιστεί ή ανασυγκροτηθεί ποιοτικά η αριθμητική τιμή του εμβαδού δεν αλλάζει. Επίσης, όπως προέκυψε δεν υπάρχουν έργα όπου η εστίαση ή το νόημα του μαθηματικού περιεχομένου ως προς το εμβαδόν να είναι οι μονάδες μέτρησης καθώς αυτές θεωρούνται γνωστές από προηγούμενες τάξεις. Παρατηρούμε όμως ότι υπάρχουν έργα όπου δεν εστιάζουν στις παραπάνω τρεις κατηγορίες του μαθηματικού περιεχομένου ή εστιάζουν ταυτόχρονα σε δυο. Ακολουθούν παραδείγματα ώστε να αποσαφηνιστεί η επιλογή και κατηγοριοποίηση των έργων.

Παράδειγμα 1^ο – Μεταβατικότητα και διατήρηση εμβαδού

Ο καθηγητής των Μαθηματικών ζήτησε από τους μαθητές του να γράψουν την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και οι μαθητές του έδωσαν τις εξής απαντήσεις:

- α) $(x + 2)(x + 3)$ β) $2x \cdot 3x$
 γ) $x^2 + 6$ δ) $x^2 + 5x + 6$

Ποιές απ' αυτές είναι σωστές;



Μπορείς να μετακινήσεις τα σχήματα από δεξιά για να δείς αν έχουν ίσα εμβαδά

ΒΟΗΘΕΙΑ ΜΕ ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ Αρχή

α) β) γ) δ)

Εμβαδόν = $x^2 + 5x + 6$

$x \cdot x = x^2$

$2x + 3x = 5x$

$3 \cdot 2 = 6$

Κάνοντας πράξεις:

Εικόνα 4.28: Μικροπείραμα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου - σελ. 40 Μικροπείραμα Ερώτησης Κατανόησης 5 της ενότητας Α.1.4 «Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων».

Παράδειγμα 2^ο – Δεν υπάρχει συγκεκριμένη εστίαση στις τρεις κατηγορίες

17 α) Να αποδείξετε ότι $\beta\gamma = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - (\beta - \gamma)^2}{2}$

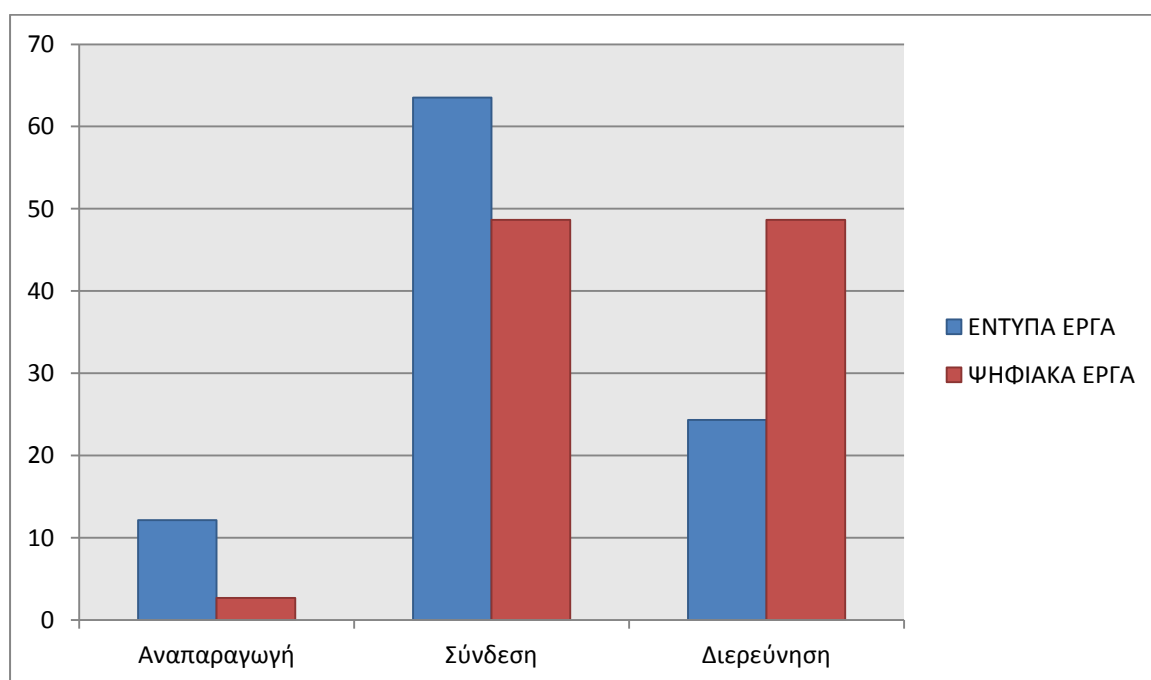
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου, που έχει υποτείνουσα 10 cm, και οι κάθετες πλευρές του διαφέρουν κατά 2 cm.

Εικόνα 4.29: Άσκηση από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου - Σελ. 50 Άσκηση 17β της ενότητας Α.1.5 «Αξιοσημείωτες ταυτότητες».

4.3.2.2 Γνωστικές απαιτήσεις

Πίνακας 4.27: Γνωστικές απαιτήσεις των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Γυμνασίου.

ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ	ΕΝΤΥΠΑ ΕΡΓΑ (Ε.Ε.)	% Ε.Ε.	ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΡΓΑ (Ψ.Ε.)	% Ψ.Ε.	ΣΥΝΟΛΟ ΕΡΓΩΝ	Σχετικές συχνότητες (%) ΕΡΓΩΝ
Αναπαραγωγή	9	12,16	1	2,7	10	9,01
Σύνδεση	47	63,52	18	48,65	65	58,56
Διερεύνηση	18	24,32	18	48,65	36	32,43



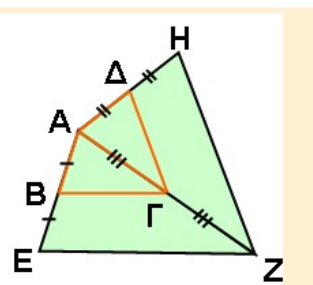
Σχήμα 4.14: Γνωστικές απαιτήσεις των έργων της Γ΄ Γυμνασίου.

Από την ανάλυση των έργων σχετικά με τις γνωστικές απαιτήσεις τους, προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα: 9,01% αφορά σε έργα αναπαραγωγής και είναι έργα που υπάρχουν στο έντυπο βιβλίο και ένα στο ψηφιακό μόνο, όπου οι μαθητές/-τριες καλούνται να αναπαραγάγουν έννοιες και ορισμούς που έχουν διδαχθεί, το 58,56% των έργων απαιτούν από τους μαθητές να συνδέσουν διαφορετικές θεματικές ενότητες και αναπαραστάσεις και τέλος 32,43% των έργων, αφορούν έργα υψηλού γνωστικού επιπέδου αφού χρησιμοποιούνται περίπλοκα επιχειρήματα και συλλογισμοί και συντελούν στην απόκτηση γνώσης για τα μαθηματικά.

Ακολουθούν παραδείγματα από τα έργα που αναλύθηκαν.

Παράδειγμα 1^ο – Διερεύνηση

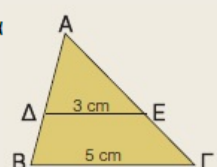
2 Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τις ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ κατά ίσα τμήματα και σχηματίζουμε το τετράπλευρο ΑΕΖΗ. Πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΖΗ από το εμβαδόν του ΑΒΓΔ;



Εικόνα 4.30: Παραδείγματα-Εφαρμογές από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου - Σελ. 226 Παραδείγματα-Εφαρμογές 2 της ενότητας Β.1.6 «Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων».

Παράδειγμα 2^ο – Σύνδεση

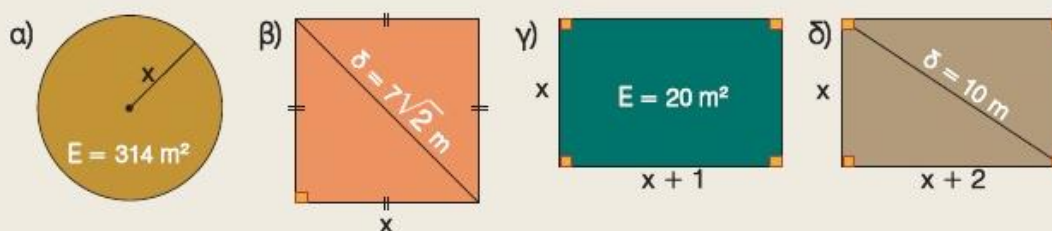
2 Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΕ // ΒΓ. Αν το τρίγωνο ΑΔΕ έχει εμβαδόν 18 cm², τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.



Εικόνα 4.31: Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου - Σελ. 226 Άσκηση 2 της ενότητας Β.1.6 «Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων».

Παράδειγμα 3^ο - Αναπαραγωγή

1 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις περιπτώσεις.

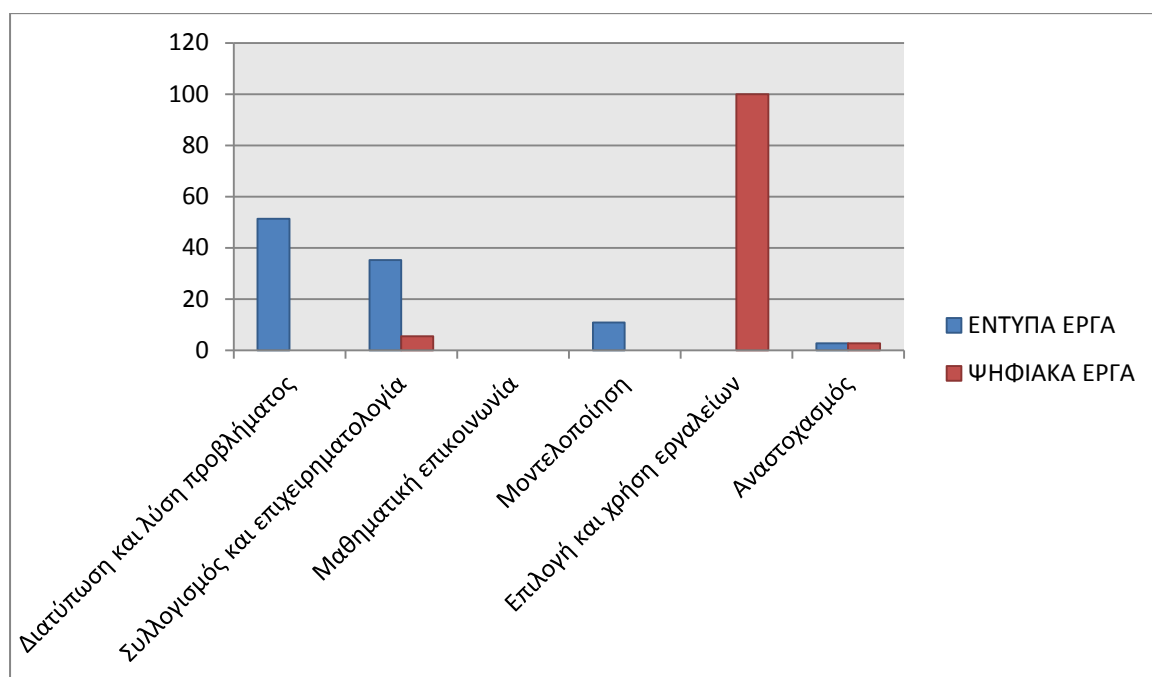


Εικόνα 4.32: Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου - Σελ. 101 Άσκηση 1 της ενότητας Α.2.3 «Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού».

4.3.2.3 Μαθηματικές πρακτικές

Πίνακας 4.28: Μαθηματικές πρακτικές των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Γυμνασίου.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ	ΕΝΤΥΠΑ ΕΡΓΑ (Ε.Ε.)	% Ε.Ε.	ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΡΓΑ (Ψ.Ε.)	% Ψ.Ε.	ΣΥΝΟΛΟ ΕΡΓΩΝ	Σχετικές συχνότητες (%) ΕΡΓΩΝ
Διατύπωση και λύση προβλήματος	38	51,35	0	0	38	34,23
Συλλογισμός και επιχειρηματολογία	26	35,14	2	5,41	28	25,23
Μαθηματική επικοινωνία	0	0	0	0	0	0
Μοντελοποίηση	8	10,81	0	0	8	7,21
Επιλογή και χρήση εργαλείων	0	0	37	100	37	33,33
Αναστοχασμός	2	2,7	1	2,7	3	2,7



Σχήμα 4.15: Μαθηματικές πρακτικές των έργων της Γ΄ Γυμνασίου.

Από την ανάλυση των δεδομένων οι μαθηματικές πρακτικές που αναπτύσσονται από τα έργα που αναφέρονται στο εμβαδόν επίπεδων επιφανειών στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου είναι οι εξής: το 34,23% των έργων ζητούν από τους μαθητές να διατυπώσουν και να λύσουν το πρόβλημα (επινόηση διαφορετικών στρατηγικών, ανάλυση λαθών και έλεγχο του αποτελέσματος), στο 33,33% των έργων γίνεται επιλογή και χρήση κυρίως ψηφιακών εργαλείων για την επίλυση των ασκήσεων ή προβλημάτων, το 25,23% είναι έργα που αναπτύσσουν το συλλογισμό και την επιχειρηματολογία, το 7,21% είναι έργα που χρειάζεται να μοντελοποιηθούν για να επιλυθούν, στο 2,7% των έργων

αναπτύσσεται ο αναστοχασμός των μαθητών και τέλος δεν υπάρχουν έργα που αναπτύσσουν τη μαθηματική επικοινωνία. Επίσης επισημαίνουμε ότι σε όλα τα ψηφιακά έργα γίνεται χρήση ψηφιακού εργαλείου για την επίλυση μιας άσκησης ή δραστηριότητας.

Ακολουθούν παραδείγματα

Παράδειγμα 1^ο – Μοντελοποίηση

4 Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογωνίου με εμβαδόν 150 m^2 . Αν το μήκος του είναι 5 m μεγαλύτερο από το πλάτος του, να βρείτε πόσα μέτρα συρματόπλεγμα χρειάζονται για την περιφράξη του.

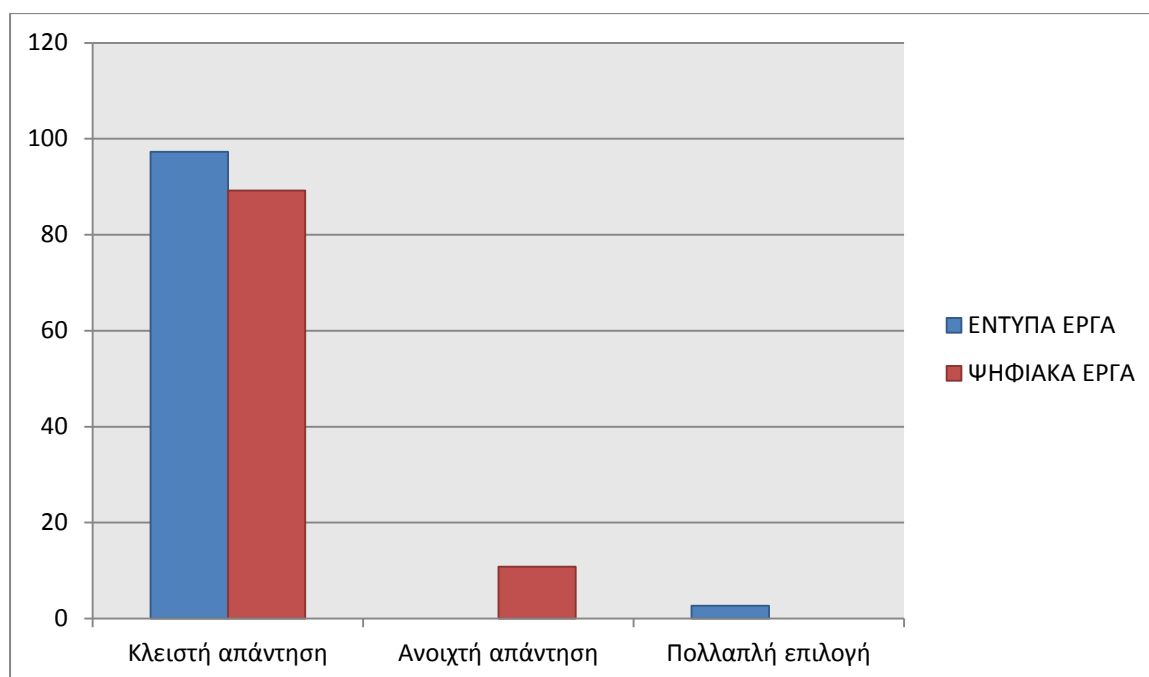
Εικόνα 4.33: Άσκηση από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου - Σελ. 101 Άσκηση 4 της ενότητας Α.2.3 «Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού».

Παράδειγμα 2^ο - Εικόνα 4.31

4.3.2.4 Μορφή απάντησης

Πίνακας 4.29: Μορφή απάντησης των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Γυμνασίου.

ΜΟΡΦΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ	ΕΝΤΥΠΑ ΕΡΓΑ (Ε.Ε.)	% Ε.Ε.	ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΡΓΑ (Ψ.Ε.)	% Ψ.Ε.	ΣΥΝΟΛΟ ΕΡΓΩΝ	Σχετικές συχνότητες (%) ΕΡΓΩΝ
Κλειστή απάντηση	72	97,3	33	89,19	105	94,6
Ανοιχτή απάντηση	0	0	4	10,81	4	3,6
Πολλαπλή επιλογή	2	2,7	0	0	2	1,8



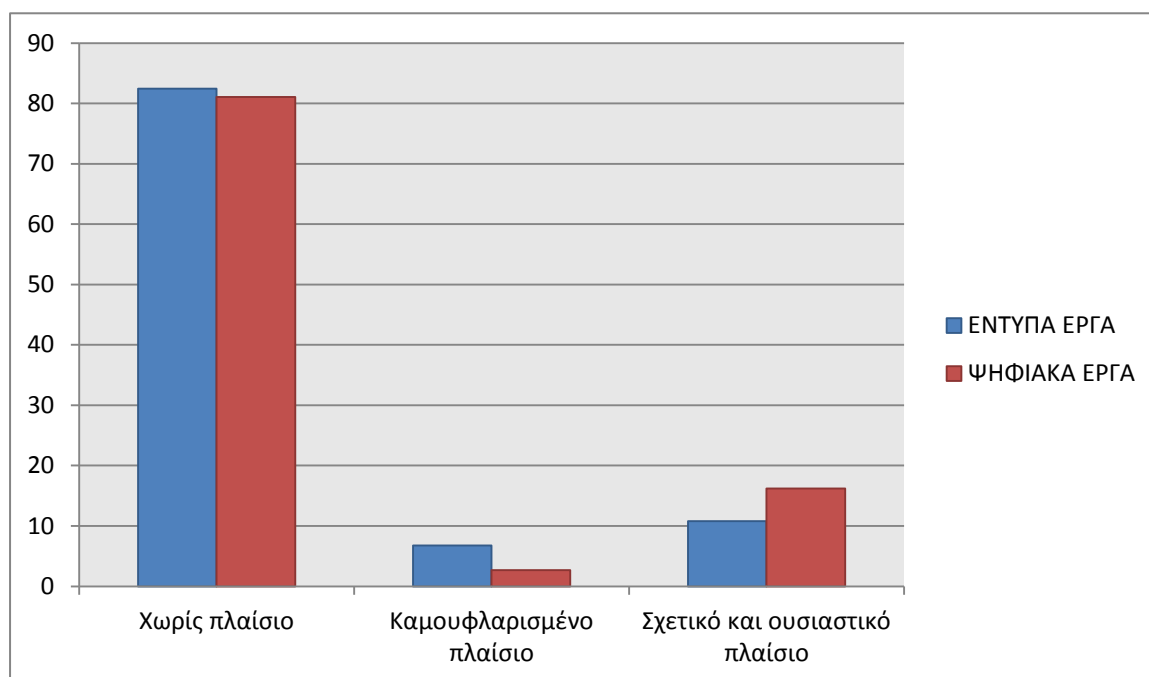
Σχήμα 4.16: Μορφή απάντησης των έργων της Γ΄ γυμνασίου.

Η συντριπτική πλειοψηφία των έργων (94,6%) απαιτεί από τους μαθητές μια μόνο σωστή απάντηση στα έργα, είναι δηλαδή έργα κλειστής απάντησης, ανεξαρτήτως πόσες διαφορετικές προσεγγίσεις θα ακολουθήσουν για να φτάσουν στο αποτέλεσμα, 3,6% έργα ανοιχτής απάντησης και μόλις το 1,8% των έργων είναι πολλαπλής επιλογής.

4.3.2.5 Τύποι πλαισίου

Πίνακας 4.30: Τύποι πλαισίου των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Γυμνασίου.

ΤΥΠΟΙ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	ΕΝΤΥΠΑ ΕΡΓΑ (Ε.Ε.)	% Ε.Ε.	ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΡΓΑ (Ψ.Ε.)	% Ψ.Ε.	ΣΥΝΟΛΟ ΕΡΓΩΝ	Σχετικές συχνότητες (%) ΕΡΓΩΝ
Χωρίς πλαίσιο	61	82,43	30	81,08	91	81,98
«Καμουφλαρισμένο» πλαίσιο	5	6,76	1	2,7	6	5,41
Σχετικό και ουσιαστικό πλαίσιο	8	10,81	6	16,22	14	12,61



Σχήμα 4.17: Τύποι πλαισίου των έργων της Γ΄ Γυμνασίου.

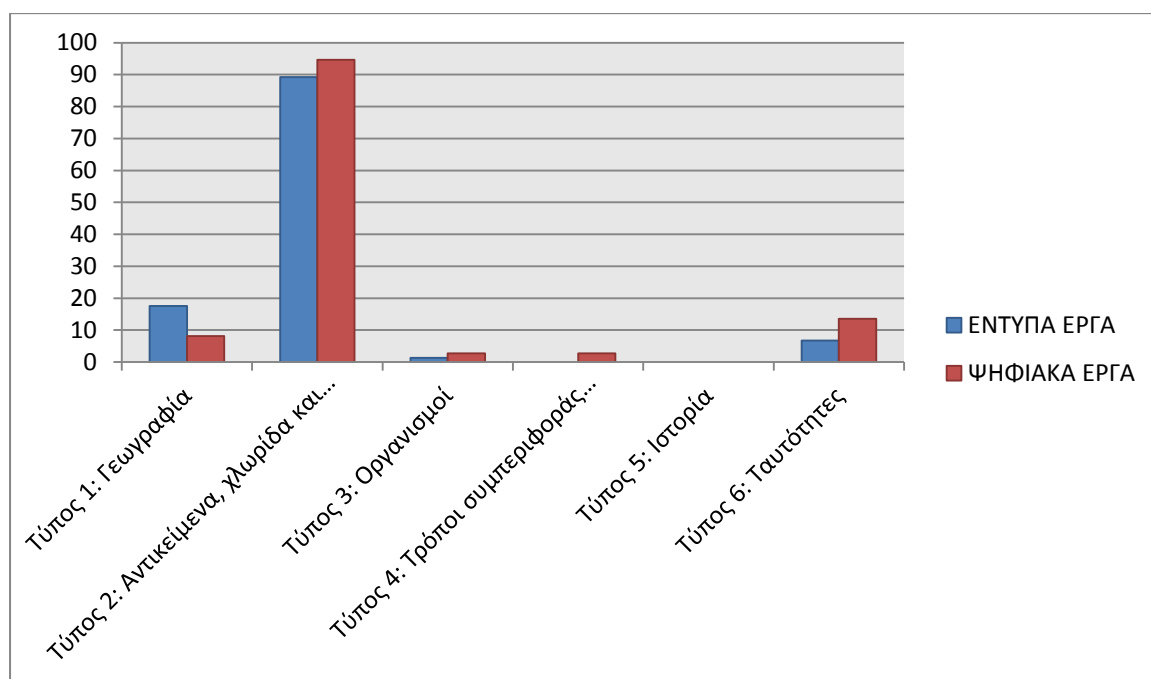
Από τη ανάλυση των έργων σχετικά με τον τύπο πλαισίου που χρησιμοποιείται προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα: το 81,98% των έργων είναι έργα χωρίς πλαίσιο, δηλαδή αυτά τα έργα αναφέρονται μόνο σε μαθηματικά αντικείμενα, σύμβολα ή δομές, το 12,61% των έργων βρίσκονται σε σχετικό και ουσιαστικό πλαίσιο, όπου απαιτείται κοινή λογική συλλογιστικής

σε αυτό το πλαίσιο και μόλις το 5,41% των έργων βρίσκονται σε «καμουφλαρισμένο πλαίσιο». Μεταξύ ψηφιακών και έντυπων έργων υπάρχουν ελάχιστες διαφορές όσον αφορά τα έργα που είναι χωρίς πλαίσιο αλλά υπάρχουν περισσότερα ψηφιακά έργα που βρίσκονται σε σχετικό και ουσιαστικό πλαίσιο.

4.3.2.6 Θεματολογία έργων

Πίνακας 4.31: Θεματολογία των έργων στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Γυμνασίου.

ΘΕΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΕΡΓΩΝ	ΕΝΤΥΠΑ ΕΡΓΑ (Ε.Ε.)	% Ε.Ε.	ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΡΓΑ (Ψ.Ε.)	% Ψ.Ε.	ΣΥΝΟΛΟ ΕΡΓΩΝ	Σχετικές συχνότητες (%) ΕΡΓΩΝ
Τύπος 1: Γεωγραφία	13	17,57	3	8,11	16	14,41
Τύπος 2: Αντικείμενα, χλωρίδα και πανίδα	66	89,19	35	94,59	111	100
Τύπος 3: Οργανισμοί	1	1,35	1	2,7	2	1,8
Τύπος 4: Τρόποι συμπεριφοράς και έθιμα	0	0	1	2,7	1	0,9
Τύπος 5: Ιστορία	0	0	0	0	0	0
Τύπος 6: Ταυτότητες	5	6,76	5	13,51	10	9,01



Σχήμα 4.18: Θεματολογία των έργων της Γ΄ Γυμνασίου.

Η θεματολογία των έργων είναι τύπου 2: αντικείμενα, χλωρίδα και πανίδα, το 14,41% των έργων αναφέρονται στον τύπο 1: γεωγραφία και μόλις το 0,9% των έργων έχει θέμα σχετικό με τον τύπο 4: τρόπους συμπεριφοράς και έθιμα και 9,01% είναι τύπου 6. Επισημαίνουμε ότι υπάρχουν έργα που υπάγονται σε δυο κατηγορίες από τις προαναφερθείσες.

Αναφέρουμε παράδειγμα τύπου 2 & 6

3 Μια τσιμεντένια κυλινδρική κολώνα, που έχει ακτίνα βάσης ρ και ύψος u , ενισχύεται περιμετρικά με τσιμέντο και αποκτά ακτίνα βάσης διπλάσια της αρχικής. Ο μηχανικός ισχυρίζεται ότι το τσιμέντο που προστέθηκε έχει όγκο τριπλάσιο του αρχικού όγκου της κολώνας. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του;

Εικόνα 4.34: Παράδειγμα-εφαρμογή από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου- σελ.31 εφαρμογή 3 της ενότητας Α.1.2 «Μονώνυμα - Πράξεις με μονώνυμα».

4.4 Συγκριτική μελέτη για όλους τους άξονες στην κάθετη ανάλυση

Σε αυτή την ενότητα θα γίνει μια συγκριτική παρουσίαση για όλους τους άξονες, στην κάθετη ανάλυση, των έργων που σχετίζονται με το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών και των τριών τάξεων του Γυμνασίου. Τα αποτελέσματα θα παρουσιαστούν με πίνακες συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων (%) των έργων που αφορούν τον κάθε ένα άξονα ξεχωριστά και ποσοστά επί των συνολικών έργων που υπάρχουν και στις τρεις τάξεις των οποίων τα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια εξετάσαμε.

4.4.1 Μαθηματικό περιεχόμενο

Πίνακας 4.32: Μαθηματικό περιεχόμενο των έργων στις τάξεις Α-Γ Γυμνασίου.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ	Α΄ ΤΑΞΗ		Β΄ ΤΑΞΗ		Γ΄ ΤΑΞΗ		ΣΥΝΟΛΟ	
	Ε.Ε. %	Ψ.Ε. %	Ε.Ε. %	Ψ.Ε. %	Ε.Ε. %	Ψ.Ε. %	ΠΛΗΘΟΣ ΕΡΓΩΝ	%
Διατήρηση εμβαδού	3 25%	5 55,56%	26 14,77%	19 36,54%	14 18,92%	16 43,24%	83	23,06%
Μεταβατικότητα	5 41,67%	4 44,44%	44 25%	40 76,92%	32 43,24%	19 51,35%	144	40%
Μονάδα μέτρησης	7 58,33%	1 11,11%	27 15,34%	5 9,62%	0	0	40	11,11%
Άλλο	0	0	96 54,55%	3 5,77%	29 39,13%	7 18,92%	135	37,5%

Ε.Ε.: Έργα στο έντυπο σχολικό εγχειρίδιο

Ψ.Ε.: Έργα στο ψηφιακό-διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο

Επισημαίνουμε ότι υπάρχουν έργα όπου η εστίαση ή το νόημα στο μαθηματικό περιεχόμενο μπορεί να είναι δύο ή και οι τρεις κατηγορίες, όπως υπάρχουν και άλλα έργα που δεν εστιάζουν σε καμιά από αυτές τις κατηγορίες.

Από τη συγκριτική ανάλυση των δεδομένων που πραγματοποιήθηκε προέκυψαν τα εξής συμπεράσματα:

- Για την Α΄ Γυμνασίου από τα 21 έργα που αναλύθηκαν και σχετίζονταν με τη διατήρηση του εμβαδού υπήρξαν 8 έργα, στη Β΄ Γυμνασίου το 19,74% των έργων δηλαδή 45 έργα από το σύνολο των 228 που καταγράφηκαν και στη Γ΄ Γυμνασίου το 27,03% (30 από τα 111 έργα). Στο σύνολο των έργων που αναλύθηκαν (360 έργα), τα 83 έργα, ποσοστό 23,06%, έχουν μαθηματικό περιεχόμενο τη διατήρηση του εμβαδού.
- Όσον αφορά τη μεταβατικότητα του εμβαδού, δίνεται περισσότερη βαρύτητα σε αυτό το περιεχόμενο και στις τρεις τάξεις όπως παρατηρούμε από τον παραπάνω συγκριτικό πίνακα και μάλιστα στα ψηφιακά έργα από το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο όπου υπάρχει η δυνατότητα χρήσης ψηφιακού εργαλείου. Συγκεκριμένα το 42,9% των έργων της Α΄ Γυμνασίου, το 36,84% των έργων της Β΄ Γυμνασίου, δηλαδή 84 από τα 228 έργα, το 45,95% των έργων της Γ΄ Γυμνασίου σχετίζονται με τη μεταβατικότητα του εμβαδού. Στο σύνολο των έργων που αναλύθηκαν το 40% αφορούσε τη μεταβατικότητα του εμβαδού.
- Όσον αφορά τις μονάδες μέτρησης του εμβαδού, στην Α΄ Γυμνασίου το 38,1% των έργων αναφέρονται σε αυτή την έννοια, στη Β΄ Γυμνασίου το 14,04% των έργων και στη Γ΄ Γυμνασίου δεν υπάρχουν έργα που να εστιάζουν στις μονάδες μέτρησης, καθώς είναι μια έννοια που θεωρείται γνωστή από προηγούμενες τάξεις στους μαθητές. Στο σύνολο των έργων, το 11,11% έχει περιεχόμενο τις μονάδες μέτρησης.

4.4.2 Γνωστικές απαιτήσεις

Πίνακας 4.33: Γνωστικές απαιτήσεις των έργων στις τάξεις Α-Γ Γυμνασίου.

ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ	Α΄ ΤΑΞΗ		Β΄ ΤΑΞΗ		Γ΄ ΤΑΞΗ		ΣΥΝΟΛΟ	
	Ε.Ε. %	Ψ.Ε. %	Ε.Ε. %	Ψ.Ε. %	Ε.Ε. %	Ψ.Ε. %	ΠΛΗΘΟΣ ΕΡΓΩΝ	%
Αναπαραγωγή	4 33,33%	1 11,11%	58 32,95%	0	9 12,16%	1 2,7%	73	20,28%
Σύνδεση	7 58,33%	7 77,78%	80 45,46%	31 59,62%	47 63,52%	18 48,65%	190	52,78%
Διερεύνηση	1 8,34%	1 11,11%	38 21,59%	21 40,38%	18 24,32%	18 48,65%	97	26,94%

Ε.Ε.: Έργα στο έντυπο σχολικό εγχειρίδιο

Ψ.Ε.: Έργα στο ψηφιακό-διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο

Σχετικά με τις γνωστικές απαιτήσεις των έργων που αναφέρονται στο εμβαδόν επίπεδων επιφανειών και στις τρεις τάξεις, αναφέρουμε τα σημαντικότερα ευρήματα όπως προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων και καταγράφηκαν στον παραπάνω πίνακα:

- Τα έργα αναπαραγωγής όπου οι μαθητές χρειάζεται να αναπαραγάγουν έννοιες και ορισμούς που έχουν διδαχθεί είναι στη Β΄ τάξη σε ποσοστό 25,44% δηλαδή 58 από τα 228 έργα, σε ποσοστό 23,81% στην Α΄ τάξη και μόλις 9,01% στη Γ΄ τάξη. Στο σύνολο των έργων, το 20,28% είναι έργα αναπαραγωγής. Επιπλέον δεν υπάρχουν έργα ψηφιακά που να είναι αναπαραγωγής στη Β΄ Γυμνασίου.
- Η σύνδεση είναι η κατηγορία των γνωστικών απαιτήσεων που δίνεται περισσότερη βαρύτητα και στις τρεις τάξεις, συγκεκριμένα στην Α΄ τάξη 66,67% των έργων, στη Β΄ τάξη 48,68% και στη Γ΄ τάξη 58,56% των έργων. Συνολικά στα 360 έργα, το 52,78% είναι έργα σύνδεσης.
- Έργα διερεύνησης στην Α΄ τάξη υπάρχει μόνο ένα έντυπο και ένα ψηφιακό, στη Β΄ είναι το 25,88% των έργων, στη Γ΄ τάξη το 32,43% των έργων και στο σύνολο των έργων το 26,94%. Παρατηρούμε ότι από τάξη σε τάξη, τα έργα διερεύνησης αυξάνονται.

4.4.3 Μαθηματικές πρακτικές

Πίνακας 4.34: Μαθηματικές πρακτικές των έργων στις τάξεις Α-Γ Γυμνασίου.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ	Α΄ ΤΑΞΗ		Β΄ ΤΑΞΗ		Γ΄ ΤΑΞΗ		ΣΥΝΟΛΟ	
	Ε.Ε. %	Ψ.Ε. %	Ε.Ε. %	Ψ.Ε. %	Ε.Ε. %	Ψ.Ε. %	ΠΛΗΘΟΣ ΕΡΓΩΝ	%
Διατύπωση και λύση Προβλήματος	6 50%	3 33,33%	104 59,09%	10 19,23%	38 51,35%	0	161	44,72%
Συλλογισμός και επιχειρηματολογία	5 41,67%	5 55,56%	49 27,84%	9 17,31%	26 35,14%	2 5,41%	96	26,67%
Μοντελοποίηση	0	1 11,11%	19 10,8%	3 5,77%	8 10,81%	0	31	8,61%
Επιλογή και χρήση εργαλείων	0	9 100%	2 1,14%	52 100%	0	37 100%	100	27,78%
Μαθηματική επικοινωνία	0	0	1 0,57%	0	0	0	1	0,28%
Αναστοχασμός	1 8,33%	0	2 1,14%	2 3,85%	2 2,7%	1 2,7%	8	2,22%

Ε.Ε.: Έργα στο έντυπο σχολικό εγχειρίδιο

Ψ.Ε.: Έργα στο ψηφιακό-διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο

Όπως παρατηρούμε από την ανάλυση των έργων σχετικά με τις μαθηματικές πρακτικές που αναπτύσσονται στα έργα των διαδραστικών σχολικών εγχειριδίων, συμπεραίνουμε τα εξής:

- Διατύπωση και λύση προβλήματος, είναι η πρακτική που αναπτύσσεται περισσότερο και στις τρεις τάξεις με αντίστοιχα ποσοστά στα έργα Α΄ τάξη 42,86%, Β΄ τάξη 50% και 34,23% στη Γ΄ τάξη. Στο σύνολο των έργων, η πρακτική αυτή αναπτύσσεται σε ποσοστό

44,72%. Η πρακτική αυτή αναπτύσσεται περισσότερο και στις τρεις τάξεις στα έντυπα έργα από το σχολικό εγχειρίδιο.

- Στην Α΄ τάξη δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στα έργα που αναπτύσσουν την πρακτική συλλογισμό και επιχειρηματολογία σε ποσοστό 47,62%, ενώ στις επόμενες τάξεις αντιστοίχως σε ποσοστό 25,44% και 25,23%. Στο σύνολο των 360 έργων η πρακτική αυτή αναπτύσσεται σε ποσοστό 26,67% επί των έργων.
- Στην Α΄ τάξη υπάρχει μόνο ένα έργο που αναπτύσσεται η πρακτική της μοντελοποίησης, και κανένα της μαθηματικής επικοινωνίας και ένα έργο αναστοχασμού. Ενώ στις άλλες δυο τάξεις υπάρχει μόνο ένα έργο στη Β΄ τάξη μαθηματικής επικοινωνίας και συνολικά στις τάξεις Β και Γ, 7 έργα που αναπτύσσουν την πρακτική του αναστοχασμού.
- Όσον αφορά την επιλογή και χρήση εργαλείων, στην Α΄ τάξη αναπτύσσεται σε ποσοστό 42,86%, στη Β΄ τάξη 23,68% και στην Γ΄ 33,33% των έργων. Συγκεκριμένα σε όλα τα ψηφιακά έργα γίνεται χρήση ενός ψηφιακού εργαλείου.

4.4.4 Μορφή απάντησης

Πίνακας 4.35: Μορφή απάντησης των έργων στις τάξεις Α-Γ Γυμνασίου.

ΜΟΡΦΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ	Α΄ ΤΑΞΗ		Β΄ ΤΑΞΗ		Γ΄ ΤΑΞΗ		ΣΥΝΟΛΟ	
	Ε.Ε. %	Ψ.Ε. %	Ε.Ε. %	Ψ.Ε. %	Ε.Ε. %	Ψ.Ε. %	ΠΛΗΘΟΣ ΕΡΓΩΝ	%
Κλειστή απάντηση	11 91,67%	7 77,78%	153 86,93%	43 82,69%	72 97,3%	33 89,19%	319	88,61%
Ανοιχτή απάντηση	1 8,33%	3 33,33%	1 0,57%	16 30,77%	0	4 10,81%	25	6,94%
Πολλαπλή επιλογή	0	0	22 12,5%	0	2 2,7%	0	24	6,67%

Ε.Ε.: Έργα στο έντυπο σχολικό εγχειρίδιο

Ψ.Ε.: Έργα στο ψηφιακό-διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο

Από την ανάλυση των δεδομένων και στις τρεις τάξεις του γυμνασίου προέκυψε ότι η πλειοψηφία των έργων, είναι έργα κλειστής απάντησης. Συγκεκριμένα, στην Α΄ τάξη σε ποσοστό 85,7%, στη Β΄ τάξη 85,96% και στην Γ΄ τάξη 94,6%. Επιπλέον, στην Α΄ τάξη δεν υπάρχουν έργα πολλαπλής επιλογής όπως και καθόλου ψηφιακά έργα που να είναι πολλαπλής επιλογής και στις τρεις τάξεις. Είναι απαραίτητο να επισημάνουμε ότι υπήρξαν κάποια έργα όπως αναφέρθηκαν και στις επιμέρους αναλύσεις στην κάθετη ανάλυση σε όλες τις τάξεις που κάποια ερωτήματά τους ήταν κλειστής απάντησης και κάποια ανοιχτής.

4.4.5 Τύποι πλαισίου

Πίνακας 4.36: Τύποι πλαισίου των έργων στις τάξεις Α-Γ Γυμνασίου.

ΤΥΠΟΙ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	Α΄ ΤΑΞΗ		Β΄ ΤΑΞΗ		Γ΄ ΤΑΞΗ		ΣΥΝΟΛΟ	
	Ε.Ε. %	Ψ.Ε. %	Ε.Ε. %	Ψ.Ε. %	Ε.Ε. %	Ψ.Ε. %	ΠΛΗΘΟΣ ΕΡΓΩΝ	%
Χωρίς πλαίσιο	12 100%	7 77,78%	148 84,09%	34 65,39%	61 82,43%	30 81,08%	292	81,11%
Καμουφλαρισμένο πλαίσιο	2 16,67%	2 22,22%	19 10,8%	8 15,38%	5 6,76%	1 2,7%	37	10,28%
Σχετικό και ουσιαστικό πλαίσιο	0	0	9 5,11%	10 19,23%	8 10,81%	6 16,22%	33	9,17%

Ε.Ε.: Έργα στο έντυπο σχολικό εγχειρίδιο

Ψ.Ε.: Έργα στο ψηφιακό-διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο

Η πλειοψηφία των έργων που αναλύθηκαν και στις τρεις τάξεις του γυμνασίου, είναι έργα χωρίς πλαίσιο. Συγκεκριμένα, στην Α΄ Γυμνασίου 19 έργα και ποσοστό 90,48%, στη Β΄ Γυμνασίου το 79,83% των έργων και στη Γ΄ το 81,98%. Τα περισσότερα έργα που τοποθετούνται σε «καμουφλαρισμένο πλαίσιο είναι στην Β΄ τάξη, ενώ στη Γ΄ τάξη 14 έργα από τα 111 συνολικά, δηλαδή το 12,61% των έργων είναι σε σχετικό και ουσιαστικό πλαίσιο.

4.4.6 Θεματολογία έργων

Πίνακας 4.37: Θεματολογία των έργων στις τάξεις Α-Γ Γυμνασίου.

ΘΕΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΕΡΓΩΝ	Α΄ ΤΑΞΗ		Β΄ ΤΑΞΗ		Γ΄ ΤΑΞΗ		ΣΥΝΟΛΟ	
	Ε.Ε. %	Ψ.Ε. %	Ε.Ε. %	Ψ.Ε. %	Ε.Ε. %	Ψ.Ε. %	ΠΛΗΘΟΣ ΕΡΓΩΝ	%
Τύπος 1: Γεωγραφία	1 8,33%	1 11,11%	7 3,98%	2 3,85%	13 17,57%	3 8,11%	27	7,5%
Τύπος 2: Αντικείμενα, χλωρίδα και πανίδα	10 83,34%	9 100%	163 92,61%	52 100%	66 89,19%	35 94,59%	345	95,83%
Τύπος 3: Οργανισμοί	0	2 22,22%	6 3,41%	0	1 1,35%	1 2,7%	10	2,78%
Τύπος 4: Τρόποι συμπεριφοράς και έθιμα	0	0	2 1,14%	0	0	1 2,7%	3	0,83%
Τύπος 5: Ιστορία	0	0	1 0,57%	0	0	0	1	0,28%
Τύπος 6: Ταυτότητες	0	2 22,22%	3 1,7%	6 11,54%	5 6,76%	5 13,51%	21	5,83%
Άλλο	1 8,33%	0	9 5,11%	0	0	0	10	2,78%

Ε.Ε.: Έργα στο έντυπο σχολικό εγχειρίδιο

Ψ.Ε.: Έργα στο ψηφιακό-διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο

Από την ανάλυση των έργων που πραγματοποιήθηκε σχετικά με τη θεματολογία των έργων, οι κατηγορίες που εντάσσονται τα περισσότερα έργα και στις τρεις τάξεις υπάγονται στον τύπο 2: αντικείμενα χλωρίδα και πανίδα, και στο σύνολο των έργων το 95,83% των έργων που αναλύθηκαν. Αξίζει να επισημανθεί ότι υπάρχουν έργα και στις τρεις τάξεις που το θέμα τους να μην είναι μόνο ένας τύπος αλλά συνδυασμός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1 Εισαγωγή

Τα σχολικά εγχειρίδια αποτέλεσαν και συνεχίζουν να αποτελούν αντικείμενο έρευνας για πολλά χρόνια και έχουν απασχολήσει τη διεθνή επιστημονική κοινότητα. Αυτό συμβαίνει γιατί τα σχολικά εγχειρίδια είναι τα κυριότερα μέσα διδασκαλίας, μάθησης με αποτέλεσμα να καθορίζουν σε σημαντικό βαθμό την εκπαιδευτική διαδικασία καθώς οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί στηρίζουν τη διδασκαλία τους σε αυτά. Τα εγχειρίδια ως οι κύριοι μετακομιστές των σκοπών και στόχων των προγραμμάτων σπουδών, μεταφέρουν τη φιλοσοφία τους και καθορίζουν τι θα διδαχτεί σε κάθε γνωστικό αντικείμενο. Στην παρούσα διπλωματική εργασία έγινε προσπάθεια να αναλυθούν τα έργα που αφορούν το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του Γυμνασίου. Η έννοια του εμβαδού αποτελεί μία από τις μαθηματικές έννοιες με την οποία οι μαθητές/-τριες έρχονται σε επαφή από την προσχολική τους ηλικία μέχρι τις τελευταίες τάξεις του Λυκείου και αποτελεί ένα βασικό τομέα των μαθηματικών με εκτεταμένες εφαρμογές στην πραγματική ζωή (Lehrer, 2003).

Από την επισκόπηση της βιβλιογραφίας μπορούμε να πούμε ότι στην ελληνική και διεθνή πραγματικότητα δεν υπάρχουν συστηματικές έρευνες οι οποίες εστιάζουν στην ανάλυση των έργων των σχολικών διαδραστικών εγχειριδίων των Μαθηματικών στην Δευτεροβάθμια εκπαίδευση στο θέμα του εμβαδού. Ακόμα, δεν υπάρχουν μελέτες που να συγκρίνουν από τάξη σε τάξη τα έργα που αφορούν το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών ώστε να φαίνεται η εξέλιξη της ανάπτυξης του συγκεκριμένου θέματος των σχολικών εγχειριδίων. Η παρούσα έρευνα σκοπό έχει να αναλύσει τα έργα που αφορούν το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του Γυμνασίου. Τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της διπλωματικής εργασίας ενδέχεται να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς να αναστοχαστούν σχετικά με τα έργα που εμπεριέχονται στα σχολικά εγχειρίδια για το εμβαδόν και να προχωρήσουν σε διαδικασίες βελτίωσής τους εμπλουτίζοντας το σχετικό εκπαιδευτικό υλικό.

Η παρούσα διπλωματική εργασία επιδίωξε να δώσει απαντήσεις στα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

Ερωτήματα οριζόντιας ανάλυσης:

1. Ποιος είναι ο αριθμός ενοτήτων στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών στις τάξεις Α-Γ γυμνασίου για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών;
2. Ποια θέματα καλύπτονται στις σχετικές ενότητες;

Ερωτήματα κάθετης ανάλυσης:

3. Ποιο είναι το μαθηματικό περιεχόμενο των έργων στα οποία εμπλέκεται το εμβαδόν;
4. Ποιες είναι οι γνωστικές απαιτήσεις των έργων;
5. Ποιες μαθηματικές πρακτικές αναπτύσσονται;
6. Ποιες μορφές απάντησης περιλαμβάνουν τα έργα;
7. Ποιοι τύποι πλαισίων χρησιμοποιούνται;
8. Ποια είναι η θεματολογία των έργων;

5.2 Κυριότερα Ευρήματα ανά ερώτημα

Η οριζόντια ανάλυση αφορά στα φυσικά χαρακτηριστικά των σχολικών εγχειριδίων και από την ανάλυση που πραγματοποιήσαμε βρήκαμε ότι στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Γυμνασίου υπάρχουν οι περισσότερες ενότητες όπου το εμβαδόν διδάσκεται ως αυτόνομη έννοια αλλά και ως βοηθητική αναπαράσταση για την κατανόηση μιας άλλης. Επομένως, το διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών έχει και τα περισσότερα έργα που αφορούν το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών.

Στην παρούσα εργασία αναλύσαμε τα έργα που αναφέρονται και σχετίζονται με το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του γυμνασίου. Το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών στα αναλυθέντα σχολικά εγχειρίδια διδάσκεται είτε ως αυτόνομη έννοια είτε ως μια βοηθητική αναπαράσταση για την κατανόηση μιας άλλης έννοιας. Επομένως θέματα με τα οποία συνδέεται το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών βρήκαμε παραδείγματος χάριν τα ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά, κλάσματα, πυθαγόρειο θεώρημα, συναρτήσεις, προβλήματα εξισώσεων 2^{ου} βαθμού, ομοιότητα σχημάτων κ.λπ.

Μαθηματικό περιεχόμενο

Το μαθηματικό περιεχόμενο που αφορά το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών το κατηγοριοποιήσαμε σε τρεις κατηγορίες: τη διατήρηση, τη μεταβατικότητα και τις μονάδες μέτρησης. Αξίζει να πούμε ότι υπήρξαν έργα που η εστίασή τους δεν εντασσόταν σε αυτές τις τρεις κατηγορίες. Αναλυτικότερα, τα περισσότερα έργα από αυτά που αναλύθηκαν αφορούσαν τη μεταβατικότητα του εμβαδού και περισσότερα ήταν ψηφιακά έργα όπου τα ψηφιακά εργαλεία δίνουν ποικίλες και διαφορετικές δυνατότητες αναπαράστασης και μεταφοράς στους/στις μαθητές/-τριες.

Στην Α΄ τάξη, τα έργα που υπάρχουν σε έντυπη μορφή αναφέρονταν στις μονάδες μέτρησης. Όσον αφορά στη διατήρηση του εμβαδού υπήρξαν περισσότερα ψηφιακά έργα που να εστιάζουν σε αυτό το περιεχόμενο.

Στη Β΄ τάξη υπήρξαν αρκετά έργα που εστίαζαν και σε κάποιο άλλο περιεχόμενο σχετικό με το εμβαδόν. Αξίζει να αναφέρουμε ότι στα ψηφιακά έργα δόθηκε περισσότερη βαρύτητα στη διατήρηση και τη μεταβατικότητα, όπου οι μαθητές/-τριες με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων μπορούν να αποδομήσουν ένα σχήμα σε επιμέρους σχήματα καθώς και να μεταφέρουν ώστε να μπορούν να τα συγκρίνουν.

Στη Γ΄ τάξη δεν εντοπίστηκαν έργα που να αναφέρονται στις μονάδες μέτρησης καθώς επίσης συμπεραίνουμε από την ανάλυση που πραγματοποιήσαμε ότι τόσο τα ψηφιακά όσο και τα έργα που υπάρχουν στο έντυπο βιβλίο, εστιάζουν κυρίως στη μεταβατικότητα του εμβαδού.

Γνωστικές απαιτήσεις

Αναφορικά με τις γνωστικές απαιτήσεις τα περισσότερα έργα είναι έργα σύνδεσης όπου γίνεται ενσωμάτωση και σύνδεση μεταξύ διαφορετικών θεματικών ενοτήτων και συμμετοχή των μαθητών σε απλή μαθηματική συλλογιστική.

Στην Α΄ τάξη το εμβαδόν διδάσκεται ως αυτόνομη έννοια μόνο σε μια παράγραφο οπότε υπάρχουν αρκετά έργα αναπαραγωγής όπως και στη Β΄ τάξη όπου υπάρχουν περισσότερες ενότητες, υπάρχουν αρκετά έργα αναπαραγωγής. Αντίθετα τα έργα της Γ΄ τάξης που είναι αναπαραγωγής είναι λίγα.

Επισημαίνουμε ότι όταν οι μαθητές/-τριες εμπλέκονται με δραστηριότητες χαμηλής γνωστικής απαίτησης αυτό προωθεί την στείρα αποστήθιση των γνώσεων, χωρίς ουσιαστική κατανόηση και ανάπτυξη της κριτικής σκέψης.

Έργα υψηλού γνωστικού επιπέδου, δηλαδή έργα διερεύνησης, όπου απαιτούν από τους/τις μαθητές/-τριες να έχουν σύνθετη, μη-αλγοριθμική και κριτική σκέψη εντοπίστηκαν περισσότερο στη Γ΄ τάξη στα έργα που βρίσκονται στο έντυπο σχολικό εγχειρίδιο αλλά και στα ψηφιακά έργα.

Γενικά μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και στα τρία διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα σε έργα υπολογισμού χαμηλών και μεσαίων γνωστικών απαιτήσεων. Αυτό συμφωνεί με τα ευρήματα της Brändström (2005) και των Wijaya et al. (2015).

Μαθηματικές πρακτικές

Αναφορικά με τις μαθηματικές πρακτικές που αναπτύσσονται στα έργα των διαδραστικών σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών του Γυμνασίου, εντοπίσαμε ότι η πρακτική που αναπτύσσεται στα περισσότερα έργα είναι αυτή της διατύπωσης και λύσης προβλήματος. Αυτό παρατηρείται και στις τρεις τάξεις και περισσότερο στα έργα που βρίσκονται στο έντυπο σχολικό εγχειρίδιο. Επιπλέον η πρακτική που αναπτύσσεται σε αρκετά έργα είναι και αυτή του συλλογισμού και της επιχειρηματολογίας και αντίστοιχα η πρακτική της επιλογής και χρήσης ψηφιακού εργαλείου. Αναφορικά με τις άλλες κατηγορίες, μοντελοποίησης, αναστοχασμού και μαθηματικής επικοινωνίας, αυτές εντοπίζονται σε ελάχιστα έργα.

Με σκοπό την ανάπτυξη περισσότερων πρακτικών και στις τρεις τάξεις είναι αναγκαίο να υπάρχουν περισσότερα έργα όπου να εφαρμόζεται η έννοια του εμβადού που εξετάζουμε σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής, κοινωνίας ή χώρου εργασίας. Στις καθημερινές μας καταστάσεις διαθέτουμε ποικίλα μέσα και εργαλεία, χειραπτικά και ψηφιακά τα οποία ενδεχομένως να μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε στην εκπαιδευτική διαδικασία. Για αυτό είναι πολύ σημαντικό να παρέχεται στους εκπαιδευτικούς η δυνατότητα για αξιοποίηση και επιλογή μέσων ή και εργαλείων (όχι ψηφιακών αποκλειστικά) με βάση τα πλεονεκτήματα και τους περιορισμούς τους.

Μορφή απάντησης

Αναφορικά με τη μορφή απάντησης των έργων στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια εντοπίσαμε ότι και στις τρεις τάξεις τα περισσότερα έργα είναι έργα κλειστής απάντησης, και δεν σχετίζονται με τον πραγματικό κόσμο και την καθημερινή ζωή των μαθητών/-τριών. Επισημαίνουμε ότι υπάρχουν ελάχιστα έργα όπου η απάντηση είναι ανοιχτή και κυρίως είναι στα ψηφιακά έργα. Επιπλέον, τα έργα πολλαπλής επιλογής δεν εντοπίστηκαν στο διαδραστικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ τάξης όπως και ελάχιστα είναι μόνο ανοιχτής απάντησης.

Τύποι πλαισίου

Σχετικά με τους τύπους πλαισίου που χρησιμοποιούνται στα αναλυθέντα έργα, η συντριπτική πλειοψηφία των έργων δεν τοποθετούνται σε κάποιο πλαίσιο. Είναι δηλαδή έργα που αναφέρονται μόνο σε μαθηματικά αντικείμενα και δομές. Επίσης, υπάρχουν ελάχιστα ρεαλιστικά προβλήματα και ιδιαίτερα έλλειψη αυθεντικού προβλήματος από τα εγχειρίδια και των τριών τάξεων. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τους στόχους των ΑΠΣ που

προσβλέπουν στην ανάπτυξη από τάξη σε τάξη της ικανότητας των μαθητών/-τριων να επιλύσουν προβλήματα πραγματικών καταστάσεων, τα οποία συμβάλλουν θετικά στη μάθηση. Διαπιστώσαμε από την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε ότι η πλειονότητα των αναλυθέντων έργων είναι κλειστής απάντησης που δεν αναφέρονται ή σχετίζονται με τον πραγματικό κόσμο και την καθημερινότητα των μαθητών/-τριων. Τα ευρήματα αυτά έρχονται να συμφωνήσουν με αυτά των Zhu et al. (2006) και του Li (2000) από τις έρευνες που πραγματοποίησαν.

Θεματολογία των έργων

Τέλος, όσον αφορά τη θεματολογία των έργων που αναφέρονται στο εμβαδόν επίπεδων επιφανειών στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του Γυμνασίου, συμπεραίνουμε ότι η πλειονότητα των έργων είναι τύπου 2, δηλαδή αναφέρονται σε αντικείμενα, χλωρίδα και πανίδα. Τα έργα που αναφέρονται στις άλλες κατηγορίες είναι ελάχιστα.

Αξίζει να επισημανθεί ένα ενδιαφέρον συμπέρασμα που προέκυψε από την ανάλυση που πραγματοποιήσαμε και αφορά στα ψηφιακά έργα. Συγκεκριμένα προέκυψε ότι τα περισσότερα έργα διερεύνησης, με ουσιαστικό πλαίσιο και ανοιχτής απάντησης σε όλες τις τάξεις είναι ψηφιακά.

5.3 Περιορισμοί και προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Η παρούσα εργασία αποτέλεσε το εκπόνημα μιας προσπάθειας που σκόπευε και πραγματοποίησε μια συγκριτική ανάλυση των έργων που αφορούν το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του Γυμνασίου. Η συγκριτική αυτή ανάλυση αφορούσε στα φυσικά χαρακτηριστικά των εγχειριδίων (αριθμός ενοτήτων και θέματα που καλύπτονται στις συγκεκριμένες ενότητες) και επιπλέον στο μαθηματικό περιεχόμενο, στις γνωστικές απαιτήσεις των έργων, στις πρακτικές που αναπτύσσονται στα έργα, στη μορφή απάντησης, στους τύπους πλαισίου και στη θεματολογία των έργων.

Εκτός από την ανάλυση περιεχομένου ενός εγχειριδίου υπό το πρίσμα κάποιων ερευνητικών ερωτημάτων, δεν μπορούμε να αγνοήσουμε το ρόλο του εκπαιδευτικού σε όλη αυτή τη διαδικασία. Αυτό συμβαίνει γιατί τα σχολικά εγχειρίδια και πόσο μάλλον τα διαδραστικά, χρησιμοποιούνται διαφορετικά από τον κάθε εκπαιδευτικό. Επιπλέον, ο εκπαιδευτικός είναι αυτός ο οποίος καθορίζει τη χρήση του εγχειριδίου μέσα στην τάξη. Επομένως, ο ρόλος του είναι ζωτικής σημασίας γιατί είναι ο διαμεσολαβητής των στόχων και σκοπών των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών.

Στην εργασία αυτή αναλύθηκαν τα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των τριών τάξεων των Μαθηματικών του Γυμνασίου. Προτείνεται να αναλυθούν τα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών και του Δημοτικού αλλά και του Λυκείου για την έννοια του εμβαδού σε όλους τους θεματικούς άξονες που εξετάσαμε, ώστε να μπορούμε να αποφανθούμε σχετικά με την εξέλιξη που ενδεχομένως να είχε από βαθμίδα σε βαθμίδα η έννοια του εμβαδού. Επίσης, προτείνεται η πραγματοποίηση μιας έρευνας που θα αναλύει τον τρόπο με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί αξιοποιούν τα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια στις τάξεις τους, πως τα προσαρμόζουν ή διαμορφώνουν το πλαίσιο χρήσης τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

- Alabdulaziz, M. S., & Higgins, S. (2021). The Compatibility of Developed Mathematics Textbook Content in Saudi Arabia with NCTM Standards: A Critical Review. *International Journal of Instruction*, 14(2), 461-482.
- Baturo, A. and Nason, R. (1996). Student teacher's subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 235-268.
- Brändström, A. (2005). *Differentiated tasks in mathematics textbooks: An analysis of the levels of difficulty* (Doctoral dissertation, Luleå tekniska universitet). Retrieved from: <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:991116/FULLTEXT01.pdf>
- Burton, D.M. (2011). *The History of Mathematics: An Introduction (7th ed)*. New York: McGraw-Hill. Retrieved from: <https://jontalle.web.engr.illinois.edu/uploads/298/HistoryMath-Burton.85.pdf>
- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical thinking and learning*, 12(2), 117-151.
- Dole, S., & Shield, M. (2008). The capacity of two Australian eighth-grade textbooks for promoting proportional reasoning. *Research in Mathematics Education*, 10(1), 19-35.
- Driscoll, M.J. (1981). Measurement in elementary school mathematics. In *Research Within Reach* (pp. 29–36). Reston, VA: CEMREL, Inc., N.C.T.M.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131. DOI: 10.1007/s10649-006-0400-z
- Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013) Textbook research in mathematics education: development status and directions ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 45(5), 633–646.
- Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education*, 45, 765–777. Doi: [10.1007/s11858-013-0530-6](https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6)
- Fan, L., Xiong, B., Zhao, D., & Niu, W. (2018). How is cultural influence manifested in the formation of mathematics textbooks? A comparative case study of resource book series between Shanghai and England. *ZDM Mathematics Education*, 50, 787–799.
- Fritzche, K-P. (1992) Τα σχολικά εγχειρίδια ως αντικείμενο έρευνας. Ματιές στη διεθνή έρευνα σχολικών εγχειριδίων. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση*, (17), 173-183.
- Gene, K., Zacharos, K., Lavidas, K. & Koustourakis, G. (2018). An analysis of school mathematics textbooks in terms of their pedagogical orientation. *Open Journal for Educational Research*, 2(1), 1-18.
- Glasnovic Gracin, D. (2018). Requirements in mathematics textbooks: a five-dimensional analysis of textbook exercises and examples. *International journal of mathematical education in science and technology*, 49(7), 1003-1024.
- Hadar, L. L. (2017). Opportunities to learn: Mathematics textbooks and students' achievements. *Studies in Educational Evaluation*, 55, 153-166.
- Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for research in mathematics education*, 524-549.

- Herendiné-Kónya, E. (2015). The level of understanding geometric measurement. In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.536-542). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.
- Hong, D.S., Choi, K.M. (2014). A comparison of Korean and American secondary school textbooks: the case of quadratic equations. *Educ Stud Math*, 85, 241–263.
- Inskeep, J-J. E. (1976). Teaching measurement to elementary school children. In D. Nelson and R. Reys (Eds), *Measurement in school Mathematics* (pp. 60–86). Reston, VA: N.C.T.M.
- Institut für Didaktik der Mathematik (2007). *Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe [Standards for the mathematical competencies of Austrian students at the end of the 8th grade]*. German, Klagenfurt: Alpen-Adria Universität.
- Katz, V.J. (2008). *A history of mathematics (3rd ed)*. Reading, Mass: Addison-Wesley. Retrieved from: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6075667/mod_resource/content/1/Victor%20J.%20Katz%20-%20A%20History%20of%20Mathematics-Pearson%20%282008%29.pdf
- Kilpatrick, J. (2014) From clay tablet to computer tablet: The evolution of school mathematics textbooks. In K. Jones, C. Bokhove, G. Howson, & L. Fan (Eds.), *International conference on mathematics textbook research and development 2014 (ICMT-2014), University of Southampton, United Kingdom, 29–31 July 2014* (pp. 3–12).
- Kordaki, M., & Potari, D. (2002). The effect of area measurement tools on student strategies: The role of a computer microworld. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(1), 65-100.
- Kordaki, M. (2003). The effect of tools of a computer microworld on students' strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 177-209.
- Kospentaris, G., Spyrou, P., & Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 105-127.
- Krippendorff, K. (2004). *Content Analysis An Introduction to Its Methodology*. London & New Delhi: Sage Publications.
- Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 179–192). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Li, Y. (2000). A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 234-241.
- Liu, Z. (2005). Reading behavior in the digital environment. Changes in reading behavior over the past ten years. *Journal of Documentation*, 61(6), pp. 700-712.
- Machaba, F.M. (2018). The concepts of area and perimeter: Insights and misconceptions of Grade 10 learners. *Pythagoras*, 37(1), 1-11.
- Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2004). *Fundamental constructs in mathematics education*. London & New York: RoutledgeFalmer & The open university.
- Murphy, C. (2011). The role of subject knowledge in primary prospective teachers' approaches to teaching the topic of area. *Journal of mathematics teacher education*, 15(3), 187-206.

- Neuendorf, K. (2002). *The Content Analysis Guidebook*. London & New Delhi: Sage Publications.
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 9-28.
- Nunes, T., Light, P., & Mason, J. (1993). Tools for thought: The measurement of length and area. *Learning and instruction*, 3(1), 39-54.
- O'Halloran, K.L., Beezer, R.A. & Farmer, D.W. (2018). A new generation of mathematics textbook research and development. *ZDM Mathematics Education*, 50, 863–879. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0959-8>
- PATAHUDDIN, S., LOGAN, T., & RAMFUL, A. (2018). Characteristics of spatial visualisation: Perspectives from area of composite shapes. In J. Hunter, L. Darragh, & P. Perger (Eds.), *Making Waves, Opening Spaces: Proceedings of the 41st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 623-630). Mathematics Education Research Group of Australasia Inc..
- Pepin, B., & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 33(5), 158-175.
- Piaget, J., Inhelder, B. and Szeminska, A. (1981). *The Child's Conception of Geometry*. New York: Basic Books.
- Rahim, M. H., & Sawada, D. (1990). The duality of qualitative and quantitative knowing in school geometry. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, 21(2), 303-308.
- Remillard, J. T. (2000). Can curriculum materials support teachers' learning? Two fourth-grade teachers' use of a new mathematics text. *The Elementary School Journal*, 100(4), 331-350.
- Rezat, S. (2006). The structures of German mathematics textbooks. *ZDM*, 38(6), 482-487.
- Rezat, S. (2013). The textbook-in-use: Students' utilization schemes of mathematics textbooks related to self-regulated practicing. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 45(5), 659–670.
- Sherman, M. F., Cayton, C., Walkington, C., & Funsch, A. (2020). An Analysis of Secondary Mathematics Textbooks With Regard to Technology Integration. *Journal for Research in Mathematics Education*, 51(3), 361-374.
- Shield, M., & Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educ Stud Math*, 82, 183–199. DOI 10.1007/s10649-012-9415-9
- Yang, D. C., & Sianturi, I. A. (2017). An analysis of Singaporean versus Indonesian textbooks based on trigonometry content. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(7), 3829-3848.
- Yerushalmy, M. (2014). Challenges to the authoritarian roles of textbooks. In K. Jones, C. Bokhove, G. Howson, & L. Fan (Eds.), *International conference on mathematics textbook research and development 2014 (ICMT-2014)*, University of Southampton, United Kingdom, 29–31 July 2014 (pp. 13–20).
- Wang, Y., Barmby, P. & Bolden, D. (2017). Understanding Linear Function: a Comparison of Selected Textbooks from England and Shanghai. *Int J of Sci and Math Educ*, 15, 131–153.
- Wang, J., Lu, X. (2018). Selection of content in high school mathematics textbooks: an international comparison. *ZDM Mathematics Education*, 50, 813–826.
- Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M. & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 89, 41-65.
- Wilson, P. S. & Rowland, R. (1993). Teaching Measurement. In R. J. Jensen (ed.), *Research Ideas for the Classroom: Early Childhood Mathematics*, 171-194.

Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4), 609-626.

Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία

- Αλεξανδρόπουλος, Γ., Γλάρος, Ε., & Μαρκόπουλος, Χ. (2009). Οι Αντιλήψεις των Μαθητών για την Επιφάνεια και τη Μέτρηση της. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή, & Γ. Φεσάκης (Επιμ.). *Πρακτικά 3^{ου} Συνεδρίου Εν.Ε.Δι.Μ.* (257-266). Ελλάδα: Ρόδος.
- Αλεξανδρόπουλος, Γ., Γλάρος, Ε., & Μαρκόπουλος, Χ. (2013). Οι Αντιλήψεις των Μαθητών για την Επιφάνεια και τη Μέτρηση της. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση*, 55, 105-123.
- Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., & Θωμαΐδης, Ι. (2021). *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' Τάξης Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Υγείας και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής Β' ΜΕΡΟΣ*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων (ΙΤΥΕ) «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
- Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., & Χρυσοβέργης, Μ. (χ.χ). *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου βιβλίο εκπαιδευτικού*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων (ΙΤΥΕ) «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
- Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., & Χρυσοβέργης, Μ. (2021). *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων (ΙΤΥΕ) «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
- Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάσης, Σ., & Σίδηρης, Π. (2016). *ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α' και Β' ΛΥΚΕΙΟΥ. ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΗ*. Αθήνα: ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
- Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγιάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος, Σ. (χ.χ). *Μαθηματικά Α' Γυμνασίου βιβλίο εκπαιδευτικού*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων (ΙΤΥΕ) ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
- Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγιάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος, Σ. (2021). *Μαθηματικά Α' Γυμνασίου*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων (ΙΤΥΕ) ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
- Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (χ.χ). *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου βιβλίο εκπαιδευτικού*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων (ΙΤΥΕ) «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
- Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2016). *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων (ΙΤΥΕ) «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
- Ιωακείμиду, Β., & Παπαδημητρίου, Σ. (2018). Έντυπο και Ψηφιακό Βιβλίο (e-book) στην Ψηφιακή Εποχή. *Open Education*, 14(1), 80-93.
- Καραβασίλης, Γ., & Κόσσυβας, Γ. (2016). Όψεις κριτικής αποτίμησης του σχολικού βιβλίου Μαθηματικών της Β' Γυμνασίου: το εγχειρίδιο υποστηρίζει δραστηριότητες υψηλής γνωστικής βαρύτητας; *Έρκυνα, Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών–Επιστημονικών Θεμάτων*, 10, 68-84.
- Καφούση, Σ., & Σκουμπουρδή, Χ. (2008). *Τα μαθηματικά των παιδιών 4-6 ετών. Αριθμοί και χώρος*. Αθήνα: Πατάκης.
- Καψάλης, Α. & Χαραλάμπους, Δ. (1995). *Σχολικά εγχειρίδια. Θεσμική Εξέλιξη και Προβληματική*. Αθήνα: Έκφραση.

- Καψάλης, Α. Γ., & Χαραλάμπους, Δ. Φ. (2008). *Σχολικά εγχειρίδια: θεσμική εξέλιξη και σύγχρονη προβληματική*. Αθήνα: Μεταίχμιο.
- Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Τόπος.
- Κουλαϊδής, Β., Δημόπουλος, Κ., Σκλαβενίτη, Σ., & Χρηστίδου, Β. (2001). *Τα κείμενα της τεχνο-επιστήμης στον δημόσιο χώρο*. Αθήνα: Μεταίχμιο.
- Κουλουμπαρίτση, Α. (2015). *ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ. Σχεδιασμός-Διδασκαλία-Αξιολόγηση*. Αθήνα: Γρηγόρη.
- Λυμπεροπούλου, Ε., & Παπαδάκη, Μ. (2008). ΤΑ ΝΕΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΤΑ ΤΡΙΑ «ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ» Η ΚΡΥΜΜΕΝΗ ΑΝΤΙ-ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.), *Το βιβλίο στη διδασκαλία των Μαθηματικών, 7ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, 195-210, Θεσσαλονίκη.
- Μπονίδης, Κ. (2004). *Το περιεχόμενο του σχολικού βιβλίου ως αντικείμενο έρευνας*. Αθήνα: Μεταίχμιο.
- Ξωχέλλης, Π. (2005). Τα κριτήρια εγκυρότητας, αξιοπιστίας και παιδαγωγικής καταλληλότητας των σχολικών βιβλίων. Στο Χ. Βέικου (Επιμ.), *Διδακτικό Βιβλίο και Εκπαιδευτικό Υλικό στο σχολείο: Προβληματισμοί – Δυνατότητες – Προοπτικές* (σελ. 32-38). Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.
- Παπαγιαννακοπούλου, Β., & Χατζηκυριάκου, Κ. (2014). ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ ΚΑΙ EUCLIDRAW: Η ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΑΝΤΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΚΑΙ Η ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ ΣΤΟ ΨΗΦΙΑΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΤΟΥ EUCLIDRAW. Στο Χ. Λεμονίδης, Κ. Νικολαντωνάκης, Ε. Τσακιρίδου, Σ. Αργυροπούλου, Η. Ίνδος, Ι. Καϊάφα, Γ. Λυγούρας, Κ. Στυλιάδης, Σ. Παπαχαρίσης, & Λ. Μπούτσκου (Επιμ.), *Πρακτικά 5ου Συνεδρίου Εν.Ε.Δι.Μ* (1-12). Ελλάδα: Φλώρινα.
- Πιττάλης, Μ., Μουσουλίδης, Ν., & Χρίστου, Κ. (2004). Νέες προοπτικές στη διδασκαλία της γεωμετρίας: Η περίπτωση του εμβαδού πολυγώνων. Στο Μ. Γρηγοριάδου, Α. Ράπτης, Σ. Βοσνιάδου, & Χ. Κυνηγός (Επιμ.), *Πρακτικά 4^ο Πανελλήνιου Συνεδρίου ΕΤΠΕ* (213-222). Ελλάδα: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.
- Σιδηρόπουλος, Α. (2013). *Ο ρόλος του διπλού τετραγωνικού πλέγματος ως διδακτικό μέσου/βοηθήματος στο Γυμνάσιο: Η περίπτωση του διπλασιασμού του τετραγώνου* (Doctoral dissertation). Πανεπιστήμιο Πατρών.
- Τουμάσης, Μ. (1994). *Σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.
- Τσικοπούλου, Σ. (2008). Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.), *Το βιβλίο στη διδασκαλία των Μαθηματικών, 7ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, 211-223, Θεσσαλονίκη.
- ΥΠΕΠΘ (13-3-2003). “Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών για το Νηπιαγωγείο και την Υποχρεωτική Εκπαίδευση”. ΦΕΚ 303, τ. Β’. Αθήνα: Εθνικό Τυπογραφείο.
- ΥΠΕΠΘ (12-11-2021). “Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών για το Νηπιαγωγείο και την Υποχρεωτική Εκπαίδευση”. ΦΕΚ 5260, τ. Β’. Αθήνα: Εθνικό Τυπογραφείο.
- Van De Walle, J. A. (2007). *Διδάσκοντας Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο : Μια Αναπτυξιακή Διαδικασία*. Θεσσαλονίκη : Επίκεντρο.
- Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ., (1995). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Δαρδανός.
- Φιλίππου, Γ., Χρίστου, Κ., Μιχαηλίδης, Μ., & Αντωνιάδου, Π. (1998). Διαισθητικά μοντέλα στην κατανόηση της έννοιας του εμβαδού. *Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, (15), 369-382.
- Χασάπης, Δ., Ζαχάρος, Κ., & Τρέσσου, Ε. (1997). Στρατηγικές μαθητών της Α΄ Λυκείου στην αντιμετώπιση προβλημάτων μέτρησης επιφανειών. Η συμβολή του Πολιτισμικού-

Ιστορικού «Εργαλείου». *14^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, (14), 355-365.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ανάλυση έργων για το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών στα διαδραστικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.2 Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 3

1. Σελ.14 Δραστηριότητα 3^{η} - Διδακτικός στόχος: η κατανόηση της έννοιας και της χρησιμότητας της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση, με τη βοήθεια κατάλληλης γεωμετρικής απεικόνισης.
2. Σελ.16 Παραδείγματα-Εφαρμογές 3° - Διδακτικός στόχος παραδείματος-εφαρμογής: να ερμηνεύσει, με γεωμετρικό τρόπο, την επιμεριστική ιδιότητα.
3. Σελ 18 Άσκηση 7 - Διδακτικός στόχος: αναφορά στη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας στις πράξεις και τους υπολογισμούς.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 2

1. Τα μικροπείραμα κάτω από τη Σελ.16 Παραδείγματα-Εφαρμογές 3° - Διδακτικός στόχος παραδείματος-εφαρμογής: να ερμηνεύσει, με γεωμετρικό τρόπο, την επιμεριστική ιδιότητα.

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.2.5 Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 0

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ. 48 Μικροπείραμα 1 «Ο πεζόδρομος πλακοστρώνεται – Πολλαπλασιασμός κλασμάτων-Δραστηριότητα 2» - Διδακτικός στόχος: η κατανόηση της έννοιας του πολλαπλασιασμού κλασμάτων και υπολογισμού του γινομένου τους με τη βοήθεια σχήματος.

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.2.6 Διαίρεση κλασμάτων

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 0

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 2

1. Σελ. 50 Μικροπείραμα 1° – Εισαγωγική δραστηριότητα: Εμβαδόν ορθογωνίου- Διδακτικός στόχος: διαίρεση δύο φυσικών αριθμών
2. Σελ. 50 Μικροπείραμα 1° – Κύρια δραστηριότητα- Διδακτικός στόχος: η κατανόηση της έννοιας της διαίρεσης κλασμάτων και υπολογισμού του πηλίκου τους με τη βοήθεια σχήματος.

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.3.5 Μονάδες μέτρησης

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 6

1. Σελ. 64 Δραστηριότητα $3^{\eta}/1$ - Διδακτικός στόχος: η κατανόηση της διαδικασίας μέτρησης ενός βασικού φυσικού μεγέθους (μήκους, επιφάνειας όγκου, χρόνου και μάζας) με διαφορετικές μονάδες μέτρησης καθώς και τη διερεύνηση της μεταξύ τους σχέσης.
2. Σελ. 66 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ 2. - Διδακτικός στόχος: Να δείξει τον τρόπο και τη διαδικασία της μετατροπής των μονάδων επιφανείας.

3. Σελ. 67 Ασκήσεις 4,5,6,7- Διδακτικός στόχος: είναι ασκήσεις εύρεσης μονάδων επιφανείας και μετατροπής στα υποπολλαπλάσια και πολλαπλάσιά τους,

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 0

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.4.3 Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 0

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 2

1. Σελ. 76 Μικροπείραμα 1^ο κάτω από ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ 3. - Διδακτικός στόχος: Να δείξουν σε διάφορες και κατά το δυνατόν διαφορετικές περιπτώσεις προβλημάτων, που προέρχονται από τις εμπειρίες της καθημερινότητας, τις διαδικασίες με τις οποίες καταστρώνονται διάφορες ευρετικές στρατηγικές επίλυσης. Όπως είναι π.χ. ο συμβολισμός του αγνώστου, η μετατροπή της λεκτικής έκφρασης του προβλήματος σε μαθηματική, η ανάλυση των δεδομένων, ο σχεδιασμός ενός πίνακα, η διερεύνηση όλων των ειδικών περιπτώσεων κλπ, με τελικό σκοπό την εύρεση της λύσης και την επαλήθευσή της.
2. Σελ. 78 Μικροπείραμα κάτω από την Άσκηση 2- Διδακτικός στόχος: Υπολογισμός του εμβαδού ενός μέρους.

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.6.3 Ανάλογα ποσά - Ιδιότητες ανάλογων ποσών

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ. 98 Άσκηση 1 παραδείγματα β, δ, στ - Διδακτικός στόχος: Η 1^η άσκηση έχει σκοπό την ανάπτυξη της δεξιότητας αναγνώρισης των αναλόγων ποσών με την εύρεση «σωστού ή λάθους».

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 0

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.6.6 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 2

1. Σελ. 107 Δραστηριότητα 3^η - Διδακτικός στόχος: Η δραστηριότητα αποσκοπεί στη διαισθητική και εμπειρική εμπέδωση της έννοιας της ταυτόχρονης μεταβολής δύο μεγεθών, όπως είναι αυτές για παράδειγμα που αφορούν τη μεταβολή των διαστάσεων ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου σταθερού εμβαδού.
2. Σελ. 109 Άσκηση 1 παραδείγματα α και γ- Διδακτικός στόχος: ανάπτυξη της δεξιότητας αναγνώρισης των αναλόγων ποσών με την εύρεση «σωστού ή λάθους».

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 2

1. Σελ. 107 Μικροπείραμα 1^ο κάτω από τη Δραστηριότητα 3^η - Διδακτικός στόχος: Το μικροπείραμα αποσκοπεί στη διαισθητική και εμπειρική εμπέδωση της έννοιας της ταυτόχρονης μεταβολής δύο μεγεθών, όπως είναι αυτές για παράδειγμα που αφορούν τη μεταβολή των διαστάσεων ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου σταθερού εμβαδού.
2. Σελ. 107 Μικροπείραμα 2^ο κάτω από τη Δραστηριότητα 3^η - Διδακτικός στόχος: Το μικροπείραμα αποσκοπεί στη διαισθητική και εμπειρική εμπέδωση της έννοιας της ταυτόχρονης μεταβολής δύο μεγεθών, όπως είναι αυτές για παράδειγμα που αφορούν τη μεταβολή των διαστάσεων ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου σταθερού εμβαδού.

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.1 Η έννοια της μεταβλητής - Αλγεβρικές παραστάσεις

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ. 12 Δραστηριότητα 2^η - Διδακτικός στόχος: Οι μαθητές επιδιώκεται: να εκφράζουν με μεταβλητές διάφορες καταστάσεις της καθημερινής ζωής, να θυμηθούν τη σημασία της επιμεριστικής ιδιότητας στην απλοποίηση παραστάσεων.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 2

1. Σελ. 11 Μικροπείραμα δραστηριότητας 1^{ης}/ερώτηση 1- Διδακτικός στόχος: Οι μαθητές επιδιώκεται: να εκφράζουν με μεταβλητές διάφορες καταστάσεις της καθημερινής ζωής.
2. Σελ. 12 Μικροπείραμα δραστηριότητας 2^{ης} - Διδακτικός στόχος: Οι μαθητές επιδιώκεται: να εκφράζουν με μεταβλητές διάφορες καταστάσεις της καθημερινής ζωής, να θυμηθούν τη σημασία της επιμεριστικής ιδιότητας στην απλοποίηση παραστάσεων.

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.3 Επίλυση Τύπων

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 4

1. Σελ. 23 Εφαρμογή- Διδακτικοί Στόχοι: Οι μαθητές επιδιώκεται: α) να επιλύουν έναν τύπο ως προς μια μεταβλητή, θεωρώντας τον ως εξίσωση με άγνωστο τη μεταβλητή αυτή, β) να αναγνωρίζουν στους τύπους ποια μεγέθη είναι δοσμένα και ποια άγνωστα.
2. Σελ. 24 Ασκήσεις 3,5 και 7- Διδακτικοί Στόχοι: Οι μαθητές επιδιώκεται: να επιλύουν έναν τύπο ως προς μια μεταβλητή, θεωρώντας τον ως εξίσωση με άγνωστο τη μεταβλητή αυτή,

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ. 24 Μικροπείραμα άσκησης 3 - Διδακτικοί Στόχοι: Οι μαθητές επιδιώκεται: α) να επιλύουν έναν τύπο ως προς μια μεταβλητή, θεωρώντας τον ως εξίσωση με άγνωστο τη μεταβλητή αυτή, β) να αναγνωρίζουν στους τύπους ποια μεγέθη είναι δοσμένα και ποια άγνωστα.

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.4 Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ:

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να διακρίνουν τα δεδομένα από τα ζητούμενα του προβλήματος,
- να κάνουν εισαγωγή του αγνώστου,
- να καταστρώνουν την εξίσωση, δηλαδή να «μεταφράζουν» το πρόβλημα σε μαθηματική γλώσσα,
- να επιλύουν την εξίσωση και να ελέγχουν αν το αποτέλεσμα είναι «συμβατό» με το πρόβλημα,
- να καταγράφουν την απάντηση.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ. 30 Άσκηση 7

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 2

1. Σελ. 30 Μικροπείραμα άσκησης 2^{ης} – ερώτημα 2^ο
2. Σελ. 30 Μικροπείραμα άσκησης 7^{ης}

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.5 Ανισώσεις α' βαθμού

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ. 37 Άσκηση 11- Διδακτικοί στόχοι: Οι μαθητές επιδιώκεται: α) να λύνουν ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο και να παριστάνουν τις λύσεις σε άξονα, β) να βρίσκουν τις κοινές λύσεις δύο ή περισσότερων ανισώσεων α' βαθμού και γ) να λύνουν απλά προβλήματα που ανάγονται σε ανισώσεις α' βαθμού.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ:1

1. Σελ. 37 Μικροπείραμα άσκησης 11 Διδακτικοί στόχοι: Οι μαθητές επιδιώκεται εποπτικά: α) να λύνουν ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο και να παριστάνουν τις λύσεις σε άξονα, β) να βρίσκουν τις κοινές λύσεις δύο ή περισσότερων ανισώσεων α' βαθμού και γ) να λύνουν απλά προβλήματα που ανάγονται σε ανισώσεις α' βαθμού.

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.2.1 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ: Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να γνωρίζουν την έννοια του συμβόλου \sqrt{a} , με $a \geq 0$,
- να υπολογίζουν τετραγωνικές ρίζες θετικών αριθμών με δοκιμές και με τη βοήθεια ενός υπολογιστή τσέπης.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ.41 Δραστηριότητα 1

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ:1

1. Σελ.41 Μικροπείραμα δραστηριότητας 1

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.2.2 Άρρητοι αριθμοί-Πραγματικοί αριθμοί

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ: Οι μαθητές επιδιώκεται: α) να γνωρίζουν ότι υπάρχουν αριθμοί που δεν μπορούν να γραφούν με τη μορφή a/b , όπου a, b ακέραιοι και $b \neq 0$, β) να γνωρίζουν ότι οι άρρητοι αριθμοί δεν είναι μόνο οι θετικές ή οι αρνητικές ρίζες θετικών ακεραίων ή ρητών. Για παράδειγμα, άρρητοι αριθμοί είναι και οι: $1 + \sqrt{2}$, $-3\sqrt{2}$, $5/\sqrt{3}$, $2,101001000100001\dots$, γ) να γνωρίζουν ποιοι αριθμοί αποτελούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ:1

1. Σελ. 48 Άσκηση 5

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 2

1. Σελ. 45 Μικροπείραμα 1^0 –Δραστηριότητα 1^n
2. Σελ. 48 Μικροπείραμα Άσκησης 5^{n5}

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.2.3 Προβλήματα

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ: Οι μαθητές επιδιώκεται να μπορούν να καταστρώνουν και να επιλύουν προβλήματα στα οποία εμφανίζονται άρρητοι αριθμοί.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 3

1. Σελ. 51 Ασκήσεις 1 και 2
2. Σελ. 52 Άσκηση 8

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ. 51 Μικροπείραμα άσκησης 6 – ερώτημα 2^0

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α. 3.1 Η έννοια της συνάρτησης

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 4

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ: Οι μαθητές επιδιώκεται να εκφράζουν ένα μέγεθος ως συνάρτηση ενός άλλου, εφόσον αυτό είναι δυνατόν.

1. Σελ. 56 Ερώτηση κατανόησης 3
2. Σελ. 57 Ερώτηση κατανόησης 4

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ: Οι μαθητές επιδιώκεται να εκφράζουν ένα μέγεθος ως συνάρτηση ενός άλλου, εφόσον αυτό είναι δυνατόν και να συμπληρώνουν τον πίνακα τιμών μιας συνάρτησης.

3. Σελ. 57 Ασκήσεις 5 και 6

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 1

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ: Οι μαθητές επιδιώκεται να εκφράζουν ένα μέγεθος ως συνάρτηση ενός άλλου, εφόσον αυτό είναι δυνατόν και να συμπληρώνουν τον πίνακα τιμών μιας συνάρτησης.

1. Σελ. 57 Μικροπείραμα 2^ο Άσκησης 5^{ης}

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.3.5 Η συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$ - Η Υπερβολή

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ: Οι μαθητές επιδιώκεται: α) να προσδιορίζουν τη σχέση που συνδέει δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά, β) να γνωρίζουν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = a/x$ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων και άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων και να μπορούν επίσης να τη σχεδιάζουν, γ) να γνωρίζουν το ρόλο του a για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = a/x$.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ. 82 Άσκηση 5

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 2

1. Σελ. 82 Μικροπειράματα 1^ο και 2^ο Άσκησης 5

ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.1.1 Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ: Οι μαθητές επιδιώκεται να κατανοήσουν την έννοια του εμβαδού και ότι αυτό εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιείται κάθε φορά. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις: • Η έννοια του εμβαδού προτείνεται να γίνει κατανοητή μέσα από τη σύγκριση με τη μονάδα μέτρησης. • Η κατανόηση του υπολογισμού εμβαδών αξίζει να επιτευχθεί από το χωρισμό ή τη συμπλήρωση επιφανειών που αναδεικνύουν τη Γεωμετρία. Οι αλγεβρικές πράξεις καλό είναι να αποφεύγονται όσο γίνεται περισσότερο.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 6

1. Σελ. 113 Δραστηριότητα 1
2. Σελ. 114 Εφαρμογές 1 και 2
3. Σελ. 115 Ασκήσεις 1,2 και «ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ»

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 8

1. Σελ. 113 Μικροπειράματα 1 και 2 Δραστηριότητας 1
2. Σελ. 114 Μικροπειράματα 1 και 2 Εφαρμογής 1
3. Σελ. 114 Μικροπειράματα 1 και 2 Εφαρμογής 2
4. Σελ. 115 Μικροπείραμα Άσκησης 2
5. Σελ. 115 Μικροπείραμα « ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ»

ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.1.2 Μονάδες μέτρησης επιφανειών

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ: Οι μαθητές επιδιώκεται να εξοικειωθούν με τις μονάδες μέτρησης εμβαδού και να μπορούν να μετατρέπουν μονάδες από μικρότερες σε μεγαλύτερες και αντίστροφα.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 10

1. Σελ. 117 Εφαρμογές 1,2 και Ερώτηση κατανόησης 1
2. Σελ. 118 Ερώτηση κατανόησης 2 και Ασκήσεις 1,2,3,4,5 και 6.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 0

ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.1.3 Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ: Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να γνωρίζουν τους τύπους υπολογισμού εμβαδών επίπεδων σχημάτων,
- να μπορούν να αποδείξουν τους τύπους των εμβαδών συνδέοντάς τους με την κατάλληλη σειρά,
- να μπορούν να εφαρμόζουν συνδυαστικά τους τύπους σε αντίστοιχα προβλήματα.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 26

1. Σελ. 121 Εφαρμογές 1,2 και 3 (υπολογισμός εμβαδού ορθογωνίου και τετραγώνου)
2. Σελ. 122 Εφαρμογές 4,5 και 6 (υπολογισμός εμβαδού ορθογωνίου και τραπεζίου)
3. Σελ. 123 Ερωτήσεις Κατανόησης 1 και 2
4. Σελ. 124 Ασκήσεις 1,2,3,4,5 και 6
5. Σελ. 125 Ασκήσεις 7,8,9,10,11,12 και 13
6. Σελ. 126 Ασκήσεις 14, 15, 16, 17 και ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ»

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 10

1. Σελ. 119 Μικροπειράματα 1 και 2 «εμβαδόν ορθογωνίου»
2. Σελ. 119 Μικροπείραμα «Εμβαδόν παραλληλογράμμου»
3. Σελ. 120 Μικροπείραμα «Εμβαδόν τυχαίου τριγώνου»
4. Σελ. 120 Μικροπειράματα 1 και 2 «Εμβαδόν τραπεζίου»
5. Σελ. 121 Μικροπείραμα Εφαρμογής 2
6. Σελ. 124 Μικροπείραμα Άσκησης 3
7. Σελ. 125 Μικροπείραμα Άσκησης 10
8. Σελ. 126 Μικροπείραμα Άσκησης 15

ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.1.4 Πυθαγόρειο θεώρημα

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ: Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να γνωρίζουν το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του,
- να επιλύουν προβλήματα με τη χρήση του Πυθαγόρειου θεωρήματος,
- να ελέγχουν αν ένα τρίγωνο με γνωστές πλευρές είναι ορθογώνιο.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 5

1. Σελ. 127 Δραστηριότητα 1 (Η εισαγωγή του Πυθαγόρειου θεωρήματος, μετά την έννοια του εμβαδού)
2. Σελ. 130 Άσκηση 1 (Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση του Πυθαγόρειου θεωρήματος και των εμβαδών)
3. Σελ. 131 Ασκήσεις 4,5 και 7

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 4

1. Σελ. 127 Μικροπειράματα 1 και 2 Δραστηριότητας
2. Σελ. 128 Μικροπείραμα 1^ο «Το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος»
3. Σελ. 130 Μικροπείραμα Άσκησης 5

ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.2.4 Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30°, 45° και 60°

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ: Οι μαθητές επιδιώκεται να χρησιμοποιούν το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη γνωστών γωνιών για να υπολογίζουν το ύψος και το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ:1

1. Σελ. 153 Εφαρμογή 2

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 0**ΕΝΟΤΗΤΑ: Β. 3.5 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου**

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ: Οι μαθητές επιδιώκεται να κατανοήσουν τον υπολογισμό του εμβαδού κυκλικού δίσκου και να μπορούν να εφαρμόζουν κατάλληλα τον τύπο.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ:16

1. Σελ. 193 Εφαρμογές 1 (σύνδεση μήκους και εμβαδού κύκλου) και 2 (Κυκλικός Δακτύλιος)
2. Σελ. 194 Εφαρμογή 3
3. Σελ. 194 Ερωτήσεις Κατανόησης 1,2 (σύνδεση μήκους και εμβαδού κύκλου), 3,4 (υπολογισμός του εμβαδού κυκλικού δίσκου και εφαρμογή κατάλληλα τον τύπο)

4. Σελ. 194 Ερώτηση Κατανόησης 5(υπολογισμός του εμβαδού κυκλικού δίσκου και εφαρμογή κατάλληλα τον τύπο)
5. Σελ. 195 Ασκήσεις 1,2,3,4,5,6,7 και 8

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 5

1. Σελ. 193 Μικροπειράματα 1 και 2
2. Σελ.194 Μικροπείραμα Εφαρμογής 3
3. Σελ. 195 Μικροπείραμα Άσκησης 2
4. Σελ. 195 Μικροπείραμα Άσκησης 7

ΕΝΟΤΗΤΑ: Β. 3.6 Εμβαδόν κυκλικού τομέα

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ: Οι μαθητές επιδιώκεται να υπολογίζουν το εμβαδόν κυκλικού τομέα, όταν δίνεται η ακτίνα του κύκλου και το μέτρο του αντίστοιχου τόξου σε μοίρες ή σε ακτίνια.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 16

1. Σελ. 196 Δραστηριότητα 1 και Εφαρμογή 1
2. Σελ. 197 Εφαρμογή 2, Ερωτήσεις Κατανόησης 1,2,3,4 και 5, Ασκήσεις 1 και 2
3. Σελ.198 Ασκήσεις 3,4,5,6,7 και 8

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 4

1. Σελ. 196 Μικροπείραμα
2. Σελ. 198 Μικροπείραμα Άσκησης 6 και Μικροπειράματα 1 και 2 Άσκησης 7

ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.4.2 Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ: Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να αναγνωρίζουν αν ένα στερεό είναι πρίσμα και το είδος του πρίσματος,
- να υπολογίζουν το εμβαδόν της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας πρίσματος,
- να αναγνωρίζουν αν ένα στερεό είναι κύλινδρος και να υπολογίζουν το εμβαδόν της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας κυλίνδρου.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 15

1. Σελ. 208 Εφαρμογή 1 και 2 (ΠΡΙΣΜΑ)
2. Σελ. 209 Εφαρμογή 3 (ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ) και 4
3. Σελ. 210 Ερώτηση Κατανόησης 2 (ΠΡΙΣΜΑ) και 3 (ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ)/ Ασκήσεις 1,2,3 (ΠΡΙΣΜΑ)
4. Σελ. 211 Ασκήσεις 1 (ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ), 2 (ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ ΠΡΙΣΜΑ), 6 (ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ), 7, 8 και 9 (ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ).

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 2

1. Σελ. 208 Μικροπείραμα Εφαρμογής 1 (ΠΡΙΣΜΑ)
2. Σελ. 209 Μικροπείραμα Εφαρμογής 3 (ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ)

ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.4.3 Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ: Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να γνωρίζουν τις μονάδες μέτρησης όγκου στο δεκαδικό μετρικό σύστημα, τις μεταξύ τους σχέσεις και το συμβολισμό τους,
- να υπολογίζουν τον όγκο πρίσματος και κυλίνδρου.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ:13

1. Σελ. 213 Εφαρμογές 1 και 2 (ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ)
2. Σελ. 214 Εφαρμογή 3 (ΠΡΙΣΜΑ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ)
Ερωτήσεις κατανόησης 1 (ΠΡΙΣΜΑ), 2 και 3 (ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ)
3. Ασκήσεις 1,2,3 και 4 (ΠΡΙΣΜΑ) και 5,6 και 7 (ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ)

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ. 214 Μικροπείραμα Ερώτησης Κατανόησης 3 (ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ)

ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.4.4 Η πυραμίδα και τα στοιχεία της**ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ:** Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να αναγνωρίζουν τα στοιχεία της πυραμίδας και το είδος της,
- να υπολογίζουν το εμβαδόν της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας κανονικής πυραμίδας,
- να υπολογίζουν τον όγκο μίας πυραμίδας.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 15

1. Σελ. 219 Εφαρμογές 1 και 2
2. Σελ. 220 Εφαρμογές 3 και 4
3. Σελ. 221 Ερώτηση Κατανόησης 7
4. Σελ. 222 Ασκήσεις 1,2,3,4,5,6,7,8,9 και 10

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 2

1. Σελ. 220 Μικροπείραμα Εφαρμογής 3
2. Σελ. 222 Μικροπείραμα Άσκησης 4

ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.4.5 Ο κώνος και τα στοιχεία του**ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ:** Οι μαθητές επιδιώκεται να υπολογίζουν το εμβαδόν της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας κώνου.**ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 19**

1. Σελ. 225 Εφαρμογές 1,2 και 3
2. Σελ. 226 Εφαρμογή 4 και Ερωτήσεις Κατανόησης 6,7,8,9 και 10
3. Σελ. 227 Ασκήσεις 1,2,3,4,5,6,7,8,9 και 10

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 3

1. Σελ. 224 Μικροπείραμα
2. Σελ. 225 Μικροπείραμα Εφαρμογής 3
3. Σελ. 226 Μικροπείραμα Ερώτησης Κατανόησης 9

ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.4.6 Η σφαίρα και τα στοιχεία της**ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ:** Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να κατανοήσουν τον ορισμό της σφαίρας και ως στερεό εκ περιστροφής και ως γεωμετρικό τόπο,
- να αναγνωρίζουν τα στοιχεία της σφαίρας,
- να υπολογίζουν το εμβαδόν της επιφάνειας συγκρίνοντάς την με την παράπλευρη επιφάνεια κυλίνδρου.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 17

1. Σελ. 229 Εφαρμογή 1
2. Σελ. 230 Εφαρμογές 2,3,4 και Ερωτήσεις Κατανόησης 1,2 και 5
3. Σελ. 231 Ερωτήσεις Κατανόησης 9, 10
Ασκήσεις 1 και 2
4. Σελ 232 Ασκήσεις 3,4,5,6,7 και 8

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 0**Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ****ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς (επαναλήψεις – συμπληρώσεις)****ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 5**

1. Σελ. 19 Άσκηση 5- Διδακτικός στόχος: Οι μαθητές να εμπεδώσουν τις τεχνικές των τεσσάρων πράξεων μεταξύ πραγματικών αριθμών και τις βασικές ιδιότητές τους, ώστε να μπορούν να τις αξιοποιούν στο λογισμό.
2. Σελ. 22 Παραδείγματα-Εφαρμογές 4- Διδακτικός στόχος: Οι μαθητές να εμπεδώσουν τις τεχνικές των τεσσάρων πράξεων μεταξύ πραγματικών αριθμών και τις βασικές ιδιότητές τους, ώστε να μπορούν να τις αξιοποιούν στο λογισμό.
3. Σελ. 23 Άσκηση 4 και Ερώτηση Κατανόησης 5- Διδακτικός στόχος: Οι μαθητές πρέπει με απλά παραδείγματα: • Να θυμηθούν τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας και τις άμεσες συνέπειές του. • Να γνωρίζουν τις ιδιότητες των ριζών, να μπορούν να τις αποδεικνύουν και να μάθουν να τις χρησιμοποιούν.
4. Σελ. 24 Άσκηση 9- Διδακτικός στόχος: Η χρησιμότητα των ιδιοτήτων των ριζών θα αναδειχθεί στην προσπάθεια λύσης συγκεκριμένων προβλημάτων

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 5

1. Σελ. 19 Μικροπείραμα Άσκησης 5
2. Σελ. 22 Μικροπείραμα Παραδείγματος-Εφαρμογής 4
3. Σελ. 23 Μικροπείραμα Άσκησης 4
4. Σελ. 24 Μικροπείραμα 1^ο και 2^ο Άσκησης 9

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.2 Μονώνυμα - Πράξεις με μονώνυμα

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 7

1. Σελ. 25 Δραστηριότητα- Διδακτικός στόχος: Με τη βοήθεια των γνωστών τύπων του εμβαδού και της περιμέτρου του ορθογωνίου και του τετραγώνου εισάγονται οι έννοιες της αλγεβρικής παράστασης και του μονωνύμου. Δίνεται ακόμα η ευκαιρία να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια της αριθμητικής τιμής μιας παράστασης. Με τον τρόπο που είναι διαρθρωμένη η δραστηριότητα, δίνεται η δυνατότητα να διαπιστωθεί η ομοιότητα - διαφορά μεταξύ αριθμητικής και αλγεβρικής παράστασης και η αλληλεπίδραση μεταξύ των τιμών των μεταβλητών και της αριθμητικής τιμής μιας παράστασης (δεδομένα -τελικό αποτέλεσμα).
2. Σελ. 27 Παράδειγμα- Εφαρμογή 3- Διδακτικός στόχος: Με τη βοήθεια των γνωστών τύπων του εμβαδού εισάγονται οι έννοιες της αλγεβρικής παράστασης και του μονωνύμου.
3. Σελ. 29 Ασκήσεις 5 και 7- Διδακτικός στόχος: Οι μαθητές πρέπει να μάθουν να βρίσκουν την αριθμητική τιμή μιας παράστασης, να διακρίνουν πότε μια παράσταση είναι μονώνυμο και να προσδιορίζουν τον βαθμό του.
4. Σελ.31 Παράδειγμα- Εφαρμογή 3- Διδακτικός στόχος: Με τη βοήθεια των γνωστών τύπων του εμβαδού οι μαθητές πρέπει να μάθουν να προσθέτουν, να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν μονώνυμα.
5. Σελ. 32 Ασκήσεις 5 και 6- Διδακτικός στόχος: Με τη βοήθεια των γνωστών τύπων του εμβαδού οι μαθητές πρέπει να μάθουν να προσθέτουν, να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν μονώνυμα.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 4

1. Σελ. 27 Μικροπείραμα Παράδειγμα- Εφαρμογή 3
2. Σελ. 29 Μικροπείραμα Άσκησης 7
3. Σελ. 31 Μικροπείραμα Παράδειγμα- Εφαρμογή 3
4. Σελ. 32 Μικροπείραμα Άσκησης 6

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.3 Πολυώνυμα - Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ. 36 Άσκηση 4- Διδακτικός στόχος: Να χρησιμοποιούν την αναγωγή ομοίων όρων για την απλούστερη γραφή μιας αλγεβρικής παράστασης, να μάθουν να προσθέτουν και να αφαιρούν πολυώνυμα.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 0

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 5

1. Σελ. 39 Παράδειγμα-Εφαρμογή 2- Διδακτικός στόχος: Να μάθουν οι μαθητές να πολλαπλασιάζουν μονώνυμο με πολυώνυμο και πολυώνυμο με πολυώνυμο.
2. Σελ. 40 Ερωτήσεις Κατανόησης 4 και 5- Διδακτικός στόχος: Με τη βοήθεια των γνωστών τύπων του εμβადού οι μαθητές πρέπει να μάθουν να πολλαπλασιάζουν μονώνυμο με πολυώνυμο και πολυώνυμο με πολυώνυμο.
3. Σελ. 41 Ασκήσεις 7 και 8- Διδακτικός στόχος: Με τη βοήθεια των γνωστών τύπων του εμβადού οι μαθητές πρέπει να μάθουν να πολλαπλασιάζουν μονώνυμο με πολυώνυμο και πολυώνυμο με πολυώνυμο.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 3

1. Σελ. 38 Μικροπείραμα 2^ο «Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου με πολυώνυμο»
2. Σελ. 40 Μικροπείραμα Ερώτησης Κατανόησης 5
3. Σελ. 41 Μικροπείραμα Άσκησης 7

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 4

1. Σελ. 42 Δραστηριότητα- Διδακτικός στόχος: Με τη δραστηριότητα δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να θυμηθούν την έννοια της ταυτότητας και να γνωρίσουν την ταυτότητα $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ μέσα από τη γεωμετρική ερμηνεία της.
2. Σελ. 45 Παράδειγμα-Εφαρμογή 3 - Διδακτικός στόχος: Με τη βοήθεια των γνωστών τύπων του εμβადού οι μαθητές να γνωρίζουν πότε μια ισότητα λέγεται ταυτότητα, ποιές είναι οι βασικές ταυτότητες (διαφορά τετραγώνων), τις οποίες να μπορούν να τις αποδεικνύουν και να τις χρησιμοποιούν.
3. Σελ. 50 Άσκηση 17β - Διδακτικός στόχος: Με τη βοήθεια των γνωστών τύπων του εμβადού οι μαθητές να αποδεικνύουν άλλες απλές ταυτότητες.
4. Σελ. 51 Άσκηση 18- Διδακτικός στόχος: Με τη βοήθεια των γνωστών τύπων του εμβადού οι μαθητές να αποδεικνύουν άλλες απλές ταυτότητες.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 11

1. Σελ. 43 Μικροπειράματα 1^ο, 2^ο και 3^ο «Τετράγωνο αθροίσματος» (Γεωμετρική ερμηνεία της συγκεκριμένης ταυτότητας).
2. Σελ. 43 Μικροπειράματα 1^ο και 2^ο «Τετράγωνο διαφοράς» (Γεωμετρική ερμηνεία της συγκεκριμένης ταυτότητας).
3. Σελ. 44 Μικροπειράματα 1^ο, 2^ο και 3^ο «Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά» (Γεωμετρική ερμηνεία της συγκεκριμένης ταυτότητας).
4. Σελ. 45 Μικροπείραμα 2^ο από Παράδειγμα-Εφαρμογή 1
5. Σελ. 49 Μικροπειράματα 1^ο και 2^ο Άσκησης 1 «Τετράγωνο αθροίσματος»

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 6

1. Σελ. 53 Δραστηριότητα- Διδακτικός στόχος: Δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να διαπιστώσουν ότι σε ορισμένες περιπτώσεις είναι απαραίτητος ο μετασχηματισμός μιας παράστασης από άθροισμα σε γινόμενο. Στο δεύτερο ερώτημα μέσα από ένα

πρόβλημα και με τη βοήθεια της γνωστής ταυτότητας $R^2 - \rho^2 = (R + \rho)(R - \rho)$ θα διαπιστώσουν τη χρησιμότητα της παραγοντοποίησης στον υπολογισμό της αριθμητικής τιμής μιας παράστασης.

2. Σελ. 58 Παράδειγμα-Εφαρμογή 2- Διδακτικός στόχος: μετασχηματισμός μιας παράστασης από άθροισμα σε γινόμενο.
3. Σελ. 59 Ερώτηση Κατανόησης 5
4. Σελ. 62 Ασκήσεις 17, 18 και 24- Διδακτικός στόχος: μετασχηματισμός μιας παράστασης από άθροισμα σε γινόμενο.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 3

1. Σελ. 57 Μικροπείραμα «Παραγοντοποίηση τριωνύμου της μορφής $x^2 + (a + b)x + ab$
2. Σελ. 58 Μικροπείραμα από Παράδειγμα-Εφαρμογή 2
3. Σελ. 62 Μικροπείραμα Άσκησης 18

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.7 Διαίρεση πολυωνύμων

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ. 67 Άσκηση 11- Διδακτικός στόχος: Με τη βοήθεια των γνωστών τύπων του εμβαδού οι μαθητές να μάθουν να βρίσκουν το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης δυο πολυωνύμων και να γράφουν την αντίστοιχη ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 0

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ. 79 Παράδειγμα-Εφαρμογή 2 - Διδακτικός στόχος: Με τη βοήθεια των γνωστών τύπων του εμβαδού οι μαθητές να μάθουν να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν ρητές παραστάσεις.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 0

ΕΝΟΤΗΤΑ: ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ.82 Άσκηση 10 (ΚΥΚΛΟΣ)

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 0

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ. 89 Δραστηριότητα - Διδακτικός στόχος: Με τη δραστηριότητα, δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να ασχοληθούν μ' ένα πρόβλημα με το οποίο καταλήγουν και στις τρεις μορφές της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ [$x^2 = 9$, $(x + 3)^2 = 9(x + 1)$, $(x + 3)^2 + 9(x + 1) = 34$ ή αντιστοίχως $x^2 - 9 = 0$, $x^2 - 3x = 0$, $x^2 + 15x - 16 = 0$].

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 4

1. Σελ. 90 Μικροπείραμα «Επίλυση εξίσωσης της μορφής $ax^2 + bx = 0$ με $a \neq 0$ ».
2. Σελ. 91 Μικροπείραμα «Επίλυση εξίσωσης της μορφής $ax^2 + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ ».
3. Σελ. 92 Μικροπείραμα Παράδειγμα-Εφαρμογή 1
4. Σελ. 97 Μικροπείραμα Άσκησης 1

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.2.3 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 7

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ: Στόχος στην ενότητα αυτή είναι να ασχοληθούν οι μαθητές με τη λύση προβλημάτων τα οποία ανάγονται σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού, αξιοποιώντας τις γνώσεις προηγούμενων ενοτήτων ή για να εξοικειωθούν οι μαθητές με την μαθηματοποίηση των προβλημάτων (την επιλογή των άγνωστων και την κατάστροψη της εξίσωσης του προβλήματος).

1. Σελ. 99 Πρόβλημα 1
2. Σελ. 101 Ασκήσεις 1,3 και 4
3. Σελ.102 Ασκήσεις 10,11 και 12

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 3

1. Σελ. 99 Μικροπείραμα Προβλήματος 1
2. Σελ. 101 Μικροπείραμα Άσκησης 4
3. Σελ.102 Μικροπείραμα Άσκησης 11

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.2.5 Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ 114 Παράδειγμα-Εφαρμογή 2 (Πολλαπλασιασμός ανισοτήτων κατά μέλη).

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 0

ΕΝΟΤΗΤΑ: ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ. 118 Άσκηση 8

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ. 118 Μικροπείραμα Άσκησης 8

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 2

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ: Να τονιστεί ότι η λύση μιας γραμμικής εξίσωσης $ax + by = \gamma$ δεν είναι ένας αριθμός, αλλά ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών και να προσδιοριστούν οι συντεταγμένες δύο σημείων της.

1. Σελ. 127 Ασκήσεις 3 και 5

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ. 127 Μικροπείραμα Άσκησης 3

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ. 130 Παράδειγμα-Εφαρμογή 1 – Διδακτικός στόχος: Να επιλύουν γραφικά ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και να κατανοήσουν πότε έχει μια λύση.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ:0

ΕΝΟΤΗΤΑ: ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 2

1. Σελ. 140 Άσκηση 8 (ΚΥΚΛΟΣ)
2. Σελ. 141 Άσκηση 13 (ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ)

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 0

ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.4.1 Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a \neq 0$ **ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 1**

1. Σελ. 144 Δραστηριότητα Ερώτημα 1 – Διδακτικός στόχος: Με τη δραστηριότητα δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να γνωρίσουν μερικές εκφράσεις που οδηγούν σε συναρτήσεις της μορφής $y = ax^2$, $a \neq 0$.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 0**ΕΝΟΤΗΤΑ: Α.4.2 Η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$** **ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 1**

1. Σελ. 156 Άσκηση 6 (Σ.Τ. με τους άξονες και εύρεση εμβαδού τριγώνου)

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 0**ΕΝΟΤΗΤΑ: ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑΣ****ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 3**

1. Σελ. 157 Ασκήσεις 5 (ορθογώνιο τρίγωνο), 6 (ορθογώνιο) και 7 (τετράγωνο).

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ. 157 Μικροπείραμα Άσκησης 6

ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.1.4 Ομοιοθεσία**ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ:** Οι μαθητές πρέπει:

- Να μάθουν να βρίσκουν το ομοιόθετο ενός σημείου με κέντρο O και λόγο έναν οποιοδήποτε θετικό αριθμό, ώστε να μπορούν να βρίσκουν στη συνέχεια το ομοιόθετο οποιοδήποτε γεωμετρικού σχήματος.
- Να γνωρίζουν ότι η τιμή του λ καθορίζει, αν το ομοιόθετο ενός σχήματος είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση.
- Να συνειδητοποιήσουν ότι το ομοιόθετο ενός σχήματος, αφού είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνσή του έχει την ίδια μορφή με το αρχικό.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ. 213 Άσκηση 4 (ΚΥΚΛΟΣ)

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 0**ΕΝΟΤΗΤΑ: Β.1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων****ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ:** Οι μαθητές πρέπει:

- Να γνωρίζουν ότι ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.
- Να γνωρίζουν ότι αν όλες οι πλευρές ενός πολυγώνου πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό λ και οι γωνίες του μείνουν αμετάβλητες τότε το εμβαδόν του πολλαπλασιάζεται επί λ^2 .

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 16

1. Σελ. 225 Δραστηριότητα (ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ). Με τη δραστηριότητα δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να υπολογίσουν τα εμβαδά δύο ομοίων σχημάτων και να ανακαλύψουν την ισότητα του λόγου των εμβαδών τους με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. Οι πραγματικές διαστάσεις του γηπέδου είναι 30m και 15 m, τα εμβαδά τους είναι $0,18 \text{ m}^2$ και 450 m^2 οπότε $0,18/450 = (1/50)^2$.
2. Σελ. 226 Παραδείγματα-Εφαρμογές 1 (ΤΡΙΓΩΝΟ) και 2 (ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ)
3. Σελ. 227 Ερωτήσεις Κατανόησης 1 (ΤΡΙΓΩΝΟ & ΠΑΡΑΛ/ΜΟ), 2 και 3.
4. Σελ. 227-228 Ασκήσεις 1,2,3,4,6,7 (ΤΡΙΓΩΝΟ), 5 (ΤΡΙΓΩΝΟ & ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ), 8,10 (ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ) και 9 (ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ).

Διδακτικές οδηγίες

- Με απλά αριθμητικά παραδείγματα να αντιληφθούν οι μαθητές ότι αν διπλασιάσουν, τις πλευρές ενός τετραγώνου ή ενός ορθογωνίου το εμβαδόν του δεν διπλασιάζεται αλλά τετραπλασιάζεται (ερωτήσεις κατανόησης 2α, 2β).
- Να μπορούν να προσδιορίσουν τη σχέση μεταξύ των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων αν γνωρίζουν το λόγο ομοιότητας τους (ερωτήσεις κατανόησης 1, 3)
- Να δοθούν παραδείγματα τα οποία να αναφέρονται στην κλίμακα ενός σχεδίου ή ενός χάρτη.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ. 228 Μικροπείραμα Άσκησης 10

ΕΝΟΤΗΤΑ: ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 5

1. Σελ. 229 Άσκηση 6 (ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟ), 7 & 8 (ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ).
2. Σελ. 230 Άσκηση 9 (ΤΡΙΓΩΝΟ) Άσκηση 10 (ΤΡΙΓΩΝΟ & ΤΡΑΠΕΖΙΟ).

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 0

ΕΝΟΤΗΤΑ: ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΡΓΩΝ: 1

1. Σελ. 252 Άσκηση 5 (ΤΡΙΓΩΝΟ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΥΠΟΥ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ)

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ: 0