ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΑΩΓΗΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

από την
Καραφέρη Μαρία-Δήμητρα
(Α.Μ. 4282014015)

ΘΕΜΑ: «Οι συμμιγείς αριθμοί στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση: Η μέτρηση του χρόνου»

ΜΕΛΗ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ

Καλαβάσης Φραγκίσκος	Καθηγητής	ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ	Επιβλέπων
Δημητρακοπούλου Αγγελική	Καθηγήτρια	ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ	Μέλος
Σκουμιός Μιχαήλ	Επίκουρος Καθηγητής	ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ	Μέλος

ΡΟΔΟΣ, 2016

Η έγκριση της παρούσης Διπλωματικής Εργασίας στο πλαίσιο του Π.Μ.Σ. «Διδακτική Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση: Διεπιστημονική Προσέγγιση» του Τμήματος Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού του Πανεπιστημίου Αιγαίου δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων της συγγραφέως»

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ . Καλαβάση Φραγκίσκο για την πολύτιμη βοήθειά του στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη Γραμματεία του μεταπτυχιακού και ιδιαίτερα την κ. Ευσταθίου Σεβαστή, καθώς μας ενημέρωνε σε ό,τι χρειαζόμασταν κατά τη διάρκεια της φοίτησης αλλά και της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συμφοιτητές και τις συμφοιτήτριές μου, όπως και όλους τους καθηγητές και τις καθηγήτριες του μεταπτυχιακού προγράμματος για την εξαιρετική συνεργασία και τις πολύτιμες συζητήσεις κατά τη διάρκεια των μαθημάτων.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα πινάκων

Περιεχόμενα εικόνων

Εισαγωγή

Οι παρανοήσεις των μαθητών/τριών σε μια έννοια έχουν απασχολήσει την επιστημονική κοινότητα (Smith et al, 1993), καθώς οι νέες θεωρίες μάθησης, όπως ο κονστρουκτιβισμός, απαιτούν τη γνώση αυτών των παρανοήσεων, για την αποτελεσματικότερη διεξαγωγή της διδασκαλίας και κατ' επέκταση της μάθησης. Ο Κουλαϊδής (2001) αναφέρει ότι στη διδασκαλία εμπλέκονται τρία διακριτά σώματα γνώσης: η επιστημονική γνώση, η σχολική γνώση και η καθημερινή-βιωματική γνώση (παρανοήσεις). Γίνεται φανερό πως οι παρανοήσεις αποτελούν εφαλτήριο δύναμη για την αρχή της επιστημονικής έρευνας. Στη μελέτη αυτή εξεταζόμενη έννοια είναι αυτή του συμμιγούς αριθμού, η οποία αποτελεί μέρος της σχολικής ύλης των Μαθηματικών και του Περιβάλλοντος στο Δημοτικό σχολείο. Ο συμμιγής αριθμός ορίζεται μέσα σε ένα ευρύτερο πλαίσιο συναφών εννοιών με σημείο αναφοράς την καθημερινή ζωή. Τέτοιες έννοιες είναι οι δεκαδικοί αριθμοί, τα συστήματα αρίθμησης, τα μετρικά συστήματα και η μέτρηση του χρόνου.

Στην εργασία μας θα ισχυριστούμε πως σε αυτήν ακριβώς την πολλαπλή εσωτερική αναφορά οφείλονται οι περισσότερες δυσκολίες της κατανόησης και της διδακτικής τους παρουσίασης.

Οι δεκαδικοί αριθμοί περιλαμβάνουν τις υποδιαιρέσεις της μονάδας των ακεραίων αριθμών ακέραιου σε δυνάμεις του 10. Συνιστούν από τον 17ο αιώνα έως σήμερα τον κυρίαρχο τρόπο γραφής των ρητών αριθμών, αρχικά μόνον εκείνων που μπορούν να αναχθούν σε κλασματικές μορφές με παρονομαστή πολλαπλάσια του 2 και του 5.

Τα συστήματα αρίθμησης είναι συστήματα γραφής και συμβολικής έκφρασης των αριθμών που συνήθως προσδιορίζονται από την βάση (όπως η βάση 10 του δεκαδικού συστήματος) και από την αξία θέσης των ψηφίων (πχ η γραφή 21 αντιστοιχεί σε διαφορετικό αριθμό από την γραφή 12).

Αυτές οι έννοιες προσεγγίζονται καταρχήν από το πεδίο των Μαθηματικών αλλά έχουν σαφείς κοινωνικές και πολιτισμικές διαστάσεις.

Αντίστοιχες διαστάσεις έχει και η έννοια των μετρικών συστημάτων, τα οποία προσδιορίζουν τις συμβατικές μονάδες των φυσικών μεγεθών που θα χρησιμοποιηθούν για τη μέτρηση των χαρακτηριστικών τους ή των φαινομένων στα οποία αναφέρονται. Εδώ παρατηρούμε την σύνθεση των Μαθηματικών με το πεδίο των Φυσικών Επιστημών, το οποίο ασχολείται με την έννοια της μέτρησης του χρόνου και με τον εννοιολογικό προσδιορισμό των μετρικών συστημάτων.

Η μέτρηση του χρόνου αποτελεί μια κοινωνική ανάγκη, η οποία αποδεικνύεται από την καθημερινή απαίτηση προσδιορισμού του χρόνου για τις καθημερινές δραστηριότητες. Από την αρχαιότητα οι πολιτισμοί και οι ανθρώπινες κοινωνίες προσπαθούσαν να μετρούν τον χρόνο αξιοποιώντας την περιοδικότητα στις αστρονομικές και κλιματολογικές τους παρατηρήσεις. Στο συνδυασμό αυτών των παρατηρήσεων οφείλεται εν πολλοίς η επινόηση του εξηκονταδικού συστήματος, το οποίο χρησιμοποιείται έως και σήμερα.

Τα μετρικά συστήματα έχοντας την απαίτηση για σταθερές μονάδες χρησιμοποίησαν αρχικά επαναλαμβανόμενες ανάγκες του ανθρώπινου σώματος, όπως το αίσθημα της πείνας και της κούρασης (The State of Quennsland, 2005). Στη συνέχεια, χρησιμοποιήθηκαν άλλες μονάδες (κλεψύδρες κ.α.) περισσότερο σταθερές μέχρι να συμφωνηθεί στη Διεθνή διάσκεψη Μέτρων και Σταθμών ως μονάδα μέτρησης του χρόνου το δευτερόλεπτο (Ελληνικό Ινστιτούτο Μετρολογίας). Τα μετρικά συστήματα, τα συστήματα αρίθμησης, η μέτρηση του χρόνου και τα μαθηματικά της καθημερινής ζωής προσδίδουν μια ιστορικο-κοινωνική πτυχή στη μελέτη. Συνεπώς, η ποικιλία εννοιών και κατ' επέκταση οι επιστήμες που εμπλέκονται για τον προσδιορισμό της έννοιας του συμμιγούς αριθμού καθιστούν το θέμα διεπιστημονικό. Μια άλλη πτυχή των δυσκολιών κατανόησης και διδακτικής παρουσίασης των συμμιγών αριθμών που θα μελετήσουμε στην εργασία μας είναι η ταυτόχρονη εννοιολογική σύμπτυξη και τεχνική αποκόλληση του καθαρού αριθμητικού μέρους του συμμιγούς από την φυσική μονάδα αναφοράς του.

Όταν διδάσκονται οι φυσικοί αριθμοί αρχικά συνοδεύονται από τη μέτρηση αντικειμένων και σταδιακά αφαιρούνται τα αντικείμενα για να απομονωθεί η έννοια του αριθμού. Στη συνέχεια ορίζονται οι πράξεις σε αφηρημένο επίπεδο χωρίς τις μονάδες. Οι συμμιγείς αριθμοί αφορούν εξ' ολοκλήρου την έκφραση ενός μεγέθους με τις υποδιαιρέσεις του. Συνεπώς, προκύπτει ξανά η ανάγκη της ύπαρξης των μονάδων. Επιπλέον, η πράξη του πολλαπλασιασμού επανέρχεται στους συμμιγείς ως τελεστής χωρίς να εξηγείται γεγονός που αναδεικνύει τη δυσκολία των συμμιγών. Στη μετατροπή από τους δεκαδικούς στους συμμιγείς και αντίστροφα δεν αντιμετωπίζεται κάποια ιδιαίτερη δυσκολία όταν οι μονάδες μέτρησης εκφράζονται βάσει του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης. Η δυσκολία εντοπίζεται στην μετατροπή από τους δεκαδικούς στους συμμιγείς και αντίστροφα όταν αναφερόμαστε στην μέτρηση του χρόνου, όταν δηλαδή το σύστημα αρίθμησης δεν είναι το δεκαδικό (χρόνος= εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης). Δημιουργούνται λοιπόν παρανοήσεις με τις οποίες ασχολείται η Διδακτική των Θετικών Επιστημών. Έρευνες (Nesher & Peled, 1986· Nesher, 1987· Steinle & Stacey, 1998· Steinle, 2004· Sadi, 2007) για τις παρανοήσεις των δεκαδικών στη διάταξη και τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης αποτέλεσαν τη βάση του ερευνητικού μέρους. Αυτό που μελετάται ανεξάρτητα, καθώς δεν βρέθηκαν στη βιβλιογραφία ευρήματα που να ταιριάζουν με εν δυνάμει παρανοήσεις στους συμμιγείς αριθμούς, είναι η πράξη του πολλαπλασιασμού.

Τέλος, αυτό που προηγείται της διδασκαλίας όσον αφορά την οργάνωσή της είναι τα Αναλυτικά Προγράμματα και η παρουσίαση της ύλης στα σχολικά εγχειρίδια. Τα Αναλυτικά Προγράμματα βασίζονται στη διδακτική των γνωστικών αντικειμένων. Περισσότερη έμφαση δίνεται στο τελευταίο αναλυτικό πρόγραμμα του 2003, το οποίο αναφέρει και ενδεικτικές δραστηριότητες προσέγγισης των διαφόρων εννοιών. Τα Αναλυτικά προγράμματα μελετώνται σε βάθος τριών δεκαετιών (80', 90' και του 2000) για να αναδείξουν ερμηνείες των εν δυνάμει παρανοήσεων των μαθητών/τριών στους συμμιγείς αριθμούς. Επίσης, θα μελετήσουμε τα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών και Μελέτης Περιβάλλοντος των ίδιων δεκαετιών προσπαθώντας να διευκρινίσουμε μέσα από τις δραστηριότητες που δίνονται τις ασάφειες που τυχόν δημιουργούνται.

Στόχοι και ερωτήματα της εργασίας

Στην παρούσα εργασία πραγματοποιείται διδακτική προσέγγιση της έννοιας του συμμιγούς με σημείο αναφοράς την καθημερινή ζωή.

Συγκεκριμένα, και επειδή οι συμμιγείς έχουν αφενός μια μαθηματική εννοιολογική και τεχνική αναφορά, αφετέρου κατανοούνται κάθε φορά μέσα σε συγκεκριμένα μετρικά συστήματα, θα εξετάσουμε εκείνα τα προβλήματα κατανόησης των συμμιγών του σχολείου που συνδέονται με τον τρόπο αναπαράστασης των συμμιγών αριθμών στην καθημερινή ζωή, στις πράξεις, στον τρόπο γραφής και ανάγνωσης.

Τα επιμέρους ερωτήματα που θα εξετάσουμε είναι τα εξής:

- Ποιο είναι το ευρύτερο μαθηματικό πλαίσιο της έννοιας του συμμιγούς (μετρικά συστήματα, υποδιαιρέσεις μονάδων μέτρησης).
- Σε τι διαφέρουν οι συμμιγείς από τους δεκαδικούς και σε τι συγκλίνουν (πράξεις, ανάγνωση, γραφή).
- Σε ποιες περιπτώσεις προκαλείται σύγχυση στους συμμιγείς (Η μέτρηση του χρόνου).
- Ποιες παρανοήσεις εντοπίζονται στους μαθητές για τους συμμιγείς αριθμούς;

Θα διερευνήσουμε εάν και με ποιον τρόπο τα επιμέρους ερωτήματα αναγνωρίζονται, περιγράφονται, ερμηνεύονται, καθώς και εάν προτείνονται τρόποι διδακτικής διαχείρισής τους, στη:

- Βιβλιογραφική ανασκόπηση για την αποσαφήνιση των εννοιών του συμμιγούς, του δεκαδικού και της μέτρησης του χρόνου.
- Συγκριτική μελέτη Α.Π στην περίοδο των τριών τελευταίων δεκαετιών, ώστε να διευκρινιστεί ο τρόπος διδασκαλίας, η σειρά και πότε γίνεται η διδασκαλία των εννοιών στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες.
- Συγκριτική μελέτη των κεφαλαίων των αντίστοιχων σχολικών εγχειριδίων

Τέλος, θα διερευνήσουμε τις ενδεχόμενες παρανοήσεις των μαθητών/τριών στους συμμιγείς αριθμούς βασιζόμενοι στις παρανοήσεις στη διάταξη και τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των δεκαδικών αριθμών αλλά και ξεχωριστά από τους δεκαδικούς, θα μελετήσουμε τις παρανοήσεις στην πράξη του πολλαπλασιασμού στους συμμιγείς αριθμούς.

1.Θεωρητικές αναφορές

1.1. Η μέτρηση

Για τον υπολογισμό ενός ποσού που τα στοιχεία του δεν είναι διακεκριμένα μεταξύ τους, δηλαδή για τον υπολογισμό ενός συνεχούς ποσού, χρειάζεται και κάποια μονάδα σύγκρισης. Για παράδειγμα, όταν θέλουμε να μετρήσουμε το μήκος ενός δρόμου, το συγκρίνουμε με ένα άλλο μήκος (μέτρο, χιλιόμετρο κ.λπ.) που το θεωρούμε ως μονάδα μέτρησης. Από τη σύγκριση αυτή προκύπτει ένας αριθμός, ο οποίος δηλώνει το μέγεθος του ποσού σε σχέση με τη μονάδα που χρησιμοποιήσαμε.
Γενικά, μέτρηση ενός ποσού είναι η σύγκρισή του με ένα άλλο ομοειδές που το θεωρούμε ως μονάδα (Εξαρχάκος, 1993).
Η μέτρηση χωρίζεται σε δύο τομείς. Ο ένας είναι της μέτρησης του μήκους, της μάζας, του εμβαδού και του όγκου, ο οποίος αναπτύσσει τις αντιλήψεις της εκτίμησης και της μέτρησης εκείνων των χαρακτηριστικών που συνδέονται με τις μονάδες μέτρησης και τις σχέσεις των μονάδων μεταξύ τους. Ο άλλος είναι της μέτρησης του χρόνου ο οποίος αναπτύσσει αντιλήψεις των μονάδων και των συμβάσεων που συνδέονται με την μέτρηση και την εγγραφή του περάσματος, όπως και τη διάρκεια του χρόνου. Αυτός ο διαχωρισμός συμβαίνει καθώς η μέτρηση του μήκους, της μάζας, του εμβαδού και του όγκου έχουν ομοιότητες, όπως το σύστημα αρίθμησης (δεκαδικό σύστημα αρίθμησης) σε αντίθεση με την μέτρηση του χρόνου όπου έχει επικρατήσει το εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης.
Η μέτρηση απαιτεί οι μαθητές/τριες να αναπτύξουν δεξιοτεχνία στη χρήση μιας ποικιλίας οργάνων μέτρησης, επάρκεια στη χρήση μαθηματικών διαδικασιών, όπως ο υπολογισμός και μια έγκυρη αντίληψη στην απαρίθμηση ακέραιου και δεκαδικού αριθμού. Για την απόκτηση της λογικής της μέτρησης επίσης απαιτείται οι μαθητές/τριες να αναπτύξουν προσωπικές αναφορές και νοητικές απεικονίσεις για μια ποικιλία μέτρων που βοηθούν στην εκτίμηση.
Η ιδέα της μέτρησης βασίζεται στη σύγκριση ενός πράγματος με ένα άλλο σύμφωνα με κάποια ειδικά χαρακτηριστικά. Τα χαρακτηριστικά μπορεί να είναι του χώρου: μήκος, εμβαδόν και όγκος ή φυσικά: μάζα (βάρος) και θερμοκρασία ή δεν έχουν φανερή φυσική σύνδεση με τα αντικείμενα: χρόνος. Κάποια χαρακτηριστικά της μέτρησης φαίνονται πιο εύκολα στους μαθητές από άλλα. Για παράδειγμα, το μήκος και το εμβαδόν δείχνουν ευκολότερα από τον όγκο λόγω της πολυπλοκότητας της οπτικοποίησης του χώρου ή/και της ποσοτικοποίησης που περιλαμβάνουν. Αυτές οι δυσκολίες μπορούν να μειωθούν αν φτιαχτούν σαφής σύνδεσμοι ανάμεσα στις μονοδιάστατες, δισδιάστατες και τρισδιάστατες όψεις αυτών των χαρακτηριστικών.
Τα παιδιά έρχονται στο σχολείο με πρότερες μαθηματικές αντιλήψεις που έχουν αναπτυχθεί από προσωπικά βιώματα με τα κύρια χαρακτηριστικά, όπως για παράδειγμα το μήκος και ο χρόνος. Λιγότερες εμπειρίες έχουν οι μαθητές με τη μάζα (βάρος). Η αναγνώριση των χαρακτηριστικών δεν είναι κάτι που θα έπρεπε να παραμελήσουν τα πρώτα χρόνια οι δάσκαλοι. Σε πολλά παιδιά παίρνει χρόνια και πολλές εμπειρίες για να κατακτήσουν πλήρως το νόημα των εννοιών όπως το εμβαδόν, ο όγκος και η μάζα (βάρος).

Οι μαθητές/τριες πριν μπορέσουν να συγκρίνουν ή να μετρήσουν ένα χαρακτηριστικό πρέπει να γνωρίζουν τι χαρακτηριστικό είναι. Αυτό πρέπει να έρθει από βιωματικά παραδείγματα του χαρακτηριστικού και απαιτεί προσεκτική ανάπτυξη της γλώσσας.

Κάποιες δυσκολίες δημιουργούνται και από την ίδια τη γλώσσα που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε ένα χαρακτηριστικό. Για παράδειγμα, χρησιμοποιείται η λέξη *κοντό* για το μήκος και για το ύψος.

Στα πρώτα χρόνια της σχολικής ζωής οι δραστηριότητες μέτρησης που εστιάζουν στις συγκρίσεις βοηθούν τους μαθητές να καταλάβουν την ιδέα ότι αυτά είναι ειδικά μετρήσιμα χαρακτηριστικά των αντικειμένων. Τέτοιες συγκρίσεις θα πρέπει να προάγουν από το κατευθυνόμενο στο μη κατευθυνόμενο.

Οι κατευθυνόμενες συγκρίσεις περιλαμβάνουν απευθείας ευθυγράμμιση των χαρακτηριστικών που συγκρίνονται. Οι συγκρίσεις θα πρέπει να περιλαμβάνουν δύο όμοια αντικείμενα, όπως για παράδειγμα το μήκος ενός ψαλιδιού και μιας μολυβοθήκης. Αρχικά, τα αντικείμενα να είναι μόνο δύο. Οι συγκρίσεις και η ταξινόμηση σε παραπάνω από δύο αντικείμενα είναι δύσκολη, καθώς οι μαθητές/τριες απαιτείται να αναγνωρίσουν αν ένα αντικείμενο είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από άλλα αντικείμενα ταυτόχρονα κι αυτό είναι πολύ δύσκολο. Τέτοιες συγκρίσεις οδηγούν στην ανάπτυξη του μεταβατικού συλλογισμού, ο οποίος είναι κρίσιμος για τη μέτρηση. Ο μεταβατικός συλλογισμός ακολουθεί τη γραμμή όπως για παράδειγμα αν το Α είναι μεγαλύτερο από το Β και το Β είναι μεγαλύτερο από το Γ, τότε το Α είναι μεγαλύτερο από το Γ.

Η μη κατευθυνόμενη σύγκριση είναι η διαδικασία σύγκρισης δύο αντικειμένων που δεν μπορούν να ευθυγραμμιστούν απευθείας, όπως το μήκος του θρανίου και το ύψος της πόρτας.

Συνεπώς, η αντίληψη της χρήσης μιας μονάδας για τη σύγκριση μετρήσεων εισάγεται μέσω άτυπων μονάδων και στη συνέχεια μέσω των καθιερωμένων μονάδων μέτρησης (The State of Queensland, 2005).

1.2. Μονάδες μέτρησης

Όπως είδαμε παραπάνω η μέτρηση προκύπτει από την ανάγκη της σύγκρισης μεγεθών, αρχικά κατευθυνόμενα και στη συνέχεια μη κατευθυνόμενα. Αυτή η σύγκριση γίνεται με κάποια μεγέθη που ονομάζονται μονάδες μέτρησης.

Σύμφωνα με το Ελληνικό Ινστιτούτο Μετρολογίας, η τιμή ενός μεγέθους εκφράζεται συνήθως ως το γινόμενο ενός αριθμού και μίας μονάδας. Η μονάδα μέτρησης είναι απλά μια συγκεκριμένη ποσότητα του μεγέθους η οποία χρησιμοποιείται ως τιμή αναφοράς και ο αριθμός είναι το πηλίκο της μετρούμενης ποσότητας με την μονάδα μέτρησης.

Σχεδόν όλες οι χώρες στον κόσμο έχουν κανονισμούς σχετικά με την υιοθέτηση και τη χρήση των μονάδων μέτρησης. Εξαιτίας της σημασίας και της ανάγκης ύπαρξης μίας ομάδας από καλά καθορισμένες και εύχρηστες μονάδες, παγκοσμίως αποδεκτές, για όλες τις πολυδιάστατες και πολύπλοκες εφαρμογές στη σημερινή μας κοινωνία, οι μονάδες μέτρησης επιλέγονται έτσι ώστε να είναι άμεσα διαθέσιμες σε όλους, να είναι σταθερές στο χώρο και στο χρόνο και να είναι δυνατόν να υλοποιούνται με υψηλή ακρίβεια.

Στην 11η Γενική Διάσκεψη Μέτρων και Σταθμών (1960) υιοθετήθηκε το όνομα Système International d'Unités (Διεθνές Σύστημα Μονάδων, με διεθνή συντομογραφία SI) για το συνιστώμενο σύστημα μονάδων μέτρησης.
Επίσης στην ίδια συνδιάσκεψη θεσπίστηκαν οι κανόνες για τις βασικές και τις παραγόμενες μονάδες, όπως και τα προθέματα.
Οι βασικές μονάδες είναι μια ομάδα από επτά σαφώς καθορισμένες μονάδες που κατά συνθήκη, θεωρούνται ως διαστασιακά ανεξάρτητες: το μέτρο, το χιλιόγραμμο, το δευτερόλεπτο, το αμπέρ, το κέλβιν, το μολ, και η καντέλα (βλ. πίνακα 1).
Παραγόμενες μονάδες είναι αυτές που σχηματίζονται από συνδυασμό των βασικών μονάδων, σύμφωνα με τις αλγεβρικές σχέσεις που συνδέουν τις αντίστοιχες ποσότητες. Τα ονόματα και τα σύμβολα από τις μονάδες που έχουν σχηματιστεί μπορούν να αντικατασταθούν από ειδικά ονόματα και σύμβολα τα οποία μπορούν με τη σειρά τους να χρησιμοποιηθούν για να σχηματίσουν εκφράσεις και σύμβολα άλλων παραγόμενων μονάδων.
Το Διεθνές Σύστημα Μονάδων, SI, δεν είναι στατικό αλλά εξελίσσεται ώστε να ανταποκρίνεται στις όλο και πιο απαιτητικές προδιαγραφές των μετρήσεων της σύγχρονης κοινωνίας μας (Ελληνικό Ινστιτούτο Μετρολογίας).
Το SI χρησιμοποιείται επίσης λόγω του δεκαδικού χαρακτήρα και σε τεχνικές εφαρμογές σε μεγάλο ποσοστό του κόσμου έναντι παλαιοτέρων άλλων συστημάτων (όπως τα Αγγλοσαξονικά συστήματα που βασίζονται σε ιδιαίτερες μονάδες όπως η ίντσα, η λίβρα κ.λπ.) (Bureau International des Poids et Mesures).

Πίνακας 1: Θεμελιώδη μεγέθη του Διεθνούς Συστήματος Μονάδων

Είδος	**Μέγεθος**	**Μονάδα**	
Θεμελιώδες	Μάζα	Χιλιόγραμμο (kg)	Kilogram
Θεμελιώδες	Μήκος	Μέτρο (m)	meter
Θεμελιώδες	Χρόνος	Δευτερόλεπτο (s)	second
Θεμελιώδες	Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος	Αμπέρ (A)	Amperes
Θεμελιώδες	Απόλυτη/Θερμοδυναμική Θερμοκρασία	Κέλβιν (K)	Kelvin
Θεμελιώδες	Ποσότητα Ουσίας	Μολ (mol)	mole
Θεμελιώδες	Ένταση Φωτεινότητας	Καντέλα (Κηρίο) (cd)	Candela

Οι μονάδες μέτρησης ξεκινούν από κάτι που δεν είναι σταθερό, όπως μέρη του σώματος (το άνοιγμα των χεριών ή το μήκος από το άνοιγμα των ποδιών) και αντικείμενα της τάξης ή της κουζίνας (μολύβια, κούπες, κουτάλια). Οι άτυπες μονάδες μέτρησης είναι πρακτικές, προσωπικές και οικείες, και χρησιμοποιούνται σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής.
Οι μαθητές/τριες χρειάζεται να μάθουν ότι υπάρχουν σταθερές συμβάσεις που διέπουν τη διαδικασία της μέτρησης για να εισαχθούν σε παγκόσμιες αντιλήψεις της. Αυτές είναι:

- Το χαρακτηριστικό μετριέται στην ολότητά του. Δεν υπάρχουν κενά.
- Η μονάδα μέτρησης πρέπει να είναι κατάλληλη για το χαρακτηριστικό που μετράμε. Τα παραδείγματα περιλαμβάνουν μέτρηση του δισδιάστατου χαρακτηριστικού, του εμβαδού με δισδιάστατες άτυπες μονάδες, όπως το σχήμα μιας επίπεδης επιφάνειας ή με την καθιερωμένη μονάδα του τετραγωνικού εκατοστού.
- Η μονάδα μέτρησης πρέπει να είναι σταθερή. Για παράδειγμα, χρησιμοποιούμε καλαμάκια για να μετρήσουμε το μήκος και όχι καλαμάκια και στυλό (The State of Queensland, 2005)
- Το μέγεθος της μονάδας είναι σχετικό με το μέγεθος της ποσότητας που έχουμε να μετρήσουμε.
- Όσο μεγαλύτερη είναι η μονάδα που χρησιμοποιούμε, τόσο μικρότερος είναι ο αριθμός που δηλώνει το αποτέλεσμα της μέτρησης.
- Όσο μικρότερη είναι η μονάδα, τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια έχει η μέτρηση. Στην περίπτωση αυτή, με κατάλληλες δραστηριότητες και παραδείγματα, το παιδί μπορεί να οδηγηθεί και στη συνειδητοποίηση του προσεγγιστικού χαρακτήρα της μέτρησης, που μπορεί να χρησιμεύσει αργότερα και για τον υπολογισμό των ασύμμετρων μεγεθών (Εξαρχάκος, 1993).

Επιπλέον, οι μαθητές/τριες πρέπει να κατανοήσουν ότι δεν είναι δυνατό να πραγματοποιηθούν συγκρίσεις σε αντικείμενα που χρησιμοποιούν διαφορετικές μονάδες μέτρησης. Το μέγεθος της μονάδας και το επίπεδο προσοχής που απαιτείται για τη μέτρηση βασίζεται στην αιτία της μέτρησης. Σε καταστάσεις όπου η ακριβής μέτρηση δεν είναι δυνατή επειδή βρίσκεται ανάμεσα σε διαδοχικές μονάδες, παρέχει ευκαιρίες για συζητήσεις γύρω από τη στρογγυλοποίηση και την εκτίμηση των κλασματικών μερών μιας μονάδας. Ο σκοπός της μέτρησης είναι τελικά αυτός που θα επηρεάσει το βαθμό της ακρίβειας που απαιτείται (The State of Queensland, 2005).

1.3. Μετρικά και αγγλοσαξονικά συστήματα

Όταν λέμε μετρικό σύστημα εννοούμε μια σειρά από μονάδες μέτρησης των μηκών, των επιφανειών, των όγκων, των βαρών και των νομισμάτων (Μπαντέκας, χ.χ.). Τα γνωστότερα συστήματα μονάδων χωρίζονται σε μετρικά και αγγλοσαξονικά. Στα μετρικά συστήματα τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια είναι δυνάμεις του 10 των οποίων η ονομασία καθορίζεται με προθέματα. Τα αγγλοσαξονικά χρησιμοποιούν διάφορους παράγοντες, όπως 3, 8, 12, 16 κ.λπ. από τους οποίους άλλοι διαιρούνται εύκολα με το 3 και άλλοι με το 4. Τα αγγλοσαξονικά συστήματα έχουν δύο βασικές εκδοχές μονάδων, Imperial units και US customary units.

Υπάρχουν διάφορα μετρικά συστήματα, όπως το CGS (εκατοστόμετρο, γραμμάριο, δευτερόλεπτο), το MTS (μέτρο, τόνος, δευτερόλεπτο), το MKfs (μέτρο, χιλιόγραμμο δυνάμεως, δευτερόλεπτο), το MKS (μέτρο, χιλιόγραμμο, δευτερόλεπτο) και το MKSA (μέτρο, χιλιόγραμμο, δευτερόλεπτο, αμπέρ) (Επίσημη Εφημερίδα των Ευρωπαϊκών Κοινοτήτων, Αριθ. Ν 43/22)

1.4. Συστήματα αρίθμησης

Οι άνθρωποι μέσα στους αιώνες χρησιμοποίησαν διάφορα σύμβολα για να παραστήσουν αριθμούς. Αρχαιότερος συμβολισμός μπορεί να θεωρηθεί η αντιστοίχιση των αριθμών με λέξεις. Ακόμη, σε πολλές αρχαίες γλώσσες, κάποιοι αριθμοί αντιστοιχίζονταν με λέξεις των οποίων οι έννοιες παρέπεμπαν συμβολικά στις συμβολισμένες ποσότητες. Για παράδειγμα, στο συμβολισμό του αριθμού 1 χρησιμοποιήθηκε η λέξη που σήμαινε «σώμα», στο 2 οι «οφθαλμοί», στο 3 το «τριφύλλι» κ.ο.κ.

Καθώς η ανθρωπότητα αναπτυσσόταν γινόταν όλο και πιο αναγκαίο να δημιουργήσουν συμβολισμούς για περισσότερους αριθμούς. Τα σύμβολα αυτά έπρεπε να είναι εύκολα στη χρήση και τη γραπτή τους απόδοση και τέτοια, ώστε, συνδυαζόμενα κατάλληλα, να αποδίδουν με τρόπο απλό, ακριβή και σαφή άλλους αριθμούς, όσο το δυνατόν μεγαλύτερους.

Οι πρώτοι λαοί που χρησιμοποίησαν απλούς και εύχρηστους συμβολισμούς, όπως προκύπτει από ιστορικά στοιχεία, ήταν οι αρχαίοι Αιγύπτιοι, οι Σουμέριοι, οι Ασσύριοι, οι Βαβυλώνιοι, οι Ινδοί, οι Κινέζοι, οι Κρήτες της Μινωικής περιόδου, οι αρχαίοι Έλληνες, οι Ρωμαίοι κ.α.

Αρχικά, επινόησαν κάποια ειδικά σύμβολα για να παραστήσουν συγκεκριμένους αριθμούς , όπως το 1, 10, 100…, και στη συνέχεια επινόησαν ή νέα σύμβολα ή συνδυασμό των υπαρχόντων συμβόλων για να παραστήσουν νέους αριθμούς. Για να διευκολυνθούν, χώριζαν το σύνολο των αριθμών σε κατηγορίες, τις γνωστές σήμερα ως τάξεις. Ένα ειδικό σύμβολο παρίστανε τη μονάδα της τάξης κι έπαιζε βασικό ρόλο στην τάξη στην οποία ανήκε.

Η διαδικασία χωρισμού των αριθμών σε τάξεις δεν διέφερε σημαντικά από λαό σε λαό. Συνήθως, ένας αριθμός, έστω α μονάδων, οι οποίες ονομάζονται απλές μονάδες ή μονάδες πρώτης τάξης, έδιναν μια μονάδα της δεύτερης τάξης. Στη συνέχεια, α μονάδες της δεύτερης τάξης έδιναν μια μονάδα της τρίτης τάξης. Γενικά, α μονάδες κάποιας τάξης έδιναν μια μονάδα της αμέσως ανώτερής της τάξης.

Μερικοί λαοί χρησιμοποιούσαν διαφορετικά σύμβολα για τους αριθμούς της πρώτης τάξης και όχι μόνο για τη μονάδα. Άλλοι λαοί χρησιμοποιούσαν μικρό αριθμό συμβόλων, κυρίως για να παραστήσουν τις μονάδες των τάξεων, ενώ για το συμβολισμό των υπόλοιπων αριθμών επαναλάμβαναν τα σύμβολα των μονάδων κάνοντας κατάλληλους συνδυασμούς. Σε κάποιες μορφές αρίθμησης κάθε σύμβολο είχε την αξία του ανάλογα με τη θέση του μέσα στον αριθμό, ενώ σε άλλες το σύμβολο είχε πάντοτε την ίδια αξία, ανεξάρτητα από τη θέση του στον αριθμό.

Εντοπίζονται λοιπόν διάφορες μορφές αρίθμησης, που ξεχώριζαν από το συμβολισμό που χρησιμοποιούσαν, το χωρισμό των αριθμών σε τάξεις, τον τρόπο γραφής των υπόλοιπων αριθμών, την αξία που είχε κάθε σύμβολο σε σχέση με τη θέση του στον αριθμό κ.λπ. Οι μορφές αυτές αρίθμησης είναι γνωστές ως «Συστήματα Αρίθμησης».

Σε κάθε σύστημα αρίθμησης ο αριθμός των μονάδων μιας τάξης που δίνει μια μονάδα της αμέσως ανώτερης τάξης λέγεται «βάση» του συστήματος (Εξαρχάκος, 2001).

1.5. Θεσιακό σύστημα αρίθμησης

Στα θεσιακά συστήματα αρίθμησης είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τη βάση του συστήματος, όπως επίσης και την αξιακή σειρά των συμβόλων. Η αξία του κάθε συμβόλου είναι συνδυασμός της αξιακής σειράς του συμβόλου και της αντίστοιχης θέσης του στην αναγραφή των αριθμών. Η κάθε θέση έχει την αξία μιας δύναμης της βάσης. Ο αριθμός προκύπτει ως άθροισμα των αξιών των συμβόλων στη θέση στην οποία βρίσκονται. Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, το οποίο χρησιμοποιείται σήμερα είναι ένα θεσιακό σύστημα (Καλαβάσης & Μούτσιος-Ρέντζος, 2015).

1.6. Δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

Το σύστημα αυτό έχει βάση το 10 και γι' αυτό ονομάζεται δεκαδικό. Διαθέτει ξεχωριστά σύμβολα για κάθε αριθμό μικρότερο της βάσης. Τα σύμβολα αυτά που είναι 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 παριστάνουν τις απλές μονάδες ή της μονάδες πρώτης τάξης. Τα σύμβολα 1, 10, 100,… παριστάνουν τις μονάδες της πρώτης, δεύτερης, τρίτης,… τάξης αντίστοιχα. Δέκα μονάδες της πρώτης τάξης δίνουν μια μονάδα της δεύτερης τάξης, η οποία ονομάζεται δεκάδα και συμβολίζεται με το 10. Δέκα μονάδες της δεύτερης τάξης, δηλαδή δέκα δεκάδες, δίνουν μια μονάδα της τρίτης τάξης, η οποία ονομάζεται εκατοντάδα και συμβολίζεται με το 100. Δέκα εκατοντάδες δίνουν μια μονάδα της τέταρτης τάξης, η οποία ονομάζεται χιλιάδα και συμβολίζεται με το 1000 κ.ο.κ.

Η αξία κάθε ψηφίου εξαρτάται από τη θέση του στον αριθμό. Για παράδειγμα, στον αριθμό 232 το 2 στην πρώτη θέση από δεξιά δηλώνει μονάδες, ενώ στην πρώτη θέση από αριστερά δηλώνει εκατοντάδες ή $2 \times 100 = 200$ μονάδες. Έτσι έχουμε 2 μονάδες, 3 δεκάδες και 2 εκατοντάδες. Συνεπώς, σήμερα χρησιμοποιούμε το δεκαδικό-θεσιακό σύστημα αρίθμησης (Εξαρχάκος, 2001).

1.7. Βαβυλωνιακό σύστημα αρίθμησης: Εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης

Το εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης το παρέλαβαν οι σημίτες Βαβυλώνιοι από τους προγενέστερούς τους Σουμέριους. Στον σουμεριακό-βαβυλωνιακό συμβολισμό, οι αριθμοί ως το 60 γράφονται με τον συνήθη δεκαδικό συμβολισμό. Η απλή κατακόρυφη σφήνα έχει την τιμή 1, ενώ η σφήνα με δύο άκρα την τιμή 10. Και τα δύο σύμβολα σχηματίζονταν πιέζοντας μια αιχμηρή γραφίδα σε μια πήλινη πινακίδα. Ο αριθμός 60 σε αυτό το σύστημα αρίθμησης γράφεται πάλι με το σύμβολο του 1, η δε αρίθμηση αρχίζει εκ νέου με κάθε πολλαπλάσιο του 60. Έτσι το σύμβολο για το 10 μπορεί να σημαίνει επίσης 10×60, το σύμβολο για το 1, επίσης, 60×60 ή ακόμη οποιαδήποτε ανώτερη δύναμη του 60. Επιπλέον, στο εξηκονταδικό σύστημα γράφονται και τα κλάσματα. Το σύμβολο για το 1 μπορεί επίσης να είναι 1/60 ή 1/ 60^2. Έτσι τα κλάσματα ½=30/60, 1/3=20/60 και 1/5=12/60 παριστάνονταν αντιστοίχως με τα σύμβολα για το 30, το 20 και το 12. Παρατηρείται ότι η τιμή ενός συμβόλου εξαρτάται, όπως στο αριθμητικό σύστημα που χρησιμοποιούμε σήμερα, από τη θέση του συμβόλου μέσα στον αριθμό. Οι ανώτερες δυνάμεις του 60 τοποθετούνται στην αρχή, οι κατώτερες δυνάμεις στο τέλος. Από εδώ και ο όρος «θεσιακός συμβολισμός».

Ο βαβυλωνιακός θεσιακός συμβολισμός εκτός από πλεονεκτήματα που έχει στους υπολογισμούς, διαθέτει και κάποια μειονεκτήματα. Ένα από αυτά είναι η έλλειψη του συμβόλου για το μηδέν. Για να υπερνικηθεί αυτό το μειονέκτημα, εισήχθη αργότερα ένα διαχωριστικό σημείο στην κενή θέση μεταξύ των δύο ψηφίων. Για παράδειγμα, 1, 0, 4=3604. Ο έλληνας αστρονόμος Πτολεμαίος (150 μΧ.), ο οποίος εκτελούσε όλους τους υπολογισμούς του στο εξηκονταδικό σύστημα, χρησιμοποιούσε για το μηδέν το σύμβολο «ο» ακόμη και όταν ήταν στο τέλος ενός αριθμού. Έκανε λοιπόν την τελευταία διόρθωση στο εξηκονταδικό θεσιακό σύστημα , το οποίο, με τον τρόπο αυτό, έγινε ισοδύναμο με το δικό μας δεκαδικό σύστημα. Πράγματι, ο Πτολεμαίος έγραφε τους ακέραιους αριθμούς στο δεκαδικό σύστημα και μόνο τα κλάσματα στο εξηκονταδικό. Βέβαια, αυτό δεν έχει μεγάλη σημασία γιατί δεν χρησιμοποιούσε σχεδόν καθόλου μεγάλους ακέραιους αριθμούς. Η τεράστια υπεροχή των εξηκονταδικών κλασμάτων στους υπολογισμούς είναι η αιτία για την αποδοχή τους από τους αστρονόμους και, συνακόλουθα, για τη χρήση και σήμερα των λεπτών και των δευτερολέπτων (Van der Waerden, 2003).

1.8. Τι είναι οι δεκαδικοί αριθμοί

Δεκαδικοί αριθμοί είναι τα κλάσματα των οποίων ο παρονομαστής είναι μια δύναμη του 10. Χαρακτηριστικό σύμβολο των δεκαδικών αριθμών αποτελεί το «κόμμα» ή στα μαθηματικά «η υποδιαστολή». Το δεκαδικό αυτό σημείο δείχνει ότι αρχίζουμε να «σπάζουμε» τη μονάδα, δηλαδή το ένα σε δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά κ.λπ. (Κολέζα, 2009)

Συνεπώς, ένας διαφορετικός τρόπος γραφής των κλασμάτων συνιστά τους δεκαδικούς αριθμούς. Τα σημεία σύνδεσης μεταξύ του κλάσματος και του δεκαδικού συστήματος συμβόλων βοηθούν στην κατανόηση και των δύο. Η υποδιαστολή υποδεικνύει τη θέση των μονάδων. Ως μονάδες εννοούνται οι μονάδες «μέτρησης», δηλαδή η αξία θέσης του ψηφίου που ονοματίζει, «μετράει», κάθε φορά μια ποσότητα. Για παράδειγμα, οι 1632 μονάδες είναι όσο και οι 163,2 δεκάδες, 16,32 εκατοντάδες, οι 1,632 χιλιάδες, ανάλογα με το αν επιλέγουμε τις μονάδες τις δεκάδες, τις εκατοντάδες, τις χιλιάδες ως μονάδες «μέτρησης». (Van de Walle, 2005)

Τα ψηφία του αριθμού που βρίσκονται δεξιά της υποδιαστολής λέγονται δεκαδικά ψηφία και αποτελούν το δεκαδικό μέρος του αριθμού. Τα ψηφία που είναι αριστερά της υποδιαστολής αποτελούν το ακέραιο μέρος του αριθμού. Για παράδειγμα στο δεκαδικό αριθμό 2,34 τα ψηφία 3 και 4 είναι τα δεκαδικά ψηφία του αριθμού, ενώ ο αριθμός 2 είναι το ακέραιο μέρος.

Γενικά, κάθε ρητός αριθμός που έχει παρονομαστή 2 ή δύναμη του 2, όπως επίσης 5 ή δύναμη του 5 ή γινόμενο δυνάμεων του 2 και του 5 είναι δεκαδικός. Για παράδειγμα, ο ρητός $\frac{5}{8}$ είναι δεκαδικός γιατί το $8=2^3$. Συνεπώς, $\frac{5}{8}=\frac{625}{1000}$=0,625. (Εξαρχάκος, 2001)

1.8.1. Ιδιότητες δεκαδικών αριθμών στην πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό

Οι δεκαδικοί αριθμοί αποτελούν έναν διαφορετικό τρόπο γραφής των ρητών αριθμών. Όπως προαναφέρθηκε κάθε κλάσμα με παρονομαστή δυνάμεις του 10 είναι δεκαδικός αριθμός και κάθε κλάσμα με άλλο παρονομαστή είναι περιοδικός δεκαδικός με επαναλαμβανόμενα στοιχεία, όπως για παράδειγμα το 1/3= $0,\overline{3}$. Επομένως, οι δεκαδικοί αριθμοί και οι περιοδικοί δεκαδικοί διατηρούν τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στους ρητούς.

Στην πρόσθεση των ρητών έχουμε:

Στο $Z^* \times Z$ ορίζουμε μια πράξη +, που την ονομάζουμε πρόσθεση, ως εξής:

(α, β) + (γ, δ)= (αγ, βγ + αδ), όπου (α, β) είναι το κλάσμα β/α. Επίσης, η πράξη αυτή της πρόσθεσης στο Q ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

-Αντιμεταθετική

[α, β] + [γ, δ]= [γ, δ] + [α, β] $\forall$ [α, β], [γ, δ] στοιχεία του Q.

-Προσεταιριστική

[α, β] + ([γ, δ] + [ε, ζ])= ([α, β] + [γ, δ]) + [ε, ζ] $\forall$ [α, β], [γ, δ], [ε, ζ] στοιχεία του Q.

-Όλα τα στοιχεία του Q είναι απλοποιήσιμα:

[α, β] + [x, y]= [γ, δ] + [x, y] $\Leftrightarrow$ [α, β]=[γ, δ].

-Έχει ουδέτερο στοιχείο που είναι το στοιχείο [α, 0]=[1, 0].

-Για κάθε [α, β] $\in$ Q υπάρχει αντίθετο στο Q, που είναι το στοιχείο [α, -β].

Επομένως, η δομή (Q, +) είναι αβελιανή ομάδα.

Στον πολλαπλασιασμό των ρητών έχουμε αντίστοιχα,

Στο $Z^* \times Z$ ορίζουμε μια πράξη $\bullet$, που την ονομάζουμε πολλαπλασιασμό με (α, β) $\bullet$ (γ, δ)= (α $\bullet$ γ, β $\bullet$ δ).

Επιπλέον, η πράξη του πολλαπλασιασμού στο Q ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες.

-Αντιμεταθετική

-Προσεταιριστική

-Επιμεριστική ως προς την πράξη της πρόσθεσης

-Έχει ουδέτερο στοιχείο το [1, 1]=[α, α], α $\in$ Z*

-Έχει απορροφητικό στοιχείο το [α, 0]=[1, 0], α $\in$ Z*

-Έχει αδύναμα στοιχεία τα [1, 0] και [1, 1]

-Κάθε στοιχείο [α, β] του Q με [α, β] $\neq$ [1, 0] έχει αντίστροφο στο Q, που είναι το [β, α] (Εξαρχάκος, 2001).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η δομή (Q, +, $\bullet$) είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος[1] με διαίρεση και μοναδιαίο στοιχείο το [1, 1]. Η συγκεκριμένη δομή αποδεικνύεται ότι δεν έχει διαιρέτες του μηδενός. Επομένως, ο δακτύλιος (Q, +, $\bullet$) καλείται σώμα[2].

1: Ένα σύνολο R εφοδιασμένο με δύο πράξεις + και $\bullet$ ονομάζεται δακτύλιος αν ισχύουν οι ιδιότητες: Για την πρόσθεση (προσεταιριστική, το 0 είναι ουδέτερο στοιχείο, αν για κάθε α $\in$ R υπάρχει α΄ τέτοιο ώστε α +α΄ =α΄ +α = 0 , αντιμεταθετική ιδιότητα) και για τον πολλαπλασιασμό (προσεταιριστική, επιμεριστικοί νόμοι).

2: Ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο 1 στον οποίο κάθε μη μηδενικό στοιχείο είναι αντιστρέψιμο ονομάζεται σώμα (Βάρσος, Δεριζιώτης, Εμμανουήλ, Μαλιάκας & Ταλέλλη, 2005).

1.9. Τι είναι οι συμμιγείς αριθμοί

Όταν αριθμοί με διαφορετικές μονάδες μέτρησης ζητείται να εκφράσουν μια ποσότητα όλοι μαζί, καλούνται συμμιγείς αριθμοί. Για παράδειγμα, 2 ώρες, 23 λεπτά και 30 δευτερόλεπτα. Για να πραγματοποιήσουμε πράξεις με συμμιγείς αριθμούς πρέπει να τους μετατρέψουμε στην ίδια αξία μιας μονάδας μέτρησης. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται αναγωγή (Adams, 1848).

Παρατηρείται ότι οι συμμιγείς αριθμοί έχουν άμεση εννοιολογική σχέση με τους δεκαδικούς αριθμούς καθώς εκφράζουν με διαφορετικό τρόπο γραφής τις υπομονάδες μιας μονάδας μέτρησης.

Όταν καλούμαστε να προσθέσουμε συμμιγείς αριθμούς τότε αν η υπομονάδα φτάσει ακριβώς την τιμή της ανώτερης μονάδας τότε μηδενίζεται η υπομονάδα και η επόμενη μονάδα αυξάνεται κατά ένα. Αν η υπομονάδα ξεπεράσει την τιμή της ανώτερης μονάδας τότε η επόμενη μονάδα αυξάνεται κατά ένα και η υπομονάδα κρατάει το υπόλοιπο που είναι μικρότερο της ανώτερης μονάδας. Για παράδειγμα,

3μέτρα και 22 εκατοστά
<u>+2 μέτρα και 78 εκατοστά</u>
5 μέτρα και 100 εκατοστά

Όμως, 1 μέτρο=100 εκατοστά επομένως, γίνεται 6 μέτρα και 0 εκατοστά ή 6 μέτρα.
Επιπλέον, όταν έχουμε:

3μέτρα και 32 εκατοστά
<u>+2 μέτρα και 78 εκατοστά</u>
5 μέτρα και 110 εκατοστά

Επομένως, έχουμε 6 μέτρα και 10 εκατοστά.

Στους συμμιγείς αριθμούς κάθε αξία μονάδας μπορεί να έχει, όπως παρατηρείται παραπάνω,1, 2 ή και 3 ψηφία. Τα τελευταία εμφανίζονται συμβατικά για την ανάγκη των μετατροπών.

1.10. Συμμιγείς - Δεκαδικοί

- Οι συμμιγείς αριθμοί δεν υφίστανται χωρίς να συνοδεύονται από τη μονάδα μέτρησης, ενώ οι δεκαδικοί μπορούν να γραφούν και χωρίς μονάδα χωρίς να επηρεάζεται η έννοια του δεκαδικού αριθμού.
- Οι συμμιγείς αριθμοί μπορούν να έχουν σε κάθε μονάδα μέτρησης 1, 2 ή και 3 ψηφία, ενώ στους δεκαδικούς αριθμούς κάθε μονάδα αντιστοιχεί σε ένα ψηφίο. Για παράδειγμα 2 μέτρα και 24 εκατοστά= συμμιγής αριθμός, 2,24 μέτρα= δεκαδικός αριθμός, όπου το 2 μετά την υποδιαστολή είναι δέκατα και το 4 εκατοστά. Μοναδική εξαίρεση για τους δεκαδικούς αριθμούς αποτελεί η μέτρηση της επιφάνειας, δηλαδή το εμβαδόν, στο οποίο μετά την

υποδιαστολή στο δεκαδικό μέρος μια αξία αντιστοιχεί σε 2 ψηφία. Για παράδειγμα, 2, 3456 τ.μ., σημαίνει 34 τ.δ. και 56 τ.ε.

- Για να κάνουμε πράξεις με συμμιγείς υπάρχουν δύο τρόποι. Ο ένας είναι να μετατρέψουμε όλες τις μονάδες στη μικρότερη υπομονάδα και στη συνέχεια να πραγματοποιήσουμε τις πράξεις. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται αναγωγή. Για παράδειγμα, θέλουμε να προσθέσουμε 3 μέτρα και 22 εκατοστά με το 2 μέτρα και 45 εκατοστά. Ο πρώτος συμμιγής με αναγωγή γίνεται 322 εκατοστά και ο δεύτερος 245 εκατοστά, έτσι έχουμε 567 εκατοστά ή 5 μέτρα και 67 εκατοστά. Ο δεύτερος τρόπος είναι να τοποθετήσουμε τους αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλο σύμφωνα με τη μονάδα που διαθέτει και στη συνέχεια να πραγματοποιήσουμε τις πράξεις. Για παράδειγμα,

3μέτρα και 22 εκατοστά
+2 μέτρα και 45 εκατοστά
5 μέτρα και 67 εκατοστά

Στους δεκαδικούς για την πράξη της πρόσθεσης μπορούμε να τοποθετήσουμε τους αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλο αλλά με την προϋπόθεση ότι η υποδιαστολή βρίσκεται η μία κάτω από την άλλη. Για παράδειγμα,

3, 22 μέτρα
+2, 45 μέτρα
5, 67μέτρα

Για την πράξη του πολλαπλασιασμού δεν μας ενδιαφέρει η θέση της υποδιαστολής. Κάνουμε τον πολλαπλασιασμό όπως και στους φυσικούς αριθμούς και αφού μετρήσουμε όλα τα δεκαδικά ψηφία στο τέλος βάζουμε την υποδιαστολή τόσες θέσεις αριστερά όσα τα δεκαδικά ψηφία που μετρήσαμε. Για παράδειγμα,

3, 22 μ.
$\times 2{,}45$ μ.
1610
1288
+644
7,8890 τ.μ.

- Όταν θέλουμε να μετρήσουμε χρόνο, η πράξη της πρόσθεσης και στους δεκαδικούς και στους συμμιγείς δεν αλλάζει. Η πράξη του πολλαπλασιασμού όμως δεν υφίσταται ως μια πράξη με δυνατό αποτέλεσμα, δηλαδή με αποτέλεσμα που μετράει ένα χαρακτηριστικό. Δεν μπορούμε να πούμε ώρες* ώρες= τ. ώρες ή ώρες^2.
- Στις μετατροπές συμμιγών σε δεκαδικούς και αντίστροφα δεν παρατηρείται κάποια ιδιαίτερη δυσκολία στα μεγέθη που ακολουθούν το δεκαδικό θεσιακό

σύστημα αρίθμησης. Η δυσκολία προκύπτει από τις μετατροπές που αφορούν χρόνο. Έχουμε για παράδειγμα 2 ώρες και 30 λεπτά. Δεν θα γράψουμε 2, 30 ώρες γιατί δεν είναι στο δεκαδικό σύστημα η μέτρηση της ώρας, αλλά στο εξηκονταδικό και το 30 στο δεκαδικό μέρος είναι 30/60= 1/2= 0, 5. Συνεπώς, θα γράψουμε 2, 5 ώρες.

- Τέλος, η ανάγνωση των συμμιγών γίνεται από αριστερά προς τα δεξιά με το σύνδεσμο *και* μεταξύ των δύο τελευταίων υπομονάδων. Για παράδειγμα, 2 ώρες 32 λεπτά και 6 δευτερόλεπτα. Στους δεκαδικούς διαβάζουμε το ακέραιο μέρος, όπως στους φυσικούς και στη συνέχεια διαβάζουμε την υποδιαστολή με τη λέξη *κόμμα* και το δεκαδικό μέρος ξανά όπως στους φυσικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, 2, 35 μέτρα διαβάζεται «Δύο κόμμα τριάντα πέντε μέτρα»

1.11. Η μέτρηση του χρόνου

Ο χρόνος, σύμφωνα με το λεξικό της Οξφόρδης, ορίζεται ως «η ακαθόριστη κίνηση της ύπαρξης και των γεγονότων στο παρελθόν, στο παρόν και στο μέλλον, θεωρούμενη ως σύνολο».

Γενικότερα, ως «χρόνος» χαρακτηρίζεται η ακριβής μέτρηση μιας διαδικασίας από το παρελθόν στο μέλλον. Κάθε φυσικό φαινόμενο, όπως για παράδειγμα η κίνηση ενός σώματος γίνεται στην πορεία του χρόνου.

Το ερώτημα που τίθεται είναι πώς μετράται ο χρόνος στην πραγματικότητα. Η μέτρηση του χρόνου είναι μια πολύπλοκη διαδικασία όταν απαιτείται μεγάλη ακρίβεια. Συγκεκριμένα, μετά την εφεύρεση των μηχανικών ρολογιών, το 17^{o} αιώνα, η μέτρηση του χρόνου γινόταν με αστρονομικές μεθόδους. Η ανατολή του ηλίου γίνεται στον ανατολικό ορίζοντα κάθε μέρα, ανεβαίνει σε ένα μέγιστο ύψος στον ουρανό και έπειτα βασιλεύει στο δυτικό ορίζοντα. Η διέλευση του ηλίου από το υψηλότερο ορατό σημείο του ουρανού ονομάζεται διάβαση του ηλίου και πραγματοποιείται περίπου το μεσημέρι. Το διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μεταβάσεων του ηλίου ονομάζεται ηλιακή ημέρα. Για να προσδιορίσουμε όλους τους μέσους τοπικούς χρόνους σε παγκόσμια κλίμακα έχουμε ορίσει ως βάση την ώρα Γκρίνουιτς. Η ώρα Γκρίνουιτς είναι ο τοπικός μέσος χρόνος του πρώτου μεσημβρινού της Γης που διέρχεται από το Γκρίνουιτς της Αγγλίας. Λόγω του ότι από τον μεσημβρινό Γκρίνουιτς ξεκινάμε να μετράμε το γεωγραφικό μήκος της Γης, έτσι και ο χρόνος προσμετρείται από το μεσημβρινό αυτό και συγκεκριμένα από τη μεσημβρινή (φαινομενική) διάβαση του δίσκου του Ηλίου από αυτόν (Μαρίνος, 2014).

Ο χρόνος σήμερα μετριέται όπως μετριούνται και τα άλλα χαρακτηριστικά. Επιλέγουμε αρχικά μια μονάδα χρόνου και με αυτή «γεμίζουμε» το χρόνο που πρόκειται να μετρήσουμε. Μπορούμε να δούμε το χρόνο ως τη διάρκεια ενός γεγονότος από την αρχή του ως το τέλος του. Παραπάνω, ειπώθηκε ότι η μέτρηση ενός μεγέθους θα πρέπει να ξεκινάει από άτυπες μονάδες μέτρησης, έτσι λοιπόν ένας τρόπος μέτρησης του χρόνου με άτυπη μονάδα είναι η ταλάντωση ενός εκκρεμούς ή το σταθερό στάξιμο μιας βρύσης ή η κίνηση της σκιάς του ήλιου ανάμεσα σε δύο σταθερά σημεία (όπως στο ηλιακό ρολόι). Για να μετρήσουμε το χρόνο, ξεκινάμε τις μονάδες του χρόνου ταυτόχρονα με τη δραστηριότητα που μετράμε («χρονομετρούμε») και τις απαριθμούμε μέχρι να τελειώσει η δραστηριότητα (Van de Walle, 2005)

Στο SI η μονάδα μέτρησης του χρόνου είναι το δευτερόλεπτο (s). Το δευτερόλεπτο ορίζεται ως ο χρόνος που απαιτείται για 9.192.631.770 περιόδους δόνησης του καισίου-133 (BIPM). Επίσης, είναι γνωστό ότι 60 δευτερόλεπτα=1 λεπτό και 60 λεπτά=1 ώρα=3600 δευτερόλεπτα. Όταν κάνουμε πράξεις ανάμεσα σε ώρες, τις εκφράζουμε με 24ωρο ή 12ωρο τρόπο. Οι ώρες και οι ημερομηνίες είναι συμμιγείς αριθμοί. Για παράδειγμα, 9:25= 9 ώρες και 25 λεπτά, 28 Οκτωβρίου 1940= 1940 έτη 10 μήνες και 28 ημέρες.

Οι άνθρωποι προσπαθούν να φέρουν το χρόνο στα μέτρα τους δημιουργώντας συσκευές ικανές να τον μετρήσουν (Μαρίνος, 2014). Το όργανο μέτρησης του χρόνου είναι το ρολόι. Υπάρχουν διάφοροι τύποι ρολογιών, όπως τα ψηφιακά και τα αναλογικά. Από εννοιολογικής άποψης πολύ μικρή σχέση έχει το να λέμε την ώρα με τη μέτρηση του χρόνου. Οι δεξιότητες της ανάγνωσης του ρολογιού σχετίζονται με τις δεξιότητες ανάγνωσης οποιουδήποτε μέτρου που χρησιμοποιεί δείκτες σε μια αριθμημένη κλίμακα (Van de Walle, 2005).

Όπως προαναφέρθηκε, οι πράξεις με συμμιγείς αριθμούς, όσο αφορά τη μέτρηση του χρόνου, διαθέτουν κάποιες διαφορές από τη μέτρηση άλλων χαρακτηριστικών, όπως για παράδειγμα το μήκος. Όταν προσθέτουμε μήκη επιλέγοντας τη μονάδα μέτρησης του μήκους ή υποδιαιρέσεις ή πολλαπλάσιά του, τότε αυτό που προκύπτει αριθμητικά είναι αντίστοιχα η μονάδα που επιλέξαμε και δηλώνει μήκος. Το ίδιο συμβαίνει και στην πράξη του πολλαπλασιασμού όπου τώρα η μονάδα μέτρησης δηλώνει το μέτρο της επιφάνειας, δηλαδή το εμβαδόν.

Όμως, η πράξη του πολλαπλασιασμού στους συμμιγείς αριθμούς δεν δίνει αποτέλεσμα μια υπαρκτή μονάδα μέτρησης. Για παράδειγμα, αν κάνουμε 2 ώρες*2 ώρες= 4 ώρες^2 , οι ώρες στο τετράγωνο δεν είναι μονάδα μέτρησης. Προκύπτει λοιπόν ότι ο πολλαπλασιασμός είναι απλώς τελεστική πράξη.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω για να κάνουμε πράξεις με συμμιγείς θα πρέπει να τους ανάγουμε στη μικρότερη υποδιαίρεση. Οι πράξεις που είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν έχοντας νόημα το αποτέλεσμα στη μέτρηση του χρόνου είναι αυτές της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Γενικά, οι μαθητές/τριες πρέπει να αποκτήσουν πολλές εμπειρίες με μια ποικιλία οργάνων μέτρησης από οικείες μετρήσεις σε επιστημονικά μεγέθη. Τέτοιες εμπειρίες θα πρέπει να γίνονται σε πλαίσια που έχουν νόημα για τους/τις μαθητές/τριες και να τους δίνουν την αίσθηση της ικανότητας, όπως και μια εκτίμηση για τη χρησιμότητα της μέτρησης (The State of Queensland, 2005) και κατ' επέκταση της μέτρησης του χρόνου.

2. Συγκριτική μελέτη ΑΠΣ και σχολικών εγχειριδίων στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες

2.1. Οι έννοιες συμμιγής και δεκαδικός αριθμός στα ΑΠΣ Μαθηματικών

Στο Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών για τα μαθηματικά του 1984 περιλαμβάνεται η διδακτέα ύλη των μαθηματικών για τις Δ΄ και Ε΄ δημοτικού. Η διδασκαλία των συμμιγών αριθμών προηγείται των δεκαδικών και στις δύο τάξεις. Επιπλέον, παρατηρείται ότι η διδασκαλία των συμμιγών και των δεκαδικών αριθμών γίνεται στη Δ΄ τάξη εννοιολογικά, δηλαδή, οι έννοιες του συμμιγή και του δεκαδικού μέσω της μέτρησης χρήματος. Στην Ε΄ τάξη εισάγονται στη διαδικασία των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης για τους συμμιγείς και στη συνέχεια για τους δεκαδικούς, όπως επίσης και στη διάταξη των ρητών και κατ' επέκταση των δεκαδικών αριθμών. Τέλος, οι μαθητές/τριες διδάσκονται τρόπους μετατροπής συμμιγών σε δεκαδικούς και αντίστροφα. Η διδακτέα ύλη της Στ΄ δημοτικού περιλαμβάνεται σε αναλυτικό πρόγραμμα του 1985 και σε αντίθεση με τις δύο προηγούμενες τάξεις αρχικά διδάσκονται οι δεκαδικοί αριθμοί και έπειτα οι συμμιγείς. Όπως και στην Ε΄ δημοτικού οι μαθητές/τριες διδάσκονται τη μετατροπή συμμιγών σε δεκαδικούς αριθμούς.

Το Αναλυτικό πρόγραμμα για τα μαθηματικά του 1995 δεν αναφέρει τον όρο *συμμιγής αριθμός* στη Δ΄ τάξη αλλά παρουσιάζει την έννοια των δεκαδικών αριθμών. Στην Ε΄ τάξη διδάσκονται πρώτα οι συμμιγείς και στη συνέχεια οι δεκαδικοί σε αντίθεση με την Στ΄ τάξη που διδάσκονται αντίστροφα. Επιπλέον, στην Στ΄ τάξη συναντούν οι μαθητές/τριες για πρώτη φορά τη μετατροπή από τους συμμιγείς στους δεκαδικούς και αντίστροφα.

Το 2003 για πρώτη φορά καθιερώθηκε το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) και το 1997 το Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών για τα μαθηματικά στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στο συγκεκριμένο αναλυτικό πρόγραμμα οι μαθητές εισάγονται στην έννοια των δεκαδικών αριθμών από την Γ΄ δημοτικού σε αντίθεση με τις δύο προηγούμενες δεκαετίες. Η διδασκαλία των δεκαδικών και συμμιγών αριθμών επανέρχεται, στη Δ΄ τάξη, όπως στη δεκαετία του 80' και η σειρά διδασκαλίας αντιστρέφεται, δηλαδή διδάσκονται οι δεκαδικοί αριθμοί και στη συνέχεια οι συμμιγείς. Στην Ε΄ δημοτικού εμφανίζονται αρχικά οι πράξεις με δεκαδικούς και έπειτα οι πράξεις με συμμιγείς αριθμούς σε αντίθεση με τη δεκαετία του 90'. Τέλος, στην Στ΄ τάξη οι συμμιγείς αριθμοί δεν εμφανίζονται ως όρος και οι δεκαδικοί αριθμοί εντάσσονται στο πλαίσιο των πράξεων και της διάταξής τους.

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζεται συνοπτικά η σειρά διδασκαλίας των συμμιγών και δεκαδικών αριθμών στις τρεις τελευταίες δεκαετίες (80', 90', 00').

Πίνακας 2: Συνοπτικός πίνακας για τη σειρά διδασκαλίας των συμμιγών και δεκαδικών αριθμών στις δεκαετίες 80’, 90’ και 00’.

<table>
<tr><td colspan="6">ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ-ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ/ΣΕΙΡΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ</td></tr>
<tr><td colspan="2">80’</td><td colspan="2">90’</td><td colspan="2">00’</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1984</td><td rowspan="2">Δ΄: Συμμιγείς-Δεκαδικοί</td><td rowspan="4">1995</td><td rowspan="2">Δ΄ : Δεκαδικοί</td><td rowspan="4">2003</td><td>Γ΄ : Δεκαδικοί</td></tr>
<tr><td>Δ΄ : Δεκαδικοί-Συμμιγείς</td></tr>
<tr><td>Ε΄ : Συμμιγείς-Δεκαδικοί</td><td>Ε΄: Συμμιγείς-Δεκαδικοί</td><td>Ε΄ : Δεκαδικοί-Συμμιγείς</td></tr>
<tr><td>1985</td><td>Στ΄: Δεκαδικοί-Συμμιγείς</td><td>Στ΄: Δεκαδικοί-Συμμιγείς</td><td>Στ΄ : Δεκαδικοί</td></tr>
</table>

2.2. Η μέτρηση του χρόνου στα ΑΠΣ Μαθηματικών και Μελέτης του Περιβάλλοντος

Στο Αναλυτικό πρόγραμμα της δεκαετίας του 80’ και συγκεκριμένα το 1982 για την Α΄ και Β΄ τάξη του δημοτικού σχολείου για τα μαθηματικά η μέτρηση του χρόνου ξεκινά από την Α΄ τάξη με εμπειρικές μετρήσεις και αυθαίρετες μονάδες, όπως επίσης και η έννοια του χρονικού διαστήματος σε σχέση με ορισμένα γεγονότα. Επιπλέον, οι μαθητές/τριες πρέπει να διακρίνουν και να εκτιμούν τη διάρκεια χρονικών διαστημάτων. Στη συνέχεια στη Β΄ τάξη ξεκινούν οι μετρήσεις με σταθερές και κοινώς αποδεκτές μονάδες μέτρησης και στην έννοια του χρονικού διαστήματος προστίθεται και η καθιερωμένη μονάδα μέτρησης. Όσο αφορά την εκτίμηση του χρονικού διαστήματος προστίθεται και σε αυτό τον στόχο η καθιερωμένη μονάδα μέτρησης.

Στη Γ΄ τάξη με το αναλυτικό πρόγραμμα του 1983 σε γενικότερο πλαίσιο επιδιώκεται οι μαθητές/τριες να εξοικειωθούν με τη μέτρηση, με τη χρησιμοποίηση υποδιαιρέσεων των καθιερωμένων μονάδων μέτρησης, να κατανοήσουν τη μέτρηση ως επανάληψη μιας μονάδας μέτρου πάνω σε διάφορα μεγέθη , να γνωρίσουν συστηματικότερα τις μονάδες μέτρησης και να αποκτήσουν τη δεξιότητα για ακριβείς μετρήσεις. Συγκεκριμένα, στην μέτρηση του χρόνου χρησιμοποιούν την ώρα τις υποδιαιρέσεις και τα πολλαπλάσιά της και επεξεργάζονται αντίστοιχα προβλήματα. Οι προβληματικές καταστάσεις που περιλαμβάνουν μετρήσεις χρόνου πρέπει να επισημαίνονται αλλά και να επινοούνται από τους/τις μαθητές/τριες.

Το 1984 με το αναλυτικό πρόγραμμα για τη Δ΄ τάξη οι μαθητές/τριες αναμένεται να αποκτήσουν τη δεξιότητα της μέτρησης του χρόνου. Όπως και στις προηγούμενες τάξεις διδάσκεται η έννοια του χρόνου και των υποδιαιρέσεών του. Το νέο στη Δ΄ τάξη είναι η μονάδα μέτρησης του χρόνου σε αιώνες. Η μέτρηση, όπως και στις μικρότερες τάξεις πραγματοποιείται με σταθερές μονάδες μέτρησης και τις υποδιαιρέσεις αυτών.

Στο ίδιο αναλυτικό πρόγραμμα για την Ε΄ δημοτικού η μέτρηση του χρόνου περνά μέσα από δραστηριότητες μετατροπών στην τελευταία τάξη που εκφράζουν χρόνο.
Στο αναλυτικό πρόγραμμα του 1985 για τα μαθηματικά της Στ΄ τάξης επιδιώκεται να κατανοήσουν οι μαθητές/τριες πληρέστερα τις σχέσεις ανάμεσα στην ώρα, τις υποδιαιρέσεις και τα πολλαπλάσιά της. Τέλος, να εκτελούν πράξεις με αριθμούς που δηλώνουν χρόνο και να λύνουν σχετικά προβλήματα.
Τη δεκαετία του 90' με το αναλυτικό πρόγραμμα του 1995 για τις Δ΄, Ε΄, Στ΄ τάξεις η μέτρηση του χρόνου δεν διδάσκεται πλέον στη Δ΄ δημοτικού. Οι προηγούμενες τάξεις από την Α΄ μέχρι και την Γ΄ δημοτικού ακολουθούν τα αναλυτικά προγράμματα της δεκαετίας του 80' και περιλαμβάνουν την έννοια του χρόνου και της μέτρησής του. Στην Ε΄ δημοτικού επιδιώκεται να οργανώσουν οι μαθητές/τριες τις προηγούμενες γνώσεις τους για τις μονάδες μέτρησης του χρόνου και να κατανοήσουν τις σχέσεις μεταξύ των μονάδων αυτών. Επιπλέον, να «βλέπουν» και να «λένε» την ώρα με τους καθιερωμένους τρόπους, όπως και να παρουσιάζουν χρονολογίες με συμμιγείς. Στη συγκεκριμένη ενότητα γίνεται λόγος και για την πρόσθεση συμμιγών αριθμών. Συνεπώς, θα περιλαμβάνει πρόσθεση συμμιγών και με την μέτρηση του χρόνου. Όσο αφορά την μέτρηση του χρόνου στη Στ΄ τάξη επιδιώκεται η εδραίωση των γνώσεων των μαθητών/τριών για τις μονάδες μέτρησης του χρόνου, η μετατροπή με ευχέρεια συμμιγών αριθμών με μονάδες χρόνου σε ακέραιους και αντίστροφα και τέλος, να λύνουν ασκήσεις και προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης συμμιγών με μονάδες μέτρησης χρόνου.
Το 2003 το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών περιελάμβανε όλα τα γνωστικά αντικείμενα που διδάσκονται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Η έννοια του χρόνου εισάγεται από την Α΄ δημοτικού και διδάσκεται ανελλιπώς μέχρι και τη Στ΄ δημοτικού. Στην Α΄ δημοτικού οι μαθητές/τριες έρχονται σε μια πρώτη επαφή με την έννοια του χρόνου. Στη Β΄ τάξη γίνεται εξάσκηση στην μέτρηση του χρόνου. Στη Γ΄ τάξη εισάγονται και οι καθιερωμένες μονάδες μέτρησης, καθώς οι μαθητές/τριες επιδιώκεται να γνωρίζουν και να χρησιμοποιούν τις μονάδες μέτρησης του χρόνου. Στη Δ΄ τάξη αρχίζουν οι μετατροπές των μονάδων μέτρησης και οι προσθαφαιρέσεις με συμμιγείς αριθμούς. Στην Ε΄ και στη Στ΄ τάξη επιδιώκεται να σταθεροποιήσουν τις γνώσεις τους σχετικά με τις συμβατικές μονάδες μέτρησης και να εξοικειωθούν με τη χρήση μετρήσεων στην καθημερινή ζωή. Συγκεκριμένα, στην Α΄ δημοτικού εισάγεται η έννοια του χρονικού διαστήματος σε σχέση με ορισμένα γεγονότα. Στη Β΄ δημοτικού οι μαθητές/τριες εξοικειώνονται με την έννοια του χρόνου και συγκρίνουν χρονικές διάρκειες. Στη Γ΄ δημοτικού συνεχίζει με τις μονάδες μέτρησης του χρόνου τις οποίες πρέπει να γνωρίζουν οι μαθητές/τριες. Στη Δ΄ δημοτικού οι μαθητές/τριες πρέπει να μπορούν να χρησιμοποιούν αυθαίρετες μονάδες μέτρησης, συνήθεις μονάδες μέτρησης, συνήθη εργαλεία και να εκτελούν μετατροπές μονάδων ανάμεσα σε συνήθεις μονάδες. Τέλος, να εκτελούν προσθαφαιρέσεις με συμμιγείς αριθμούς στην μέτρηση του χρόνου. Στην Ε΄ και Στ΄ δημοτικού το αναλυτικό πρόγραμμα έχει ως στόχο οι μαθητές να μετατρέπουν τα αποτελέσματα από τη μέτρηση του χρόνου σε φυσικό, συμμιγή και δεκαδικό. Στη Στ΄ δημοτικού υπάρχει επιπλέον και η επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

Στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται συγκριτικά οι τρεις δεκαετίες αναλυτικών προγραμμάτων στα μαθηματικά για τη μέτρηση του χρόνου.

Πίνακας 3: Σύγκριση των τριών δεκαετιών (80’, 90’, 00’) ΑΠΣ στα μαθηματικά για τη μέτρηση του χρόνου.

<table>
<tr><td colspan="4">ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ</td></tr>
<tr><td colspan="4">Η ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ</td></tr>
<tr><td colspan="4">ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</td></tr>
<tr><td colspan="2">80’</td><td>90’</td><td>00’</td></tr>
<tr><td>Α΄</td><td>Εμπειρικές μετρήσεις, αυθαίρετες μονάδες, χρονικό διάστημα.</td><td rowspan="3">Ακολουθούν τα ΑΠΣ της δεκαετίας του 80’.</td><td>Έννοια του χρόνου, χρονικό διάστημα.</td></tr>
<tr><td>Β΄</td><td>Σταθερές μονάδες, καθιερωμένη μονάδα.</td><td>Μέτρηση χρόνου, σύγκριση χρονικής διάρκειας.</td></tr>
<tr><td>Γ΄</td><td>Υποδιαιρέσεις καθιερωμένων μονάδων, ακριβείς μετρήσεις, ώρα-υποδιαιρέσεις-πολλαπλάσια, προβλήματα.</td><td>Καθιερωμένες μονάδες μέτρησης χρόνου.</td></tr>
<tr><td>Δ΄</td><td>Υποδιαιρέσεις, αιώνας.</td><td>Δεν διδάσκεται η μέτρηση του χρόνου.</td><td>Μετατροπές μονάδων μέτρησης χρόνου, προσθαφαιρέσεις με συμμιγείς που δηλώνουν χρόνο.</td></tr>
<tr><td>Ε΄</td><td>Μετατροπές στην τελευταία τάξη μονάδας μέτρησης χρόνου.</td><td>Σχέσεις μεταξύ των μονάδων μέτρησης του χρόνου, «βλέπουν» και «λένε» την ώρα με τους καθιερωμένους τρόπους, παρουσιάζουν χρονολογίες με συμμιγείς.</td><td>Συμβατικές μονάδες μέτρησης, μετρήσεις στην καθημερινή ζωή, μετατροπές σε φυσικό, συμμιγή και δεκαδικό που δηλώνουν χρόνο.</td></tr>
<tr><td>Στ΄</td><td>Πράξεις με αριθμούς που δηλώνουν χρόνο, προβλήματα.</td><td>Μετατροπή συμμιγών με μονάδες χρόνου σε ακέραιους και αντίστροφα, πράξεις με συμμιγείς με μονάδες χρόνου, προβλήματα.</td><td>Συμβατικές μονάδες μέτρησης, μετρήσεις στην καθημερινή ζωή, μετατροπές σε φυσικό, συμμιγή και δεκαδικό που δηλώνουν χρόνο, επίλυση πραγματικών προβλημάτων.</td></tr>
</table>

Παρατηρείται ότι η Ε΄ και Στ΄ δημοτικού της δεκαετίας του 90’ εμπλουτίζεται σε σχέση με τη δεκαετία του 80’ στην μέτρηση του χρόνου, αλλά διακόπτεται στη Δ΄ δημοτικού. Συγκεκριμένα, στην Ε΄ δημοτικού παρουσιάζονται ενότητες διδασκαλίας της Δ΄ δημοτικού από τη δεκαετία του 80’ όσο αφορά την ώρα και τις υποδιαιρέσεις της, εφόσον ζητείται να «βλέπουν» και να «λένε» την ώρα, αλλά και κατανόηση της σχέσης των μονάδων μέτρησης του χρόνου. Επομένως, οι μετατροπές στην τελευταία τάξη που εκφράζουν χρόνο εμπεριέχονται στην κατανόηση της σχέσης των μονάδων μέτρησης του χρόνου, εφόσον αν γίνει κατανοητή η σχέση αυτή θα είναι δυνατό να πραγματοποιηθούν και μετατροπές στην τελευταία τάξη. Στη Στ΄ τάξη της δεκαετίας του 80' εμφανίζεται ξανά η σχέση της ώρα και των υποδιαιρέσεών της και επιδιώκεται η πληρέστερη κατανόησή της. Τέλος, οι πράξεις με αριθμούς που δηλώνουν χρόνο και η επίλυση σχετικών προβλημάτων της δεκαετίας του 80' γίνονται τη δεκαετία του 90' πρόσθεση συμμιγών αριθμών και μετατροπή αυτών σε ακέραιους, όπως επίσης να λύνουν προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης συμμιγών με μονάδες μέτρησης χρόνου. Τη δεκαετία του 00' με το ολοκληρωμένο αναλυτικό πρόγραμμα παρατηρείται ότι επανέρχεται η διδασκαλία της μέτρησης του χρόνου στη Δ΄ τάξη.

Συγκριτικά, με το μάθημα της Μελέτης Περιβάλλοντος, το οποίο μετονομάστηκε από «Σπουδή του Περιβάλλοντος» σε «Μελέτη του Περιβάλλοντος» το 1982, και στην Α΄ και στη Β΄ τάξη υπάρχει ενότητα «Ο άνθρωπος και ο χρόνος». Για την Α΄ τάξη οι μαθητές μαθήτριες εισάγονται εμπειρικά στις έννοιες της διαδοχής των γεγονότων και των φαινομένων και στην έννοια του χρόνου με βάση τις συγκεκριμένες ενέργειές τους. Στη Β΄ τάξη επιδιώκεται κατανόηση της χρονικής διαδοχής με συγκεκριμένα παραδείγματα, όπως επίσης γνώση και κατανόηση των βασικών χρονικών εννοιών. Επιπλέον, οι μαθητές/τριες ασκούνται σε υπολογισμούς με χρονικές μονάδες και σχετικές καταγραφές, όπως επίσης προσεγγίζουν την έννοια της χρονικής εξέλιξης. Τέλος, οι μαθητές/τριες πρέπει να είναι ικανοί να αναγνωρίζουν σχετικές καταγραφές και όργανα μέτρησης του χρόνου.

Στο Αναλυτικό πρόγραμμα της Μελέτης του Περιβάλλοντος για τη Γ΄ δημοτικού το 1983 και το 1985 για τη Δ΄ δημοτικού εντάσσεται η ενότητα που αφορά την έννοια του χρόνου με τίτλο «Ο άνθρωπος, ο χρόνος και η εξέλιξη». Όπως και στη Β΄ τάξη οι μαθητές/τριες διδάσκονται την έννοια της διαδοχής και η μέτρηση του χρόνου γίνεται με συστηματικότερο τρόπο, δηλαδή πρέπει να αποσαφηνίζουν χρονικά τα φαινόμενα και τα γεγονότα καθώς και να ερευνούν ιστορικές μαρτυρίες και άλλα κατάλοιπα και να ανασυνθέτουν το ιστορικό της κοινότητας. Όπως αναφέρεται στο αναλυτικό πρόγραμμα, «τα παιδιά εξοικειώνονται με βασικές χρονικές έννοιες και προσεγγίζουν την έννοια της χρονικής εξέλιξης». Επιπλέον, «ασκούνται σε υπολογισμούς με χρονικές μονάδες». Συγκεκριμένα, εισάγονται στην έννοια της διαδοχής των ημερών, των εποχών, των γενεών και των τριών χρονικών βαθμίδων, παρελθόν-παρόν-μέλλον. Όσο αφορά τις μονάδες μέτρησης εξοικειώνονται με τις υποδιαιρέσεις του ημερονυκτίου και του έτους όπως επίσης και με το όργανο μέτρησης, το ρολόι. Στην ενότητα αυτή οι μαθητές/τριες έρχονται σε επαφή και με παλαιότερες πρακτικές και με τις έννοιες *δεκαετία, αιώνας, χιλιετηρίδα, προ Χριστού* και *μετά Χριστόν*.

Τέλος, όσο αφορά τη Δ΄ τάξη και εδώ υπάρχει η έννοια της διαδοχής, αλλά όσο αφορά την πολιτισμική εξέλιξη, δηλαδή «διαδοχή- εξέλιξη- μονιμότητα στην ιστορία με βάση συγκεκριμένα παραδείγματα από τη ζωή και την ιστορία της περιοχής του μαθητή». Επίσης, πραγματοποιείται «Υπολογισμός και γραφή του ιστορικού χρόνου. Ιστορία- Προϊστορία».

Τα αναλυτικά προγράμματα της δεκαετίας του 80' ίσχυαν και τη δεκαετία του 90' στα μαθηματικά για όλες τις τάξεις εκτός των τριών τελευταίων τάξεων της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης που γράφτηκε αναλυτικό πρόγραμμα το 1995 και στη Μελέτη του Περιβάλλοντος για όλες τις τάξεις.

Το αναλυτικό πρόγραμμα του 2003 για την Μελέτη Περιβάλλοντος περιέχει στη διδασκαλία τη μέτρηση του χρόνου μέχρι τη Β΄ δημοτικού. Η Γ΄ και Δ΄ δημοτικού προσεγγίζει την έννοια του χρόνου μέσα από πολιτισμικά στοιχεία και μεταβολές, όπως για παράδειγμα τα ΜΜΕ άλλοτε και σήμερα ή η γνωριμία με την Παράδοση και μέσα από τη σύγκριση οι μαθητές/τριες να κατανοήσουν τη σημασία των μεταβολών, οι οποίες επηρέασαν τη διαμόρφωσή της. Για την Α΄ δημοτικού η προσέγγιση του χρόνου γίνεται μέσα από μεταβολές που συμβαίνουν σε πρόσωπα και πράγματα της οικογένειας στην πορεία του χρόνου. Επιπλέον, στόχος της ενότητας «Ο άνθρωπος και ο χρόνος» είναι να χρησιμοποιούν απλούς τρόπους μέτρησης του χρόνου. Στη Β΄ δημοτικού το αναλυτικό πρόγραμμα στοχεύει στο να περιγράφουν τα στάδια της ανάπτυξης, της ωρίμασης και της γήρανσης του ανθρώπου, να συνδέουν βασικές χρονικές έννοιες με τη δική τους βιολογική εξέλιξη και γενικότερα με τον κύκλο της ζωής του ανθρώπου, να γνωρίσουν τρόπους μέτρησης του χρόνου και να παρατηρήσουν τις μεταβολές που γίνονται στο περιβάλλον στην πορεία του χρόνου.
Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται συγκριτικά οι τρεις δεκαετίες αναλυτικών προγραμμάτων στη Μελέτη Περιβάλλοντος για τη μέτρηση του χρόνου.

Πίνακας 4**:** Σύγκριση των τριών δεκαετιών (80’, 90’, 00’) ΑΠΣ στη Μελέτη Περιβάλλοντος για τη μέτρηση του χρόνου.

<table>
<tr><td colspan="4">ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ</td></tr>
<tr><td colspan="4">Η ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ</td></tr>
<tr><td colspan="4">ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ</td></tr>
<tr><td colspan="2">80’</td><td>90’</td><td>00’</td></tr>
<tr><td>Α΄</td><td>Εμπειρική προσέγγιση της διαδοχής των γεγονότων και του χρόνου.</td><td rowspan="4">Ακολουθούν τα ΑΠΣ της δεκαετίας του 80’.</td><td>Μεταβολές σε πρόσωπα και πράγματα της οικογένειας στην πορεία του χρόνου, απλοί τρόποι μέτρησης χρόνου.</td></tr>
<tr><td>Β΄</td><td>Χρονική διάρκεια, βασικές χρονικές έννοιες, υπολογισμοί με χρονικές μονάδες, όργανα μέτρησης χρόνου.</td><td>Κύκλος της ζωής του ανθρώπου, τόποι μέτρησης χρόνου, μεταβολές στο περιβάλλον από το πέρασμα του χρόνου.</td></tr>
<tr><td>Γ΄</td><td>Έννοια της διαδοχής των ημερών, των εποχών, των γενεών και των τριών χρονικών βαθμίδων, παρελθόν-παρόν-μέλλον, υποδιαιρέσεις ημερονυκτίου και έτους , όργανο μέτρησης: το ρολόι.</td><td rowspan="2">Πολιτισμικά στοιχεία και μεταβολές.</td></tr>
<tr><td>Δ΄</td><td>Έννοια της χρονικής διαδοχής στα πλαίσια της πολιτισμικής εξέλιξης.</td></tr>
</table>

Παρατηρείται μια κοινή διαδοχή στόχων ως προς την εμπειρική ενασχόληση με την έννοια του χρόνου και στη συνέχεια με την κατανόησή της. Η διαφορά υπόκεινται στο γεγονός ότι στα μαθηματικά δεν αναφέρονται πολιτισμικά στοιχεία όπως στην Μελέτη Περιβάλλοντος. Τα όργανα μέτρησης του χρόνου αναφέρονται και στα δύο γνωστικά αντικείμενα με έμφαση στην Μελέτη Περιβάλλοντος. Επιπλέον, στα μαθηματικά εισάγεται η έννοια του χρονικού διαστήματος και η μέτρησή του, ενώ στην Μελέτη Περιβάλλοντος η έννοια της διαδοχής των γεγονότων και των φαινομένων.

Στον Πίνακα 5 παρουσιάζεται συγκριτικά η έννοια της μέτρησης του χρόνου μέσα από τα ΑΠΣ των δύο γνωστικών αντικειμένων, Μαθηματικά και Μελέτη Περιβάλλοντος.

Πίνακας 5**:** Συγκριτικός πίνακας ΑΠΣ για τη μέτρηση του χρόνου στα Μαθηματικά και τη Μελέτη Περιβάλλοντος.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ	
Η ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ	
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ	ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ
Εμπειρική ενασχόληση.	Εμπειρική ενασχόληση.
Δεν αναφέρονται πολιτισμικά στοιχεία.	Αναφέρονται πολιτισμικά στοιχεία.
Όργανα μέτρησης χρόνου.	Όργανα μέτρησης χρόνου (περισσότερη έμφαση).
Χρονικό διάστημα και μέτρησή του.	Διαδοχή γεγονότων και φαινομένων.

2.3.Οι συμμιγείς και οι δεκαδικοί αριθμοί στα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών

Τη δεκαετία του 80'

Τα σχολικά εγχειρίδια της Δ΄ δημοτικού από όπου ξεκινούν οι συμμιγείς αριθμοί εισάγουν τους μαθητές σε αυτή την έννοια με μια εφαρμογή συμπλήρωσης πίνακα και στη συνέχεια να μεταφέρουν τα στοιχεία του πίνακα σε γραφική παράσταση. Επιπλέον, οι μαθητές μετατρέπουν νοερά συμμιγείς αριθμούς και μετατρέπουν τα δεδομένα των μετρήσεών τους σε συμμιγείς αριθμούς.

Όσο αφορά τους δεκαδικούς αριθμούς, αυτοί διδάσκονται χωρίς καμία εννοιολογική σύνδεση με τους συμμιγείς αριθμούς,

Στην Ε΄ δημοτικού οι μαθητές έχουν οπτικό υλικό, εικόνες με συμμιγείς αριθμούς και ζητείται να μετατραπούν σε ακέραιους αριθμούς. Αυτό γίνεται και αντίστροφα με εικόνες που περιλαμβάνουν ακέραιους αριθμούς και ζητείται να μετατραπούν σε συμμιγείς.

Στις πράξεις με συμμιγείς και συγκεκριμένα στην πρόσθεση και την αφαίρεση οι μαθητές/τριες εισάγονται μέσω ενός προβλήματος. Στο βιβλίο του μαθητή δίνεται ένα πρόβλημα και ζητείται η εύρεση του βάρους. Στο πρόβλημα η λύση είναι μια πρόσθεση, η οποία για να πραγματοποιηθεί χρειάζεται να γραφούν οι αριθμοί σε ορισμένες θέσεις και να προστεθούν κατακόρυφα.

Όσο αφορά τους δεκαδικούς αριθμούς το βιβλίο του μαθητή διαθέτει ασκήσεις και προβλήματα.
Η σύνδεση των δεκαδικών με τους συμμιγείς ξεκινά από την Ε΄ τάξη με μια εφαρμογή στην οποία οι μαθητές/τριες καλούνται να μετατρέψουν δεκαδικούς και συμμιγείς σε κλάσματα.
Γενικά, ανάγουν όλους τους αριθμούς σε δεκαδικούς, συμμιγείς ή ακέραιους και πραγματοποιούν τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Το βιβλίο του μαθητή δίνει εφαρμογή συμπλήρωσης πίνακα, όπως και προβλήματα που χρειάζονται τις κατάλληλες μετατροπές.
Στη Στ΄ τάξη οι μαθητές/τριες συζητούν τον τρόπο που γίνονται οι μετατροπές από το ένα είδος αριθμού στο άλλο και μετατρέπουν αντίστοιχα τους δοσμένους αριθμούς σε ακέραιους, δεκαδικούς, συμμιγείς και κλασματικούς.

Τη δεκαετία του 90'

Στη Δ΄ τάξη δεν υπάρχει άμεση ενότητα διδασκαλίας για τους συμμιγείς αριθμούς, αλλά στην ενότητα «Μετρούμε το βάρος» οι αριθμοί είναι συμμιγείς. Το ίδιο συμβαίνει στην ενότητα «Λογαριάζουμε με νομίσματα». Όσο αφορά τους δεκαδικούς αριθμούς οι μαθητές/τριες εισάγονται στην έννοια αυτή με ασκήσεις μετατροπής δεκαδικών κλασμάτων σε δεκαδικούς και αντίστροφα.
Στην Ε΄ τάξη οι δραστηριότητες για τους συμμιγείς είναι ασκήσεις και προβλήματα. Το ίδιο και στους δεκαδικούς.
Στη Στ΄ τάξη οι συμμιγείς παρουσιάζονται στις ενότητες «Μονάδες εμβαδού», στην οποία δίνεται πίνακας να συμπληρωθεί με συμμιγείς και να μετατραπούν στη συνέχεια σε δεκαδικούς, «Πως γράφουμε και διαβάζουμε όγκους», η οποία διαθέτει συμπλήρωση πίνακα με συμμιγείς και στη συνέχεια μετατροπή σε δεκαδικούς και τέλος, στην «Μετρούμε και λογαριάζουμε βάρη», στην οποία δίνεται μια εφαρμογή μετατροπής των συμμιγών αριθμών σε δεκαδικούς και κλασματικούς αριθμούς. Επιπλέον, δίνεται μια άσκηση στην οποία οι μαθητές/τριες καλούνται να μετατρέψουν τους συμμιγείς και τους κλασματικούς σε δεκαδικούς και να πραγματοποιήσουν τις πράξεις. Στην άσκηση δίνεται η φόρμα για τον τρόπο που θα εφαρμοστεί στις πράξεις, δηλαδή στο να γίνουν κάθετα με την υποδιαστολή τη μία κάτω από την άλλη.

Τη δεκαετία του 00'

Οι δεκαδικοί διδάσκονται από τη Γ΄ τάξη. Ξεκινούν με τα δεκαδικά κλάσματα και τη μετατροπή σε δεκαδικούς αριθμούς, στη συνέχεια γίνεται λόγος για την αξία θέσης ψηφίου με συμπλήρωση πίνακα. Τέλος, παρουσιάζονται οι πράξεις με δεκαδικούς στις οποίες αρχικά οι μαθητές έρχονται σε επαφή μέσω της ζωγραφικής νομισμάτων και του άβακα και στο τέλος με την κάθετη πράξη. Παρατηρείται ότι η έννοια του συμμιγή ταυτίζεται με τη διαδικασία της ζωγραφικής των νομισμάτων ή το σβήσιμο από τα ήδη ζωγραφισμένα νομίσματα, καθώς η σκέψη χειρίζεται συμμιγείς αριθμούς.
Στη Δ΄ τάξη εισάγεται και η έννοια του συμμιγή, καθώς ξεκινούν οι πράξεις με συμμιγείς κάνοντας τις κατάλληλες μετατροπές, ώστε να έχει κάθε μονάδα μικρότερο αριθμό από αυτόν που χρειάζεται για να φτιάξει την αμέσως ανώτερη μονάδα. Το

βιβλίο του μαθητή δίνει τον τρόπο λύσης του προβλήματος και στη συνέχεια ζητά το λόγο που έγιναν οι μετατροπές και τον τρόπο που έγιναν. Επιπλέον, δίνει δραστηριότητα στην οποία ζητείται να αναγνωρίσουν ποιοι αριθμοί δεν είναι συμμιγείς. Αυτό απαιτεί την κατανόηση από τους/τις μαθητές/τριες ότι οι υποδιαιρέσεις και τα πολλαπλάσια ενός συμμιγή είναι από την ίδια ακέραιη μονάδα, διαφορετικά δεν είναι συμμιγής αριθμός. Τέλος, στην ενότητα «Υπολογίζω με συμμιγείς κα δεκαδικούς» ζητείται να λύσουν κάποια προβλήματα με συμμιγείς αλλά και με δεκαδικούς. Είναι απαραίτητο σε αυτά τα προβλήματα να γνωρίζουν οι μαθητές/τριες τη μετατροπή των συμμιγών σε δεκαδικούς και το αντίστροφο. Για το λόγο αυτό στη Δ΄ τάξη παρατηρείται συστηματικά η σχέση των συμμιγών με τους δεκαδικούς.

Στην Ε΄ δημοτικού όπου η διδασκαλία των δεκαδικών προηγείται των συμμιγών, περιέχει δραστηριότητες που συνδέει τους δεκαδικούς με τα δεκαδικά κλάσματα μέσω της ζωγραφικής του μέρους από το 10, 100, 1000 και με τη γραφή των δεκαδικών. Επίσης, περιέχει συμπλήρωση πίνακα όπου ζητείται να εκφραστούν τα χρήματα που δείχνει ο πίνακας και σε συμμιγή αριθμό. Συνδέει λοιπόν τους δεκαδικούς με τους συμμιγείς δίνοντας δραστηριότητα μετατροπής από τον έναν αριθμό στον άλλο.

Στην ενότητα «Προβλήματα με συμμιγείς» δίνονται προβλήματα υπολογισμού της ηλικίας μέσω της αριθμογραμμής αλλά και των πράξεων με συμμιγείς κάθετα. Το ίδιο συμβαίνει και στο Τετράδιο Εργασιών, στο οποίο περιέχονται προβλήματα εύρεσης διάρκειας της μέρας και του μήκους διάφορων αντικειμένων.

Στον Πίνακα 6 παρουσιάζεται συνοπτικά ο τρόπος διδασκαλίας των συμμιγών και δεκαδικών αριθμών, όπως επίσης και η τυχόν σύνδεσή τους στις τρεις τελευταίες δεκαετίες (80’, 90’, 00’).

Πίνακας 6: Σύγκριση τρόπου διδασκαλίας συμμιγών και δεκαδικών αριθμών στις δεκαετίες 80', 90' και 00'.

ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ-ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ/ΤΡΟΠΟΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ		
80'	90'	00'
Δ΄: Συμμιγείς: συμπλήρωση πίνακα, γραφική παράσταση, νοεροί υπολογισμοί, μετατροπές. Δεκαδικοί: Διδάσκονται ανεξάρτητα από τους συμμιγείς.	Δ΄ : Δεκαδικοί: ασκήσεις, προβλήματα. Οι συμμιγείς αριθμοί εμφανίζονται στη μέτρηση βάρους και χρημάτων, αλλά δεν διδάσκονται συστηματικά.	Γ΄ : Δεκαδικοί: μετατροπή δεκαδικών κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς, συμπλήρωση πίνακα με αξία θέσης ψηφίου, δραστηριότητες ζωγραφικής, άβακα και κάθετης πράξης για την πρόσθεσης και την αφαίρεση με δεκαδικούς.
Ε΄ : Συμμιγείς: εικόνες, μετατροπές σε ακέραιους και αντίστροφα, προβλήματα. Δεκαδικοί: ασκήσεις, προβλήματα, μετατροπή δεκαδικών σε συμμιγείς.	Ε΄: Συμμιγείς-Δεκαδικοί: ασκήσεις, προβλήματα.	Δ΄ : Δεκαδικοί- Συμμιγείς: προβλήματα και μετατροπές.
Στ΄: Δεκαδικοί-Συμμιγείς: μετατροπές.	Στ΄: Δεκαδικοί: φόρμα για τον τρόπο εκτέλεσης των πράξεων. Συμμιγείς: συμπλήρωση πίνακα, μετατροπές σε δεκαδικούς.	Ε΄ : Δεκαδικοί: δραστηριότητα ζωγραφικής, συμπλήρωση πίνακα με μετατροπές. Συμμιγείς: συμπλήρωση πίνακα, προβλήματα συμπλήρωσης αριθμογραμμής.
		Στ΄ : Δεκαδικοί

Παρατηρείται ότι η σύνδεση των δεκαδικών με τους συμμιγείς τη δεκαετία του 80' γίνεται στην Ε΄ δημοτικού και τη δεκαετία του 90' στη Στ΄ δημοτικού, δηλαδή ανεβαίνει τάξη και κατ' επέκταση γνωστικό επίπεδο. Όμως, τη δεκαετία του 00' οι έννοιες συνδέονται στην Δ΄ δημοτικού, δηλαδή σε μικρότερη τάξη από τις δύο προηγούμενες δεκαετίες, γεγονός που αποδεικνύει το «κατέβασμα» της γνώσης, δηλαδή έννοιες που διδάσκονταν σε μεγαλύτερες ηλικίες, διδάσκονται πλέον σε μικρότερες. Επιπλέον, και οι δύο έννοιες διδάσκονται τη δεκαετία του 80' από τη Δ΄ δημοτικού, τη δεκαετία του 90' οι δεκαδικοί από τη Δ΄ και οι συμμιγείς τυπικά από την Ε΄ δημοτικού και τέλος, τη δεκαετία του 00' οι δεκαδικοί διδάσκονται από τη Γ΄ δημοτικού ενώ οι συμμιγείς τυπικά από τη Δ΄ δημοτικού.

Σε γενικές γραμμές, ως προς τις δραστηριότητες που περιέχονται στα σχολικά εγχειρίδια για τις έννοιες του δεκαδικού και του συμμιγή παρατηρείται ότι και στις τρεις δεκαετίες (80', 90', 00') είναι παρόμοιες, δηλαδή περιέχουν μετατροπές, ασκήσεις και προβλήματα. Αυτό που διαφέρει είναι ότι τη δεκαετία του 00' περιέχονται αρκετές δραστηριότητες ζωγραφικής, γεγονός που βασίζεται στη διαθεματικότητα του τελευταίου Αναλυτικού προγράμματος το 2003.

2.4. Η μέτρηση του χρόνου στα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών

Τη δεκαετία του 80’

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω στα Αναλυτικά προγράμματα η εισαγωγή της μέτρησης του χρόνου πραγματοποιείται από την Α΄ δημοτικού. Το σχολικό βιβλίο περιέχει εικόνες από διαφορετικές φάσεις της ζωής των ανθρώπων και οι μαθητές/τριες καλούνται να βάλουν σε σειρά τα διάφορα γεγονότα.

Στη Β΄ δημοτικού το σχολικό βιβλίο περιέχει ρολόγια, στα οποία οι μαθητές/τριες παρατηρούν, γράφουν την ώρα στο 12ωρο και τοποθετούν κατάλληλα του δείκτες (ωροδείκτη και λεπτοδείκτη).

Στη Γ΄ δημοτικού περιέχονται ξανά ρολόγια με δραστηριότητες όπως, τι ώρα δείχνουν τα ρολόγια, πόση ώρα έχει περάσει από την ώρα που δείχνει το πρώτο ρολόι στο δεύτερο ρολόι, προβλήματα εύρεσης διάρκειας γεγονότων και τέλος, σημείωση της ώρας σε ρολόι με τους δείκτες στις κατάλληλες θέσεις.

Στην Ε΄ δημοτικού το σχολικό βιβλίο περιλαμβάνει στη μέτρηση του χρόνου τη διδασκαλία για την ώρα με δραστηριότητες όπως, να γράφουν με το 24ωρο και το 12ωρο την ώρα, να τη γράφουν με συμμιγή αριθμό και τέλος, ένα πρόβλημα στο οποίο αντλούνται οι πληροφορίες από εικόνα. Επιπλέον, περιλαμβάνει και την ημερομηνία με δραστηριότητες όπως, να γράφουν την ημερομηνία με συμμιγή αριθμό και να λύνουν προβλήματα εύρεσης ημερομηνίας. Τέλος, δίνεται μια βιωματική δραστηριότητα. Οι μαθητές/τριες καλούνται να γράψουν την ημερομηνία γέννησης τους με συμμιγείς αριθμούς.

Στην Στ΄ τάξη ακολουθείται η πορεία της Ε΄ και εδώ οι μαθητές/τριες καλούνται να γράψουν τι ώρα είναι με συμμιγείς αριθμούς. Επιπλέον, χρησιμοποιούν τις μονάδες μέτρησης του χρόνου και εκτελούν μετατροπές στην τελευταία τάξη μιας μονάδας όπως και πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης με συμμιγείς που δηλώνουν χρόνο. Τέλος, γίνονται μετρήσεις του χρόνου αφού προσδιοριστούν στον άξονα του χρόνου, καλούνται να επιλύσουν προβλήματα και να συμπληρώσουν πίνακα.

Τη δεκαετία του 90’

Τα σχολικά εγχειρίδια των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων παραμένουν ίδια με τη δεκαετία του 80’. Η μέτρηση του χρόνου δε διδάσκεται τη δεκαετία του 90’ στη Δ΄ δημοτικού. Στην Ε΄ δημοτικού οι μαθητές/τριες καλούνται να μετατρέπουν τις ώρες από το 24ωρο στο 12ωρο και αντίστροφα, να γράφουν την ημερομηνία με διαφορετικό τρόπο (με συμμιγείς ή με ακέραιους αριθμούς) και να λύνουν προβλήματα με συμμιγείς που δηλώνουν χρόνο.

Στη Στ΄ δημοτικού το σχολικό βιβλίο περιέχει δραστηριότητες με τη γραμμή του χρόνου, προβλήματα με συμμιγείς που δηλώνουν χρόνο και συμπλήρωση πίνακα με ώρες λεπτά και δευτερόλεπτα.

Τη δεκαετία του 00’

Η διδασκαλία της μέτρησης του χρόνου εκτείνεται σε όλες τις τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, έτσι στην Α΄ δημοτικού οι μαθητές/τριες καλούνται να συμπληρώσουν ημερολόγιο, να σχολιάσουν εικόνες που αναφέρονται στις διάφορες ηλικίες των ανθρώπων και να βάλουν σε σειρά εικόνες από την εξέλιξη ενός γεγονότος. Επιπλέον, περιέχει εικόνες για τις εποχές και παρουσιάζει τις ημέρες της εβδομάδας. Στο Τετράδιο Εργασιών περιέχονται εικόνες από την εξέλιξη ενός γεγονότος στο οποίο πρέπει να τοποθετήσουν τον κατάλληλο αριθμό για να δείξουν τη σειρά του. Τέλος, ζητείται να τοποθετηθούν στη σειρά οι ημέρες της εβδομάδας και να δείξουν την ηλικία τους ζωγραφίζοντας των κατάλληλο αριθμών κεριών πάνω σε μια τούρτα.

Στη Β΄ δημοτικού ο χρόνος εισάγεται με μια δραστηριότητα γενεθλίων. Ακολουθούν δραστηριότητες όπως να τοποθετηθούν στη σειρά οι εικόνες με τις εποχές ξεκινώντας από εκείνη την εποχή που πραγματοποιείται η διδασκαλία, να βρεθεί η διάρκεια ενός γεγονότος με τη βοήθεια εικόνων (νύχτα- μέρα), να κυκλωθούν οι ημέρες της εβδομάδας και οι μήνες του χρόνου, να βρεθούν κάποιες ημερομηνίες στο ημερολόγιο και να γίνει μια συνέντευξη με το εβδομαδιαίο πρόγραμμα του διπλανού συμμαθητή τους. Στο Τετράδιο Εργασιών περιλαμβάνονται εικόνες να τοποθετηθούν στη σειρά, δραστηριότητα ζωγραφικής μιας ιστορίας και υπολογισμός ηλικίας με αριθμούς. Τέλος, περιέχει βιωματικές δραστηριότητες όπως ο τρόπος απομνημόνευσης των ημερών των μηνών και πόσο ζουν κάποια δέντρα, φυτά κ.λπ.

Για την Γ΄ δημοτικού ο χρόνος εισάγεται με τη δραστηριότητα «πόση ώρα θα διαρκέσει κάθε διαδρομή». Στη συνέχεια, δίνεται ένα πρόγραμμα τηλεόρασης και ένα ημερολόγιο για να κυκλώσουν ημερομηνίες. Στο Τετράδιο Εργασιών παρουσιάζονται ρολόγια να τα αντιστοιχήσουν με τη σωστή ώρα, ημερολόγιο και πως ψάχνω σε αυτό και τέλος, δραστηριότητα με το να τοποθετήσουν δείκτες στα ρολόγια και να γράφουν τι ώρα είναι.

Στη Δ΄ δημοτικού παρουσιάζονται τα είδη του ρολογιού και η ενότητα ξεκινά με εικόνες ψηφιακού και αναλογικού ρολογιού. Στη συνέχεια, δίνεται πρόβλημα με το πόση ώρα πέρασε και ακολουθούν πράξεις με συμμιγείς που δηλώνουν χρόνο. Έπειτα, ακολουθεί δραστηριότητα συμπλήρωσης γενεαλογικού δέντρου. Επιπλέον, δίνεται δραστηριότητα με χρονολογίες που βρίσκονται στη γραμμή του χρόνου και ζητείται σύγκριση μεταξύ κινέζικου και ελληνικού ημερολογίου. Τέλος, δίνεται δραστηριότητα με συμπλήρωση δεικτών στο αναλογικό ρολόι και γραφή της ώρας με ψηφιακό τρόπο. Στο Τετράδιο Εργασιών περιλαμβάνονται δραστηριότητες με συμπλήρωση γραμμής του χρόνου σε διάφορα προβλήματα, με σχέσεις μεταξύ των μονάδων μέτρησης του χρόνου (μήνες, χρόνια, χιλιετία), με συμπλήρωση ρολογιού (ψηφιακού και αναλογικού), με υπολογισμό διάρκειας γεγονότων.

Στην Ε΄ δημοτικού περιλαμβάνονται δραστηριότητες με μετατροπές μονάδων μέτρησης και πράξεις με συμμιγείς που δηλώνουν χρόνο. Στο Τετράδιο Εργασιών περιέχονται δραστηριότητες με σύγκριση μέσα από μετατροπές μονάδων μέτρησης, με αριθμογραμμή για την ώρα, με το τι ώρα δείχνει το ρολόι (ψηφιακό και αναλογικό) και με πίνακα ανακοινώσεων δρομολογίων.

Στη Στ΄ δημοτικού περιλαμβάνονται δραστηριότητες όπως το τηλεοπτικό πρόγραμμα, η ώρα Γκρήνουιτς και πράξεις με συμμιγείς. Στο Τετράδιο Εργασιών υπάρχουν δραστηριότητες μετατροπής μονάδων μέτρησης, συμπλήρωση πίνακα με το πόση ώρα πίσω ή μπροστά είναι το ρολόι, προβλήματα και δραστηριότητες με προεκτάσεις.

2.5. Η μέτρηση του χρόνου στα σχολικά εγχειρίδια Μελέτης του Περιβάλλοντος

Η δεκαετία του 80'και του 90'

Για τη Μελέτη του Περιβάλλοντος τα Αναλυτικά Προγράμματα παρέμειναν ίδια τη δεκαετία του 80' και του 90'. Η έννοια του χρόνου στα σχολικά εγχειρίδια εισάγεται από την Α΄ δημοτικού και παρουσιάζεται με εικόνες που δείχνουν την εξέλιξη ενός γεγονότος στις οποίες ζητείται να παρατηρήσουν τι δείχνουν. Επιπλέον, παρουσιάζονται εικόνες τις οποίες ζητείται να τις βάλουν σε σωστή χρονική σειρά. Ακόμη, περιλαμβάνεται δραστηριότητα για τους μήνες με ερωτήσεις όπως, «ποιο μήνα έχουμε τώρα», «ποιο μήνα είχαμε πριν» και «ποιο μήνα θα έχουμε μετά». Το βιβλίο του μαθητή συνεχίζει με δραστηριότητες όπως, εικόνες που δείχνουν αλλαγές σε δέντρα ή ζώα, οι ημέρες της εβδομάδας σε σειρά, οι εποχές σε εικόνες μαζί με τους μήνες που περιλαμβάνει κάθε εποχή, εικόνα με αναλογικό ρολόι αλλά και εικόνα με αναλογικά και ψηφιακά ρολόγια οι οποίες καλούνται να σχολιαστούν στο πως μετράμε το χρόνο.

Στη Β΄ δημοτικού το σχολικό εγχειρίδιο με εικόνες εισάγει τους/τις μαθητές/τριες στο πως μετράμε τις μέρες, τους μήνες και τα χρόνια και δηλώνει τις μεταξύ τους σχέσεις. Δίνονται ερωτήσεις οι απαντήσεις των οποίων προκύπτουν από την παρατήρηση εικόνων.

Στο Τετράδιο Εργασιών δίνονται πίνακες να συμπληρωθούν με τον καιρό μιας εβδομάδας και τον άνεμο για έναν μήνα.

Στη Γ΄ δημοτικού όπως δηλώνεται και στο βιβλίο του δασκάλου η διδασκαλία ακολουθεί το σχολικό εγχειρίδιο με τις εικόνες, με πείραμα για την κατανόηση της επανάληψης της μέρας και της νύχτας, με δραστηριότητες που περιλαμβάνουν ρολόγια που δείχνουν το 24ωρο και με κείμενο το οποίο εισάγει τους /τις μαθητές/τριες στις έννοιες *παρόν- παρελθόν- μέλλον*. Ο εκπαιδευτικός μπορεί επιπλέον να σχεδιάσει τις παραστάσεις στον πίνακα αλλά και να τεντώσει ένα σχοινί, να βάλει ένα βέλος στη μια άκρη, τη γέννηση του Χριστού στη μέση, τα π. Χ. και μ. Χ. στις δύο άκρες και τέλος, να τοποθετήσει διάφορες εικόνες γνωστές στους μαθητές όπως, ένας άθλος του Ηρακλή, μια εικόνα από τον Τρωικό πόλεμο, μια από τον Παρθενώνα, μια σκηνή από την επανάσταση του 1821 κ.α.

Στο Τετράδιο Εργασιών δίνονται δραστηριότητες όπως, να γράψουν οι μαθητές/τριες την ώρα που δείχνει το ρολόι με αναλογικό τρόπο, να βάλουν τους δείκτες στην ώρα που γράφει από κάτω, συμπλήρωση κενών της ώρας με ψηφιακό και αναλογικό τρόπο, να κολλήσουν εικόνες με τη σωστή χρονική σειρά και να συμπληρώσουν προτάσεις γράφοντας δίπλα αν ανήκει αντίστοιχα στο παρόν, στο παρελθόν ή στο μέλλον.

Στη Δ΄ δημοτικού διδάσκεται το σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ δημοτικού.

Η δεκαετία του 00'

Για την Α΄ δημοτικού η έννοια του χρόνου και της χρονικής εξέλιξης εισάγεται μέσω εικόνων που δείχνουν την εξέλιξη ενός ανθρώπου. Για παράδειγμα, την αλλαγή από μωρό σε παιδί. Η μέτρηση του χρόνου εισάγεται με μια εικόνα που παρουσιάζει έναν διάλογο. Σε αυτό το διάλογο γίνεται λόγος για το μεγάλο ρολόι, τον ήλιο. Επιπλέον, παρουσιάζονται οι μέρες με στιχάκια και ζητείται να συμπληρωθούν οι μήνες σε εικόνα με τους μήνες και τις εποχές. Ακόμη, περιλαμβάνεται δραστηριότητα ζωγραφικής, να ζωγραφίσουν στα βαγόνια του την εξέλιξη ενός γεγονότος. Τέλος, ζητείται να γράψουν ένα παραμύθι με τον ήλιο

Στο Τετράδιο Εργασιών περιέχονται δραστηριότητες ζωγραφικής «πως φαντάζομαι την οικογένειά μου όταν τελειώσω το δημοτικό», μέτρησης με κλεψύδρα «πόσες φορές θα γυρίσω την κλεψύδρα όταν γράφω ορθογραφία», τραγουδιού με τους μήνες, ζωγραφικής σε ομάδες τον κάθε μήνα, τραγουδιού για τον ήλιο, παιχνιδιού όπου ένα παιδί είναι ο ήλιος και τα υπόλοιπα παιδιά σε ζευγάρια γυρίζουν γύρω από τον ήλιο σταματώντας σε κάποιον ήχο και φωνάζοντας μέρα ή νύχτα ανάλογα με τον αν έβλεπαν τον ήλιο ή όχι.

Στη Β΄ δημοτικού το σχολικό εγχειρίδιο δίνει ερωτήσεις που απαντώνται μέσω παρατήρησης εικόνων. Περιλαμβάνει συμπλήρωση πίνακα του προγράμματος των μαθημάτων, απόσπασμα για τις ημέρες από παραμύθι και να συνεχίσουν το «παραμυθένιο πρόγραμμα», συμπλήρωση κενών με τις εποχές και πότε γεννήθηκε κάθε παιδί και συμπλήρωση της γραμμής ζωής κάθε παιδιού από πέρυσι μέχρι σήμερα.

Στο Τετράδιο Εργασιών δίνεται Φύλλο Εργασίας με τον ελεύθερο χρόνο πως αξιοποιείται και ακόμη ένα Φύλλο Εργασίας με το πόσοι μαθητές γεννήθηκαν σε κάθε εποχή του χρόνου.

Στον Πίνακα 7 παρουσιάζονται οι τρόποι διδασκαλίας της μέτρησης του χρόνου στα δύο γνωστικά αντικείμενα, Μαθηματικά και Μελέτη Περιβάλλοντος.

Πίνακας 7: Συγκριτικός πίνακας για τον τρόπο διδασκαλίας της μέτρησης του χρόνου στα Μαθηματικά και τη Μελέτη Περιβάλλοντος.

ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ/ΤΡΟΠΟΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ	
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ	ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ
Προβλήματα με υπολογισμό χρόνου, πράξεις με συμμιγείς, εικόνες ρολογιών από διαφορετικές φάσεις της ζωής του ανθρώπου, τι ώρα είναι, τι ώρα δείχνουν τα ρολόγια, γραφή ώρας με συμμιγείς, επίλυση προβλημάτων με πληροφορίες σε εικόνες, μετατροπές στην τελευταία τάξη μιας μονάδας, συμπλήρωση πίνακα, συμπλήρωση ημερολογίου, δραστηριότητες με ζωγραφική (βλ. παράρτημα).	Πείραμα για την επανάληψη ημέρας-νύχτας, εικόνες από διάφορες φάσεις της ζωής του ανθρώπου, εικόνες με ρολόγια, εικόνες με αλλαγές σε δέντρα ή ζώα, οι ημέρες της εβδομάδας σε σειρά, οι εποχές σε εικόνες μαζί με τους μήνες που περιέχουν, συμπλήρωση πίνακα με τον καιρό μιας εβδομάδας και τον άνεμο ενός μήνα, παραμύθι με τον ήλιο, ζωγραφική, μετρήσεις με κλεψύδρα, συμπλήρωση της γραμμής ζωής κάθε παιδιού από πέρυσι μέχρι σήμερα (βλ. παράρτημα).

Παρατηρείται ότι η προσέγγιση των Μαθηματικών για τη μέτρηση του χρόνου αφορά τις πράξεις και τον υπολογισμό χρονικής διάρκειας, ενώ στη Μελέτη Περιβάλλοντος αφορά την καθημερινή ζωή, την οργάνωση του χρόνου, την εξήγηση των φαινομένων όπως για παράδειγμα αυτή του ημερονυκτίου.

Επιπλέον, παρατηρείται ότι η μέτρηση του χρόνου στα Μαθηματικά διδάσκεται ως τη Στ΄ δημοτικού, ενώ στη Μελέτη Περιβάλλοντος τη δεκαετία του 80’ και του 90’ ως τη Δ΄ δημοτικού και τη δεκαετία του 00’ ως τη Β΄ δημοτικού.
Ως προς τον τρόπο που προσεγγίζουν την έννοια τα δύο γνωστικά αντικείμενα, παρατηρείται ότι στα Μαθηματικά περιέχονται προβλήματα με υπολογισμό χρόνου, δηλαδή πράξεις με συμμιγείς αριθμούς. Στη Μελέτη Περιβάλλοντος προσεγγίζεται η έννοια περισσότερο εμπειρικά. Για παράδειγμα, το πείραμα για την κατανόηση της επανάληψης της ημέρας με τη νύχτα. Όμως, και στα Μαθηματικά και στη Μελέτη Περιβάλλοντος περιέχονται πολλές εικόνες , ιδιαίτερα στις μικρές τάξεις. Τέλος, τη δεκαετία του 00’ και στα δύο γνωστικά αντικείμενα παρατηρείται εμπλουτισμός δραστηριοτήτων. Εισάγονται δραστηριότητες με ζωγραφική και διάφορες άλλες διαθεματικές δραστηριότητες στα Μαθηματικά και δραστηριότητες με ζωγραφική, παραμύθια και στιχάκια στη Μελέτη Περιβάλλοντος.

3. Η μάθηση και η κατανόηση στα μαθηματικά

3.1. Η μάθηση στα μαθηματικά

Οι θεωρίες μάθησης για τα μαθηματικά δεν είναι ανεξάρτητες από τις γενικές θεωρίες μάθησης. Αν και η μαθηματική γνώση απαιτεί κάτι περισσότερο από μια απλή εφαρμογή γενικών αρχών, εντούτοις έχει τα ίδια γενικά χαρακτηριστικά με τη διαδικασία απόκτησης άλλων γνωστικών συστημάτων (Κολέζα, 2000).

Αρχικά, χαρακτηριστικό αποτελεί ότι η απόκτηση γνώσης είναι μια διαρκής διαδικασία επαναδόμησης. Αυτό συμβαίνει γιατί η ποσότητα της γνώσης όχι μόνο αυξάνεται αλλά η καινούρια γνώση προκαλεί επαναδιάταξη της ήδη υπάρχουσας (Rumelhart & Norman, 1978: Κολέζα, 2000).

Ένα δεύτερο χαρακτηριστικό είναι ότι η διαδικασία κατασκευής της γνώσης δεν είναι μια καθαρά ατομική γνωστική διαδικασία, αλλά επηρεάζεται από εσωτερικούς και εξωτερικούς παράγοντες. Εσωτερικά η επιρροή προκύπτει από την ήδη υπάρχουσα γνώση (Gelman, Gallistel, 1978: Κολέζα, 2000) και εξωτερικά από άλλα άτομα ή κοινωνικοπολιτιστικούς παράγοντες (Κολέζα, 2000).

Το τρίτο χαρακτηριστικό είναι ότι η διαδικασία απόκτησης γνώσης καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τη γνωστική περιοχή. Η γνώση που διαθέτει κάθε άτομο χωρίζεται σε υποσύνολα-περιοχές γνώσεων και κάθε ένα από αυτά εμπλουτίζεται ανεξάρτητα μέσω διαδικασιών επίλυσης προβλημάτων. Συνεπώς, η γνώση αποκτιέται ξεχωριστά σε κάθε περιοχή αν και πολύ συχνά παρατηρείται το φαινόμενο μεταφοράς της γνώσης από μια περιοχή σε άλλη (Κολέζα, 2000).

Ένα τέταρτο χαρακτηριστικό είναι ότι η αποκτηθείσα γνώση εξαρτάται άμεσα από το πλαίσιο μέσα στο οποίο αποκτήθηκε. Κατά την επίλυση μιας προβληματικής κατάστασης στα μαθηματικά η γνώση που χρησιμοποιείται για την επίλυσή της είναι στενά συνδεδεμένη με αυτή την κατάσταση, δηλαδή η γνώση αυτή είναι πλαισιοποιημένη και σε μια άλλη προβληματική κατάσταση αρχικά δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Για παράδειγμα, ο τρόπος που διδάσκονται τα κλάσματα επηρεάζει το βαθμό κατανόησης τους από τους μαθητές. Συγκεκριμένα, εάν τα κλάσματα εισαχθούν σε ένα πλαίσιο διαμέρισης ενός γλυκού, τα παιδιά μπορούν εύκολα να κατανοήσουν τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, αλλά όχι του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Επομένως, η γνώση που ανασύρουμε από τη μνήμη μας είναι μια «πλαισιοποιημένη» γνώση. Όσο το υποκείμενο αποκτά πείρα, η γνώση πάνω στην οποία στηρίζονται οι νοητικές του ικανότητες, σταδιακά αποπλαισιοποιείται με την έννοια ότι παύει να συνδέεται στενά και να εξαρτάται από το πλαίσιο μέσα στο οποίο αποκτήθηκε (Κολέζα, 2000).

Τέλος, ένα πέμπτο χαρακτηριστικό είναι ότι η διαδικασία απόκτησης της γνώσης είναι μια κατασκευαστική διαδικασία. Η γνώση αποκτιέται μέσω κατασκευής και όχι απλά μέσω μιας διαδικασίας μετάδοσης (Resnick 1987, 1989: Κολέζα, 2000).

Βέβαια, ως ένα βαθμό η γνώση μπορεί να μεταδοθεί. Αυτή η γνώση είναι κυρίως διαδικαστική, δηλαδή γνώση διαδικασιών και αλγορίθμων επίλυσης προβλημάτων. Η εννοιολογική γνώση μπορεί και εκείνη να μεταδοθεί αν πομπός και δέκτης διαθέτουν την ίδια κωδικοποίηση (σύμβολα) για ένα πρόβλημα. Η δυνατότητα μετάδοσης ή

κατασκευής αντανακλά τη διπλή φύση της μαθηματικής γνώσης: ως εργαλείο και ως αντικείμενο έρευνας.
Τα μαθηματικά ως εργαλείο καλύπτουν το πότε και το πώς θα πραγματοποιηθούν αποτελεσματικά κάποιες διαδικασίες. Οι διαδικασίες αυτές μετατρέπουν ένα πραγματικό πρόβλημα σε μια μαθηματική αναπαράσταση με σύμβολα, γραφήματα κ.λπ., αλλά και επεξεργάζονται αυτές τις αναπαραστάσεις για την εύρεση μιας λύσης.
Παρόλα αυτά η διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος μπορεί να μην είναι εμφανής οπότε απαιτείται από το λύτη η κατανόηση του εννοιολογικού πλαισίου του προβλήματος. Ενδέχεται, επίσης ο λύτης από επιστημονικό ενδιαφέρον να θελήσει να βελτιώσει τη διαδικασία επίλυσης ή να δημιουργήσει καινούρια. Αυτού του είδους η ενασχόληση εμπίπτει με το ρόλο των μαθηματικών ως αντικειμένου έρευνας και η απόκτηση μαθηματικής γνώσης ως απόκτηση συγκεκριμένων γνωστικών ικανοτήτων (κριτική σκέψη, αναλογικός συλλογισμός κ.λπ.) Αν πρόκειται για σχολικό περιβάλλον λέμε τότε ότι οι μαθητές/τριες δεν χρησιμοποιούν απλά τα μαθηματικά, αλλά «κάνουν» μαθηματικά (Κολέζα, 2000).

3.2. Η κατανόηση στα μαθηματικά

Η κατανόηση στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης αντιμετωπίζεται από τους ερευνητές υπό το πρίσμα τριών οπτικών. Αυτές είναι η αναζήτηση και ανάπτυξη διδακτικών εργαλείων με στόχο τη διευκόλυνση της κατανόησης, η διερεύνηση παραμέτρων που επηρεάζουν τη διαδικασία μάθησης και κατανόησης εννοιών και σχέσεων και τέλος, η κατασκευή θεωρητικών μοντέλων κατανόησης.
Τα θεωρητικά μοντέλα κατανόησης χωρίζονται σε ***ρυθμιστικά***, δηλαδή στην καταγραφή νοητικών ή άλλων ικανοτήτων που πρέπει να έχουν οι μαθητές/τριες για να μπορούμε να μιλάμε για κατανόηση ή για βελτίωση της κατανόησης και σε ***περιγραφικά***, δηλαδή στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές/τριες κατανοούν τα μαθηματικά γενικά ή σε σχέση με εξειδικευμένες μαθηματικές περιοχές.
Οι θεωρίες που αναπτύσσονται είναι τουλάχιστον τρεις. Εκείνες που επικεντρώνονται σε μια ιεράρχηση των επιπέδων κατανόησης, εκείνες που αντιμετωπίζουν τη διαδικασία κατανόησης ως μια διαλεκτική εργαλείου-αντικειμένου, όπως αυτή του Skemp (1976), δηλαδή από τη μία τα μαθηματικά ως κανόνες-εργαλείο χωρίς αιτιολόγηση και από την άλλη ως κατανόηση σχέσεων (γνώση του τι και του γιατί) και τέλος, εκείνες που επιχειρούν μια ιστορικό-εμπειρική προσέγγιση, δηλαδή όταν το ενδιαφέρον των ερευνητών στρέφεται στα εμπόδια της κατανόησης τα οποία αναλύονται είτε σε ιστορικό πλαίσιο, είτε στα πλαίσια της καθημερινής πραγματικότητας των μαθητών/τριών (Piaget, J. & Garcia, R. 1989: Κολέζα, 2000). Τα πιο σημαντικά ερωτήματα στα οποία καλείται να απαντήσει μια τέτοια θεωρία είναι:

- Πώς να διδάξουμε ώστε να καταλάβουν οι μαθητές;
- Γιατί παρά τις προσπάθειες και τις εξηγήσεις μας πολλοί μαθητές δεν καταλαβαίνουν και συνεχίζουν να κάνουν λάθη;
- Τι ακριβώς δεν καταλαβαίνουν; (Κολέζα, 2000)

Το να έχουμε ή να μην έχουμε μια γνώση διαφέρει από το αν κατανοούμε αυτή τη γνώση. Για παράδειγμα, πως μάθατε το 8:2; Αν το έχετε απομνημονεύσει όπως οι περισσότεροι ενήλικες, ίσως δεν σκεφτήκατε τις άλλες ιδέες, όπως για παράδειγμα, ότι το 4 είναι το μισό του 8. Είναι ο τρόπος που αντιλαμβάνεστε το 8:2 ίδιος με εκείνον ενός ατόμου που συνέδεσε ορισμένες από αυτές τις άλλες ιδέες με το συγκεκριμένο δεδομένο;

Η κατανόηση μπορεί να χαρακτηριστεί ως μέσο μέτρησης της ποιότητας και της ποσότητας των συνδέσεων μιας ιδέας με τις υπάρχουσες ιδέες. Εξαρτάται από την ύπαρξη κατάλληλων ιδεών και από τη δημιουργία νέων συνδέσεων (Backhouse, Haggarty, Pirie & Statton, 1992. Davies, 1986. Hiebert & Carpenter, 1992. Janvier, 1987. Schroeder & Lester, 1989: Van de Walle, 2005).

Για να αντιληφθούμε την κατανόηση ενός ατόμου θα πρέπει να φανταστούμε μια ευθεία γραμμή στις άκρες της οποίας υπάρχουν από τη μία η κατανόηση μιας ιδέας με πολλές συνδέσεις, η συσχετιστική κατανόηση κατά τον Skemp και από την άλλη η κατανόηση μιας ιδέας με λίγες συνδέσεις, η συντελεστική κατανόηση κατά τον ίδιο. Η γνώση που αποκτάται συντελεστικά αποστηθίζεται συνήθως με πρακτική εξάσκηση.

Συνεπώς, η κατανόηση από άτομο σε άτομο διαφέρει τόσο ποιοτικά όσο και ποσοτικά. Το γεγονός αυτό οδηγεί από την ερώτηση «Το ξέρει;» στην ερώτηση «Πώς το καταλαβαίνει; Ποιες ιδέες συνδέει με αυτό;»

Από τα δύο είδη κατανόησης αυτό της συσχετιστικής παρατηρείται ότι διαθέτει κάποια οφέλη που δεν διαθέτει η συντελεστική. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω η συσχετιστική κατανόηση μιας ιδέας σημαίνει ότι αυτή η νέα ιδέα έχει αρκετές συνδέσεις με ήδη υπάρχουσες ιδέες του ατόμου. Για το λόγο αυτό η συσχετιστική κατανόηση παρέχει εσωτερική επιβράβευση συνεπώς βελτιώνει τις στάσεις και τις πεποιθήσεις. Η νέα γνώση έχει νόημα, ταιριάζει, έχει μια ευχάριστη αίσθηση. Αντίθετα, όταν αποστηθίζεται κάτι τα κίνητρα είναι εξωτερικά, όπως για παράδειγμα να ευχαριστήσουν τους γονείς και όταν εξαφανίζονται τα κίνητρα, οι μαθητές/τριες παύουν να ενδιαφέρονται για το μάθημα. Επιπλέον, ενισχύει τη μνήμη και δεν χρειάζεται να θυμόμαστε πολλά. Η μνήμη ως μια διαδικασία ανάκτησης πληροφοριών διευκολύνεται με τις έννοιες που μαθαίνονται συσχετιστικά. Αυτό γιατί υπάρχουν περισσότερες πληροφορίες που μπορούν να οδηγήσουν στην έννοια που επιθυμούμε να ανακαλέσουμε (Van de Walle, 2005). Δεν χρειάζεται να θυμόμαστε πολλά γιατί όπως αναφέρουν οι εποικοδομιστές (Brooks & Brooks, 1993. Schifter & Fosnot, 1993: Van de Walle, 2005) μιλάμε πλέον για τη διδασκαλία των «μεγάλων ιδεών», δηλαδή ιδέες που αποτελούν τεράστια δίκτυα αλληλοσχετιζόμενων εννοιών. Ακόμη, βοηθά στην εκμάθηση νέων εννοιών και διαδικασιών εφόσον μια πλήρως κατανοητή ιδέα είναι πιο εύκολο να επεκταθεί για την εκμάθηση μιας νέας ιδέας, και βελτιώνει τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων, καθώς η επίλυση μεμονωμένων προβλημάτων προϋποθέτει τη μεταφορά ιδεών από το μεμονωμένο συγκείμενο όπου αποκτήθηκαν σε νέες περιστάσεις. Οι έννοιες έχουν πλέον ενσωματωθεί σε ένα πλούσιο δίκτυο και η μεταφορά τους από συγκείμενο σε συγκείμενο ενισχύεται. Το ίδιο συμβαίνει και με την επίλυση προβλημάτων (Van de Walle, 2005). Τέλος, είναι αυτό-παραγόμενη, καθώς όπως επισημαίνουν οι Hiebert & Carpenter, «οι επινοήσεις που ενεργούν στην κατανόηση μπορεί να οδηγήσουν στην κατανόηση νέων πραγμάτων, προκαλώντας το φαινόμενο της χιονοστιβάδας. Καθώς τα δίκτυα αναπτύσσονται και οργανώνονται καλύτερα, αυξάνουν το ενδεχόμενο για επινόηση» (Hiebert & Carpenter, 1992, σ. 74: Van de Walle, 2005).

Όταν οι μαθηματικοί λένε ότι κατανοούν μια μαθηματική θεωρία δεν εννοούν μόνο το συμπέρασμα των θεωρημάτων και των αποδείξεων. Γνωρίζουν σχετικά παραδείγματα και χειρισμούς και πώς συνδέονται. Έχουν την αίσθηση τι χρησιμοποιούν και πότε και τι αξίζει να θυμούνται. Έχουν μια διαίσθηση για το αντικείμενο πώς εξαρτάται και πώς σχετίζεται με άλλες θεωρίες. Δεν πνίγεται στις λεπτομέρειες, αλλά τις αναφέρει όταν χρειάζεται (Mischener, 1978).

Όταν αναλύεις τη γνώση που οι μαθηματικοί και οι μαθητές/τριες χρησιμοποιούν όταν κάνουν ή εξηγούν μαθηματικά γίνεται ξεκάθαρο ότι υπάρχουν ξεχωριστά είδη μαθηματικής γνώσης. Πρώτον, οι ομοειδείς έννοιες, όπως οι ισχυρισμοί των θεωρημάτων και δεύτερον, οι σχέσεις μεταξύ των εννοιών, όπως οι λογικές συνδέσεις ανάμεσα στα θεωρήματα (Mischener, 1978).

Μπορούμε να διακρίνουμε τρεις κατηγορίες εννοιών/αντικειμένων: τα αποτελέσματα, τα οποία περιέχουν τα παραδοσιακά λογικο-συμπερασματικά στοιχεία των μαθηματικών π.χ. θεωρήματα, τα παραδείγματα, τα οποία περιέχουν επεξηγηματικό υλικό και οι αρχές που περιέχουν μαθηματικούς ορισμούς, χειρισμό αντιλήψεων και πληροφορίας (Mischener, 1978).

Για το λόγο αυτό η μαθηματική γνώση μπορεί να δομηθεί από τρεις τύπους αντικειμένων/σχέσεων, όπως παραδείγματα/πηγή κατασκευής, αποτελέσματα/λογική στήριξη και αρχές/παιδαγωγική καθοδήγηση, τα οποία με τη σειρά τους καθιερώνουν τρεις χώρους αναπαράστασης για μια μαθηματική θεωρία: χώρος παραδειγμάτων, χώρος αποτελεσμάτων και χώρος αρχών (Mischener, 1978).

Η κατανόηση έχει πολλά επίπεδα και ποτέ δεν τελειώνει απόλυτα. Ο Polya (1962) περιγράφει τέσσερα επίπεδα κατανόησης, έναν κανόνα από τη μελέτη του Spinoza.

1) «Μηχανική»: Όταν αποστηθίζεται ο κανόνας και μπορεί να εφαρμοστεί σωστά.
2) «Επαγωγική»: Όταν δοκιμάζεται σε απλές περιπτώσεις και πείθει ότι δουλεύει σε εκείνες τις περιπτώσεις.
3) «Λογική»: Όταν επιδέχεται μιας απόδειξης.
4) «Διαισθητική»: Όταν πείθεται από την αλήθεια του κανόνα χωρίς καμιά αμφιβολία (Polya, 1962 στο Mischener, 1978).

Ο Poincave (1929) έγραψε επίσης για την κατανόηση στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, τόνισε την ανάγκη για πρόοδο πέραν του επιπέδου λογικής, του ορθολογιστικού επιπέδου.

Να κατανοήσεις την απόδειξη του θεωρήματος σημαίνει να εξετάσεις επιτυχώς κάθε συλλογισμό που περιλαμβάνει και να εξακριβώσεις την ορθότητά του, τη συμφωνία του στους κανόνες του παιχνιδιού; Ομοίως, το να κατανοήσεις έναν ορισμό είναι αρκετό να αναγνωρίσεις ότι ήδη γνωρίζεις το νόημα όλων των απασχολούμενων όρων; Για μερικούς, ναι. Όταν έχουν κάνει αυτό λένε «κατάλαβα». Για την πλειοψηφία, όχι (Poincave, 1929 στο Mischener, 1978).

Για να καταφέρουμε βαθιά κατανόηση ένα πρέπει να καθιερωθεί, πολλές συνδέσεις όλων των ειδών.

Στοιχεία της διαδικασίας της κατανόησης

1) Γνώση των εννοιών και των σχέσεων
2) Γενική στρατηγική
3) Μεταγνώση
4) Επιστημολογική γνώση
5) Αναπαραστασιακή γνώση (Mischener, 1978).

3.3. Τα μαθηματικά της καθημερινής ζωής

Πολύ συχνά ακούγεται η έκφραση: «Τα μαθηματικά είναι παντού». Περισσότερο για τα μαθηματικά της καθημερινής ζωής. Τα μαθηματικά βοηθούν τον άνθρωπο στις ανάγκες της καθημερινής του ζωής, επεμβαίνουν παντού στη ζωή του, χρησιμοποιούνται από όλους τους ανθρώπους ανεξάρτητα από φύλο ή ηλικία και καθορίζουν κάθε τους συναλλαγή.

Η καθοριστική επέμβαση των Μαθηματικών στις ανάγκες των ανθρώπων οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η διδασκαλία των μαθηματικών θα ήταν καλύτερη αν συνδεόταν με προβλήματα της καθημερινής ζωής (Εξαρχάκος, 1993).

Στα μαθηματικά της καθημερινής ζωής δεν αναγκάζονται οι μαθητές να ακολουθήσουν μια καθορισμένη μέθοδο, όπως συμβαίνει συχνά στο σχολείο. Μπορούν να αφήσουν μια μέθοδο λύσης ενός προβλήματος. Είναι ελεύθεροι να επινοήσουν τις δικές τους μεθόδους λύσης και αυτές συχνά αντανακλούν ένα υψηλό επίπεδο ελαστικότητας. Έχουν όχι μόνο τον έλεγχο της μεθόδου λύσης αλλά της ίδιας της αποστολής, την οποία μπορούν να τροποποιούν ή να εγκαταλείπουν, πράγμα που δεν συμβαίνει στη σχολική τάξη.

Από την άλλη, τα μαθηματικά της καθημερινής ζωής είναι περιορισμένου περιβάλλοντος και ως τέτοια ίσως περιορίζονται στη γενίκευσή τους (Resnick, 1987: Civil, 2002). Επίσης, σε καθημερινές δραστηριότητες το μαθηματικό περιεχόμενο είναι συχνά κρυμμένο. Ίσως, δεν γνωρίζουμε ότι χρησιμοποιούμε μαθηματικά και όταν γίνεται φανερό ίσως διαφωνούμε πώς ό,τι κάνουμε είναι μαθηματικά. Μπορούμε να πούμε ότι χρησιμοποιούμε μαθηματικά αν δεν είμαστε σίγουροι ότι το κάνουμε;

Με μια επέκταση όλοι είναι μαθηματικοί και κάνουν μαθηματικά ενσυνείδητα. Να αγοράσουν στο σούπερ μάρκετ, να μετρήσουν μια πλευρά τοίχου ή να βάψουν ένα κεραμικό δοχείο με ένα μεθοδικό τρόπο, κάνοντας μαθηματικά (Civil, 1995).

Οι Nass και Hoyles (1992) αρνούνται την άποψη ότι οι άνθρωποι που ασχολούνται με δραστηριότητες στις οποίες ίσως υπάρχουν «παγωμένα μαθηματικά» ότι κάνουν μαθηματικά. Συγκεκριμένα, αναφέρουν: «Σύμφωνα με την άποψή μας τα μαθηματικά υπάρχουν στο μυαλό μας και όχι στο δρόμο» (Nass & Hoyles ,1992: Civil, 1995)

Στην έρευνα της Civil (2002) , η οποία αποτελεί μια προσπάθεια σύνδεσης των τριών τύπων μαθηματικών, τα σχολικά, τα καθημερινά και τα ακαδημαϊκά, οι μαθητές/τριες συμμετείχαν όταν η δραστηριότητα ήταν σχετική με καθημερινά μαθηματικά αλλά αποχωρούσαν από τη συζήτηση όταν κινούνταν σε πιο επίσημα/τυπικά μαθηματικά, γεγονός που επιβεβαιώνει την άποψη ότι στη διδασκαλία θα πρέπει να χρησιμοποιούνται προβλήματα της καθημερινής ζωής.

Οι έννοιες του αριθμού, του χρόνου και του χώρου δημιουργήθηκαν για να καλύψουν και να διαχειριστούν συγκεκριμένες κοινωνικές απαιτήσεις. Συνεπώς, αυτές οι

μαθηματικές έννοιες εμπεριέχονται σε μεγάλο βαθμό στις καθημερινές δραστηριότητες.
Οι συμμιγείς αριθμοί αποτελούν ένα κατεξοχήν κομμάτι των μαθηματικών της καθημερινής ζωής. Η έκφρασή τους στον καθημερινό λόγο, όπως το μήκος ενός πάγκου, ή η ώρα αποτελούν στοιχεία που αποδεικνύουν τη σύνδεση τους με την καθημερινή ζωή.
Οι συμμιγείς διαθέτουν αρκετές εννοιολογικές δυσκολίες, καθώς άπτονται πολλών άλλων εννοιών. Αυτές είναι τα συστήματα αρίθμησης, τα μετρικά συστήματα, η αξία θέσης ψηφίου, η απόλυτη σύνδεση με τη μονάδα μέτρησης, όπως και η νοηματοδότηση των πράξεων μεταξύ συμμιγών.

3.3.1. Γενική επισκόπηση αιτιών των παρανοήσεων

Οι παρανοήσεις σε όλες τις έννοιες και κατ' επέκταση στις μαθηματικές έννοιες διαθέτουν κάποια γενικά χαρακτηριστικά. Αυτά συνοψίζονται στα εξής:

- Αυταπόδεικτες, δηλαδή δεν αισθάνεται την ανάγκη να το αποδείξει.
- Χρησιμοποιούνται αναγκαστικά σε μια αρχική απάντηση.
- Ευρέως διαδεδομένες σε όλα τα γνωστικά επίπεδα.
- Ισχυρές, δηλαδή δεν αποδομούνται εύκολα.
- Υποστηρίζονται συχνά από καθημερινή χρήση της γλώσσας και των συμβόλων (Steinle, 2004).

3.3.1α. Οι παρανοήσεις στους δεκαδικούς αριθμούς

Παρανοήσεις στους δεκαδικούς έχουν παρατηρηθεί σε όλες τις πράξεις αλλά και στη διάταξη. Πολλά προβλήματα με δεκαδικούς αριθμούς βασίζονται σε δεδομένα μάθησης ή παρατήρησης κατά την ενασχόληση με τους φυσικούς αριθμούς. Πολλές ιδιότητες των φυσικών αριθμών μεταφέρονται μηχανικά στους υπόλοιπους πραγματικούς αριθμούς, οδηγώντας σε πολλές λανθασμένες πεποιθήσεις (Sadi, 2007).
Ξεκινώντας από την πρόσθεση κατά τον Amar Sadi (2007), η πιο διαδεδομένη μέθοδος που χρησιμοποιούν οι μαθητές/τριες για να προσθέσουν δεκαδικούς αριθμούς περιλαμβάνει:
-πρόσθεση αριθμών πριν την υποδιαστολή και των αριθμών μετά την υποδιαστολή
-λάθη στη σωστή θέση των αριθμών όταν η πράξη γίνεται κάθετα, όπως και στον αλγόριθμο της πρόσθεσης.
Όσο αφορά τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση μια σημαντική ευρέως διαδεδομένη πεποίθηση είναι ότι ο πολλαπλασιασμός δίνει έναν αριθμό απαραίτητα μεγαλύτερο από εκείνον με τον οποίο ξεκινήσαμε και η διαίρεση μικρότερο αριθμό.
Ο λόγος που οι μαθητές/τριες πιστεύουν ότι ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει είναι το *πολλαπλάσιο*. Πολλές καθημερινές εκφράσεις υπονοούν αυτή την περίπτωση, όπως όταν μιλάμε για την αναπαραγωγή φυτών ή ζώων εννοούμε πολλαπλασιασμό. Η λέξη *πολλαπλάσιο* μεταφέρει την αίσθηση πολλών ή ενός μεγάλου αριθμού. Επιπλέον, οι μαθητές/τριες έχοντας υπόψη τους τι συμβαίνει με τους φυσικούς αριθμούς, όπου εκεί πράγματι ο πολλαπλασιασμός δίνει αποτέλεσμα μεγαλύτερου αριθμού, και

μεταφέρουν τις ιδιότητές τους και στους δεκαδικούς, όπως προαναφέρθηκε (Sadi, 2007). Τέλος, σύμφωνα με τους Graeber και Campbell (1993), ο πολλαπλασιασμός συχνά εξηγείται σε νέους μαθητές ως μια επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Αυτή η άποψη κουβαλάει πολλές δευτερεύουσες επιδράσεις, όπως ότι ο πολλαπλασιασμός δίνει μεγαλύτερο αριθμό ως αποτέλεσμα και δυσκολίες στον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών (Graeber & Campbell, 1993 στο Sadi, 2007).
Στη διάταξη των δεκαδικών αριθμών οι σημαντικότερες παρανοήσεις που προέκυψαν μέσα από τις έρευνες των Nesher & Peled (1986), της Peled (1987), των Steinle & Stacey (1998), όπως και της Steinle (2004) είναι οι εξής:
-ο αριθμός με τα περισσότερα ψηφία μετά την υποδιαστολή είναι μεγαλύτερος, γεγονός που βασίζεται στον κανόνα σύγκρισης των φυσικών αριθμών.
-ο αριθμός με τα λιγότερα ψηφία μετά την υποδιαστολή είναι μεγαλύτερος, γεγονός που βασίζεται στο ότι το δέκατο έχει μεγαλύτερη αξία από τα χιλιοστά.

3.3.1β. Τα ερωτήματα που προκύπτουν για τις αντίστοιχες παρανοήσεις στους συμμιγείς

Όσο αφορά την πρόσθεση συμμιγών, όπως στους δεκαδικούς πρέπει η μία υποδιαστολή να είναι κάτω από την άλλη, έτσι και στους συμμιγείς οι μονάδες μέτρησης πρέπει να είναι η μία κάτω από την άλλη. Επιπλέον, όταν η πρόσθεση ξεπερνά την αξία της μονάδας που προστίθεται, θα πρέπει να γίνει μετατροπή και να μεταφερθεί στην αμέσως ανώτερη μονάδα. Προκύπτει, λοιπόν το ερώτημα αν οι μαθητές/τριες τοποθετούν σωστά τους αριθμούς στην πρόσθεση συμμιγών και επιπλέον αν πραγματοποιούν τις κατάλληλες μετατροπές.
Όσο αφορά την αφαίρεση συμμιγών προστίθεται μια επιπλέον δυσκολία αυτή της αναδιάταξης των αριθμών όταν προκύπτει αφαίρεση μεγαλύτερου από μικρότερο αριθμό. Συνειδητοποιούν οι μαθητές/τριες την ανάγκη αναπροσαρμογής ή αντιστρέφουν την αφαίρεση στο κομμάτι που τους δυσκολεύει κάνοντας την αφαίρεση του μικρότερου από το μεγαλύτερο;
Ο πολλαπλασιασμός μεταξύ συμμιγών υφίσταται σε όλες τις περιπτώσεις, εκτός της μέτρησης γωνιών και της μέτρησης του χρόνου. Εξετάζεται, λοιπόν το ερώτημα αν οι μαθητές/τριες πραγματοποιούν τον πολλαπλασιασμό αρχικά καθαρού αριθμού με συμμιγή και στη συνέχεια μεταξύ συμμιγών που δηλώνουν χρόνο χωρίς καμιά διαφορά. Παρατηρούν οι μαθητές/τριες τις μονάδες μέτρησης ή εκτελούν τον πολλαπλασιασμό μόνο σε επίπεδο αριθμών;
Τέλος, όσο αφορά τη διάταξη συμμιγών αριθμών υπό το πρίσμα της διάταξης των δεκαδικών αριθμών προκύπτουν ερωτήματα όπως, είναι μεγαλύτερο αυτό που έχει περισσότερα ψηφία ή είναι μεγαλύτερο αυτό που έχει λιγότερα ψηφία.

3.3.1γ. Τα ερωτήματα που προκύπτουν στους συμμιγείς για τις παρανοήσεις στη μέτρηση του χρόνου

Όσο αφορά τη μέτρηση του χρόνου τα ερωτήματα που προκύπτουν είναι αν οι μαθητές/τριες εκτελούν τις σωστές μετατροπές, όπως 1 ώρα=60 λεπτά, στην πρόσθεση και την αφαίρεση, αν αντιλαμβάνονται ότι ο πολλαπλασιασμός μεταξύ συμμιγών που δηλώνουν χρόνο δεν υφίσταται και τέλος στη διάταξη αν συνειδητοποιούν την αξία των μονάδων, όπως 2 λεπτά είναι περισσότερα από 24 δευτερόλεπτα.

4. Έρευνα

4.1. Στόχοι και συνθήκες

Σύμφωνα με τα ερωτήματα που έχουν τεθεί στην εισαγωγή, αλλά και στον 3ο κεφάλαιο της εργασίας, όπως ότι θα μελετήσουμε τις παρανοήσεις στους συμμιγείς αριθμούς με βάση τις πιο σημαντικές παρανοήσεις στους δεκαδικούς αριθμούς, δημιουργήθηκε το παρακάτω τεστ. Βασισμένο σε 2 έρευνες με μαθητές και 1 έρευνα σε πρόγραμμα σπουδών για τις παρανοήσεις στους δεκαδικούς αριθμούς. Οι ερωτήσεις προέκυψαν από τις συγκλίσεις των αποτελεσμάτων έρευνες με μαθητές και αυτές που αφορούσαν την πράξη του πολλαπλασιασμού.

Στόχοι της έρευνας αποτελούν:

- η μελέτη των παρανοήσεων στις πράξεις των συμμιγών, δηλαδή στη σωστή θέση των συμμιγών για την πρόσθεση και την αφαίρεση, τις μετατροπές που χρειάζονται για να έχει νόημα το αποτέλεσμα, όπως και στις μετατροπές για να είναι δυνατή η πράξη της αφαίρεσης.
- η διάταξη των συμμιγών αριθμών
- η μελέτη των παρανοήσεων όσο αφορά τη μέτρηση του χρόνου. Πιο συγκεκριμένα, παρανοήσεις στις μετατροπές που δηλώνουν χρόνο για τις πράξεις.

Όλα τα παραπάνω υπό το πρίσμα των παρανοήσεων στους δεκαδικούς αριθμούς. Επιχειρείται μια μελέτη ώστε να διαπιστωθεί αν οι πιο σημαντικές παρανοήσεις στους δεκαδικούς αριθμούς συγκλίνουν με αυτές των συμμιγών αριθμών.

4.2. Ερευνητική διαδικασία

Αρχικά, συγκροτήθηκε το διαγνωστικό τεστ (βλ. παράρτημα) που εξέταζε τις παρανοήσεις των μαθητών/τριών στις πράξεις και τη διάταξη των συμμιγών αριθμών. Στη συνέχεια, δόθηκε το τεστ στους/στις μαθητές/τριες και συμπληρώθηκε. Τέλος, αφού ολοκληρώθηκε η συλλογή των δεδομένων από τα τεστ, πραγματοποιήθηκε η ανάλυση των δεδομένων και η εξαγωγή των συμπερασμάτων.

4.2.1. Δείγμα

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τον Απρίλιο του 2016 σε δημοτικό ιδιωτικό σχολείο της Λάρισας. Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 25 μαθητές από τη Δ΄, την Ε΄ και τη Στ΄ τάξη. Συγκεκριμένα, συμμετείχαν 9 μαθητές από τη Δ΄ τάξη, 8 μαθητές από την Ε΄ τάξη και 8 μαθητές από τη Στ΄ τάξη.

4.2.2. Το εκπαιδευτικό υλικό

Αρχικά δόθηκε ερώτηση που αφορούσε τη διάταξη των συμμιγών αριθμών και ζητούνταν να επιλεχθεί ο μεγαλύτερος αριθμός. Οι βασικότερες παρανοήσεις σύμφωνα με τους Steinle (2004) και Nesher (1987) είναι η άποψη των μαθητών/τριών ότι ο δεκαδικός αριθμός με τα περισσότερα ψηφία είναι μεγαλύτερος ή ο δεκαδικός αριθμός με τα λιγότερα ψηφία είναι μεγαλύτερος. Αυτές οι παρανοήσεις έχουν τη βάση τους στις ιδιότητες των φυσικών αριθμών για την πρώτη και στις ιδιότητες των κλασμάτων για τη δεύτερη. Αυτές οι παρανοήσεις ταιριάζουν με τις έννοιες που διδάσκονται στην Δ΄, Ε΄ και Στ΄ τάξη. Δεν θα μπορούσε για παράδειγμα να μελετηθεί η σκέψη ότι αντιλαμβάνονται τους δεκαδικούς αριθμούς, όπως στους αρνητικούς αριθμούς, διότι δεν διδάσκονται οι αρνητικοί αριθμοί στο δημοτικό σχολείο. Αντιθέτως, η σύγκριση των φυσικών αριθμών και η σύγκριση κλασμάτων είναι από τις βασικότερες έννοιες.

Έπειτα, ζητήθηκε να εκτελέσουν πρόσθεση με συμμιγείς. Το πρώτο ερώτημα επεδίωκε να αναδείξει παρανοήσεις στη θέση για την εκτέλεση της πρόσθεσης. Σύμφωνα με τον Sadi (2007), από τις βασικότερες παρανοήσεις στους δεκαδικούς είναι η θέση για την εκτέλεση της πρόσθεσης. Η κατάλληλη θέση αποτέλεσε το σημείο αναφοράς του ερωτήματος. Επιπλέον, επισημαίνεται ότι το σχολικό βιβλίο δίνει δραστηριότητες του τύπου «Να κάνετε κάθετα τις παρακάτω προσθέσεις», συνεπώς, θεωρήθηκε κατάλληλο ερώτημα για τον έλεγχο των παρανοήσεων στη θέση.

Όσο αφορά την πρόσθεση συμμιγών ζητήθηκε επιπλέον, να εκτελεστεί μια πρόσθεση συμμιγών στην οποία δινόταν η σωστή θέση, αλλά επεδίωκε την αναγνώριση παρανοήσεων στις μετατροπές. Κατά τον Sadi (2007), οι μαθητές/τριες αντιλαμβάνονται τον δεκαδικό αριθμό σαν δύο αριθμούς και εκτελούν την πρόσθεση των αριθμών πριν και μετά την υποδιαστολή ξεχωριστά. Επομένως, δεν πραγματοποιούν τις μετατροπές. Μπορούμε να πούμε την έκφραση 64 λεπτά, αλλά αυτό αποτελεί μια σύμβαση. Τα σχολικά βιβλία και στις τρεις τάξεις (Δ΄ , Ε΄ , Στ΄) δίνουν παραδείγματα στα οποία γίνονται οι κατάλληλες μετατροπές. Ακόμη δίνονται δραστηριότητες όπου ζητείται να γίνει αντιστοίχιση της συμβατικής έκφρασης με την έκφραση μετά τη μετατροπή.

Στη συνέχεια, τα ερωτήματα αφορούσαν την αφαίρεση συμμιγών. Αρχικά, επιδιώχθηκε να αναδειχθεί κάποια παρανόηση στον αλγόριθμο της αφαίρεσης, εφόσον δινόταν η θέση των αριθμών. Τέλος, έγινε προσπάθεια να ελεγχθεί η δυσκολία των μετατροπών στην αφαίρεση βασισμένη στο διαφορετικό σύστημα αρίθμησης στις μονάδες μέτρησης του χρόνου. Το συγκεκριμένο ερώτημα προέκυψε από τη δυσκολία που εντοπίζεται στη μετατροπή των συμμιγών στη μέτρηση του χρόνου, μάλιστα παρουσιάζεται και σε δραστηριότητα του βιβλίου (Βαμβακούση & συν., 2013) λόγω της ποικιλίας των εννοιών που άπτονται των συμμιγών αριθμών.

Τέλος, δόθηκαν τρεις πολλαπλασιασμοί. Ο πρώτος ήταν πολλαπλασιασμός καθαρού αριθμού με συμμιγή χωρίς μετατροπή στο αποτέλεσμα και ο δεύτερος με μετατροπή στο αποτέλεσμα. Ο τελευταίος πολλαπλασιασμός επεδίωκε να αναδείξει παρανοήσεις στον πολλαπλασιασμό των μονάδων μέτρησης. Τα σχολικά εγχειρίδια δίνουν πολλαπλασιασμό καθαρού αριθμού με συμμιγή στην Ε΄ και Στ΄ τάξη αλλά όχι στη Δ΄ τάξη. Σύμφωνα με τον Sadi (2007), από τον πολλαπλασιασμό των φυσικών αριθμών προκύπτει η παρανόηση ότι ο πολλαπλασιασμός δίνει πάντα μεγαλύτερο αποτέλεσμα γεγονός που δεν επιβεβαιώνεται στον πολλαπλασιασμό των δεκαδικών αριθμών. Εξετάζεται λοιπόν, αν υπάρχει παρανόηση στον πολλαπλασιασμό των μονάδων μέτρησης του χρόνου, ο οποίος δεν έχει καμία μαθηματική σημασία.

4.2.3. Συλλογή δεδομένων

Εργαλείο της έρευνας αποτέλεσε ένα διαγνωστικό τεστ για τις παρανοήσεις στη διάταξη και τις πράξεις μεταξύ συμμιγών αριθμών. Το τεστ περιείχε ερωτήσεις ανοικτού τύπου προτρέποντας τους μαθητές να καταγράψουν τον τρόπο που σκέφτηκαν για να απαντήσουν ή τι είναι αυτό που τους δυσκόλεψε για την εύρεση της απάντησης.

Το τεστ που συγκροτήθηκε συνίσταται από 4 ασκήσεις εκ των οποίων η πρώτη περιέχει 4 ερωτήματα, η δεύτερη και η τρίτη άσκηση 2 ερωτήματα και η τέταρτη 3 ερωτήματα. Η πρώτη άσκηση περιέχει ερωτήματα που αφορούν τη διάταξη των συμμιγών αριθμών. Η δεύτερη περιέχει ερωτήματα που αφορούν τη θέση στην πρόσθεση των συμμιγών και τη μετατροπή στην πρόσθεση των συμμιγών. Η τρίτη άσκηση περιέχει ερωτήματα που αφορούν την αφαίρεση των συμμιγών και τις μετατροπές που χρειάζονται για την πραγματοποίηση της αφαίρεσης. Τέλος, η τέταρτη άσκηση περιέχει ερωτήματα που αφορούν τον πολλαπλασιασμό των συμμιγών με καθαρό αριθμό και τον πολλαπλασιασμό των συμμιγών μεταξύ τους.

4.2.4. Ανάλυση δεδομένων

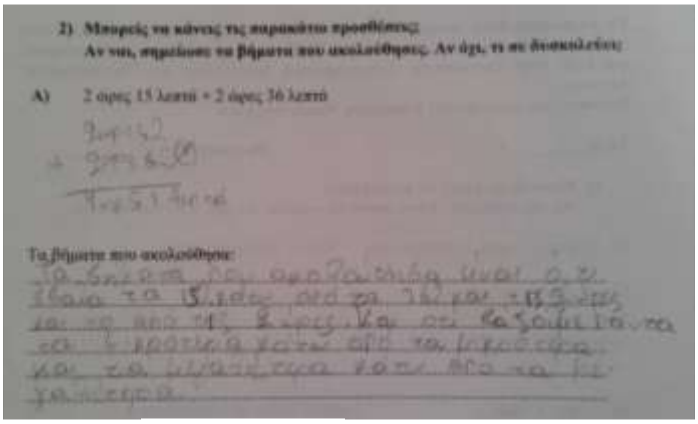
Όσο αφορά τη διάταξη των συμμιγών αριθμών οι απαντήσεις χωρίστηκαν σε τέσσερις κατηγορίες. Αυτές είναι: οι μαθητές/τριες που δεν παρουσίασαν καμία παρανόηση (ΚΠ) (βλ. Εικόνα 1), οι μαθητές/τριες που παρουσίασαν την παρανόηση «περισσότερα- μεγαλύτερο» (ΠΜ) (βλ. Εικόνα 2), οι μαθητές/τριες που παρουσίασαν την παρανόηση «λιγότερα- μεγαλύτερο» (ΛΜ) και οι μαθητές/τριες που παρουσίασαν παρανοήσεις ανεξάρτητα από αυτές των δεκαδικών αριθμών. Οι τελευταίες επειδή αφορούν τη σύγκριση ψηφίων, όπως στους φυσικούς αριθμούς και ανεξαρτήτως μονάδων μέτρησης παρουσιάζονται στην έρευνα ως «μόνο αριθμητικά» (ΜΑ) (βλ. Εικόνα 3).

Εικόνα 1

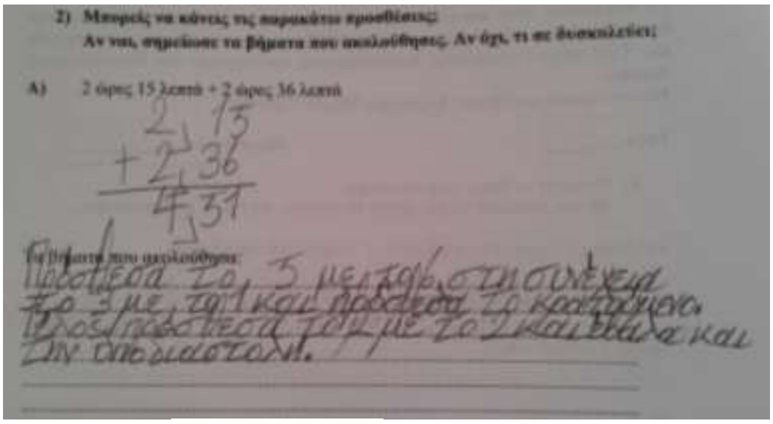
Εικόνα 2

Εικόνα 3

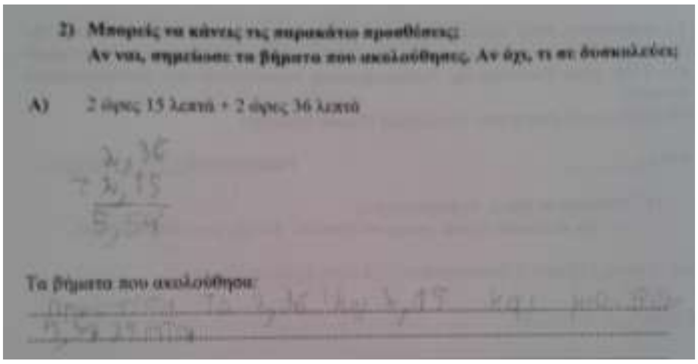
Όσο αφορά τις παρανοήσεις στην πρόσθεση οι απαντήσεις χωρίστηκαν σε πέντε κατηγορίες για το Α ερώτημα. Αυτές είναι: οι μαθητές/τριες που δεν παρουσίασαν καμία παρανόηση και έκαναν την πρόσθεση κάθετα με τους συμμιγείς (ΚΠ-ΚΣ) (βλ. Εικόνα 4), οι μαθητές/τριες που παρουσίασαν παρανόηση και μετέτρεψαν τους συμμιγείς σε δεκαδικούς αλλά με το δεκαδικό σύστημα και πραγματοποίησαν κάθετα την πρόσθεση (Π-ΜΔ) (βλ. Εικόνα 5), οι μαθητές/τριες που μετέτρεψαν σε δεκαδικούς και παρουσίασαν λάθος στον αλγόριθμο της πρόσθεσης και στη μετατροπή από συμμιγείς σε δεκαδικούς (ΜΔ-ΠΠΜ) (βλ. Εικόνα 6), οι μαθητές/τριες που έκαναν την πρόσθεση με συμμιγείς κάθετα και στη σωστή θέση, αλλά παρουσίασαν λάθος στον αλγόριθμο της πρόσθεσης (ΚΣ-ΠΠ) (βλ. Εικόνα 7) και τέλος, παρανοήσεις σχετικά με τη θέση (ΠΘ).



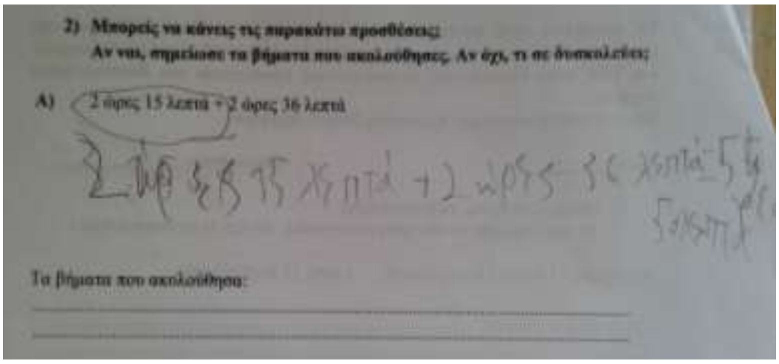
Εικόνα 4



Εικόνα 5

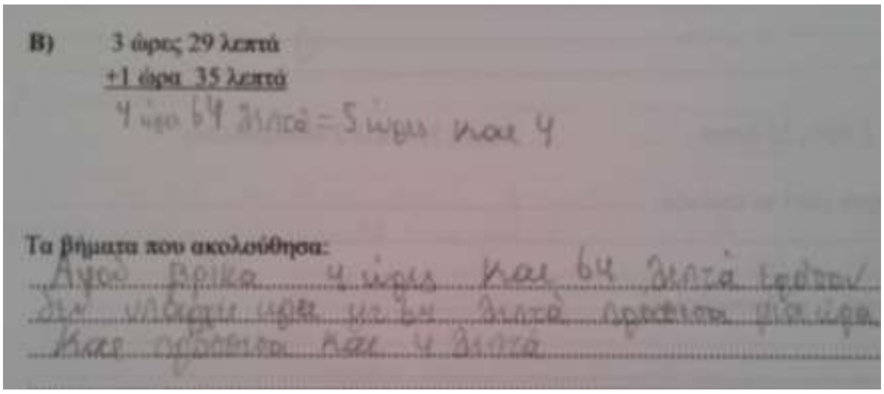


Εικόνα 6

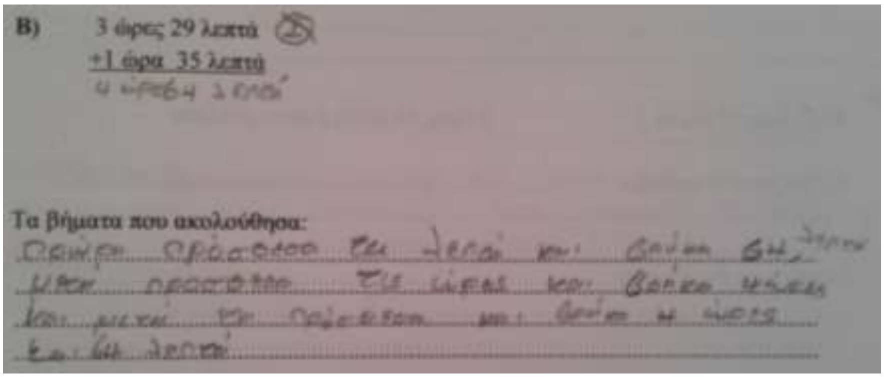


Εικόνα 7

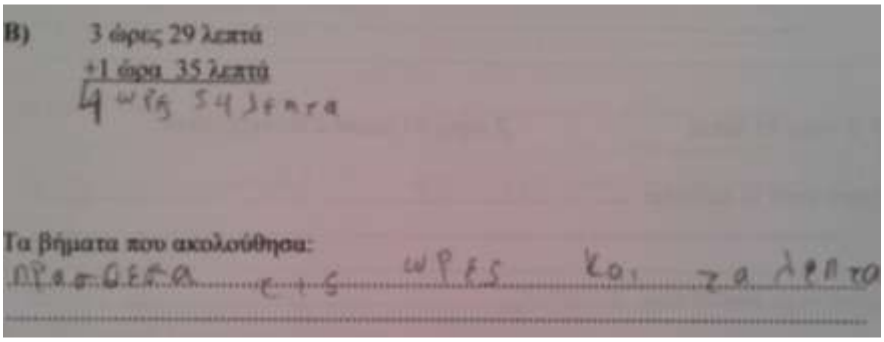
Από το Β ερώτημα προέκυψαν τέσσερις κατηγορίες. Αυτές είναι: οι μαθητές/τριες δεν παρουσίασαν καμία παρανόηση (ΚΠ) (βλ. Εικόνα 8), οι μαθητές/τριες παρουσίασαν παρανόηση στη μετατροπή από τη συμπλήρωση μιας μονάδας στην αμέσως ανώτερη μονάδα (ΧΜ) (βλ. Εικόνα 9), οι μαθητές/τριες παρουσίασαν παρανόηση στον αλγόριθμο της πρόσθεσης (ΠΠ) (βλ. Εικόνα 10) και τέλος, στους/στις μαθητές/τριες που πραγματοποίησαν λανθασμένη μετατροπή (ΛΜ) (βλ. Εικόνα 11).



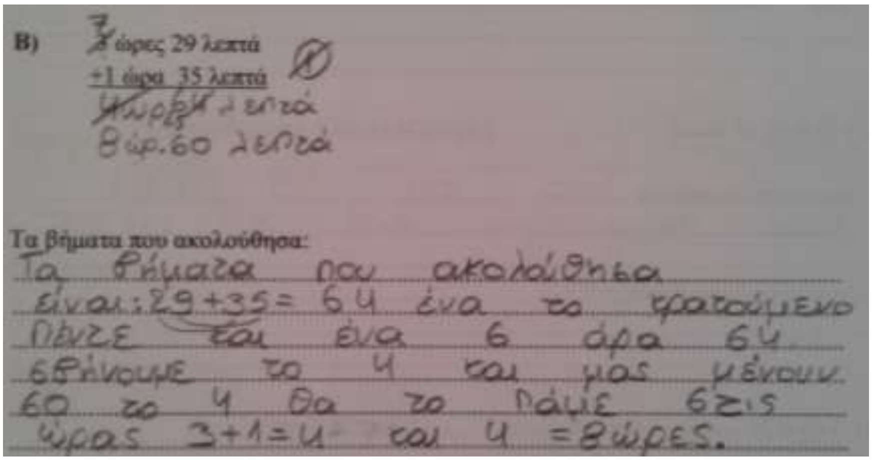
Εικόνα 8



Εικόνα 9

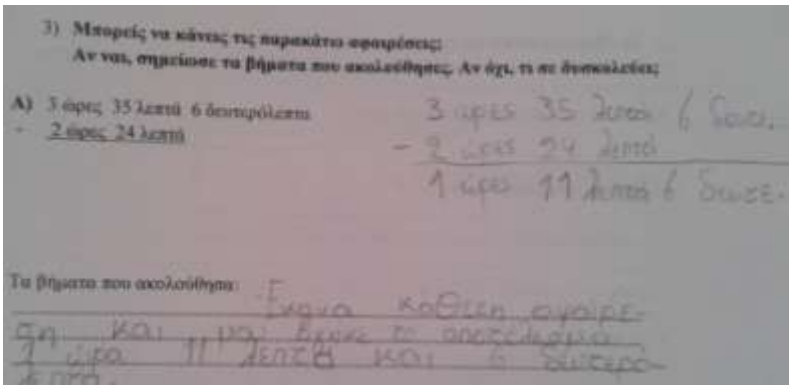


Εικόνα 10

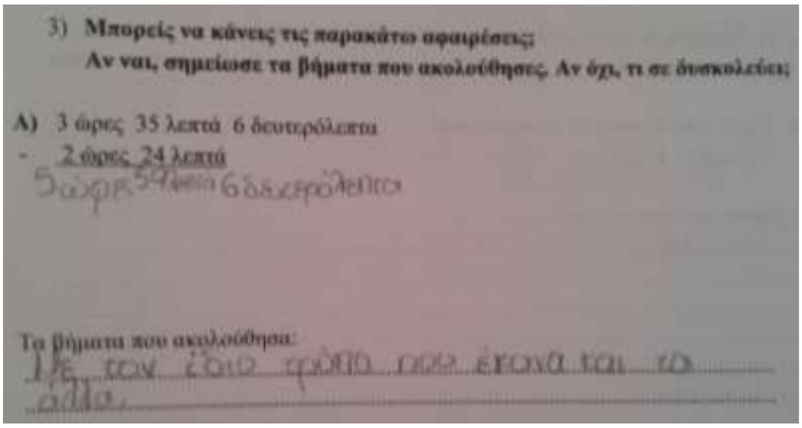


Εικόνα 11

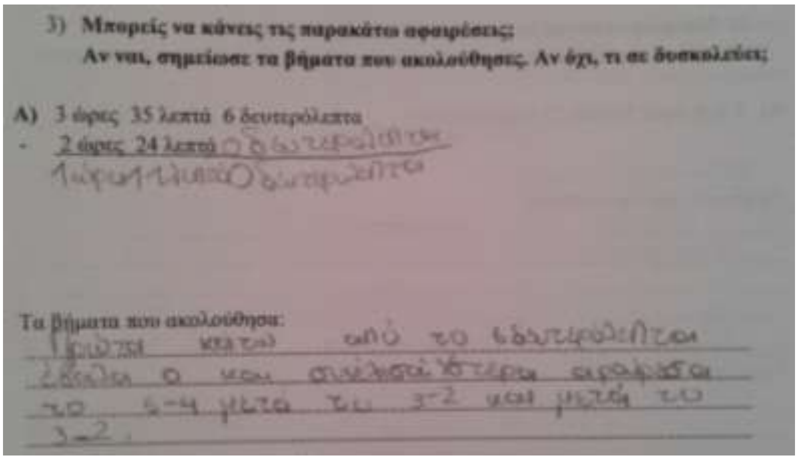
Όσο αφορά τις παρανοήσεις στην αφαίρεση οι απαντήσεις χωρίστηκαν σε τρεις κατηγορίες για το Α ερώτημα. Αυτές είναι: οι μαθητές/τριες που δεν παρουσίασαν καμία παρανόηση (ΚΠ) (βλ. Εικόνα 12), οι μαθητές/τριες που παρουσίασαν παρανόηση κάνοντας την αντίστροφη πράξη, την πρόσθεση (ΑΠ) (βλ. Εικόνα 13) και οι μαθητές/τριες που παρουσίασαν παρανόηση στον αλγόριθμο της αφαίρεσης (ΠΑ) (βλ. Εικόνα 14).



Εικόνα 12

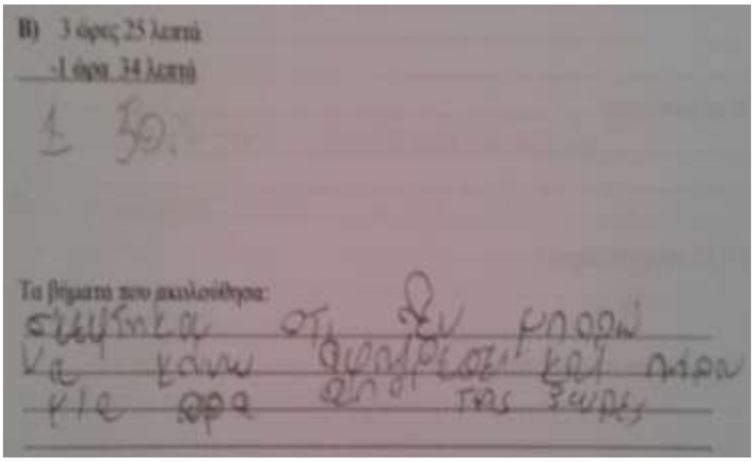


Εικόνα 13

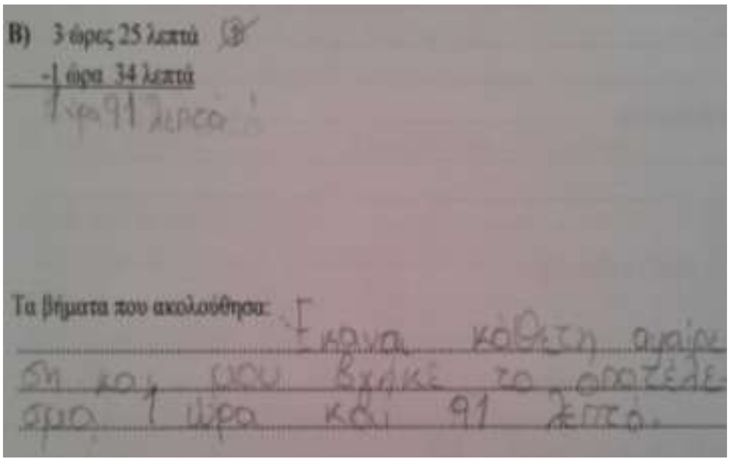


Εικόνα 14

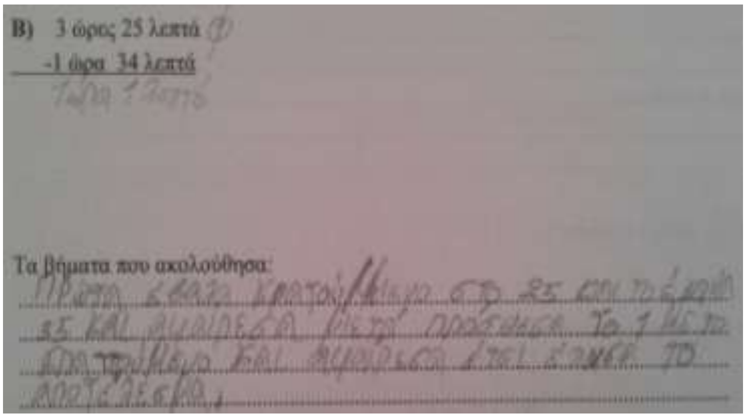
Όσο αφορά το ερώτημα Β οι απαντήσεις χωρίστηκαν σε έξι κατηγορίες. Αυτές είναι οι μαθητές/τριες που δεν παρουσίασαν καμία παρανόηση (ΚΠ) (βλ. Εικόνα 15), οι μαθητές/τριες που παρουσίασαν παρανόηση σχετική με τη μετατροπή για την εκτέλεση της αφαίρεσης. Αρχικά, παρανόηση του τύπου 1 ώρα= 100 λεπτά (ΛΜ-100) (βλ. Εικόνα 16) και 1 ώρα=10 λεπτά (ΛΜ-10) (βλ. Εικόνα 17). Έπειτα, οι μαθητές/τριες που δεν έλυσαν καθόλου την αφαίρεση με αδυναμία αιτιολόγησης (ΔΛ) (βλ. Εικόνα 20), οι μαθητές/τριες που παρουσίασαν παρανόηση κάνοντας την αντίστροφη πράξη, την πρόσθεση (ΑΠ) (βλ. Εικόνα 1), και τέλος οι μαθητές/τριες που παρουσίασαν παρανόηση στην αφαίρεση συμμιγών κάνοντας αφαίρεση μέσα στον ίδιο συμμιγή (ΠΑ) (βλ. Εικόνα 19).



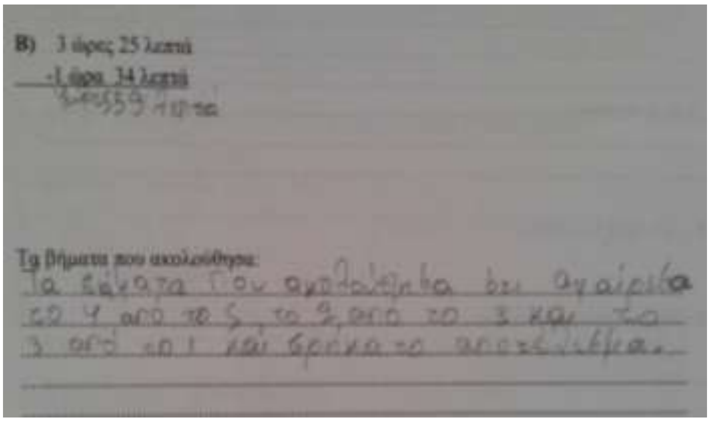
Εικόνα 15



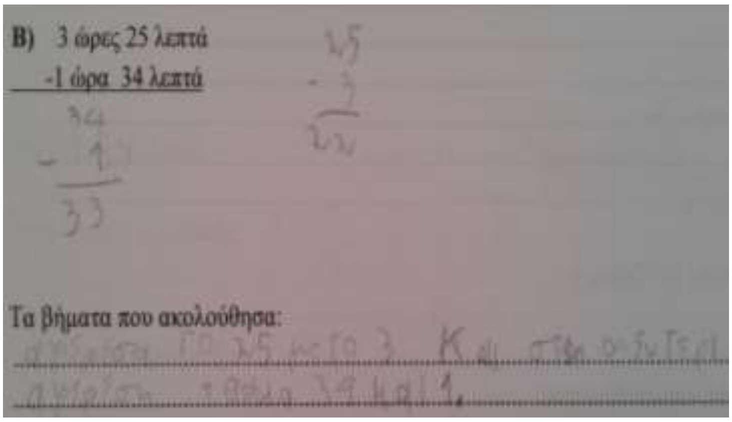
Εικόνα 16



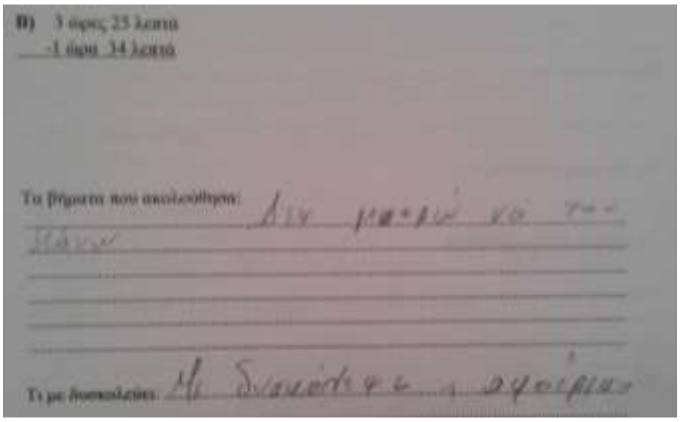
Εικόνα 17



Εικόνα 18

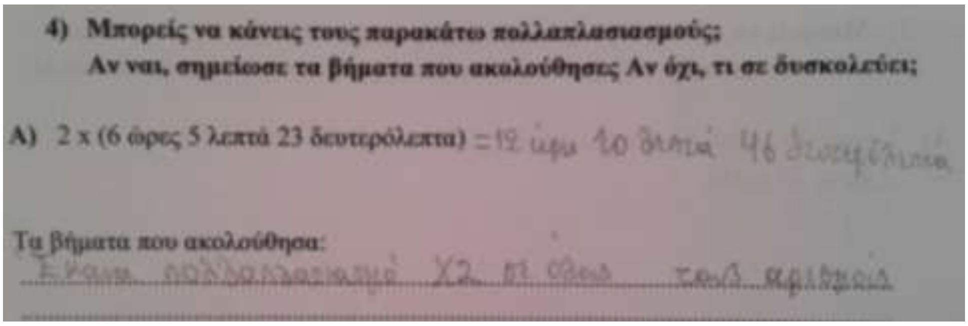


Εικόνα 19

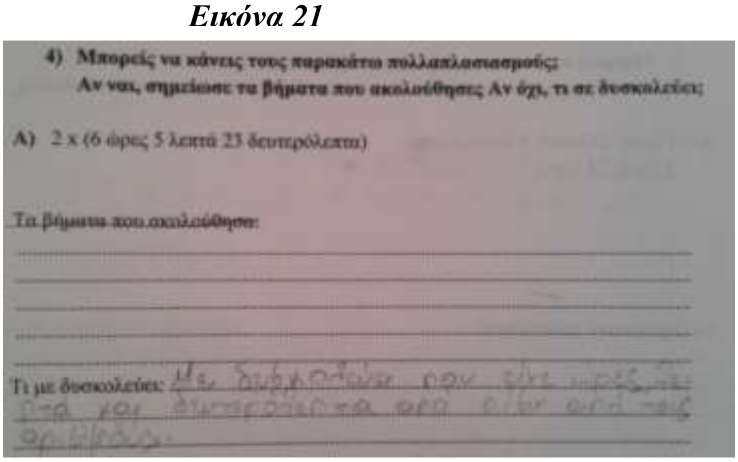


Εικόνα 20

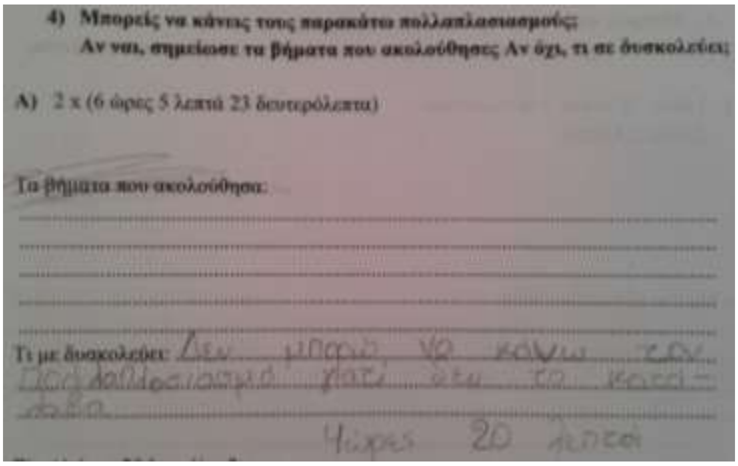
Όσο αφορά τις παρανοήσεις στον πολλαπλασιασμό οι απαντήσεις χωρίστηκαν σε πέντε κατηγορίες για το ερώτημα Α. Αυτές είναι: οι μαθητές/τριες που δεν παρουσίασαν καμία παρανόηση (ΚΠ) (βλ. Εικόνα 21), οι μαθητές/τριες που παρουσίασαν παρανόηση λόγω μονάδων μέτρησης και δεν μπόρεσαν να πραγματοποιήσουν τον πολλαπλασιασμό (Μ) (βλ. Εικόνα 22), οι μαθητές/τριες που δεν εκτέλεσαν τον πολλαπλασιασμό με αδυναμία αιτιολόγησης (ΔΛ) (βλ. Εικόνα 23), οι μαθητές/τριες που εκτέλεσαν τον πολλαπλασιασμό χωρίς να εντάξουν τις μονάδες μέτρησης στο αποτέλεσμα (ΟΜ) (βλ. Εικόνα 24), οι μαθητές/τριες που παρουσίασαν διάφορες παρανοήσεις, όπως να πάρουν μαζί ώρες λεπτά και δευτερόλεπτα σα να βρίσκονται στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και έχουν 6523 Χ 2 ή να πάρουν αυθαίρετα το 2 με το 5 ώρες και 6 λεπτά, δηλαδή 265 Χ 23 και τέλος να εκτελούν κανονικά το πολλαπλασιασμό και να τοποθετούν τις μονάδες μέτρησης αλλά να μετατρέπουν τα 10 λεπτά σε 1 ώρα (ΔΠ) (βλ. Εικόνα 25, 26, 27).



Εικόνα 21



Εικόνα 22


4) Μπορείς να κάνεις τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς;
Αν ναι, σημείωσε τα βήματα που ακολούθησες Αν όχι, τι σε δυσκολεύει;

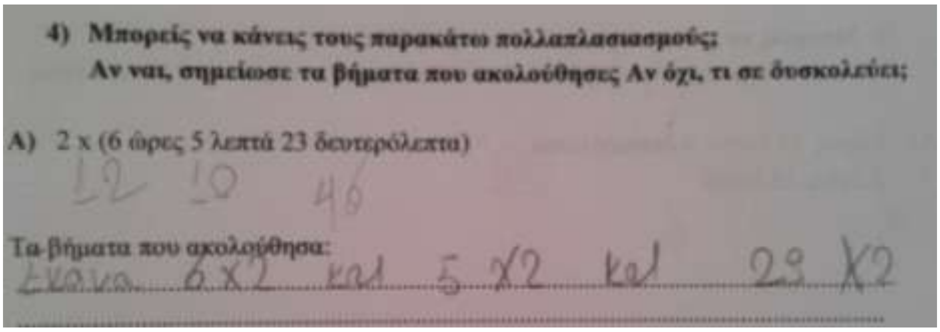
Α) 2 x (6 ώρες 5 λεπτά 23 δευτερόλεπτα)

Τα βήματα που ακολούθησα:

Τι με δυσκολεύει: Δεν μπορώ να κάνω τον πολλαπλασιασμό γιατί δεν το κατα-λαβα

4ώρες 20 λεπτά

Εικόνα 23

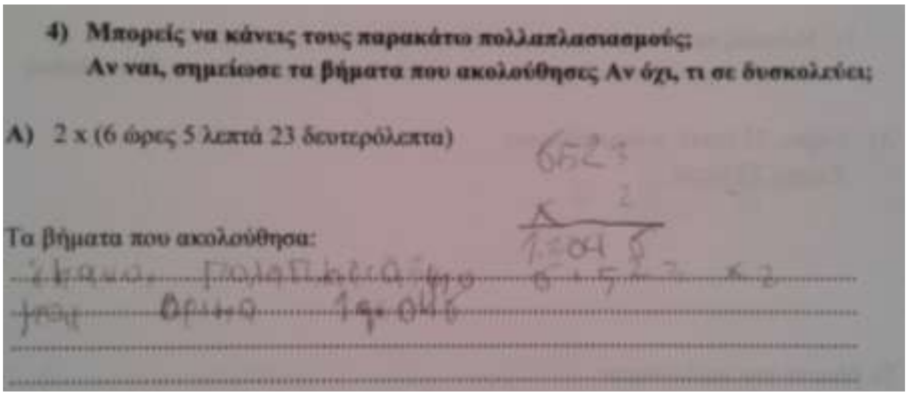

4) Μπορείς να κάνεις τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς;
Αν ναι, σημείωσε τα βήματα που ακολούθησες Αν όχι, τι σε δυσκολεύει;

Α) 2 x (6 ώρες 5 λεπτά 23 δευτερόλεπτα)

12 10 46

Τα βήματα που ακολούθησα: Έκανα 6x2 και 5x2 και 23x2

Εικόνα 24

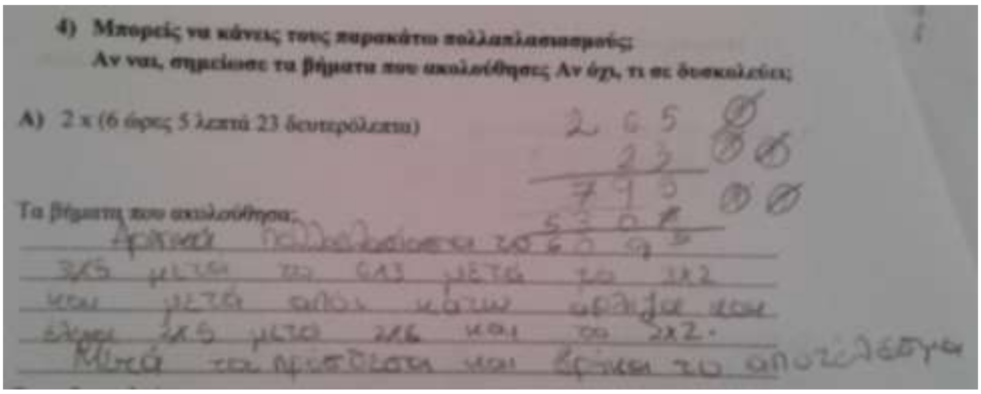

4) Μπορείς να κάνεις τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς;
Αν ναι, σημείωσε τα βήματα που ακολούθησες Αν όχι, τι σε δυσκολεύει;

Α) 2 x (6 ώρες 5 λεπτά 23 δευτερόλεπτα)

6523
x 2
13046

Τα βήματα που ακολούθησα: Έκανα πολλαπλασιασμό 6523 x2 και βρήκα 13.046

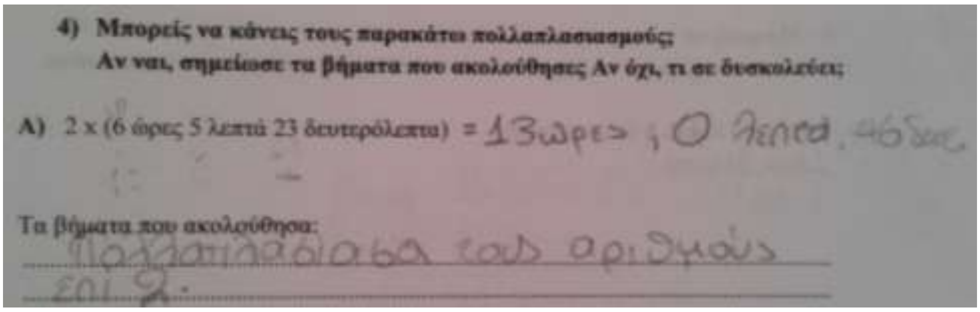
Εικόνα 25


4) Μπορείς να κάνεις τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς;
Αν ναι, σημείωσε τα βήματα που ακολούθησες Αν όχι, τι σε δυσκολεύει;

Α) 2 x (6 ώρες 5 λεπτά 23 δευτερόλεπτα)

Τα βήματα που ακολούθησα:
Αρχικά πολλαπλασίασα το ...
3x5 μετά το 6x3 μετά το 3x2
και μετά απλώς κάνω ...
... 2x5 μετά 2x6 και το 2x2.
Μετά τα πρόσθεσα και βρήκα το αποτέλεσμα

Εικόνα 26



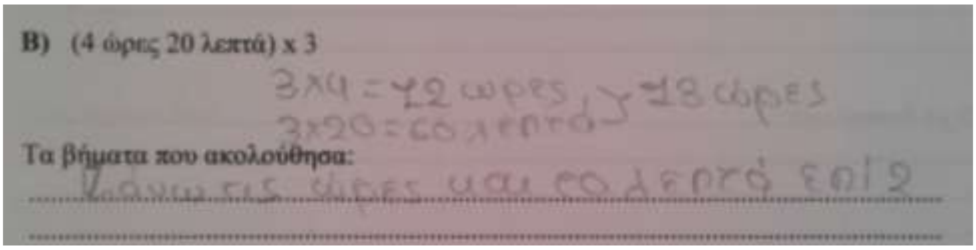
4) Μπορείς να κάνεις τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς;
Αν ναι, σημείωσε τα βήματα που ακολούθησες Αν όχι, τι σε δυσκολεύει;

A) 2 x (6 ώρες 5 λεπτά 23 δευτερόλεπτα) = 13ωρες, 0 λεπτα, 46δευτ

Τα βήματα που ακολούθησα:
Πολλαπλασίασα τους αριθμούς επι 2.

Εικόνα 27

Όσο αφορά το ερώτημα Β οι απαντήσεις χωρίστηκαν σε πέντε κατηγορίες. Αυτές είναι: οι μαθητές/τριες που δεν παρουσίασαν καμία παρανόηση (ΚΠ) (βλ. Εικόνα 28), οι μαθητές/τριες που παρουσίασαν παρανόηση σχετική με τη μετατροπή και δεν την εκτέλεσαν (ΧΜ) (βλ. Εικόνα 30), οι μαθητές/τριες που δεν πραγματοποίησαν τη μετατροπή αλλά δεν έβαλαν ούτε μονάδες μέτρησης στο αποτέλεσμα (ΧΜ-ΟΜ) (βλ. Εικόνα 29), οι μαθητές/τριες που δεν έλυσαν το ερώτημα με αδυναμία αιτιολόγησης (ΔΛ) (βλ. Εικόνα 31) και τέλος, οι μαθητές/τριες που παρουσίασαν διάφορες παρανοήσεις όπως και στο ερώτημα Α (ΔΠ) (βλ. Εικόνα 32).

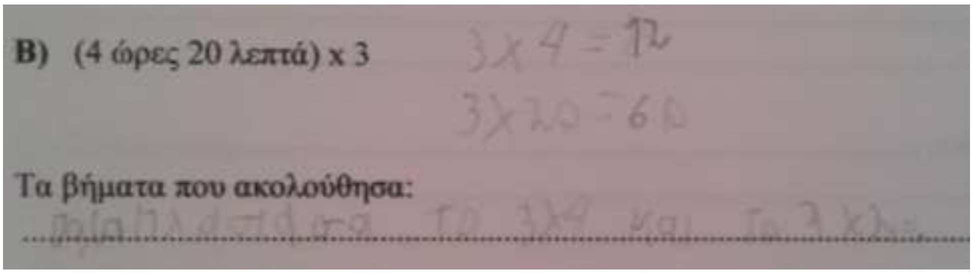


B) (4 ώρες 20 λεπτά) x 3

3x4=12 ώρες
3x20=60 λεπτά

Τα βήματα που ακολούθησα:

Εικόνα 28

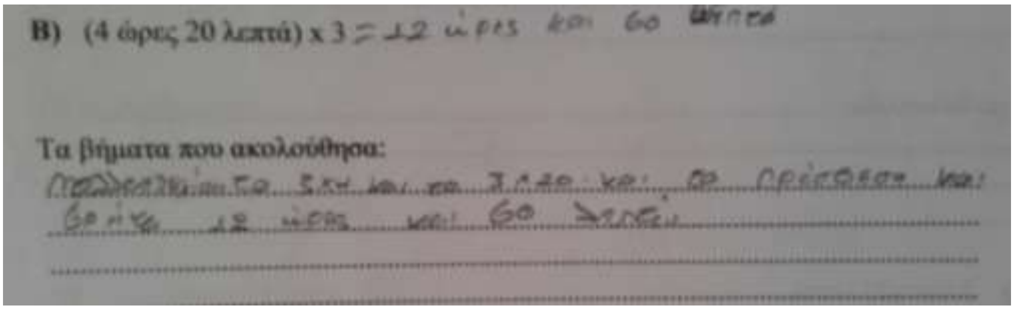


B) (4 ώρες 20 λεπτά) x 3

3x4=12
3x20=60

Τα βήματα που ακολούθησα:

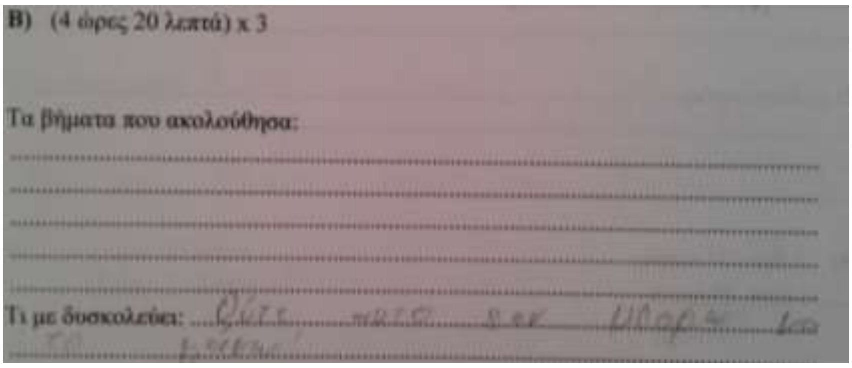
Εικόνα 29



B) (4 ώρες 20 λεπτά) x 3 = 12 ώρες και 60 λεπτά

Τα βήματα που ακολούθησα:

Εικόνα 30

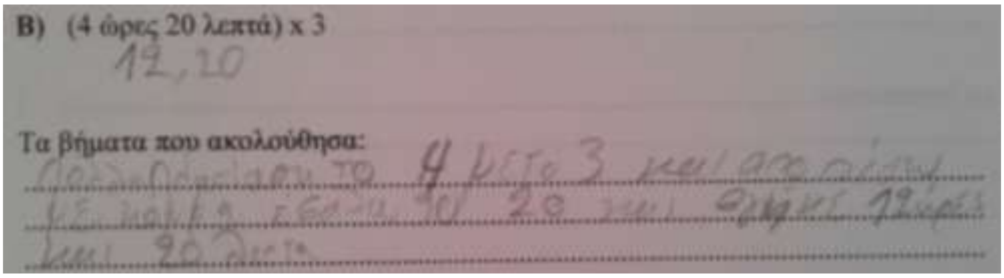


Β) (4 ώρες 20 λεπτά) x 3

Τα βήματα που ακολούθησα:

Τι με δυσκολεύει:

Εικόνα 31



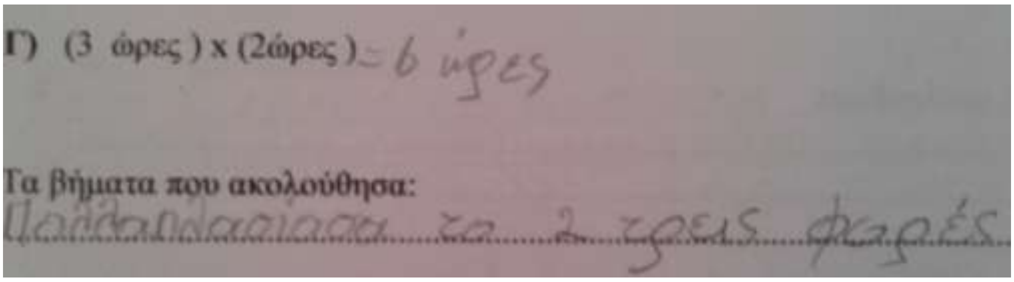
Β) (4 ώρες 20 λεπτά) x 3

12,20

Τα βήματα που ακολούθησα:

Εικόνα 32

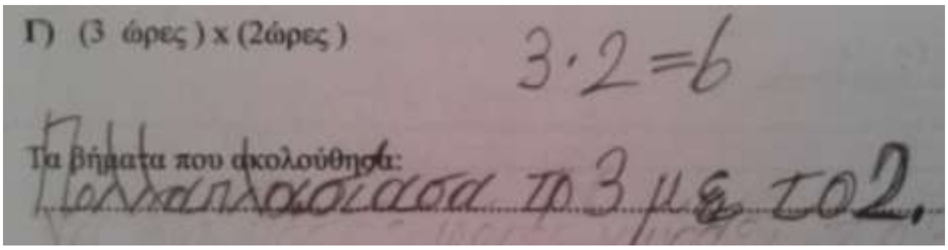
Όσο αφορά το ερώτημα Γ οι απαντήσεις χωρίστηκαν σε τρεις κατηγορίες. Αυτές είναι: οι μαθητές/τριες που δεν παρουσίασαν καμία παρανόηση (ΚΠ), οι μαθητές/τριες που παρουσίασαν παρανόηση σχετικά με το πολλαπλασιασμό των μονάδων μέτρησης που δηλώνουν χρόνο και έβαλαν μονάδα μέτρησης στο αποτέλεσμα (ΠΜ-ΜΜ) (βλ. Εικόνα 33) και τέλος, οι μαθητές/τριες που παρουσίασαν παρανόηση σχετικά με το πολλαπλασιασμό των μονάδων μέτρησης που δηλώνουν χρόνο και δεν έβαλαν μονάδα μέτρησης στο αποτέλεσμα (ΠΜ-ΟΜ) (βλ. Εικόνα 34). Συγκεκριμένα, οι μαθητές/τριες εκτέλεσαν τον πολλαπλασιασμό ανεξάρτητα των μονάδων και έγραψαν το αποτέλεσμα με ή χωρίς μονάδα μέτρησης.



Γ) (3 ώρες) x (2ώρες) = 6 ώρες

Τα βήματα που ακολούθησα: Πολλαπλασίασα το 2 τρεις φορές

Εικόνα 33



Γ) (3 ώρες) x (2ώρες) 3·2=6

Τα βήματα που ακολούθησα: Πολλαπλασίασα το 3 με το 2.

Εικόνα 34

4.3. Αποτελέσματα

Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών/τριών στο τεστ επέτρεψε τον εντοπισμό των παρανοήσεων των μαθητών/τριών της Δ΄, Ε΄ και Στ΄ τάξης σχετικά με τη διάταξη και τις πράξεις συμμιγών.

4.3.1. Διάταξη συμμιγών

Στον Πίνακα 8 παρουσιάζονται οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων των μαθητών/τριών στη διάταξη των συμμιγών αριθμών. Παρατηρείται ότι σε σύνολο 23 μαθητών/τριών από 25 μαθητές/τριες σε μεγαλύτερο ποσοστό (78,25%) δεν παρουσίασαν καμία παρανόηση. Σε ποσοστό 8,65% οι μαθητές/τριες παρουσίασαν παρανόηση σχετική με το μήκος του αριθμού και τέλος, σε ποσοστό 8,65% παρουσιάστηκε παρανόηση σχετική με τη σύγκριση των φυσικών αριθμών.

Πίνακας 8: Οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες εμφάνισης παρανοήσεων στη διάταξη των συμμιγών αριθμών στο σύνολο των τριών τάξεων (Δ΄,Ε΄, Στ΄).

Παρανοήσεις (Άσκηση 1)	**Ν**	**Ν%**
ΚΠ	18	78,25
ΠΜ	3	13,04
ΛΜ	0	0
ΜΑ	2	8,65
Σύνολο	23	100

Στον Πίνακα 9 παρουσιάζονται οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων των μαθητών/τριών στη διάταξη των συμμιγών αριθμών ανά τάξη. Παρατηρείται ότι σε μεγαλύτερο ποσοστό (33,33%) οι μαθητές/τριες που παρουσίασαν παρανοήσεις εμφανίστηκαν στη Δ' τάξη. Στην Ε΄ και Στ΄ οι μαθητές/τριες δεν παρουσίασαν καμία παρανόηση στη διάταξη των συμμιγών αριθμών.

Πίνακας 9: Οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες εμφάνισης παρανοήσεων στη διάταξη των συμμιγών αριθμών ανά τάξη.

Παρανοήσεις (Άσκηση 1)	**Δ΄(9/9) Ν**	**Ν%**	**Ε΄(6/8) Ν**	**Ν%**	**Στ΄(8/8) Ν**	**Ν%**
ΚΠ	4	44,44	6	100	8	100
ΠΜ	3	33,33	0	0	0	0
ΛΜ	0	0	0	0	0	0
ΜΑ	2	22,22	0	0	0	0
Σύνολο	9	100	6	100	8	100

4.3.2. Πρόσθεση συμμιγών

Στον Πίνακα 10 παρουσιάζονται οι παρανοήσεις των μαθητών/τριών στη θέση των συμμιγών αριθμών για την εκτέλεση της πρόσθεσης. Παρατηρείται ότι σε σύνολο 24 μαθητών/τριών από 25 μαθητές/τριες σε μεγαλύτερο ποσοστό (87,5%) δεν παρουσίασαν καμία παρανόηση. Σε ποσοστό 4,16% οι μαθητές/τριες παρουσίασαν παρανόηση και έκαναν μετατροπή του συμμιγή σε δεκαδικό με το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης για να εκτελέσουν την πρόσθεση, σε ποσοστό 8,33% παρουσιάστηκε παρανόηση σχετική με τον αλγόριθμο της πρόσθεσης των δεκαδικών αριθμών και σε ποσοστό 4,16% η παρανόηση αφορούσε τον αλγόριθμο της πρόσθεσης των συμμιγών αριθμών. Τέλος, παρατηρείται ότι οι μαθητές/τριες δεν παρουσίασαν καμία παρανόηση στη θέση των συμμιγών αριθμών για την πρόσθεση.

Πίνακας 10**:** Οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες εμφάνισης παρανοήσεων στη θέση των συμμιγών αριθμών στην πρόσθεση.

Παρανοήσεις (Άσκηση 2 ερώτημα Α)	**N**	**N%**
ΚΠ-ΚΣ	21	87,5
Π-ΜΔ	1	4,16
ΜΔ-ΠΠΜ	2	8,33
ΚΣ-ΠΠ	1	4,16
ΠΘ	0	0
Σύνολο	24	100

Στον Πίνακα 11 παρουσιάζονται οι συχνότητες και εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων των μαθητών στη θέση των συμμιγών αριθμών για την πρόσθεση. Παρατηρείται ότι οι μαθητές/τριες δεν παρουσιάζουν παρανοήσεις στη θέση των συμμιγών και στις τρεις τάξεις σε μεγάλο ποσοστό 77,77%, 85.71% και 87,5%. Επίσης, εκτελούν την πρόσθεση μετατρέποντας σε δεκαδικούς βάζοντας πάλι τους δεκαδικούς σε σωστή θέση αλλά έχοντας παρανόηση σχετική με το σύστημα αρίθμησης. Οι παρανοήσεις που παρατηρούνται αφορούν τον αλγόριθμο της πρόσθεσης και τη μετατροπή από τους συμμιγείς στους δεκαδικούς και όχι τη θέση των συμμιγών αριθμών.

Πίνακας 11**:** Οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες εμφάνισης παρανοήσεων στη θέση των συμμιγών αριθμών στην πρόσθεση ανά τάξη.

Παρανοήσεις (Άσκηση 2 ερώτημα Α)	**Δ΄(9/9) N**	**N%**	**Ε΄(7/8) N**	**N%**	**Στ΄(8/8) N**	**N%**
ΚΠ-ΚΣ	7	77,77	6	85,71	7	87,5
Π-ΜΔ	0	0	0	0	1	12,5
ΜΔ-ΠΠΜ	2	22,22	0	0	0	0
ΚΣ-ΠΠ	0	0	1	14,28	0	0
ΠΘ	0	0	0	0	0	0
Σύνολο	9	100	7	100	8	100

Στον Πίνακα 12 παρουσιάζονται οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων των μαθητών/τριών (24 έγκυρες απαντήσεις στις 25) στις μετατροπές που προκύπτουν από το αποτέλεσμα της πρόσθεσης. Παρατηρείται ότι σε πλειοψηφία (54,16%) οι μαθητές/τριες παρουσιάζουν παρανόηση σχετική με τη συμβατική γραφή και αφήνουν το αποτέλεσμα χωρίς μετατροπή.

***Πίνακας 12*:** Οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων των μαθητών/τριών στις μετατροπές στο αποτέλεσμα της πρόσθεσης συμμιγών αριθμών.

Παρανοήσεις (Άσκηση 2 ερώτημα Β)	**Ν**	**Ν%**
ΚΠ	7	29,16
ΧΜ	13	54,16
ΛΜ	1	4,16
ΠΠ	3	12,5
Σύνολο	24	100

Στον Πίνακα 13 παρουσιάζονται οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των μαθητών/τριών ανά τάξη. Παρατηρείται ότι η Δ΄ τάξη σε μεγαλύτερο ποσοστό (88,88%) παρουσίασε παρανόηση στη μετατροπή του αθροίσματος.

***Πίνακας 13*:** Οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων των μαθητών/τριών στις μετατροπές στο αποτέλεσμα της πρόσθεσης συμμιγών αριθμών ανά τάξη.

Παρανοήσεις (Άσκηση 2 ερώτημα Β)	**Δ΄(9/9) Ν**	**Ν%**	**Ε΄(7/8) Ν**	**Ν%**	**Στ΄(8/8) Ν**	**Ν%**
ΚΠ	0	0	2	28,57	5	62,5
ΧΜ	8	88,88	3	42,85	2	25
ΛΜ	1	11,11	0	0	0	0
ΠΠ	0	0	2	28,57	1	12,5
Σύνολο	9	100	7	100	8	100

4.3.3. Αφαίρεση συμμιγών

Στον Πίνακα 14 παρουσιάζονται οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων των μαθητών/τριών (24 έγκυρες απαντήσεις από τις 25) στην αφαίρεση συμμιγών αριθμών. Παρατηρείται ότι οι μαθητές/τριες σε μεγαλύτερο ποσοστό (66,66%) δεν παρουσίασαν παρανόηση στην αφαίρεση συμμιγών.

Πίνακας 14: Οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων στην αφαίρεση συμμιγών αριθμών χωρίς μετατροπές.

Παρανοήσεις (Άσκηση 3 ερώτημα Α)	**Ν**	**Ν%**
ΚΠ	16	66,66
ΠΑ	4	16,66
ΑΠ	4	16,66
Σύνολο	24	100

Στον Πίνακα 15 παρουσιάζονται οι παρανοήσεις στην αφαίρεση συμμιγών αριθμών ανά τάξη. Παρατηρείται ότι η Δ΄ τάξη σε μεγαλύτερο ποσοστό παρουσίασε παρανόηση στην αφαίρεση (44,44%) και η Στ΄ παρουσίασε το μεγαλύτερο ποσοστό (25%) στην εκτέλεση της αντίστροφης πράξη. Τέλος, η Ε΄ τάξη δεν παρουσίασε παρανοήσεις στην αφαίρεση συμμιγών αριθμών χωρίς μετατροπές.

Πίνακας 15: Οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων στην αφαίρεση συμμιγών αριθμών χωρίς μετατροπές ανά τάξη.

Παρανοήσεις (Άσκηση 3 ερώτημα Α)	**Δ΄(9/9) N**	**N%**	**Ε΄(7/8) N**	**N%**	**Στ΄(8/8) N**	**N%**
ΚΠ	3	33,33	7	100	6	75
ΠΑ	4	44,44	0	0	0	0
ΑΠ	2	22,22	0	0	2	25
Σύνολο	9	100	7	100	8	100

Στον πίνακα 16 παρουσιάζονται οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων των μαθητών/τριών (24 έγκυρες απαντήσεις από τις 25) για τις μετατροπές στον αλγόριθμο της αφαίρεσης συμμιγών αριθμών που δηλώνουν χρόνο. Παρατηρείται ότι το μεγαλύτερο ποσοστό (62,5%) παρουσίασε παρανόηση στη μετατροπή μιας ώρας σε 100 λεπτά. Έπειτα, ακολουθεί παρανόηση με την εκτέλεση αντίστροφης πράξης (20,83%) και τέλος, σε ίσο ποσοστό (4,16%) παρουσιάστηκαν παρανοήσεις στη μετατροπή μιας ώρας σε 10 λεπτά και στον αλγόριθμο της αφαίρεσης. Να σημειωθεί πως μόνο μια απάντηση (4,16%) δεν παρουσίασε καμία παρανόηση.

Πίνακας 16: Οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων στην αφαίρεση συμμιγών αριθμών με μετατροπές σε μονάδες μέτρησης χρόνου στον αλγόριθμο της αφαίρεσης.

Παρανοήσεις (Άσκηση 3 ερώτημα Β)	**N**	**N%**
ΚΠ	1	4,16
ΛΜ-100	15	62,5
ΛΜ-10	1	4,16
ΑΠ	5	20,83
ΠΑ	1	4,16
ΔΛ	1	4,16
Σύνολο	24	100

Στον Πίνακα 17 παρουσιάζονται οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων των μαθητών/τριών για τις μετατροπές στον αλγόριθμο της αφαίρεσης συμμιγών αριθμών που δηλώνουν χρόνο. Παρατηρείται ότι η παρανόηση με τη μετατροπή της ώρας σε 100 λεπτά παρουσιάζεται σε μεγαλύτερο ποσοστό (85,71%) στην Ε΄ τάξη, ενώ η παρανόηση της αντίστροφης πράξης παρουσιάζεται σε μεγαλύτερο ποσοστό (25%) στην Στ΄ τάξη. Τέλος, η παρανόηση της μετατροπής μιας ώρας σε 10 λεπτά εμφανίστηκε μόνο στη Δ΄ τάξη, όπως και ότι δεν λύθηκε καθόλου με αδυναμία αιτιολόγησης.

***Πίνακας 17*: Οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων στην αφαίρεση συμμιγών αριθμών με μετατροπές σε μονάδες μέτρησης χρόνου στον αλγόριθμο της αφαίρεσης ανά τάξη.**

Παρανοήσεις (Άσκηση 3 ερώτημα Β)	**Δ΄(9/9) N**	**N%**	**Ε΄(7/8) N**	**N%**	**Στ΄(8/8) N**	**N%**
ΚΠ	0	0	0	0	1	12,5
ΛΜ-100	5	55,55	6	85,71	4	50
ΛΜ-10	1	11,11	0	0	0	0
ΑΠ	2	22,22	1	14,28	2	25
ΠΑ	0	0	0	0	1	12,5
ΔΛ	1	11,11	0	0	0	0
Σύνολο	9	100	7	100	8	100

4.3.4. Πολλαπλασιασμός συμμιγών

Στον Πίνακα 18 παρουσιάζονται οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων(23 έγκυρες απαντήσεις από τις 25) στον πολλαπλασιασμό καθαρού αριθμού με συμμιγή. Παρατηρείται ότι σε μεγαλύτερο ποσοστό (47,82%) δεν προέκυψε καμία παρανόηση και το αμέσως επόμενο (21,73%) δεν μπόρεσε να εκτελέσει την πράξη με αδυναμία αιτιολόγησης.

***Πίνακας 18*: Οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων στον πολλαπλασιασμό καθαρού αριθμού με συμμιγή.**

Παρανοήσεις (Άσκηση 4 ερώτημα Α)	**N**	**N%**
ΚΠ	11	47,82
Μ	1	4,34
ΔΛ	5	21,73
ΟΜ	2	8,69
ΔΠ	4	17,39
Σύνολο	23	100

Στον Πίνακα 19 παρουσιάζονται οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων στον πολλαπλασιασμό καθαρού αριθμού με συμμιγή ανά τάξη. Παρατηρείται ότι σε μεγαλύτερο ποσοστό (44,44%) η Δ΄ τάξη δεν μπόρεσε να εκτελέσει την πράξη με αδυναμία αιτιολόγησης.

***Πίνακας 19*: Οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων στον πολλαπλασιασμό καθαρού αριθμού με συμμιγή ανά τάξη.**

Παρανοήσεις (Άσκηση 4 ερώτημα Α)	**Δ΄(9/9) N**	**N%**	**Ε΄(6/8) N**	**N%**	**Στ΄(8/8) N**	**N%**
ΚΠ	1	11,11	5	83,33	5	62,5
Μ	1	11,11	0	0	0	0
ΔΛ	4	44,44	0	0	1	12,5
ΟΜ	1	11,11	0	0	1	12,5
ΔΠ	2	22,22	1	16,66	1	12,5
Σύνολο	9	100	6	100	8	100

Στον Πίνακα 20 παρουσιάζονται οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων (23 έγκυρες απαντήσεις από τις 25) στη μετατροπή των συμμιγών μετά τον πολλαπλασιασμό καθαρού αριθμού με συμμιγή. Παρατηρείται ότι σε ίσο ποσοστό (30,43%) οι μαθητές/τριες ή δεν παρουσίασαν καμία παρανόηση ή εκτέλεσαν τον πολλαπλασιασμό και όχι τη μετατροπή.

***Πίνακας 20*: Οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων στη μετατροπή των συμμιγών μετά τον πολλαπλασιασμό καθαρού αριθμού με συμμιγή.**

Παρανοήσεις (Άσκηση 4 ερώτημα Β)	**N**	**N%**
ΚΠ	7	30,43
ΧΜ-ΟΜ	1	4,34
ΧΜ	7	30,43
ΔΛ	2	8,69
ΔΠ	6	26,08
Σύνολο	23	100

Στον Πίνακα 21 παρουσιάζονται οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων στη μετατροπή των συμμιγών μετά τον πολλαπλασιασμό καθαρού αριθμού με συμμιγή ανά τάξη. Παρατηρείται ότι η Ε΄ τάξη δεν παρουσίασε καμία παρανόηση σε μεγαλύτερο ποσοστό (50%). Επιπλέον, μόνο η Δ΄ τάξη παρουσίασε την παρανόηση με την απουσία μονάδων μέτρησης, όπως επίσης και την αδυναμία απάντησης σε συνδυασμό με την αδυναμία αιτιολόγησης. Τέλος, διάφορες παρανοήσεις παρουσίασε σε μεγαλύτερο ποσοστό (37,5%) η Στ΄ τάξη.

Πίνακας 21: Οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των στη μετατροπή των συμμιγών μετά τον πολλαπλασιασμό καθαρού αριθμού με συμμιγή ανά τάξη..

Παρανοήσεις (Άσκηση 4 ερώτημα Β)	**Δ΄(9/9) N**	**N%**	**Ε΄(6/8) N**	**N%**	**Στ΄(8/8) N**	**N%**
ΚΠ	1	11,11	3	50	3	37,5
ΧΜ-ΟΜ	1	11,11	0	0	0	0
ΧΜ	3	33,33	2	33,33	2	25
ΔΛ	2	22,22	0	0	0	0
ΔΠ	2	22,22	1	16,66	3	37,5
Σύνολο	9	100	6	100	8	100

Στον Πίνακα 22 παρουσιάζονται οι παρανοήσεις (23 έγκυρες απαντήσεις από τις 25) των μαθητών/τριών στον πολλαπλασιασμό συμμιγών αριθμών που δηλώνουν χρόνο. Παρατηρείται ότι οι μαθητές/τριες σε πλειοψηφία (65,21%) παρουσίασαν παρανόηση στον πολλαπλασιασμό των μονάδων μέτρησης που δηλώνουν χρόνο και σημείωσαν τη μονάδα μέτρησης κανονικά, ενώ σε ποσοστό 34,78% οι μαθητές/τριες δεν σημείωσαν τη μονάδα μέτρησης αλλά εκτέλεσαν τον πολλαπλασιασμό.

Πίνακας 22: Οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων στον πολλαπλασιασμό συμμιγών αριθμών που δηλώνουν χρόνο.

Παρανοήσεις (Άσκηση 4 ερώτημα Γ)	**N**	**N%**
ΚΠ	0	0
ΠΜ-ΜΜ	15	65,21
ΠΜ-ΟΜ	8	34,78
Σύνολο	23	100

Στον Πίνακα 23 παρουσιάζονται οι παρανοήσεις των μαθητών/τριών στον πολλαπλασιασμό συμμιγών αριθμών που δηλώνουν χρόνο ανά τάξη. Παρατηρείται ότι οι μαθητές/τριες της Στ΄ τάξης σε πλειοψηφία (75%) παρουσίασαν παρανόηση στον πολλαπλασιασμό των μονάδων μέτρησης που δηλώνουν χρόνο και σημείωσαν τη μονάδα μέτρησης κανονικά, ενώ σε μεγαλύτερο ποσοστό (44,44%) οι μαθητές/τριες της Δ΄ τάξης δεν σημείωσαν τη μονάδα μέτρησης αλλά εκτέλεσαν τον πολλαπλασιασμό.

Πίνακας 23: Οι συχνότητες και οι εκατοστιαίες συχνότητες των παρανοήσεων στον πολλαπλασιασμό συμμιγών αριθμών που δηλώνουν χρόνο ανά τάξη.

Παρανοήσεις (Άσκηση 4 ερώτημα Γ)	**Δ΄(9/9) N**	**N%**	**Ε΄(6/8) N**	**N%**	**Στ΄(8/8) N**	**N%**
ΚΠ	0	0	0	0	0	0
ΠΜ-ΜΜ	5	55,55	4	66,66	6	75
ΠΜ-ΟΜ	4	44,44	2	33,33	2	25
Σύνολο	9	100	6	100	8	100

Συζήτηση και συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή μελετήθηκε κατά πόσο οι παρανοήσεις στη διάταξη και τις πράξεις μεταξύ δεκαδικών αριθμών συγκλίνουν με τις παρανοήσεις που προέκυψαν από το τεστ στη διάταξη και τις πράξεις μεταξύ συμμιγών αριθμών αντίστοιχα.

Όπως προαναφέρθηκε οι παρανοήσεις των μαθητών/τριών στον πολλαπλασιασμό των συμμιγών διερευνήθηκαν για πρώτη φορά στη μελέτη αυτή και τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές/τριες αντιμετώπισαν τον πολλαπλασιασμό όπως και στους φυσικούς αριθμούς, χωρίς να συνειδητοποιούν τον πολλαπλασιασμό των μονάδων μέτρησης. Ακόμη και στον πολλαπλασιασμό του καθαρού αριθμού με συμμιγή οι μαθητές/τριες δυσκολεύτηκαν, καθώς παρατήρησαν ότι ο ένας αριθμός είχε μονάδες και ο άλλος όχι. Χαρακτηριστική είναι η απάντηση «Με δυσκόλεψε που είχε ώρες, λεπτά και δευτερόλεπτα». Αξίζει να σημειωθεί ότι η Δ΄ τάξη παρουσίασε τις περισσότερες παρανοήσεις, γεγονός που μπορεί να συνδεθεί με την απουσία του πολλαπλασιασμού καθαρού αριθμού με συμμιγή από το σχολικό βιβλίο. Αυτό οφείλεται τόσο στα Αναλυτικά Προγράμματα όσο και στα σχολικά εγχειρίδια.

Από τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών διακρίνεται μια αμηχανία ως προς τη σειρά αλλά και την εμφάνιση της έννοιας του συμμιγούς αριθμού. Αυτό οφείλεται στην υβριδικότητα του αντικειμένου, το οποίο έχει έννοιες από τις φυσικές επιστήμες, οι οποίες μοντελοποιούνται με τη λογική των αριθμητικών συστημάτων (ο χρόνος-εξηκονταδικό σύστημα, διεθνής συνεργασία για τη μοναδολογία φυσικών χαρακτηριστικών- Διεθνές Σύστημα μονάδων SI) και τελικά οδηγούνται σε μορφές υπολογισμών και πράξεων με βάση τους δεκαδικούς αριθμούς. Εντούτοις, υπάρχει ένας σημαντικός διαχωρισμός από τους δεκαδικούς αριθμούς, καθώς στην περίπτωση των συμμιγών δεν γίνονται πράξεις μόνο ανάμεσα σε αριθμούς αλλά ταυτόχρονα γίνονται σε μονάδες μέτρησης φυσικών μεγεθών για τις οποίες υπάρχει κάθε φορά μια σειρά περιορισμών μη μαθηματικής φύσεως. Για παράδειγμα, 1μέτρο είναι πάντα 100 εκατοστά και όχι άλλοτε 100 και άλλοτε 99. Όμως, όταν αναφερόμαστε στους μήνες του χρόνου, λέμε πως άλλοτε ο μήνας έχει 30 μέρες και άλλοτε 31 μέρες. Οι ημέρες του μήνα αποτελούν πληροφορία που συναντάμε στην καθημερινή ζωή πριν ακόμη έρθουμε στο σχολείο. Τα μαθηματικά λοιπόν δημιουργούν μια σύμβαση ορίζοντας το μήνα 30 ημέρες για τους διάφορους υπολογισμούς.

Από την πλευρά των σχολικών εγχειριδίων παρατηρείται έλλειψη δραστηριοτήτων για την κατανόηση της πράξης του πολλαπλασιασμού στους συμμιγείς. Πότε μπορεί να υφίσταται και με ποιον τρόπο. Συνεπώς, οι μαθητές/τριες δεν άφησαν άλυτο το ερώτημα με τον πολλαπλασιασμό συμμιγών και μάλιστα φάνηκε σαν αυτό να ήταν φυσιολογικό. Δεν παρατήρησαν τι είδους μονάδες δίνονται και αν έχει νόημα ο συγκεκριμένος πολλαπλασιασμός.

Τα αποτελέσματα έδειξαν μια ποικιλία στους τρόπους συλλογισμού, η οποία συγκλίνει με αναμενόμενες κατηγορίες παρανοήσεων στους δεκαδικούς αριθμούς. Επιπλέον, παρατηρείται ότι κάποιες παρανοήσεις που προέκυψαν βασίζονται σε αυτό που αναφέρει ο Sadi (2007), ότι πολλές ιδιότητες των φυσικών αριθμών μεταφέρονται μηχανικά και στους υπόλοιπους πραγματικούς αριθμούς. Στην προκειμένη, στους δεκαδικούς αριθμούς και κατ' επέκταση στους συμμιγείς αριθμούς.

Επιβεβαιώνεται κατά κάποιον τρόπο ότι έχουμε να κάνουμε με ένα ιδιαίτερα χρήσιμο γνωστικό αντικείμενο, στο οποίο όμως εμπεριέχονται σοβαρές συμβάσεις στην γραφή που μπορεί να οδηγήσουν σε λανθασμένους χειρισμούς χωρίς να υποψιάζουν τον λύτη εφόσον οι ίδιοι χειρισμοί σε άλλες περιπτώσεις (στους φυσικούς αριθμούς χωρίς μονάδες μέτρησης) θεωρούνταν και ήταν σωστοί.

Ακόμη, οι κατηγορίες των παρανοήσεων που προέκυψαν συνδέονται με δυσκολίες διάταξης και εκτέλεσης πράξεων των δεκαδικών αριθμών, με τις δυσκολίες που σχετίζονται με τη σύγχυση ανάμεσα στο πλήθος και το μήκος της γραφής του και με την ποικιλία των περιπτώσεων και τις δυσκολίες της διάκρισης των πράξεων μεταξύ αφηρημένων φυσικών αριθμών από τις πράξεις με φυσικούς αριθμούς που συνδέονται με συγκεκριμένα αντικείμενα ή μέτρα. Για παράδειγμα έχουμε τις περιπτώσεις: 5x3, 5αυτοκίνητα x3, 5αυτοκίνητα x3αυτοκίνητα, 5x3αυτοκίνητα, και τι γίνεται εάν αντί αυτοκίνητα είναι μέτρα ή είναι 5αυτοκίνητα x 3μηχανικοί.

Τέλος, παρατηρήθηκε ότι οι παρανοήσεις των μαθητών/τριών συνέκλιναν με αυτές της βιβλιογραφίας, αλλά εμφανίστηκαν και παρανοήσεις που δεν περιέχονταν σε κάποια γνωστή κατηγορία παρανοήσεων. Επιπλέον, να σημειωθεί πως η αδυναμία λύσης ενός ερωτήματος συνοδευόταν και από αδυναμία αιτιολόγησης που ενδεχομένως οφείλεται στην ποικιλία των εννοιών που συγκροτούν τον συμμιγή αριθμό.

Καταλήγοντας, η πολυπλοκότητα της έννοιας του συμμιγούς αριθμού που ορίζεται από την ποικιλία των εννοιών που τον προσδιορίζουν ενέχει τη δυσκολία του. Συνεπώς, θα πρέπει να αναδειχθεί η δυσκολία και όχι να παραμεριστεί, όπως επίσης θα πρέπει να υπάρξει κατάλληλη επιμόρφωση των εκπαιδευτικών για την καλύτερη διαχείριση τέτοιων εννοιών, ώστε να προλαμβάνονται οι παρανοήσεις που ενδεχομένως θα δημιουργηθούν από την εκπαιδευτική διαδικασία σε τέτοιες πολύπλοκες έννοιες.

Παράρτημα

Διαγνωστικό τεστ

Το παρακάτω τεστ αποτελεί μέρος της ερευνητικής μεθοδολογίας για την εκπόνηση διπλωματικής εργασίας του ΠΜΣ: «Διδακτική Θετικών Επιστημών και ΤΠΕ στην Εκπαίδευση: Διεπιστημονική προσέγγιση» του Πανεπιστημίου Αιγαίου.

Μεταπτυχιακή φοιτήτρια: Καραφέρη Μαρία-Δήμητρα

Τάξη:________ **Ημερομηνία:_____________**

1) **Μπορείς να βρεις το μεγαλύτερο;**
   Αν ναι, κύκλωσέ το και γράψε το «γιατί». Αν όχι, τι σε δυσκολεύει; .

Α) 4 ώρες 15 λεπτά 3 δευτερόλεπτα 4 ώρες 19 δευτερόλεπτα

Εξηγώ γιατί το επέλεξα:...
....
Εξηγώ τι με δυσκολεύει:..
....

Β) 2 ώρες 5 λεπτά 1 ώρα 40 λεπτά 30 δευτερόλεπτα

Εξηγώ γιατί το επέλεξα:...
....
....
Εξηγώ τι με δυσκολεύει:..
....
....

Γ) 2 ώρες 35 λεπτά 2 ώρες 34 λεπτά 2 δευτερόλεπτα

Εξηγώ γιατί το επέλεξα:...
....
....
Εξηγώ τι με δυσκολεύει:..
....
....

Δ) 1 ώρα 26 λεπτά 10 δευτερόλεπτα 1 ώρα 24 λεπτά

Εξηγώ γιατί το επέλεξα:...
....
....
Εξηγώ τι με δυσκολεύει:..
....
....

2) **Μπορείς να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις;**
Αν ναι, σημείωσε τα βήματα που ακολούθησες. Αν όχι, τι σε δυσκολεύει;

Α) 2 ώρες 15 λεπτά + 2 ώρες 36 λεπτά

Τα βήματα που ακολούθησα:
....
....
....
....
....
....

Τι με δυσκολεύει:...
....
....
....

Β) 3 ώρες 29 λεπτά
+1 ώρα 35 λεπτά

Τα βήματα που ακολούθησα:
....
....
....
....
....
....

Τι με δυσκολεύει:...
....
....
....

3) **Μπορείς να κάνεις τις παρακάτω αφαιρέσεις;**
Αν ναι, σημείωσε τα βήματα που ακολούθησες. Αν όχι, τι σε δυσκολεύει;

Α) 3 ώρες 35 λεπτά 6 δευτερόλεπτα
\- <u>2 ώρες 24 λεπτά</u>

Τα βήματα που ακολούθησα:
....
....
....
....
....
....

Τι με δυσκολεύει:..
....
....
....

Β) 3 ώρες 25 λεπτά
<u>-1 ώρα 34 λεπτά</u>

Τα βήματα που ακολούθησα:
....
....
....
....
....
....

Τι με δυσκολεύει:..
....
....
....

4) Μπορείς να κάνεις τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς;
Αν ναι, σημείωσε τα βήματα που ακολούθησες Αν όχι, τι σε δυσκολεύει;

Α) 2 x (6 ώρες 5 λεπτά 23 δευτερόλεπτα)

Τα βήματα που ακολούθησα:
....
....
....
....
....
Τι με δυσκολεύει:...
....
....

Β) (4 ώρες 20 λεπτά) x 3

Τα βήματα που ακολούθησα:
....
....
....
....
....
Τι με δυσκολεύει:...
....
....

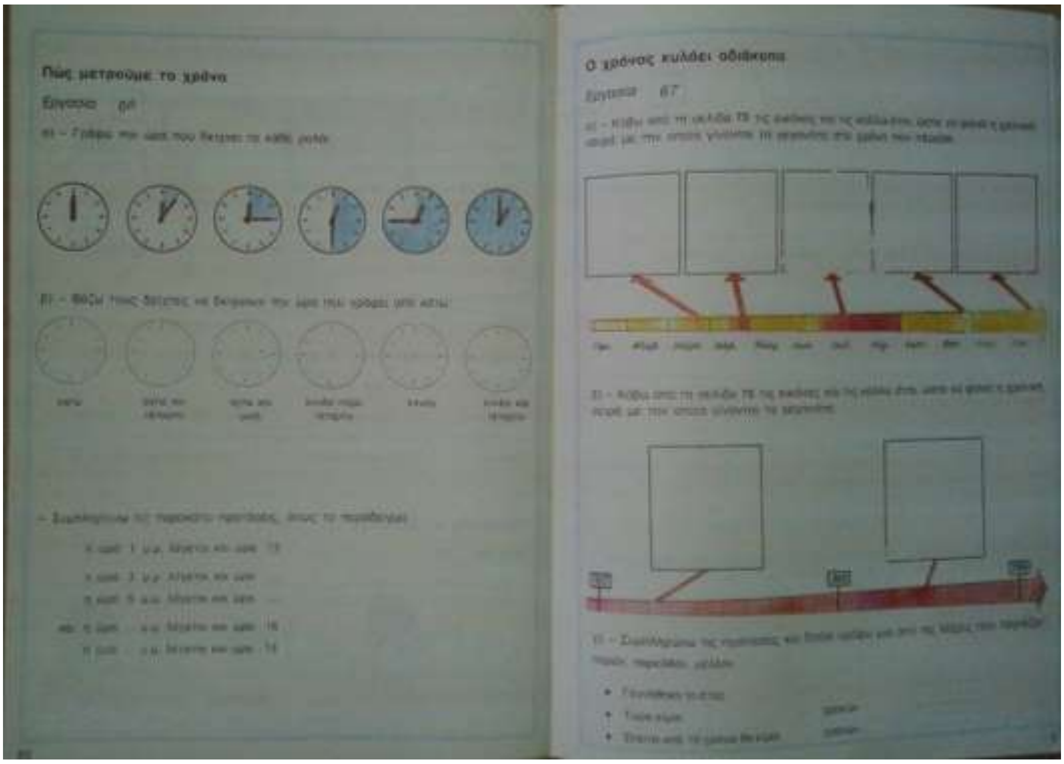
Γ) (3 ώρες) x (2ώρες)

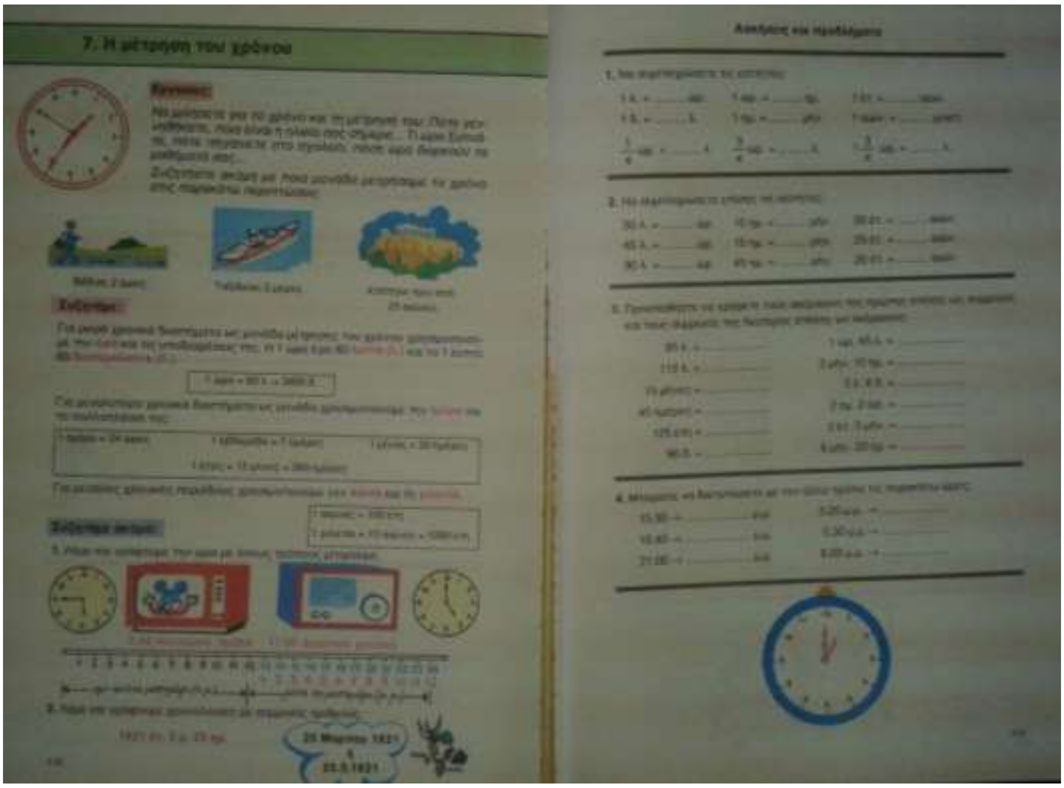
Τα βήματα που ακολούθησα:
....
....
....
....
....
Τι με δυσκολεύει:...
....
....

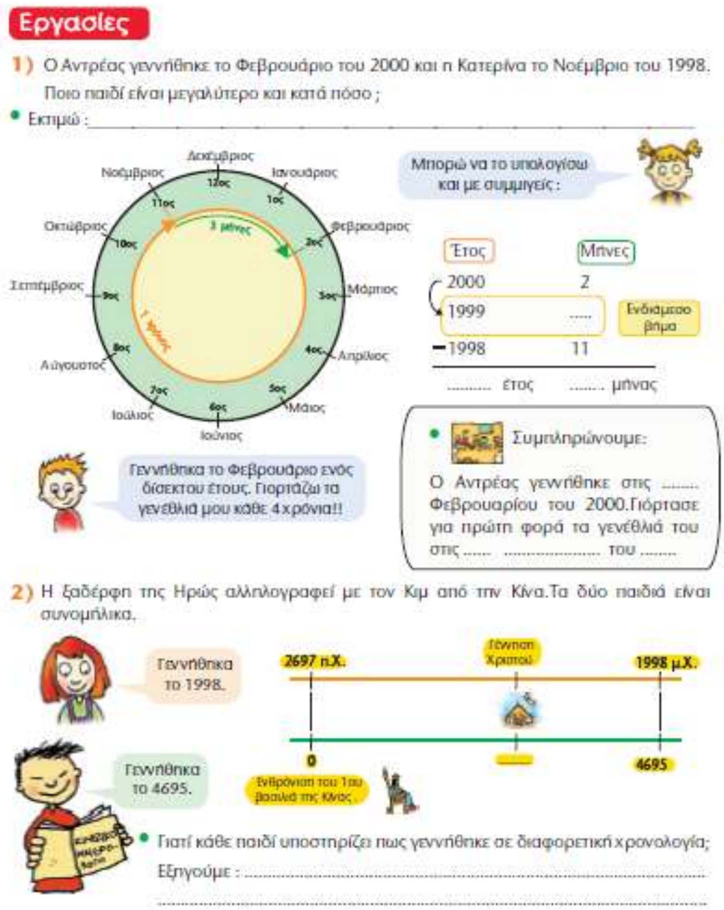
Σας ευχαριστώ!

Ενδεικτικές δραστηριότητες από τα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών και Μελέτης Περιβάλλοντος για την έννοια της μέτρησης του χρόνου.

ΔΡΑΣΑΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ







Εργασίες

1) Ο Αντρέας γεννήθηκε το Φεβρουάριο του 2000 και η Κατερίνα το Νοέμβριο του 1998. Ποιο παιδί είναι μεγαλύτερο και κατά πόσο ;

• Εκτιμώ : ....

Έτος	Μήνες	
2000	2	
1999	.....	Ενδιάμεσο βήμα
−1998	11	
.... έτος	...... μήνας	

• Συμπληρώνουμε:

Ο Αντρέας γεννήθηκε στις .... Φεβρουαρίου του 2000. Γιόρτασε για πρώτη φορά τα γενέθλιά του στις .... του ....

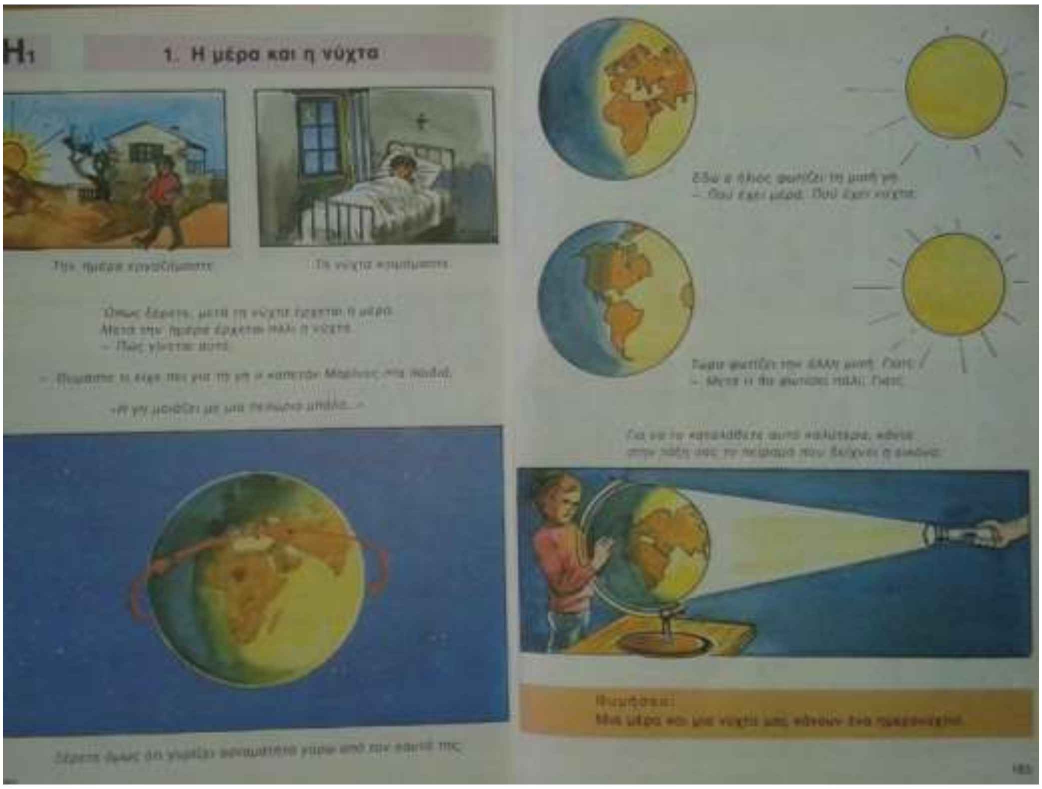
2) Η ξαδέρφη της Ηρώς αλληλογραφεί με τον Κιμ από την Κίνα. Τα δύο παιδιά είναι συνομήλικα.

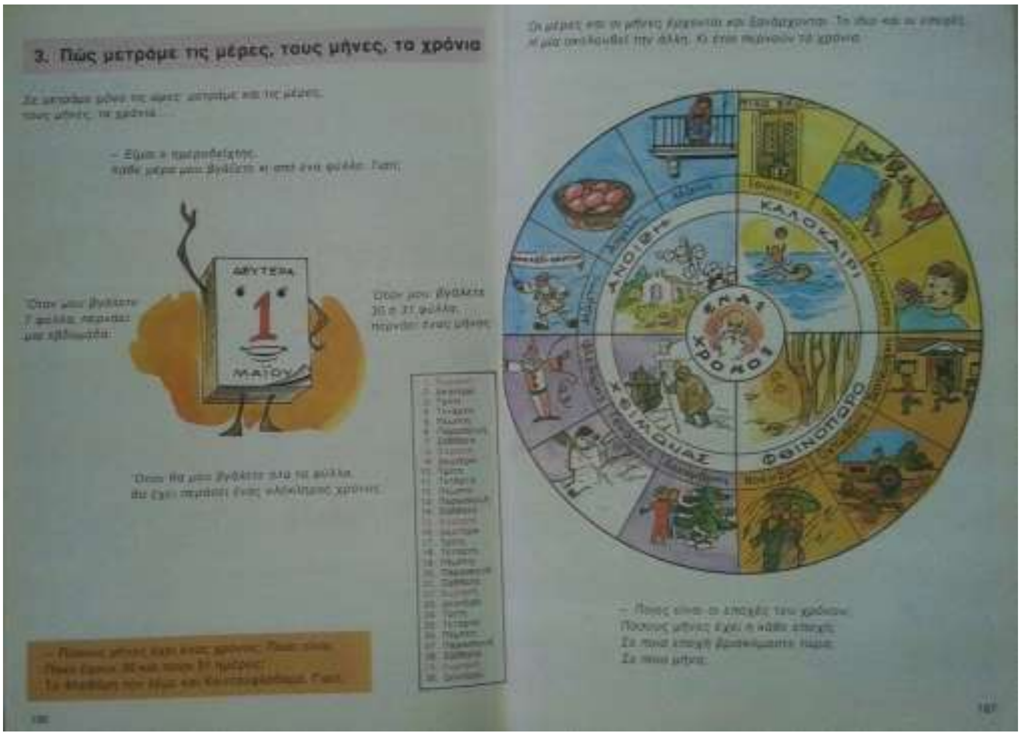
• Γιατί κάθε παιδί υποστηρίζει πως γεννήθηκε σε διαφορετική χρονολογία;

Εξηγούμε : ....

....

ΔΡΑΣΑΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ





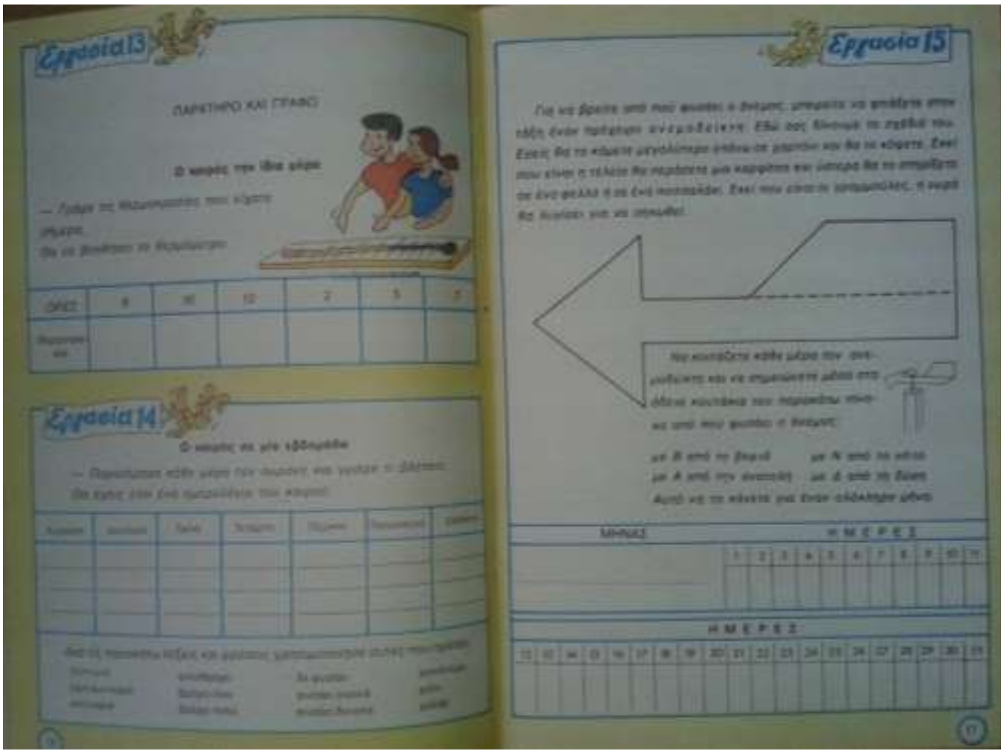
3. Πώς μετράμε τις μέρες, τους μήνες, τα χρόνια

4.3 Αλλαγές μέσα στο χρόνο 10

Παρατήρησε τις εικόνες.
Συζήτησε με τους συμμαθητές σου:
- Τι έχει αλλάξει;
- Τι παραμένει ίδιο;
- Πού οφείλονται αυτές οι αλλαγές;

χρόνος
αλλαγή
ημερολόγιο
μέρα μήνας
εποχή

47


Εργασία 13
ΠΑΡΑΤΗΡΩ ΚΑΙ ΓΡΑΦΩ
ΩΡΕΣ
Εργασία 14
Εργασία 15
ΜΗΝΑΣ
ΗΜΕΡΕΣ
ΗΜΕΡΕΣ

Βιβλιογραφία

Adams, M. D. (1848). *Arithmetic, in which the principles of operating by numbers are analytically explained and synthetically applied: Illustrated by copious examples*. Retrieved October 18, 2015, from https://books.google.gr/books?id=PRE3AAAAMAAJ&printsec=frontcover&d

Bureau International des Poids et Mesures. *Units outside the SI*. Retrieved December 12, 2015, from http://www.bipm.org/en/publications/si- brochure/chapter4.html.

Civil, M. (1995). *Everyday Mathematics, "Mathematicians' Mathematics," and School Mathematics: Can We (Should We) Bring These Three Cultures Together?* Journal for Research in Mathematics Education. (11), 40-62. Retrieved January 5, 2016, from http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED394788.pdf.

Council Directive (1979). *The approximation of the laws of the Member States relating to units of measurement and on the repeal of Directive 71/354/EEC*. Retrieved December 8, 2015, from http://www.nist.gov/pml/wmd/metric/upload/EU_Metric_Directive_20102.pdf.

Michener, E. R. (1978). *Understanding Understanding Mathematics*. Cognitive science (2)4, 361-383. Retrieved January 5, 2016, from http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1207/s15516709cog0204_3/epdf.

Nesher, P. (1987). *Towards an Instructional Theory: the Role of Student's Misconceptions*. For the Learning of Mathematics 3(7), 33-40. Retrieved January 5, 2016, from http://flm-journal.org/Articles/4582E5C6877C0CBF1CFF62ABA1AA0B.pdf.

Nesher, P., Peled, I. (1986). Shifts in Reasoning: The Case of Extending Number Concepts. Educational Studies in Mathematics 17, 67-79. Retrieved January 5, 2016, from http://download.springer.com/static/pdf/574/art%253A10.1007%252FBF00302379.pdf?originUrl=http%3A%2F%2Flink.springer.com%2Farticle%2F10.1007%2FBF00302379&token2=exp=1464991946~acl=%2Fstatic%2Fpdf%2F574%2Fart%25253A10.1007%25252FBF00302379.pdf%3ForiginUrl%3Dhttp%253A%252F%252Flink.springer.com%252Farticle%252F10.1007%252FBF00302379*~hmac=a2f74b8c10fb722864be92c7e1c8ed31ee0438e7e4c3e88929c9605f6aeec72f.

Sadi, A. (2007). *Misconception in numbers*. UGRU Journal (5), 1-7. Retrieved January 5, 2016, from http://www.ugru.uaeu.ac.ae/UGRUJournal/UGRUJournal_files/SR5/MIN.pdf.

Smith, J., Roschelle, J., Sessa, A. (1993). *Misconceptions Reconceived: A Constructivist Analysis of Knowledge in Transition*. The Journal of the Learning Sciences, 3(2), 115-163. Retrieved May 8, 2016, from http://edci670.pbworks.com/w/file/fetch/59802651/Smith_et_al_1993.pdf.

Stacey, K. & Steinle, V. (1998). *The incidence of misconceptions of decimal notation amongst studens in Grades 5 to 10*. In C. Kanes, M. Goos, & E. Warren (Eds.), Teaching Mathematics in New Times. Proceedings of the 21st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (Vol. 2, pp. 548- 555). Gold Coast, Australia: MERGA. Retrieved October 23, 2016, from https://extranet.education.unimelb.edu.au/DSME/decimals/SLIMversion/backinfo/refs/MERGA98stst.pdf.

Steinle, V. (2004, March). Changes with age in students' misconceptions of decimal numbers. Retrieved November 27, 2015, from https://extranet.education.unimelb.edu.au/SME/TNMY/Decimals/Decimals/backinfo/refs/steinlethesis2004.pdf.

The State of Queensland (2005). Retrieved October 25, 2015, from https://www.qcaa.qld.edu.au/downloads/p_10/kla_maths_info_measurement.pdf.

Time. *Oxford dictionaries*. Retrieved December 12, 2015, from http://www.oxforddictionaries.com/definition/english/time.

Van de Walle, J., (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια Εξελικτική Διδασκαλία*. Μετάφραση Αρχοντούλα Αλεξανδροπούλου & Βασίλης Κομπορόζος. Στο Τ. Τριανταφυλλίδης (Επιμ.). Αθήνα: Τυπωθήτω.

Van der Waerden, B. L., (2003). *Η αφύπνιση της επιστήμης*. Μετάφραση Γιάννης Χριστιανίδης. Κρήτη: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Βάρσος, Δ., Δεριζιώτης, Δ., Εμμανουήλ, Ι., Μαλιάκας, Μ., Ταλλέλη, Ο. (2005). *Μια εισαγωγή στην Άλγεβρα*. Αθήνα. Ανακτήθηκε Δεκέμβριος 16, 2015, από http://math.uoa.gr/algebra/ALG_Nea.pdf.

Βιβλίο μαθητή Α΄ Δημοτικού (1984): Γεωργοκώστας, Γ., Μπέλλας, Θ., Σκόπας, Ν., Μελέτη Περιβάλλοντος Α΄ Δημοτικού. *Εμείς κι ο κόσμος. α' τεύχος*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βιβλίο μαθητή Α΄ Δημοτικού (1985): Αποστολίκας, Γ., Διονυσόπουλος, Τρ., Σαλβαράς, Γ., Μαθηματικά Α΄ Δημοτικού. *Τα μαθηματικά μου. α΄ τεύχος*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βιβλίο μαθητή Α΄ Δημοτικού (2003): Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α., Καψάλης, Α., πνευματικός, Δ., Μαθηματικά Α΄ Δημοτικού. *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Βιβλίο μαθητή Α΄ Δημοτικού (2003): Πλακίτση, Αι., Κοντογιάννη, Α., Σπυράτου, Ει., Μανώλη, Β., Μελέτη Περιβάλλοντος Α΄ Δημοτικού. *Μελέτη Περιβάλλοντος Α΄ Δημοτικού*. Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

Βιβλίο μαθητή Β΄ Δημοτικού (1994): Αποστολίκας, Γ., Διονυσόπουλος, Τρ., Σαλβαράς, Γ., Μαθηματικά Β΄ Δημοτικού. *Τα μαθηματικά μου. α΄ τεύχος*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βιβλίο μαθητή Β΄ Δημοτικού (2003): Δημοπούλου, Μ., Ζόμπολας, Τ., Μπαμπίλα, Ε., Σκαναβή, Κ., Φρανζή, Α., Χατζημιχαήλ, Μ., Μελέτη Περιβάλλοντος Β΄ Δημοτικού. *Μελέτη Περιβάλλοντος Β΄ Δημοτικού*. Αθήνα: Εκδόσεις Καλειδοσκόπιο.

Βιβλίο μαθητή Β΄ Δημοτικού (2003): Καργιωτάκης, Γ., Μαραγκού, Α., Μπελίτσου, Ν., Σοφού, Β. *Μαθηματικά Β΄ Δημοτικού. β' τεύχος*. Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

Βιβλίο μαθητή Γ΄ Δημοτικού (2003): Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι., Σπανακά, Α., Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού. *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Βιβλίο μαθητή Δ΄ Δημοτικού (1991):Γεωργοκώστας, Γ., Μπέλλας, Θ., Μπενέκος, Α., Σκόπας, Ν.,Λεοντάρης, Α., Χριστιάς, Γ., Χριστοδούλου, Σ., Μελέτη Περιβάλλοντος Δ΄ Δημοτικού. *Εμείς κι ο κόσμος. α΄ τεύχος*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βιβλίο μαθητή Δ΄ Δημοτικού (2001): Αποστολίκας, Γ., Διονυσόπουλος, Τρ., Σαλβαράς, Γ., Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού. *Τα μαθηματικά μου. α΄ τεύχος*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βιβλίο μαθητή Δ΄ Δημοτικού (2003): Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α. Δ., Σαΐτης, Α. *Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού*. Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

Βιβλίο μαθητή Ε΄ Δημοτικού (1995): Αλβανός, Γ., Δήμου, Γ., Ζέρβας, Γ., Μπρούμας, Κ., Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού. *Τα μαθηματικά μου. α' τεύχος*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βιβλίο μαθητή Ε΄ Δημοτικού (2003): Κακαδιάρης, Χ., Μπελίτσου, Ν., Στεφανίδης, Γ., Χρονοπούλου, Γ. *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού*. Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

Βιβλίο μαθητή Στ΄ Δημοτικού (2000): Αλβανός, Γ., Δήμου, Γ., Ζέρβας, Γ., Μπρούμας, Κ., Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού. *Τα μαθηματικά μου. α' τεύχος*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βιβλίο μαθητή Στ΄ Δημοτικού (2003): Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., Οικονόμου, Θ. *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Ελληνικό Ινστιτούτο Μετρολογίας. *Μονάδες μέτρησης*. Ανακτήθηκε Δεκέμβριος 17, 2015 http://www.eim.gr/%CE%BC%CE%B5%CF%84%CF%81%CE%BF%CE%BB%CE%BF%CE%B3%CE%AF%CE%B1/.

Εξαρχάκος, Θ. (1993). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Εξαρχάκος, Θ. (2001). *Εισαγωγή στα Μαθηματικά*. Αθήνα: Αθανασόπουλος, Σ., Παπαδάμης, Σ. & ΣΙΑ Ε.Ε.

Επίσημη Εφημερίδα των Ευρωπαϊκών Κοινοτήτων. (1979). *Περί των μονάδων μετρήσεως που μνημονεύονται στις συμβάσεις τις σχετικές με τα διπλώματα ευρεσιτεχνίας*. Αριθ. Ν43/22.

Καλαβάσης, Φ. & Μούτσιος-Ρένζος, Α. (2015). *Ανάμεσα στο μέρος και στο όλο: Αναστοχαστική Οικοδόμηση Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: Gutenberg.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: Leader books.

Κολέζα, Ε. (2009). Θεωρία *και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών*. Αθήνα: Τόπος.

Κουλαϊδής, Β. (2001). Διδακτική των Φυσικών Επιστημών: Αντικείμενο και αναγκαιότητα. Στο Β. Κουλαϊδής (επιστ. ευθ.). *Διδακτική των Φυσικών Επιστημών*. (τόμος Α σελ. 25-50). Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Πάτρα.

Μαρίνος, Α. (χ. χ.). *Μαθηματικά στη Φύση*. (χ. τ.): Ιδιωτική έκδοση.

Μπαντέκας, Γ. (χ. χ.). *Τα μετρικά συστήματα*. Ανακτήθηκε Ιούνιος 2, 2016, από http://www.archaiologia.gr/wp-content/uploads/2011/06/26-5.pdf.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (1982). *Αναλυτικό και Ωρολόγιο Πρόγραμμα Μαθηματικών και Μελέτης Περιβάλλοντος των Α΄ και Β΄ τάξεων του Δημοτικού σχολείου*. Ανακτήθηκε Νοέμβριος 18, 2015, από http://www.pi-schools.gr/progr_spoudon_1899_1999/katalogos_fek.pdf.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (1983). *Αναλυτικό και Ωρολόγιο Πρόγραμμα Μαθηματικών και Μελέτης Περιβάλλοντος Γ΄ τάξης του Δημοτικού σχολείου*. Ανακτήθηκε Νοέμβριος 18, 2015, από http://www.pi-schools.gr/progr_spoudon_1899_1999/katalogos_fek.pdf.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (1984). *Αναλυτικό και Ωρολόγιο Πρόγραμμα Μαθηματικών των Δ΄ και Ε΄ τάξεων του Δημοτικού σχολείου*. Ανακτήθηκε Νοέμβριος 18, 2015, από http://www.pi-schools.gr/progr_spoudon_1899_1999/katalogos_fek.pdf.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (1985). *Αναλυτικό και Ωρολόγιο Πρόγραμμα Μαθηματικών Στ΄ τάξης του Δημοτικού σχολείου και Μελέτης Περιβάλλοντος Δ΄ τάξης*. Ανακτήθηκε Νοέμβριος 18, 2015, από http://www.pi-schools.gr/progr_spoudon_1899_1999/katalogos_fek.pdf.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (1995). *Αναλυτικό και Ωρολόγιο Πρόγραμμα Μαθηματικών Δ΄, Ε΄ και Στ΄ τάξεων του Δημοτικού σχολείου*. Ανακτήθηκε Νοέμβριος 18, 2015, από http://www.pi-schools.gr/progr_spoudon_1899_1999/katalogos_fek.pdf.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (2003). *Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών και Μελέτης Περιβάλλοντος Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, Ε΄ και Στ΄ τάξεων του Δημοτικού σχολείου*. Ανακτήθηκε Νοέμβριος 18, 2015, από http://www.pi-schools.gr/progr_spoudon_1899_1999/katalogos_fek.pdf.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών Μαθηματικών Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, Ε΄ και Στ΄ τάξεων του Δημοτικού σχολείου*. Ανακτήθηκε Νοέμβριος 18, 2015, από http://www.pi-schools.gr/progr_spoudon_1899_1999/katalogos_fek.pdf.

Τετράδιο Εργασιών Α΄ Δημοτικού (2003): Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α., Καψάλης, Α., Πνευματικός, Δ., Μαθηματικά Α΄ Δημοτικού. *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής*. γ΄ τεύχος. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Τετράδιο Εργασιών Α΄ Δημοτικού (2003): Πλακίτση, Αι., Κοντογιάννη, Α., Σπυράτου, Ει., Μανώλη, Β., Μελέτη Περιβάλλοντος Α΄ Δημοτικού. *Μελέτη Περιβάλλοντος Α΄ Δημοτικού*. Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

Τετράδιο Εργασιών Β΄ Δημοτικού (1984): Γεωργοκώστας, Γ., Μπέλλας, Θ., Μπενέκος, Α., Σκόπας, Ν., Μελέτη Περιβάλλοντος Β΄ Δημοτικού. *Εμείς κι ο κόσμος. α΄ τεύχος*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Τετράδιο Εργασιών Β΄ Δημοτικού (2003): Δημοπούλου, Μ., Ζόμπολας, Τ., Μπαμπίλα, Ε., Σκαναβή, Κ., Φρανζή, Α., Χατζημιχαήλ, Μ., Μελέτη Περιβάλλοντος Β΄ Δημοτικού. *Μελέτη Περιβάλλοντος Β΄ Δημοτικού*. Αθήνα: Εκδόσεις Καλειδοσκόπιο.

Τετράδιο Εργασιών Β΄ Δημοτικού (2003): Καργιωτάκης, Γ., Μαραγκού, Α., Μπελίτσου, Ν., Σοφού, Β. *Μαθηματικά Β΄ Δημοτικού. β' τεύχος*. Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

Τετράδιο Εργασιών Γ΄ Δημοτικού (1985): Καζάζη-Πατηνιώτη, Μ., Λεοντάρης, Α., Χριστιάς, Γ., Μελέτη Περιβάλλοντος Γ΄ Δημοτικού. *Εμείς κι ο κόσμος. α΄ τεύχος*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Τετράδιο Εργασιών Γ΄ Δημοτικού (2003): Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι., Σπανακά, Α., Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού. *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. δ΄ τεύχος*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Τετράδιο Εργασιών Δ΄ Δημοτικού (2003): Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α. Δ., Σαΐτης, Α. *Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού. β΄ τεύχος*. Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

Τετράδιο Εργασιών Δ΄ Δημοτικού (2003): Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α. Δ., Σαΐτης, Α. *Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού. δ΄ τεύχος*. Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

Τετράδιο Εργασιών Ε΄ Δημοτικού (2003): Κακαδιάρης, Χ., Μπελίτσου, Ν., Στεφανίδης, Γ., Χρονοπούλου, Γ. *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού. δ΄ τεύχος*. Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

Τετράδιο Εργασιών Στ΄ Δημοτικού (2003): Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., Οικονόμου, Θ. *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού. γ΄ τεύχος*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.