



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΜΕΣΩ ΕΡΕΥΝΑΣ (ΜΕ.Δ.Μ.Ο.Δ.Ε.)

**Στοχαστική Μοντελοποίηση και Βελτιστοποίηση
Διαθεσιμότητας Πόρων σε Πολλαπλούς Χώρους Στάθμευσης
με τη Χρήση Μαρκοβιανών Μοντέλων**

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: Καδρέφη Αθανασία

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Βασίλης Κούτρας, Επίκουρος Καθηγητής

ΧΙΟΣ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2021

Έχω διαβάσει και κατανοήσει τους κανόνες για τη λογοκλοπή και τον τρόπο σωστής αναφοράς των πηγών που περιέχονται στον Οδηγό συγγραφής διπλωματικών εργασιών του ΤΜΟΔ. Δηλώνω ότι, από όσα γνωρίζω, το περιεχόμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι προϊόν δικής μου δουλειάς και υπάρχουν αναφορές σε όλες τις πηγές που χρησιμοποίησα.

Οφείλω να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου κ. Βασίλειο Κούτρα για την συνεχή στήριξη του και την καθοδήγησή για την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Χωρίς την συνεχή επικοινωνία και αλληλοκατανόηση που υπήρχε δεν θα είχα καταφέρει να φέρω εις πέρας αυτή την εργασία. Τέλος, θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένεια μου και στον άντρα μου για την στήριξη με όλες τους τις δυνατότητες σε αυτό τον κύκλο σπουδών μου στο πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών μέσω έρευνας (ΜΕ.Δ.Μ.Ο.Δ.Ε.).

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	6
Abstract	8
Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή	10
1.1 Σκοπιμότητα της έρευνας.....	10
1.2 Στόχοι της έρευνας	11
Κεφάλαιο 2: Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	12
Κεφάλαιο 3: Ομογενείς και Κυκλικές Μη-Ομογενείς Μαρκοβιανές Αλυσίδες	17
3.1 Ομογενείς Μαρκοβιανές Αλυσίδες.....	17
3.2 Κυκλικές Μη-Ομογενείς Μαρκοβιανές Αλυσίδες	20
Κεφάλαιο 4: Στοχαστική μοντελοποίηση και βελτιστοποίηση διαθεσιμότητας πόρων σε πολλαπλούς χώρους στάθμευσης με τη χρήση Μαρκοβιανών μοντέλων	23
4.1 Μοντελοποίηση και περιγραφή του συστήματος με τη χρήση ομογενών Μαρκοβιανών Αλυσίδων.....	23
4.1.1 Περίπτωση δύο κλάσεων πελατών (HMC)	24
4.1.2 Περίπτωση τριών κλάσεων πελατών (HMC)	29
4.1.3 Γενική περίπτωση k κλάσεων πελατών (HMC).....	34
4.2 Βελτιστοποίηση του αναμενόμενου κέρδους της εταιρείας διαχείρισης πολλαπλών χώρων στάθμευσης	35
4.3 Μοντελοποίηση και περιγραφή του συστήματος με τη χρήση Κυκλικών Μη Ομογενών Μαρκοβιανών Αλυσίδων	38
4.3.1 Περίπτωση δυο κλάσεων πελατών (CNHMC).....	42
4.3.2 Περίπτωση τριών κλάσεων πελατών (CNHMC).....	46
4.3.3 Γενική περίπτωση k κλάσεων πελατών (CNHMC)	51
Κεφάλαιο 5: Αριθμητικά αποτελέσματα.....	54
5.1 Αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση της μοντελοποίησης με τη χρήση ομογενών Μαρκοβιανών αλυσίδων	54
5.1.1 Αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση δύο κλάσεων πελατών (HMC).....	54
5.1.2 Αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση τριών κλάσεων πελατών (HMC)	57
5.1.3 Αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση τεσσάρων κλάσεων πελατών (HMC).....	61
5.2 Αριθμητικά αποτελέσματα για τη βελτιστοποίηση του αναμενόμενου κέρδους της εταιρείας διαχείρισης	66

5.3 Αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση της μοντελοποίησης με τη χρήση Κυκλικών μη Ομογενών Μαρκοβιανών αλυσίδων	69
5.3.1 Αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση χωρίς δέσμευση πόρων (NR)	69
5.3.2 Αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση δύο κλάσεων πελατών (CNHMC)	72
5.3.3 Αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση τριών κλάσεων πελατών (CNHMC)	75
5.3.4 Αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση τεσσάρων κλάσεων πελατών (CNHMC)	80
5.3.5. Αριθμητικά αποτελέσματα για την επιρροή της μεταβολής των ρυθμών μετάβασης και απελευθέρωσης στις μεταβλητές του συστήματος	85
Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα και μελλοντικές προοπτικές έρευνας	94
Βιβλιογραφία.....	98

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως θέμα τη *Στοχαστική Μοντελοποίηση και τη Βελτιστοποίηση Διαθεσιμότητας Πόρων Σε Πολλαπλούς Χώρους Στάθμευσης με τη χρήση Μαρκοβιανών Μοντέλων*. Πιο συγκεκριμένα, μελετάται η περίπτωση μιας εταιρίας η οποία διαχειρίζεται δύο χώρους στάθμευσης που βρίσκονται στην περιοχή ενός αεροδρομίου με τον έναν από τους δύο χώρους να βρίσκεται πλησιέστερα στον τερματικό σταθμό του αεροδρομίου. Στον καθένα από αυτούς τους χώρους υπάρχει συγκεκριμένος αριθμός θέσεων για τους πελάτες που εισέρχονται. Οι πελάτες διαχωρίζονται σε κλάσεις με διαφορετικές προτεραιότητες με βάση κάποια κριτήρια. Στο πλαίσιο της εργασίας ο διαχωρισμός γίνεται βάσει του κόστους το οποίο καλούνται οι πελάτες να πληρώσουν κατά την είσοδο τους στους χώρους στάθμευσης.

Στο πρώτο μέρος της εργασίας, παρουσιάζεται η μοντελοποίηση του παραπάνω συστήματος με την χρήση Ομογενών Μαρκοβιανών Διαδικασιών (HMC) κάτω από την παραδοχή ότι οι αφίξεις πελατών γίνονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson και επιπλέον ότι ο χρόνος παραμονής κάθε πελάτη στο χώρο στάθμευσης ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Βασικός στόχος είναι να βρεθούν οι βέλτιστες πολιτικές δέσμευσης θέσεων για τους πελάτες υψηλότερης προτεραιότητας σε κάθε έναν από τους χώρους στάθμευσης, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η πιθανότητα ένας πελάτης οποιασδήποτε κατηγορίας να μην βρει ελεύθερη θέση. Ο εντοπισμός της βέλτιστης πολιτικής δέσμευσης θέσεων προκύπτει μέσω της επίλυσης ενός προβλήματος πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης.

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας μελετάται το ίδιο ακριβώς μοντέλο διαφοροποιώντας ωστόσο τη δομή του προβλήματος πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης. Πιο αναλυτικά, για το προαναφερθέν μοντέλο, κατασκευάζεται ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης στο οποίο η αντικειμενική συνάρτηση είναι το κέρδος της επιχείρησης που διαχειρίζεται τους δύο χώρους στάθμευσης, και σκοπός είναι η μεγιστοποίηση του και ταυτόχρονα η ελαχιστοποίηση της πιθανότητας αποκλεισμού κάθε κλάσης πελατών από τους χώρους στάθμευσης. Και σε αυτήν την περίπτωση, στόχος είναι να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων για τις κλάσεις πελατών με προτεραιότητα, η οποία να μεγιστοποιεί το κέρδος για την επιχείρηση, παρέχοντας ταυτόχρονα την ελάχιστη δυνατή πιθανότητα αποκλεισμού για κάθε κλάση πελατών.

Στο τρίτο μέρος της εργασίας, διαφοροποιείται ο τρόπος με τον οποίο μοντελοποιείται η άφιξη καθώς και η αναχώρηση των πελατών από και προς τους χώρους στάθμευσης. Πιο συγκεκριμένα, θεωρείται ότι η διαδικασία αφίξεων των πελατών στους χώρους στάθμευσης παρουσιάζει μια περιοδική συμπεριφορά κάποιες συγκεκριμένες ώρες της ημέρας και αυτό συμβαίνει κάθε μέρα με τους ίδιους ρυθμούς. Πάνω σε αυτήν την παραδοχή θα βασιστούν και τα μοντέλα τα οποία υιοθετούνται για την μελέτη της

περίπτωσης αυτής, χρησιμοποιώντας Κυκλικές Μη Ομογενής Μαρκοβιανές Αλυσίδες (CNHMC). Στην προκειμένη περίπτωση, η ήμερα διαχωρίζεται σε τρεις διαφορετικές περιόδους βασιζόμενες στους ρυθμούς αφίξεων των πελατών. Με την χρήση αυτού του τύπου Μαρκοβιανών Αλυσίδων, το μοντέλο που μελετάται θα είναι σε θέση να δώσει πληροφορίες για την κάθε κλάση ξεχωριστά σε κάθε μια από τις περιόδους που εξετάζονται, αλλά και συνολικά. Συγκεκριμένα, για κάθε περίοδο σχηματίζεται ένα πρόβλημα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης, η λύση του οποίου παρέχει τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων για κάθε κλάση προτεραιότητας σε κάθε χώρο στάθμευσης, η οποία ελαχιστοποιεί ταυτόχρονα τις πιθανότητες αποκλεισμού κάθε κλάσης, σε κάθε περίοδο και σε κάθε χώρο στάθμευσης.

Συνοψίζοντας, αξίζει να σημειωθεί πως με τα μοντέλα τα οποία προτείνονται στην παρούσα διπλωματική εργασία δίνεται η δυνατότητα στην εκάστοτε εταιρία να μπορεί να σχεδιάζει μια βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων την οποία πρέπει να ακολουθήσει, ώστε να πετύχει αύξηση του κέρδους της και ταυτόχρονα την ικανοποίηση των πελατών της. Επιπλέον, με τη χρήση των Κυκλικών Μη ομογενών Μαρκοβιανών Αλυσίδων παρέχεται η δυνατότητα μοντελοποίησης της περιοδικότητας της κίνησης στους χώρους στάθμευσης, γεγονός που κάνει το προτεινόμενο μοντέλο να προσεγγίζει πολύ περισσότερο την πραγματικότητα.

Abstract

The present thesis is about stochastic modeling and optimizing resource availability in multiple parking lots using Markov models. Specifically, a company that manages two parking lots located nearby an airport is considered. In each of these parking lots there is a certain number of parking places for the incoming clients. Clients are partitioned into classes with different priorities based on certain criteria. The main aim of this thesis is to determine the optimal parking places' reservation policy in the system of two-parking lots, under the same administration, which minimizes the blocking probability for each client's class into the parking lots.

In the first part, the above system is modeled using a Homogeneous Markov Chain (HMC) under the assumption that arrivals follow a Poisson process, and each client stays in the parking lots for an exponential distributed time. Main aim for the company is to find the optimal parking lots reservation policy for higher priority clients in each of the parking lots, so as to minimize the probability that a client of any class will not find a free place. The optimal reservation policy is derived through formulating and solving a multi-objective optimization problem.

In the second part, the same model is being studied, while diversifying the structure of the multi-objective optimization problem. In addition, for the above-mentioned model, an optimization problem is constructed in which the objective function is the profit of the company that manages the two parking lots, and the aim is to maximize it and at the same time minimize the possibility of denying access for each class of customers at the parking lots. In this case, the goal is to find the best reservation policy for priority classes which maximizes the profit for the company, while providing the minimum probability of exclusion for each customer class.

In the third part of this thesis, the way in which the arrival and the service rates of customers in the parking lots is studied is differentiated. More specifically, it is considered that the arrival of clients at the parking lots reveals a periodic behavior at certain times of the day and this happens every day at the same pace. Due to this assumption, the models adopted will be studied using Cyclic Non-Homogeneous Markov Chains (CNHMC). In this case, the day is divided into three different periods. In particular, for each period a multi-objective optimization problem is formulated, the solution of which provides the optimal parking lots reservation policy for each priority class in each parking lot, which simultaneously minimizes the chances of exclusion of each class, in each period and in each parking lot.

To summarize, it is worth mentioning that the models proposed in this thesis allow each company to design an optimal reservation policy in order to increase its profit and at the same time increase the satisfaction of its clients. In addition, the use of the Cyclic Non-Homogeneous Markov Chains provides the ability of modeling the periodicity of traffic at the parking lots, which makes the proposed model much closer to reality.

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

1.1 Σκοπιμότητα της έρευνας

Η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία διεξάγεται με σκοπό τη στοχαστική μοντελοποίηση και τη βελτιστοποίηση θέσεων στάθμευσης που είναι δυνατόν να δεσμευθούν για χρήστες σε χώρους στάθμευσης που βρίσκονται πλησίον ενός αεροδρομίου. Όσον αφορά στη πλευρά των πελατών, σαν κριτήριο για την κατηγοριοποίηση τους έχει οριστεί ένα χρηματικό αντίτιμο το οποίο πληρώνουν κατά την είσοδο τους στους χώρους αυτούς και καθορίζει την κλάση στην οποία θα ανήκουν, αλλά και τις υπηρεσίες τις οποίες λαμβάνουν. Όπως θεωρείται λογικό, οι πελάτες που θα καταβάλλουν υψηλότερο αντίτιμο θα ανήκουν σε μια κλάση υψηλότερης προτεραιότητας, σε αντίθεση με αυτούς που καταβάλλουν μικρότερο αντίτιμο. Βασικός στόχος της εταιρίας είναι να ελαχιστοποιείται η πιθανότητα να μην εξυπηρετούνται οι πελάτες που ανήκουν στις κλάσεις υψηλότερης προτεραιότητας διατηρώντας ταυτόχρονα όσο το δυνατόν περισσότερες διαθέσιμες θέσεις και για τους πελάτες που ανήκουν στις κλάσεις χαμηλότερης προτεραιότητας.

Πιο συγκεκριμένα θεωρείται ότι υπάρχει μια επιχείρηση η οποία διαχειρίζεται πολλαπλούς χώρους στάθμευσης, οι οποίοι εδρεύουν κοντά σε κάποιο αεροδρόμιο με συγκεκριμένες θέσεις στάθμευσης. Κάποιοι από αυτούς τους χώρους βρίσκονται σε πιο κοντινή απόσταση από το τερματικό σταθμό ενώ αντίστοιχα υπάρχουν και εκείνοι που βρίσκονται σε πιο μακρινή απόσταση. Η επιχείρηση αρχικά δέχεται τους εισερχόμενους πελάτες, οι οποίοι πληρώνοντας το αντίστοιχο αντίτιμο κατανέμονται στη κλάση που τους αντιστοιχεί. Η λογική του συστήματος των πολλαπλών χώρων στάθμευσης συνοψίζεται στο γεγονός ότι στη περίπτωση που κάποιος πελάτης που φτάνει στον κοντινότερο χώρο στάθμευσης και δεν υπάρχει διαθέσιμη θέση για αυτόν, στέλνεται στον αμέσως κοντινότερο, με την προϋπόθεση ότι και σε αυτόν υπάρχει διαθέσιμη θέση. Οι πελάτες που ανήκουν στις κλάσεις υψηλότερης προτεραιότητας, πρέπει να αποτυγχάνουν να βρουν θέση σε κάποιον από τους χώρους στάθμευσης με την μικρότερη δυνατή πιθανότητα. Η ίδια λογική ισχύει και για όλες τις κλάσεις προτεραιότητας με φθίνουσα σειρά.

Απώτερος σκοπός της εταιρίας διαχείρισης των χώρων αυτών, είναι να παρέχεται η βέλτιστη εξυπηρέτηση στους πελάτες της. Ένα βήμα για να επιτευχθεί αυτό είναι να πραγματοποιείται σωστή παρατήρηση της κίνησης σε καθημερινή βάση. Πετυχαίνοντας αυτό, υπάρχουν λιγότερες αποκλίσεις από

τις πραγματικές ανάγκες των πελατών καθώς και της αγοράς. Τέλος, ελαχιστοποιώντας των αριθμό των ανικανοποίητων πελατών η εταιρία είναι πιο κοντά στην αύξηση του κέρδους της.

1.2 Στόχοι της έρευνας

Όπως συμβαίνει στις περισσότερες επιχειρήσεις, έτσι και στην επιχείρηση που μελετάται στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία, απώτερος στόχος είναι η αύξηση του κέρδους της. Σημαντικός παράγοντας για την επίτευξη αυτή, είναι να είναι σε θέση η επιχείρηση να δέχεται όσο το δυνατόν περισσότερους πελάτες. Στην προσπάθεια της να το καταφέρει αυτό, μπορεί να δεσμεύσει κάποιες θέσεις για τους πελάτες με προτεραιότητα, ο αριθμός των οποίων (θέσεων) αποτελεί μεταβλητή απόφασης σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης που πρέπει να σχεδιαστεί και να επιλυθεί. Όσον αφορά τη μοντελοποίηση του εν λόγω συστήματος, κάτω από την υπόθεση ότι οι αφίξεις και οι αναχωρήσεις των πελατών είναι τυχαίες, τα Μαρκοβιανά μοντέλα είναι τα καταλληλότερα εργαλεία για τη λεπτομερή περιγραφή του συστήματος. Στόχος είναι να βρεθεί ο βέλτιστος αριθμός θέσεων που πρέπει να δεσμευτούν για κάθε κλάση προτεραιότητας σε καθένα από τους χώρους στάθμευσης έτσι ώστε η πιθανότητα κάθε κλάσης να αποτύχει να βρει διαθέσιμη θέση, να ελαχιστοποιείται. Παράλληλα με αυτό, μελετήθηκε η συμπεριφορά δυο ακόμη δεικτών εκ των οποίων ο πρώτος αφορά στον μέσο χρόνο που απαιτείται από έναν πελάτη να φτάσει περπατώντας από τους χώρους στάθμευσης στο τερματικό σταθμό και ο δεύτερος, αφορά στη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων που οδηγεί σε αύξηση του κέρδους της επιχείρησης.

Κεφάλαιο 2: Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Η ορατή αύξηση των επιβατικών οχημάτων τις τελευταίες δεκαετίες στα μεγάλα αστικά κέντρα και όχι μόνο, είναι ένα πρόβλημα το οποίο έχει δυσκολέψει κυρίως την μετακίνηση των ανθρώπων και σε επόμενο στάδιο την στάθμευση των οχημάτων τους. Πιο συγκεκριμένα, οι πυκνοκατοικημένες περιοχές οι οποίες βρίσκονται κυρίως κοντά σε σταθμούς μέσων μεταφοράς, όπως πχ στάσεις τρένων η λεωφορείων επηρεάζονται πιο άμεσα. Πάνω σε αυτά τα ζητήματα υπάρχει εκτεταμένη βιβλιογραφία, στα σημαντικότερα μέρη της οποίας θα αναφερθεί η παρούσα διπλωματική εργασία.

Αρχικά, η έννοια της βελτιστοποίησης πόρων δεν παρουσιάστηκε πρώτη φορά σε προβλήματα όπως αυτό της διαθεσιμότητας χώρων στάθμευσης, αλλά ξεκινά αρκετά χρόνια πριν με εφαρμογή στα συστήματα εξυπηρέτησης πελατών. Κάποια από τα πιο σημαντικά παραδείγματα αφορούν σε υπολογιστικά συστήματα και δίκτυα [7], (Κούτρας και λοιποί 2009a), (Χiao και λοιποί 2004), (Kravets και λοιποί 1998), (Salagaras και λοιποί 2016a), σε ηλεκτρονικές υπηρεσίες (Koutras και Platis 2009b), (Koutras και Platis 2008a), (Koutras και Platis 2006), σε εταιρίες courier (Κούτρας και λοιποί 2013), σε συστήματα παραγωγής (Zhao και λοιποί 2005), σε συστήματα προγραμματισμού διαδικασιών (Yamashita και λοιποί 2007), καθώς και σε όλους τους κλάδους όπου στόχος είναι η βελτιστοποίηση της διαθεσιμότητας πόρων. Στις περισσότερες περιπτώσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω, καθώς και στο πρόβλημα που αντιμετωπίζεται στην παρούσα εργασία, δηλαδή στην προσπάθεια εύρεσης της βέλτιστης πολιτικής δέσμευσης θέσεων για πελάτες με προτεραιότητά σε χώρους στάθμευσης, η κατηγοριοποίηση των πελατών σε κλάσεις προτεραιότητας γίνεται με ποικίλα κριτήρια (Baldi και Ofec 2000), (Chang και Kim 2001), (Vu και Zukerman 2002). Το κοινό χαρακτηριστικό όλων αυτών των περιπτώσεων είναι, να εξυπηρετηθούν με τον βέλτιστο δυνατό τρόπο οι πελάτες υψηλότερης προτεραιότητας χωρίς αυτό να αντικρούει την εξυπηρέτηση πελατών χαμηλότερης προτεραιότητας, όπου εκεί αποδίδεται η αύξηση του κέρδους της εκάστοτε επιχείρησης. Τις περισσότερες φορές βέβαια, αυτό έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι οι πόροι σε κάθε σύστημα είναι συγκεκριμένοι και καθώς διατίθενται σε υψηλότερης προτεραιότητας πελάτες, υπάρχει κίνδυνος για την εξάντληση τους και την μη κάλυψη αναγκών των υπολοίπων πελατών. Βασικός στόχος σε αυτές τις περιπτώσεις είναι οι πόροι ενός τέτοιου συστήματος να είναι σε θέση να διαμοιραστούν ανάλογα σε όλες τις κατηγορίες πελατών, ώστε να διατηρηθεί μια ισορροπία ανάμεσα στην άμεση και απρόσκοπτη εξυπηρέτηση των πελατών υψηλής προτεραιότητας από τη μια και της παροχής υπηρεσιών σε όσο το δυνατόν περισσότερους πελάτες από την άλλη. Η

δέσμευση πόρων με σκοπό τη βελτιστοποίηση της διαθεσιμότητας τους, είναι γνωστή ως η τεχνική η οποία επιτρέπει τον σωστό καταμερισμό των πόρων μέσα σε ένα σύστημα, διαχωρίζοντας τις κλάσεις πελατών με υψηλότερη προτεραιότητα και διατηρώντας ένα ικανοποιητικό επίπεδο εξυπηρέτησης για τις υπόλοιπες κλάσεις. Μερικά γνωστά παραδείγματα τα οποία έχει απήχηση η δέσμευση πόρων είναι: η βέλτιστη δέσμευση πόρων σε ένα δίκτυο σχεδίασης έργων (Andersson 2001), οι πόροι σε κεντρικούς servers (Kravets και λοιποί 1998), οι πηγές μιας ιστοσελίδας (Koutras και Platis 2009b), (Koutras και Platis 2008a), η βέλτιστη δέσμευση πόρων σε μία εταιρία courier (Koutras και λοιποί 2013), η σωστή διοχέτευση πληροφοριών μέσα σε ένα δίκτυο (Yuan και λοιποί 2000), η ενίσχυση της απόδοσης μιας εφαρμογής ενός δικτύου (Foster και Sander 2000), οι υπηρεσίες υπολογιστικού νέφους (Wei και λοιποί 2013) και τέλος η δέσμευση θέσεων σε χώρους στάθμευσης οχημάτων (Salagaras και λοιποί 2016b), (Thomaidis και λοιποί 2013).

Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα των χώρων στάθμευσης, η χρήση της βελτιστοποίησης πόρων βοήθησε να υπολογιστεί ο κατάλληλος αριθμός θέσεων που πρέπει να δεσμευτούν για κάθε κλάση προτεραιότητας σε έναν χώρο στάθμευσης, ώστε να εξυπηρετούνται όλες οι κλάσεις πελατών, από εκείνη με την υψηλότερη προτεραιότητα έως και εκείνη με την χαμηλότερη, ελαχιστοποιώντας τη πιθανότητα κάποια από αυτές να αντιμετωπίσει το ενδεχόμενο να μην βρει διαθέσιμη θέση. Η πιθανότητα αυτή, να μπλοκαριστεί δηλαδή κάποια κλάση, αναφέρεται στη σχετική βιβλιογραφία ως blocking probability (Haring και λοιποί 2001), (Ioannou και λοιποί 2002), (Lee και λοιποί 2004), (Farago 2008). Για την παροχή βέλτιστης διαθεσιμότητας των πόρων σε ένα τέτοιο σύστημα, θεωρείται ότι τα blocking probabilities για όλες τις κλάσεις ξεχωριστά θα πρέπει να ελαχιστοποιούνται. Για να επιτευχθεί αυτό, θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν τεχνικές βελτιστοποίησης. Αυτό σημαίνει ότι εφόσον η πιθανότητα να μην μπλοκαριστεί καμία κλάση περιγράφεται από μια συνάρτηση, το πρόβλημα που προκύπτει αφορά στην ελαχιστοποίηση αυτής της συνάρτησης. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται κυρίως για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων είναι η μέθοδος της πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης (Alves και Climaco 2000), (Wieselthier και λοιποί 2002), (Alves και Climaco 2000), (Sarker και λοιποί 2002).

Επιπρόσθετα, για την καλύτερη κατανόηση της εν λόγω διπλωματικής, μελετήθηκε και η έννοια της διαθεσιμότητας πόρων. Η διαθεσιμότητα πόρων στους δυο χώρους στάθμευσης που μελετήθηκαν, εντάσσεται στην ίδια κατηγορία και λογική με τη βελτιστοποίηση της διαθεσιμότητας πόρων που χρειάζεται ένας χρήστης του διαδικτύου την ώρα που χρησιμοποιεί κάποια συγκεκριμένη ιστοσελίδα (Koutras και Platis 2008a). Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο κάθε χρήστης ανάλογα με το προφίλ που έχει (συχνός επισκέπτης, σταθερό μέλος, κτλ), έχει διαφορετική πρόσβαση σε πόρους (Koutras και Platis

2006). Υψηλότερη προτεραιότητα δίνεται σε χρήστες οι οποίοι πληρώνουν ένα είδος συνδρομής συνήθως μηνιαία ή ετήσια. Το γεγονός αυτό τους δίνει την δυνατότητα να έχουν πρόσβαση σε όλες του πόρους της ιστοσελίδας και τους παρέχεται μια συνεχής πλοήγηση χωρίς τον φόβο της αποσύνδεσης λόγω υπερφόρτωσης από πολλούς χρήστες.

Στη σχετική βιβλιογραφία υπάρχουν και μελέτες που αναφέρονται σε περιπτώσεις όπως αυτή μια εταιρείας courier (Koutras και λοιποί 2013). Σε τέτοιου είδους εταιρίες θεωρείται ότι υπάρχουν N άτομα για τις διανομές των προϊόντων. Τα άτομα αυτά έχουν συγκεκριμένο αριθμό αποστολών και θεωρείται ότι ολοκληρώνουν την εξυπηρέτηση και άρα αποδεσμεύονται με την παράδοση ενός προϊόντος στον προορισμό του. Με την ίδια λογική όπως και στις ιστοσελίδες, ο πελάτης μια τέτοιας εταιρίας εξυπηρετείται με βάση κάποια κριτήρια. Το σημαντικό σε τέτοιες περιπτώσεις είναι η ταχύτητα αποστολής ενός δέματος. Αυτό, εξαρτάται από την περιοχή που αποστέλλεται/παραλαμβάνεται το δέμα, το βάρος του και το κόστος αποστολής του. Παρόμοιο είναι και το αντικείμενο στην εργασία (Salagaras και λοιποί 2016a), όπου μελετάται η βελτιστοποίηση της διαθεσιμότητας ενός τηλεφωνικού δικτύου ή παρόχου. Η ομοιότητα έγκειται στο γεγονός ότι ο πελάτης έχει την επιλογή να ανήκει σε μια ευνοούμενη ομάδα όπως π.χ. οι χρήστες δεδομένων 4G η αλλιώς σε έναν απλό χρήστη που χρησιμοποιεί την εταιρία κινητής τηλεφωνίας. Ένας ακόμη διαχωρισμός γίνεται βάσει των χρημάτων που σκοπεύουν να δαπανήσουν οι πελάτες για τις εταιρίες τηλεφωνίας. Ένα παράδειγμα θεωρείται ένα επαγγελματικό πρόγραμμα το οποίο χρησιμοποιούν οι υπάλληλοι μιας τράπεζας και δεν έχει την ίδια βαρύτητα με ένα απλό πρόγραμμα που χρησιμοποιεί στην καθημερινότητα του ένας πελάτης του δικτύου (Salagaras και λοιποί 2016a). Οι εταιρίες πρέπει να είναι συνεχώς σε θέση να παρέχουν στους πελάτες τους υπηρεσίες ανάλογες με το κόστος το οποίο έχουν αναλάβει να πληρώνουν.

Επιπλέον παρατηρείται πως υπάρχουν περίοδοι κατά τις οποίες τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την διανομή των πληροφοριών μέσα στα συστήματα αυτά, όπως π.χ. το λογισμικό ενός υπολογιστή, υπερφορτώνονται και αναγκάζονται να σταματήσουν κάποιες ή και όλες τις διεργασίες τις οποίες τρέχουν εκείνη την στιγμή (Koutras και λοιποί 2006). Στο σημείο αυτό, επεμβαίνουν τεχνικές επιδιόρθωσης και αποσυμφόρησης των συστημάτων. Η συνεχής και ταυτόχρονη χρήση από πολλούς και διαφορετικούς επισκέπτες σε ένα σύστημα, συχνά προκαλεί επιπλοκές που τις περισσότερες φορές ο τερματισμός των διεργασιών που τρέχουν την συγκεκριμένη χρονική στιγμή, είναι μονόδρομος. Σύμφωνα με τις περισσότερες μελέτες, η αναζωογόνηση του λογισμικού ενός οποιουδήποτε συστήματος, είναι ένας σημαντικός τρόπος για την αντιμετώπιση του φαινομένου της «γήρανσης» του λογισμικού και των βλαβών ενός συστήματος (Koutras και λοιποί 2006). Βασιζόμενοι σε αυτό, οι

διαχειριστές παρόμοιων συστημάτων προτείνουν προληπτικό έλεγχο, ο οποίος συνιστά την επανεκκίνηση μιας εφαρμογής στα πρώτα στάδια της χρήσης της. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα συστήματος με πολλούς και ταυτοχρόνους επισκέπτες είναι ένας server.

Με δεδομένο ότι γνωρίζουμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης καθώς και τους αντίστοιχους πελάτες, παρατηρείται πως τις περισσότερες φορές υπάρχει ένα μοτίβο όσον αφορά την συχνότητα που εμφανίζονται οι πελάτες/χρήστες. Αν υποθέσουμε ότι χωρίζουμε μια ημέρα σε περιόδους, παρατηρείται πολλές φορές ότι κάποιες ώρες της ημέρας η χρήση είναι στα υψηλότερα επίπεδα, ενώ άλλες ώρες στα χαμηλότερα ή και χωρίς καθόλου κινητικότητα. Αυτό, δίνει την δυνατότητα στους διαχειριστές των συστημάτων να γνωρίζουν τον όγκο των διεργασιών σε οποιαδήποτε στιγμή της ημέρας καθώς και να είναι σε θέση να επιδιορθώσουν την όποια επιπλοκή παρουσιαστεί σε αυτά, εγκαίρως (Koutras και λοιποί 2006). Καθημερινά, εταιρίες που διαχειρίζονται τέτοιου είδους συστήματα, προβαίνουν σε προληπτικούς ελέγχους για να αποφύγουν επερχόμενα προβλήματα (Koutras και Platis 2008c), (Koutras και Platis 2008d). Το βασικότερο πλεονέκτημα σε αυτές τις περιπτώσεις, είναι η ικανοποίηση των πελατών και η άμεση εξυπηρέτησή τους. Ωστόσο, επειδή στις περισσότερες περιπτώσεις η ολική επαναφορά του συστήματος μπορεί να έχει σοβαρό αντίκτυπο σε θέματα κόστους, συνίσταται η επαναφορά να γίνεται μόνο όταν το σύστημα βρίσκεται στην χαμηλή περίοδο επισκεψιμότητας. Αυτό αποδίδεται στο γεγονός ότι την στιγμή που το σύστημα βρίσκεται στα υψηλότερα επίπεδα χρήσης, σημαίνει πρακτικά, ότι εξυπηρετεί μεγαλύτερο αριθμό πελατών και επομένως έχει μεγαλύτερο κέρδος.

Αναφέροντας τον διαχωρισμό της ημέρας σε περιόδους και παρατηρώντας το καθημερινό μοτίβο στην συμπεριφορά των χρηστών, είναι αναγκαίο να αναφερθούμε στην έννοια των Κυκλικών Μη Ομογενών Μαρκοβιανών Αλυσίδων (Koutras και Platis 2008c), (Tzioutzias και λοιποί 2014), έννοια που χρησιμοποιήθηκε στο τρίτο μέρος της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Βασιζόμενοι σε σωστή παρατήρηση των δεδομένων, οι διαχειριστές χώρων στάθμευσης έχουν την δυνατότητα να εντοπίσουν τις ώρες με την υψηλότερη επισκεψιμότητα καθώς και τις ώρες με χαμηλή επισκεψιμότητα. Ανάλογα και σε αυτήν την περίπτωση, χρησιμοποιώντας τις Κυκλικές Μη Ομογενής Μαρκοβιανές Αλυσίδες μοντελοποιείται το πρόβλημα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης το οποίο θα δώσει τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων. Με παρόμοιο τρόπο όπως και στην ομογενή περίπτωση, οι πελάτες ταξινομούνται σε κλάσεις ανάλογα με ένα χαρακτηριστικό το οποίο έχει θέσει για αυτούς η εκάστοτε εταιρία (Koutras και Platis 2008d). Μέσω αυτού του διαχωρισμού επιτυγχάνεται η καλύτερη εξυπηρέτηση σε όλα τα επίπεδα, ξεκινώντας από το χαμηλότερο επίπεδο (χαμηλή περίοδο κίνησης) μέχρι το υψηλότερο (υψηλή περίοδος κίνησης) (Platis και λοιποί 1997).

Σε αυτό το σημείο να σημειωθεί ότι όλες οι παραπάνω αναφορές στην βιβλιογραφία βοήθησαν στην καλύτερη διερεύνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας και είχαν ως προτεραιότητα τον διαχωρισμό των πελατών σε κλάσεις. Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις οι πελάτες ταξινομούνται ανάλογα με ένα χαρακτηριστικό το οποίο έχει θέσει για αυτούς η εκάστοτε εταιρία. Μέσω αυτού του διαχωρισμού επιτυγχάνεται η καλύτερη εξυπηρέτηση σε όλα τα επίπεδα, ξεκινώντας από το χαμηλότερο μέχρι τους πελάτες με την υψηλότερη προτεραιότητα.

Συνοψίζοντας το κομμάτι της βιβλιογραφίας δόθηκε περισσότερη έμφαση σε έρευνες οι οποίες μελετούσαν την διαχείριση πελατών σε ιδιωτικούς χώρους στάθμευσης. Πιο συγκεκριμένα μελετήθηκε η περίπτωση ενός χώρου με έδρα την Αθήνα το οποίο διαθέτει συγκεκριμένες θέσεις αποθήκευσης. Οι πελάτες που τον χρησιμοποιούν έχουν χωριστεί σε πέντε κλάσεις οι οποίες περιλαμβάνουν: πελάτες που χρησιμοποιούν σε καθημερινή βάση τον χώρο όλες τις ημέρες τις εβδομάδας, πελάτες που έρχονται σε ώρες αιχμής πέντε ημέρες/εβδομάδα, πελάτες που έρχονται πέντε ημέρες/εβδομάδα σε τυχαίες ώρες, πελάτες που χρησιμοποιούν τον χώρο παραπάνω από μια φορά τον μήνα αλλά δεν ανήκουν σε καμία από τις προηγούμενες κατηγορίες και τέλος υπάρχουν οι τελείως τυχαίοι πελάτες. Στις δυο τελευταίες κατηγορίες υπάρχει ένας σημαντικός αριθμός ατόμων ο οποίος δεν μπορεί να ενταχτεί σε καμία κατηγορία λόγω του ότι είναι συνήθως τυχαίοι πελάτες.

Κεφάλαιο 3: Ομογενείς και Κυκλικές Μη-Ομογενείς Μαρκοβιανές Αλυσίδες

3.1 Ομογενείς Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Το πρόβλημα που μελετάται στην παρούσα διπλωματική εργασία και αφορά στην βέλτιστη κατανομή θέσεων σε δυο χώρους στάθμευσης καθώς και στην ελαχιστοποίηση αποκλεισμού από τους χώρους αυτούς από πλευράς των πελατών, είναι ένα πρόβλημα που στη γενική του μορφή αφορά στη λήψη αποφάσεων κάτω από τυχαιότητα η οποία προέρχεται από πηγές που δεν μπορούμε να ελέγξουμε. Η λογική μοντελοποίησης και επίλυσης του μαθηματικού προβλήματος που προκύπτει βασίζεται στη χρήση των κατάλληλων στοχαστικών διαδικασιών.

Μια στοχαστική διαδικασία είναι μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_t: t \in T\}$, όπου t είναι μία παράμετρος που παίρνει τιμές σε ένα κατάλληλα ορισμένο σύνολο T . Συχνά το T είναι το σύνολο των μη αρνητικών ακέραιων αριθμών και το X_t αναπαριστά ένα μετρήσιμο χαρακτηριστικό στον χρόνο t . Η τιμή μιας μετοχής χρηματιστηρίου κατά την διάρκεια του χρόνου ή και ακόμη οι πελάτες που εισέρχονται σε μια τράπεζα κατά την διάρκεια μιας ημέρας, είναι ζητήματα στοχαστικών διαδικασιών.

Μια από τις σημαντικότερες κατηγορίες στοχαστικών διαδικασιών είναι οι Μαρκοβιανές Αλυσίδες. Με τον όρο Μαρκοβιανή Αλυσίδα περιγράφεται μια διαδικασία που ακολουθεί μια μεταβλητή X_n όταν παίρνει τυχαίες τιμές όπως $\{X_n, n = 0,1,2,3, \dots\}$ σε έναν χώρο καταστάσεων και κατ' επέκταση ορίζει τη σύνδεση μεταξύ διαφόρων καταστάσεων σε διακριτό χρόνο. Το βασικότερο χαρακτηριστικό μιας τέτοιας διαδικασίας, είναι ότι η κατάσταση στην οποία θα βρεθεί στο επόμενο της βήμα, δεν εξαρτάται από τη προηγούμενη κατάσταση παρά μόνο από τη παρούσα. Η εξήγηση σε αυτό έρχεται μέσα από τον ορισμό των Μαρκοβιανών Αλυσίδων που χαρακτηρίζονται από απώλεια μνήμης. Αυτό γίνεται ακόμη πιο κατανοητό μέσα από την Μαρκοβιανή ιδιότητα σύμφωνα με την οποία ισχύει:

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

όπου p_{ij} είναι η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στη κατάσταση j (Trivedi 2002).

Ωστόσο υπάρχουν δυο μεγάλες κατηγορίες που χαρακτηρίζουν τις Μαρκοβιανές Αλυσίδες και αυτές είναι οι αλυσίδες συνεχούς χρόνου και οι αλυσίδες διακριτού χρόνου. Ξεκινώντας με τις αλυσίδες

διακριτού χρόνου, ισχύει ότι ο χώρος καταστάσεων είναι αριθμήσιμος, οι μεταβάσεις γίνονται σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές που ισαπέχουν μεταξύ τους και ο αριθμός των βημάτων που πραγματοποιούνται σε κάθε μετάβαση είναι ακέραιος. Με δεδομένο ότι οι πιθανότητες μετάβασης έχουν την (παραπάνω) Μαρκοβιανή ιδιότητα, η συμπεριφορά αυτής της αλυσίδας περιγράφεται μέσα από τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

όπου σε αυτόν περιέχονται όλες οι πληροφορίες για την εξέλιξη μιας αλυσίδας και έχει τις εξής ιδιότητες:

- Είναι μη αρνητικός
- Το άθροισμα των γραμμών του αθροίζει στην μονάδα

Ένας πίνακας για τον οποίο ισχύουν οι δύο αυτές ιδιότητες ονομάζεται *στοχαστικός πίνακας* (Trivedi 2002).

Στην περίπτωση του συνεχούς χρόνου (Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου), η μετάβαση από μια κατάσταση σε μια άλλη μπορεί να γίνει σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Τη χρονική στιγμή που η αλυσίδα μεταβεί σε μία κατάσταση, θα παραμείνει εκεί για έναν εκθετικά κατανομημένο χρόνο προτού αλλάξει κατάσταση. Η χρήση της εκθετικής κατανομής για την περιγραφή των χρόνων που μεσολαβούν ανάμεσα σε δυο μεταβάσεις στις Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου γίνεται διότι είναι η μοναδική κατανομή που χαρακτηρίζεται από έλλειψη μνήμης (memoryless property). Οι πιθανότητες μετάβασης σε αυτήν την περίπτωση γίνονται μέσω του εξής τύπου (Trivedi 2002):

$$p_{ij}(v, t) = P(X(t) = j | X(v) = i), \quad 0 \leq v \leq t, i, j \in E$$

όπου E είναι ο χώρος καταστάσεων και $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι η στοχαστική διαδικασία (Μαρκοβιανή διαδικασία) που περιγράφει την εξέλιξη ενός συστήματος στο χρόνο. Επιπλέον ισχύει ότι:

$$p_{ij}(t, t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$\sum_{j \in E} p_{ij}(v, t) = 1, \quad \forall i \in E, 0 \leq v \leq t$$

Σε αυτή την περίπτωση, αντί για τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης, χρησιμοποιείται ο πίνακας ρυθμών μετάβασης:

$$Q = \begin{pmatrix} -q_{00} & \cdots & q_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & -q_{nn} \end{pmatrix}$$

με q_{ij} το ρυθμό μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j , που προκύπτει σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$q_j(t) = -\frac{\partial}{\partial t} p_{jj}(v, t)|_{v=t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - p_{jj}(t, t+h)}{h}$$

$$q_{ij}(t) = -\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(v, t)|_{v=t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{jj}(t, t+h)}{h}$$

και ισχύει ο εξής κανόνας: $q_{ii} = -q_i = -\sum_{i \neq j} q_{ij}$, $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$, όπου με q_{ii} συμβολίζονται τα στοιχεία της διαγώνιου του Q και ως αποτέλεσμα αυτού, το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του Q είναι 0.

Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει στα παρακάτω κεφάλαια παρουσιάζεται το ερευνητικό ενδιαφέρον της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας για τη στάσιμη κατανομή πιθανότητας, δηλαδή για την πιθανότητα κάθε κατάστασης που μπορεί να βρεθεί η Μαρκοβιανή διαδικασία μετά από ένα αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα. Η κατανομή αυτή, ορίζεται ως το διάνυσμα των πιθανοτήτων $\pi = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n]$. Πιο συγκεκριμένα, η πιθανότητα π_i περιγράφει τη πιθανότητα η διαδικασία να βρεθεί στην κατάσταση i μετά από θεωρητικά άπειρο χρόνο και για την οποία ισχύει ότι αν σε μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου υπάρχει στάσιμη κατανομή, τότε είναι μοναδική και:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ii}(t) = \pi_j$$

Για τον υπολογισμό της στάσιμης κατανομής πιθανότητας θα πρέπει να επιλυθεί το σύστημα εξισώσεων $\pi \cdot Q = \mathbf{0}$ το οποίο έχει τη μορφή:

$$[\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n] \cdot \begin{bmatrix} -q_{00} & \cdots & q_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & -q_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

χρησιμοποιώντας την επιπλέον συνθήκη: $\sum_i^n \pi_i = 1$ (Trivedi 2002). Με αυτό τον τρόπο υπολογίζουμε τις στάσιμες πιθανότητες του κάθε μοντέλου που μελετώνται στη παρούσα εργασία και κατ' επέκταση τις

καταστάσεις που είναι διαθέσιμο το κάθε υποσύστημα. Αυτό συμβαίνει λαμβάνοντας υπόψη, πως ο Q για κάθε ένα από τα μοντέλα είναι ο πίνακας ρυθμών μετάβασης τους.

Στη περίπτωση τώρα που μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα δεν είναι ομογενής, τότε ονομάζεται μη ομογενής και οι πιθανότητες μετάβασης είναι συναρτήσεις του χρόνου που πραγματοποιούνται. Στη περίπτωση αυτή, έχουμε μια ακολουθία πινάκων μετάβασης σε αντίθεση με την ομογενή αλυσίδα όπου υπάρχει ένας μόνο πίνακας μετάβασης.

3.2 Κυκλικές Μη-Ομογενείς Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Το μοντέλο που μελετήθηκε στη παρούσα διπλωματική εργασία περιγράφει την κίνηση σε δυο χώρους στάθμευσης που βρίσκονται κοντά σε ένα αεροδρόμιο. Η προσέγγιση στο πρώτο μέρος της εργασίας έγινε μέσω των Ομογενών Μαρκοβιανών Αλυσίδων Συνεχούς Χρόνου με τις αφίξεις καθώς και τις αναχωρήσεις των πελατών να πραγματοποιούνται σε τυχαίες χρονικές στιγμές κατά τη διάρκεια μιας ημέρας. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η κίνηση στα αεροδρόμια δεν έχει την ίδια πυκνότητα κατά την διάρκεια μιας ημέρας, υιοθετήθηκε ένα μοντέλο που να αντικατοπτρίζει πλήρως αυτήν την εικόνα. Έχει παρατηρηθεί ότι οι πτήσεις κατά την διάρκεια της νύχτας είναι λιγότερες συγκριτικά με αυτές που πραγματοποιούνται την ημέρα. Αυτό αυτόματα οδήγησε σε ένα νέο τρόπο μοντελοποίησης του προβλήματος για τους δυο χώρους στάθμευσης σύμφωνα με τον οποίο τα δεδομένα δεν είναι τα ίδια καθ' όλη τη διάρκεια της ημέρας. Για τον λόγο αυτό, η προσέγγιση του προβλήματος έγινε μέσω μιας άλλης κατηγορίας των Μαρκοβιανών Αλυσίδων, τις Κυκλικές Μη Ομογενείς Μαρκοβιανές Αλυσίδες (ΚΜΟΜΑ). Χρησιμοποιώντας αυτόν τον τύπο Μαρκοβιανών μοντέλων δίνεται η δυνατότητα να μελετηθεί ξεχωριστά η κάθε περίοδος που θα διαχωριστεί το σύστημα, με αποτέλεσμα τα δεδομένα που παράγονται από την επίλυση του προβλήματος να μπορούν να διαχωριστούν και να παρατηρηθούν καλύτερα. Πιο συγκεκριμένα στη περίπτωση που μελετάται σε αυτή την εργασία μια ημέρα διαχωρίζεται σε τρεις περιόδους οι οποίες ορίζονται ως εξής: η πρώτη είναι μεταξύ 8:00 π.μ.-16:00 μ.μ.- η δεύτερη μεταξύ 16:00 μ.μ.-24:00 μ.μ. και η τελευταία είναι μεταξύ 24:00 μ.μ.-8:00 π.μ.

Οι Κυκλικές Μη Ομογενείς Μαρκοβιανές Αλυσίδες στη γενική τους μορφή είναι μια κατηγορία των Μαρκοβιανών Αλυσίδων η οποία έχει όλα τα χαρακτηριστικά τα οποία προαναφέρθηκαν. Ορίζεται ως $E = \{1, 2, \dots, n\}$ ο χώρος κατάστασης μιας στοχαστικής διαδικασίας $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$. Ως X_n ορίζεται μια αλυσίδα Markov εάν ισχύει:

$$P(X_{n+1} = j | X_0, X_1, \dots, X_n) = P(X_{n+1} = j | X_n) \quad \forall j \in E, n > 0 \quad (1)$$

Ορίζεται επίσης ως $\alpha = \alpha_i, i \in E$, η αρχική κατανομή πιθανότητας με $\alpha = P(X_0 = i), \forall i \in E$. Για όλα τα $i, j \in E$, η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στη κατάσταση j ορίζεται ως $p_n(i, j) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$. Με $p_n(i, j), n \in \mathbb{N} | i, j \in E$ ορίζεται η συνάρτηση πιθανότητας μετάβασης της αλυσίδας. Όλες οι κοινές ιδιότητες των συναρτήσεων πιθανότητας μετάβασης, ισχύουν και σε αυτήν την περίπτωση. Παρατηρείται ότι, εάν η πιθανότητα $p_n(i, j)$ είναι ανεξάρτητη από το χρόνο n , τότε η αλυσίδα χαρακτηρίζεται ως Ομογενής Μαρκοβιανή Αλυσίδα (Platis και λοιποί 2003), (Platis και λοιποί 1997). Η συνάρτηση $p_n(i, j), n \in \mathbb{N} | i, j \in E$, ονομάζεται κυκλική (ή περιοδική) της περιόδου $d, (d > 1)$, εάν το d είναι ο μικρότερος ακέραιος αριθμός που επαληθεύει την εξίσωση:

$$p_{md+r}(i, j) = p_r(i, j) \text{ με } m, r \in \mathbb{N} \text{ και } i, j \in E \quad (2)$$

Ως $\mathbf{p}_r = \{p_r(i, j) = Pr(X_{r+1} = j | X_r = i)\}, i, j \in E^2, r \in \mathbb{N}, r < d$, ορίζεται ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης μιας κατάστασης και ως $\mathbf{p}_{0,n} = \{p_{0,n}(i, j) = P(X_{n+1} = j | X_0 = i)\}, i, j \in E^2, n \in \mathbb{N}$ ορίζεται, ο πίνακας πιθανότητας μετάβασης στο n βήμα. Η αλυσίδα ορίζεται πλήρως από τα \mathbf{a} και \mathbf{p}_n όπου με \mathbf{p}_n ορίζεται ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της X . Η πιθανότητα της κατάστασης j τη στιγμή n δίνεται από τον εξής τύπο:

$$P_j(n) = P(X_n = j) = [\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}_{0,n}](j) = [\mathbf{a} \prod_{k=0}^{n-1} \mathbf{p}_k](j) \quad (3)$$

Εάν η αλυσίδα χαρακτηρίζεται ως κυκλική, τότε και ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι κυκλικός με περίοδο d και $n = md + r$ και έχουμε:

$$P_j(md + r) = P(X_{md+r} = j) = [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{p}_{0,d})^m \cdot \mathbf{p}_{0,r}](j) = [\mathbf{a} (\prod_{k=0}^{d-1} \mathbf{p}_k)^m \prod_{k=0}^{r-1} \mathbf{p}_k](j) \quad (4)$$

ή διαφορετικά:

$$\mathbf{P}(md + r) = \alpha (\mathbf{p}_{0,d})^m \mathbf{p}_{0,r} \quad (5)$$

Έστω ότι $Y = \{Y_n, n \geq 0\}$ είναι μια εμφυτευμένη ομογενής Μαρκοβιανή Αλυσίδα με $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ τέτοια ώστε $Y = X_{nd}$ και με \mathbf{p}_n συμβολίζεται ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της X και με $\mathbf{p}_{0,d}$ συμβολίζεται ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της Y . Εάν ισχύει η επιπλέον συνθήκη ότι η Y είναι μη-διαχωρίσιμη και απεριοδική και σε όλα τα στάδια της μη μηδενική, τότε η πιθανότητα μετάβασης από τη χρονική στιγμή 0 έως τη χρονική στιγμή n τείνει να δημιουργήσει έναν εργοδικό πίνακα, όσο το n τείνει στο άπειρο, καταλήγοντας στο όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{p}_{0,d}]^n = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\pi}$ που υπολογίζει την οριακή κατανομή πιθανότητας. Ο υπολογισμός της κατανομής αυτής μπορεί και να γίνει λύνοντας το σύστημα

$\boldsymbol{\pi}(\mathbf{p}_{0,d} - \mathbf{I}) = \mathbf{0}$ έχοντας σαν επιπλέον συνθήκη τον τύπο $\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{1} = 1$. Επομένως, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\pi}^T = \mathbf{b}^T \quad (6)$$

όπου $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_{0,r} - \mathbf{I})^T \\ 1 \quad \dots \quad 1 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{b}^T = [0 \quad \dots \quad 1]$. Ο πίνακας \mathbf{A} έχει τόσες στήλες όσες και οι πιθανές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί η διαδικασία, και γραμμές όσες και οι καταστάσεις, στις οποίες υπάρχει ο υποπίνακας $(\mathbf{p}_{0,r} - \mathbf{I})^T$, συν μια ακόμα γραμμή η οποία περιέχει μόνο «1». Οι Το διάνυσμα \mathbf{b}^T αποτελείται από ένα «1» και από «0» των οποίων το πλήθος είναι όσες και οι πιθανές καταστάσεις. Η στάσιμη κατανομή πιθανότητας μέσα σε ένα κύκλο δίνεται ο από την παρακάτω εξίσωση (Koutras και λοιποί 2008):

$$\pi_r(j) = [\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{p}_{0,r}](j), r \in \{0,1, \dots, d - 1\}, j \in E \quad (7)$$

Κεφάλαιο 4: Στοχαστική μοντελοποίηση και βελτιστοποίηση διαθεσιμότητας πόρων σε πολλαπλούς χώρους στάθμευσης με τη χρήση Μαρκοβιανών μοντέλων

4.1 Μοντελοποίηση και περιγραφή του συστήματος με τη χρήση ομογενών Μαρκοβιανών Αλυσίδων

Όπως προαναφέρθηκε, η χρήση των Μαρκοβιανών Αλυσίδων για την διεξαγωγή της παρούσας εργασίας ήταν μονόδρομος. Αυτό αποδίδεται στο γεγονός ότι το θέμα της παρούσας εργασίας αφορά στη μοντελοποίηση δυο χώρων στάθμευσης με τυχαία διέλευση πελατών όλες τις ώρες της ημέρας. Το προφίλ του προβλήματος εμπίπτει στα πλαίσια της τυχαιότητας καθώς και της απώλειας μνήμης που χαρακτηρίζει τα Μαρκοβιανά μοντέλα. Μη λαμβάνοντας υπόψη το προηγούμενο στάδιο της αλυσίδας οι πελάτες εισέρχονται στο πρώτο χώρο στάθμευσης έως ότου δεν υπάρχει διαθέσιμη θέση στάθμευσης και στο σημείο αυτό οι επόμενοι πελάτες μεταφέρονται στον εναλλακτικό χώρο στάθμευσης. Σημαντικό είναι να σημειωθεί ότι οι πελάτες κατηγοριοποιούνται ανάλογα με το χρηματικό αντίτιμο που έχουν πληρώσει για την είσοδο τους στους χώρους στάθμευσης και έκτοτε χωρίζονται σε κλάσεις. Να σημειωθεί επίσης ότι στην παρούσα προσέγγιση του προβλήματος θεωρούμε ότι κάθε πελάτης πληρώνει το σχετικό αντίτιμο κατά την είσοδο τους στους χώρους στάθμευσης και το αντίτιμο αυτό είναι σταθερό, δεν μεταβάλλεται με τη διάρκεια της παραμονής του οχήματος του πελάτη στους χώρους στάθμευσης και μετράται σε χρηματικές μονάδες (m.u.). Στο μοντέλο που μελετάται, θεωρήθηκε ότι οι κλάσεις πελατών υψηλότερης προτεραιότητας πρέπει να αποτυγχάνουν να βρουν θέση σε κάποιο χώρο στάθμευσης με την μικρότερη δυνατή πιθανότητα. Η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου δεν υπάρχουν διαθέσιμες θέσεις στάθμευσης σε κανένα από τους δυο χώρους. Στόχος της εταιρίας διαχείρισης των χώρων στάθμευσης είναι να βρει την βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων ελαχιστοποιώντας την πιθανότητα κάποιος πελάτης να μην βρει διαθέσιμη θέση κρατώντας ταυτόχρονα υψηλά τα επίπεδα εξυπηρέτησης. Πέραν της ταυτόχρονης ελαχιστοποίησης των παραπάνω πιθανοτήτων, ορίζονται και δυο επιπλέον δείκτες. Ο πρώτος δείκτης αφορά το κέρδος της εταιρίας που διαχειρίζεται τους χώρους στάθμευσης και ο δεύτερος δείκτης αφορά του πελάτες. Ο δεύτερος δείκτης βασίζεται στον υπολογισμό της αναμενόμενης απόστασης που εκτιμάται ότι θα διανύσει ο κάθε πελάτης (ανάλογα με το χώρο στάθμευσης στον οποίον βρήκε θέση) έτσι ώστε να φτάσει στον τερματικό σταθμό. Επιπρόσθετα, θα

πρέπει να αναφερθεί πως δεδομένου ότι οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων των πελατών στους χώρους στάθμευσης μπορούν να θεωρηθούν εντελώς τυχαίοι, γίνεται η υπόθεση ότι η διαδικασία αφίξεων των πελατών μπορεί να περιγράψει από μια διαδικασία Poisson και κατά συνέπεια οι χρόνοι μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Οι ίδιες ακριβώς υποθέσεις υιοθετήθηκαν και για την αποχώρηση των πελατών από τους χώρους στάθμευσης. Δηλαδή, καθώς ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη στους χώρους στάθμευσης είναι εντελώς τυχαίος, μπορεί να μοντελοποιηθεί από την εκθετική κατανομή. Ως συμπέρασμα από τις παραπάνω υποθέσεις προκύπτει ότι οι Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου αποτελούν το κατάλληλο εργαλείο για τη μοντελοποίηση του εν λόγω συστήματος.

4.1.1 Περίπτωση δύο κλάσεων πελατών (HMC)

Η έρευνα στο εν λόγω πεδίο διεξάγεται βηματικά. Αρχικά μελετήθηκε η περίπτωση κατά την οποία θεωρούμε δυο κλάσεις πελατών, στην συνέχεια τρεις και τέλος το πρόβλημα γενικεύεται θεωρώντας k κλάσεις..

Για τη καλύτερη περιγραφή του μοντέλου που δημιουργήθηκε, χρειάστηκε να οριστούν πρώτα κάποιες από τις βασικές παραμέτρους του προβλήματος. Έτσι, παρουσιάζεται αρχικά η χωρητικότητα που θα διαθέτει καθένα από τα P1 και P2, με τη χωρητικότητα του πρώτου χώρου που βρίσκεται πλησιέστερα στον τερματικό σταθμό να συμβολίζεται με N_1 και του δεύτερου χώρου στάθμευσης που βρίσκεται πιο μακριά με N_2 αντίστοιχα.

Στη συνέχεια, ορίζεται ο αριθμός των θέσεων που δεσμεύονται για κάθε κλάση στο κάθε χώρο στάθμευσης. Ανάλογα με το συνολικό αριθμό των διαθέσιμων θέσεων στο κάθε χώρο, προέκυψαν και οι θέσεις που θα δεσμεύονται για κάθε κλάση αντίστοιχα. Όπως είναι λογικό, έχοντας ορίσει μια κλάση ως αυτή με την υψηλότερη προτεραιότητα, αυτόματα εκεί θα υπάρχουν περισσότερες διαθέσιμες θέσεις προς δέσμευση. Στη περίπτωση δύο κλάσεων πελατών, θεωρούμε την Class 1 που είναι και αυτή με τη μεγαλύτερη προτεραιότητα καθώς οι πελάτες που ανήκουν σε αυτή καταβάλλουν το μεγαλύτερο χρηματικό αντίτιμο και την Class 2 που αποτελείται από τους πελάτες που πληρώνουν μικρότερο αντίτιμο για μια θέση στάθμευσης και είναι τυχαία διερχόμενοι και χωρίς προτεραιότητα. Όσον αφορά το συμβολισμό, παρουσιάζονται με g_1^1 τις θέσεις που οφείλει η εταιρία να δεσμεύσει για την Class 1 στο χώρο στάθμευσης P1. Οι θέσεις αυτές είναι προσβάσιμες μόνο από τους πελάτες της Class 1 και ως εκ τούτου οι υπόλοιπες $N_1 - g_1^1$ θέσεις στο χώρο P1 είναι προσβάσιμες τόσο από τους πελάτες της Class 1 όσο και από τους πελάτες της Class 2. Ακολουθώντας ακριβώς τον ίδιο τρόπο σκέψης, συμβολίζεται με g_1^2 οι θέσεις που οφείλει η εταιρία να δεσμεύσει για την Class 1 στο P2. Ομοίως και στον χώρο P2, οι

υπόλοιπες $N_2 - g_1^2$ θέσεις είναι προσβάσιμες τόσο από τους πελάτες της Class 1 όσο και από τους πελάτες της Class 2.

Αναφερόμενοι τώρα στις αφίξεις στους χώρους στάθμευσης, θεωρείται ότι οι πελάτες που ανήκουν στην Class 1 καταφτάνουν στους χώρους στάθμευσης με ρυθμό λ_{class1} , ενώ αντίστοιχα οι πελάτες που ανήκουν στην Class 2 καταφτάνουν στους χώρους στάθμευσης με ρυθμό λ_{class2} . Ξεκινώντας το πρόβλημα, ο ρυθμός άφιξης των πελατών στους χώρους στάθμευσης είναι:

$$\lambda_1 = \lambda_{class1} + \lambda_{class2}$$

καθώς υποθέτουμε ότι επιτρέπεται η ταυτόχρονη άφιξη πελατών και από τις δυο κλάσεις. Να σημειωθεί ότι όλοι οι πελάτες ανεξαρτήτου κλάσης καταφτάνουν πρώτα στο χώρο στάθμευσης P1 (λόγω της κοντινότερης απόστασης σε σχέση με το τερματικό). Οι αφίξεις συνεχίζουν να συμβαίνουν με τον ίδιο ρυθμό έως ότου οι ελεύθερες θέσεις στον χώρο P1 μειωθούν σε g_1^1 , όπου αυτός είναι και ο αριθμός των θέσεων που έχουν δεσμευτεί από την εταιρία και είναι προσβάσιμες μόνο από πελάτες της Class 1. Επομένως, όταν ο αριθμός των ελεύθερων θέσεων στο P1 γίνει g_1^1 , τότε στο P1 επιτρέπεται η πρόσβαση μόνο από πελάτες της Class 1 με ρυθμό:

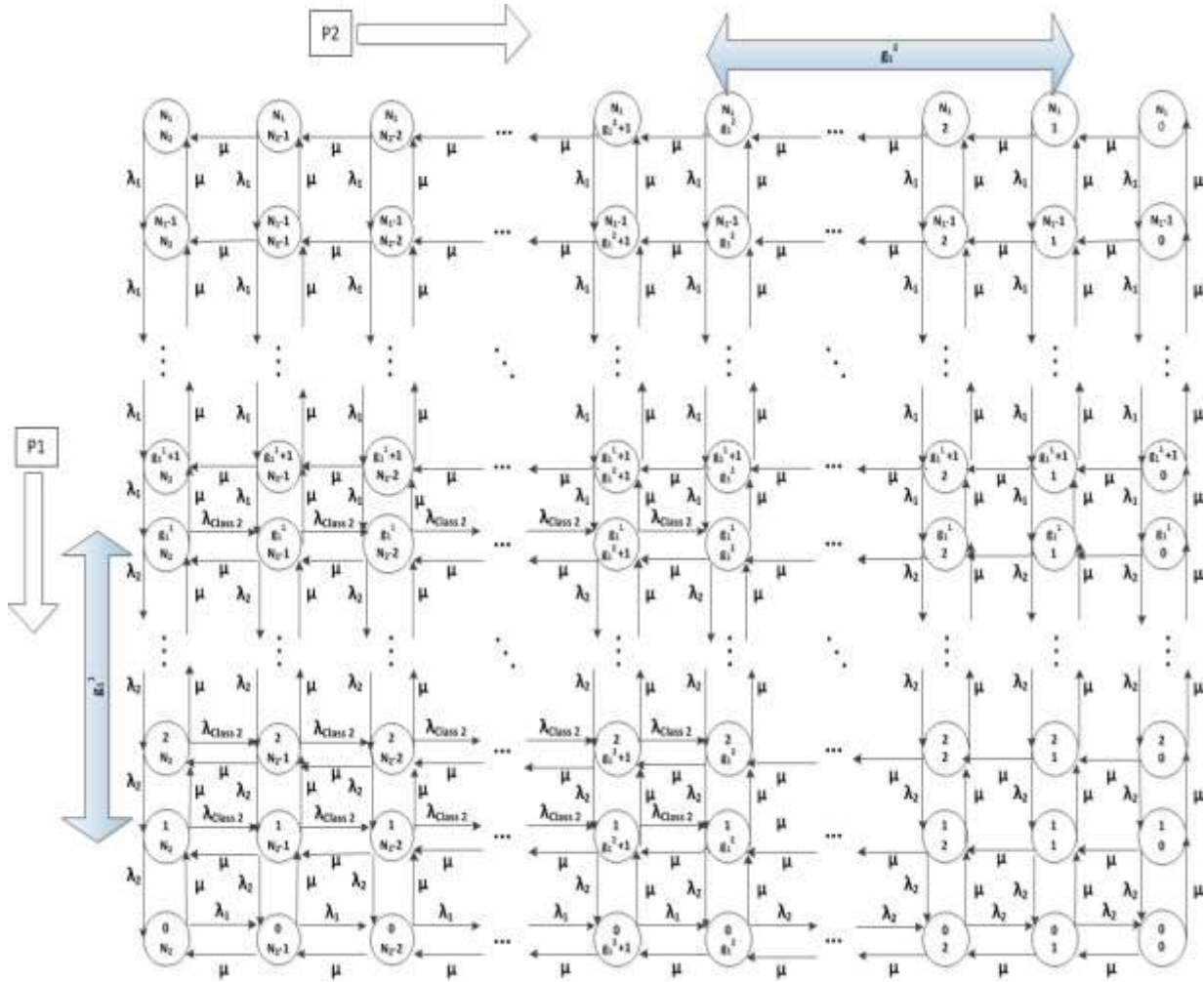
$$\lambda_2 \equiv \lambda_{class1}$$

Σε αυτήν τη περίπτωση, οι πελάτες της Class 2 που καταφτάνουν στο P1, στέλνονται στο P2, καθώς δεν υπάρχει διαθέσιμος χώρος για αυτούς στο P1. Επομένως ένας πελάτης της Class 2 που φτάνει στο P1 και δεν βρίσκει διαθέσιμη θέση, φτάνει με ρυθμό λ_{class2} στο P2 με σκοπό να βρει ελεύθερη θέση. Αυτό εξακολουθεί να συμβαίνει μέχρι τη χρονική στιγμή που οι ελεύθερες θέσεις στο P2 φτάσουν τις g_1^2 , όπου αυτός είναι και ο αριθμός των θέσεων που έχουν δεσμευτεί στο P2 για τους πελάτες της Class 1. Σε αυτήν τη περίπτωση, κανένας από τους χώρους στάθμευσης δεν μπορεί να δεχτεί πελάτες της Class 2, συνεπώς αυτοί δεν μπορούν να εξυπηρετηθούν και χάνονται (για το σύστημα). Οι πελάτες της Class 1 τώρα εξακολουθούν να καταφτάνουν στο P1 και να σταθμεύουν σε αυτό, μέχρι να είναι κατειλημμένες και οι N_1 θέσεις σε αυτό. Αν δεν υπάρχουν ελεύθερες θέσεις στο P1, τότε οι πελάτες της Class 1 οδηγούνται με ρυθμό $\lambda_2 \equiv \lambda_{class1}$ στο P2 μέχρι να είναι κατειλημμένες και οι N_2 θέσεις σε αυτό. Με την ίδια λογική, όταν δεν υπάρχουν διαθέσιμες θέσεις και στο P2, τότε και οι πελάτες της Class 1 με τη σειρά τους χάνονται από το σύστημα.

Όσον αφορά στην απελευθέρωση μιας θέσης στάθμευσης, σε καθένα από τα P1 ή P2, θεωρείται ότι ανά πάσα στιγμή μπορεί να φύγει οποιοσδήποτε πελάτης από οποιοδήποτε χώρο στάθμευσης. Θεωρείται ότι ο χρόνος κατά τον οποίο μια θέση σε οποιοδήποτε χώρο στάθμευσης είναι κατειλημμένη, είναι μια

τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο μ . Συνεπώς, ο ρυθμός απελευθέρωσης μιας θέσης σε οποιοδήποτε χώρο στάθμευσης είναι μ .

Το Σχήμα 1 παρουσιάζει το διάγραμμα καταστάσεων για τη Μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου $\{X(t), t \geq 0\}$ που μοντελοποιεί τον αριθμό των ελεύθερων θέσεων στους χώρους στάθμευσης P1 και P2.



Σχήμα 1: Διάγραμμα καταστάσεων για την περίπτωση 2 χώρων στάθμευσης με 2 κλάσεις πελατών (2P2C)

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειωθεί πως χώροι στάθμευσης πλησίον των τερματικών σταθμών και ειδικά αεροδρομίων, θα πρέπει να λειτουργούν συνεχώς και για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Κατά συνέπεια αν θέλουμε να μελετήσουμε την πιθανοτική συμπεριφορά του προτεινόμενου μοντέλου, την κατανομή πιθανότητας δηλαδή στις καταστάσεις του μοντέλου, θα πρέπει να βρεθεί η ασυμπτωτική κατανομή πιθανότητας.

Σκοπός της διπλωματικής αυτής εργασίας, είναι να εντοπισθεί η βέλτιστη πολιτική δέσμευσης πόρων, τα κατάλληλα δηλαδή g_1^1 και g_1^2 , που βελτιστοποιούν ταυτόχρονα τη πιθανότητα να μην έχουν πρόσβαση η Class 1 και η Class 2 και κατ' επέκταση όλες οι κλάσεις πελατών στους χώρους στάθμευσης. Οι πιθανότητες αυτές ονομάζονται blocking probabilities και βασίζονται στη στάσιμη κατανομή πιθανότητας π που αναφέρθηκε και στα προηγούμενα κεφάλαια και προκύπτει μέσα από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} \pi \cdot Q = 0 \\ \sum_{(i,j) \in E} \pi_{i,j} = 1 \end{cases} \quad (8)$$

όπου Q είναι ο πίνακας ρυθμών μετάβασης της Μαρκοβιανής διαδικασίας $\{X(t), t \geq 0\}$, και E είναι ο χώρος όλων των δυνατών καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρεθεί το σύστημα ($E = \{(i,j) \in \{(N_1, N_2), \dots, (0,0)\}\}$).

Με βάση τα παραπάνω, η πιθανότητα να μην έχει πρόσβαση η Class 1 στο χώρο στάθμευσης P1 δίνεται από τη σχέση:

$$BP_{Class1}^{P1} = \sum_{j=0}^{N_2} \pi_{0,j} \quad (9)$$

ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα για την Class 2 είναι:

$$BP_{bClass2}^{P1} = \sum_{i=0}^{g_1^1} \sum_{j=0}^{N_2} \pi_{i,j} \quad (10)$$

Η πιθανότητα τώρα να μην βρει ελεύθερη θέση στάθμευσης στο χώρο στάθμευσης P2 (που ισοδυναμεί με την πιθανότητα να χαθεί ουσιαστικά) ένα πελάτης της Class 1, είναι:

$$BP_{Class1} \equiv BP_{Class2}^{P1} = \pi_{0,0} \quad (11)$$

και η αντίστοιχη πιθανότητα για την Class 2 είναι:

$$BP_{Class2} \equiv BP_{Class2}^{P2} = \sum_{i=0}^{g_1^1} \sum_{j=0}^{g_1^2} \pi_{i,j} \quad (12)$$

Ο βασικός μας λοιπόν στόχος είναι να προσδιοριστούν τα g_1^1 και g_1^2 τα οποία ελαχιστοποιούν ταυτόχρονα τις πιθανότητες BP_{Class1} και BP_{Class2} . Αυτό επιτυγχάνεται μέσω ενός προβλήματος πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης, στο οποίο αντικειμενική συνάρτηση είναι η πιθανότητα αποκλεισμού BP_{Class1} της κλάσης υψηλότερης προτεραιότητας, ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα για την Class 2 συμμετέχει στο πρόβλημα σαν περιορισμός. Για την ακρίβεια, θέτουμε (ο διαχειριστής των χώρων

στάθμευσης μπορεί στην ουσία να το κάνει αυτό) ένα ανώτερο ανεκτό όριο για την πιθανότητα $BP_{bClass2}$ που συμβολίζεται με $P_{b,Class2}^0$. Το πρόβλημα αυτό έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} \min & BP_{Class1}(g_1^1, g_1^2) \\ \text{s. t. } & BP_{Class2} \leq P_{b,Class2}^0 \\ & g_1^1 > 1 \\ & g_1^2 > 1 \\ & g_1^1, g_1^2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned} \quad (13)$$

Στη συνέχεια, και με δεδομένη τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων στάθμευσης για τη κλάση με την υψηλότερη προτεραιότητα (g_1^{1*}, g_1^{2*}) , υπολογίζονται δυο μέτρα απόδοσης εκ των οποίων το ένα αφορά τον διαχειριστή του χώρου στάθμευσης και το άλλο τους πελάτες.

Όσον αφορά στο διαχειριστή των χώρων στάθμευσης, εφόσον οι πελάτες είναι διαχωρισμένοι σε κλάσεις προτεραιότητες ανάλογα με το αντίτιμο που θα πληρώσουν και τις υπηρεσίες που θα λάβουν, θεωρείται ένα διαφορετικό αντίτιμο εισιτηρίου για κάθε κλάση (ανεξάρτητο με το αν ο πελάτης θα σταθμεύσει στο P1 ή στο P2). Πιο συγκεκριμένα θεωρείται το αντίτιμο c_1 για την Class 1 και το αντίτιμο c_2 για την Class 2, με $c_1 > c_2$ καθώς για την Class 1 ο διαχειριστής των χώρων στάθμευσης εγγυάται μεγαλύτερη διαθεσιμότητα θέσεων. Με βάση αυτό, ορίζεται το Συνολικό Αναμενόμενο Ωριαίο Κέρδος ή Total Expected Hourly Profit για την εταιρία διαχείρισης ως:

$$TEHP = \sum_{i \in \{1,2\}} \lambda_{Class i} \cdot (1 - BP_{Class i}) \cdot c_i \quad (14)$$

Να σημειωθεί ότι η πιθανότητα αποκλεισμού της Class i , $BP_{Class i}$ για $i \in \{1,2\}$ είναι αυτή που προκύπτει με δεδομένη τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης (g_1^{1*}, g_1^{2*}) που προκύπτει από την επίλυση του προβλήματος (13).

Όσον αφορά στους πελάτες, η διαφορά μεταξύ στάθμευσης στο χώρο P1 και στο χώρο P2 έχει να κάνει μόνο με την απόσταση κάθε χώρου από τον τερματικό σταθμό. Ορίζεται λοιπόν σαν μέτρο απόδοσης για τους πελάτες τον Αναμενόμενο Χρόνο Βαδίσματος από το χώρο στάθμευσης έως τον τερματικό σταθμό ή Expected Walking Time ως:

$$EWT_{Class i} = (1 - BP_{Class i}^{P1}) \cdot w_1 + BP_{Class i}^{P1} \cdot (1 - BP_{Class i}^{P2}) \cdot w_2, \quad i \in \{1,2\} \quad (15)$$

όπου w_1 και w_2 είναι ο χρόνος βαδίσματος που χρειάζεται ο πελάτης για να φτάσει στον τερματικό σταθμό από τους χώρους P1 και P2 αντίστοιχα. Να σημειωθεί ότι για να θεωρηθεί πως ένας πελάτης θα περπατήσει χρόνο w_2 από το P2 για τον τερματικό σταθμό, σημαίνει ότι αρχικά έχει αποκλειστεί από τον χώρο P1 και έχει βρει θέση στο χώρο P2.

Με τη χρήση λοιπόν των παραπάνω τύπων υπάρχει η δυνατότητα να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων για τους πελάτες υψηλότερης προτεραιότητας στην περίπτωση δύο μόνο κλάσεων πελατών και με δεδομένη την πολιτική αυτή να υπολογισθεί το συνολικό αναμενόμενο ωριαίο κέρδος για την εταιρία αλλά και το αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος προς τον τερματικό σταθμό για κάθε κλάση πελατών. Η ίδια ακριβώς διαδικασία εφαρμόζεται και στη περίπτωση που έχουμε τρεις ή και περισσότερες κλάσεις πελατών.

4.1.2 Περίπτωση τριών κλάσεων πελατών (HMC)

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η περίπτωση των δύο χώρων στάθμευσης και πως αυτή διαμορφώνεται όταν υπάρχουν τρεις κλάσεις πελατών (Class 1, Class 2 και Class 3). Με τον ίδιο τρόπο όπως και στη προηγούμενη περίπτωση υπολογίζεται ο αριθμός των θέσεων που δεσμεύονται για κάθε κλάση στον κάθε χώρο στάθμευσης. Η κλάση που κατέχει τη μεγαλύτερη προτεραιότητα συνεχίζει να είναι η Class 1. Όσον αφορά στον συμβολισμό, συμβολίζουμε με g_1^1 τις θέσεις που η εταιρία θα δεσμεύσει για την Class 1 και τη Class 2 στο χώρο στάθμευσης P1 και είναι προσβάσιμες μόνο από τους πελάτες της Class 1 και της Class 2. Με g_2^1 συμβολίζονται οι θέσεις που θα δεσμεύσει η εταιρία αποκλειστικά για την Class 1 στο P1. Αντίστοιχα, με g_1^2 συμβολίζονται οι θέσεις που πρέπει να δεσμευτούν για την Class 1 και την Class 2 στο P2 και με g_2^2 τις θέσεις που πρέπει να δεσμευτούν αποκλειστικά για την Class1 στο P2.

Όσον αφορά τις αφίξεις στους χώρους στάθμευσης, θεωρείται ότι οι πελάτες που ανήκουν στην Class 1 καταφτάνουν στους χώρους στάθμευσης με ρυθμό λ_{class1} , ενώ οι πελάτες που ανήκουν στην Class 2 καθώς και στην Class 3 καταφτάνουν στους χώρους στάθμευσης με ρυθμό λ_{class2} και λ_{class3} αντίστοιχα. Στην αρχή του συστήματος θεωρείται ότι ο ρυθμός άφιξης των πελατών στους χώρους στάθμευσης είναι:

$$\lambda_1 = \lambda_{class1} + \lambda_{class2} + \lambda_{class3}$$

καθώς επιτρέπεται η άφιξη πελατών και από τις τρεις κλάσεις. Ανεξάρτητα από την κλάση την οποία προέρχονται, όλοι οι πελάτες καταφτάνουν πρώτα στο χώρο στάθμευσης P1 (λόγω της μικρότερης απόστασης από τον τερματικό σταθμό). Η διαδικασία συνεχίζεται με τον ίδιο ρυθμό έως ότου οι ελεύθερες θέσεις στο χώρο P1 μειωθούν σε $g_1^1 + g_2^1$, που είναι και ο αριθμός των θέσεων που έχουν

δεσμευτεί και είναι προσβάσιμες μόνο από πελάτες της Class 1 και της Class 2. Η άφιξη των πελατών που ανήκουν στην Class 1 και στην Class 2 από εκείνο το σημείο και έπειτα γίνεται με ρυθμό $\lambda_2 \equiv \lambda_{class1} + \lambda_{class2}$. Στο σημείο αυτό οι πελάτες της Class 3 δεν μπορούν να εξυπηρετηθούν και στέλνονται στο P2 με ρυθμό λ_{class3} . Οι πελάτες των Class 1 και Class 2 συνεχίζουν να γίνονται δεκτοί στο P1 μέχρι ο αριθμός των ελεύθερων θέσεων γίνει g_2^1 , όπου εκεί επιτρέπεται η πρόσβαση μόνο από πελάτες της Class 1 με ρυθμό:

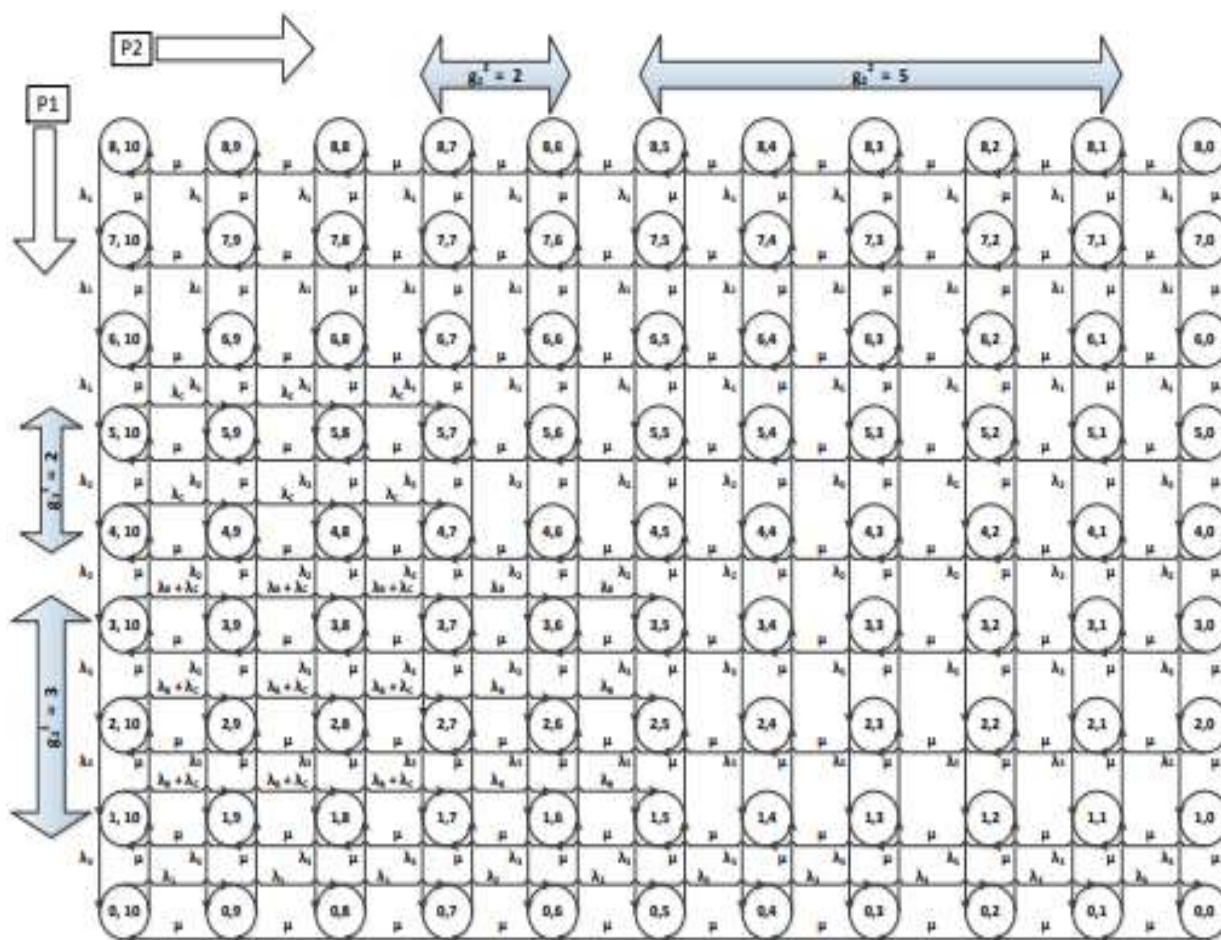
$$\lambda_3 \equiv \lambda_{class1}$$

Σε αυτήν τη περίπτωση, οι πελάτες της Class 2 μπλοκάρονται και στέλνονται στο P2 με ρυθμό λ_{class2} καθώς δεν υπάρχει διαθέσιμος χώρος για αυτούς στο P1. Επομένως ένας πελάτης των Class 2 ή Class 3 που φτάνει στο P1 και δεν βρίσκει διαθέσιμη θέση, φτάνει με ρυθμό λ_{class2} και λ_{class3} αντίστοιχα στο P2 για να βρει ελεύθερη θέση. Αυτό εξακολουθεί να συμβαίνει μέχρι οι ελεύθερες θέσεις στο P2 να φτάσουν τις $g_1^2 + g_2^2$, που είναι ο αριθμός των θέσεων που έχουν δεσμευτεί στο P2 για του πελάτες της Class 1 και της Class 2. Σε αυτήν τη περίπτωση, κανένας από τους χώρους στάθμευσης δεν μπορεί να δεχτεί πελάτες της Class 3, συνεπώς αυτοί δεν μπορούν να εξυπηρετηθούν και χάνονται (για το σύστημα). Οι πελάτες της Class 2 συνεχίζουν να εισέρχονται στο P2 μέχρι ο αριθμός των διαθέσιμων θέσεων να μειωθεί σε g_2^2 . Από αυτό το σημείο και έπειτα, οι πελάτες της Class 2 χάνονται και δεν μπορούν πλέον να εξυπηρετηθούν. Οι πελάτες της Class 1 τώρα εξακολουθούν να καταφτάνουν στο P1 και να σταθμεύουν σε αυτό, μέχρι να είναι κατειλημμένες και οι N_1 θέσεις σε αυτό. Αν δεν υπάρχουν ελεύθερες θέσεις στο P1, τότε οι πελάτες της Class 1 οδηγούνται με ρυθμό $\lambda_3 \equiv \lambda_{class1}$, στο P2 μέχρι να είναι κατειλημμένες και οι N_2 θέσεις σε αυτό. Αν δεν υπάρχουν διαθέσιμες θέσεις και στο P2, τότε και οι πελάτες της Class 1 χάνονται.

Όσον αφορά στην απελευθέρωση μιας θέσης στάθμευσης, σε κάθε χώρο P1 ή P2, θεωρείται ότι ανά πάσα στιγμή μπορεί να φύγει οποιοσδήποτε πελάτης από οποιοδήποτε χώρο στάθμευσης. Επιπρόσθετα θεωρείται ότι ο χρόνος κατά τον οποίο μια θέση σε οποιοδήποτε χώρο στάθμευσης είναι κατειλημμένη, είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο μ . Συνεπώς, ο ρυθμός απελευθέρωσης μιας θέσης σε οποιοδήποτε χώρο στάθμευσης είναι μ .

Το Σχήμα 2 παρουσιάζει το διάγραμμα καταστάσεων για τη Μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου $\{X(t), t \geq 0\}$ που μοντελοποιεί τον αριθμό των ελεύθερων θέσεων στους χώρους στάθμευσης P1 και P2, για μια συγκεκριμένη περίπτωση (χάριν ευκολίας ανάγνωσης) όπου $N_1 = 8$ και $N_2 = 10$, συγκεκριμένη

πολιτική δέσμευσης πόρων για κάθε χώρο στάθμευσης $(g_1^1, g_2^1) = (2,3)$ και $(g_1^2, g_2^2) = (2,5)$ και ρυθμούς άφιξης λ_A, λ_B και λ_C για τις Class 1, Class 2 και Class 3 αντίστοιχα.



Σχήμα 2. Διάγραμμα καταστάσεων για την περίπτωση 2 χώρων στάθμευσης με 3 κλάσεις πελατών (2P3C)

Με βάση τα παραπάνω, η πιθανότητα να μην έχει πρόσβαση η Class 3 στο χώρο στάθμευσης P1 δίνεται από τη σχέση:

$$BP_{Class3}^{P1} = \sum_{i=0}^{g_1^1 + g_2^1} \sum_{j=0}^{N_2} \pi_{i,j} \quad (16)$$

ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα για την Class 2 είναι:

$$BP_{Class2}^{P1} = \sum_{i=0}^{g_2^1} \sum_{j=0}^{N_2} \pi_{i,j} \quad (17)$$

και για την Class 1:

$$BP_{Class1}^{P1} = \sum_{j=0}^{N_2} \pi_{0,j} \quad (18)$$

Η πιθανότητα τώρα να μην βρει ελεύθερη θέση στάθμευσης στο χώρο στάθμευσης P2 (που ισοδυναμεί με την πιθανότητα να χαθεί ουσιαστικά) ένα πελάτη της Class 1, είναι:

$$P_{b,Class1} \equiv P_{b,Class2}^{P2} = \pi_{0,0} \quad (19)$$

και η αντίστοιχη πιθανότητα για την Class 2 είναι:

$$BP_{Class2} \equiv BP_{Class2}^{P2} = \sum_{i=0}^{g_2^1} \sum_{j=0}^{g_2^2} \pi_{i,j} \quad (20)$$

και για την Class 3 είναι:

$$BP_{Class3} \equiv BP_{Class3}^{P2} = \sum_{i=0}^{g_1^1+g_2^1} \sum_{j=0}^{g_1^2+g_2^2} \pi_{i,j} \quad (21)$$

Ο βασικός λοιπόν στόχος είναι να προσδιοριστούν τα $[g_1^1, g_1^2]$ και $[g_2^1, g_2^2]$ τα οποία ελαχιστοποιούν ταυτόχρονα τις πιθανότητες BP_{Class1} και BP_{Class2} καθώς και BP_{Class3} . Αυτό, επιτυγχάνεται μέσω ενός προβλήματος πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης, στο οποίο αντικειμενική συνάρτηση είναι η πιθανότητα αποκλεισμού BP_{Class1} της κλάσης υψηλότερης προτεραιότητας, ενώ οι αντίστοιχες πιθανότητες για τις Class 2 και Class 3 συμμετέχουν στο πρόβλημα σαν περιορισμοί. Για την ακρίβεια, θέτουμε (ο διαχειριστής των χώρων στάθμευσης μπορεί στην ουσία να το κάνει αυτό) ένα ανώτερο ανεκτό όριο για τη πιθανότητα BP_{Class2} που συμβολίζεται με $P_{b,Class2}^0$ και για την πιθανότητα BP_{Class3} το $P_{b,Class3}^0$. Το πρόβλημα αυτό έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} & \min BP_{Class1}(g_1^1, g_2^1, g_1^2, g_2^2) \\ & s. t. \quad BP_{Class2} \leq P_{b,Class2}^0 \\ & \quad \quad BP_{Class3} \leq P_{b,Class3}^0 \\ & \quad \quad g_i^1 > 1, i \in \{1,2\} \\ & \quad \quad g_i^2 > 1, i \in \{1,2\} \\ & \quad \quad g_1^1 < g_2^1 \\ & \quad \quad g_1^2 < g_2^2 \\ & \quad \quad g_1^1, g_1^2, g_2^1, g_2^2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned} \quad (22)$$

Στοχεύοντας στη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων στάθμευσης για την κλάση με την υψηλότερη προτεραιότητα, υπολογίζονται δυο μέτρα απόδοσης που αφορούν τον διαχειριστή των χώρων στάθμευσης και τους πελάτες.

Στη πρώτη περίπτωση του διαχειριστή του χώρου στάθμευσης, και εφόσον οι πελάτες είναι κατηγοριοποιημένοι σε κλάσεις ανάλογες με το ύψος του αντίτιμου που πληρώνουν για τις παρεχόμενες υπηρεσίες, θεωρείται ένα διαφορετικό αντίτιμο εισιτηρίου για την κάθε κλάση. Το γεγονός αυτό είναι ανεξάρτητο από τον χώρο τον οποίο θα σταθμεύσουν (P1 ή P2). Πιο συγκεκριμένα, ορίζεται ως c_1 το αντίτιμο που αντιστοιχεί σε πελάτες της Class 1, c_2 το αντίτιμο για τους πελάτες της Class 2 και c_3 το αντίτιμο για τους πελάτες της Class 3, με $c_1 > c_2 > c_3$. Αυτό, συμβαίνει διότι ο διαχειριστής των χώρων εγγυάται μεγαλύτερη διαθεσιμότητα θέσεων για την Class 1 σε σχέση με όλες τις υπόλοιπες κατηγορίες πελατών και μεγαλύτερη διαθεσιμότητα θέσεων για την Class 2 σε σχέση με την Class 3. Στην συνέχεια ορίζεται το Συνολικό Ωριαίο Κέρδος η αλλιώς Total Expected Hourly Profit (TEHP) για την εταιρία διαχείρισης με βάση τον παρακάτω τύπο:

$$TEHP = \sum_{i \in \{1,2,3\}} \lambda_{Class i} \cdot (1 - BP_{Class i}) \cdot c_i \quad (23)$$

όπου η πιθανότητα να αποκλειστεί η Class i με $i \in \{1,2,3\}$, $BP_{Class i}$ προκύπτει από την επίλυση του προβλήματος (22).

Αντίστοιχα, από την πλευρά των πελατών εντοπίζεται μια σημαντική διαφορά στην περίπτωση που εξυπηρετηθούν από το P1 σε αντίθεση με το P2. Αυτό συμβαίνει, διότι το δεύτερο μέτρο που εξετάζεται περιγράφει την απόσταση που έχει να διανύσει ο κάθε πελάτης από οποιοδήποτε από τα P1 και P2 μέχρι τον τερματικό σταθμό. Έτσι, προκύπτει το δεύτερο μέτρο απόδοσης που ορίζεται ως ο Αναμενόμενος Χρόνος Βαδίσματος η αλλιώς Expected Walking Time και περιγράφεται με τον εξής τύπο:

$$EWT_{Class i} = (1 - BP_{Class i}^{P1}) \cdot w_1 + BP_{Class i}^{P1} \cdot (1 - BP_{Class i}^{P2}) \cdot w_2, \quad i \in \{1,2,3\} \quad (24)$$

όπου με w_1 και w_2 ορίζεται ο χρόνος βαδίσματος που χρειάζεται ένας πελάτης για να φτάσει στο τερματικό σταθμό από τα P1 και P2 αντίστοιχα. Να τονισθεί επίσης το γεγονός ότι εάν ένας πελάτης βρεθεί στην κατάσταση να περπατήσει χρόνο w_2 σημαίνει ότι έχει αποκλειστεί από το P1 και φτάνει στον τερματικό σταθμό από το P2.

Συνοψίζοντας, με τη χρήση των παραπάνω τύπων υπολογίζεται η βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων για τους πελάτες υψηλότερης προτεραιότητας στην περίπτωση δύο τριών κλάσεων πελατών και με δεδομένη την πολιτική αυτή να υπολογισθεί το συνολικό αναμενόμενο ωριαίο κέρδος για την εταιρία

αλλά και το αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος προς τον τερματικό σταθμό για κάθε κλάση πελατών. Η ίδια ακριβώς διαδικασία εφαρμόζεται και στη περίπτωση που έχουμε τέσσερις ή και περισσότερες κλάσεις πελατών.

4.1.3 Γενική περίπτωση k κλάσεων πελατών (HMC)

Ακολουθώντας την ίδια λογική μοντελοποίησης για την περίπτωση δύο χώρων στάθμευσης, γενικεύονται τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια για k κλάσεις πελατών. Έτσι, η πιθανότητα να μην έχει πρόσβαση η Class 1 στο χώρο στάθμευσης P1 δίνεται από τη σχέση:

$$BP_{Class1}^{P1} = \sum_{j=0}^{N_2} \pi_{0,j} \quad (25)$$

ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα για την Class i , με $i \in \{2,3, \dots, k\}$ είναι:

$$BP_{Class i}^{P1} = \sum_{m=0}^{k-1-(i-1)} g_m^1 \sum_{j=\sum_{l=k-(i-1)}^{k-1} g_l^2+1}^{N_2} \pi_{i,j} \quad (26)$$

Η πιθανότητα τώρα να μη βρει ελεύθερη θέση στάθμευσης στο χώρο στάθμευσης P2 (που ισοδυναμεί με την πιθανότητα να χαθεί ουσιαστικά) ένα πελάτης της Class 1, είναι :

$$BP_{Class1} \equiv BP_{Class2}^{P1} = \pi_{0,0} \quad (27)$$

και η αντίστοιχη πιθανότητα για την i , με $i \in \{2,3, \dots, k\}$ είναι:

$$BP_{Class i} = \sum_{m=0}^{k-1-(i-1)} g_m^1 \sum_{j=0}^{\sum_{m=k-(i-1)}^{k-1} g_m^2} \pi_{i,j} \quad (28)$$

Τα αντίστοιχα προβλήματα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης που προκύπτουν και των οποίων η επίλυση μας παρέχει τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης πόρων για τις κλάσεις υψηλότερης προτεραιότητας είναι:

$$\begin{aligned} & \min BP_{Class1}(g_1^1, g_2^1, \dots, g_{k-1}^1, g_1^2, g_2^2, \dots, g_{k-1}^2) \\ & s. t. \quad BP_{Class i} \leq P_{b,Class i}^0, i \in \{2,3, \dots, k\} \\ & \quad g_i^1 < g_{i+1}^1, i \in \{1,2, \dots, k-2\} \\ & \quad g_i^2 < g_{i+1}^2, i \in \{1,2, \dots, k-2\} \\ & \quad \sum_{i=1}^{k-1} g_i^1 < N_1 - 1 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} g_i^2 < N_2 - 1$$

$$g_i^1 > 1, i \in \{1, 3, \dots, k-1\}$$

$$g_i^2 > 1, i \in \{1, 3, \dots, k-1\}$$

$$g_i^1, g_i^2 \in \mathbb{Z}^+, i \in \{1, 3, \dots, k-1\}$$

Στη συνέχεια, και με δεδομένη τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων στάθμευσης για τις κλάσεις υψηλότερης προτεραιότητας $(g_1^{1*}, g_2^{1*}, \dots, g_{k-1}^{1*}, g_1^{2*}, g_2^{2*}, \dots, g_{k-1}^{2*})$, υπολογίζεται το Συνολικό Αναμενόμενο Ωριαίο Κέρδος ή Total Expected Hourly Profit για την εταιρία διαχείρισης με την βοήθεια του εξής τύπου:

$$TEHP = \sum_{i \in \{1, \dots, k\}} \lambda_{Class i} \cdot (1 - BP_{Class i}) \cdot c_i \quad (30)$$

ενώ ο Αναμενόμενος Χρόνος Βαδίσματος από το χώρο στάθμευσης έως τον τερματικό σταθμό ή Expected Walking Time ως:

$$EWT_{Class i} = (1 - BP_{Class i}^{P1}) \cdot w_1 + BP_{Class i}^{P1} \cdot (1 - BP_{Class i}^{P2}) \cdot w_2, \quad i \in \{1, \dots, k\} \quad (31)$$

Να σημειωθεί τέλος, ότι τα προβλήματα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης που παρουσιάστηκαν είναι προβλήματα των οποίων η πολυπλοκότητα, άρα και η δυσκολία επίλυσης, αυξάνει ανάλογα με την αύξηση του αριθμού των κλάσεων. Ωστόσο, επειδή σε πραγματικά προβλήματα δεν συναντάμε συνήθως πάνω από τέσσερις ή πέντε κλάσεις πελατών, στη παρούσα εργασία αντιμετωπίστηκαν τα συγκεκριμένα προβλήματα χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμό που στηρίζεται στην αναλυτική αναζήτηση. Για αριθμό κλάσεων έως και 4 (πειράματα που έχουν γίνει) ο αλγόριθμός αυτός δίνει αποτελέσματα σε πολύ μικρό χρόνο.

4.2 Βελτιστοποίηση του αναμενόμενου κέρδους της εταιρείας διαχείρισης πολλαπλών χώρων στάθμευσης

Το συγκεκριμένο υποκεφάλαιο δημιουργήθηκε, με σκοπό να παρουσιαστεί ένα μοντέλο το οποίο φαινομενικά είναι παρόμοιο με την ομογενή περίπτωση (HMC) έχοντας όμως διαφορετικό στόχο. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν και σε αυτή τη περίπτωση δυο χώροι στάθμευσης, P1 και P2, οι οποίοι δέχονται πελάτες που έχουν χωριστεί σε k κλάσεις. Η Class 1 παραμένει η κλάση με τη μεγαλύτερη προτεραιότητα

ενώ αντίστοιχα η Class k είναι εκείνη με τη χαμηλότερη προτεραιότητα. Βασιζόμενοι σε αυτό, εξάγεται το συμπέρασμα πως οι πελάτες που ανήκουν στη Class 1 θα πρέπει να έχουν λιγότερες πιθανότητες να μπλοκαριστούν σε καθένα από τους δυο χώρους στάθμευσης. Επιπρόσθετα, οι πελάτες της Class 1 θα πρέπει να πληρώσουν ακριβότερο εισιτήριο συγκριτικά με τους πελάτες που ανήκουν σε κλάσεις χαμηλότερης προτεραιότητας λόγω των προνομίων που προσφέρονται σε εκείνες τις θέσεις. Το εισιτήριο αυτό συμβολίζεται με c_i για την Class i , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Η πολιτική δέσμευσης θέσεων είναι ίδια όπως και στην ομογενή περίπτωση και έτσι ένας από τους βασικούς στόχους της εταιρίας παραμένει να γεμίσει πρώτα το P1 και στη συνέχεια το P2 καθώς και να ελαχιστοποιείται η πιθανότητα να μπλοκαριστεί οποιαδήποτε κλάση. Οι πελάτες που καταφθάνουν στους χώρους στάθμευσης ανάλογα με τη κλάση την οποία ανήκουν, εισέρχονται και μεταφέρονται στα P1 και P2 με τους ανάλογους ρυθμούς οι οποίοι περιγράφονται μέσω της διαδικασίας Poisson. Ο ρυθμός άφιξης ενός πελάτη που ανήκει στην Class i συμβολίζεται με $\lambda_{class\ i}$. Οι ρυθμοί απελευθέρωσης μιας θέσης στα P1 και P2 περιγράφονται μέσω της εκθετικής κατανομής και συμβολίζονται με μ . Η διαδικασία στο σύνολο της περιγράφεται με τη βοήθεια των Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου $\{X(t), t \geq 0\}$ (CTMC). Η διαφορά στη συγκεκριμένη περίπτωση έγκειται στο κομμάτι της πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης. Στο σημείο εκείνο, η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος, ουσιαστικά ο στόχος του, είναι η μεγιστοποίηση του συνολικού ημερήσιου κέρδους της εταιρίας και στους δυο χώρους στάθμευσης (TEDP-Total Expected Daily Profit) κάτω από τη παραδοχή ότι ελαχιστοποιούνται οι πιθανότητες να αποκλειστούν οι πελάτες οποιασδήποτε κλάσης. Το πρόβλημα της πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\begin{aligned} \max \quad & TEDP (g_1^1, \dots, g_{k-1}^1, g_1^2, \dots, g_{k-1}^2) \\ \text{s. t.} \quad & BP_{Class\ i} \leq P_{b,Class\ i}^0, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\} \\ & \sum_{i=1}^{k-1} g_i^1 < N_1 - 1 \\ & \sum_{i=1}^{k-1} g_i^2 < N_2 - 1 \\ & \sum_{i=1}^{k-1} g_i^1 < N_1 - 1 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} g_i^2 < N_1 - 1$$

$$g_i^1 < g_{i+1}^1, i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$$

$$g_i^2 < g_{i+1}^2, i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$$

$$g_i^1 > 1, i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$$

$$g_i^2 > 1, i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$$

$$g_i^1, g_i^2 \in \mathbb{Z}^+, i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$$

Ομοίως και σε αυτή τη περίπτωση υπάρχουν περιορισμοί οι οποίοι αφορούν στον αριθμό των θέσεων και είναι ορατοί μέσα στο πρόβλημα (32). Στην ουσία αυτοί είναι που υποδεικνύουν τον μέγιστο αριθμό θέσεων που θα δεσμευτούν για κάθε κλάση σε καθένα από τους δυο χώρους στάθμευσης. Να σημειωθεί ότι ο αριθμός αυτός είναι ανάλογος του συνολικού αριθμού των θέσεων, κάτι το οποίο είναι λογικό εφόσον η εταιρία οφείλει να έχει διαθέσιμο έναν αριθμό θέσεων για τη περίπτωση διέλευσης τυχαίων πελατών (κατηγορία χωρίς καθόλου προτεραιότητα). Συνοψίζοντας το κομμάτι των περιορισμών, για τις κλάσεις με την υψηλότερη προτεραιότητα η εταιρία οφείλει να δεσμεύσει περισσότερες θέσεις στάθμευσης σε αντίθεση με τις υπόλοιπες κλάσεις κάτι που είναι κοινό σε όλες τις υποπεριπτώσεις που παρουσιάζονται στη παρούσα εργασία. Σε επόμενα κεφάλαια παρουσιάζονται και τα αριθμητικά αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν από τη μελέτη του συστήματος υπό την σκοπιά της αύξησης του κέρδους και πως αυτά επηρεάζονται από τις μεταβλητές του συστήματος.

Τέλος, να σημειωθεί πως οι υπολογισμοί για τις πιθανότητες κάθε κλάσης σε καθεμία από τις περιόδους που μελετάται το σύστημα καθώς και για το Αναμενόμενο Ημερήσιο (σε αυτή τη περίπτωση) Κέρδος υπολογίζονται με παρόμοιο τρόπο όπως και στην ομογενή περίπτωση. Συγκεκριμένα ο υπολογισμός για το ημερήσιο κέρδος έρχεται μέσα από την εξίσωση:

$$TEDP = \sum_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} \lambda_{Class i} \cdot (1 - BP_{Class i}) \cdot c_i \quad (33)$$

όπου με $\lambda_{Class i}$ συμβολίζεται ο ρυθμός άφιξης ενός πελάτη της Class i σε καθένα από τα P1, P2, με $1 - BP_{Class i}$ συμβολίζεται η πιθανότητα ο πελάτης αυτός να καταφέρει να εισέλθει στους χώρους αυτούς ώστε τελικά να πληρώσει εισιτήριο c_i .

Οι υπολογισμοί των πιθανοτήτων για καθεμία από τις κλάσεις έχουν ως εξής:

Η πιθανότητα να μπλοκαρισθεί ένας πελάτης της Class 1 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$BP_{class1} = \pi_{0,0} \quad (34)$$

Και για την Class l , όπου $l \in \{2,3, \dots, k\}$ ο υπολογισμός γίνεται ως εξής:

$$BP_{class l} = \sum_{i=0}^{\sum_{m=k-(i-1)}^{k-1} g_m^1} g_m^1 \sum_{j=0}^{\sum_{m=k-(i-1)}^{k-1} g_m^2} g_m^2 \pi_{i,j} \quad (35)$$

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση παραθέτονται σε επόμενο κεφάλαιο.

4.3 Μοντελοποίηση και περιγραφή του συστήματος με τη χρήση Κυκλικών Μη Ομογενών Μαρκοβιανών Αλυσίδων

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η τρίτη περίπτωση η οποία μελετήθηκε στη παρούσα διπλωματική εργασία. Στο σημείο αυτό, θεωρείται πως στους περισσότερους χώρους στάθμευσης και κυρίως σε αυτούς που βρίσκονται σε κοντινές αποστάσεις από αεροδρόμια μεγάλων αστικών πόλεων, η κίνηση κατά τη διάρκεια της ημέρας ποικίλει. Το μεγαλύτερο ποσοστό πελατών παρουσιάζεται κυρίως κατά τη διάρκεια της ημέρας εφόσον η μείωση στον αριθμό των πτήσεων σημειώνεται κυρίως τις βραδινές ώρες. Η υπόθεση αυτή οδήγησε αυτόματα στη χρήση των Κυκλικών Μη Ομογενών Μαρκοβιανών Αλυσίδων και αυτό αποδίδεται στο γεγονός ότι υπήρξε συγκεκριμένο μοτίβο στη κίνηση εντός των χώρων στάθμευσης.

Πιο συγκεκριμένα, στην εργασία οι περίοδοι που μελετήθηκαν είναι τρεις και χωρίστηκαν με τον εξής τρόπο: το διάστημα 8:00 π.μ-16:00 μ.μ. είναι το διάστημα που παρουσιάζεται ο μεγαλύτερος όγκος πελατών καθώς εκείνες τις ώρες λαμβάνουν χώρα οι περισσότερες πτήσεις. Η αμέσως επόμενη περίοδος περιλαμβάνει το διάστημα 16:00 μ.μ-24:00 μ.μ. που όπως γίνεται αντιληπτό υπάρχει μια πτώση στην άφιξη και αναχώρηση των πελατών και κατ' επέκταση στη ζήτηση για χώρους στάθμευσης. Για τον λόγο αυτό θεωρείται η δεύτερη σε σειρά περίοδος του συστήματος. Τέλος, το διάστημα 24:00 μ.μ-8:00 π.μ. είναι η τελευταία περίοδος του συστήματος και είναι η λιγότερο σημαντική ερευνητικά και αυτό συμβαίνει διότι σε αυτό το διάστημα παρατηρούνται ελάχιστες πτήσεις και ως συνέπεια αυτού υπάρχει ελάχιστη ζήτηση στους χώρους στάθμευσης.

Αρχικά θεωρείται ότι οι αφίξεις καθώς και οι αναχωρήσεις που πραγματοποιούνται ακολουθούν τη διαδικασία Poisson. Συμβολίζεται με $\lambda_{class j}^s, 1 \leq j \leq k$ ο ρυθμός άφιξης σε καθένα από τους δυο

χώρους στάθμευσης την περίοδο s . Αντίστοιχα, ο ρυθμός απελευθέρωσης μιας διαθέσιμης θέσης στάθμευσης υποδηλώνει το πόσο γρήγορα απελευθερώνεται μια θέση από ένα πελάτη σε καθένα από τα P1,P2 και συμβολίζεται με $\mu_{Class j}^s, 1 \leq j \leq k$ για κάθε περίοδο s .

Αρχικά υποθέτουμε και σε αυτή τη περίπτωση ότι οι πελάτες διαχωρίζονται σε κλάσεις και η καθεμία από αυτές ακολουθεί μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda_{Class j}^s, 1 \leq j \leq k$ για κάθε περίοδο s . Ένας χώρος στάθμευσης, ο P1 ή ο P2 θεωρείται διαθέσιμος τη χρονική στιγμή που ένας πελάτης απελευθερώσει μια θέση στάθμευσης. Βασιζόμενοι σε αυτή τη παραδοχή, θεωρείται ότι ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη σε έναν από τους χώρους στάθμευσης ακολουθεί την εκθετική κατανομή με ρυθμό $\mu_{Class j}^s, 1 \leq j \leq k$ για κάθε περίοδο s . Επιπλέον, θεωρείται ότι ο κάθε πελάτης που απελευθερώνει μια θέση σε έναν από τους δυο χώρους στάθμευσης μπορεί να προέρχεται από οποιαδήποτε κλάση και ως αποτέλεσμα αυτού ο ρυθμός απελευθέρωσης μιας θέσης για κάθε περίοδο s περιγράφεται ως $\mu^s = \sum_{j=1}^k \mu_{Class j}^s$.

Πιο συγκεκριμένα, το παράδειγμα που χρησιμοποιήθηκε για την συγκεκριμένη εργασία έχει τρεις περιόδους και επεκτείνεται μέχρι και τη περίπτωση τεσσάρων κλάσεων πελατών. Ο Πίνακας 1 απεικονίζει τη γενική περίπτωση όπου υπάρχουν k κλάσεις πελατών και τους αντίστοιχους συμβολισμούς για τους ρυθμούς άφιξης και αναχώρησης σε μια θέση στάθμευσης.

Traffic Period	Class 1 arrival/service rate	Class 2 arrival/service rate	...	Class i arrival/service rate	...	Class k arrival/service rate
08.00-16.00 ($s = 0$)	$\lambda_{Class 1}^0 / \mu_{Class 1}^0$	$\lambda_{Class 2}^0 / \mu_{Class 2}^0$...	$\lambda_{Class i}^0 / \mu_{Class i}^0$...	$\lambda_{Class k}^0 / \mu_{Class k}^0$
16.00-24.00 ($s = 1$)	$\lambda_{Class 1}^1 / \mu_{Class 1}^1$	$\lambda_{Class 2}^1 / \mu_{Class 2}^1$...	$\lambda_{Class i}^1 / \mu_{Class i}^1$...	$\lambda_{Class k}^1 / \mu_{Class k}^1$
24.00-08.00 ($s = 2$)	$\lambda_{Class 1}^2 / \mu_{Class 1}^2$	$\lambda_{Class 2}^2 / \mu_{Class 2}^2$...	$\lambda_{Class i}^2 / \mu_{Class i}^2$...	$\lambda_{Class k}^2 / \mu_{Class k}^2$

Πίνακας 1: Ρυθμοί άφιξεων και αναχωρήσεων για τη περίπτωση k κλάσεων πελατών

Με $\lambda_{Class j}^s / \mu_{Class j}^s$ συμβολίζονται οι ρυθμοί άφιξης/αναχώρησης της Class j στην s περίοδο. Το συγκεκριμένο μοντέλο που προτείνεται σε αυτή τη διπλωματική εργασία μοντελοποιείται για τρεις περιόδους $s = 0,1,2$:

$$\lambda_1^s = \lambda_{Class 1}^s + \lambda_{Class 2}^s + \dots + \lambda_{Class i}^s + \dots + \lambda_{Class k-1}^s + \lambda_{Class k}^s$$

$$\lambda_2^s = \lambda_{Class 1}^s + \lambda_{Class 2}^s + \dots + \lambda_{Class i}^s + \dots + \lambda_{Class k-1}^s$$

$$\vdots \quad (36)$$

$$\lambda_{k-1}^s = \lambda_{Class 1}^s + \lambda_{Class 2}^s$$

$$\lambda_k^s = \lambda_{Class 1}^s$$

Στα συγκεκριμένα προβλήματα των Κυκλικών Μαρκοβιανών Αλυσίδων είναι διαθέσιμοι από τα δεδομένα οι ρυθμοί μετάβασης και όχι οι πιθανότητες μετάβασης, κάτι το οποίο παρατηρείται και στο πρόβλημα που μοντελοποιήθηκε στη παρούσα εργασία όπου χρησιμοποιήθηκαν ρυθμοί μετάβασης. Ως αποτέλεσμα αυτών, ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασής για καθεμία από τις τρεις περιόδους ($s = \{0,1,2\}$) θα υπολογιστεί βάσει των παρακάτω τύπων (Koutras και Platis 2008c):

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{h}_0 + \mathbf{I}, \mathbf{p}_1 = \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{h}_1 + \mathbf{I}, \mathbf{p}_2 = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{h}_2 + \mathbf{I} \quad (37)$$

όπου με \mathbf{Q}_0 , \mathbf{Q}_1 και \mathbf{Q}_2 συμβολίζονται οι μεταβάσεις για κάθε περίοδο $s = 0,1,2$, \mathbf{I} είναι ο μοναδιαίος πίνακας και το $\mathbf{h}_s, s = 0,1,2$ ορίζεται από τον τύπο παρακάτω:

$$h_j = k / \max\{Q_{i,i}\}, \quad j = \{0,1,2\}, i = 1, \dots, N, \quad k \approx 1 \quad (38)$$

Βασιζόμενοι στο θεωρητικό υπόβαθρο που έχει ήδη παρουσιαστεί και λαμβάνοντας υπόψη ότι ο χώρος όλων των δυνατών καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρεθεί το σύστημα ορίζεται ως $E = \{(i,j) : i \in \{0,1, \dots, N_1\}, j \in \{0,1, \dots, N_2\}\}$, ο υπολογισμός της στάσιμης κατανομής πιθανότητας για τη διαδικασία $\{Z(t), t \geq 0\}$ υπολογίζεται για καθεμία από τις περιόδους $s = 0, 1, 2$ από τους τύπους που ακολουθούν:

$$\boldsymbol{\pi}_0 \equiv \boldsymbol{\pi} \quad (39)$$

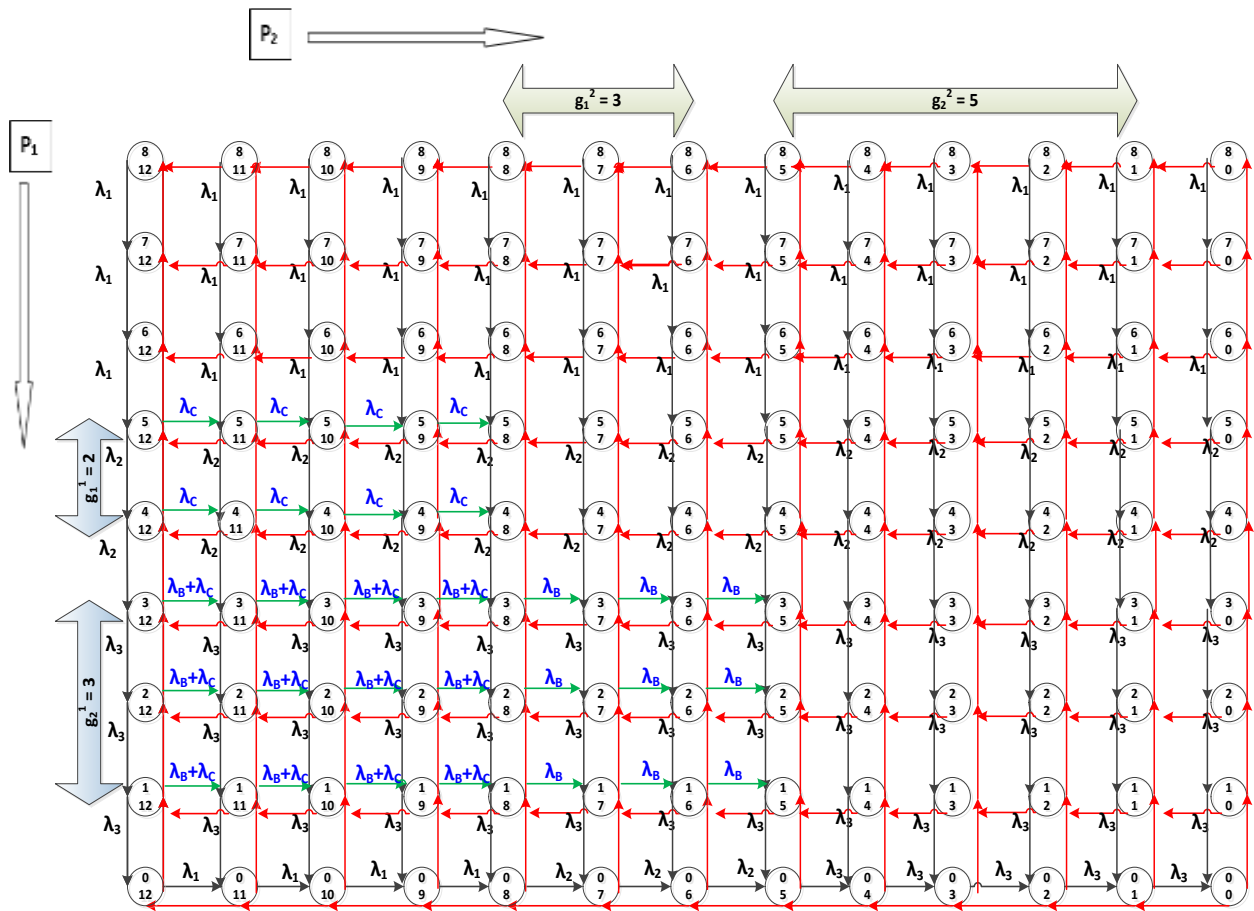
$$\boldsymbol{\pi}_1 = \boldsymbol{\pi} \mathbf{p}_0 \quad (40)$$

$$\boldsymbol{\pi}_2 = \boldsymbol{\pi} \mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1 \quad (41)$$

όπου το $\boldsymbol{\pi}$ συμβολίζει τη στάσιμη κατανομή πιθανότητας και ένα βασικό χαρακτηριστικό σε αυτές τις κυκλικές διαδικασίες είναι ότι το τέλος της τελευταίας περιόδου συμπίπτει με την αρχή της πρώτης. Με βάση αυτό έχουμε ότι $\boldsymbol{\pi}_0 \equiv \boldsymbol{\pi}$. Καταλήγοντας έτσι στο πίνακα \mathbf{A} ο οποίος πλέον μετατρέπεται στον $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 - \mathbf{I})^T \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$, με τα $\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2$ να συμβολίζουν τους πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης σε καθεμία από τις τρεις περιόδους. Προχωρώντας στην επίλυση των συστημάτων αυτών, έχουμε ως αποτέλεσμα τη στάσιμη κατανομή πιθανότητας για κάθε περίοδο ξεχωριστά. Συμπληρωματικά, και για τη καλύτερη κατανόηση του προβλήματος παραθέτουμε το Σχήμα 3, στο οποίο παρουσιάζεται το διάγραμμα καταστάσεων για μια τυχαία περίοδο, στην περίπτωση όπου έχουμε $k = 3$ κλάσεις πελατών που φτάνουν στους χώρους στάθμευσης P1 που διαθέτει $N_1 = 8$ θέσεις, και στο χώρο στάθμευσης P2 που

διαθέτει $N_2 = 12$. Σημειώνεται ότι στο Σχήμα 3 συμβολίζεται με λ_A το ρυθμό $\lambda_{class 1}$, με λ_B το ρυθμό $\lambda_{class 2}$ και με λ_C το ρυθμό $\lambda_{class 3}$, ενώ με κόκκινο χρώμα είναι οι μεταβάσεις που υποδηλώνουν την απελευθέρωση μιας θέσης με ρυθμό μ .

Η βασική διαφορά με την ομογενή περίπτωση έγκειται στον υπολογισμό της στάσιμης κατανομής πιθανότητας. Πιο συγκεκριμένα, η στάσιμη κατανομή πιθανότητας υπολογίζεται για καθεμιά κλάση πελατών ξεχωριστά σε καθένα από τους δύο χώρους στάθμευσης και αυτό συνέβη για όλες τις περιόδους που διαχωρίστηκε το πρόβλημα. Επιπρόσθετα, θα πρέπει να υπολογιστεί η βέλτιστη πολιτική δέσμευσης πόρων σε καθεμία από αυτές τις περιόδους και για την κάθε κλάση ξεχωριστά.



Σχήμα 3: Παράδειγμα διαγράμματος καταστάσεων για $k = 3$ κλάσεις, $N_1 = 8$, $N_2 = 12$

4.3.1 Περίπτωση δυο κλάσεων πελατών (CNHMC)

Για τη μοντελοποίηση του προβλήματος στην περίπτωση δύο κλάσεων πελατών, σε τρεις περιόδους, με τη χρήση Κυκλικών Μη Ομογενών Μαρκοβιανών Αλυσίδων συμβολίστηκαν με $g_{1,s}^1$ και $g_{1,s}^2$ οι δεσμευμένες θέσεις στάθμευσης στα P1 και P2 αντίστοιχα, τη περίοδο s , όπου $s = 0,1,2$ για την Class 1. Στη περίπτωση αυτή, η Class 1 είναι αυτή με τη μεγαλύτερη προτεραιότητα καθώς η Class 2 αποτελείται από τους πελάτες που πληρώνουν μικρότερο χρηματικό αντίτιμο για τη στάθμευση και έχουν λιγότερα προνόμια σε σχέση με τους πελάτες που ανήκουν στην Class 1.

Ξεκινώντας με τη περίοδο 0 και βασιζόμενοι στο προηγούμενο κεφάλαιο παραθέτονται οι τύποι παρακάτω που αφορούν στον υπολογισμό των πιθανοτήτων για κάθε περίπτωση ξεχωριστά.

Η πιθανότητα να μην έχει πρόσβαση η Class 1 στο χώρο στάθμευσης P1 στην περίοδο 0 δίνεται από τη σχέση:

$$BP_{Class1,0}^{P1} = \sum_{j=0}^{N_2} \pi_0(0,j) \quad (42)$$

όπου με $BP_{Class1,0}^{P1}$ συμβολίζεται η πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class 1 στο P1 στη περίοδο 0 και με $\pi_0(0,j)$ συμβολίζεται η στάσιμη πιθανότητα της κατάστασης $(0,j)$ στη περίοδο 0.

Η αντίστοιχη πιθανότητα αποκλεισμού για την Class 2 στο P1 στη περίοδο 0 είναι:

$$BP_{Class2,0}^{P2} = \sum_{i=0}^{g_{1,0}^1} \sum_{j=0}^{N_2} \pi_0(i,j) \quad (43)$$

όπου $\pi_0(i,j)$ είναι η στάσιμη πιθανότητα της κατάστασης (i,j) στη περίοδο 0.

Η πιθανότητα τώρα να μην βρει ελεύθερη θέση στάθμευσης στο χώρο στάθμευσης P2 (που ισοδυναμεί με την πιθανότητα να χαθεί ουσιαστικά) ένας πελάτης της Class 1 στη περίοδο 0 είναι :

$$BP_{Class1,0} \equiv BP_{Class1}^{P1} = \pi_0(0,0) \quad (44)$$

και η αντίστοιχη πιθανότητα για την Class 2 είναι:

$$BP_{Class2,0} \equiv BP_{Class2,0}^{P2} = \sum_{i=0}^{g_{1,0}^1} \sum_{j=0}^{g_{1,0}^2} \pi_0(i,j) \quad (45)$$

Με παρόμοιο τρόπο, προκύπτουν και οι τύποι για τη περίοδο 1:

$$BP_{Class1,1}^{P1} = \sum_{j=0}^{N_2} \pi_1(0,j) \quad (46)$$

όπου με $BP_{Class1,1}^{P1}$ συμβολίζεται η n πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class 1 στο P1 στη περίοδο 1 και με $\pi_1(0, j)$ συμβολίζεται η στάσιμη πιθανότητα της κατάστασης $(0, j)$ στη περίοδο 1.

Η αντίστοιχη πιθανότητα για την Class 2 στη περίοδο 1 είναι:

$$BP_{Class2,1}^{P2} = \sum_{i=0}^{g_{1,1}^1} \sum_{j=0}^{N_2} \pi_1(i, j) \quad (47)$$

όπου $\pi_1(i, j)$ είναι η στάσιμη πιθανότητα της κατάστασης (i, j) στη περίοδο 1.

Η πιθανότητα τώρα να μην βρει ελεύθερη θέση στάθμευσης στο χώρο στάθμευσης P2 (που ισοδυναμεί με την πιθανότητα να χαθεί ουσιαστικά) ένας πελάτης της Class 1, είναι:

$$BP_{Class1,1} \equiv BP_{Class1}^{P2} = \pi_1(0,0) \quad (48)$$

και η αντίστοιχη πιθανότητα για την Class 2 είναι:

$$BP_{Class2,1} \equiv BP_{Class2,1}^{P2} = \sum_{i=0}^{g_{1,1}^1} \sum_{j=0}^{g_{1,1}^2} \pi_1(i, j) \quad (49)$$

Ομοίως προκύπτουν και οι τύποι για τη περίοδο 2:

$$BP_{Class1,2}^{P1} = \sum_{j=0}^{N_2} \pi_2(0, j) \quad (50)$$

όπου με $BP_{Class1,2}^{P1}$ συμβολίζεται η n πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class 1 στο P1 στη περίοδο 2 και με $\pi_2(0, j)$ συμβολίζεται η στάσιμη πιθανότητα της κατάστασης $(0, j)$ στη περίοδο 2.

Η αντίστοιχη πιθανότητα για την Class 2 στη περίοδο 2 είναι:

$$BP_{Class2,2}^{P2} = \sum_{i=0}^{g_{1,2}^1} \sum_{j=0}^{N_2} \pi_2(i, j) \quad (51)$$

όπου $\pi_2(i, j)$ είναι η στάσιμη πιθανότητα της κατάστασης (i, j) στη περίοδο 2.

Η πιθανότητα τώρα να μην βρει ελεύθερη θέση στάθμευσης στο χώρο στάθμευσης P2 (που ισοδυναμεί με την πιθανότητα να χαθεί ουσιαστικά) ένας πελάτης της Class 1, είναι:

$$BP_{Class1,2} \equiv BP_{Class1}^{P2} = \pi_2(0,0) \quad (52)$$

και η αντίστοιχη πιθανότητα για την Class 2 είναι:

$$BP_{Class2,2} \equiv BP_{Class2,2}^{P2} = \sum_{i=0}^{g_{1,2}^1} \sum_{j=0}^{g_{1,2}^2} \pi_2(i, j) \quad (53)$$

Ο βασικός λοιπόν στόχος σε αυτό το σημείο της εργασίας, είναι να προσδιοριστούν τα $g_{1,0}^1, g_{1,0}^2, g_{1,1}^1$ και $g_{1,1}^2$ και $g_{1,2}^1, g_{1,2}^2$ τα οποία ελαχιστοποιούν ταυτόχρονα τις πιθανότητες $BP_{Class1,s}, BP_{Class2,s}$, για κάθε $s \in \{0,1,2\}$. Αυτό, επιτυγχάνεται μέσω ενός προβλήματος πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης, στο οποίο ως αντικειμενική συνάρτηση ορίζεται η πιθανότητα αποκλεισμού $BP_{Class1,s}$ της κλάσης υψηλότερης προτεραιότητας (Class 1) στην περίοδο s , ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα για την Class 2 συμμετέχει στο πρόβλημα σαν περιορισμός. Για την ακρίβεια, θέτουμε (ο διαχειριστής των χώρων στάθμευσης μπορεί στην ουσία να το κάνει αυτό) ένα ανώτερο ανεκτό όριο για τη πιθανότητα $P_{b,Class2}^s$ που συμβολίζεται με $P_{b,Class2,0}^s$. Το πρόβλημα αυτό για κάθε περίοδο $s \in \{0,1,2\}$, έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}
 & \min BP_{Class1,s}(g_{1,s}^1, g_{1,s}^2) \\
 & \text{s. t. } BP_{Class2,s} \leq P_{b,Class2,0}^s \tag{54} \\
 & g_{1,s}^1 > 1 \\
 & g_{1,s}^2 > 1 \\
 & g_{1,s}^1 < N_1 - 1 \\
 & g_{1,s}^2 < N_2 - 1 \\
 & g_{1,s}^1, g_{1,s}^2 \in \mathbb{Z}^+
 \end{aligned}$$

Με δεδομένη τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων που προκύπτει από την επίλυση του προβλήματος (54) υπολογίζονται τα δυο μέτρα απόδοσης τα οποία παρουσιάστηκαν και στην ομογενή περίπτωση. Όσον αφορά στο διαχειριστή των χώρων στάθμευσης, θεωρείται το αντίτιμο c_1 για την Class 1 και το αντίτιμο c_2 για την Class 2, με $c_1 > c_2$. Με βάση αυτό, ορίζεται το Συνολικό Αναμενόμενο Ωριαίο Κέρδος στη περίοδο 0 ως:

$$TEHP^0 = \sum_{i=1}^k \lambda_{Class i}^0 \cdot (1 - BP_{Class i,0}) \cdot c_i \quad i \in \{1,2,3\} \tag{55}$$

όπου με $\lambda_{Class i}^0$ συμβολίζεται ο αριθμός των αφίξεων της Class i στη περίοδο 0, με $BP_{Class i,0}$ τη πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class i στην περίοδο 0 και το $TEHP^0$ συμβολίζει το Αναμενόμενο Ωριαίο Κέρδος στη περίοδο 0.

Αντίστοιχα για την περίοδο 1:

$$TEHP^1 = \sum_{i=1}^k \lambda_{Class i}^1 \cdot (1 - BP_{Class i,1}) \cdot c_i \quad i \in \{1,2,3\} \tag{56}$$

όπου με $\lambda_{Class i}^1$ συμβολίζεται ο αριθμός των αφίξεων της Class i στη περίοδο 1, με $BP_{Class i,1}$ τη πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class i στη περίοδο 1 και το $TEHP^1$ συμβολίζει το Αναμενόμενο Ωριαίο Κέρδος στη περίοδο 1. Να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι οι υπολογισμοί για το αναμενόμενο κέρδος έγιναν με βάση τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων για καθένα από τα P1,P2.

και τέλος για την περίοδο 2 έχουμε:

$$TEHP^2 = \sum_{i=1}^k \lambda_{Class i}^2 \cdot (1 - BP_{Class i,2}) \cdot c_i \quad i \in \{1,2,3\} \quad (57)$$

όπου με $\lambda_{Class i}^2$ συμβολίζεται ο αριθμός των αφίξεων της Class i στη περίοδο 2, με $BP_{b,Class i,2}$ τη πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class i στη περίοδο 2 και το $TEHP^2$ συμβολίζει το Αναμενόμενο Ωριαίο κέρδος στη περίοδο 2. Να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι οι υπολογισμοί για το αναμενόμενο κέρδος έγιναν με βάση τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων για καθένα από τα P1,P2.

Όσον αφορά στους πελάτες παρουσιάζεται ο Αναμενόμενος Χρόνος Βαδίσματος ή αλλιώς Expected Walking Time για τη περίοδο 0:

$$EWT_{Class i,0} = (1 - (BP_{Class i,0}^{P1} - BP_{Class i,0})) \cdot w_1 + (BP_{Class i,0}^{P2} - BP_{Class i,0}) \cdot w_2, \quad i \in \{1,2,3\} \quad (58)$$

όπου με $BP_{Class i,0}^{P1}$ συμβολίζεται η βέλτιστη πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class i στο P1 στη περίοδο 0, με $BP_{Class i,0}^{P2}$ η βέλτιστη πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class i στο P2 στη περίοδο 0 και τέλος με $EWT_{Class i,0}$ τον Αναμενόμενο Χρόνο Βαδίσματος στη περίοδο 0. Επιπρόσθετα έχουμε τα w_1 και w_2 όπου συμβολίζουν τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος που χρειάζεται ο πελάτης για να φτάσει στο τερματικό σταθμό από τους χώρους P1 και P2 αντίστοιχα και θεωρούμε ότι έχει την ίδια τιμή και στις τρεις περιόδους. Να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι οι υπολογισμοί για τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος έγιναν με βάση τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων για καθένα από τα P1,P2.

Με όμοιο τρόπο και για την περίοδο 1 έχουμε:

$$EWT_{Class i,1} = (1 - (BP_{Class i,1}^{P1} - BP_{Class i,1})) \cdot w_1 + (BP_{Class i,1}^{P2} - BP_{Class i,1}) \cdot w_2, \quad i \in \{1,2,3\} \quad (59)$$

όπου με $BP_{Class i,1}^{P1}$ συμβολίζεται η πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class i στο P1 στη περίοδο 1, με $BP_{Class i,1}^{P2}$ η πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class i στο P2 στην περίοδο 1 και με $EWT_{Class i,1}$ ο Αναμενόμενος Χρόνος Βαδίσματος στη περίοδο 1. Επιπρόσθετα έχουμε τα w_1 και w_2 όπου συμβολίζουν τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος που χρειάζεται ο πελάτης για να φτάσει στο τερματικό σταθμό από τους χώρους P1 και P2 αντίστοιχα και θεωρούμε ότι έχει την ίδια τιμή και στις τρεις περιόδους. Να

σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι οι υπολογισμοί για τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος έγιναν με βάση τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων για καθένα από τα P1,P2.

τέλος, υπάρχει και η περίοδος 2 όπου έχουμε:

$$EWT_{Class\ i,2} = \left(1 - (BP_{Class\ i,2}^{P1} - BP_{Class\ i,2})\right) \cdot w_1 + (BP_{Class\ i,2}^{P2} - BP_{Class\ i,2}) \cdot w_2, i \in \{1,2,3\} \quad (60)$$

όπου με $BP_{Class\ i,2}^{P1}$ συμβολίζεται η πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class i στο P1 στη περίοδο 2, με $BP_{Class\ i,2}^{P2}$ η πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class i στο P2 στην περίοδο 2 και με $EWT_{Class\ i,2}$ ο Αναμενόμενος Χρόνος Βαδίσματος στη περίοδο 2. Επιπρόσθετα έχουμε τα w_1 και w_2 όπου συμβολίζουν τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος που χρειάζεται ο πελάτης για να φτάσει στο τερματικό σταθμό από τους χώρους P1 και P2 αντίστοιχα και θεωρούμε ότι έχει την ίδια τιμή και στις τρεις περιόδους. Να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι οι υπολογισμοί για τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος έγιναν με βάση τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων για καθένα από τα P1,P2.

4.3.2 Περίπτωση τριών κλάσεων πελατών (CNHMC)

Με βάση τα παραπάνω, η πιθανότητα να μην έχει πρόσβαση η Class 3 στο χώρο στάθμευσης P1 στη περίοδο 0 δίνεται από τη σχέση:

$$BP_{Class\ 3,0}^{P1} = \sum_{i=0}^{g_{1,0}^1 + g_{2,0}^1} \sum_{j=0}^{N_2} \pi_0(i, j) \quad (61)$$

Όπου με $BP_{Class\ 3,0}^{P1}$ συμβολίζεται η πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class 3 στο P1 στη περίοδο 0 και με $\pi_0(i, j)$ συμβολίζεται η στάσιμη πιθανότητα της κατάστασης (i, j) στη περίοδο 0.

ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα για την Class 2 στη περίοδο 0 είναι:

$$BP_{Class\ 2,0}^{P1} = \sum_{i=0}^{g_{2,0}^1} \sum_{j=0}^{N_2} \pi_0(i, j) \quad (62)$$

και για την Class 1 έχουμε επίσης:

$$BP_{Class\ 1,0}^{P1} = \sum_{j=0}^{N_2} \pi_0(0, j) \quad (63)$$

Όπου με $BP_{Class\ 1,0}^{P1}$ συμβολίζουμε τη πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class 1 στο P1 στη περίοδο 0 και με $\pi_0(0, j)$ συμβολίζεται η στάσιμη πιθανότητα της κατάστασης $(0, j)$ στη περίοδο 0.

Η πιθανότητα τώρα να μην βρει ελεύθερη θέση στάθμευσης στο χώρο στάθμευσης P2 (που ισοδυναμεί με την πιθανότητα να χαθεί ουσιαστικά) ένα πελάτης της Class 1, είναι:

$$BP_{Class1,0} \equiv BP_{Class2,0}^{P2} = \pi_0(0,0) \quad (64)$$

και η αντίστοιχη πιθανότητα για την Class 2 είναι:

$$BP_{Class2,0} \equiv BP_{Class2,0}^{P2} = \sum_{i=0}^{g_{2,0}^1} \sum_{j=0}^{g_{2,0}^2} \pi_0(i,j) \quad (65)$$

Όσο για την Class 3 έχουμε:

$$BP_{Class3,0} \equiv BP_{Class3,0}^{P2} = \sum_{i=0}^{g_{1,0}^1 + g_{2,0}^1} \sum_{j=0}^{g_{1,0}^2 + g_{2,0}^2} \pi_0(i,j) \quad (66)$$

Με όμοιο τρόπο έχουμε για τη περίοδο 1 τους παρακάτω τύπους:

$$BP_{Class3,1}^{P1} = \sum_{i=0}^{g_{1,1}^1 + g_{2,1}^1} \sum_{j=0}^{N_2} \pi_1(i,j) \quad (67)$$

όπου με $BP_{Class3,1}^{P1}$ συμβολίζεται η πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class 3 στο P1 στη περίοδο 1 και με $\pi_1(i,j)$ συμβολίζεται η στάσιμη πιθανότητα της κατάστασης (i,j) στη περίοδο 1.

Ενώ, η αντίστοιχη πιθανότητα για την Class 2 στη περίοδο 1 είναι:

$$BP_{Class2,1}^{P1} = \sum_{i=0}^{g_{2,1}^1} \sum_{j=0}^{N_2} \pi_1(i,j) \quad (68)$$

και για την Class 1:

$$BP_{Class1,1}^{P1} = \sum_{j=0}^{N_2} \pi_1(0,j) \quad (69)$$

όπου με $BP_{Class1,1}^{P1}$ συμβολίζεται η πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class 1 στο P1 στη περίοδο 1 και με $\pi_1(0,j)$ συμβολίζεται η στάσιμη πιθανότητα της κατάστασης $(0,j)$ στη περίοδο 1.

Η πιθανότητα τώρα να μην βρει ελεύθερη θέση στάθμευσης στο χώρο στάθμευσης P2 ένας πελάτης της Class 1, είναι:

$$BP_{Class1,1} \equiv BP_{Class2,1}^{P2} = \pi_1(0,0) \quad (70)$$

και η αντίστοιχη πιθανότητα για την Class 2 είναι:

$$BP_{Class2,1} \equiv BP_{Class2,1}^{P2} = \sum_{i=0}^{g_{2,1}^1} \sum_{j=0}^{g_{2,1}^2} \pi_1(i,j) \quad (71)$$

και για την Class 3 είναι:

$$BP_{Class3,1} \equiv BP_{Class3,1}^{P2} = \sum_{i=0}^{g_{1,1}^1 + g_{2,1}^1} \sum_{j=0}^{g_{1,1}^2 + g_{2,1}^2} \pi_1(i,j) \quad (72)$$

τέλος έχουμε για τη περίοδο 2 τους παρακάτω τύπους:

$$BP_{Class3,2}^{P1} = \sum_{i=0}^{g_{1,2}^1 + g_{2,2}^1} \sum_{j=0}^{N_2} \pi_2(i, j) \quad (73)$$

όπου με $BP_{Class3,2}^{P1}$ συμβολίζεται η πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class 3 στο P1 στη περίοδο 2 και με $\pi_2(i, j)$ συμβολίζεται η στάσιμη πιθανότητα της κατάστασης (i, j) στη περίοδο 2.

Ενώ, η αντίστοιχη πιθανότητα για την Class 2 στη περίοδο 2 είναι:

$$BP_{Class2,2}^{P1} = \sum_{i=0}^{g_{2,2}^1} \sum_{j=0}^{N_2} \pi_2(i, j) \quad (74)$$

και για την Class 1:

$$BP_{Class1,2}^{P1} = \sum_{j=0}^{N_2} \pi_2(0, j) \quad (75)$$

όπου με $BP_{Class1,2}^{P1}$ συμβολίζεται η πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class 1 στο P1 στη περίοδο 2 και με $\pi_2(0, j)$ συμβολίζεται η στάσιμη πιθανότητα της κατάστασης $(0, j)$ στη περίοδο 2.

Η πιθανότητα τώρα να μην βρει ελεύθερη θέση στάθμευσης στο χώρο στάθμευσης P2 ένας πελάτης της Class 1, είναι:

$$BP_{Class1,3} \equiv BP_{Class2,3}^{P2} = \pi_3(0,0) \quad (76)$$

και η αντίστοιχη πιθανότητα για την Class 2 είναι:

$$BP_{Class2,2} \equiv BP_{Class2,2}^{P2} = \sum_{i=0}^{g_{2,2}^1} \sum_{j=0}^{g_{2,2}^2} \pi_2(i, j) \quad (77)$$

και για την Class 3 είναι:

$$BP_{Class3,2} \equiv BP_{Class3,2}^{P2} = \sum_{i=0}^{g_{1,2}^1 + g_{2,2}^1} \sum_{j=0}^{g_{1,2}^1 + g_{2,2}^2} \pi_2(i, j) \quad (78)$$

Αντίστοιχα και στο σημείο αυτό, βασικός στόχος είναι να προσδιοριστούν τα $g_{1,s}^1, g_{1,s}^2, g_{2,s}^1, g_{2,s}^2$ τα οποία ελαχιστοποιούν ταυτόχρονα τις πιθανότητες $BP_{Class1,s}, BP_{Class2,s}$ καθώς και $BP_{Class3,s}$ για κάθε $s = \{0,1,2\}$. Αυτό, επιτυγχάνεται μέσω ενός προβλήματος πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης, στο οποίο αντικειμενική συνάρτηση είναι η πιθανότητα αποκλεισμού $BP_{Class1,s}$ της κλάσης υψηλότερης προτεραιότητας, ενώ οι αντίστοιχες πιθανότητες για την Class 2 και την Class 3 συμμετέχουν στο πρόβλημα σαν περιορισμοί, όπου με s συμβολίζεται η περίοδος που μελετάται. Για την ακρίβεια, θέτουμε (ο διαχειριστής των χώρων στάθμευσης μπορεί στην ουσία να το κάνει αυτό) ένα ανώτερο

ανεκτό όριο για τις πιθανότητες $BP_{Class2,s}$ και $BP_{Class3,s}$ που συμβολίζονται με $P_{b,Class2,0}^s$ και $P_{b,Class3,0}^s$ αντίστοιχα. Το πρόβλημα αυτό έχει την ακόλουθη μορφή για κάθε $s \in \{0,1,2\}$:

$$\begin{aligned}
 & \min BP_{Class1,s}(g_{1,s}^1, g_{2,s}^1, g_{1,s}^2, g_{2,s}^2) \\
 & \text{s. t. } BP_{Class2,s} \leq P_{b,Class2,0}^s \\
 & BP_{Class3,s} \leq P_{b,Class3,0}^s \\
 & g_{1,s}^1 > 1 \\
 & g_{1,s}^2 > 1 \\
 & g_{1,s}^1 + g_{2,s}^1 < N_1 - 1 \\
 & g_{1,s}^2 + g_{2,s}^2 < N_2 - 1 \\
 & g_{1,s}^1 < g_{2,s}^1 \\
 & g_{1,s}^2 < g_{2,s}^2 \\
 & g_{1,s}^1, g_{1,s}^2, g_{2,s}^1, g_{2,s}^2 \in \mathbb{Z}^+
 \end{aligned} \tag{79}$$

Με δεδομένη τώρα τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης πόρων που προκύπτει από την επίλυση του προβλήματος (79), υπολογίζονται τα δυο μέτρα απόδοσης τα οποία παρουσιάστηκαν και στην ομογενή περίπτωση. Όσον αφορά στο διαχειριστή των χώρων στάθμευσης, θεωρείται το αντίτιμο c_1 για την Class 1 και το αντίτιμο c_2 για την Class 2, με $c_1 > c_2$ καθώς και c_3 το αντίτιμο για τους πελάτες της Class 3, με $c_1 > c_2 > c_3$. Αυτό συμβαίνει, διότι για την Class 1 ο διαχειριστής των χώρων στάθμευσης εγγυάται μεγαλύτερη διαθεσιμότητα θέσεων σε σχέση με όλες τις υπόλοιπες κατηγορίες πελατών (Class 2 και Class 3) και αντίστοιχα εγγυάται μεγαλύτερη διαθεσιμότητα θέσεων για την Class 2 συγκριτικά με την Class 3. Με βάση αυτό, ορίζεται το Συνολικό Αναμενόμενο Ωριαίο Κέρδος για τη περίοδο 0 ως:

$$TEHP^0 = \sum_{i=1}^k \lambda_{Class i}^0 \cdot (1 - BP_{Class i,0}) \cdot c_i, i \in \{1,2,3\} \tag{80}$$

όπου με $\lambda_{Class i}^0$ συμβολίζεται ο αριθμός των αφίξεων της Class i στη περίοδο 0, με $BP_{Class i,0}$ η πιθανότητα να μπλοκαρισθεί η Class i στη περίοδο 0 και το $TEHP^0$ συμβολίζει το Αναμενόμενο Ωριαίο Κέρδος στη περίοδο 0.

Και για τη περίοδο 1 διαμορφώνεται ως εξής:

$$TEHP^1 = \sum_{i=1}^k \lambda_{Class\ i}^1 \cdot (1 - BP_{Class\ i,1}) \cdot c_i, \quad i \in \{1,2,3\} \quad (81)$$

όπου με $\lambda_{Class\ i}^1$ συμβολίζεται ο αριθμός των αφίξεων της Class i στη περίοδο 1, με $BP_{Class\ i,1}$ η βέλτιστη πιθανότητα να μπλοκαρισθεί η Class i στη περίοδο 1 και το $TEHP^1$ συμβολίζει το Αναμενόμενο Ωριαίο Κέρδος στη περίοδο 1. Να τονιστεί σε αυτό το σημείο ότι οι υπολογισμοί για το Αναμενόμενο Ωριαίο Κέρδος έγιναν με βάση τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων για καθένα από τα P1,P2.

τέλος για τη περίοδο 2 διαμορφώνεται ως εξής:

$$TEHP^2 = \sum_{i=1}^k \lambda_{Class\ i}^2 \cdot (1 - BP_{Class\ i,2}) \cdot c_i, \quad i \in \{1,2,3\} \quad (82)$$

όπου με $\lambda_{Class\ i}^2$ συμβολίζεται ο αριθμός των αφίξεων της Class i στη περίοδο 2, με $BP_{Class\ i,2}$ η βέλτιστη πιθανότητα να μπλοκαρισθεί η Class i στη περίοδο 2 και το $TEHP^2$ συμβολίζει το Αναμενόμενο Ωριαίο Κέρδος στη περίοδο 2. Να τονιστεί σε αυτό το σημείο ότι οι υπολογισμοί για το Αναμενόμενο Ωριαίο Κέρδος έγιναν με βάση τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων για καθένα από τα P1,P2.

Αντίστοιχα, από την πλευρά των πελατών εντοπίζεται μια σημαντική διαφορά στη περίπτωση που εξυπηρετηθούν από το P1 σε αντίθεση με το P2. Αυτό συμβαίνει διότι, το δεύτερο μέτρο που εξετάζεται υπολογίζει την απόσταση που έχει να διανύσει ο κάθε πελάτης από οποιοδήποτε από τα P1 και P2 μέχρι τον τερματικό σταθμό. Το μέτρο αυτό ορίζεται ως ο Αναμενόμενος Χρόνος Βαδίσματος η αλλιώς Exprected Walking Time και περιγράφεται με τον εξής τύπο για τη περίοδο 0:

$$EWT_{Class\ i,0} = \left(1 - (BP_{Class\ i,0}^{P1} - BP_{Class\ i,0})\right) \cdot w_1 + (BP_{Class\ i,0}^{P2} - BP_{Class\ i,0}) \cdot w_2, \quad i \in \{1,2,3\} \quad (83)$$

όπου με $BP_{Class\ i,0}^{P1}$ συμβολίζεται η πιθανότητα να μπλοκαρισθεί η Class i στο P1 στη περίοδο 0, με $BP_{Class\ i,0}^{P2}$ η πιθανότητα να μπλοκαρισθεί η Class i στο P2 στη περίοδο 0 και με $EWT_{Class\ i,0}$ συμβολίζεται ο Αναμενόμενος Χρόνος Βαδίσματος στη περίοδο 0. Επίσης με w_1 και w_2 συμβολίζονται ο χρόνος βαδίσματος που χρειάζεται ο πελάτης για να φτάσει στον τερματικό σταθμό από τους χώρους P1 και P2 αντίστοιχα και θεωρείται ότι έχει την ίδια τιμή και στις τρεις περιόδους. Να προσθέσουμε επίσης, το γεγονός ότι εάν ένας πελάτης βρεθεί στην κατάσταση να περπατήσει χρόνο w_2 σημαίνει ότι έχει αποκλειστεί από το P1 και φτάνει στο τερματικό σταθμό μέσω του P2. Επιπρόσθετα επισημαίνεται ότι σε αυτό το σημείο ότι οι υπολογισμοί για τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος έγιναν με βάση τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων για καθένα από τα P1,P2.

Και για τη περίοδο 1 έχει την μορφή:

$$EWT_{Class\ i,1} = \left(1 - (BP_{Class\ i,1}^{P1} - BP_{Class\ i,1})\right) \cdot w_1 + (BP_{Class\ i,1}^{P2} - BP_{Class\ i,1}) \cdot w_2, i \in \{1,2,3\} \quad (84)$$

όπου με $BP_{Class\ i,1}^{P1}$ συμβολίζεται η πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class i στο P1 στη περίοδο 1, με $BP_{Class\ i,1}^{P2}$ η πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class i στο P2 στη περίοδο 1 και με $EWT_{Class\ i,1}$ συμβολίζεται ο Αναμενόμενος Χρόνος Βαδίσματος στη περίοδο 1. Επίσης με w_1 και w_2 συμβολίζονται ο χρόνος βαδίσματος που χρειάζεται ο πελάτης για να φτάσει στον τερματικό σταθμό από τους χώρους P1 και P2 αντίστοιχα και θεωρείται ότι έχει την ίδια τιμή και στις τρεις περιόδους. Να προσθέσουμε επίσης, το γεγονός ότι εάν ένας πελάτης βρεθεί στην κατάσταση να περπατήσει χρόνο w_2 σημαίνει ότι έχει αποκλειστεί από το P1 και φτάνει στο τερματικό σταθμό μέσω του P2. Επιπρόσθετα επισημαίνεται ότι σε αυτό το σημείο ότι οι υπολογισμοί για τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος έγιναν με βάση τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων για καθένα από τα P1,P2.

τέλος, για την περίοδο 2 οι τύποι έχουν ως εξής:

$$EWT_{Class\ i,2} = \left(1 - (BP_{Class\ i,2}^{P1} - BP_{Class\ i,2})\right) \cdot w_1 + (BP_{Class\ i,2}^{P2} - BP_{Class\ i,2}) \cdot w_2, i \in \{1,2,3\} \quad (85)$$

όπου με $BP_{Class\ i,2}^{P1}$ συμβολίζεται η πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class i στο P1 στη περίοδο 2, με $BP_{Class\ i,2}^{P2}$ η πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class i στο P2 στη περίοδο 2 και με $EWT_{Class\ i,2}$ συμβολίζεται ο Αναμενόμενος Χρόνος Βαδίσματος στη περίοδο 2. Επίσης με w_1 και w_2 συμβολίζονται ο χρόνος βαδίσματος που χρειάζεται ο πελάτης για να φτάσει στον τερματικό σταθμό από τους χώρους P1 και P2 αντίστοιχα και θεωρείται ότι έχει την ίδια τιμή και στις τρεις περιόδους. Να προσθέσουμε επίσης, το γεγονός ότι εάν ένας πελάτης βρεθεί στην κατάσταση να περπατήσει χρόνο w_2 σημαίνει ότι έχει αποκλειστεί από το P1 και φτάνει στο τερματικό σταθμό μέσω του P2. Επιπρόσθετα επισημαίνεται ότι σε αυτό το σημείο ότι οι υπολογισμοί για τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος έγιναν με βάση τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων για καθένα από τα P1,P2.

4.3.3 Γενική περίπτωση k κλάσεων πελατών (CNHMC)

Ακολουθώντας την ίδια λογική μοντελοποίησης για τη περίπτωση δύο χώρων στάθμευσης, περνάμε σε μια γενική μορφή των αποτελεσμάτων που έχουν συλλεχθεί και μελετάται η περίπτωση που αναφέρεται σε k κλάσεις πελατών. Έτσι, η πιθανότητα να μην έχει πρόσβαση η Class 1 στο χώρο στάθμευσης P1 δίνεται από τη σχέση:

$$BP_{Class\ 1,s}^{P1} = \sum_{j=0}^{N_2} \pi_s(0, j) \quad (86)$$

όπου με $BP_{Class1,s}^{P1}$ συμβολίζεται η πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class 1 στο P1 στην s περίοδο και με $\pi_s(0,j)$ συμβολίζεται η στάσιμη πιθανότητα της κατάστασης $(0,j)$ στην s περίοδο.

Η αντίστοιχη πιθανότητα για την Class i , με $i \in \{2,3, \dots, k\}$ είναι:

$$BP_{Classi,s}^{P1} = \sum_{i=0}^{\sum_{m=k-(i-1)}^{k-1} g_{m,s}^1} \sum_{j=\sum_{l=k-(i-1)}^{k-1} g_{l,s}^2+1}^{N_2} \pi_s(i,j) \quad (87)$$

όπου με BP_{Classi}^{P1s} συμβολίζεται η πιθανότητα να μπλοκαριστεί η Class i στο P1 στη s περίοδο και με $\pi_s(i,j)$ συμβολίζεται η στάσιμη πιθανότητα της κατάστασης (i,j) στην s περίοδο.

Η πιθανότητα τώρα να μην βρει ελεύθερη θέση στάθμευσης στο χώρο στάθμευσης P2 (που ισοδυναμεί με την πιθανότητα να χαθεί ουσιαστικά) ένας πελάτης της Class 1 στην περίοδο s , είναι:

$$BP_{Class1,s} \equiv BP_{Class2,s}^{P1} = \pi_s(0,0) \quad (88)$$

και η αντίστοιχη πιθανότητα για την Class i , με $i \in \{2,3, \dots, k\}$ είναι:

$$BP_{Classi,s} = \sum_{i=0}^{\sum_{m=k-(i-1)}^{k-1} g_{m,s}^1} \sum_{j=0}^{\sum_{m=k-(i-1)}^{k-1} g_{m,s}^2} \pi_s(i,j) \quad (89)$$

Το πρόβλημα αυτό έχει την ακόλουθη μορφή για κάθε περίοδο $s \in \{0,1,2\}$:

$$\begin{aligned} & \min BP_{Class1,s}(g_{1,s}^1, g_{2,s}^1, \dots, g_{k-1,s}^1, g_{1,s}^2, g_{2,s}^2, \dots, g_{k-1,s}^2) \\ & \text{s. t. } BP_{Class1,s} \leq P_{b,Classi,0}^s \quad 2 \leq i \leq k \\ & \quad g_{i,s}^1 < g_{i+1,s}^1 \quad 1 \leq i \leq k-2 \\ & \quad g_{i,s}^2 < g_{i+1,s}^2 \quad 1 \leq i \leq k-2 \\ & \quad \sum_{i=1}^{k-1} g_{i,s}^1 < N_1 - 1 \\ & \quad \sum_{i=1}^{k-1} g_{i,s}^2 < N_2 - 1 \quad (90) \\ & \quad g_{i,s}^1 > 1 \quad 1 \leq i \leq k-1 \\ & \quad g_{i,s}^2 > 1 \quad 1 \leq i \leq k-1 \\ & \quad g_{i,s}^1, g_{i,s}^2 \in \mathbb{Z}^+ \quad 1 \leq i \leq k-1 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, και με δεδομένη τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων στάθμευσης για τις κλάσεις υψηλότερης προτεραιότητας $(g_{1,s}^1, g_{2,s}^1, \dots, g_{k-1,s}^1, g_{1,s}^2, g_{2,s}^2, \dots, g_{k-1,s}^2)$, το Συνολικό Αναμενόμενο Ωριαίο Κέρδος ή Total Expected Hourly Profit για την περίοδο s , διαμορφώνεται ως εξής:

$$TEHP^s = \sum_{i=1}^k \lambda_{Class\ i}^s \cdot (1 - BP_{Class\ i,s}) \cdot c_i, \quad s = 0,1,2 \quad (91)$$

Ενώ ο Αναμενόμενος Χρόνος Βαδίσματος από το χώρο στάθμευσης έως τον τερματικό σταθμό ή Expected Walking Time για την περίοδο s , υπολογίζεται από τον εξής τύπο:

$$EWT_{Class\ i,s} = (1 - (BP_{Class\ i,s}^{P1} - BP_{Class\ i,s})) \cdot w_1 + (BP_{Class\ i,s}^{P1} - BP_{Class\ i,s}) \cdot w_2, \quad s = 0,1,2 \quad (92)$$

Συνοψίζοντας να σημειωθεί ότι τα προβλήματα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης που παρουσιάστηκαν είναι προβλήματα των οποίων η πολυπλοκότητα, άρα και η δυσκολία επίλυσης, αυξάνει με την αύξηση του αριθμού των κλάσεων. Ωστόσο, επειδή σε πραγματικά προβλήματα δεν συναντάμε συνήθως πάνω από 4 ή 5 κλάσεις πελατών, τα προβλήματα τα οποία μελετήθηκαν στη παρούσα εργασία επιλύθηκαν χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο που στηρίζεται στην αναλυτική αναζήτηση. Για αριθμό κλάσεων έως και 4 (πειράματα που έχουν γίνει) ο αλγόριθμός αυτός δίνει αποτελέσματα σε πολύ μικρό χρόνο.

Κεφάλαιο 5: Αριθμητικά αποτελέσματα

5.1 Αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση της μοντελοποίησης με τη χρήση ομογενών Μαρκοβιανών αλυσίδων

5.1.1 Αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση δύο κλάσεων πελατών (HMC)

Στην ενότητα αυτή, παραθέτουμε τα δεδομένα τα οποία χρησιμοποιήθηκαν με σκοπό την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής δέσμευσης πόρων για τις κλάσεις προτεραιότητας, τις αντίστοιχες πιθανότητες αποκλεισμού για κάθε κλάση, το αναμενόμενο ωριαίο κέρδος για την εταιρία και τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος για κάθε κλάση, σε κάθε περίπτωση. Η πρώτη περίπτωση που μελετήθηκε αφορά τη μοντελοποίηση του συστήματος έχοντας δυο κλάσεις πελατών. Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται οι αρχικές τιμές των παραμέτρων του προβλήματος:

N_1	10
N_2	15
$\lambda_{Class 1}$	$0.5h^{-1}$
$\lambda_{Class 2}$	$1h^{-1}$
μ	$2.5h^{-1}$

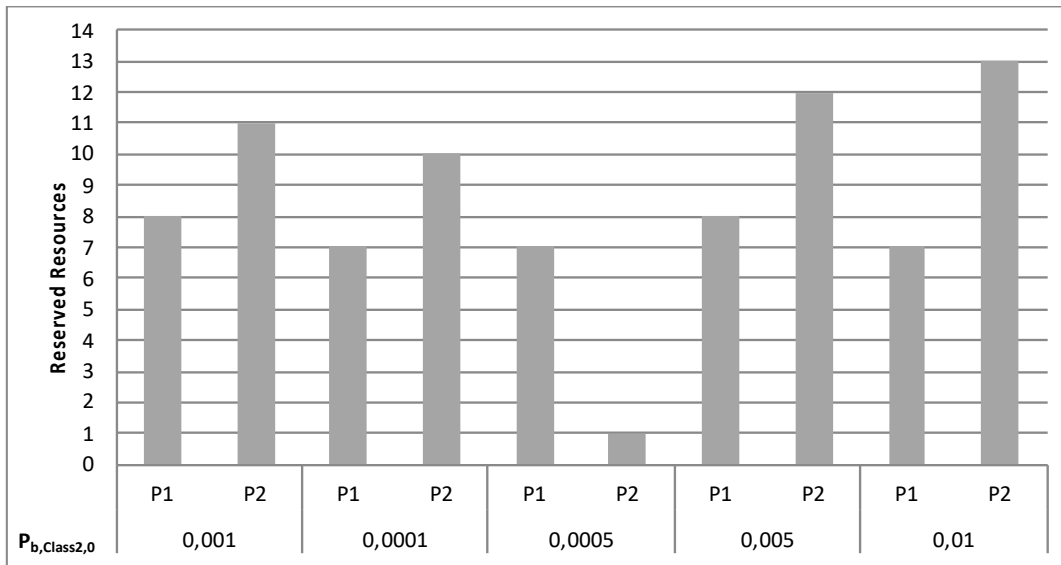
Πίνακας 2: Αρχικές τιμές παραμέτρων στη περίπτωση 2P2C

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης της εξίσωσης (19) για κάθε ανώτατο όριο πιθανότητας αποκλεισμού $P_{b,Class 2}^0$ της Class 2 φαίνονται στον Πίνακα 3. Ο πίνακας παρέχει για κάθε τιμή $P_{b,Class 2}^0$ τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων στάθμευσης για την Class 1 σε κάθε χώρο στάθμευσης, τις αντίστοιχες βέλτιστες τιμές για τις πιθανότητες αποκλεισμού κάθε κλάσης, καθώς και το αναμενόμενο ωριαίο κέρδος της εταιρίας και τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος για κάθε κλάση. Επιπρόσθετα, η τιμή του εισιτηρίου για την Class 1 είναι $c_1 = 8$ m.u. και για την Class 2 είναι $c_2 = 6$ m.u.

$P_{b,Class 2}^0$	g_1^*	g_1^{2*}	$P_{b,Class 1}^{P1*}$	$P_{b,Class 2}^{P1*}$	$P_{b,Class 1}^*$	$P_{b,Class 2}^*$	$EWT_{Class 1}$	$EWT_{Class 2}$	TEHP
0.001	8	11	4.4956×10^{-7}	0.2189	1.044×10^{-5}	6.5980×10^{-4}	5.0000	6.0928	9.9960
0.0001	7	10	1.2398×10^{-6}	0.1210	1.0318×10^{-18}	8.946×10^{-5}	5.000	5.6048	9.9995
0.0005	7	11	1.2398×10^{-6}	0.1207	2.7167×10^{-19}	3.5487×10^{-4}	5.000	5.6032	9.9979
0.005	8	12	4.4956×10^{-7}	0.2169	2.5371×10^{-20}	0.0026	5.000	6.0787	9.9842
0.01	7	13	1.2398×10^{-6}	0.1152	1.7001×10^{-20}	0.0058	5.000	5.5695	9.9650

Πίνακας 3: Αποτελέσματα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης για τη περίπτωση 2P2C

Τα αποτελέσματα του Πίνακα 3 αναπαρίστανται γραφικά και στο Σχήμα 4:



Σχήμα 4: Διαγραμματική απεικόνιση των βέλτιστων πολιτικών δέσμευσης πόρων για κάθε $P_{b,Class2,0}^0$, για τη περίπτωση 2P2C

Αρχικά, από τα αποτελέσματα του Πίνακα 3, παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται το όριο $P_{b,Class2,0}^0$, δηλαδή όσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα αποκλεισμού της Class 2, μειώνεται η πιθανότητα αποκλεισμού της Class 1 κάτι το οποίο είναι λογικό αφού σε αυτήν τη περίπτωση η Class 1 μπορεί να εκμεταλλευτεί περισσότερες θέσεις στάθμευσης. Η αύξηση του $P_{b,Class2,0}^0$ ωστόσο, οδηγεί σε μικρή μείωση του αναμενόμενου ωριαίου κέρδους καθώς αυτή η αύξηση υποδεικνύει των αποκλεισμό περισσότερων πελατών της Class 2. Να σημειωθεί ότι η μείωση αυτή είναι μικρή καθώς καταφέρνει να εξισορροπηθεί από το γεγονός ότι περισσότεροι πελάτες της Class 1 εκμεταλλεύονται τις θέσεις στάθμευσης. Τέλος, η αύξηση του $P_{b,Class2,0}^0$ δεν μπορεί να οδηγήσει σε ασφαλή συμπεράσματα για τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος της Class 2, καθώς αυτός παρουσιάζει αυξομειώσεις. Αυτό όμως που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι η αύξηση των δεσμευμένων θέσεων για την Class 1 στον χώρο P1, g_1^{1*} , οδηγεί σε αύξηση του αναμενόμενου χρόνου βαδίσματος για την Class 2, αφού κάτι τέτοιο υποδεικνύει ότι περισσότεροι πελάτες της κλάσης αυτής στέλνονται στο P2 που είναι πιο μακριά από τον τερματικό σταθμό.

Επίσης από το Σχήμα 4, παρατηρείται ότι η αύξηση του $P_{b,Class2,0}^0$ οδηγεί κατά κύριο λόγο σε αύξηση του βέλτιστου αριθμού δεσμευμένων θέσεων για την Class 1 στο P2, αφού σε αυτήν τη περίπτωση μειώνεται το ενδιαφέρον της εταιρίας για τους πελάτες της Class 2 και κατά συνέπεια έχει τη δυνατότητα να παραχωρήσει περισσότερες θέσεις αποκλειστικά για την Class 1.

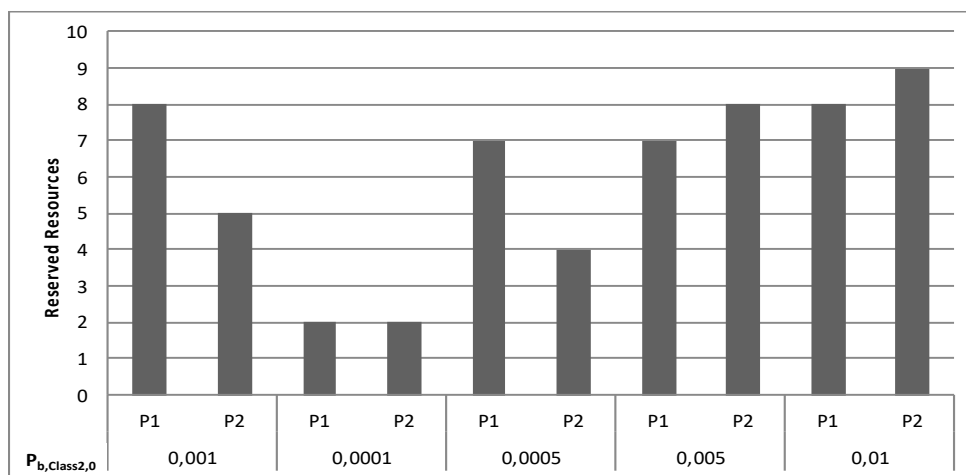
Στη συνέχεια γίνεται αναφορά στη μελέτη που διεξήχθη όσον αφορά τη συμπεριφορά των λύσεων και την ανοχή τους στην αύξηση της κίνησης των πελατών. Συγκεκριμένα, διπλασιάστηκε ο ρυθμός άφιξης κάθε κλάσης ώστε να φανεί πως αυτό επηρεάζει τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης πόρων για την Class 1, τις πιθανότητες αποκλεισμού αλλά και το αναμενόμενο ωριαίο κέρδος της εταιρίας καθώς και τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος. Οι τιμές των παραμέτρων για αυτήν την περίπτωση δίνονται στον Πίνακα 4, ενώ τα αποτελέσματα της πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης δίνονται στον Πίνακα 5 και στο Σχήμα 5.

N_1	10
N_2	15
$\lambda_{class 1}$	$1h^{-1}$
$\lambda_{class 2}$	$2h^{-1}$
μ	$2.5h^{-1}$

Πίνακας 4: Τιμές παραμέτρων στην περίπτωση 2P2C με διπλάσια κίνηση

$P_{b,Class 2}^0$	g_1^*	g_2^*	$PP_{b,Class 1}^1$	$PP_{b,Class 2}^1$	$P_{b,Class 1}^*$	$P_{b,Class 2}^*$	$EWT_{Class 1}$	$EWT_{Class 2}$	$TEHP$
0.001	8	5	2.0518×10^{-4}	0.5207	1.1775×10^{-9}	9.8893×10^{-4}	5.0010	7.5983	19.9881
0.0001	2	2	0.0296	0.2889	1.4943×10^{-6}	1.6393×10^{-4}	5.1482	6.4439	19.9980
0.0005	7	4	4.3435×10^{-4}	0.4411	7.0510×10^{-9}	4.4481×10^{-4}	5.0022	7.2036	19.9947
0.005	7	8	4.3435×10^{-4}	0.4375	6.0308×10^{-11}	0.0040	5.0222	7.1699	19.9515
0.01	8	9	2.0518×10^{-4}	0.5128	8.8139×10^{-12}	0.0088	5.0010	7.5189	19.8940

Πίνακας 5: Αποτελέσματα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης για τη περίπτωση 2P2C με διπλάσια κίνηση



Σχήμα 5. Διαγραμματική απεικόνιση των βέλτιστων πολιτικών δέσμευσης πόρων για κάθε $P_{b,Class 2}^0$, για την περίπτωση 2P2C με διπλάσια κίνηση.

Από τον Πίνακα 5 και το Σχήμα 5, παρατηρείται ότι η αύξηση της κίνησης έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση των πόρων που δεσμεύονται για την Class 1 και ειδικότερα στο χώρο P2, καθώς η αυξημένη κίνηση έχει σαν αποτέλεσμα να μην αλλάζει ουσιαστικά ο τρόπος με τον οποίο εξυπηρετούνται οι πελάτες της κλάσης αυτής στο P1, αλλά να δεσμεύονται λιγότερες θέσεις για αυτούς στο P2 έτσι ώστε το σύστημα να

μπορεί να ανταποκριθεί και στην αυξημένη κίνηση για την Class 2. Επιπρόσθετα παρατηρείται ότι η αυξημένη κίνηση έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της πιθανότητας αποκλεισμού για κάθε κλάση σε κάθε χώρο στάθμευσης, αφού ουσιαστικά η εταιρία θα πρέπει με τον ίδιο αριθμό θέσεων να εξυπηρετήσει το διπλάσιο αριθμό πελατών. Μια ακόμη παρατήρηση έχει να κάνει με την αύξηση του αναμενόμενου χρόνου βαδίσματος για κάθε κλάση. Αυτό προκύπτει από την αύξηση της πιθανότητας αποκλεισμού κάθε κλάσης στον χώρο P1, γεγονός που οδηγεί περισσότερους πελάτες στο χώρο P2 και άρα αυξάνει το συνολικό αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος. Τέλος, όπως είναι αναμενόμενο, ο διπλασιασμός της κίνησης οδηγεί σε αύξηση του αναμενόμενου ωριαίου κέρδους για την εταιρία.

5.1.2 Αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση τριών κλάσεων πελατών (HMC)

Συνεχίζοντας με τη παρουσίαση των αποτελεσμάτων, παρακάτω δίνεται η περίπτωση των δυο χώρων στάθμευσης στη περίπτωση των τριών κλάσεων πελατών. Τα αρχικά δεδομένα που εισήχθησαν παρατίθενται στον πίνακα παρακάτω:

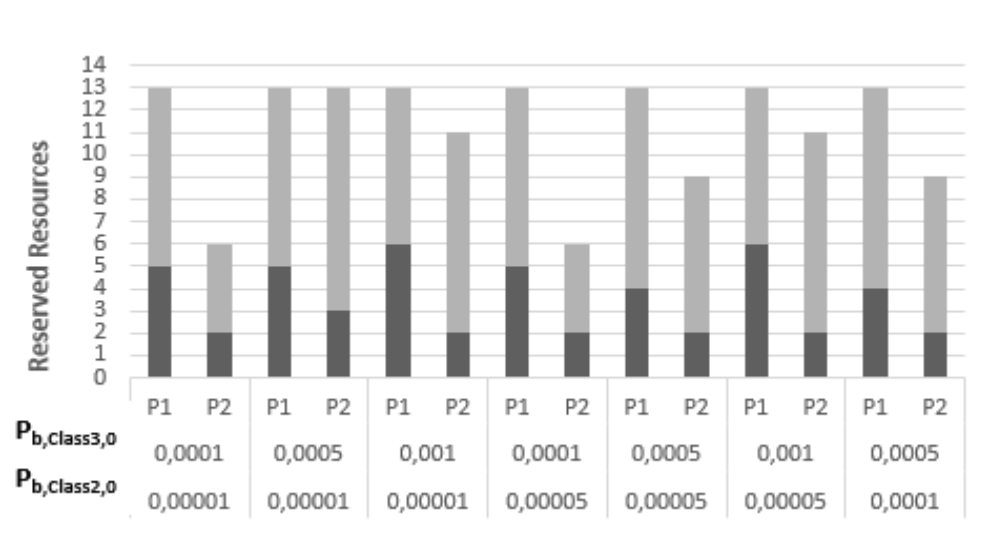
N_1	15
N_2	20
λ_{class1}	$0.5h^{-1}$
λ_{class2}	$1h^{-1}$
λ_{class3}	$1.5h^{-1}$
μ	$2.5h^{-1}$

Πίνακας 6: Αρχικές τιμές παραμέτρων στη περίπτωση 2P3C

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν έπειτα από την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης της εξίσωσης (28) για κάθε ανώτατο όριο πιθανότητας αποκλεισμού $P_{b,Class 2}^0$ της Class 2 και $P_{b,Class 3}^0$ της Class 3 φαίνονται στον Πίνακα 7. Ο πίνακας παρέχει για κάθε τιμή $P_{b,Class 2}^0$ και $P_{b,Class 3}^0$ τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων στάθμευσης για την Class 1, τις αντίστοιχες βέλτιστες τιμές για τις πιθανότητες αποκλεισμού των Class 2, Class 3 καθώς και το αναμενόμενο ωριαίο κέρδος της εταιρίας και τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος για κάθε κλάση. Επιπρόσθετα, η τιμή του εισιτηρίου για την Class 1 είναι $c_1 = 8$ m.u. για την Class 2 είναι $c_2 = 6$ m.u. και για την Class 3 είναι $c_3 = 5$ m.u. Τα αποτελέσματα του Πίνακα 7 παρουσιάζονται επίσης και στο Σχήμα 6:

$P_{b,Class 2}^0$	$P_{b,Class 3}^0$	$[g_1^1, g_2^1]^*$	$[g_1^2, g_2^2]^*$	$P_{b,Class 1}^{P1}$	$P_{b,Class 2}^{P1}$	$P_{b,Class 3}^{P1}$	$P_{b,Class 1}^*$	$P_{b,Class 2}^*$	$P_{b,Class 3}^*$	$EWT_{Class 1}$	$EWT_{Class 2}$	$EWT_{Class 3}$	$TEHP$
0.00001	0.0001	[5,8]	[2,4]	6.63×10^{-15}	1.13×10^{-6}	7.93×10^{-5}	5.06×10^{-8}	0.0247	0.6112	5.000	5.1236	8.0557	17.4994
0.00001	0.0005	[4,9]	[2,7]	8.10×10^{-18}	7.99×10^{-6}	4.92×10^{-4}	1.71×10^{-8}	0.0419	0.6043	5.000	5.2095	8.0125	17.4963
0.00001	0.001	[6,7]	[2,9]	1.14×10^{-18}	8.87×10^{-6}	9.82×10^{-4}	1.50×10^{-7}	0.0147	0.6141	5.000	5.0734	8.0646	17.4926
0.00005	0.0001	[5,8]	[2,4]	6.63×10^{-15}	1.13×10^{-6}	7.93×10^{-5}	5.06×10^{-8}	0.0247	0.6112	5.000	5.1236	8.0557	17.4994
0.00005	0.0005	[4,9]	[2,7]	8.10×10^{-18}	7.99×10^{-6}	4.92×10^{-4}	1.71×10^{-8}	0.0419	0.6043	5.000	5.2095	8.0125	17.4963
0.00005	0.001	[6,7]	[2,9]	1.14×10^{-18}	8.87×10^{-6}	9.82×10^{-4}	1.50×10^{-7}	0.0147	0.6141	5.000	5.0734	8.0646	17.4926
0.0001	0.0005	[4,9]	[2,7]	8.15×10^{-18}	7.99×10^{-6}	4.92×10^{-14}	1.71×10^{-8}	0.0419	0.6043	5.000	5.2095	8.0185	17.4963

Πίνακας 7: Αποτελέσματα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης για τη περίπτωση 2P3C



Σχήμα 6. Διαγραμματική απεικόνιση των βέλτιστων πολιτικών δέσμευσης πόρων για κάθε $P_{b,Class 2}^0$, $P_{b,Class 3}^0$ για τη περίπτωση 2P3C

Ξεκινώντας από τα αποτελέσματα του Πίνακα 7, παρατηρείται για τα όρια $P_{b,Class 2}^0, P_{b,Class 3}^0$ των Class 2 και Class 3 αντίστοιχα ότι όσο αυξάνονται, δηλαδή όσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα αποκλεισμού των Class 2 και Class 3 μειώνεται η πιθανότητα αποκλεισμού της Class 1 κάτι το οποίο είναι λογικό, αφού σε αυτή τη περίπτωση η Class 1 μπορεί να εκμεταλλευτεί περισσότερες θέσεις στάθμευσης στα P1 και P2. Η αύξηση των πιθανοτήτων αυτών, οδηγεί επίσης σε μικρή μείωση του αναμενόμενου ωριαίου κέρδους, καθώς υποδεικνύει των αποκλεισμό περισσότερων πελατών των Class 2 και Class 3. Να σημειωθεί ότι η μείωση αυτή είναι μικρή καθώς καταφέρνει να εξισορροπηθεί από το γεγονός ότι περισσότεροι πελάτες της Class 1 εκμεταλλεύονται τις θέσεις στάθμευσης. Επίσης, η αύξηση του $P_{b,Class 2}^0$ καθώς και του $P_{b,Class 3}^0$ δεν μπορεί να μας οδηγήσει σε ασφαλή συμπεράσματα για τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος των Class 2 και Class 3, καθώς παρουσιάζουν αυξομειώσεις. Η αύξηση των δεσμευμένων θέσεων για την Class 1 στον χώρο $P1, [g_1^1, g_2^1]$, δεν μας οδηγεί σε ασφαλή συμπεράσματα ούτε για την μεταβλητή του αναμενόμενου χρόνου βαδίσματος για τις Class 1 και Class 2. Η μόνη μεταβλητή που παρουσιάζει μια σχετική αύξηση είναι ο αναμενόμενος χρόνος βαδίσματος για την Class 3. Με άλλα λόγια αυτό μας δείχνει ότι περισσότεροι πελάτες της κλάσης αυτής μπλοκάρονται πρώτοι και στέλνονται στο P2 που είναι πιο μακριά από τον τερματικό σταθμό.

Επίσης από το Σχήμα 6 παρατηρείται ότι η αύξηση του $P_{b,Class 2}^0, P_{b,Class 3}^0$ οδηγεί κατά κύριο λόγο σε αύξηση του βέλτιστου αριθμού δεσμευμένων θέσεων για την Class 1 στο P2, αφού σε αυτή τη περίπτωση μειώνεται το ενδιαφέρον της εταιρίας για πελάτες των δυο άλλων κλάσεων και κατά συνέπεια μπορεί να παραχωρήσει περισσότερες θέσεις αποκλειστικά για την Class 1.

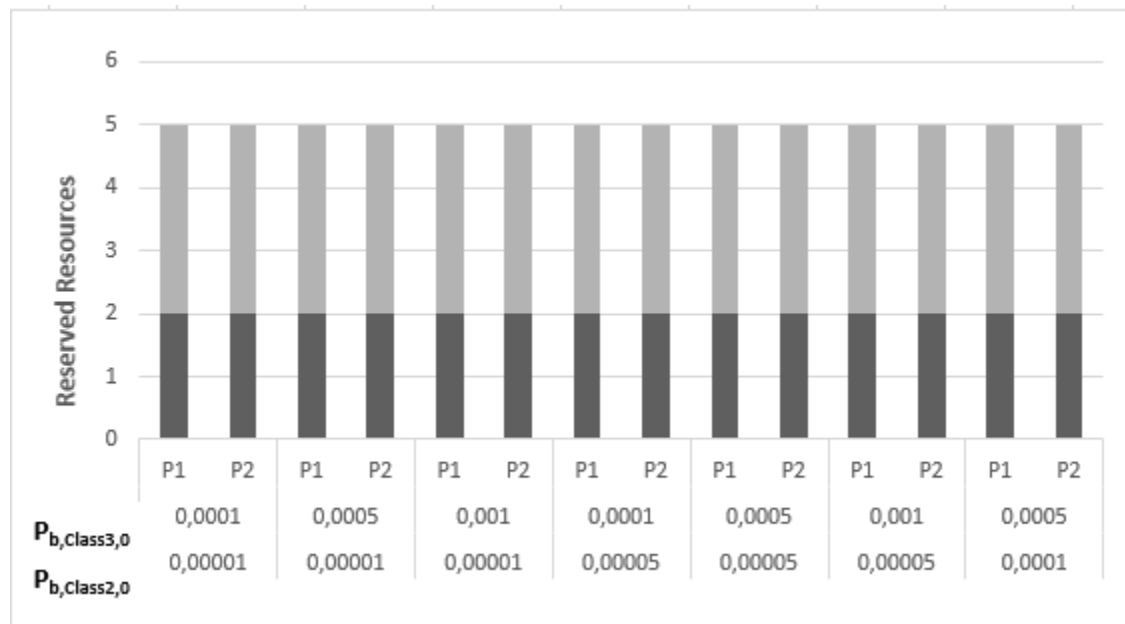
Στη συνέχεια αναλύεται η μελέτη της συμπεριφοράς των λύσεων και η ανοχή τους στην αύξηση της κίνησης των πελατών. Συγκεκριμένα, διπλασιάζεται ο ρυθμός άφιξης κάθε κλάσης ώστε να φανεί πως αυτό επηρεάζει τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης πόρων, τις πιθανότητες αποκλεισμού αλλά και το αναμενόμενο ωριαίο κέρδος της εταιρίας και τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος. Οι τιμές των παραμέτρων για αυτήν την περίπτωση δίνονται στον Πίνακα 8, ενώ τα αποτελέσματα της πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης δίνονται στον Πίνακα 9 και στο Σχήμα 7.

N_1	15
N_2	20
λ_{class1}	$1h^{-1}$
λ_{class2}	$2h^{-1}$
λ_{class3}	$3h^{-1}$
μ	$2.5h^{-1}$

Πίνακας 8: Τιμές παραμέτρων στην περίπτωση 2P3C με διπλάσια κίνηση

$P_{b,Class 2}^0$	$P_{b,Class 3}^0$	$[g_1^1, g_2^1]^*$	$[g_1^2, g_2^2]^*$	$P_{b,Class 1}^{P1*}$	$P_{b,Class 2}^{P1*}$	$P_{b,Class 3}^{P1*}$	$P_{b,Class 1}^*$	$P_{b,Class 2}^*$	$P_{b,Class 3}^*$	$EWT_{Class 1}$	$EWT_{Class 2}$	$EWT_{Class 3}$	$TEHP$
0.00001	0.0001	[2,3]	[2,3]	2.47×10^{-5}	0.0389	0.3177	0.0175	0.4063	0.5463	5.0877	6.8731	5.9960	29.767
0.0001	0.0005	[2,3]	[2,3]	2.47×10^{-5}	0.0389	0.3177	0.0175	0.4063	0.5463	5.0877	6.8731	5.9960	29.767
0.00001	0.0005	[2,3]	[2,3]	2.47×10^{-5}	0.0389	0.3177	0.0175	0.4063	0.5463	5.0877	6.8731	5.9960	29.767
0.00001	0.001	[2,3]	[2,3]	2.44×10^{-5}	0.0389	0.3177	0.0175	0.4063	0.5463	5.0877	6.8731	5.9960	29.767
0.00005	0.0001	[2,3]	[2,3]	2.47×10^{-5}	0.0389	0.3177	0.0175	0.4063	0.5463	5.0877	6.8731	5.9960	29.767
0.00005	0.0005	[2,3]	[2,3]	2.47×10^{-5}	0.0389	0.3177	0.0175	0.4063	0.5463	5.0877	6.8731	5.9960	29.767
0.00005	0.001	[2,3]	[2,3]	2.47×10^{-5}	0.0389	0.3177	0.0175	0.4063	0.5463	5.0877	6.8731	5.9960	29.767

Πίνακας 9: Αποτελέσματα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης για την περίπτωση 2P3C με διπλάσια κίνηση



Σχήμα 7. Διαγραμματική απεικόνιση των βέλτιστων πολιτικών δέσμευσης πόρων για κάθε $P_{b,Class 2}^0$, $P_{b,Class 3}^0$ για την περίπτωση 2P3C με διπλάσια κίνηση.

Από τον Πίνακα 9 και το Σχήμα 7, παρατηρείται ότι η αύξηση της κίνησης έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση των δεσμευμένων θέσεων, ειδικά στο P2, κάτι που είναι λογικό, καθώς θα πρέπει να μείνουν ελεύθερες περισσότερες θέσεις για να ανταποκριθεί το σύστημα στην αύξηση της κίνησης, ειδικά των κλάσεων μικρότερης προτεραιότητας. Άμεση συνέπεια αυτού είναι η μείωση των πιθανοτήτων αποκλεισμού για τις Class 1 και Class 2, αλλά και της αύξησης του μέσου χρόνου βαδίσματος για αυτές τις κλάσεις. Αντιθέτως, ο μέσος χρόνος βαδίσματος για την Class 3 μειώνεται αφού λόγω της μείωσης των δεσμευμένων θέσεων περισσότεροι πελάτες της Class 3 θα βρουν θέση στα P1 και P2. Τέλος, όπως είναι αναμενόμενο, η αύξηση της κίνησης οδηγεί σε αύξηση του κέρδους για την εταιρία.

5.1.3 Αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση τεσσάρων κλάσεων πελατών (HMC)

Με παρόμοιο τρόπο στον Πίνακα 10 παρουσιάζεται η περίπτωση των δυο χώρων στάθμευσης με τέσσερις κλάσεις πελατών. Οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν για τους υπολογισμούς είναι:

N_1	15
N_2	20
λ_{class1}	$1.5h^{-1}$
λ_{class2}	$1.9h^{-1}$
λ_{class3}	$2.3h^{-1}$
λ_{class4}	$2.7h^{-1}$
μ	$5h^{-1}$

Πίνακας 10: Αρχικές τιμές παραμέτρων στη περίπτωση 2P4C

Με όμοιο τρόπο όπως και στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης για κάθε ανώτατο όριο πιθανότητας αποκλεισμού $P_{b,Class 2}^0$ της Class 2, $P_{b,Class 3}^0$ της Class 3 καθώς και $P_{b,Class 4}^0$ της Class 4 στον Πίνακα 11. Ο πίνακας παρέχει για κάθε τιμή $P_{b,Class 2}^0, P_{b,Class 3}^0$ και $P_{b,Class 4}^0$ τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων στάθμευσης για την Class 1, τις αντίστοιχες βέλτιστες τιμές για τις πιθανότητες αποκλεισμού των Class 2, Class 3 καθώς και Class 4. Επιπρόσθετα, δίνεται και το αναμενόμενο ωριαίο κέρδος της εταιρίας καθώς και ο αναμενόμενος χρόνος βαδίσματος για κάθε κλάση. Τέλος, η τιμή του εισιτηρίου για την Class 1 είναι $c_1 = 8$ m.u. για την Class 2 είναι $c_2 = 7$ m.u. για την Class 3 είναι $c_3 = 6$ m.u. και για την Class 4 είναι $c_4 = 5$ m.u. .

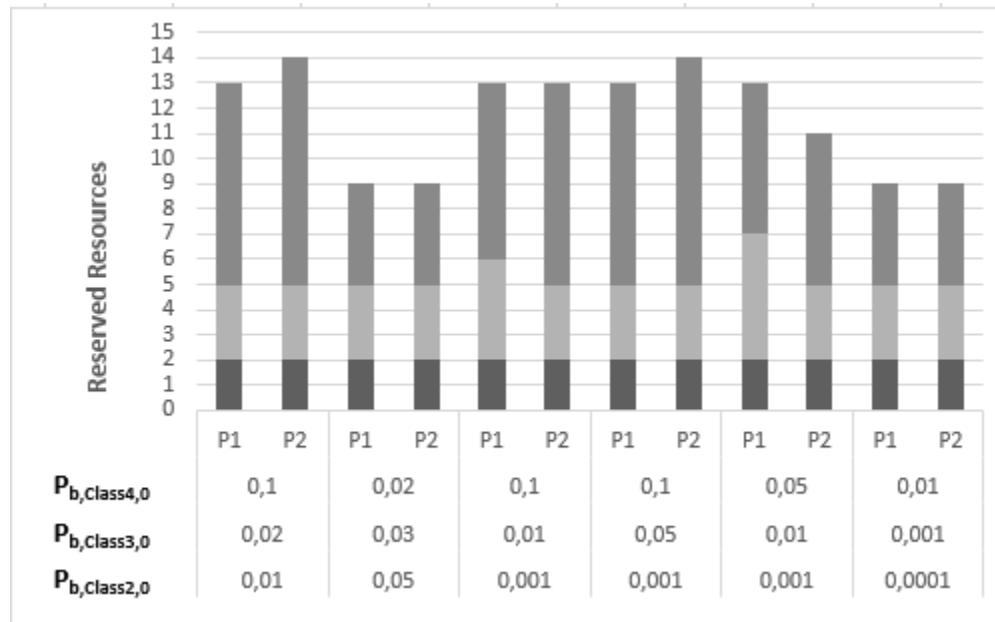
Παρατηρείται από τα αποτελέσματα του Πίνακα 11, ότι με την αύξηση των ορίων $P_{b,Class 2}^0, P_{b,Class 3}^0, P_{b,Class 4}^0$ μεγαλώνοντας δηλαδή τη πιθανότητα αποκλεισμού των κλάσεων 2,3 και 4 είναι ορατή και η μείωση της πιθανότητας αποκλεισμού της Class 1. Το γεγονός αυτό θεωρείται λογικό αφού σε αυτήν τη περίπτωση η Class 1 μπορεί να εκμεταλλευτεί περισσότερες θέσεις στάθμευσης. Επιπρόσθετα, η αύξηση

της πιθανότητας αποκλεισμού των τριών αυτών κλάσεων οδηγεί επίσης σε μικρή μείωση του αναμενόμενου ωριαίου κέρδους, καθώς αυτή η αύξηση υποδεικνύει των αποκλεισμό περισσότερων πελατών που ανήκουν σε αυτές τις κλάσεις. Ωστόσο, η μείωση αυτή είναι μικρή καθώς καταφέρνει να εξισορροπηθεί από το γεγονός ότι περισσότεροι πελάτες της Class 1 εκμεταλλεύονται τις θέσεις στάθμευσης. Τέλος, η αύξηση των $P_{b,Class 2}^0$, $P_{b,Class 3}^0$, $P_{b,Class 4}^0$ δεν οδηγεί σε ασφαλή συμπεράσματα για τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος των πελατών που ανήκουν στις Class 2, Class 3 καθώς αυτός παρουσιάζει αυξομειώσεις. Σε αντίθεση με αυτό, ο συνολικός χρόνος βαδίσματος της Class 4 παρουσιάζει μια ορατή αύξηση γεγονός που αποδίδεται στο ότι η κλάση αυτή μπλοκάρεται πρώτη από όλες και οι πελάτες που ανήκουν σε αυτή, στέλνονται πιο άμεσα στο P2 που βρίσκεται πιο μακριά από το τερματικό σταθμό.

Επίσης από το Σχήμα 8, παρατηρείται ότι η αύξηση των πιθανοτήτων $P_{b,Class 2}^0$, $P_{b,Class 3}^0$, $P_{b,Class 4}^0$ οδηγεί κατά κύριο λόγο σε αύξηση του βέλτιστου αριθμού δεσμευμένων θέσεων για την Class 1 στο P2, αφού σε αυτήν τη περίπτωση μειώνεται το ενδιαφέρον της εταιρίας για πελάτες των Class 2,3,4 και κατά συνέπεια μπορεί να παραχωρήσει περισσότερες θέσεις αποκλειστικά για την Class 1.

$P_{b,Class 2}^0$	$P_{b,Class 3}^0$	$P_{b,Class 4}^0$	$[g_1^1, g_2^1, g_3^1]^*$	$[g_1^2, g_2^2, g_3^2]^*$	$P_{b,Class 1}^{P1*}$	$P_{b,Class 2}^{P1*}$	$P_{b,Class 3}^{P1*}$	$P_{b,Class 4}^{P1*}$	$P_{b,Class 1}^{P2*}$	$P_{b,Class 2}^{P2*}$	$P_{b,Class 3}^{P2*}$	$P_{b,Class 4}^{P2*}$	$EWT_{Class 1}$	$EWT_{Class 2}$	$EWT_{Class 3}$	$EWT_{Class 4}$	$TEHP$
0.01	0.02	0.1	[2,3,8]	[2,3,9]	1.78×10^{-8}	7.84×10^{-5}	0.0133	0.0990	4.15×10^{-8}	0.0903	0.5083	0.7540	5.000	5.415	7.4741	8.0235	59.1816
0.05	0.03	0.02	[2,3,4]	[2,3,4]	8.05×10^{-10}	3.24×10^{-5}	0.0047	0.0334	4.78×10^{-4}	0.0842	0.4823	0.7633	5.0024	5.4211	7.3889	8.5616	60.3823
0.001	0.01	0.1	[2,4,7]	[2,3,8]	2.22×10^{-14}	4.67×10^{-5}	0.0098	0.0773	9.09×10^{-6}	0.0594	0.5277	0.7806	5.000	5.2969	7.5869	8.2997	59.5202
0.001	0.05	0.1	[2,3,8]	[2,3,9]	1.78×10^{-8}	7.84×10^{-5}	0.0133	0.0990	4.15×10^{-8}	0.0903	0.5083	0.7540	5.000	5.415	7.4741	8.0235	59.1816
0.001	0.01	0.05	[2,5,6]	[2,3,6]	1.60×10^{-12}	2.40×10^{-5}	0.0061	0.0498	2.01×10^{-5}	0.0395	0.5416	0.8112	5.001	5.1974	7.6753	8.6520	60.0955
0.0001	0.001	0.01	[2,3,4]	[2,3,4]	8.05×10^{-10}	3.24×10^{-5}	0.0047	0.0334	4.78×10^{-4}	0.0842	0.4823	0.7633	5.0024	5.4211	7.3889	8.5616	60.3823

Πίνακας 11: Αποτελέσματα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης για την περίπτωση 2P4C ($g^{1,*} = [g_1^1, g_2^1, g_3^1]^*$, $g^{2,*} = [g_1^2, g_2^2, g_3^2]^*$)



Σχήμα 8. Διαγραμματική απεικόνιση των βέλτιστων πολιτικών δέσμευσης πόρων για κάθε $P_{b,Class 2}^0$, $P_{b,Class 3}^0$, $P_{b,Class 4}^0$ για την περίπτωση 2P4C

Στη συνέχεια μελετήθηκε η συμπεριφορά των λύσεων και η ανοχή τους στην αύξηση της κίνησης των πελατών. Συγκεκριμένα, διπλασιάστηκε ο ρυθμός άφιξης κάθε κλάσης ώστε να φανεί πως αυτό επηρεάζει τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης πόρων, τις πιθανότητες αποκλεισμού αλλά και το αναμενόμενο ωριαίο κέρδος της εταιρίας και τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος. Οι τιμές των παραμέτρων για αυτήν την περίπτωση δίνονται στον Πίνακα 12, ενώ τα αποτελέσματα της πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης δίνονται στον Πίνακα 13 και στο Σχήμα 9.

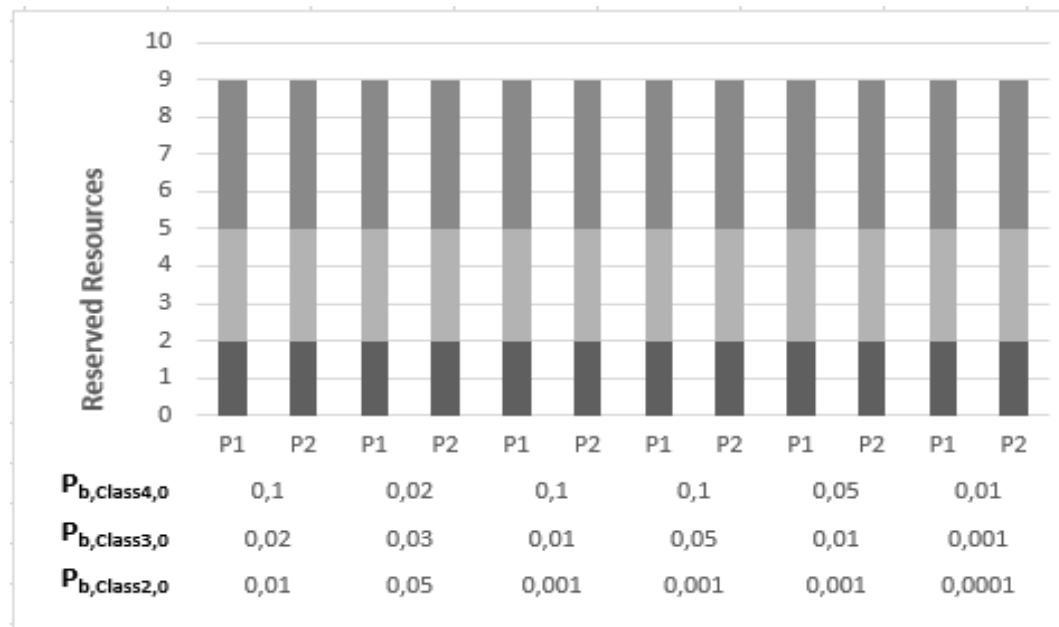
N_1	15
N_2	20
λ_{class1}	$3h^{-1}$
λ_{class2}	$3.8h^{-1}$
λ_{class3}	$4.6h^{-1}$
λ_{class4}	$5.4h^{-1}$
μ	$5h^{-1}$

Πίνακας 12: Τιμές παραμέτρων στη περίπτωση 2P4C με διπλάσια κίνηση

Από τον Πίνακα 13 και το Σχήμα 9, παρατηρείται ότι η αύξηση της κίνησης στο συγκεκριμένο παράδειγμα, όπως και στη περίπτωση των 3 κλάσεων, οδηγεί στη μείωση των δεσμευμένων θέσεων, κάτι που είναι λογικό, καθώς θα πρέπει να μείνουν ελεύθερες περισσότερες θέσεις για να ανταποκριθεί το σύστημα στην αύξηση της κίνησης, ειδικά των κλάσεων μικρότερης προτεραιότητας. Άμεση συνέπεια αυτού είναι η μείωση των πιθανοτήτων αποκλεισμού για όλες τις κλάσεις. Τέλος, όπως είναι αναμενόμενο, η αύξηση της κίνησης οδηγεί σε αύξηση του κέρδους για την εταιρία.

$P_{b,Class 2}^0$	$P_{b,Class 3}^0$	$P_{b,Class 4}^0$	$[g_1^1, g_2^1, g_3^1]^*$	$[g_1^2, g_2^2, g_3^2]^*$	$P_{b,Class 1}^{P1}$ *	$P_{b,Class 2}^{P1}$ *	$P_{b,Class 3}^{P1}$ *	$P_{b,Class 4}^{P1}$ *	$P_{b,Class 1}^*$	$P_{b,Class 2}^*$	$P_{b,Class 3}^*$	$P_{b,Class 4}^*$	$EWT_{Class 1}$	$EWT_{Class 2}$	$EWT_{Class 3}$	$EWT_{Class 4}$	$TEHP$
0.01	0.02	0.1	[2,3,4]	[2,3,4]	4.18×10^{-5}	0.0422	0.4620	0.8362	0.0304	0.4987	0.4716	0.1562	5.1520	7.2830	5.1793	4.4748	78.7477
0.05	0.03	0.02	[2,3,4]	[2,3,4]	4.18×10^{-5}	0.0422	0.4620	0.8362	0.0304	0.4987	0.4716	0.1562	5.1520	7.2830	5.1793	4.4748	78.7477
0.001	0.01	0.1	[2,3,4]	[2,3,4]	4.18×10^{-5}	0.0422	0.4620	0.8362	0.0304	0.4987	0.4716	0.1562	5.1520	7.2830	5.1793	4.4748	78.7477
0.001	0.05	0.1	[2,3,4]	[2,3,4]	4.18×10^{-5}	0.0422	0.4620	0.8362	0.0304	0.4987	0.4716	0.1562	5.1520	7.2830	5.1793	4.4748	78.7477
0.001	0.01	0.05	[2,3,4]	[2,3,4]	4.18×10^{-5}	0.0422	0.4620	0.8362	0.0304	0.4987	0.4716	0.1562	5.1520	7.2830	5.1793	4.4748	78.7477
0.0001	0.001	0.01	[2,3,4]	[2,3,4]	4.18×10^{-5}	0.0422	0.4620	0.8362	0.0304	0.4987	0.4716	0.1562	5.1520	7.2830	5.1793	4.4748	78.7477

Πίνακας 13: Αποτελέσματα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης για τη περίπτωση 2P4C με διπλάσια κίνηση



Σχήμα 9. Διαγραμματική απεικόνιση των βέλτιστων πολιτικών δέσμευσης πόρων για κάθε $P_{b,Class 2}^0$, $P_{b,Class 3}^0$, $P_{b,Class 4}^0$ για τη περίπτωση 2P4C με διπλάσια κίνηση.

5.2 Αριθμητικά αποτελέσματα για τη βελτιστοποίηση του αναμενόμενου κέρδους της εταιρείας διαχείρισης

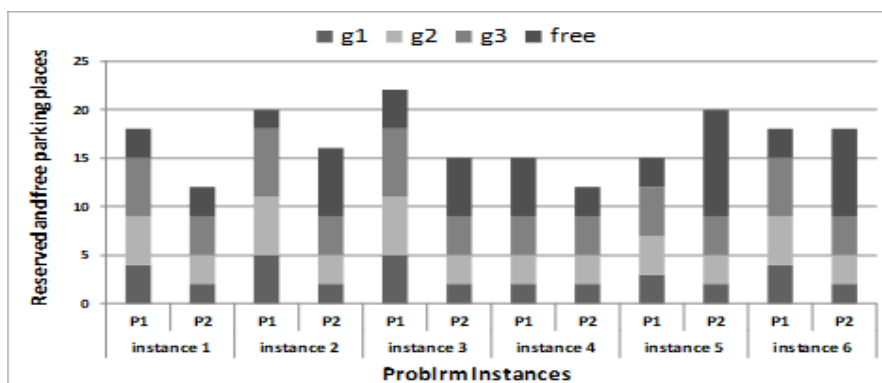
Όπως αναφέρθηκε και στο θεωρητικό κομμάτι της παρούσας εργασίας μία από τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν είχε ως βασικό στόχο να μεγιστοποιήσει το κέρδος της εταιρείας το οποίο προέρχεται από την πληρωμή των εισιτηρίων και αφορά τις κλάσεις για τις οποίες δεσμεύονται θέσεις. Στα αριθμητικά αποτελέσματα της περίπτωσης αυτής το μοντέλο που μελετήθηκε αποτελείται από τέσσερις κλάσεις πελατών ($k = 4$) και έχει έξι διαφορετικές υποπεριπτώσεις στις οποίες έχουν δοθεί διαφορετικές τιμές στις διαθέσιμες θέσεις κάθε χώρου στάθμευσης, στα ανώτατα όρια των blocking probabilities όλων των κλάσεων καθώς και στους ρυθμούς αναχωρήσεων και απελευθερώσεων των θέσεων στάθμευσης, με σκοπό να μελετηθεί η επίδραση όλων αυτών των παραμέτρων στη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων. Οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν δίνονται στον παρακάτω πίνακα, όπου οι τιμές των ρυθμών αφίξεων και του ρυθμού αναχώρησης είναι δοσμένες σε $days^{-1}$:

	N_1	N_2	λ_{class1}	λ_{class2}	λ_{class3}	λ_{class4}	μ	$P_{b,Class 1}^0$	$P_{b,Class 2}^0$	$P_{b,Class 3}^0$	$P_{b,Class 4}^0$	g^*	$TEDP^*$	$P_{b,Class 1}^*$	$P_{b,Class 2}^*$	$P_{b,Class 3}^*$	$P_{b,Class 4}^*$
I1	18	12	36	48	60	72	120	10^{-4}	0.001	0.05	0.5	(4,5,6,2,3,4)	1247.378	1.82×10^{-10}	9.07×10^{-5}	0.0261	0.24225
I2	20	16	28.8	43.2	48	52.8	96	10^{-4}	0.001	0.05	0.5	(5,6,7,2,3,4)	1051.379	5.70×10^{-11}	8.29×10^{-5}	0.015	0.11011
I3	22	15	43.2	48	52.8	72	120	10^{-4}	0.001	0.05	0.5	(5,6,7,2,3,4)	1310.282	3.60×10^{-10}	7.06×10^{-5}	0.0137	0.1215
I4	15	12	120	144	168	192	480	10^{-5}	0.001	0.01	0.1	(2,3,4,2,3,4)	3875.841	6.30×10^{-11}	8.55×10^{-6}	0.0037	0.05876
I5	15	20	120	144	168	192	480	10^{-5}	0.001	0.01	0.1	(3,4,5,2,3,4)	3934.863	7.05×10^{-13}	1.89×10^{-7}	0.00008	0.0011
I6	18	18	19.2	26.4	45.6	76.8	72	5×10^{-4}	0.005	0.05	0.5	(4,5,6,2,3,4)	858.0029	3.85×10^{-11}	6.01×10^{-5}	0.03968	0.33106
Ticket prices			$c_1 = 8, c_2 = 7, c_3 = 6, c_4 = 5$ (m.u)														

Πίνακας 14: Βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων στις έξι περιπτώσεις

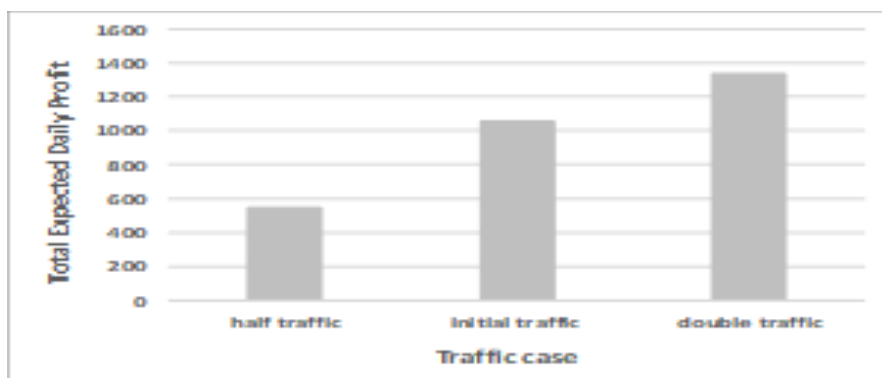
Το πρώτο διαφοροποιημένο στοιχείο που εντοπίζεται σε αυτή τη περίπτωση συγκριτικά με τις περιπτώσεις των Ομογενών Μαρκοβιανών Αλυσίδων καθώς και των Κυκλικών Μη Ομογενών Μαρκοβιανών Αλυσίδων, βρίσκεται στον υπολογισμό του αναμενόμενου κέρδους. Πιο συγκεκριμένα για τα αποτελέσματα που αφορούν στους ρυθμούς αφίξεων και αναχωρήσεων όλων των κλάσεων χρησιμοποιούνται ρυθμοί μετάβασης ανά ημέρα και όχι ανά ώρα όπως στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις. Αρχικά δίνονται οι τιμές για τη δυναμική των δυο χώρων και στη συνέχεια οι τιμές των ρυθμών αφίξεων και αναχωρήσεων. Ωστόσο το σημαντικότερο αποτέλεσμα που πηγάζει από τον Πίνακα 14 είναι η βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων g^* η οποία μεγιστοποιεί τα κέρδη της εταιρείας για τις συγκεκριμένες τιμές που δόθηκαν στο ανώτατο όριο $P_{b,Class i}^0$ για καθεμιά κλάση ξεχωριστά. Επιπρόσθετα, από τα δεδομένα αυτά αντλούνται και οι βέλτιστες τιμές των blocking probabilities για καθεμιά από τις τέσσερις κλάσεις που συμμετέχουν στο πρόβλημα.

Σε συνδυασμό με τα αριθμητικά αποτελέσματα στα παρακάτω σχήματα δίνεται η γραφική αναπαράστασή τους:

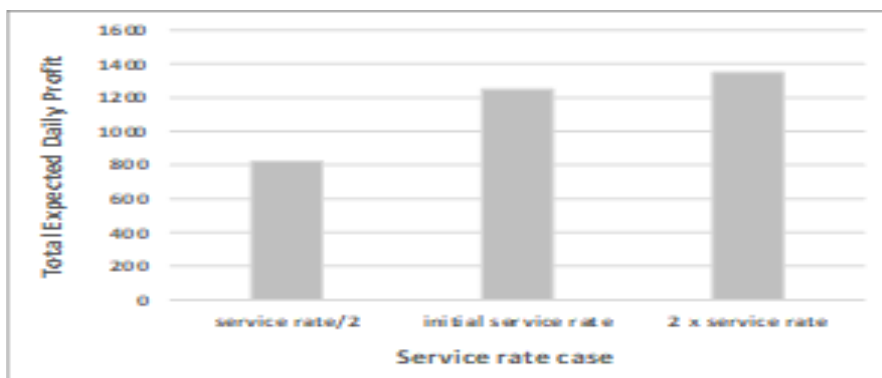


Σχήμα 10: Βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων στις έξι περιπτώσεις

Αυτό που αναπαρίσταται ουσιαστικά στο παραπάνω διάγραμμα είναι η κατανομή των δεσμευμένων θέσεων στους δυο χώρους στάθμευσης όπως αυτή έχει προκύψει με βάση τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων για όλες τις κλάσεις και για καθεμία από τις έξι υποπεριπτώσεις που είναι ορατή στα αποτελέσματα του Πίνακα 14. Δίνοντας διαφορετικές τιμές στα ανώτατα όρια για κάθε κλάση δεν οδηγούμαστε σε κάποιο συγκεκριμένο συμπέρασμα αντιθέτως αυτό που παρατηρείται είναι πως το σύστημα σε κάθε περίπτωση ανακατανομίζει τις θέσεις στάθμευσης ώστε να μπορέσει να ανταπεξέλθει στη δεδομένη κίνηση. Επιπρόσθετα σε κάθε περίπτωση υπάρχει και ένα ποσοστό ελεύθερων θέσεων στάθμευσης που υφίστανται για τους τυχαία διερχόμενους πελάτες.



Σχήμα 11: Βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων στις έξι περιπτώσεις



Σχήμα 12: Βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων στις έξι περιπτώσεις

Από τα δυο παραπάνω διαγράμματα παίρνουμε δεδομένα για τις μεταβολές των ρυθμών αφίξεων και των ρυθμών απελευθέρωσης μιας θέσης αντίστοιχα. Και σε αυτό το σημείο να σημειωθεί πως ένας λόγος για τον οποίο δημιουργήθηκαν τα συγκεκριμένα cases είναι για να εξεταστεί η επιρροή η οποία έχει η μεταβολή των ρυθμών αφίξεων και των αναχωρήσεων στη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων η οποία έχει ως βασικό στόχο τη μεγιστοποίηση του κέρδους της εταιρείας. Όπως ήταν αναμενόμενο, αυξάνοντας την κίνηση και στους δυο χώρους στάθμευσης, τους ρυθμούς δηλαδή με τους οποίους καταφθάνουν οι πελάτες αυξάνεται και το ημερήσιο κέρδος της εταιρείας. Το ίδιο ακριβώς συμπέρασμα εξάγεται παρατηρώντας και την μεταβολή των ρυθμών απελευθέρωσης μια θέσης. Πιο συγκεκριμένα, όσο πιο άμεσα απελευθερωθεί μια θέση στάθμευσης σε καθένα από τα P1,P2 τόσο πιο άμεσα θα εισέλθουν νέοι πελάτες (αγοράζονται περισσότερα εισιτήρια) αυξάνοντας με αυτό τον τρόπο το συνολικό κέρδος της εταιρείας.

Στον παρακάτω πίνακα επιλέχθηκε τυχαία ένα από αυτά τα cases , το case 2 ώστε να μελετηθούν τα αποτελέσματα αναλυτικότερα:

$P_{b,Class 1}^0$	$P_{b,Class 2}^0$	$P_{b,Class 3}^0$	$P_{b,Class 4}^0$	g^*	$TEDP^*$	$P_{b,Class 1}^*$	$P_{b,Class 2}^*$	$P_{b,Class 3}^*$	$P_{b,Class 4}^*$
0.0001	0.001	0.05	0.5	(5,6,7,2,3,4)	1051.38	5.70×10^{-11}	8.29×10^{-5}	0.015019	0.110115
10^{-11}	0.0001	0.02	0.2	(4,6,8,2,3,4)	1050.46	1.90×10^{-11}	8.60×10^{-5}	0.015585	0.112967
5×10^{-12}	0.0005	0.02	0.2	(3,5,10,2,3,4)	1048.42	2.70×10^{-12}	1.19×10^{-4}	0.017617	0.118434
10^{-12}	0.0005	0.02	0.2	(2,5,11,2,3,4)	1046.96	9.02×10^{-13}	1.27×10^{-4}	0.018809	0.122662

Πίνακας 15: Αποτελέσματα των blocking probabilities και του αναμενόμενου κέρδους για το case 2

With Reservation											
$\lambda_{Class 1}$	$\lambda_{Class 2}$	$\lambda_{Class 3}$	$\lambda_{Class 4}$	μ	g^*	$TEDP^*$	$P_{b,Class 1}^*$	$P_{b,Class 2}^*$	$P_{b,Class 3}^*$	$P_{b,Class 4}^*$	
0.6	0.9	1	1.1	4	(3,4,5,2,3,4)	542.393	2.76×10^{-17}	4.62×10^{-2}	1.17×10^{-6}	4.96×10^{-5}	
1.2	1.8	2	2.2	4	(5,6,7,2,3,4)	1051.38	5.70×10^{-11}	8.29×10^{-5}	0.01502	0.11012	
2.4	3.6	4	4.4	4	(2,3,4,2,3,4)	1335.28	6.03×10^{-5}	0.06959	0.56148	0.88785	
1.2	1.8	2	2.2	2	(2,3,4,2,3,4)	667.641	6.03×10^{-5}	6.96×10^{-2}	0.56148	0.88785	
1.2	1.8	2	2.2	4	(2,3,4,2,3,4)	1335.28	6.03×10^{-5}	6.96×10^{-2}	0.56148	0.88785	
1.2	1.8	2	2.2	8	(3,4,5,2,3,4)	1084.79	2.76×10^{-17}	4.62×10^{-10}	1.17×10^{-6}	4.96×10^{-5}	

Without Reservation				
λ	μ	$TEDP$	Blocking Probability	
3.6	4	561.6	2.74×10^{-8}	
7.2	4	1103.75	0.01731	
14.4	4	1247.99	0.44445	
7.2	2	623.994	0.44445	
7.2	4	1103.75	0.01731	
7.2	8	1123.2	2.74×10^{-8}	

Πίνακας 16: Βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων στη περίπτωση με και χωρίς δέσμευση θέσεων

Με παρόμοιο τρόπο διερευνάται η επιρροή η οποία έχει στο συνολικό κέρδος της εταιρείας καθώς και στη κατανομή των θέσεων σε καθένα από τους δυο χώρους στάθμευσης η μεταβολή και πιο συγκεκριμένα η αύξηση, του ανώτατου ορίου για κάθε κλάση κάτι το οποίο παρουσιάζεται στον Πίνακα 15 και αφορά το δεύτερο case. Παρατηρώντας τα δεδομένα το συμπέρασμα που εξάγεται είναι πως υπάρχει ανακατανομή στις θέσεις που διατίθενται προς δέσμευση για κάθε κλάση και αυτό συμβαίνει στην προσπάθεια τους συστήματος να καταφέρει να ανταπεξέλθει στις μεταβολές των

ρυθμών και κατ' επέκταση στον τρόπο με τον οποίο κινούνται οι πελάτες μέσα στους χώρους στάθμευσης. Έχοντας ως γνώμονα αυτά τα δεδομένα υπάρχει ξεκάθαρη εικόνα για τις προθέσεις τις οποίες έχει η εταιρεία απέναντι στη κάθε κλάση πελατών και πως σκοπεύει να διαχειριστεί τις θέσεις ώστε να ικανοποιηθούν όλοι οι πελάτες που ανήκουν σε αυτές.

Μελετώντας την ίδια υποπερίπτωση και χάριν ευκολίας υπολογισμών θεωρείται ότι οι εισερχόμενοι πελάτες προέρχονται από μια κλάση και ως αποτέλεσμα αυτού πληρώνουν κοινό εισιτήριο που ισούται με $c = 6.5$. Στον Πίνακα 16 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για το συνολικό ημερήσιο κέρδος καθώς και για τα blocking probabilities για όλες τις κλάσεις στις περιπτώσεις με δέσμευση θέσεων αλλά και χωρίς. Είναι προφανές ότι στη περίπτωση που υπάρχει δέσμευση θέσεων επωφελούνται όλες οι κλάσεις πελατών και κυρίως οι κλάσεις υψηλότερης προτεραιότητας καθώς υπάρχει καλύτερη διαχείριση των θέσεων σε όλους τους χώρους στάθμευσης και κατ' επέκταση ελαχιστοποιείται η πιθανότητα να έρθουν αντιμέτωποι με την περίπτωση μη εισόδου στους χώρους αυτούς.

5.3 Αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση της μοντελοποίησης με τη χρήση Κυκλικών μη Ομογενών Μαρκοβιανών αλυσίδων

5.3.1 Αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση χωρίς δέσμευση πόρων (NR)

Αρχικά εξετάζεται το εξής ενδεχόμενο: όλοι οι εισερχόμενοι πελάτες ανήκουν σε μια κατηγορία χωρίς να χωρίζονται σε κλάσεις. Ως αποτέλεσμα αυτού, το εισιτήριο που πληρώνεται κατά την είσοδο στους χώρους στάθμευσης θα είναι ενιαίο για όλες τις κλάσεις και θα έχει την ίδια τιμή σε όλες τις περιόδους. Ένας από τους βασικότερους λόγους για την μελέτη των αποτελεσμάτων στη συγκεκριμένη περίπτωση, είναι για να μπορέσουν να συγκριθούν με τις περιπτώσεις όπου υπάρχει δέσμευση θέσεων ώστε να εξεταστεί αν και κατά πόσο η δέσμευση πόρων ευνοεί τόσο τους πελάτες όσο και την εταιρία διαχείρισης. Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζονται όλες οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν για την περίπτωση των Κυκλικών Μη Ομογενών Μαρκοβιανών Αλυσίδων (CNHMC) χωρίς δέσμευση θέσεων. Πιο συγκεκριμένα, στον Πίνακα 17 παρουσιάζονται οι τιμές όλων των ρυθμών του συστήματος καθώς και οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν για τον χρόνο βαδίσματος από τα P1,P2 μέχρι το τερματικό σταθμό. Επιπρόσθετα, υπάρχει και ο Πίνακας 18 στον οποίο παραθέτονται τα αριθμητικά αποτελέσματα για τις τιμές με το μεγαλύτερο ερευνητικό ενδιαφέρον, τα οποία βασίζονται στις εξής εξισώσεις:

$$BP_{P1,s}^{NR} = \sum_{j=0}^{N_2} \pi_{0,j}^s, \quad s = 0,1,2 \quad (79)$$

όπου με $BP_{P1,s}^{NR}$ συμβολίζεται η πιθανότητα να μπλοκαρισθεί ένας πελάτης στο P1 στην s περίοδο στη περίπτωση χωρίς δέσμευση θέσεων. Επιπρόσθετα, με $\pi_{0,j}^s$ συμβολίζεται η στάσιμη κατανομή

πιθανότητας που υποδεικνύει ότι στην s περίοδο στο P1 υπάρχουν 0 διαθέσιμες θέσεις στάθμευσης σε αντίθεση με το P2 όπου υπάρχουν j .

$$BP_s^{NR} = \pi_{0,0}^s, \quad s = 0,1,2 \quad (80)$$

όπου με BP_s^{NR} συμβολίζεται η αντίστοιχη πιθανότητα να μπλοκαριστεί ένας πελάτης στην s περίοδο στο P2 στη περίπτωση χωρίς δέσμευση θέσεων. Να τονισθεί σε αυτό το σημείο πως όταν ένας πελάτης μπλοκάρεται και από το P2 σημαίνει πως δεν υπάρχει διαθέσιμη θέση για εκείνον στο σύστημα και ουσιαστικά χάνεται από αυτό.

$$EWT_s^{NR} = (1 - (BP_{P1,s}^{NR} - BP_s^{NR})) \cdot w_1 + (BP_{P1,s}^{NR} - BP_s^{NR}) \cdot w_2, \quad s = 0,1,2 \quad (81)$$

όπου ένας πελάτης βρίσκει διαθέσιμη θέση και εισέρχεται στο P1 με πιθανότητα $(1 - (BP_{P1,s}^{NR} - BP_s^{NR}))$ έχοντας περπατήσει χρόνο w_1 ειδάλλως μπλοκάρεται από το P1 και εισέρχεται στο P2 με πιθανότητα $(BP_{P1,s}^{NR} - BP_s^{NR})$ έχοντας περπατήσει χρόνο w_2 . Με αυτό το τρόπο προκύπτει ο Αναμενόμενος Χρόνος Βαδίσματος στην s περίοδο στη περίπτωση χωρίς δέσμευση θέσεων EWT_s^{NR} .

$$TEHP_s^{NR} = \lambda_1^s \cdot (1 - BP_s^{NR}) \cdot c, \quad s = 0,1,2 \quad (82)$$

όπου με $TEHP_s^{NR}$ συμβολίζεται το Αναμενόμενο Ωριαίο Κέρδος στην s περίοδο στη περίπτωση χωρίς δέσμευση θέσεων. Επιπρόσθετα με $\lambda_1^s = \sum_{j=1}^k \lambda_{Class j}^s$ συμβολίζεται ο ρυθμός άφιξης ενός πελάτη στα P1,P2 ο οποίος βρίσκει διαθέσιμη θέση στάθμευσης με πιθανότητα $(1 - BP_s^{NR})$ και πληρώνει εισιτήριο c .

Traffic period	Arrival rate	Service rate	Ticket price (m.u.)	Walking time to the terminal (in min)	
	λ^s	μ^s		P1	P2
			c	w_1	w_2
$s = 0$	$32 h^{-1}$	$25 h^{-1}$			
$s = 1$	$28 h^{-1}$	$20 h^{-1}$	5	5	10
$s = 2$	$14 h^{-1}$	$5 h^{-1}$			

Πίνακας 17: Τιμές παραμέτρων στη περίπτωση χωρίς δέσμευση θέσεων

Traffic period	$BP_{P1,s}^{NR}$	BP_s^{NR}	EWT_s^{NR} (min)	$TEHP_s^{NR}$ (per hour)
$s = 0$	0.46025	0.46017	5.00037	86.37229
$s = 1$	0.38206	0.38198	5.00040	86.52322
$s = 2$	0.38279	0.38271	5.00042	43.21046

Πίνακας 18: Αποτελέσματα για τη περίπτωση χωρίς δέσμευση θέσεων

Αρχικά αυτό που παρατηρείται στα δεδομένα του Πίνακα 18 είναι τα blocking probabilities των πελατών που εισέρχονται στο P1 για κάθε περίοδο ξεχωριστά και συμβολίζονται με $BP_{P1,s}^{NR}$, και τα blocking probabilities των πελατών που εισέρχονται στο P2 και κατ'έπекταση blocking probabilities για όλο το σύστημα που συμβολίζονται με BP_s^{NR} , για κάθε περίοδο s . Επιπλέον, δίνονται οι τιμές των

αποτελεσμάτων για τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος που αφορά τον χρόνο μετάβασης που απαιτείται να διανύσει ένας πελάτης από τους δυο χώρους στάθμευσης μέχρι το τερματικό και συμβολίζεται με EWT_s^{NR} (Expected Walking Time), για κάθε περίοδο s . Από την πλευρά της εκάστοτε επιχείρησης υπάρχει το αναμενόμενο ωριαίο κέρδος το οποίο συμβολίζεται με $TEHP_s^{NR}$ (Total Expected Hourly Profit) και μελετάται επίσης για κάθε περίοδο s .

Από τα πρώτα δεδομένα που πηγάζουν από τα αποτελέσματα του Πίνακα 18, παρατηρείται ότι το blocking probability όλου του συστήματος BP_0^{NR} , αυξάνεται κατά την πρώτη περίοδο αποτέλεσμα που είναι λογικό εφόσον σε αυτή τη περίοδο έχουμε την μεγαλύτερη κίνηση μέσα στους χώρους στάθμευσης. Κατά αντιστοιχία το blocking probability για τη δεύτερη περίοδο BP_1^{NR} μειώνεται και αυτό αποδίδεται στο γεγονός ότι η κίνηση εντός των χώρων στάθμευσης είναι μικρότερη συγκριτικά με την πρώτη. Με τα δεδομένα που προκύπτουν για την τρίτη περίοδο και τα blocking probability BP_2^{NR} , παρατηρείται μια πολύ μικρή αύξηση η οποία δεν οδηγεί σε κάποιο ιδιαίτερο συμπέρασμα. Η εξήγηση για την αύξηση αυτή, έρχεται μέσα από την ταυτόχρονη μείωση που υπάρχει στους ρυθμούς άφιξης και στους ρυθμούς απελευθέρωσης μιας θέσης το οποίο πρακτικά σημαίνει ότι οι θέσεις στάθμευσης δεν αποδεσμεύονται τόσο σύντομα και έτσι οι εισερχόμενοι πελάτες μπλοκάρονται με μεγαλύτερη συχνότητα. Συνοψίζοντας, προκύπτει η εξής ανισότητα: $BP_1^{NR} < BP_2^{NR} < BP_0^{NR}$ η οποία επιβεβαιώνει το αυξημένο blocking probability κατά την πρώτη περίοδο συγκριτικά με τις άλλες δυο. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο ερμηνεύθηκαν και τα αποτελέσματα για τα blocking probabilities στο P1 ($BP_{P1,1}^{NR} < BP_{P1,2}^{NR} < BP_{P1,0}^{NR}$). Όσον αφορά τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος, παρατηρείται ότι υπάρχει μια μικρή αύξηση ανάμεσα στις τρεις περιόδους και αυτό αποδίδεται κυρίως στο γεγονός ότι υπάρχει μεγαλύτερη ροή πελατών στο P1 με αποτέλεσμα να γεμίσει γρηγορότερα, και έτσι περισσότεροι εισερχόμενοι πελάτες μεταφέρονται στο P2 αυξάνοντας έτσι το χρόνο βαδίσματος τους. Τέλος, αναφερόμενοι στο αναμενόμενο ωριαίο κέρδος παρατηρείται μια μικρή αύξηση στη δεύτερη περίοδο σε σχέση με την πρώτη. Ενώ αυτό έρχεται σε μια αντιπαράθεση με το γεγονός ότι οι εισερχόμενοι πελάτες στην δεύτερη περίοδο μειώνονται αντισταθμίζεται λόγω του χαμηλότερου ποσοστού στους ρυθμούς αναχώρησης γεγονός που οδηγεί τους πελάτες στο να παραμένουν περισσότερο στις θέσεις στάθμευσης αυξάνοντας έτσι το συνολικό κέρδος για την εταιρεία. Όσον αφορά τη τρίτη περίοδο δεν παρατηρούνται τα ίδια συμπεράσματα καθώς σε αυτή τη περίπτωση οι πελάτες αποχωρούν με μικρότερο ρυθμό από τους χώρους στάθμευσης και ταυτόχρονα μειώνεται και η κίνηση νέων πελατών. Έτσι το αναμενόμενο ωριαίο κέρδος μειώνεται συγκριτικά με τις περιόδους ένα και δύο.

5.3.2 Αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση δύο κλάσεων πελατών (CNHMC)

Περνώντας στη δεύτερη υποπερίπτωση του κεφαλαίου αυτού, μελετήθηκε η συμπεριφορά του συστήματος στη περίπτωση που η εταιρεία διαχωρίζει τους εισερχόμενους πελάτες σε κλάσεις. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούνται δύο κλάσεις πελατών ($k = 2$) με την Class 1 να είναι εκείνη με την μεγαλύτερη προτεραιότητα ενώ αντίστοιχα η Class 2 είναι η κλάση χωρίς καθόλου προτεραιότητες. Βασιζόμενοι σε αυτό, οι πελάτες της Class 1 πληρώνουν κατά την είσοδο τους στους χώρους στάθμευσης ακριβότερο εισιτήριο συγκριτικά με τους πελάτες της Class 2. Ως αποτέλεσμα αυτού, οι τιμές των εισιτηρίων ορίστηκαν βασιζόμενες στην παρακάτω εξίσωση: $c_i > c_{i+1}$, $1 \leq i \leq k - 1$ και $c_k = c$. Έτσι, ισχύει ότι $c_1 = 8$ m.u., με το c_1 να αντιπροσωπεύει το εισιτήριο για τους πελάτες της Class 1, και με $c_2 = 5$ m.u. ορίζεται το εισιτήριο για τους πελάτες της Class 2. Το εισιτήριο στη περίπτωση που δεν έχουμε τους πελάτες κατανομημένους σε κλάσεις (NR) θεωρείται ίσο με αυτό των πελατών που ανήκουν στην Class 2 και αυτό συμβαίνει διότι και στις δύο περιπτώσεις οι πελάτες δεν έχουν πληρώσει για κάποια ιδιαίτερη εξυπηρέτηση από την εκάστοτε εταιρεία. Οι ρυθμοί αφίξεων και αναχωρήσεων που χρησιμοποιήθηκαν στη κάθε περίοδο αναπαρίστανται στον Πίνακα 19 λαμβάνοντας υπόψη ότι $\mu^s = \sum_{j=1}^k \mu_{Class j}^s$. Επιπρόσθετα, παρατηρήθηκε ότι οι πελάτες που ανήκουν σε κλάσεις υψηλότερης προτεραιότητας καταφθάνουν στους χώρους στάθμευσης λιγότερο συχνά από ότι οι πελάτες που ανήκουν σε κλάσεις χαμηλότερης προτεραιότητας και ως αποτέλεσμα αυτού μειώνεται ο ρυθμός αφίξεων από περίοδο σε περίοδο δεδομένα που συναντώνται στον ίδιο πίνακα και ισχύει ότι $\lambda_{Class 1}^s < \lambda_{Class 2}^s$ για όλες τις περιόδους. Τέλος, όσον αφορά τους ρυθμούς απελευθέρωσης μιας θέσης ισχύει ότι: $\mu^0 > \mu^1 > \mu^2$.

Traffic Period	Class 1 $\lambda_{Class 1}^s$	Class 2 $\lambda_{Class 2}^s$	Service rate μ^s
$s = 0$	$12 h^{-1}$	$20 h^{-1}$	$25 h^{-1}$
$s = 1$	$10 h^{-1}$	$18 h^{-1}$	$20 h^{-1}$
$s = 2$	$5 h^{-1}$	$9 h^{-1}$	$5 h^{-1}$

Πίνακας 19: Ρυθμοί αφίξεων και αναχωρήσεων και για τις τρεις περιόδους

Από τα δεδομένα που δόθηκαν προκύπτει και το πρόβλημα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης που αναλύθηκε στην εξίσωση (54) και πραγματοποιήθηκε για κάθε περίοδο $s = 0, 1, 2$. Ο τρόπος με τον οποίο επιλύθηκε αναπαρίσταται στον αλγόριθμο του κεφαλαίου 4. Η λύση που προκύπτει από τον αλγόριθμο αυτό παρουσιάζεται στον Πίνακα 20, ενώ η βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων για όλες τις κλάσεις και για κάθε περίοδο αναπαρίστανται στο Σχήμα 12.

Το πρώτο πράγμα που παρατηρείται μελετώντας τα αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν, είναι ότι χρησιμοποιώντας τεχνικές βελτιστοποίησης ώστε να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων μειώνεται το blocking probability για τους πελάτες όλων των κλάσεων, ακόμη και στη περίπτωση χωρίς προτεραιότητα (Class 2). Το συμπέρασμα αυτό έρχεται να επιβεβαιώσει η σύγκριση με τη

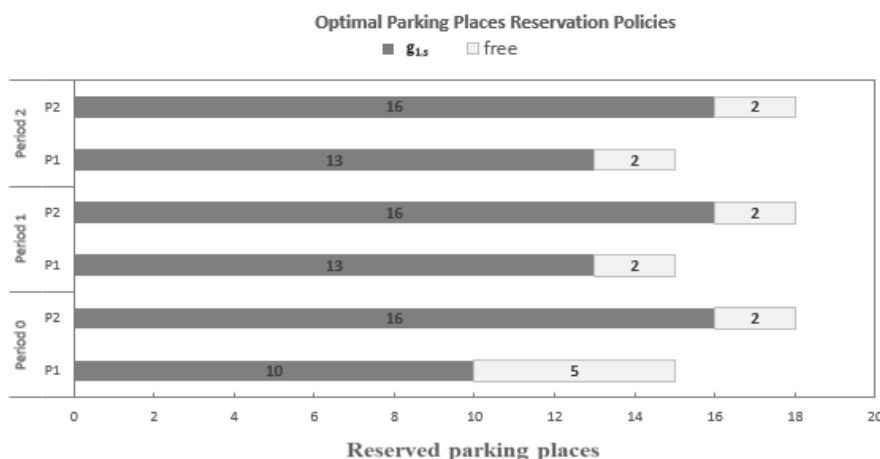
περίπτωση που δεν υπάρχουν καθόλου κλάσεις πελατών και κατ' επέκταση δέσμευση θέσεων στάθμευσης. Στο Σχήμα 13 παρουσιάζεται αναλυτικά η συμπεριφορά που έχουν τα blocking probabilities για κάθε κλάση και σε κάθε περίοδο. Επιπρόσθετα, παρατηρείται ότι ο αναμενόμενος χρόνος βαδίσματος είναι χαμηλότερος στην περίπτωση των πελατών που ανήκουν σε κλάσεις υψηλότερης προτεραιότητας αποτέλεσμα που είναι λογικό καθώς οι συγκεκριμένες κλάσεις πελατών πρέπει να αντιμετωπίζουν πρόβλημα στην εύρεση διαθέσιμης θέσης στάθμευσης πιο σπάνια. Ωστόσο ο χρόνος αυτός για την Class 1 είναι κατά ένα πολύ μικρό ποσοστό χαμηλότερος σε σχέση με την περίπτωση χωρίς δέσμευση θέσεων και αυτό αποδίδεται στο γεγονός ότι όλο το πρόβλημα είναι με τέτοιο τρόπο δομημένο ώστε να ωφελείται η συγκεκριμένη κλάση η οποία έχει και την μεγαλύτερη προτεραιότητα. Αυτό ουσιαστικά συμβαίνει εις βάρος των πελατών που ανήκουν στη Class 2, η οποία αντιμετωπίζει μια αύξηση στον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος της σε σύγκριση πάντα με την περίπτωση που δεν έχουμε δέσμευση θέσεων. Η βέλτιστη τιμή για τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος για όλες τις κλάσεις και σε κάθε περίοδο παρουσιάζεται στο Σχήμα 14. Τελειώνοντας, το αναμενόμενο ωριαίο κέρδος στη περίπτωση που έχουμε δέσμευση θέσεων είναι εμφανώς πιο υψηλό. Η πολιτική που ακολουθείται για το κόστος των εισιτηρίων και το γεγονός ότι οι τιμές των blocking probabilities επιτρέπουν σε περισσότερους πελάτες υψηλότερων κλάσεων να εισέλθουν στους χώρους στάθμευσης είναι οι παράγοντες που ενισχύουν το συμπέρασμα αυτό. Τα αποτελέσματα που αφορούν στο κέρδος αντικατοπτρίζονται στο Σχήμα 15, συγκρινόμενα με τη περίπτωση που δεν πραγματοποιείται δέσμευση θέσεων.

Συνοψίζοντας, η προτεινόμενη προσέγγιση κατά την οποία προσφέρονται διαφορετικές προτεραιότητες ανάλογα με την κλάση την οποία ανήκει ένας πελάτης και ταυτόχρονα δεσμεύονται θέσεις στάθμευσης για τους πελάτες των κλάσεων υψηλότερης προτεραιότητας, (που προτίθενται να πληρώσουν ακριβότερο εισιτήριο ώστε να επωφεληθούν αυτών των πλεονεκτημάτων) τείνει να αυξήσει το κέρδος της εκάστοτε εταιρείας γεγονός που ήταν αναμενόμενο. Περνώντας τώρα στη πλευρά των πελατών, εκείνοι οι οποίοι ανήκουν σε κλάσεις υψηλότερης προτεραιότητας αντιμετωπίζουν λιγότερο συχνά το φαινόμενο αποτυχίας να εισέλθουν στους χώρους στάθμευσης (χαμηλότερο blocking probability) και η λύση σε αυτό έρχεται όταν προτίθενται να πληρώσουν ένα πιο ακριβό εισιτήριο. Επιπρόσθετα οι πελάτες που ανήκουν στην Class 1 είναι σε πλεονεκτικότερη θέση όσον αφορά τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος και αυτό συμβαίνει λόγω της μεγαλύτερης πιθανότητας να βρουν διαθέσιμη θέση στο P1. Σε αντίθεση με όλα αυτά, οι πελάτες που ανήκουν στην Class 2 θα χρειαστεί να περπατήσουν περισσότερο χρόνο μέχρι το τερματικό σταθμό. Αυτό επιβεβαιώνεται λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι οι πελάτες της κλάσης αυτής θα πλήρωναν το ίδιο εισιτήριο όπως και στη περίπτωση χωρίς δέσμευση θέσεων, αλλά θα αντιμετώπιζαν χαμηλότερα επίπεδα στα blocking probabilities για κάθε περίοδο αντίστοιχα.

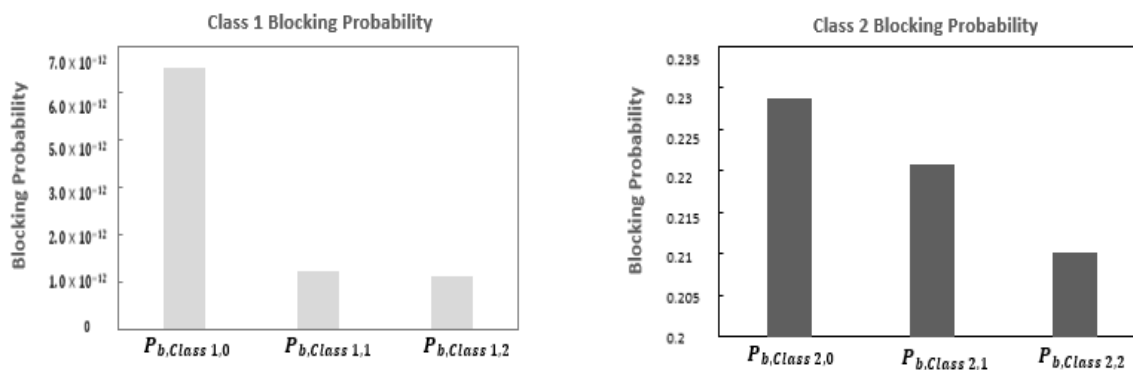
Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα του προτεινόμενου μοντέλου είναι ότι επωφελούνται από αυτό ταυτόχρονα η εταιρεία καθώς και οι πελάτες της και αυτό δικαιολογεί το γεγονός ότι τα αποτελέσματα εξαρτώνται από τις παραμέτρους που ορίζονται στην αρχή του προβλήματος. Λόγω όλων αυτών που προαναφέρθηκαν είναι λογικό να εξηγηθεί το πώς όλες αυτές οι παράμετροι όπως π.χ οι ρυθμοί αφίξεων και αναχωρήσεων επηρεάζουν τη βέλτιστη λύση του προβλήματος και είναι κάτι το οποίο μελετάται στις παρακάτω παραγράφους καθώς και στα διαγράμματα.

Traffic Period	$g_s^{P1^*}$	$g_s^{P2^*}$	$TEHP_S^{R^*}$	
$s = 0$	10	16	$BP_{Class 1,0}^*$	$BP_{Class 2,0}^*$
			5.54×10^{-12}	0.2287
$s = 1$	13	16	$EWTR_{Class 1,0}^{R^*}$	$EWTR_{Class 2,0}^{R^*}$
			5.00000110	7.3172823
$s = 2$	13	16	$BP_{Class 1,1}^*$	$BP_{Class 2,1}^*$
			1.22×10^{-12}	0.2286
$s = 2$	13	16	$EWTR_{Class 1,1}^{R^*}$	$EWTR_{Class 2,1}^{R^*}$
			5.00267322	5.3633598
$s = 2$	13	16	$BP_{Class 1,2}^*$	$BP_{Class 2,2}^*$
			1.11×10^{-12}	0.210115
$s = 2$	13	16	$EWTR_{Class 1,2}^{R^*}$	$EWTR_{Class 2,2}^{R^*}$
			4.9979714	5.4635093

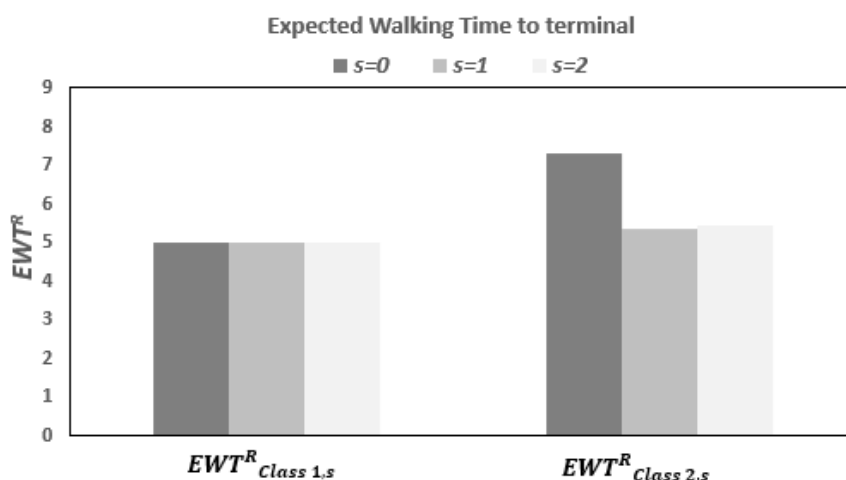
Πίνακας 20: Αποτελέσματα για τη περίπτωση δέσμευσης θέσεων με δυο κλάσεις πελατών



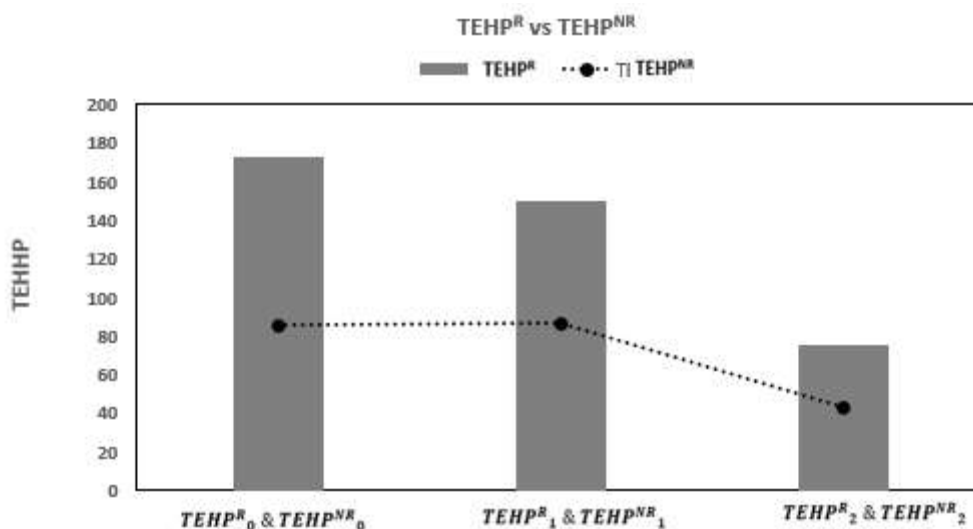
Σχήμα 13: Διάγραμμα καταστάσεων για τη περίπτωση δύο κλάσεων πελατών και με $N_1 = 7$ και $N_2 = 8$



Σχήμα 14: Βέλτιστες τιμές των blocking probabilities όλων των κλάσεων για κάθε περίοδο



Σχήμα 15: Βέλτιστες τιμές του Αναμενόμενου Χρόνου Βαδίσματος για όλες τις κλάσεις σε κάθε περίοδο



Σχήμα 16: Βέλτιστες τιμές του Αναμενόμενου Ωριαίου Κέρδους για κάθε κλάση συγκριτικά με τη περίπτωση χωρίς δέσμευση θέσεων σε κάθε περίοδο

5.3.3 Αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση τριών κλάσεων πελατών (CNHMC)

Με παρόμοιο τρόπο παρουσιάζεται και η παρακάτω περίπτωση η οποία αφορά στη μελέτη της συμπεριφοράς του συστήματος στη περίπτωση που η εταιρεία διαχωρίζει τους εισερχόμενους πελάτες σε τρεις κλάσεις. Η μελέτη και σε αυτή τη περίπτωση έγινε με τη χρήση των Κυκλικών Μαρκοβιανών Αλυσίδων. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούνται τρεις κλάσεις πελατών ($k = 3$) με την Class 1 να είναι εκείνη με την μεγαλύτερη προτεραιότητα ενώ αντίστοιχα η Class 3 είναι η κλάση χωρίς προτεραιότητες.

Όπως είναι αναμενόμενο οι πελάτες της Class 1 έχουν κάποια πλεονεκτήματα λόγω προτεραιότητας και αυτό είναι κάτι το οποίο αντικατοπτρίζεται στο κομμάτι του εισιτηρίου το οποίο πληρώνουν κατά την είσοδο. Ως αποτέλεσμα αυτού, ορίστηκαν οι τιμές των εισιτηρίων βασιζόμενες στην παρακάτω εξίσωση: $c_i > c_{i+1}$, $1 \leq i \leq k - 1$ και $c_k = c$. Έτσι, ορίζεται το $c_1 = 8$ m.u. ως το εισιτήριο για τους πελάτες της Class 1, $c_2 = 6.5$ m.u το εισιτήριο για τους πελάτες της Class 2 και $c_3 = 5$ m.u. το εισιτήριο για τους πελάτες της Class 3. Το εισιτήριο στη περίπτωση που δεν έχουμε τους πελάτες κατανεμημένους σε κλάσεις θεωρείται ίσο με αυτό των πελατών που ανήκουν στην Class 3 και αυτό συμβαίνει διότι και στις δύο περιπτώσεις οι πελάτες δεν έχουν πληρώσει για κάποια ιδιαίτερη εξυπηρέτηση από την εκάστοτε εταιρεία. Οι ρυθμοί άφιξης και αναχώρησης που χρησιμοποιήθηκαν στη κάθε περίοδο αναπαρίστανται στον Πίνακα 21 λαμβάνοντας υπόψη ότι $\mu^s = \sum_{j=1}^k \mu^{s, \text{Class } j}$. Επιπρόσθετα παρατηρήθηκε ότι οι πελάτες που ανήκουν σε κλάσεις υψηλότερης προτεραιότητας καταφθάνουν στους χώρους στάθμευσης λιγότερο συχνά από ότι οι πελάτες που ανήκουν σε κλάσεις χαμηλότερης προτεραιότητας και ως αποτέλεσμα αυτού παρατηρείται μείωση στον ρυθμό αφίξεων από περίοδο σε περίοδο ενώ ταυτόχρονα ισχύει $\lambda_{\text{Class } 1}^s < \lambda_{\text{Class } 2}^s$ για όλες τις περιόδους. Τέλος, όσον αφορά τους ρυθμούς απελευθέρωσης μιας θέσης ισχύει ότι: $\mu^0 > \mu^1 > \mu^2$.

Traffic Period	Class 1 $\lambda_{\text{Class } 1}^s$	Class 2 $\lambda_{\text{Class } 2}^s$	Class 3 $\lambda_{\text{Class } 3}^s$	Service rate μ^s
$s = 0$	$6 h^{-1}$	$10 h^{-1}$	$16 h^{-1}$	$25 h^{-1}$
$s = 1$	$4 h^{-1}$	$8 h^{-1}$	$14 h^{-1}$	$20 h^{-1}$
$s = 2$	$2 h^{-1}$	$4 h^{-1}$	$6 h^{-1}$	$5 h^{-1}$

Πίνακας 21: Ρυθμοί αφίξεων και αναχωρήσεων και για τις τρεις περιόδους

Από τα δεδομένα που δόθηκαν παραπάνω, προέκυψε και το πρόβλημα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης που αναλύθηκε στην εξίσωση 79 και εκτελείται για κάθε περίοδο $s = 0, 1, 2$. Ο τρόπος με τον οποίο επιλύεται αναπαρίσταται στον αλγόριθμο του κεφαλαίου 4. Η λύση που προκύπτει από τον αλγόριθμο αυτόν παρουσιάζεται στον Πίνακα 22, ενώ η βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων για όλες τις κλάσεις και για κάθε περίοδο αναπαρίστανται στο Σχήμα 16.

Το συμπέρασμα το οποίο κυριαρχεί μελετώντας τα αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν, είναι ότι χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες τεχνικές βελτιστοποίησης ώστε να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων υπάρχει μείωση στο blocking probability για τους πελάτες όλων των κλάσεων στις περισσότερες περιπτώσεις καθώς και στη περίπτωση χωρίς καθόλου προτεραιότητα (Class 3). Το συμπέρασμα αυτό έρχεται να επιβεβαιώσει η σύγκριση με τη περίπτωση που δεν υπάρχουν καθόλου κλάσεις πελατών και κατ' επέκταση δέσμευση θέσεων στάθμευσης. Η συμπεριφορά που έχουν τα blocking probabilities για κάθε κλάση και σε κάθε περίοδο παρουσιάζεται στο Σχήμα 17. Επιπρόσθετα, παρατηρείται ότι ο αναμενόμενος χρόνος βαδίσματος είναι χαμηλότερος στην περίπτωση των πελατών που ανήκουν σε κλάσεις υψηλότερης προτεραιότητας αποτέλεσμα που

είναι λογικό καθώς οι συγκεκριμένες κλάσεις πελατών πρέπει να αντιμετωπίζουν πρόβλημα στην εύρεση διαθέσιμης θέσης στάθμευσης πιο σπάνια. Ωστόσο ο χρόνος αυτός για την Class 1 είναι κατά ένα πολύ μικρό ποσοστό χαμηλότερος σε σχέση με τη περίπτωση χωρίς δέσμευση θέσεων και αυτό αποδίδεται στο γεγονός ότι όλο το πρόβλημα είναι με τέτοιο τρόπο στημένο ώστε να οφείλεται η συγκεκριμένη κλάση με την μεγαλύτερη προτεραιότητα. Αυτό ουσιαστικά συμβαίνει εις βάρος των πελατών που ανήκουν στη Class 2, καθώς και στη Class 3 οι οποίες αντιμετωπίζουν μια αύξηση στον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος τους σε σύγκριση πάντα με την περίπτωση που δεν έχουμε δέσμευση θέσεων. Η βέλτιστη τιμή για τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος για όλες τις κλάσεις και σε κάθε περίοδο παρουσιάζεται στο Σχήμα 18. Συνοψίζοντας, το αναμενόμενο ωριαίο κέρδος στη περίπτωση που έχουμε δέσμευση θέσεων είναι εμφανώς πιο υψηλό. Η πολιτική που ακολουθείται για το κόστος των εισιτηρίων και το γεγονός ότι οι τιμές των blocking probabilities επιτρέπουν σε περισσότερους πελάτες υψηλότερων κλάσεων να εισέλθουν στους χώρους στάθμευσης είναι οι παράγοντες που ενισχύουν το συμπέρασμα αυτό. Τα αποτελέσματα που αφορούν στο κέρδος αντικατοπτρίζονται στο Σχήμα 19 και περιλαμβάνουν επίσης την σύγκριση με τη περίπτωση που δεν έχουμε δέσμευση θέσεων.

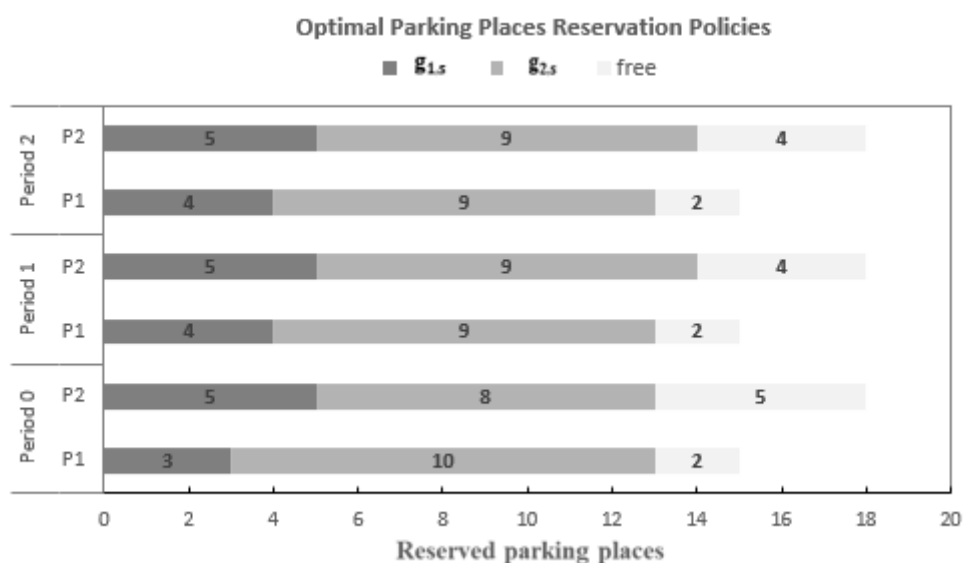
Τελειώνοντας, η προτεινόμενη προσέγγιση κατά την οποία προσφέρονται διαφορετικές προτεραιότητες ανάλογα με την κλάση την οποία ανήκει ένας πελάτης και ταυτόχρονα δεσμεύοντας θέσεις στάθμευσης για τους πελάτες των κλάσεων υψηλότερης προτεραιότητας, (που προτίθενται να πληρώσουν ακριβότερο εισιτήριο ώστε να επωφεληθούν αυτών των πλεονεκτημάτων) τείνει να αυξήσει το κέρδος της εκάστοτε εταιρείας κάτι το οποίο είναι αναμενόμενο. Από την πλευρά των πελατών, εκείνοι οι οποίοι ανήκουν σε κλάσεις υψηλότερης προτεραιότητας αντιμετωπίζουν λιγότερο συχνά το φαινόμενο αποτυχίας να εισέλθουν στους χώρους στάθμευσης (χαμηλότερο blocking probability) και η λύση σε αυτό έρχεται όταν προτίθενται να πληρώσουν ένα πιο ακριβό εισιτήριο. Επιπρόσθετα οι πελάτες που ανήκουν στην Class 1 είναι σε εμφανώς πιο πλεονεκτική θέση όσον αφορά τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος και αυτό συμβαίνει λόγω της μεγαλύτερης πιθανότητας να βρουν διαθέσιμη θέση στο P1. Σε αντίθεση με όλα αυτά, οι πελάτες που ανήκουν στις Class 2, 3 θα χρειαστεί να περπατήσουν περισσότερο χρόνο μέχρι το τερματικό σταθμό. Αυτό επιβεβαιώνεται λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι οι πελάτες της Class 3 συγκεκριμένα, θα πλήρωναν το ίδιο εισιτήριο όπως και στη περίπτωση χωρίς δέσμευση θέσεων, αλλά θα αντιμετώπιζαν χαμηλότερα επίπεδα στα blocking probabilities για κάθε περίοδο αντίστοιχα.

Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα του προτεινόμενου μοντέλου είναι ότι επωφελούνται από αυτό ταυτόχρονα η εταιρεία καθώς και οι πελάτες της και αυτό επιβεβαιώνει ότι τα αποτελέσματα τα οποία παρουσιάζονται εξαρτώνται από τις παραμέτρους που ορίζονται στην αρχή του προβλήματος. Λόγω όλων αυτών που προαναφέρθηκαν οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πως όλες οι παράμετροι

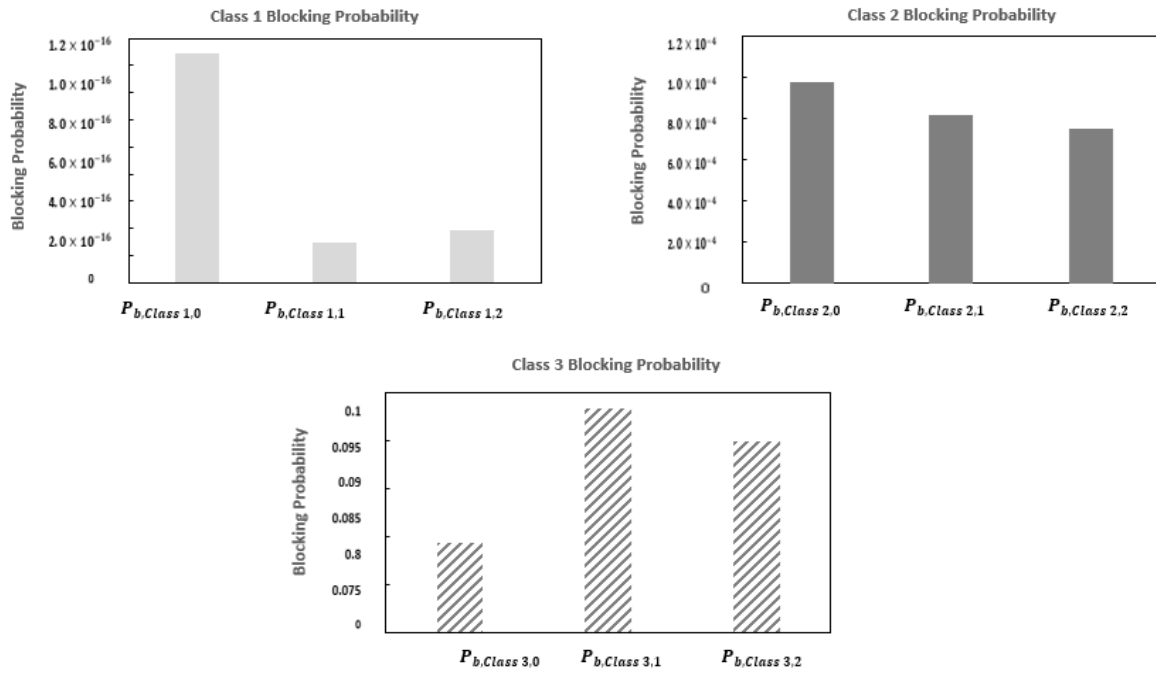
του συστήματος όπως π.χ. οι ρυθμοί αφίξεων και αναχωρήσεων επηρεάζουν τη βέλτιστη λύση του προβλήματος και είναι κάτι το οποίο φαίνεται ξεκάθαρα και στα παρακάτω διαγράμματα.

Traffic Period	g_s^{P1*}	g_s^{P2*}				$TEHP_S^{R*}$
$s = 0$	(3,10)	(5,8)	$BP_{Class 1,0}^*$	$BP_{Class 2,0}^*$	$BP_{Class 3,0}^*$	186.249
			1.7×10^{-16}	9.75×10^{-5}	0.00843	
			$EWT_{Class 1,0}^{R*}$	$EWT_{Class 2,0}^{R*}$	$EWT_{Class 3,0}^{R*}$	
$s = 1$	(4,9)	(5,9)	$BP_{Class 1,1}^*$	$BP_{Class 2,1}^*$	$BP_{Class 3,1}^*$	147.108
			2.9×10^{-7}	8.17×10^{-5}	0.0098	
			$EWT_{Class 1,1}^{R*}$	$EWT_{Class 2,1}^{R*}$	$EWT_{Class 3,1}^{R*}$	
$s = 2$	(4,9)	(5,9)	$BP_{Class 1,2}^*$	$BP_{Class 2,2}^*$	$BP_{Class 3,2}^*$	69.150
			3.9×10^{-17}	7.47×10^{-5}	0.094906	
			$EWT_{Class 1,2}^{R*}$	$EWT_{Class 2,2}^{R*}$	$EWT_{Class 3,2}^{R*}$	
			5.00000110	5.82584354	8.402412	
			5.00000287	5.56473060	8.333489	
			5.00000265	5.5380771	8.29190814	

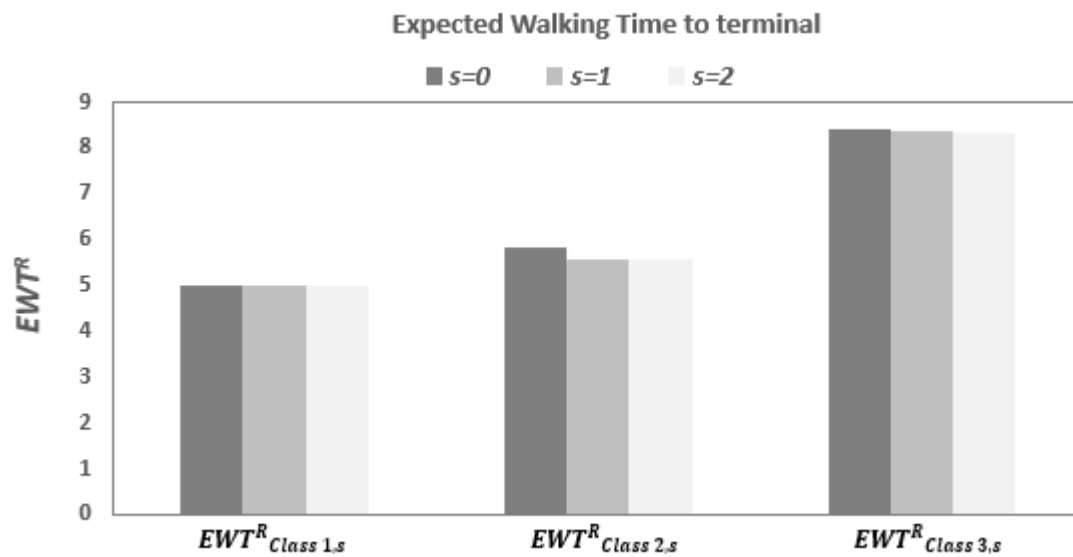
Πίνακας 22: Αποτελέσματα για τη περίπτωση δέσμευσης θέσεων με δυο κλάσεις πελατών



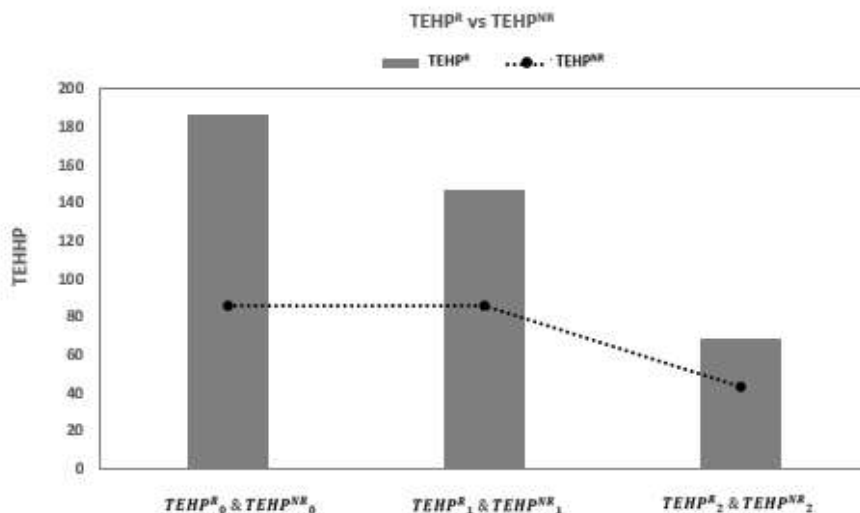
Σχήμα 17: Διάγραμμα καταστάσεων για τη περίπτωση με τρεις κλάσεις πελατών και με $N_1 = 7$ και $N_2 = 8$



Σχήμα 18: Βέλτιστες τιμές των blocking probabilities όλων των κλάσεων για κάθε περίοδο



Σχήμα 19: Βέλτιστες τιμές του Αναμενόμενου Χρόνου Βαδίσματος για όλες τις κλάσεις σε κάθε περίοδο



Σχήμα 20: Βέλτιστες τιμές του Αναμενόμενου Ωριαίου Κέρδους για κάθε κλάση συγκριτικά με τη περίπτωση χωρίς δέσμευση θέσεων σε κάθε περίοδο

5.3.4 Αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση τεσσάρων κλάσεων πελατών (CNHMC)

Πλησιάζοντας στο τέλος των αριθμητικών αποτελεσμάτων, μελετήθηκε η συμπεριφορά του συστήματος στη περίπτωση που η εταιρεία διαχωρίζει τους εισερχόμενους πελάτες σε κλάσεις. Πιο συγκεκριμένα θεωρούνται τέσσερις κλάσεις πελατών ($k = 4$), με την Class 1 να είναι εκείνη με την μεγαλύτερη προτεραιότητα ενώ αντίστοιχα η Class 4 είναι η κλάση χωρίς προτεραιότητες. Η μελέτη βασίζεται και σε αυτή τη περίπτωση στη θεωρία των Κυκλικών Μη Ομογενών Μαρκοβιανών Αλυσίδων. Το συνολικό άθροισμα των τιμών για τους ρυθμούς αφίξεων και αναχωρήσεων θεωρείται ίσο με την περίπτωση που δεν έχουμε δέσμευση θέσεων ώστε να υπάρχει ευκολία στην μεταξύ τους σύγκριση.

Για λόγους αξιοπιστίας του συστήματος η εταιρεία θεωρεί τα ανώτατα όρια τα οποία έχει θέσει για κάθε περίοδο ίσα μεταξύ τους και αυτό ισχύει και για τις τρεις περιόδους. Ως αποτέλεσμα αυτού ισχύει ότι $P_{b,Class 2,0}^0 = P_{b,Class 2,0}^1 = P_{b,Class 2,0}^2 = 0.0001$, $P_{b,Class 3,0}^0 = P_{b,Class 3,0}^1 = P_{b,Class 3,0}^2 = 0.01$, και $P_{b,Class 4,0}^0 = P_{b,Class 4,0}^1 = P_{b,Class 4,0}^2 = 0.1$, εξασφαλίζοντας έτσι ένα ποσοστό διαθεσιμότητας σε θέσεις στάθμευσης ίσο με 99.99%, 99% και 90% για τους πελάτες των Class 2, 3 και 4 αντίστοιχα.

Βασιζόμενοι στα πλεονεκτήματα λόγω προτεραιότητας, οι πελάτες της Class 1 πληρώνουν ακριβότερο εισιτήριο κατά την είσοδο στους χώρους στάθμευσης. Για τον λόγο αυτό, ορίστηκαν οι τιμές των εισιτηρίων βασιζόμενες στην παρακάτω εξίσωση: $c_i > c_{i+1}$, $1 \leq i \leq k - 1$ και $c_k = c$. Έτσι ορίζεται το $c_1 = 8$ m.u. ως το εισιτήριο για τους πελάτες της Class 1, το $c_2 = 7$ m.u. το εισιτήριο για τους πελάτες της Class 2, το $c_3 = 6$ m.u. το εισιτήριο για τους πελάτες της Class 3 και τέλος το $c_4 =$

5 m.u. το εισιτήριο για τους πελάτες της Class 4. Το εισιτήριο στη περίπτωση που οι πελάτες δεν κατανέμονται σε κλάσεις θεωρείται ίσο με αυτό των πελατών που ανήκουν στη Class 4 και αυτό συμβαίνει διότι και στις δύο περιπτώσεις οι πελάτες δεν έχουν πληρώσει για κάποια ιδιαίτερη εξυπηρέτηση από την εκάστοτε εταιρεία. Οι ρυθμοί άφιξης και αναχώρησης που χρησιμοποιήθηκαν στη κάθε περίοδο αναπαρίστανται στο Πίνακα 23 λαμβάνοντας υπόψη ότι $\mu^s = \sum_{j=1}^k \mu_{Class j}^s$. Επιπρόσθετα παρατηρήθηκε ότι οι πελάτες που ανήκουν σε κλάσεις υψηλότερης προτεραιότητας καταφθάνουν στους χώρους στάθμευσης λιγότερο συχνά από ότι οι πελάτες που ανήκουν σε κλάσεις χαμηλότερης προτεραιότητας και ως αποτέλεσμα αυτού μειώνεται ο ρυθμός αφίξεων από περίοδο σε περίοδο. Τα δεδομένα αυτά συναντώνται επίσης στον Πίνακα 23, όπου ισχύει $\lambda_{Class 1}^s < \lambda_{Class 2}^s < \lambda_{Class 3}^s < \lambda_{Class 4}^s$ για όλες τις περιόδους. Τέλος όσον αφορά τους ρυθμούς απελευθέρωσης μιας θέσης ισχύει ότι: $\mu^0 > \mu^1 > \mu^2$.

Traffic Period	Class 1 $\lambda_{Class 1}^s$	Class 2 $\lambda_{Class 2}^s$	Class 3 $\lambda_{Class 3}^s$	Class 4 $\lambda_{Class 4}^s$	Service rate μ^s
$s = 0$	$5 h^{-1}$	$7 h^{-1}$	$9 h^{-1}$	$11 h^{-1}$	$25 h^{-1}$
$s = 1$	$4 h^{-1}$	$6 h^{-1}$	$8 h^{-1}$	$10 h^{-1}$	$20 h^{-1}$
$s = 2$	$2 h^{-1}$	$3 h^{-1}$	$4 h^{-1}$	$5 h^{-1}$	$5 h^{-1}$

Πίνακας 23: Ρυθμοί αφίξεων και αναχωρήσεων και για τις τρεις περιόδους

Από τα δεδομένα που δόθηκαν στους παραπάνω πίνακες, προέκυψε και το πρόβλημα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης που αναλύθηκε στο κομμάτι της μοντελοποίησης του συστήματος και πραγματοποιείται για κάθε περίοδο $s = 0, 1, 2$. Ο τρόπος με τον οποίο επιλύθηκε αναπαρίσταται στον αλγόριθμο του κεφαλαίου 4. Η λύση που προκύπτει από τον αλγόριθμο αυτό, παρουσιάζεται στον Πίνακα 24 ενώ η βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων για όλες τις κλάσεις και για κάθε περίοδο αναπαρίστανται στο Σχήμα 20.

Στην προσπάθεια να ερμηνευθούν τα αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν, το συμπέρασμα που προέκυψε είναι ότι χρησιμοποιώντας τεχνικές βελτιστοποίησης ώστε να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων υπάρχει μείωση στο blocking probability για τους πελάτες όλων των κλάσεων, ακόμη και στη περίπτωση χωρίς καθόλου προτεραιότητα (Class 4). Το συμπέρασμα αυτό έρχεται μέσα από την σύγκριση με τη περίπτωση που δεν υπάρχουν καθόλου κλάσεις πελατών και κατ'επέκταση δέσμευση θέσεων στάθμευσης. Στο σχήμα 21 παρουσιάζεται η συμπεριφορά που έχουν τα blocking probabilities για κάθε κλάση και σε κάθε περίοδο. Επιπρόσθετα, ο αναμενόμενος χρόνος βαδίσματος είναι χαμηλότερος στην περίπτωση των πελατών που ανήκουν σε κλάσεις υψηλότερης προτεραιότητας αποτέλεσμα που είναι λογικό καθώς οι συγκεκριμένες κλάσεις πελατών πρέπει να αντιμετωπίζουν πρόβλημα στην εύρεση διαθέσιμης θέσης στάθμευσης πιο σπάνια. Ωστόσο ο χρόνος αυτός για την Class 1 είναι κατά ένα πολύ μικρό ποσοστό χαμηλότερος σε σχέση με την περίπτωση χωρίς δέσμευση θέσεων και αυτό αποδίδεται στο γεγονός ότι όλο το πρόβλημα είναι με τέτοιο τρόπο

στημένο ώστε να οφείλεται η συγκεκριμένη κλάση με την μεγαλύτερη προτεραιότητα. Αυτό ουσιαστικά συμβαίνει εις βάρος των πελατών που ανήκουν στις κλάσεις 3 έως 4, οι οποίες αντιμετωπίζουν μια αύξηση στον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος τους σε σύγκριση πάντα με την περίπτωση που δεν έχουμε δέσμευση θέσεων. Η βέλτιστη τιμή για τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος για όλες τις κλάσεις και σε κάθε περίοδο παρουσιάζεται στο Σχήμα 22. Συνοψίζοντας, το αναμενόμενο ωριαίο κέρδος στη περίπτωση που έχουμε δέσμευση θέσεων είναι εμφανώς πιο υψηλό. Η πολιτική που ακολουθείται για το κόστος των εισιτηρίων και το γεγονός ότι οι τιμές των blocking probabilities επιτρέπουν σε περισσότερους πελάτες υψηλότερων κλάσεων να εισέλθουν στους χώρους στάθμευσης είναι οι παράγοντες που ενισχύουν το συμπέρασμα αυτό. Τα αποτελέσματα που αφορούν στο κέρδος αντικατοπτρίζονται στο Σχήμα 23, συγκρινόμενα με τη περίπτωση που δεν υπάρχει δέσμευση θέσεων.

Συνοψίζοντας, η προτεινόμενη προσέγγιση κατά την οποία προσφέρονται διαφορετικές προτεραιότητες ανάλογα με την κλάση την οποία ανήκει ένας πελάτης και ταυτόχρονα δεσμεύοντας θέσεις στάθμευσης για τους πελάτες των κλάσεων υψηλότερης προτεραιότητας, (που προτίθενται να πληρώσουν ακριβότερο εισιτήριο ώστε να επωφεληθούν αυτών των πλεονεκτημάτων) τείνει να αυξήσει το κέρδος της εκάστοτε εταιρείας όπως είναι αναμενόμενο. Όσον αφορά στη πλευρά των πελατών, εκείνοι οι οποίοι ανήκουν σε κλάσεις υψηλότερης προτεραιότητας αντιμετωπίζουν λιγότερο συχνά το φαινόμενο αποτυχίας να εισέλθουν στους χώρους στάθμευσης (χαμηλότερο blocking probability) και η λύση σε αυτό έρχεται όταν προτίθενται να πληρώσουν ένα πιο ακριβό εισιτήριο. Επιπρόσθετα οι πελάτες που ανήκουν στην Class 1 είναι σε πλεονεκτικότερη θέση όσο αφορά τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος και αυτό συμβαίνει λόγω της μεγαλύτερης πιθανότητας να βρουν διαθέσιμη θέση στο P1. Σε αντίθεση με όλα αυτά, οι πελάτες που ανήκουν στις κλάσεις 2 έως 4 θα χρειαστεί να περπατήσουν περισσότερο χρόνο μέχρι το τερματικό. Λαμβάνεται επίσης υπόψη το γεγονός ότι οι πελάτες της Class 4 θα πλήρωναν το ίδιο εισιτήριο όπως και στη περίπτωση χωρίς δέσμευση θέσεων, αλλά θα αντιμετώπιζαν χαμηλότερα επίπεδα στα blocking probabilities για κάθε περίοδο αντίστοιχα.

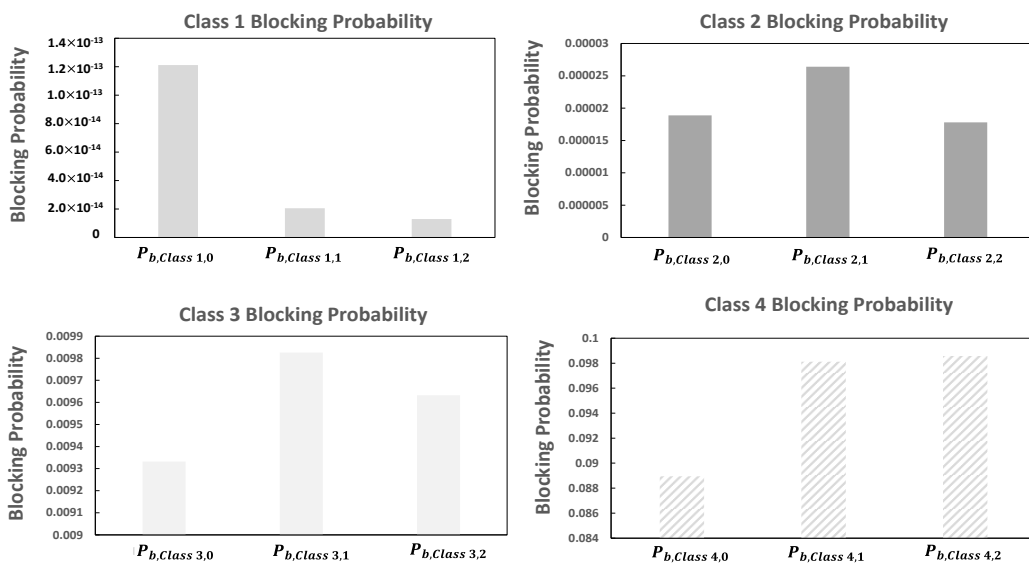
Καταλήγοντας, ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα του προτεινόμενου μοντέλου είναι ότι επωφελούνται από αυτό ταυτόχρονα και η εταιρεία και οι πελάτες της και αυτό δικαιολογεί το γεγονός ότι τα αποτελέσματα εξαρτώνται από τις παραμέτρους που ορίζονται στην αρχή του προβλήματος. Λόγω όλων αυτών που προαναφέρθηκαν είναι λογικό να εξηγηθεί το πώς όλες αυτές οι παράμετροι όπως π.χ. οι ρυθμοί αφίξεων και αναχωρήσεων επηρεάζουν την βέλτιστη λύση του προβλήματος και είναι κάτι το οποίο μελετάται στις παρακάτω παραγράφους και στα διαγράμματα.

Traffic Period	$g_s^{P1^*}$	$g_s^{P2^*}$	$BP_{Class 1,0}^*$	$BP_{Class 2,0}^*$	$BP_{Class 3,0}^*$	$BP_{Class 4,0}^*$	$TEHP_S^{R^*}$
$s = 0$	(2,5,6)	(2,3,6)	1.2×10^{-13}	1.9×10^{-5}	0.00933	0.08895	192.603
			$EWT_{Class 1,0}^{R^*}$	$EWT_{Class 2,0}^{R^*}$	$EWT_{Class 3,0}^{R^*}$	$EWT_{Class 4,0}^{R^*}$	
			5.000023	5.126963	7.552092	8.873205	
$s = 1$	(3,4,6)	(2,3,7)	2.1×10^{-14}	2.6×10^{-5}	0.00982	0.09812	158.700
			$EWT_{Class 1,1}^{R^*}$	$EWT_{Class 2,1}^{R^*}$	$EWT_{Class 3,1}^{R^*}$	$EWT_{Class 4,1}^{R^*}$	
			5.000031	5.173398	7.131304	8.900920	
$s = 2$	(2,5,6)	(2,3,7)	1.3×10^{-14}	1.8×10^{-5}	0.00963	0.09858	79.342
			$EWT_{Class 1,2}^{R^*}$	$EWT_{Class 2,2}^{R^*}$	$EWT_{Class 3,2}^{R^*}$	$EWT_{Class 4,2}^{R^*}$	
			5.000020	5.115044	7.412643	8.709183	

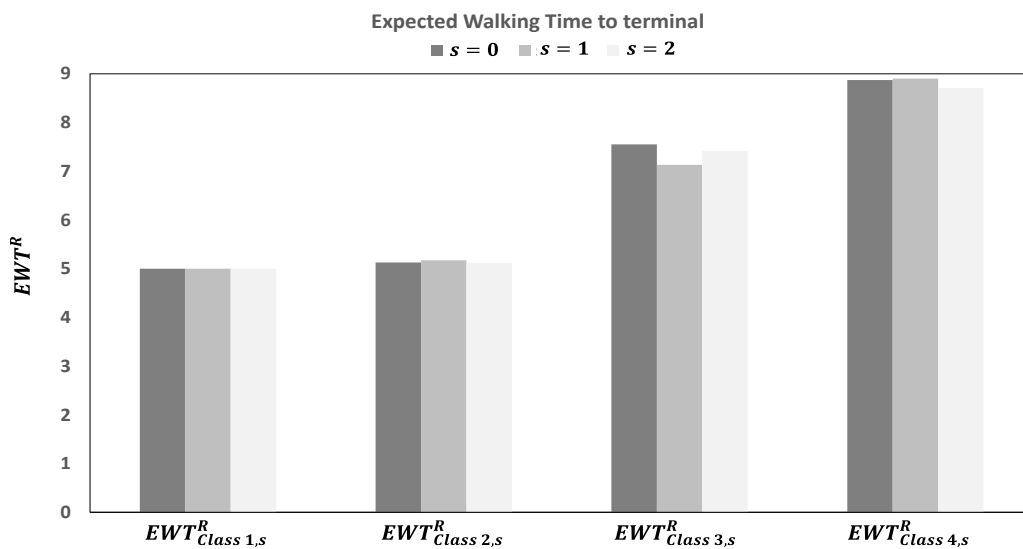
Πίνακας 24: Αποτελέσματα για τη περίπτωση δέσμευσης θέσεων με τέσσερις κλάσεις πελατών



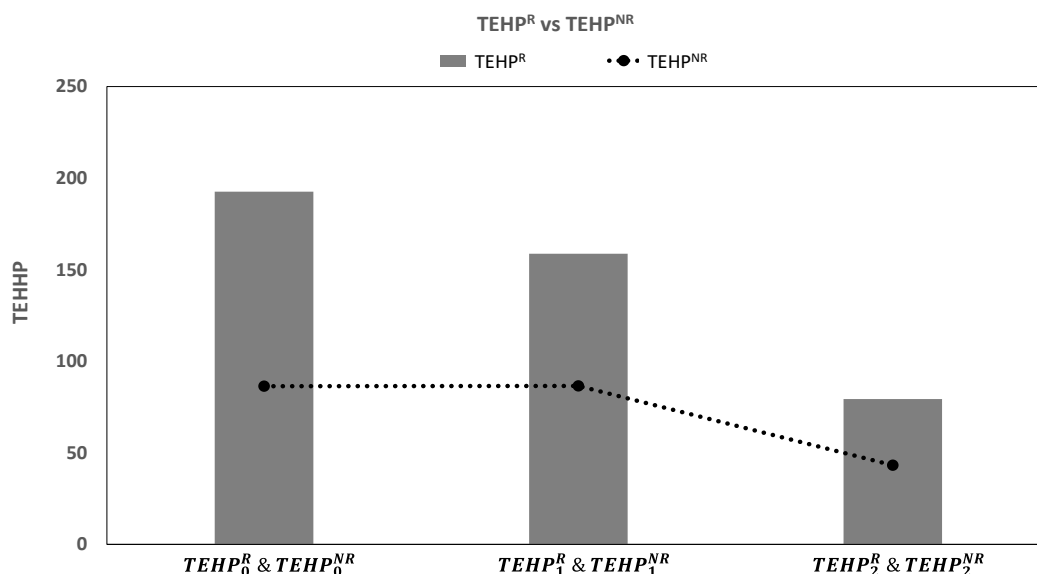
Σχήμα 21: Διάγραμμα καταστάσεων για τη περίπτωση με τέσσερις κλάσεις πελατών και με $N_1 = 7$ και $N_2 = 8$



Σχήμα 22: Βέλτιστες τιμές των blocking probabilities όλων των κλάσεων για κάθε περίοδο



Σχήμα 23: Βέλτιστες τιμές του Αναμενόμενου Χρόνου Βαδίσματος για όλες τις κλάσεις σε κάθε περίοδο



Σχήμα 24: Βέλτιστες τιμές του Αναμενόμενου Ωριαίου Κέρδους για κάθε κλάση συγκριτικά με τη περίπτωση χωρίς δέσμευση θέσεων σε κάθε περίοδο

5.3.5. Αριθμητικά αποτελέσματα για την επιρροή της μεταβολής των ρυθμών μετάβασης και απελευθέρωσης στις μεταβλητές του συστήματος

Όπως είναι εμφανές από τα αποτελέσματα και των τεσσάρων υποπεριπτώσεων του προηγούμενου κεφαλαίου, οι ρυθμοί αφίξεων και αναχωρήσεων μέσα στους χώρους στάθμευσης επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό τα αποτελέσματα των προβλημάτων πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης και αυτό πηγάζει από το γεγονός ότι η κίνηση στους χώρους στάθμευσης εξαρτάται από αυτούς τους ρυθμούς. Στην προσπάθεια να ερμηνευθεί όλο αυτό δημιουργήθηκαν κάποια cases που παρουσιάζονται στον Πίνακα 25. Τα αποτελέσματα αυτών των cases συγκρίνονται με τα αυτά που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Όλες οι περιπτώσεις αναφέρονται στις μεταβολές, στην αύξηση δηλαδή και στη μείωση των ρυθμών άφιξης/αναχώρησης για κάθε κλάση και για κάθε περίοδο $s = 0,1,2$.

Για τη περίπτωση A0, όπου οι ρυθμοί άφιξης όλων των κλάσεων για τη πρώτη περίοδο αυξάνονται, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα στον Πίνακα 26. Ουσιαστικά αυτό που παρουσιάζεται σε αυτό το σημείο έχει να κάνει με τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων για κάθε περίπτωση και τη διαφορά ανάμεσα σε αυτές τις περιπτώσεις συγκριτικά με την αρχική. Αυτό που παρατηρείται αρχικά, είναι ότι υπάρχει μια σημαντική αύξηση στο αναμενόμενο ωριαίο κέρδος για την πρώτη περίοδο κάτι το οποίο είναι αναμενόμενο καθώς οι ρυθμοί άφιξης στη περίοδο αυτή αυξάνονται και έτσι οι χώροι στάθμευσης δέχονται μεγαλύτερο αριθμό πελατών. Όσον αφορά στις υπόλοιπες περιόδους, υπάρχει μια μικρή αύξηση στο αναμενόμενο ωριαίο κέρδος. Για τα blocking probabilities της δεύτερης περιόδου και συγκεκριμένα για τις Class 1, 2 και 3 παρατηρείται μια μικρή αύξηση κάτι το οποίο έχει τη βάση του στην αύξηση της κίνησης μέσα στους χώρους στάθμευσης. Λόγω αυτού, οι πελάτες της Class 4 επωφελούνται εφόσον επιτυγχάνουν χαμηλότερο blocking probability και αυτό πιθανότατα

συμβαίνει λόγω της βέλτιστης πολιτικής δέσμευσης θέσεων βάσει της οποίας διατίθενται λιγότερες δεσμευμένες θέσεις στο P2 συγκριτικά με την αρχική περίπτωση. Έτσι, περισσότεροι από τους πελάτες της Class 4 μπορούν να έχουν πρόσβαση στους χώρους στάθμευσης (ειδικότερα στο P2). Παρόμοια είναι και τα συμπεράσματα για τις υπόλοιπες περιόδους με την μόνη διαφορά ότι στη δεύτερη περίοδο οι Class 2 και 3 έχουν χαμηλότερα blocking probabilities. Από τη πλευρά του αναμενόμενου χρόνου βαδίσματος η Class 4 είναι εκείνη με τον υψηλότερο χρόνο βαδίσματος και αυτό αποδίδεται στο γεγονός ότι οι πελάτες που ανήκουν στη συγκεκριμένη κλάση εισέρχονται στο P2 συχνότερα επομένως διανύουν περισσότερο χρόνο προς το τερματικό.

Για τη περίπτωση που οι ρυθμοί άφιξης όλων των κλάσεων στη πρώτη περίοδο μειώνονται όπως στη περίπτωση B0, η προτεινόμενη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων διαφέρει συγκριτικά με την αρχική περίπτωση που παρουσιάζεται στον Πίνακα 27. Αυτό που παρατηρείται αρχικά, είναι η μείωση στο αναμενόμενο ωριαίο κέρδος για τη πρώτη περίοδο και αυτό συμβαίνει διότι οι εισερχόμενοι πελάτες μειώνονται. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η Class 1 εκμεταλλεύεται την μείωση των αφίξεων και τα μειωμένα blocking probabilities για όλες τις περιόδους. Επιπλέον, καθώς μειώνεται και ο αναμενόμενος χρόνος βαδίσματος οι δεσμευμένες θέσεις στάθμευσης για την συγκεκριμένη κλάση μειώνονται.

Η περίπτωση A1 παρουσιάζει την αύξηση στους ρυθμούς άφιξης για όλες τις κλάσεις στη δεύτερη περίοδο. Πιο συγκεκριμένα, ο Πίνακας 28 παρουσιάζει τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων για αυτή τη περίπτωση καθώς και τις διαφορές των blocking probabilities και του αναμενόμενου χρόνου βαδίσματος συγκριτικά με την αρχική περίπτωση. Από τα πρώτα πράγματα που παρατηρούνται, είναι ότι το αναμενόμενο ωριαίο κέρδος στη πρώτη περίοδο αυξάνεται λόγω της αύξησης του αριθμού των εισερχόμενων πελατών. Επιπρόσθετα, αξίζει να σημειωθεί πως με παρόμοιο τρόπο όπως και στη περίπτωση A0, οι πελάτες της Class 4 επωφελούνται από πλευράς των blocking probability, εφόσον υπάρχει αύξηση των διαθέσιμων θέσεων στο P2.

Αμέσως μετά παρουσιάζεται η περίπτωση B1, στην οποία πραγματοποιείται μείωση στους ρυθμούς άφιξης για όλες τις κλάσεις στη δεύτερη περίοδο. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν όσον αφορά την βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων καθώς και οι διαφορές στις παραμέτρους σε σύγκριση με την αρχική περίπτωση παρουσιάζονται στον Πίνακα 29. Όπως ήταν αναμενόμενο, η εμφανώς μειωμένη κίνηση οδήγησε σε σημαντική μείωση του αναμενόμενου κέρδους για τη δεύτερη περίοδο. Επιπλέον παρατηρήθηκε ότι η αύξηση της κίνησης στους χώρους στάθμευσης οδήγησε σε αύξηση των δεσμευμένων θέσεων για τους πελάτες που ανήκουν σε κλάσεις υψηλότερης προτεραιότητας μειώνοντας έτσι το blocking probability για την Class 1.

Η περίπτωση A2 αντικατοπτρίζει την περίπτωση που υπάρχει αύξηση στους ρυθμούς άφιξης στη Τρίτη περίοδο. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν σε αυτή τη περίπτωση παρουσιάζονται στο Πίνακα 30. Όπως είναι προφανές ερμηνεύοντας τα αποτελέσματα το αναμενόμενο κέρδος στη περίοδο αυτή αυξάνεται γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με την κίνηση μέσα στους χώρους στάθμευσης. Παρομοίως και σε αυτή τη περίπτωση ο συνολικός αριθμός των δεσμευμένων θέσεων στο P2 είναι χαμηλότερος συγκριτικά με την αρχική περίπτωση αποδεικνύοντας έτσι ότι η Class 4 έχει χαμηλότερα blocking probabilities.

Στον Πίνακα 31, τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται αφορούν τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων καθώς και στις διαφορές στο αναμενόμενο κέρδος τα blocking probabilities και τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος για την περίπτωση B2 των μειωμένων ρυθμών άφιξης για τη τρίτη περίοδο. Σε παρόμοιο μοτίβο με τις προηγούμενες περιπτώσεις όπου υπήρχε μείωση στους ρυθμούς άφιξης, το αναμενόμενο κέρδος στη τρίτη περίοδο μειώνεται, ενώ ταυτόχρονα η Class 4 επωφελείται λόγω των blocking probabilities.

Έχοντας μια συνολική εικόνα για το σύστημα και τις μεταβλητές που υπάρχουν σε αυτό, θεωρείται πως και οι ρυθμοί με τους οποίους απελευθερώνεται μια θέση είναι σημαντικοί για την διαθεσιμότητα και την αξιοπιστία των χώρων στάθμευσης και μπορούν να επηρεάσουν τη λύση του προβλήματος πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης. Για τον λόγο αυτό, δημιουργήθηκαν οι περιπτώσεις που παρουσιάζονται στο Πίνακα 32 στις οποίες συγκρίνονται τα αποτελέσματα τους με αυτά της αρχικής περίπτωσης. Όλες αυτές οι υποθέσεις και τα συμπεράσματα πραγματοποιούνται για κάθε περίοδο $s = 0,1,2$.

Στον Πίνακα 33, παρουσιάζεται η βέλτιστη πολιτική δέσμευσης πόρων μαζί με τις διαφορές των blocking probabilities σε σχέση με την αρχική περίπτωση, τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος καθώς και το αναμενόμενο κέρδος. Η περίπτωση αυτή είναι η C0 όπου εκεί θεωρήθηκε ότι ο ρυθμός απελευθέρωσης μια θέσης στη πρώτη περίοδο αυξάνεται. Είναι αξιοσημείωτο επίσης ότι οι μεταβολές στο αναμενόμενο κέρδος δεν είναι σημαντικές και αυτό αποδίδεται στο γεγονός ότι υπάρχει μικρή μείωση στο blocking probability της Class 1 καθώς και στον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος που ισχύει για όλες τις περιόδους. Η αλλαγή στο blocking probability της Class 1 οφείλεται στο ότι σύμφωνα με τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων οι διαθέσιμες θέσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο από πελάτες της Class 1 μειώνονται.

Στη περίπτωση D0 εξετάζεται η μείωση των ρυθμών απελευθέρωσης μια θέσης στη πρώτη περίοδο και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Πίνακα 34. Αυτό που αξίζει να σημειωθεί σε αυτή τη περίπτωση είναι ότι το blocking probability της Class 4 μειώνεται σε όλες τις περιόδους. Αυτό συμβαίνει διότι στα αποτελέσματα της βέλτιστης πολιτικής δέσμευσης θέσεων παρατηρήθηκε η

μείωση των δεσμευμένων θέσεων στο P2, και ως αποτέλεσμα αυτού η Class 4 μπορεί να έχει πρόσβαση σε περισσότερες θέσεις στο P2.

Συνοψίζοντας, όταν ο ρυθμός απελευθέρωσης μιας θέσης στη δεύτερη περίοδο αυξάνεται (όπως υποδηλώνει η περίπτωση C1), τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι αυτά στον Πίνακα 35 και υποδεικνύουν ότι η Class 1, όπως και στη περίπτωση C0 σύμφωνα με τη βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων έχει μειωμένες διαθέσιμες θέσεις.

Έτσι με παρόμοιο τρόπο όπως και στη περίπτωση D0, στη περίπτωση D1 όπου υπάρχει μείωση του ρυθμού απελευθέρωσης για τη δεύτερη περίοδο, το blocking probability της Class 4 μειώνεται για όλες τις περιόδους και αυτό φαίνεται και στον Πίνακα 36.

Τέλος, η αύξηση όπως στη περίπτωση C2, καθώς και η μείωση όπως στη περίπτωση D2, του ρυθμού απελευθέρωσης στην τρίτη περίοδο, επηρεάζει τα παραγόμενα αποτελέσματα με τέτοιο τρόπο όπως και στις άλλες δυο περιόδους, κάτι το οποίο αναλύεται στους Πίνακες 37 και 38 αντίστοιχα.

Traffic period	Case	Arrival rates (in h^{-1})			
		$\lambda_{Class 1}^s$	$\lambda_{Class 2}^s$	$\lambda_{Class 3}^s$	$\lambda_{Class 4}^s$
$s = 0$	A0	6	8	10	12
	B0	4.5	6	8	10
$s = 1$	A1	4.5	7	9	11
	B1	3.5	5	7	9
$s = 2$	A2	2.5	3.5	4.5	5.2
	B2	1.5	2.5	3.5	4.5

Πίνακας 25: Περιπτώσεις μελέτης για την επιρροή της μεταβολής των ρυθμών αναχωρήσεων

Traffic Period	Case A0		Differences: Case A0 - Initial Case				
	g_s^{P1*}	g_s^{P1*}	$\Delta BP_{Class 1,0}$	$\Delta BP_{Class 2,0}$	$\Delta BP_{Class 3,0}$	$\Delta BP_{Class 4,0}$	$\Delta TEHP_0^R$
$s = 0$	(3,4,6)	(2,3,4)	2.92×10^{-11}	1.82×10^{-5}	5.58×10^{-4}	-0.0078	25.933
			$\Delta EWT_{Class 1,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 2}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,0}^R$	
$s = 1$	(2,5,6)	(2,3,4)	3.71×10^{-5}	0.1072621	-0.14262255	0.24656004	0.95
			$\Delta BP_{Class 1,1}$	$\Delta BP_{Class 2,1}$	$\Delta BP_{Class 3,1}$	$\Delta BP_{Class 4,1}$	
$s = 2$	(3,4,6)	(2,3,5)	2.03×10^{-11}	-4.82×10^{-7}	-4.6×10^{-4}	-0.018	0.291
			$\Delta EWT_{Class 1,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 2}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,1}^R$	
$s = 2$	(3,4,6)	(2,3,5)	1.03×10^{-5}	-0.0126348	0.54062427	0.04768229	0.291
			$\Delta BP_{Class 1,2}$	$\Delta BP_{Class 2,2}$	$\Delta BP_{Class 3,2}$	$\Delta BP_{Class 4,2}$	
$s = 2$	(3,4,6)	(2,3,5)	3.42×10^{-12}	1.73×10^{-5}	3.5×10^{-4}	-0.012	0.291
			$\Delta EWT_{Class 1,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 2}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,2}^R$	
$s = 2$	(3,4,6)	(2,3,5)	3.37×10^{-5}	0.1000547	-0.11821581	0.3059369	0.291
			$\Delta EWT_{Class 1,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 2}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,2}^R$	

Πίνακας 26: Σύγκριση της αρχικής βέλτιστης πολιτικής δέσμευσης θέσεων με την περίπτωση αύξησης του ρυθμού αφίξεων στη πρώτη περίοδο (Case A0)

Traffic Period	Case B0		Differences: Case B0 - Initial Case				
	g_s^{P1*}	g_s^{P1*}	$\Delta BP_{Class 1,0}$	$\Delta BP_{Class 2,0}$	$\Delta BP_{Class 3,0}$	$\Delta BP_{Class 4,0}$	$\Delta TEHP_0^R$
$s = 0$	(2,3,8)	(2,3,7)	-1.2×10^{-13}	1.16×10^{-5}	0.00032	0.00146	-21.59
			$\Delta EWT_{Class 1,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,0}^R$	
			-0.00002047	0.16866453	-0.24200608	-0.1073195	
$s = 1$	(2,3,8)	(2,3,7)	$\Delta BP_{Class 1,1}$	$\Delta BP_{Class 2,1}$	$\Delta BP_{Class 3,1}$	$\Delta BP_{Class 4,1}$	$\Delta TEHP_1^R$
			-1.96×10^{-14}	-9.42×10^{-7}	-0.00133	-0.0152	0.811
			$\Delta EWT_{Class 1,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,1}^R$	
			-0.00002883	0.09976892	0.06857727	-0.19976673	
$s = 2$	(2,3,7)	(2,3,8)	$\Delta BP_{Class 1,2}$	$\Delta BP_{Class 2,2}$	$\Delta BP_{Class 3,2}$	$\Delta BP_{Class 4,2}$	$\Delta TEHP_2^R$
			-1.25×10^{-14}	1.05×10^{-5}	0.00076	0.00076	-0.008
			$\Delta EWT_{Class 1,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,2}^R$	
			-0.00001154	0.13988523	-0.33913033	-0.27312538	

Πίνακας 27: Σύγκριση της αρχικής βέλτιστης πολιτικής δέσμησης θέσεων με την περίπτωση μείωσης του ρυθμού αφίξεων στη πρώτη περίοδο (Case B0)

Traffic Period	Case A1		Differences: Case A1 - Initial Case				
	g_s^{P1*}	g_s^{P1*}	$\Delta BP_{Class 1,0}$	$\Delta BP_{Class 2,0}$	$\Delta BP_{Class 3,0}$	$\Delta BP_{Class 4,0}$	$\Delta TEHP_0^R$
$s = 0$	(3,4,6)	(2,3,4)	2.34×10^{-11}	1.81×10^{-5}	0.000635	-0.00715	0.358
			$\Delta EWT_{Class 1,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,0}^R$	
			0.00002928	0.10344531	-0.1439675	0.24711832	
$s = 1$	(2,4,7)	(2,3,4)	$\Delta BP_{Class 1,1}$	$\Delta BP_{Class 2,1}$	$\Delta BP_{Class 3,1}$	$\Delta BP_{Class 4,1}$	$\Delta TEHP_1^R$
			6.4×10^{-12}	8.75×10^{-6}	4.84×10^{-5}	-0.018	21.445
			$\Delta EWT_{Class 1,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,1}^R$	
			-0.00001713	0.06718502	0.4584628	0.01289277	
$s = 2$	(2,4,7)	(2,3,4)	$\Delta BP_{Class 1,2}$	$\Delta BP_{Class 2,2}$	$\Delta BP_{Class 3,2}$	$\Delta BP_{Class 4,2}$	$\Delta TEHP_2^R$
			6.02×10^{-12}	1.64×10^{-5}	2.67×10^{-5}	-0.019	0.49
			$\Delta EWT_{Class 1,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,2}^R$	
			-0.00000678	0.12085151	0.1535886	0.1895693	

Πίνακας 28: Σύγκριση της αρχικής βέλτιστης πολιτικής δέσμησης θέσεων με την περίπτωση αύξησης του ρυθμού αφίξεων στη δεύτερη περίοδο (Case A1)

Traffic Period	Case B1		Differences: Case B1 - Initial Case				
	g_s^{P1*}	g_s^{P1*}	$\Delta BP_{Class 1,0}$	$\Delta BP_{Class 2,0}$	$\Delta BP_{Class 3,0}$	$\Delta BP_{Class 4,0}$	$\Delta TEHP_0^R$
$s = 0$	(2,3,8)	(2,3,7)	-1.2×10^{-13}	8.22×10^{-6}	-0.00033	-0.00253	0.157
			$\Delta EWT_{Class 1,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,0}^R$	
			-0.00002072	0.1567318	-0.27851081	-0.11157126	
$s = 1$	(2,3,7)	(2,3,8)	$\Delta BP_{Class 1,1}$	$\Delta BP_{Class 2,1}$	$\Delta BP_{Class 3,1}$	$\Delta BP_{Class 4,1}$	$\Delta TEHP_1^R$
			-2.01×10^{-14}	2.17×10^{-6}	0.0000863	0.00114	-20.514
			$\Delta EWT_{Class 1,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,1}^R$	
			-0.00002251	0.0863625	-0.02719967	-0.43975142	
$s = 2$	(2,3,8)	(2,3,7)	$\Delta BP_{Class 1,2}$	$\Delta BP_{Class 2,2}$	$\Delta BP_{Class 3,2}$	$\Delta BP_{Class 4,2}$	$\Delta TEHP_2^R$
			-1.28×10^{-14}	8.28×10^{-6}	-0.000029	0.000424	-0.009
			$\Delta EWT_{Class 1,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,2}^R$	
			-0.00001833	0.1378898	-0.30007558	-0.15504097	

Πίνακας 29: Σύγκριση της αρχικής βέλτιστης πολιτικής δέσμησης θέσεων με την περίπτωση μείωσης του ρυθμού αφίξεων στη δεύτερη περίοδο (Case B1)

Traffic Period	Case A2		Differences: Case A2 - Initial Case				
	g_s^{P1*}	g_s^{P1*}					
$s = 0$	(2,4,5)	(2,3,4)	$\Delta BP_{Class 1,0}$	$\Delta BP_{Class 2,0}$	$\Delta BP_{Class 3,0}$	$\Delta BP_{Class 4,0}$	$\Delta TEHP_0^R$
			1.1×10^{-10}	2.0×10^{-5}	0.000524	-0.011	
			$\Delta EWT_{Class 1,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,0}^R$	
			0.00023715	0.12191576	-0.11267203	0.20380846	0.566
$s = 1$	(2,4,7)	(2,3,4)	$\Delta BP_{Class 1,1}$	$\Delta BP_{Class 2,1}$	$\Delta BP_{Class 3,1}$	$\Delta BP_{Class 4,1}$	$\Delta TEHP_1^R$
			9.46×10^{-12}	1.1×10^{-5}	0.00016	-0.019	
			$\Delta EWT_{Class 1,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,1}^R$	
			-0.00001163	0.08932284	0.52579814	0.0500309	0.95
$s = 2$	(3,4,6)	(2,3,5)	$\Delta BP_{Class 1,2}$	$\Delta BP_{Class 2,2}$	$\Delta BP_{Class 3,2}$	$\Delta BP_{Class 4,2}$	$\Delta TEHP_2^R$
			3.61×10^{-12}	1.76×10^{-5}	0.0003	-0.013	
			$\Delta EWT_{Class 1,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,2}^R$	
			0.0000403	0.11034391	-0.07723364	0.32770083	11.22

Πίνακας 30: Σύγκριση της αρχικής βέλτιστης πολιτικής δέσμησης θέσεων με την περίπτωση αύξησης του ρυθμού αφίξεων στη τρίτη περίοδο (Case A2)

Traffic Period	Case B2		Differences: Case B2 - Initial Case				
	g_s^{P1*}	g_s^{P1*}					
$s = 0$	(2,3,8)	(2,3,7)	$\Delta BP_{Class 1,0}$	$\Delta BP_{Class 2,0}$	$\Delta BP_{Class 3,0}$	$\Delta BP_{Class 4,0}$	$\Delta TEHP_0^R$
			-1.21×10^{-13}	5.52×10^{-6}	-0.00086	-0.0058	
			$\Delta EWT_{Class 1,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,0}^R$	
			-0.00002159	0.12914989	-0.35983534	-0.14501721	0.369
$s = 1$	(2,4,7)	(2,3,8)	$\Delta BP_{Class 1,1}$	$\Delta BP_{Class 2,1}$	$\Delta BP_{Class 3,1}$	$\Delta BP_{Class 4,1}$	$\Delta TEHP_1^R$
			-2.04×10^{-14}	-1.0×10^{-5}	-0.00104	0.000412	
			$\Delta EWT_{Class 1,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,1}^R$	
			-0.00002782	-0.03524923	0.03483878	-0.30705849	0.021
$s = 2$	(2,3,8)	(2,3,8)	$\Delta BP_{Class 1,2}$	$\Delta BP_{Class 2,2}$	$\Delta BP_{Class 3,2}$	$\Delta BP_{Class 4,2}$	$\Delta TEHP_2^R$
			-1.3×10^{-14}	7.7×10^{-6}	-0.000235	-0.00073	
			$\Delta EWT_{Class 1,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,2}^R$	
			-0.000019	0.12340234	-0.33157843	-0.16253184	-12.21

Πίνακας 31: Σύγκριση της αρχικής βέλτιστης πολιτικής δέσμησης θέσεων με την περίπτωση μείωσης του ρυθμού αφίξεων στη τρίτη περίοδο (Case B2)

Traffic period	Case	Service rates μ^s (in h^{-1})
$s = 0$	C0	28
	D0	22
$s = 1$	C1	22
	D1	18
$s = 2$	C2	6
	D2	4.5

Πίνακας 32: Περιπτώσεις μελέτης για την επιρροή της μεταβολής των ρυθμών αναχωρήσεων

Traffic Period	Case C0		Differences: Case C0 - Initial Case				
	g_s^{P1*}	g_s^{P1*}	$\Delta BP_{Class 1,0}$	$\Delta BP_{Class 2,0}$	$\Delta BP_{Class 3,0}$	$\Delta BP_{Class 4,0}$	$\Delta TEHP_0^R$
$s = 0$	(2,3,8)	(2,3,7)	-1.2×10^{-13}	1.34×10^{-5}	0.00051	0.0021	-0.143
			$\Delta EWT_{Class 1,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,0}^R$	
			-0.00002047	0.17370256	-0.22903518	-0.10473206	
$s = 1$	(2,3,8)	(2,3,7)	-1.96×10^{-14}	8.9×10^{-7}	-0.00114	-0.015	0.777
			$\Delta EWT_{Class 1,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,1}^R$	
			-0.00002883	0.10520808	0.0837867	-0.19574782	
$s = 2$	(2,3,8)	(2,3,7)	-1.21×10^{-14}	8.03×10^{-6}	-0.00125	-0.017	0.45
			$\Delta EWT_{Class 1,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,2}^R$	
			-0.0000181	0.15464201	-0.2346494	-0.03074609	

Πίνακας 33: Σύγκριση της αρχικής βέλτιστης πολιτικής δέσμευσης θέσεων με την περίπτωση αύξησης του ρυθμού αναχωρήσεων στη πρώτη περίοδο (Case C0)

Traffic Period	Case D0		Differences: Case D0 - Initial Case				
	g_s^{P1*}	g_s^{P1*}	$\Delta BP_{Class 1,0}$	$\Delta BP_{Class 2,0}$	$\Delta BP_{Class 3,0}$	$\Delta BP_{Class 4,0}$	$\Delta TEHP_0^R$
$s = 0$	(3,4,5)	(2,3,4)	7.9×10^{-11}	1.7×10^{-5}	0.00043	-0.0084	0.437
			$\Delta EWT_{Class 1,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,0}^R$	
			0.000175112	0.09502115	-0.20685651	0.15700489	
$s = 1$	(2,5,6)	(2,3,4)	1.62×10^{-11}	-1.4×10^{-6}	-0.00027	-0.016	0.827
			$\Delta EWT_{Class 1,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,1}^R$	
			0.00000457	-0.01938492	0.52332219	0.03432642	
$s = 2$	(2,4,7)	(2,3,8)	6.15×10^{-12}	1.53×10^{-5}	6.5×10^{-5}	-0.018	0.462
			$\Delta EWT_{Class 1,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,2}^R$	
			-0.00000661	0.11651216	0.13499103	0.17437019	

Πίνακας 34: Σύγκριση της αρχικής βέλτιστης πολιτικής δέσμευσης θέσεων με την περίπτωση μείωσης του ρυθμού αναχωρήσεων στη πρώτη περίοδο (Case D0)

Traffic Period	Case C1		Differences: Case C1 - Initial Case				
	g_s^{P1*}	g_s^{P1*}	$\Delta BP_{Class 1,0}$	$\Delta BP_{Class 2,0}$	$\Delta BP_{Class 3,0}$	$\Delta BP_{Class 4,0}$	$\Delta TEHP_0^R$
$s = 0$	(2,4,7)	(2,3,7)	-1.18×10^{-13}	3.1×10^{-6}	-9.1×10^{-5}	0.0025	-0.133
			$\Delta EWT_{Class 1,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,0}^R$	
			-0.00001645	0.05234505	-0.16030561	-0.08779224	
$s = 1$	(2,3,8)	(2,3,7)	-1.93×10^{-14}	4.3×10^{-6}	-0.00047	-0.0104	0.54
			$\Delta EWT_{Class 1,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,1}^R$	
			-0.00002859	0.11668896	0.12260557	-0.18726939	
$s = 2$	(2,3,8)	(2,3,7)	-1.2×10^{-14}	9.8×10^{-6}	-0.00091	-0.015	0.39
			$\Delta EWT_{Class 1,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,2}^R$	
			-0.00001794	0.15938273	-0.22497245	-0.03822728	

Πίνακας 35: Σύγκριση της αρχικής βέλτιστης πολιτικής δέσμευσης θέσεων με την περίπτωση αύξησης του ρυθμού αναχωρήσεων στη δεύτερη περίοδο (Case C1)

Traffic Period	Case D1		Differences: Case D1 - Initial Case				
	g_s^{P1*}	g_s^{P1*}	$\Delta BP_{Class 1,0}$	$\Delta BP_{Class 2,0}$	$\Delta BP_{Class 3,0}$	$\Delta BP_{Class 4,0}$	$\Delta TEHP_0^R$
$s = 0$	(2,5,6)	(2,3,4)	1.5×10^{-11}	5.7×10^{-6}	0.00028	-0.0073	0.386
			$\Delta EWT_{Class 1,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,0}^R$	
			0.00001121	0.02743170	0.14494592	0.10668477	
$s = 1$	(2,5,6)	(2,3,5)	1.7×10^{-12}	-2.3×10^{-6}	0.000125	-0.0094	0.466
			$\Delta EWT_{Class 1,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,1}^R$	
			0.00000059	-0.02853338	0.46705454	-0.03169615	
$s = 2$	(2,5,6)	(2,3,5)	1.6×10^{-12}	5.3×10^{-6}	6.16×10^{-5}	-0.0113	0.28
			$\Delta EWT_{Class 1,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,2}^R$	
			0.00001025	0.02630080	0.15822154	0.14410406	

Πίνακας 36: Σύγκριση της αρχικής βέλτιστης πολιτικής δέσμησης θέσεων με την περίπτωση μείωσης του ρυθμού αναχωρήσεων στη δεύτερη περίοδο (Case D1)

Traffic Period	Case C2		Differences: Case C2 - Initial Case				
	g_s^{P1*}	g_s^{P1*}	$\Delta BP_{Class 1,0}$	$\Delta BP_{Class 2,0}$	$\Delta BP_{Class 3,0}$	$\Delta BP_{Class 4,0}$	$\Delta TEHP_0^R$
$s = 0$	(2,4,7)	(2,3,8)	-1.21×10^{-13}	3.4×10^{-7}	-9.43×10^{-5}	0.0180	-0.592
			$\Delta EWT_{Class 1,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,0}^R$	
			-0.00001814	0.02849587	-0.29500228	-0.21823738	
$s = 1$	(2,3,8)	(2,3,8)	-2.05×10^{-14}	1.6×10^{-6}	-0.000356	-0.00205	0.117
			$\Delta EWT_{Class 1,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,1}^R$	
			-0.00002923	0.08561878	0.00470703	-0.310267302	
$s = 2$	(2,3,8)	(2,3,8)	-1.3×10^{-14}	8.7×10^{-6}	-0.000487	-0.00464	0.125
			$\Delta EWT_{Class 1,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,2}^R$	
			-0.00001847	0.13616851	-0.31022985	-0.14131453	

Πίνακας 37: Σύγκριση της αρχικής βέλτιστης πολιτικής δέσμησης θέσεων με την περίπτωση αύξησης του ρυθμού αναχωρήσεων στη τρίτη περίοδο (Case C2)

Traffic Period	Case D2		Differences: Case D2 - Initial Case				
	g_s^{P1*}	g_s^{P1*}	$\Delta BP_{Class 1,0}$	$\Delta BP_{Class 2,0}$	$\Delta BP_{Class 3,0}$	$\Delta BP_{Class 4,0}$	$\Delta TEHP_0^R$
$s = 0$	(2,5,6)	(2,3,4)	1.29×10^{-11}	4.31×10^{-6}	6.41×10^{-5}	-0.00814	0.444
			$\Delta EWT_{Class 1,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,0}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,0}^R$	
			0.00001008	0.02634218	0.152927	0.12113071	
$s = 1$	(2,5,6)	(2,3,5)	1.53×10^{-12}	-3.61×10^{-6}	-8.6×10^{-5}	-0.0102	0.52
			$\Delta EWT_{Class 1,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,1}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,1}^R$	
			-0.00000044	-0.02959873	0.47241839	-0.01898308	
$s = 2$	(2,4,7)	(2,3,5)	5.85×10^{-13}	1.31×10^{-5}	0.000326	-0.0124	0.304
			$\Delta EWT_{Class 1,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 2,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 3,2}^R$	$\Delta EWT_{Class 4,2}^R$	
			-0.00000852	0.10401896	0.09012652	0.1228414	

Πίνακας 38: Σύγκριση της αρχικής βέλτιστης πολιτικής δέσμησης θέσεων με την περίπτωση μείωσης του ρυθμού αναχωρήσεων στη τρίτη περίοδο (Case D2)

Τα αριθμητικά παραδείγματα που παρουσιάστηκαν στις παραπάνω περιπτώσεις είναι ενδεικτικά καθώς θα υπάρχουν και περιπτώσεις στις οποίες οι μεταβολές στους ρυθμούς αφίξεων και αναχωρήσεων δεν θα δίνουν τόσο ξεκάθαρα αποτελέσματα. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η αύξηση του της μιας παραμέτρου δεν θα συνεπάγεται απαραίτητα τη μείωση του άλλου και από την πλευρά της εταιρείας θα πρέπει να υπάρξει αναδιαμόρφωση των θέσεων που οφείλει να δεσμεύσει για τις κλάσεις υψηλότερης προτεραιότητας. Ως αποτέλεσμα όλων αυτών, η εταιρεία που διαχειρίζεται τους χώρους αυτούς θα πρέπει να ορίσει με την απαραίτητη προσοχή τα ανώτατα όρια για καθεμιά από τις κλάσεις των πελατών ώστε να δίνεται πάντα η βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων και κατ' επέκταση να εξυπηρετούνται σωστά όλοι οι πελάτες.

Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα και μελλοντικές προοπτικές έρευνας

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως κεντρική ιδέα την μελέτη ενός συστήματος που αποτελείται από δυο χώρους στάθμευσης οι οποίοι δέχονται πελάτες που διαχωρίζονται σε κλάσεις ανάλογα με το χρηματικό αντίτιμο (εισιτήριο) που καταβάλουν. Οι χώροι αυτοί βρίσκονται πλησίον ενός αεροδρομίου με τον πρώτο (P1) να βρίσκεται πλησιέστερα συγκριτικά με τον δεύτερο (P2). Βασικός στόχος της εργασίας είναι η ελαχιστοποίηση της πιθανότητας να μείνει εκτός των χώρων στάθμευσης η κλάση με τη μεγαλύτερη προτεραιότητα. Παράλληλα με αυτό, η εταιρία που διαχειρίζεται τους χώρους αυτούς, οφείλει να διατηρήσει και τα επίπεδα αποκλεισμού των υπόλοιπων κλάσεων πελατών χαμηλά. Η μελέτη του συστήματος σε αυτή τη περίπτωση έγινε με τη βοήθεια των Ομογενών Μαρκοβιανών Αλυσίδων Συνεχούς Χρόνου, η οποία παρουσιάστηκε στο θεωρητικό κομμάτι της εργασίας. Οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται στο κομμάτι της μοντελοποίησης του συστήματος αφορούν στους ρυθμούς με τους οποίους εισέρχονται οι πελάτες αλλά και τους ρυθμούς απελευθέρωσης μιας θέσης, και με βάση αυτές τις παραμέτρους υπολογίζονται οι πιθανότητες αποκλεισμού κάθε κλάσης. Βασικό χαρακτηριστικό του συστήματος είναι πως ένας εισερχόμενος πελάτης φτάνει αρχικά στον πρώτο χώρο στάθμευσης και στη περίπτωση που δεν υπάρχει ελεύθερη θέση για την κλάση στην οποία ανήκει μεταβαίνει στον δεύτερο χώρο στάθμευσης, μέχρι τη στιγμή που δεν θα υπάρχει διαθέσιμη θέση και κατά συνέπεια δεν μπορεί να μπει σε κανέναν χώρο στάθμευσης και χάνεται από το σύστημα. Εκτός από τις πιθανότητες αποκλεισμού, εισήχθησαν και δυο ακόμη δείκτες, οι οποίοι στοχεύουν στον υπολογισμό του συνολικού αναμενόμενου κέρδους της επιχείρησης που διαχειρίζεται τους χώρους στάθμευσης, καθώς και τον χρόνο βαδίσματος ενός πελάτη από τον χώρο που στάθμευσε μέχρι τον τερματικό σταθμό του αεροδρομίου. Εκτός από την εντοπισμό της βέλτιστης πολιτικής δέσμευσης θέσεων για τους πελάτες των κλάσεων υψηλότερης προτεραιότητας και τον υπολογισμό των δεικτών του κέρδους για την επιχείρηση αλλά και του αναμενόμενου χρόνου βαδίσματος προς τον τερματικό σταθμό για κάθε κλάση πελατών, μελετώνται και οι επιπτώσεις που έχουν στα αποτελέσματα αυτά οι μεταβολές των ρυθμών άφιξης/αναχώρησης των πελατών. Στο σύνολο των αποτελεσμάτων, το γενικότερο συμπέρασμα το οποίο εξάγεται είναι πως αυξάνοντας τους ρυθμούς άφιξης/αναχωρήσεων επωφελούνται κυρίως οι κλάσεις υψηλότερης προτεραιότητας καθώς οι πελάτες της μπορούν και εκμεταλλεύονται μεγαλύτερο χώρο στάθμευσης κυρίως στο P1. Οι κλάσεις χαμηλότερης προτεραιότητας παρουσιάζουν υψηλά blocking probabilities και έτσι υπάρχει μειωμένη κίνηση στους χώρους στάθμευσης για τους πελάτες που

ανήκουν σε αυτές σε αντίθεση με τους πελάτες των κλάσεων με την μεγαλύτερη προτεραιότητα. Ως αποτέλεσμα αυτού, το κέρδος για την εταιρία καταφέρνει να εξισορροπηθεί και να μην παρουσιάζει μεγάλη μείωση λόγω του ακριβότερου εισιτηρίου που πληρώνεται από τους πελάτες των κλάσεων με τη μεγαλύτερη προτεραιότητα. Επιπρόσθετα, στις περιπτώσεις με αυξημένη την κίνηση μέσα στους χώρους στάθμευσης παρατηρείται αυξομείωση των δεσμευμένων θέσεων ώστε να μπορέσει το σύστημα να ανταπεξέλθει στα νέα δεδομένα. Σε αυτές τις περιπτώσεις επίσης, παρατηρείται στο μεγαλύτερο ποσοστό αύξηση στον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος καθώς είναι περισσότεροι οι πελάτες εκείνοι που αναγκάζονται να μεταβούν στο P2 λόγω έλλειψης θέσεων στο P1.

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας μελετήθηκε η περίπτωση μοντελοποίησης του συστήματος με Ομογενείς Μαρκοβιανές Αλυσίδες με την διαφορά ότι ο διαχειριστής των χώρων στάθμευσης ενδιαφέρεται πρωτίστως για την μεγιστοποίηση του κέρδους του από την εκμετάλλευσή τους. Ουσιαστικά οι ρυθμοί μετάβασης από μια κατάσταση του συστήματος σε μια άλλη, οι αντίστοιχοι ρυθμοί απελευθέρωσης, καθώς και οι πιθανότητες αποκλεισμού των κλάσεων υπολογίζονται με τον ίδιο τρόπο, όπως και στο πρώτο μέρος της εργασίας. Η διαφορά εντοπίζεται στο κομμάτι της πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης, καθώς στην αντικειμενική συνάρτηση βρίσκεται πλέον η μεγιστοποίηση του αναμενόμενου ημερήσιου κέρδους της επιχείρησης που διαχειρίζεται τους χώρους στάθμευσης, ενώ η ελαχιστοποίηση των πιθανοτήτων αποκλεισμού κάθε κλάσης πελατών αποτελεί περιορισμό του προβλήματος. Ένα αναμενόμενο συμπέρασμα που προκύπτει από τα αποτελέσματα, είναι πως αυξάνοντας την κίνηση και στους δυο χώρους στάθμευσης, αυξάνεται ταυτόχρονα και το ημερήσιο κέρδος της εταιρείας. Το ίδιο ακριβώς συμπέρασμα εξάγεται παρατηρώντας και την μεταβολή των ρυθμών απελευθέρωσης, και αυτό συμβαίνει διότι όσο πιο άμεσα απελευθερωθεί μια θέση στάθμευσης σε καθένα από τα P1 και P2 τόσο πιο άμεσα θα εισέλθουν νέοι πελάτες (αγοράζονται περισσότερα εισιτήρια) αυξάνοντας με αυτό τον τρόπο το συνολικό κέρδος της εταιρείας. Τέλος, η μεταβολή και πιο συγκεκριμένα η αύξηση, του ανώτατου ορίου για κάθε κλάση οδηγεί σε αναπροσαρμογές των δεσμευμένων θέσεων. Αυτό συμβαίνει στη προσπάθεια του συστήματος να ανταπεξέλθει στην αύξηση των πελατών κάτι το οποίο είναι ορατό και στα αποτελέσματα για τις βέλτιστες πολιτικές δέσμευσης θέσεων σε καθένα από τα P1 και P2.

Στο τρίτο μέρος της εργασίας, μελετάται το ίδιο σύστημα υπό διαφορετική σκοπιά. Πιο συγκεκριμένα, βασικός στόχος της εταιρείας παραμένει η ελαχιστοποίηση των πιθανοτήτων αποκλεισμού κάθε κλάσης και κυρίως των κλάσεων με την μεγαλύτερη προτεραιότητα, μόνο που σε αυτή τη περίπτωση αλλάζει ο τρόπος που θα μελετηθεί το σύστημα. Εδώ λαμβάνεται υπόψη το γεγονός ότι η διαδικασία αφίξεων των πελατών δεν συμβαίνει με τον ίδιο σταθερό ρυθμό καθ' όλη τη διάρκεια της ημέρας, καθώς υπάρχουν ώρες αιχμής στην κίνηση στους τερματικούς σταθμούς (περισσότερες αναχωρήσεις ή/και αφίξεις) με συνέπεια κατά τις ώρες αυτές η προσέλευση στους

χώρους στάθμευσης να είναι αυξημένη. Αντιθέτως, υπάρχουν περίοδοι της ημέρας, όπως οι βραδινές ώρες, κατά τις οποίες οι αφίξεις και οι αναχωρήσεις στους τερματικούς σταθμούς είναι μειωμένες, με συνέπεια τη μειωμένη ζήτηση θέσεων στους χώρους στάθμευσης. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι οι ρυθμοί άφιξης των πελατών ή/και οι ρυθμοί αποχώρησης από τους χώρους στάθμευσης δεν είναι σταθεροί καθ' όλη τη διάρκεια της ημέρας, αλλά εξαρτώνται από το χρόνο. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να πρέπει η ημέρα να διαχωριστεί σε περιόδους, ανάλογα με την κίνηση, και για κάθε μια περίοδο επιλύεται το αντίστοιχο πρόβλημα βελτιστοποίησης. Το αποτέλεσμα που προκύπτει περιλαμβάνει μια βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων για τις κλάσεις υψηλότερης προτεραιότητας για κάθε περίοδο της ημέρας ξεχωριστά. Συνοψίζοντας, η μελέτη του συστήματος σε αυτό το σημείο πραγματοποιήθηκε με την ίδια λογική όπως και στη περίπτωση μοντελοποίησης του με τη χρήση Ομογενών Μαρκοβιανών Αλυσίδων Συνεχούς Χρόνου. Επιπλέον, όπως και στην περίπτωση των Ομογενών Μαρκοβιανών Αλυσίδων Συνεχούς Χρόνου, μελετάται και η επίδραση των μεταβολών των ρυθμών αφίξεων και αναχωρήσεων των πελατών στα αποτελέσματα. Το βασικότερο συμπέρασμα το οποίο εξάγεται από τα συγκεκριμένα αποτελέσματα είναι, ότι χρησιμοποιώντας τεχνικές βελτιστοποίησης ώστε να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική δέσμευσης θέσεων τα ποσοστά των κερδών είναι εμφανώς πιο υψηλά συγκριτικά με τη περίπτωση που δεν υπάρχει δέσμευση θέσεων. Επιπλέον, υπάρχει μείωση στο blocking probability για τους πελάτες όλων των κλάσεων και αυτό επιβεβαιώνεται μέσα από την σύγκριση με τη περίπτωση που δεν υπάρχουν καθόλου κλάσεις πελατών και κατ' επέκταση δέσμευση θέσεων στάθμευσης. Τέλος, παρατηρείται από τα αποτελέσματα για τον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος πως ευνοούνται κυρίως οι κλάσεις υψηλότερης προτεραιότητας. Το αποτέλεσμα αυτό είναι λογικό, καθώς το πρόβλημα είναι με τέτοιο τρόπο δομημένο ώστε οι πελάτες των κλάσεων αυτών να μην αντιμετωπίζουν πρόβλημα στην εύρεση διαθέσιμης θέσης στάθμευσης (χαμηλότερο blocking probability). Αυτό ουσιαστικά συμβαίνει εις βάρος των πελατών που ανήκουν στις κλάσεις με χαμηλότερη προτεραιότητα οι οποίες αντιμετωπίζουν μια αύξηση στον αναμενόμενο χρόνο βαδίσματος τους σε σύγκριση πάντα με την περίπτωση που δεν έχουμε δέσμευση θέσεων.

Καταλήγοντας, το βασικότερο συμπέρασμα που εξάγεται από τη μελέτη και τα αποτελέσματα της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι πως τα μοντέλα που παρουσιάστηκαν με τις περιπτώσεις δέσμευσης θέσεων στους χώρους στάθμευσης είχαν καλύτερα αποτελέσματα όσον αφορά στα κέρδη της εταιρίας όσο και στην διαχείριση των εισερχόμενων πελατών σε σύγκριση με τις περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει δέσμευση θέσεων. Πιο συγκεκριμένα όταν οι εισερχόμενοι πελάτες κατανέμονται σε κλάσεις πληρώνοντας το αντίστοιχο εισιτήριο κατοχυρώνουν την αντίστοιχη θέση στάθμευσης. Η εκάστοτε εταιρεία αυτομάτως, έχει εικόνα της χωρητικότητας των δυο χώρων στάθμευσής και πως θα διαχειριστεί τους τυχαίους πελάτες κάτι το οποίο δεν συμβαίνει στη

περίπτωση χωρίς δέσμευση θέσεων πετυχαίνοντας έτσι καλύτερα επίπεδα εξυπηρέτησης. Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι μελετώντας το σύστημα μέσω των Κυκλικών Μη Ομογενών Αλυσίδων τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι πιο κοντά στα πραγματικά δεδομένα καθώς υπάρχουν αποτελέσματα για όλες τις ώρες της ημέρας σε αντίθεση με την πρώτη περίπτωση των Ομογενών Μαρκοβιανών Αλυσίδων.

Χρησιμοποιώντας τη συγκεκριμένη εργασία ως βάση, δυνητικά υπάρχει η επιλογή να μελετηθούν περισσότεροι από δυο χώροι στάθμευσης είτε αστικές, είτε σε ημι-αστικές περιοχές, σε κοντινή μεταξύ τους απόσταση και πάντα κάτω από την ίδια διαχείριση, με σκοπό να διερευνηθεί και σε αυτήν την περίπτωση η επίπτωση που έχει η τεχνική δέσμευσης πόρων τόσο στο κέρδος του διαχειριστή όσο και στις πιθανότητες αποκλεισμού των πελατών.

Παρόλο που τα μοντέλα που παρουσιάστηκαν είναι γενικά, η μελέτη, μέσω των αριθμητικών αποτελεσμάτων, που αφορά στα προβλήματα βελτιστοποίησης, έγινε με τη χρήση μεθόδων αναλυτικής αναζήτησης, γεγονός που αποτρέπει τη μελέτη μοντέλων μεγαλύτερων διαστάσεων. Κατά συνέπεια, αποτελεί επιτακτική ανάγκη η δημιουργία μεθόδων και αλγορίθμων επίλυσης των προβλημάτων αυτών, που μπορούν να ανταποκριθούν και σε μεγαλύτερες διαστάσεις του προβλήματος, σε λογικά χρονικά πλαίσια.

Εκτός αυτού, θα είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον να διερευνηθεί κανείς ποιες πρέπει να είναι οι βέλτιστες τιμές των εισιτηρίων στους χώρους στάθμευσης για κάθε κλάση πελατών λαμβάνοντας υπόψη τόσο τις τιμές των εισιτηρίων στον ανταγωνισμό, όσο και το γεγονός ότι ενδιαφερόμαστε για τη μεγιστοποίηση του κέρδους της επιχείρησης. Αυτή η προοπτική γίνεται ακόμα πιο ενδιαφέρουσα αν θεωρήσουμε σαν μεταβλητές απόφασης του προβλήματος πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης όχι μόνο τις τιμές των εισιτηρίων αλλά (όπως και στην παρούσα εργασία) και το βέλτιστο αριθμό θέσεων που πρέπει να δεσμευτούν για κάθε κλάση προτεραιότητας.

Βιβλιογραφία

- [1]. Alves M. J., & Climaco J. N. (2000). An interactive reference point approach for multiobjective mixed-integer programming using branch-and-bound. *European Journal of Operational Research*, 124(3), 478-474.
- [2]. Andersson J., (2001). *Multiobjective optimization in engineering design*, Linköping
- [3]. Baldi M., and Ofek M., (2000). "Blocking Probability with Time-driven Priority Scheduling". *SCS Symposium on Performance Evaluation of Computer and Telecommunication Systems* doi:10.1.1.34.4300.
- [4]. Chang K-N. and Kim D., (2001). "Optimal prioritized channel allocation in cellular mobile systems", *Computers & Operations Research*, vol.28, pp. 345-356, doi: 10.1016/S0305-0548(99)00121-5.
- [5]. Faragó A., (2008). Efficient blocking probability computation of complex traffic flows for network dimensioning, *Computers & Operations Research*, 35(12), 3834-3847.
- [6]. Foster I., Roy A., Sander V., (2000). A quality of service architecture that combines resource reservation and application adaptation, *Eighth International Workshop on Quality of Service (IWQOS. 2000)*, 181-188
- [7]. Haring G., Marie R., Puigjaner R. and Trivedi K. S., (2001). "Loss Formulas and Their Application to Optimization for Cellular Networks", *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 50(3), pp. 664-673, doi: 10.1109/25.933303.
- [8]. Ioannou K., Louvros S., Panoutsopoulos I., Kotsopoulos S. & Karagiannidis G. K., (2002). Optimizing the handover call blocking probability in cellular networks with high speed moving terminals, *IEEE Communications Letters*, 6(10), 422- 424.
- [9]. Koutras V. P., Platis A. N. and Gravvanis G.A., (2009a). "Optimal Server Resource Reservation Policies for Priority Classes of Users under Cyclic Non-Homogeneous Markov Modeling". *European Journal of Operational Research*, vol. 198, pp. 545-556, doi: doi:10.1016/j.ejor.2008.09.031.x.
- [10]. Koutras V.P., Platis A.N. and Salagaras C.S., (2013). Resource Availability Optimization for Green Courier Service. In *Proc of 2013 IFAC Conference on Manufacturing Modeling, Management, and Control (MIM 2013)*, Pages 1654-1659. doi:10.3182/20130619-3-RU-3018.00468
- [11]. Koutras V. P. and Platis A. N., (2008a). "Guaranteed Resource Availability in a Website", *Safety, Reliability and Risk Analysis: Theory, Methods and Applications – Martorell et al. (eds), © Taylor & Francis Group, London*, pp.1525-1532.
- [12]. Koutras V. P. and Platis A. N., (2006). "Resource Availability Optimization for Priority Classes in a Website". In *12th IEEE International Symposium on Pacific Rim Dependable Computing (PRDC '06)*,

- Jeske, Giardo, Dai (eds)© 2006, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California, , pp.305-312, doi: 10.1109/PRDC.2006.54.
- [13].Koutras V. P. and Platis A. N., (2009b). “Modeling Resource Availability and Optimal Fee for Priority Classes in a Website”. European Safety and Reliability Conference), pp.1191-1198.
- [14].Koutras V. P. and Platis A. N. and Gravvanis G. A., “On the optimization of free resources using non homogeneous Markov chain software rejuvenation model”. Reliability Engineering and System Safety, Vol. 92, pp. 1724–1732, © 2006, Elsevier.
- [15].Koutras V.P and Platis A.N. and Gravvanis G.A., (2008). Optimal server resource reservation policies for priority classes of users undercyclic non-homogeneous markov modelling
- [16].Koutras V.P and Platis A.N., (2008c). Modeling Perfect and Minimal Rejuvenation for Client Server Systems with Heterogeneous Load
- [17].Koutras V. P and Platis A. N., (2008d). “Semi-Markov Availability Modeling of a Redundant System with Partial and Full Rejuvenation Actions”, depcosrelcomex, International Conference on Dependability of Computer Systems (DEPCOS-RELCOMEX'08), pp. 127-134.
- [18].Kravets R., Calvert K.L. & Schwan K., (1998). Payoff-Based Communication Adaptation based on Network Service Availability, IEEE Multimedia Systems '98.
- [19].Lee D., Libman L. &Orda A., (2004). Path Protection and Blocking Probability Minimization in Optical Networks. 23rd Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies.
- [20].Salagaras C.S., Koutras V.P., Platis A.N. and Tsokos I.A., (2016a). Resource Availability Optimization for a Point-to-Point Connection on a Telecommunication Network. In Proc of SMRLO'16 2016:Second International Symposium on Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science and Operations Management, February 2016, SCE- Shamoon College of Engineering, Beer Sheva, Israel, Pages 176-185. doi: 10.1109/SMRLO.2016.39
- [21].Salagaras C., Koutras V. P., Thomaidis N.S., Vassiliadis V., Platis A.N., Dounias G. and Kyriazis C., (2016b). Resource Availability Modeling and Optimization in a Car Park Management Problem. International Journal of Operations Research and Information Systems, Special Issue: Operations Research and its Application in Engineering, to appear as IJORIS 8(2), 2017
- [22].Salagaras C.S., Vassiliadis V., Koutras V.P., Platis A.N. and Dounias G., (2013). Evolutionary Algorithms for Solving Resource Availability Optimization Problems related to Client Service of Different Priority Classes. In Proc of 2nd International Symposium and 24th National Conference on Operational Research, ISBN: 978-618-80361-1-6, Athens, Greece, September 26-28, (2013), Pages 252-257

- [23].Sarker R., Liang K. & Newton C., (2002). A New Evolutionary Algorithm for Multiobjective Optimization, *European Journal of Operational Research*, 140(1), 12-23.
- [24].Thomaidis N. S., Salagaras C.S., Vassiliadis V., Koutras V.P., Platis A.N. and Dounias G., (2013). Evolutionary Algorithms for Solving Resource Availability Optimization Problems related to Client Service of Different Priority Classes. In Proc of 2nd International Symposium and 24th National Conference on Operational Research, ISBN: 978-618-80361-1-6, Athens, Greece, September 26-28, (2013), Pages 252-257.
- [25].Trivedi K. S., “Probability and Statistics with Reliability, Queuing and Computer Science Applications”, John Willey & Sons, Inc., 2002
- [26].Wieselthier J.E., Nguyen G.D., Ephremides A., Barnhart C.M. (2002). Application of optimization techniques to a nonlinear problem of communication network design with nonlinear constraints, *IEEE Transaction in Automatic Control* 47 (6) 1033–1038.
- [27].Wei Wang, Di Niu, Baochun Li, Ben Liang, (2013). Dynamic Cloud Resource Reservation via Cloud Brokerage, *IEEE 33rd International Conference on Distributed Computing Systems (ICDCS)*, 2013, 400-409.
- [28].Yuan X., Ding H., Zhong Y., Zhang J., (2000) Resource reservation mechanisms for distributed multi-path quality of service routing,. *Proceedings of the Ninth International Conference on Computer Communications and Networks*, 9-13.
- [29].Yamashita, D.S., Armentano, V.A. & Laguna, M., (2007). *Journal of Scheduling*, vol 10,pp67-76. doi:10.1007/s10951-006-0326-4.
- [30].Vu H. L. and Zukerman M., (2002), “Blocking Probability for Priority Classes in Optical Burst Switching Networks”. *IEEE Communications Letters*, vol 6(5), pp.214-216, doi: 10.1109/4234.1001668.
- [31].Xiao B., Cao J. and Sha E.H.-M., (2004). “Maintaining Comprehensive Resource Availability in P2P Networks”. In *GCC 2004, LNCS 3251*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp. 543–550, doi: 10.1007/978-3-540-30208-7_74.
- [32].Zhao, Z., Ball, M.O. &Kotake, M., (2005). Optimization-Based Available-To-Promise with Multi-Stage Resource Availability *Annalsof Operations Research*, vol. 135,pp.65-85. doi:10.1007/s10479-005-6235-7.
- [33].Platis A., Gravvanis G., Giannoutakis K., Lipitakis E., 2003,A two-phase cyclic non-homogeneous markov chain performability evaluation by explicit approximate inverses applied to a replicated database system, *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms* 2: pp. 235–249.

- [34].Platis A., Limnios N., Du M. Le, 1997, Asymptotic availability of systems modeled by cyclic non-homogeneous Markov chains. In: Proceedings of the annual reliability and maintainability symposium. Philadelphia, PA: IEEE, pp. 293–297.
- [35].Theodoros V. Tzioutzias, Agapios N. Platisa*, Vasilis P. Koutras. (2014)Modeling the Reliability and the Performance of a Wind Farm Using Cyclic Non-Homogenous Markov Chains