



ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Μαθηματική Μοντελοποίηση και Ανάλυση μικροηλεκτρομηχανικών συστημάτων MEMS

Ουρανία Δροσινού

*Επιβλέπων: Χρήστος Νικολόπουλος*

Πανεπιστήμιο Αιγαίου Τμήμα Μαθηματικών

Σάμος 2022

*Στους γονείς μου!*

*“Ο Αρχιμήδης θα παραμένει στη μνήμη των ανθρώπων όταν ο Αισχύλος θα έχει ξεχαστεί, επειδή οι γλώσσες πεθαίνουν ενώ οι ιδέες των μαθηματικών όχι.”*  
*G.H.HARDY*

**Επταμελής Εξεταστική επιτροπή**

Νικολόπουλος Χρήστος (Επιβλέπων)

Βακερούδης Σταύρος (Εξεταστική επιτροπή)

Γιαννακόπουλος Αθανάσιος (Εξεταστική επιτροπή)

Καβαλλάρης Νικόλαος (Εξεταστική επιτροπή)

Καραχάλιος Νικόλαος (Συμβουλευτική και Εξεταστική επιτροπή)

Χατζηνικήτας Αγαπητός (Εξεταστική επιτροπή)

Χουσιάδας Κωνσταντίνος (Συμβουλευτική και Εξεταστική επιτροπή)

# Περιεχόμενα

Εισαγωγή vii

<b>1 Περιγραφή των Μικροηλεκτρομηχανικών συστημάτων MEMS</b>	<b>1</b>
1.1 Τί είναι τα MEMS;	1
1.2 Ορισμοί και ταξινομήσεις	3
1.3 Ιστορία των MEMS	4
<b>2 Παραγωγή μαθηματικών μοντέλων</b>	<b>7</b>
<b>3 Εισαγωγικές έννοιες- Ορισμοί</b>	<b>11</b>
3.1 Θεωρήματα Ύπαρξης και Μοναδικότητας	11
3.2 Μη Γραμμικά Προβλήματα Ιδιοτιμών	13
3.3 Διαγράμματα Ανταπόκρισης-Διακλάδωσης -Ευστάθειας	13
3.4 Απόσβεση Λύσεων(Quenching)	15
3.5 Τεχνικές Σύγκρισης	17
3.6 Στοιχεία Στοχαστικής Ανάλυσης	21
3.6α' Κίνηση Brown - (Brownian motion)	21
3.6β' Ορισμοί της Κλασματικής Κίνησης Brown (Fractional Brownian Motion - fBm)	24
<b>4 Μελέτη ενός ντετερμινιστικού μη τοπικού προβλήματος με συνθήκες Robin</b>	<b>27</b>
4.1 Στάσιμο πρόβλημα	27
4.1α' Περίπτωση μιας χωρικής διάστασης $N=1$	27
4.1β' Περίπτωση χωρική διάστασης $N > 1$	29
4.2 Το Χρονοεξαρτώμενο Πρόβλημα	39
4.2α' Τοπική ύπαρξη και μοναδικότητα	39
4.2β' Ολική ύπαρξη και απόσβεση για γενικό χωρίο	41
4.2γ' Απόσβεση σε πεπερασμένο χρόνο για μεγάλα αρχικά δεδομένα	51
4.2δ' Συμπεριφορά της λύσης κοντά στο χρόνο απόσβεσης	51
4.3 Αριθμητική μελέτη του προβλήματος	53
4.3α' Μία χωρική διάσταση	53
4.3β' Περίπτωση ακτινικής συμμετρίας	55
<b>5 Επίπτωση του θορύβου στην απόσβεση μαθηματικών στοχαστικών μοντέλων που εμφανίζονται στην τεχνολογία των MEMS</b>	<b>61</b>
5.1 Παραγωγή Στοχαστικού Μοντέλου	61
5.1α' Ορισμοί	62

5.1β'	Τοπική ύπαρξη της λύσης του Στοχαστικού Μοντέλου	63
5.2	Εκτιμήσεις της Πιθανότητας Απόσβεσης	67
5.2α'	Το Βασικό Μοντέλο (5.6)	67
5.2β'	Το στοχαστικό μοντέλο με την προσθήκη ενός όρου ομαλοποίησης.	71
5.2γ'	Στοχαστικό μοντέλο με χρονοεξαρτούμενους συντελεστές	75
5.3	Αριθμητική μελέτη	79
5.3α'	Προσέγγιση Πεπερασμένων Στοιχείων	79
5.3β'	Προσομοιώσεις	81
5.4	Παραλλαγή του στοχαστικού μοντέλου με τη προσθήκη κλασματικής κίνησης Brown	85
5.4α'	Το στοχαστικό πρόβλημα στη περίπτωση της κλασματικής κίνησης Brown	85
5.4β'	Γενίκευση του προβλήματος	88
6	Συμπεράσματα-Επίλογος Μελλοντικές Ερευνητικές Κατευθύνσεις	93
	Παράρτημα	95

## Ευχαριστίες

Η παρούσα διδακτορική διατριβή αποτελεί το επιστέγασμα μιας μεγάλης προσωπικής προσπάθειας αλλά ταυτόχρονα και μιας αδιάκοπης συμπαράστασης - συνδρομής από πολλούς ανθρώπους τους οποίους και θα ήθελα να τους ευχαριστήσω για την ηθική και πνευματική τους υποστήριξη και να τους εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου για τη βοήθεια τους.

Πρώτα απ' όλους θα ήθελα να ευχαριστήσω ολόψυχα τον επιβλέποντα μου κ. Χρήστο Νικολόπουλο, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών. Η εμπειρία του, η σωστή του καθοδήγηση και οι παρατηρήσεις του συνέβαλαν ουσιαστικά στη διαμόρφωση και ολοκλήρωση αυτής της εργασίας. Τον ευχαριστώ θερμά, γιατί ήταν πάντοτε διαθέσιμος να συζητήσουμε οτιδήποτε με απασχολούσε επιστημονικά, καθώς και για την αμέριστη ηθική του συμπαράσταση σε όλες τις δύσκολες στιγμές που είχα σε όλη αυτή την προσπάθεια. Αποτελεί για μένα υπόδειγμα Ανθρώπου και Επιστήμονα.

Οφείλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερος τον κ. Νίκο Καβαλλάρη, Καθηγητή στο πανεπιστήμιο του University of Chester, για την ευχαρία που μου έδωσε να συμμετάσχω στο πρόγραμμα Erasmus 2018 - 2019 και για τη συμβολή του στην εργασία αυτή, αφιερώνοντας αρκετές ώρες συζητώντας στα μαθηματικά της. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον κ. Κώστα Χουσιάδα και κ. Νικόλαο Καραχάλιο, μέλη της τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής μου για την άριστη συνεργασία τους και τη βοήθεια που μου πρόσφεραν σε οτιδήποτε προέκυψε.

Ευχαριστώ επίσης θερμά, τα μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής για τις πολύτιμες παρατηρήσεις τους. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω το Τμήμα Μαθηματικών, για την ακαδημαϊκή υποστήριξη που μου παρείχαν, συμβάλλοντας έτσι στην επιτυχή περάτωση των σπουδών μου.

Επίσης, το πιο μεγάλο ευχαριστώ ανήκει στους γονείς μου στους οποίους αφιερώνεται η παρούσα διατριβή, τον πατέρα μου Βασίλη και τη μητέρα μου Πιπίνα, που με δίδαξαν από παιδί την αξία και την ομορφιά του αγωνίζεσθαι. Στάθηκαν στο πλευρό μου πραγματικοί συνοδοιπόροι και συμπαραστάτες καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου όλα αυτά τα χρόνια ενθαρρύνοντας την προσπάθεια μου. Τέλος, ευχαριστώ πολύ τα αδέρφια μου Νίκο και Κωνσταντίνα όπως και τους φίλους μου Κυριακή και Θέμη που ήταν συνεχώς στο πλευρό μου ό,τι και αν χρειάστηκα.



# Εισαγωγή

Τις τελευταίες δεκαετίες έχει εκδηλωθεί μεγάλο ενδιαφέρον, για προβλήματα συνοριακών τιμών, που περιλαμβάνουν μη-τοπική εξάρτηση από τη λύση τους, λόγω των εφαρμογών τους. Στην παρούσα διατριβή μελετάμε το ακόλουθο μη τοπικό παραβολικό πρόβλημα (nonlocal parabolic problem) με συνοριακές συνθήκες Robin:

$$(1\alpha') \quad u_t = \Delta u + \frac{\lambda}{(1-u)^2 \left[1 + \alpha \int_{\Omega} 1/(1-u) dx\right]^2}, \quad \text{στο } Q_T := \Omega \times (0, T), \quad T > 0,$$

$$(1\beta') \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u = 0, \quad \text{στο } \Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T),$$

$$(1\gamma') \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

όπου  $\lambda > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , είναι δοσμένες θετικές σταθερές και όπου  $\Omega$  είναι ένα χωρίο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ . Τα αρχικά δεδομένα  $u_0(x)$  υποθέτουμε ότι είναι μια ομαλή συνάρτηση έτσι ώστε  $0 < u_0(x) < 1$  για όλα τα  $x \in \bar{\Omega}$  και  $\frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \beta u_0 = 0$ , για  $x \in \partial\Omega$  όπου  $\nu = \nu(x)$  αναπαριστά το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο του χωρίου  $\Omega$  διάστασης  $N$ . Συγκεκριμένα, και όσον αφορά τις πρακτικές εφαρμογές που θα μελετήσουμε στη διατριβή αυτή, όπως θα δούμε στη συνέχεια μόνο οι περιπτώσεις  $N = 1, 2$  είναι αξιοσημείωτες, ωστόσο από μαθηματικής σκοπιάς υπάρχει επίσης ενδιαφέρον και για χωρικές διαστάσεις  $N \geq 3$ . Επιπλέον, το  $T$  είναι ο μέγιστος χρόνος ύπαρξης της λύσης  $u$ .

Όταν  $\alpha = 0$  τότε το μη τοπικό πρόβλημα (1) παίρνει τη μορφή του ακόλουθου τοπικού προβλήματος

$$(2\alpha') \quad u_t = \Delta u + \frac{\lambda}{(1-u)^2}, \quad \text{στο } Q_T,$$

$$(2\beta') \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u = 0, \quad \text{στο } \Gamma_T,$$

$$(2\gamma') \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι για τις συνοριακές συνθήκες τύπου Robin, όπως αυτές που θεωρούνται παραπάνω για  $\beta > 0$ , υπάρχει μια περιορισμένη μελέτη για το τοπικό πρόβλημα, (βλ. [34]), ενώ από όσο γνωρίζουμε, δεν υπάρχουν δημοσιευμένες επιστημονικές εργασίες διαθέσιμες στην βιβλιογραφία που να σχετίζονται με την μελέτη του μη τοπικού προβλήματος (1). Το επιστημονικό ενδιαφέρον για την μελέτη του προβλήματος (1) προέρχεται από το γεγονός ότι συνδέεται με αρκετές εφαρμογές στη βιομηχανία των MEMS, όπως επισημαίνεται παρακάτω. Επιπλέον, λόγω των επιβαλλόμενων συνοριακών συνθηκών τύπου Robin, προκύπτουν επιπλέον τεχνικές δυσκολίες σε σύγκριση με τη μελέτη του προβλήματος Dirichlet, γεγονός που θα φανεί στα επόμενα κεφάλαια.

Πιο συγκεκριμένα το πρόβλημα (1) είναι ένα μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει τη λειτουργία ορισμένων ηλεκτροστατικών ενεργοποιημένων μικρο-ηλεκτρομηχανικών συστημάτων (MEMS). Τα MEMS είναι συσκευές ακριβείας που συνδυάζουν μηχανικές διεργασίες με ηλεκτρικά κυκλώματα. Οι συσκευές MEMS κυμαίνονται σε μέγεθος από millimeters έως microns, και περιλαμβάνουν μηχανικά εξαρτήματα ακριβείας που μπορούν να κατασκευαστούν χρησιμοποιώντας τεχνολογία κατασκευής ημιαγωγών. Συγκεκριμένα, η ηλεκτροστατική ενεργοποίηση είναι μια δημοφιλής εφαρμογή των MEMS. Διάφορα ηλεκτροστατικά ενεργοποιημένα MEMS



έχουν αναπτυχθεί και χρησιμοποιηθεί σε μεγάλη ποικιλία συσκευών που εφαρμόζονται ως αισθητήρες και έχουν εφαρμογές στη ρευστομηχανική, στην οπτική, στη ραδιοσυχνότητα (RF), στην αποθήκευση δεδομένων και στη βιοτεχνολογία. Παραδείγματα μικρο-συσκευών αυτού του είδους περιλαμβάνουν μικρόφωνα, αισθητήρες θερμοκρασίας, διακόπτες RF, αντηχεία, επιταχυνσιόμετρα, μικρο-καθρέπτες, μικροαντλίες, μικροσυσκευές κ.λπ., δείτε για παράδειγμα τις αναφορές [26, 79, 98].

Η διατριβή χωρίζεται σε δύο μέρη, το πρώτο μέρος αφορά το ντετερμινιστικό μη τοπικό πρόβλημα με συνθήκες Robin, και στο δεύτερο μέρος το στοχαστικό τοπικό πρόβλημα για γενικές συνοριακές συνθήκες.

Όσον αφορά το ντετερμινιστικό μη τοπικό πρόβλημα με συνθήκες Robin αρχικά παρουσιάζεται η παραγωγή για το μη τοπικό πρόβλημα (1), για τη μονοδιάστατη περίπτωση και εξηγείται επίσης η συσχέτιση αυτού του μοντέλου με τις εφαρμογές στη βιομηχανία MEMS. Το κύριο σώμα της παραγωγής του μοντέλου είναι ίδιο με τις εργασίες [54, 55, 59, 79], ωστόσο, θα δούμε αναλυτικά την παραγωγή του στο Κεφάλαιο 2 με τη συμπερίληψη των συνοριακών συνθηκών Robin. Επίσης μπορεί κανείς να ελέγξει τις παρακάτω σχετικές αναφορές [30, 43, 55] που αφορούν τις τροποποιήσεις της ντετερμινιστικής παραλλαγής του προβλήματος (3) που καταλήγουν σε προβλήματα υπερβολικού τύπου. Ένα κύριο χαρακτηριστικό στη συμπεριφορά των λύσεων ενός προβλήματος τέτοιου τύπου είναι η πιθανότητα απόσβεσης της λύσης. Με τον όρο αυτό εννοούμε ότι η λύση γίνεται μηδέν σε πεπερασμένο χρόνο ενώ ταυτόχρονα απειρίζεται κάποια νόρμα της λύσης.

Η συμπεριφορά απόσβεσης του μη τοπικού προβλήματος (1α') για τη περίπτωση που έχουμε συνοριακές συνθήκες Dirichlet ( $\beta = +\infty$ ) έχει μελετηθεί στην εργασία [56] καθώς και στις εργασίες [37, 38, 47]. Επιπλέον μη τοπικά παραβολικά και υπερβολικά προβλήματα που μοντελοποιούν την τεχνολογία των MEMS μελετήθηκαν στις εργασίες [25, 37, 39, 38, 54, 56, 59]. Ωστόσο, από όσο γνωρίζουμε, δεν υπάρχουν παρόμοιες μελέτες στη βιβλιογραφία για το πρόβλημα μας με συνοριακές συνθήκες Robin ( $0 < \beta < +\infty$ ), οπότε στην τρέχουσα διατριβή μελετάμε το πρόβλημα (1) και επεκτείνουμε μερικά από τα αποτελέσματα που δίνονται στην εργασία [34] για το μη τοπικό πρόβλημα, αλλά παρουσιάζουμε επίσης και μια περαιτέρω μελέτη σχετικά με το στάσιμο και το αντίστοιχο χρονοεξαρτώμενο πρόβλημα. Η μαθηματική μας ανάλυση εμπνέεται από ιδέες που αναπτύχθηκαν στις εργασίες [38, 56], ωστόσο σημαντικές τροποποιήσεις είναι απαραίτητες λόγω των συνοριακών συνθηκών Robin. Συγκεκριμένα, παράγεται μια νέα μορφή της ταυτότητας *Pohozaev* για τις συνοριακές συνθήκες Robin, η οποία στη συνέχεια χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό εκτιμήσεων της κρίσιμης τιμής. Επιπλέον, αναπτύσσεται ένα νέο επιχείρημα, (βλ. Θεώρημα 28) για να πάρουμε μια άνω εκτίμηση του ρυθμού απόσβεσης. Σημειώστε ότι λείπει ένας τέτοιος συλλογισμός από την προσέγγιση που χρησιμοποιείται στην εργασία [56]. Ωστόσο, η παραγωγή μιας βασικής εκτίμησης για τον μη τοπικό όρο, ανάλογη με αυτήν που προκύπτει στο [56, Λήμμα 3.3] για το πρόβλημα Dirichlet, χρειάζεται ιδιαίτερο χειρισμό και επιπλέον μελέτη στην περίπτωση του προβλήματος (1).

Στο κεφάλαιο 4 πραγματοποιείται μια διεξοδική μελέτη του προβλήματος σταθερής κατάστασης, όπου μεταξύ άλλων αποτελεσμάτων προκύπτουν και κάποιες εκτιμήσεις για το άνω φράγμα της κρίσιμης τιμής της παραμέτρου όπου πάνω από την οποία δεν έχουμε ύπαρξη λύσης του προβλήματος. Η μοναδικότητα και τα αποτελέσματα τοπικής ύπαρξης για το χρονοεξαρτώμενο πρόβλημα (1) συζητούνται στο πρώτο μέρος της Ενότητας 4.2. Το δεύτερο μέρος της Ενότητας 4.2 ασχολείται με τη συμπεριφορά των λύσεων του προβλήματος (1) για μεγάλους χρόνους. Συγκεκριμένα, αρχικά παρουσιάζεται ένα αποτέλεσμα απόσβεσης για ένα γενικό χωρίο, ενώ παράλληλα προκύπτει και ένα πιο ισχυρό αποτέλεσμα απόσβεσης για μια ακτινικά συμμετρική περιοχή. Στην Ενότητα 4.3 παρουσιάζεται μια αριθμητική μελέτη του προβλήματος (1) μέσω μιας μεθόδου προσαρμοζόμενου βήματος. Έτσι επαληθεύουμε αριθμητικά τα αναλυτικά αποτελέσματα που διατυπώσαμε και επιπλέον προσδιορίζουμε το προφίλ απόσβεσης της λύσης και σε περιπτώσεις που δεν μπορεί να προκύψει αυτό μέσω της θεωρητικής μας προσέγγισης.

Στη συνέχεια στο δεύτερο μέρος αυτής της διατριβής μελετάμε το ακόλουθο στοχαστικό ημιγραμμικό παραβολικό πρόβλημα (stochastic semilinear parabolic problem)

$$(3\alpha') \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{\lambda}{(1-u)^2} + \kappa(1-u)\partial_t W(x,t), \quad \text{στο } Q_T := \Omega \times (0,T), \quad T > 0,$$

$$(3\beta') \quad Bu = \beta_c, \quad \text{στο } \Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T),$$

$$(3\gamma') \quad 0 \leq u(x,0) = u_0(x) < 1, \quad x \in \Omega,$$

μαζί με κάποιες παραλλαγές του, όπου  $\lambda$  και  $\kappa$ , είναι δοσμένες θετικές σταθερές και  $\Omega$  είναι φραγμένο υπο-σύνολο του  $\mathbb{R}^N$ ,  $N = 1, 2, 3$  με ομαλό σύνορο. Επιπλέον, η σταθερά  $\beta_c$  μπορεί να είναι θετική ή μηδενική

και ο τελεστής της συνοριακής συνθήκης  $\mathcal{B}$  μπορεί να έχει τη γενική μορφή συνοριακών συνθηκών Robin, δηλαδή  $\mathcal{B}u := \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u$ , για κάποια θετική σταθερά  $\beta$ .

Συγκεκριμένα, ορίζοντας  $\beta \rightarrow \infty$  και  $\beta_c = 0$  που αντιστοιχεί στην περίπτωση της, χωρίς παλλόμενο υποστήριγμα με συμπεριφορά ελατηρίου, συσκευής (βλ. [23] και τη παραγωγή του μοντέλου στο κεφάλαιο 2) και χωρίς την ύπαρξη εξωτερικής δύναμης σε αυτό λαμβάνουμε συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Από την άλλη όταν έχουμε  $0 < \beta < \infty$  και  $\beta_c = 0$  τότε οι συνοριακές συνθήκες που λαμβάνουμε είναι συνοριακές συνθήκες Robin (μοντέλα με υποστήριγμα συμπεριφερόμενο σαν ελατήριο στο σύνορο ή στα άκρα βλέπε [23]). Μπορούμε επίσης να εξετάσουμε περιπτώσεις για  $\beta_c > 0$ , μοντελοποιώντας, επιπλέον της προσθήκης του παλλόμενου υποστηρίγματος, αλλά και εξωτερικές δυνάμεις όπως στους αισθητήρες πίεσης (βλέπε [98]). Οι τελευταίες εκτιμήσεις, σχετικά με τις μη ομοιογενείς συνοριακές συνθήκες, έχουν επίσης σημαντικό θεωρητικό ενδιαφέρον. Εκτός αυτού, ο όρος  $\partial_t W(x, t)$  συμβολίζει τη τυπική χρονική παράγωγο της τυχαίας διαδικασίας Wiener,  $W(x, t)$  σε έναν πλήρη χώρο πιθανότητας  $\{\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}\}$  με διήθηση θορύβου  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  όπου η διαδικασία  $W(x, t)$  ορίζεται στην Ενότητα 5.1α'. Ο όρος  $\kappa(1-u)\partial_t W(x, t)$  ορίζει έναν πολλαπλασιαστικό θόρυβο που αναπαριστά το γεγονός της πιθανότητας εμφάνισης πιθανών διακυμάνσεων στις φυσικές παραμέτρους της συσκευής MEMS, (βλ. Ενότητα 5.1).

Ειδικά όταν το  $\kappa \rightarrow 0+$  το πρόβλημα (3) παίρνει τη ντετερμινιστική του μορφή,

$$(4\alpha') \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{\lambda}{(1-u)^2}, \quad \text{στο } Q_T, T > 0,$$

$$(4\beta') \quad \mathcal{B}u = 0, \quad \text{στο } \Gamma_T,$$

$$(4\gamma') \quad 0 \leq u(x, 0) = u_0(x) < 1, \quad x \in \Omega,$$

το οποίο για ομογενείς συνοριακές συνθήκες έχει μελετηθεί εκτενώς (βλέπε [26, 29, 42, 53, 59]).

Η παρουσία του όρου  $f(u) := \frac{1}{(1-u)^2}$ , οδηγεί στην εμφάνιση του μαθηματικού φαινομένου της απόσβεσης της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο που σχετίζεται με το μηχανικό φαινόμενο της επαφής. Όσον αφορά το стоχαστικό πρόβλημα (3), αξίζει να διερευνηθεί εάν ένα τέτοιο πρόβλημα μπορεί να έχει ανάλογη συμπεριφορά (απόσβεση) με το ντετερμινιστικό πρόβλημα (4). Ο κύριος σκοπός του κεφαλαίου είναι διπλός. Αρχικά εξετάζει τις συνθήκες υπό τις οποίες συμβαίνει η απόσβεση για το стоχαστικό πρόβλημα (3), το οποίο είναι στην πραγματικότητα μια стоχαστική διαταραχή του προβλήματος (4) που προέρχεται από μια τυχαία διαταραχή της παραμέτρου  $\lambda$ , (βλέπε Ενότητα 5.1). Στη συνέχεια λαμβάνουμε, χρησιμοποιώντας αναλυτική και αριθμητική προσέγγιση, εκτιμήσεις για την πιθανότητα απόσβεσης καθώς και για τον χρόνο απόσβεσης που σε αυτήν την περίπτωση είναι τυχαία μεταβλητή. Εκτός από την πρακτική του σημασία για τους κατασκευαστές των συσκευών MEMS, μια τέτοια μελέτη έχει τη δική της θεωρητική αξία στο πλαίσιο των ιδιόμορφων стоχαστικών μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Στο κεφάλαιο 5.1 παρουσιάζεται μια παραγωγή του стоχαστικού μοντέλου (3). Στην Ενότητα 5.1α' παρουσιάζονται τα κύρια μαθηματικά εργαλεία από τον стоχαστικό λογισμό, και δίνονται οι έννοιες των λύσεων για το стоχαστικό πρόβλημα (3) και τις εξεταζόμενες παραλλαγές του. Η Ενότητα 5.1β' αναφέρεται στην τοπική ύπαρξη εκδοχών των λύσεων του προβλήματος (3). Στη συνέχεια, στην Ενότητα 5.2 χρησιμοποιούμε βασικές ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων της κίνησης Brown για να αντλήσουμε εκτιμήσεις του χρόνου απόσβεσης καθώς και εκτιμήσεις της πιθανότητας απόσβεσης για το стоχαστικό πρόβλημα (3) και ορισμένες από τις παραλλαγές του. Μια αριθμητική προσέγγιση που παρουσιάζεται στην Ενότητα 5.3 επαληθεύει μέσω διαφόρων αριθμητικών πειραμάτων τα αναλυτικά αποτελέσματα των προηγούμενων ενοτήτων για μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Εκτός αυτού, η αριθμητική προσέγγιση παρέχει επιπλέον αποτελέσματα απόσβεσης για την περίπτωση ομοιογενών συνοριακών συνθηκών που δεν αντιμετωπίζεται μέσω της ανάλυσης του παραγράφου 5.2.

Τέλος στην Ενότητα 5.4 παρουσιάζεται μια εισαγωγική μελέτη για την εκτίμηση του χρόνου απόσβεσης όπως και της πιθανότητας απόσβεσης για το стоχαστικό μοντέλο με την προσθήκη της κλασματικής κίνησης Brown Fractional Brownian Motion (fbm) όπως και για ορισμένες από τις παραλλαγές του.

Από τη διατριβή αυτή, έχουν προκύψει οι ακόλουθες εργασίες, οι οποίες έχουν δημοσιευθεί ή υποβληθεί σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά με σύστημα κριτών:

O. Drosinou, N.I. Kavallaris and C.V. Nikolopoulos, *A study of a nonlocal problem with Robin boundary conditions arising from MEMS technology*, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* (2021)

O. Drosinou, N.I. Kavallaris and C.V. Nikolopoulos, *Impacts of noise on quenching of some models arising in MEMS technology*, **arXiv:2012.10922v1**.



# Κεφάλαιο 1

## Περιγραφή των Μικροηλεκτρομηχανικών συστημάτων *MEMS*

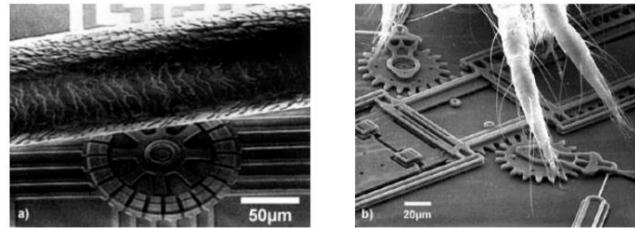
Στις μέρες μας υπάρχει μεγάλο ενδιαφέρον για την τεχνολογία των μικρο και νανοηλεκτρομηχανικών συστημάτων (*MEMS* και *NEMS*). Η τεχνολογία μικρο και νανοηλεκτρομηχανικών συστημάτων έχει πάρα πολλές εφαρμογές, *nanorobots*, *microneedles* ή *nanostuctured water-repellent blue jeans as soft as cotton* κτλ. Ο όρος *MEMS* χρησιμοποιείται για να περιγράψει τόσο μια κατηγορία μικροηλεκτρονικές - μικρομηχανικών συσκευών όσο και τις διαδικασίες που χρησιμοποιούνται κατά την κατασκευή τους. Ορισμένα *MEMS* δεν έχουν καθόλου μηχανικά εξαρτήματα, ωστόσο ταξινομούνται ως *MEMS* επειδή βελτιώνουν τις κατασκευές που χρησιμοποιούνται σε συμβατικά μηχανήματα, όπως ελατήρια, κανάλια, κοιλότητες, οπές και μεμβράνες. Επίσης ορισμένες συσκευές *MEMS* λόγω του ότι μετατρέπουν το μηχανικό σήμα σε ηλεκτρικό ή οπτικό, χαρακτηρίζονται ως μορφοτροπείς (*transducers*). Στην Ιαπωνία, τα *MEMS* είναι γνωστά ως μικρομηχανήματα και σε ευρωπαϊκές χώρες, τα *MEMS* αναφέρονται πιο συχνά ως τεχνολογία μικροσυστημάτων (*MST*).

### 1.1 Τί είναι τα *MEMS*;

Τα μικροηλεκτρομηχανικά συστήματα (*MEMS*) είναι συσκευές πολύ μικρού μεγέθους μεταξύ 1μμ και 100 μμ, ορατά μόνο με μικροσκόπιο, και έχουν τεράστιο εύρος εφαρμογών. Αυτές οι συσκευές (ή συστήματα) μπορεί να είναι αισθητήρες ή συστήματα ελέγχου που ενεργοποιούνται στη μικροκλίμακα και παράγουν αποτελέσματα στη μακροκλίμακα. Πιο συγκεκριμένα ο όρος *MEMS* αναφέρεται σε συσκευές ακριβείας που συνδυάζουν μηχανικές διαδικασίες με ηλεκτρικά κυκλώματα και ποικίλλει σε διάφορα μέρη του κόσμου. Στις Ηνωμένες Πολιτείες καλούνται κατά κύριο λόγο *MEMS*, ενώ σε ορισμένα άλλα μέρη του κόσμου ονομάζονται «Τεχνολογία μικροσυστημάτων» ή «συσκευές με μικροσυμπιεστές» (“*Microsystems Technology*” - “*Micromachined devices*”). Ειδικότερα η ηλεκτροστατική ενεργοποίηση τέτοιων συσκευών είναι μια δημοφιλής εφαρμογή. Οι συσκευές *MEMS* αποτελούνται από μηχανικά εξαρτήματα μεγάλης ακριβείας που μπορεί να κατασκευαστούν χρησιμοποιώντας τεχνολογίες κατασκευής ημιαγωγών. Οι διάφοροι μηχανισμοί *MEMS* έχουν αναπτυχθεί και χρησιμοποιούνται σε μια ευρεία ποικιλία συσκευών.

Η ιδέα για τη κατασκευή και τη χρήση των *MEMS* ξεκίνησε από τη δεκαετία του 50. Τη δεκαετία του 60 κατασκευάστηκαν αισθητήρες πίεσης και τρανζίστορ πυλών, ακολούθησαν το επιταχυνσιόμετρο και τα ακροφύσια εκτυπωτή. Από τα μέσα της δεκαετίας του 90 τα εξαρτήματα *MEMS* άρχισαν να εμφανίζονται σε πολυάριθμα εμπορικά προϊόντα. Επιπλέον σήμερα, οι συσκευές *MEMS* χρησιμοποιούνται ως αισθητήρες και έχουν εφαρμογές στη περιοχή της οπτικής, των ραδιοσυχνοτήτων (*RF*) και στην βιοτεχνολογία. Παραδείγματα μικρο-συσκευών αυτού του είδους είναι τα μικρόφωνα, οι αισθητήρες θερμοκρασίας, οι διακόπτες (*RF*), τα αντηχεία, τα επιταχυνσιόμετρα, τα μικροκάτοπτρα, οι μικροαντλίες, οι μικροβαλβίδες, οι συσκευές αποθήκευσης δεδομένων κ.ά. ([79]).

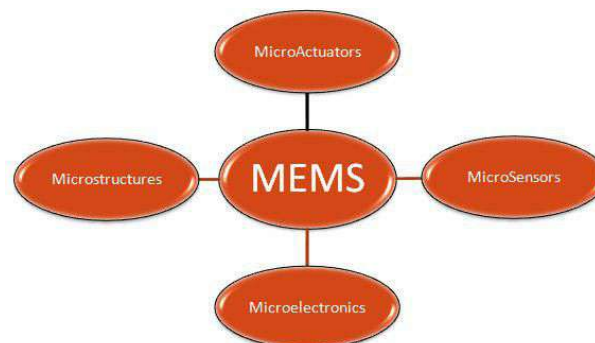
## 2 · ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΜΙΚΡΟΗΛΕΚΤΡΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ MEMS



Σχήμα 1.1: (α) Ένας κινητήρας σιλικόνης MEMS μαζί με ένα σκέλος ανθρώπινης τρίχας, και (β) τα πόδια μιας ακάρεος αράχνης που στέκεται πάνω σε γρανάζια από έναν μικροκινητήρα.

Στην πιο γενική μορφή, τα λειτουργικά στοιχεία των MEMS είναι μικροσκοπικές δομές, αισθητήρες, μικροδιακόπτες και μικροηλεκτρονική, όλα ενσωματωμένα στο ίδιο τσιπ πυριτίου. Τα πιο αξιοσημείωτα (και ίσως τα πιο ενδιαφέροντα) στοιχεία είναι οι μικροαισθητήρες και οι μικρο-ενεργοποιητές. Οι μικροαισθητήρες και οι μικρο-διακόπτες περιγράφονται κατάλληλα ως «μετατροπείς», όπου μετατρέπουν την ενέργεια από τη μία μορφή στην άλλη. Στην περίπτωση των μικροαισθητήρων, οι συσκευές αυτές συνήθως μετατρέπουν τις μετρήσεις ενός μηχανικού σήματος σε ηλεκτρικό σήμα.

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών, οι ερευνητές και οι προγραμματιστές των MEMS έχουν παρουσιάσει έναν εξαιρετικά μεγάλο αριθμό μικροαισθητήρων για κάθε δυνατή ανίχνευση, συμπεριλαμβανομένης της θερμοκρασίας, της πίεσης, των αδρανειακών δυνάμεων, των χημικών ειδών, των μαγνητικών πεδίων, της ακτινοβολίας κ.λ.π.

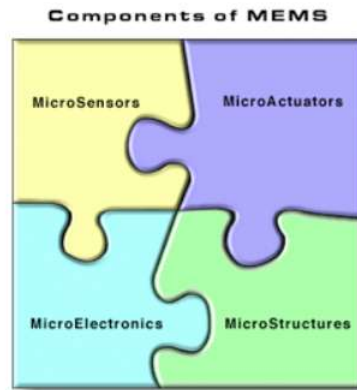


Σχήμα 1.2: Σχηματική απεικόνιση των ειδών MEMS.

Αξίζει να σημειωθεί ότι σημαντικό ρόλο για την ανάπτυξη και εξέλιξη αυτών των συσκευών έχει παίξει η θεωρητική τους μελέτη μέσω της κατασκευής και ανάλυσης μαθηματικών - προτύπων που τις περιγράφουν ([79]).

Γενικά η μαθηματική μοντελοποίηση είναι ένα πολύτιμο εργαλείο που μας επιτρέπει να περιγράψουμε και να κατανοήσουμε διαδικασίες και φαινόμενα που συμβαίνουν στη φύση. Σχεδόν οποιοδήποτε φυσικό φαινόμενο (π.χ. η πρόγνωση του καιρού, ο υπολογισμός τιμής πώλησης των αγαθών, οι στατικοί υπολογισμοί στις οικοδομικές κατασκευές κ.τ.λ.) μπορεί σε ένα βαθμό να περιγραφεί από ένα σύνολο μαθηματικών εξισώσεων που συνιστούν το μαθηματικό μοντέλο ή πρότυπο.

Η παραγωγή μαθηματικών μοντέλων για τα ηλεκτρομηχανικά συστήματα MEMS έχει στόχο την εις βάθος κατανόηση και προσομοίωση της λειτουργίας τους. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να υποκαταστήσουμε πειραματικές διαδικασίες οι οποίες πολλές φορές είναι δύσκολο, έχουν αυξημένο κόστος ή και καμιά φορά είναι πρακτικά αδύνατο, να σχεδιαστούν και να υλοποιηθούν. Η τελική επιδίωξη μέσω αυτής της διαδικασίας είναι να βελτιωθούν τα ποιοτικά και ποσοτικά χαρακτηριστικά μιας συσκευής τέτοιου τύπου, ο έλεγχος της λειτουργίας της, αλλά και να αποφευχθούν αστοχίες που προκαλούν τη δυσλειτουργία ή τη καταστροφή της. Στις μέρες μας η πληροφορική μας δίνει την δυνατότητα να αξιοποιήσουμε τα πλεονεκτήματα της προσομοίωσης και



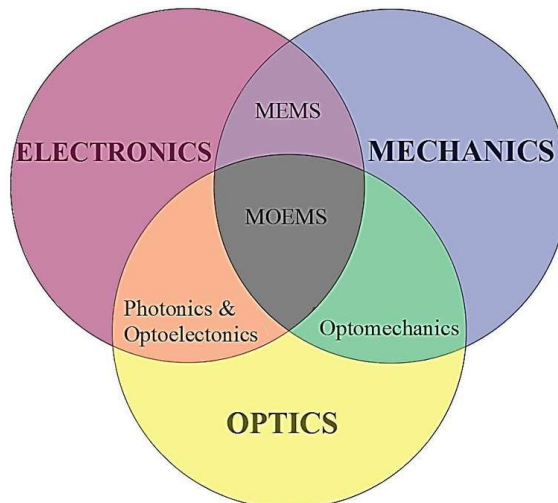
Σχήμα 1.3: Σχηματική απεικόνιση των στοιχείων MEMS.

να παραγάγουμε μια πληθώρα αποτελεσμάτων (εκτέλεση μοντέλων σε προσομοίωση) εξοικονομώντας χρόνο, κόστος και ενέργεια ([79]).

## 1.2 Ορισμοί και ταξινομήσεις

Σ' αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε ορισμένες βασικές έννοιες και μια ταξινόμηση των MEMS. Με άλλα λόγια, τα MEMS είναι μικροσκοπικές ολοκληρωμένες συσκευές που αποτελούνται από ένα συνδυασμό ηλεκτρονικών, ηλεκτρικών και μηχανικών στοιχείων, που όλα συνεργάζονται για μία μόνο λειτουργική απαίτηση χρησιμοποιώντας μια τεχνολογία που ονομάζεται τεχνολογία μικροσυστημάτων (Microsystems Technology (MST)).

Η τεχνολογία MEMS θεωρείται μια εκτεταμένη μορφή της παραδοσιακής κατασκευής ολοκληρωμένων κυκλωμάτων (IC). Η κύρια διαφορά μεταξύ της παραδοσιακής τεχνολογίας IC Manufacturing (VLSI) και των MEMS είναι ότι χρησιμοποιώντας τα MEMS δεν κατασκευάζουμε μόνο ηλεκτρικά εξαρτήματα όπως πυκνωτές και επαγωγείς, αλλά και μηχανικά εξαρτήματα όπως γρανάζια, ελατήρια, δοκάρια κ.λπ. Χρησιμοποιώντας την παραδοσιακή τεχνολογία IC, μπορούμε να κατασκευάσουμε μόνο αγωγούς, μονωτές, διόδους και τρανζίστορ.



Σχήμα 1.4: Ταξινόμηση της τεχνολογίας των μικροσυστημάτων.

Ένα άλλο σημαντικό σημείο που πρέπει να σημειωθεί είναι ότι τα MEMS συνίστανται από μια ενσωμάτωση τόσο των ενεργών όσο και των παθητικών επιμέρους στοιχείων της συσκευής σε ένα μόνο υπόστρωμα (*substrate*) πυριτίου με τη βοήθεια προηγμένης τεχνολογίας παραγωγής ολοκληρωμένου κυκλώματος (IC). Ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα (IC) είναι μια μικρή ηλεκτρονική συσκευή βασισμένη σε ημιαγωγούς που αποτελείται από τρανζίστορ, αντιστάσεις και πυκνωτές. Τα ολοκληρωμένα κυκλώματα είναι τα δομικά στοιχεία των περισσότερων ηλεκτρονικών συσκευών και εξοπλισμού. Ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα είναι επίσης γνωστό ως

τσιπ ή μικροτσιπ.

Το ηλεκτρονικό σύστημα των MEMS, το οποίο αποτελείται από κυκλώματα επεξεργασίας σήματος όπως Ενισχυτής, ADC, Φίλτρα κ.λπ. έχει σχεδιαστεί με τη χρήση IC διαδικασία επεξεργασίας, ενώ το μηχανικό σύστημα, αποτελείται από γρανάζια, στρόφαλους, ρουλεμάν κ.λπ. Στη συνέχεια παραθέτουμε και περιγράφουμε κάποια συστήματα μικροηλεκτρομηχανικών συστημάτων MEMS.

#### **Ανιχνευτής**

Ένας ανιχνευτής είναι μια συσκευή που μετατρέπει μια μορφή σήματος ή ενέργειας σε μια άλλη μορφή. Ο όρος ανιχνευτής μπορεί επομένως περιλαμβάνει τόσο τους αισθητήρες όσο και τους ενεργοποιητές και είναι ο πλέον γενικός και ευρέως χρησιμοποιούμενος όρος στα MEMS.

#### **Αισθητήρας**

Ένας αισθητήρας είναι μια συσκευή που μετρά πληροφορίες από το περιβάλλον και παρέχει ένα ηλεκτρικό σήμα εξόδου σε απόκριση της παραμέτρου που μετρήθηκε. Αυτοί οι ενεργειακοί τομείς περιλαμβάνουν:

- Μηχανική - δύναμη, πίεση, ταχύτητα, επιτάχυνση, θέση
- Θερμική - θερμοκρασία, εντροπία, θερμότητα, ροή θερμότητας
- Χημική - συγκέντρωση, σύνθεση, ρυθμό αντίδρασης
- Ακτινική - ένταση ηλεκτρομαγνητικού κύματος, φάση, μήκος κύματος, πόλωση ανακλαστικότητα, δείκτη διάθλασης, διαπερατότητα
- Ένταση μαγνητικού πεδίου - πυκνότητα ροής, μαγνητική ροπή, διαπερατότητα
- Ηλεκτρική - τάση, ρεύμα, φορτίο, αντίσταση, χωρητικότητα, πόλωση

#### **Ενεργοποιητής**

Ο ενεργοποιητής MEMS είναι ένας τύπος μικροηλεκτρομηχανικών συστημάτων που μετατρέπει την ενέργεια σε κίνηση. Τα MEMS είναι συστήματα που ενσωματώνουν μηχανικά και ηλεκτρικά εξαρτήματα με διαστάσεις της τάξης των μικρομέτρων. Επομένως, οι τυπικές κινήσεις που επιτυγχάνονται από τους ενεργοποιητές MEMS είναι επίσης της τάξης των μικρομέτρων.

### **1.3 Ιστορία των MEMS**

Οι ρίζες της τεχνολογίας των MEMS βρίσκονται σαφώς στις τεχνολογικές εξελίξεις που συνοδεύουν (ή συνδέονται με) τον Δεύτερο Παγκόσμιο πόλεμο. Συγκεκριμένα, η ανάπτυξη των ραντάρ διέγειρε την έρευνα στη σύνθεση των καθαρών ημιαγωγικών υλικών. Αυτά τα υλικά, ιδιαίτερα το καθαρό πυρίτιο, είναι ζωτικό συστατικό του ολοκληρωμένου κυκλώματος και της σύγχρονης τεχνολογίας MEMS. Το 1959 στην ετήσια συνάντηση της Αμερικάνικης Φυσικής εταιρείας, ο Richard Feynman προέβλεψε, πολλές από τις επόμενες τέσσερις δεκαετίες έρευνας σε MEMS και NEMS λέγοντας ότι: “Υπάρχει άφθονος χώρος στο κάτω μέρος” ή (“There’s Plenty of Room at the Bottom”). Γύρω στο 2000, όταν κοιτάζουν πίσω θα αναρωτιούνται γιατί δεν υπήρχε μέχρι το 1960 κάποιος που κινούταν σ’ αυτή τη κατεύθυνση .”

Ενώ η διάλεξη του Feynman ενέπνευσε μερικές άμεσες εξελίξεις, μόλις πέντε χρόνια αργότερα είχαμε την επίσημη έναρξη της τεχνολογίας των MEMS. Το 1964, ο H.C. O Nathanson και οι συνεργάτες του στο Πανπεπιστήμιο του Westinghouse δημιούργησαν την πρώτη συσκευή MEMS. Το τρανζίστορ αντίθεσης τους παρουσίασε όλα τα χαρακτηριστικά των σύγχρονων MEMS. Η μαθηματική μοντελοποίηση διαδραμάτισε βασικό ρόλο στην ανάπτυξη αυτού του συστήματος. Στη συνέχεια ακολουθεί ένα χρονοδιάγραμμα που παραθέτει κομβικής σημασίας ορόσημα όπως εργασίες και εφευρέσεις σχετικές με την ανάπτυξη MEMS.

#### **Σημεία Ορόσημο στην ιστορία των MEMS και NEMS**

- 1940 Το Radar οδηγεί την ανάπτυξη των καθαρών ημιαγωγών.
- 1948 William Shockley εφηύρε το τρανζίστορ Germanium στην εταιρεία Bell Labs.
- 1958 Πινακίδες στελέχους πυριτίου εμπορικά διαθέσιμες
- 1959 Η περίφημη διάλεξη του Richard P. Feynman «Υπάρχει άφθονος χώρος στο κάτω μέρος» («There’s Plenty of Room at the Bottom»).
- 1959 Παρουσιάστηκε ο πρώτος αισθητήρας πίεσης πυριτίου (Kulite)
- 1960 Εφευρέθηκε η επίπεδη διαδικασία κατασκευής παρτίδας.

- 1961 Παρουσιάστηκε ο πρώτος αισθητήρας πίεσης πυριτίου
- 1964 *H.C.Nathanson* και η ομάδα στο *Westinghouse* παράγουν το συντονιστή τρανζίστορ πύλης, η πρώτη *MEMS* συσκευή κατασκευής κατά παρτίδες.
- 1970 Εφεύρεση μικροεπεξεργαστή, οδηγώντας τη ζήτηση ολοκληρωμένων κυκλωμάτων.
- 1979 Αναπτύχθηκε το πρώτο επιταχυνσιόμετρο στο Πανεπιστήμιο του Στάνφορντ.
- 1981 Το άρθρο του K. Eric Drexler, Σχεδιασμός πρωτεϊνών ως οδού μοριακής παραγωγής, δημοσιεύεται στα Πρακτικά της Εθνικής Ακαδημίας Επιστημών. Αυτό είναι το πρώτο άρθρο σε επιστημονικό περιοδικό που αναφέρεται για τη μοριακή νανοτεχνολογία.
- 1982 Εφευρέθηκε το μικροσκόπιο σήραγγας σάρωσης.
- 1983 Ολοκληρωμένος αισθητήρας πίεσης (Honeywell.)
- 1984 Αναπτύχθηκε η διαδικασία της μικροσυσσωρεύσεως της επιφάνειας πολυπυριτίου στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϊ. Τα *MEMS* και τα ολοκληρωμένα κυκλώματα μπορούν να κατασκευαστούν μαζί για πρώτη φορά.
- 1985 Ανακαλύπτεται το “Buckyball”. Τα Buckyballs γνωστά ως Buckminsterfullerenes, είναι κοίλα σφαιρικά μόρια αποτελούμενα εξ ολοκλήρου από άνθρακα. Ονομάστηκαν έτσι λόγω του Richard Buckminster (“Bucky”) Fuller. Τα μικρότερα σε μέγεθος αποτελούνται από 60 άτομα άνθρακα και έχουν διάμετρο περίπου 1 νανόμετρο.
- 1986 Επινοήθηκε το μικροσκόπιο της ατομικής δύναμης .
- 1991 Εμφανίζεται ο νανοσωλήνας άνθρακα.
- 1992 Έχουμε την εμφάνιση μεντεσέδων (hinge) σε μικρά μηχανήματα
- 1993 Πρώτο επιταχυνσιόμετρο επιφανειακής μικροσκοπικής επιφάνειας (Analog Devices, ADXL50)
- 1996 Ο Richard Smalley αναπτύσσει μια τεχνική για την παραγωγή νανοσωλήνων άνθρακα της ομοιόμορφης διαμέτρου.
- 2000 Ο αριθμός των συσκευών *MEMS* και των εφαρμογών αυξάνεται συνεχώς. Η προσοχή επικεντρώνεται στη χρηματοδότηση της έρευνας και της εκπαίδευσης στον τομέα της νανοτεχνολογίας.

Πρέπει να επισημάνουμε ότι η εφεύρεση του μικροεπεξεργαστή το 1970, ενώ τεχνικά δεν αποτελεί συνεισφορά στα *MEMS* ή τα *NEMS*, προκάλεσε ενδιαφέρον για τεχνικές λιθογραφικής κατασκευής που είχαν τεράστιο αντίκτυπο στις μεθόδους κατασκευής *MEMS*. Το 1979, το πρώτο επιταχυνσιόμετρο *MEMS* αναπτύχθηκε από ερευνητές στο Πανεπιστήμιο του Στάνφορντ. Το επιταχυνσιόμετρο *MEMS* γίνεται η πρώτη εμπορικά επιτυχημένη συσκευή *MEMS*. Ένα μεγάλο ενδιαφέρον για τη νανοτεχνολογία τόνωσε οι εξελίξεις της δεκαετίας του '80 και του '90. Η ανάπτυξη του μικροσκοπίου σάρωσης σήραγγας το 1982, η παρακολούθηση της ανάπτυξης του μικροσκοπίου ατομικής δύναμης το 1986, η ανακάλυψη του νανοσωλήνα άνθρακα το 1991 και η τεχνική που ανέπτυξε η *Smalley* το 1996 για ομοιόμορφη παραγωγή νανοσωλήνων, κατατάσσονται στις σημαντικότερες εξελίξεις αυτής της περιόδου (βλέπε [82]). Προς το παρόν, η ποικιλία των συσκευών και των εφαρμογών *MEMS* αυξάνεται συνεχώς. Τα πραγματικά νανοσυστήματα, αν και περιορισμένα σε αριθμό σήμερα, υπόσχονται να γίνουν ακόμα πιο σημαντικά στο μέλλον.

Από την εφεύρεση του τρανζίστορ, οι επιστήμονες προσπαθούν να βελτιώσουν και να αναπτύξουν νέα μικροηλεκτρομηχανικά συστήματα. Οι συσκευές *MEMS* έχουν χρησιμοποιηθεί σε τόσα πολλά εμπορικά προϊόντα. Νέες εφαρμογές και καλύτερες τεχνολογίες αναδύονται καθημερινά. Οι πρώτες συσκευές *MEMS* μέτρησαν πράγματα όπως την πίεση στους κινητήρες και την κίνηση στα αυτοκίνητα. Σήμερα, τα στοιχεία *MEMS* ελέγχουν τα δίκτυα επικοινωνιών μας. Σώζουν ζωές διογκώνοντας αερόσακους αυτοκινήτων. Τοποθετούνται στο ανθρώπινο σώμα για την παρακολούθηση της αρτηριακής πίεσης και χρησιμοποιούνται για τη χορήγηση φαρμάκων όταν και όπου χρειάζονται. Τα μικροσυστήματα συνεχίζουν να γίνονται μικρότερα, δημιουργώντας μια νέα τεχνολογία που ονομάζεται νανοηλεκτρομηχανικά συστήματα (*NEMS*). Οι εφαρμογές και η ανάπτυξη των *MEMS* και *NEMS* είναι ατελείωτες και θα συνεχίσουν να βρίσκουν το δρόμο τους σε πολλές πτυχές της καθημερινής μας ζωής.

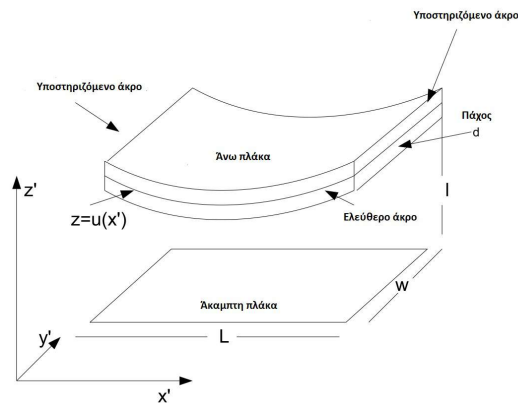




## Κεφάλαιο 2

# Παραγωγή μαθηματικών μοντέλων

Στη συνέχεια αυτής της διατριβής θα εστιάσουμε στη μελέτη μιας ιδανικής ηλεκτροστατικής συσκευής MEMS. Θεωρούμε μια ιδανική - εξιδανικευμένη ηλεκτροστατική συσκευή MEMS, η οποία αποτελείται από μια μεμβράνη και μια άκαμπτη πλάκα που τοποθετούνται παράλληλα μεταξύ τους. Η μεμβράνη έχει δύο παράλληλες πλευρές προσαρτημένες σε ένα υποστήριγμα - πρόβολο (cantilever) ή με καρφωμένα άκρα (pinned), ενώ οι άλλες πλευρές είναι ελεύθερες. Εφαρμόζουμε διαφορά δυναμικού μεταξύ της άνω επιφάνειας και της άκαμπτης πλάκας. Η μεμβράνη και η πλάκα έχουν πλάτος  $w$  και μήκος  $L$ , η απόσταση μεταξύ της πλάκας και της μεμβράνης όταν δεν έχουμε παραμόρφωση της τελευταίας είναι  $l$ . Υποθέτουμε επίσης, ότι το διάκενο μεταξύ τους είναι μικρό, δηλαδή  $l \ll L$  και  $l \ll w$ , και καταλαμβάνεται από κάποιο υλικό με διηλεκτρική σταθερά ίση με ένα, έτσι ώστε η διαπερατότητα να είναι αυτή του κενού  $\epsilon_0$ .



Σχήμα 2.1: Σχηματική αναπαράσταση μιας συσκευής MEMS

Λαμβάνοντας τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα στη μεμβράνη και στη άκαμπτη πλάκα της συσκευής να είναι  $V$ , και υποθέτοντας επιπλέον ότι η άκαμπτη πλάκα είναι γειωμένη, ολοκληρώνοντας τον παρακάτω τύπο του δυναμικού

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

παίρνουμε ότι ο μικρός λόγος διαστάσεων του διακένου δίνει για το δυναμικό  $\phi$ , σε όρους κυρίαρχης τάξης (βλέπε Παράρτημα Παρατήρηση 17),

$$(2.1) \quad \phi = V(l - z')/(l - u')$$

όπου  $u'$  είναι η μετατόπιση της μεμβράνης προς την πλάκα (η τιμή  $u' = l$  αντιστοιχεί στην επαφή - touch down, της μεμβράνης με την άκαμπτη πλάκα) και  $z'$  είναι η απόσταση που μετράται από την θέση που έχει η μεμβράνη όταν βρίσκεται σε οριζόντια θέση (χωρίς να έχει υποστεί παραμόρφωση) της μεμβράνης προς την πλάκα (βλ. σχήμα (2.1)).

Η ηλεκτροστατική δύναμη ανα μονάδα επιφάνειας στην μεμβράνη (στην κατεύθυνση  $z'$ ) είναι ίση με

$$\frac{1}{2} \times \text{επιφανειακή πυκνότητα φορτίου} \times \text{ένταση ηλεκτρικού πεδίου} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \phi_{z'}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 V^2 / (l - u')^2,$$

όπου  $\epsilon_0$  είναι η διαπερατότητα του κενού. Παίρνουμε τις κατα μήκος πλευρές της μεμβράνης, δηλαδή για  $x' = 0$  και  $x' = L$  να είναι αυτές που συνδέονται με την υποστήριξη της συσκευής, ενώ θεωρούμε τις άλλες δυο πλευρές δηλαδή για  $y' = 0$  και  $y' = w$  ότι είναι ελεύθερες. Υποθέτουμε επίσης ότι δεν υπάρχουν αισθητές παραμορφώσεις στη κατεύθυνση του  $y'$  άξονα και άρα  $u' = u'(x', z', t')$  για χρόνο  $t'$ . Η πυκνότητα της επιφάνειας της μεμβράνης συμβολίζεται με  $\rho$ , ενώ με  $T_m$  συμβολίζουμε τη σταθερή επιφανειακή τάση της μεμβράνης. Στη συνέχεια θεωρούμε ότι η μετατόπιση  $u'$  ικανοποιεί την εξίσωση κύματος με απόσβεση (damping) ανάλογη προς την ταχύτητα της μεμβράνης,

$$(2.2) \quad \rho u'_{t't'} + a u'_{t'} = T_m u'_{x'x'} + \frac{1}{2} \epsilon_0 V^2 / (l - u')^2.$$

Σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να έχουμε την κατάσταση κατά την οποία ο όρος απόσβεσης κυριαρχεί σε σχέση με τον όρο αδράνειας (βλέπε [54]). Σύμφωνα με αυτή την παραδοχή και λόγω του ότι ο κανονικοποιημένος συντελεστής του  $u'_{t't'}$  είναι πολύ μικρότερος αυτού του  $u'_{t'}$ , προκύπτει προσεγγιστικά η ακόλουθη παραβολική εξίσωση

$$(2.3) \quad a u'_{t'} = T_m u'_{x'x'} + \frac{1}{2} \epsilon_0 V^2 / (l - u')^2.$$

Εκτός από την προκύπτουσα εξίσωση (2.3), θα πρέπει να τεθούν και οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Ο συνηθισμένος τρόπος για να γίνει αυτό είναι να υποθέσουμε ότι τα άκρα της μεμβράνης είναι στερεωμένα, σταθερά στο στήριγμα της συσκευής και άρα οι κατάλληλες συνθήκες είναι οι συνοριακές συνθήκες *Dirichlet* (βλ. αναφορά [82]), στη περίπτωση που η μεμβράνη δεν είναι εύκαμπτη και η συμπεριφορά της προσεγγίζει την συμπεριφορά μιας ράβδου μπορούμε να θεωρήσουμε συνοριακές συνθήκες σύσφιξης (clamped boundary conditions). Επιπλέον θα πρέπει όμως να σημειώσουμε εδώ ότι σε πολλές περιπτώσεις, (κεφάλαιο 6, [98]) η υποστήριξη ή το πρόβολο (*cantilever*) των *MEMS* ενδέχεται να μην έχει ιδανική συμπεριφορά όπως αυτή που περιγράφεται από τις συνθήκες *Dirichlet*.

Ειδικότερα, οι μικροράβδοι που συνιστούν το στήριγμα της συσκευής (*cantilever microbeams*) μπορεί να κλίνουν προς τα επάνω ή προς τα κάτω εξαιτίας της παραμόρφωσης του στηρίγματός τους, αφού τα άγκιστρα ή τα υποστηρίγματα τους μπορούν να έχουν κάποια ευελιξία καθιστώντας την παραδοχή τέλει σύσφιξης και τις συνθήκες *Dirichlet* ανακριβείς. Αυτή η ελαστικότητα των στηριγμάτων των μικροράβδων μπορεί να περιγραφεί - προσομοιωθεί με την υπόθεση της ύπαρξης ελατηρίων στα άκρα. Επομένως γενικά ένα τέτοιο σύστημα μπορούμε να το μοντελοποιήσουμε υποθέτοντας παραμορφώσεις διαμήκεις ή στρέψεις στα στηρίγματα στα άκρα της μεμβράνης. Ως πρώτο βήμα προς αυτή την προσέγγιση μοντελοποίησης σε αυτή την εργασία θα υποθέσουμε ότι έχουμε μια συσκευή η οποία, όπως έχει ήδη αναφερθεί, το κινητό άνω τμήμα της είναι αρκετά λεπτό ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι συμπεριφέρεται ως μεμβράνη ενώ τα άκρα της είναι συνδεδεμένα με ένα ελαστικό εξωτερικό στήριγμα που συμπεριφέρεται όπως ένα ελατήριο που κινείται προς την κατεύθυνση  $x'$ . Σε αυτή την περίπτωση για λόγους απλότητας θεωρούμε αμελητέες τη συστροφή ή την επιμηκυνση του στηρίγματος.

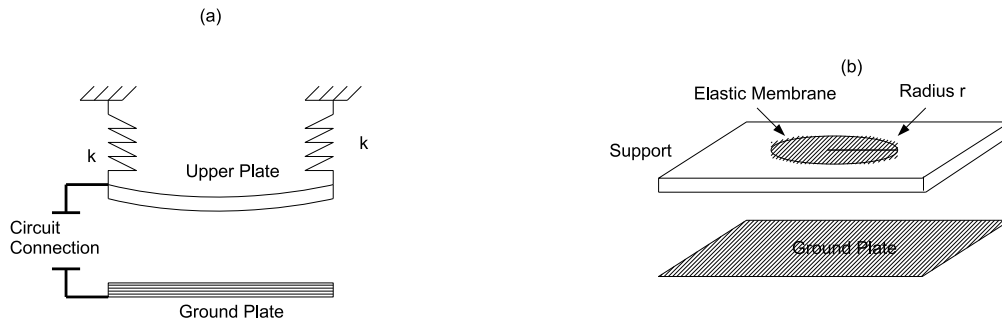
Συνεπώς, σύμφωνα με τις παραπάνω παραδοχές πρέπει να θέσουμε τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες τύπου *Robin* και έχουμε

$$u'_{x'}(-L, t') = k u'(-L, t'), \quad u'_{x'}(L, t') = -k u'(L, t'),$$

όπου  $k$  είναι η σταθερά ενός ιδεατού ελατηρίου που προσομοιώνει τη συμπεριφορά του στηρίγματος.

Στην συνέχεια μέσω της μεθόδου της κανονικοποίησης θέτουμε  $u' = l u$ ,  $x' = L x$ ,  $t' = \frac{L^2 a}{T_m} t$  και καταλήγουμε στο πρόβλημα :

$$(2.4) \quad u_t = u_{xx} + (\epsilon_0 V^2 L^2 / T_m 2 l^3) / (1 - u)^2,$$



Σχήμα 2.2: (α) Σχηματική αναπαράσταση μίας συσκευής MEMS με υποστήριξη. (β) Σχηματική αναπαράσταση μιας συσκευής MEMS με ακτινική συμμετρία

ή θεωρώντας τις προαναφερθείσες συνοριακές συνθήκες και κάποια κατάλληλη αρχική παραμόρφωση  $0 < u(x, 0) < 1$  έχουμε :

$$(2.5\alpha') \quad u_t = u_{xx} + \frac{\lambda}{(1-u)^2}, \quad -1 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$(2.5\beta') \quad u_x(\mp 1, t) = \pm \beta u(\mp 1, t), \quad t > 0,$$

$$(2.5\gamma') \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad -1 < x < 1,$$

για  $\beta = Lk$  και  $\lambda = \frac{\epsilon_0 V^2 L^2}{T_m 2l^3}$ .

Η περίπτωση στην οποία η μεμβράνη έρχεται σε επαφή με την κάτω επιφάνεια της συσκευής, η οποία μαθηματικά εκφράζεται από την εμφάνιση ιδιομορφίας στην εξίσωση (2.5α') για  $u = 1$  (απόσβεση της λύσης), όπως ήδη αναφέραμε, ονομάζεται αστάθεια έλξης (pull in instability). Αυτό το φαινόμενο γενικά συνδέεται με τη δυσλειτουργία της συσκευής.

Λόγω του ότι η αστάθεια της έλξης είναι βασικό χαρακτηριστικό των ηλεκτροστατικά ενεργοποιημένων συστημάτων MEMS, πολλοί ερευνητές έχουν επικεντρωθεί στη μελέτη της δυνατότητας ελέγχου της λειτουργίας της συσκευής με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μη παρατηρείται αυτού του είδους η αστάθεια. Συγκεκριμένα, στις εργασίες [90, 91] προτάθηκε το βασικό σύστημα χωρητικού ελέγχου αρχικά από τους Seeger και Crary για την επεξεργασία αυτού του είδους σταθεροποίησης, βλέπε [15]. Πιο συγκεκριμένα, αυτό το σύστημα παρέχει έλεγχο της τάσης με την προσθήκη πυκνωτή (σε σειρά) στο κύκλωμα που περιέχει τη συσκευή MEMS, καθώς ο προστιθέμενος πυκνωτής δρα ως διαχωριστής τάσης της μεμβράνης. Στην περίπτωση που η συσκευή MEMS, η οποία έχει χωρητικότητα  $C$  ανάλογη της μετατόπισης της μεμβράνης, συνδέεται σε σειρά με έναν πυκνωτή σταθερής χωρητικότητας  $C_f$  και μια πηγή σταθερής τάσης  $V_s$ , έχουμε ότι

$$V_s = \frac{Q}{C_c} = Q \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_f} \right).$$

Το  $Q$  είναι το φορτίο στη συσκευή και στο σταθερό πυκνωτή, και  $C_c$  η συνολική χωρητικότητα του κυκλώματος. Στη συνέχεια, η διαφορά δυναμικού  $V$  σε όλη τη συσκευή MEMS, εφαρμόζοντας τον νόμο του Kirchhoff, ισούται με

$$(2.6) \quad V = \frac{V_s}{1 + C/C_f}.$$

Επιπρόσθετα έχουμε ότι

$$Q = \epsilon_0 \int_0^w \int_0^L \phi_{z'}(x', y', 0) dx' dy' = V \frac{wL\epsilon_0}{l} \int_0^1 \frac{1}{1-u} dx,$$

και χρησιμοποιώντας την σχέση (2.1) παίρνουμε,

$$C = C_0 \int_0^1 \frac{1}{1-u} dx,$$

όπου  $C_0 = \frac{wL\epsilon_0}{t}$  είναι η χωρητικότητα της συσκευής όταν η μετατόπιση της μεμβράνης είναι μηδενική.

Συνδυάζοντας την τελευταία σχέση με τις εξισώσεις (2.4) και (2.6) προκύπτει το ακόλουθο μη-τοπικό παραβολικό πρόβλημα.

$$(2.7\alpha) \quad u_t = u_{xx} + \frac{\lambda}{(1-u)^2 \left(1 + \alpha \int_{-1}^1 \frac{1}{1-u} dx\right)^2}, \quad -1 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$(2.7\beta) \quad u_x(\mp 1, t) = \pm \beta u(\mp 1, t), \quad t > 0,$$

$$(2.7\gamma) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad -1 < x < 1,$$

με  $\alpha = \frac{wL\epsilon_0}{tC_f} = \frac{C_0}{C_f}$ .

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η ελαστική μεμβράνη είναι αρχικά σε ηρεμία, έτσι ώστε  $u(x, 0) \equiv 0$ . Ωστόσο, σ' αυτή την εργασία, θεωρούμε γενικότερα και μη αρνητικές αρχικές συνθήκες. Να σημειωθεί ότι η περιοριστική περίπτωση  $\alpha = 0$  αντιστοιχεί στη διαμόρφωση όπου δεν υπάρχει πυκνωτής στο κύκλωμα και λαμβάνουμε το τοπικό πρόβλημα (2.5). Από πολλά πειράματα είναι σαφές ότι η εφαρμοζόμενη τάση  $V_s$  ελέγχει τη λειτουργία της συσκευής *MEMS* (βλ. αναφορά [82]). Πράγματι, παρατηρήθηκε ότι όταν το  $V_s$  υπερβαίνει μια κρίσιμη οριακή τιμή (*threshold*)  $V_{cr}$ , που ονομάζεται τάση έλξης, τότε το φαινόμενο της επαφής (ή αστάθειας έλξης όπως είναι επίσης γνωστό στην βιβλιογραφία των *MEMS*) συμβαίνει όταν αγγίζει η ελαστική μεμβράνη την άκαμπτη πλάκα γείωσης. Το πρόβλημα αυτό έχει μελετηθεί αρκετά εκτεταμένα π.χ. στις εργασίες [26, 40, 41, 53, 55, 65, 81, 82].

Μια προκαταρκτική μελέτη του τοπικού προβλήματος (2.5), με τις συνοριακές συνθήκες *Robin*, μπορεί να βρεθεί στο [34], όπου κάποια από τα αποτελέσματα που δίνονται εκεί επεκτείνονται και εμπλουτίζονται στην παρούσα διατριβή. Αναφορικά με το μη τοπικό πρόβλημα (2.7) με συνοριακές συνθήκες του *Dirichlet* και τη συμπεριφορά του ως προς την απόσβεση της λύσης, μια μελέτη μπορεί να βρεθεί στην αναφορά [56] και στις παραπομπές εκεί καθώς και στις εργασίες [37, 38, 47] ενώ δεν υπάρχουν παρόμοιες μελέτες για το μη τοπικό πρόβλημα στη περίπτωση που οι συνοριακές συνθήκες είναι τύπου *Robin*.

## Κεφάλαιο 3

# Εισαγωγικές έννοιες- Ορισμοί

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε κάποιες βασικές έννοιες, ορισμούς και αποτελέσματα που θα μας φανούν χρήσιμα στη μελέτη του προβλήματος (1) στο κεφαλαίο 4 αλλά και της στοχαστικής εκδοχής του, του προβλήματος (3) που μελετάται στο κεφάλαιο 5.

### 3.1 Θεωρήματα Ύπαρξης και Μοναδικότητας

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε στα σημαντικότερα θεωρήματα, στα οποία βασιζόμαστε για να αποδειχθεί η τοπική ύπαρξη, η ύπαρξη και η μοναδικότητα των κλασικών λύσεων του μη τοπικού παραβολικού προβλήματος που θα μελετήσουμε παρακάτω. Αρχικά θα δούμε μια γενικευμένη μορφή της ιδέας των Picard-Lindelöf (βλ. [45]) για την απόδειξη ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης των μη γραμμικών προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών στις μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Αρχικά ορίζουμε τις έννοιες των κάτω - πάνω λύσεων.

**Ορισμός 1.** Μια συνάρτηση  $\bar{u} \in C(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$  καλείται πάνω λύση του παρακάτω προβλήματος

$$(3.1\alpha') \quad u_t - Lu = f(u), \quad x \in \Omega, t > 0,$$

$$(3.1\beta') \quad u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad t > 0,$$

$$(3.1\gamma') \quad u(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \Omega,$$

εάν ικανοποιεί τις ανισότητες

$$\begin{aligned} \bar{u}_t - L\bar{u} &\geq f(\bar{u}), \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T, \\ \bar{u}(x, t) &\geq 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t < T, \\ \bar{u}(x, 0) &\geq \psi(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Όμοια για τις κάτω λύσεις ικανοποιούνται οι αντίστροφες ανισότητες.

**Ορισμός 2.** Οι συναρτήσεις  $\alpha, \beta \in C(\bar{Q}_T; \mathbb{R})$  αποτελούν ένα γενικευμένο ζευγάρι κάτω - πάνω λύσεων για το παρακάτω πρόβλημα

$$(3.2\alpha') \quad u_t - Lu = f(x, t, u, \Phi u), \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$(3.2\beta') \quad u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0,$$

$$(3.2\gamma') \quad u(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \Omega,$$

όπου  $u = u(x, t)$ . Αν ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

Η συνάρτηση  $f : \bar{Q}_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $(x, t, u, p) \rightarrow f(x, t, u, p)$  είναι τοπικά Hölder συνεχής (για τον ορισμό των Hölder συνεχών συναρτήσεων βλ. π.χ. [13]) με εκθέτες  $\alpha, \alpha/2, \alpha, \alpha$  ως προς τις μεταβλητές  $x, t, u, p$  αντίστοιχα. Επίσης ο τελεστής  $\Phi$  ορίζεται στο  $C(\bar{Q}_T)$  και για κάθε  $\alpha \in [0, 1]$  και υπάρχει σταθερά  $M > 0$  τέτοια ώστε για οποιαδήποτε  $u, v \in V \subset C^\alpha(\bar{Q}_T)$  να ισχύει ότι

$$\sup\{\|\Phi u(x, t) - \Phi v(x, t)\|_\alpha \cdot \|u - v\|_\alpha^{-\alpha} : (x, t) \in \bar{Q}_T\} < M.$$

Επιπλέον για τις συναρτήσεις  $\alpha, \beta \in C(\bar{Q}_T)$  ορίζουμε το σύνολο  $S_\alpha(x, t) \equiv \{u \in C(\bar{Q}_T) : \alpha(y, s) \leq u(y, s) \leq \beta(y, s), (y, s) \in \bar{Q}_T, u(x, t) = \alpha(x, t)\}$ . Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε το σύνολο  $S_\beta$ .

Για τις συναρτήσεις  $\alpha, \beta$  ισχύει ότι  $\alpha(x, t) \leq 0 \leq \beta(x, t)$  για  $(x, t) \in \partial\Omega \times (0, T)$ ,  $\alpha(x, 0) \leq \psi(x) \leq \beta(x, 0)$  για  $x \in \Omega$  και για κάθε  $(x_0, t_0) \in \bar{Q}_T$  υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή  $U$  του  $(x_0, t_0)$  και ένα πεπερασμένο σύνολο συναρτήσεων  $\{\alpha_r\}_{1 \leq r \leq p} \subseteq C^{2,1}(\bar{U} \cap Q_T)$  έτσι ώστε

$$L\alpha_r \leq f(x, t, \alpha_r, \Phi u)$$

για όλα τα  $(x, t) \in \bar{U} \cap Q_T$ , όλα τα  $u \in S_\alpha(x, t)$ ,  $1 \leq r \leq p$ , όπου

$$\alpha(x, t) = \max_{1 \leq r \leq p} \alpha_r(x, t), \quad (x, t) \in \bar{U} \cap Q_T.$$

Επίσης για κάθε  $(x_0, t_0)$  υπάρχει ανοιχτή περιοχή  $V$  του  $(x_0, t_0)$  και ένα πεπερασμένο σύνολο  $\{\beta_r\}_{1 \leq r \leq q} \subseteq C^{2,1}(\bar{V} \cap Q_T)$  έτσι ώστε

$$\beta(x, t) = \min_{1 \leq r \leq q} \beta_r(x, t), \quad (x, t) \in \bar{V} \cap Q_T$$

και επιπλέον ισχύει ότι

$$L\beta_r \geq f(x, t, \beta_r, \Phi u)$$

για όλα τα  $(x, t) \in \bar{V} \cap Q_T$ , όλα τα  $u \in S_\beta(x, t)$  και  $1 \leq r \leq q$ .

Αν όλες οι προηγούμενες ανισότητες είναι αυστηρές, τότε οι συναρτήσεις  $\alpha, \beta$  αποτελούν ένα αυστηρό γενικευμένο ζευγάρι κάτω - πάνω λύσεων.

Επιπλέον για το πρόβλημα (3.1) ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα ύπαρξης και μοναδικότητας:

**Θεώρημα 1.** Έστω πάνω και κάτω λύσεις  $\bar{u}, \underline{u}$  αντίστοιχα του προβλήματος (3.1). Αν η συνάρτηση  $f(s)$  ικανοποιεί μία συνθήκη Lipschitz με σταθερά  $k$ , δηλαδή

$$|f(u) - f(v)| < k|u - v| \quad \forall u, v \in \mathbb{R}$$

τότε το πρόβλημα (3.1) έχει μοναδική λύση  $u$  τέτοια ώστε  $\underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \bar{u}(x, t)$  στο  $Q_T$ .

**Παρατήρηση 1.** Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για τη περίπτωση που η συνάρτηση  $f$  είναι τοπικά (locally) Lipschitz (βλ. [50]). Σημειώνουμε ότι μια συνάρτηση καλείται τοπικά Lipschitz συνεχής εάν για κάθε  $x$  στο  $X$  υπάρχει μια γειτονιά  $U$  του  $x$  τέτοια ώστε η  $f$  περιορισμένη στο  $U$  να είναι Lipschitz συνεχής. Ισοδύναμα, εάν το  $X$  είναι ένας τοπικά συμπαγής μετρικός χώρος, τότε η  $f$  είναι τοπικά Lipschitz αν και μόνο εάν είναι Lipschitz συνεχής σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του  $X$ .

Τα παρακάτω θεωρήματα σχετίζονται με την μοναδικότητα της λύσης σχετικά με το πρόβλημα (3.2) (βλέπε [50]).

**Θεώρημα 2.** Έστω  $\alpha, \beta$  ένα γενικευμένο ζευγάρι κάτω - πάνω λύσεων του προβλήματος (3.2), τότε έχει λύση  $u \in C^{2,1}(T) \cap C(\bar{Q}_T)$  έτσι ώστε να ισχύει

$$\alpha(x, t) \leq u(x, t) \leq \beta(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}_T.$$

**Θεώρημα 3.** Έστω  $\alpha, \beta$  ένα αυστηρό γενικευμένο ζευγάρι κάτω - πάνω λύσεων του προβλήματος (3.2), τότε κάθε (κλασσική) λύση  $u$  του προβλήματος (3.2) ικανοποιεί τη σχέση  $\alpha(x, t) < u(x, t) < \beta(x, t)$  στο  $\bar{Q}_T$ .

Για την απόδειξη του θεωρήματος βλέπε [50, σελ.10].

### 3.2 Μη Γραμμικά Προβλήματα Ιδιοτιμών

Στη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων υπάρχουν λύσεις πολλών μη γραμμικών εξελικτικών προβλημάτων που περιλαμβάνουν και επιπλέον εξάρτηση της λύσης, από την τιμή μίας παραμέτρου. Από την πολύχρονη μελέτη τέτοιων προβλημάτων έχει αποδειχθεί ότι σημαντικό κομμάτι για την εύρεση της συμπεριφοράς της λύσης αποτελεί η μελέτη του στάσιμου προβλήματος (steady - state) και ειδικότερα η εύρεση του αριθμού των λύσεων που αντιστοιχούν σε κάθε τιμή της παραμέτρου. Θεωρούμε την ακόλουθη κλάση μη γραμμικών προβλημάτων της μορφής

$$(3.3\alpha') \quad -Lw = \lambda f(x, w), \quad x \in \Omega,$$

$$(3.3\beta') \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} + \beta w = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

όπου  $w = w(x)$  και ο  $L$  είναι ένας ομοιόμορφα ελλειπτικός τελεστής της μορφής :

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_j(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu,$$

ενώ η  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$  είναι μια μη αρνητική συνάρτηση.

Ορίζουμε ως φάσμα  $\Sigma$  του προβλήματος (3.3) το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών  $\lambda$  για τις οποίες το πρόβλημα έχει μη αρνητική λύση. Σε αντίθεση με ότι συμβαίνει για τα γραμμικά προβλήματα ιδιοτιμών [6], το παρών πρόβλημα (3.3) δεν έχει διακριτό φάσμα. Έτσι έχουμε την πρόταση :

**Πρόταση 1.** Αν  $\lambda_1 > 0$  και  $\lambda_1 \in \Sigma$ , τότε  $[0, \lambda_1] \subseteq \Sigma$ .

Η απόδειξη βρίσκεται στην αναφορά [50].

Συνήθως, από την άποψη των πρακτικών εφαρμογών, μας ενδιαφέρουν οι μη αρνητικές λύσεις. Επιπλέον την ύπαρξη λύσεων τόσο των κλασικών όσο και των ασθενών για το πρόβλημα (3.3) μπορούμε να την δείξουμε μέσω των διαδοχικών προσεγγίσεων (βλ. Παράρτημα Θεώρημα Έπαρξης της λύσης - (E. Picard - E. Lindelof)).

### 3.3 Διαγράμματα Ανταπόκρισης-Διακλάδωσης -Ευστάθειας

Κατά την διάρκεια της μελέτης των ποικίλων φυσικών συστημάτων που περιγράφονται από μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, προκύπτουν διάφορα ενδιαφέροντα ερωτήματα. Το σημαντικότερο απ' αυτά έχει να κάνει με την ύπαρξη και την εξάρτηση των σημείων ισορροπίας (equilibrium points) από τις τιμές των διαφόρων παραμέτρων του προβλήματος. Για παράδειγμα γίνεται να υπάρξουν σημεία ισορροπίας (στάσιμες λύσεις - steady solutions) για κάποιες τιμές μίας παραμέτρου, ενώ για άλλες όχι. Σε άλλες περιπτώσεις έχουμε πάλι την ύπαρξη μιας κρίσιμης τιμής για μια συγκεκριμένη παράμετρο, στην οποία κάποια στάσιμη λύση χάνει την ευστάθεια της και παύει να υπάρχει, αν και είναι εφικτό να εξακολουθεί να υπάρχει ως μαθηματική έννοια. Επίσης στην ίδια κρίσιμη τιμή είναι πιθανό να έχουμε διακλάδωση (bifurcation) δηλαδή ξαφνική εμφάνιση επιπρόσθετων σημείων ισορροπίας. Αυτού του τύπου τα προβλήματα μελετούνται με την θεωρία ευστάθειας (stability theory) και τη θεωρία διακλάδωσης (bifurcation theory).

Σε αυτό το πλαίσιο θα παρουσιάσουμε κάποια βασικά στοιχεία από τη θεωρία διακλάδωσης τα οποία θα φανούν χρήσιμα στη μελέτη του στάσιμου προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$(3.4\alpha') \quad w'' + \lambda f(w) = 0, \quad -1 < x < 1,$$

$$(3.4\beta') \quad w'(\mp 1) = \pm \beta w(\mp 1),$$

όπου  $f(s) > 0, f'(s) > 0, f''(s) > 0$  για  $s \geq 0$  και



$$\int_0^{\infty} \frac{ds}{f(s)} < \infty.$$

Αποδεικνύεται (βλέπε [64]) ότι το φάσμα του προβλήματος (3.4α'), (3.4β') είναι ένα κλειστό διάστημα και πιο συγκεκριμένα υπάρχει  $0 < \lambda^* < \infty$  τέτοιο ώστε το πρόβλημα (3.4) έχει τουλάχιστον δύο λύσεις για  $0 < \lambda < \lambda^*$ , τουλάχιστον μία λύση για  $\lambda = \lambda^*$  και καμία λύση για  $\lambda > \lambda^*$ . Επιπλέον το μέγιστο της λύσης  $M = w(0) \equiv \max_{[-1,1]} w(x)$  και η παράμετρος  $\lambda$  συνδέονται με τη σχέση :

$$(3.5) \quad \lambda(M) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^M \frac{ds}{[F(M) - F(s)]^{1/2}}.$$

Σχεδιάζουμε συνήθως την καμπύλη (3.4α') στο  $(\lambda, M)$ - σύστημα συντεταγμένων, για να παραστήσουμε (γραφικά) την εξάρτηση των στάσιμων λύσεων - σημείων ισορροπίας από την παράμετρο  $\lambda$ . Στην περίπτωση που για  $0 < \lambda < \lambda^*$  υπάρχουν ακριβώς δύο λύσεις και για  $\lambda = \lambda^*$  μόνο μία, η γραφική αναπαράσταση της σχέσης των  $\lambda$  και  $M$  φαίνεται από σχήμα (3.1).

Ένα τέτοιο διάγραμμα συνηθίζουμε να το λέμε διάγραμμα διακλάδωσης (bifurcation diagram), η παράμετρος  $\lambda$  καλείται παράμετρος διακλάδωσης (bifurcation parameter) και το σημείο  $(\lambda^*, M^*)$  καλείται σημείο διακλάδωσης του προβλήματος (bifurcation point). Σε περιπτώσεις που η συνάρτηση  $\lambda(M)$  είναι γνησίως αύξουσα και μη φραγμένη, δηλαδή  $\lambda(M) \rightarrow +\infty$  καθώς  $M \rightarrow +\infty$  λέμε ότι το άπειρο είναι ένα σημείο "διακλάδωσης".

Όστοςο διαγράμματα τα οποία δεν διακλαδώνονται με την κυριολεκτική έννοια - σημασία του όρου θα τα καλούμε διαγράμματα ανταπόκρισης (response diagrams) λόγω του ότι δεν διακλαδώνονται αλλά μας δείχνουν μόνο τον αριθμό των στάσιμων λύσεων που αντιστοιχούν σε κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ . Το διάγραμμα ανταπόκρισης δεν είναι απαραίτητο να είναι καμπύλη.

Θεωρούμε το εξελικτικό πρόβλημα

$$(3.6\alpha') \quad u_t - Lu = f(\lambda, u), \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$(3.6\beta') \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0,$$

$$(3.6\gamma') \quad u(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \Omega,$$

όπου η  $f$  είναι μη αρνητική και μη γραμμική συνάρτηση και το  $\lambda$  είναι πραγματική παράμετρος. Επιπλέον το  $L$  είναι ένας γραμμικός ομοιόμορφα ελλειπτικός τελεστής. Οι στάσιμες λύσεις ή αλλιώς τα σημεία ισορροπίας του προβλήματος (3.6) είναι οι λύσεις του ελλειπτικού προβλήματος

$$(3.7\alpha') \quad -Lw = f(\lambda, w), \quad x \in \Omega,$$

$$(3.7\beta') \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} + \beta w = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Όπως προαναφέραμε για το πρόβλημα (3.7) είναι εφικτό να υπάρχουν τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  για τις οποίες το παραπάνω σύστημα έχει λύση, καθώς και άλλες για τις οποίες δεν έχει καμία λύση. Αν υποθέσουμε ότι για μια τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  υπάρχει μια στάσιμη λύση  $w$  μας ενδιαφέρει να δούμε αν αυτή θα είναι ευσταθής ή ασταθής λύση. Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό της κατά Lyapunov ευστάθειας.

**Ορισμός 3.** Μια στάσιμη λύση  $w(x)$  του (3.6) καλείται ευσταθής (stable) εάν για κάθε  $\epsilon > 0$ , υπάρχει  $\delta = \delta(\epsilon)$  τέτοιο ώστε αν

$$|\psi(x) - w(x)| < \delta \quad \text{για } x \in \Omega,$$

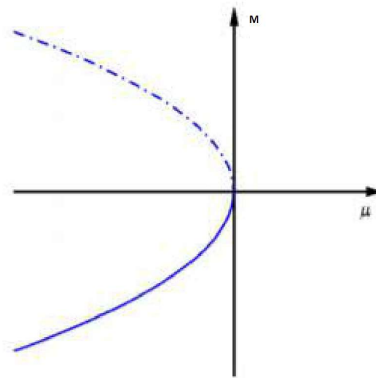
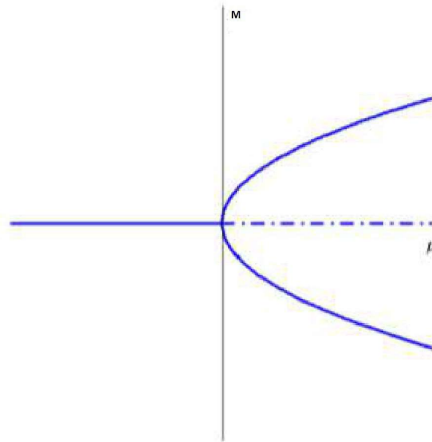
τότε

$$|u(x, t) - w(x)| < \delta \quad \text{για } x \in \Omega, t > 0.$$

Αν επιπλέον ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(x, t) - w(x)| = 0 \quad \text{για } x \in \Omega,$$

τότε η  $w$  καλείται ασυμπτωτικά ευσταθής (asymptotically stable). Αν η  $w$  δεν είναι ευσταθής τότε καλείται ασταθής (unstable).



Σχήμα 3.1: Διάγραμμα διακλάδωσης. Η διακεκομμένη γραμμή παριστάνει τα ασταθή σημεία ισορροπίας και η μπλέ γραμμή παριστάνει τα ευσταθή σημεία ισορροπίας, όπου  $M$  είναι η μέγιστη τιμή της λύσης και  $\mu$  η παράμετρος του προβλήματος.

Το σύνολο των αρχικών δεδομένων της  $u(x)$  για τα οποία η  $w(x)$  είναι ευσταθής καλείται περιοχή έλξης (region of attraction) της  $w(x)$ . Αν η περιοχή έλξης αποτελείται από όλα τα επιτρεπτά αρχικά δεδομένα  $\psi(x)$ , τότε λέμε ότι η  $w$  είναι ολικά ευσταθής (globally stable) ή ένας ολικός ατράκτορας (global attractor).

### 3.4 Απόσβεση Λύσεων(Quenching)

Στα μαθηματικά, με τον όρο απόσβεση (quenching) λέμε ότι λύση αποσβένει δηλαδή παύει να υπάρχει σε πεπερασμένο χρόνο και συγκεκριμένα, όπως στο πρόβλημα που μελετάμε στη παρούσα διατριβή, η λύση γίνεται μηδέν σε πεπερασμένο χρόνο ενώ ταυτόχρονα κάποια νόρμα της απειρίζεται.

Στη παρούσα ενότητα ορίζουμε χρήσιμα εργαλεία για την έννοια της απόσβεσης, που εισήχθη αρχικά το 1975 μέσω της μελέτης ενός φαινομένου πόλωσης σε ιοντικούς αγωγούς (βλ. [3]).

**Ορισμός 4.** (Απόσβεση) Έστω  $\alpha$  είναι θετική σταθερά,  $T \leq \infty$ ,  $\Omega = (0, \alpha) \times (0, T)$ ,

$$\partial\Omega = ([0, \alpha] \times 0) \cup (0, \alpha \times (0, T)).$$

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(3.8\alpha') \quad u_t - \Delta u = \lambda f(u), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T),$$

$$(3.8\beta') \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T),$$

$$(3.8\gamma') \quad u(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \Omega,$$

όπου  $\lim_{u \rightarrow c^-} f(u) = \infty$  για κάποια θετική σταθερά  $c$ . Η λύση  $u$  λέμε ότι αποσβένει εάν υπάρχει πεπερασμένος χρόνος  $T$  τέτοιο ώστε

$$\sup\{|u_t(x, t)| : 0 \leq x \leq \alpha\} \rightarrow \infty \quad \text{καθώς} \quad t \rightarrow T^-,$$

και ο χρόνος  $T$  καλείται χρόνος απόσβεσης. Όταν η παράγωγος  $u_t$  είναι θετική, η παραπάνω συνθήκη γίνεται

$$\max\{u(x, t) : 0 \leq x \leq \alpha\} \rightarrow c^- \quad \text{καθώς} \quad t \rightarrow T^-.$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι αργότερα στο κεφάλαιο 4, όπου μελετάμε το μη τοπικό πρόβλημα (1), χρησιμοποιούμε μια τροποποιημένη εκδοχή αυτού του ορισμού προσαρμοσμένη στη περίπτωση ενός μη τοπικού προβλήματος στο οποίο δεν έχουμε απαραίτητα μονοτονία της παραγώγου.

Τα τυπικά ερευνητικά θέματα που προσπαθούν να απαντηθούν από τους ερευνητές για τα προβλήματα απόσβεσης (quenching) είναι τα ακόλουθα

- (i) Ποιές είναι οι απαραίτητες και επαρκείς συνθήκες για την απόσβεση;
- (ii) Τι μπορεί να ειπωθεί για το σύνολο των σημείων της απόσβεσης; Μπορεί η απόσβεση να συμβεί σε ένα ολόκληρο διάστημα, ή συμβαίνει μόνο σε διαφορετικά σημεία;
- (iii) Τι είδους ασυμπτωτική συμπεριφορά έχουν οι λύσεις κοντά στην περιοχή της απόσβεσης;
- (iv) Μπορεί να έχουμε ύπαρξη της λύσης με κάποια (ασθενή) μορφή μετά την εμφάνιση της απόσβεσης;

Παρακάτω παραθέτουμε κάποια σημαντικά θεωρήματα (βλ. [3]) για τη περίπτωση που έχουμε το φαινόμενο της απόσβεσης που αφορούν το ακόλουθο πρόβλημα

$$(3.9\alpha') \quad u_t - Lu = f(u), \quad x \in \Omega, t > 0,$$

$$(3.9\beta') \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0,$$

$$(3.9\gamma') \quad u(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \Omega,$$

**Θεώρημα 4.** Έστω  $f(u) = -u^{-p}$  ( $p > 0$ ) στο πρόβλημα (3.9). Τότε

$$\min_{x \in \Omega} u(x, t) \leq [(1+p)(T-t)]^{\frac{1}{1+p}}$$

και

$$u(x, t) \geq C_1(T-t)^{\frac{1}{1+p}}$$

στη γειτονία του σημείου απόσβεσης ( $t < T$ ).

Τα βασικά ερωτήματα σε αυτή την ερευνητική εργασία επικεντρώνονται στη φύση της απόσβεσης και έτσι γίνεται προσπάθεια να απαντηθούν σε κάποιο βαθμό κατ' αναλογία με τα αντίστοιχα ερωτήματα που θα είχαμε στη περίπτωση της έαρηξης λύσης τα εξής ερωτήματα :

- (i) **ΠΟΤΕ** γίνεται η απόσβεση
- (ii) **ΠΟΥ** γίνεται, σε ποιά σημεία
- (iii) **ΠΩΣ** γίνεται, με ποιό τρόπο απειρίζεται η λύση ή κάποια νόρμα της στο χρόνο.

### 3.5 Τεχνικές Σύγκρισης

Ένα από τα πιο χρήσιμα εργαλεία για την ποιοτική μελέτη των περισσότερων ημιγραμμικών (semilinear) αλλά και σχεδόν γραμμικών (quasilinear) παραβολικών εξισώσεων είναι οι τεχνικές σύγκρισης. Οι τεχνικές αυτές βασίζονται στην αρχή του μεγίστου ([84, 92, 96]) και ουσιαστικά μας επιτρέπουν να συγκρίνουμε τις λύσεις όμοιων προβλημάτων. Έτσι πολλές φορές με τη βοήθεια τους βγάζουμε συμπεράσματα για την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων διαφόρων προβλημάτων καθώς το  $t \rightarrow \infty$ . Επίσης πολλά θεωρήματα ύπαρξης βασίζονται στις τεχνικές σύγκρισης. Στη συνέχεια αυτής της ενότητας θα παραθέσουμε για λόγους πληρότητας τα κύρια αποτελέσματα που αφορούν τις τεχνικές σύγκρισης για παραβολικά προβλήματα. Πρέπει όμως να σημειώσουμε ότι για τη μελέτη του μη τοπικού προβλήματος (1) αργότερα στο κεφάλαιο 4 θα χρησιμοποιήσουμε κυρίως την έννοια του ζεύγους των πάνω-κάτω λύσεων και τα Θεωρήματα 14, 15, 16 και τη Πρόταση 2.

**Θεώρημα 5.** Έστω  $u, v \in C(\overline{Q_T}; \mathbb{R}) \cap C^{2,1}(Q_T; \mathbb{R})$  δύο συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u - f(u) &< v_t - \Delta v - f(v), & (x, t) \in Q_t, \\ u(x, t) &< v(x, t), & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) &< v(x, 0), & x \in \Omega, \end{aligned}$$

τότε ισχύει ότι  $u(x, t) < v(x, t)$  για κάθε  $(x, t) \in \overline{Q_T}$ .

Στην περίπτωση όπου η  $f$  ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz τότε ισχύει μια ασθενέστερη μορφή του Θεωρήματος 5.

**Θεώρημα 6.** Αν  $f(s + \sigma) - f(s) < L\sigma$  για  $0 < \sigma < \delta$  (όπου  $\delta$  είναι θετική σταθερά) και οι συναρτήσεις  $u, v \in C(\overline{Q_T}; \mathbb{R}) \cap C^{2,1}(Q_T; \mathbb{R})$  ικανοποιούν τις ανισότητες

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u - f(u) &\leq v_t - \Delta v - f(v), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, t) &\leq v(x, t), & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) &\leq v(x, 0), & x \in \Omega, \end{aligned}$$

τότε ισχύει ότι  $u(x, t) \leq v(x, t)$  για κάθε  $(x, t) \in \overline{Q_T}$ .

Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση των γενικότερων μη γραμμικών παραβολικών εξισώσεων. Ας θεωρήσουμε την  $F(x, t, u, p, r)$  η οποία είναι συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση ως προς κάθε μεταβλητή της. Θα λέμε ότι η  $F$  είναι ελλειπτική ως προς την συνάρτηση  $u(x, t)$  στο σημείο  $(x, t)$  εάν ισχύει ότι  $F_r(x, t, u(x, t), u_x(x, t), u_{xx}(x, t)) > 0$ . Το ακόλουθο θεώρημα είναι γνωστό ως Λήμμα των Nagumo-Westphal [66].

**Θεώρημα 7.** Έστω  $u, v \in C(\overline{Q_T}; \mathbb{R}) \cap C^{2,1}(\overline{Q_T}; \mathbb{R})$ . Αν η  $F$  είναι ελλειπτική στο  $Q_T$  ως προς τη συνάρτηση  $\theta u + (1 - \theta)v$  για κάθε  $\theta \in [0, 1]$  και συνεχώς διαφορίσιμη ως προς κάθε μεταβλητή της ενώ επιπλέον ικανοποιούνται οι ανισότητες

$$\begin{aligned} u_t - F(x, t, u, u_x, u_{xx}) &\leq v_t - F(x, t, v, v_x, v_{xx}), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, t) &\leq v(x, t), & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) &\leq v(x, 0), & x \in \Omega, \end{aligned}$$

τότε ισχύει ότι  $u(x, t) \leq v(x, t)$  για κάθε  $(x, t) \in \overline{Q_T}$ .

Με τη βοήθεια των παραπάνω θεωρημάτων σύγκρισης συμπεραίνουμε κάποια πολύ χρήσιμα αποτελέσματα που αφορούν την μονοτονία ως προς  $t$  των χρονοεξαρτημένων λύσεων.

**Θεώρημα 8.** Έστω  $u(x, t)$  μια λύση του προβλήματος (3.6).

- (i) Αν η  $u(x, 0) = \psi(x)$  είναι μία κάτω λύση του προβλήματος (3.6) τότε η  $u(x, t)$  είναι αύξουσα ως προς  $t$  για κάθε  $x \in \overline{\Omega}$ .
- (ii) Αν η  $u(x, 0) = \psi(x)$  είναι μία πάνω λύση του προβλήματος (3.6) τότε η  $u(x, t)$  είναι φθίνουσα ως προς  $t$  για κάθε  $x \in \overline{\Omega}$ .

Το παρακάτω θεώρημα σχετίζεται με την ευστάθεια των στάσιμων λύσεων.

**Θεώρημα 9.** Έστω  $u_0, v_0$  πάνω και κάτω λύσεις αντίστοιχα του ελλειπτικού προβλήματος (3.7) με  $u_0(x) \leq v_0(x)$ . Έστω  $u, v$  λύσεις του (3.6) με αρχικές συνθήκες  $u(x, 0) = u_0(x)$  και  $v(x, 0) = v_0(x)$ . Τότε θα έχουμε  $u(x, t) \uparrow \bar{u}(x)$  καθώς  $t \rightarrow \infty$  και  $v(x, t) \uparrow \bar{v}(x)$  καθώς  $t \rightarrow \infty$  με  $\bar{u}(x) \leq \bar{v}(x)$ , όπου  $\bar{u}(x)$  και  $\bar{v}(x)$  είναι λύσεις του προβλήματος (3.7).

Έτσι αν το πρόβλημα (3.7) για κάποια τιμή του  $\lambda$  έχει μοναδική λύση  $w$ , τότε η  $w$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

**Θεώρημα 10.** Έστω  $w$  μια λύση του προβλήματος (3.7) και  $z, v$  πάνω και κάτω λύσεις του (3.7) με  $z(x) < w(x) < v(x)$  στο  $\bar{\Omega}$ . Έστω επίσης  $u(x, t; \psi)$  μία λύση του (3.6) με αρχική συνθήκη  $u(x, 0) = \psi(x)$ . Αν  $z(x) < \psi(x) < v(x)$ , τότε  $u(x, t; z) < u(x, t; \psi) < u(x, t; v)$  στο  $\bar{Q}_T$ . Επιπλέον αν  $T^n z \uparrow w$  και  $T^n v \downarrow w$  τότε η  $w$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθής και  $u(x, t; \psi) \rightarrow w(x)$  καθώς  $t \rightarrow \infty$  ομοιόμορφα ως προς  $x$ .

Όσον αφορά την απόδειξη του θεωρήματος 10 μπορούμε να τη δούμε στις εργασίες [18, 89] και επιπλέον πολύ σημαντικό είναι το ότι ισχύει και το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος. Δηλαδή, αν η  $w$  είναι ευσταθής λύση του προβλήματος (3.7) τότε είναι και όριο ακολουθιών της μορφής  $T^n z, T^n v$ , όπου  $z, v$  πάνω και κάτω λύσεις του (3.7).

Στη περίπτωση που έχουμε μια  $f$  θετική και φθίνουσα συνάρτηση δηλαδή

$$(3.10) \quad f(s) > 0, \quad f'(s) < 0 \quad \text{για} \quad s \geq 0$$

ισχύουν για το μη τοπικό πρόβλημα

$$u_t - \Delta u + b \cdot \nabla u - \frac{\lambda f(u)}{(\int_{\Omega} f(u) dx)^2} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \Omega,$$

θεωρήματα σύγκρισης ανάλογα με εκείνα που αντιστοιχούν στις περισσότερες παραβολικές εξισώσεις.

**Θεώρημα 11.** Έστω  $Q_T = \Omega \times (0, T)$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  φραγμένο και  $\Gamma_T = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times (0, T])$ ). Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τη σχέση (3.10) και επιπλέον έχουμε  $u, v \in C(\bar{Q}_T; \mathbb{R}) \cap C^{2,1}(Q_T; \mathbb{R})$  είναι δύο συνάρτησεις που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$u_t - \Delta u + b \cdot \nabla u - \frac{\lambda f(u)}{(\int_{\Omega} f(u) dx)^2} < v_t - \Delta v + b \cdot \nabla v - \frac{\lambda f(v)}{(\int_{\Omega} f(v) dx)^2}, \quad (x, t) \in Q_T,$$

$$u(x, t) < v(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_T,$$

όπου  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^N$ ,  $b_i$  σταθερό,  $i = 1, 2, \dots, N$ , τότε  $u(x, t) < v(x, t)$  για κάθε  $(x, t) \in \bar{Q}_T$ .

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση που αντί για γνήσιες ανισότητες έχουμε ανισοισότητες, κάτω όμως από μια επιπλέον υπόθεση για την συνάρτηση  $f$ . Συγκεκριμένα, το ακόλουθο θεώρημα αποτελεί την ασθενή μορφή του Θεωρήματος 11:

**Θεώρημα 12.** Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.10 και επιπλέον είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά  $K > 0$ , δηλαδή  $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Αν  $u, v \in C(\bar{Q}_T; \mathbb{R}) \cap C^{2,1}(Q_T; \mathbb{R})$  είναι δύο συνάρτησεις που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$u_t - \Delta u + b \cdot \nabla u - \frac{\lambda f(u)}{(\int_{\Omega} f(u) dx)^2} \leq v_t - \Delta v + b \cdot \nabla v - \frac{\lambda f(v)}{(\int_{\Omega} f(v) dx)^2}, \quad (x, t) \in Q_T,$$

$$u(x, t) \leq v(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_T,$$

τότε έχουμε ότι  $u(x, t) \leq v(x, t)$  για κάθε  $(x, t) \in \bar{Q}_T$ .

Οι αποδείξεις των Θεωρημάτων 11 και 12 βρίσκονται στην εργασία [50].

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να αποδειχθεί η ύπαρξη και μοναδικότητα του προβλήματος (3.1), στην περίπτωση που η συνάρτηση  $f$  είναι φθίνουσα, είναι χρησιμοποιώντας τις επαναληπτικές διαδικασίες (iteration schemes) που σχετίζονται με τις πάνω και κάτω λύσεις (βλέπε [78, 89]).

**Θεώρημα 13.** Έστω  $\bar{u}, \underline{u}$  πάνω και κάτω λύσεις αντίστοιχα του προβλήματος (3.1), όπου η συνάρτηση  $f(s)$  είναι φθίνουσα και Lipschitz συνεχής στο διάστημα  $(\min_{\bar{Q}_T} \underline{u}, \max_{\bar{Q}_T} \bar{u})$ . Τότε υπάρχει μοναδική (κλασική) λύση  $u$  του προβλήματος (3.1) έτσι ώστε να συμπεράνουμε ότι

$$\underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \bar{u}(x, t) \quad \text{για } (x, t) \in \bar{Q}_T.$$

Στην περίπτωση που η συνάρτηση  $f$  είναι αύξουσα τότε είναι απαραίτητη μια τροποποίηση του ορισμού των κάτω - πάνω λύσεων για να πάρουμε ανάλογα αποτελέσματα σύγκρισης. Συγκεκριμένα ο ορισμός των κάτω - πάνω λύσεων παίρνει την ακόλουθη μορφή:

**Ορισμός 5.** Οι συναρτήσεις  $u, v \in C^{2,1}(\Omega; \mathbb{R}) \cap C(\bar{Q}_T; \mathbb{R})$  ( $Q_T = \Omega \times (0, T)$ ) είναι ένα ζευγάρι αυστηρών κάτω - πάνω λύσεων (strict lower - upper pair) εάν ικανοποιούνται οι ακόλουθες ανισότητες

$$\begin{aligned} u_t &< \Delta u + \frac{\lambda f(u)}{(\int_{\Omega} f(v) dx)^p}, & v_t &> \Delta v + \frac{\lambda f(v)}{(\int_{\Omega} f(u) dx)^p}, & x &\in \Omega, & 0 < t < T, \\ Bu &< 0 < Bv, & x &\in \partial\Omega, & 0 < t < T, \\ u(x, 0) &< \psi(x) < v(x, 0), & x &\in \Omega, \end{aligned}$$

όπου  $B$  είναι ο συνοριακός τελεστής.

Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις  $u, v$  αντί για τις παραπάνω αυστηρές ανισότητες ικανοποιούν τις αντίστοιχες ασθενείς ( $\leq, \geq$ ), τότε είναι ένα ζευγάρι κάτω - πάνω λύσεων (lower - upper pair).

Τα ακόλουθα Θεωρήματα μας βασίζονται σε αυτή την έννοια των κάτω - πάνω λύσεων.

**Θεώρημα 14.** Αν  $z, v$  είναι ένα ζευγάρι αυστηρών κάτω - πάνω λύσεων του προβλήματος

$$(3.15\alpha') \quad u_t = \Delta u + \frac{\lambda f(u)}{(\int_{\Omega} f(v) dx)^p}, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T,$$

$$(3.15\beta') \quad Bu(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0,$$

$$(3.15\gamma') \quad u(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \Omega,$$

τότε έχουμε  $z(x, t) < v(x, t)$  για  $(x, t) \in \bar{Q}_T$ .

**Θεώρημα 15.** Αν  $z, v$  είναι ένα ζευγάρι κάτω - πάνω λύσεων του προβλήματος (3.15) στο  $Q_T$  τότε έχουμε  $z(x, t) \leq v(x, t)$  για  $(x, t) \in \bar{Q}_T$ .

**Θεώρημα 16.** Αν  $z, v$  είναι ένα ζευγάρι κάτω - πάνω λύσεων του προβλήματος (3.15) τότε υπάρχει μοναδική κλασική λύση  $u$  για το πρόβλημα (3.15) τέτοια ώστε έχουμε

$$z(x, t) \leq u(x, t) \leq v(x, t) \quad (x, t) \in \bar{Q}_T.$$

**Παρατήρηση 2.** Ανάλογα αποτελέσματα μπορούν να προσαρμοστούν στο μη τοπικό πρόβλημα (1) δεδομένου ότι στο πρόβλημα αυτό η μη γραμμικότητα είναι αύξουσα.

**Πρόταση 2.** Έστω  $0 < T < \infty$ , το  $\Omega$  είναι ένα αυθαίρετα φραγμένο χωρίο του  $\mathbb{R}^n$ , και  $a, b, k \in L^\infty(Q_T)$ , με  $b, k \geq 0$ . Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $w \in C(\bar{\Omega} \times (0, T)) \cap C([0, T], L^2(\Omega))$  ικανοποιεί την σχέση  $\sup_{Q_T} w < \infty$ , με

$$(3.16) \quad \partial_t w_t, \nabla w, D^2 w \in L^2_{loc}(\bar{\Omega} \times (0, T)).$$

Εάν  $w \leq 0$  στο  $\mathcal{P}_T := (\partial\Omega \times (0, T)) \cup (\bar{\Omega} \times \{0\})$  και είτε

$$(3.17) \quad \partial_t w - \Delta w \leq aw + b \int_{\Omega} k(y, \cdot) w(y, \cdot) dy \quad \text{σχεδόν παντού στο } Q_T,$$

ή

$$(3.18) \quad \partial_t w - \Delta w \leq aw + b \int_{\Omega} k(\cdot, s) w(\cdot, s) ds \quad \text{σχεδόν παντού στο } Q_T,$$

τότε

$$(3.19) \quad w \leq 0 \quad \text{στο } Q_T.$$

Η απόδειξη της βρίσκεται στην αναφορά [85, σελίδα 524].

Σε αυτό το σημείο σημειώνουμε ότι με τον συμβολισμό της μορφής  $C([0, T], L^2(\Omega))$  εννοούμε το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων  $w(x, t)$  για τις οποίες  $w(\cdot, t) \in L^2(\Omega)$  για κάθε  $t \in (0, T)$  και επιπλέον  $\|w(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \in C([0, T])$ . Επιπλέον σημειώνουμε ότι ο χώρος  $L^2_{loc}(\bar{\Omega})$  ορίζεται ως εξής

$$L^2_{loc}(\bar{\Omega}) = \{u \in \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \in L^2(\bar{\Omega}) \quad \forall \bar{\Omega} \subset\subset \Omega\},$$

όπου ο συμβολισμός  $\bar{\Omega} \subset\subset \Omega$  μας δείχνει ότι υπάρχει χωρίο  $K$  συμπαγές τέτοιο ώστε  $\bar{\Omega} \subset K \subset \Omega$ .

Πολλές φορές, είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν τεχνικές σύγκρισης και για τη μελέτη της ευστάθειας υπερβολικών εξισώσεων, αφού όμως πρώτα αποδειχθεί η αρχή του μεγίστου (βλέπε αναφορά [58]). Επίσης όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια και η μελέτη της απόσβεσης μπορεί να γίνει με τη βοήθεια των τεχνικών σύγκρισης. Συγκεκριμένα για να αποδειχθεί ότι η λύση ενός προβλήματος αποσβένει, αρκεί να κατασκευαστεί μια κάτω λύση η οποία αποσβένει. Στην περίπτωση που αποτυγχάνουν οι τεχνικές σύγκρισης, μια εναλλακτική μέθοδος για να μελετήσουμε την ευστάθεια και την απόσβεση λύσεων είναι να χρησιμοποιήσουμε μεθόδους από τη θεωρία των δυναμικών συστημάτων όπως για παράδειγμα τη μέθοδο Lyapunov την οποία παρουσιάζουμε συνοπτικά στη συνέχεια (βλέπε [18, 46]). Αρχικά ορίζουμε την έννοια ενός δυναμικού συστήματος.

**Ορισμός 6.** Έστω  $X$  πλήρης μετρικός χώρος με απόσταση  $d_x(\cdot, \cdot)$ . Μία συνάρτηση  $S : [0, \infty) \times X \rightarrow X$  με τις ιδιότητες

- (i) για κάθε  $t \geq 0$ , η συνάρτηση  $S(t, \cdot) : X \rightarrow X$  είναι συνεχής,
- (ii) για κάθε  $\phi \in X$  η συνάρτηση  $S(\cdot, \phi) : [0, \infty) \rightarrow X$  είναι συνεχής,
- (iii)  $S(0, \phi) = \phi$  για κάθε  $\phi \in X$ ,
- (iv)  $S(t + s, \phi) = S(t, S(s, \phi))$  για κάθε  $t, s \geq 0$

καλείται δυναμικό σύστημα στον  $X$ . Αν  $\phi \in X$ , τότε η θετική τροχιά  $\gamma(\phi)$  που περνάει από το  $\phi$  ορίζεται

$$\gamma(\phi) := \{S(t, \phi) : t \geq 0\}.$$

Επίσης για κάθε τροχιά  $\gamma(\phi)$  ορίζεται το αντίστοιχο  $\omega$ -οριακό σύνολο

$$\omega(\phi) = \omega(\gamma(\phi)) = \{w \in X : \exists t_n \rightarrow \infty \text{ τέτοια ώστε } d_x(S(t_n, \phi), w) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}.$$

Το  $\omega(\phi)$  δεν είναι κατ' ανάγκη μη κενό σύνολο. Στην περίπτωση όμως που συμβαίνει αυτό, προκύπτει από τον ορισμό του ότι είναι ένα θετικά αναλλοίωτο υποσύνολο του  $X$ , δηλαδή ισχύει  $\gamma(w) \in \omega(\phi)$  για κάθε  $w \in \omega(\phi)$ .

**Θεώρημα 17.** Έστω  $\phi \in X$  έτσι ώστε η τροχιά  $\gamma(\phi)$  να είναι φραγμένη στο  $X$ . Τότε το  $\omega(\phi)$  θα είναι

- μη κενό,
- συμπαγές ως προς την τοπολογία του  $X$ ,
- συνεκτικό ως προς την τοπολογία του  $X$ .

Ένα στοιχείο  $\phi \in X$  καλείται σημείο ισορροπίας του δυναμικού συστήματος  $S$  αν  $\gamma(\phi) = \{\phi\}$ . Επίσης ένα σημείο ισορροπίας  $\phi \in X$  είναι ευσταθές εάν για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $\delta(\epsilon) > 0$  έτσι ώστε για κάθε  $t \geq 0$  ισχύει  $d_x(S(t, \phi), S(t, \psi)) < \epsilon$  για  $\psi \in X$  με  $d_x(\phi, \psi) < \delta(\epsilon)$ . Διαφορετικά το  $\phi \in X$  καλείται ασταθές. Σ' αυτό το σημείο χρειάζεται να ορίσουμε την έννοια του συναρτησιακού Lyapunov από τη θεωρία δυναμικών συστημάτων:

**Ορισμός 7.** Μια συνεχής συνάρτηση  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  καλείται συναρτησιακό Lyapunov του δυναμικού συστήματος :

- αν  $\dot{J}(\phi) := \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{J(S(t, \phi)) - J(\phi)}{t} \leq 0$  για κάθε  $\phi \in X$ ,
- η ισότητα  $\dot{J}(\phi) = 0$  συνεπάγεται ότι το  $\phi$  είναι ένα σημείο ισορροπίας του  $S$ .

Δηλαδή αν το  $J$  είναι συναρτησιακό Lyapunov τότε για κάθε  $\phi \in X$  η συνάρτηση  $t \rightarrow J(S(t, \phi))$  είναι φθίνουσα στο  $(0, \infty)$ . Επίσης ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 18.** Αν το συναρτησιακό  $J$  λαμβάνει ένα αυστηρό τοπικό ελάχιστο σ' ένα σημείο ισορροπίας  $\omega$ , τότε το  $\omega$  είναι ευσταθές.

Για περισσότερες λεπτομέρειες στη θεωρία των δυναμικών συστημάτων μπορούμε να δούμε τις αναφορές [18, 46].

### 3.6 Στοιχεία Στοχαστικής Ανάλυσης

Η κίνηση Brown παίζει σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά, τη φυσική, τη βιολογία, τη χημεία και τα οικονομικά. Αρχικά, χρησιμοποιήθηκε για να περιγράψει την τυχαία χαοτική κίνηση σωματιδίων που εναιωρήθηκαν σε ένα υγρό υπό βομβαρδισμό από τεράστιο αριθμό ατόμων ενός υγρού. Η μάζα του σωματιδίου είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτή ενός μορίου και επομένως η επίδραση ενός μονοατομικού χτυπήματος είναι πρακτικά αμελητέο. Ωστόσο, ο αριθμός των χτυπημάτων είναι τεράστιος (περίπου  $10^{21}$  ανά δευτερόλεπτο) και μπορούμε να παρακολουθήσουμε με μικροσκόπιο την αδιάκοπη χαοτική κίνηση του σωματιδίου. Είναι επίσης σημαντικό ότι όλα αυτά τα χτυπήματα είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Αυτά τα γεγονότα οδηγούν σε ένα μαθηματικό μοντέλο της κίνησης Brown. Οι τροχιές της κίνησης Brown, αν και συνεχείς, δεν είναι πουθενά διαφορίσιμες. Για αυτόν τον λόγο, εμφανίζονται πολλές μαθηματικές δυσκολίες και «εξωτικά» φαινόμενα κατά την εξέταση ερωτήσεων που σχετίζονται με την κίνηση Brown. Τελικά κατέστη σαφές ότι η κίνηση Brown είναι μια πολύ πιο καθολική τυχαία διαδικασία.

#### 3.6α' Κίνηση Brown - (Brownian motion)

**Ορισμός 8.** Μια στοχαστική διαδικασία είναι μια παραμετρισμένη συλλογή τυχαίων μεταβλητών  $\{X_t\}_{t \in T}$ , οι οποίες ορίζονται σε ένα χώρο πιθανοτήτων  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  και παίρνουν τιμές στο  $\mathbb{R}^d$ .

Στη συνέχεια θα ορίσουμε μερικά εργαλεία που θα μας φανούν χρήσιμα στην πορεία της διατριβής (βλέπε [100, 67]).

**Ορισμός 9.** Μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου λέγεται ότι έχει ανεξαρτησία ελάχιστων μεταβολών (*independent increments*) όταν προσδιορίζει μια τυχαία μεταβλητή  $X_t$  σε κάθε σημείο  $t \geq 0$  στο χρόνο. Στην πραγματικότητα είναι μια τυχαία συνάρτηση του χρόνου  $t$ . Οι ελάχιστες μεταβολές μιας τέτοιας διαδικασίας είναι οι διαφορές  $X_s - X_t$  μεταξύ των τιμών της σε διαφορετικούς χρόνους  $t < s$ . Για να ονομαστούν ανεξάρτητες οι ελάχιστες μεταβολές μιας διαδικασίας σημαίνει ότι οι ελάχιστες μεταβολές  $X_s - X_t$  και  $X_u - X_v$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές όταν τα δύο χρονικά διαστήματα δεν αλληλοκαλύπτονται και, γενικότερα, οποιοσδήποτε πεπερασμένος αριθμός ελάχιστων μεταβολών που αντιστοιχίζεται σε ζευγάρια μη επικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα είναι αμοιβαία (όχι μόνο κατά ζεύγη) ανεξάρτητα.

**Ορισμός 10.** Στάσιμες ελάχιστες μεταβολές (*Stationary increments*) ονομάζονται οι κατανομές πιθανότητας οποιασδήποτε ελάχιστης μεταβολής  $X_t - X_s$  που εξαρτώνται μόνο από το μήκος  $t - s$  του χρονικού διαστήματος. Οι ελάχιστες μεταβολές σε εξίσου μεγάλα χρονικά διαστήματα κατανέμονται πανομοιότυπα.

Εάν το  $X$  είναι διαδικασία Wiener (που θα ορίσουμε στη συνέχεια), η πιθανότητα κατανομής του  $X_t - X_s$  είναι κανονική με αναμενόμενη τιμή ίση με 0 και διακύμανση  $t - s$ .



Εάν  $X$  είναι η διαδικασία Poisson, η πιθανότητα κατανομή του  $X_t - X_s$  είναι μια κατανομή Poisson με αναμενόμενη τιμή  $\lambda(t-s)$ , όπου  $\lambda > 0$  είναι η "ένταση" ή ο "βαθμός" της διαδικασίας.

**Ορισμός 11.** Μια στοχαστική διαδικασία  $X = \{X_t : t \geq 0\}$  καλείται διαδικασία Lévy εάν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i)  $X_0 = 0$  σχεδόν βέβαια (σ.β.).
- (ii) Ανεξαρτησία ελάχιστων μεταβολών: Για κάθε  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$ , οι διαφορές  $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  είναι αμοιβαία ανεξάρτητες.
- (iii) Στάσιμες ελάχιστες μεταβολές: Για κάθε  $s < t$ , η διαφορά  $X_t - X_s$  είναι ίση με την κατανομή  $X_{t-s}$ .
- (iv) Συνέχεια στην πιθανότητα: Για κάθε  $\epsilon > 0$  και  $t \geq 0$  ισχύει ότι  $\lim_{h \rightarrow 0} P(|X_{t+h} - X_t| > \epsilon) = 0$ .

**Ορισμός 12.** Η κίνηση Brown περιγράφεται με τη διαδικασία Wiener, μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου που ονομάστηκε προς τιμήν του Norbert Wiener. Είναι μια από τις πιο γνωστές διαδικασίες Lévy (στοχαστικές διαδικασίες με σταθερές ανεξάρτητες προσαυξήσεις) και εμφανίζεται συχνά στα καθαρά και εφαρμοσμένα μαθηματικά, στην οικονομία και στη φυσική κτλ.

Η διαδικασία Wiener  $W_t$  χαρακτηρίζεται από τέσσερις προϋποθέσεις:

- (i)  $W_0 = 0$  σ.β.
- (ii)  $W_t$  είναι συνεχής σ.β.
- (iii)  $W_t$  έχει ανεξάρτητες ελάχιστες μεταβολές.
- (iv)  $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$  (για  $0 \leq s \leq t$ ).

Με  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  συμβολίζεται η κανονική κατανομή με αναμενόμενη τιμή  $\mu$  και διακύμανση  $\sigma^2$ . Η προϋπόθεση ότι η  $W_t$  έχει ανεξάρτητες ελάχιστες μεταβολές σημαίνει ότι αν  $0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$  τότε οι διαφορές  $W_{t_1} - W_{s_1}$  και  $W_{t_2} - W_{s_2}$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε κάποια βασικά αποτελέσματα και ορισμούς που αφορούν τη στοχαστική ολοκλήρωση.

**Ορισμός 13.** Θεωρούμε  $B_t$  μια κίνηση Brown και την διαμέριση  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  του διαστήματος  $[a, b]$ . Προσεγγίζουμε την συνάρτηση  $f(t, \omega)$  ως εξής:

$$f(t, \omega) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, \omega) \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t).$$

Το ολοκλήρωμα  $I_t \delta$  ορίζεται σαν το όριο στον  $L^2$

$$I(f) := \int_a^b f(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, \omega) [B_{t_{i+1}} - B_{t_i}](\omega).$$

**Πρόταση 3.** Το στοχαστικό ολοκλήρωμα έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) Είναι γραμμικό, δηλαδή για δύο στοχαστικές διαδικασίες  $f_1$  και  $f_2$  ισχύει  $I(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 I(f_1) + \lambda_2 I(f_2)$ , όπου  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{R}$ .
- (ii)  $E \left[ \int_a^b f dB_t \right] = 0$ .
- (iii)  $E \left[ \left| \int_a^b f(t, \omega) dB_t \right|^2 \right] = E \left[ \int_a^b |f(t, \omega)|^2 dt \right]$ .

Η ιδιότητα (iii) ονομάζεται ισομετρία του  $I_t \delta$ .

**Ορισμός 14.** Ο κύριος τύπος ολοκλήρωσης ή η formula Newton - Leibniz είναι:

$$F(X_T) - F(X_0) = \int_0^T F'(X_t) dX_t$$

**Θεώρημα 19. Τύπος-Φόρμουλα Itô για την κίνηση Brown**

Εάν  $F \in C^2(\mathbb{R})$  τότε έχουμε

$$(3.20) \quad F(B_t) - F(B_0) = \int_0^t F'(B_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(B_s)ds,$$

για κάθε συνάρτηση  $F \in C^2(\mathbb{R})$ , η οποία σε διαφορική μορφή δίνεται από τη σχέση

$$dF(B_t) = F'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}F''(B_t)dt.$$

Στη συνέχεια δίνουμε έναν ορισμό για το πότε μια διαδικασία ονομάζεται martingale.

**Ορισμός 15.** Η προσαρμοσμένη τυχαία διαδικασία  $M = \{M_t, t \geq 0\}$  ονομάζεται martingale αν

$$E(z(M_s - M_t)) = 0$$

για όλες τις φραγμένες τυχαίες μεταβλητές  $z \in H_t$  και  $s \geq t \geq 0$ .

**Ορισμός 16.** Ένας βασικός ορισμός του martingale σε διακριτό χρόνο είναι μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου (δηλαδή, μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών)  $X_1, X_2, X_3, \dots$  που ικανοποιεί για κάθε  $n$ ,

$$\mathbf{E}(|X_n|) < \infty$$

$$\mathbf{E}(X_{n+1} | X_1, \dots, X_n) = X_n.$$

**Ορισμός 17.** Η στοχαστική διαδικασία  $X_t$  είναι μια semimartingale αν μπορεί να γραφεί σαν το άθροισμα μίας τοπικής martingale και μίας διαδικασίας τοπικά φραγμένης μεταβολής, δηλαδή αν  $X_t = M_t + A_t$ .

Για μια semimartingale  $X_t$  ισχύει  $\langle X \rangle_t = \langle M \rangle_t$ .

Η θεωρία των semimartingale βρίσκει εφαρμογές στην θεωρία της στοχαστικής ολοκλήρωσης και των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

Ακολουθεί παρακάτω μια πρόταση με ιδιότητες για τη διαδικασία martingale

**Πρόταση 4.** Έστω  $H \in H^2[0, T]$  (όπου με  $H^2$  συμβολίζουμε τον αντίστοιχο χώρο Sobolev, βλ. [13]). Ορίζουμε  $M_t = \int_0^t H_s dB_s$  και  $\langle M \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$ ,  $t \in [0, T]$ . Τότε :

- η τυχαία διαδικασία  $M_t$ ,  $t \in [0, T]$ , είναι martingale.
- $E(z(M_s^2 - M_t^2)) = E(z(M_s - M_t)^2)$  για όλα τα φραγμένα  $z \in H_t, 0 \leq t \leq s \leq T$ .
- η τυχαία διαδικασία  $N_t : M_t^2 - \langle M \rangle_t, t \in [0, T]$  είναι martingale.

**Ορισμός 18.** Μια προσαρμοσμένη τυχαία διαδικασία  $X_t, t \in [0, T]$ , ονομάζεται διαδικασία Itô (ή διαδικασία τύπου διάχυσης (diffusion-type process) εάν μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s, t \in [0, T],$$

όπου  $K$  και  $H$  είναι προσαρμοσμένες τυχαίες διαδικασίες έτσι ώστε να υπάρχουν τα ολοκληρώματα στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης, δηλαδή  $\int_0^T |K_s| ds < +\infty$  και  $\int_0^T H_s^2 ds < +\infty$ . Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι η διαδικασία  $X$  επαληθεύει τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = K_t dt + H_t dB_t,$$

ή εν συντομία

$$dX = K dt + H dB.$$

Ειδικότερα, όταν  $H = 0$ , λέμε ότι η διαδικασία Itô,  $X$ , είναι ομαλή (regular).

**Ορισμός 19.** Η συνδιακύμανση (covariation) των δύο διαδικασιών  $It\hat{o}$

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s, t \in [0, T],$$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \tilde{K}_s ds + \int_0^t \tilde{H}_s dB_s, t \in [0, T]$$

ορίζεται ως η τυχαία διαδικασία  $\langle X, Y \rangle_t := \int_0^t H_s \tilde{H}_s ds$ . Η διαδικασία  $\langle X \rangle_t = \langle X, X \rangle_t$  καλείται τετραγωνική διακύμανση (quadratic variation) της διαδικασίας  $X$ . Σημειώνεται ότι η συνδιακύμανση (covariation) είναι μηδέν δηλαδή  $\langle X, Y \rangle = 0$ , εάν τουλάχιστον μία από τις διαδικασίες  $Q$  και  $U$  είναι κανονική.

**Πόρισμα 1. Ολοκλήρωση κατα παράγοντες (Integration by parts formula)**

Εάν  $X$  και  $Y$  είναι διαδικασίες  $It\hat{o}$  στο χρονικό διάστημα  $[0, T]$ , τότε

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Psi_s ds + \int_0^t \Phi_s dB_s \quad \text{και} \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t \tilde{\Psi}_s ds + \int_0^t \tilde{\Phi}_s dB_s,$$

τότε

$$(3.21) \quad X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + [X, Y]_t, \quad t \in [0, T]$$

όπου ο τελευταίος όρος στον παραπάνω τύπο είναι η τετραγωνική απόκλιση των διαδικασιών  $X_t, Y_t$  και ορίζεται ως εξής:

$$(3.22) \quad [X, Y]_t := \int_0^t \Phi_s \tilde{\Phi}_s ds,$$

όπου  $\Phi_s$  και  $\Psi_s$  είναι προσαρμοσμένες τυχαίες διαδικασίες έτσι ώστε τα ολοκληρώματα να υπάρχουν δηλαδή  $\int_0^T |\Phi_s| ds < +\infty$  και  $\int_0^T |\Psi_s| ds < +\infty$  (σ.β.) (βλέπε [68, Πόρισμα 7.11 σελίδα 119]).

**Ορισμός 20.** Έστω  $Z_t, t \geq 0$  είναι διαδικασία  $It\hat{o}$ , και  $A_t, t \geq 0$ , κανονική διαδικασία  $It\hat{o}$ . Μια τυχαία διαδικασία ( $It\hat{o}$ )  $X_t, t \geq 0$ , λέγεται ότι είναι λύση της стоχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = b(X_t, t) dA_t + \sigma(X_t, t) dZ_t, \quad X_0 = x_0$$

με συντελεστές  $b, \sigma : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  εάν αυτή ικανοποιεί την εξίσωση

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s, s) dA_s + \int_0^t \sigma(X_s, s) dZ_s \quad \text{για όλα} \quad t \geq 0.$$

### 3.6β' Ορισμοί της Κλασματικής Κίνησης Brown (Fractional Brownian Motion - fBm)

Στο κεφάλαιο 5.4 θα αναφερθούμε στην παραλλαγή του στοχαστικού μοντέλου που μελετάμε στην εργασία αυτή, που προκύπτει αν ο θόρυβος περιγράφεται από μια κλασματική κίνηση *Brown*. Για αυτό το λόγο παραθέτουμε στη συνέχεια κάποιους σχετικούς ορισμούς (βλέπε [71]).

**Ορισμός 21.** Μια χρονικά συνεχής στοχαστική διαδικασία  $\{X_t; t \in T\}$  είναι Γκαουσιανή αν και μόνο αν για κάθε πεπερασμένο σύνολο δεικτών  $t_1, \dots, t_k$  στο σύνολο  $T$

$$X_{t_1, \dots, t_k} = (X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$$

είναι μια πολυμεταβλητή τυχαία μεταβλητή *Gauss*. Αυτό είναι το ίδιο με το να λέμε ότι κάθε γραμμικός συνδιασμός των  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$  έχει μια κανονική ή Γκαουσιανή κατανομή μίας μεταβλητής.

Χρησιμοποιώντας χαρακτηριστικές συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών, η ιδιότητα *Gauss* μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:  $\{X_t; t \in T\}$  είναι Γκαουσιανή αν και μόνο αν, για κάθε πεπερασμένο σύνολο δεικτών  $t_1, \dots, t_k$ , υπάρχει πραγματική αξία  $\sigma_{ij}$ ,  $\mu_i$  με  $\sigma_{jj} > 0$  τέτοια ώστε να ισχύει η ακόλουθη ισότητα για όλα τα  $s_1, s_2, \dots, s_k \in \mathbb{R}$

$$E \left( \exp \left( i \sum_{l=1}^k s_l X_{t_l} \right) \right) = \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{l,j} \sigma_{lj} s_l s_j + i \sum_l \mu_l s_l \right)$$

όπου  $i$  συμβολίζει την φανταστική μονάδα έτσι ώστε  $i^2 = -1$ . Οι αριθμοί  $\sigma_{lj}$  και  $\mu_l$  είναι η συνδιασπορά και η μέση τιμή των μεταβλητών της διαδικασίας.

**Ορισμός 22.** Η κλασματική κίνηση Brown ( $fBm$ ) με δείκτη Hurst  $H \in (0, 1)$  είναι μια Γκαουσιανή διαδικασία  $B^H = \{B_t^H, t \in \mathbb{R}\}$  στο χώρο  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , έχοντας τις ιδιότητες

- $B_0^H = 0$ ,
- $E[B_t^H] = 0, t \in \mathbb{R}$ ,
- $E[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}), s, t \in \mathbb{R}$ .

**Ορισμός 23.** Για κάθε  $H \in (0, 1)$  η διαδικασία

$$(3.23) \quad B_t^H = \int_{\mathbb{R}} (M^H 1_{(0,t)})(s) dW_s$$

είναι η κανονικοποιημένη κλασματική κίνηση Brown όπου  $1_{(0,t)} = \begin{cases} 1, & 0 \leq s < t, \\ -1, & t \leq s < 0, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

**Ορισμός 24.** Έστω  $f \in L_2^H(\mathbb{R})$ . Τότε το ολοκλήρωμα Wiener της  $fBm$  ορίζεται ως εξής:

$$I_H(f) := \int_{\mathbb{R}} f(s) dB_s^H := \int_{\mathbb{R}} (M^H f)(s) dW_s,$$

όπου  $B_s^H$  και  $W_s$  συνδέονται από την σχέση (3.23).

Στη περίπτωση αυτή η φόρμουλα Itô σε σχέση με τη κίνηση Brown τροποποιείται ως εξής:

**Λήμμα 1.** (Itô Formula) Έστω  $B^H$  είναι μια  $fBm$  με  $H \in (1/2, 1)$ ,  $F \in C^{\mathbb{R}}$ . Τότε για κάθε  $t > 0$

$$F(B_t^H) = F(0) + \int_0^t F'(B_u^H) dB_u^H.$$

Απόδειξη. Ο τύπος του Taylor με το υπόλοιπο στην ολοκληρωτική μορφή μας δίνει

$$F(x) = F(y) + F'(y)(x-y) + \int y^x F''(u)(x-u) du.$$

Έστω η ακολουθία με διαμέριση  $\pi_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{k_n}^n = t\}$ ,  $|\pi_n| \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Τότε

$$F(B_t^H) - F(0) = \sum_{k=1}^{k_n} [F(t_k^n) - F(t_{k-1}^n)] = \sum_{k=1}^{k_n} F'(B_{t_{k-1}^n}^H)(B_{t_k^n}^H - B_{t_{k-1}^n}^H) + R_t^n,$$

όπου

$$R_t^n = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{B_{t_{k-1}^n}^H}^{B_{t_k^n}^H} F''(u)(B_{t_k^n}^H - u) du.$$

Επιπλέον,  $\sup_{0 \leq u \leq t} |F''(B_u^H)| < \infty$  σ.β. και για  $H \in (1/2, 1)$ , έχουμε

$$P - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} |B_{t_k^n}^H - B_{t_{k-1}^n}^H|^2 = 0.$$

Ως εκ τούτου  $|R_t^n| \leq \frac{1}{2} \sup_{0 \leq u \leq t} |F''(B_u^H)| \sum_{k=1}^{k_n} |B_{t_k}^H - B_{t_{k-1}}^H|^2 \xrightarrow{P} 0$ . Ακόμα και αν δεν γνωρίζουμε ότι το όριο του αθροίσματος ολοκληρωμάτων

$$\sum_{k=1}^{k_n} F'(B_{t_{k-1}}^H)(B_{t_k}^H - B_{t_{k-1}}^H)$$

υπάρχει, εξασφαλίζουμε την ύπαρξη του (βλ. [7, 21, 68]) και επιπλέον,

$$F(B_t^H) - F(0) = \int_0^t F'(B_u^H) dB_u^H.$$

□

Τέλος η ολοκλήρωση κατα παράγοντες στην περίπτωση της Κλασματικής κίνησης *Brown* δίνεται από τα ακόλουθα θεωρήματα.

**Θεώρημα 20.** Έστω η διαδικασία  $X_t = \sum_{i=1}^m \sigma_i B_t^{H_i}$ , όπου  $\sigma_i \in \mathbb{R}$  με  $1 \leq i \leq m$  και  $H_1 = \frac{1}{2}$  και  $H_i \in (\frac{1}{2}, 1)$  για  $2 \leq i \leq m$ . Έστω η συνάρτηση  $F \in C^2(\mathbb{R})$ . Τότε για κάθε  $t > 0$

$$F(X_t) = F(0) + \sigma_1 \int_0^t F'(X_s) dW_s + \sum_{i=2}^m \sigma_i \int_0^t F'(X_s) dB_s^{H_i} + \frac{\sigma_1^2}{2} \int_0^t F''(X_s) ds.$$

**Θεώρημα 21.** Έστω η συνάρτηση  $F = F(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο  $t$  και δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο  $x$ . Έστω  $Y_t$  είναι όπως στο παραπάνω Θεώρημα 20, και επίσης  $E|\frac{\partial F}{\partial x}(t, Y_t)|^{2+\epsilon} < +\infty, t > 0$  για  $\epsilon > 0$ ,  $\sup_{0 \leq s \leq t} E \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x}(s, Y_s) \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, Y_s) \right)^2 \right] < \infty, t > 0$ . Τότε

$$F(t, Y_t) - F(0, 0) = \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, Y_s) ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, Y_s) \diamond dY_s + \sum_{i,k=1}^m \sigma_i \sigma_k \tilde{C}_{H_i, H_k}(H_i + H_k) \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, Y_s) s^{H_i + H_k - 1} ds$$

όπου με  $\diamond$  συμβολίζουμε τον πολλαπλασιασμό με την παρουσία θορύβου (*Wick multiplication*).

## Κεφάλαιο 4

# Μελέτη ενός ντετερμινιστικού μη τοπικού προβλήματος με συνθήκες Robin

Στο τρέχον κεφάλαιο, μελετάμε το μη τοπικό παραβολικό πρόβλημα (1) (βλεπε Εισαγωγή), με τις συνοριακές συνθήκες Robin. Το πρόβλημα αυτό όπως έχουμε ήδη αναφέρει στα προηγούμενα κεφάλαια προκύπτει από τη μελέτη μιας εξιδανικευμένης ηλεκτρικά ενεργοποιημένης συσκευής MEMS (μικρο-ηλεκτρο-μηχανικό σύστημα), όταν τα άκρα της συσκευής είναι προσαρτημένα ή καρφιτσωμένα σε ένα πρόβολο. Αρχικά, μελετάται το στάσιμο πρόβλημα όπου διερευνάται και λαμβάνονται κάποιες εκτιμήσεις της τάσης έλξης. Συγκεκριμένα, διατυπώνεται και αποδεικνύεται μια ταυτότητα τύπου Pohožaev, η οποία στη συνέχεια διευκολύνει την εξαγωγή μιας εκτίμησης της τάσης έλξης για ακτινικά συμμετρικές  $N$ -διάστατες περιοχές. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μια λεπτομερής μελέτη του χρονοεξαρτώμενου (εξελικτικού) προβλήματος και λαμβάνονται αποτελέσματα για την ολική ύπαρξη στο χρόνο, καθώς και αποτελέσματα απόσβεσης για γενικά και ακτινικά συμμετρικά χωρία. Η τρέχουσα ενότητα ολοκληρώνεται με μια αριθμητική διερεύνηση του μη τοπικού μοντέλου που παρουσιάζεται μέσω μιας μεθόδου προσαρμοζόμενου βήματος. Επίσης παρουσιάζονται διάφορα αριθμητικά πειράματα, που επαληθεύουν τα αναλυτικά αποτελέσματα που προέκυψαν ενώ παράλληλα αναδεικνύουν νέα χαρακτηριστικά σχετικά με την ποιοτική συμπεριφορά του μη τοπικού μοντέλου.

### 4.1 Στάσιμο πρόβλημα

#### 4.1α' Περίπτωση μιας χωρικής διάστασης $N=1$

Η τρέχουσα ενότητα παρέχει μια διεξοδική διερεύνηση του προβλήματος της σταθερής κατάστασης στη μονοδιάστατη περίπτωση. Συγκεκριμένα, μελετάμε τη δομή της λύσης για το ακόλουθο μονοδιάστατο πρόβλημα που έχει τεθεί

$$(4.1\alpha') \quad w'' + \frac{\lambda}{(1-w)^2 \left[1 + \alpha \int_{-1}^1 \frac{dx}{1-w}\right]^2} = 0, \quad -1 < x < 1,$$

$$(4.1\beta') \quad w'(-1) - \beta w(-1) = 0, \quad w'(1) + \beta w(1) = 0.$$

όπου πάντα θεωρούμε  $0 \leq w < 1$  στο  $[-1, 1]$  για τη κλασσική λύση της (4.1) και  $\lambda > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , δοσμένες σταθερές. Για ευκολία θέτουμε  $W = 1 - w$  και τότε η εξίσωση (4.1) παίρνει τη μορφή

$$(4.2\alpha') \quad W'' = \frac{\mu}{W^2}, \quad -1 < x < 1,$$

$$(4.2\beta') \quad W'(-1) + \beta(1 - W(-1)) = 0, \quad W'(1) - \beta(1 - W(1)) = 0,$$

όπου

$$(4.3) \quad \mu = \frac{\lambda}{\left[1 + \alpha \int_{-1}^1 \frac{1}{W} dx\right]^2}$$

όπου  $\mu$  καλείται η τοπική παράμετρος. Γνωρίζουμε ότι η λύση της εξίσωσης είναι συμμετρική δηλαδή  $w(x) = w(-x)$ ,  $x \in [-1, 1]$  (βλ. [33]) και ότι  $m = \min\{W(x), x \in [-1, 1]\} = W(0)$ . Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε και τις δύο πλευρές της εξίσωσης (4.2α') με  $W'$  και ολοκληρώνοντας από  $m = W(0)$  έως  $W = W(x)$  έχουμε

$$\int_0^{W'} W' dW' = \int_0^x W'' W' dx = \mu \int_0^x \frac{W'}{W^2} dx = \mu \int_m^W \frac{dW}{W^2},$$

ως εκ τούτου

$$(4.4) \quad \frac{1}{2}(W')^2 = \mu \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{W} \right).$$

Αυτό δίνει ισοδύναμα τη σχέση

$$(4.5) \quad \frac{dx}{dW} = \sqrt{\frac{m}{2\mu}} \sqrt{\frac{W}{W-m}},$$

από την οποία προκύπτει (βλέπε [39, 54]) ότι

$$x = \sqrt{\frac{m}{2\mu}} \left[ \sqrt{W(W-m)} - \frac{1}{2}m \ln(m) + m \ln(\sqrt{W} + \sqrt{W-m}) \right].$$

Επιπλέον, στο σημείο  $x = 1$  λόγω της συνοριακής συνθήκης έχουμε  $W'(1) - \beta(1 - W(1)) = 0$ , με  $W(1) = M := \max\{W(x), x \in [-1, 1]\}$  λόγω της αρχής του μεγίστου. Επομένως για  $x = 1$  παίρνουμε

$$(4.6) \quad 1 = \sqrt{\frac{m}{2\mu}} \left[ \sqrt{M(M-m)} - \frac{1}{2}m \ln(m) + m \ln(\sqrt{M} + \sqrt{M-m}) \right].$$

Επιπλέον συνδιάζοντας την συνοριακή συνθήκη,  $W'(1) = \beta(1 - W(1))$ , με την εξίσωση (4.4) προκύπτει

$$(4.7) \quad \frac{\beta^2(1-M)^2}{2} = \mu \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{M} \right).$$

Σε αυτό το σημείο, δεδομένου ότι για  $\alpha = 0$  έχουμε  $\mu = \lambda$ , μπορούμε να λάβουμε το διάγραμμα διακλάδωσης του τοπικού προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα αναδιατάσσουμε την εξίσωση (4.7) και έχουμε

$$(4.8) \quad m = \frac{2\lambda M}{2\lambda + M\beta^2(1-M)^2},$$

η οποία μαζί με την (4.6), για  $\mu = \lambda$ , δίνει

$$(4.9) \quad 1 = \sqrt{\frac{m}{2\lambda}} \left[ \sqrt{M(M-m)} - \frac{1}{2}m \ln(m) + m \ln(\sqrt{M} + \sqrt{M-m}) \right],$$

και σχηματίζει ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων δίνοντας μια σχέση σε πεπλεγμένη μορφή,  $F(\lambda, M) = 0$ .

Στη συνέχεια για να αποκτήσουμε το διάγραμμα διακλάδωσης για το μη τοπικό πρόβλημα ( $\alpha > 0$ ) πρέπει να εκφράσουμε το ολοκλήρωμα του μη τοπικού όρου σε σχέση με τις παραμέτρους  $\lambda, m, M$ . Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.5). Συγκεκριμένα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{W} dx &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{dW} \frac{dW}{W} = 2\sqrt{\frac{m}{2\mu}} \int_m^M \frac{1}{\sqrt{W(W-m)}} dW \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{M(M-m)} - \frac{1}{2}m \ln(m) + m \ln(\sqrt{M} + \sqrt{M-m})} \int_m^1 \frac{1}{\sqrt{W(W-m)}} dW \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{M(M-m)} - \frac{1}{2}m \ln(m) + m \ln(\sqrt{M} + \sqrt{M-m})} \ln \left( \frac{2M-m+2\sqrt{M(M-m)}}{m} \right). \end{aligned}$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.3) και την (4.7) για την απαλοιφή του  $\mu$ , προκύπτει το ακόλουθο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων για τα  $\lambda$ ,  $M$ ,  $m$ :

$$(4.10\alpha') \quad 1 = \sqrt{\frac{m}{2\mu}} \left[ \sqrt{M(M-m)} - \frac{1}{2}m \ln(m) + m \ln(\sqrt{M} + \sqrt{M-m}) \right],$$

$$(4.10\beta') \quad \frac{\beta^2(M-1)^2}{2} \frac{mM}{M-m} = \lambda \left[ 1 + \alpha \frac{2 \ln \left( \frac{2M-m+2\sqrt{M(M-m)}}{m} \right)}{\sqrt{M(M-m)} - \frac{1}{2}m \ln(m) + m \ln(\sqrt{M} + \sqrt{M-m})} \right]^{-2},$$

μαζί με την εξίσωση (4.3). Οι παραπάνω εξισώσεις συνιστούν ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων σε πεπλεγμένη μορφή ως προς τις αγνώστους  $l$ ,  $m$ ,  $M$  το οποίο μπορεί να λυθεί αριθμητικά.

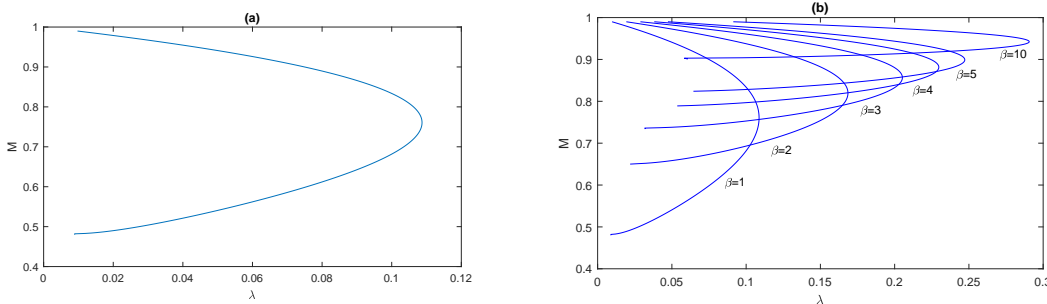
**Παρατήρηση 3.** Σημειώστε ότι με την εξίσωση (4.7) για  $\beta \gg 1$  έχουμε  $(M-1) \sim 0$  ή  $M \sim 1$  και ανακτούμε την έκφραση για τα  $\lambda$  και  $m$  που δίνει το διάγραμμα διακλάδωσης για το τοπικό πρόβλημα με τις συνθήκες ορίων Dirichlet (βλέπε [54]), δηλ.

$$\lambda = \frac{m}{2} \left[ \sqrt{1-m} - \frac{1}{2}m \ln(m) + m \ln(1 + \sqrt{1-m}) \right]^2.$$

Στο σχήμα 4.1 (α) παρουσιάζουμε το διάγραμμα διακλάδωσης για το στάσιμο τοπικό πρόβλημα (4.1α') για  $\alpha = 0$ . Μπορούμε να παρατηρήσουμε την ύπαρξη μιας κρίσιμης τιμής της παραμέτρου  $\lambda$ ,  $\lambda^*$ , που συνήθως ονομάζεται pull-in voltage στη βιβλιογραφία των MEMS, πάνω από την οποία δεν έχουμε λύση για το στάσιμο πρόβλημα ενώ για τις τιμές κάτω από  $\lambda^*$  έχουμε δύο λύσεις. Στη προκειμένη περίπτωση η κρίσιμη τιμή της παραμέτρου είναι  $\lambda^* = 0,108711900526435$  για την οποία έχουμε ότι η μέγιστη τιμή της λύσης είναι  $M = W(1) = 0,761$ .

Όσον αφορά το μη τοπικό στάσιμο πρόβλημα, η εξίσωση (4.1α') με  $\alpha = 1$  παρουσιάζει μια παρόμοια συμπεριφορά όσον αφορά το διάγραμμα διακλάδωσης και αυτό αποτυπώνεται στο σχήμα του διαγράμματος διακλάδωσης στο Σχήμα 4.2 (α). Σε αυτή την περίπτωση η κρίσιμη τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  είναι  $\lambda^* = 2,387086785660011$ . Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις η παράμετρος στις συνοριακές συνθήκες είναι  $\beta = 1$ .

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να δούμε και την μεταβολή του διαγράμματος διακλάδωσης του τοπικού προβλήματος σε σχέση με την παράμετρο  $\beta$  στο Σχήμα 4.1 (β).



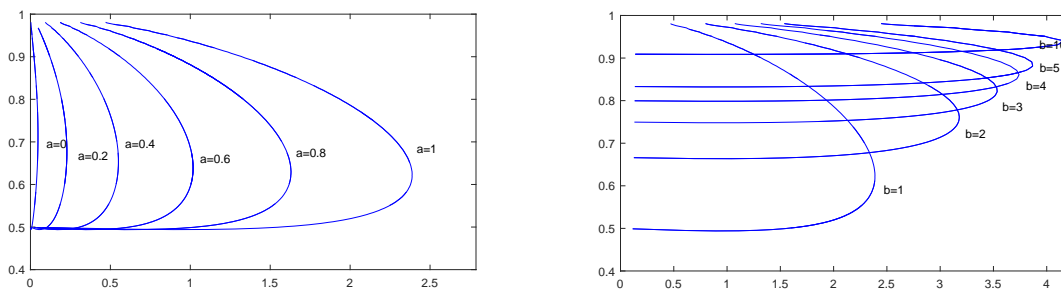
Σχήμα 4.1: (α) Διάγραμμα διακλάδωσης του τοπικού προβλήματος. (β) Διαγράμμα διακλάδωσης του τοπικού προβλήματος για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\beta$ .

Ένα παρόμοιο γράφημα, βλέπουμε στο Σχήμα 4.2, στο οποίο διερευνάται η μεταβολή του διαγράμματος διακλάδωσης του μη τοπικού προβλήματος ως προς την παράμετρο  $\alpha$  στο Σχήμα 4.2 (α) και ως προς την παράμετρο  $\beta$  στο Σχήμα 4.2 (β).

#### 4.1β' Περίπτωση χωρική διάσταση $N > 1$

Στην τρέχουσα ενότητα μελετάμε το πρόβλημα σταθερής κατάστασης στην περίπτωση της χωρικής διάστασης  $N > 1$ . Συγκεκριμένα, ερευνάμε το σύνολο των κλασσικών λύσεων  $0 \leq w = w(x) < 1$  στο  $\bar{\Omega}$ , που ικανοποιούν





Σχήμα 4.2: (α) Μεταβολή του διαγράμματος διακλάδωσης του μη τοπικού προβλήματος σε σχέση με την παράμετρο  $\alpha$  για  $\beta = 1$ . (β) Μεταβολή του διαγράμματος διακλάδωσης του μη τοπικού προβλήματος σε σχέση με την παράμετρο  $\beta$  για  $\alpha = 1$ .

το μη τοπικό πρόβλημα

$$(4.11\alpha') \quad \Delta w + \frac{\lambda}{(1-w)^2 \left(1 + \alpha \int_{\Omega} \frac{1}{1-w} dx\right)^2} = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad N \geq 1,$$

$$(4.11\beta') \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} + \beta w = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Αξιίζει να σημειωθεί ότι στις συγκεκριμένες εφαρμογές MEMS μόνο οι περιπτώσεις  $N = 1, 2$  είναι σημαντικές από την άποψη των εφαρμογών. Παρ' όλα αυτά προφανώς υπάρχει μαθηματικό ενδιαφέρον για τη μελέτη του προβλήματος για κάθε  $N \geq 1$ .

Ορίζουμε

$$(4.12) \quad \lambda^* := \sup\{\lambda > 0 : \text{το πρόβλημα (4.11) έχει κλασσική λύση}\},$$

και σημειώνουμε ότι για μια κλασσική λύση του (4.11) έχουμε  $0 < w < 1$  στο χωρίο  $\Omega$ .

Θέτοντας

$$(4.13) \quad \mu := \frac{\lambda}{K} = \frac{\lambda}{\left(1 + \alpha \int_{\Omega} \frac{1}{1-w} dx\right)^2},$$

όπου

$$(4.14) \quad K = K(w) := \left(1 + \alpha \int_{\Omega} \frac{1}{1-w} dx\right)^2,$$

τότε το πρόβλημα (4.11) μπορεί να γραφτεί σαν ένα τοπικό πρόβλημα στη μορφή

$$(4.15\alpha') \quad \Delta w + \frac{\mu}{(1-w)^2} = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$(4.15\beta') \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} + \beta w = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

όπου το *supremum* ή το άνω φράγμα του φάσματός του (δηλαδή οι τιμές  $\mu$  για τις οποίες το πρόβλημα (4.15) έχει μια κλασσική λύση) ορίζεται επίσης ως εξής

$$(4.16) \quad \mu^* := \sup\{\mu > 0 : \text{το πρόβλημα (4.15) έχει κλασσική λύση}\}.$$

Είναι εύκολα αντιληπτό ότι τα προβλήματα (4.11) και (4.15) είναι ισοδύναμα λόγω της σχέσης (4.13). Πιο συγκεκριμένα, το  $w$  είναι μια λύση του προβλήματος (4.11) που αντιστοιχεί στο  $\lambda$  αν και μόνο αν το  $w$  ικανοποιεί το πρόβλημα (4.15) για τη παράμετρο  $\mu$  όπως αυτή ορίζεται στη σχέση (4.13).

Στη συνέχεια εισάγουμε την έννοια της ασθενούς λύσης (weak solution) για το πρόβλημα (4.11) που θα χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη του φαινομένου της απόσβεσης ([56]).

**Ορισμός 25.** Μια συνάρτηση  $w \in H_0^1(\Omega)$  ονομάζεται ασθενής λύση πεπερασμένης ενέργειας (weak finite-energy solution) του (4.11) αν υπάρχει ακολουθία  $\{w_j\}_{j=1}^\infty \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega)$  ικανοποιώντας για  $j \rightarrow \infty$  τις ακόλουθες σχέσεις

$$(4.17\alpha') \quad w_j \rightarrow w \text{ ασθενώς} \in H^1(\Omega),$$

$$(4.17\beta') \quad w_j \rightarrow w \text{ σχεδόν παντού},$$

$$(4.17\gamma') \quad \frac{1}{(1-w_j)^2} \rightarrow \frac{1}{(1-w)^2} \text{ στο } L^1(\Omega),$$

$$(4.17\delta') \quad \frac{1}{(1-w_j)} \rightarrow \frac{1}{(1-w)} \text{ στο } L^1(\Omega),$$

$$(4.17\epsilon') \quad \Delta w_j + \frac{\lambda}{(1-w_j)^2(1+\alpha \int_\Omega \frac{dx}{1-w_j})^2} \rightarrow 0 \text{ στο } L^2(\Omega).$$

Σημειώνουμε ότι  $C^2(\Omega) \cap C(\Omega)$  είναι η τομή των χώρων των συνεχών και δύο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων με τον χώρο που έχει συνεχή και παραγωγίσιμη πρώτης τάξης συνάρτηση στο χωρίο  $\Omega$ .

Επομένως, κάθε ασθενής λύση πεπερασμένης ενέργειας του (4.11) ικανοποιεί τη σχέση

$$-\int_\Omega \nabla \phi \cdot \nabla w \, dx + \int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial w}{\partial \nu} \, ds + \lambda \frac{\int_\Omega \frac{\phi}{(1-w)^2} \, dx}{(1+\alpha \int_\Omega \frac{1}{1-w} \, dx)^2} = 0,$$

για κάθε  $\phi \in W^{2,2}(\Omega)$  με  $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} + \beta \phi = 0$  στο  $\partial\Omega$ .

Σ' αυτό το σημείο υπενθυμίζουμε τον ορισμό των χώρων Sobolev. Υποθέτουμε ότι  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Ο χώρος Sobolev  $W^{1,p}$  ορίζεται να είναι ο εξής:

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \exists g \in L^p(\Omega) \text{ τέτοιο ώστε } \int_\Omega u \phi' = - \int_\Omega g \phi \quad \forall \phi \in C_c^1(\Omega) \right\}.$$

Θέτουμε

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Για  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  συμβολίζουμε  $u' = g$  όπου  $g$  καλά ορισμένη συνάρτηση. Επίσης για  $p = 2$  οι αντίστοιχοι χώροι Sobolev είναι και χώροι Hilbert. Στη περίπτωση αυτή συμβολίζουμε:

$$H^k = W^{k,2}.$$

Ορίζουμε επίσης

$$\hat{\lambda} := \sup\{\lambda > 0 : \text{το πρόβλημα (4.11) έχει ασθενή λύση πεπερασμένης ενέργειας}\}.$$

Επιπλέον, και σύμφωνα με τα αποτελέσματα στην εργασία [56, Πρόταση 2.2] έχουμε τα εξής:

**Πρόταση 5.** Για την περίπτωση της ακτινικής συμμετρίας, δηλαδή όταν  $\Omega = B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\}$ , το άνω φράγμα (supremum) του φάσματος για κλασσικές λύσεις και του φάσματος και ασθενείς λύσεις πεπερασμένης ενέργειας είναι το ίδιο. Συγκεκριμένα, ισχύει  $\lambda^* = \hat{\lambda}$

*Απόδειξη.* Κάθε κλασσική λύση της (4.15) είναι ασθενής λύση πεπερασμένης ενέργειας, έτσι έχουμε ότι  $\lambda^* \leq \hat{\lambda}$ . Από την άλλη μεριά, μπορούμε να πάρουμε  $\lambda_1$  αυθαίρετα κοντά στο  $\hat{\lambda}$  έτσι ώστε να υπάρχει  $w_1$  ασθενής λύση πεπερασμένης ενέργειας για  $\lambda = \lambda_1$ . Αφού η  $w_1$  είναι φθίνουσα με  $0 \leq w \leq 1$ , τότε είτε  $w < 1$  για  $0 < r \leq 1$  είτε υπάρχει κάποιο  $s > 0$  τέτοιο ώστε  $w = 1$  για  $0 \leq r < s$ . Στην τελευταία περίπτωση το ολοκλήρωμα  $\int_\Omega (1-w)^{-1} dx$  γίνεται άπειρο και επομένως η λύση  $w$  είναι ασθενής λύση πεπερασμένης

ενέργειας της  $\Delta w = 0$  ικανοποιώντας τη σχέση  $0 \leq w \leq 1$ , καθώς και τις συνοριακές συνθήκες  $w_n + \beta w = 0$  και επομένως  $w = 0$ . Άρα πρέπει τότε να έχουμε  $w_1(r) < 1$  για  $r > 0$  και αυτό συνεπάγεται ότι η λύση  $w_1$  είναι ομαλή για  $r > 0$ .

Για  $N = 1$ , απλή ολοκλήρωση δίνει ότι η λύση είναι κλασσική. Για  $N \geq 2$ , ακολουθώντας τα ίδια βήματα όπως στην εργασία [38] μπορούμε να δείξουμε ότι (βλέπε επίσης [48]), το κλασσικό πρόβλημα μπορεί να λυθεί αναλυτικά για  $r > 0$  και να αποδειχθεί ότι υπάρχει ακριβώς μια κρίσιμη τιμή του  $\lambda$ ,  $\lambda_*$ , για την οποία έχουμε ότι  $w(0) = 1$  και έτσι η συνάρτηση  $w$  είναι τότε ασθενής λύση πεπερασμένης ενέργειας αλλά όχι κλασσική. Ανάλογα με την τιμή που έχει το  $N$ , έχουμε  $\lambda_* < \lambda^*$  ή  $\lambda_* = \lambda^*$ . Σε κάθε περίπτωση όμως ισχύει  $\lambda^* = \hat{\lambda}$ .  $\square$

Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι το  $\mu^*$  που ορίζεται από τη σχέση (4.16) είναι καλά ορισμένο και φραγμένο. Συγκεκριμένα ισχύει

**Λήμμα 2.** Υπάρχει ένα πεπερασμένο  $\mu^*$  που ορίζεται από τη σχέση (4.16) έτσι ώστε

- (i) Εάν το  $\mu < \mu^*$  τότε το πρόβλημα (4.15) έχει τουλάχιστον μία λύση.
- (ii) Αν το  $\mu > \mu^*$  τότε το πρόβλημα (4.15) δεν έχει λύση.

*Απόδειξη.* Αρχικά διαπιστώνουμε την ύπαρξη της κρίσιμης τιμής  $\mu^*$  που ορίζεται από τη σχέση (4.16). Πράγματι παρατηρούμε ότι λόγω του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης η εξίσωση (4.15) έχει μια λύση που διακλαδώνεται από την τετριμμένη λύση  $w = 0$  στο  $\mu = 0$ . Αυτή η λύση είναι θετική λόγω της Αρχής του Μεγίστου και άρα συνεπάγεται ότι το  $\mu^*$  είναι καλά ορισμένο και θετικό.

Έπειτα, αποδεικνύουμε μια συνθήκη για το φράγμα του  $\mu^*$ . Έστω  $(\lambda_1, \phi_1(x))$  το πρωτεύον κανονικοποιημένο ιδιοζεύγος της Λαπλασιανής που σχετίζεται με τις συνοριακές συνθήκες *Robin*, δηλαδή η ιδιοσυνάρτηση  $\phi_1(x)$  ικανοποιεί το πρόβλημα

$$(4.18) \quad -\Delta \phi_1 = \lambda_1 \phi_1, x \in \Omega, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} + \beta \phi_1 = 0, x \in \partial \Omega,$$

με

$$(4.19) \quad \int_{\Omega} \phi_1 dx = 1.$$

Είναι γνωστό (βλέπε για παράδειγμα, [6, Θεώρημα 4.3]) ότι η πρώτη ιδιοτιμή  $\lambda_1$  είναι θετική και ότι η  $\phi_1(x)$  δεν αλλάζει πρόσημο στο  $\Omega$ , επομένως η  $\phi_1(x)$  μπορεί να επιλεγεί από τη συνθήκη (4.19) να είναι θετική.

Πολλαπλασιάζοντας την (4.15α') με  $\phi_1(x)$  και χρησιμοποιώντας τη δεύτερη ταυτότητα του *Green* σε συνδυασμό με την (4.19) και το γεγονός ότι  $0 < w < 1$  έχουμε

$$\lambda_1 \int_{\Omega} w \phi_1 dx = \mu \int_{\Omega} \frac{\phi_1}{(1-w)^2} dx \geq \mu.$$

Η τελευταία ανισότητα, λόγω της σχέσης (4.16), αποδεικνύει ότι

$$\mu^* \leq \lambda_1 \int_{\Omega} w \phi_1 dx \leq \lambda_1 < \infty,$$

και έτσι η παράμετρος  $\mu^*$  είναι πεπερασμένη.

Στη συνέχεια, εστιάζουμε στην απόδειξη της πρώτης πρότασης (i) του λήμματος (2). Επιλέγουμε  $\mu \in (0, \mu^*)$ , και χάρη στον ορισμό του  $\mu^*$  υπάρχει  $\bar{\mu} \in (\mu, \mu^*)$  έτσι ώστε η ελάχιστη λύση  $w_{\bar{\mu}}$  (δηλαδή η μικρότερη λύση που αντιστοιχεί στην ίδια παράμετρο  $\mu$ ) του προβλήματος (4.15) να ικανοποιεί το ακόλουθο πρόβλημα

$$-\Delta w_{\bar{\mu}} = \frac{\bar{\mu}}{(1-w_{\bar{\mu}})^2} \geq \frac{\mu}{(1-w_{\bar{\mu}})^2}, x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial w_{\bar{\mu}}}{\partial \nu} + \beta w_{\bar{\mu}} = 0, x \in \partial \Omega,$$

εφόσον  $\bar{\mu} > \mu$ . Αυτό συνεπάγεται ότι το  $w_{\bar{\mu}}$  είναι μια άνω λύση του προβλήματος (4.15) που αντιστοιχεί στην παράμετρο  $\mu$ . Επιπρόσθετα μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η λύση  $w \equiv 0$  είναι μια κάτω λύση του προβλήματος (4.15) που αντιστοιχεί στη παράμετρο  $\mu$ . Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα σύγκρισης, (βλ. [78]), μπορούμε να κατασκευάσουμε μια λύση του προβλήματος (4.15) που αντιστοιχεί στην παράμετρο  $\mu$ . Αυτή η κατασκευή συμπληρώνει την απόδειξη του (i). Από την άλλη πλευρά, από τον ορισμό  $\mu^*$  συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα (4.15) δεν έχει λύση για  $\mu > \mu^*$  και έτσι αποδεικνύεται και η πρόταση (ii).  $\square$

Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε την μονοτονία του κάτω κλάδου του προβλήματος (4.15) σε σχέση με την (τοπική) παράμετρο  $\mu$ .

**Λήμμα 3.** Έστω  $\mu_1, \mu_2 \in (0, \mu^*)$ . Υποθέτουμε ότι  $w_{\mu_1}$  και  $w_{\mu_2}$  είναι οι αντίστοιχες ελάχιστες λύσεις του προβλήματος (4.15), τότε

$$(4.20) \quad 0 < w_{\mu_1}(x) < w_{\mu_2}(x) < 1 \quad \text{για} \quad x \in \Omega, \quad \text{εάν} \quad 0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu^*.$$

*Απόδειξη.* Είναι γνωστό, (βλ. [26, 38]), ότι η συνάρτηση  $w(x, \mu)$  είναι διαφορήσιμη ως προς τη μεταβλητή  $\mu \in (0, \mu^*)$ . Θέτουμε  $z = \frac{\partial w}{\partial \mu}$ , παραγωγίζουμε την εξίσωση (4.15α) ως προς τη παράμετρο  $\mu$  και παίρνουμε

$$\Delta\left(\frac{\partial w}{\partial \mu}\right) + (1-w)^{-2} - 2\mu(1-w)^{-3}\left(-\frac{\partial w}{\partial \mu}\right) = 0,$$

ή

$$\Delta z + \frac{2\mu}{(1-w)^3}z + \frac{1}{(1-w)^2} = 0.$$

Η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με:

$$-\Delta z - \frac{2\mu}{(1-w)^3}z = \frac{1}{(1-w)^2} > 0.$$

Επιπρόσθετα από τις συνοριακές συνθήκες έχουμε  $\frac{\partial z}{\partial \nu} + \beta z > 0$ . Επομένως, από την αρχή του μεγίστου, δεδομένου ότι το  $(1-w)^{-3}$  φράσσεται για μια κλασική λύση, λαμβάνουμε ότι  $z > 0$ , που δίνει  $\frac{\partial w}{\partial \mu} > 0$ . Ως εκ τούτου πάλι από την αρχή του μεγίστου, εφόσον ο όρος  $\frac{2\mu}{(1-w)^3}$  είναι φραγμένος κάτω από μια κλασική λύση, προκύπτει ότι  $z > 0$  και ότι  $\frac{\partial w}{\partial \mu} > 0$ , (βλέπε [27]).  $\square$

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα μονοτονίας, μπορούμε επίσης να αποδείξουμε, όπως στο [38], τα ακόλουθα.

**Θεώρημα 22.** Υπάρχει μια κλασική λύση του προβλήματος (4.11) για οποιαδήποτε  $\lambda \in (0, (1 + \alpha|\Omega|)^2\mu^*)$  και συνεπώς

$$(4.21) \quad \lambda^* \geq \sup_{(0, \mu^*)} \mu K(w_\mu) \geq (1 + \alpha|\Omega|)^2\mu^*,$$

όπου η κρίσιμη τιμή της παραμέτρου  $\mu^*$  ορίζεται από τη σχέση (4.16) και  $K(w_\mu) = \left(1 + \alpha \int_\Omega \frac{1}{1-w_\mu} dx\right)^2$ .

*Απόδειξη.* Αρχικά σημειώνουμε ότι λόγω της σχέσης (4.20) έχουμε

$$(4.22) \quad (1 + \alpha|\Omega|)^2 = K(0) < K(w_\mu), \quad \text{αν} \quad 0 < \mu < \mu^*.$$

Επίσης έχουμε ότι για κάθε  $\lambda \in (0, (1 + \alpha|\Omega|)^2\mu^*)$  υπάρχει μοναδικό  $\mu \in (0, \mu^*)$  τέτοιο ώστε

$$(4.23) \quad \mu = \frac{\lambda}{(1 + \alpha|\Omega|)^2},$$

και επομένως υπάρχει μια ελάχιστη λύση  $w_\mu$  για το τοπικό πρόβλημα (4.15). Εφόσον τα προβλήματα (4.11) και (4.15) είναι ισοδύναμα λόγω της σχέσης (4.13), υπάρχει  $\lambda_1 \in (0, \lambda^*)$  με

$$(4.24) \quad \mu = \frac{\lambda_1}{K(w_\mu)}.$$

Συνεπώς, οι σχέσεις (4.23) και (4.24) σε συνδυασμό με την (4.22) συνεπάγονται ότι ισχύει  $0 < \lambda < \lambda_1 < \lambda^*$  και έτσι το μη τοπικό πρόβλημα (4.11) έχει τουλάχιστον μία (ελάχιστη) λύση  $w_\lambda$ . Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

**Παρατήρηση 4.** Αξίζει να σημειωθεί ότι μπορεί κάποιος να πάρει κάτω εκτιμήσεις της παραμέτρου  $\mu^*$  όπως στην περίπτωση των συνοριακών συνθηκών *Dirichlet*, (βλέπε [26, Πρόταση 2.2.2] και Παράρτημα), και έτσι μέσω της σχέσης (4.21) μπορεί τελικά να λάβει κάτω εκτιμήσεις και για την κρίσιμη τιμή  $\lambda^*$ .

Στη συνέχεια παρέχουμε μια βελτιωμένη κάτω εκτίμηση του  $\lambda^*$ , στην περίπτωση της  $N$ -διάστατης σφαίρας, δηλαδή όταν

$$\Omega = B_R = B_R(0) =: \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}, \text{ για } R > 0.$$

Μια τέτοια ακτινικά συμμετρική περίπτωση έχει μεγάλη σημασία από την άποψη των εφαρμογών, όπως υποδεικνύεται στις εργασίες [2, 80, 93]. Προκειμένου να βρούμε μια κάτω εκτίμηση του  $\lambda^*$ , θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια ταυτότητα τύπου *Pohozaev*, (βλ. [83]), για το ακόλουθο πρόβλημα

$$(4.25\alpha') \quad \Delta v + \mu f(v) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \mu > 0,$$

$$(4.25\beta') \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} + \beta v = 0, \quad \text{για } x \in \partial\Omega.$$

Δεδομένου ότι στη βιβλιογραφία δεν υπάρχει διαθέσιμη μια τέτοια τύπου ταυτότητα για το συγκεκριμένο πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες Robin, την διατυπώνουμε και την αποδεικνύουμε στην ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 6.** Έστω ότι η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής και  $F(v) := \int_0^v f(s)ds$ . Υποθέτουμε ότι το χωρίο  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  είναι ανοικτό και φραγμένο. Αν το  $v \in C^2(\bar{\Omega})$  είναι μια ομαλή λύση του προβλήματος (4.25) τότε ισχύει η ακόλουθη ταυτότητα

$$(4.26) \quad \begin{aligned} \frac{\mu(N-2)}{2} \int_{\Omega} v f(v) dx - \mu N \int_{\Omega} F(v) dx &= \frac{(N-2)}{2\beta} \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial \nu(x)} \right)^2 dS + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla v|^2 \langle \nu(x), x \rangle dS \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu(x)} \langle \nabla v, x \rangle dS - \mu \int_{\partial\Omega} F(v) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \left( \frac{1}{2} |x|^2 \right) dS, \end{aligned}$$

όπου το σύμβολο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  αντιπροσωπεύει το εσωτερικό γινόμενο στον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^N$ .

*Απόδειξη.* Αρχικά πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (4.25α') με  $\langle x, \nabla v \rangle$  και ολοκληρώνουμε σε όλο το χωρίο  $\Omega$  παίρνοντας

$$(4.27) \quad - \int_{\Omega} \Delta v \langle x, \nabla v \rangle dx = \mu \int_{\Omega} f(v) \langle x, \nabla v \rangle dx.$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης (4.27) μέσω της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες συνεπάγεται ότι

$$(4.28) \quad - \int_{\Omega} \Delta v \langle x, \nabla v \rangle dx = \int_{\Omega} \langle \nabla v, \nabla \langle x, \nabla v \rangle \rangle dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu(x)} \langle x, \nabla v \rangle dS.$$

Στη συνέχεια από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \langle \nabla v, \nabla \langle x, \nabla v \rangle \rangle &= \frac{1}{2} \langle \nabla (|\nabla v|^2), x \rangle + |\nabla v|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \nabla (|\nabla v|^2), \nabla \left( \frac{1}{2} |x|^2 \right) \right\rangle + |\nabla v|^2, \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε

$$(4.29) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla v, \langle x, \nabla v \rangle \rangle dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\langle \nabla (|\nabla v|^2), \nabla \left( \frac{1}{2} |x|^2 \right) \right\rangle dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla v|^2 \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \left( \frac{1}{2} |x|^2 \right) dS - \frac{N}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \\ &= \frac{2-N}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla v|^2 \langle \nu(x), x \rangle dS, \end{aligned}$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι  $\Delta\left(\frac{1}{2}|x|^2\right) = N$  για κάθε  $x \in \Omega$ . Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον πρώτο όρο στο δεξί μέλος της σχέσης (4.29) χρησιμοποιώντας την (4.25α'). Πράγματι πολλαπλασιάζοντας την σχέση (4.25α') με  $v$ , ολοκληρώνοντας σε όλο το χωρίο  $\Omega$  και χρησιμοποιώντας πάλι ολοκλήρωση κατά παράγοντες συμπεραίνουμε ότι:

$$(4.30) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx &= \mu \int_{\Omega} v f(v) dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial v}{\partial \nu(x)} dS \\ &= \mu \int_{\Omega} v f(v) dx - \frac{1}{\beta} \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial \nu(x)} \right)^2 dS, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω της συνοριακής συνθήκης (4.25β'). Συνεπώς, η σχέση (4.28) σε συνδυασμό με τις (4.29) και (4.30) συνεπάγεται ότι

$$(4.31) \quad \begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta v \langle x, \nabla v \rangle dx &= \frac{(2-N)}{2} \mu \int_{\Omega} v f(v) dx - \frac{(2-N)}{2\beta} \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial \nu(x)} \right)^2 dS + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla v|^2 \langle \nu(x), x \rangle dS \\ &- \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu(x)} \langle x, \nabla v \rangle dS. \end{aligned}$$

Επιπλέον, το δεξί μέλος της (4.27) χάρη στην ολοκλήρωση κατά παράγοντες δίνει

$$(4.32) \quad \begin{aligned} \mu \int_{\Omega} f(v) \langle x, \nabla v \rangle dx &= \mu \int_{\Omega} \langle x, \nabla F(v) \rangle dx = \mu \int_{\Omega} \left\langle \nabla \left( \frac{1}{2}|x|^2 \right), \nabla F(v) \right\rangle dx \\ &= \mu \int_{\partial\Omega} F(v) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \left( \frac{1}{2}|x|^2 \right) dS - \mu N \int_{\Omega} F(v) dx, \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας ξανά το γεγονός ότι  $\Delta\left(\frac{1}{2}|x|^2\right) = N$ . Συνεπώς, η ταυτότητα (4.26) προκύπτει άμεσα από τις σχέσεις (4.31) και (4.32).  $\square$

Έτσι σ' αυτό το σημείο είμαστε έτοιμοι να δώσουμε μια υπολογιστικά χρήσιμη κάτω εκτίμηση της παραμέτρου  $\lambda^*$  στο παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 23.** Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα (4.11) ορίζεται στο χωρίο  $\Omega := B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$ , για  $R > 0$ . Τότε αν  $N > 2 + \beta R$  το πρόβλημα (4.11) έχει κλασική λύση για κάθε

$$(4.33) \quad \lambda \leq \lambda_* := \frac{\beta A(\partial B_R)(N-2)}{[N-2(1+\beta R)]} \frac{(1+\alpha\omega_N^R)^2}{\omega_N^R},$$

όπου  $A(\partial B_R)$  και  $\omega_N^R$  είναι το εμβαδόν της επιφάνειας και ο όγκος της  $N$ -διάστατης σφαίρας  $B_R$ , αντίστοιχα. Συνεπώς, από τη σχέση (5.72) προκύπτει ότι  $\lambda^* \geq \lambda_*$ .

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ότι  $0 < \lambda < \lambda^*$  έτσι ώστε το πρόβλημα (4.11) να έχει μια κλασική λύση και στη συνέχεια εργαζόμαστε για την απόδειξη της εκτίμησης (4.33).

Παίρνουμε  $f(w) = \frac{1}{(1-w)^2}$  και ως εκ τούτου  $F(w) = \frac{w}{(1-w)}$ . Η ταυτότητα Pohožaev (4.26), για  $\mu = \frac{\lambda}{K}$  και  $K$  δοσμένο από τη σχέση (4.14), παίρνει τη μορφή

$$(4.34) \quad \begin{aligned} &\frac{\lambda(N-2)}{2K} \int_{B_R} \frac{w}{(1-w)^2} dx - \frac{\lambda N}{K} \int_{B_R} \frac{w}{1-w} dx \\ &= \frac{N-2}{2\beta} \int_{\partial B_R} \left( \frac{\partial w}{\partial \nu(x)} \right)^2 dS + \frac{1}{2} \int_{\partial B_R} |\nabla w|^2 \langle \nu(x), x \rangle dS - \int_{\partial B_R} \frac{\partial w}{\partial \nu(x)} \langle \nabla w, x \rangle dS \\ &\quad - \frac{\lambda}{K} \int_{\partial B_R} \frac{w}{1-w} \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \left( \frac{1}{2}|x|^2 \right) dS \\ &= \frac{[N-2(1+\beta R)]}{2\beta} \int_{\partial B_R} \left( \frac{\partial w}{\partial \nu(x)} \right)^2 dS + \frac{R}{2} \int_{\partial B_R} |\nabla w|^2 dS - \frac{\lambda}{K} \int_{\partial B_R} \frac{w}{1-w} \langle x, \nu(x) \rangle dS, \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας τη σχέση  $\frac{\partial}{\partial \nu(x)} \left( \frac{1}{2}|x|^2 \right) = \langle x, \nu(x) \rangle$  και  $\langle \nu(x), x \rangle = R$  όταν  $\Omega = B_R$ . Για την περίπτωση των συνθηκών Dirichlet ο όρος

$$\frac{\lambda}{K} \int_{\partial B_R} \frac{w}{1-w} \langle x, \nu(x) \rangle dS$$

απαλείφεται και στη συνέχεια οι υπολογισμοί σε αυτήν την περίπτωση είναι απλούστεροι, κάτι που δεν ισχύει για τις συνοριακές συνθήκες *Robin*. Ωστόσο, στη συνέχεια δείχνουμε ότι ακόμη και για τις συνοριακές συνθήκες *Robin* αυτός ο όρος μπορεί να εκτιμηθεί προς τη σωστή κατεύθυνση. Πράγματι, μέσω του Θεωρήματος απόκλισης έχουμε

$$\int_{\partial B_R} \frac{w}{1-w} \langle x, \nu(x) \rangle dS = \int_{\partial B_R} \langle \hat{F}, \nu(x) \rangle dS = \int_{B_R} \operatorname{div}(\hat{F}) dx$$

όπου το αστρόβιλο διανυσματικό πεδίο  $\hat{F}$  ορίζεται από τη σχέση  $\hat{F} := \frac{w}{1-w}x$ .

Αφού  $\operatorname{div}(\hat{F}) = \frac{1}{(1-w)^2} \langle \nabla w, x \rangle + N \frac{w}{1-w}$  τότε ισχύει ότι

$$(4.35) \quad \int_{\partial B_R} \frac{w}{1-w} \langle x, \nu(x) \rangle dS = \int_{B_R} \frac{1}{(1-w)^2} \langle \nabla w, x \rangle dx + N \int_{B_R} \frac{w}{1-w} dx$$

και έτσι λόγω της σχέσης (4.34) έχουμε

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda(N-2)}{2K} \int_{B_R} \frac{w}{(1-w)^2} dx - \frac{\lambda N}{K} \int_{B_R} \frac{w}{1-w} dx \\ & \geq \frac{[N-2(1+\beta R)]}{2\beta} \int_{\partial B_R} \left( \frac{\partial w}{\partial \nu(x)} \right)^2 dS - \frac{\lambda}{K} \int_{B_R} \frac{1}{(1-w)^2} \langle \nabla w, x \rangle dx - \frac{\lambda N}{K} \int_{B_R} \frac{w}{1-w} dx, \end{aligned}$$

ή

$$(4.36) \quad \frac{\lambda(N-2)}{2K} \int_{B_R} \frac{1}{(1-w)^2} dx \geq \frac{[N-2(1+\beta R)]}{2\beta} \int_{\partial B_R} \left( \frac{\partial w}{\partial \nu(x)} \right)^2 dS - \frac{\lambda}{K} \int_{B_R} \frac{1}{(1-w)^2} \langle \nabla w, x \rangle dx,$$

αφού  $0 \leq w < 1$  για κάθε κλασική λύση του προβλήματος (4.11).

Στην συνέχεια από την ανισότητα *Hölder* έχουμε

$$0 \leq - \int_{\partial B_R} \frac{\partial w}{\partial \nu(x)} dS \leq \left( \int_{\partial B_R} \left( \frac{\partial w}{\partial \nu(x)} \right)^2 dS \right)^{1/2} \left( \int_{\partial B_R} dS \right)^{1/2},$$

και έτσι λόγω της εξίσωσης (4.15α), χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_R} \left( \frac{\partial w}{\partial \nu(x)} \right)^2 dS & \geq \frac{1}{A(\partial B_R)} \left( \int_{\partial B_R} - \frac{\partial w}{\partial \nu(x)} dS \right)^2 \\ & = \frac{1}{A(\partial B_R)} \left( \int_{B_R} -\Delta w dx \right)^2 \\ (4.37) \quad & = \frac{\lambda^2}{K^2 A(\partial B_R)} \left( \int_{B_R} \frac{1}{(1-w)^2} dx \right)^2, \end{aligned}$$

όπου

$$A(\partial B_R) := \frac{2\pi^{(N+1)/2} R^{N-1}}{\Gamma(\frac{N+1}{2})},$$

και  $\Gamma(\cdot)$  είναι η συνάρτηση Γάμμα του *Euler*. από την άλλη όμως έχουμε,

$$(4.38) \quad \langle \nabla w, x \rangle = \frac{\partial w}{\partial x} = w_r \frac{\partial r}{\partial x} = w_r |x|, \quad \text{για } r = |x|,$$

όπου  $\frac{\partial w}{\partial x}$  είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος στη διεύθυνση του  $x$ . Επιπλέον η συνάρτηση  $w(r)$  ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα

$$\begin{aligned} -w_{rr} - \frac{N-1}{r} w_r & = \frac{\lambda}{(1-w(r))^2 K}, \quad 0 < r < R, \\ w_r(0) & = 0, \quad w_r(R) + \beta w(R) = 0. \end{aligned}$$

Θέτουμε  $\psi := w_r$ , με την  $\psi$  να ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\begin{aligned} -\psi_{rr} - \frac{N-1}{r}\psi_r + \chi(r)\psi &= 0, \quad 0 < r < R, \\ \psi(0) = 0, \quad \psi(R) &= -\beta w(R) \leq 0, \end{aligned}$$

όπου  $\chi(r) := \left( \frac{N-1}{r^2} - \frac{2\lambda}{(1-w(r))^3 K} \right)$  είναι φραγμένη συνάρτηση αφού η  $w(r)$  είναι κλασσική λύση. Έτσι από την αρχή μεγίστου, (βλ. [27]), συμπεραίνουμε ότι  $\psi(r) \leq 0$  στο διάστημα  $[0, R]$ , και ως εκ τούτου μέσω της σχέσης (4.38) έχουμε

$$(4.39) \quad \frac{\lambda}{K} \int_{B_R} \frac{1}{(1-w)^2} \langle \nabla w, x \rangle dx \leq 0.$$

Επομένως η σχέση (4.36) σε συνδιασμό με τις σχέσεις (4.37) και (4.39) συνεπάγονται ότι

$$\frac{\lambda(N-2)}{2} \frac{\int_{B_R} \frac{1}{(1-w)^2} dx}{\left(1 + \alpha \int_{B_R} \frac{1}{(1-w)} dx\right)^2} \geq \frac{\lambda^2 [N - 2(1 + \beta R)]}{2\beta A(\partial B_R)} \left( \frac{\int_{B_R} \frac{1}{(1-w)^2} dx}{\left(1 + \alpha \int_{B_R} \frac{1}{(1-w)} dx\right)^2} \right)^2,$$

ή

$$\frac{(N-2)}{2} \geq \frac{\lambda [N - 2(1 + \beta R)]}{2\beta A(\partial B_R)} \frac{\int_{B_R} \frac{1}{(1-w)^2} dx}{\left(1 + \alpha \int_{B_R} \frac{1}{(1-w)} dx\right)^2},$$

αφού  $N > 2(1 + \beta R)$ . Τότε από την ανισότητα Hölder προκύπτει ότι

$$\left( \int_{B_R} \frac{1}{(1-w)} dx \right)^2 \leq \omega_N^R \int_{B_R} \frac{1}{(1-w)^2} dx,$$

και

$$(4.40) \quad \begin{aligned} \frac{(N-2)}{2} &\geq \frac{\lambda [N - 2(1 + \beta R)]}{2\beta \omega_N^R A(\partial B_R)} \left[ \frac{\left( \int_{B_R} \frac{1}{(1-w)} dx \right)^2}{\left(1 + \alpha \int_{B_R} \frac{1}{(1-w)} dx\right)^2} \right] \\ &= \frac{\lambda [N - 2(1 + \beta R)]}{2\beta \omega_N^R A(\partial B_R)} \left[ \frac{\int_{B_R} \frac{1}{(1-w)} dx}{1 + \alpha \int_{B_R} \frac{1}{(1-w)} dx} \right]^2, \end{aligned}$$

όπου

$$\omega_N^R = |B_R| := \frac{\pi^{N/2} R^N}{\Gamma(\frac{N}{2} + 1)}.$$

Σημειώνεται ότι για την κλασσική λύση  $w$  του προβλήματος (4.11) ισχύει ότι

$$\int_{B_R} \frac{1}{(1-w)} dx \geq \omega_N^R.$$

Επομένως χρησιμοποιώντας το ότι η συνάρτηση  $g(y) = \frac{y}{\alpha y + 1}$  είναι αύξουσα στο διάστημα  $(0, +\infty)$ , προκύπτει ότι  $g(y) \geq \omega_N^R / (1 + \alpha \omega_N^R)$  για κάθε  $y \geq \omega_N^R > 0$ , και από την ανισότητα (4.40) έχουμε

$$N - 2 \geq \frac{\lambda [N - 2(1 + \beta R)]}{\beta A(\partial B_R)} \frac{\omega_N^R}{(1 + \alpha \omega_N^R)^2}.$$

Η παραπάνω ανισότητα τελικά μας δίνει

$$\lambda \leq \lambda_* := \frac{\beta A(\partial B_R)(N-2)}{[N-2(1+\beta R)]} \frac{(1 + \alpha \omega_N^R)^2}{\omega_N^R},$$



και έτσι έχουμε την επιθυμητή εκτίμηση

$$(4.41) \quad \lambda^* \geq \frac{\beta A(\partial B_R)(N-2)}{[N-2(1+\beta R)]} \frac{(1+\alpha\omega_N^R)^2}{\omega_N^R},$$

από τον ορισμό του  $\lambda^*$ . □

**Παρατήρηση 5.** Έστω  $\Omega$  είναι φραγμένο χωρίο με όγκο ίσο με αυτόν της  $N$ -διάστατης μπάλας  $B_R$ , τότε μπορούμε να πάρουμε μια κάτω εκτίμηση του  $\lambda^*(\Omega)$  λόγω της σχέσης (4.41). Πράγματι, μπορεί κανείς να προσαρμόσει την απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας (βλέπε [10, Θεώρημα 4.10] και Παράρτημα) για την περίπτωση της μη γραμμικότητας των MEMS  $f(u) = \frac{1}{(1-u)^2}$  και για συνοριακές συνθήκες Robin, (βλέπε [26, Πρόταση 2.2.1] και Παράρτημα). Επομένως,

$$\lambda^*(\Omega) \geq \lambda^*(B_R),$$

έτσι λόγω του Θεωρήματος 23 τελικά παίρνουμε ότι

$$\lambda^*(\Omega) \geq \lambda_*(B_R) := \frac{\beta A(\partial B_R)(N-2)}{[N-2(1+\beta R)]} \frac{(1+\alpha\omega_N^R)^2}{\omega_N^R}.$$

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μια άνω εκτίμηση της κρίσιμης τιμής  $\lambda^*$  για γενικό φραγμένο χωρίο  $\Omega$ .

**Πρόταση 7.** Για γενικό χωρίο  $\Omega$  ισχύει η ακόλουθη άνω εκτίμηση της κρίσιμης τιμής  $\lambda^*$

$$(4.42) \quad \lambda^* \leq \frac{2\lambda_1(1+\alpha^2|\Omega|^2)}{m_1|\Omega|} < \infty,$$

όπου  $(\lambda_1, \phi_1)$  είναι το πρωτεύον ιδιοζεύγος της Λαπλασιανής που σχετίζεται με τις συνοριακές συνθήκες Robin, στο πρόβλημα (4.18), και  $m_1 := \min_{\bar{\Omega}} \phi_1(x) > 0$ .

*Απόδειξη.* Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση του προβλήματος (4.11α') με μια συνάρτηση δοκιμής, συγκεκριμένα επιλέγουμε τη  $\phi_1$ , και κατοπιν ολοκληρώνουμε στο χωρίο  $\Omega$ :

$$(4.43) \quad \lambda_1 \int_{\Omega} w \phi_1 dx = \frac{\lambda \int_{\Omega} \frac{\phi_1}{(1-w)^2} dx}{\left(1 + \alpha \int_{\Omega} \frac{1}{(1-w)} dx\right)^2} > \frac{\lambda m_1 \int_{\Omega} \frac{1}{(1-w)^2} dx}{\left(1 + \alpha \int_{\Omega} \frac{1}{(1-w)} dx\right)^2}.$$

Στη συνέχεια από τις ανισότητες Hölder και Young συμπεραίνουμε ότι

$$(4.44) \quad \left(1 + \alpha \int_{\Omega} \frac{1}{(1-w)} dx\right)^2 \leq 2 + 2\alpha^2|\Omega| \int_{\Omega} \frac{1}{(1-w)^2} dx.$$

Τότε οι ανισότητες (4.43) και (4.44), για την κλασσική λύση  $0 \leq w < 1$ , συνεπάγονται ότι

$$(4.45) \quad \lambda_1 = \lambda_1 \int_{\Omega} \phi_1 dx \geq \int_{\Omega} w \phi_1 dx \geq \frac{\lambda m_1 \alpha^2 \int_{\Omega} \frac{dx}{(1-w)^2}}{2 + 2\alpha^2|\Omega| \int_{\Omega} \frac{dx}{(1-w)^2}} = \frac{\lambda m_1}{\alpha^2} \Psi(I_{\alpha}(w)),$$

λαμβάνοντας επίσης υπόψη τη σχέση (4.19) όπου  $\Psi(s) = \frac{s}{2+2\alpha^2|\Omega|s}$ . Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση  $\Psi(s)$  είναι αύξουσα και έτσι

$$\Psi(I_{\alpha}(w)) > \Psi(\alpha^2|\Omega|) = \frac{\alpha^2|\Omega|}{2 + 2\alpha^2|\Omega|^2},$$

για  $I_{\alpha}(w) := \alpha^2 \int_{\Omega} \frac{dx}{(1-w)^2}$ . Αυτή η ισότητα λόγω της σχέσης (4.44) συνεπάγεται ότι

$$\lambda_1 \geq \frac{\lambda m_1 |\Omega|}{2(1 + \alpha^2|\Omega|^2)}$$

και έτσι μέσω του ορισμού του  $\lambda^*$  προκύπτει το επιθυμητό άνω όριο (4.43). □

## 4.2 Το Χρονοεξαρτώμενο Πρόβλημα

### 4.2α' Τοπική ύπαρξη και μοναδικότητα

Σε αυτή την υποενότητα εξετάζουμε την τοπική ύπαρξη και τη μοναδικότητα των λύσεων του προβλήματος (1). Αρχικά ορίζουμε την έννοια των κάτω - πάνω λύσεων για το πρόβλημα (1) που θα χρησιμοποιήσουμε για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα σύγκρισης προκειμένου να αποδείξουμε την τοπική ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων, δείτε επίσης [4, 38, 63] και τον ορισμό της παράγραφου 3.5.

**Ορισμός 26.** Το ζεύγος των λύσεων  $0 \leq v(x, t), z(x, t) < 1$  με  $v, z \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$  καλείται ζεύγος κάτω - πάνω λύσεων του προβλήματος (1), αν  $v(x, t) \leq z(x, t)$  για  $(x, t) \in Q_T$ ,  $v(x, 0) \leq u_0(x) \leq z(x, 0)$  στο  $\bar{\Omega}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial \nu}(x, t) + \beta v(x, t) \leq 0 \leq \frac{\partial z}{\partial \nu}(x, t) + \beta z(x, t)$  για  $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]$ , και

$$v_t \leq \Delta v + \frac{\lambda}{(1-v)^2(1+\alpha \int_{\Omega} \frac{dx}{1-z})^2}, \quad \text{στο } Q_T,$$

$$z_t \geq \Delta z + \frac{\lambda}{(1-z)^2(1+\alpha \int_{\Omega} \frac{dx}{1-v})^2}, \quad \text{στο } Q_T.$$

Έχουμε στη συνέχεια την Πρόταση 8 σχετικά με την τοπική ύπαρξη της λύσης του προβλήματος (1).

**Πρόταση 8.** Έστω ότι το  $(v, z)$  είναι ένα ζεύγος άνω κάτω λύσεων στο πρόβλημα (1) στο χωρίο  $Q_T$  για κάποιο  $T > 0$ . Υπάρχει μια μοναδική λύση  $u$  στο πρόβλημα (1) έτσι ώστε  $v \leq u \leq z$  στο χωρίο  $Q_T$ .

*Απόδειξη.* Ορίζουμε  $\bar{u}_0 = z, \underline{u}_0 = v$  και κατασκευάζουμε μια ακολουθία άνω - κάτω λύσεων του προβλήματος (1) με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\underline{u}_{nt} = \Delta \underline{u}_n + \frac{\lambda}{(1-\underline{u}_{n-1})^2(1+\alpha \int_{\Omega} \frac{dx}{1-\bar{u}_{n-1}})^2}, \quad \text{στο } Q_{T_n} := \Omega \times (0, T_n),$$

$$\bar{u}_{nt} = \Delta \bar{u}_n + \frac{\lambda}{(1-\bar{u}_{n-1})^2(1+\alpha \int_{\Omega} \frac{dx}{1-\underline{u}_{n-1}})^2} \quad \text{στο } Q_{T_n},$$

$$\frac{\partial \underline{u}_n}{\partial \nu} + \beta \underline{u}_n = 0, \quad \text{στο } \Gamma_{T_n} := \partial\Omega \times (0, T_n),$$

$$\frac{\partial \bar{u}_n}{\partial \nu} + \beta \bar{u}_n = 0, \quad \text{στο } \Gamma_{T_n},$$

$$\underline{u}_n(x, 0) = \bar{u}_n(x, 0) = u_0(x), \quad \text{για } x \in \bar{\Omega},$$

για  $n = 1, 2, \dots$  όπου  $T_n$  είναι ο μέγιστος χρόνος ύπαρξης για το ζευγάρι  $(\underline{u}_n, \bar{u}_n)$ . Σημειώνουμε ότι από τον προηγούμενο ορισμό έχουμε ότι τα ζεύγη  $(\underline{u}_n, \bar{u}_n)$  υπάρχουν για το χρονικό διάστημα που υπάρχει και το ζεύγος  $(\underline{u}_{n-1}, \bar{u}_{n-1})$ , και άρα  $T_{n-1} \leq T_n$  για  $n = 2, 3, \dots$

Τα παραπάνω προβλήματα είναι τοπικά και γραμμικά και έτσι η τοπική ύπαρξη των λύσεων τους στο χρόνο προκύπτει από τη κλασική θεωρία των παραβολικών εξισώσεων. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τον ορισμό 26 και τα τυπικά επιχειρήματα σύγκρισης για παραβολικά προβλήματα (βλέπε [50]), συμπεραίνουμε ότι οι ακολουθίες  $\{\underline{u}_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\bar{u}_n\}_{n=1}^{\infty} \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ , για  $T =: \min\{T_n | n \in \mathbb{N}\} = T_1$ , είναι θετικές και ικανοποιούν την διάταξη

$$v \leq \underline{u}_{n-1} \leq \underline{u}_n \leq \dots \leq \bar{u}_n \leq \bar{u}_{n-1} \leq z.$$

Έστω ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{u} = u_1, \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{u} = u_2$  με τα όρια  $u_1, u_2$  να ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις

$$u_{1t} = \Delta u_1 + \frac{\lambda}{(1-u_1)^2(1+\alpha \int_{\Omega} \frac{dx}{1-u_2})^2}, \quad \text{στο } Q_{T_1},$$

$$u_{2t} = \Delta u_2 + \frac{\lambda}{(1-u_2)^2(1+\alpha \int_{\Omega} \frac{dx}{1-u_1})^2} \quad \text{στο } Q_{T_1},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu} + \beta u_1 = 0 \quad \text{στο } \Gamma_{T_1},$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \nu} + \beta u_2 = 0 \quad \text{στο } \Gamma_{T_1},$$

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = u_0(x), \quad \text{για } x \in \bar{\Omega}.$$

Επιπλέον ορίζουμε την συνάρτηση  $\psi$  με  $\psi(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$  η οποία ικανοποιεί το πρόβλημα :

$$\begin{aligned} \psi_t &= \Delta\psi + A(x, t)\psi + B(x, t) \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{d\theta}{[1 - \theta u_1 - (1 - \theta)u_2]^2} \psi dx, \quad \text{στο } Q_T, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu} + \beta \psi &= 0, \quad \text{στο } \Gamma_T, \\ \psi(x) &= 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \end{aligned}$$

όπου

$$(4.46) \quad A(x, t) := 2\lambda \frac{\int_0^1 \frac{d\theta}{[1 - \theta u_1 - (1 - \theta)u_2]^3}}{(1 + \alpha \int_{\Omega} \frac{dx}{1 - u_2})^2} > 0,$$

και

$$(4.47) \quad B(x, t) := \frac{\lambda}{(1 - u_2)^2} \frac{2 + \int_{\Omega} \frac{dx}{1 - u_1} + \int_{\Omega} \frac{dx}{1 - u_2}}{(1 + \alpha \int_{\Omega} \frac{dx}{1 - u_1})^2 (1 + \alpha \int_{\Omega} \frac{dx}{1 - u_2})^2} > 0,$$

(βλ. [38]). Εφαρμόζοντας την Πρόταση 2 (βλ. [85]) και από το γεγονός ότι  $u_1 = u_2 := u$  στο  $\bar{Q}_T$  προκύπτει ότι  $\psi(x, t) = 0$ .

Επιπλέον, όσον αφορά τη μοναδικότητα της λύσης, υποθέτουμε ότι υπάρχει μια δεύτερη λύση  $U$  που ικανοποιεί τη σχέση  $v \leq U \leq z$ . Εφαρμόζοντας πάλι το προηγούμενο ενπαναληπτικό σχήμα έχουμε ότι  $\underline{u}_n \leq U \leq \bar{u}_n$  για κάθε  $n = 1, 2, \dots$  και λαμβάνοντας το όριο για  $n \rightarrow \infty$  συμπεραίνουμε τελικά ότι  $U = u$ .  $\square$

**Παρατήρηση 6.** Με βάση τα παραπάνω έχουμε ότι η λύση του προβλήματος (1) συνεχίζει να υπάρχει εφόσον παραμένει μικρότερη ή ίση του  $B$  για κάποιο  $B < 1$ . Σε αντίθετη περίπτωση λέμε ότι η λύση  $u$  παύει να υπάρχει λόγω απόσβεσης, αν υπάρχει ακολουθία  $(x_n, t_n) \rightarrow (x^*, t^*)$  καθώς  $n \rightarrow \infty$  με  $t^* \leq \infty$  τέτοια ώστε  $u(x_n, t_n) \rightarrow 1$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ .

Ως επόμενο βήμα, για να μελετήσουμε το μέγιστο διάστημα ύπαρξης της λύσης, χρειάζεται να ορίσουμε την ενέργεια του προβλήματος (1). Αρχικά πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (1α') με  $u_t$  και ολοκληρώνουμε στο χωρίο  $\Omega$ . Έτσι προκύπτει η ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t^2 dx &= \int_{\Omega} u_t \Delta u dx + \lambda \int_{\Omega} \frac{u_t (1 - u)^{-2}}{(1 + \int_{\Omega} \frac{1}{1 - u} dx)^2} dx \\ &= - \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx + \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} ds + \lambda \frac{d}{dt} \left( - \frac{1}{1 + \int_{\Omega} \frac{1}{1 - u} dx} \right) \\ &= - \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx - \beta \int_{\partial\Omega} u_t u ds + \frac{\lambda}{\alpha} \frac{d}{dt} \left( - \frac{1}{1 + \alpha \int_{\Omega} \frac{1}{1 - u} dx} \right) \\ &= - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\beta}{2} \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega} u^2 ds + \frac{\lambda}{\alpha} \frac{d}{dt} \left( - \frac{1}{1 + \alpha \int_{\Omega} \frac{1}{1 - u} dx} \right), \end{aligned}$$

λαμβάνοντας επίσης υπόψη την συνοριακή συνθήκη (1β').

Επιπλέον έχουμε

$$(4.48) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_{\partial\Omega} u^2 ds + \frac{\lambda/\alpha}{1 + \alpha \int_{\Omega} \frac{1}{1 - u} dx} \right] = - \int_{\Omega} u_t^2 dx.$$

Η τελευταία εξίσωση μας δίνει ότι η ενέργεια

$$(4.49) \quad E(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_{\partial\Omega} u^2 ds + \frac{\lambda/\alpha}{1 + \alpha \int_{\Omega} \frac{1}{1 - u} dx} \leq E(0) = E_0 < \infty,$$

μειώνεται ως προς τον χρόνο για οποιαδήποτε λύση του προβλήματος (1).

Στη συνέχεια παρέχουμε ένα αποτέλεσμα τοπικής ύπαρξης για το πρόβλημα (1) χρησιμοποιώντας τα επιχειρήματα σύγκρισης που αναπτύχθηκαν παραπάνω, βλέπε Πρόταση 8. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε  $z$  λύση του ακόλουθου (τοπικού) προβλήματος

$$(4.50\alpha') \quad z_t = \Delta z + \frac{\lambda}{(1-z)^2(1+\alpha|\Omega|)^2} \quad \text{στο } Q_T,$$

$$(4.50\beta') \quad \frac{\partial z}{\partial \nu} + \beta z = 0 \quad \text{στο } \Gamma_T,$$

$$(4.50\gamma') \quad z(x, 0) = z_0(x) \quad \text{για } x \in \bar{\Omega}.$$

το οποίο έχει μοναδική λύση (βλέπε [34]). Χρησιμοποιώντας αυτό το συμπέρασμα μπορούμε να πάρουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα για την τοπική ύπαρξη του προβλήματος (4.11).

**Πρόταση 9.** Αν  $z_0(x) \geq u_0(x)$  για κάθε  $x \in \Omega$ , τότε το πρόβλημα (1) έχει μοναδική λύση  $u$  στο  $\Omega \times [0, T)$ , όπου  $[0, T)$  είναι το χρονικό διάστημα μέγιστης ύπαρξης για τη λύση  $z(x, t)$  του προβλήματος (4.50), και  $u(x, t) \leq z(x, t)$  στο  $\Omega \times [0, T)$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $v(x, t) = 0$ , τότε βλέπουμε εύκολα ότι

$$z_t = \Delta z + \frac{\lambda}{(1-z)^2(1+\alpha|\Omega|)^2} \geq \Delta z + \frac{\lambda}{(1-z)^2(1+\alpha \int_{\Omega} \frac{dx}{1-v})^2} \quad \text{στο } Q_T,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} + \beta z = 0, \quad \text{στο } \Gamma_T,$$

$$z(x, 0) = z_0(x) \quad \text{για } x \in \bar{\Omega},$$

όπου η συνάρτηση  $v$  ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα

$$v_t - \Delta v = 0 \leq \frac{\lambda}{(1-v)^2(1+\alpha \int_{\Omega} \frac{dx}{1-z})^2} \quad \text{στο } Q_T,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} + \beta v = 0, \quad \text{στο } \Gamma_T,$$

$$v(x, 0) = 0 \quad \text{για } x \in \bar{\Omega}.$$

Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό 26 της παραγράφου (4.2α') το ζεύγος  $(v, z)$  είναι ένα ζεύγος άνω κάτω λύσεων για το πρόβλημα (1) και τότε το αποτέλεσμα της πρότασης είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 8.  $\square$

#### 4.2β' Ολική ύπαρξη και απόσβεση για γενικό χωρίο

Στη συνέχεια διερευνούμε την ολική ύπαρξη και την απόσβεση των λύσεων του προβλήματος (1). Έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 24.** Υποθέτουμε ότι  $\lambda \in (0, (1+\alpha|\Omega|)^2 \mu^*)$ , όπου  $\mu^*$  η παράμετρος που ορίζεται από τη σχέση (4.16). Τότε το πρόβλημα (1) με αρχική συνθήκη  $u_0(x) \leq w_\lambda(x)$  έχει ολική λύση που συγκλίνει καθώς  $t \rightarrow \infty$  στην ελάχιστη στάσιμη λύση  $w_\lambda$  του προβλήματος (4.11) που αντιστοιχεί στη παράμετρο  $\lambda$ .

*Απόδειξη.* Από την Πρόταση 9 έχουμε ότι το ζεύγος  $(0, z)$  είναι ζεύγος άνω κάτω λύσεων του προβλήματος (1), όπου  $z$  είναι η μοναδική λύση του τοπικού προβλήματος (4.50) με αρχική συνθήκη  $z_0 = u_0 \leq w_\lambda$ . Τότε από την Πρόταση 8 συμπεραίνουμε  $0 \leq u \leq z$ . Επιπλέον λόγω του Θεωρήματος 22 το πρόβλημα (4.11) έχει ελάχιστη λύση  $w_\lambda$  για κάθε  $\lambda \in (0, (1+\alpha|\Omega|)^2 \mu^*)$  και έτσι το πρόβλημα (4.15) έχει επίσης μια ελάχιστη λύση  $w_\mu$  για

$$(4.51) \quad 0 < \mu = \frac{\lambda}{K(w_\mu)} < \mu^*.$$

Από την άλλη, υπάρχει  $\mu_1 \in (0, \mu^*)$  τέτοιο ώστε

$$(4.52) \quad \mu_1 = \frac{\lambda}{(1+\alpha|\Omega|)^2}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.22) οι εξισώσεις (4.51) και (4.52) δίνουν ότι  $\mu < \mu_1$  και χρησιμοποιώντας επιπλέον το Λήμμα 3 τελικά προκύπτει ότι  $w_\mu \leq w_{\mu_1}$ . Στη συνέχεια, μέσω του θεωρήματος σύγκρισης, έχουμε ότι  $0 \leq z \leq w_{\mu_1}$  αφού  $z_0 = u_0 \leq w_\lambda = w_\mu \leq w_{\mu_1}$  και έτσι τελικά συμπεραίνουμε ότι

$$0 < u(x, t) \leq z(x, t) \leq w_{\mu_1}(x) < \infty, \quad \text{για κάθε } x \in \Omega, \text{ και } t > 0,$$

και συνεπώς υπάρχει μια ολική λύση για το πρόβλημα (1). Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα διασποράς (dissipative property) (4.48) της ενέργειας  $E(t)$ , (βλέπε για παράδειγμα [51]), μπορούμε να αποδείξουμε τη σύγκλιση της λύσης του εξελικτικού προβλήματος  $u(x, t)$  προς τη στάσιμη λύση  $w_\lambda(x)$ , για  $u_0(x) \leq w_\lambda(x)$ .  $\square$

Στη συνέχεια για το συγκεκριμένο πρόβλημα (1), ορίζουμε την έννοια της πεπερασμένης χρονικής απόσβεσης, η οποία συνδέεται στενά με το μηχανικό φαινόμενο του touching down.

**Ορισμός 27.** Η λύση της  $u(x, t)$  του προβλήματος (1) αποσβένει σε κάποιο σημείο της  $x^* \in \Omega$  σε πεπερασμένο χρόνο  $0 < T_q < \infty$  αν υπάρχουν ακολουθίες  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \Omega$  και  $\{t_n\}_{n=1}^\infty \in (0, \infty)$  με  $x_n \rightarrow x^*$  και  $t_n \rightarrow T_q$  καθώς  $n \rightarrow \infty$  τέτοιο ώστε  $u(x_n, t_n) \rightarrow 1$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ . Στην περίπτωση όπου  $T_q = \infty$  λέμε ότι η  $u(x, t)$  αποσβένει σε άπειρο χρόνο στο  $x^*$ . Επιπλέον

$$X = \{x^* \in \bar{\Omega} \mid \exists (x_k, t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Omega \times (0, T_q) : x_k \rightarrow x^*, t_k \rightarrow T_q \text{ και } u(x_k, t_k) \rightarrow 1 \text{ καθώς } k \rightarrow \infty\},$$

ονομάζεται σύνολο απόσβεσης της  $u$ .

Επιπλέον παρουσιάζουμε ένα αποτέλεσμα απόσβεσης για ένα γενικό χωρίο  $\Omega$  ακολουθώντας μια προσέγγιση που εισάγεται στην εργασία [38], (βλ. επίσης [35]).

**Θεώρημα 25.** Για κάθε σταθερό  $\lambda > 0$ , υπάρχουν αρχικά δεδομένα έτσι ώστε η λύση του προβλήματος (1) να αποσβένει σε πεπερασμένο χρόνο, εφόσον η αντίστοιχη αρχική ενέργεια  $E(0)$  επιλέγεται επαρκώς μικρή,

$$(4.53) \quad E(0) < \frac{\lambda q_\alpha(|\Omega|)}{2\alpha},$$

με

$$(4.54) \quad q_\alpha(|\Omega|) := \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \frac{1}{3\alpha}, \\ \frac{1}{3\alpha|\Omega|}, & |\Omega| \geq \frac{1}{3\alpha}. \end{cases}$$

*Απόδειξη.* Η απόδειξη ακολουθεί εκείνη του Θεωρήματος 1.2.17 της εργασίας [59] όπου αναφέρεται στο ίδιο πρόβλημα αλλά με συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Ωστόσο για λόγους πληρότητας παρουσιάζεται και εδώ τροποποιημένη για τη περίπτωση των συνοριακών συνθηκών Robin.

Ας υποθέσουμε ότι το πρόβλημα (1) έχει μια ολική (κλασική) λύση  $u$ , δηλαδή  $0 < u(x, t) < 1$  για κάθε  $(x, t) \in (0, \infty) \times \Omega$  και

$$(4.55) \quad Z(t) := \int_{\Omega} u^2(x, t) dx < |\Omega|, \quad \text{για κάθε } t > 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (1α') με  $u$  και ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες στο χωρίο  $\Omega$ , συμπεραίνουμε ότι

$$(4.56) \quad \frac{1}{2} \frac{dZ}{dt} = - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \beta \int_{\partial\Omega} u^2 ds + \lambda \frac{\int_{\Omega} \frac{u}{(1-u)^2} dx}{\left(1 + \alpha \int_{\Omega} (1-u)^{-1} dx\right)^2},$$

λαμβάνοντας υπόψη και την συνοριακή συνθήκη (1β'). Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.48) για να αναδιατυπώσουμε την σχέση (4.56) έχουμε

$$(4.57) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dZ}{dt} &= -2E(t) + \frac{2\lambda}{\alpha} \frac{1}{\left(1 + \alpha \int_{\Omega} (1-u)^{-1} dx\right)} + \lambda \frac{\int_{\Omega} \frac{u}{(1-u)^2} dx}{\left(1 + \alpha \int_{\Omega} (1-u)^{-1} dx\right)^2} \\ &\geq -2E(0) + \frac{\lambda}{\alpha} \frac{2 + \alpha \int_{\Omega} \frac{2-u}{(1-u)^2} dx}{\left(1 + \alpha \int_{\Omega} (1-u)^{-1} dx\right)^2}. \end{aligned}$$

Επιπλέον από τις ανισότητες Hölder και Young έχουμε

$$\left(1 + \alpha \int_{\Omega} \frac{dx}{1-u}\right)^2 \leq 2 + 3\alpha^2 |\Omega| \int_{\Omega} \frac{dx}{(1-u)^2}.$$

και έτσι λόγω της ανισότητας (4.57) αποκτούμε τη διαφορική ανισότητα

$$\frac{1}{2} \frac{dZ}{dt} \geq -2E(0) + \frac{\lambda}{\alpha} q_{\alpha}(|\Omega|),$$

ή

$$Z(t) \geq 2 \left[ q_{\alpha}(|\Omega|) \frac{\lambda}{\alpha} - 2E(0) \right] t + Z(0),$$

για  $q_{\alpha}(|\Omega|)$  δοσμένο από την σχέση (4.54). από αυτή τη τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι η αρχική ενέργεια του συστήματος  $E(0)$  ικανοποιεί την ανισότητα (4.53), το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την ανισότητα (4.55).  $\square$

**Παρατήρηση 7.** Εάν σταθεροποιήσουμε τα αρχικά δεδομένα  $u_0$ , και επομένως και την αρχική ενέργεια  $E(0)$ , τότε το Θεώρημα 25 παρέχει ένα αποτέλεσμα απόσβεσης για μεγάλες τιμές της μη τοπικής παραμέτρου  $\lambda$ . Συγκεκριμένα, η σχέση (4.53) παρέχει ένα κατώτατο όριο για την παράμετρο  $\lambda$  πάνω από το οποίο πραγματοποιείται απόσβεση σε πεπερασμένο χρόνο. Δηλαδή, εάν

$$\lambda > \tilde{\lambda} := \frac{2\alpha \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_{\partial\Omega} u_0^2 dS \right)}{q_{\alpha}(|\Omega|) - \frac{2\alpha}{1+\alpha \int_{\Omega} \frac{1}{1-u_0} dx}},$$

τότε  $\|u(\cdot, t)\|_{\infty} \rightarrow 1^-$  καθώς  $t \rightarrow T_q < \infty$  υπο την προϋπόθεση ότι η ποσότητα  $\mathcal{A}_{\alpha}(|\Omega|) := q_{\alpha}(|\Omega|) - \frac{2\alpha}{1+\alpha \int_{\Omega} \frac{1}{1-u_0} dx}$  είναι θετική. Σημειώνουμε ότι

$$\mathcal{A}_{\alpha}(|\Omega|) \geq q_{\alpha}(|\Omega|) - \frac{2\alpha}{1+\alpha|\Omega|} = \begin{cases} \frac{1+\alpha(|\Omega|-2)}{1+\alpha|\Omega|}, & |\Omega| \leq \frac{1}{3\alpha}, \\ \frac{1-\alpha(6\alpha-1)|\Omega|}{3\alpha|\Omega|(1+\alpha|\Omega|)}, & |\Omega| \geq \frac{1}{3\alpha}, \end{cases}$$

και έτσι έχουμε  $\mathcal{A}_{\alpha}(|\Omega|) > 0$  είτε επιλέγοντας  $\alpha < \frac{2}{3}$  και  $\frac{2\alpha-1}{\alpha} < |\Omega| \leq \frac{1}{3\alpha}$  για τον πρώτο κλάδο της ανισότητας, και  $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{2}{3}$  με  $\frac{1}{3\alpha} \leq |\Omega| < \frac{1}{\alpha(6\alpha-1)}$  ή απλά  $\alpha < \frac{1}{6}$  για τον δεύτερο κλάδο.

Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι, μια βέλτιστη τιμή  $\tilde{\lambda}$  για τη μοναδιαία σφαίρα  $B_1(0)$  δίνεται από το Θεώρημα 26, όπου εκεί αποδεικνύεται ότι  $\tilde{\lambda} = \lambda^*$ .

Ένα πρώτο βήμα προς την παραγωγή των πιο ισχυρών αποτελεσμάτων απόσβεσης είναι το ακόλουθο λήμμα. Στο εξής για λόγους απλότητας, χρησιμοποιούμε  $C_i, i = 1, \dots$ , για να υποδηλώσουμε διάφορες θετικές σταθερές που εμφανίζονται στην ανάλυση που ακολουθεί.

**Λήμμα 4.** Έστω  $u$  η ολική λύση του προβλήματος (1). Τότε υπάρχει ακολουθία  $\{t_j\}_{j=1}^{\infty} \uparrow \infty$  καθώς  $j \rightarrow \infty$  τέτοια ώστε

$$(4.58) \quad \lambda \int_{\Omega} u_j (1-u_j)^{-2} dx \leq C_1 (H(u_j))^2,$$

για κάποια θετική σταθερά  $C_1$ , όπου  $u_j = u(\cdot, t_j)$  και

$$(4.59) \quad H(u_j) := 1 + \alpha \int_{\Omega} \frac{1}{1-u_j} dx > 1.$$

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα (1) έχει ολική λύση ως προς τον χρόνο. Πολλαπλασιάζοντας την (1α') με  $u$  και ολοκληρώνοντας στο χωρίο  $\Omega$ , παίρνουμε

$$\int_{\Omega} uu_t dx = \int_{\Omega} u \left[ \Delta u + \frac{\lambda(1-u)^{-2}}{(1 + \alpha \int_{\Omega} \frac{1}{1-u} dx)^2} \right] dx$$

ή

$$(4.60) \quad \int_{\Omega} uu_t dx = - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \beta \int_{\partial\Omega} u^2 ds + \frac{\lambda \int_{\Omega} u(1-u)^{-2}}{(1 + \alpha \int_{\Omega} \frac{1}{1-u} dx)^2}.$$

Επιπλέον από την εξίσωση (5.77) έχουμε ότι

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = 2E(t) - \beta \int_{\partial\Omega} u^2 ds - \frac{2\lambda}{\alpha} \frac{1}{(1 + \alpha \int_{\Omega} \frac{1}{1-u} dx)^2}.$$

Ως εκ τούτου αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στην εξίσωση (5.9) παίρνουμε

$$(4.61) \quad \int_{\Omega} uu_t dx = -2E(t) + \frac{2\lambda}{\alpha} \frac{1}{(1 + \alpha \int_{\Omega} \frac{1}{1-u} dx)^2} + \frac{\lambda \int_{\Omega} u(1-u)^{-2}}{(1 + \alpha \int_{\Omega} \frac{1}{1-u} dx)^2}.$$

Στη συνέχεια από την ανισότητα Hölder και τις εξισώσεις (5.77), (5.80) και (30) έχουμε

$$(4.62) \quad \begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} u(1-u)^{-2} dx &= 2E(t)H^2(u) - \frac{2\lambda}{\alpha} H(u) + H^2(u) \int_{\Omega} uu_t dx \\ &\leq 2E_0 H^2(u) + |\Omega|^2 \|u(\cdot, t)\|_2 \|u_t(\cdot, t)\|_2 H^2(u) \\ &\leq 2E_0 H^2(u) + |\Omega|^2 \|u_t(\cdot, t)\|_2 H^2(u). \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, λόγω του ότι η ενέργεια  $E(t)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου, όπως προκύπτει από την εξίσωση (5.76), έχουμε ότι

$$0 \leq \int_{\tau}^t \int_{\Omega} u_t^2(x, s) dx ds = E(\tau) - E(t),$$

που σε συνδυασμό με την εξίσωση (4.48) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ισχύει η ανισότητα

$$(4.63) \quad \int_{\tau}^{\infty} \int_{\Omega} u_t^2(x, s) dx ds \leq C < \infty,$$

όπου  $C$  είναι σταθερά ανεξάρτητη του  $\tau$ . Γνωρίζουμε από προηγούμενο αποτέλεσμα στην εργασία [50] ότι η σχέση (4.63) συνεπάγεται την ύπαρξη μιας ακολουθίας  $\{t_j\}_{j=1}^{\infty} \uparrow \infty$  τέτοια ώστε

$$(4.64) \quad \|u_t(\cdot, t_j)\|_2^2 = \int_{\Omega} u_t^2(x, t_j) dx \rightarrow 0 \quad \text{καθώς} \quad t_j \rightarrow \infty,$$

και έτσι από την ανισότητα (4.62) προκύπτει ότι

$$(4.65) \quad \lambda \int_{\Omega} u_j(1-u_j)^{-2} dx \leq C_1 H^2(u_j), \quad C_1 > 0.$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του Λήμματος. □

### Απόσβεση σε πεπερασμένο χρόνο για την περίπτωση της ακτινικής συμμετρίας

Από την άποψη των εφαρμογών, βλ. [80], μια ευρέως χρησιμοποιούμενη περίπτωση που πρέπει να μελετηθεί είναι η περίπτωση όπου έχουμε μια διαμόρφωση *MEMS* με δισκοειδής πλάκες, (βλ. σχήμα 2 (β)). Ειδικότερα σε αυτή τη περίπτωση η μορφή της ελαστικής μεμβράνης είναι παρόμοια με αυτήν μιας ταινίας σαπουνιού όπως αρχικά προτάθηκε από τον Βρετανό επιστήμονα, *G.I.Taylor*, ο οποίος διερεύνησε τη συνένωση των υγρών

σταγόνων που διατηρούνται σε διαφορετικά ηλεκτρικά δυναμικά, [93]. Αργότερα, ο R.C. O Ackerberg ξεκίνησε τη μαθηματική μελέτη του μοντέλου του *Taylor* στην εργασία [2].

Στην ακτινική συμμετρική περίπτωση, δηλαδή όταν  $\Omega = B_1(0)$ , τότε το πρόβλημα (1) στις  $N$ -διαστάσεις απλοποιείται στη μορφή

$$(4.66\alpha') \quad u_t - u_{rr} - (N-1)r^{-1}u_r = F(r, t), \quad (r, t) \in (0, 1) \times (0, T), \quad N \geq 1,$$

$$(4.66\beta') \quad u_r(0, t) = 0, \quad u_r(1, t) + \beta u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T),$$

$$(4.66\gamma') \quad 0 \leq u(r, 0) = u_0(r) < 1, \quad 0 < r < 1,$$

όπου

$$(4.67) \quad F(r, t) = \lambda(1 - u(r, t))^{-2}k(t),$$

για

$$k(t) = \left[ 1 + \alpha N \omega_N \int_0^1 r^{N-1} (1 - u(r, t))^{-1} dr \right]^{-2}.$$

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι ο όρος  $\omega_N$  αντιπροσωπεύει τον όγκο της σφαίρας των  $N$ -διαστάσεων της μοναδιαίας σφαίρας  $B_1(0)$  στο  $\mathbb{R}^N$ . Σημειώνουμε ότι η συνθήκη  $u_r(0, t) = 0$ , για  $N \geq 1$  επιβάλλεται για να εγγυηθεί την ομαλότητα της λύσης  $u$  για  $r = 0$ . Για ευκολία ορίζουμε τη συνάρτηση  $v$ , με  $0 < v := 1 - u \leq 1$ . Έτσι, εάν  $u \rightarrow 1^-$  τότε  $v \rightarrow 0^+$  και το πρόβλημα (4.66) παίρνει τη μορφή

$$(4.68\alpha') \quad v_t - v_{rr} - (N-1)r^{-1}v_r = -fv^{-2}, \quad (r, t) \in (0, 1) \times (0, T),$$

$$(4.68\beta') \quad v_r(0, t) = 0, \quad v_r(1, t) + \beta v(1, t) = \beta, \quad t \in (0, T)$$

$$(4.68\gamma') \quad 0 < v(r, 0) = v_0(r) \leq 1, \quad 0 < r < 1,$$

όπου

$$f = f(t) := \frac{\lambda}{\left[ 1 + \alpha N \omega_N \int_0^1 r^{N-1} v^{-1} dr \right]^2}.$$

Για το υπόλοιπο της ανάλυσής μας χρειαζόμαστε μια κάτω εκτίμηση για την συνάρτηση  $v$ , η οποία παρέχεται από το επόμενο λήμμα.

**Λήμμα 5.** Θεωρούμε ακτινική συμμετρία, αύξοντα αρχικά δεδομένα  $v_0(r)$  με  $v_0'(r) > 0$  και υποθέτουμε ότι  $N > \beta + 1$ . Τότε για κάθε  $k > 2/3$  υπάρχει μια σταθερά  $C = C(k)$  τέτοια ώστε

$$(4.69) \quad v(r, t) \geq C(k)r^k \quad \text{για} \quad (r, t) \in (0, 1) \times (0, T).$$

Επιπλέον, υπάρχει μια σταθερά  $C_2$  η οποία είναι ανεξάρτητη από το χρόνο  $t$  και ομοιόμορφη ως προς  $\lambda$  έτσι ώστε να ισχύει ότι

$$(4.70) \quad H(u) = H(1 - v) \leq C_2 \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \quad 0 < t < T.$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε  $1 < b < 2$ , και ότι υπάρχει κάποιο  $t_1 > 0$  και  $\epsilon_1 > 0$  τέτοια ώστε

$$(4.71) \quad v_r > \epsilon_1 r v^{-b} \quad \text{στο} \quad t = t_1 \quad \text{για} \quad 0 < r \leq 1.$$

Παραγωγίζουμε την εξίσωση (4.68α') ως προς  $r$  και έχουμε

$$(v_r)_t - (v_{rr})_r - (N-1)(-r^{-2}v_r + r^{-1}(v_r)_r) = 2fv^{-3}v_r,$$

η οποία μετά από τον πολλαπλασιασμό με  $r^{N-1}$  στα δύο μέλη της εξίσωσης συνεπάγεται ότι

$$r^{N-1}(v_r)_t - r^{N-1}(v_{rr})_r - r^{N-1}(N-1)(-r^{-2}v_r + r^{-1}(v_r)_r) = 2r^{N-1}fv^{-3}v_r,$$

και

$$(4.72) \quad z_t - r^{N-1}(v_{rr})_r + r^{N-1}(N-1)(r^{-2}v_r - r^{-1}(v_r)_r) = 2r^{N-1}fv^{-3}v_r.$$



Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$-r^{N-1}(v_{rr})_r + r^{N-1}(N-1)(r^{-2}v_r - r^{-1}(v_r)_r) = -z_{rr} + (N-1)r^{-1}z_r.$$

Πράγματι από τον ορισμό του  $z$ ,  $z = r^{N-1}v_r$ , έχουμε ότι

$$z_r = (N-1)r^{N-2}v_r + r^{N-1}v_{rr},$$

και όμοια

$$z_{rr} = (N-1)(N-2)r^{N-3}v_r + 2(N-1)r^{N-2}v_{rr} + r^{N-1}v_{rrr}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} -z_{rr} + (N-1)r^{-1}z_r &= -(N-1)(N-2)r^{N-3}v_r - 2(N-1)r^{N-2}v_{rr} - r^{N-1}v_{rrr} \\ &\quad + (N-1)r^{-1}((N-1)r^{N-2}v_r + r^{N-1}v_{rr}) \\ &= -(N-1)(N-2)r^{N-3}v_r - 2(N-1)r^{N-2}v_{rr} - r^{N-1}v_{rrr} + (N-1)^2r^{N-3}v_r \\ &\quad + (N-1)r^{N-2}v_{rr} \\ &= (N-1)r^{N-3}v_r - (N-1)r^{N-2}v_{rr} - r^{N-1}v_{rrr}, \end{aligned}$$

και αποκτούμε την σχέση

$$(4.73) \quad z_t - z_{rr} + (N-1)r^{-1}z_r = 2fv^{-3}z,$$

όπου  $z := r^{N-1}v_r$ .

Ως επόμενο βήμα ορίζουμε το συναρτησιακό

$$(4.74) \quad J = z - \epsilon r^N v^{-b} \quad \text{για} \quad 0 < \epsilon < \epsilon_1,$$

για το οποίο ισχύει

$$(4.75) \quad J > 0 \quad \text{for} \quad 0 < r \leq 1 \quad \text{στο} \quad t = t_1,$$

λόγω της σχέσης (4.71).

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} J_t &= z_t + b\epsilon r^N v^{-b-1}v_t, \\ J_r &= z_r - \epsilon N r^{N-1}v^{-b} + \epsilon b r^N v^{-b-1}v_r, \end{aligned}$$

και

$$J_{rr} = z_{rr} + b\epsilon r^N v^{-b-1}v_{rr} + 2Nb\epsilon r^{N-1}v^{-b-1}v_r - b(b+1)\epsilon r^N v^{-b-2}v_r^2 - N(N-1)\epsilon r^{N-2}v^{-b}.$$

Επιπρόσθετα όσο έχουμε  $J > 0$ , τότε θα ισχύει ότι  $v_r > \epsilon r v^{-b}$  και μετά από ολοκλήρωση προκύπτει ότι

$$v > \left( \frac{b+1}{2}\epsilon \right)^{\frac{1}{b+1}} r^{\frac{2}{b+1}},$$

που μας δίνει τη σχέση (4.69) για  $C = \left( \frac{b+1}{2}\epsilon \right)^{\frac{1}{b+1}}$  και  $k = \frac{2}{b+1}$ . Η τελευταία ανισότητα συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^{N-1}v^{-1}dr &< \int_0^1 r^{N-1} \left( \frac{2}{(b+1)\epsilon} \right)^{\frac{1}{b+1}} \frac{1}{r^{\frac{2}{b+1}}} dr \\ &= \left( \frac{2}{(b+1)\epsilon} \right)^{\frac{1}{b+1}} \int_0^1 r^{\frac{Nb+N-2}{b+1}-1} dr \\ &= \left( \frac{2}{(b+1)\epsilon} \right)^{\frac{1}{b+1}} \left[ r^{\frac{Nb+N-2}{b+1}} \frac{b+1}{Nb+N-2} \right]_0^1 \\ (4.76) \quad &\leq \left( \frac{2}{(b+1)\epsilon} \right)^{\frac{1}{b+1}} \left( \frac{b+1}{Nb+N-2} \right) = C_2 \epsilon^{-1/(b+1)}, \end{aligned}$$

και έτσι καταλήγουμε στην ανισότητα (4.70).

Εισάγουμε τώρα τη συνάρτηση

$$(4.77) \quad G(\epsilon) := \frac{\epsilon^{\frac{2}{b+1}}}{\left(\epsilon^{\frac{1}{b+1}} + \alpha N \omega_N C_2\right)^2}.$$

όπου η παράμετρος  $\epsilon$  είναι αρκετά μικρή δηλαδή  $0 < \epsilon \ll 1$ , και με  $\epsilon_2$  να ικανοποιεί τη σχέση

$$(4.78) \quad \epsilon_2 < \sup \left\{ \epsilon : \epsilon \leq \min \left\{ \frac{1}{N}, \left( \frac{2-b}{2b} \right) \right\} \lambda G(\epsilon) \right\}.$$

Αξίζει να σημειωθεί, ότι ένα τέτοιο  $\epsilon_2$  που ικανοποιεί την σχέση (4.78) υπάρχει δεδομένου ότι  $G(\epsilon) = O(\epsilon^{2/(b+1)}) \gg \epsilon$  για  $\epsilon$  μικρό με  $0 < \epsilon < \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ , λαμβάνοντας επίσης υπόψη ότι  $b > 1$ .

Λόγω των ανισοτήτων (4.75) και (4.76) ισχύει ότι

$$(4.79) \quad f(t_1) = \frac{\lambda}{\left(1 + \alpha N \omega_N \int_0^1 r^{N-1} v^{-1} dr\right)^2} > \lambda G(\epsilon),$$

και έτσι, σε μια γειτονιά του  $t = t_1$  λαμβάνουμε ότι  $f(t) > \lambda G(\epsilon)$ . Ισχυριζόμαστε ότι  $f(t) > \lambda G(\epsilon)$  για κάθε  $t \in (t_1, T)$ .

Ας υποθέσουμε αντιθέτως, ότι:

$$(4.80) \quad \exists t_2 \in (t_1, T) \text{ τέτοιο ώστε } f(t_2) = \lambda G(\epsilon) \text{ με } f(t) > \lambda G(\epsilon) \text{ για } t_1 \leq t < t_2.$$

από τον ορισμό του  $J$  και  $z$  παίρνουμε

$$J = 0 \quad \text{στο } r = 0,$$

ενώ στο σύνορο  $r = 1$  έχουμε

$$(4.81) \quad \begin{aligned} J &= z(1, t) - \epsilon v^{-b}(1, t) \\ &= \beta(1 - v(1, t)) - \epsilon v^{-b}(1, t) > 0, \end{aligned}$$

υπό την προϋπόθεση ότι

$$\epsilon \leq \epsilon_3 := \inf_{t_1 < t < t_2} \frac{\beta(1 - v(1, t))}{v^{-b}(1, t)}.$$

Επιπλέον

$$J_r = z_r - \epsilon N r^{N-1} v^{-b} + \epsilon b r^N v^{-b-1} v_r = (N-1)r^{N-2} v_r + r^{N-1} v_{rr} + \epsilon r^N v^{-b} (-N r^{-1} + b v^{-1} v_r),$$

και για  $r = 1$ , έχουμε

$$\begin{aligned} J_r - b\epsilon J &= (N-1)v_r(1, t) + v_{rr}(1, t) - \epsilon v^{-b}(1, t) [N - b\beta v^{-1}(1, t) + b\beta] - b\epsilon [\beta - (\beta v(1, t) + \epsilon v^{-b}(1, t))] \\ &= (N-1)v_r(1, t) + v_{rr}(1, t) \\ &\quad - \epsilon [v^{-b}(1, t)N - b\beta v^{-b-1}(1, t) + b\beta v^{-b}(1, t) + b\beta - b\beta v(1, t) - b\epsilon v^{-b}(1, t)], \end{aligned}$$

και ως εκ τούτου, μετά την απαλειφή όλων των θετικών όρων,

$$J_r - b\epsilon J > (N-1)v_r(1, t) + v_{rr}(1, t) - \epsilon [v^{-b}(1, t)N + b\beta v^{-b}(1, t) + b\beta].$$

Στη συνέχεια παραγωγίζοντας τη δεύτερη συνοριακή συνθήκη (4.66β') ως προς τον όρο  $r$  παίρνουμε

$$v_{rr}(1, t) = -\beta v_r(1, t),$$

και έτσι έχουμε

$$J_r - b\epsilon J > (N - 1 - \beta) v_r(1, t) - \epsilon [v^{-b}(1, t)N + b\beta v^{-b}(1, t) + b\beta].$$

Επομένως οι όροι  $J_r(1, t)$  και  $J_r(1, t) - b\epsilon J(1, t)$  για να είναι θετικοί χρειαζόμαστε να ισχύει ότι

$$(N - 1 - \beta) v_r(1, t) - \epsilon [v^{-b}(1, t)N + b\beta v^{-b}(1, t) + b\beta] > 0,$$

ή αρκεί να επιλέξουμε  $\epsilon \leq \min\{\epsilon_3, \epsilon_4\}$  για

$$\epsilon_4 := \inf_{t_1 < t < t_2} \frac{(N - 1 - \beta) v_r(1, t)}{(N + b\beta) v^{-b}(1, t) + b\beta} > 0,$$

εφόσον  $N > \beta + 1$ . Έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$J_t - J_{rr} + (N - 1)r^{-1}J_r \geq 2J(fv^{-3} - b\epsilon v^{-b-1}) + \epsilon f r^N v^{-b-3}(2 - b) - 2\epsilon^2 r^N v^{-2b-1}b,$$

και ως εκ τούτου

$$(4.82) \quad J_t - J_{rr} + (N - 1)r^{-1}J_r > 2J(fv^{-3} - b\epsilon v^{-b-1}),$$

για

$$\epsilon f r^N v^{-b-3}(2 - b) - 2\epsilon^2 r^N v^{-2b-1}b > 0,$$

ή εναλλακτικά για

$$\epsilon f(2 - b) > 2\epsilon^2 b,$$

που με τη σειρά του δίνει

$$\epsilon < \epsilon_5 := \inf_{t_1 < t < t_2} \frac{f(t)(2 - b)}{2b}.$$

από την αρχή του μεγίστου προκύπτει ότι  $J > 0$ , για  $0 < r \leq 1, t_1 \leq t \leq t_2$  και για  $\epsilon$  αρκετά μικρό που ικανοποιεί την ανισότητα  $\epsilon < \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5\}$ . Στο χωρίο  $0 < r \leq 1, t_1 \leq t \leq t_2$ , και εφόσον  $v > 0$ , ο συντελεστής του  $J$  στην εξίσωση (4.82) είναι φραγμένος, και έτσι μπορούμε να ορίσουμε μια νέα μεταβλητή  $\tilde{J} = e^{-D_1 t} J$  η οποία στη συνέχεια ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη (5.50), την συνοριακή ανισότητα (5.54) και επιπλέον τη διαφορική ανισότητα

$$(4.83) \quad \tilde{J}_t - \tilde{J}_{rr} + (N - 1)r^{-1}\tilde{J}_r > -D_2 \tilde{J},$$

όπου  $D_1$  και  $D_2$  είναι θετικές σταθερές. Εάν το  $\tilde{J}$  είναι μη θετικό, θα πρέπει να λαμβάνει μη θετικό ελάχιστο στο διάστημα  $(r_3, t_3)$  με  $0 < r_3 \leq 1$  και  $t_1 < t_3 \leq t_2$ . Για  $r_3 = 1$ , και από το γεγονός ότι  $J_r(1, t) > 0$  έχουμε  $\tilde{J}_r(1, t) > 0$  που οδηγεί σε αντίφαση. Έτσι, το υποτιθέμενο ελάχιστο πρέπει να έχει τετμημένη  $0 < r_3 < 1$ , όπου  $\tilde{J}_t \leq 0, \tilde{J}_r = 0$  και  $\tilde{J}_{rr} \geq 0$ . Εάν έχουμε  $\tilde{J} \leq 0$  τότε από την εξίσωση (4.83) προκύπτει πάλι αντίφαση. Επομένως οι ποσότητες  $\tilde{J}$  και  $J$  παραμένουν θετικές στο διάστημα  $0 < r < 1$  για  $t_1 \leq t \leq t_2$ .

από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση (4.79) επαληθεύεται στο  $t = t_2$ , αντίθετα με την αρχική υπόθεση όπως αυτή διατυπώνεται στη σχέση (4.80). Έτσι, για το διάστημα ύπαρξης της λύσης  $u$  ισχύει ότι  $f(t) > \lambda G(\epsilon)$  για  $t \geq t_1$ . Επομένως, προκύπτει ότι  $J > 0$ , και η εκτίμηση (4.69) ισχύει όπως επίσης και η ανισότητα

$$(4.84) \quad \int_0^1 r^{N-1} v^{-1} dr < \frac{2^{\frac{1}{b+1}}}{(b+1)\epsilon^{\frac{1}{b+1}}} \frac{b+1}{Nb+N-2} = \frac{1}{Nb+N-2} \left(\frac{2}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{b+1}} (b+1)^{1-\frac{1}{b+1}} \\ = \frac{1}{Nb+N-2} \left(\frac{2}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{b+1}} (b+1)^{\frac{b}{b+1}},$$

για  $t \geq t_1$ , αν η λύση,  $u$ , του προβλήματος (4.68α)-(4.68γ) έχει ολική ύπαρξη ή υπάρχει στο μέγιστο διάστημα ύπαρξης της λύσης έως το χρόνο απόσβεσης  $T_q$  (συμπεριλαμβανομένου και αυτού του σημείου) στη περίπτωση που η λύση αποσβένει σε πεπερασμένο χρόνο. Τελικά από τον ορισμό του συναρτησιακού  $H(u)$  και την ανισότητα (4.84) λαμβάνουμε την επιθυμητή εκτίμηση, (4.70), και το λήμμα αποδεικνύεται.  $\square$

**Παρατήρηση 8.** Σημειώνουμε ότι μπορούμε εναλλακτικά να έχουμε

$$\epsilon_4 = \inf_{t_1 < t < t_2} \frac{fv^{-2}(1,t) + v_t(1,t)}{(N + b\beta)v^{-b}(1,t) + b\beta} > 0$$

χωρίς τον περιορισμό  $N > \beta + 1$  στη χωρική  $N$ -διάστατη περίπτωση, διαλέγοντας όμως  $\lambda$  αρκετά μεγάλο, δηλαδή  $\lambda > \lambda^{**} \geq \lambda^*$ , έτσι ώστε

$$(4.85) \quad f(t) = \frac{\lambda}{\left(1 + \alpha N \omega_N \int_0^1 r^{N-1} v^{-1}(r,t) dr\right)^2} > -v_t(1,t)v^2(1,t) \quad \text{για } t \in (t_1, t_2),$$

η οποία εκτίμηση είναι πάντα δυνατή για μια κλασική (και συνεπώς αρκετά ομαλή) λύση  $u(r,t)$ . Επομένως, μπορούμε να ξαναπάρουμε το αποτέλεσμα του Λήμματος 5 ανεξάρτητα από τη διάσταση του χώρου  $N$ , αλλά για  $\lambda > \lambda^{**}$  ώστε να ικανοποιείται η σχέση (4.85). Κατά συνέπεια, στη συνέχεια όλα τα παραγόμενα αποτελέσματα απόσβεσης μπορούν εναλλακτικά να ληφθούν για  $\lambda$  αρκετά μεγάλο, ιδίως για  $\lambda > \lambda^{**}$ , αλλά χωρίς να επιβάλλονται περιορισμοί στη χωρική διάσταση.

**Θεώρημα 26.** Θεωρούμε την περίπτωση της ακτινικής συμμετρίας με φθίνοντα αρχικά δεδομένα  $u_0(r)$ . Υποθέτουμε επίσης ότι  $N > \beta + 1$ . Τότε για κάθε  $\lambda > \lambda^*$  η λύση του προβλήματος (4.66) παύει να υπάρχει και αποσβένει, σε πεπερασμένο χρόνο  $T_q < \infty$ .

*Απόδειξη.* Ας υποθέσουμε ότι για κάθε  $\lambda > \lambda^*$  το πρόβλημα (4.66) έχει ολική λύση.

Στη συνέχεια, βασιζόμενοι στις εκτιμήσεις (4.58) και (4.70) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία  $\{t_j\}_{j=1}^\infty$  με  $t_j \rightarrow \infty$  τέτοια ώστε

$$(4.86) \quad \lambda N \omega_N \int_0^1 r^{N-1} u_j (1 - u_j)^{-2} dr \leq C_3, \quad \text{για κάθε } t > 0,$$

όπου η σταθερά  $C_3$  είναι ανεξάρτητη από το  $j$ .

Τότε από την εκτίμηση (4.70) είναι εύκολα αντιληπτό ότι ισχύει η σχέση

$$(4.87) \quad \begin{aligned} N \omega_N \int_0^1 \frac{r^{N-1} dr}{(1 - u_j)^2} &= N \omega_N \int_0^1 \frac{r^{N-1} dr}{(1 - u_j)} + N \omega_N \int_0^1 \frac{r^{N-1} u_j dr}{(1 - u_j)^2} \\ &\leq (C_2 - 1) + \frac{C_3}{\lambda} := C_4 \end{aligned}$$

όπου η σταθερά  $C_4$  είναι ανεξάρτητη από το  $j$ .

Επιπλέον, λόγω της σχέσης (4.49) έχουμε

$$(4.88) \quad \|\nabla u_j\|_{L^2(B_1)}^2 \leq C_5 < \infty,$$

όπου η σταθερά  $C_5$  είναι πάλι ανεξάρτητη του  $j$ .

Περνώντας σε μια υποακολουθία, εάν αυτό είναι απαραίτητο, η σχέση (4.88) συνάγει την ύπαρξη μιας συνάρτησης  $w$  τέτοια ώστε

$$(4.89) \quad u_j \rightharpoonup w \quad \text{στο } H^1(B_1),$$

$$(4.90) \quad u_j \rightarrow w \quad \text{σχεδόν παντού στο } B_1,$$

καθώς  $j \rightarrow \infty$ . Για  $N \geq 2$  από την εκτίμηση (4.87) έχουμε ότι η συνάρτηση  $1/(1 - u_j)^2$  είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη και επιπλέον εφόσον

$$\frac{1}{(1 - u_j)^2} \rightarrow \frac{1}{(1 - w)^2}, \quad j \rightarrow \infty \quad \text{σχεδόν παντού στο } B_1,$$

εξαιτίας της σχέσης (4.90), τελικά συμπεραίνουμε ότι

$$(4.91) \quad \frac{1}{(1 - u_j)^2} \rightarrow \frac{1}{(1 - w)^2} \quad \text{καθώς } j \rightarrow \infty \quad \text{στον } L^1(B_1),$$

λόγω του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης. Ομοίως προκύπτει επίσης ότι

$$(4.92) \quad H(u_j) \rightarrow H(w) \quad \text{καθώς } j \rightarrow \infty \quad \text{στον } L^1(B_1).$$

Επιπρόσθετα πρέπει να σημειώσουμε ότι λόγω της εξίσωσης για το συναρτησιακό της ενέργειας (4.48), (βλ. επίσης [56]), λαμβάνουμε την ακόλουθη εκτίμηση

$$\int_{\tau}^{\infty} \int_{B_1} u_t^2(x, s) dx ds \leq C < \infty,$$

για μια σταθερά  $C$  ανεξάρτητη του  $\tau > 0$ , και έτσι έχουμε, ενδεχομένως για μια υπακολουθία  $t_j$  αν αυτό χρειάζεται, ότι

$$(4.93) \quad \|u_t(\cdot, t_j)\|_2^2 = \int_{B_1} u_t^2(x, t_j) dx \rightarrow 0 \quad \text{καθώς } j \rightarrow \infty.$$

Η ασθενής μορφή της εξίσωσης (weak formulation) (4.66) για την ακολουθία  $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$  μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$(4.94) \quad \int_{B_1} \frac{\partial u_j}{\partial t} \phi dx = - \int_{B_1} \nabla u_j \cdot \nabla \phi dx + \int_{\partial B_1} \frac{\partial u_j}{\partial \nu} \phi ds + \lambda H^{-1}(u_j) \int_{B_1} \phi (1 - u_j)^{-2} dx,$$

για κάθε  $\phi \in H^1(B_1)$ .

Επιπλέον για κάθε  $\phi \in W^{2,2}(B_1)$  με  $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} + \beta \phi = 0$ , στο  $\partial \Omega$ , η ταυτότητα *Green* δίνει

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_1} \frac{\partial u_j}{\partial \nu} \phi ds &= \int_{B_1} \nabla u_j \cdot \nabla \phi dx + \int_{B_1} (\Delta u_j) \phi dx \\ &= \int_{B_1} \nabla u_j \cdot \nabla \phi dx + \int_{B_1} u_j (\Delta \phi) dx \end{aligned}$$

και έτσι λόγω των ορίων (4.89), (4.90) και του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης προκύπτει ότι

$$(4.95) \quad \int_{\partial B_1} \frac{\partial u_j}{\partial \nu} \phi ds \rightarrow \int_{B_1} \nabla w \cdot \nabla \phi dx + \int_{B_1} w (\Delta \phi) dx = \int_{\partial B_1} \frac{\partial w}{\partial \nu} \phi ds,$$

αφού  $w \in H^1(B_1)$ .

Επιπλέον παίρνοντας το όριο καθώς  $j \rightarrow \infty$  στην εξίσωση (4.94), και σε συνδυασμό με τις σχέσεις (4.89), (4.91), (4.92), (4.93) και (4.95) προκύπτει ότι

$$- \int_{B_1} \nabla \phi \cdot \nabla w dx + \int_{\partial B_1} \phi \frac{\partial w}{\partial \nu} ds + \lambda \frac{\int_{B_1} \frac{\phi}{(1-w)^2} dx}{(1 + \int_{B_1} \frac{1}{1-w} dx)^2} = 0,$$

για κάθε  $\phi \in W^{2,2}(\Omega)$  που ικανοποιεί τη συνθήκη  $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} + \beta \phi = 0$  στο  $\partial \Omega$ .

Το τελευταίο, σύμφωνα με τον ορισμό 25, συνάγει ότι το  $w$  είναι μια ασθενής λύση πεπερασμένης ενέργειας του προβλήματος (4.66) που αντιστοιχεί στη παράμετρο  $\lambda > \lambda^*$  πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με το αποτέλεσμα της Πρότασης 5.

Για  $N = 1$ , χρησιμοποιώντας μια παρόμοια προσέγγιση και το Θεώρημα Τχνους, (βλ. [56, Θεώρημα 3.5] και Παράρτημα), παίρνουμε ότι η ακολουθία  $u_j$  συγκλίνει σε μια ασθενής λύση πεπερασμένης ενέργειας του προβλήματος (4.66) καταλήγοντας ξανά σε αντίφαση. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος.  $\square$

**Παρατήρηση 9.** Συγκεκριμένα, η απόσβεση που προβλέπει το Θεώρημα 26 είναι σημειακή απόσβεση και επιπλέον λόγω της σχέσης (4.69) προκύπτει ότι η λύση  $u(r, t)$  μπορεί να εμφανίζει ιδιομορφία (απόσβεση) μόνο στο σημείο  $r = 0$ .

#### 4.2γ' Απόσβεση σε πεπερασμένο χρόνο για μεγάλα αρχικά δεδομένα

Στη συνέχεια εξετάζουμε τη συμπεριφορά του προβλήματος (4.66) για μεγάλα αρχικά δεδομένα.

**Θεώρημα 27.** Για κάθε  $\lambda > 0$  και για  $N > \beta + 1$  μπορούμε να επιλέξουμε τα αρχικά δεδομένα  $u_0$  αρκετά κοντά στο 1 έτσι ώστε η λύση  $u$  του προβλήματος (4.66) να αποσβένει σε πεπερασμένο χρόνο  $T_q < \infty$ .

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με  $(\lambda_1, \phi)$  το πρώτο ιδιοζεύγος (*eigenpair*) του προβλήματος ιδιοτιμών:

$$-\Delta\phi_1 = \lambda_1\phi_1, x \in B_1, \quad \frac{\partial\phi_1}{\partial\nu} + \beta\phi_1 = 0, x \in \partial B_1,$$

και επιπλέον θεωρούμε ότι η ιδιοσυνάρτηση  $\phi$  είναι κανονικοποιημένη έτσι ώστε

$$\int_{B_1} \phi_1(x) dx = 1.$$

Ας υποθέσουμε ότι το πρόβλημα (4.66) έχει ολική ύπαρξη στο χρόνο και  $0 < u(x, t) < 1$  για κάθε  $(x, t) \in B_1 \times (0, \infty)$ .

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της εξίσωσης (4.66α) με  $\phi_1$  και ολοκληρώνοντας ως προς  $B_1$  τότε από την δεύτερη ταυτότητα του Green και το Λήμμα 5 συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{B_1} \phi_1 u dx &= \int_{B_1} \phi_1 \Delta_r u dx + \lambda \int_{B_1} \phi_1 (1-u)^{-2} (H(u))^{-2} dx \\ &= \int_{B_1} \Delta_r \phi_1 u dx + \int_{\partial B_1} \left( u \frac{\partial\phi_1}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \phi_1 \right) ds + \lambda \int_{B_1} \phi_1 (1-u)^{-2} (H(u))^{-2} dx \\ (4.96) \quad &= - \int_{B_1} \lambda_1 \phi_1 u dx + \frac{\lambda \int_{B_1} \phi_1 (1-u)^{-2} dx}{(H(u))^{-2}}. \end{aligned}$$

Θέτοντας  $A(t) := \int_{B_1} u \phi_1 dx$ , και εφαρμόζοντας την ανισότητα *Jensen* στην εξίσωση (4.96), προκύπτει η ακόλουθη διαφορική ανισότητα για το συναρτησιακό  $A$ ,

$$(4.97) \quad \frac{dA}{dt} \geq -\lambda_1 A(t) + \frac{\lambda}{C_2^2} (1-A(t))^{-2}, \quad \text{για κάθε } t > 0.$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε κατάλληλο  $\gamma \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε

$$\Psi(s) := \frac{\lambda}{C_2^2} (1-s)^{-2} - \lambda_1 s > 0 \quad \text{για όλα τα } s \in [\gamma, 1),$$

και κατάλληλο  $u_0$  τέτοιο ώστε  $A(0) = \int_{B_1} u_0 \phi_1 dx \geq \gamma$ . Τότε από την (4.97) συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{dA}{dt} \geq \Psi(A(t)) > 0 \quad \text{για κάθε } t > 0,$$

ή ολοκληρώνοντας ότι :

$$t \leq \int_{A(0)}^{A(t)} \frac{ds}{\Psi(s)} \leq \int_{A(0)}^1 \frac{ds}{\Psi(s)} < \infty.$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα έρχεται σε αντίθεση με την αρχική μας υπόθεση ότι το  $T = \infty$ , και ότι έχουμε ολική ύπαρξη στο χρόνο και το θεώρημα αποδεικνύεται.  $\square$

#### 4.2δ' Συμπεριφορά της λύσης κοντά στο χρόνο απόσβεσης

Στην τρέχουσα υποενότητα δίνουμε περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τη συμπεριφορά των λύσεων του προβλήματος (4.66) στη περίπτωση που η λύση αποσβένει και συγκεκριμένα εξετάζουμε την μορφή που παίρνει όταν πλησιάζει τον χρόνο απόσβεσης  $T_q$ .

Αρχικά μελετάμε τον ρυθμό απόσβεσης της λύσης. Σε αυτό το σημείο ας θυμηθούμε ότι αν μια λύση  $u(r, t)$  του προβλήματος (4.66) έχει φθίνοντα ακτινικά αρχικά δεδομένα  $u_0$ , τότε η λύση  $u$  είναι επίσης φθίνουσα συνάρτηση και παρουσιάζει ακτινική συμμετρία και επομένως

$$M(t) := \max_{x \in \widehat{B}_1} u(x, t) = u(0, t).$$

Το επόμενο αποτέλεσμα προσδιορίζει τον ρυθμό απόσβεσης της ιδιόμορφης λύσης  $u$  του προβλήματος (4.66).

**Θεώρημα 28.** *Εστω  $u(r, t)$  είναι η λύση απόσβεσης του προβλήματος (4.66). Τότε για  $N > \beta + 1$  υπάρχουν θετικές σταθερές  $\widehat{C}, \widetilde{C}$  ανεξάρτητες του  $t$  τέτοιες ώστε*

$$(4.98) \quad 1 - \widehat{C}(T_q - t)^{1/3} \leq M(t) \leq 1 - \widetilde{C}(T_q - t)^{1/3} \quad \text{για } 0 < t < T_q.$$

*Απόδειξη.* Αφού η  $M(t)$  είναι συνεχής συνάρτηση *Lipschitz* τότε από Θεώρημα *Rademacher* (βλέπε Παράρτημα), έχουμε ότι είναι και σχεδόν παντού διαφορίσιμη, (βλέπε [31, 52]). Επιπλέον, αφού η  $u$  επιτυγχάνει τη μέγιστη τιμή στο  $r = 0$  έχουμε  $\Delta_r u(0, t) \leq 0$  για όλα τα  $t \in (0, T_q)$ . Επιπρόσθετα, για κάθε  $t$  όπου η παράγωγος  $dM/dt$  υπάρχει, παίρνουμε

$$\frac{dM}{dt} \leq \lambda \frac{(1 - M(t))^{-2}}{\left(1 + \int_{B_1} \frac{1}{1-u} dx\right)^2} \leq \lambda \frac{(1 - M(t))^{-2}}{(1 + N\omega_N)^2} \quad \text{σχεδόν παντού για } t \in (0, T_q),$$

το οποίο δίνει:

$$\int_{M(t)}^1 (1-s)^2 ds \leq \lambda C(T_q - t),$$

για  $C = 1/(1 + N\omega_N)^2$ . Η παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι

$$(4.99) \quad M(t) \geq 1 - \widehat{C}(T_q - t)^{1/3} \quad \text{για } 0 < t < T_q,$$

με  $\widehat{C} = (3\lambda C)^{1/3}$ . Επιπλέον η ανισότητα (4.70) δείχνει ότι η συνάρτηση  $H(u)$  είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη και έτσι μέσω, της σχέσης (4.69) και από εκτιμήσεις ομαλότητας για παραβολικά προβλήματα στην περιοχή  $r \in (0, 1)$ , (βλέπε [62]), έχουμε ότι

$$(4.100) \quad \lim_{t \rightarrow T_q} u(r, t) = u(r, T_q) \quad \text{για κάθε } 0 < r < 1.$$

Η εκτίμηση (4.69) συνεπάγεται επίσης ότι

$$(1 - u)^{-1} \leq \overline{C}(k)r^{-k},$$

για  $k > \frac{2}{3}$ , και  $\overline{C}(k) = \frac{1}{C(k)}$  και έτσι από τη σχέση (4.100), και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης Lebesgue έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow T_q} \int_{B(0,1)} \frac{1}{1-u(x,t)} dx = \int_{B(0,1)} \frac{1}{1-u(x,T_q)} dx < \infty$$

και τελικά

$$\lim_{t \rightarrow T_q} (H(u))^2 = K < \infty.$$

Επομένως για  $0 < t - T_q \ll 1$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &\simeq \Delta u + \frac{\lambda}{K} \frac{1}{(1-u)^2}, \quad x \in B(0, 1), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) + \beta u(x, t) &= 0, \quad x \in \partial B(0, 1), \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Αλλά για το παραπάνω τοπικό πρόβλημα είναι γνωστό, (βλέπε [28, 70]), ότι

$$(4.101) \quad M(t) = u(0, t) \lesssim 1 - \widetilde{C}(T_q - t)^{1/3},$$

για κάποιο  $\widetilde{C} > 0$ .

Επομένως συνδυάζοντας τις ανισότητες (4.99) και (4.101) λαμβάνουμε την επιθυμητή εκτίμηση (4.98) □

Αξίζει να σημειωθεί ότι λόγω των ομοιόμορφων ορίων του μη τοπικού όρου  $(H(u))^2$  μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το μη τοπικό πρόβλημα (4.66) ως τοπικό και επομένως το προφίλ απόσβεσης γνωρίζουμε ότι θα έχει την ακόλουθη μορφή, (βλ. [28, 70])

$$(4.102) \quad 1 - u(r, T_q) \sim C^* \left[ \frac{|r|^2}{|\ln|r||} \right]^{1/3} \quad \text{για} \quad r \rightarrow 0^+,$$

για κάποια θετική σταθερά  $C^*$ . Για μια πιο αυστηρή προσέγγιση, η οποία είναι εκτός του σκοπού της τρέχουσας διατριβής, θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε παρόμοια επιχειρήματα όπως στις εργασίες [25, 36] για να πάρουμε την εκτίμηση (4.102) στην οποία εικάζεται ότι  $C^* = \lim_{t \rightarrow T_q} H(u(r, t))$ .

### 4.3 Αριθμητική μελέτη του προβλήματος

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε την αριθμητική μελέτη του προβλήματος (1) τόσο στην μονοδιάστατη όσο και στην διδιάστατη ακτινικά συμμετρική περίπτωση. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιείται μια αριθμητική μέθοδος μεταβλητού βήματος κατάλληλης για τη παρακολούθηση της συμπεριφοράς της λύσης κοντά σε μια ιδιομορφία, όπως αυτής της απόσβεσης στο πρόβλημα (1) (βλ. [14], [55]).

#### 4.3α' Μία χωρική διάσταση

Για τη μονοδιάστατη περίπτωση και για λόγους απλότητας, εκμεταλλευόμενοι τη συμμετρία της λύσης, θεωρούμε το πρόβλημα στο διάστημα  $[0, 1]$  (αντί του  $[-1, 1]$ ), έτσι ώστε οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα να είναι: συνθήκη *Neumann* στο σημείο  $x = 0$ ,  $u_x(0, t) = 0$ , και η προϋπάρχουσα συνθήκη *Robin* στο σημείο  $x = 1$ .

Αρχικά λαμβάνουμε μια διαμέριση  $M + 1$  σημείων στο διάστημα  $[0, 1]$ , με  $\xi_0 = 0, \xi_1 = \xi_0 + \Delta\xi, \dots, \xi_M = 1$ . Για  $u = u(x, t)$ , εισάγουμε μια βοηθητική συντεταγμένη  $\xi$  στο  $[0, 1]$  και πιο συγκεκριμένα θεωρούμε ότι τα σημεία του πλέγματος  $X_i$  είναι οι εικόνες των σημείων  $\xi_i$  κάτω από την απεικόνιση  $x(\xi, t)$  για την οποία ισχύει  $X_i(t) = x(i\Delta\xi, t)$ . από την τελευταία σχέση λαμβάνουμε για την προσέγγιση της λύσης,  $u_i(t) \simeq u(x_i(t), t)$  τη σχέση  $\frac{du(X_i(t), t)}{dt} = u_t(X_i, t) + u_x X_i'$ .

Επιπλέον, η απεικόνιση  $x(\xi, t)$  καθορίζεται από τη συνάρτηση  $\mathcal{M}(u)$  η οποία κατά μία έννοια ακολουθεί την εξέλιξη της ιδιομορφίας στη περίπτωση που έχουμε απόσβεση της λύσης του προβλήματος. Η συνάρτηση αυτή καθορίζεται από τις αναλλοίωτες κλίμακες του προβλήματος. Συγκεκριμένα, για την ημιγραμμική παραβολική εξίσωση

$$v_t = v_{xx} + \frac{\lambda}{v^2 \left[ 1 + \alpha \int_{-1}^1 1/v \, dx \right]^2},$$

όπου  $v = 1 - u$ , μια κατάλληλη τέτοια συνάρτηση παρακολούθησης (monitor function) πρέπει να είναι της μορφής  $\mathcal{M}(u) = |1 - u|^{-2}$  ή  $\mathcal{M}(v) = |v|^{-2}$ .

Χρειαζόμαστε επίσης μια εκ νέου αλλαγή κλίμακας του χρόνου της μορφής  $\frac{dt}{dt} = \frac{du}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}$  όπου  $\frac{dt}{d\tau} = g(u)$ , και  $g(u)$  είναι μια συνάρτηση που προσδιορίζει τον τρόπο με τον οποίο αλλάζει η χρονική κλίμακα καθώς η λύση προσεγγίζει την ιδιομορφία και η οποία δίνεται από τη σχέση  $g(u) = \frac{1}{\|\mathcal{M}(u)\|_\infty}$ .

Επιπλέον, η εξέλιξη του  $X_i(t)$  δίνεται από μια μερική διαφορική εξίσωση κινούμενου πλέγματος (moving mesh PDE) που είναι της μορφής

$$-x_{\tau\xi\xi} = \epsilon^{-1} g(u) (\mathcal{M}(u) x_\xi)_\xi.$$

Το  $\epsilon$  είναι μια μικρή παράμετρος που αντιπροσωπεύει τη χρονική κλίμακα. Έτσι, τελικά προκύπτει ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων για τις μεταβλητές για  $X_i$  και  $u_i$  το οποίο έχει τη μορφή

$$(4.103) \quad \begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= g(u), \\ u_\tau - x_\tau u_x &= g(u) \left( u_{xx} + \frac{\lambda}{(1-u)^2 (1 + \alpha \int_0^1 \frac{1}{1-u} dx)^2} \right), \\ -x_{\tau\xi\xi} &= \frac{g(u)}{\epsilon} (\mathcal{M}(u) x_\xi)_\xi. \end{aligned}$$



Εφαρμόζουμε μια διακριτοποίηση στο χώρο και έχουμε

$$\begin{aligned} u_x(X_i, \tau) \simeq \Delta_x u_i(\tau) &:= -\frac{u_{i+1}(\tau) - u_{i-1}(\tau)}{X_{i+1}(\tau) - X_{i-1}(\tau)}, \\ u_{xx}(X_i, \tau) \simeq \Delta_x^2 u_i(\tau) &:= \left( \frac{u_{i+1}(\tau) - u_i(\tau)}{X_{i+1}(\tau) - X_i(\tau)} - \frac{u_i(\tau) - u_{i-1}(\tau)}{X_i(\tau) - X_{i-1}(\tau)} \right) \frac{2}{X_{i+1}(\tau) - X_{i-1}(\tau)}, \\ x_{\xi\xi}(\xi_i, \tau) \simeq \Delta_\xi^2 x_i(\tau) &:= \frac{X_{i+1}(\tau) - 2X_i(\tau) + X_{i-1}(\tau)}{\delta\xi^2}, \\ (\mathcal{M}(u)x_\xi)_\xi \simeq \Delta_\xi(\mathcal{M}\Delta_\xi x) &:= -\left( \frac{\mathcal{M}_{i+1} + \mathcal{M}_i}{2} \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta\xi} - \frac{\mathcal{M}_i + \mathcal{M}_{i-1}}{2} \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta\xi} \right) \frac{1}{\Delta\xi}. \end{aligned}$$

Επιπλέον στο σημείο του συνόρου  $X_M = 1$  εφαρμόζουμε τη διακριτοποιημένη συνοριακή συνθήκη  $u_M = u_{M-1} - \beta u_M (X_M - X_{M-1})$ .

Η παραπάνω χωρική διακριτοποίηση οδηγεί σε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ΣΔΕ) της μορφής

$$A(\tau, y) \frac{dy}{d\tau} = b(\tau, y),$$

με το διάνυσμα  $y \in \mathbb{R}^{2n+1}$  να ορίζεται ως εξής :

$$y = (t(\tau), u_1(\tau), u_2(\tau), \dots, u_M(\tau), X_1(\tau), X_2(\tau), \dots, X_M(\tau)), = (t(\tau), u, X), \quad u, X \in \mathbb{R}^M,$$

όπου  $A \in \mathbb{R}^{2n+1, 2n+1}$  και έχει τη μορφή μπλοκ-πίνακα

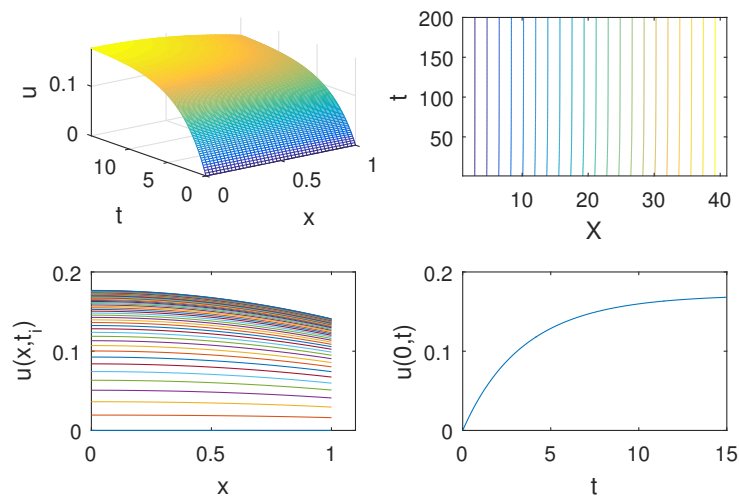
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I & -\Delta_x u \\ 0 & 0 & -\Delta_\xi^2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} t(\tau) \\ u \\ X \end{bmatrix}, \quad b = g(u) \begin{bmatrix} 1 \\ \Delta_x^2 u + \lambda \frac{1}{(1-u)^2(1+\alpha I(u))^2} \\ \Delta_\xi(\mathcal{M}\Delta_\xi x) \end{bmatrix},$$

όπου  $I(u)$  είναι μια προσέγγιση του  $\int_0^1 \frac{1}{1-u} dx$ , που παίρνουμε χρησιμοποιώντας την αριθμητική μέθοδο του Simpson. Για τη λύση του παραπάνω συστήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας τυπικός λύτης ΣΔΕ, όπως η ρουτίνα στο λογισμικό πακέτο matlab, «ode15i» η οποία χρησιμοποιεί ένα συνδυασμό οπισθοδρομικών μεθόδων τάξης ένα έως πέντε (στο χρόνο). Επιπλέον πρέπει να σημειωθεί ότι το παραπάνω αριθμητικό σχήμα που παρουσιάστηκε ελέγχθηκε ως προς τη σύγκλιση στο χώρο και διαπιστώθηκε η αναμενόμενη δεύτερης τάξης σύγκλιση του ως προς την  $L_2$  νόρμα.

**Τοπικό πρόβλημα** Αρχικά παρουσιάζουμε μια προσομοίωση για το τοπικό πρόβλημα (2.5α'), δηλαδή το πρόβλημα (1) για  $\alpha = 0$ . Στο σχήμα (4.3) παρουσιάζονται ορισμένα αριθμητικά πειράματα για την περίπτωση όπου υπάρχει ολική λύση στο πρόβλημα και άρα για αρκετά μικρό  $\lambda$  και αρχικά δεδομένα. Στο πρώτο από αυτά τα γραφήματα (επάνω αριστερά) σχεδιάζουμε τη λύση ως προς το χώρο και το χρόνο. Στο δεύτερο (πάνω δεξιά) σχεδιάζουμε το κινούμενο πλέγμα  $X(i, t)$  ως προς τον χρόνο, ενώ στο τρίτο (κάτω αριστερά) παρουσιάζεται μια ακολουθία προφίλ της λύσης ( $u(x, t_i)$ ) ως προς το χώρο για διάφορα χρονικά βήματα  $t_i$ . Τέλος, στο τέταρτο γράφημα σχεδιάζουμε το μέγιστο της λύσης  $u(0, t)$  έναντι του χρόνου. Το τελευταίο γράφημα υποδεικνύει τη σύγκλιση της λύσης προς μια σταθερή κατάσταση. Η αρχική συνθήκη εδώ, όπως και στις υπόλοιπες προσομοιώσεις, που ακολουθούν είναι η μηδενική,  $u_0(x) = 0$ . Επίσης, οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν εδώ ήταν:  $\lambda = 0, 05$ ,  $t \in [0, T_f]$ ,  $T_f = 40$ ,  $M = 141$ .

Στη συνέχεια στο σχήμα 4.4 παρουσιάζεται μια προσομοίωση για τη περίπτωση όπου η λύση καύει να υπάρχει, δηλαδή αποσβένει σε πεπερασμένο χρόνο. Και πάλι στο πρώτο από αυτά τα γραφήματα (πάνω αριστερά) σχεδιάζουμε τη λύση ως προς στο χώρο και στο χρόνο. Στο δεύτερο (πάνω δεξιά) σχεδιάζουμε το κινούμενο πλέγμα  $X(i, t)$  με το χρόνο. Εδώ η κίνηση του  $X_i$  καταγράφει την παρατηρούμενη ιδιομορφία, δηλαδή την απόσβεση σε πεπερασμένο χρόνο. Στο τρίτο (κάτω αριστερά) παρουσιάζεται μια ακολουθία προφίλ ως προς το χώρο της λύσης ( $u(x, t_i)$ ) για διάφορα χρονικά βήματα  $t_i$ . Μπορούμε να παρατηρήσουμε την αύξηση με το χρόνο των προφίλ της λύσης. Τέλος στο τέταρτο γράφημα καταγράφεται το μέγιστο της λύσης  $u(0, t)$  ως προς το χρόνο από το οποίο αναδεικνύεται η περίπτωση της απόσβεσης. Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι ίδιες όπως στο σχήμα 4.3 αλλά με  $\lambda = 1$ .

Στο επόμενο Σχήμα, 4.5 σχεδιάζουμε τα προφίλ του μέγιστου της λύσης,  $u(0, t)$  έναντι του χρόνου, για διάφορα  $\lambda$  και ειδικότερα για  $\lambda = .7, .8, .9, 1$ . Παρατηρούμε ότι με την αύξηση της τιμής της παραμέτρου  $\lambda$  ο χρόνος απόσβεσης μειώνεται όπως αναμένεται.



Σχήμα 4.3: Μορφή της λύσης και διάφορα προφίλ του τοπικού προβλήματος για  $\lambda = 0.05$ ,  $\beta = 1$ .

**Μη τοπικό πρόβλημα** Παρόμοια σειρά προσομοιώσεων παρουσιάζεται και για την περίπτωση  $\alpha = 1$  ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι, εκτός εάν αναφέρεται διαφορετικά, διατηρούνται οι ίδιες όπως στο πείραμα του Σχήματος 4.3. Στο σχήμα 4.6 και για  $\lambda = 0.5$  απεικονίζεται η σύγκλιση της λύσης προς μία σταθερή κατάσταση.

Σε ένα παρόμοιο σύνολο γραφημάτων, βλέπε Σχήμα 4.7 και για  $\lambda = 3$ , παρουσιάζουμε τη συμπεριφορά της λύσης στη περίπτωση που έχουμε απόσβεση.

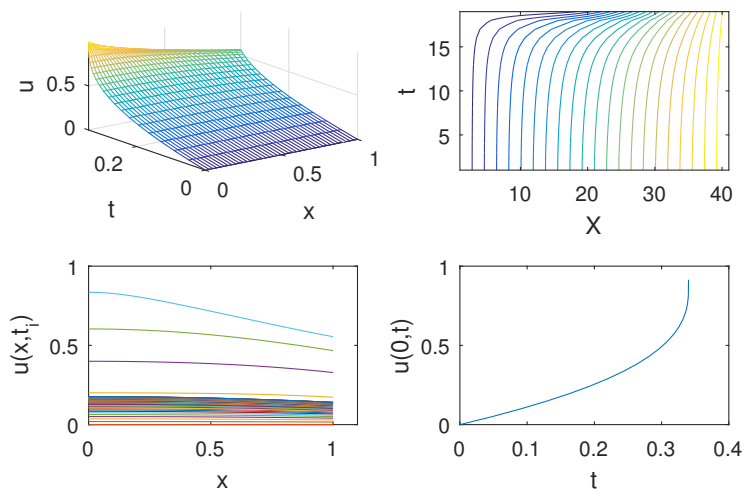
Επιπλέον στο Σχήμα 4.8 μπορούμε να παρατηρήσουμε την εξέλιξη του χρόνου απόσβεσης και μεταβάλλουμε τη τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ . Παρατηρούμε ότι η αύξηση της παραμέτρου  $\lambda$  έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση του χρόνου απόσβεσης. Οι τιμές της παραμέτρου που επιλέξαμε είναι  $\lambda = 2.5, 3, 3.5, 4$ . Στη συνέχεια στο Σχήμα 4.9 (α) σχεδιάζουμε μια σειρά γραφημάτων ως προς το χρόνο για το μέγιστο της λύσης, καθώς η μη τοπική παράμετρος  $\alpha$  μεταβάλλεται. Είναι εύκολο να φανεί ότι μειώνοντας το  $\alpha$  ο χρόνος απόσβεσης μειώνεται επίσης. Η παράμετρος  $\alpha$  μειώνεται από 1 στην τιμή 0 με βήμα 0.1 ενώ η παράμετρος  $\lambda$  διατηρείται σταθερή και ίση με  $\lambda = 2$ .

Η επίδραση της παραμέτρου της συνοριακής συνθήκης  $\beta$  μελετάται στο Σχήμα 4.10 (α). Πράγματι, όπως θα περίμενε κάποιος, φαίνεται ότι με την αύξηση του  $\beta$  το πρόβλημα τείνει να συμπεριφέρεται ασυμπτωτικά παρόμοια με το πρόβλημα *Dirichlet*. Η μεταβολή του χρόνου απόσβεσης  $t^*$  του μη τοπικού προβλήματος απεικονίζεται σε μία σειρά γραφικών παραστάσεων στα Σχήματα 4.9 (β) και 4.10 (β). Στο πρώτο από αυτά, παρουσιάζουμε ένα γράφημα για τη συνάρτηση  $t^*(\alpha)$ , δηλαδή τη μεταβολή του χρόνου απόσβεσης σε σχέση με τη παράμετρο  $\alpha$  του προβλήματος, ενώ στο Σχήμα 4.10 (β), ένα γράφημα αντίστοιχα για τη συνάρτηση  $t^*(\beta)$  όπως αυτά προκύπτουν από τις αριθμητικές προσομοιώσεις του προβλήματος. Και στις δύο περιπτώσεις πήραμε  $\lambda = 2$ .

#### 4.3β' Περίπτωση ακτινικής συμμετρίας

Όπως έχει ήδη επισημανθεί, το πρόβλημα δύο χωρικών διαστάσεων στην ακτινικά συμμετρική περίπτωση είναι πολύ ενδιαφέρον από την άποψη των εφαρμογών και για αυτό τον λόγο παρουσιάζουμε μια αριθμητική λύση του προβλήματος. Για το σκοπό αυτό το προαναφερθέν αριθμητικό σχήμα προσαρμοζόμενου μεταβλητού βήματος και συγκεκριμένα η εξίσωση (4.103) μπορεί να τροποποιηθεί κατάλληλα χρησιμοποιώντας τον όρο  $u_{xx} + (N-1)r^{-1}u_x$  στη θέση του όρου  $u_{xx}$ .

Αρχικά λύνουμε το τοπικό πρόβλημα, δηλαδή το πρόβλημα (4.66) για  $\alpha = 0$  και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.11. Σε αυτή τη προσομοίωση πήραμε  $\beta = 1$ ,  $\lambda = 0,05$  και παρατηρούμε ότι η λύση συγκλίνει προς μια σταθερή κατάσταση. Στο Σχήμα 4.12 παρουσιάζουμε μια ανάλογη προσομοίωση για το μη τοπικό πρόβλημα. Σε αυτή την περίπτωση οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήσαμε είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ , και  $\lambda = 0.2$  και παρατηρούμε ότι η λύση αποσβένει σε πεπερασμένο χρόνο.



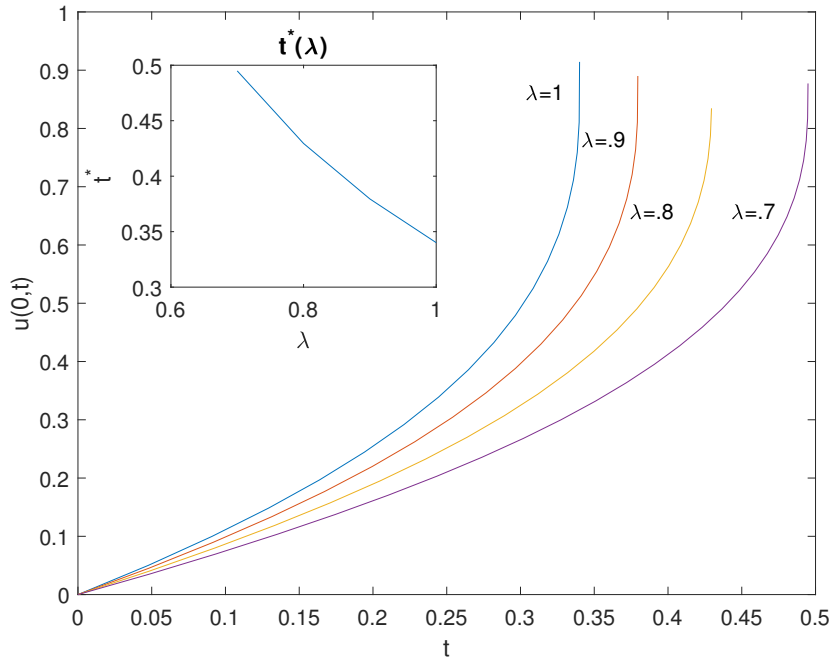
Σχήμα 4.4: Μορφή της λύσης και διάφορα προφίλ της του τοπικού προβλήματος στην περίπτωση απόσβεσης για  $\lambda = 1$ , και  $\beta = 1$ .

## Συμπεράσματα κεφαλαίου

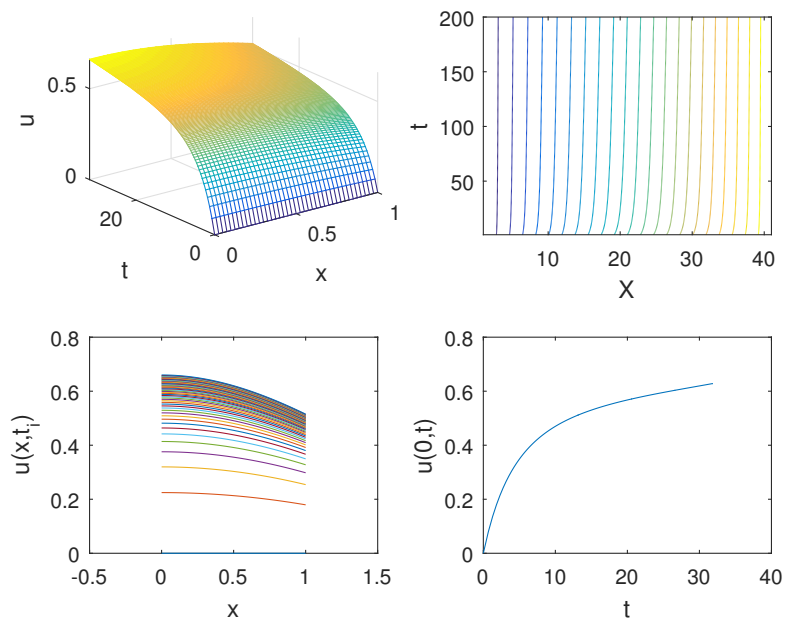
Στο τρέχον κεφάλαιο διερευνήσαμε το μη τοπικό παραβολικό πρόβλημα με τις συνοριακές συνθήκες Robin που σχετίζεται με τη λειτουργία ορισμένων εξιδανικευμένων συσκευών τα MEMS. Στο πρώτο μέρος παρουσιάστηκε μια διεξοδική διερεύνηση του στάσιμου προβλήματος και πήραμε ορισμένες εκτιμήσεις για την κρίσιμη τιμή, που είναι η παράμετρος ελέγχου του μοντέλου. Συγκεκριμένα, για τη  $N$ -διάστατη περίπτωση, για  $N > 1$ , με σκοπό να πάρουμε εκτιμήσεις για την κρίσιμη τιμή της παραμέτρου του προβλήματος έπρεπε να δείξουμε, μια ταυτότητα τύπου Pohozaev για συνοριακές συνθήκες Robin. Από όσο γνωρίζουμε, κάποιο παρόμοιο αποτέλεσμα δεν υπάρχει διαθέσιμο στη βιβλιογραφία.

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου, μελετάμε τα αποτελέσματα ύπαρξης και μοναδικότητας μαζί με τη συμπεριφορά του εξαρτώμενου από το χρόνο προβλήματος. Συγκεκριμένα, εστιάζουμε στην έρευνα του φαινομένου της απόσβεσης (δηλ. του λεγόμενου *touching down* or *quenching* στη βιβλιογραφία των MEMS). Εξετάζουμε αρχικά τη συμπεριφορά απόσβεσης σε ένα γενικό χωρίο, ενώ μετέπειτα για να βρούμε ένα βέλτιστο αποτέλεσμα απόσβεσης περιοριζόμαστε σε μια ακτινικά συμμετρική περίπτωση.

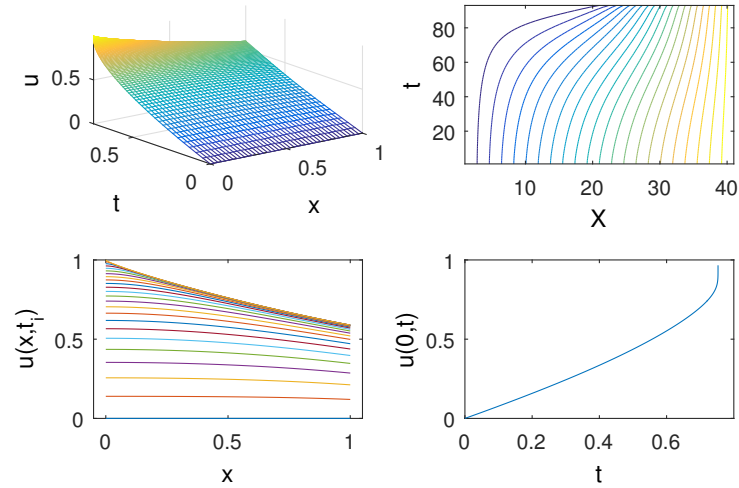
Τέλος, κλείνουμε το παρόν κεφάλαιο με την εφαρμογή μιας αριθμητικής μεθόδου προσαρμοζόμενου βήματος, βασισμένη στην εργασία [14], για την επίλυση του χρονοεξαρτώμενου προβλήματος. Πραγματοποιούμε μια σειρά αριθμητικών πειραμάτων, επαληθεύοντας τα ληφθέντα αναλυτικά αποτελέσματα καθώς και αναδεικνύοντας ποιοτικά χαρακτηριστικά του μη τοπικού προβλήματος (1) που δεν προκύπτουν από την αναλυτική μας προσέγγιση. Επιπλέον, εκτελούνται ορισμένα περαιτέρω αριθμητικά πειράματα για τον προσδιορισμό του προφίλ απόσβεσης της λύσης του προβλήματος στην ακτινικά συμμετρική περίπτωση.



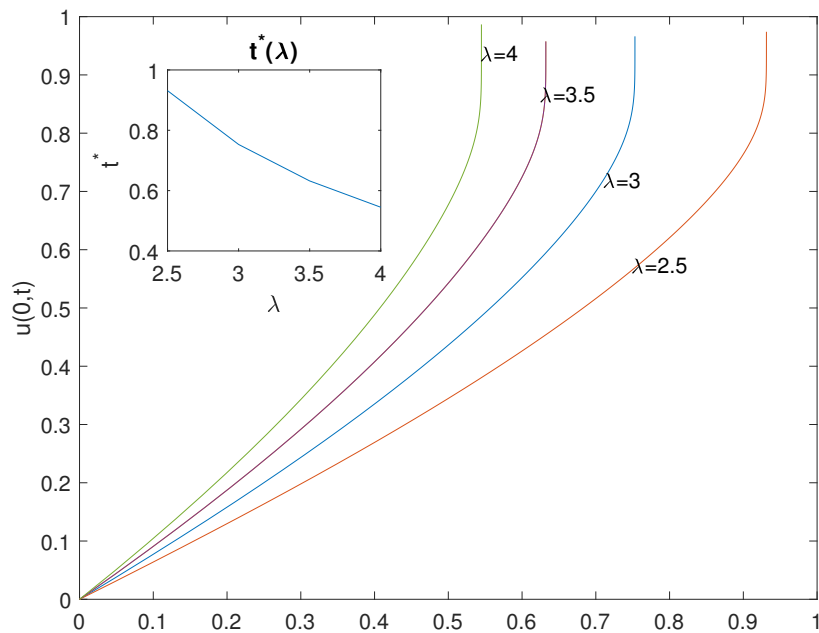
Σχήμα 4.5: Μορφή του μέγιστου ως προς το χώρο της λύσης έναντι του χρόνου για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  για το τοπικό πρόβλημα και για  $\beta = 1$ .



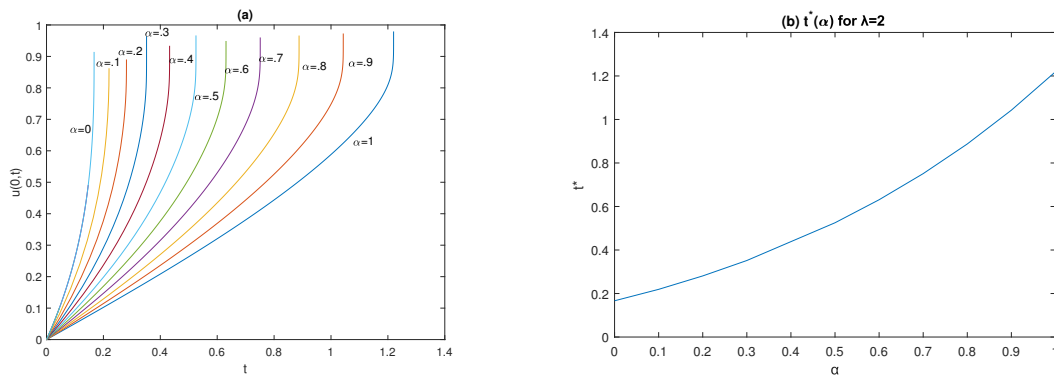
Σχήμα 4.6: Μορφή της λύσης και διάφορα προφίλ της του μη τοπικού προβλήματος για  $\lambda = 0.5$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ .



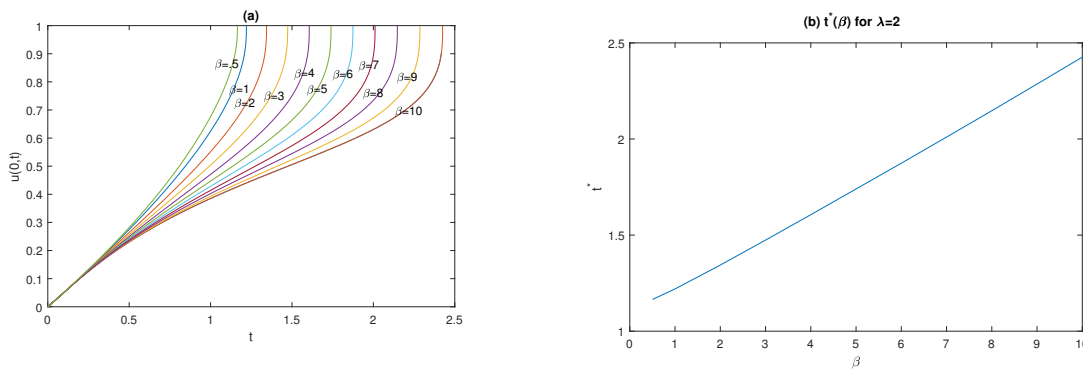
Σχήμα 4.7: Μορφή της λύσης και διάφορα προφίλ του μη τοπικού προβλήματος για  $\lambda = 3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ .



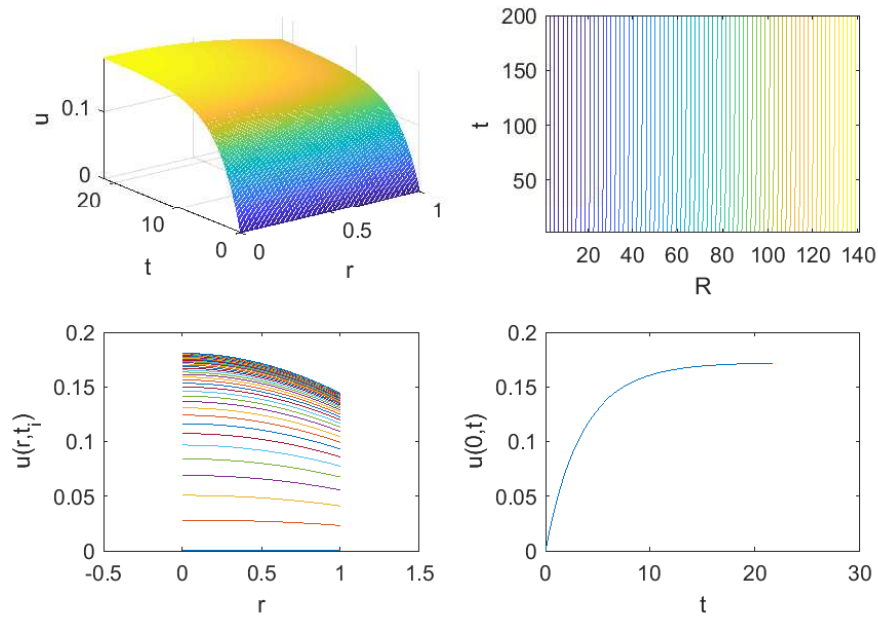
Σχήμα 4.8: Μορφή της μέγιστης λύσης έναντι του χρόνου για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  και με  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ .



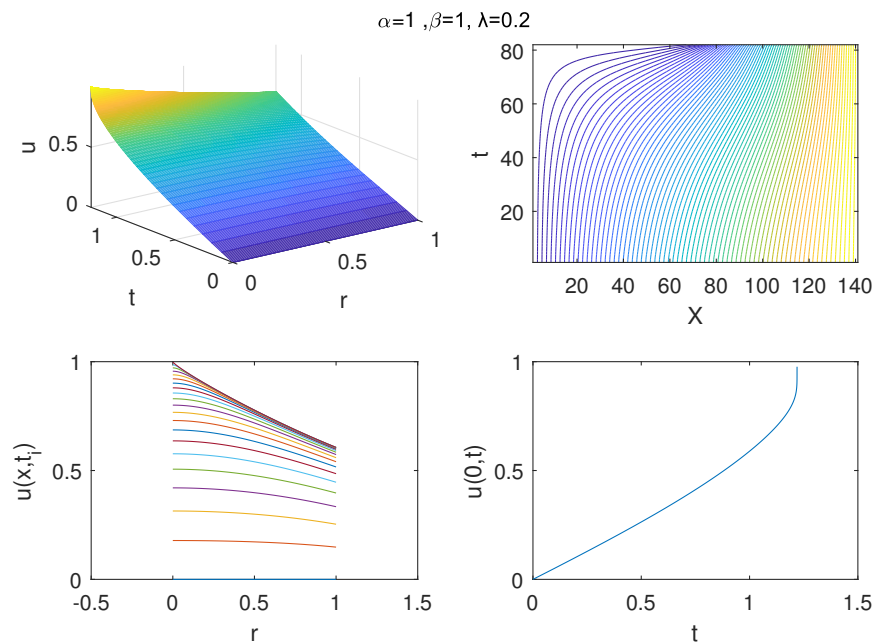
Σχήμα 4.9: (α) Μορφή του μέγιστου ως προς το χώρο της λύσης έναντι χρόνου για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\alpha$  για  $\lambda = 2$  και  $\beta = 1$ . (β) Μεταβολή του χρόνου απόσβεσης του μη τοπικού προβλήματος σε σχέση με την παράμετρο  $\alpha$ .



Σχήμα 4.10: (α) Μορφή του μέγιστου της λύσης έναντι του χρόνου για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\beta$  και για  $\lambda$  και  $\alpha = 1$ . (β) Μεταβολή του χρόνου απόσβεσης του μη τοπικού προβλήματος σε σχέση με την παράμετρο  $\beta$ .



Σχήμα 4.11: Μορφή της λύσης και διάφορα προφίλ της του τοπικού προβλήματος για την ακτινικά συμμετρική περίπτωση για  $\lambda = 0.05$  και  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ .



Σχήμα 4.12: Μορφή της λύσης και διάφορα προφίλ της του μη τοπικού προβλήματος για την ακτινικά συμμετρική περίπτωση για  $\lambda = 0.2$  και  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ .

## Κεφάλαιο 5

# Επίπτωση του θορύβου στην απόσβεση μαθηματικών στοχαστικών μοντέλων που εμφανίζονται στην τεχνολογία των MEMS

Στο τρέχον κεφάλαιο μελετάμε ένα στοχαστικό παραβολικό πρόβλημα. Το υποκείμενο πρόβλημα στην πραγματικότητα βασίζεται στη μελέτη της εξιδανικευμένης ηλεκτρικά ενεργοποιημένης συσκευής MEMS (Micro-Electro-Mechanical System) στην περίπτωση τυχαίων αυξομειώσεων της διαφοράς δυναμικού που έχει η συσκευή. Αρχικά παρουσιάζουμε το μαθηματικό μοντέλο με τις κατάλληλες αλλαγές σε σχέση με το Κεφάλαιο 2 και παρουσιάζουμε κάποια αποτελέσματα τοπικής ύπαρξης. Στη συνέχεια, για ορισμένες συγκεκριμένες εκδοχές του μοντέλου, σχετικά με τις συνοριακές συνθήκες, αποδεικνύουμε αποτελέσματα απόσβεσης καθώς και εκτιμήσεις της πιθανότητας να εμφανιστεί μια τέτοια ιδιάζουσα κατάσταση.

Στο τέλος αυτής της ενότητας ακολουθεί μια πρόσθετη αριθμητική μελέτη του προβλήματος σε μία διάσταση, διερευνώντας περαιτέρω το πρόβλημα όσον αφορά τη συμπεριφορά απόσβεσής του.

Επιπλέον παρουσιάζουμε και μια εισαγωγική μελέτη για την δυνατότητα εμφάνισης απόσβεσης ενός στοχαστικού προβλήματος εισάγοντας την έννοια της κλασματικής κίνησης Brown στον θόρυβο του μοντέλου.

### 5.1 Παραγωγή Στοχαστικού Μοντέλου

Ο κύριος στόχος μας για τη διερεύνηση του προβλήματος (3) είναι η στενή σχέση του με τη λειτουργία ορισμένων ηλεκτροστατικά ενεργοποιήσιμων MEMS.

Όπως και στο Κεφάλαιο 2 για την παραγωγή του βασικού μας μοντέλου έχουμε ότι όταν υπάρχει πιθανή διαφορά δυναμικού  $V$  μεταξύ της ελαστικής μεμβράνης και της άκαμπτης πλάκας γείωσης, τότε παρατηρείται παραμόρφωση της μεμβράνης προς την πλάκα. Υποθέτοντας τώρα ότι το πλάτος  $d$  του κενού, μεταξύ της μεμβράνης και της κάτω πλάκας, είναι μικρό σε σύγκριση με το μήκος της συσκευής  $L$ , η παραμόρφωση της ελαστικής μεμβράνης  $u$ , μετά από κατάλληλη κανονικοποίηση, μπορεί να περιγραφεί από την παρακάτω αδιάστατη εξίσωση

$$(5.1) \quad u_t = \Delta u + \frac{\tilde{\lambda} h(x, t)}{(1 - u)^2}, \quad x \in \Omega, t > 0,$$

(βλέπε [59, 79, 81]). Ο όρος  $h(x, t)$  περιγράφει τις διάφορες διηλεκτρικές ιδιότητες της μεμβράνης και για ορισμένα ελαστικά υλικά μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι σταθερός· για απλότητα, αρχικά θεωρούμε ότι  $h(x, t) \equiv 1$ , αν και η γενική περίπτωση για  $h(x, t) \neq 0$  εξετάζεται στην Ενότητα 5.2. Εκτός αυτού, η παράμετρος  $\lambda$  η οποία εμφανίζεται στην εξίσωση (5.1) ισούται με



$$\tilde{\lambda} = \frac{V^2 L^2 \varepsilon_0}{2T\ell^3},$$

και είναι στην πραγματικότητα η παράμετρος ελέγχου (tuning) της συσκευής MEMS που θεωρούμε. Υπενθυμίζουμε ότι με  $T$  συμβολίζουμε την ένταση της ελαστικής μεμβράνης, ενώ με  $\ell$  είναι το χαρακτηριστικό πλάτος του κενού μεταξύ της μεμβράνης και της σταθερής πλάκας γείωσης (ηλεκτρόδιο), ενώ  $\varepsilon_0$  είναι η διηλεκτρική σταθερά του κενού. Οι σχεδιαστές-μηχανικοί των MEMS ενδιαφέρονται να εντοπίσουν υπό ποιες συνθήκες η ελαστική μεμβράνη θα μπορούσε να αγγίξει την άκαμπτη πλάκα. Αυτό το φαινόμενο όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 2 ονομάζεται *touching down* και μπορεί να οδηγήσει στην καταστροφή της συσκευής MEMS. Το φαινόμενο του *touching down* μπορεί να περιγραφεί μέσω του μοντέλου (5.1) και λαμβάνει χώρα όταν η παραμόρφωση  $u$  φτάσει την τιμή 1: μια τέτοια κατάσταση όπως έχουμε αναφέρει στη μαθηματική βιβλιογραφία είναι γνωστή ως απόσβεση.

Οι πειραματικές παρατηρήσεις, σε κάποιες περιπτώσεις (βλ. [98]), δείχνουν σε αρκετές περιπτώσεις μια σημαντική αβεβαιότητα σχετικά με τις τιμές των  $V$  και  $T$ . Ειδικότερα, θεωρώντας ότι η τάση  $V$  κυμαίνεται γύρω από μια μέση τιμή  $V_0$  (που αντιστοιχεί σε κάποιο  $\lambda > 0$ ) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε για τη παράμετρο  $\tilde{\lambda}$  την εξής τη μορφή  $\tilde{\lambda} = \lambda + \sigma \eta(x, t)$  όπου  $\sigma > 0$  είναι ένας συντελεστής μέτρησης της έντασης του πλάτους του θορύβου  $\eta(x, t)$ . Φυσικά, ο συντελεστής  $\sigma$  εξαρτάται από την παραμόρφωση  $u$  (δηλαδή  $\sigma \equiv \sigma(u)$ ), ενώ μια ρεαλιστική επιλογή για το θόρυβο  $\eta(x, t)$  είναι να έχει τη μορφή λευκού θορύβου (white noise), δηλαδή  $\eta(x, t) = \partial_t W(x, t)$ , και άρα τελικά  $\tilde{\lambda} = \lambda + \sigma(u)\partial_t W(x, t)$ . Από την άποψη των εφαρμογών, είναι ενδιαφέρον να διερευνηθεί ο αντίκτυπος της αβεβαιότητας στο φαινόμενο της πτώσης τάσης. Κατά συνέπεια, θα ήταν λογικό να επιλέξουμε τον συντελεστή διάχυσης  $\sigma(u)$  ως δύναμη της διαφοράς  $1 - u$ , δηλαδή  $\sigma(u) = \kappa(1 - u)^\theta$ , όπου  $\kappa$  μια θετική σταθερά επαρκώς μικρή έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η θετικότητα του  $\lambda$ . Τώρα επιλέγοντας  $\theta = 3$  έχουμε

$$\frac{\tilde{\lambda}}{(1 - u)^2} = \frac{\lambda}{(1 - u)^2} + \kappa(1 - u)\partial_t W(x, t),$$

και παίρνουμε το πρόβλημα (3α'). Πρέπει να σημειωθεί ότι η επιλογή  $\theta = 3$  οδηγεί σε έναν όρο διάχυσης γραμμικού τύπου, όπου η θεωρία της τοπικής ύπαρξης είναι καλά εδραιωμένη για μια γενική μη γραμμικότητα Lipschitz, βλέπε [17, 60] και [57] για τη μη γραμμική μη Lipschitz συνάρτηση  $(1 - u)^{-2}$ . Για την περίπτωση ενός μοντέλου με γενικό όρο διάχυσης  $\sigma(u)$ , κάποια αποτελέσματα έχουν παρουσιαστεί στην εργασία [57]. Στη συνέχεια, σε περίπτωση που τα δύο άκρα της μεμβράνης είναι συνδεδεμένα με ένα στήριγμα που ενδεχομένως μπορεί να έχει και συμπεριφορά ελατηρίου [23, 98] όπως αναλύθηκε στη παράγραφο 2 στο πρώτο μέρος, οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες για το πρόβλημα είναι αυτές της μορφής (3β') ενώ το πρόβλημα πρέπει να συμπληρωθεί και με τις αντίστοιχες αρχικές συνθήκες (3γ').

Το μαθηματικό μοντέλο (3), ως στοχαστική διαταραχή του προβλήματος (5.1), εισάγεται για να εντοπίσει πιθανές καταστροφές λόγω της αβεβαιότητας των μετρήσεων των παραμέτρων του συστήματος MEMS. Έτσι, υπό αυτές τις συνθήκες και προϋποθέσεις μπορεί να θεωρηθεί πιο ρεαλιστικό σε σύγκριση με το πρόβλημα (5.1).

### 5.1α' Ορισμοί

Η τρέχουσα ενότητα είναι αφιερωμένη στην εισαγωγή των κύριων μαθηματικών εννοιών και εργαλείων από την περιοχή του στοχαστικού λογισμού που θα χρησιμοποιηθούν σε ολόκληρο το κεφάλαιο. από δω και πέρα, θα συμβολίζουμε με  $C, K$  θετικές σταθερές των οποίων οι τιμές ενδέχεται να αλλάζουν.

Θεωρούμε τον πλήρη χώρο πιθανότητας  $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}\}$  με διήθηση  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ . Έστω ο χώρος  $H := L^2(\Omega)$  και  $Q \in \mathcal{L}_1(H)$  είναι ένας γραμμικός μη αρνητικά ορισμένος και συμμετρικός τελεστής ο οποίος έχει μια ορθογώνια βάση  $\chi_j(x) \in H, j = 1, 2, 3, \dots$  ιδιοσυναρτήσεων με αντίστοιχες ιδιοτιμές  $\gamma_j \geq 0, j = 1, 2, 3, \dots$  έτσι ώστε  $\text{Tr}(Q) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j < \infty$ , (δηλαδή, το  $Q$  είναι κλάση ιχνών (trace class)). Η διαδικασία  $W(\cdot, t)$  είναι μια διαδικασία  $Q$  - Wiener αν και μόνο αν

$$(5.2) \quad W(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{1/2} \chi_j(x) \beta_j(t), \quad \text{σχεδόν βέβαια (σ.β.)},$$

όπου  $\beta_j(t)$  είναι ανεξάρτητα και εκ ταυτότητας καταναμημένα (*iid*)  $\mathcal{F}_t$  - κινήσεις Brown και η σειρά συγκλίνει στο χώρο  $L^2(\Omega, H)$ , (βλ. [16]). Αξίζει να σημειωθεί ότι οι ιδιοσυναρτήσεις  $\{\chi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$  μπορεί να διαφέρουν

από τις ιδιοσυναρτήσεις  $\{\phi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$  του ελλειπτικού τελεστή  $A = -\Delta : \mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset H \rightarrow H$ , που είναι αυτοσυζηγής, θετικά ορισμένος με συμπαγή αντίστροφο. Ο τελεστής κλάσης ιχνών  $Q$  είναι επίσης τελεστής Hilbert-Schmidt και επιπλέον  $Q \in \mathcal{L}_2(H)$ . Για έναν τέτοιο τελεστή  $Q \in \mathcal{L}_2(H)$  με  $Tr(Q) < \infty$ , υπάρχει ένας πυρήνας  $q(x, y)$  έτσι ώστε

$$(Qu)(x) := \int_{\Omega} q(x, y)u(y) dy, \quad \text{για κάθε } x \in \Omega, u \in H,$$

(βλ. [16, σελ. 42-43] και [67, Ορισμός 1.64]). Ο πυρήνας  $q(x, y)$  ονομάζεται επίσης συνάρτηση συνδιακύμανσης της διαδικασίας  $Q$ -Wiener  $W(x, t)$ .

Έστω  $X$  είναι χώρος Banach ορισμένος με τη νόρμα  $\|\cdot\|_X$  τότε ορίζουμε τον ακόλουθο χώρο Hilbert

$$L_2^0(H; X) = \left\{ \pi \in L(H, X) : \sum_{j=1}^{\infty} \|\pi Q^{1/2}(\phi_j)\|_X^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \|\pi(\phi_j)\|_X^2 < \infty \right\},$$

όπου  $L(H, X)$  συμβολίζουμε τον χώρο των φραγμένων τελεστών από τον χώρο  $H$  στο χώρο  $X$ . Έστω  $L_2^0(H; X)$  είναι εφοδιασμένο με τη νόρμα  $\|\pi\|_{L_2^0} = \left( \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \|\pi(\phi_j)\|_X^2 \right)^{1/2}$ . Για  $\Psi : [0, T] \rightarrow L_2^0(H, X)$ , το στοχαστικό ολοκλήρωμα  $\int_0^T \Psi(t) dW(t)$  είναι καλά ορισμένο, (βλ. [17]).

### 5.1β' Τοπική ύπαρξη της λύσης του Στοχαστικού Μοντέλου

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζουμε αποτελέσματα τοπικής ύπαρξης και μοναδικότητας.

Το πρόβλημα που εξετάζουμε είναι το ακόλουθο:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{\lambda}{(1-u)^2} + \kappa(1-u)\partial_t W(x, t), \quad \text{στο } Q_T := \Omega \times (0, T), T > 0,$$

$$\mathcal{B}u = \beta_c, \quad \text{στο } \Gamma_T := \partial\Omega \times (0, T),$$

$$0 \leq u(x, 0) = u_0(x) < 1, \quad x \in \Omega.$$

Αυτό μπορεί εναλλακτικά να γραφεί με τη μορφή του ακόλουθου προβλήματος *Itô*

$$(5.4\alpha') \quad du_t = (\Delta u_t + \lambda f(u_t)) dt + \sigma(u_t) dW_t, \quad \text{στο } Q_T,$$

$$(5.4\beta') \quad 0 \leq u_0 < 1, \quad \text{σχεδόν βέβαια (σ.β.),}$$

όπου  $f(u) := (1-u)^{-2}$ ,  $\sigma(u) := \kappa(1-u)$  και ο θόρυβος  $W$  ορίζεται από τη σχέση (5.2).

Σημειώνουμε ότι, η συνάρτηση  $\sigma : H \rightarrow \mathcal{L}_0^2$ , όπου  $\mathcal{L}_0^2$  συμβολίζουμε το σύνολο των γραμμικών τελεστών  $\mathcal{J} : H \rightarrow H$  εφοδιασμένο με τη νόρμα

$$\|\mathcal{J}\|_{\mathcal{L}_0^2}^2 := \left( \sum_{j=1}^{\infty} \|\mathcal{J}Q^{1/2}\xi_j\|_2^2 \right) < \infty,$$

ικανοποιεί την (ολική) συνθήκη Lipschitz ενώ μπορεί να ελεγχθεί ότι η συνάρτηση  $f : H \rightarrow H$ , ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz, μόνο τοπικά. Επιπλέον η συνάρτηση  $u_t = u(\cdot, t)$  μπορεί να ερμηνευθεί ως μια προβλέψιμη στοχαστική διαδικασία αξίας  $H$ . Στη συνέχεια υπενθυμίζουμε ότι  $A = -\Delta : \mathcal{D}(A) = W^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega) \subset H \rightarrow H$  και ο τελεστής  $-A$  είναι γεννήτορας της αναλυτικής ημιομάδας  $\mathcal{G}(t) = e^{-tA}$  στο χώρο  $H$ .

Εάν θέσουμε  $z = 1 - u$ , όπου  $u$  είναι η λύση του προβλήματος (3), τότε το  $z$  ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα

$$(5.5\alpha') \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \Delta z - \frac{\lambda}{z^2} - \kappa z \partial_t W(x, t), \quad \text{στο } Q_T,$$

$$(5.5\beta') \quad \mathcal{B}(1-z) = \beta_c \quad \text{στο } \Gamma_T,$$

$$(5.5\gamma') \quad 0 < z_0(x) := z(x, 0) = 1 - u_0(x) = \xi(x) \leq 1, \quad x \in \Omega.$$

Ειδικότερα, εαν  $u = 0$  στο  $\Gamma_T$  αυτό συνεπάγεται ότι  $z = 1$  για τη συνθήκη (5.5β'), ή αλλιώς ότι  $\frac{\partial z}{\partial \nu} + \beta z = 0$  αν η  $u$  ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \beta(1 - u)$ .

Το πρόβλημα του Itô (5.4) γράφεται ισοδύναμα στην ακόλουθη μορφή

$$(5.6\alpha') \quad dz_t = \left( \Delta z_t - \frac{\lambda}{z_t^2} \right) dt - \kappa z_t dW_t, \quad \text{στο } Q_T,$$

$$(5.6\beta') \quad 0 < z_0 = \xi \leq 1, \quad \text{σ.β. στο } \Omega.$$

Στη συνέχεια επικεντρωνόμαστε στο πρόβλημα (5.6). Σημειώνουμε ότι το πρόβλημα στη μορφή των εξισώσεων (5.4) θα το χρησιμοποιήσουμε αργότερα στην αριθμητική μελέτη του προβλήματος στην Ενότητα 5.3.

**Ορισμός 28.** Ο χρόνος απόσβεσης  $\tau : \Omega \rightarrow (0, \infty)$  όσον αφορά τη διήθηση του θορύβου  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  είναι ο χρόνος απόσβεσης της λύσης της  $z$  του προβλήματος (5.6) εάν

$$(5.7) \quad \liminf_{t \rightarrow \tau} \inf_{x \in D} |z(x, t)| = 0, \quad \text{σ.β. με } \{\tau < \infty\},$$

ή ισοδύναμα

$$(5.8) \quad \mathbb{P} \left[ \inf_{(x,t) \in D \times [0, \tau)} |z(x, t)| > 0 \right] = 1, \quad \text{σ.β. με } \{\tau < \infty\}.$$

Θα γράφουμε  $\tau = +\infty$  αν  $\tau > t$  για όλα  $t > 0$ .

Παρακάτω παρουσιάζονται μερικές έννοιες που αφορούν τους ορισμούς των λύσεων για το πρόβλημα (5.6) που θα χρησιμοποιηθούν παρακάτω.

**Ορισμός 29.** Μια προβλέψιμη στοχαστική διαδικασία αξίας  $H$  με  $z_t : t \in [0, T]$  τέτοια ώστε

$$\mathbb{P} \left[ \sup_{(x,t) \in \Omega \times [0, T]} |z_t(x)| > 0 \right] = 1,$$

καλείται ασθενής λύση του προβλήματος (5.6) εαν για κάθε  $v \in \mathcal{D}(A)$  και για κάθε  $t \in [0, T]$ , έχουμε

$$(5.9) \quad (z_t, v) = (z_0, v) + \int_0^t [-(z_s, Av) + (\lambda \tilde{f}(z_s), v)] ds + \int_0^t (\tilde{\sigma}(z_s) dW_s, v), \quad \mathbb{P} - \text{σ.β.},$$

όπου  $\tilde{f}(z) := -\frac{1}{z^2}$  και  $\tilde{\sigma}(z) = -\kappa z$ . Επίσης με  $(\cdot, \cdot)$  συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο στο χώρο Hilbert  $H = L^2(\Omega)$ . Σημειώνουμε ότι το στοχαστικό ολοκλήρωμα  $\int_0^t (\sigma(u_s) dW_s, v)$  είναι καλά ορισμένο, (βλέπε Θεώρημα 2.4 στην αναφορά [16]).

**Ορισμός 30.** Μια προβλέψιμη στοχαστική διαδικασία αξίας  $H$   $z_t : t \in [0, T]$  τέτοια ώστε

$$\mathbb{P} \left[ \sup_{(x,t) \in \Omega \times [0, T]} |z_t(x)| > 0 \right] = 1,$$

καλείται ήπια λύση (mild solution) του προβλήματος (5.6) εαν για κάθε  $t \in [0, T]$ , ισχύει

$$(5.10) \quad z_t = \mathcal{G}(t)z_0 + \lambda \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \tilde{f}(z_s) ds + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \tilde{\sigma}(z_s) dW_s, \quad \mathbb{P} - \text{σ.β. και σ.π. στο } \Omega.$$

**Παρατήρηση 10.** Από τους παραπάνω ορισμούς συμπεραίνουμε ότι οποιαδήποτε λύση του προβλήματος (5.6) παύει να υπάρχει μόλις φτάσει στο 0 σχεδόν βέβαια για κάποια  $x \in \Omega$ , βλ. [75, 76, 77], δηλαδή έχουμε απόσβεση της λύσης.

**Παρατήρηση 11.** Συγκεκριμένα, οποιαδήποτε ασθενής (μεταβολική) λύση είναι μια ήπια λύση του προβλήματος (5.6) υπό την προϋπόθεση ότι η  $\tilde{f}$  είναι τοπικά Lipschitz συνεχής συνάρτηση, (βλ. [44]). Αντίστροφα, εφαρμόζοντας το στοχαστικό θεώρημα του Fubini, (βλ. [95, Θεώρημα 2.6] και Παράρτημα), έχουμε ότι οποιαδήποτε ήπια λύση του προβλήματος (5.6) είναι επίσης ασθενής λύση. Πράγματι, η ασθενής διατύπωση (5.9) θα χρησιμοποιηθεί στην Ενότητα 5.2 για τη διερεύνηση της συμπεριφοράς απόσβεσης.

Η ύπαρξη και η μοναδικότητα μιας λύσης για το πρόβλημα (5.6) διασφαλίζεται από τα ακόλουθα θεωρήματα:

**Θεώρημα 29.** Για κάθε αρχικά δεδομένα  $z_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{D}(A))$  τέτοια ώστε  $0 < z_0 \leq 1$  σχεδόν βέβαια υπάρχει κάποιο  $T > 0$  τέτοιο ώστε το πρόβλημα (5.6) να έχει μοναδική ήπια λύση στο διάστημα  $[0, T)$ .

Απόδειξη. Η απόδειξη ακολουθεί τα βήματα της προσέγγισης που αναπτύχθηκε στην εργασία [77] και επομένως παρουσιάζεται εδώ συνοπτικά. Αρχικά, σημειώνουμε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν είναι (ολικά) Lipschitz συνεχής, και έτσι τα αποτελέσματα της κλασικής ύπαρξης, (βλ. [16, Θεώρημα 6.5] ή [17, Θεώρημα 7.5] και Παράρτημα), δεν μπορούν να εφαρμοστούν στο πρόβλημα (5.6). Για να αντιμετωπίσουμε αυτή τη δυσκολία, ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$\tilde{f}_n(z) := -\frac{1}{(\max\{z, \frac{1}{n}\})^2}$$

η οποία θα δείξουμε ότι είναι Lipschitz συνεχής.

Πράγματι για να δείξουμε ότι είναι Lipschitz συνεχής αρκεί να δείξουμε ότι

$$(5.11) \quad A = |f_n(z_1) - f_n(z_2)| = \left| \frac{1}{(\max\{z_1, \frac{1}{n}\})^2} - \frac{1}{(\max\{z_2, \frac{1}{n}\})^2} \right| \leq L|z_1 - z_2|$$

όπου  $L$  είναι η σταθερά Lipschitz. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Αν  $z_1, z_2 \leq \frac{1}{n}$  τότε η σχέση (5.11) γίνεται

$$A = \left| \frac{1}{(\frac{1}{n})^2} - \frac{1}{(\frac{1}{n})^2} \right| = |n^2 - n^2| = 0 \leq L|z_1 - z_2|.$$

(ii)  $z_1, z_2 \geq \frac{1}{n}$  τότε η σχέση (5.11) θα γίνει ως εξής

$$\left| \frac{1}{z_1^2} - \frac{1}{z_2^2} \right| = \left| \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right| \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right| \leq 2n \left| \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2} \right| \leq 2n^3 |z_1 - z_2|.$$

(iii) Αν  $z_1 \leq \frac{1}{n}$  και  $z_2 \geq \frac{1}{n}$  τότε από τη σχέση (5.11) έχουμε

$$\begin{aligned} A &= \left| n^2 - \frac{1}{z_2^2} \right| = \left| n + \frac{1}{z_2} \right| \left| n - \frac{1}{z_2} \right| \leq 2n \left| n - \frac{1}{z_2} \right| \leq 2n \left| \frac{nz_2 - 1}{z_2} \right| \\ &\leq 2n^2 |nz_2 - 1| = 2n^3 \left| z_2 - \frac{1}{n} \right| = 2n^3 \left( z_2 - \frac{1}{n} \right) \leq 2n^3 |z_2 - z_1| = 2n^3 |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

(iv) Αν  $z_1 \geq \frac{1}{n}$  και  $z_2 \leq \frac{1}{n}$  η απόδειξη είναι όμοια με αυτή στη περίπτωση (iii).

Αρα σε κάθε περίπτωση ισχύει η σχέση (5.11).

Θέτουμε  $\tau_n$  να είναι ο πρώτος χρόνος  $t$  έτσι ώστε  $\inf_{x \in \Omega} |z(x, t)| \leq \frac{1}{n}$ . Φαίνεται εύκολα ότι η  $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$  είναι μια φθίνουσα ακολουθία.

Τότε λόγω των θεωρημάτων [16, Θεώρημα 6.5] και [17, Θεώρημα 7.5] ή χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία στην αναφορά [75] παίρνουμε ότι το ακόλουθο πρόβλημα Itô

$$\begin{aligned} dz_t^n &= \left( \Delta z_t^n + \tilde{f}(z_t^n) dt \right) + \tilde{\sigma}(z_t^n) dW_t, \quad \text{στο } Q_T, \\ 0 < z_0^n &= \xi \leq 1, \quad \text{σ.β. στο } \Omega, \end{aligned}$$

έχει μοναδική ήπια λύση

$$z_t^n = \mathcal{G}(t)z_0^n + \lambda \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \tilde{f}(z_s^n) ds + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \tilde{\sigma}(z_s^n) dW_s,$$

για κάθε  $n = 1, 2, \dots$ , το οποίο είναι φραγμένο μέσα στο διάστημα ύπαρξης του.

Επίσης, αφού  $\tilde{f}(z) = -\frac{1}{z^2}$  για  $z \geq \frac{1}{n}$ , προκύπτει ότι  $z(x, t) = z^n(x, t)$  για  $t \leq \tau_n$  όπου  $z$  είναι λύση του προβλήματος Itô (5.6). Θέτουμε  $T = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$  και τότε  $0 < T < \infty$  εφόσον η αρχική συνθήκη  $z_0$  είναι αυστηρώς θετική σ.β., και συμπεραίνουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της ήπιας λύσης για το πρόβλημα (5.6) στο χρονικό διάστημα  $[0, T)$ .  $\square$

Στην παρούσα ενότητα διερευνάται επίσης η ακόλουθη παραλλαγή του προβλήματος (5.4)

$$(5.12\alpha') \quad du_t = (g(t)\Delta u_t + \lambda h(x, t)f(u_t)) dt + \kappa(t)(1 - u_t)dW_t, \quad \text{στο } Q_T,$$

$$(5.12\beta') \quad 0 \leq u_0 < 1, \text{ σ.β. στο } \Omega,$$

όπου  $g, \kappa : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  και  $h : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  είναι συνεχείς και φραγμένες συναρτήσεις. Υποθέτουμε επίσης ότι  $g \in C^1(\mathbb{R}_+)$ .

Θέτουμε  $z = 1 - u$  και η συνάρτηση  $z$  λύνει το ακόλουθο πρόβλημα Itô

$$(5.13\alpha') \quad dz_t = (g(t)\Delta z_t - \lambda h(x, t)z_t^{-2}) dt - \kappa(t)z_t dW_t, \quad \text{στο } Q_T,$$

$$(5.13\beta') \quad 0 < z_0 = \xi \leq 1, \quad \text{σ.β. στο } \Omega.$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, σύμφωνα με τις παραδοχές για τη συνάρτηση  $g$ , (βλέπε [88]), η συνάρτηση Green,  $G$  η οποία είναι λύση του νετερομινιστικού προβλήματος

$$\begin{aligned} \zeta_t &= g(t)\Delta \zeta, \quad \text{στο } Q_T, \\ \mathcal{B}(\zeta) &= \beta_c, \quad \text{στο } \Gamma_T, \\ 0 &\leq \zeta(x, 0) = \zeta_0(x) < 1, \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

υπάρχει και ικανοποιεί την ακόλουθη εκτίμηση

$$(5.14) \quad \left| \partial_x^m \partial_t^\ell G(x, t; y, s) \right| \leq c(t-s)^{-\frac{d+|m|+2\ell}{2}} \exp \left[ -\frac{|x-y|^2}{t-s} \right],$$

όπου  $m = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{N}^N$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$  και  $|m| + 2\ell \leq 2$ ,  $|m| = \sum_{j=1}^N m_j$ .

Τότε ορίζουμε την αντίστοιχη ημιομάδα  $\mathcal{E}(t)$  στον χώρο  $H = L^2(\Omega)$  με τον ακόλουθο τρόπο

$$(5.15) \quad \mathcal{E}(t)w(x) := \int_{\Omega} G(x, t; y, 0) w(y) dy \quad \text{για κάθε } x \in \Omega \text{ και } 0 < t < T,$$

για κάθε  $T > 0$ .

Ο χρόνος απόσβεσης  $\tau$  για το πρόβλημα (5.13) ορίζεται όμοια με τις σχέσεις (5.7) και (5.8). Με όμοιο τρόπο διατυπώνουμε τους παρακάτω ορισμούς για τις ασθενείς και ήπιες λύσεις του προβλήματος (5.13).

**Ορισμός 31.** Μια  $H$ -μετρήσιμη στοχαστική διαδικασία  $z_t : t \in [0, T]$  καλείται ασθενής λύση του προβλήματος (5.13) εάν για κάθε  $v \in \mathcal{D}(A)$  και για κάθε  $t \in [0, T]$ ,

$$(5.16) \quad (z_t, v) = (z_0, v) + \int_0^t [-g(s)(z_s, Av) + \lambda(h(\cdot, s)\tilde{f}(z_s), v)] ds + \int_0^t (\tilde{\sigma}_1(z_s) dW_s, v), \quad \mathbb{P} - \text{σ.β.},$$

όπου  $\tilde{\sigma}_1(z) := -\kappa(t)z$  ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz εφόσον η  $\kappa(t)$  είναι φραγμένη συνάρτηση.

**Ορισμός 32.** Μια  $H$ -μετρήσιμη στοχαστική διαδικασία  $z_t : t \in [0, T]$  καλείται ήπια λύση του προβλήματος (5.13) εάν για κάθε  $t \in [0, T]$ , ισχύει ότι

$$(5.17) \quad z_t = \mathcal{E}(t)z_0 + \lambda \int_0^t \mathcal{E}(t-s)h(\cdot, s)\tilde{f}(z_s) ds + \int_0^t \mathcal{E}(t-s)\tilde{\sigma}_1(z_s) dW_s, \quad \mathbb{P} - \text{σ.β.} \quad \text{και σ.π. στο } \Omega.$$

Χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση παρόμοια με το Θεώρημα 29 εξασφαλίζουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα μιας ήπιας λύσης για το πρόβλημα Itô (5.13). Μια τέτοια λύση έχει επίσης αποδειχθεί ότι είναι μια ασθενής λύση λόγω του στοχαστικού θεωρήματος Fubini, (βλέπε επίσης [95]). Οποιαδήποτε λύση του προβλήματος (5.13) παύει να υπάρχει στη τιμή μηδέν.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το γενικό πρόβλημα

$$(5.18) \quad dz_t = (\Delta z_t + f(z_t)) dt + \sigma(z_t) dW_t, \quad \text{στο } Q_T,$$

$$(5.19) \quad 0 < z_0 = \xi \leq 1, \quad \text{σ.β. στο } \Omega,$$

όπου  $f(z) = \frac{1}{z^\alpha}$ ,  $\alpha > 0$  και  $c < |\sigma(z)| < C(1 + |z|^\gamma)$  για  $c, C > 0$  και  $\gamma \in (0, \frac{3}{2})$  έχει αρχικά μελετηθεί από τον C. Mueller και τους συνεργάτες του. Ειδικότερα έχει αποδειχθεί, (βλ. [76, 77]), ότι αν  $0 < \alpha < 3$ , τότε η λύση του προβλήματος Itô (5.18)-(5.19) παίρνει τη τιμή 0 σε πεπερασμένο χρόνο, δηλαδή αποσβένει, με θετική πιθανότητα. Διαφορετικά, αν  $\alpha \geq 3$ , (βλ. [75, 99]), η λύση του προβλήματος (5.18)-(5.19) παραμένει θετική με πιθανότητα 1 (σχεδόν βέβαια).

Στο τρέχον κεφάλαιο εξετάζεται ένα παρόμοιο πρόβλημα με το πρόβλημα (5.18)-(5.19), (πρόβλημα (5.6)) όπου έχουμε  $f(z) = -\frac{\lambda}{z^2}$  και  $\sigma(u) = -\kappa u$  για κάποια  $\lambda, \kappa > 0$ . Σύμφωνα με τα προηγούμενα αποτελέσματα, έχουμε ότι εφόσον σε αυτήν την περίπτωση ο εκθέτης  $\alpha = 2$  τότε η λύση του προβλήματος (5.6) θα πρέπει να φτάσει στο μηδέν με θετική πιθανότητα. Στην επόμενη ενότητα, εφαρμόζοντας μια καινούρια προσέγγιση προχωράμε ένα βήμα παραπέρα και βελτιώνουμε τα αποτελέσματα απόσβεσης που αποδεικνύονται στις αναφορές [76, 77]. Συγκεκριμένα, παρέχουμε εκτιμήσεις της πιθανότητας μηδενισμού (απόσβεσης) όχι μόνο για το πρόβλημα (5.6) αλλά και για το μη αυτόνομο πρόβλημα (5.13). Επιπλέον, χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους παρέχουμε εκτιμήσεις του χρόνου απόσβεσης. Από όσο γνωρίζουμε, τέτοια αποτελέσματα είναι νέα στη βιβλιογραφία και αναμένουμε να είναι πολύτιμα τόσο για τους μαθηματικούς που εργάζονται στη περιοχή στο πεδίο των στοχαστικών μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΣΜΔΕ) όσο και για τους μηχανικούς MEMS.

## 5.2 Εκτιμήσεις της Πιθανότητας Απόσβεσης

Στην τρέχουσα ενότητα, για λόγους απλότητας, εστιάζουμε στην περίπτωση μιας μονοδιάστατης κίνησης Brown  $B_t$ .

### 5.2α' Το Βασικό Μοντέλο (5.6)

Στη συνέχεια θα διερευνήσουμε τη συμπεριφορά της λύσης του προβλήματος (5.6) για την περίπτωση εμφάνισης απόσβεσης. Η λύση του προβλήματος (5.6) μπορεί να εκφραστεί ως διαδικασία Itô ως εξής

$$(5.20) \quad z_t = z_0 - \kappa \int_0^t z_s dB_s + \int_0^t \left( \Delta z_s - \frac{\lambda}{z_s^2} \right) ds.$$

Αξιίζει να σημειωθεί ότι η ανάλυση που ακολουθεί ισχύει για την ομογενή συνοριακή συνθήκη Robin  $\frac{\partial z_t}{\partial \nu} + \beta z_t = 0$  που αντιστοιχεί στην περίπτωση που έχουμε τη συνοριακή συνθήκη του προβλήματος (3β') για  $\beta_c > 0$ . Η μη ομογενής συνοριακή συνθήκη Robin, προκύπτει για  $\beta_c = 0$  στο  $u$ - πρόβλημα (3β') και μελετάται μόνο αριθμητικά στην Ενότητα 5.3. Η μέθοδος που εφαρμόζουμε παρακάτω αποτυγχάνει για τη μη ομογενή συνθήκη.

Ορίζουμε τη στοχαστική διαδικασία

$$(5.21) \quad v_t = e^{\kappa B_t} z_t, \quad 0 \leq t < \tau,$$

(βλέπε [19]), όπου η μεταβλητή  $\tau$  προσδιορίζει έναν (τυχαίο) χρόνο στάσης, όπου στην πραγματικότητα στην περίπτωση μας είναι ο χρόνος απόσβεσης τόσο για τη διαδικασία  $z_t$  που ορίζεται από τη σχέση (5.7). Η σχέση (5.21) και η α.β. συνέχεια διαδρομής  $B_t$  δείχνει ότι τα  $z_t$  και  $v_t$  αποσβένουν ταυτόχρονα στο χρόνο απόσβεσης  $\tau$ , (βλ. [20]).

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον τύπο του Itô, (3.20), για  $F(u) = e^{\kappa u}$  έχουμε

$$\begin{aligned}
 e^{\kappa B_t} &= e^{\kappa B_0} + \kappa \int_0^t e^{\kappa B_s} dB_s + \frac{\kappa^2}{2} \int_0^t e^{\kappa B_s} ds \\
 (5.22) \qquad &= 1 + \kappa \int_0^t e^{\kappa B_s} dB_s + \frac{\kappa^2}{2} \int_0^t e^{\kappa B_s} ds,
 \end{aligned}$$

αφού  $B_0 = 0$ , ή ισοδύναμα:

$$(5.23\alpha') \qquad d(e^{\kappa B_t}) = \kappa e^{\kappa B_t} dB_t + \frac{\kappa^2}{2} e^{\kappa B_t} dt,$$

$$v_0 = e^{\kappa B_0} = 1.$$

όπου συμβολίζουμε με

$$z_t(\phi) := \int_{\Omega} z_t \phi \, dx, \quad t \geq 0,$$

για κάθε συνάρτηση  $\phi \in C^2(\Omega)$ .

Τότε το πρόβλημα (5.20), χρησιμοποιώντας τη δεύτερη ταυτότητα του *Green*, μπορεί να γραφεί σε ασθενή μορφή με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\begin{aligned}
 z_t(\phi) &= z_0(\phi) + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{\partial z_s}{\partial \nu} \phi - z_s \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right] d\sigma ds + \int_0^t z_s(\Delta\phi) ds \\
 (5.24) \qquad &- \lambda \int_0^t z_s^{-2}(\phi) ds - \kappa \int_0^t z_s(\phi) dB_s,
 \end{aligned}$$

για κάποια συνάρτηση δοκιμής  $\phi$  αρκετά ομαλή, και για

$$z_s^{-2}(\phi) := \int_{\Omega} z_s^{-2} \phi \, dx.$$

Τη συνάρτηση δοκιμής  $\phi \in C^2(\Omega)$  την επιλέγουμε να ικανοποιεί το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$(5.25) \qquad -\Delta\phi = \lambda_1 \phi, \quad x \in \Omega,$$

$$(5.26) \qquad \frac{\partial \phi}{\partial \nu} + \beta \phi = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

κανονικοποιημένη ως εξής:

$$(5.27) \qquad \int_{\Omega} \phi(x) dx = 1.$$

από την δεύτερη ταυτότητα του *Green* έχουμε

$$z_s(\Delta\phi) := \Delta z_s \phi.$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$z_s(\Delta\phi) := \int_{\Omega} z_s \Delta\phi \, dx.$$

Σημειώνουμε ότι  $\lambda_1$  είναι η πρωτεύουσα θετική ιδιοτιμή για  $\beta \neq 0$ , (βλέπε Παράρτημα [6, Θεώρημα 4.3]).

Συγκεκριμένα, το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην εξίσωση (5.72) λόγω των ομογενών συνοριακών συνθηκών Robin δίνει

$$\int_{\partial\Omega} \left[ \frac{\partial z_t}{\partial \nu} \phi - z_t \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right] d\sigma = \int_{\partial\Omega} (-\beta z_t \phi + \beta z_t \phi) d\sigma = 0,$$

και έτσι η ασθενής μορφή της λύσης στη σχέση (5.72) γίνεται

$$(5.28) \quad z_t(\phi) = z_0(\phi) + \int_0^t z_s(\Delta\phi) ds - \lambda \int_0^t z_s^{-2}(\phi) ds - \kappa \int_0^t z_s(\phi) dB_s.$$

Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατα παράγοντες (3.21) στις διαδικασίες Ιτό που ορίζονται στην σχέση (5.20) και σχέση (5.68) έχουμε

$$v_t = e^{\kappa B_t} z_t = e^{\kappa B_0} z_0 + \int_0^t e^{\kappa B_s} dz_s + \int_0^t z_s de^{\kappa B_s} + [e^{\kappa B_s}, z_s](t),$$

όπου η τετραγωνική απόκλιση δίνεται από τη σχέση

$$(5.29) \quad [e^{\kappa B_s}, z_s](t) = -\kappa^2 \int_0^t e^{\kappa B_s} z_s ds, \quad t \geq 0,$$

και έτσι προκύπτει ότι

$$(5.30) \quad v_t = z_0 + \int_0^t e^{\kappa B_s} dz_s + \int_0^t z_s de^{\kappa B_s} - \kappa^2 \int_0^t e^{\kappa B_s} z_s ds.$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (5.30) με  $\phi$  και ολοκληρώνοντας στο χωρίο  $\Omega$  έχουμε

$$\begin{aligned} v_t(\phi) &= z_0(\phi) + \int_0^t e^{\kappa B_s} \left[ \int_D (\Delta z_s - \lambda z_s^{-2}) \phi dx \right] ds - \kappa \int_0^t e^{\kappa B_s} z_s(\phi) dB_s \\ &\quad + \kappa \int_0^t e^{\kappa B_s} z_s(\phi) dB_s + \frac{\kappa^2}{2} \int_0^t e^{\kappa B_s} z_s(\phi) ds - \kappa^2 \int_0^t e^{\kappa B_s} z_s(\phi) ds \\ &= z_0(\phi) + \int_0^t e^{\kappa B_s} \left[ \int_D (\Delta z_s - \lambda z_s^{-2}) \phi dx \right] ds - \frac{\kappa^2}{2} \int_0^t z_s(\phi) e^{\kappa B_s} ds \\ &= z_0(\phi) + \int_0^t e^{\kappa B_s} z_s(\Delta\phi) ds - \lambda \int_0^t e^{\kappa B_s} z_s^{-2}(\phi) ds - \frac{\kappa^2}{2} \int_0^t z_s(\phi) e^{\kappa B_s} ds \\ (5.31) \quad &= z_0(\phi) - \lambda_1 \int_0^t e^{\kappa B_s} z_s(\phi) ds - \lambda \int_0^t e^{\kappa B_s} z_s^{-2}(\phi) ds - \frac{\kappa^2}{2} \int_0^t e^{\kappa B_s} z_s(\phi) ds, \end{aligned}$$

όπου εδώ χρησιμοποιήσαμε το πρόβλημα (5.6α'), τη σχέση (5.71) και τη δεύτερη ταυτότητα του Green και το στοχαστικό Θεώρημα Fubini (βλέπε [17, Θεώρημα 4.33]).

Εκφράζοντας τη σχέση (5.31) ως προς τη μεταβλητή  $v_t$ , και δεδομένου ότι  $z_t = v_t e^{-\kappa B_t}$ , χάρις στη σχέση (5.21) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} v_t(\phi) &= z_0(\phi) - \lambda_1 \int_0^t v_s(\phi) ds - \lambda \int_0^t e^{3\kappa B_s} v_s^{-2}(\phi) ds - \frac{\kappa^2}{2} \int_0^t v_s(\phi) ds \\ (5.32) \quad &= v_0(\phi) - \left( \lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2} \right) \int_0^t v_s(\phi) ds - \lambda \int_0^t e^{3\kappa B_s} v_s^{-2}(\phi) ds, \end{aligned}$$

για  $z_0(\phi) = v_0(\phi)$ .

Συνεπώς η εξίσωση (5.32) παίρνει τη μορφή

$$(5.33) \quad \frac{dv_t(\phi)}{dt} = - \left( \lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2} \right) v_t(\phi) - \lambda e^{3\kappa B_t} v_t^{-2}(\phi), \quad t > 0, \quad v_0(\phi) > 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Jensen, δεδομένου ότι η συνάρτηση  $r(s) = s^{-2}$ ,  $s > 0$  είναι κυρτή, και λόγω της σχέσης (5.27) έχουμε

$$v_t^{-2}(\phi) = \int_{\Omega} v_t^{-2} \phi dx \geq \left( \int_{\Omega} v_t \phi dx \right)^{-2} = (v_t(\phi))^{-2}.$$



Συνεπώς η εξίσωση (5.33) οδηγεί στην ακόλουθη διαφορική ανισότητα

$$\frac{dv_t(\phi)}{dt} \leq - \left( \lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2} \right) v_t(\phi) - \lambda e^{3\kappa B_t} (v_t(\phi))^{-2}, \quad v_0(\phi) > 0.$$

Σύμφωνα με την αρχή σύγκρισης έχουμε ότι  $v_t(\phi) \leq \mathbb{B}(t)$  όπου η συνάρτηση  $\mathbb{B}(t)$  ικανοποιεί την ακόλουθη διαφορική εξίσωση Bernoulli:

$$\mathbb{B}'(t) = - \left( \lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2} \right) \mathbb{B}(t) - \lambda e^{3\kappa B_t} \mathbb{B}^{-2}(t), \quad \mathbb{B}_0 = \mathbb{B}(0) = v_0(\phi) > 0,$$

όπου η λύση της είναι η εξής

$$(5.34) \quad \mathbb{B}(t) = e^{-(\lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2})t} \left[ \mathbb{B}_0^3 - 3\lambda \int_0^t e^{3(\lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2})s + \kappa B_s} ds \right]^{1/3}.$$

Σε αυτό το σημείο, λαμβάνοντας υπόψη τη λύση της εξίσωσης (5.34) μπορούμε να ορίσουμε τον χρόνο στάσης (ή αλλιώς χρόνο απόσβεσης) για τη διαδικασία  $\mathbb{B}(t)$  ως εξής

$$\tau_1 := \inf \left\{ t \geq 0 \mid \int_0^t e^{3(\lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2})s + \kappa B_s} ds \geq \frac{1}{3\lambda} \mathbb{B}_0^3 \right\},$$

και έτσι προκύπτει ότι η  $\mathbb{B}(t)$  παύει να υπάρχει και γίνεται μηδέν σε πεπερασμένο χρόνο όταν  $\{t < +\infty\}$ . Το γεγονός ότι  $0 \leq v_t(\phi) \leq \mathbb{B}(t)$  δείχνει ότι ο χρόνος  $\tau_1$  είναι το άνω όριο του χρόνου στάσης (απόσβεσης)  $\tau$  για τη διαδικασία  $v_t(\phi)$ . Επομένως η συνάρτηση

$$t \mapsto \int_{\Omega} e^{\kappa B_t} z_t(x) \phi(x) dx,$$

αποσβένει σε πεπερασμένο χρόνο υπό την συνθήκη  $\{\tau_1 < +\infty\}$ . Χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.27) καθώς και το ότι η μεταβλητή  $t \mapsto e^{\kappa B_t}$  είναι φραγμένη μακριά από το μηδέν στο διάστημα  $[0, \tau_1]$ , αφού το  $\tau_1$  είναι πεπερασμένο (βλέπε στη συνέχεια τις σχέσεις (5.36) και (5.37)), συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση  $t \mapsto \inf_{\Omega} z_t$  πλησιάζει το μηδέν στο διάστημα  $[0, \tau_1]$  όταν  $\tau_1 < \infty$ . Συνεπώς, η διαδικασία  $z_t$  αποσβένει σε πεπερασμένο χρόνο όταν  $\{\tau_1 < +\infty\}$  και  $\tau_1$  είναι ένα άνω όριο για τον χρόνο απόσβεσης της διαδικασίας  $z_t$ .

Στη συνέχεια εργαζόμαστε για να βρούμε την εκτίμηση της πιθανότητας όταν  $\{\tau_1 = +\infty\}$ . Έχουμε

$$(5.35) \quad \begin{aligned} \mathbb{P}[\tau_1 = +\infty] &= \mathbb{P} \left[ \int_0^t e^{3\kappa B_s + 3(\lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2})s} ds < \frac{1}{3\lambda} v_0^3(\phi), \quad \text{για όλα τα } t > 0 \right] \\ &= \mathbb{P} \left[ \int_0^{+\infty} e^{3\kappa B_s + 3(\lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2})s} ds \leq \frac{1}{3\lambda} v_0^3(\phi) \right]. \end{aligned}$$

Λόγω του νόμου του επαναλαμβανόμενου λογάριθμου για τη διαδικασία  $B_t$ , [7, Θεώρημα 2.3] και [49, Θεώρημα 9.23], σύμφωνα με τον οποίο

$$(5.36) \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{t^{1/2} \sqrt{2 \log(\log t)}} = -1, \quad \mathbb{P} - \text{σ.σ.},$$

και

$$(5.37) \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{t^{1/2} \sqrt{2 \log(\log t)}} = +1, \quad \mathbb{P} - \text{σ.σ.},$$

συμπεραίνουμε ότι για κάθε ακολουθία  $t_n$  με  $t_n \rightarrow +\infty$  ισχύει

$$B_{t_n} \sim \alpha_n t_n^{1/2} \sqrt{2 \log(\log t_n)},$$

όπου  $\alpha_n \in [-1, 1]$ , και έτσι έχουμε

$$\int_0^{+\infty} e^{3\kappa B_s + 3(\lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2})s} ds = +\infty.$$

από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{P}[\tau_1 = +\infty] = \mathbb{P}\left[\int_0^{+\infty} e^{3\kappa B_s + 3(\lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2})s} ds \leq \frac{1}{3\lambda} v_0^3(\phi)\right] = 0,$$

και η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή  $\tau_1$  να είναι πεπερασμένη γίνεται

$$(5.38) \quad \mathbb{P}[\tau_1 < +\infty] = 1 - \mathbb{P}[\tau_1 = +\infty] = 1 - 0 = 1.$$

Επομένως η διαδικασία  $\mathbb{B}(t)$  και συνεπώς και η  $v_t(\phi)$  αποσβένει σ.β. και συμπεραίνουμε ότι και η  $z_t(\phi)$  αποσβένει σ.β. επίσης. Το τελευταίο συνεπάγεται, λόγω της σχέσης (5.27), ότι

$$z_t(\phi) = \int_{\Omega} z_t(x)\phi(x) dx \geq \inf_{x \in \Omega} |z_t(x)|$$

και επομένως

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \inf_{x \in D} |z_t(x)| = 0, \quad \text{σ.β. για } \{\tau < \infty\},$$

για κάποιο  $\tau \leq \tau_1$ , ανεξαρτήτως από την αρχική συνθήκη  $z_0$  και την τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ . Συνεπώς έχουμε αποδείξει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 30.** Η ασθενής λύση του προβλήματος (5.6) αποσβένει σε πεπερασμένο χρόνο με πιθανότητα ίση με 1, δηλαδή σ.β. ανεξάρτητα από το μέγεθος της αρχικής συνθήκης καθώς και της παραμέτρου  $\lambda$ .

**Παρατήρηση 12.** Το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 30 δείχνει ότι η επίδραση του θορύβου για τη δυναμική του προβλήματος (5.20) είναι καταλυτική. Συγκεκριμένα, η παρουσία του μη γραμμικού όρου  $f(z) = z^{-2}$  "αναγκάζει" τη λύση να αποσβένει σ.β. Αντίθετα, για το αντίστοιχο ντετερμινιστικό πρόβλημα, δηλ. όταν  $k = 0$ , και για ομογενείς συνοριακές συνθήκες, η απόσβεση λαμβάνει χώρα μόνο όταν έχουμε μεγάλα αρχικά δεδομένα ή όταν έχουμε μεγάλες τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ , (βλέπε [26, 53, 59]).

### 5.2β' Το στοχαστικό μοντέλο με την προσθήκη ενός όρου ομαλοποίησης.

Ένα φυσικό ερώτημα που προκύπτει είναι εάν μπορούμε να τροποποιήσουμε το μοντέλο (5.6) κατάλληλα, έτσι ώστε να περιοριστεί η δυνατότητα απόσβεσης μόνο σε ένα συγκεκριμένο εύρος παραμέτρων και να έχουμε και ολική ύπαρξη της λύσης. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε ένα μοντέλο με τροποποιημένο το μη γραμμικό όρο μετατόπισης. Πράγματι στο τροποποιημένο μοντέλο παρατηρούμε ότι ο όρος μετατόπισης  $f(z) = z^{-2}$ , ο οποίος είναι υπεύθυνος για την σχεδόν σίγουρη απόσβεση (βλέπε Παρατήρηση (12)), είναι πολλαπλασιασμένος τώρα με τον όρο  $e^{-3\gamma t}$  για θετική σταθερά  $\gamma$ . Αυτή η μορφή μπορεί να προκύψει από την πρόσθεση του όρου  $-\gamma z_t$  στην εξίσωση (5.6) και με τη χρήση κατάλληλου μετασχηματισμού.

Συγκεκριμένα το πρόβλημα (5.6) τροποποιείται και παίρνει τη μορφή

$$(5.39\alpha') \quad dz_t = (\Delta z_t - \lambda e^{-3\gamma t} z_t^{-2})dt - \kappa z_t dB_t, \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$(5.39\beta') \quad \frac{\partial z_t}{\partial \nu} + \beta z_t = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad \beta, \kappa, \gamma > 0,$$

$$(5.39\gamma') \quad 0 < z_0(x) = z(x, 0) \leq 1, \quad x \in \Omega.$$

Στη συνέχεια συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 30, και αρχικά ορίζουμε

$$z_t(\phi) := \int_{\Omega} z_t \phi dx \quad \text{και} \quad z_t^{-2}(\phi) := \int_{\Omega} z_t^{-2} \phi dx$$

όπου η  $\phi$  επιλύει το πρόβλημα (5.25)-(5.27) ενώ από την δεύτερη ταυτότητα Green έχουμε

$$\Delta z_t(\phi) = z_t(\Delta \phi),$$

όπου

$$z_t(\Delta\phi) := \int_{\Omega} z_t \Delta\phi \, dx.$$

Η ασθενής μορφή του προβλήματος (5.39) είναι :

$$(5.40) \quad z_t(\phi) = z_0(\phi) + \int_0^t z_s(\Delta\phi) ds - \int_0^t \lambda e^{-3\gamma t} z_s^{-2}(\phi) ds - \kappa \int_0^t z_s(\phi) dB_s, \quad \mathbb{P} - \sigma.σ.$$

Θεωρούμε πάλι τη στοχαστική διαδικασία  $v_t = e^{\kappa B_t} z_t$ , για  $0 \leq t < \tau$  με  $\tau$  να είναι ο χρόνος στάσης (χρόνος απόσβεσης) της στοχαστικής διαδικασίας  $z_t$ . Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατα παράγοντες, όπως επίσης και τις σχέσεις (3.21) και (3.22), για στοχαστικές διαδικασίες, προκύπτει ότι

$$z_t = z_0 - \kappa \int_0^t z_s dB_s + \int_0^t \left( \Delta z_s - \frac{\lambda e^{-3\gamma s}}{z_s^2} \right) ds$$

και λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο όρος  $e^{\kappa B_t}$  δίνεται από τη σχέση (5.68) έχουμε

$$(5.41) \quad v_t(\phi) = v_0(\phi) + \int_0^t e^{\kappa B_s} dz_s(\phi) + \int_0^t z_s(\phi) d(e^{\kappa B_s}) + [e^{\kappa B_s}, z_s(\phi)](t),$$

όπου η τετραγωνική απόκλιση  $[e^{\kappa B_s}, z_s(\phi)](t) = -\kappa^2 \int_0^t e^{\kappa B_s} z_s ds$ , στη σχέση (5.41) δίνεται από την εξίσωση (5.29). Επομένως, λόγω του προβλήματος (5.39), της σχέσης (5.40) και του τύπου του Itô, έχουμε ότι

$$(5.42) \quad v_t(\phi) = v_0(\phi) + \int_0^t v_s(\Delta\phi) ds - \lambda \int_0^t e^{3\kappa B_s} e^{-3\gamma s} v_s^{-2}(\phi) ds - \frac{\kappa^2}{2} \int_0^t v_s(\phi) ds,$$

λαμβάνοντας επίσης υπόψη ότι  $z_t = e^{-\kappa B_t} v_t$ .

Ειδικά, μέσω της εξίσωσης (5.42) συμπεραίνουμε ότι η διαδικασία  $v_t(x) = v(x, t)$  είναι ασθενής λύση του ακόλουθου στοχαστικού προβλήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων

$$(5.43\alpha') \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \Delta v(x, t) + \left( \gamma - \frac{\kappa^2}{2} \right) v(x, t) + \lambda e^{3\kappa B_t} v^{-2}(x, t), \quad \text{στο } Q_T,$$

$$(5.43\beta') \quad \frac{\partial v(x, t)}{\partial \nu} + \beta v(x, t) = 0, \quad \text{στο } \Gamma_T,$$

$$(5.43\gamma') \quad v(x, 0) = z_0(x), \quad x \in \Omega.$$

Για το πρόβλημα (5.43) πρέπει να σημειώσουμε ότι η τοπική του ύπαρξη, η μοναδικότητα και η θετικότητα της λύσης έως τον τελικό χρόνο απόσβεσης απορρέουν από υπάρχων αποτελέσματα και συγκεκριμένα από το θεώρημα στην αναφορά [32, Θεώρημα 9, Κεφάλαιο 7]. Σ' αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι επιλέγοντας τη συνάρτηση  $\phi$  να επιλύει το πρόβλημα ιδιοτιμών (5.25)-(5.27), η εξίσωση (5.42) γίνεται

$$(5.44) \quad v_t(\phi) = v_0(\phi) - \left( \lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2} \right) \int_0^t v_s(\phi) ds - \lambda \int_0^t e^{-3(\gamma s - \kappa B_s)} v_s^{-2}(\phi) ds,$$

ή (βλέπε την Υποενότητα 5.2α') σε διαφορική μορφή

$$\frac{dv_t(\phi)}{dt} = - \left( \lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2} \right) v_t(\phi) - \lambda e^{-3(\gamma t - \kappa B_t)} v_t^{-2}(\phi).$$

Στη συνέχεια, λόγω της ανισότητας Jensen, συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{dv_t(\phi)}{dt} \leq - \left( \lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2} \right) v_t(\phi) - \lambda e^{-3(\gamma t - \kappa B_t)} (v_t(\phi))^{-2}, \quad v_0(\phi) > 0.$$

από την αρχή της σύγκρισης έχουμε ότι  $v_t(\phi) \leq \Psi(t)$  όπου η συνάρτηση  $\Psi(t)$  ικανοποιεί την ακόλουθη διαφορική εξίσωση Bernoulli

$$\Psi'(t) = - \left( \lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2} \right) \Psi(t) - \lambda e^{-3(\gamma t - \kappa B_t)} \Psi^{-2}(t), \quad \Psi_0 = \Psi(0) = v_0(\phi) > 0,$$

με λύση της μορφής

$$\Psi(t) = e^{-\left(\lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2}\right)t} \left[ \Psi_0^3 - 3\lambda \int_0^t e^{3\left(\lambda_1 - \gamma + \frac{\kappa^2}{2}\right)s + 3\kappa B_s} ds \right]^{\frac{1}{3}}, \quad 0 \leq t < \tau,$$

και με

$$\tau_2 := \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t e^{3\left(\lambda_1 - \gamma + \frac{\kappa^2}{2}\right)s + 3\kappa B_s} ds \geq \frac{1}{3\lambda} \Psi_0^3 \right\},$$

να είναι ο χρόνος στάσης (ή αλλιώς χρόνος απόσβεσης) της λύσης  $\Psi(t)$ .

Αυτό συνεπάγεται ότι η  $\Psi(t)$  αποσβένει στο μηδέν σε πεπερασμένο χρόνο υπο την προϋπόθεση ότι  $\{\tau_2 < +\infty\}$ . Λόγω της ανισότητας  $v_t(\phi) \leq \Psi(t)$  προκύπτει ότι ο χρόνος  $\tau_2$  είναι το άνω όριο για τον χρόνο στάσης  $\tau$  της  $v_t(\phi)$ , όπου είναι επίσης χρόνος στάσης της  $v_t$  και της  $z_t$ .

Πιο συγκεκριμένα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tau_2 = +\infty] &= \mathbb{P} \left[ \int_0^t e^{3\kappa B_s + 3\left(\lambda_1 - \gamma + \frac{\kappa^2}{2}\right)s} ds < \frac{1}{3\lambda} \Psi_0^3, \quad \text{για όλα τα } t > 0 \right] \\ (5.45) \quad &= \mathbb{P} \left[ \int_0^{+\infty} e^{3\kappa B_s + 3\left(\lambda_1 - \gamma + \frac{\kappa^2}{2}\right)s} ds \leq \frac{1}{3\lambda} \Psi_0^3 \right]. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζοντας την αλλαγή μεταβλητής:  $s_1 \mapsto \frac{9\kappa^2 s}{4}$  και χρησιμοποιώντας την κλιμάκωση της διαδικασίας (scaling property)  $B_t$  έχουμε

$$(5.46) \quad \mathbb{P}[\tau_2 = +\infty] = \mathbb{P} \left[ \frac{4}{9\kappa^2} \int_0^{+\infty} e^{2B_{s_1} + \frac{4}{3\kappa^2} \left(\lambda_1 - \gamma + \frac{\kappa^2}{2}\right)s_1} ds_1 \leq \frac{1}{3\lambda} \Psi_0^3 \right].$$

Θέτοντας  $B_s^{(\mu)} := B_s + \mu s$ , όπου  $\mu := \frac{2}{3\kappa^2} \left(\lambda_1 - \gamma + \frac{\kappa^2}{2}\right)$  η σχέση (5.46) γίνεται

$$(5.47) \quad \mathbb{P}[\tau_2 = +\infty] = \mathbb{P} \left[ \frac{4}{9\kappa^2} \int_0^{+\infty} e^{2B_s^{(\mu)}} ds \leq \frac{1}{3\lambda} \Psi_0^3 \right].$$

Σ' αυτό το σημείο διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το  $\gamma$ :

(i) Αρχικά παίρνουμε ότι  $\gamma \geq \lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2}$  και συνεπώς έχουμε

$$\int_0^{\infty} e^{2B_s^{(\mu)}} ds = \frac{1}{2Z_{-\mu}},$$

(βλέπε [97, Κεφάλαιο 6, Πρόσιμα 1.2] και επίσης Παράρτημα), όπου  $Z_{-\mu}$  είναι τυχαία μεταβλητή με κατανομή  $\Gamma(-\mu)$ , δηλαδή

$$\mathbb{P}(Z_{-\mu} \in dy) = \frac{1}{\Gamma(-\mu)} e^{-y} y^{-\mu-1} dy,$$

όπου  $\Gamma(\cdot)$  είναι η πλήρης συνάρτηση Γάμμα, (βλέπε [1]). Ως εκ τούτου από τη σχέση (5.47) συνεπάγεται ότι (βλέπε [12, τύπος 1.104(1) σελίδα 264] και Παράρτημα)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tau_2 = +\infty] &= \mathbb{P} \left[ \frac{1}{2Z_{-\mu}} \leq \frac{3\kappa^2}{4\lambda} v_0^3(\phi) \right] = \mathbb{P} \left[ Z_{-\mu} \geq \frac{2\lambda}{3\kappa^2 v_0^3(\phi)} \right] \\ (5.48) \quad &= 1 - \mathbb{P}[Z_{-\mu} \leq \theta] = 1 - \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^{\theta} e^{-y} y^{-\mu-1} dy, \end{aligned}$$

όπου  $\theta := \frac{2\lambda}{3\kappa^2 v_0^3(\phi)}$ . Επομένως

$$\mathbb{P}[\tau_2 < +\infty] = \mathbb{P}[Z_{-\mu} \leq \theta] = \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^\theta e^{-y} y^{-\mu-1} dy$$

και λόγω του ότι ισχύει  $\tau < \tau_2$  έχουμε επιπλέον ότι

$$(5.49) \quad \mathbb{P}[\tau < +\infty] \geq \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^\theta e^{-y} y^{-\mu-1} dy.$$

Αρα η σχέση (5.49) μας δίνει μια εκτίμηση της πιθανότητας να έχουμε απόσβεση για  $\gamma \geq \lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2}$ .

(ii) Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι  $\mu > 0$ , δηλαδή ότι  $\gamma < \lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2}$ .

Χρησιμοποιώντας το νόμο του επαναλαμβανόμενου λογάριθμου (law of the iterated logarithm), (βλέπε σχέσεις (5.36) και (5.37)), για τη διαδικασία  $B_t$ , έχουμε

$$\int_0^{+\infty} e^{3\kappa B_s + 3\left(\lambda_1 - \gamma + \frac{\kappa^2}{2}\right)s} ds = +\infty,$$

και ως εκ τούτου μέσω της (5.45) συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{P}[\tau_2 = +\infty] = \mathbb{P}\left[\int_0^{+\infty} e^{3\kappa B_s + 3\left(\lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2}\right)s} ds \leq \frac{1}{3\lambda} \Psi_0^3\right] = 0$$

και επιπρόσθετα ότι

$$\mathbb{P}[\tau_2 < +\infty] = 1 - \mathbb{P}[\tau_2 = +\infty] = 1.$$

Επομένως σε αυτή τη περίπτωση η απόσβεση είναι σχεδόν σίγουρη (σ.σ.).

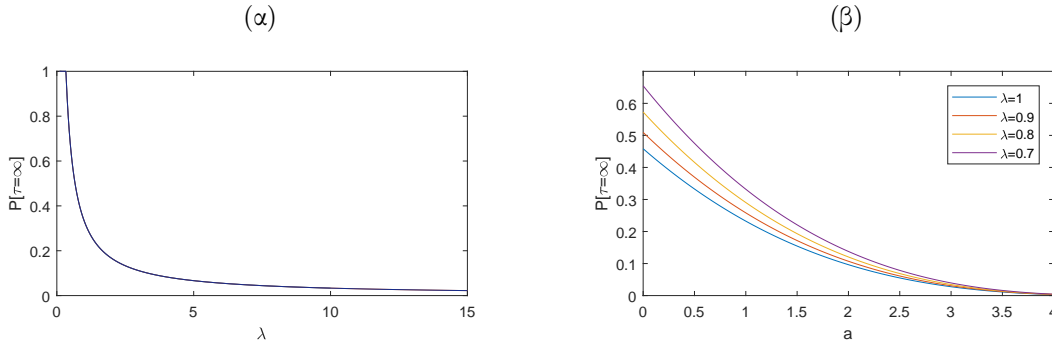
Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 31.** (i) Εάν  $\gamma \geq \lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2}$  τότε η ασθενής λύση του προβλήματος (5.39) αποσβένει σε πεπερασμένο χρόνο με πιθανότητα που φράσσεται από τη σχέση (5.49).

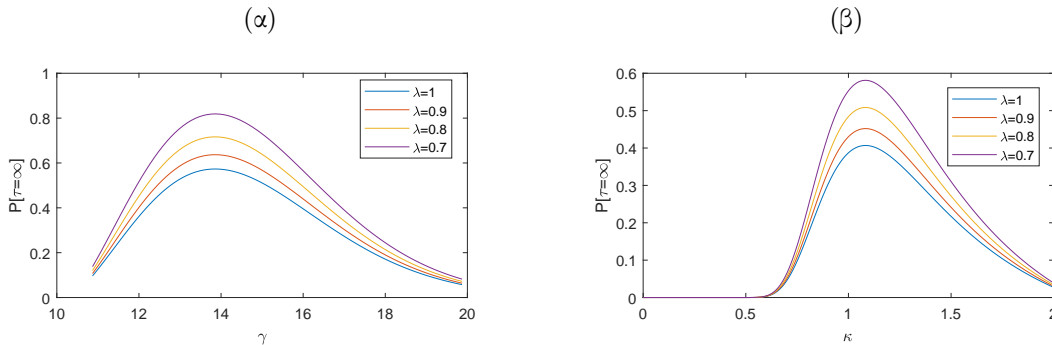
(ii) Στην δεύτερη περίπτωση όταν  $\gamma < \lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2}$  τότε η ασθενής λύση του προβλήματος (5.39) αποσβένει σε πεπερασμένο χρόνο σ.β.

**Παρατήρηση 13.** Έστω ότι παίρνουμε κατάλληλο  $\gamma$  και κατάλληλο  $\kappa$  έτσι ώστε να ισχύει  $\gamma - \frac{\kappa^2}{2} > 0$ . Τότε από το Θεώρημα 31(ii) συνεπάγεται ότι η συμπεριφορά απόσβεσης είναι κυρίαρχη όταν η ιδιοτιμή  $\lambda_1$  είναι μεγάλη πράγμα που συμβαίνει όταν το χωρίο  $\Omega$  είναι μικρό.

Στο Σχήμα 5.1 παρατηρούμε ένα άνω όριο της πιθανότητας ολικής ύπαρξης της λύσης του προβλήματος (5.39), όπως αυτή δίνεται από τη σχέση (5.48). Συγκεκριμένα παρουσιάζουμε το γράφημα του ορίου της πιθανότητας σε σχέση με την παράμετρο  $\lambda$  στο Σχήμα 5.1(α) και σε σχέση με την παράμετρο  $a$  στο Σχήμα 5.1(β). Σ' αυτή την περίπτωση η αρχική συνθήκη επιλέχθηκε να είναι της μορφής  $z_0(x) = 1 - ax(1-x)$ . Ειδικότερα, στο Σχήμα 5.1(α) παρατηρούμε μείωση της πιθανότητας ολικής ύπαρξης καθώς η παράμετρος  $a$  αυξάνεται. Όμοια στο Σχήμα 5.1(β) μειώνοντας το ελάχιστο που παρουσιάζει η αρχική συνθήκη (μεταβάλλοντας την παράμετρο  $a$ ) παρατηρούμε μείωση της πιθανότητας της ολικής ύπαρξης καθώς η παράμετρος  $a$  αυξάνεται και αυτό γίνεται πιο έντονο καθώς αυξάνεται η παράμετρος  $\lambda$ . Επιπλέον, στο Σχήμα 5.2 μπορούμε να παρατηρήσουμε τη συμπεριφορά της πιθανότητας η λύση να παρουσιάζει ολική ύπαρξη όπως αυτή προκύπτει από τη σχέση (5.49). Συγκεκριμένα εξετάζουμε τη συμπεριφορά της αρχικά σε σχέση με τη παράμετρο  $\gamma$  και στη συνέχεια σε σχέση με το πλάτος του θορύβου  $\kappa$ . Η επίδραση της παραμέτρου  $\gamma$ , δηλαδή ο συντελεστής του όρου ομαλοποίησης, εμφανίζεται στο Σχήμα 5.2(α). Πρέπει να σημειωθεί ότι για να έχει νόημα αυτό το γράφημα πρέπει να ικανοποιείτε η συνθήκη  $\gamma > \lambda_1 + \kappa^2$  (εδώ παίρνουμε  $\lambda_1 = \pi^2$  και  $\kappa = 1$ ): τότε παρατηρούμε μια μέγιστη τιμή της πιθανότητας στην τιμή  $\gamma = 13.77$ . Επιπλέον στο Σχήμα 5.2(β) εμφανίζεται η μεταβολή της πιθανότητας σε σχέση με την παράμετρο  $\kappa$  για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ . Σε αυτήν την περίπτωση επιτυγχάνεται παρόμοια μέγιστη τιμή της πιθανότητας στην τιμή  $\kappa = 1.084$ .



Σχήμα 5.1: (α) Διάγραμμα πιθανότητας  $\mathbb{P}[\tau = +\infty]$  σε σχέση με τη παράμετρο  $\lambda$ , (β) Αντίστοιχο διάγραμμα σε σχέση με τη παράμετρο  $a$  της αρχικής συνθήκης για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ .



Σχήμα 5.2: Διάγραμμα της πιθανότητας  $\mathbb{P}[\tau = +\infty]$  για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ , (α) σε σχέση με τη παράμετρο  $\gamma$ , (β) σε σχέση με το πλάτος του θορύβου  $\kappa$

**5.2γ’ Στοχαστικό μοντέλο με χρονοεξαρτώμενους συντελεστές**

Στην τρέχουσα ενότητα διερευνούμε την πιθανότητα απόσβεσης για την λύση του προβλήματος (5.13) όπου πλέον οι συντελεστές  $g, \kappa_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  και  $h : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  είναι συνεχείς συναρτήσεις. Σ’ αυτό το σημείο πρέπει να σημειώσουμε ότι από την πλευρά της μαθηματικής μοντελοποίησης η συνάρτηση  $g(t)$  αναπαριστά τον συντελεστή διασποράς ενώ η συνάρτηση  $h(x, t)$  περιγράφει τις μεταβαλλόμενες διηλεκτρικές ιδιότητες της ελαστικής μεμβράνης ([29]), (βλ. Ενότητα 5.1). Στη συνέχεια ορίζουμε την στοχαστική διαδικασία

$$M_t := \int_0^t \kappa_1(s)dB_s,$$

και θέτουμε

$$(5.50) \quad v_t := e^{M_t} z_t, \quad 0 \leq t < \tau,$$

όπου  $\tau$  είναι ο χρόνος στάσης (απόσβεσης) της στοχαστικής διαδικασίας  $z_t$  καθορισμένος από το πρόβλημα (5.13). Όσον αφορά τη μεθοδολογία της μελέτης του προβλήματος βασιζόμαστε στην εργασία [5]. Ο τύπος του Ιτό μας δίνει το ανάπτυγμα semimartingale

$$(5.51) \quad e^{M_t} = 1 + \int_0^t \kappa_1(s)e^{M_s}dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \kappa_1^2(s)e^{M_s}ds.$$

Θέτουμε, όπως και προηγουμένως,  $z_t(\phi) := \int_{\Omega} z_t \phi dx$  και  $z_t^{-2}(\phi) := \int_{\Omega} z_t^{-2} \phi dx$ , όπου η συνάρτηση  $\phi \in C^2(\Omega)$  επιλύει το πρόβλημα ιδιοτιμών (5.25)-(5.27), και έχουμε

$$(5.52) \quad z_t(\phi) = z_0(\phi) + \int_0^t g(s) \Delta z_s(\phi) ds - \lambda \int_0^t h(x, s) z_s^{-2}(\phi) ds - \int_0^t \kappa_1(s) z_s(\phi) dB_s,$$

$\mathbb{P}$ -σ.σ. για όλα τα  $t \in [0, \tau)$ .

Πρέπει να σημειώσουμε ότι για κάθε καθορισμένη συνάρτηση  $\phi$ , η διαδικασία  $(z_t(\phi) 1_{[0, \tau)}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  είναι επίσης semimartingale. Επιπλέον χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες από την θεωρία του στοχαστικού λογισμού, (βλέπε τις σχέσεις (3.21) και (3.22)), παίρνουμε την ασθενή διατύπωση του προβλήματος

$$(5.53) \quad \begin{aligned} v_t(\phi) &= e^{M_t} z_t(\phi) \\ &= e^{M_0} z_0(\phi) + \int_0^t e^{M_s} d(z_s(\phi)) + \int_0^t z_s(\phi) d(e^{M_s}) + [e^{M_t}, z_t(\phi)], \end{aligned}$$

όπου η τετραγωνική απόκλιση (βλέπε [68, Ενότητα 7.6, σελ. 113]) δίνεται από τον τύπο

$$[e^{M_t}, z_t(\phi)](t) := - \int_0^t \kappa_1^2(s) e^{M_s} z_s(\phi) ds.$$

από η σχέση (5.53) σε συνδυασμό με την σχέση (5.50), τον ορισμό (5.51) και τη σχέση (5.52) προκύπτει ότι

$$(5.54) \quad \begin{aligned} v_t(\phi) &= z_0(\phi) + \int_0^t e^{M_s} (g(s) \Delta z_s(\phi) - \lambda z_s^{-2}(h\phi)) ds \\ &\quad + \int_0^t e^{M_s} \kappa_1(s) z_s(\phi) dB_s - \int_0^t e^{M_s} \kappa_1(s) z_s(\phi) dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \kappa_1^2(s) e^{M_s} z_s(\phi) ds - \int_0^t \kappa_1^2(s) e^{M_s} z_s(\phi) ds \\ &= v_0(\phi) + \int_0^t g(s) v_s(\Delta\phi) ds - \lambda \int_0^t e^{3M_s} v_s^{-2}(h\phi) ds - \frac{1}{2} \int_0^t \kappa_1^2(s) v_s(\phi) ds \\ &= v_0(\phi) - \lambda_1 \int_0^t g(s) v_s(\phi) ds - \lambda \int_0^t e^{3M_s} v_s^{-2}(h\phi) ds - \frac{1}{2} \int_0^t \kappa_1^2(s) v_s(\phi) ds, \end{aligned}$$

όπου

$$v_s^{-2}(h\phi) := \int_{\Omega} v_s^{-2}(x) h(x, t) \phi(x) dx,$$

λαμβάνοντας επίσης υπόψη ότι  $z_0(\phi) = v_0(\phi)$  την σχέση (5.50) καθώς και ότι  $\Delta v_s(\phi) = v_s(\Delta\phi) = -\lambda_1 v_s(\phi)$  λόγω της δεύτερης ταυτότητας του Green.

Η εξίσωση (5.54) μπορεί να γραφτεί σε διαφορική μορφή δηλαδή

$$\begin{aligned} \frac{dv_t(\phi)}{dt} &= - \left( \lambda_1 g(t) + \frac{1}{2} \kappa_1^2(t) \right) v_t(\phi) - \lambda e^{3M_t} v_t^{-2}(h\phi), \\ v_0(\phi) &> 0, \end{aligned}$$

όπου λόγω της ανισότητας Jensen προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{dv_t(\phi)}{dt} &\leq - \left( \lambda_1 g(t) + \frac{1}{2} \kappa_1^2(t) \right) v_t(\phi) - \lambda \eta e^{3M_t} (v_t(\phi))^{-2}, \\ v_0(\phi) &> 0, \end{aligned}$$

για  $\eta := \max_{(x,s) \in \bar{D} \times [0, \tau]} h(x, s) > 0$ . Στη συνέχεια μέσω επιχειρημάτων σύγκρισης συμπεραίνουμε ότι

$$(5.55) \quad v_t(\phi) \leq A(t), \quad 0 \leq t < \tau,$$

όπου το  $A(t)$  συμβολίζει τη λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών

$$A'(t) = - \left( \lambda_1 g(t) + \frac{1}{2} \kappa_1^2(t) \right) A(t) - \lambda \eta e^{3M_t} A^{-2}(t), \quad 0 < t < \tau, \quad A_0 = A(0) = v_0(\phi) > 0.$$

Η λύση του προβλήματος για το συναρτησιακό  $A(t)$  είναι η ακόλουθη

$$(5.56) \quad A(t) = e^{-(\lambda_1 K(t) + \frac{1}{2} J(t))} \left[ v_0(\phi)^3 - 3\lambda \eta \int_0^t e^{3M_s + 3(\lambda_1 K(s) + \frac{1}{2} J(s))} ds \right]^{\frac{1}{3}},$$

όπου  $K(t) := \int_0^t g(s) ds$  και  $J(t) := \int_0^t \kappa_1^2(s) ds$ .

Ο μέγιστος χρόνος ύπαρξης  $\tau_3$  του συναρτησιακού  $A(t)$  δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\tau_3 := \left\{ t \geq 0 : \int_0^t e^{3M_s + 3(\lambda_1 K(s) + \frac{1}{2} J(s))} ds \geq \frac{1}{3\lambda \eta} v_0^3(\phi) \right\},$$

και πράγματι το συναρτησιακό  $A(t)$  αποσβένει σε πεπερασμένο χρόνο υπο το γεγονός  $\{\tau_3 < +\infty\}$ . Λαμβάνοντας υπόψη ότι  $0 \leq v_t(\phi) \leq A(t)$  συμπεραίνουμε ότι ο χρόνος  $\tau_3$  είναι το άνω όριο του χρόνου στάσης  $\tau$  για  $v_t(\phi)$ , και συνεπώς η συνάρτηση

$$t \mapsto \int_{\Omega} e^{M_t} z_t(x) \phi(x) dx,$$

αποσβένει σε πεπερασμένο χρόνο υπο τη συνθήκη  $\{\tau_3 < +\infty\}$ . Χρησιμοποιώντας τώρα τη σχέση (5.27) καθώς και το γεγονός ότι η απεικόνιση  $t \mapsto e^{M_t}$  φράσσεται κάτω από το μηδέν (βλέπε τις σχέσεις (5.36), (5.37) και δεδομένου ότι η συνάρτηση  $\kappa_1(t)$  είναι φραγμένη) στο  $[0, \tau_3]$ , όταν  $\tau_3 < \infty$ , συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση  $t \mapsto \inf_{\Omega} z_t$  δεν μπορεί να μείνει μακριά από το μηδέν στο διάστημα  $[0, \tau_3]$  με  $\tau_3 < \infty$ . Επομένως, η διαδικασία  $z_t$  αποσβένει σε πεπερασμένο χρόνο για  $\{\tau_3 < +\infty\}$  και έτσι ο χρόνος  $\tau_3$  είναι άνω όριο για το χρόνο απόσβεσης της διαδικασίας  $z_t$ .

Παρατηρούμε ότι η διαδικασία  $M_t = \int_0^t \kappa_1(s) dB_s$  είναι συνεχής martingale και έτσι μπορεί να γραφτεί ως μετασχηματισμένη κίνηση Brown  $M_t = B_{J(t)}$ , όπου  $J(t) = [M](t) = \int_0^t \kappa_1^2(s) ds$  είναι η τετραγωνική απόκλιση της  $M$ , (βλέπε [49, Θεώρημα 4.6 σελίδα 174], [5] και Παράρτημα).

Για ευκολία θέτουμε  $\rho := \frac{1}{3\lambda \eta} v_0^3(\phi)$  και έχουμε

$$(5.57) \quad \begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_3 = +\infty) &= \mathbb{P} \left( \int_0^t e^{3M_s + 3(\lambda_1 K(s) + \frac{1}{2} J(s))} ds < \frac{1}{3\lambda \omega} v_0^3(\phi), \quad \text{για όλα τα } t > 0 \right) \\ &= \mathbb{P} \left( \int_0^{+\infty} e^{3B_{J(s)} + 3(\lambda_1 K(s) + \frac{1}{2} J(s))} ds \leq \rho \right) \\ &= \mathbb{P} \left( \int_0^{+\infty} \frac{1}{\kappa_1^2(J^{-1}(s_1))} e^{3B_{s_1} + 3(\lambda_1 K(J^{-1}(s_1)) + \frac{1}{2} s_1)} ds_1 \leq \rho \right) \end{aligned}$$

όπου  $s_1 := J(s)$ .

Σ' αυτό το σημείο θα υποθέσουμε ότι οι συντελεστές  $g(t)$  και  $\kappa_1(t)$  ικανοποιούν την ακόλουθη συνθήκη:

$$(5.58) \quad \frac{1}{\kappa_1^2(t)} e^{3\lambda_1(K(t) + \frac{1}{2} J(t))} \geq C \quad \text{για κάθε } t \geq 0,$$

για κάποια θετική σταθερά  $C$ . Τότε η πιθανότητα (5.57), μέσω της παραδοχής (5.58), γίνεται

$$(5.59) \quad \begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_3 = +\infty) &\leq \mathbb{P} \left( \int_0^{\infty} e^{3B_{s_1} + (-\frac{3}{2} \lambda_1 J(J^{-1}(s_1)) + \frac{3}{2} s_1)} ds_1 \leq \frac{\rho}{C} \right) \\ &= \mathbb{P} \left( \int_0^{\infty} e^{3B_{s_1} + \frac{3}{2}(1-\lambda_1)s_1} ds_1 \leq \frac{\rho}{C} \right). \end{aligned}$$



Στη συνέχεια εφαρμόζουμε αλλαγή μεταβλητής:  $s_2 \mapsto \left(\frac{3}{2}\right)^2 s_1$ , και έτσι ξανά μέσω της ιδιότητας κλιμάκωσης της  $B_t$  η σχέση (5.59) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_3 = +\infty) &\leq \mathbb{P}\left(\frac{4}{9} \int_0^\infty e^{3B_{\frac{4}{9}s_2} + \frac{3}{2}(1-\lambda_1)\frac{4}{9}s_2} ds_2 \leq \frac{\rho}{C}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\int_0^\infty e^{2\left(\frac{1-\lambda_1}{3}\right)s_2 + 2B_{s_2}} ds_2 \leq \frac{9\rho}{4C}\right) \\ (5.60) \quad &= \mathbb{P}\left(\int_0^{+\infty} e^{2B_s^{(\mu)}} ds \leq \frac{9\rho}{4C}\right), \end{aligned}$$

όπου  $\mu := \frac{1-\lambda_1}{3}$  και  $B_s^{(\mu)} := B_s + \mu s$ .

Στη συνέχεια διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- (i) Αρχικά υποθέτουμε ότι  $\mu < 0$ , δηλαδή ότι έχουμε  $\lambda_1 > 1$ . Τότε λόγω της σχέσης (5.60) και χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα με την Υποενοότητα 5.2β' συμπεραίνουμε ότι

$$(5.61) \quad \mathbb{P}(\tau_3 = +\infty) \leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{2Z_{-\mu}} \leq \frac{9\rho}{4C}\right) = 1 - \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^{\frac{2C}{9\rho}} y^{-\mu-1} e^{-y} dy = \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_{\frac{2C}{9\rho}}^\infty y^{-\mu-1} e^{-y} dy,$$

(βλέπε [97, Πρόρισμα 1.2 σελίδα 95] και Παράρτημα).

Συνεπώς, από τη παραπάνω σχέση (5.61) προκύπτει ότι

$$(5.62) \quad \mathbb{P}(\tau_3 < +\infty) = 1 - \mathbb{P}(\tau_3 = +\infty) \geq \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^{\frac{2C}{9\rho}} y^{-\mu-1} e^{-y} dy.$$

- (ii) Στην περίπτωση όπου  $\mu \geq 0$ , δηλαδή όταν  $\lambda_1 \leq 1$ , μέσω του επαναληπτικού νόμου των λογαρίθμων για τη διαδικασία  $B_s$ , (βλέπε (5.36) και (5.37)), έχουμε

$$\int_0^{+\infty} e^{2B_s^{(\mu)}} ds = +\infty$$

και έτσι

$$\mathbb{P}[\tau = +\infty] = \mathbb{P}\left(\int_0^{+\infty} e^{2B_s^{(\mu)}} ds \leq \frac{9\rho}{4C}\right) = 0.$$

από τη τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{P}[\tau < +\infty] = 1 - \mathbb{P}[\tau = +\infty] = 1$$

και έτσι σ' αυτή τη περίπτωση το συναρτησιακό  $A(t)$  αποσβένει σ.β. ανεξάρτητα από την αρχική συνθήκη  $v_0$  και την παράμετρο  $\lambda$ . Αυτό συνεπάγεται ότι οι διαδικασίες  $v_t$  και  $z_t$  αποσβένουν επίσης.

**Θεώρημα 32.** Υποθέτουμε ότι η υπόθεση (5.58) ισχύει για τις θετικές συνεχείς συναρτήσεις  $g(t), \kappa_1(t) > 0$ . Τότε συμπεραίνουμε τα εξής:

- (i) Αν  $\lambda_1 > 1$  η πιθανότητα απόσβεσης της ασθενούς λύσης του προβλήματος (5.13) είναι κάτω φραγμένη και το κάτω φράγμα δίνεται από τη σχέση (5.61),
- (ii) Αν  $\lambda_1 \leq 1$  τότε η ασθενής λύση του προβλήματος (5.13) αποσβένει σε πεπερασμένο χρόνο  $\tau < \infty$  σ.β.

**Παρατήρηση 14.** Αξίζει να σημειωθεί ότι στην ειδική περίπτωση όπου  $g(t) = 1, \kappa_1(t) = \kappa$ , σταθερές και  $h(x, t) = 1$  τότε μέσω της σχέσης (5.57) προκύπτει το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 30.

**Παρατήρηση 15.** Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι από το Θεώρημα 32 (ii) συμπεραίνουμε ότι όταν ο συντελεστής διάχυσης  $g(t)$  είναι αρκετά μεγάλος, όπως καθορίζεται από την συνθήκη (5.58), τότε η συμπεριφορά της απόσβεσης κυριαρχεί για την περίπτωση ενός μεγάλου χωρίου  $\Omega$ . Αυτό φαίνεται να έρχεται σε αντίθεση με αυτό που έχει επισημανθεί στην Παρατήρηση 13, ωστόσο, συμφωνεί πλήρως με το φαινόμενο που παρατηρείται στην εργασία [61] όπου ένας ισχυρός συντελεστής αντίδρασης, ενισχυμένος από την εξέλιξη του υποκείμενου χωρίου, "ανταγωνίζεται" ενάντι της εμφάνισης της ιδιομορφίας.

**Παρατήρηση 16.** Σημειώνεται ότι εφόσον οι συναρτήσεις  $K(t)$  και  $J(t)$  είναι αύξουσες έχουμε ότι

$$e^{3\lambda_1(K(t)+\frac{1}{2}J(t))} \geq e^{3\lambda_1(K(0)+\frac{1}{2}J(0))} = 1,$$

και έτσι η συνθήκη (5.58) ισχύει υπο την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση  $\kappa_1(t)$  είναι άνω φραγμένη, δηλαδή  $\sup_{(0,\infty)} \kappa_1(t) = L < \infty$ . Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι  $C = \frac{1}{L^2}$ .

Εναλλακτικά, εάν η συνάρτηση  $\kappa_1(t)$  είναι μη φραγμένη καθώς  $t \rightarrow \infty$  αλλά ικανοποιεί την αυξητική συνθήκη

$$\frac{d\kappa_1^2(t)}{dt} \leq \beta\kappa_1^2(t), \quad t > 0, \quad \text{για κάποιο } \beta > 0,$$

τότε από τον κανόνα του  $L'$  Hôpital μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{J(t)}}{\kappa_1^2(t)} = \infty$$

και τότε χρησιμοποιώντας την μονοτονικότητα της συνάρτησης  $K(t)$  πάλι έχουμε την ισχύ της υπόθεσης (5.58) με  $C = 1$ .

Σε σχέση με τις εφαρμογές έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να προσομοιώσουμε τη стоχαστική διαδικασία που περιγράφει τη λειτουργία της συσκευής MEMS και έτσι να διερευνήσουμε υπό ποιες συνθήκες παρατηρείτε το φαινόμενο της απόσβεσης. Για το σκοπό αυτό στην παρακάτω ενότητα παρουσιάζουμε έναν τέτοιο αριθμητικό αλγόριθμο μαζί με διάφορες σχετικές προσομοιώσεις για πρόβλημα (3).

## 5.3 Αριθμητική μελέτη

### 5.3α' Προσέγγιση Πεπερασμένων Στοιχείων

Στη τρέχουσα ενότητα παρουσιάζεται η αριθμητική μελέτη του στοχαστικού προβλήματος (3) στη περίπτωση της μίας διάστασης. Για τον σκοπό αυτό εφαρμόζουμε μια μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων για τη διακριτοποίηση στο χώρο και μια ημι-πεπλεγμένη στο χρόνο μέθοδο Euler. Η ημιπεπλεγμένη μέθοδος *Euler* επιλέχθηκε με το κριτήριο ότι είναι ένας καλός συνδυασμός των ακόλουθων χαρακτηριστικών: Αφ' ενός έχει πιο καλές ιδιότητες ευστάθειας και για μεγαλύτερο εύρος παραμέτρων σε σχέση με μια αναλυτική μέθοδο και αφ' ετερου η υλοποίηση της είναι πιο απλή και εξασφαλίζει μεγαλύτερη ταχύτητα στους υπολογισμών σε σύγκριση με μια πλήρως πεπλεγμένη μέθοδο (βλέπε [67]). Σ' αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι ο θόρυβος είναι πολλαπλασιαστικός και είναι της μορφής  $\sigma(u) dW_t$  για  $\sigma(u) = \kappa(1-u)$  με  $\kappa > 0$ . Υποθέτουμε επίσης ότι έχουμε ομογενείς συνθήκες (της μορφής) Dirichlet στα σημεία  $x = 0, 1$ , αν και ορισμένα από τα αριθμητικά πειράματα που παρουσιάζονται στη συνέχεια αφορούν τόσο ομογενείς όσο και μη ομογενείς συνθήκες Robin. Η ομογενής συνθήκη Dirichlet  $u(0, t) = u(1, t) = 0$  αντιστοιχεί στο να έχουμε  $z = 1$  σε αυτά τα σημεία στο ισοδύναμο πρόβλημα (5.20). Η περίπτωση αυτή αξίζει να μελετηθεί διότι πρόκειται για μια περίπτωση που δεν καλύπτεται από την ανάλυση της Ενότητας 5.2. Εφαρμόζουμε διακριτοποίηση στο διάστημα  $[0, T] \times [0, 1]$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $0 \leq x \leq 1$  με  $t_n = n\delta t$  και το χρονικό βήμα είναι  $\delta t = [T/N]$ , όπου  $N$  είναι ο αριθμός των χρονικών βημάτων. Επίσης τα σημεία του πλέγματος στο διάστημα  $[0, 1]$ , είναι τα  $x_j = j\delta x$ , για  $\delta x = 1/M$  και  $j = 0, 1, \dots, M$ . Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων για το πρόβλημα (3). Έστω  $\Phi_j, j = 1, \dots, M-1$ , η τυπική γραμμική συνάρτηση βάσης (B-spline) στο διάστημα  $[0, 1]$ ,

$$(5.63) \quad \Phi_j = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{\delta x}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j, \\ \frac{x_{j+1}-x}{\delta x}, & x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0, & \text{παντού αλλού στο } [0, 1], \end{cases}$$

για  $j = 1, 2, \dots, M-1$ . Θέτουμε  $u(x, t) = \sum_{j=1}^{M-1} a_{u_j}(t)\Phi_j(x)$ ,  $t \geq 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση για τη συνάρτηση  $u$  στην εξίσωση (3α') και εφαρμόζοντας την μέθοδο Galerkin, δηλαδή πολλαπλασιάζοντας με  $\Phi_i$ , για  $i = 1, 2, \dots, M-1$  και ολοκληρώνοντας ως προς  $x$

στο διάστημα  $[0, 1]$ , προκύπτει το σύστημα εξισώσεων για τους συντελεστές  $a_{u_j}$  όπως φαίνεται παρακάτω:

$$(5.64) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^{M-1} da_{u_j}(t) \langle \Phi_j(x), \Phi_i(x) \rangle &= - \sum_{j=1}^{M-1} a_{x_j}(t) \langle \Phi'_j(x), \Phi'_i(y) \rangle \\ &+ \left\langle F \left( \sum_{j=1}^{M-1} a_{u_j}(t) \Phi_j(x) \right), \Phi_i(x) \right\rangle, \\ &+ \left\langle \sigma \left( \sum_{j=1}^{M-1} a_{u_j}(t) \Phi_j(x) \right) dW(x, t), \Phi_i(x) \right\rangle, \end{aligned}$$

όπου  $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx$  και  $i = 1, 2, \dots, M - 1$ , και στη δική μας περίπτωση  $F(s) := \frac{\lambda}{(1-s)^2}$ ,  $\sigma(s) = \kappa(1-s)$ .

Θέτοντας  $a_u = [a_{u_1}, a_{u_2}, \dots, a_{u_{M-1}}]^T$  το σύστημα των εξισώσεων για την διανυσματική συνάρτηση  $a_u$  παίρνει τη μορφή

$$A da_u(t) = -Ba_u(t) + b(t) + b_s(t),$$

φορ

$$\begin{aligned} b(t) &= \left\{ \left\langle F \left( \sum_{j=1}^{M-1} a_{u_j}(t) \Phi_j(x) \right), \Phi_i(x) \right\rangle \right\}_i, \\ b_s(t) &= \left\{ \left\langle \sigma \left( \sum_{j=1}^{M-1} a_{u_j}(t) \Phi_j(x) \right) dW(x, t), \Phi_i(x) \right\rangle \right\}_i, \end{aligned}$$

ο τελευταίος όρος  $b_s$  προέρχεται από το αντίστοιχο ολοκλήρωμα Itô. Επίσης έχουμε  $\partial_t W(x, t) \simeq \Delta W_h(x, t) = W_h(x, t + \delta t) - W_h(x, t)$  όπου  $W_h(x, t)$  είναι το πεπερασμένο άθροισμα που δίνει τη διακριτή προσέγγιση του  $W(x, t)$ .

Πιο συγκεκριμένα, η προσέγγιση  $W_h$ , για ένα σημείο  $x$  στο  $[0,1]$  θα πρέπει να έχει τη μορφή  $W_h(x, t) := \sum_{j=1}^{M-1} \sqrt{q_j} \chi_j \beta_j(t)$ . Επιπλέον, για να παίρνουμε την ίδια διαδρομή δείγματος  $W(x, t)$  όταν μεταβάλουμε το χρονικό βήμα χρησιμοποιούμε το βήμα χρόνου αναφοράς  $\delta t_r = T/(mN)$ ,  $m \in \mathbb{N}^+$ . Οι στοιχειώδεις μεταβολές (*increments*) σε διαστήματα μεγέθους  $\delta t = m\delta t_r$  δίνονται από τη σχέση

$$W_h(x, t + \delta t) - W_h(x, t) = \sum_{n=0}^{m-1} W_h(x, t + t_{n+1}) - W_h(x, t + t_n).$$

Επιπλέον, προσεγγίζουμε τον λευκό θόρυβο στο χρόνο και στο χώρο παίρνοντας ότι

$$W_h(x, t^{n+1}) - W_h(x, t^n) = \sqrt{\delta t_r} \sum_{j=1}^{M-1} \sqrt{q_j} \chi_j \xi_j^n,$$

όπου  $\xi_j^n := (\beta_j(t_{n+1}) - \beta_j(t_n))/\sqrt{\delta t_r}$  και  $\xi_j^n \sim N(0, 1)$  είναι ανεξάρτητες, ταυτόσημα κατανομημένες (i.i.d.) τυχαίες μεταβλητές για ανεξάρτητες, ταυτόσημες κατανομημένες (i.i.d.) κινήσεις Brown  $\beta_j(t)$ . Επίσης ως βάση του χώρου  $L^2(0, 1)$  επιλέγουμε το σύνολο των ιδιοσυναρτήσεων  $\chi_j = \chi_j(x) = \sqrt{2} \sin(j\pi x)$ ,  $j \in \mathbb{N}^+$  ενώ οι συναρτήσεις  $q_j$  επιλέγονται να είναι της μορφής

$$(5.65) \quad q_j = \begin{cases} l^{-(2r+1+\epsilon)} & j = 2l + 1, j = 2l, \\ 0 & j = 1, \end{cases}$$

όπου  $l \in \mathbb{N}$ ,  $r$  είναι η παράμετρος ομαλότητας  $0 \ll \epsilon < 1$  για να έχουμε μια  $H_0^r(0, 1)$ - εκτιμημένη διαδικασία. Για τον αριθμητικό χειρισμό του θορύβου ακολουθήθηκε η μεθοδολογία που περιγράφεται στην αναφορά [67] (κεφάλαιο 10).

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε μια ημι-πεπλεγμένη μέθοδος Euler ως προς τον χρόνο παίρνοντας

$$A da_u(t_n) \simeq A (a_u^{n+1} - a_u^n) / (\delta t) = -Ba_u^{n+1} + b(t_n) + b_s(t_n),$$

ή

$$(A + \delta t B) a_u^{n+1} = a_u^n + \delta t b(t_n) + \delta t b_s(t_n),$$

όπου οι  $A$  και  $B$  είναι πίνακες διάστασης  $(M-1) \times (M-1)$  και έχουν μορφή

$$A = \delta x \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, B = \frac{1}{\delta y} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Επιπλέον

$$b^n = b(t_n) = \left\{ \left\langle F \left( \sum_{j=0}^{M-1} a_{u_j}^n \Phi_j(x) \right), \Phi_i(x) \right\rangle \right\}_i,$$

$$b_s^n = b_s(t_n) = \left\{ \left\langle \sigma \left( \sum_{j=0}^M a_{u_j}^n \Phi_j(x) \right) \Delta W_h^n, \Phi_i(x) \right\rangle \right\}_i,$$

για  $a_{u_j}^n = a_{u_j}(t_n)$ ,  $i = 1, \dots, M-1$ .

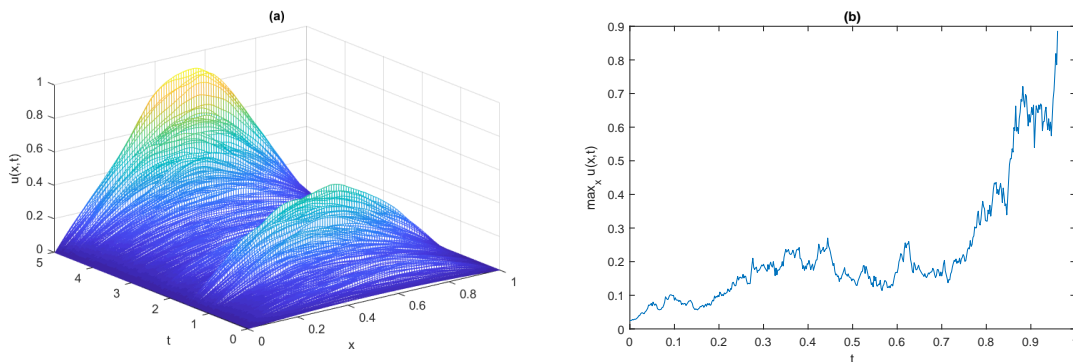
Τέλος, το αντίστοιχο αλγεβρικό σύστημα για το  $a_u^n$  μετά από κατάλληλο χειρισμό γίνεται

$$(5.66) \quad a_u^{n+1} = (A + \delta t B)^{-1} [a_u^n + \delta t b^n + \delta t b_s^n],$$

με το διάνυσμα  $a_u^0$  να καθορίζεται από την αρχική συνθήκη.

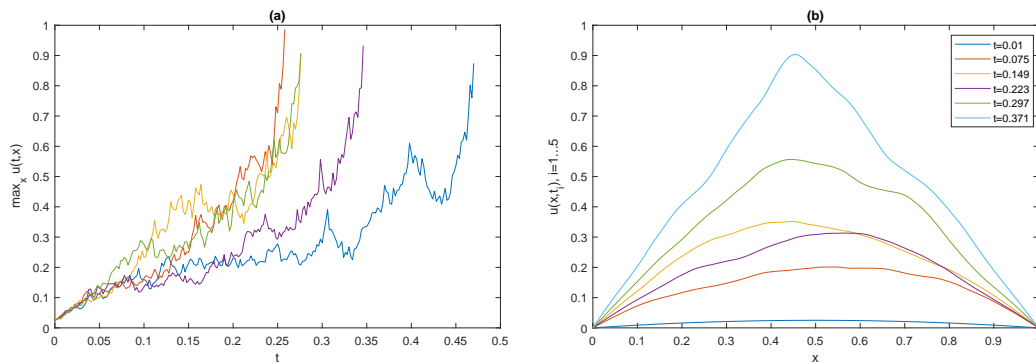
### 5.3β' Προσομοιώσεις

Αρχικά παρουσιάζουμε το μοντέλο της αριθμητικής λύσης του προβλήματος (3) στο Σχήμα 5.3(α) για  $\lambda = 1$ ,  $\kappa = 1$ ,  $r = 0.1$  αρχική συνθήκη  $u(x, 0) = \alpha x(1-x)$  για  $\alpha = 0.1$  και ομογενείς συνθήκες Dirichlet ( $\beta \rightarrow \infty$ ,  $\beta_c = 0$ ). Σ' αυτήν την υλοποίηση, το φαινόμενο της απόσβεσης είναι εμφανές. Για διαφορετική υλοποίηση, αλλά με τις ίδιες παραμέτρους στο Σχήμα 5.3(β) σχεδιάζεται το μέγιστο της λύσης σε κάθε βήμα, και παρατηρείται και πάλι μια παρόμοια συμπεριφορά απόσβεσης.



Σχήμα 5.3: (α) Υλοποίηση της αριθμητικής λύσης του προβλήματος (3) με  $\lambda = 1$ ,  $k = 1$ ,  $M = 102$ ,  $N = 10^4$ ,  $r = 0.1$  και αρχική συνθήκη  $u(x, 0) = \alpha x(1-x)$  για  $\alpha = 0.1$ . (β) Διάγραμμα της νόρμας  $\|u(\cdot, t)\|_\infty$  με διαφορετική υλοποίηση αλλά με τις ίδιες τιμές των παραμέτρων.

Στη συνέχεια στο Σχήμα 5.4(α) παρατηρούμε τη συμπεριφορά απόσβεσης πέντε υλοποιήσεων της αριθμητικής λύσης του προβλήματος (3) για  $\lambda = 2$ . Σε μια επιπλέον υλοποίηση που απεικονίζεται στο Σχήμα 5.4(β) μπορεί να φανεί η χωρική κατανομή της αριθμητικής λύσης σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.



Σχήμα 5.4: (α) Γράφημα της νόρμας  $\|u(\cdot, t)\|_\infty$  της αριθμητικής λύσης του προβλήματος σε πέντε διαφορετικές υλοποιήσεις (3) με  $\lambda = 2$ ,  $k = 1$ ,  $M = 102$ ,  $N = 10^4$ ,  $r = 0.1$  και αρχική συνθήκη  $u(x, 0) = \alpha x(1 - x)$  για  $c = 0.1$ . (β) Διάγραμμα της λύσης  $u(x, t_i)$  ως προς το χώρο από διαφορετική υλοποίηση αλλά με τις ίδιες τιμές παραμέτρων για πέντε χρονικές στιγμές.

Μια ενδιαφέρουσα κατεύθυνση που αξίζει να διερευνηθεί είναι η εξαγωγή εκτιμήσεων σχετικά με την πιθανότητα απόσβεσης σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα  $[0, T]$  για  $T > 0$ . Είναι γνωστό, (βλ. [57]), ότι για συνοριακές συνθήκες Dirichlet, η λύση  $u$  αποσβένει σε πεπερασμένο χρόνο  $T_q$  για αρκετά μεγάλες τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  ή για μεγάλα αρχικά δεδομένα. Συμφωνα με την ανάλυση που έχει προηγηθεί γνωρίζουμε επιπλέον ότι η τελικά η λύση του (3) αποσβάνει σε κάθε περίπτωση.

Από την άποψη της πρακτικής εφαρμογής, μια εκτίμηση για το στοχαστικό μοντέλο της πιθανότητας για την οποία  $T_q < T$ , δηλαδή της πιθανότητας να αποσβάνει ή όχι λύση σε ένα συγκεκριμένο διάστημα  $[0, T]$ , θα ήταν χρήσιμη σε σχέση με τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ .

Στον Πίνακα (T1) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα ενός τέτοιου αριθμητικού πειράματος. Συγκεκριμένα, υλοποιούμε  $N_R$  αριθμητικές επιλύσεις του προβλήματος και στη συνέχεια στην πρώτη στήλη αναγράφονται οι τιμές του  $\lambda$  που λαμβάνονται υπόψη, ενώ στη δεύτερη στήλη αναγράφεται ο αριθμός των περιπτώσεων κατά τις οποίες παρατηρείται απόσβεση μέσα στο χρονικό διάστημα της προσομοίωσης πριν το χρόνο  $T$ . Στις δύο τελευταίες στήλες δίνεται ο μέσος όρος  $m(T_q)$  και η διακύμανση  $Var(T_q)$  του χρόνου απόσβεσης αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, ο χρόνος απόσβεσης  $T_q$  υπολογίζεται κατά προσέγγιση ως  $T_q \simeq t_m$  για  $t_m$  το μέγιστο χρονικό βήμα για το οποίο  $\max_j (u(x_j, t_m)) \leq 1 - \varepsilon$  για ένα μικρό αριθμό  $\varepsilon$ . Στις προσομοιώσεις που ακολουθούν έχουμε  $\varepsilon = 2.2204 \cdot 10^{-16}$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι επιλέχθηκαν να είναι ίδιες όπως στις προηγούμενες προσομοιώσεις αλλά με  $\kappa = 0.1$ .

Από τα αποτελέσματα στον Πίνακα (T1) παρατηρούμε ότι σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα το στοχαστικό πρόβλημα εκτελεί μια δυναμική συμπεριφορά που μοιάζει με εκείνη του ντετερμινιστικού προβλήματος. Συγκεκριμένα, αυξάνοντας την τιμή  $\lambda$  αρχικά δεν παρατηρείται απόσβεση σε αυτό το χρονικό διάστημα, ενώ μετά το  $\lambda > \lambda_T^* > 1$  έχουμε απόσβεση σ.β. σε χρόνο  $T_q$  με την μέση τιμή και τη διακύμανση να μειώνονται όσο αυξάνεται το  $\lambda$ .

### Πίνακας (T1)

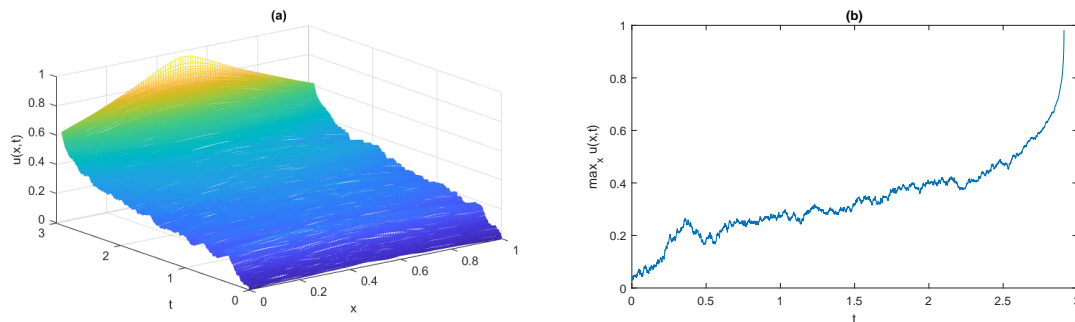
Επαναλήψεις της αριθμητικής λύσης του προβλήματος (3) για  $N_R = 1000$  στο χρονικό διάστημα  $[0, 10]$ .

$\lambda$	Αριθμός εμφανίσεων απόσβεσης	$m(T_q)$	$\sigma^2(T_q)$
0.5	0	-	-
1	0	-	-
1.5	1000	1.4642	0.0071
2	1000	0.3542	3.7852e-05
2.5	1000	0.2184	4.2468e-06

Επιπρόσθετα πραγματοποιούμε ένα άλλο πείραμα για χρόνο προσομοίωσης  $T = 1$  και  $\lambda = 1.65$ , και για μεγαλύτερο αριθμό υλοποιήσεων  $N_R = 10^4$ , ενώ οι υπόλοιπες τιμές των παραμέτρων διατηρούνται όπως στον

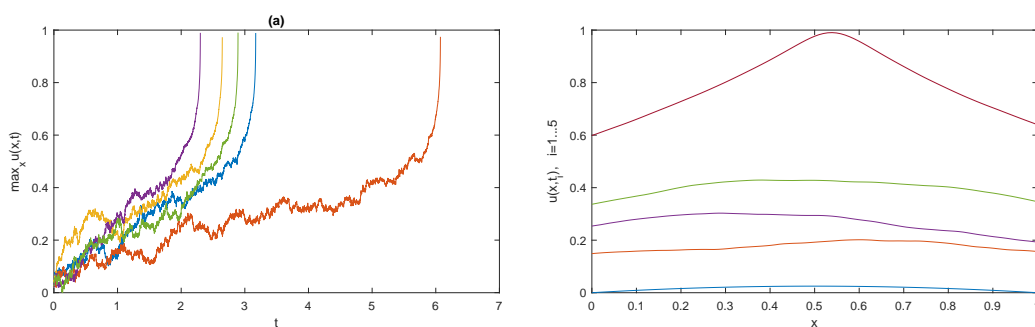
Πίνακα (T1). Η τιμή του  $\lambda$  επιλέχθηκε έτσι ώστε να βρίσκεται μέσα σε ένα εύρος των τιμών για το οποίο η εμφάνιση απόσβεσης δεν είναι ούτε σχεδόν σίγουρη αλλά ούτε και σχεδόν αδύνατη για το χρονικό διάστημα της προσομοίωσης. Τότε λαμβάνουμε μια αριθμητική εκτίμηση για την πιθανότητα απόσβεσης 0.3464 με  $m(Tq) = 0.975750577$  και  $Var(Tq) = 1.79684122$ .

Στη συνέχεια εξετάζουμε την περίπτωση μη ομογενών συνθηκών της μορφής (3β') ή ισοδύναμα (5.5β') με  $\beta = \beta_c$ , επειδή μια τέτοια περίπτωση παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον λόγω των αποτελεσμάτων απόσβεσης της Ενότητας 5.2. Μια τέτοια προσομοίωση που εφαρμόζει τον προηγούμενο αριθμητικό αλγόριθμο για τη συγκεκριμένη περίπτωση παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.5 (α). Το συγκεκριμένο κομμάτι αφορά το πρόβλημα (3) και οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται εδώ είναι  $\lambda = 0.3$ ,  $k = 1$ ,  $\beta = \beta_c = 1$ . Επίσης, στο Σχήμα 5.5 (β) απεικονίζεται η απόσβεση της λύσης ως προς τη νόρμα  $\|u(\cdot, t)\|_\infty$  για μία συγκεκριμένη υλοποίηση.



Σχήμα 5.5: (α) Υλοποίηση της αριθμητικής λύσης του προβλήματος (3) για  $\lambda = 0.3$ ,  $\kappa = 1$ ,  $M = 102$ ,  $N = 10^4$ ,  $r = 0.1$ , αρχική συνθήκη  $u(x, 0) = \alpha x(1 - x)$  με  $\alpha = 0.1$  και μη ομογενής συνοριακές συνθήκες  $\beta = \beta_c = 1$ . (β) Διάγραμμα  $\|u(\cdot, t)\|_\infty$ . Η συμπεριφορά απόσβεσης είναι εμφανής.

Ομοίως, το επόμενο σύνολο γραφημάτων στο Σχήμα 5.6(α) εμφανίζεται η συμπεριφορά απόσβεσης πέντε υλοποιήσεων της αριθμητικής λύσης του προβλήματος (3) για  $\lambda = 0.3$ . Σε μια επιπλέον υλοποίηση που παρέχεται από το Σχήμα 5.6 (β) παρουσιάζεται η χωρική κατανομή της αριθμητικής λύσης σε διαφορετικά χρονικά σημεία.



Σχήμα 5.6: (α) Γράφημα της νόρμας  $\|u(\cdot, t)\|_\infty$  της αριθμητικής λύσης του προβλήματος (3) για  $\lambda = 2$ ,  $\kappa = 1$ ,  $M = 102$ ,  $N = 10^4$ ,  $r = 0.1$  και αρχική συνθήκη  $u(x, 0) = \alpha x(1 - x)$  με  $\alpha = 0.1$ . (β) Διάγραμμα της λύσης  $u(x, t_i)$  για διαφορετικές υλοποιήσεις με τις ίδιες τιμές των παραμέτρων σε πέντε χρονικές στιγμές  $t_i$  για  $i = 1 \dots 5$ .

Επιπλέον στον παρακάτω πίνακα (T2) παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα ενός τέτοιου αριθμητικού πειράματος. Πράγματι, υλοποιώντας  $N_R$  επαναλήψεις προκύπτουν ανάλογα αποτελέσματα όπως στον Πίνακα (T1).

**Πίνακας (T2)**

Υλοποίηση της αριθμητικής λύσης του προβλήματος (3) στην περίπτωση μη ομογενών συνθηκών Robin για  $N_R = 1000$  στο χρονικό διάστημα  $[0, 1]$ .

$\lambda$	Αριθμός εμφανίσεων απόσβεσης	$m(T_q)$	$\sigma^2(T_q)$
0.2	0	-	-
0.4	0	-	-
0.6	0	-	-
0.8	1000	0.75945	0.0014
1	1000	0.5547	5.41553ε-04

Παρατηρούμε μια μετάβαση της συμπεριφοράς της λύσης  $u$  γύρω από την τιμή  $\lambda \sim 0.7$ . Έτσι, στον επόμενο πίνακα, Πίνακα (T3), εστιάζουμε γύρω από αυτήν την τιμή και επισημαίνουμε μια σταδιακή αύξηση του αριθμού των εμφανίσεων απόσβεσης καθώς αυξάνεται η παράμετρος  $\lambda$ .

**Πίνακας (T3)**

Υλοποίηση της αριθμητικής λύσης του προβλήματος (3) στην περίπτωση μη ομογενών συνθηκών Robin για  $N_R = 1000$  στο χρονικό διάστημα  $[0, 1]$ .

$\lambda$	Αριθμός εμφανίσεων απόσβεσης	$m(T_q)$	$Var(T_q)$
0.6	0	-	-
0.65	85	0.9894	10.5387
0.675	594	0.9713	0.6469
0.7	877	0.9380	0.1244
0.75	1000	0.8332	0.0016

Στην επόμενη ακολουθία πειραμάτων επιλύουμε αριθμητικά το πρόβλημα (5.13). Επιλέγουμε τον συντελεστή διάχυσης να έχει τη μορφή  $g = g(t) = c_0 + c_1 \cos(\omega t)$ , με  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = 0.1$ ,  $\omega = 10$ . Θεωρούμε επίσης δυναμικό στον πηγαίο όρο της μορφής  $h(x) = x^b$ , για  $b = \frac{1}{2}$ . Τα αποτελέσματα αυτών των πειραμάτων παρουσιάζονται στον Πίνακα (T4).

**Πίνακας (T4)**

Υλοποιήσεις της αριθμητικής λύσης του προβλήματος (5.13) στην περίπτωση μη ομογενών συνθηκών Robin για  $N_R = 1000$  στο χρονικό διάστημα  $[0, 1]$ .

$\lambda$	Αριθμός εμφανίσεων απόσβεσης	$m(T_q)$	$Var(T_q)$
0.6	0	-	-
0.8	0	-	-
1	776	0.9469	0.26
1.2	1000	0.7432	0.0011
1.4	1000	0.6029	5.2540ε-04

Επιπλέον, εστιάζοντας ξανά στην τιμή  $\lambda \sim 1$  μπορούμε να παρατηρήσουμε τη μεταβατική συμπεριφορά του συστήματος στον Πίνακα (T5) για  $T = 1$ .

**Πίνακας (T5)**

Υλοποιήσεις της αριθμητικής λύσης του προβλήματος (5.13) στην περίπτωση μη ομογενών συνθηκών Robin για  $N_R = 1000$  στο χρονικό διάστημα  $[0, 1]$ .

$\lambda$	Αριθμός εμφανίσεων απόσβεσης	$m(T_q)$	$Var(T_q)$
0.9	0	0	0
0.95	35	0.9914	27.1037
0.97	191	0.9858	4.1184
0.99	431	0.9740	1.2535
0.995	502	0.9701	0.9347
1.1	993	0.8501	0.0069

### 5.4 Παραλλαγή του στοχαστικού μοντέλου με τη προσθήκη κλασματικής κίνησης Brown

Η μεθοδολογία που θα ακολουθήσουμε είναι η ίδια με αυτή στην Ενότητα 5.2 για τον υπολογισμό της πιθανότητας απόσβεσης στο στοχαστικό πρόβλημα. Η προσθήκη της κλασματικής κίνησης Brown παρουσιάζει από τη μία μαθηματικό ενδιαφέρον ενώ από την άλλη αποτελεί ένα πιο γενικό μοντέλο θορύβου και άρα είναι πιο ρεαλιστική σε σχέση με την κανονική κίνηση Brown. Η κύρια διαφορά μεταξύ κλασματικής κίνησης Brown και κανονικής κίνησης Brown είναι ότι οι ελάχιστες μεταβολές στην κανονική κίνηση Brown είναι ανεξάρτητες, ενώ οι ελάχιστες μεταβολές για την κλασματική κίνηση Brown δεν είναι.

#### 5.4α' Το στοχαστικό πρόβλημα στη περίπτωση της κλασματικής κίνησης Brown

Σε αυτή την Ενότητα θέλουμε να διερευνήσουμε την συμπεριφορά απόσβεσης του παρακάτω προβλήματος

$$(5.67\alpha') \quad dz = (\Delta z - \lambda z^{-2})dt + k z dB_t^H, \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$(5.67\beta') \quad \frac{\partial z}{\partial n} + \beta z = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad t > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, k > 0,$$

$$(5.67\gamma') \quad 0 < z(x, 0) = z_0(x) \leq 1, \quad x \in \Omega,$$

όπου  $\beta$  και  $k$  είναι πραγματικές σταθερές. Σε αυτό το σημείο η διαδικασία  $\{B_t^H, t \geq 0\}$  είναι μια πραγματική (real-value) κλασματική κίνηση Brown με δείκτη Hurst,  $H > \frac{1}{2}$ . Ως λύση του προβλήματος στο διάστημα  $(0, T)$  εννοούμε ένα στοιχείο του χώρου  $L^2(\Omega)$ - εκτιμώμενο τυχαίο πεδίο  $z = \{z(\cdot, t), t \geq 0\}$  εάν σ.β.

$$z \in L^2([0, t], H^1(\Omega)) \cap B^{\alpha, 2}([0, t], L^2(\Omega))$$

για όλα  $t < T$  και για κάθε  $\phi \in H^1(\Omega)$  που μηδενίζεται στο  $\partial\Omega$ , όπου  $L^2(\Omega)$  είναι ένας χώρος Hilbert. Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι χώρος  $B^{\alpha, 2}([0, T], L^2(\Omega))$  είναι ο χώρος Banach όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων  $z : [0, t] \rightarrow L^2(\Omega)$  εφοδιασμένος με τη νόρμα  $\|\cdot\|_{\alpha, 2}$  η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\|z\|_{\alpha, 2}^2 = \left( \operatorname{ess\,sup}_{s \in [0, t]} \|u(\cdot, s)\|_2 \right)^2 + \int_0^t \left( \int_0^s \frac{\|z(\cdot, s) - z(\cdot, r)\|_2}{(s-r)^{\alpha+1}} dr \right)^2 ds < +\infty$$

και όπου  $\|\cdot\|_2$  είναι η συνήθης νόρμα στον  $L^2(\Omega)$ . Επίσης για  $\alpha \in (1-H, \frac{1}{2})$  η ασθενής λύση του προβλήματος (5.67) είναι η ακόλουθη

$$(5.68) \quad \int_{\Omega} z(x, t) \phi(x) dx = \int_{\Omega} z_0(x) \phi(x) dx + \int_0^t \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla \phi dx ds - \lambda \int_0^t \int_{\Omega} z^{-2}(x, s) \phi(x) dx ds + k \int_0^t \int_{\Omega} z(x, s) \phi(x) dx dB_s^H,$$

$P$ - σ.β. για κάθε  $t \in (0, T)$ .

Η απαίτηση για το  $z$  να ανήκει στους χώρους  $B^{\alpha, 2}$  υποδηλώνει ότι το ολοκλήρωμα  $\int_0^t \int_{\Omega} z(x, s) \phi(x) dx dB_s^H$  (βλ. [71]) υπάρχει ως ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα Stieltjes. Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε μια νέα στοχαστική διαδικασία,  $v$  που ορίζεται από τη σχέση

$$(5.69) \quad v(x, t) = e^{-kB_t^H} z(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0.$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο τύπος του Itô (βλ. Λήμμα 2.7.1 στο [71]) συνεπάγεται ότι

$$F(B_t^H) = F(0) + \int_0^t F'(B_u^H) dB_u^H,$$

ή ισοδύναμα σε διαφορική μορφή ότι

$$dF(B_t^H) = F'(B_t^H) dB_t^H.$$



Έτσι για  $F(u) = e^{-ku}$  παίρνουμε

$$(5.70) \quad e^{-kB_t^H} = 1 - k \int_0^t e^{-kB_s^H} dB_s^H,$$

αφού  $W_0 = 0$  και ισοδύναμα έχουμε

$$(5.71) \quad d\left(e^{-kB_t^H}\right) = -ke^{-kB_t^H} dB_t^H.$$

Στη συνέχεια συμβολίζουμε  $z(t, \phi) = \int_{\Omega} z(x, t)\phi(x)dx$ . Σε αυτό το σημείο χρειάζεται να παραθέσουμε την ολοκλήρωση κατά παράγοντες για στοχαστικές διαδικασίες για τη περίπτωση της κλασματικής κίνησης Brown (βλέπε σελίδα 184 στο [71]). Πράγματι, η αντίστοιχη σχέση σε αυτή τη περίπτωση είναι η ακόλουθη

$$F(t, Y_t) - F(0, 0) = \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, Y_s) ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, Y_s) \diamond dY_s + \sum_{i,k=1}^m \sigma_i \sigma_k \tilde{C}_{H_i, H_k}(H_i + H_k) \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, Y_s) s^{H_i + H_k - 1} ds.$$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες που αφορά τις διαδικασίες  $It\hat{o}$ , διατυπώνουμε το πρόβλημα (5.67) για τη συνάρτηση  $v$  σε ασθενή μορφή

$$v(t, \phi) = v(0, \phi) + \int_0^t e^{-kB_s^H} dz(s, \phi) + \int_0^t z(s, \phi) d\left(e^{-kB_s^H}\right).$$

από το πρόβλημα (5.67α') και εφαρμόζοντας ανάλογη μεθοδολογία όπως στην εργασία [21] παίρνουμε

$$\begin{aligned} v(t, \phi) &= v(0, \phi) + \int_0^t e^{-kB_s^H} [z(s, \Delta\phi) - \lambda z^{-2}(s, \phi)] ds + k \int_0^t e^{-kB_s^H} z(s, \phi) dB_s^H - k \int_0^t e^{-kB_s^H} z(s, \phi) dB_s^H \\ &= v(0, \phi) + \int_0^t v(s, \Delta\phi) ds - \lambda \int_0^t e^{-kB_s^H} (e^{kB_s^H} v(s, \phi))^{-2} ds. \end{aligned}$$

Επιπλέον λόγω του τελεστή της Λαπλασιανής για  $x \in \partial\Omega$  έχουμε

$$v(s, \Delta\phi) = \int_{\Omega} v(x, t) \Delta\phi(x) dx = \int_{\Omega} \Delta v(x, t) \phi(x) dx = \Delta v(s, \phi).$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι η συνάρτηση  $v(x, t)$  ικανοποιεί την εξίσωση

$$(5.72) \quad v(t, \phi) = v(0, \phi) + \int_0^t \Delta v(s, \phi) ds - \lambda \int_0^t e^{-3kB_s^H} v^{-2}(s, \phi) ds,$$

η οποία αποτελεί την ασθενή διατύπωση του ακόλουθου προβλήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων

$$(5.73\alpha') \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \Delta v(x, t) - \lambda e^{-3kB_t^H} v^{-2}(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$(5.73\beta') \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) + \beta v(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad t > 0,$$

$$(5.73\gamma') \quad v(x, 0) = z_0(x), \quad x \in \Omega.$$

Σ' αυτό το σημείο επιλέγουμε την ιδιοσυνάρτηση  $\phi$ , (βλ. [24]), ώστε να ικανοποιεί το πρόβλημα:

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \lambda_1\phi, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu} + \beta\phi = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

όπου  $\lambda_1$  είναι κύρια ιδιοτιμή του  $-\Delta$ , τέτοια ώστε  $\int_{\Omega} \phi(x) dx = 1$ . Κάνοντας αυτή την επιλογή η ασθενής μορφή του προβλήματος γίνεται:

$$v(t, \phi) = v(0, \phi) + \int_0^t -\lambda_1 v(s, \phi) ds - \lambda \int_0^t e^{-3kB_s^H} v^{-2}(s, \phi) ds.$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι λόγω της ανισότητας *Jensen*, και αφού η συνάρτηση  $h(s) = s^{-2}$ ,  $s > 0$  είναι κυρτή και  $\int_{\Omega} \phi dx = 1$ , έχουμε

$$\int_{\Omega} v^{-2}(x, s)\phi(x)dx \geq \left[ \int_{\Omega} v(x, s)\phi(x)dx \right]^{-2} = v^{-2}(s, \phi).$$

Συνεπώς η  $v(t, \phi)$  ικανοποιεί την διαφορική ανισότητα

$$\frac{d}{dt}v(t, \phi) \leq -\lambda_1 v(t, \phi) - e^{-3kB_s^H} v^{-2}(t, \phi),$$

και ως εκ τούτου μέσω του θεωρήματος σύγκρισης παίρνουμε ότι  $v(t, \phi) \geq I(t)$  για όλα  $t \geq 0$ , όπου το συναρτησιακό  $I(\cdot)$  επιλύει το πρόβλημα

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = -\lambda_1 I(t) - \lambda e^{-3kB_s^H} I^{-2}(t), t > 0, \\ I(0) = v(0, \phi). \end{cases}$$

Η διαφορική εξίσωση αυτή είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση *Bernoulli*.

Η λύση μας δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$I(t) = e^{-\lambda_1 t} \left[ -3\lambda \int_0^t e^{3[\lambda_1 s - kB_s^H]} ds + I^3(0) \right]^{1/3}$$

με  $0 \leq t \leq \tau$  όπου  $\tau := \inf \left\{ t \geq 0 \mid \int_0^t e^{3[\lambda_1 s - kB_s^H]} ds \geq \frac{1}{3\lambda} I^3(0) \right\}$ . από αυτή τη σχέση συμπεραίνουμε ότι το  $I(t)$  μηδενίζεται σε πεπερασμένο χρόνο για  $\{\tau < +\infty\}$ . Αφού  $I(t) \leq v(t, \phi)$ , ο χρόνος  $\tau$  είναι το άνω όριο για τον χρόνο της διαδικασίας  $W_s(t) = v(\cdot, \phi)$  και επομένως των χρόνων που παύουν να υπάρχουν οι συναρτήσεις  $v$  και  $z$ . Για την πιθανότητα η λύση να έχει ολική ύπαρξη στο χρόνο έχουμε

$$\mathbb{P}[\tau = +\infty] = \mathbb{P} \left[ \int_0^t e^{-3kB_s^H + 3\lambda_1 s} ds < \frac{1}{3\lambda} I^3(0) \quad \text{για όλα τα } t > 0 \right] = \mathbb{P} \left[ \int_0^{+\infty} e^{-3kB_s^H + 3\lambda_1 s} ds \leq \frac{1}{3\lambda} I^3(0) \right].$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} e^{3\lambda_1 s - 3kB_s^H} ds = \int_0^{+\infty} e^{3\lambda_1 s + 3kB_s^H} ds,$$

και έτσι

$$P \left[ \int_0^{+\infty} e^{3\lambda_1 s - 3kB_s^H} ds \leq \frac{1}{3\lambda} I^3(0) \right] = P \left[ \int_0^{+\infty} e^{3\lambda_1 s + 3kB_s^H} ds \leq \frac{1}{3\lambda} I^3(0) \right].$$

Από την άλλη μεριά, θέτουμε  $\tilde{B}_s^H = 3\lambda_1 s + 3kB_s^H$  και τότε

$$\int_0^{+\infty} e^{3\lambda_1 s + 3kB_s^H} ds = \int_0^{\infty} e^{\tilde{B}_s^H} ds.$$

Τώρα λόγω του ότι  $\int_0^{+\infty} e^x dx = +\infty$ , για  $k > 0$ , παίρνουμε επίσης ότι  $\int_0^{+\infty} e^{\tilde{B}_s^H} ds = +\infty$ , σύμφωνα με το Θεώρημα 6.1 στην αναφορά [89] ή την Πρόταση 3.3 στην εργασία [69]. Επομένως

$$P[\tau = +\infty] = P \left[ \int_0^{+\infty} e^{3\lambda_1 s + 3kB_s^H} ds \leq \frac{1}{3\lambda} I^3(0) \right] = 0,$$

και  $P[\tau < +\infty] = 1 - P[\tau = +\infty] = 1 - 0 = 1$ . Συνεπώς το συναρτησιακό  $I(t)$  αποσβένει σ.β. ανεξάρτητα από την αρχική συνθήκη  $v_0$ , που σημαίνει ότι και η λύση  $v(t)$  αποσβένει επίσης σ.β. όπως και η διαδικασία  $z(x, t)$ .

### 5.4β' Γενίκευση του προβλήματος

Στη συνέχεια θεωρούμε την ακόλουθη πιο γενική μορφή του προβλήματος (5.67) που μελετήσαμε στη προηγούμενη παράγραφο. Συγκεκριμένα θεωρούμε το πρόβλημα

$$(5.74\alpha') \quad dz = (\Delta z(x, t) + \gamma z(x, t) - G(z))dt + kzdB_t^H, \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$(5.74\beta') \quad \frac{\partial z}{\partial n} + \beta z = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad t > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, k > 0,$$

$$(5.74\gamma') \quad 0 < z(x, 0) = z_0(x) \leq 1, \quad x \in \Omega,$$

όπου  $\gamma$  και  $k$  είναι πραγματικές σταθερές και η συνάρτηση  $G(z) = \lambda z^{-2}(x, t)$  ορισμένη στο  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  που ικανοποιεί την αυξητική συνθήκη και  $\alpha \in (1 - H, \frac{1}{2})$ . Σε αυτό το σημείο η  $\{B_t^H, t \geq 0\}$  είναι κλασματική κίνηση Brown με πραγματικές τιμές με δείκτη  $Hurst$ ,  $H > \frac{1}{2}$ . Ως εναλλακτική λύση του προβλήματος στο διάστημα  $(0, T)$  πρέπει να θεωρήσουμε ένα  $L^2(\Omega)$ - εκτιμημένο τυχαίο πεδίο  $z = \{z(\cdot, t), t \geq 0\}$  εάν σ.β.

$$z \in L^2([0, t], H^1(\Omega)) \cap B^{\alpha, 2}([0, t], L^2(\Omega))$$

για όλα  $t < T$  και για κάθε  $\phi \in H^1(\Omega)$  που μηδενίζεται στο  $\partial\Omega$ . Παρακάτω ακολουθεί η διατύπωση του προβλήματος σε ασθενή μορφή

(5.75α')

$$\int_{\Omega} z(x, t)\phi(x)dx = \int_{\Omega} z_0(x)\phi(x)dx + \int_0^t \int_{\Omega} \nabla z \nabla \phi dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} [\gamma z(x, s)\phi(x) - \lambda z^{-2}(x, s)\phi(x)] dx ds$$

(5.75β')

$$+ k \int_0^t \int_{\Omega} z(x, s)\phi(x) dx dB_s^H \quad P - \sigma. \sigma.$$

για κάθε  $t \in (0, T)$ .

Έτσι θέτουμε  $v(x, t) = e^{-kB_t^H} z(x, t)$ ,  $x \in \Omega, t \geq 0$  και λόγω της ταυτότητας του Itô έχουμε

$$e^{-kB_t^H} = 1 - k \int_0^t e^{-kB_s^H} dB_s^H,$$

(βλέπε Λήμμα 2.7.1 [71]), ή σε διαφορική μορφή

(5.76)

$$d(e^{-kB_t^H}) = -k e^{-kB_t^H} dB_t^H.$$

Ακολουθούμε τα ίδια βήματα με την ανάλυση που προηγήθηκε. Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατα παράγοντες, (βλέπε σελίδα 184 στο [71]), παίρνουμε την ασθενής διατύπωση για το  $v$ -πρόβλημα

$$v(t, \phi) = v(0, \phi) + \int_0^t e^{-kB_s^H} dz(s, \phi) + \int_0^t z(s, \phi) d(e^{-kB_s^H}).$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το πρόβλημα (5.74α') καθώς και τη σχέση (5.76) παίρνουμε

$$\begin{aligned} v(t, \phi) &= v(0, \phi) + \int_0^t e^{-kB_s^H} [z(s, \Delta\phi) + \gamma z(s, \phi) - \lambda z^{-2}(s, \phi)] ds + k \int_0^t e^{-kB_s^H} z(s, \phi) dB_s^H - k \int_0^t e^{-kB_s^H} z(s, \phi) dB_s^H \\ &= v(0, \phi) + \int_0^t [v(s, \Delta\phi) + \gamma v(s, \phi)] ds - \lambda \int_0^t e^{-kB_s^H} (e^{kB_s^H} v(s, \phi))^{-2} ds. \end{aligned}$$

Επιπλέον λόγω του γεγονότος ότι η Λαπλασιανή είναι αυτοσυζυγής τελεστής και της συνοριακής συνθήκης  $\phi(x) = 0$  για  $x \in \partial\Omega$  έχουμε

$$v(s, \Delta\phi) = \int_{\Omega} v(x, t) \Delta\phi(x) dx = \int_{\Omega} \Delta v(x, t) \phi(x) dx = \Delta v(s, \phi).$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι η  $v(x, t)$  ικανοποιεί την εξίσωση

$$(5.77) \quad v(t, \phi) = v(0, \phi) + \int_0^t [\Delta v(s, \phi) + \gamma v(s, \phi)] ds - \lambda \int_0^t e^{-3kB_s^H} v^{-2}(s, \phi) ds.$$

Η εξίσωση (5.77) αποτελεί την ασθενή διατύπωση του ακόλουθου προβλήματος

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \Delta v(x, t) + \gamma v(x, t) - \lambda e^{-3kB_s^H} v^{-2}(x, t), \quad x \in \Omega, t > 0,$$

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + \beta v(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0,$$

$$v(x, 0) = z_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega,$$

Σ' αυτό το σημείο επιλέγουμε την ιδιοσυνάρτηση  $\phi$  (5.77) ώστε να ικανοποιεί το πρόβλημα:

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \lambda_1\phi, & x \in \Omega \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu} + \beta\phi = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

όπου  $\lambda_1$  είναι η κύρια ιδιοτιμή του  $-\Delta$  με  $\int_{\Omega} \phi(x) dx = 1$ . Κάνοντας αυτή την επιλογή η ασθενής μορφή του προβλήματος παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} v(t, \phi) &= v(0, \phi) + \int_0^t [-\lambda_1 v(s, \phi) + \gamma v(s, \phi)] ds - \lambda \int_0^t e^{-3kB_s^H} v^{-2}(s, \phi) ds \\ &= v(0, \phi) + \int_0^t [(\gamma - \lambda_1) v(s, \phi)] ds - \lambda \int_0^t e^{-3kB_s^H} v^{-2}(s, \phi) ds. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι λόγω της ανισότητας *Jensen*,

$$\int_{\Omega} v^{-2}(x, s) \phi(x) dx \geq \left[ \int_{\Omega} v(x, s) \phi(x) dx \right]^{-2} = v^{-2}(s, \phi).$$

Συνεπώς η  $v(t, \phi)$  ικανοποιεί την διαφορική ανισότητα

$$\frac{dv(t, \phi)}{dt} \leq (\gamma - \lambda_1) v(t, \phi) - \lambda e^{-3kB_s^H} v^{-2}(t, \phi),$$

και επομένως, μέσω του θεωρήματος σύγκρισης παίρνουμε ότι  $v(t, \phi) \leq I(t)$  για όλα τα  $t \geq 0$ , όπου το συναρτησιακό  $I(\cdot)$  επιλύει το πρόβλημα

$$\frac{dI}{dt} = (\gamma - \lambda_1) I(t) - \lambda e^{-3kB_s^H} I^{-2}(t), \quad t > 0,$$

$$I(0) = v(0, \phi).$$

με λύση

$$I(t) = e^{(\gamma - \lambda_1)t} \left[ I_0^3 - 3\lambda \int_0^t \exp [3(\lambda_1 - \gamma)s - 3kB_s^H] ds \right]^{1/3},$$

με  $0 \leq t < \tau^*$  όπου  $\tau^* := \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \exp [3(\gamma - \lambda_1)s - 3kB_s^H] ds \geq \frac{1}{3\lambda} I_0^3 \right\}$ . Συνεπώς το συναρτησιακό  $I(t)$  εμφανίζει απόσβεση σε πεπερασμένο χρόνο για  $[\tau^* < +\infty]$ . Λόγω της συνθήκης  $I(t) \leq v(t, \phi)$ , προκύπτει ότι ο χρόνος  $\tau^*$  είναι ένα άνω όριο για το χρόνο απόσβεσης του  $v(t, \phi)$ . Δεδομένου ότι το  $\int_{\Omega} \phi(x) dx = 1$  το  $\tau^*$  είναι επίσης ένα άνω όριο για τους χρόνους απόσβεσης των  $v$  και  $z$ . Διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

Αρχικά στην πρώτη περίπτωση υποθέτουμε ότι  $\lambda_1 - \gamma > 0$  ή  $\gamma < \lambda_1$  και έχουμε

$$P[\tau^* = +\infty] = P \left[ \int_0^t e^{3(\lambda_1 - \gamma)s - 3kB_s^H} ds < \frac{1}{3\lambda} v^3(0, \phi) \quad \text{για όλα τα } t > 0 \right],$$

$$= P \left[ \int_0^{+\infty} e^{3(\lambda_1 - \gamma)s - 3kB_s^H} ds \leq \frac{1}{3\lambda} v^3(0, \phi) \right] = 0.$$

Χρησιμοποιώντας το νόμο του επαναληπτικού λογάριθμου για τη διαδικασία  $B_t^H$ , ο οποίος στη συγκεκριμένη περίπτωση έχει τη μορφή

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t^H}{t^H \sqrt{2 \log(\log t)}} = -1$$

και

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t^H}{t^H \sqrt{2 \log(\log t)}} = +1, \quad P - \sigma.β.,$$

συμπεραίνουμε ότι για οποιαδήποτε ακολουθία  $t_n \rightarrow +\infty$  έχουμε

$$B_{t_n}^H \sim \alpha_n t_n^{1/2} \sqrt{2 \log(\log t_n)}$$

με  $\alpha_n \in [-1, 1]$ , και επομένως ισχύει ότι  $\int_0^{+\infty} e^{3(\lambda_1 - \gamma)s - 3kB_s^H} ds = \int_0^{+\infty} e^{3(\lambda_1 - \gamma)s} ds = +\infty$ . Ως εκ τούτου ισχύει και ότι

$$P[\tau < +\infty] = 1 - P[\tau = +\infty] = 1,$$

και συνεπώς έχουμε το  $I(t)$  να αποσβένει σ.β, κάτι που σημαίνει επίσης ότι και οι διαδικασίες  $v(x, t)$  και  $z(x, t)$  αποσβένουν σε πεπερασμένο χρόνο με  $T^* \leq \tau^*$  σ.β. (για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. [21]).

Για τη δεύτερη περίπτωση όπου  $\lambda_1 - \gamma < 0$  ή  $\lambda_1 < \gamma$ . Προκειμένου να παρέχουμε μια εκτίμηση της πιθανότητας απόσβεσης σε πεπερασμένο χρόνο για τη λύση (5.74) θα χρησιμοποιήσουμε μια εκτίμηση των εμπλεκόμενων αόριστων ολοκληρωμάτων των συναρτήσεων της κλασματικής κίνησης *Brown* που δίνονται στο [24].

Συγκεκριμένα το Θεώρημα 3.1 της εργασίας [24] διατυπώνεται ως εξής

**Θεώρημα 33.** Έστω ότι  $\{B_t^H, t \geq 0\}$  να είναι μια κλασματική κίνηση *Brown* με την παράμετρο *Hurst*  $H \in (0, 1)$ . Για κάθε  $\alpha > H$  και  $\sigma > 0$  ισχύει ότι

$$P \left[ \int_0^{\infty} e^{-\delta s + \sigma B_s^H} ds < x \right] \leq \exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{\alpha}{\alpha - H} \right)^{2 - \frac{2H}{\alpha}} (\ln(x + 1))^{2 - \frac{2H}{\alpha}} (m_x(\alpha) - 1)^2 \right),$$

όπου

$$m_x(\alpha) := E \left[ \sup_{t \geq 0} \frac{\ln \left( \int_0^t e^{-\delta s - \frac{\sigma^2}{2} s^{2H} + \sigma B_s^H} ds + 1 \right) + t^\alpha}{\ln(x + 1) + t^\alpha} \right].$$

Στην περίπτωση μας για  $\delta = 3(\gamma - \lambda_1)$ ,  $\sigma = 3k$ ,  $x = \frac{1}{3\lambda} z^3(0, \phi)$  έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση

$$\begin{aligned} P[\tau^* = +\infty] &= P \left[ \int_0^{+\infty} e^{-3(-\lambda_1 + \gamma)s - 3kB_s^H} ds \leq \frac{1}{3} z^3(0, \phi) \right] \\ &= P \left[ \int_0^{+\infty} e^{-3(-\lambda_1 + \gamma)s + 3kB_s^H} ds \leq \frac{1}{3\lambda} z^3(0, \phi) \right] \\ &\leq \exp \left( -\frac{1}{18k^2} \left( \frac{\alpha}{\alpha - H} \right)^{2 - \frac{2H}{\alpha}} \left( \ln \left( \frac{1}{3\lambda} z^3(0, \phi) + 1 \right) \right)^{2 - \frac{2H}{\alpha}} (m_x(\alpha) - 1)^2 \right) \end{aligned}$$

όπου

$$(5.80) \quad m_x(\alpha) := E \left[ \sup_{t \geq 0} \frac{\ln \left( \int_0^t e^{-3(\gamma - \lambda_1)s - \frac{9k^2}{2} s^{2H} + 3kB_s^H} ds + 1 \right) + t^\alpha}{\ln \left( \frac{1}{3\lambda} z^3(0, \phi) + 1 \right) + t^\alpha} \right].$$

Επομένως, καταλήγουμε τελικά στο ότι η πιθανότητα (5.74α) αποσβέσεων της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο φράσσεται από κάτω

$$P(\tau^* \leq +\infty) \geq 1 - \exp \left( -\frac{1}{18k^2} \left( \frac{\alpha}{\alpha - H} \right)^{2 - \frac{2H}{\alpha}} \left( \ln \left( \frac{1}{3\lambda} z^3(0, \phi) + 1 \right) \right)^{2 - \frac{2H}{\alpha}} (m_x(\alpha) - 1)^2 \right)$$

όπου η παράμετρος  $m_x(\alpha)$  δίνεται από τ σχέση (5.80).

## Συμπεράσματα

Στο τρέχον κεφάλαιο παρουσιάζουμε μια διερεύνηση ενός στοχαστικού παραβολικού προβλήματος που σχετίζεται με τη μοντελοποίηση μιας ηλεκτροστατικής συσκευής MEMS μέρος της οποίας είναι ένα σύστημα άκαμπτης πλάκας και ελαστικής μεμβράνης. Αρχικά, παρουσιάζουμε ένα βασικό στοχαστικό μοντέλο που είναι παραλλαγή του ντετερμινιστικού τοπικού προβλήματος (3) και δίνεται από το πρόβλημα (5.4). Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε την τοπική ύπαρξη και μοναδικότητα αυτού του στοχαστικού προβλήματος, καθώς και των κύριων παραλλαγών του (προβλήματα (5.39) και (5.13), για γενικές συνοριακές συνθήκες.

Επιπλέον, και για μια συγκεκριμένη μορφή συνοριακών συνθηκών (βλ. (5.5β')) φαίνεται ότι η λύση του  $z$  του προβλήματος αποσβένει σ.β. ανεξάρτητα από την επιλεγμένη αρχική κατάσταση ή την τιμή της παραμέτρου συντονισμού  $\lambda$ . Αυτό είναι πραγματικά ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον αποτέλεσμα. Πράγματι, σχεδόν σε κάθε περίπτωση, η απόσβεση για το αντίστοιχο ντετερμινιστικό πρόβλημα συμβαίνει μόνο εάν η παράμετρος  $\lambda$  ή εάν τα αρχικά δεδομένα είναι αρκετά μεγάλα. Από όσα γνωρίζουμε, αυτό είναι το πρώτο αποτέλεσμα αυτού του είδους που παρουσιάζεται στο πλαίσιο της θεωρίας των ημιγραμμικών ΣΜΔΕ που σχετίζονται με τα MEMS.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι, η προσθήκη ενός όρου κανονικοποίησης στην εξίσωση (5.6), με τη μορφή ενός τροποποιημένου μη γραμμικού όρου μετατόπισης, αλλάζει τη δυναμική της λύσης,  $z = 1 - u$  και παίρνουμε μια δυναμική συμπεριφορά που μοιάζει με εκείνη του ντετερμινιστικού προβλήματος. Επιπλέον, σε αυτή τη συγκεκριμένη περίπτωση δίνεται μια κάτω εκτίμηση της πιθανότητας απόσβεσης για το πρόβλημα (5.49).

Η περίπτωση που περιλαμβάνει χρονική εξάρτηση των συντελεστών που σχετίζονται με διασπορά και μεταβλητές διηλεκτρικές ιδιότητες της μεμβράνης, στην εξίσωση αντιμετωπίζεται με παρόμοια μέθοδο ανάλυσης. Και έτσι πάλι προκύπτει ένα κάτω όριο για την πιθανότητα απόσβεσης ή ένα αποτέλεσμα σχεδόν βέβαιης απόσβεσης, ανάλογα με το μέγεθος της πρώτης ιδιοτιμής του αντίστοιχου προβλήματος ιδιοτιμών.

Ολοκληρώνουμε την έρευνά μας για την κίνηση Brown με την εφαρμογή μιας αριθμητικής μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων, για τη λύση του στοχαστικού, εξαρτώμενου από το χρόνο, προβλήματος στην μονοδιάστατη περίπτωση. Παρέχουμε επίσης μια σειρά αριθμητικών πειραμάτων αρχικά για την περίπτωση ομοιογενών συνοριακών συνθηκών Dirichlet (για το πρόβλημα  $u$ ) και στη συνέχεια για μη ομοιογενείς συνθήκες Robin. Σε κάθε περίπτωση παρουσιάζουμε διάφορα αποτελέσματα που εκτιμούν τους χρόνους απόσβεσης σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα  $[0, T]$ , που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις πρακτικές εφαρμογές των MEMS.

Τέλος για την περίπτωση της κλασματικής κίνησης Brown παρουσιάστηκε μια πρόωπη μελέτη της εκτίμησης πιθανότητας για τις αντίστοιχες παραλλαγές του στοχαστικού προβλήματος.



## Κεφάλαιο 6

# Συμπεράσματα-Επίλογος Μελλοντικές Ερευνητικές Κατευθύνσεις

Στη τρέχουσα διατριβή διερευνήσαμε το παραβολικό μη τοπικό πρόβλημα με τις συνοριακές συνθήκες Robin που σχετίζεται με τη λειτουργία ορισμένων εξιδανικευμένων συσκευών τα MEMS. Στο πρώτο μέρος παρουσιάστηκε μια διεξοδική διερεύνηση του στάσιμου προβλήματος και πήραμε ορισμένες εκτιμήσεις για την κρίσιμη τιμή, που είναι η παράμετρος ελέγχου του μοντέλου. Συγκεκριμένα, για τη  $N$ -διάστατη περίπτωση, για  $N > 1$ , για να πάρουμε εκτιμήσεις για την κρίσιμη τιμή έπρεπε να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε, μια ταυτότητα τύπου Pohozaev για συνοριακές συνθήκες Robin. Επίσης παρουσιάστηκαν αποτελέσματα ύπαρξης και μοναδικότητας του στάσιμου προβλήματος (4.11) και διερευνήθηκε η συμπεριφορά του χρονοεξαρτώμενου προβλήματος. Επιπλέον μελετήθηκαν για το χρονοεξαρτώμενο πρόβλημα οι προϋποθέσεις που πρέπει να υπάρχουν για να έχουμε απόσβεση για το πρόβλημα (1) αρχικά για ένα γενικό χωρίο ενώ στη συνέχεια αποδεικνύεται και ένα ισχυρό αποτέλεσμα απόσβεσης για την ακτινικά συμμετρική περίπτωση.

Τέλος, το πρώτο μέρος ολοκληρώνεται με την εφαρμογή μιας αριθμητικής μεθόδου προσαρμοζόμενου βήματος, βασισμένη στην εργασία [14], για την επίλυση του χρονοεξαρτώμενου προβλήματος. Υλοποιώντας αυτή την αριθμητική μέθοδο με τη χρήση του λογισμικού πακέτου Matlab πήραμε μια ακολουθία αριθμητικών πειραμάτων, που επαληθεύουν τα αναλυτικά αποτελέσματα της προηγούμενης μελέτης καθώς και επιπλέον ποιοτικά χαρακτηριστικά του μη τοπικού προβλήματος (1) που δεν προκύπτουν από την αναλυτική προσέγγιση, όπως για παράδειγμα ορισμένα αριθμητικά πειράματα για τον προσδιορισμό του προφίλ απόσβεσης της λύσης του προβλήματος στην ακτινικά συμμετρική περίπτωση.

Στο δεύτερο μέρος μελετήσαμε ένα στοχαστικό μοντέλο το οποίο αποτελεί παραλλαγή του ντετερμινιστικού μοντέλου που μελετήσαμε στο κεφάλαιο 4 και το οποίο προκύπτει από τη προσθήκη θορύβου στην παράμετρο ελέγχου του προβλήματος  $\lambda$ . Αποδείξαμε την τοπική ύπαρξη και μοναδικότητα του στοχαστικού προβλήματος (5.6α'), καθώς και των κύριων παραλλαγών του, για γενικές συνοριακές συνθήκες. Επίσης, για μια συγκεκριμένη μορφή συνοριακών συνθηκών (βλ. (5.5β')) δείξαμε ότι η λύση του  $z$  του προβλήματος (3) αποσβένει σ.β. ανεξάρτητα από την επιλεγμένη αρχική συνθήκη ή την τιμή της παραμέτρου συντονισμού  $\lambda$  ενώ για το ντετερμινιστικό πρόβλημα (4), έχουμε απόσβεση εάν έχουμε παράμετρο  $\lambda$  ή αρχικά δεδομένα αρκετά μεγάλα. Η προαναφερθείσα συμπεριφορά του προβλήματος μεταβάλλεται με τη προσθήκη ενός όρου κανονικοποίησης στην εξίσωση (5.6), με τη μορφή ενός τροποποιημένου μη γραμμικού όρου μετατόπισης. Αυτό αλλάζει τη δυναμική της λύσης  $z = 1 - u$  και προκύπτει μια δυναμική συμπεριφορά που μοιάζει με εκείνη του αντίστοιχου ντετερμινιστικού προβλήματος. Σ' αυτή τη συγκεκριμένη περίπτωση προσδιορίζεται μια κάτω εκτίμηση της πιθανότητας απόσβεσης για το πρόβλημα (5.49). Στη συνέχεια θεωρήσαμε τη περίπτωση που έχουμε χρονική εξάρτηση των συντελεστών της εξίσωσης που σχετίζονται με τη διασπορά και τις μεταβαλλόμενες διηλεκτρικές ιδιότητες της μεμβράνης της συσκευής. Η εξίσωση που προκύπτει (5.60) μελετήθηκε με παρόμοια μέθοδο ανάλυσης. Στην περίπτωση αυτή προκύπτει ένα κάτω όριο για την πιθανότητα απόσβεσης ή απόσβενει σ.β, και αυτή η συμπεριφορά σχετίζεται με το μέγεθος της πρώτης ιδιοτιμής του αντίστοιχου προβλήματος ιδιοτιμών. Στο τελευταίο μέρος αυτής της μελέτης εφαρμόσαμε μια κατάλληλη αριθμητική μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, για τη λύση του στοχαστικού, εξαρτώμενου από το χρόνο, προβλήματος στην μονοδιάστατη περίπτωση.



Πραγματοποιήσαμε μια σειρά αριθμητικών πειραμάτων αρχικά για την περίπτωση ομοιογενών συνοριακών συνθηκών Dirichlet (για το πρόβλημα  $u$ ) και στη συνέχεια για μη ομοιογενείς συνθήκες Robin. Και στις δύο περιπτώσεις παρουσιάσαμε διάφορα αποτελέσματα εκτίμησης των χρόνων απόσβεσης του προβλήματος σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα  $[0, T]$ , Ένας τέτοιου τύπου υπολογισμός παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις πρακτικές εφαρμογές των MEMS.

Τέλος στην Ενότητα 5.4 παρουσιάσαμε μια εισαγωγική μελέτη για το στοχαστικό μοντέλο για τη περίπτωση όμως που έχουμε κλασματική κίνηση Brown (Fractional Brownian motion). Στη περίπτωση αυτή προσδιορίσαμε μια εκτίμηση για τη πιθανότητα απόσβεσης του προβλήματος

Σαν συνέχεια της παρούσας διατριβής επιγραμματικά αναφέρουμε κάποια ζητήματα που θα είχαν ερευνητικό ενδιαφέρον. Αρχικά, η μελέτη του ντετερμινιστικού προβλήματος σε πιο γενικά χωρία επεκτείνοντας τα υπάρχοντα αποτελέσματα με ακτινική συμμετρία θα ήταν ένα από αυτά τα ερωτήματα. Επιπλέον θα μπορούσαν να ερευνηθούν επιπλέον ποιοτικά χαρακτηριστικά που αφορούν τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η απόσβεση, όπως εκτιμήσεις του χρόνου απόσβεσης, πιθανή αυτοομοιομορφική συμπεριφορά της λύσης όταν πλησιάζει την ιδιομορφία κτλ. Επίσης θα ήταν σημαντικό να μελετήσουμε αριθμητικά το πρόβλημα και σε διδιάστατο χωρίο χωρίς ακτινική συμμετρία.

Όσον αφορά τη μελέτη του στοχαστικού προβλήματος θα μπορούσαμε να διερευνήσουμε αντίστοιχα αποτελέσματα για μια πιο γενική μορφή θορύβου (δηλαδή με συντελεστή  $\sigma(u)$  όχι απαραίτητα γραμμικό) τόσο για το τοπικό όσο και για το μη τοπικό πρόβλημα το οποίο δεν έχει μελετηθεί. Επίσης θα μπορούσε να τροποποιηθεί και να εμπλουτιστεί η αριθμητική μελέτη του στοχαστικού προβλήματος έτσι ώστε να αναπτυχθεί μια μέθοδος προσαρμοσμένου βήματος αλλά και να υλοποιηθεί μια ανάλογη μέθοδος σε δύο χωρικές διαστάσεις. Θα θέλαμε επίσης να επισημάνουμε ότι οποιοδήποτε είδος θορύβου θα μπορούσε να ληφθεί υπόψη στο ίδιο πλαίσιο των εφαρμογών MEMS. Επιπλέον, η θεώρηση μιας γενικότερης στοχαστικής διαταραχής συνεχούς χρόνου, όπως ένας θόρυβος Lévy, θα είχε σημαντικό ενδιαφέρον τόσο από μαθηματική άποψη όσο και από άποψη εφαρμογών.

Επιπλέον περαιτέρω μελέτη του στοχαστικού προβλήματος με κλασματική κίνηση Brown ποιοτική και αριθμητική θα αποτελούσε μια ενδιαφέρουσα συνέχεια της παρούσας διατριβής.

# Παράρτημα

Σ' αυτό το παράρτημα αναφέρονται θεωρήματα, ορισμοί, προτάσεις και οτιδήποτε χρειάστηκε για αυτή τη διατριβή.

**Θεώρημα 34.** [45] (*Υπαρξη λύσης - (E. Picard - E. Lindelof)*)

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

$$y(x_0) = y_0.$$

Έστω η συνάρτηση  $f : [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής και ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz ως προς  $y$  στο  $[x_0 - a, x_0 + a]$  τότε υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση  $y(x)$  η οποία είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών, ορισμένη σ' ένα διάστημα  $I := [x_0 - h, x_0 + h]$ , όπου  $h := \min\{a, \frac{b}{M}\}$  και  $M := \max_{(x,y) \in [x_0 - a, x_0 + a]} |f(x, y)|$ .

**Πρόταση 10.** [26, Πρόταση 2.2.2]

Έστω μια συνάρτηση  $f$  που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f \in C^\beta(\bar{\Omega}) \quad \text{για κάποιο } \beta \in (0, 1], \quad 0 \leq f \leq 1 \quad \text{και} \quad f \neq 0$$

στο φραγμένο χωρίο  $\Omega$  στο  $\mathbb{R}^N$ , τότε έχουμε το παρακάτω κάτω φράγμα:

$$\lambda^*(\Omega, f) \geq \max\left\{\frac{8N}{27}, \frac{2(3N-4)}{9}\right\} \frac{1}{\sup_{\Omega} f} \left(\frac{\omega_N}{|\Omega|}\right)^{\frac{2}{N}}$$

Επιπλέον, εάν  $f(x) \equiv |x|^a$  με  $a \geq 0$  και  $\Omega$  είναι μια μπάλα ακτίνας  $R$ , τότε έχουμε

$$\lambda^*(B_R, |x|^a) \geq \max\left\{\frac{4(2+a)(N+a)}{27}, \frac{(2+a)(3N+a-4)}{9}\right\} R^{-(2+a)}.$$

**Θεώρημα 35.** [10, Θεώρημα 4.10]

Έστω ένα μη γραμμικό πρόβλημα

$$(2) \quad Lu + \lambda[p(x)f_1(u) + h(x)] = 0, \quad \text{στο } \Omega,$$

$$u = 0, \quad \text{στο } \partial\Omega.$$

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $f(x, L) = [p(x)f_1(t) + h(x)]$  ικανοποιεί τις παρακάτω προϋποθέσεις:

- $f(x, t)$  είναι συνεχής συνάρτηση Hölder στο  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+$ .
- $f(x, 0) > 0$  στο  $\Omega$ .
- $(\partial f / \partial t)(x, t) > 0$  στο  $\Omega \times \mathbb{R}^+$ .

Επιπλέον οι συντελεστές του προβλήματος είναι αναλυτικοί. Οι λύσεις του προβλήματος (2) είναι επίσης αναλυτικές. Επιπλέον θεωρούμε το αντίστοιχο συμμετρικό πρόβλημα

$$(3) \quad \alpha_0 \Delta u + \lambda[p^*(x)f_1^*(u) + h^*(x)] = 0, \quad \text{στο } \Omega^*,$$

$$u = 0, \quad \text{στο } \partial\Omega^*.$$

Υπο αυτές τις προϋποθέσεις ισχύουν τα παρακάτω:

- (i) Έχουμε  $\lambda_{\Omega}^* \geq \lambda_{\Omega^*}^*$  για το τελικό σημείο (endpoint) του φάσματος του προβλήματος (3).  
(ii) Μεταξύ των ελάχιστων λύσεων των προβλημάτων (2) και (3), έχουμε τη σχέση  $u^*(x; \lambda) \leq v(x; \lambda)$  για κάθε  $\lambda \in (0, \lambda_{\Omega^*}^*)$ .

**Θεώρημα 36.** [56, Θεώρημα 3.5]

Θεωρούμε την περίπτωση της ακτινικής συμμετρίας με φθίνοντα αρχικά δεδομένα  $u_0(r)$  για το πρόβλημα (4.66). Τότε για κάθε  $\lambda > \lambda^*$  η λύση του προβλήματος (4.66) με συνοριακές συνθήκες Dirichlet παύει να υπάρχει και αποσβένει, σε πεπερασμένο χρόνο  $T_q < \infty$ .

**Θεώρημα 37.** [13] **Θεώρημα Rademacher**

Έστω  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  συνάρτηση Lipschitz. Τότε η  $f$  είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού.

**Θεώρημα 38.** [13] **Θεώρημα Πεπλεγμένης συνάρτησης στο  $\mathbb{R}^2$ .**

Θεωρούμε συνεχή και παραγωγίσιμη συνάρτηση  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  και το σημείο  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  έτσι ώστε  $F(x_0, y_0) = c$ . Αν  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ , τότε υπάρχει στη γειτονιά του  $(x_0, y_0)$  έτσι ώστε όταν το  $x$  είναι αρκετά κοντά στο  $x_0$  υπάρχει μοναδικό  $y$  έτσι ώστε  $F(x, y) = c$ . Επιπλέον, παίρνουμε ότι το  $y$  είναι συνεχή συνάρτηση στο  $x$ .

**Θεώρημα 39.** [13] **Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης**

Έστω  $f_n, g \in L^1(A)$  και  $g \geq 0$ , τέτοιες ώστε  $|f_n(x)| \leq g(x)$  σχεδόν παντού στο χωρίο  $A$ . Έστω επίσης ότι υπάρχει το όριο  $f(x) = \lim_n f_n(x)$  σχεδόν για κάθε  $x \in A$ . Τότε

$$\lim_n \int_A f_n = \int_A f.$$

**Θεώρημα 40.** [13] **Ανισότητα Jensen για ολοκληρώματα**

Αν συνάρτηση  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση με  $b - a = 1$  και η συνάρτηση  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  είναι κυρτή συνάρτηση με το διάστημα  $I$  να περιέχει το σύνολο τιμών της  $g$  τότε ισχύει ότι

$$f\left(\int_a^b g(x) dx\right) \leq \int_a^b (f \circ g)(x) dx.$$

**Θεώρημα 41.** [95, Θεώρημα 2.6]

Έστω  $f(x, s, \omega, \lambda)$ ,  $x \in \mathcal{E}$ ,  $s \geq 0$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $\lambda \in G$  να είναι  $P \times G$ -μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι

$$E \left\{ \int_{\mathcal{E} \times \mathcal{E} \times [0, T] \times G} |f(x, s, \omega, \lambda) f(y, s, \omega, \lambda)| K(dx \ dy \ ds) \mu(d\lambda) \right\} < \infty.$$

Τότε προκύπτει η ακόλουθη ισότητα

$$\int_G \left[ \int_{\mathcal{E} \times [0, t]} f(x, s, \lambda) M(dx ds) \right] \mu(d\lambda) = \int_{\mathcal{E} \times [0, t]} \left[ \int_G f(x, s, \lambda) \mu(d\lambda) \right] M(dx ds).$$

**Θεώρημα 42.** [16, Θεώρημα 6.5] ή [17, Θεώρημα 7.5]

Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις:

- (i)  $A$  είναι απειροστός γεννήτορας της ισχυρής συνεχή υποομάδας  $G_t$ ,  $t \geq 0$ , στο  $H$ .  
(ii) Για  $h \in H$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $F_t(h, \omega)$  είναι διαδικασία αξίας  $H$ , και  $\Sigma_t(h, \omega)$  είναι διαδικασία αξίας  $\mathcal{L}_R^2$  στο  $\mathcal{P}_R$ .  
(iii) Υπάρχουν θετικές σταθερές  $b$  και  $c$  έτσι ώστε έχουμε

$$E \int_0^T [\|F_s(0, \omega)\|^p + \|\Sigma_s(0, \omega)\|_{\mathcal{R}}^p] ds \leq b,$$

με  $p \geq 2$ , και για κάθε  $g \in H$ ,

$$\|F_t(g, \omega) - F_t(0, \omega)\|^2 + \|\Sigma_t(g, \omega) - \Sigma_t(0, \omega)\|_{\mathcal{R}}^2 \leq c(1 + \|g\|^2),$$

για σχεδόν παντού  $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ .

(iv) Υπάρχει σταθερά  $\kappa > 0$  τέτοια ώστε, για κάθε  $g, h \in H$ ,

$$\|F_t(g, \omega) - F_t(h, \omega)\|^2 + \|\Sigma_t(g, \omega) - \Sigma_t(h, \omega)\|_{\mathcal{R}}^2 \leq \kappa(\|g - h\|^2),$$

για σχεδόν παντου  $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ .

Τότε έχουμε ότι για  $h \in H$  και  $p \geq 2$ , μια μη γραμμική εξίσωση της μορφής

$$du_t = (\Delta u_t + f(u_t))dt + \sigma(u_t)dW_t,$$

όπου  $f$  είναι συνάρτηση Lipschitz, έχει μοναδική ήπια λύση  $u_t$ ,  $0 \leq t \leq T$  με  $u \in C([0, T]; L^p(\Omega; H))$  έτσι ώστε

$$E\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_t\|^p\right\} \leq K_p(T)\left\{1 + E \int_0^T [\|F_s(0)\|^p + \|\Sigma_s(0)\|_{\mathcal{R}}^p] ds\right\}$$

για κάποια σταθερά  $K_p(T) > 0$ . Για  $p > 2$ , η λύση έχει συνεχή απλή διαδρομή με  $u \in L^p(\Omega; C([0, t]; H))$ .

**Θεώρημα 43.** [6, Θεώρημα 4.3]

Υποθέτουμε ότι  $m \in C^{\mu}(\bar{\Omega})$  ικανοποιεί τη σχέση  $m(x) > 0$  για σχεδόν όλα τα  $x \in \Omega$ . Τότε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$Lu = \lambda mu \quad \text{στο } \Omega,$$

$$Bu = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega,$$

έχει τη μικρότερη ιδιοτιμή  $\lambda_0(m)$  θετική.

Υπάρχει ακριβώς μια κανονικοποιημένη ιδιοσυνάρτηση  $u_0$  για την ιδιοτιμή  $\lambda_0(m)$ , και  $u_0$  επιλέγεται να είναι θετική. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν θετικοί αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  τέτοιοι ώστε να ισχύει  $\alpha e \leq u_0 \leq \beta e$ . Συμβολίζουμε με  $e \in C^2(\bar{\Omega})$  η μοναδική λύση του ακόλουθου προβλήματος

$$\Delta e = 1, \quad \text{στο } \Omega$$

$$Be = 0, \quad \text{στο } \partial\Omega.$$

Έτσι η  $u_0$  είναι η μόνη κανονικοποιημένη θετική ιδιοσυνάρτηση του παραπάνω προβλήματος ιδιοτιμών.

**Ορισμός 33.** [68, 100]

Αν  $(X, \Sigma, \mu)$  είναι μετρικός χώρος, μια ιδιότητα  $P$  λέμε ότι ισχύει σχεδόν παντού (*almost everywhere*) στο  $X$  εάν υπάρχει ένα σύνολο  $N \in \Sigma$  με  $\mu(N) = 0$  και όλα τα  $x \in \mathbb{N}$  έχουν την ιδιότητα του  $P$ . Ένας άλλος κοινός τρόπος έκφρασης του ίδιου πράγματος είναι να πούμε ότι "σχεδόν κάθε σημείο ικανοποιεί την  $P$ "; ή ότι "σχεδόν για κάθε  $x$ , η  $P(x)$  ισχύει".

Δεν είναι απαραίτητο το σύνολο  $x \in X : \neg P(x)$  να έχει μέτρο 0, μπορεί να μην ανήκει στο  $\Sigma$ . Με τον παραπάνω ορισμό, αρκεί  $x \in X : \neg P(x)$  να περιέχεται σε κάποιο σύνολο  $N$  που είναι μετρήσιμο και να έχει μέτρο 0.

**Ορισμός 34.** [68]

Στη θεωρία πιθανοτήτων, ένα γεγονός λέγεται ότι συμβαίνει σ.β. (μερικές φορές συντομεύεται ως *s.s.*) εάν συμβεί με πιθανότητα ίση με 1 (ή με μέτρο Lebesgue 1). Με άλλα λόγια, το σύνολο πιθανών εξαιρέσεων μπορεί να μην είναι κενό, αλλά να έχει πιθανότητα 0.

Σε πιθανά πειράματα σε έναν πεπερασμένο χώρο δειγμάτων, συχνά δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ σ.β. και σίγουρα (αφού η πιθανότητα 1 προκύπτει συχνά συμπεριλαμβανομένων όλων των σημείων του δείγματος). Ωστόσο, αυτή η διάκριση γίνεται σημαντική όταν ο χώρος του δείγματος είναι ένα άπειρο σύνολο, επειδή ένα άπειρο σύνολο μπορεί να έχει μη κενά υποσύνολα πιθανότητας μηδέν. Μερικά παραδείγματα της χρήσης αυτής της έννοιας περιλαμβάνουν τις ισχυρές και ομοιόμορφες εκδοχές του νόμου των μεγάλων αριθμών και τη συνέχεια των διαδρομών της κίνησης του Brown.

Έστω  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ένας χώρος πιθανότητας. Ένα συμβάν-γεγονός  $E \in \mathcal{F}$  συμβαίνει σ.β. εάν  $P(E) = 1$ . Ομοίως, το συμβάν  $E$  συμβαίνει σ.β. εάν η πιθανότητα του  $E$  δεν είναι μηδενική:  $P(E^C) = 0$  όπου  $E^C$  είναι το συμπλήρωμα του συνόλου  $E$ . Γενικότερα, οποιοδήποτε συμβάν  $E \subseteq \Omega$  (όχι απαραίτητα στο  $\mathcal{F}$ ) συμβαίνει σ.β. εάν το  $E^C$  περιέχεται σε ένα μηδενικό σύνολο: ένα υποσύνολο  $N$  στο  $\mathcal{F}$  έτσι ώστε  $P(N) = 0$ . Η έννοια της σχεδόν βεβαιότητας εξαρτάται από το μέτρο πιθανότητας  $P$ . Εάν είναι απαραίτητο να τονιστεί αυτή η εξάρτηση, είναι σύνηθες να λέμε ότι το συμβάν  $E$  εμφανίζεται  $P$ -σ.β. ή σ.β. ( $P$ ).

**Πόρισμα 2.** [97, Κεφάλαιο 6, Πόρισμα 1.2]

Έχουμε

$$E[f(\exp B_t)g(A_t)] = c_t \int_0^\infty dy \int_0^\infty dv f(y)g\frac{1}{v} \exp\left(-\frac{v}{2}(1+y^2)\right) \psi_{yv}(t),$$

όπου

$$c_t = \frac{1}{(2\pi^2 t)^{\frac{1}{2}}} \exp(\pi^2/2t).$$

**Ορισμός 35.** [12, τύπος 1.104(1) σελίδα 264]

$$P_x \left( \int_0^\infty e^{2\beta W_s(\mu)} ds \in dy \right) = \frac{(2\beta^2 y)^{-|\mu|/|\beta|}}{y\Gamma(|\mu|/|\beta|)} \exp\left(-2\mu x - \frac{e^{2\beta x}}{2\beta^2 y}\right) dy$$

**Ορισμός 36.** [68, 100]

Το **ολοκλήρωμα Stieltjes ή Riemann – Stieltjes** μιας συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[a, b]$  σε σχέση με μια συνάρτηση  $g$  ορίζεται ως το όριο

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \lim_{\max_i |\Delta t_i| \rightarrow 0} \sum_i f(\xi_i)(g(t_{i+1}) - g(t_i))$$

όπου  $a = t_0 < t_1 \dots < t_k = b$  είναι μια διαμέριση του διαστήματος  $[a, b]$  και  $\xi = \{\xi_i\}$  είναι μια ενδιάμεση διαμέριση του, δηλ.  $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$   $\Delta t_i := t_{i+1} - t_i$ .

**Πόρισμα 3.** [97, Πόρισμα 1.2 σελίδα 95]

Έστω  $\nu > 0$ . Τότε, ισχύει ότι:

$$\int_0^\infty ds \exp 2(B_s - \nu s) = \frac{1}{2Z_\nu}.$$

**Παρατήρηση 17.** Υπολογισμός της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E}$  που οφείλεται σε ομοιόμορφη κατανομή φορτίου σε επίπεδο

Για ομοιόμορφη κατανομή φορτίων η επιφανειακή πυκνότητα φορτίων ισούται με

$$\sigma = \frac{dQ}{dA} - \text{σταθερά},$$

όπου  $A$  το εμβαδόν της επιφάνειας.

Από τον ορισμό της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E}$  έχουμε

$$\vec{E} = k \int_{\Omega} \frac{\hat{r}}{r^2} dq.$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss, η ροή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E}$  μέσα από την επιφάνεια  $S = \partial\Omega$  δίνεται από τη σχέση.

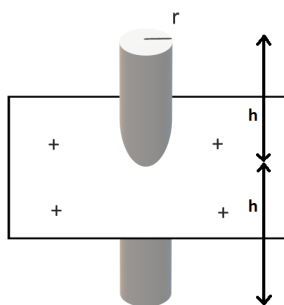
$$\oint_S \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{\text{εσ}}}{\epsilon_0},$$

όπου  $Q_{\text{εσ}}$  είναι το φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια  $S$ .

Θεωρούμε σαν  $S$  την κυλινδρική επιφάνεια με βάση παράλληλη στο επίπεδο και συμμετρική ως προς αυτό (βλ. Σχήμα 1). Έτσι προκύπτει η ακόλουθη σχέση

$$\oint_{S=S_1 \cup S_2 \cup S_3} \vec{E} d\vec{A} = \oint_{S_1} \vec{E} d\vec{A} + \oint_{S_2} \vec{E} d\vec{A} + \oint_{S_3} \vec{E} d\vec{A} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0},$$

όπου  $S_1, S_2, S_3$  οι επιφάνειες που συνιστούν το ανάπτυγμα της επιφάνειας κυλίνδρου. Επιπλέον θεωρούμε ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E}$  είναι κάθετη στο επίπεδο και επιπλέον ότι λόγω συμμετρίας (βλ. Σχήμα 2) έχουμε ότι  $|\vec{E}_+| = |\vec{E}_-| = E$ , όπου  $E_+$  είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που οφείλεται στον θετικό οπλισμό ενώ αντίστοιχα  $E_-$  στον αρνητικό οπλισμό.



Σχήμα 1: Σχηματική αναπαράσταση κυλινδρικής επιφάνειας

Επομένως αθροίζοντας τα διανύσματα της έντασης στα τρία υποχωρία, δεξιά, ανάμεσα και αριστερά από τις δύο παράλληλες πλάκες (Σχήμα 2) προκύπτει ότι

$$2E(\pi r^2) = \frac{\sigma(\pi r^2)}{\epsilon_0},$$

ή

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

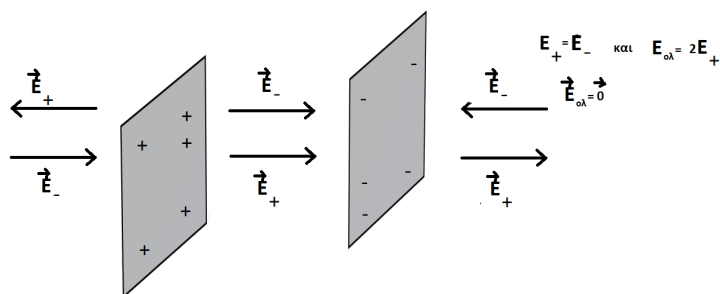
η οποία είναι σταθερή και ανεξάρτητη της απόστασης από το επίπεδο.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την ηλεκτρική δύναμη, ανά μονάδα επιφάνειας, που ασκείται στον ένα οπλισμό του πυκνωτή (βλ. Σχήμα 2). Συγκεκριμένα έχουμε

$$F_{\eta\lambda} = QE_+ = \sigma AE_+$$

και

$$\frac{F_{\eta\lambda}}{A} = \sigma E_+ = 2\epsilon_0 E_+^2.$$



Σχήμα 2: Σχηματική αναπαράσταση οπλισμών

Επιπλέον έχουμε ότι  $E_{ολ} = 2E_+$  και άρα  $E_+ = \frac{1}{2}E_{ολ}$ , και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη  $H \ll L$  προκύπτει ότι

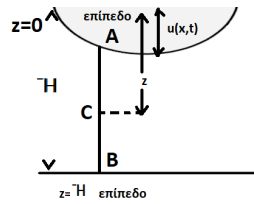
$$F_{\eta\lambda} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{\nabla} V|^2 \simeq \frac{\epsilon_0}{2} (\partial_z V)^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{V^2}{(H+u)^2}.$$

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε πιο λεπτομερικά τον υπολογισμό του δυναμικού και συγκεκριμένα θα αιτιολογήσουμε τη προσέγγιση  $|\nabla V| \simeq \partial_z V$  όταν  $H \ll L$ . Έχουμε

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \implies dV = -\vec{E} d\vec{s} \implies \int_A^B dV = - \int_B^A \vec{E} d\vec{s},$$

όπου  $d\vec{s}$  είναι το στοιχειώδες μήκος τόξου και  $A$  είναι σημείο της πάνω επιφάνειας ενώ  $B$  σημείο του κάτω οπλισμού (βλ. Σχήμα 3). Προκύπτει ότι

$$V_A - V_B = - \int_B^A \vec{E} d\vec{s}.$$



Σχήμα 3: Σχηματική αναπαράσταση επιπέδου

Αλλά το σημείο  $B$  ανήκει στο επίπεδο  $z = -H$  και άρα  $V_B = 0$  ενώ το σημείο  $A$  είναι σημείο του άνω οπλισμού. Δεδομένου ότι το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  είναι ομογενές, ολοκληρώνουμε κατα μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$  και έχουμε:

$$(5) \quad V_0 = -E \int_{-H}^{u(x,t)} dz \implies V_0 = -E(u(x,t) + H).$$

Το διανυσματικό πεδίο  $E$  από τη σχέση (5) μπορεί να απαληφθεί. Πράγματι θεωρούμε  $C_i$  ένα εσωτερικό σημείο του χωρίου για ευκολία όπως στο σχήμα (3). Τότε προκύπτει ότι

$$V_{C_i} - V_B = - \int_B^{C_i} \vec{E} d\vec{s} \implies V_{C_i} = -E \int_{-H}^z dz' = -E(z + H) \implies V_{C_i} = -E(z + H),$$

ή τελικά

$$(6) \quad E = - \frac{V_{C_i}}{z + H},$$

Συνδιάζοντας τις σχέσεις (5) και (6) προκύπτει ότι

$$V_{C_i} = V_0 \frac{(z + H)}{(u(x,t) + H)},$$

όπου με  $V_{C_i}$  συμβολίζουμε το δυναμικό σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του χωρίου και  $V_0$  είναι το δυναμικό του πάνω οπλισμού.

Στη περίπτωση της συσκευής MEMS (βλ. σχήμα 2.1) έχουμε

$$\phi := V(x, z, t) = V_0 \left( \frac{l - z}{l - u(x, t)} \right).$$

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι η  $V$  δεν είναι αρμονική συνάρτηση, και εν γένει, δηλαδή

$$\Delta V = (\partial_x^2 + \partial_z^2)V(x, z, t) \neq 0.$$

Εάν όμως θεωρήσουμε ότι  $\hat{x} = \frac{x}{L}$ ,  $\hat{z} = \frac{z}{H}$ , τότε έχουμε

$$\partial_x = \frac{d\hat{x}}{dx} \partial_{\hat{x}} = \frac{1}{L} \partial_{\hat{x}},$$

και

$$\partial_z = \frac{1}{H} \partial_{\hat{z}}.$$

Άρα έχουμε για  $\hat{V} = \frac{V}{V_0}$

$$(\partial_x^2 + \partial_z^2)V = (\epsilon^2 \partial_{\hat{x}}^2 + \partial_{\hat{z}}^2)\hat{V} \simeq \partial^2 \hat{V} = 0,$$

για  $\epsilon = \frac{H}{L} \ll 1$  και τελικά προσεγγιστικά  $\partial^2 \hat{V} = 0$ .





# Βιβλιογραφία

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55. Dover Publications, New York, 1972. 9th Edition.
- [2] R.C. Ackerberg, *On a nonlinear differential equation of electrohydrodynamics*, Proc. Roy. Soc. A **312** (1969) 129–140.
- [3] A. Acker, B. Kawohl, *Remarks on quenching* Nonlinear Anal. , 13 (1989) pp. 53–61
- [4] M. Al-Refai, N.I. Kavallaris, M. A. Hajji, *Monotone iterative sequences for nonlocal elliptic problems*, Euro. Jnl. Appl. Mathematics **22(6)**, 533–552.
- [5] A. Alvarez, J. Alfredo Lopez -Mimbela and N. Privault, *Blowup estimates for a family of semilinear SPDES with time- dependent coefficients*, Differ. Equ. Appl., **7 (2)** (2015), 201–219.
- [6] H. Amann, Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, SIAM Rev. **18** (1976), 620—709.
- [7] M.A. Arcones, *On the law of the iterated logarithm for Gaussian processes*, J. Theor. Probab. **8**, (1995), 877–903.
- [8] J. M. Ball, Remarks on blow–up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations, Quart. J. Math. Oxford, (2), 28 (1977), 473–486.
- [9] J. M. Ball, Finite time blow–up in nonlinear problems, Nonlinear Evolution Equations (1977), Academic Press, 189–205.
- [10] C. Bandle, *Isoperimetric inequalities and applications*, Monographs and Studies in Mathematics, 7., Pitman, Boston-London, 1980.
- [11] J. W. Bebernes and D. Kassoy, A mathematical analysis of blow–up for thermal reactions, SIAM J. Appl. Math. 40, No. 3, (1981), 476–484.
- [12] A.N. Borodin, & P. Salminen, *Handbook of Brownian motion—facts and formulae*. Second edition. Probability and its Applications. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
- [13] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer 2011
- [14] C. J. Budd, J. F. Williams, *How to adaptively resolve evolutionary singularities in differential equations with symmetry*, J. Eng. Math. **66** (2010) 217–236.
- [15] E.K. Chan & R.W. Dutton, *Effects of Capacitors, Resistors and Residual Change on the Static and Dynamic Performance of Electrostatically Actuated Devices*, Proceedings of SPIE, **3680**, (1999), 120–130.
- [16] P-L Chow, *Stochastic Partial Differential Equations*, Chapman and Hall/CRC, 2007.
- [17] G. Da Prato & J. Zabczyk, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

- [18] O. Diekmann and N. M. Temme, *Nonlinear diffusion problems*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1976.
- [19] M. Dozzi & J. A. López-Mimbela, *Finite-time blowup and existence of global positive solutions of a semi-linear SPDE*, Stoch. Proc. Applications **120**, (2010), 767–776.
- [20] M. DOZZI, E.T. KOLKOVSKA, & J. A. LÓPEZ-MIMBELA, *Global and non-global solutions of a fractional reaction-diffusion equation perturbed by a fractional noise*, Stoch. Anal. Applications **38 (6)** 2020, 959–978.
- [21] M. Dozzi, E.T. Kolkovska, & J. A. López-Mimbela, *Finite-time blowup and existence of global positive solutions of a semi-linear stochastic partial differential equation with fractional noise*, Modern stochastics and applications, 95–108, Springer Optim. Appl., **90**, Springer, Cham, 2014.
- [22] O. Drosinou, N.I. Kavallaris and C.V. Nikolopoulos, *A study of a nonlocal problem with Robin boundary conditions arising from MEMS technology*, *Mathematical Methods in the Applied Sciences (2021)*
- [23] O. Drosinou, N.I. Kavallaris and C.V. Nikolopoulos, *Impacts of noise on quenching of some models arising in MEMS technology*, **arXiv:2012.10922v1**.
- [24] N.T. Dung, *The probability of finite-time blow-up of a semi linear SPDE with fractional noise*
- [25] G. K. Duong & H. Zaag, *Profile of a touch-down solution to a nonlocal MEMS model*, Math. Models Methods Appl. Sci. **29 (7)** (2019) 1279–1348.
- [26] P. Esposito, N. Ghoussoub, Y. Guo, *Mathematical analysis of partial differential equations modeling electrostatic MEMS*, Courant Lecture Notes in Mathematics, 20. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [27] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Second Edition, American Mathematical Society, 2010.
- [28] S. Filippas & J-S. Guo, *Quenching profiles for one-dimensional semilinear heat equations*, Quart. Appl. Math. **51** (1993) 713–729.
- [29] G. Flores, G. Mercado, J. A. Pelesko & N. Smyth, *Analysis of the dynamics and touchdown in a model of electrostatic MEMS*, SIAM J. Appl. Math., **67** (2006/07), 434–446.
- [30] G. Flores, *Dynamics of a damped wave equation arising from MEMS*, SIAM J. Appl. Math., **74** (2014), 1025–1035.
- [31] A. Friedman, B. McLeod, *Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations*, Indiana Univ. Math. J. **34** (1985) 425–447.
- [32] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, 1983, Prentice-Hall Inc.
- [33] Gidas, B., Ni, Wei Ming & Nirenberg, L., *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979), no. 3, 209–243.
- [34] J-S. Guo, *On a quenching problem with the Robin boundary condition*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **179**, (1991), 803–809.
- [35] J.-S. Guo, *Recent developments on a nonlocal problem arising in the micro-electromechanical system*, Tamkang Jour. Mathematics **45(3)**, (2014), 229–241.
- [36] J.-S. Guo & B. Hu *Quenching rate for a nonlocal problem arising in the micro-electro mechanical system*, J. Differential Equations **264** (2018), no. 5, 3285–3311.
- [37] J.-S. Guo, B. Hu & C.-J. Wang, *A nonlocal quenching problem arising in micro-electro mechanical systems*, Quart. Appl. Math. **67** (2009) 725–734.
- [38] J.-S. Guo & N.I. Kavallaris, *On a nonlocal parabolic problem arising in electromechanical MEMS control*. Disc. Cont. Dynam. Systems **32** (2012) 1723–1746.

- 
- [39] J.-S. Guo, N.I. Kavallaris, C.-Y. Yu & C.-Y. Yu *Bifurcation diagram of a Robin boundary value problem arising in MEMS*, **arXiv:2007.03977v1**.
- [40] Y. Guo, *On the partial differential equations of electrostatic MEMS devices III: refined touchdown behavior*, *J. Diff. Eqns.* **244** (2008) 2277–2309.
- [41] Y. Guo, Z. Pan, M.J. Ward, *Touchdown and pull-in voltage behavior of a MEMS device with varying dielectric properties*, *SIAM J. Appl. Math.* **166** (2006) 309–338.
- [42] N. Ghoussoub & Y. Guo, *On the partial differential equations of electrostatic MEMS devices II: dynamic case*, *Nonlinear Diff. Eqns. Appl.* **15** (2008) 115–145.
- [43] Y. Guo, *Dynamical solutions of singular wave equations modeling electrostatic MEMS*, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, **9** (2010), 1135–1163.
- [44] I. Gyöngy & C. Rovira, *On  $L^p$ -solutions of semilinear stochastic partial differential equations* *Stochastic Process. Appl.*, **90(1)** (2000), 83–108.
- [45] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons Inc., New York, (1964).
- [46] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, *Lect. Notes in Math.* 840 Springer-Verlag, New York, 1981.
- [47] K.-M. Hui, *The existence and dynamic properties of a parabolic nonlocal MEMS equation*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* **74** (2011) 298–316.
- [48] D.D. Joseph, T.S. Lundgren, *Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources*, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **49** (1973) 241–269.
- [49] I. Karatzas & S. Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, Vol. 113 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1991.
- [50] N.I. Kavallaris, *Blow-up and global existence of solutions of some nonlocal problems arising in Ohmic heating process*, Ph.D Thesis, National Technical University of Athens (2000) (in Greek).
- [51] N. I. Kavallaris, *Asymptotic behaviour and blow-up for a nonlinear diffusion problem with a nonlocal source term*, *Proc. Edinb. Math. Soc.* **47**, (2004) 375–395.
- [52] N.I. Kavallaris & T. Nadzieja, *On the blow-up of the nonlocal thermistor problem*, *Proc. Edin. Math. Soc.* **50**, (2007), 389–409.
- [53] N.I. Kavallaris, T. Miyasita, T. Suzuki, *Touchdown and related problems in electrostatic MEMS device equation*, *Nonlinear Diff. Eqns. Appl.* **15** (2008), 363–385.
- [54] N. I. Kavallaris, A. A. Lacey, C. V. Nikolopoulos, D. E. Tzanetis, *A hyperbolic nonlocal problem modelling MEMS technology*, *Rocky Mountain J. Math.* **41** (2011), 505–534.
- [55] N. I. Kavallaris, A. A. Lacey, C. V. Nikolopoulos, D. E. Tzanetis, *On the quenching behaviour of a semilinear wave equation modelling MEMS technology*, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A*, **35(3)**, (2015), 1009–1037.
- [56] N. I. Kavallaris, A. A. Lacey, C. V. Nikolopoulos, *On the quenching of a nonlocal parabolic problem arising in electrostatic MEMS control*, *Nonlinear Analysis*, **138**, (2016), 189–206.
- [57] N. I. Kavallaris, *Quenching solutions of a stochastic parabolic problem arising in electrostatic MEMS control*, *Math. Methods Appl. Sci.* **41** (2018), no. **3**, 1074–1082.
- [58] N. I. Kavallaris and D. E. Tzanetis, *Behaviour of a non-local reactive-convective problem with variable velocity in Ohmic heating of food*, *Banach Center Publications* **66**, 189–198 (2004).
- [59] N.I. Kavallaris & T. Suzuki, *Non-Local Partial Differential Equations for Engineering and Biology: Mathematical Modeling and Analysis, Mathematics for Industry*, **Vol. 31** Springer Nature 2018.

- [60] N.I. Kavallaris & Y. Yan, *Finite-time blow-up of a non-local stochastic parabolic problem*, Stoch. Proc. Applications, **130**(9), (2020), 5605–5635 [doi.org/10.1016/j.spa.2020.04.002](https://doi.org/10.1016/j.spa.2020.04.002).
- [61] N. I. Kavallaris, R. Barreira & A. Madzvamuse, *Dynamics of shadow system of a singular gierer-meinhardt system on an evolving domain*, Jour. Nonl. Science **31**(5), (2021) DOI :10.1007/s00332-020-09664-3.
- [62] O. Ladyženskaja, V.A. Solonnikov & N.N. Ural'ceva, *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type*, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 1968.
- [63] A.A. Lacey, *Thermal runaway in a nonlocal problem modelling Ohmic heating: Part II : General proof of blow-up and asymptotics of runaway*, Euro Jl. Appl. Maths. **6**, (1995), 201–224 .
- [64] A. A. Lacey and D. Tzanetis, *Global existence and convergence to a singular steady state for a semilinear heat equation*, Proc. Royal Soc. Edin. 105A (1986), 289–305.
- [65] H.A. Levine, *Quenching, nonquenching, and beyond quenching for solution of some parabolic equations*, Ann. Mat. Pura Appl. **155** (1989), 243–260.
- [66] J. D. Logan, *An Introduction to nonlinear partial differential equations*, John Willey and Sons Inc., New York, 1994.
- [67] G.J. Lord , C.E. Powell & T. Shardlow *An Introduction to Computational Stochastic PDEs*, Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2014.
- [68] V. Mackevičius, *Introduction to Stochastic Analysis: Integrals and Differential Equations*, Wiley 2011.
- [69] H. Matsumoto & M. Yor, *Exponential functionals of Brownian motion, I: Probability laws at fixed time*, Prob. Surveys **2** (2005), 312–347.
- [70] F. Merle & H. Zaag, *Reconnection of vortex with the boundary and finite time quenching*, Nonlinearity **10** (1997) 1497–1550.
- [71] Yuliya S. Mishura, *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*, Springer Lecture notes in Mathematics vol 1929,( 2008)
- [72] T. Miyasita, *On a nonlocal biharmonic MEMS equation with the Navier boundary condition*, Sci. Math. Jpn. **80**(2) (2017), 189–208.
- [73] T. Miyasita, *Convergence of solutions of a nonlocal biharmonic MEMS equation with the fringing field*, J. Math. Anal. Appl. **454**(1) (2017), 265–284.
- [74] T. Miyasita, *Global existence of radial solutions of a hyperbolic MEMS equation with nonlocal term*, Differ. Equ. Appl. **7** (2) (2015), 169–186
- [75] C. Mueller, *Long-time existence for signed solutions of the heat equation with a noise term*, Probab. Theory Related Fields **110** (1998), 51–68.
- [76] C. Mueller, *Some Tools and Results for Parabolic Stochastic Partial Differential Equations. In: Khoshnevisan D., Rassoul-Agha F. (eds) A Minicourse on Stochastic Partial Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics*, vol 1962. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [77] C. Mueller & E. Pardoux, *The critical exponent for a stochastic PDE to hit zero*, Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications 325–338 (1999), Systems Control Found. Appl. Birkhäuser, Boston.
- [78] C.V. Pao, *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, Springer 1992.
- [79] J.A. Pelesko, D.H. Bernstein, *Modeling MEMS and NEMS*, Chapman Hall and CRC Press, 2002.
- [80] J.A. Pelesko and X.Y.Chen, *Electrostatic deflections of circular elastic membranes*, J. Electrostatics **57** (2003), 1–12.

- 
- [81] J.A. Pelesko and A.A. Triolo, *Non-local problems in MEMS device control*, J. Engrg. Math., **41** (2001), 345–366.
- [82] J.A. Pelesko, *Mathematical Modeling of Electrostatic MEMS with Tailored Dielectric Properties* SIAM Journal of Applied Mathematics, **62**, 3 (2002) pp. 888–908.
- [83] S. I. Pohožaev, *On the eigenfunctions of the equation  $\Delta u + \lambda f(u) = 0$* , Dokl. Akad. Nauk SSSR, **165** (1965), 36–39.
- [84] M. H. Protter and H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice–Hall, New Jersey, 1967.
- [85] Quittner, P. & Souplet, P. *Superlinear parabolic problems. Blow-up, global existence & steady states*. Birkhäuser Adv. Texts Basler Lehrbücher. Birkhäuser 2007.
- [86] Paavo Salminen , Marc Yor. *Properties of perpetual integral functionals of Brownian motion with drift*
- [87] P. Salminen & M. Yor, *Properties of perpetual integral functionals of Brownian motion with drift*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Stat. **42(3)**, (2005), 335–347.
- [88] M. Sanz-Solé & P.-A. Vuillermot, *Equivalence and Hölder-Sobolev regularity of solutions for a class of non-autonomous stochastic partial differential equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., **39(4)** (2003), 703–742.
- [89] D. H. Sattinger, *Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J. 21 (1972), 979–1000.
- [90] J.J. Seeger & S.B. Crary, *Stabilization of electrostatically actuated mechanical devices*, Proceedings of the 1997 International Conference on Solid-State Sensors and Actuators, (1997), 1133–1336 .
- [91] J.J. Seeger & S.B. Crary, *Analysis and simulation of MOS capacitor feedback for stabilizing electrostatically actuated ,echanical devices*, Second International Conference on the Simulation and Design of Microsystems and Microstructures-MICROSIM97, (1997), 199–208.
- [92] R. Sperb, *Maximum Principles and Their Applications*, Academic Press, New York, 1981.
- [93] G.I. Taylor, *The coalescence of closely spaced drops when they are at different electric potentials*, Proc. Roy. Soc. A, **306** (1968) 423–434.
- [94] D. E. Tzanetis, *Global existence and asymptotic behavior of unbounded solutions for the semilinear heat equation* (Phd Thesis), Heriot–Watt University, Edinburgh (1986).
- [95] J.B. Walsh, *An introduction to stochastic partial differential equations*, École d’été de probabilités Saint-Flour, XIV-1984, 265–439, Lecture Notes in Math. **1180**, Berlin, 1986.
- [96] W. Walter, *Differential and Integral Inequalities*, Springer–Verlag, New York, 1970.
- [97] M. Yor, *On some exponential functionals of Brownian motion*, Adv. Appl. Probab. **24** (1992), 509–531.
- [98] M. Younis, *MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics*, Springer, New York, 2011.
- [99] L. ZAMBOTTI, *Integration by parts on  $\delta$ -Bessel bridges,  $\delta > 3$ , and related SPDEs*, Ann. Probab. **31**, (2003), 323–348.
- [100] Α.Ν. Γιαννακόπουλος, *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στην Χρηματοοικονομική*, Τόμος Ι: Εισαγωγή στην Στοχαστική Ανάλυση, 3 Φεβρουαρίου 2003