Μαρκακη Μαρια

Εισαγωγη στα κβαντικα καναλια

Introduction to quantum channels

Πτυχιακη Εργασια

Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών
Σάμος 4 Μαρτίου 2022

Εισηγητης: Ανούσης Μιχαήλ

Επιτροπη

Φελουζής Ευάγγελος

Παπαλεξίου Νικόλαος

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, που με στήριξαν κατά την διάρκει των σπουδών μου, καθώς και τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Μιχαήλ Ανούση που με βοήθησε να βγάλω εις πέρας την εργασία αυτή!

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Τα πρώτα βήματα για την ανάπτυξη της κβαντομηχανικής (που σαν όρος χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά σε μελέτη του Born το 1924) ξεκίνησαν από τον Max Plank το 1900. Μέχρι περίπου το 1924 η κβαντική θεωρία δεν είχε κάποια γενική δομή και μαθηματικό υπόβαθρο. Ήταν ένα σύνολο από υποθέσεις, εμπειρικούς κανόνες, μεθόδους υπολογισμού και θεωρήματα και όχι μια συνεκτική θεωρία. Η κατάσταση άλλαξε από δύο ανεξάρτητες προσπάθειες, του Werner Heisenberg και του Erwin Schrodinger.

Το 1925 ο Heisenberg αναπτύσσει μια μαθηματική δομή για την κβαντική θεωρία, βασισμένη στους πίνακες. Ο ίδιος, ωστόσο, αγνοεί αυτό το τμήμα των Μαθηματικών και αναγκάζεται να εφεύρει τον φορμαλισμό από την αρχή. Ο Heisenberg βασίζεται σε μια ιδέα της σχολής του Göttingen, σύμφωνα με την οποία τα μεγέθη εκείνα που δεν μπορούν να παρατηρηθούν άμεσα πρέπει να απορριφθούν και να ασχολείται κανείς μόνο με παρατηρήσιμα μεγέθη.

Το 1926 ο Schrodinger, ανεξάρτητα από τον Heisenberg, προτείνει μια εξίσωση που περιγράφει τα κύματα de Broglie. Έτσι καταλήγει στην περίφημη εξίσωση Schrodinger. Η εξίσωση αυτή αποτέλεσε απαραίτητο εργαλείο για την μελέτη της κίνησης των σωματιδίων. Την ίδια περίοδο πέφτει στα χέρια του Paul Dirac ένα αντίγραφο της εργασίας του Heisenberg. Ο Dirac είχε αποφοιτήσει ως μηχανικός από το πανεπιστήμιο του Bristol και στη συνέχεια πήρε πτυχίο Μαθηματικών. Έτσι, ήταν ήδη εξοικειωμένος με την άλγεβρα των πινάκων. Επεξεργάζεται, λοιπόν, την εργασία και στέλνει πίσω στον Heisenberg την δική του προσέγγιση.

Το 1927 ο John von Neumann αναπτύσσει μια ολοκληρωμένη και αυστηρή μαθηματική βάση για την κβαντομηχανική, κεντρικά στοιχεία της οποίας είναι οι γραμμικοί τελεστές που δρουν πάνω σε χώρους Hilbert. Τον ίδιο χρόνο ο Max Born συσχετίζει τις κυματοσυναρτήσεις που προκύπτουν από την εξίσωση Schrodinger με την έννοια της πιθανότητας.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Albert Einstein υπήρξε από τους πρώτους που άνοιξαν τον δρόμο στον παράδοξο κόσμο των κβαντικών ιδεών. Γρήγορα όμως εξελίχθηκε στον σφοδρότερο πολέμιό τους. «Ο Θεός δεν παίζει ζάρια με τον κόσμο», θα δηλώσει εκνευρισμένος. «Ας σταματήσει ο Einstein να λέει στον Θεό τι να κάνει», ανταπάντησε ένας άλλος κορυφαίος φυσικός της εποχής, ο Niels Bohr. Εστω βέβαια και με καθυστέρηση, ο Einstein αναγκάστηκε να δεχθεί την αδιάψευστη ισχύ της Κβαντικής Μηχανικής. Έτσι, αντί για την ολοκληρωτική της αμφισβήτηση, επέλεξε μια δεύτερη γραμμή άμυνας. Επέμενε ότι η Κβαντομηχανική αποτελούσε μερική μόνον εικόνα μιας πολύ πιο σύνθετης πραγματικότητας. Ανακλούσε, κατά κάποιον τρόπο, μια βασικότερη θεωρία που σεβόταν την αιτιοκρατία και τις κλασικές ιδέες της Φυσικής.

Στο σημείο αυτό η κβαντομηχανική θέτει τις βάσεις για την εκρηκτική εξέλιξη της επιστήμης και της τεχνολογίας που γνώρισε η ανθρωπότητα. Το 1935, οι Einstein, Podolsky και Rosen, δημοσιεύουν το περίφημο παράδοξο που φέρει τα αρχικά των ονομάτων τους, EPR. Το ερώτημα με το οποίο καταπιάνεται το άρθρο τους είναι το κατά πόσον η κβαντομηχανική είναι ή όχι μια πλήρης θεωρία. Η συζήτηση αυτή παίρνει μεγάλες διαστάσεις και αποκαλύπτει νέες πτυχές της κβαντομηχανικής, όπως η μη τοπικότητα και η κβαντική πληροφορία. Οι τεχνολογικές εφαρμογές αυτού του νέου πεδίου, όπως η κβαντική τηλεμεταφορά, η κβαντική κρυπτογραφία και οι κβαντικοί υπολογιστές βρίσκονται σήμερα υπό μεγάλη ανάπτυξη.

Σημειώνουμε ότι το πρώτο πείραμα τηλεμεταφοράς πραγματοποιήθηκε το 1993 από μια διεθνής ομάδα έξι επιστημόνων από τις ΗΠΑ, Καναδά, Ισραήλ (C.Bennett της IBM, R.Jozsa, W.Wootters, G.Brassard, C.Crepeau, A.Peres) που χρησιμοποίησε το παράδοξο EPR. Μεσά σε λιγότερο απο τρείς δεκαετίες Κινέζοι ερευνητές ανέφεραν την επιτυχή δορυφορική μετάδοση των κβαντικά «διαπλεκόμενων» φωτονίων (σωματιδίων του φωτός) μεταξύ της Γης και του διαστήματος, σε απόσταση 1.203 χιλιομέτρων. Με αυτό τον τρόπο, έκαναν ένα άλμα προς τον τελικό στόχο της δημιουργίας κρυπτογραφημένων κβαντικών δικτύων τηλεπικοινωνιών και internet, τα οποία θεωρούνται αδύνατο να πέσουν θύμα χάκερ.

Κεφάλαιο 1

Μαθηματικό Υπόβαθρο

Θα ξεκινήσουμε αυτήν την εργασία παραθέτοντας κάποιες βασικές μαθηματικές έννοιες, οι οποίες θα αποτελέσουν τα εφόδια μας για την συνέχεια. Αύτη η ενότητα χωρίζεται σε πέντε θεμελιώδεις υποενότητες. Αρχικά, θα παρουσιάσουμε το διανυσματικό χώρο και κάποια στοιχεία του. Στην συνέχεια, θα μελετήσουμε τον χώρο Hilbert, στον οποίο όπως θα δούμε στη συνέχεια αναπτύσσεται η κβαντική θεωρία. Έπειτα, θα ασχοληθούμε με την θεωρία πινάκων και τους γραμμικούς μετασχηματισμούς και τέλος, θα παρουσιάσουμε το τανυστικό γινόμενο που αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο του τομέα αυτού. Με την ολοκλήρωση αυτής της ενότητας, θα είμαστε πλέον σε θέση να αναπτύξουμε κάποιες πτυχές της κβαντικής θεωρίας της πληροφορίας και να αναλύσουμε μέχρι ενός βαθμού τα κβαντικά κανάλια.

1.1 Διανυσματικός χώρος

Θεωρούμε ένα σώμα $(\mathrm{F}\ ,+,\cdot\ )$ και ένα σύνολο $V \neq \varnothing$, τα στοιχεία του οποίου θα συμβολίζουμε με $\vec{v}$. Στο V έχει ορισθεί μια εσωτερική πράξη, που την συμβολίζουμε με + και για την οποία το ζεύγος (V, +) είναι αβελιανή ομάδα. Επίσης, θεωρούμε μια εξωτερική πράξη:

$$\cdot : F \times V \to V$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $(\forall a \in F)(\forall \vec{v}, \vec{w} \in V)\,[\,a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}\,]$

(ii) $(\forall a, b \in F)(\forall \vec{v} \in V)\,[\,(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}\,]$

(iii) $(\forall a, b \in F)(\forall \vec{v} \in V)\,[\,(a \cdot b) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})\,]$

(iv) $(\forall \vec{v} \in V)[1 \cdot \vec{v} = \vec{v}]$

Η τετράδα (V, F, +, ·) ονομάζεται *διανυσματικός χώρος* επί του σώματος F.

Μία από τις αρχές της φυσικής, είναι η αρχή της επαλληλίας. Η διαδικασία της επαλληλίας είναι ένα είδος προσθετικής διαδικασίας κατά την οποία προκύπτει μία νέα κατάσταση από την πρόσθεση διάφορων καταστάσεων του φυσικού συστήματος ή από τον πολλαπλασιασμό μιας κατάστασης. Επομένως, οι καταστάσεις πρέπει να συνδυαστούν με μαθηματικά μεγέθη που να μπορούν να προστεθούν ή να πολλασιαστούν με έναν αριθμό και να δώσουν μαθηματικά μεγέθη του ίδιου είδους. Τέτοια μαθηματικά μεγέθη είναι τα διανύσματα. Η χρήση του διανυσματικού χώρου ως μαθηματική δομή για την φυσική, οφείλεται στην αρχή της επαλληλίας.

Θεώρημα 1.1.1. *Σ'ένα δαινυσματικό χώρο V επί του F ισχύουν οι σχέσεις:*

(i) $(\forall a \in F)[\, a \cdot \vec{0} = \vec{0}\,]$

(ii) $(\forall \vec{v} \in V)[\, 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}\,]$

(iii) $(\forall a \in F)(\forall \vec{v} \in V)[\, a \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow a = 0 \;\; ή \;\; \vec{v} = \vec{0}\,]$

(iv) $(\forall a \in F)(\forall \vec{v} \in V)[(-a) \cdot \vec{v} = a \cdot (-\vec{v}) = -(a \cdot \vec{v})\,]$

Ορισμός 1.1.2. *Ένα μη κενό υποσύνολο W ενός διανυσματικού χώρου V επί του σώματος F ονομάζεται διανυσματικός υπόχωρος του V (ή απλά υπόχωρος), αν το W με τις ίδιες πράξεις αποτελεί διανυσματικό χώρο. Αποδεικνύεται ότι το W είναι υπόχωρος αν είναι κλειστός ως προς τις δύο πράξεις:*

α) $(\forall v, u \in W)[v + w \in W]$

β) $(\forall a \in F)(\forall v \in W)[a \cdot v \in W]$

Ορισμός 1.1.3. *Έστω V διανυσματικός χώρος επί του σώματος F με $v_1, v_2, \dots v_m \in V$. Κάθε διάνυσμα της μορφής*

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i \;\;, \text{ όπου } a_i \in F$$

ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $v_1, v_2, \dots v_m$.

Ορισμός 1.1.4. *Ο διανυσματικός χώρος V θα λέγεται ευθύ άθροισμα, των υπόχωρων U και W και θα συμβολίζεται $V = U \oplus W$, αν κάθε διάνυσμα $v \in V$ μπορεί να γραφτεί κατά μοναδικό τρόπο σαν $v = u + w$, όπου $u \in U$ και $w \in W$.*

Ορισμός 1.1.5. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος F. Τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ λέγονται γραμμικά εξαρτημένα, αν υπάρχουν αριθμοί a_i με $i = 1, 2 \dots, m$ από το σώμα F, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε:*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m = 0$$

Αντίστοιχα τα διανύσματα λέγονται γραμμικά ανεξάρτητα όταν ισχύει:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \cdots = a_m = 0$$

Ορισμός 1.1.6. *Έστω ένας διανυσματικός χώρος V επί του σώματος F και τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$. Θα λέμε ότι τα διανύσματα αυτά αποτελούν ένα σύστημα γεννητόρων ή ότι παράγουν τον χώρο V, (span the space), όταν κάθε διάνυσμα $u \in V$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδιασμός των v_i, $i = 1, 2 \dots, k$.*

Ορισμός 1.1.7. *Τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ θα λέμε ότι αποτελούν μια βάση του διανυσματικού χώρου V αν είναι συγχρόνως γραμμικά ανεξάρτητα και αποτελούν σύστημα γεννητόρων.*

Ορισμός 1.1.8. *Διάσταση ενός διανυσματικού χώρου V ονομάζεται ο πληθικός αριθμός μιας βάσης, δηλαδή ο φυσικός αριθμός που εκφράζει το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης. Η διάσταση ενός διανυσματικού χώρου V θα συμβολίζεται με $dimV$. Ο διανυσματικός χώρος V λέγεται πεπερασμένης διάστασης, αν η βάση είναι πεπερασμένη. Αν $dimV = \infty$, τότε ο διανυσματικός χώρος λέγεται άπειρης διάστασης.*

Ορισμός 1.1.9. *Ορίζουμε ως ευθύ άθροισμα των διανυσματικών χώρων V και W να είναι το σύνολο $V \oplus W$, του οποίου τα στοιχεία είναι τα ζεύγη (v,w) για κάθε $v \in V$ και $w \in W$. Η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός γίνεται κατά τις συνιστώσες.*

1.2 Χώρος Hilbert

Ορισμός 1.2.1. *Έστω X μιγαδικός γραμμικός χώρος. Μία νόρμα στον X είναι μία απεικόνιση*

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \|x\|$$

που ικανοποιεί

(i) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (x, y \in X)$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad (x \in X, \lambda \in \mathbb{C})$

(iii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Πρόταση 1.2.2. *Τριγωνική ανισότητα:* $\big|\, \|v\| - \|w\| \,\big| \leq \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Ορισμός 1.2.3. *Έστω $\mathbb{C}^n$ με $u = (u_1, u_2 \dots u_n), v = (v_1, v_2 \dots v_n) \in \mathbb{C}^n$.Η απεικόνιση*

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \;\; \langle u, v \rangle \mapsto \overline{u}_1 v_1 + \overline{u}_2 v_2 + \dots + \overline{u}_n v_n$$

ονομάζεται κανονικό (ή σύνηθες) εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{C}^n$. *Το μήκος ή μέτρο του* $u = (u_1, u_2..u_n)$ *ορίζεται από τη νόρμα:* $\|u\| = \sqrt{|u_1|^2 + ... + |u_n|^2}$. *Παρατηρούμε ότι* $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$.

Παρατήρηση 1.2.4. *Επισημαίνουμε οτι τα συνήθη εσωτερικά γινόμενα του* $\mathbb{C}^n$ *σχετίζονται άμεσα με τον ορισμό του γινομένου πινάκων.Πράγματι, αν* $u, v \in \mathbb{C}^n$ *όπου* $u = (u_1, u_2...u_n)$ *και* $v = (v_1, v_2...v_n)$, *τότε θεωρώντας τα στοιχεία του* $\mathbb{C}^n$ *ως* $1 \times n$ *πίνακες,έχουμε:*

$$\langle u, v\rangle = \overline{u}_1 v_1 + \overline{u}_2 v_2 + ... + \overline{u}_n v_n = \begin{pmatrix}\overline{u}_1 ... \overline{u}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \text{δηλαδή } \langle u, v\rangle = \overline{u}\ v^t.$$

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{C}$. Δίνουμε τώρα έναν πιο γενικό ορισμό ενός εσωτερικού γινομένου επί ενός χώρου V.

Ορισμός 1.2.5. *Έστω V ένας μιγαδικός γραμμικός χώρος .Το εσωτερικό γινόμενο είναι μια απεικόνιση* $\langle . , . \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ *που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες για όλα τα* $v, v_1, v_2 \in V,\ w, w_1, w_2 \in W$ *και* $\lambda \in \mathbb{C}$:

(i) $\overline{\langle v, w\rangle} = \langle w, v\rangle$

(ii) $\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle,\ \langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle$

(iii) $\langle \lambda v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle,\ \langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$

(iv) $\langle v, v\rangle \geq 0$ *με* $\langle v, v\rangle = 0$ *αν και μόνο αν* $v = 0$ *(θετικά ορισμένο)*

Σημείωση : Σε αυτήν την εργασία η συζυγής γραμμικότητα είναι στην πρώτη μεταβλητή.

Ορισμός 1.2.6. *Ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, λέγεται χώρος Hilbert αν είναι πλήρης ως προς την νόρμα που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.*

Ο χώρος Hilbert είναι εφοδιασμένος με καλές ιδιότητες. Συνεπώς όταν είναι άπειρων διαστάσεων μπορούν να λυθούν πιθανά προβλήματα συγκλίσεως.

Ορισμός 1.2.7. *Δύο διανύσματα v,u λέγονται ορθογώνια, αν και μόνο αν* $\langle v, u\rangle = 0$.

Ορισμός 1.2.8. *Ένα σύνολο διανυσμάτων* $\{v_1, v_2, ...\}$ *είναι ορθοκανονικό αν*

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{i,j}$$ [1]

[1] Το σύμβολο $\delta_{i,j}$ ονομάζεται σύμβολο του Kronecker και ορίζεται ως: $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ όταν } i = j \\ 0, \text{ όταν } i \neq j \end{cases}$

για κάθε i και j. Δηλαδή ένα σύνολο διανυσμάτων είναι ορθοκανονικό αν κάθε διάνυσμα είναι ορθογώνιο σ'όλα τα άλλα και είναι κανονικοποιημένο, δηλαδή έχει μοναδιαίο μήκος. Ένα διάνυσμα μπορεί να κανονικοποιηθεί αν διαιρεθεί με το μέτρο του $\frac{v}{\|v\|}$.

Ορισμός 1.2.9. *Ορθοκανονική βάση $\{e_i\}$ του χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ πεπερασμένης διάστασης, είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων που ορίζει βάση του διανυσματικού χώρου.*

Σε ένα χώρο Hilbert πεπερασμένης διάστασης ($\mathbb{C}^n$), ο αριθμός των διανυσμάτων μίας ορθοκανονικής βάσης είναι ίσος με τη διάσταση του χώρου.

Θεώρημα 1.2.10. Ανισότητα του Bessel
Αν $X = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ είναι ένα οποιοδήποτε ορθοκανονικό σύνολο ενός χώρου εσωτερικού γινομένου και v ένα τυχαίο διάνυσμα, τότε:

$$\|v\|^2 \geq \sum_{i}^{n} |a_i|^2, \quad \text{όπου } a_i = \langle v_i, v\rangle$$

Επιπλέον το διάνυσμα $v' = v - \sum_i^n a_i v_i$ είναι ορθογώνιο σε κάθε v_j.

Θεώρημα 1.2.11. *Αν $X = \{v_i\}$ είναι ένα πεπερασμένο ορθοκανονικό σύνολο m διανυσμάτων σ'ένα χώρο εσωτερικού γινομένου $\mathcal{H}$, τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

i) Το X είναι πλήρες.

ii) Αν $\langle v_i, v\rangle = 0$ για $i = 1, 2, \dots, m$ τότε $v = 0$

iii) Το X παράγει το χώρο $\mathcal{H}$.

iv) Αν $v \in \mathcal{H}$ τότε $v = \sum_{i=1}^m \langle v_i, v\rangle v_i$

v) Αν $v, u \in \mathcal{H}$ όπου $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^m \langle u, v_i\rangle\langle v_i, v\rangle$ (ισότητα Parseval)

vi) Αν $v \in \mathcal{H}$, τότε ισχύει η ισότητα στην ανισότητα Bessel.

Ορισμός 1.2.12. *Θεωρούμε W ένα υποσύνολο ενός χώρου $\mathcal{H}$ με εσωτερικό γινόμενο . Ως ορθογώνιο συμπλήρωμα του W ορίζουμε το σύνολο:*

$$W^{\perp} = \{v \in \mathcal{H} / \langle v, w\rangle = 0, \forall w \in W\}$$

που αποτελείται από τα διανύσματα v του $\mathcal{H}$ που είναι ορθογώνια προς κάθε διάνυσμα του $w \in W$.

Θεώρημα 1.2.13. *Εάν W είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{H}$, τότε ισχύει $\mathcal{H} = W \oplus W^{\perp}$.*

Ορισμός 1.2.14. *Υποθέτουμε ότι ο διανυσματικός χώρος V είναι το ευθύ άθροισμα των διανυσματικών υποχώρων $W_1, W_2, \dots, W_r$ δηλαδή $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots W_r$. Τότε κάθε διάνυσμα $v \in V$ αναπτύσεται κατά μοναδικό τρόπο ως $v = w_1 + w_2 + \cdots + w_k + \cdots + w_r$ με $w_k \in W_k$. Ονομάζουμε προβολή του V στον υπόχωρο W_k την απεικόνιση:*

$$P_k : V \to V,$$

$$P_k : v \mapsto P(v) \equiv w_k$$

Θεώρημα 1.2.15. *Η προβολή P_k είναι γραμμική και ικανοποιεί την σχέση:*

$$P_k^2 = P_k$$

.

Παρατήρηση 1.2.16. *Στην απλή περίπτωση, όπου $\mathcal{H} = W \oplus W^{\perp}$, ένα διάνυσμα $v \in \mathcal{H}$ μπορεί να εκφραστεί κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $v = w + w^{\perp}$ όπου $w \in W$ και $w^{\perp} \in W^{\perp}$. Η προβολή του v στον υπόχωρο W είναι το διάνυσμα w και το μέτρο του v δίνεται από το Πυθαγόρειο θεώρημα: $||v||^2 = ||w||^2 + ||w^{\perp}||^2$. Εάν $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του W, τότε η προβολή του διανύσματος v στον υπόχωρο W δίνεται από την έκφραση:*

$$P_w(v) = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \cdots + \langle v, w_r \rangle w_r.$$

1.3 Πίνακες

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε σε ορισμένα βασικά στοιχεία της θεωρίας πινάκων, η οποία βρίσκει μεγάλη εφαρμογή τόσο στα εφαρμοσμένα μαθηματικά όσο και στη φυσική. Οι γραμμικοί μετασχηματισμοί και οι τελεστές, μπορούν να παρασταθούν από πίνακες, τα δε διανύσματα απο στήλες ή γραμμές που είναι ειδικές μορφές πινάκων.

Σήμερα, οι πίνακες χρησιμοποιούνται όχι μόνο στην επίλυση γραμμικών αλγεβρικών συστημάτων, αλλά και για την μελέτη ηλεκτρικών κυκλωμάτων, στην οπτική, στην κβαντική περιγραφή της δομής των ατόμων. Επίσης, οι πίνακες χρησιμοποιούνται στα γραφικά που δημιουργούνται από τους υπολογιστές για την προβολή μιας τριδιάστατης εικόνας σε διδιάστατη οθόνη και για τη δημιουργία αληθοφανούς πραγματικής κίνησης.

Ορισμός 1.3.1. *Θεωρούμε τα σύνολα $N_m = \{1, 2, \dots, m\}, N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ και ένα σώμα F. Κάθε συνάρτηση $A : N_m \times N_n \to F$, της οποίας οι εικόνες συμβολίζονται ως εξής:*

$$(\forall (i, j) \in N_m \times N_n)[A(i, j) = a_{i,j}]$$

ονομάζεται πίνακας ή μήτρα(matrix) με m γραμμές και n στήλες.
Συνήθως, ένας πίνακας A με m γραμμές και n στήλες, παριστάνεται με την εξής ορθογώνια διάταξη:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ή εν συντομία: $A = (a_{ij})$, *με* $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. *Ένας πίνακας A που έχει m γραμμές και n στήλες λέγεται πίνακας τύπου* $m \times n$ *ή διαστάσεων* $m \times n$.
Επιπλέον, ένας πίνακας διαστάσεων $n \times n$ *λέγεται τετραγωνικός πίνακας.*

Ορισμός 1.3.2. *Ένας πίνακς τύπου* $1 \times n$ *λέγεται γραμμή διάνυσμα και ένας πίνακας τύπου* $m \times 1$ *λέγεται στήλη διάνυσμα. Ένας δε αριθμός απο το σώμα F μπορεί να θεωρηθεί ως ένας πίνακας τύπου* 1×1.

Ορισμός 1.3.3. *Ορίζουμε ως τάξη ενός πίνακα A (rankA), τον αριθμό των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του A.*

Ορισμός 1.3.4. *Ορίζουμε ως ίχνος ενός τετραγωνικού πίνακα A το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του και το συμβολίζουμε ως trA, όπου* $trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Ορισμός 1.3.5. *Έστω i,j θετικοί ακέραιοι με* $1 \leq i \leq n$ *και* $1 \leq j \leq m$. *Θα συμβολίζουμε με* E_{ij} *τον* $n \times m$ *πίνακα που έχει 1 στην (i,j)-θέση και 0 παντού αλλού.*

Παρατήρηση 1.3.6. *Έστω A ένας πίνακας* $n \times m$ *επί του* $\mathbb{F}$, *τότε*

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} E_{ij}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι κάθε πίνακας μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδιασμός των E_{ij}. *Επιπλέον, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι τα* E_{ij} *είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα τα* E_{ij} *αποτελούν βάση του χώρου* $\mathbb{F}^{n \times m}$.

1.3α΄ Είδη πινάκων

1. **Ανάστροφος**: Ο ανάστροφος ενός πίνακα A, που συμβολίζεται με A^t, είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A, γράφοντας τις γραμμές του A ως στήλες, δηλαδή $(a_{ij})^t = (a_{ji})$.

Παρατήρηση 1.3.7. *Έστω A,B τετραγωνικοί πίνακες $n \times n$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

i. $(\mathrm{AB})^t = B^t A^t$

ii. $(A+B)^t = A^t + B^t$

iii. $(A^t)^t = A$

iv. *Για κάθε αριθμό k,* $(kA)^t = kA^t$

2. **Συζυγής** ενός πίνακα Α είναι ο πίνακας $\overline{A}$ που προκύπτει απο τα στοιχεία του Α, παίρνοντας τα συζυγή τους. Αν τα στοιχεία είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε $\overline{A} = A$.

   Παράδειγμα 1.3.8. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2-3i & 4-i \\ 5 & 1+i \end{pmatrix}$ *τότε* $\overline{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 2+3i & 4+i \\ 5 & 1-i \end{pmatrix}$

3. **Αναστροφοσυζυγής (adjoint)** ενός πίνακα Α, είναι ο πίνακας A^*, του οποίου τα στοιχεία είναι τα συζυγή στοιχεία των αντίστοιχων στοιχείων του ανάστροφου πίνακα A^t, δηλαδή $\mathrm{A}^* = (\overline{\mathrm{A}})^t = (\overline{a}_{ji})$.

   Παράδειγμα 1.3.9. *Αν A ο πίνακας απο το παραπάνω παράδειγμα τότε* $A^* = \begin{pmatrix} 2+3i & 5 \\ 4+i & 1-i \end{pmatrix}$

4. **Ερμητιανός** ονομάζεται ένας πίνακας Α για τον οποίο ισχύει: $A = A^*$. Συνεπώς, τα στοιχεία ενός ερμητιανού πίνακα ικανοποιούν την σχέση $(a_{ij}) = (\overline{a}_{ji})$.

5. **Ταυτοτικός** Ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$, λέγεται ταυτοτικός και συμβολίζεται με I_n, όταν όλα τα στοιχεία του είναι μηδέν εκτός των στοιχείων της κύριας διαγωνίου, που ισούνται με 1, δηλαδή $(a_{ij}) = (\delta_{ij})$.

6. **Διαγώνιος**: ονομάζεται ένας πίνακας Α του οποίου τα μη διαγώνια στοιχεία είναι μηδέν, δηλαδή $a_{ij} = a_i \delta_{ij}$, όπου a_i τα στοιχεία της διαγωνίου.

7. **Αντίστροφος** ενός πίνακα Α, ονομάζεται ο πίνακας, που συμβολίζεται ως A^{-1}, για τον οποίο ισχύει: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Εάν ο αντίστροφος υπάρχει είναι μοναδικός.

8. **Μοναδιαίος**: Ο Α ονομάζεται μοναδιαίος αν είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $A^{-1} = A^*$. Συνεπώς, θα ισχύει $AA^* = A^*A = I$.

Λήμμα 1.3.10. *Έστω* $\mathrm{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1) $\langle AX, Y \rangle = \langle X, A^* Y \rangle$ *για κάθε* $X, Y \in \mathbb{C}^{n \times 1}$

2) Αν $\langle AX, Y\rangle = 0$ *για κάθε* $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ *τότε* $A = 0$.

Πρόταση 1.3.11. *Ένας πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *είναι μοναδιαίος αν και μόνο αν διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο του* $\mathbb{C}^n$, *δηλαδή για κάθε* $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times 1}$

$$\langle AX, AY\rangle = \langle X, Y\rangle$$

1.3β΄ Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Ορισμός 1.3.12. *Έστω* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. *Αν υπάρχουν* $\lambda \in \mathbb{F}$ *και* $X \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ *με* $X \neq 0$, *τέτοια ώστε* $AX=\lambda X$, *θα λέμε ότι το* λ *είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα* A *και το* X *ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα* A *που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή* λ.

Πόρισμα 1.3.13. *Για κάθε ιδιοτιμή* λ *ενός μοναδιαίου πίνακα ισχύει* $|\lambda|=1$.

Θεώρημα 1.3.14. *Κάθε ιδιοτιμή Ερμητιανού πίνακα είναι πραγματικός αριθμός.*

Πρόταση 1.3.15. *Έστω* A *ένας Ερμητιανός πίνακας και* $\lambda \neq \mu$ *δύο ιδιοτιμές του με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα* X,Y. *Τότε* $\langle X, Y\rangle = 0$.

Ορισμός 1.3.16. *Έστω* $A \in M_n$, *ο* A *θα λέγεται θετικά ημιορισμένος πίνακας αν* $\langle h, Ah\rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{C}$.

Πόρισμα 1.3.17. $A \in M_n$ *είναι θετικά ημιορισμένος* $\Leftrightarrow$ *O* A *έχει μια ορθοκανονική βάση αποτελούμενη αποκλειστικά από μη αρνητικές ιδιοτιμές.*

1.4 Γραμμικοί μετασχηματισμοί

Ορισμός 1.4.1. *Έστω* V,W *δύο διανυσματικοί χώροι επι του* $\mathbb{F}$. *Μία απεικόνιση* $T : V \to W$ *λέγεται γραμμικός μετασχηματισμός ή γραμμική απεικόνιση αν κάθε* $u, v \in V$ *και* $\lambda \in \mathbb{F}$ *ισχύουν τα εξής:*

(i) $T(u + w) = T(u) + T(w) \in W$

(ii) $T(\lambda u) = \lambda T(u) \in W$

Με άλλα λόγια, ο μετασχηματισμός T είναι γραμμικός, αν διατηρεί την δομή των χώρων.

Ορισμός 1.4.2. *Έστω* V *διανυσματικός χώρος επί του σώματος* $\mathbb{F}$. *Μία συνάρτηση* $H : V\times V \to \mathbb{F}$ *ονομάζεται διγραμμική μορφή (bilinear form) εάν είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή όταν η άλλη μεταβλητή διατηρείται σταθερή. Ισχύουν δηλαδή οι ακόλουθες σχέσης:*

(i) $H(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda H(x_1, y) + H(x_2, y)$ *με* $x_1, x_2, y \in V, \lambda \in \mathbb{F}$

(ii) $H(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda H(x, y_1) + H(x, y_2)$ *με* $x, y_1, y_2 \in V, \lambda \in \mathbb{F}$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(V)$ το σύνολο όλων των διγραμμικών μορφών επί του V.

Παράδειγμα 1.4.3. *Το εσωτερικό γινόμενο σε έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο είναι μια διγραμμική μορφή.*

Θεώρημα 1.4.4. *Έστω V, W διανυσματικοί χώροι διάστασης n, επί του $\mathbb{F}$. Έστω $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ μία βάση του V και $u_1, u_2, \dots, u_n$ τυχαία διανύσματα του W. Τότε υπάρχει μία μοναδική γραμμική απεικόνιση $T : V \to W$ τέτοια ώστε $T(v_1) = u_1$, $T(v_2) = u_2, \dots, T(v_n) = u_n$.*

Ορισμός 1.4.5. *Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $\mathrm{T} : V \to W$ μία γραμμική απεικόνιση*

(i) *Η T καλείται μονομορφισμός αν είναι 1-1.*

(ii) *Η T καλείται επιμορφισμός αν είναι επί.*

(iii) *Η T καλείται ισομορφισμός αν είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός.*

Ορισμός 1.4.6. *Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$. Θα λέμε ότι ο V είναι ισόμορφος με τον W, και θα γράγουμε $V \simeq W$, αν υπάρχει ισομορφισμός $f : V \to W$.*

Παρατήρηση 1.4.7. *Μπορούμε να ταυτίσουμε τους $M_{n,p}$ πίνακες με τις γραμμικές απεικονίσεις απο τον $\mathbb{C}^p$ στον $\mathbb{C}^n$, δηλαδή $M_{n,p} \simeq \mathfrak{L}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^n)$ μέσω της σχέσης:*

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1,j}\, \lambda j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{n,j}\, \lambda j \end{pmatrix}$$

1.4α′ Γραμμικοί τελεστές

Η χρήση των τελεστών συχνά επιφέρει μεγάλες απλοποιήσεις
και αποφυγή περίπλοκων υπολογισμών ολοκληρωμάτων.
Αλλά τότε η αυστηρή λογική της μεθόδου δεν είναι προφανής!
Και τι έγινε; Πρέπει να σταματήσω να τρώω επειδή
δεν καταλαβαίνω πλήρως την διαδικασία της πέψης;
Oliver Heaviside

Ορισμός 1.4.8. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Θεωρούμε την ειδική περίπτωση των γραμμικών μετασχηματισμών $T : V \to V$, δηλαδή του V στον εαυτό του. Αυτοί οι γραμμικοί μετασχηματισμοί λέγονται γραμμικοί τελεστές, ή μόνο τελεστές στο διανυσματικό χώρο V.*

Για τους τελεστές A,B ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ ορίζονται οι ακόλουθες πράξεις

(i) Άθροιση: (A+B)φ= Aφ+Bφ για κάθε $\varphi \in \mathcal{H}$.

(ii) Βαθμωτό γινόμενο: (λA)φ=λAφ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ και $\varphi \in \mathcal{H}$.

(iii) Γινόμενο τελεστών: (AB)φ=A(Bφ) για κάθε $\varphi \in \mathcal{H}$.

Οι παραπάνω πράξεις με τελεστές έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Οι τελεστές ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ ορίζουν ένα διανυσματικό χώρο.

(ii) Προσεταιριστικότητα. Για κάθε τελεστή A,B, και C, ισχύει ότι (AB)C=A(BC)

(iii) Διγραμμικότητα. Για κάθε τελεστή A,B, και C και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, ισχύει ότι

$$\mathrm{A}(\lambda B + C) = \lambda AB + AC, \text{ και } (\lambda B + C)A = \lambda BA + CA$$

(iv) Ύπαρξη μονάδας. Ο τελεστής I που ορίζεται ως Iφ=φ για κάθε $\varphi \in \mathcal{H}$, ικανοποιεί τη σχέση IA=AI=A για κάθε τελεστή A.

(v) Ύπαρξη μηδενός. Ο τελεστής 0 που ορίζεται ως 0φ=0 για κάθε $\varphi \in \mathcal{H}$, ικανοποιεί τις σχέσεις 0A=A0=0 και A+0=A, για κάθε τελεστή A.

Ορισμός 1.4.9. *Ένας τελεστής T θα λέγεται αντιστρέψιμος, όταν υπάρχει τελεστής* T^{-1} *τέτοιος ώστε* $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ *(I= ο ταυτοτικός τελεστής). Ο* T^{-1} *ονομάζεται αντίστροφος του T. Για να έχει ο T αντίστροφο τελεστή θα πρέπει να είναι 1-1 και επί.*

Ορισμός 1.4.10. *Έστω V ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης και* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(V)$. *Τότε υπάρχει μοναδικός τελεστής* $T^* : V \to V$ *τέτοιος ώστε για κάθε* $x, y \in V$ *θα ισχύει*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$$

Ο τελεστής T^* *ονομάζεται συζυγής του T.*

Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι ακόλουθες ταυτότητες.

(i) $(cA + B)^* = \bar{c}A^* + B^*$ για κάθε τελεστή $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \forall c \in \mathbb{C}$

(ii) $(A^*)^* = A$

(iii) $(AB)^* = B^* A^*$

Παρατήρηση 1.4.11. *Απο τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου ισχύει ότι*

$$\langle x, Ty\rangle = \overline{\langle Ty, x\rangle} = \overline{\langle y, T^* x\rangle} = \langle T^* x, y\rangle \quad \forall x, y \in V$$

Ορισμός 1.4.12. *Έστω τελεστής T σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Κάθε διάνυσμα $x \in \mathcal{H}$, πλην του μηδενικού, που ικανοποιεί τη σχέση $Tx = \tau x$, για κάποιο $\tau \in \mathbb{C}$, καλείται ιδιοδιάνυσμα του T και η αντίστοιχη τιμή τ, ιδιοτιμή του T.*

Ορισμός 1.4.13. *Η νόρμα $\|T\|$ ενός τελεστή T, ορίζεται ως*

$$\|T\| = sup\frac{\|T\psi\|}{\|\psi\|}, \quad \psi \in \mathcal{H}$$

Γραμμικές μορφές

Έστω $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ μία βάση ενός διανυσματικού χώρου V στο σώμα $\mathbb{F}$ και v ένα διάνυσμα του V, το οποίο έχει την εξής ανάπτυξη:

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots + v_n e_n$$

Τότε στο διάνυσμα v μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το διάνυσμα στήλη (στήλη συντελεστών) που αντιστοιχεί στην παραπάνω ανάπτυξη του v.

$$[v]_e = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Η απεικόνιση αυτή, που ορίζεται από τη βάση $\{e_i\}$, είναι ένας ισομορφισμός του V στο χώρο $\mathbb{F}^{n\times1}$.

Έστω T ένας τελεστής του διανυσματικού χώρου V και $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ μία βάση του V. Θεωρούμε τώρα τις εικόνες $T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)$, ή απλά $Te_1, Te_2, \dots, Te_n$, των βασικών διανυσμάτων της βάσης ως προς τον τελεστή T. Οι εικόνες αυτές είναι διανύσματα του V και κάθε μια είναι ένας γραμμικός συνδιασμός των βασικών διανυσμάτων:

$$Te_1 = t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \cdots + t_{n1}e_n$$

$$Te_2 = t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \cdots + t_{n2}e_n$$

....

$$Te_j = t_{1j}e_1 + t_{2j}e_2 + \cdots + t_{ij}e_i + t_{nj}e_n$$

....

$$Te_n = t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \cdots + t_{nn}e_n$$

Θα συμβολίζουμε με $[T]_e$ τον πίνακα του T ως προς την βάση $\{e\}_i$, όπου $[T]_e = (t_{ij})$. Αν υποθέσουμε ότι ο διανυσματικός χώρος V είναι εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο και ότι η βάση $\{e_i\}$ είναι ορθοκανονική, $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, τότε τα στοιχεία του πίνακα $[T]_e$ υπολογίζονται απο την σχέση : $t_{ij} = \langle e_i, Te_j \rangle$.

Πρόταση 1.4.14. *Έστω V χώρος με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης και έστω B μια ορθοκανονική βάση του V. Αν $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(V)$, τότε $[T^*]_{\mathrm{B}} = [T]^*_{\mathrm{B}}$.*

Ορισμός 1.4.15. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ καλείται δυϊκός χώρος του V και συμβολίζεται με V^*. Τα σημεία του V^* λέγονται γραμμικές μορφές.*

Ορισμός 1.4.16. Αναπαράσταση γραμμικών μορφών
Έστω V χώρος με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης επί του $\mathbb{F}$ και $g : V \to \mathbb{F}$ γραμμική. Τότε υπάρχει μοναδικό $y \in V$ τέτοιο ώστε $g(x) = \langle x, y \rangle \ \forall x \in V$

1.4β΄ Είδη τελεστών

Το σύνολο όλων των τελεστών σε ένα χώρο Hilbert και τα σημαντικότερα υποσύνολα του.

Ορισμός 1.4.17. *Κανονικός ονομάζεται ένας τελεστής A, ο οποίος ικανοποιεί την σχέση: $AA^* = A^*A$.*

Ορισμός 1.4.18. *Αυτοσυζυγής (ερμιτιανός) λέγεται ένας τελεστής A που ικανοποιεί την σχέση: $\mathrm{A} = \mathrm{A}^*$.*

Ορισμός 1.4.19. *Έστω A αυτοσυζυγής τελεστής, τότε αν $\langle A\psi, \psi\rangle \geq 0 \ \ \forall\psi \in \mathcal{H}$, ο τελεστής A καλείται θετικός και γράφουμε $A \geq 0$.*

Πρόταση 1.4.20. *Οι ιδιοτιμές ενός αυτοσυζυγούς τελέστη A είναι πραγματικοί αριθμοί.*

Πρόταση 1.4.21. *Αν A αυτοσυζυγής και ικανοποιούνται οι σχέσεις $\mathrm{A}\psi = a\psi$, $\mathrm{A}\varphi = a'\varphi$ με $a \neq a'$, τότε $\langle\varphi, \psi\rangle = 0$.*

Θεώρημα 1.4.22. *Έστω V πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, πεπερασμένης διάστασης και $T \in \mathcal{L}(V)$. Τότε ο T είναι αυτοσυζυγής εάν και μόνο εάν ο V περιέχει μία ορθοκανονική βάση από ιδιοδιανύσματα του V.*

Θεώρημα 1.4.23. *Ένας αυτοσυζυγής τελεστής $T : V \to V$ διαγωνιοποιείται, δηλαδή μπορεί να παρασταθεί απο ένα διαγώνιο πίνακα, ως προς κάποια ορθοκανονική βάση, που θα αποτελείται απο ιδιοδιανύσματα.*

Ορισμός 1.4.24. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, πεπερασμένης διάστασης επί του σώματος $\mathbb{F}$. Εάν $\|Ux\| = \|x\|$ για κάθε $x \in V$, τότε ο U ονομάζεται ορθμοναδιαίος.*

Οι τελεστές αυτοί διατηρούν τα μήκη, άρα και τα εσωτερικά γινόμενα και αντίστροφα.

Πρόταση 1.4.25. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, πεπερασμένης διάστασης και $U \in \mathcal{L}(V)$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) $\|Ux\| = \|x\|$ *για κάθε* $x \in V$,

(ii) $UU^* = U^*U = I \Leftrightarrow U^* = U^{-1}$

(iii) $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle \ \ \forall x, y \in V$

(iv) *Αν B είναι μια ορθοκανονική βάση του V τότε $U(B)$ είναι ορθοκανονική βάση του V.*

Ορισμός 1.4.26. *Ένας αυτοσυζυγής τελεστής T, αποτελεί ορθή προβολή και ονομάζεται προβολικός, αν ικανοποεί την σχέση $\mathrm{T}^2 = \mathrm{T} = \mathrm{T}^*$.*

1.5 Τανυστικά γινόμενα

Οι τανυστές μας βοηθούν να κατανοήσουμε πώς λειτουργεί η γεωμετρία των χώρων που δεν προσεγγίζονται διαισθητικά. Κάποιες εφαρμογές τους είναι στην θεωρία της σχετικότητας, στην κβαντομηχανική και στους κβαντικούς υπολογιστές. Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τους τανυστές ως μια συλλογή απο διανύσματα και γραμμικές μορφές συνδυασμένα χρησιμοποιώντας το τανυστικό γινόμενο. Σε αυτήν την ενότητα, θα επικεντρωθούμε στην έννοια του τανυστικού γινομένου το οποίο θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο στην συνέχεια. Αξίζει να αναφερθεί οτι το τανυστικό γινόμενο μας δίνει την δυνατότητα να παράγουμε διανυσματικούς χώρους μεγάλων διαστάσεων απο την σύνδεση διανυσματικών χώρων μικρότερων διαστάσεων.

1.5α΄ Τανυστικά γινόμενα γραμμικών χώρων

Ορισμός 1.5.1. *Έστω* $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$, $\mathbb{K}-$ *διανυσματικοί γραμμικοί χώροι και* $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2$ *οι αντίστοιχες βάσεις τους, ώστε* $\mathrm{E}_i \hookrightarrow \mathbb{K}_i^X$.
Ορίζουμε: $\xi \otimes \kappa : X_1 \times X_2 \to \mathbb{K} : (s,t) \to \xi(s)\kappa(t)$

Ορισμός 1.5.2. Αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο
Έστω $\mathbb{K}-$ *γραμμικοί χώροι* $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ *το τανυστικό τους γινόμενο ορίζεται ως εξής :*
$\mathrm{E}_1 \bigodot \mathrm{E}_2 = span\{\xi \otimes \kappa : \xi \in \mathrm{E}_1, \eta \in \mathrm{E}_2\} = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i(\xi_i \otimes \kappa_i) \subseteq \mathbb{K}^{\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2}$

Παράδειγμα 1.5.3. *Έστω οι γραμμικοί χώροι* $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ *με βάσεις* $\{e_1, e_2, e_3\}, \{g_1, g_2\}$ *αντίστοιχα και* $\xi \in E_1, \kappa \in E_2$ *όπου,* $\xi = 3e_1 + 6e_2 + 2e_3$ *και* $\kappa = 4g_1 + 3g_2$.
Το τανυστικό γινόμενο $\xi \otimes \kappa$ *θα είναι της μορφής:*

$$\sum_{i,j=0}^{r} \lambda_{i,j}(e_i \otimes g_j)$$

Υπολογίζουμε τα επιμέρους τανυστικά για καθε ζεύγος βάσης:

$$(\xi \otimes \kappa)(e_1, g_1) = \xi(e_1)\kappa(g_1) = 3 \cdot 4 = 12$$

$$(\xi \otimes \kappa)(e_1, g_2) = \xi(e_1)\kappa(g_2) = 3 \cdot 3 = 9$$

$$(\xi \otimes \kappa)(e_2, g_1) = \xi(e_2)\kappa(g_1) = 6 \cdot 4 = 24$$

$$(\xi \otimes \kappa)(e_2, g_2) = \xi(e_2)\kappa(g_2) = 6 \cdot 3 = 18$$

$$(\xi \otimes \kappa)(e_3, g_1) = \xi(e_3)\kappa(g_1) = 2 \cdot 4 = 8$$

$$(\xi \otimes \kappa)(e_3, g_2) = \xi(e_3)\kappa(g_2) = 2 \cdot 3 = 6$$

Τελικά $\xi \otimes \kappa = 12e_1 \otimes g_1 + 9e_1 \otimes g_2 + 24e_2 \otimes g_1 + 18e_2 \otimes g_2 + 8e_3 \otimes g_1 + 6e_3 \otimes g_2$

Απο το παραπάνω παράδειγμα προκύπτει η αναγκαιότητα να αποδείξουμε οτι η βάση στον χώρο του τανυστικού γινομένου είναι το σύνολο των τανυστικών γινομένων των βάσεων. Πρώτα όμως, πρέπει να αναπτύξουμε περαιτέρω την θεωρία για να παραθέσουμε την απόδειξη.

Παρατήρηση 1.5.4. *Το τανυστικό γινόμενο χαρακτηρίζεται απο τις ακόλουθες ιδιότητες:*
i) $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$
ii) $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$
iii) $(\lambda x) \otimes y = \lambda(x \otimes y) = x \otimes (\lambda y)$

Απόδειξη. i) $(x_1 + x_2) \otimes y = \xi(x_1 + x_2)\kappa(y) = (\xi(x_1) + \xi(x_2))\kappa(y) = \xi(x_1)\kappa(y) + \xi(x_2)\kappa(y) = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$

ii) $x \otimes (y_1 + y_2) = \xi(x)\kappa(y_1 + y_2) = \xi(x)(\kappa(y_1) + \kappa(y_2)) = \xi(x)\kappa(y_1) + \xi(x)\kappa(y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$

iii) $(\lambda x) \otimes y = \xi(\lambda x)\kappa(y) = \lambda\xi(x)\kappa(y) = \lambda(x \otimes y)$ και $(\lambda x) \otimes y = \xi(\lambda x)\kappa(y) = \lambda\xi(x)\kappa(y) = \xi(x)\kappa(\lambda y) = x \otimes (\lambda y)$
Οι παραπάνω ισότητες ισχύουν λόγω γραμμικότητας των απεικονίσεων ξ,κ.
□

Παρατήρηση 1.5.5. *Αν* $\{e_i\}_I$ *είναι βάση του*H_1 *και* $\{f_j\}_J$ *είναι βάση του* H_2, *τότε ο* $H_1 \otimes H_2$ *έχει βάση* $\{e_i \otimes f_j\}_{I \times J}$.

Απόδειξη. Έστω $x \in H_1$ και $y \in H_2$ τότε $x = \sum_i \lambda_i e_i$ και $y = \sum_j \mu_j f_j$ θα δειχθεί ότι το $x \otimes y$ παράγεται απο το $e_i \otimes e_j$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
x \otimes y = (\sum_i \lambda_i e_i) \otimes (\sum_j \mu_j f_j) = \\
\sum_i [\lambda_i e_i \otimes (\sum_j \mu_j f_j)] = \\
\sum_i \sum_j (\lambda_i e_i \otimes \mu_j f_j) = \\
\sum_i \sum_j \lambda_i (e_i \otimes \mu_j f_j) = \\
\sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j (e_i \otimes f_j)
\end{aligned}$$

Μένει να δειχθεί οτι το $e_i \otimes f_j$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
Θέτουμε $\lambda_i \mu_j = \kappa_{i,j}$ και έχουμε: $\sum_{i,j} \kappa_{i,j} e_i \otimes f_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{i,j} \kappa_{i,j} \epsilon^j(e_i) f_j = 0,\ \epsilon^j \in H_1^*$ $\Leftrightarrow \sum_{i,j} \kappa_{i,j} \delta_{i,j} f_j = 0$, αφού το f_{j_J} αποτελεί βάση του H_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αρα $\sum_{i,j} \kappa_{i,j} \delta_{i,j} = 0 \Leftrightarrow \kappa_{i,j} = 0$ □

Πρόταση 1.5.6. *Καθολική ιδιότητα του* $(E_1 \bigodot E_2, \bigotimes)$
Για κάθε γραμμικό χώρο F *και κάθε διγραμμική απεικόνιση* b: $E_1 \times E_2 \to F$ *υπάρχει*

μοναδική γραμμική απεικόνιση B*:* $E_1 \bigodot E_2 \to F$ *ώστε* $B(x \otimes y) = b(x,y)$ *για κάθε* $x \in E_1, y \in E_2$*.Έστω* $\pi : E_1 \times E_2 \to E_1 \bigodot E_2 : (x,y) \to x \otimes y$

$$\begin{tikzcd} E_1 \times E_2 \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "b"'] & E_1 \bigodot E_2 \arrow[d, "B"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Το διάγραμμα αυτό είναι μεταθετικό ,δηλαδή : $\mathrm{bil}(E_1 \times E_2, F) \backsimeq \mathfrak{L}(E_1 \bigodot E_2, F)$

Ορισμός 1.5.7. Τανυστικό γινόμενο τελεστών *Έστω οι γραμμικοί τελεστές* $M : E \to E$ *και* $N : F \to F$*. Ορίζουμε τον τελεστή* $M \otimes N \in E \otimes F$ *ως εξής:*

$$(M \otimes N)(x \otimes y) = Mx \otimes Ny.$$

1.5β΄ Νόρμες στο τανυστικό γινόμενο χώρων Hilbert

Ορισμός 1.5.8. *Έστω* H_1, H_2 *χώροι Hilbert . Στον χώρο* $H_1 \bigodot H_2$ *θέτουμε*

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle_{hs} = \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} \cdot \langle y_1, y_2 \rangle_{H_2}.$$

Δηλαδή αν $u = \sum_i x_i \otimes y_i$ *και* $v = \sum_i x'_i j \otimes y'_j$ *τότε*

$$\langle u, v \rangle_{hs} = \textstyle\sum_{i,j} \langle x_i, x'_j \rangle_{H_1} \cdot \langle y_i, y'_j \rangle_{H_2}.$$

Το $\langle .,. \rangle_{hs}$ *είναι καλά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο στον* $H_1 \bigodot H_2$*.*
Ορίζουμε $H_1 \bigotimes H_2 := \overline{(H_1 \bigodot H_2, \|\cdot\|_{hs})}$

Παρατήρηση 1.5.9. *Αν* $\{e_i\}_I$ *είναι ορθοκανονική βάση του*H_1 *και* $\{f_j\}_J$ *είναι ορθοκανονική βάση του* H_2*, τότε ο* $H_1 \otimes H_2$ *έχει ορθοκανονική βάση* $\{e_i \otimes f_j\}_{I \times J}$*.*

Απόδειξη. Έστω $x \in H_1$ και $y \in H_2$ τότε $x = \sum_i \lambda_i e_i$ και $y = \sum_j \mu_j f_j$ θα δειχθεί ότι το $x \otimes y$ παράγεται απο το $e_i \otimes e_j$.Έχουμε

$$\begin{aligned} x \otimes y = (\sum_i \lambda_i e_i) \otimes (\sum_j \mu_j f_j) = \\ \sum_i [\lambda_i e_i \otimes (\sum_j \mu_j f_j)] = \\ \sum_i \sum_j (\lambda_i e_i \otimes \mu_j f_j) = \\ \sum_i \sum_j \lambda_i (e_i \otimes \mu_j f_j) = \\ \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j (e_i \otimes f_j) \end{aligned}$$

Μένει να δειχθεί οτι το $e_i \otimes f_j$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
Θέτουμε $\lambda_i \mu_j = \kappa_{i,j}$ και έχουμε: $\sum_{i,j} \kappa_{i,j} e_i \otimes f_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{i,j} \kappa_{i,j} \epsilon^j (e_i) f_j = 0, \ \epsilon^j \in H_1^*$

$\Leftrightarrow \sum_{i,j} \kappa_{i,j}\,\delta_{i,j} f_j = 0$, αφού το f_{j_J} αποτελεί βάση του H_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αρα $\sum_{i,j} \kappa_{i,j}\,\delta_{i,j} = 0 \Leftrightarrow \kappa_{i,j} = 0$ $\square$

Παρατήρηση 1.5.10. *Όταν $dimH_1 < \infty$ και $dimH_2 < \infty$, τότε $H_1 \bigodot H_2 = H_1 \bigotimes H_2$. Ειδικότερα , $\mathbb{C}^k \bigotimes \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \bigodot \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{nk}$.*

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία Κβαντικής Μηχανικής

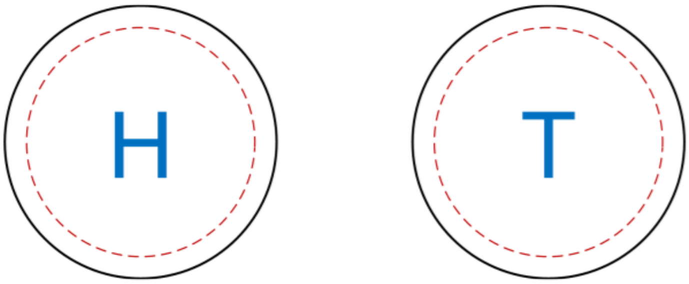
All understanding begins
with our not accepting the world as it appears.
Alan Kay

Έχοντας αποκτήσει τις προαπαίτουμενες γνώσεις από το προηγούμενο κεφάλαιο, πλέον είμαστε σε θέση να αναπτύξουμε σταδιακά το θέμα που θα μας απασχολήσει. Αρχικά, θα αναγνωρίσουμε τις βασικές διαφορές του κλασικού συστήματος από του κβαντικού, μέσω ενός απλού παραδείγματος που αφορά δύο καταστάσεις. Βασικός στόχος του παραδείγματος είναι η εξοικείωση με θεμελιώδεις έννοιες της κβαντικής μηχανικής που θα παρατεθούν φορμαλιστικά σε ακόλουθες υποενότητες. Με την ολοκλήρωση αυτής της ενότητας θα έχουμε αναπτύξει επαρκώς τα βασικά στοιχεία της κβαντικής θεωρίας ουτώς ώστε να μελετήσουμε στην πορεία τα κβαντικά κανάλια.

2.1 Κλασικό και Κβαντικό Κέρμα

2.1α΄ Κβαντικά Συστήματα Δύο Καταστάσεων

Ξεκινάμε την μελέτη αυτών των αντικειμένων παρουσιάζοντας ένα κβαντικό σύστημα δύο καταστάσεων. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα κέρμα πάνω σε ένα τραπέζι. Το κέρμα αυτό, όπως όλα τα κέρματα, έχει δύο όψεις. Η μόνη διαφορά των δύο όψεων είναι ότι στην μία φαίνεται το γράμμα "H" και στην άλλη το "T". Δεν μας ενδιαφέρει κανένα άλλο χαρακτηριστικό του κέρματος όπως το βάρος του ή η σκληρότητα του.



Σχήμα 2.1

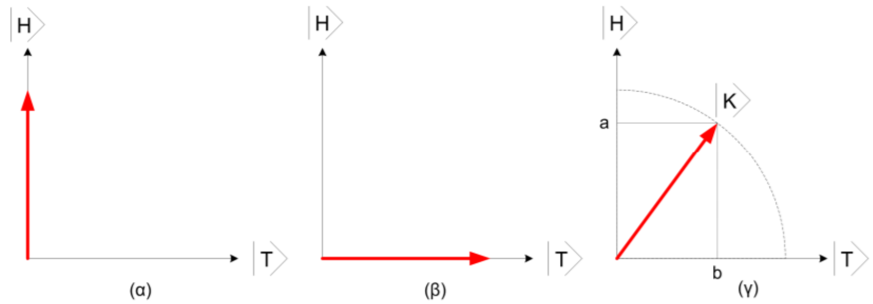
Ένα συνηθισμένο κέρμα που χρησιμοποιούμε στην καθημερινότητα μας το ονομάζουμε "κλασικό" κέρμα. Προφανώς, ένα κλασικό κέρμα μπορεί να έχει στην πάνω όψη είτε το γράμμα "H" είτε το γράμμα "T". Δηλαδή, ένα κλασικό κέρμα μπορεί να βρίσκεται είτε στην *κατάσταση* "H" είτε στην *κατάσταση* "T".

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε στην κατοχή μας και ένα κβαντικό κέρμα το οποίο διέπεται απο κβαντικούς νόμους. Ας θεωρήσουμε, επίσης, ότι για κάποιο λόγο δεν μπορόυμε να διακρίνουμε αν τα κέρματα (κλασικά ή κβαντικά) βρίσκονται στην κατάσταση "H" ή "T" και γι'αυτόν τον λόγο έχουμε στη διάθεσή μας μία συσκευή *μέτρησης*. Με αυτήν την συσκευή μετράμε το κέρμα και εμφανίζεται στην οθόνη μας η κατάσταση στην οποία βρίσκεται.

Ένα κλασικό και ένα κβαντικό κέρμα πέφτουν πάνω στο τραπέζι. Δεν μετράμε ακόμη τις καταστάσεις τους. Το κλασικό κέρμα μπορεί να βρεθεί είτε στην κατάσταση "H" είτε στην κατάσταση "T". Δεν μπορούμε όμως να πούμε το ίδιο και για το κβαντικό κέρμα, καθώς η κατάσταση στην οποία βρίσκεται περιγράφεται απο το *διάνυσμα κατάστασης*.

Το διάνυσμα κατάστασης του κβαντικού κέρματος υπάρχει σε έναν χώρο δύο διαστάσεων του οποίου οι δύο άξονες αντιστοιχούν στις καταστάσεις "H" και "T". Για να ξεχωρίζουμε τις καταστάσεις του κβαντικόυ κέρματος απο αυτές του κλασικού θα τις συμβολίζουμε με $|\mathrm{H}\rangle$ και $|T\rangle$.[1]

[1]Πρόκειται για τον συμβολισμό Dirac και το σύμβολο αυτό ονομάζεται ket , αντίστοιχα το συζυγές διάνυσμα $\langle\,|$ ονομάζεται bra και ανήκει στον δυϊκό χώρο. Τα bra και ket εχουν την εξής μορφή: $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ και $\langle\psi| = \begin{pmatrix} a^* & b^* & c^* \end{pmatrix}$. Ένα τέτοιο διάνυσμα όταν η βάση του εκάστοτε χώρου Hilbert είναι το πολύ αριθμήσιμη, μπορεί να αναλυθεί ως άθροισμα των στοιχείων της βάσης ως εξής: $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\langle\varphi_i|\psi\rangle\,|\varphi_i\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\psi_i|\varphi_i\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}_{\{\varphi_i\}}$, όπου $|\varphi_i\rangle$ με $i = 1, 2\ldots$ είναι στοιχεία της βάσης του χώρου Hilbert. Καθένα απο αυτά τα στοιχεία ορίζει έναν υπόχωρο διάστασης ένα, επί του οποίου προβάλλεται το διάνυσμα ψ.



Σχήμα 2.2

Στο παραπάνω σχήμα η κόκκινη γραμμή αποτελεί το διάνυσμα κατάστασης του κβαντικού κέρματος. Η αρχή του διανύσματος κατάστασης βρίσκεται πάντα στο σημείο τομής των αξόνων $|\mathrm{H}\rangle$ και $|T\rangle$. Όταν το διάνυσμα βρίσκεται πάνω στον άξονα $|\mathrm{H}\rangle$, όπως στο (α) του σχήματος 2.2, τότε το κβαντικό κέρμα βρίσκεται σίγουρα στην κατάσταση $|\mathrm{H}\rangle$. Όταν το διάνυσμα βρίσκεται πάνω στον άξονα $|\mathrm{T}\rangle$, όπως το (β) του σχήματος 2.2, τότε το κβαντικό κέρμα βρίσκεται σίγουρα στην κατάσταση $|\mathrm{T}\rangle$.

Μέχρι εδώ δεν φαίνεται να διαφοροποιείται το κβαντικό από το κλασικό κέρμα. Όμως, το κβαντικό κέρμα εχεί μια επιπλέον ιδιότητα που δεν έχει το κλασικό, το διάνυσμα της κατάστασης του, εκτός απο τις διευθύνσεις των αξόνων $|\mathrm{H}\rangle$ και $|T\rangle$, μπορεί να έχει οποιανδήποτε άλλη διεύθυνση οπώς φαίνεται στο (γ) του σχήματος 2.2. Στην περίπτωση αυτή το κβαντικό κέρμα βρίσκεται ταυτόχρονα και στην κατάσταση $|\mathrm{H}\rangle$ και στην κατάσταση $|T\rangle$, γεγονός που δεν μπορούμε να το προσομοιώσουμε νοητικά καθώς ο εγκέφαλός μας αποτελεί ένα κλασικό σύστημα.

Υπενθυμίζουμε ότι ακόμα δεν έχουμε μετρήσει το σύστημα και πρέπει να θυμόμαστε ότι η αρχή του διανύσματος βρίσκεται πάντα στο σημείο τομής των αξόνων. Επιπλέον, το μήκος του διανύσματος είναι πάντα το ίδιο, όποια και αν είναι η διεύθυνση του. Το πόσο είναι το μήκος θα το δούμε παρακάτω.

Επανερχόμαστε στο (γ) του σχήματος 2.2. Το διάνυσμα κατάστασης του κβαντικού κέρματος βρίσκεται σε μία ενδιάμεση κατάσταση την οποία θα ονομάσουμε $|\mathrm{K}\rangle$. Η προβολή του διανύσματος της κατάστασης στον άξονα $|\mathrm{H}\rangle$ έχει μήκος a και στον άξονα $|\mathrm{T}\rangle$ έχει μήκος b. Η κατάσταση $|\mathrm{K}\rangle$ δίνεται από την σχέση :

$$|K\rangle = a|H\rangle + b|T\rangle \tag{2.1}$$

Στην γλώσσα της κβαντικής μηχανικής λέμε ότι η κατάσταση $|\mathrm{K}\rangle$ είναι υπέρθεση των δύο καταστάσεων $|\mathrm{H}\rangle$ και $|T\rangle$.

Αν και δεν έχουμε κάνει ακόμα την μέτρηση, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να προβλέψουμε το αποτέλεσμα της μέτρησης. Όταν ξέρουμε ότι το κβαντικό κέρμα βρίσκεται στην κατάσταση $|\mathrm{H}\rangle$, προβλέπουμε με απόλυτη βεβαιότητα πως όταν μετρήσουμε θα βρούμε το κβαντικό κέρμα με το γράμμα H στην πάνω όψη, αντίστοιχα για την κατάσταση $|\mathrm{T}\rangle$ θα βρούμε το γράμμα T στην πάνω όψη. Ποιο θα είναι όμως το αποτέλεσμα της μέτρησης όταν το κβαντικό κέρμα βρίσκεται στην κατάσταση $|\mathrm{K}\rangle$;

Καθώς τα δυνατά αποτελέσματα είναι δύο, είτε να βρεθεί το κέρμα με το H στην πάνω όψη είτε με το T, θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι αν το κβαντικό κέρμα δεν βρίσκεται σε καμία απο τις δύο καταστάσεις δεν μπορούμε να κάνουμε και καμία πρόβλεψη για το αποτέλεσμα της μέτρησης. Στην πραγματικότητα όμως, δεν μπορούμε να προβλέψουμε με σιγουριά το αποτέλεσμα της μέτρησης αλλά γνωρίζουμε την πιθανότητα για το καθένα από τα δύο αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα η πιθανότητα να μετρήσουμε και να βρούμε, στην πάνω όψη του κβαντικού κέρματος, το γράμμα H είναι $|a|^2$, ενώ το γράμμα T είναι $|b|^2$. Τα a και b είναι οι προβολές του διανύσματος κατάστασης στους άξονες $|\mathrm{H}\rangle$ και $|T\rangle$ που φαίνονται στο σχήμα (2.2) και στην σχέση (2.1). Καθώς έχουμε δύο δυνατά αποτελέσματα με πιθανότητες $|a|^2, |b|^2$ αντίστοιχα, θα ισχύει: $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι διαφορετικές διευθύνσεις του διανύσματος κατάστασης $|\mathrm{K}\rangle$ αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές για τα a και b, καθώς και σε διαφορετικές πιθανότητες για το καθένα από τα δύο δυνατά αποτελέσματα της μέτρησης της κατάστασης.

Παράδειγμα 2.1.1. *Η κατάσταση ενός κβαντικού κέρματος δίνεται από τη σχέση:*
$|K\rangle = 0,500|H\rangle + 0,866|T\rangle$
Η πιθανότητα να μετρήσουμε και να βρούμε το κέρμα με το γράμμα "H" στην πάνω όψη είναι $0,500^2 = 0,25$, *δηλαδή 25%. Η πιθανότητα να μετρήσουμε και να βρούμε το κέρμα με το γράμμα "T" στην πάνω όψη είναι* $0,866^2 = 0,75$, *δηλαδή 75%.*

Πρέπει εδώ να αναφέρουμε ότι το κβαντικό κέρμα αντιπροσωπεύει τα κβαντικά συστήματα δύο καταστάσεων. Μέχρι τώρα κάναμε κάποιες σημαντικές παρατηρήσεις, θα παρουσιάσουμε τις περισσότερες από αυτές συνοπτικά, χρησιμοποιώντας περισσότερο τη γλώσσα της κβαντικής μηχανικής.

- Η κατάσταση ενός κβαντικού συστήματος δύο καταστάσεων περιγράφεται από το διάνυσμα κατάστασης.
- Κατά την υπέρθεση, δύο κβαντικές καταστάσεις προστίθενται μεταξύ τους με τρόπο που τους επιτρέπει να συνυπάρχουν ταυτόχρονα. Με αυτό τον

τρόπο, κάθε κβαντική κατάσταση μπορεί να περιγραφεί ως το άθροισμα πολλαπλών διακριτών καταστάσεων. Η υπέρθεση των δύο καταστάσεων περιγράφεται απο την σχέση (2.1).

•Οι αριθμοί a,b, με τους οποίους πολλαπλασιάζονται οι δύο καταστάσεις στη σχέση (2.1), ονομάζονται πλάτη πιθανότητας και είναι γενικά μιγαδικοί αριθμοί. Το σχήμα 2.2 απεικονίζει την περίπτωση που οι a,b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Στην γενική περίπτωση που τα πλάτη πιθανότητας είναι μιγαδικά τότε το διάνυσμα κατάστασης είναι ένα διάνυσμα σε χώρο Hilbert.

•Η μέτρηση της κατάστασης ενός κβαντικού συστήματος δύο καταστάσεων μπορεί να έχει μόνο δύο δυνατά αποτελέσματα που αντιστοιχούν στις δύο καταστάσεις. Η μέτρηση καταστρέφει την υπέρθεση και αναγκάζει το κβαντικό σύστημα να βρεθεί σε μία απο τις δύο βασικές καταστάσεις.

•Το μήκος του διανύσματος κατάστασης είναι πάντα ίσο με τη μονάδα. Αυτό ισχύει για όλα τα κβαντικά συστήματα και έτσι, το άθροισμα των πιθανοτήτων είναι πάντα ίσο με τη μονάδα.

2.1β΄ Αλλαγή Κατάστασης,Τελεστές

Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να μετασχηματίσουμε την κατάσταση του κλασικού κέρματος. Όπως έχουμε πει, το κλασικό κέρμα μπορεί να βρεθεί σε δύο μόνο καταστάσεις: ή στην κατάσταση "H" ή στην κατάσταση "T". Θα γράψουμε αυτές τις καταστάσεις ως πίνακες:

$H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ένα κλασικό κέρμα μπορούμε είτε να το αφήσουμε ως έχει, είτε να το στρέψουμε ώστε η πάνω πλευρά να πάει κάτω. Γενικά, οι δράσεις που ασκούνται σε συστήματα περιγράφονται απο τους τελεστές. Οι τελεστές που χρησιμοποιούνται στο πλαίσιο της κβαντικής μηχανικής είναι γραμμικές συναρτήσεις και μπορούν να παρασταθούν με πίνακες. Η δράση ενός τελεστή πάνω σε μία κατάσταση έχει σαν αποτέλεσμα την μετάτροπη της σε μία άλλη κατάσταση. Ας συμβολίσουμε τη δράση «δεν κάνω τίποτα», δηλαδή αφήνω το κέρμα όπως είναι, με I.

Το I είναι τελεστής και σε μορφή πίνακα αποτελεί τον ταυτοτικό: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ας συμβολίσουμε τη δράση «στρέφω το κέρμα» με A. Ο αντίστοιχος πίνακας είναι: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Θεωρούμε ότι το κλασικό κέρμα βρίσκεται στην κατάσταση "T" και το στρέφουμε, ώστε να βρεθεί στην κατάσταση "Η".

Με τη μορφή των τελεστών αυτό γράφεται: ΑΤ=Η
και με μορφή πινάκων: $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

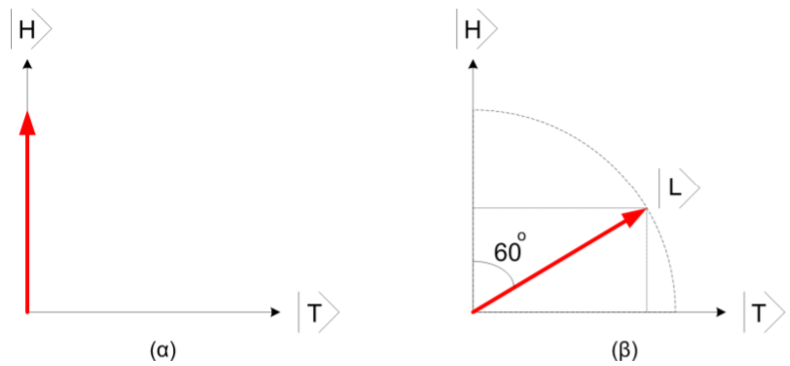
Αν το κέρμα βρίσκεται στην κατάσταση "Τ" και το αφήνουμε όπως είναι, γράφουμε: ΙΤ=Τ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

Τις δράσεις που μπορούμε να ασκήσουμε σε ένα κλασικό κέρμα μπορούμε να τις ασκήσουμε και σε ένα κβαντικό κέρμα, μπορούμε όμως να δράσουμε στο κβαντικό κέρμα με τρόπους που δεν έχουν κλασικό αντίστοιχο. Μπορούμε δηλαδή να πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα της κατάστασής του με 2×2 πίνακες που τα στοιχεία τους δεν είναι απαραίτητα τα 0,1. Για παράδειγμα αν το κβαντικό κέρμα βρίσκεται στη βασική κατάσταση "Η" μπορούμε να δράσουμε όπως παρακάτω:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

Δηλαδή η δράση μας είχε ως αποτέλεσμα τη μετάβαση του κβαντικού κέρματος από τη βασική κατάσταση $|H\rangle$ σε μία νέα κατάσταση $|L\rangle$ που είναι υπέρθεση των βασικών καταστάσεων και δίνεται από τη σχέση:

$$|L\rangle = \frac{1}{2}|H\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|T\rangle$$



Σχήμα 2.3

Το αποτέλεσμα της δράσης αυτής φαίνεται στο Σχήμα 2.3. Στο (α) του σχήματος φαίνεται ότι το κβαντικό κέρμα βρίσκεται στη βασική κατάσταση $|\mathrm{H}\rangle$ και στο (β) φαίνεται η κατάσταση μετά τη δράση που περιγράφεται στην παραπάνω σχέση. Μπορούμε να πούμε ότι περιστρέψαμε το διάνυσμα κατάστασης του κβαντικού κέρματος 60° κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Οι δράσεις αυτές (οι τελεστές αυτοί) περιγράφονται με 2×2 πίνακες. Τα στοιχεία των πινάκων είναι γενικά μιγαδικά, οπότε η περιστροφή του διανύσματος γίνεται στο χώρο Hilbert και τότε δεν μπορούμε να την απεικονίσουμε όπως στο Σχήμα 2.3. Να σημειωθεί ότι δεν μπορούν όλοι οι πίνακες να παραστήσουν δράσεις που περιστρέφουν το διάνυσμα κατάστασης, όπως παραπάνω. Αυτό συμβαίνει διότι το μήκος του διανύσματος κατάστασης πρέπει πάντα να ισούται με τη μονάδα, άρα αν δράσουμε με πίνακα που μεταβάλλει το μήκος θα πρέπει να κανονικοποιήσουμε.

Υπάρχει ακόμα ένας περιορισμός. Η κβαντική μηχανική είναι συμμετρική ως προς τη φορά του χρόνου. Δηλαδή, αν δεν είμαστε αυστηροί, μπορούμε να πούμε ότι η συμπεριφορά ενός κβαντικού συστήματος δεν αλλάζει αν αλλάξει η φορά ροής του χρόνου. Αυτό για το κβαντικό κέρμα σημαίνει ότι αν με μία δράση αλλάζουμε την κατάστασή του από $|\mathrm{K}\rangle$ σε $|L\rangle$, τότε πρέπει με την αντίστροφη δράση να μπορούμε να γυρίσουμε την κατάσταση από $|L\rangle$ πίσω στην $|K\rangle$. Οι πίνακες που είναι κατάλληλοι για την περιστροφή διανυσμάτων κατάστασης είναι οι ορθομοναδιαίοι.

2.2 Αρχές Της Κβαντικής Μηχανικής

I think I can safely say that
nobody understands Quantum Mechanics
R.Feynman

Ο χώρος Hilbert είναι θεμελιώδης χώρος της κβαντικής μηχανικής. Προκύπτει όμως το εξής ερώτημα, πως ο χώρος Hilbert σχετίζεται με το σύστημα και τις καταστάσεις που έχουμε αναφερθεί στο κεφάλαιο 2.1; Η απάντηση δίνεται απο την ακόλουθη αρχή.

Θεμελιώδης αρχή 1: Σε κάθε απομονωμένο φυσικό σύστημα, αντιστοιχεί ένας χώρος Hilbert $\mathcal{H}$, που ονομάζεται *χώρος κατάστασης* και κάθε μοναδιαίο διάνυσμα στο $\mathcal{H}$ αντιπροσωπεύει μια πιθανή κατάσταση του συστήματος, η οποία ονομάζεται διάνυσμα κατάστασης ή καθαρή κατάσταση (pure state).

Σημείωση: Χρησιμοποιούμε χώρους Hilbert καθώς οι αρχές της κβαντικής θεωρίας απαιτούν μία μαθηματική θεμελίωση στη βάση ενός μιγαδικού διανυσματικού χώρου με εσωτερικό γινόμενο.

Η παραπάνω αρχή προέκυψε ιστορικά από την εξίσωση του Schrödinger[2] σε συνδυασμό με την αρχή του Born. Συγκεκριμένα, η αρχή του Born μας υποδεικνύει οτι μία κυματοσυνάρτηση[3] περιέχει πληροφορία (πιθανότητες) για τα πιθανά ενδεχόμενα σε ένα φυσικό σύστημα μία δεδομένη χρονική στιγμή. Άρα ένα διάνυσμα του χώρου Hilbert αντιστοιχεί στην κατάσταση του συστήματος σε μία δεδομένη χρονική στιγμή. Παρακάτω θα δούμε οτι η *Θεμελιώδης αρχή 1* χρήζει τροποποίησης, δεδομένου οτι υπάρχουν καταστάσεις που δεν περιγράφονται μόνο απο διανύσματα, οι λεγόμενες μικτές καταστάσεις.

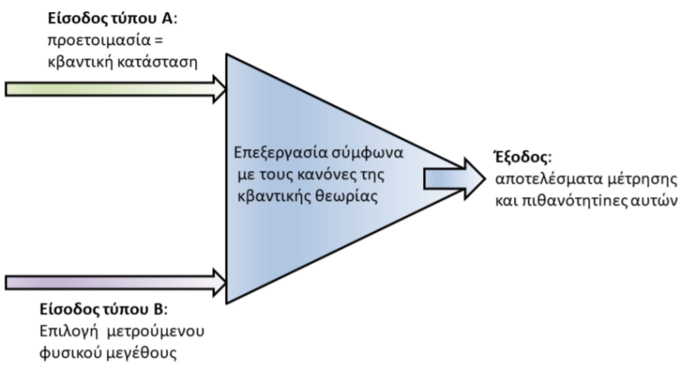
Μέχρι στιγμής έχουμε χρησιμοποιήσει την έννοια της κατάστασης χωρίς να έχει οριστεί νωρίτερα. Αποτελεί μια πρωτογενή έννοια της θεωρίας, δηλαδή η έννοια της κατάστασης όπως και η έννοια του φυσικού συστήματος, δεν ορίζεται, αλλά θεωρείται ότι είναι κατανοητή εκ προοιμίου ή από τη χρήση της. Μπορεί να επιδειχθεί, ή να περιγραφεί, αλλά όχι να οριστεί.

[2]Η εξίσωση Σρέντινγκερ (Schrödinger) είναι μία διαφορική εξίσωση η οποία προτάθηκε από τον Αυστριακό φυσικό Έρβιν Σρέντινγκερ το 1925 και δημοσίευσε το 1926, για να περιγράψει τη χρονική και χωρική εξάρτηση κβαντομηχανικών συστημάτων.

[3]Η κυματοσυνάρτηση είναι η συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση Schrödinger και στην ουσία περιγράφει ένα «κύμα πιθανότητας». Σε αυτήν περιέχεται η πληροφορία για την κίνηση ενός σωματίου στο χώρο, συνεπώς και ολή η γνωστή πληροφορία ενός συστήματος. Στην ίδια όμως δεν αποδίδεται φυσικό νόημα ή περιεχόμενο. Σύμφωνα με τη στατιστική ερμηνεία που πρωτοδιατυπώθηκε από τον Μαξ Μπορν το 1926, το τετράγωνο του μέτρου της κυματοσυνάρτησης είναι αυτό που έχει φυσικό νόημα, καθώς αποτελεί την πυκνότητα πιθανότητας των φυσικών μεγεθών.

Προς το παρόν θα προσδιορίσουμε την έννοια της κβαντικής κατάστασης ως το αντικείμενο που ενσωματώνει την πληροφορία που αφορά την προετοιμασία ενός συστήματος, πάνω στο οποίο θα κάνουμε μετρήσεις, με τρόπο που είναι συμβατός με την κβαντική του φύση. Δηλαδή μία κατάσταση αντιστοιχεί σε έναν ξεχωριστό τρόπο, με τον οποίο μπορούμε να προετοιμάσουμε ένα φυσικό σύστημα στο εργαστήριο ή σε έναν ξεχωριστό και αναγνωρίσιμο τρόπο με τον οποίο αυτό το σύστημα εμφανίζεται στη φύση. Όταν λέμε πληροφορία, εννοούμε τις πιθανότητες οποιαδήποτε μέτρησης η οποία μπορεί να γίνει στο σύστημα και άρα η πληροφορία αφορά όλες τις φυσικές προβλέψεις.

Ως αναφορά το φυσικό πείραμα, μπορεί να περιγραφεί ως ανάλογο μίας διαδικασίας εισόδου-εξόδου. Τα δεδομένα εισόδου είναι δύο ειδών. Η είσοδος τύπου Α είναι όλες οι δράσεις που έγιναν στο φυσικό σύστημα πριν την πράξη της μέτρησης. Κωδικοποιείται με τον προσδιορισμό μίας κβαντικής κατάστασης. Η είσοδος τύπου Β δηλώνει ποιά μέτρηση αποφασίσαμε να κάνουμε στο φυσικό σύστημα, η πληροφορία για τη μέτρηση κωδικοποιείται μέσω τελεστών στο χώρο Hilbert. Η έξοδος είναι όλα τα δυνατά αποτελέσματα της μέτρησης μαζί με τις πιθανότητες τους. Η έξοδος λαμβάνεται από την επεξεργασία της κωδικοποιημένης εισόδου, δηλαδή από μαθηματικές δράσεις πάνω στην κβαντική κατάσταση και στους τελεστές που περιγράφουν τη μέτρηση.



Σχήμα 2.4 Η κβαντική θεωρία ως μία διεργασία εισόδου-εξόδου

Έχοντας προσδιορίσει τις έννοιες της κατάστασης και του πειράματος, θα διατυπώσουμε την δεύτερη αρχή που αφορά τις μετρήσεις. Η μέτρηση προσδιορίζεται ως τη διαδικασία κατά την οποία ένα φυσικό σύστημα αλληλεπιδρά με μια μετρητική συσκευή (ένα άλλο φυσικό σύστημα) και την οδηγεί σε μια δεδομένη κατάσταση η οποία καταγράφεται. Σε κλασικό επίπεδο η μέτρηση δεν αλλάζει τη φυσική κατάσταση του υπό μέτρηση συστήματος, παρά μόνον της μετρητικής συσκευής. Παρά ταύτα στην Κβαντική Μηχανική η μέτρηση ενός συστήματος που βρίσκεται σε υπέρθεση καταστάσεων μέσω της «κατάρρευση της κυματοσυνάρτησης» αλλάζει σε μία εκ των καταστάσεων της υπέρθεσης, όπως έχουμε αναφέρει. Η ίδια η μέτρηση λοιπόν όχι απλώς επηρεάζει το υπό μέτρηση σύστημα, αλλά καθορίζει την κατάστασή του.

Θεμελιώδης αρχή 2: Οι κβαντικές μετρήσεις περιγράφονται πάντα απο μια κλάση τελεστών $\{\mathrm{M}_i\}$, με i να είναι ένα απο τα αποτελέσματα. Η πιθανότητα να παρατηρήσουμε το αποτέλεσμα i, δεδομένου ότι το σύστημα είναι στην κατάσταση $|\psi\rangle$ πριν εμείς μετρήσουμε, δίνεται απο τη σχέση: $p_i = \|M_i\,\psi\|^2$. Αν εμείς παρατηρούμε το αποτέλεσμα i, τότε το σύστημα αλλάζει στην κατάσταση $\frac{M_i\psi}{\|M_i\,\psi\|}$. Ακολουθώντας τις αρχές των πιθανοτήτων, το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των πιθανών αποτελεσμάτων θα ισούται με μονάδα, $\sum_i p_i = 1$.

Σημείωση: Η κανονικοποίηση γίνεται γιατί ο τελεστής μέτρησης μπορεί να μεταβάλλει το μήκος της κατάστασης και εμείς θέλουμε να παραμείνει ίσο με τη μονάδα. Επίσης για την πιθανότητα να παρατηρούμε το αποτέλεσμα i, χρησιμοποιόντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε:
$p_i = \|M_i\,\psi\|^2 = \langle M_i\psi, \mathrm{M}_i\,\psi\rangle = \langle\psi,\ \mathrm{M}_i^*\,M_i\,\psi\rangle \leq \|\psi\|\,\|\mathrm{M}_i^*\,M_i\,\psi\| \leq \|\psi\|^2\,\|\mathrm{M}_i^*\,M_i\|$

Παρατήρηση 2.2.1. *Όπως έχουμε αναφέρει ξανά η κβαντική μηχανική είναι εκ φύσεως πιθανολογική. Σκεφτόμαστε ένα κβαντικό πείραμα με το πολύ k πιθανά αποτελέσματα. Έστω $\mathcal{H}_s$ και $\mathcal{H}_o$ χώροι Hilbert που αντιπροσωπεύουν το χώρο κατάστασης και τον χώρο αποτελεσμάτων αντίστοιχα και έστω το σύνολο των φραγμένων τελεστών $\{M_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_o)\,:\, 1 \leq i \leq k\}$. Αν το σύστημα είναι στην κατάσταση $\psi \in \mathcal{H}_s$, $\|\psi\| = 1$ πριν μετρήσουμε, τότε έχουμε:*

$$1 = \sum_{i=1}^{k} p_i = \sum_{i=1}^{k} \|M_i\,\psi\|^2 = \sum_{i=1}^{k}\langle M_i\,\psi, M_i\,\psi\rangle = \sum_{i=1}^{k}\langle\psi, M_i^*\,M_i\,\psi\rangle$$

Γνωρίζοντας οτι η παραπάνω ισότητα ισχύει $\forall\psi \in \mathcal{H}$ με $\|\psi\| = 1$ και χρησιμοποιώντας το ακόλουθο λήμμα καταλήγουμε στην σχέση

$$\sum_{i=1}^{k} M_i^*\,M_i = I \tag{2.2}$$

Λήμμα 2.2.2. *Αν $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, τότε $T = I \Leftrightarrow \langle\psi,\ T\psi\rangle = 1,\ \forall\|\psi\| = 1$*

Παρατήρηση 2.2.3. *Δοσμένης οποιασδήποτε κλάσης τελεστών*
$\{M_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_o)\,:\, 1 \leq i \leq k\}$ τ.ω $\sum_{i=1}^{k} M_i^*\,M_i = I$
προκύπτει ένα κβαντικό πείραμα k-αποτελεσμάτων με αυτούς τους τελεστές μέτρησης. Αυτό συμβαίνει διότι η ισότητα (2.1) είναι αναγκαία ώστε το άθροισμα

των πιθανοτήτων να ισούται με τη μονάδα, όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω, και άρα να έχει νόημα να αναφερόμαστε σε κβαντικό πείραμα.

2.2α΄ Η Ένταξη του Ερμιτιανού Τελεστή

Σε αυτήν την υποενότητα θα αναφερθούμε συγκεκριμένα στους ερμιτιανούς τελεστές. Αυτή η κατηγορία τελεστών θα μας δώσει την ευκαιρία να προσεγγίσουμε με διαφορετικό τρόπο τα αποτέλεσματα μιας μέτρησης.

Οποιαδήποτε μέτρηση που αναπαριστάται από έναν τελεστή A, λάβει χώρα σε ένα σύστημα που βρίσκεται σε δεδομένη κατάσταση $|\psi\rangle$, θα δώσει ως τιμή μια από τις ιδιοτιμές του τελεστή με ορισμένη πιθανότητα.

Ένας τελεστής είναι επί της ουσίας, μία συνάρτηση $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, που μετασχηματίζει ένα διάνυσμα $|\psi\rangle$. Το διάνυσμα ανήκει στον χώρο Hilbert και μετασχηματίζεται σε ένα άλλο διάνυσμα $|\psi'\rangle$, δηλαδή $A\,|\psi\rangle = |\psi'\rangle$.

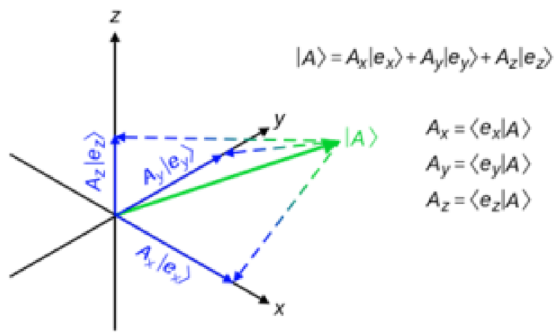
Οι τελεστές που χρησιμοποιούνται στο πλαίσιο της κβαντικής μηχανικής είναι γραμμικές συναρτήσεις. Όπως έχουμε δει στην πιο απλοϊκή του μορφή, δράση ενός τελεστή πάνω σε ένα διάνυσμα έχει ως αποτέλεσμα την μετατροπή του σε άλλο διάνυσμα. Υπάρχουν όμως και διανύσματα, στα οποία η δράση κάποιου τελεστή έχει σαν αποτέλεσμα να διατηρούνται αναλλοίωτα: $A|\psi\rangle = a|\psi\rangle$. Δηλαδή η δράση του τελεστή δίνει πάλι το ίδιο αποτέλεσμα πολλαπλασιασμένο με έναν αριθμό α. Όταν ισχύει αυτή η σχέση, το διάνυσμα καλείται ιδιοδιάνυσμα (και κατ'επέκταση η κατάσταση ιδιοκατάσταση) του τελεστή A, ενώ ο αριθμός α με την σειρά του καλείται ιδιοτιμή του τελεστή.

Οι ερμιτιανοί τελεστές είναι μία ειδική κατηγορία τελεστών, η οποία έχει κάποιες "επιθυμητές" ιδιότητες (Bowman 2008):

1. Οι διοτιμές τους είναι πραγματικοί αριθμοί.
2. Οι ιδιοκαταστάσεις τους είναι ορθογώνιες μεταξύ τους, δηλαδή $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = 0$ όταν $i \neq j$, κάτι που γεωμετρικά δείχνει πως ανήκουν σε κάθετους μεταξύ τους άξονες.
3. Οι ιδιοκαταστάσεις τους, τουλάχιστον για πεπερασμένους χώρους Hilbert αποτελούν ένα πλήρες σύνολο.

Η σημασία αυτών των ιδιοτήτων δεν γίνεται να υποτιμηθεί. Η πρώτη είναι κρίσιμη καθώς οι ερμιτιανοί τελεστές αποτελούν τα απαραίτητα εργαλεία για τον υπολογισμό των τιμών των μεγεθών. Όπως είναι εμφανές αυτά δεν γίνεται να παίρνουν μιγαδικές τιμές και η πρώτη συνθήκη μας εξασφαλίζει ακριβώς αυτό. Η δεύτερη και η τρίτη συνθήκη σχετίζονται άμεσα με το γεγονός οτι οι ιδιοτιμές των τελεστών αποτελούν τα πιθανά αποτελέσματα των μετρήσεων. Εφόσον τα ιδιοδιανύσματα των ερμιτιανών τελεστών είναι ένα πλήρες σύνολο κάθετων μεταξύ τους στοιχείων, μπορούν να λειτουργήσουν ως μία βάση του χώρου. Στη βάση των ιδιοκαταστάσεων του τελεστή μπορούν να αναλυθούν όλα τα υπόλοιπα διανύσματα (άρα και τα διανύσματα κατάστασης). Οι προβολές στους επιμέρους άξονες σχετίζονται άμεσα, με την πιθανότητα η μέτρηση του συστήματος που βρίσκεται στην κατάσταση $|\psi\rangle$, ως προς το μέγεθος A, να δώσει την αντίστοιχη ιδιοτιμή.

Η παρακάτω εικόνα δείχνει την αναλογία της ανάλυσης ενός διανύσματος στην βάση {x,y,z} του τρισδιάστατου χώρου και της προβολής ενός διανύσματος κατάστασής στη βάση των ιδιοκαταστάσεων ενός τελεστή.



Πιο συγκεκριμένα, ένας ερμιτιανός τελεστής A αντιπροσωπεύει ένα παρατηρήσιμο μέγεθος. Σε κάθε ιδιοτιμή αντιστοιχεί και μια ιδιοκατάσταση, η οποία μπορεί να συμβολιστεί και ως $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \ldots$. Επειδή το σύνολο των ιδιοκαταστάσεων δημιουργεί μια βάση του χώρου, μπορούμε να προβάλλουμε τα διανύσματα κατάστασης στους άξονες των ιδιοκαταστάσεων, ώστε να έχουμε: $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle a_i|\psi\rangle\, |a_i\rangle$.

Η Μέτρηση των Μεγεθών

Σύμφωνα με τους κανόνες της κβαντικής μηχανικής, το μόνο που μπορούμε να γνωρίζουμε, όταν εκτελούμε μια μέτρηση του μεγέθους A, στο σύστημα που βρίσκεται στην κατάσταση $|\psi\rangle$, είναι η πιθανότητα να βρούμε την τιμή a_i. Έχουμε δύο περιπτώσεις:

i. Όταν η κατάσταση $|\psi\rangle$ είναι μία ιδιοκατάσταση του τελεστή A, η πιθανότητα να λάβουμε την τιμή a_i, είναι ίση με 1, δηλαδή $P_{|\psi\rangle}(a_i) = 1$.

ii. Όταν όμως η κατάσταση $|\psi\rangle$ είναι μία τυχαία κατάσταση, τότε αυτή αναλύεται στις ιδιοκαταστάσεις του τελεστή σύμφωνα με την παραπάνω σχέση και η πιθανότητα να βρούμε οποιαδήποτε τιμή a_i σαν αποτέλεσμα της μέτρησης είναι: $P_{|\psi\rangle}(a_i) = |\langle a_i|\psi\rangle|^2$.

2.3 Συστήματα Μέτρησης Και Διακριτές Καταστάσεις (Measurement Systems and Distinguishable States)

Ορισμός 2.3.1. ***Σύστημα Μέτρησης***
Υποθέτουμε ότι $\mathcal{H}$ και $\mathcal{K}$ είναι πεπερασμένης διάστασης χώροι Hilbert. Μια πεπερασμένη οικογένεια $\{M_i : 1 \le i \le k\}$ από τελεστές $M_i : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ καλείται σύστημα μέτρησης αν $\sum_{i=1}^{k} M_i^* M_i = I$. Εάν $\mathcal{H} = \mathcal{K}$, λέμε ότι η οικογένεια $\{M_i\}$ είναι ένα σύστημα μέτρησης στον $\mathcal{H}$.

Ορισμός 2.3.2. ***Απόλυτα διακριτές καταστάσεις***
(Perfectly Distinguishable States)
Μία συλλογή από καταστάσεις $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\} \subseteq \mathcal{H}$ καλείται απόλυτα διακριτή αν υπάρχει ένα σύστημα μέτρησης $\{M_i : 1 \le i \le k,\ k \le N\}$ στον $\mathcal{H}$, τέτοιο ώστε $||M_i(\psi_j)||^2 = \delta_{i,j}$, για $i,j \in \{1, \dots, N\}$.

Θεώρημα 2.3.3. *Μία συλλογή από καταστάσεις $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\} \subseteq \mathcal{H}$ είναι απόλυτα διακριτή αν-ν $\psi_i \perp \psi_j$ για όλα τα $i \neq j$, ή αλλιώς αν $\langle \psi_i, \psi_j\rangle = 0$.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα σύστημα μέτρησης $\{M_i : 1 \le i \le N\}$ τ.ω $||M_i(\psi_j)|| = \delta_{i,j}$, για $i,j \in \{1, \dots, N\}$. Θεωρούμε τα μοναδιαία διανύσματα ψ_1, ψ_2, η όπου $\eta \perp \psi_1$. Αυτό μας επιτρέπει να εκφράσουμε το ψ_2 ως γραμμικό συνδιασμό των ψ_1 και η, συνεπώς ισχύει $\psi_2 = a\psi_1 + \beta\eta$. Από πυθαγόρειο θεώρημα με $\langle \psi_1, \eta\rangle = 0$ και από την υπόθεση έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$1 = ||\psi_2||^2 = ||a\psi_1 + \beta\eta||^2 = ||a\psi_1||^2 + ||\beta\eta||^2 = |a|^2||\psi_1||^2 + |\beta|^2 + ||\eta||^2 \Rightarrow |\beta|^2 \le 1 \ (I)$$

$$1 = ||M_2(\psi_2)||^2 = ||M_2(a\psi_1 + \beta\eta)||^2 = |a|^2||M_2(\psi_1)||^2 + |\beta|^2||M_2(\eta)||^2 =$$
$$= |\beta|^2||M_2(\eta)||^2 \le |\beta|^2\ ||\eta||^2 = |\beta|^2 \ (II)$$

Απο τις σχέσεις (I),(II) προκύπτει ότι $|\beta|^2 = 1$ οπότε $a = 0$. Συνεπώς, τα ψ_2 και η είναι συγγραμικά και άρα $\psi_2 \perp \psi_1$, δεδομένου ότι $\eta \perp \psi_1$ και η συγγραμικό με το ψ_2.
($\Longleftarrow$) Έστω M_i η ορθογώνια προβολή στο μονοδιάστατο υπόχωρο που παράγεται απο ψ_i, θ.δ.ο η οικογένεια $\{M_i\}_{i=0}^{N}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις.
Εξ ορισμού έχουμε: $M_i^2 = M_i = M_i^* = M_i^* M_i$ για $i = 1, \dots, N$ και η ορθογώνια προβολή στο $span = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$ θα είναι $\sum_{i=1}^{N} M_i^* M_i$. Έστω M_0 η ορθογώνια προβολή στο $\{\psi_1, \dots \psi_N\}^{\perp}$, τότε $\sum_{j=0}^{N} M_j^* M_j = \sum_{j=0}^{N} M_j = I$.

Επιπλέον, $M_i(\psi_j) = \delta_{i,j}\psi_j,$, $\forall i,j \in \{1,\dots,N\}$ τ.ω $||M_i(\psi_j)||^2 = \delta_{i,j}$, $\forall i,j \in \{1,\dots,N\}$.

$\square$

Θεώρημα 2.3.4. *Υποθέτουμε ότι $\{\psi_1,\dots,\psi_{\mathrm{N}}\}$ είναι μια συλλογή από γραμμικώς ανεξάρτητες καταστάσεις. Τότε, σε εκείνη αντιστοιχεί ένα σύστημα μέτρησης $\{M_i : 0 \le i \le N\}$ τ.ω για $i \neq 0$ έχουμε $||M_i(\psi_j)|| \neq 0$ αν-ν $i = j$*

Απόδειξη. Έστω $V_i = span\{\psi_j : i \neq j\}$ με $i = 1,\dots,N$ και έστω E_i η προβολή στο $V_i^{\perp}$. Επειδή η προβολή στο $V_i^{\perp}$ μηδενίζει τα στοιχεία του V_i εκτός του i, για $j \neq i$ έχουμε $\psi_j \in V_i \Rightarrow \mathrm{E}_i(\psi_j) = 0 \Rightarrow ||\mathrm{E}_i(\psi_j)||^2 = 0$.

Εξ ορισμού ισχύει ότι $0 \le E_i \le I \Rightarrow 0 \le E_1 + E_2 \cdots + E_N \le NI$

Θέτουμε $M_i = \frac{1}{\sqrt{N}}E_i$ με $i = 1,\dots,N$. Καθώς τα M_i και E_i εκφράζονται με προβολές, θα ισχύει: $M_i^* = M_i$ και $E_i = E_i^2$, οπότε έχουμε: $M_i^*M_i = \frac{1}{N}E_i$,

άρα $\sum_{i=1}^N M_i^*M_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N E_i \le I \Rightarrow I - \sum_{i=1}^N M_i^*M_i \ge 0$

Θέτουμε $M_0 = (I - \sum_{i=1}^N M_i^*M_i)^{\frac{1}{2}}$ τότε:

$\sum_{i=0}^N M_i^*M_i = (I - \sum_{i=1}^N M_i^*M_i)^{\frac{1}{2}})^2 + \sum_{i=1}^N M_i^*M_i) = I$,

οπότε η οικογένεια $\{M_i\}_{i=0}^N$ αποτελεί σύστημα μέτρησης.

Επιπλέον, για $i \neq 0$ αν $j \neq i$, ισχύει ότι $||M_i(\psi_j)|| = \frac{1}{\sqrt{N}}||E_i(\psi_j)|| = 0$.

Επομένως, $||M_i(\psi_i)|| = \frac{1}{\sqrt{N}}||E_i(\psi_i)|| \neq 0\,, \forall \psi_i \notin V_i$ και άρα έχει μη μηδενικές προβολές στο $V_i^{\perp}$. $\square$

Μέχρι στιγμής αναφερθήκαμε σε καθαρές καταστάσεις (pure states),τώρα θα μιλήσουμε για σύνολα καταστάσεων, αλλιώς μικτές καταστάσεις (ensembles or mixed states).

2.4 Σύνολα ή Μικτές καταστάσεις και Πίνακας πυκνότητας

Η υπάρχουσα κβαντική θεωρία, μπορεί να απαντήσει μόνο ερωτήσεις της μορφής "Αν πραγματοποιηθεί αυτό το πείραμα, ποια είναι τα αποτελέσματα και οι πιθανότητές τους;" Δεν μπορεί, επί της αρχής, να απαντήσει ερωτήσεις της μορφής "Τί πραγματικά συμβαίνει όταν..;". Ο μαθηματικός φορμαλισμός της κβαντικής θεωρίας, σαν την οργουελλιανή Νεογλώσσα, δεν έχει καν τις λέξεις για να θέσει ένα τέτοιο ερώτημα.

Ε.Τ.Τζέινς

Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε τον τρόπο που ο φορμαλισμός της κβαντικής θεωρίας αντιμετωπίζει τις μικτές καταστάσεις, δηλαδή αυτές που δεν μας δίνουν πλήρη πληροφόρηση για το σύστημα. Αυτή η διαδικασία θα μας επιτρέψει να εξετάζουμε περιπτώσεις πολλών συστημάτων που δεν έχουν απαραίτητα την ίδια κατάσταση ή την περίπτωση ενός συστήματος για το οποίο γνωρίζουμε μόνο την πιθανότητα να είναι σε διαφορετικές μεταξύ τους καταστάσεις ψ_i. Επιπλέον, κύριο στοιχείο στις ακόλουθες υποενότητες θα είναι η μελέτη του πίνακα πυκνότητας που μπορεί να περιγράψει μικτές καταστάσεις καθώς και καθαρές. Ας κάνουμε όμως μια σύνδεση με όσα έχουμε αναφέρει πρότινος.

Έστω $\{\mathrm{M}_i : 1 \leq i \leq k\}$ ένα σύστημα μέτρησης με $M_i : \mathcal{H}_s \to \mathcal{H}_o$. Θεωρούμε την κατάσταση $\psi \in \mathcal{H}_s$. Υπενθυμίζουμε οτι ερμηνεύουμε τα $p_i = ||M_i(\psi)||^2$ ως τη πιθανότητα παρατήρησης του αποτελέσματος i. Αν εμείς παρατηρούμε το i, το σύστημα μεταβάλλει την κατάστασή του στην κατάσταση $\frac{M_i(\psi)}{||M_i(\psi)||}$. Με άλλα λόγια λέμε ότι , εισάγουμε την κατάσταση $\psi \in \mathcal{H}_s$ και εξάγουμε την κατάσταση $\frac{M_i(\psi)}{||M_i(\psi)||}$, με πιθανότητα $p_i = ||M_i(\psi)||^2$. Οπότε μετά την μέτρηση, θα έχουμε αυτό που τώρα φαίνεται σαν μία ανεμειγμένη (μικτή) σακούλα απο καταστάσεις $\left\{\frac{M_i(\psi)}{||M_i(\psi)||}\right\}_i$ με το $\frac{M_i(\psi)}{||M_i(\psi)||}$ να συμβαίνει με πιθανότητα p_i.

Ορισμός 2.4.1. *Ένα μικτό σύστημα είναι μία πεπερασμένη συλλογή $\{\psi_i, p_i : 1 \leq i \leq N\}$ απο καταστάσεις ψ_i με πιθανότητες p_i, όπου $||\psi_i|| = 1$, $p_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$.*

Απο τον ορισμό του μικτού συστήματος προκύπτει το εξής ερώτημα: Έχοντας ένα σύνολο απο καταστάσεις, στο οποίο όπως είναι λογικό δεν γνωρίζουμε την κατάσταση που βρίσκεται το σύστημα παραμόνο τις πιθανότητες κάθε κατάστασης, ποιά είναι η πιθανότητα να παρατηρούμε το αποτέλεσμα i;

Δεδομένης κατάστασης ψ_j, η πιθανότητα να παρατηρούμε το αποτέλεσμα i είναι $||M_i(\psi_j)||^2$. Οπότε, σε ένα σύνολο καταστάσεων η πιθανότητα να παρατηρούμε το αποτέλεσμα i θα είναι $\sum_{j=1}^{k} p_j \, ||M_i(\psi_j)||^2$, δηλαδή στο άθροισμα θα έχουμε το γινόμενο των πιθανοτήτων του αποτελέσματος i και του j. Αυτός ο τύπος όμως είναι κάπως περιοριστικός. Στην επόμενη υπόενότητα λοιπόν, θα αναπτύξουμε μια νέα μέθοδο για των υπολογισμό πιθανοτήτων των αποτελεσμάτων, ο οποίος θα μπορεί να εφαρμοστεί τόσο στα σύνολα καταστάσεων όσο και στις καθαρές καταστάσεις.

2.4α΄ Συμβολισμός Von Neumann's: Πίνακες Πυκνότητας

Για δοσμένη κατάσταση ψ$\in \mathcal{H}_s, ||\psi|| = 1$, ένα τυπικό μοναδιαίο διάνυσμα σε ενα μονοδιάστατο υπόχωρο παραγόμενο απο ψ, δίνεται απο $e^{i\vartheta}\,\psi$. Γενικά $e^{i\vartheta}\,\psi \neq \psi$, αλλά για οποιαδήποτε μέτρηση M_j, μπορούμε να δούμε οτι $||M_j(\psi)||^2 = ||M_j(e^{i\vartheta}\,\psi)||^2$. Αυτό μας δείχνει οτι οι μετρήσεις δεν διακρίνουν διαφορετικά μοναδιαία διανύσματα ενός μονοδιάστατου υπόχωρου παραγόμενου απο ψ. Ως εκ τούτου οι καταστάσεις πρέπει να παραπέμπουν σε μονοδιάστατους υπόχωρους και όχι απλά σε μοναδιαίο διάνυσμα. Συμπεραίνουμε λοιπόν, οτι οι πιθανότητες των αποτελεσμάτων στην πραγματικότητα εξαρτόνται απο το μονοδιάστατο υπόχωρο που παράγεται απο ένα διάνυσμα.

Για να επιτύχουμε λοιπόν την ανάπτυξη μιας καλύτερης μεθόδου για την εύρεση των πιθανοτήτων, θα αντικαταστίσουμε τις καταστάσεις απο προβολές και τα μήκη απο το ίχνος.

Σημειώνουμε οτι αν $\psi \in \mathbb{C}^n, ||\psi|| = 1$ και P_ψ δηλώνει την ορθογώνια προβολή σε έναν υπόχωρο που παράγεται απο ψ, τότε $P_\psi = \psi\psi^* = |\psi\rangle\langle\psi|$. ($P_\psi h = \psi\psi^* h = \langle\psi|h\rangle\psi$, όπου $\langle\psi|h\rangle$ είναι η συνιστώσα του h στην κατεύθυνση του ψ). Επιπλέον, $Tr(P_\psi) = Tr(\psi\psi^*) = Tr(\psi^*\psi) = (\psi^*\psi) = \langle\psi|\psi\rangle = 1$.

Πίσω στο μικτό σύστημα : Έστω οτι έχουμε ένα σύστημα μέτρησης $\{M_i : 1 \leq i \leq N\}$ και ένα σύνολο απο καταστάσεις $\{\psi_j, p_j : 1 \leq j \leq k\}$ με $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$. Ξέρουμε οτι η πιθανότητα της παρατήρησης του αποτελέσματος i είναι, $\sum_{j=1}^{k} p_j ||M_i(\psi_j)||^2$. Θα απλοποιήσουμε αυτήν την έκφραση ως εξής:

$$\sum_{j=1}^{k} p_j \|M_i(\psi_j)\|^2 = \sum_{j=1}^{k} p_j (M_i\psi_j)^*(M_i\psi_j) =$$
$$\sum_{j=1}^{k} p_j Tr((M_i\psi_j)^*(M_i\psi_j)) =$$
$$\sum_{j=1}^{k} p_j Tr((M_i\psi_j)(M_i\psi_j)^*) =$$
$$\sum_{j=1}^{k} p_j Tr(M_i\psi_j\psi_j^* M_i^*) =$$
$$\sum_{j=1}^{k} p_j Tr(M_i^* M_i\psi_j\psi_j^*) =$$
$$\sum_{j=1}^{k} Tr(M_i^* M_i(p_j\psi_j\psi_j^*)) =$$
$$Tr(M_i^* M_i(\sum_{j=1}^{k} p_j\psi_j\psi_j^*))$$

Υπενθυμίζουμε οτι $\psi_j\,\psi_j^* = P_{\psi_j}$, , και αν θέσουμε $P = \sum_{j=1}^{k} p_j\,\psi_j\,\psi_j^*$, με τα p_j να αθροίζονται στη μονάδα, έχουμε δείξει το ακόλουθο.

Θεώρημα 2.4.2. *Δοσμένου ενός μικτού συστήματος $\{\psi_j, p_j\, :\, 1 \le i \le k\}$ και ενός συστήματος μέτρησης $\{M_i\, :\, 1 \le i \le N\}$, η πιθανότητα παρατήρησης του i-οστού αποτελέσματος είναι $Tr\,(M_i^* M_i\, P)$ όπου $P = \sum_{j=1}^{k} p_j\psi_j\psi_j^*$.*

Ο όρος $P = \sum_{j=1}^{k} p_j\psi_j\psi_j^*$ αποτελεί τετραγωνικό πίνακα και όταν συσχετίζεται με ένα σύνολο απο καταστάσεις είναι πολύ σημαντικός. Ο Von Neumann τον ονόμασε *πίνακα πυκνότητας* του δεδομένου συνόλου.

Ορισμός 2.4.3. ***(Πίνακας Πυκνότητας του συνόλου)*** *Δεδομένου ενός συνόλου απο καταστάσεις $\{\psi_j, p_j\, :\, 1 \le j \le k\}$ ο πίνακας*

$$P = \sum_{j=1}^{k} p_j P_{\psi_j} \tag{2.3}$$

ονομάζεται πίνακας πυκνότητας του συνόλου.[4]

[4] Σε διαφορετικές βιβλιογραφίες ο πίνακας πυκνότητας μπορεί να αναφέρεται και ως τελεστής πυκνότητας ή μήτρα πυκνότητας. Ο πίνακας πύκνότητας είναι μία αναπαράσταση του τελεστή πυκνότητας.

Εφαρμογή: Υποθέτουμε οτι έχουμε ένα σύνολο καταστάσεων $\{q_1, q_2, p_1, p_2\}$ όπου, $|q_1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ και $|q_2\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ οι καταστάσεις του συνόλου και $p_1 = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{1}{3}$ οι αντίστοιχες πιθανότητες. Η μικτή αυτή κατάσταση, είναι ένα μίγμα καθαρών (pure) καταστάσεων και περιγράφεται πλήρως από τον τελεστή πυκνότητας P, που ορίζεται ως:

$$P = \sum_{i=1}^{2} p_i |q_i\rangle\langle q_i| = p_1|q_1\rangle\langle q_1| + p_2|q_2\rangle\langle q_2| =$$

$$= \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{6} \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση 2.4.4. *Αν δύο σύνολα έχουν τον ίδιο πίνακα πυκνότητας* $(P = \sum_{j=1}^{k} p_j \psi_j \psi_j^*)$, *τότε παίρνουμε την ίδια πιθανότητα* $(Tr\,(M_i^* M_i\, P))$ *για τα αποτελέσματα οποιουδήποτε συστήματος μέτρησης. Με άλλα λόγια, ένα σύστημα μέτρησης δεν διαφοροποιείται μεταξύ δύο συνόλων με ίδιο πίνακα πυκνότητας.*

Παρατήρηση 2.4.5. *Αν* $\{M_i : 1 \le i \le k\}$ *και* $\{\tilde{M}_i : 1 \le i \le k\}$ *είναι δύο συστήματα μέτρησης τ.ω* $\forall i\ M_i^* M_i = \tilde{M}_i^* \tilde{M}_i$, *τότε επίσης η πιθανότητα των αποτελεσμάτων είναι η ίδια για οποιοδήποτε σύνολο. Αυτό το γεγονός μας υποδεικνύει οτι το σύνολο δεν έχει την ιδιότητα να διακρίνει το ένα σύστημα μέτρησης απο το άλλο, σε μία τέτοια περίπτωση.*

Σημείωση: Από τα παραπάνω προκύπτει οτι στο επίκεντρο της προσοχής βρίσκεται ο πίνακας πυκνότητας και όχι καθεαυτού το σύνολο.

Το ακόλουθο παράδειγμα αποτυπώνει την παρατήρηση 2.4.4

Παράδειγμα 2.4.6. *Αν* $\{u_1, u_2, \ldots, u_N\}$ *είναι μία ορθοκανονική βάση για το* $\mathbb{C}^N$, *τότε ο πίνακας πυκνότητας* P *για το σύνολο* $\{u_j, \frac{1}{N} : 1 \le j \le N\}$ *δίνεται από την σχέση* $P = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} u_j u_j^* = \frac{1}{N} I_N$. *Αν* $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_N\}$ *μία άλλη ορθοκανονική βάση για τον* $\mathbb{C}^N$, *τότε ο πίνακας πυκνότητας* $\tilde{P}$ *για το σύνολο* $\{\tilde{u}_j, \frac{1}{N} : 1 \le j \le N\}$ *επίσης προκύπτει οτι είναι* $\tilde{P} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} \tilde{u}_j \tilde{u}_j^* = \frac{1}{N} I_N$. *Αυτό το παράδειγμα επιβεβαιώνει την ύπαρξη δύο διαφορετικών συνόλων με τον ίδιο πίνακα πυκνότητας.*

2.4β′ Ενσωμάτωση του πίνακα πυκνότητας στην έννοια της κατάστασης και στα κβαντικά πειράματα πριν και μετά την μέτρηση

Έχοντας ορίσει τον πίνακα πυκνότητας είμαστε σε θέση να παραθέσουμε μια διαφορετική διατύπωση της *Θεμελιωδούς αρχής 1.* Ένα απο τα σημαντικότερα μαθηματικά αποτελέσματα για την κβαντική θεωρία, το θεώρημα του

A.M.Gleason, μας εγγυάται οτι αυτή θα είναι και η τελική μορφή της αρχής χωρίς να χρειαστεί περαιτέρω τροποποιήσεις. Σύμφωνα με το θεώρημα του Gleason, η γενικότερη δυνατή έννοια κατάστασης στην κβαντική θεωρία αντιστοιχίζεται πλήρως μαθηματικά με τον πίνακα πυκνότητας. Συνεπώς, η *αρχή 1* λαμβάνει την ακόλουθη μορφή.

Θεμελιώδης αρχή 1.β: Σε κάθε φυσικό σύστημα αντιστοιχεί ένας χώρος Hilbert. Μπορούμε να αντιστοιχίζουμε καταστάσεις του συστήματος με πίνακες πυκνότητας στο χώρο Hilbert.

Ομοίως, θα μπορούσαμε να επαναδιατυπώσουμε και άλλες αρχές της κβαντικής μηχανικής αλλά δεν θα επεκταθούμε τόσο. Παρόλα αυτά η επαναδιατύπωση της *αρχής 1* μας δίνει το έναυσμα να προσεγγίσουμε με καλύτερο τρόπο την έννοια της κατάστασης.

Η κατάσταση αναφέρεται στον τρόπο που έχει προετοιμαστεί ένα σύστημα, είτε στο εργαστήριο είτε στη φύση, προτού γίνουν μετρήσεις σ' αυτό. Η πληροφορία για την προετοιμασία ενσωματώνεται σε ένα μαθηματικό αντικείμενο, τον πίνακα πυκνότητας, από το οποίο λαμβάνουμε προβλέψεις για τα αποτελέσματα των μετρήσεων που κάνουμε, υπό τη μορφή των πιθανοτήτων.

Η παραπάνω ερμηνεία της κατάστασης είναι ο ελάχιστος κοινός παρονομαστής για την κατανόηση και χρήση της κβαντικής θεωρίας. Είναι λογικά συνεπής, και αρκεί για να εξηγήσει την τεράστια επιτυχία της κβαντικής μηχανικής στην πρόβλεψη των πειραματικών αποτελεσμάτων. Θα αποκαλούμε αυτήν την ερμηνεία *μινιμαλιστική*.

Συστήματα καθαρών καταστάσεων

Υπενθυμίζουμε οτι, καθαρές καταστάσεις λέγονται εκείνες για τις οποίες μπορεί να οριστεί με ακρίβεια η κβαντική τους κατάσταση κάθε στιγμή.

Γενικά, ένα διάνυσμα κατάστασης είναι της μορφής: $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Θα εντάξουμε τώρα τους πίνακες πυκνότητας στα κβαντικά πειράματα. Υπενθυμίζουμε οτι αν αρχικα ένα σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση ψ, με $\psi \in \mathcal{H}_s, ||\psi|| = 1$ και δίνεται σύστημα μέτρησης $\{M_i : 1 \leq i \leq k\}$, τότε μετά τη μέτρηση το σύστημα είναι, πλέον, το σύνολο $\left\{\frac{M_i(\psi)}{||M_i(\psi)||}, ||M_i\psi||^2 : 1 \leq i \leq k\right\}$. Συνδέοντας τους πίνακες πύκνότητας με τις καταστάσεις του συστήματος πριν και μετά την μέτρηση κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις.

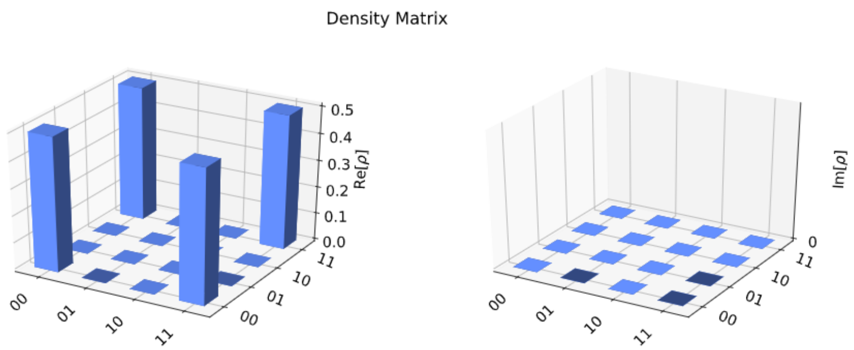
Πριν την μέτρηση η είσοδος είναι η κατάσταση ψ και ο πίνακας πυκνότητας που ανταποκρίνεται σε αυτή, δίνεται απο τη σχέση $P = |\psi\rangle\langle\psi| = \psi\,\psi^*$. Ο όρος $|\psi\rangle\langle\psi|$ αντιπροσωπεύει το εξωτερικό γινόμενο της κατάστασης ψ με τον εαυτό της:

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* & \dots & a_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a_1|^2 & a_1 a_2^* & \dots & a_1 a_n^* \\ a_2 a_1^* & |a_2|^2 & \dots & a_2 a_n^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1^* & a_n a_2^* & \dots & |a_n|^2 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 2.4.7. *Έστω η κατάσταση* $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, *η οποία υπενθυμίζουμε ότι είναι υπέρθεση καθαρών καταστάσεων. Τότε ο πίνακας πυκνότητας για αυτήν την κατάσταση δινεται απο την σχέση:*

$$P = |\psi\rangle\langle\psi| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Αν θέλουμε, μπορούμε να οπτικοποιήσουμε τον πίνακα πυκνότητας που προέκυψε με το ακόλουθο διάγραμμα (χρησιμοποιοήθηκε διάγραμμα τύπου cityscape):



Όπως βλέπουμε το δεξιό διάγραμμα αφορά τους φανταστικούς αριθμούς του πίνακα και το αριστερό τους πραγματικούς.

<u>*Συμβολισμός:*</u> $|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ *και αντίστοιχα,*

$|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$, $|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle$, $|11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$, *όπου* $|1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Μετά τη μέτρηση, όπως προαναφέρθηκε, το σύστημα γίνεται το σύνολο $\left\{\frac{M_i(\psi)}{||M_i(\psi)||}, ||M_i\psi||^2 \,:\, 1 \le i \le k\right\}$ και ως εκ τούτου, το αποτέλεσμα είναι το σύνολο που προσδιορίζεται απο τον πίνακα πυκνότητας:

$$\sum_{i=1}^{k} M_i P M_i^* \tag{2.4}$$

<u>Σημείωση:</u> Καταλήγουμε στην σχέση (2.3) με τον εξής τρόπο:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} ||M_i\psi||^2 \Big(\frac{M_i(\psi)}{||M_i(\psi)||}\Big)\Big(\frac{M_i(\psi)}{||M_i(\psi)||}\Big)^* &= \\
\sum_{i=1}^{k}(M_i\psi)(M_i\psi)^* &= \\
\sum_{i=1}^{k}(M_i\psi)(M_i^*\psi^*) &= \\
\sum_{i=1}^{k} M_i(\psi\,\psi^*)M_i^* &= \\
\sum_{i=1}^{k} M_i P M_i^*
\end{aligned}$$

Η παρατήρηση που κάναμε παραπάνω για το πως διαφοροποιείται ο πίνακας πυκνότητας πριν και μετά την μέτρηση είναι το κλειδί για το θεώρημα που ακολουθεί, το οποίο αφορά τις μικτές καταστάσεις.

Θεώρημα 2.4.8. *Δεδομένου συνόλου απο καταστάσεις* $\{\psi_j, p_j \,:\, 1 \le j \le J\}$ *και ενός συστήματος μέτρησης* $\{M_i \,:\, 1 \le i \le k\}$ *στον* $\mathcal{H}_s$, *με πίνακα πυκνότητας* $P = \sum_{j=1}^{J} p_j\psi_j\psi_j^*$, *τότε το σύστημα μετά την μέτρηση παίρνει την μόρφη* $\left\{\frac{M_i(\psi_j)}{||M_i(\psi_j)||}, p_j\, ||M_i\psi_j||^2 \,:\, 1 \le i \le k,\ 1 \le j \le J\right\}$ *με πίνακα πυκνότητας* $\sum_{i=1}^{k} M_i P M_i^*$

Απόδειξη. Ο πίνακας πυκνότητας για ένα σύνολο απο καταστάσεις, μετά την μέτρηση (στην έξοδο) δίνεται από :

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{k} p_j\|M_i\psi_j\|^2\Big(\frac{M_i\psi_j}{\|M_i\psi_j\|}\Big)\Big(\frac{M_i\psi_j}{\|M_i\psi_j\|}\Big)^* =$$

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{k} p_j(M_i\psi_j)(M_i\psi_j)^* =$$

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{k} M_i(\psi_j p_j \psi_j^*)M_i^* =$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_i\, P\, M_i^*$$

□

2.4γ΄ Ιδιότητες πινάκων πυκνότητας

Απο όσα αναφέραμε, συμπεραίνουμε οτι ένα σύστημα μέτρησης παίρνει έναν πίνακα πυκνότητας και παράγει έναν άλλο πίνακα πυκνότητας. Τι είδος πινάκων είναι όμως οι πίνακες πυκνότητας;

Λήμμα 2.4.9. *Έστω $\{u_1, \dots, u_n\}$, μια ορθοκανονική βάση αποτελούμενη αποκλειστικά απο μη-αρνητικές ιδιοτιμές, ενός θετικά ημιορισμένου πίνακα P, τέτοιο ώστε $Pu_j = \lambda_j u_j$ $\forall j$, τότε $P = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j u_j^*$*

Απόδειξη. $\forall h \in \mathcal{H}$, έχουμε $h = \sum_{j=1}^{n}\langle u_j, h\rangle u_j = \sum_{j=1}^{n} u_j^*\, h\, u_j = \sum_{j=1}^{n} u_j u_j^* h$

Συνεπώς, $Ph = \sum_{j=1}^{n} P\,(\langle u_j, h\rangle\, u_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\,\langle u_j, h\rangle\, u_j = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j u_j^*\right) h$

Οπότε καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Πρόταση 2.4.10. *Έστω $P \in M_n$. Τότε ο P είναι ένας πίνακας πυκνότητας ενός συνόλου αν και μόνο αν $P \geq 0$ και $Tr(P) = 1$*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έστω P ο πίνακας πυκνότητας του συνόλου$\{\psi_j, p_j\}_{j=1}^{J}$.

Απο ορισμό ισχύει $P = \sum_{j=1}^{n} p_j\psi_j\psi_j^*$ οπότε έχουμε,

$$\langle h, Ph\rangle = \sum_{j=1}^{J} p_j\,\langle h, \psi\,\psi^*\, h\rangle = \sum_{j=1}^{J} p_j\langle h,\ \psi\,\langle\psi, h\rangle\rangle = \sum_{j=1}^{J} p_j\langle\psi, h\rangle\,\langle h, \psi\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{J} p_j\langle\psi, h\rangle\,\overline{\langle\psi, h\rangle} = \sum_{j=1}^{J} p_j|\langle\psi, h\rangle|^2 \geq 0, \quad \forall h \in \mathbb{C}^n$$

Συνεπώς, απο τον ορισμό του θετικά ημιορισμένου πίνακα καταλήγουμε στο ότι $P \geq 0$. Ένας άλλος τρόπος να το διαπιστώσουμε αυτό, είναι παρατηρώντας ότι το P είναι το άθροισμα θετικών τελεστών τάξης ένα. Τώρα θα αποδείξουμε οτι Tr(P)=1.

$$Tr(P) = \sum_{j=1}^{J} p_j Tr(\psi_j \psi_j^*) = \sum_{j=1}^{J} p_j Tr(\psi_j^* \psi_j) = \sum_{j=1}^{J} p_j \langle \psi_j, \psi_j \rangle = \sum_{j=1}^{J} p_j = 1$$

Σημείωση: Η τρίτη ισότητα προκύπτει καθώς $\psi_j \psi_j^* = \langle \psi_j, \psi_j \rangle$

($\Longrightarrow$) Έστω $P \geq 0$ με $Tr(P) = 1$. Τότε υπάρχει ένα σύνολο ιδιοδιανυσμάτων $\{u_j\}_{j=1}^J$ το οποίο είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^J$, με $\lambda_j \geq 0$, τέτοιο ώστε $P = \sum_{j=1}^J \lambda_j u_j u_j^*$. Τότε $Tr(P) = \sum_{j=1}^J \lambda_j = 1$, άρα οι ιδιοτιμές λ_j αποτελούν πιθανότητες. Καταλήγουμε λοιπόν, στο οτι το $\{u_j, \lambda_j\}_{j=1}^J$ σχηματίζει ένα σύνολο με πίνακα πυκνότητας P. □

Σχόλιο: Υπενθυμίζουμε οτι ο πίνακας πυκνότητας είναι μία αναπαράσταση του τελεστή πυκνότητας. Συγκεκριμένα ο τελεστής πυκνότητας είναι Ερμιτιανός τελεστής, δηλαδή $P = P^*$ (εμείς χρησιμοποιούμε τους πίνακες για πρακτικούς λόγους).

Παρακάτω περιγράφονται χωρίς απόδειξη κάποιες επιπλέον σημαντικές ιδιότητες του πίνακα πυκνότητας (Niesen & Chuang, 2004):

- Αν η κατάσταση είναι μικτή τότε: $Tr(P^2) \leq 1$
- Αν η κατάσταση είναι καθαρή τότε: $Tr(P^2) = 1$, δηλαδή $Tr(P) = Tr(P^2)$
- Για κάθε ιδιοτιμή, λ, του πίνακα πυκνότητας ισχύει: $0 \leq \lambda \leq 1$

Ως απάντηση προς την αρχική μας ερώτηση, στην ορολογία της θεωρίας τελεστών οι πίνακες πυκνότητας είναι θετικοί τελεστές ίχνους ένα. Αυτή η παρατήρηση διευρύνει τους ορίζοντες μας, ούτως ώστε να μπορέσουμε να αναλύσουμε τα σύνολα και τα κβαντικά γεγονότα απο μία καθαρά μαθηματική προσέγγιση.

Κεφάλαιο 3

Κβαντικά Κανάλια

Ένα κανάλι μπορεί να περιγραφεί απο μία συσκευή που εισάγει και εξάγει πιθανώς διαφορετικά κλασικά ή κβαντικά συστήματα. Αυτός ο ορισμός καλύπτει κάθε διαδικασία στην θεωρία της πληροφορίας, απο τις προετοιμασίες για ελεύθερη ή ελεγχόμενη εξέλιξη του χρονου έως τις μετρήσεις. Επομένως τα κανάλια συγκαταλέγονται στις κεντρικές έννοιες της κλασσικής και κβαντικής επιστήμης της πληροφορίας.

Τα κλασικά κανάλια μπορούν να διαβιβάσουν ή να αποθηκεύσουν μόνο κλασική πληροφορία. Τα ηλεκτρικά καλώδια ή το Royal Mail αποτελούν παραδείγματα τέτοιων καναλιών. Τα κβαντικά κανάλια αντίθετα, μπορούν να διαβιβάσουν και κλασίκη καθώς και κβαντική πληροφορία. Οι φυσικές υλοποιήσεις των κβαντικών καναλιών περιλαμβάνουν τα πάντα, από οπτικές ίνες ή συζευγμένες αλυσίδες περιστροφής για κβαντική επικοινωνία, έως θωρακισμένα άτομα σε οπτικές παγίδες για κβαντική αποθήκευση.

Ποία είναι όμως η μαθηματική υπόσταση των κβαντικών καναλιών ; Για να απάντησουμε σε αυτό το ερώτημα πρέπει πρώτα να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις που αφορούν τα συστήματα μέτρησης και τους πίνακες πυκνότητας.

3.1 Απεικονίσεις πινάκων πυκνότητας

Έχοντας υπόψην το *Θεώρημα 2.4.8*, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε οτι ένα σύστημα μέτρησης $\{M_i\}_i$, όπου $M_i : \mathcal{H}_s \to \mathcal{H}_o$, μπορεί να προσδιοριστεί απο μία γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}_s) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_o)$ με $\Phi(P) = \sum_i M_i P M_i^*$. Η απεικόνιση αυτή στέλνει πίνακες πυκνότητας σε πίνακες πυκνότητας, γεγονός που μας οδηγεί στην επόμενη αρχή της κβαντικής μηχανικής.

Θεμελιώδης αρχή 3: Αν ένα γεγονός εμφανίζει μετασχηματισμό καθαρών καταστάσεων απο το εργαστήριο $\mathcal{H}_1$ στο εργαστήριο $\mathcal{H}_2$, τότε υπάρχει μία γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ η οποία απεικονίζει πίνακες πυκνότητας σε πίνακες πυκνότητας.

Η ακόλουθη πρόταση είναι άμεση συνέπεια της παραπάνω αρχής.

Πρόταση 3.1.1. *Αν $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ είναι μια γραμμική απεικόνιση που στέλνει πίνακες πυκνότητας σε πίνακες πυκνότητας,συνεπώς περιγράφει ένα κβαντικό γεγονός,τότε:*

1. *$\forall P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, με $P \geq 0$, έχουμε $\Phi(P) \geq 0$*
   (οπότε η Φ είναι μία θετική γραμμική απεικόνιση)

2. *$\forall X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ έχουμε $Tr(\Phi(X)) = Tr(X)$*
   (οπότε η Φ είναι μία απεικόνιση που διατηρεί το ίχνος)

Μία τέτοια απεικόνιση(map) καλείται θετική και trace-preserving.

Απόδειξη. 1. Καθώς η Φ περιγράφει ένα κβαντικό γεγονός, απεικονίζει πίνακες πυκνότητας σε πίνακες πυκνότητας. Αρχικά θα δειχθεί η θετικότητα. Έστω $P \geq 0$ και $Tr(P) = 0$ ($P > 0 \Rightarrow Tr(P) = 1$) τότε, $P = 0$ και $\Phi(P) = 0$.
Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε οτι, $P \geq 0$ και $Tr(P) > 0$.
Έστω $\frac{1}{Tr(P)}P$, θετικός, παρατηρούμε οτι $Tr\left(\frac{1}{Tr(P)}P\right) = \frac{1}{Tr(P)}Tr(P) = 1$,
οπότε απο *πρόταση 2.4.10* ο πίνακας $\frac{1}{Tr(P)}P$ είναι πίνακας πυκνότητας.
Απο υπόθεση, $\Phi(\frac{1}{Tr(P)}P) = Q$ είναι πίνακας πυκνότητας, άρα απο γραμμικότητα έχουμε $\Phi(P) = Tr(P)\,Q \geq 0$.

2. Έστω $P \geq 0$, θα δειχθεί οτι η απεικόνιση διατηρεί το ίχνος. Παραπάνω δείξαμε οτι ο Q είναι πίνακας πυκνότητας συνεπώς,
$1 = Tr(Q) = Tr\left(\Phi\left(\frac{1}{Tr(P)}P\right)\right) = \frac{Tr(\Phi(P))}{Tr(P)} \Leftrightarrow Tr(\Phi(P)) = Tr(P)$
Ως εκ τούτο το ίχνος διατηρείται για θετικά ημιορισμένους πίνακες.
Υπενθυμίζουμε οτι αν $Tr(P) = 0$ τότε $P = 0$, οπότε $Tr(P) = 0$. Έπιπλεον, γνωρίζουμε οτι, αν $H = H^*$, τότε $H = P_1 - P_2$, όπου $P_1, P_2 \geq 0$ και θα ισχύει $Tr(\Phi(H)) = Tr(\Phi(P_1) - \Phi(P_2)) = Tr(P_1) - Tr(P_2) = Tr(H)$. Δηλαδή το ίχνος διατηρείται στους αυτοσυζυγείς. Τελικά, αν $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1), X = H + iK$, όπου $H = \frac{X+X^*}{2}, K = \frac{X-X^*}{2}$ έχουμε $H = H^*$ και $K = K^*$. Αφού κάθε ένα απο τα H,K μπορούν να γραφτούν ως διαφορά δύο θετικών τελεστών, απο γραμμικότητα του ίχνους, για κάθε $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ έχουμε:
$Tr(\Phi(X)) = Tr(\Phi(H) + i\Phi(K)) = Tr(H) + i\,Tr(K) = Tr(H + iK) = Tr(X)$ □

3.2 Αξιωματοποίηση κβαντικών καναλιών

Πλέον είμαστε σε θέση να προχωρήσουμε στην αξιωματοποίηση των κβαντικών καναλιών. Όπως θα δούμε τα κβαντικά κανάλια αποτελούν γραμμικές απεικονίσεις με συγκεκριμένες ιδιότητες που θα δοθούν μέσω των ακόλουθων αξιωμάτων.

Αξίωμα I

Κάθε σύστημα μέτρησης $\{M_i : H_s \to H_o,\ 1 \leq i \leq K\}$ με $\sum_{i=1}^{K} M_i^* M_i = I$ ορίζει ένα κβαντικό κανάλι το οποίο δίνεται απο την απεικόνιση

$$\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}_s) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_o), \quad \Phi(W) = \sum_{i=1}^{K} M_i W M_i^*.$$

Αξίωμα II

Αν η $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}_s) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_o)$ ορίζει ένα κβαντικό κανάλι, τότε η Φ είναι μια θετική απεικόνιση που διατηρεί το ίχνος.

Οι συσχετισμοί μεταξύ των αξιωμάτων και των παρατηρήσεων που έγιναν στην ενότητα 3.1 είναι εμφανής.

3.2α΄ Τα κβαντικά κανάλια σε συνδεδεμένα εργαστήρια

Έστω το εργαστήριο A με χώρο καταστάσεων $H_{s,A}$, χώρο αποτελεσμάτων $H_{o,A}$ και σύστημα μέτρησης $\{M_i : H_{s,A} \to H_{o,A}\}_{i=1}^{K}$ και το εργαστήριο B με χώρο καταστάσεων $H_{s,\mathrm{B}}$, χώρο αποτελεσμάτων $H_{o,\mathrm{B}}$ και σύστημα μέτρησης $\{\mathrm{N}_j : H_{s,\mathrm{B}} \to H_{o,\mathrm{B}}\}_{j=1}^{J}$.

Συνδιάζοντας αυτά τα δύο εργαστήρια προκύπτει το εργαστήριο AB, με:

•$H_{s,AB} = H_{s,A} \otimes H_{s,B}$, χώρο καταστάσεων

• $H_{o,AB} = H_{o,A} \otimes H_{o,B}$, χώρο αποτελεσμάτων

•$\{M_i \otimes N_j : H_{s,AB} \to H_{o,AB}\}$, σύστημα μέτρησης με $\sum_{i,j}(M_i \otimes N_j)(M_i \otimes N_j)^* = I$ και KJ αποτελέσματα

Όπως είναι αναμενόμενο, το παραπάνω σύστημα μέτρησης ορίζει το κβαντικό κανάλι $\Phi_{\mathrm{AB}} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_{s,\mathcal{AB}}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_{o,\mathcal{AB}})$ που δίνεται απο την σχέση $\Phi_{AB}(W) = \sum_i (M_i \otimes N_j) W (M_i \otimes N_j)^*$

Παρατήρηση 3.2.1. *Έστω $W \in H_{s,AB}$ όπου $W = W_1 + W_2$, με $W_1 \in H_{s,A}, W_2 \in H_{s,B}$ καθώς $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{s,\mathcal{AB}}) \simeq \mathcal{L}(\mathcal{H}_{s,\mathcal{A}}) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_{s,\mathcal{B}})$ και $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{o,\mathcal{AB}}) \simeq \mathcal{L}(\mathcal{H}_{o,\mathcal{A}}) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_{o,\mathcal{B}})$ θα ισχύει* $\Phi_{\mathrm{AB}}(W_1 \otimes W_2) = \sum_{i,j}(M_i W_1 M_i^*) \otimes (N_j W_2 N_j^*) = \Phi_A(W_1) \otimes \Phi_{\mathrm{B}}(W_2)$.
Οπότε τελικά καταλήγουμε στη σχέση $\Phi_{\mathrm{AB}} = \Phi_{\mathrm{A}} \otimes \Phi_{\mathrm{B}}$

Η επόμενη παρατήρηση είναι γενίκευση της *παρατήρησης 3.2.1*

Παρατήρηση 3.2.2. *Έστω* $W \in H_{s,AB}$ *της μορφής* $W = \sum_{l=1}^{n} W_{l,A} \otimes W_{l,B}$, $n \in \mathbb{N}, W_{l,A} \in H_{s,A}$ *και* $W_{l,B} \in H_{s,B}$ *τότε* :

$\Phi_{AB}(\sum_{l=1}^{n} W_{l,A} \otimes W_{l,B}) = \sum_{l=1}^{n} \Phi_{AB}(W_{l,A} \otimes W_{l,B}) =$

$\sum_{l=1}^{n}(\sum_{i,j}(M_i \otimes N_j)(W_{l,A} \otimes W_{l,B})(M_i \otimes N_j)^* =$

$\sum_{l=1}^{n}(\sum_{i,j}(M_i W_{l,A} M_i^*) \otimes (N_j W_{l,B} N_j^*) =$

$\sum_{l=1}^{n} \Phi_A(W_{l,A}) \otimes \Phi_B(W_{l,B})$

Οπότε καταλήγουμε πάλι στη σχέση $\Phi_{\mathrm{AB}} = \Phi_{\mathrm{A}} \otimes \Phi_{\mathrm{B}}$

Η παραπάνω συζήτηση για τα συστήματα μέτρησης δύο εργαστηρίων, συνοψίζεται στο επόμενο αξίωμα.

Αξίωμα ΙΙΙ

Έστω τα κβαντικά κανάλια $\Phi_1 : \mathcal{L}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ και $\Phi_2 : \mathcal{L}(\mathrm{K}_1) \to \mathcal{L}(\mathrm{K}_2)$ τότε η απεικόνιση $\Phi_1 \otimes \Phi_2 : \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)$ είναι επίσης κβαντικό κανάλι.

Παράδειγμα 3.2.3. *Τετριμμένο σύστημα μέτρησης διάστασης* n

Έστω το εργαστήριο B, *με* $H_{s,B}$ *ως χώρο καταστάσεων και* $H_{o,B}$ *ως χώρο αποτελεσμάτων, όπου* $H_{s,B} = H_{o,B} = \mathbb{C}^n$. *Θεωρούμε* $M_1 = I_n$ *να είναι το σύστημα μέτρησης του εργαστηρίου* B, *τότε ορίζεται ένα κβαντικό κανάλι που δίνεται απο την απεικόνιση* $\Phi_B : \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ *με* $\Phi_B = I_n^* W I_n = W$.

Έστω A *ένα επιπλέον εργαστήριο, για το οποίο ορίζεται το κβαντικό κανάλι* $\Phi_{\mathrm{A}} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_{s,A}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_{o,A})$. *Η* Φ_{A} *συνεπώς απο Αξίωμα ΙΙ, είναι θετική απεικόνιση που διατηρεί το ίχνος. Απο την σύνδεση των εργαστηρίων παίρνουμε την απεικόνιση,* $\Phi_{\mathrm{A}} \otimes \Phi_{\mathrm{B}} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_{s,A} \otimes \mathbb{C}^n) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_{o,A} \otimes \mathbb{C}^n)$.

Υπενθυμίζουμε οτι $\forall T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{s,A})$, *και* $\forall R \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ *θα ισχύει*

$(\Phi_{\mathrm{A}} \otimes \Phi_{\mathrm{B}})(\mathrm{T} \otimes R) = \Phi_{\mathrm{A}}(T) \otimes \Phi_{\mathrm{B}}(R) = \Phi_{\mathrm{A}}(T) \otimes R.$

Οπότε αν $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{s,A} \otimes \mathbb{C}^n) \simeq \mathcal{L}(\mathcal{H}_{s,A}) \otimes M_n$ *της μορφής* $W = \sum_{i,j} W_{ij} E_{ij}$, *τότε* $(\Phi_{\mathrm{A}} \otimes \Phi_{\mathrm{B}})(\sum_{i,j} W_{ij} \otimes E_{ij}) = \sum_{i,j} \Phi_{\mathrm{A}}(W_{ij}) \otimes E_{ij}$, *είναι επίσης θετική και διατηρεί το ίχνος απο Αξίωμα ΙΙΙ. Μπορούμε να φανταστουμε το κβαντικό κανάλι* $(\Phi_{\mathrm{A}} \otimes \Phi_{\mathrm{B}})$ *ως την απεικόνιση* $W = (W_{i,j}) \mapsto (\Phi_A(W_{i,j}))$.

Σημείωση: Ανακεφαλαιώνοντας, για να χαρακτηριστεί μια απεικόνιση Φ κανάλι, θα πρέπει να είναι γραμμική, συνεπώς να διατηρεί το ίχνος και να είναι θετική (απεικονίζει θετικούς τελεστές σε θετικούς τελεστές). Αυτές οι ιδιότητες πρέπει να διατηρούνται και σε συνδεδεμένα συστήματα, οπότε θα πρέπει η $\Phi \otimes id_n$ να είναι θετική $\forall n \in \mathbb{N}$, όπου id_n ο ταυτοτικός τελεστής σε nxn πίνακες. Μία απεικόνιση με αυτή την ιδιότητα συνήθως καλείται πλήρως θετική. Στην επόμενη υποενότητα θα ασχοληθούμε με αυτήν την έννοια και θα δούμε οτι η $\Phi_{\mathrm{A}} \otimes \Phi_{\mathrm{B}}$ αποτελεί κανάλι, με την προϋπόθεση οι Φ_1, Φ_2 να είναι πλήρως θετικές απεικονίσεις.

3.3 Πλήρως Θετικές απεικονίσεις

Ορισμός 3.3.1. *Για κάθε γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$, ορίζουμε την απεικόνιση $\Phi^{(n)} : M_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)) \to M_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}_2))$ όπου $\Phi^{(n)}((W_{i,j})) := (\Phi(W_{i,j}))$*

Ορισμός 3.3.2. ***n-θετική, πλήρως θετική***
Μια γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ καλείται n-θετική όταν $\Phi^{(n)} : M_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)) \to M_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}_2))$ είναι θετική, δηλαδή

$$\forall (W_{i,j}) \in M_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)), \ \ (W_{i,j}) \geq 0 \Rightarrow (\Phi(W_{i,j})) \geq 0.$$

Λέμε οτι η Φ είναι πλήρως θετική απεικόνιση (CP map), αν η Φ είναι n-θετική $\forall n \in \mathbb{N}$.

Παρατήρηση 3.3.3. *Στο παράδειγμα 3.2.3 συζητήσαμε για το τετριμμένο σύστημα μέτρησης διάστασης n, για το οποίο, η Φ_A πρέπει να είναι θετική. Συγκεκριμένα όμως, πρέπει να είναι n-θετική και καθώς το $n \in \mathbb{N}$ είναι αυθαίρετο, στην πραγματικότητα απαιτούμε η απεικόνιση να είναι n-θετική $\forall n \in \mathbb{N}$, δηλαδή απαιτούμε να είναι πλήρως θετική.*

Παράδειγμα 3.3.4. *Υπενθυμίζουμε οτι $H \otimes \mathbb{C}^n \simeq H \oplus \cdots \oplus H$.*
Τότε για $\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in H \otimes \mathbb{C}^n$ *έχουμε* $\left\langle \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle k_i, h_i \rangle$.

Οπότε για $(X_{ij}) \in M_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ έχουμε

$$\left\langle \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}, (X_{ij}) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n X_{1j} h_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n X_{nj} h_j \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle k_i, X_{ij} h_j \rangle.$$

Συνεπώς, $(X_{ij}) \geq 0$ αν και μόνο αν $\sum_{i,j=1}^n \langle h_j, X_{ij} h_j \rangle \geq 0 \ \forall h_1, \dots, h_n \in \mathcal{H}$.

Λήμμα 3.3.5. *1. Έστω $Y, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ τότε $Y \geq 0 \Rightarrow B^* Y B \geq 0$*

2. Έστω $Y = (Y_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$, τότε $(Y_{ij}) \geq 0 \Rightarrow (B^* Y_{ij} B) \geq 0$, $\forall B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

Απόδειξη. 1. $\forall h \in H$ έχουμε $\langle h, B^* Y B h \rangle = \langle Bh, Y(Bh) \rangle \geq 0$
2. Έχουμε $\left\langle \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}, (B^* Y_{ij} B) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} Bh_1 \\ \vdots \\ Bh_n \end{pmatrix}, (Y_{ij}) \begin{pmatrix} Bh_1 \\ \vdots \\ Bh_n \end{pmatrix} \right\rangle \geq 0,$

οπότε $(B^* Y_{ij} B) \geq 0$. □

Πρόταση 3.3.6. *Μία απεικόνιση $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ που έχει τη μορφή $\Phi(\mathrm{X}) = \sum_{l=1}^{L} B_l^* X B_l$, είναι πλήρως θετική. Συγκεκριμένα, τα κβαντικά κανάλια που προέρχονται απο συστήματα μέτρησης είναι πλήρως θετικά.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση Φ η οποία είναι n-θετική για κάθε n. Έστω $(\Upsilon_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ θετική. Γνωρίζοντας οτι, το άθροισμα θετικά ημιορισμένων πινάκων είναι θετικά ημιορισμένο, έχουμε:

$$(\Phi(\Upsilon_{ij})) = (\textstyle\sum_{l=1}^{L} B_l^* Y_{ij} B_l) = \sum_{l=1}^{L} (B_l^* Y_{ij} B_l) \geq 0$$

□

Πρόταση 3.3.7. *Έστω $\Phi : M_p \to M_p$ με $\Phi(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^t$. Τότε η Φ είναι θετική αλλά όχι 2-θετική (2-positive).*

Απόδειξη. Για να δειχθεί οτι η Φ είναι θετική, θα πρέπει να δείξουμε οτι για $X = (x_{ij}) \in M_p$, με $X \geq 0$ θα ισχύει $X^t = (x_{ji}) \geq 0$. Έστω $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^p$, έχουμε,

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}, X^t \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \right\rangle &= \sum_{i,j=1}^{p} \overline{\lambda_i}\, x_{ij}^t\, \lambda_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{p} \overline{\lambda_i}\, x_{ji}\, \lambda_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{p} \overline{\lambda_j}\, x_{ij}\, \lambda_i \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} \\ \vdots \\ \overline{\lambda_p} \end{pmatrix}, (x_{ij}) \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} \\ \vdots \\ \overline{\lambda_p} \end{pmatrix} \right\rangle \geq 0
\end{aligned}$$

Συνεπώς, $X^t \geq 0$ και άρα η Φ είναι θετική απεικόνιση.

Για να δούμε οτι δεν είναι 2-θετική, θεωρούμε τα matrix units $\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq p\}$ και έχουμε

i) $E = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathcal{L}(\mathbb{C}^p))$ είναι θετικός, αλλά

ii) $\Phi^{(2)}(\mathrm{E}) = \Phi^{(2)}\left(\begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} E_{11}^t & E_{12}^t \\ E_{21}^t & E_{22}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{21} \\ E_{12} & E_{22} \end{pmatrix}$ όχι θετική.

Για το (i) θεωρούμε $h_1, h_2 \in \mathbb{C}^p$, παρατηρούμε οτι

$$\left\langle \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\rangle = (\langle h_1, e_1\rangle + \langle h_2, e_2\rangle)(\langle e_1, h_1\rangle + \langle e_2, h_2\rangle)$$
$$= (\langle h_1, e_1\rangle + \langle h_2, e_2\rangle)(\overline{\langle h_1, e_1\rangle + \langle h_2, e_2\rangle})$$
$$= |\langle h_1, e_1\rangle + \langle h_2, e_2\rangle|^2 \geq 0$$

Συνεπώς $E \geq 0$, για το (ii) παρατηρούμε οτι

$$\Phi^{(2)}(\mathrm{E})\begin{pmatrix} e_2 \\ -e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ -e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e_2 \\ -e_1 \end{pmatrix}.$$

Καθώς, το -1 είναι ιδιοτιμή της $\Phi^{(2)}(\mathrm{E})$, θα ισχύει $\Phi^{(2)}(\mathrm{E}) \ngeq 0$.

Σημείωση: Αν ήταν θετική τότε όλες οι ιδιοτιμές θα έπρεπε να είναι μη-αρνητικές.

□

3.3α′ Αναπαράσταση Choi-Krauss

Θεώρημα 3.3.8. ***(Choi, 1975)*** *Έστω $\Phi : M_n \to M_d$ μία γραμμική απεικόνιση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

1. *Η Φ είναι πλήρως θετική.*

2. *Η Φ είναι n-θετική.*

3. *Η $\mathrm{P}_\Phi = (\Phi(\mathrm{E}_{i,j}))_{i,j=1}^n \in M_n(M_d)$ είναι θετική.*

4. *Υπάρχουν $B_1, \dots B_K \in M_{d,n}$ τέτοια ώστε $\Phi(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^K B_k X B_k^*$, $\forall X \in M_n$.*

Ορισμός 3.3.9. ***(Choi Rank)***
Έστω $\Phi : M_n \to M_d$ πλήρως θετική απεικόνιση. Η τάξη Choi της Φ ορίζεται ως

$$cr(\Phi) = min\{K \in \mathbb{N} : \Phi(X) = \sum_{k=1}^{K} B_k X B_k^*\}$$

Πρόταση 3.3.10. *Αν $\Phi : M_n \to M_d$ είναι μία πλήρως θετική απεικόνιση, τότε $cr(\Phi) = rank(P_\Phi)$.*

Απόδειξη. Έστω $Q = (E_{ij})$, εύκολα παρατηρούμε οτι $rank(Q) = 1$. Επιπλεόν αν $r = rank(\mathrm{P}_\Phi)$, μπορούμε να γράψουμε το P_Φ στη μορφή $\mathrm{P}_\Phi = \sum_{k=1}^r u_k u_k^*$. Σε αυτήν την περίπτωση $cr(\Phi) \leq rank(\mathrm{P}_\Phi)$. Αν $r = cr(\Phi)$, υποθέτουμε οτι $\Phi(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^r A_k X A_k^*$, όπου A_k πίνακες. Τότε

$$\mathrm{P}_\Phi = (\Phi(\mathrm{E}_{ij})) = \left(\sum_{k=1}^{r} A_k\, E_{ij}\, A_k^*\right) = \sum_{k=1}^{r} \begin{pmatrix} A_k & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} & \dots & E_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{n1} & \dots & E_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k^* & & \\ & \ddots & \\ & & A_k^* \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \begin{pmatrix} A_k & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} A_k^* & & \\ & \ddots & \\ & & A_k^* \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι $rank\,(P_\Phi)\ \leq cr(\Phi)$, καθώς:

$$rank(P_\Phi) \leq \sum_{k=1}^{r} rank\left(\begin{pmatrix} A_k & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} A_k^* & & \\ & \ddots & \\ & & A_k^* \end{pmatrix}\right) \leq\ r.$$

□

Κεφάλαιο 4

Κβαντική διεμπλοκή και τηλεμεταφορά

Θα ολοκληρώσουμε αυτή την εργασία παρουσιάζοντας, αρχικά, την δεσμευμένη πιθανότητα κβαντικών καταστάσεων. Στην συνέχεια, θα ορίσουμε την έννοια της διαχωρισιμότητας και της διεμπλοκής και τέλος θα παραθέσουμε δύο εφαρμογές της διεμπλοκής, την τηλεμεταφορά και το super dense coding.

Η κβαντική διεμπλοκή από φυσικής πλευράς είναι ένα φαινόμενο κατά το οποίο δύο σωματίδια ή ομάδες σωματιδίων αλληλεπιδρούν συνενώνοντας τις κυματοσυναρτήσεις τους. Τα σωματίδια μένουν "συνδεδεμένα" ασχέτως της απόστασης που μεσολαβεί μεταξύ τους. Συνεπώς, αν σταλεί το ένα από τα δύο στο άλλο άκρο του σύμπαντος και συμβεί κάτι σε οποιοδήποτε από τα δύο, το άλλο αντιδρά ακαριαία. Έτσι, φαίνεται είτε πως η πληροφορία μπορεί να ταξιδέψει με άπειρη ταχύτητα, είτε πως στην πραγματικότητα τα δύο αντικείμενα βρίσκονται ακόμα σε σύνδεση μεταξύ τους, σε κατάσταση διεμπλοκής. Κάπως έτσι προκύπτει και η κβαντική τηλεμεταφορά.

Η κβαντική τηλεμεταφορά είναι μια τεχνική για τη μεταφορά κβαντικών πληροφοριών από έναν αποστολέα, σε έναν απομακρυσμένο δέκτη. Ενώ η τηλεμεταφορά συνήθως απεικονίζεται στην επιστημονική φαντασία ως μέσο μεταφοράς φυσικών αντικειμένων από τη μια τοποθεσία στην άλλη, η κβαντική τηλεμεταφορά μεταφέρει μόνο κβαντικές πληροφορίες. Για την ακρίβεια, με την τηλεμεταφορά μεταφέρεται ένα κβαντικό bit (qubit) χρησιμοποιώντας δύο κλασσικά bit πληροφορίας. Η τηλεμεταφορά σχετίζεται άμεσα με το super dense coding, με την διαφορά ότι το super dense coding είναι μια διαδικασία που επιτρέπει σε κάποιον να στείλει δύο κλασικά bit σε άλλο μέρος χρησιμοποιώντας μόνο ένα qubit.

Θεωρούμε το εργαστήριο της Alice, το οποίο έχει χώρο καταστάσεων $\mathcal{H}_A$ και σύστημα μέτρησης $\{X_k\}_k$, με $\sum_k X_k^* X_k = I_{H_A}$. Θεωρούμε επίσης, το εργαστήριο του Bob, το οποίο έχει χώρο καταστάσεων $\mathcal{H}_B$ και σύστημα μέτρησης $\{Y_l\}_l$, με $\sum_k Y_l^* Y_l = I_{H_B}$. Από τα δύο αυτά εργαστήρια, προκύπτει το συνδεδεμένο εργαστήριο $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Έστω $\psi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ τέτοιο ώστε $\|\psi\| = 1$.

Έστω $p_A(k)$ η πιθανότητα η Alice να έχει το αποτέλεσμα k στο συνδεδεμένο εργαστήριο και $p_B(l)$ η αντίστοιχη πιθανότητα ο Bob να έχει το αποτέλεσμα l, τότε:

$$p_A(k) = \|(X_k \otimes I)\psi\|^2 \text{ και } p_B(l) = \|(I \otimes Y_l)\psi\|^2.$$

Αν το αποτέλεσμα της Alice είναι k, τότε η κατάσταση αλλάζει και γίνεται

$$\frac{(X_k \otimes I)\psi}{\|(X_k \otimes I)\psi\|}.$$

Ομοίως, αν το αποτέλεσμα του Bob είναι l, τότε η κατάσταση αλλάζει και γίνεται

$$\frac{(I \otimes Y_l)\psi}{\|(I \otimes Y_l)\psi\|}$$

Η απο κοινού πιθανότητα να πάρει ως αποτέλεσμα το k η Alice και ο Bob το l σύμβολίζεται ως $p_{A,B}(k,l)$ και δίνεται από τη σχέση

$$p_{A,B}(k,l) = \|(X_k \otimes Y_l)\psi\|^2$$

Επιπλέον, μπορούμε να ορίσουμε την πιθανότητα ο Bob να λάβει το αποτέλεσμα l, δεδομένου ότι η Alice έχει λάβει το αποτέλεσμα k. Η πιθανότητα αυτή ονομάζεται δεσμευμένη πιθανότητα και δίνεται από τη σχέση:

$$p(B = l|A = k) = \frac{\|(I \otimes Y_l)(X_k \otimes I)\psi\|^2}{\|(X_k \otimes I)\psi\|^2} = \frac{p\,(B = l, A = k)}{p\,(A = k)},$$

Σημείωση: Με τον συμβολισμό A=k εννοούμε ότι η Alice λαμβάνει το αποτέλεσμα k, ομοίως για τον συμβολισμό B=l.

Ορισμός 4.0.1. *Μία κατάσταση $\psi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ λέγεται διαχωρίσιμη (separable), αν $\exists\, \gamma \in \mathcal{H}_A$, $\exists\, \varphi \in \mathcal{H}_B$ τέτοια ώστε $\psi = \gamma \otimes \varphi$, δηλαδή αν είναι συνδιασμός καθαρών διαχωρίσιμων καταστάσεων.*

Ορισμός 4.0.2. *Μία κατάσταση $\psi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ λέγεται διεμπλεκόμενη (entangled), αν δεν είναι διαχωρίσιμη.*

Παρατήρηση 4.0.3. *Η ύπαρξη διεμπλεκόμενων καταστάσεων είναι εμφανής όταν μία κατάσταση αναλύεται με διανύσματα τα οποία δεν γράφονται σαν γινόμενο* *διανυσμάτων. Έστω το μοναδιαίο διάνυσμα $\psi \in \mathcal{H}$, το οποίο δεν είναι γινόμενο διανυσμάτων, τότε η κατάσταση $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, αποτελεί μια διεμπλεκόμενη κατάσταση.*

Παράδειγμα 4.0.4. *Έστω $H_1 = H_2 = \mathbb{C}^n$. Θεωρούμε την ορθοκανονική βάση $\{e_i\}_{i=1}^n$. Τότε αν*

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i,$$

η κατάσταση

$$\rho = |\chi\rangle\langle\chi|$$

είναι διεμπλεκόμεμη. Συγκεκριμένα, μια κατάσταση αυτής της μορφής καλείται μέγιστα διεμπλεκόμενη (maximally entangled).

Παρατήρηση 4.0.5. *Παρατηρούμε οτι, ένας nxn πίνακας με στοιχεία E_{ij} όπου $1 \leq i, j \leq n$, γράφεται ως $(E_{ij}) = \sum_{i,j}^{n} E_{ij} \otimes E_{ij}$. Καθώς, $\mathrm{E}_{ij} = e_i\, e_j^* = |i\rangle\langle j|$, προκύπτει το ακόλουθο,*

$$(E_{ij}) = \sum_{i,j}^{n} E_{ij} \otimes E_{ij} = \sum_{i,j}^{n} |i\rangle\langle j| \otimes |i\rangle\langle j| = \sum_{i,j=1}^{n} (|i\rangle \otimes |i\rangle)(\langle j| \otimes \langle j|).$$

Αυτός ο πίνακας, προσδιορίζει τις μέγιστα διεμπλεκόμενες καταστάσεις, γνωστές και ως καταστάσεις Bell.

Σε συνέχεια της παραπάνω συζήτησης, θα δούμε πως οι διαχωρίσιμες καταστάσεις συμπεριφέρονται σε συνδεδεμένο εργαστήριο. Έστω η διαχωρίσιμη κατάσταση ψ, της μορφής $\psi = \gamma \otimes \varphi$ με $||\gamma|| = ||\varphi|| = 1$. Τότε η πίθανότητα η Alice να λάβει το αποτέλεσμα k γίνεται:

$$p_A(k) = ||(X_k \otimes I)(\gamma \otimes \varphi)||^2 = ||X_k\, \gamma \otimes \varphi||^2 = ||X_k\, \gamma||^2\, ||\varphi||^2 = ||\mathrm{X}_k\, \gamma||^2$$

Επίσης, για την από κοινού πιθανότητα θα έχουμε

$$\begin{aligned} p\,(B = l, A = k) &= ||(X_k \otimes Y_l)(\gamma \otimes \varphi)||^2 \\ &= ||X_k\, \gamma \otimes Y_l\, \varphi||^2 \\ &= ||X_k\, \gamma||^2\, ||Y_l\, \varphi||^2 \\ &= p_A(k)\, p_B(l) \end{aligned}$$

Καθώς τα A=k, B=l είναι ανεξάρτητα,[1] για την δεσμευμένη πιθανότητα έχουμε:

[1] Τα ενδεχόμενα E_1, E_2 λέγονται ανεξάρτητα αν $Prob(E_1 \cap E_2) = Prob(E_1) \cdot Prob(E_2)$. Επιπλέον, αν $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ είναι ανεξάρτητα θα ισχύει $Prob(E_2|E_1) = Prob(E_2)$.

$$\begin{aligned} p(B=l|A=k) &= \frac{\|(X_k \otimes Y_l)(\gamma \otimes \varphi)\|^2}{\|(X_k \otimes I)(\gamma \otimes \varphi)\|^2} \\ &= \frac{\|X_k \gamma\|^2 \, \|Y_l \varphi\|^2}{\|X_k \gamma\|^2} \\ &= \|Y_l \varphi\|^2 \\ &= p(B=l) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, στην περίπτωση των διαχωρίσιμων καταστάσεων, οι κβαντικές πιθανότητες αντικατροπτρίζουν από τις κλασικές ανεξάρτητες πιθανότητες.

Ορισμός 4.0.6. *Έστω e_0, e_1 ορθοκανονική βάση του χώρου $\mathbb{C}^2$, με $e_0 = |0\rangle$ και $e_1 = |1\rangle$. Η κατάσταση $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ καλείται Einstein-Podolsky-Rosen (EPR).*

Παράδειγμα 4.0.7. Κβαντική τηλεμεταφορά
Θεωρούμε πάλι το εργαστήριο της Alice με χώρο καταστάσεων $\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^2$.
Έστω $E_{00}, E_{11} \in M_2$, τότε $E_{00}^* E_{00} + E_{11}^* E_{11} = E_{00}^2 + E_{11}^2 = I_{\mathcal{H}_A}$, συνεπώς αποτελεί σύστημα μέτρησης για τον $\mathcal{H}_A$. Υποθέτουμε ότι ο Bob έχει το ίδιο σύστημα μέτρησης, αλλά σε διαφορετικό εργαστήριο, το οποίο έχει χώρο καταστάσεων $\mathrm{H_B} = \mathrm{H_A} = \mathbb{C}^2$. Στο συνδεδεμένο εργαστήριο οι πιθανότητες είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned} p_A(0) = p_A(A=0) &= \|(E_{00} \otimes I)\psi\|^2 \\ &= \|(E_{00} \otimes I)(\frac{1}{\sqrt{2}})(e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1)\|^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\|e_0 \otimes e_0\|^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ομοίως, $p_A(1) = \frac{1}{2}$ και $p_B(0) = p_B(1) = \frac{1}{2}$. Αν η Alice παρατηρεί το αποτέλεσμα 0, τότε η κατάσταση μετατρέπεται στην κατάσταση

$$\frac{(E_{00} \otimes I)(\frac{1}{\sqrt{2}})(e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1)}{\|(E_{00} \otimes I)(\frac{1}{\sqrt{2}})(e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1)\|} = e_0 \otimes e_0$$

Τώρα υποθέτουμε ότι εκτελεί μέτρηση ο Bob, ο οποίος έχει τελεστές μέτρησης $I \otimes E_{00}$ και $I \otimes E_{11}$. Γνωρίζουμε ότι $(I \otimes E_{00})(e_0 \otimes e_0) = 0$, οπότε ο Bob δεν μπορεί να μετράει το αποτέλεσμα 1. Άρα αν η Alice μετράει το αποτέλεσμα 0 τότε και ο Bob μετράει το αποτέλεσμα 0 με πιθανότητα 1. Το ίδιο ισχύει και αν η Alice μετράει το αποτέλεσμα 1. Το γεγονός αυτό μας υποδεικνύει ότι τα διεμπλεκόμενα συστήματα σε κάποιο βαθμό συμπεριφέρονται όπως τα εξαρτημένα γεγονότα. Για *να το επαληθεύσουμε θα υπολογίσουμε τις τις επόμενες δεσμευμένες πιθανότητες.*

$$p(B=0|A=0) = ||(I \otimes E_{00})(e_0 \otimes e_0)||^2 = ||e_0 \otimes e_0||^2 = 1 \neq p_B(0) = \frac{1}{2}$$

$$p(B=1||A=0) = ||(I \otimes E_{11})(e_0 \otimes e_0)||^2 = 0 \neq p_B(1) = \frac{1}{2}.$$

Είναι φανερό ότι η πιθανότητα ο Bob να λάβει ένα αποτέλεσμα συνδέεται άμεσα με το αποτέλεσμα που θα λάβει αρχικά η Alice. Αυτή είναι και η βασική ιδέα της κβαντικής τηλεμεταφοράς ή όπως την χαρακτήρισε ο Albert Einstein, του "spooky action at a distance".

Παράδειγμα 4.0.8. Super Dense Coding
Υποθέτουμε ότι η Alice έχει καταστάσεις στο χώρο $\mathbb{C}^2$. Θεωρούμε την EPR κατάσταση $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1)$. Θεωρούμε επιπλέον, τους τελεστές

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Η Alice κάνει τις μετρήσεις με τους τελεστές και προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα:

$$I\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1)$$

$$X\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_0 + e_0 \otimes e_1)$$

$$Y\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_0)$$

$$Z\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 \otimes e_0 - e_1 \otimes e_1)$$

Τέσσερα ορθοκανονικά αποτελέσματα και ως εκ τούτου πλήρως διακριτά.

Υποθέτουμε ότι η Alice και ο Bob ξεκινούν με την EPR κατάσταση $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1)$. Η Alice εκτελεί μια απο τις παραπάνω μετρήσεις στην κατάσταση του φωτονίου, στο εργαστήριο της και στέλνει το φωτόνιο στον Bob μέσω ενός κβαντικού καναλιού. Ο Bob λοιπόν, πλέον έχει πρόσβαση και στα δύο φωτόνια. Για την ακρίβεια έχει πρόσβαση σε δύο καταστάσεις, την EPR που είχε αρχικά και την κατάσταση που έλαβε απο την Alice. Καθώς τα παραπάνω τέσσερα αποτελέσματα των μετρήσεων είναι πλήρως διακριτά υπάρχει ένα σύστημα μέτρησης που λέει στον Bob ποιά κατάσταση έλαβε, δηλαδή ο Bob γνωρίζει ακριβώς ποία μέτρησει πραγματοποίησε η Alice. Παρατηρούμε λοιπόν, ότι η Alice χρειάστηκε να στείλει μόνο ένα φωτόνιο για να μεταδώσει τέσσερα "κομμάτια" πληροφορίας.

Ομοίως, έχουντας τον χώρο $\mathbb{C}^d$ *με βάση* $e_0, \dots, e_{d-1}$ *θεωρούμε την κατάσταση EPR,* $\psi = \frac{1}{\sqrt{d}}(e_0 \otimes e_0 + \cdots + e_{d-1} \otimes e_{d-1})$. *Τότε υπάρχουν* d^2 *ορθομοναδιαίοι,* $U_i \in \mathbb{C}^d$, *τέτοιοι ώστε* $(U_i \otimes I)\,\psi \perp (U_j \otimes I)\,\psi, \quad \forall i \neq j$. *Αν λοιπόν ο Bob έχει αρχικά τα μισά φωτόνια, η Alice θα μπορεί να μεταδόσει* d^2 *"κομμάτια" πληροφορίας. Αυτό το παράδειγμα μας δείχνει ότι η διεμπλοκή μπορεί να ενισχύσει την χωρητικότητα ενός κβαντικού καναλιού.*

Βιβλιογραφία

[1] Samuel J. Harris and Satish K. Pandey. *Entanglement and Non-Locality pmath 990/qic 890*. July 11, 2016

[2] Δημήτρης Σουρλάς. *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία* . Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών 2018

[3] Δημήτριος Α. Βάρσος, Δημήτριος Ι. Δεριζιώτης, Ιωάννης Π. Εμμανουήλ, Μιχαήλ Π. Μαλιάκας, Αντώνιος Δ. Μελάς, Ολυμπία Π. Ταλέλλη. *Μια Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*. Εκδόσεις σοφία 2012

[4] Ιωάννης Καραφυλλίδης. Καθηγητής Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών. Δ.Π.Θ.. *Κβαντική Υπολογιστική*. Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα

[5] Χάρης Αναστόπουλος. Τμήμα Φυσικής Πανεπιστήμιο Πατρών. *Κβαντική Θεωρία*. upatras eclass

[6] Science Wiki. Κβαντική Μέτρηση, https://science.fandom.com/el/wiki/%CE%9A%CE%B2%CE%B1%CE%BD%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AE_%CE%9C%CE%AD%CF%84%CF%81%CE%B7%CF%83%CE%B7

[7] Qiskit. The Density Matrix & Mixed States. https://qiskit.org/textbook/ch-quantum-hardware/density-matrix.html

[8] Αθανασίου Δημήτριος. Διπλωματική Εργασία. *Το Πρόβλημα της Μέτρησης στην Κβαντική Μηχανική: Ερμηνευτικές Προσεγγίσεις και Προοπτικές*. Αθήνα 2017

[9] Michael A. Nielsen & Isaac L. Chuang *Quantum Computation and Quantum Information. 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press 2010

[10] Quantiki. Channel (CP map) https://www.quantiki.org/wiki/channel-cp-map

[11] Αριστείδης Κατάβολος. Τμήμα Μαθηματικών Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.
Θεωρία Τελεστών, Ενότητα: Χώροι με νόρμα - Χώροι Hilbert. opencourses

[12] Αριστείδης Κατάβολος. Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Αθηνών. *Θεωρία Τελεστών, Σημειώσεις*. 12 Ιανουαρίου 2019

[13] Ανδρέας Αρβανιτογεώργος. Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Πατρών. *Γραμμική Άλγεβρα II, Ενότητα: Χώροι με εσωτερικό γινόμενο*. upatras eclass

[14] Ανδρέας Αρβανιτογεώργος. Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Πατρών. *Γραμμική Άλγεβρα II, Ενότητα: Διγραμμικές και Τετραγωνικές μορφές*. upatras eclass

[15] Wikipedia. Κβαντική διεμπλοκή
https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9A%CE%B2%CE%B1%CE%BD%CF%84
%CE%B9%CE%BA%CE%AE_%CE%B4%CE%B9%CE%B5%CE%BC%CF%80%
CE%BB%CE%BF%CE%BA%CE%AE

[16] Qiskit. Superdense Coding
https://qiskit.org/textbook/ch-algorithms/superdense-coding.html

[17] e-φυσική. Η μοναδική ήττα του Αϊνστάιν
https://www.ergo1.gr/articles/ainstain-defeat/

[18] Wikipedia. Κβαντική μηχανική
https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9A%CE%B2%CE%B1%CE%BD%CF
%84%CE%B9%CE%BA%CE%AE_%CE%BC%CE%B7%CF%87%CE%B1
%CE%BD%CE%B9%CE%BA%CE%AE

[19] Physics4u. Κβαντική Τηλεμεταφορά Το πρώτο πείραμα τηλεμεταφοράς του 1993
http://www.physics4u.gr/articles/teleport2.html

[20] CNN Greece. Νέο παγκόσμιο ρεκόρ: Κβαντική τηλεμεταφορά σε απόσταση 1.200 χιλιομέτρων
https://www.cnn.gr/tech/story/85094/neo-pagkosmio-rekor-kvantiki-tilemetafora-se-apostasi-1-200-xiliometron