ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ-ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΑ-ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Σύγχρονες μέθοδοι μέτρησης κινδύνου

Contemporary risk measuring methodology

Γεώργιος Κολοβός

Επιβλέπων Καθηγητής: Χρήστος Κουντζάκης

Σάμος, Ιανουάριος 2022

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Ένα μέτρο κινδύνου ορίζεται ως μια συνάρτηση που αντιστοιχίζει τον κίνδυνο σε έναν πραγματικό αριθμό. Αυτός ο αριθμός μπορεί να αντιπροσωπεύει πολλές σημασίες. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με την τιμολόγηση του κινδύνου που σχετίζεται με την αναλογιστική και ασφαλιστική επιστήμη και με την έννοια των κεφαλαιακών απαιτήσεων που αναλύεται από τα χρηματοοικονομικά μαθηματικά. Επιπρόσθετα, ο κίνδυνος είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία ορίζεται στον μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathscr{F})$, όπου Ω είναι ο δειγματικός χώρος και $\mathscr{F}$ είναι μια (σ-)άλγεβρα. Εάν ονομάσουμε με X την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον κίνδυνο, τότε η X είναι η απεικόνιση $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ και ισχύει ότι $X^{-1}((-\infty, x\,]) \in \mathscr{F}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ο κίνδυνος αντικατοπτρίζει την τελική απώλεια από την κατάληξη μιας κατάσταση που πραγματοποιήθηκε. Όταν αναφερόμαστε σε ασφαλιστικές ζημιές η τυχαία μεταβλητή X είναι θετικός αριθμός, ενώ στην περίπτωση που η τ.μ. X παίρνει αρνητικές και θετικές τιμές, η μεταβλητή X εκφράζει την απώλεια ή το κέρδος μιας επένδυσης.

Στην αναλογιστική και ασφαλιστική επιστήμη ο υπολογισμός του κινδύνου είναι βασικός παράγοντας για την αποτίμηση ενός ασφαλίστρου. Οι Bühlmann (1970), Gerber (1980) και Goovaerts, De Vylder και Haezendonck (1984) καθιέρωσαν το μαθηματικό υπόβαθρο για τον υπολογισμό ασφαλίστρου, ενδεικτικά πρότειναν την αρχή του βασικού ασφαλίστρου (net premium principle), την αρχή της διακύμανσης (variance principle), την αρχή της διασποράς (standard deviation principle) και την αρχή της ωφελιμότητας (principle of zero utility). Κάθε αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου είναι μια συνάρτηση που αντιστοιχεί μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής τυχαίων μεταβλητών, που εκφράζουν ασφαλιστικές απώλειες, σε έναν πραγματικό αριθμό, ο οποίος είναι το ποσό του ασφαλίστρου. Οι αρχές του υπολογισμού ασφαλίστρου έχουν επιθυμητές ιδιότητες, όπως ενδεικτικά σημειώνει ο Geber (1974), ο οποίος αναφέρει την προσθετικότητα (additivity), και τους Deprez και Gerber (1985), οι οποίοι όρισαν την ιδιότητα της κυρτότητας (convexity). Οι αναφερόμενες αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου και οι ιδιότητες τους δεν προϋποθέτουν ανταγωνισμό στην αγορά, όπου η τιμή του ασφαλίστρου είναι καθορισμένη από την αγορά και κάθε ασφαλιστική εταιρεία δεν έχει την δυνατότητα να αλλάξει την τιμή του ασφάλιστρου . Γι αυτό και οι Wang, Young και Panjer (1997) εισήγαγαν τέσσερα αξιώματα που περιγράφουν την συμπεριφορά των ασφαλιστικών τιμών στην περίπτωση του πλήρους ανταγωνισμού στον ασφαλιστικό τομέα.

Τα μέτρα κινδύνου εκτός από τις εφαρμογές τους στον ασφαλιστικό κλάδο, είναι ευρέως γνωστά και στον χρηματοπιστωτικό τομέα. Συγκεκριμένα, το μέτρο κινδύνου υπολογίζει το κεφάλαιο που πρέπει να έχει διαθέσιμο ένας χρηματοοικονομικός οργανισμός η ένας επενδυτής, ώστε να καταστεί εξυπηρετούμενη οποιαδήποτε ενδεχόμενη απώλεια από μια επένδυση. Κάθε επενδυτική κίνηση ενέχει την πιθανότητα κέρδους ή τον κίνδυνο να πραγματοποιηθούν απώλειες. Γι αυτό η τυχαία μεταβλητή είναι θετική στην περίπτωση κέρδους και αρνητική στην περίπτωση απώλειας. Επομένως, οι συναρτήσεις που αντιστοιχίζουν την τυχαία μεταβλητή με μία τιμή που εκφράζει την κεφαλαιακή απαίτηση, ονομάζονται μέτρα κινδύνου. Τα συγκεκριμένα μέτρα εάν ικανοποιούν τις ιδιότητες της μονοτονίας (monotonicity), του αναλλοίωτου ως προς τις μεταφορές (Translation invariance) και της υπο-αθροιστικότητας (sub-additivity), τότε ονομάζονται συνεπή μέτρα (coherent) σύμφωνα με τους Artzner et al. (1997). Ενώ, σύμφωνα με τους Föllmer και Schied (2002), εάν ικανοποιούν τις ιδιότητες της μονοτονίας (monotonicity), του αναλλοίωτου ως προς τις μεταφορές (translation invariance) και της κυρτότητας (convexity), τότε ονομάζονται κυρτά (convex). Επίσης, ο Kusuoka (2001) όρισε τα αναλλοίωτα ως προς τις κατανομές (law invariant) μέτρα κινδύνου, των οποίων ο υπολογισμός στηρίζεται μόνο στην κατανομή της τυχαίας μεταβλητής.

Τα δύο πιο σημαντικά μέτρα κινδύνου που χρησιμοποιούνται στην πράξη είναι η αξία σε κίνδυνο (Value at risk) και το αναμενόμενο έλλειμμα (Expected shortfall). Συγκεκριμένα, η αξία σε κίνδυνο (VaR) είναι η τιμή του ποσοστημορίου για επίπεδο $\alpha \in (0,1]$ μιας κατανομής απώλειας, ενώ το αναμενόμενο έλλειμμα (ES) είναι ο μέσος όρος της αξίας σε κίνδυνο για επίπεδα μικρότερα από ένα επίπεδο $\alpha \in (0,1]$. Από την ερμηνεία των δύο μέτρων είναι φανερό ότι $ES_{1-a} > VaR_{1-a}$ για κάθε $\alpha \in (0,1]$. Ωστόσο, εάν η κατανομή δεν έχει βαριά ουρά τότε μπορεί να ισχύει ότι $ES_{1-a} \approx VaR_{1-a}$ Ακόμα, η αξία σε κίνδυνο χρονικά παρουσιάστηκε το 1994 και είναι η απεικόνιση $VaR_{1-a}: L^0 \longrightarrow \mathbb{R}$, ενώ από την άλλη το αναμενόμενο έλλειμμα ορίστηκε από τους Acerbi και Tasche (2001), και είναι η απεικόνιση $ES_{1-a}: L^1 \longrightarrow \mathbb{R}$. Τέλος, το αναμενόμενο έλλειμμα θεωρείται η πιο γνωστή εναλλακτική της αξίας σε κίνδυνο, διότι είναι συνεπές και κυρτό μέτρο κινδύνου, σε αντίθεση με την αξία σε κίνδυνο η οποία αποτυγχάνει να ικανοποιήσει αυτές τις ιδιότητες.

Στην παρούσα εργασία, αρχικά, θα αναφερθούμε στους τρόπους υπολογισμού ενός ασφαλίστρου μαζί με ενδεικτικές ιδιότητες που ικανοποιούν. Αυτή η ανάλυση θα βοηθήσει ώστε να προχωρήσουμε στον ορισμό των συναρτησιακών κινδύνων, τα οποία σχετίζονται με την αποτίμηση ενός ασφαλίστρου και με την ιδιότητα των αναλλοίωτων ως προς τις κατανομές (law invariant). Έπειτα, θα αναλύσουμε δυο γνωστά συναρτησιακά κινδύνου, την εκθετική αρχή ασφαλίστρου και την αξία σε κίνδυνο (VaR). Για το πρώτο θα αποδείξουμε κάποιες καλές ιδιότητες που ικανοποιεί, καθώς και ότι μπορεί να αναπαρασταθεί με την μορφή entropic value at risk (EVaR), ενώ για την αξία σε κίνδυνο θα δοθεί ο ορισμός της και θα λυθούν ασκήσεις με διακριτές και συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και προβλήματα που αφορούν διαχείριση χαρτοφυλακίου. Ακόμα, θα παρουσιάσουμε τις διαφορές μεταξύ των δύο συναρτησιακών κινδύνων, με βασικό άξονα τις κατανομές με (βαριές) ουρές. Αφού γίνει η ανάλυση των μέτρων που είναι αναλλοίωτα ως προς τις κατανομές, θα προχωρήσουμε στην ανάλυση των συνεπών και κυρτών μέτρων κινδύνων. Σε αυτές τις ενότητες θα παρουσιάσουμε τις ιδιότητες και τα αποδεχτά σύνολα των δυο αυτών μέτρων κινδύνου. Εν συνεχεία, θα γίνει αναφορά στις διαφορές μεταξύ των συναρτησιακών κινδύνων και στα μέτρα κινδύνων και θα αποδειχτεί ότι κάθε αναλλοίωτο ως προς τις κατανομές συνεπές μέτρο κινδύνου είναι κυρτός συνδυασμός αναμενόμενου ελλείμματος (ES). Τέλος, θα ορίσουμε το αναμενόμενο έλλειμμα (Expected shortfall) και θα παρουσιάσουμε τρόπους υπολογισμούς του, που σχετίζονται με την παραμετρική ανάλυση αλλά και την μη παραμετρική ανάλυση.

1.Συναρτησιακά κινδύνου

1.1 Αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου

Σε αυτήν την ενότητα θα αναφερθούμε στις αρχές αποτίμησης ενός ασφαλίστρου, οι οποίες βασίζονται αποκλειστικά σε κατανομές τυχαίων μεταβλητών X που εκφράζουν τον κίνδυνο. Συνεκδοχικά αυτό σημαίνει ότι αποτιμήσεις ενός ασφαλίστρου δεν καθορίζονται από την ζήτηση για την ασφάλεια κάποιας ζημιάς, αλλά ούτε και με γνώμονα κάποιας μορφής κοστολόγισης.

Οι τυχαίες μεταβλητές X, που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό ασφαλίστρων, αποτυπώνουν το μέγεθος απώλειας και η κατανομή τους είναι γνωστή. Επίσης, η θετική τιμή της τ.μ. X δηλώνει την απώλεια, ενώ η αρνητική τιμή της τ.μ. X σημαίνει κέρδος. Για παράδειγμα, εάν υποθέσουμε ότι ένα άτομο θέλει να ασφαλίσει το όχημα του για την περίπτωση ενδεχόμενης ζημιάς, τότε η τυχαία μεταβλητή X εκφράζει την ζημιά που μπορεί να πραγματοποιηθεί και η οποία ακολουθεί κάποια κατανομή. Δηλαδή, σε κάθε τιμή της τ.μ. X αντιστοιχεί και μια πιθανότητα πραγματοποίησης της συγκεκριμένης ζημιάς.

Ας υποθέσουμε ότι η τ.μ. X έχει χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ και συνάρτηση κατανομής F_X, και ορίζουμε με $\pi(X)$ το ασφάλιστρο που χρεώνει η ασφαλιστική εταιρεία ώστε να καλυφθεί η ενδεχόμενη ζημιά X. Επομένως, η αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου είναι μια συνάρτηση π που αντιστοιχεί τις τ.μ. X στο σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών (είναι πιθανό το $\pi(X)$ να παίρνει και άπειρες τιμές).

Υπάρχουν αρκετοί τρόποι υπολογισμού ασφαλίστρων, παραθέτουμε τους πέντε πιο συνηθισμένους εξ αυτών:

1. Το βασικό ασφάλιστρο (net premium)

$$\pi(X) = E[X]$$

Το βασικό ασφάλιστρο (net premium) ισούται με την αναμενόμενη τιμή της τ.μ. X που εκφράζει το κίνδυνο. Εντούτοις, από την πλευρά του ασφαλιστή, δεν είναι ενδεδειγμένος αυτός ο τρόπος υπολογισμού ασφαλίστρου. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως το συγκεκριμένο ασφάλιστρο καλύπτει μόνο την αναμενόμενη ζημία και δεν εμπεριέχει επιπλέον χρέωση για την διαχείριση του κίνδυνου.

2. Η αρχή της αναμενόμενης τιμής (expected value principle)

$$\pi(X) = (1 + \alpha)\mathrm{E}[\mathrm{X}]$$

Στην αρχή της αναμενόμενης τιμής (expected value principle) ο συντελεστής α είναι θετικός αριθμός και το γινόμενο $\alpha\mathrm{E}[\mathrm{X}]$ εκφράζει την επιπλέον επιβάρυνση για τον κίνδυνο που έχει αναλάβει η ασφαλιστική εταιρεία. Παρ΄ όλα αυτά, το βασικό μειονέκτημα σε αυτήν την μέθοδο είναι ότι ο υπολογισμός του ασφαλίστρου δεν συνυπολογίζει τις αποκλίσεις που έχει ο κάθε κίνδυνος. Επι παραδείγματι, μπορεί δυο κίνδυνοι να έχουν την ίδια μέση τιμή με διαφορετικές διακυμάνσεις, ωστόσο η τιμή του ασφαλίστρου παραμένει η ίδια, κάτι που δεν είναι επιθυμητό για την ασφαλιστική εταιρεία.

3. Η αρχή της διακύμανσης (variance principle)

$$\pi(X) = E[X] + \alpha VAR(X)$$

Η αρχή της διακύμανσης (variance principle) συμπεριλαμβάνει την αναμενόμενη τιμή του κινδύνου μαζί και την διακύμανσή πολλαπλασιασμένη με τον θετικό συντελεστή α, ο οποίος εκφράζει την επιπλέον χρέωση στο ασφάλιστρο.

4. Η αρχή της τυπικής απόκλισης (standard deviation principle)

$$\pi(X) = E[X] + \alpha SD(X)$$

Η αρχή της τυπικής απόκλισης (standard deviation principle) ισούται με το άθροισμα της μέσης τιμής του κινδύνου με το γινόμενο της τυπικής απόκλισης του επί έναν θετικό αριθμό α. Η αναφερόμενη αρχη ασφαλίστρου έχει παρόμοια ερμηνεία με την αρχή της διακύμανσης. Ωστόσο, διαφέρουν σε κάποιες ιδιότητες ασφαλίστρου, όπως για παράδειγμα η αρχή της τυπικής απόκλισης δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της προσθετικότητας (Additivity).

5. Η εκθετική αρχή (exponential principle)

$$\pi(X) = \frac{1}{\alpha} log\, E[e^{\alpha X}]$$

Στην εκθετική αρχή (exponential principle) το $E[e^{aX}]$ είναι η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής X, με α να είναι ενας θετικός αριθμός. Επίσης, εύκολα αποδεικνύεται πως εάν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την Γάμμα κατανομή, τότε το ασφάλιστρο που υπολογίζεται με την εκθετική αρχή ισούται με το ασφάλιστρο της αρχής διακύμανσης.

Παράδειγμα 1.1.1:Έστω η τ.μ. ακολουθεί Γάμμα κατανομή με παραμέτρους η και θ, τότε η μεση τιμή είναι το γινόμενο $\eta\theta$ και η διακύμανση ισούται με $\eta\theta^2$. Συμβολίζοντας με α_{VAR} να είναι η παράμετρος του ρίσκου, η αρχή της διακύμανσης δίνεται από τον τύπο $\pi_{VAR}(X) = \eta\theta + \alpha_{VAR}(\eta\theta^2)$. Επίσης, η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής είναι η $M(t) = E[e^{tX}] = (1 - t\theta)^{-1}$, οπότε με παράμετρο κινδύνου α_{Exp} η εκθετική αρχή μπορεί να γραφτεί ως

$$\pi_{Exp}(X) = \frac{-\eta}{\alpha_{Exp}} log(1 - \alpha_{Exp}\theta)$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε σειρά Taylor για τον υπολογισμό του λογαρίθμου ($log(1 - \chi) = (-\chi - \frac{\chi^2}{2} - \frac{\chi^3}{3} - \cdots)$) η $\pi_{Exp}(X)$ ισούται με

$$\pi_{Exp}(X) = \frac{-\eta}{\alpha_{Exp}}(-\alpha_{Exp}\theta - \frac{\left(\alpha_{Exp}\theta\right)^2}{2} - \cdots)$$
$$\approx \eta\theta + \frac{\alpha_{Exp}}{2}(\eta\theta^2)$$

Αν θέσουμε α_{Exp}= 2 α_{VAR}, τότε:

$$\pi_{Exp}(X) = \pi_{VAR}(X) = \eta\theta + \alpha_{VAR}(\eta\theta^2)$$

Μια αρχή ασφαλίστρου είναι παρόμοια με ένα μέτρο κινδύνου. Μαθηματικά και τα δύο ορίζονται ως μια απεικόνιση η οποία αντιστοιχεί τυχαίες μεταβλητές, που εκφράζουν τον κίνδυνο, σε μια αριθμητική τιμή. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι μια αρχή ασφαλίστρου είναι ένα χρήσιμο «εργαλείο» για τον ασφαλιστή, που τον βοηθάει να υπολογίζει το ποσό που θα χρεώσει ώστε να αναλάβει την διαχείριση του κινδύνου X. Στον αντίποδα, ένα μέτρο κινδύνου ποσοτικοποιεί το μέγεθος της αβεβαιότητας ή της επικινδυνότητας, ώστε ο επενδυτής να γνωρίζει την κατάλληλη ποσότητα της κεφαλαιακής επάρκειας για να παραμένει αξιόχρεος.

1.2 Επιθυμητές Ιδιότητες υπολογισμού ασφαλίστρου

Υπάρχουν πολλές επιθυμητές ιδιότητες για τις αρχές αποτίμησης ασφαλίστρου, για παράδειγμα στο άρθρο της Young (2014) αναφέρονται δεκαπέντε. Στην ακόλουθη λίστα δεν εξαντλούνται όλες οι ιδιότητες, ωστόσο παρατίθενται οι πέντε πιο βασικές ιδιότητες για τις αρχές ασφαλίστρου.

1. Μη αρνητικό περιθώριο ασφαλείας (non-negative loading)

$$\pi(X) \geq E[X]$$

Το ασφάλιστρο δεν πρέπει να είναι μικρότερο από το βασικό ασφάλιστρο $E[X]$. Δηλαδή, θα πρέπει να προστίθεται και ένα περιθώριο κέδρους.

2. Αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές (translation invariance)

$$\pi(X + c) = \pi(X) + c$$

Εάν ισχύει ότι $Y = X + c$, όπου $c > 0$, τότε θα έχουμε $\pi(Y) = \pi(X) + c$. Συνεπώς, εάν η κατανομή του Y είναι η κατανομή του X μετατοπισμένη κατά c μονάδες, τότε το ασφάλιστρο για τον κίνδυνο Y θα πρέπει να ισούται με το ασφάλιστρο του X αυξημένο κατά c.

3. Προσθετικότητα (additivity)

$$\pi(X+Y) \;=\; \pi(X)+\pi(Y)$$

Εάν τα X και Y είναι ανεξάρτητοι κίνδυνοι, τότε το ασφάλιστρο που συνδυάζει τους δυο αυτούς κινδύνους $\pi(X+Y)$, θα πρέπει να ισούται με το άθροισμα των δυο ασφαλίστρων $\pi(X)$ και $\pi(Y)$. Αν ισχύει αυτή η ιδιότητα, τότε ο συνδυασμός ή ο διαχωρισμός του κινδύνου, δεν προσφέρει κάποιο όφελος στον ασφαλιστή, αλλά ούτε και στον ασφαλιζόμενο, καθώς το ασφάλιστρο δεν αλλάζει σε καμιά από τις δυο περιπτώσεις.

4. Επαναληψιμότητα (iterativity)

$$\pi(X) = \pi(\pi(X/Y))$$

Το ασφάλιστρο $\pi(X)$ μπορεί να υπολογιστεί σε δυο στάδια. Αρχικά, στην συνάρτηση $\pi(\cdot)$ θεωρώ τυχαία μεταβλητή την δεσμευμένη κατανομή του X δοθέντος του $Y=y$. Επομένως η $\pi(X/Y)$ είναι τυχαία μεταβλητή, διότι παίρνει διαφορετικές τιμές ανάλογα με την τιμή του y. Τελικά, αν πάρω την συνάρτηση $\pi(\cdot)$ και θεωρήσω τυχαία μεταβλητή την $\pi(X/Y)$, τότε το αποτέλεσμα θα ισούται με την $\pi(X)$.

Παράδειγμα 1.2.1: Η εκθετική αρχή ικανοποιεί τις ιδιότητες 1-4.

Η πρώτη ιδιότητα αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Jensen για τις κοίλες συναρτήσεις. Καθώς η συνάρτηση log είναι κοίλη θα ισχύει η εξής ανισότητα

$$logE[e^{aX}] \geq E[log\, e^{aX}] = \alpha E[X] \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{a} logE[e^{aX}] \geq E[X] \;\Rightarrow$$

$$\pi(X) \;\geq\; E[X]$$

Για την ιδιότητα του αναλλοίωτου ως προς τις μεταφορές έπεται ότι:

$\pi(X+c) = \frac{1}{a} logE[e^{aX+\alpha c}] = \frac{1}{a} log\, e^{\alpha c} E[e^{aX}] = \frac{1}{a} log\, e^{\alpha c} + \frac{1}{a} log\, E[e^{aX}] =$ $c + \pi(X)$

Για την προσθετικότητα, εάν οι τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, τότε:
$\pi(X+Y) = \frac{1}{a} logE[e^{aX+\alpha Y}] = \frac{1}{a} log\{E[e^{\alpha Y}]E[e^{aX}]\} = \frac{1}{a} logE[e^{aY}] +$ $\frac{1}{a} logE[e^{aX}] = \pi(X) + \pi(Y)$

Τέλος, για να δείξουμε ότι $\pi(X) = \pi(\pi(X/Y))$, θα θέσουμε τυχαία μεταβλητή Z, όπου:

$Z := \pi(X/Y) = \frac{1}{a} logE[e^{aX}/Y]$

Οπότε το ασφάλιστρο για την τυχαία μεταβλητή Z είναι:

$$\pi(Z) = \frac{1}{a} log\, E[e^{aZ}] = \frac{1}{a} logE[E[e^{aX}/Y]] = \frac{1}{a} logE[e^{aX}] = \pi(X)$$

1.3 Ορισμός συναρτησιακού κινδύνου

Ορισμός 1.3.1 (Συναρτησιακό κινδύνου): Συναρτησιακό κινδύνου (risk functional) είναι κάθε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο των κατανομών $\mathcal{D}$ και πεδίο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Οι κατανομές του συνόλου $\mathcal{D}$ είναι οι κατανομές

τυχαίων μεταβλητών των οποίων οι ενδεχόμενες τιμές -το στήριγμά τους, είναι κάποιο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών που έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με αυτό, π.χ. ένα διάστημα. Κάθε αναλλοίωτο ως προς τις κατανομές (law invariant) μέτρο κινδύνου είναι συναρτησιακό κινδύνου.
Παρατηρούμε ότι οι αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου (premium calculation principles) είναι επίσης συναρτησιακά κινδύνου.
Η έννοια του συναρτησιακά κινδύνου είναι, επομένως, μια γενίκευση της έννοιας του μέτρου κινδύνου, που συμπεριλαμβάνει την αξία σε κίνδυνο (Value -at-Risk) και το αναμενόμενο έλλειμμα (Expected Shortfall).

Ορισμός 1.3.2: Ένα συναρτησιακό κινδύνου $\rho: L^{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται αναλλοίωτο ως προς τις κατανομές (law invariant), εάν οι τυχαίες μεταβλητές $X, Y \in L^{\infty}$ έχουν την ίδια κατανομή ($F_{\chi} = F_Y$), τότε και το $\rho(X)$ θα ισούται με το $\rho(Y)$, ισχύει και το αντίστροφο.

Παράδειγμα 1.3.1 (αναλλοίωτο ως προς τις κατανομές): Ένα stop loss order ασφάλιστρο είναι αναλλοίωτο ως προς τις κατανομές (law invariant).

Απόδειξη

Αρχικά πριν την απόδειξη, θα γίνει μια αναφορά για το stop loss order ασφάλιστρο ως προς την θεωρία του, αλλά και ως προς την εφαρμογή του. Το αναφερόμενο μέτρο χρησιμοποιείται αμιγώς στην αντασφάλιση.

Κάθε ασφαλιστική εταιρεία πουλάει ασφάλειες σε ιδιώτες ή οικονομικούς οργανισμούς, ώστε να έχουν οικονομική κάλυψη σε έναν πιθανό κίνδυνο X. Το ποσό του ασφαλίστρου καθορίζεται από την ίδια την ασφαλιστική εταιρεία. Ενδεδειγμένοι τρόποι για την χρέωση και την τιμολόγηση των ασφαλίστρων, επισημάνθηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Ωστόσο, υπάρχει η πιθανότητα να συμβεί μια απρόσμενη ζημιά, την οποία η ασφαλιστική εταιρεία δεν είχε υπολογίσει. Γι’ αυτό και προσφεύγει σε έναν ασφαλιστικό οργανισμό, για να έχει κάλυψη σε ακραίες περιπτώσεις κινδύνου.

Έστω K το ανώτατο όριο κινδύνου που η ασφαλιστική εταιρεία έχει υπολογίσει να καλύψει. Επομένως, για οποιονδήποτε κίνδυνος που έχει μεγαλύτερη τιμή από το K, θα καλυφθεί από μια αντασφαλιστική εταιρεία, με αντίτιμο την χρέωση ενός ασφαλίστρου. Μαθηματικά έχει την παρακάτω μορφή:

Ο ασφαλιστής πληρώνει τον κίνδυνο κάτω από την τιμή του K:

$$\text{Πληρωμές του ασφαλιστή} = \begin{cases} X, & εαν\ X \leq K \\ K, & εαν X > K \end{cases}$$

Ο αντασφαλιστής αρχίζει και πληρώνει όταν ο κίνδυνος έχει ξεπεράσει το όριο K:

$$\text{Πληρωμές του αντασφαλιστή} = \begin{cases} 0, & εαν\ X \leq K \\ X - K, & εαν X > K \end{cases}$$

Επομένως, ένας ενδεδειγμένος τρόπος υπολογισμού ασφάλιστρου που χρεώνει η αντασφαλιστική εταιρεία είναι το Stop-loss order, και δηλώνει την προσδοκώμενη απόδοση της διαφοράς $(X - K)_+$:

$$E[(X-K)_+] = \int_K^{+\infty} (1 - F_X(x))dx$$

όπου F_X η αθροιστική συνάρτηση της τ.μ. X

Για την απόδειξη ότι το πιο πάνω μέτρο είναι αναλλοίωτο ως προς της κατανομές, θα υποθέσουμε ότι δυο μεταβλητές X,Y ακολουθούν την ίδια κατανομή, δηλαδή:

$$F_X = F_Y \quad (1.1)$$

Εάν με $\rho(X)$ δηλώσω το ασφάλιστρο Stop-loss order, όπου X είναι η τυχαία μεταβλητή του κινδύνου, τότε θα ισχύει:

$\rho(X) = \int_K^{+\infty} (1 - F_X(x))dx$, από (1.1) σχέση συνεπάγεται ότι:

$$\rho(X) = \int_K^{+\infty} (1 - F_Y(x))dx = \rho(Y).$$

Αφού ξεκινήσαμε με την υπόθεση ότι οι τυχαίες μεταβλητές έχουν την ίδια κατανομή και καταλήξαμε μέσω της απόδειξης ότι έχουν και ίδια μέτρα, οπότε το μέτρο Stop-loss order ικανοποιεί τον ορισμό 1.3.2 και είναι αναλλοίωτο ως προς τις κατανομές.

1.4 «Στρεβλά» μέτρα κινδύνων (Distortion risk measures)

Τα μέτρα που είναι αναλλοίωτα ως προς τις κατανομές (law invariant) μπορούν να αναπαρασταθούν με την μορφή «στρεβλών» μέτρων κινδύνων (distortion risk measures). Τα συγκεκριμένα μέτρα προσαρμόζουν το μέτρο πιθανότητας ώστε να δοθεί περισσότερο βάρος σε υψηλά σε κίνδυνο συμβάντα. Από αυτά τα μέτρα, τα πιο γνωστά είναι αξία σε κίνδυνο (VaR) και το αναμενόμενο έλλειμμα (Expected shortfall).

Ορισμός 1.4.1: Ένα «στρεβλό» μέτρο κινδύνου (distortion risk measure) μπορεί να οριστεί ως η «στρεβλή» (distorted) αναμενόμενη τιμή μιας μη αρνητικής τυχαίας μεταβλητής, η οποία εκφράζει τον κίνδυνο με αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας $F_X(x)$. Εάν g είναι η «στρεβλή» συνάρτηση, τότε:

$$\rho_g(X) = \int_0^{+\infty} g(1 - F_X(x))dx = \int_0^1 F_X^{-1}(x)(1-q)dg(q)$$

Όπου g:[0,1]⟶[0,1] είναι συνεχής και αύξουσα συνάρτηση με $g(0) = 0$ και $g(1) = 1$ και το ολοκλήρωμα της $\rho_g(X)$ ονομάζεται ολοκλήρωμα Choquet. Εάν η τυχαία μεταβλητή X έπαιρνε και αρνητικές τιμές με μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$, τότε το μέτρο ρ_g(X) ισούται με:

$$\rho_g(X) = \int_{-\infty}^{0}(g\big(\mathbb{P}(X > x)\big) - 1)\, dx + \int_0^{+\infty} g\big(\mathbb{P}(X > x)\big)\, dx$$

Τα «στρεβλά» μέτρα κινδύνου (distortion risk measure) ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

1. Μονοτονία (monotonicity): Εάν $X \leq Y$ τότε ρ_g(X) ≤ ρ_g(Y)

2. Αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές (translation invariance): Εάν $\alpha \in \mathbb{R}$ τοτε ρ_g(X+α) = ρ_g(X)+α

3. Θετική ομογένεια (positive homogeneity): Εάν $\alpha \in R$ τοτε $\rho_g(\alpha X) = \alpha\rho_g$(X)

4. Υπο-αθροιστικότητα (subadditivity): ρ_g(X+Y) ≤ ρ_g(X)+ ρ_g(Y)

5. Comonotonic Προσθετικότητα (comonotonic additivity): Εάν τα X,Y είναι comonotonic, δηλαδή υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή U και μη φθίνουσες συναρτήσεις g, h τέτοιες ώστε $X = g(U)$ και $Y = h(U)$, τότε ρ_g(X+Y) = ρ_g(X)+ ρ_g(Y)

Παράδειγμα 1.4.1: Έστω μια τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί μια κατανομή ασφαλιστικής απώλειας, με αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας $F_X(x)$. Η αξία σε κίνδυνο (VaR), η οποία ισούται με inf{ x: $F_X(x) \geq q\}$, μπορεί να γραφτεί με την μορφή «στρεβλού» μέτρου, με «στρεβλή» συνάρτηση g:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \varepsilon\alpha\nu\ 0 \leq x < 1-p \\ 1, & \varepsilon\alpha\nu\ 1 \geq x \geq 1-p \end{cases}$$

2.Γνωστά συναρτησιακά κινδύνου

2.1 Αξία σε κίνδυνο (Value at Risk)

Ένα από τα πιο διαδεδομένα και γνωστά συναρτησιακά κινδύνου, τόσο μεταξύ των ερευνητών και ακαδημαϊκών, όσο και μεταξύ των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων και των αναλυτών, είναι η αξία σε κίνδυνο (VaR). Η δημοτικότητα της οφείλεται στην ανάπτυξη του συστήματος RiskMetrics από την Αμερικανική επενδυτική τράπεζα JP Morgan το 1994. Η ανάπτυξη του συγκεκριμένου συστήματος, αποσκοπούσε στην ανάπτυξη και εφαρμογή ενός εργαλείου για τη μέτρηση και παρακολούθηση των καθημερινών αναμενόμενων ζημιών της τράπεζας από όλες τις επενδυτικές θέσεις που είχε αναλάβει. Επίσης, τα τελευταία χρόνια η αξία σε κίνδυνο θεωρείται ένας αποδεκτός τρόπος μέτρησης πιστωτικού κινδύνου σύμφωνα με την Βασιλεία ΙΙ και Βασιλεία ΙΙΙ.

Ο υπολογισμός της αξίας σε κίνδυνο είναι αρκετά χρήσιμος για την ποσοτικοποίηση του επενδυτικού κινδύνου, καθώς προσδιορίζει την μέγιστη ζημιά από μια επένδυση σε δεδομένο χρονικό διάστημα και σε ένα καθορισμένο επίπεδο $\alpha \in (0,1)$. Ακόμα, θα θεωρήσουμε πως το επίπεδο α θα παίρνει τιμές κοντά στο μηδέν και το επίπεδο εμπιστοσύνης θα είναι το $(1-\alpha)100\%$. Για παράδειγμα, εάν η $VaR_{1-\alpha}$ μιας επένδυσης σε μετοχές είναι €5000 για χρονικό διάστημα μιας ημέρας με επίπεδο εμπιστοσύνης 95%, αυτό πρακτικά σημαίνει ότι υπάρχει μόνο 5% πιθανότητα η ημερήσια ζημία από την επένδυση να υπερβεί το ποσό των €5000. Προφανώς αυτή η πληροφορία προσδιορίζει με άμεσο και κατανοητό τρόπο τον κίνδυνο που αναλαμβάνει ο επενδυτής.

Επιπρόσθετα, την αξία σε κίνδυνο την χρησιμοποιούν και αναλογιστές, διότι η $VaR_{1-\alpha}$ υπολογίζει την ποσότητα της ασφαλιστής ζημιάς που μόνο ένα μικρό ποσοστό α 100% ασφαλιστικών ζημιών μπορεί να την ξεπεράσει. Ωστόσο, η αξία σε κίνδυνο έχει αρκετά μειονεκτήματα, αφενός, δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της υπο-προσθετικότητας ,και αφετέρου, αγνοεί τις μεγάλες απώλειες που βρίσκονται στα άκρα της (δεξιάς) ουράς μιας κατανομής.

Ορισμός 2.1.1: Έστω μια τυχαία μεταβλητή X και επίπεδο $\alpha \in (0,1)$, η Αξία σε κίνδυνο υπολογίζεται ως εξής

$$\mathrm{VaR}_{1-\alpha} = -q_{a}^{+}(X) = -inf\{x \in \mathbb{R}: P[X \leqslant x] > \alpha\}$$

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X να εκφράζει τις αποδόσεις ενός χαρτοφυλακίου με $X \in \mathbb{R}$. Οπότε, η αξία σε κίνδυνο είναι η τιμή του ποσοστημορίου με επίπεδο $\alpha \in (0,1)$, δηλαδη η τιμή του x στην εξίσωση F_X (x) $= \alpha$.

Διαφορετικά, εάν η τυχαία μεταβλητή X εκφράζει ασφαλιστικές απώλειες με $X \in R^{+}$, τότε η αξία σε κίνδυνο υπολογίζεται ως εξής:

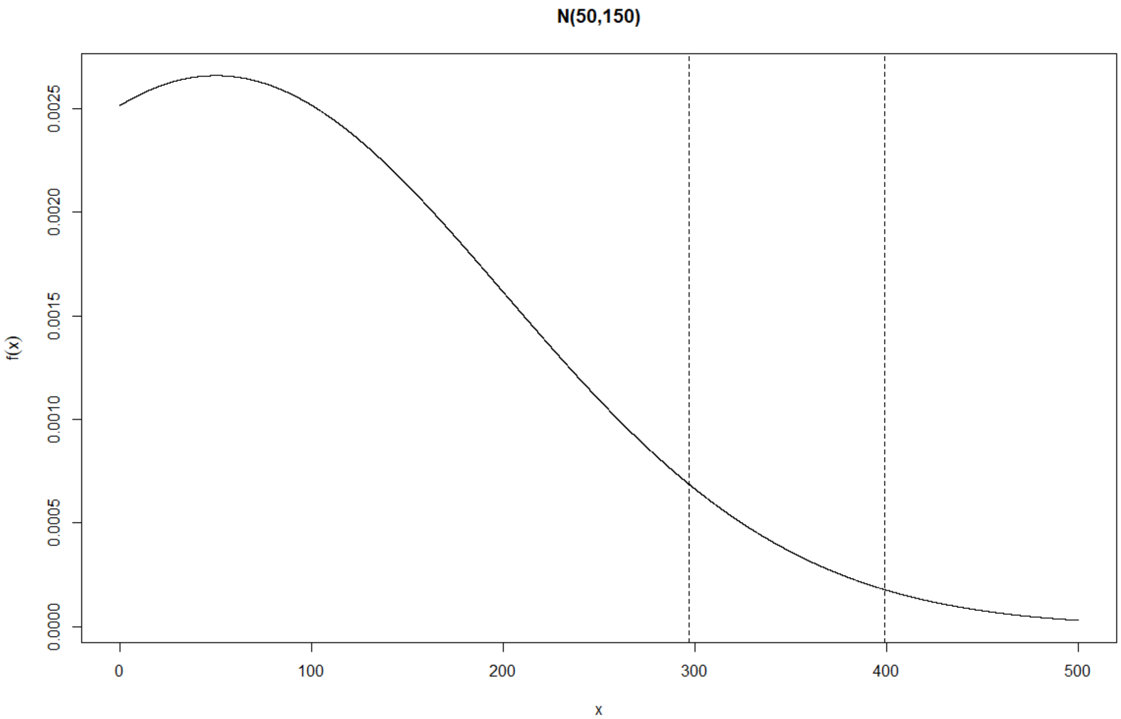
$$\mathrm{VaR}_{1-\alpha} = inf\{x \in \mathbb{R}: P[X \leqslant x] \geq 1-\alpha\}.$$

Παράδειγμα 2.1.1: Εάν μια τυχαία μεταβλητή X εκφράζει ασφαλιστικές απώλειες και ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο 50 και τυπική απόκλιση 150, τότε να υπολογιστεί η αξία σε κίνδυνο με επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και 99%.

Λύση

$$\Pr[X \leq x_{0.95}] = 0.95$$
$$\Phi\left(\frac{x_{0.95}-50}{150}\right) = 0.95$$
$$\left(\frac{x_{0.95}-50}{109}\right) = 1.6449$$
$$x_{0.95} = 296.728$$

Και για $x_{0.99}$=398.9522



Σχήμα 2.1.1

Στην Σχήμα 2.1.1 οι διακεκομμένες γραμμές δηλώνουν την τιμή του ποσοστημορίου για τα επίπεδα εμπιστοσύνης 95% και 99% και κατ'επέκταση είναι και οι τιμές της αξίας σε κίνδυνο.

Παράδειγμα 2.1.2: Εάν X και Y είναι το κέδρος η ζημία δυο μετοχών ανάλογα σε ποια κατάσταση ω βρεθούν μετά από ένα χρόνο.

$$X = \begin{cases} -20; & \text{για } \omega_1 \\ -8; & \text{για } \omega_2 \\ 0; & \text{για } \omega_3; \\ 12; & \text{για } \omega_4 \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 6; & \text{για } \omega_1 \\ 0; & \text{για} \{\omega_2, \omega_3\} \\ -2; & \text{για } \omega_4 \end{cases}$$

Με πιθανότητες $P\ (\omega_1) = 0.01, P\ (\omega_2) = 0.09, P\ (\omega_3) = 0.8\ και\ P\ (\omega_4) = 0.1$

1. Εάν το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από τρείς μετοχές από την πρώτη μετοχή και τέσσερις από την άλλη. Να εξακριβωθεί εάν η διαφοροποίηση ενδείκνυται για VaR με επίπεδο 1%.
2. Εάν το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από μια μετοχή από την πρώτη μετοχή και οκτώ από την άλλη. Να εξακριβωθεί εάν η διαφοροποίηση ενδείκνυται για VaR με επίπεδο 10%.

1.Οι αθροιστικές κατανομές για τις μεταβλητές X και Y:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0; & \text{εαν } x < -20 \\ 0.01; & \text{εαν} -20 \leq x < -8 \\ 0.1; & \text{εαν } -8 \leq x < 0 \\ 0.9; & \text{εαν } 0 \leq x < 12 \\ 1; & \text{εαν } x \geq 12 \end{cases} \quad F_Y(x) = \begin{cases} 0; & \text{εαν } x < -2 \\ 0.1; & \text{εαν } -2 \leq x < 0 \\ 0.99; & \text{εαν } 0 \leq x < 6 \\ 1; & \text{εαν } x \geq 6 \end{cases}$$

Αφού υπολογίστηκαν οι αθροιστικές κατανομές, τότε οι αξίες σε κίνδυνο είναι οι εξής:

$$\mathrm{VaR}_{0.99}(X) = -q_{0.01}^{+}(X) = -inf\{x \in \mathbb{R}: F_X(x) > 0.01\} = 8$$
$$\mathrm{VaR}_{0.99}(Y) = -q_{0.01}^{+}(Y) = -inf\{x \in \mathbb{R}: F_Y(x) > 0.01\} = 2$$

Για το χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από τρείς μετοχές από την X και τέσσερις από την Y. Το κέδρος η ζημία του χαρτοφυλακίου ανάλογα με την κατάσταση ω που θα βρεθεί μετά από ένα χρόνο

$$3X + 4Y = \begin{cases} -60 + 24; & \text{για } \omega_1 \\ -24; & \text{για } \omega_2 \\ 0; & \text{για } \omega_3 \\ 36 - 8; & \text{για } \omega_4 \end{cases} = \begin{cases} -36; & \text{για } \omega_1 \\ -24; & \text{για } \omega_2 \\ 0; & \text{για } \omega_3 \\ 28; & \text{για } \omega_4 \end{cases}$$

Επίσης, οι αθροιστική κατανομή του χαρτοφυλακίου είναι:

$$F_{3X+4Y}(x) = \begin{cases} 0; & \text{εαν } x < -36 \\ 0.01; & \text{εαν } -36 \leq x < -24 \\ 0.1; & \text{εαν} -24 \leq x < 0 \\ 0.9; & \text{εαν } 0 \leq x < 28 \\ 1; & \text{εαν } x \geq 28 \end{cases}$$

Επομένως, η αξία κινδύνου του χαρτοφυλακίου είναι

$$\mathrm{VaR}_{0.99}(3X + 4Y) = 24 < 3 \cdot \mathrm{VaR}_{0.99}(X) + 4 \cdot \mathrm{VaR}_{0.99}(Y) = 32$$

Τελικά, η διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου είναι προτιμητέα, καθώς είναι μικρότερος ο κίνδυνος

2.Από τις αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής για τις μεταβλητές X και Y που υπολογίστηκαν στο προηγούμενο ερώτημα, υπολογίζουμε την αξία σε κίνδυνο για επίπεδο 10%.

$$\mathrm{VaR}_{0.90}(X) = -q_{0.1}^{+}(X) = -inf\{x \in \mathbb{R}: F_X(x) > 0.1\} = 0$$
$$\mathrm{VaR}_{0.90}(Y) = -q_{0.1}^{+}(Y) = -inf\{x \in \mathbb{R}: F_Y(x) > 0.1\} = 0$$

Το χαρτοφυλάκιο που περιλαμβάνει μια μετοχή της X και οκτώ μετοχές από την Y. Το κέδρος η ζημία του χαρτοφυλακίου με βάση την κατάσταση ω, δίνεται από:

$$X + 8Y = \begin{cases} 28; & \text{για } \omega_1 \\ -8; & \text{για } \omega_2 \\ 0; & \text{για } \omega_3 \\ -4; & \text{για } \omega_4 \end{cases}$$

Ακόμα, η αθροιστική συνάρτηση του χαρτοφυλακίου δίνεται από:

$$F_{X+8Y}(x) = \begin{cases} 0; & \text{if } x < -8 \\ 0.09; & \text{if } -8 \le x < -4 \\ 0.19; & \text{if } -4 \le x < 0 \\ 0.99; & \text{if } 0 \le x < 28 \\ 1; & \text{if } x \ge 28 \end{cases}$$

Επομένως, η διαφοροποίηση δεν θεωρείται προτιμητέα, διότι έχει μεγαλύτερο κίνδυνο.
$\mathrm{VaR}_{0.90}(X + 8Y) = 4 > \mathrm{VaR}_{0.90}(X) + 8\mathrm{VaR}_{0.90}(Y) = 0$

Παράδειγμα 2.1.3: Υποθέτουμε δυο μετοχές Α μια Β οι οποίες οι ημερήσιες αποδόσεις ακολουθούν κανονική κατανομή. Η συσχέτιση μεταξύ των δύο αποδόσεων είναι 0,25, η τωρινή τιμή της μετοχής Α είναι 4,2 €, με αναμενόμενη ημερήσια απόδοση 0,0002 και volatility 1,2%, ενώ για την τωρινή τιμή της μετοχής Β να είναι 3,6 €, με αναμενόμενη ημερήσια απόδοση 0,0008 και volatility 2,8%.

1. Εάν το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από 20 μετοχές της Α και 15 μετοχές της Β, να υπολογιστεί η αξία σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου για το διάστημα δέκα ημερών και επίπεδο α να είναι 1% .
2. Έστω δυο μετοχές C και D έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά με τις μετοχές Α και Β αντίστοιχα, με διαφορά να έχουν αναμενόμενη ημερήσια απόδοση μηδέν. Να υπολογιστεί η αξία σε κίνδυνο, για διάστημα δέκα ημερών και επίπεδο α να είναι 1%, για το χαρτοφυλάκιο με 20 μετοχές της C και 15 μετοχές της D.

Λύση

1.Αφού οι αποδόσεις των μετοχών ακλουθούν κανονική κατανομή, τότε ισχύει ότι

$$\frac{\Delta S}{S_0} \cong \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t}$$

Όπου $\Delta t = T$ είναι η χρονική διάρκεια, το S_0 είναι η αρχική τιμή της μετοχής , $\mu \in \mathbb{R}$ είναι η αναμενόμενη απόδοση , $\sigma > 0$ είναι το volatility, και το $\varepsilon \sim N(0, 1)$.

Το $\mathrm{VaR}_{0.99}(X)$ της απόδοσης του χαρτοφυλακίου που αποτελείται από αποδόσεις μετοχών με κανονική κατανομή δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$\mathrm{VaR}_{0.99}^{10}(\Delta P^1) = N^{-1}(1-\alpha)\cdot\sqrt{\Delta t}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j S_0^i S_0^j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}$$

$$-\sum_{j=1}^{n} x_j S_0^j \mu_j(\Delta t) \qquad (2.1)$$

$$= N^{-1}(0.99)\cdot\sqrt{10}\cdot[(20\cdot 4.2\cdot 0.012)^2 + (15\cdot 3.6\cdot 0.028)^2$$
$$+2\cdot 0.25\cdot(20\cdot 4.2\cdot 0.012\cdot 15\cdot 3.6\cdot 0.028)]^{1/2}$$
$$-[20\cdot 4.2\cdot 0.0002 + 15\cdot 3.6\cdot 0.0008]\cdot 10$$
$$= 14.831 - 0.6 = 14.231.$$

Εν τέλει, το κεφάλαιο που πρέπει να διακρατηθεί, ώστε να καλυφθεί ο ενδεχόμενος κίνδυνος του χαρτοφυλακίου, είναι 14.231€

2.

Καθώς, οι αποδόσεις των μετοχών C και D έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά με τις μετοχές A και B , με μόνη διαφορά ότι η αναμενόμενη απόδοση τους είναι μηδέν στην προκειμένη περίπτωση. Τότε για τον υπολογισμό του $\mathrm{VaR}_{0.99}^{10}$ για το δεύτερο χαρτοφυλάκιο, θα χρειαστώ μόνο τον πρώτο σκέλος από τον τύπο (2.1):

$$\mathrm{VaR}_{0.99}^{10}(\Delta P^2) = N^{-1}(1-\alpha)\cdot\sqrt{\Delta t}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j S_0^i S_0^j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}} = 14.831$$

Το κεφάλαιο που πρέπει να χρησιμοποιηθεί ως περιθώριο για την επένδυση του δεύτερου χαρτοφυλακίου θα πρέπει να είναι 14.831€

2.2 Εκθετική αρχή ασφαλίστρου (Exponential principle)

Η εκθετική αρχή ασφαλίστρου είναι ένα ενδιαφέρον συναρτησιακό κινδύνου και ερμηνεύεται με βάση τον υπολογισμό ασφαλίστρου, όπως παρουσίασαν πρώτοι οι Gerber (1974) και Bühlmann (1985). Ο τύπος υπολογισμού του συγκεκριμένου συναρτησιακού κινδύνου είναι ο κάτωθι:

$$\rho(X) = \frac{1}{a} logE[e^{aX}] \qquad \alpha \epsilon (0, +\infty)$$

Στην περίπτωση που το $\alpha = 0$ η εκθετική αρχή ασφαλίστρου ελαττώνεται στο επίπεδο του καθαρού ασφάλιστρου, $\rho(X) = E[X]$.

Κάποιες σημαντικές ιδιότητες της εκθετικής αρχής ασφαλίστρου είναι:

1. Μονοτονία (monotonicity): Εάν $X \leq Y$ τότε $\rho\ (X)\ \leq\ \rho(Y)$
2. Αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές (translation invariance): Εάν $\alpha\ \epsilon R$ τοτε $\rho(X + \alpha)\ =\ \rho(X) + \alpha$
3. Υπο-αθροιστικότητα για κινδύνους με θετική εξάρτηση τεταρτημορίου (subadditivity for NQD risk): ρ(X+Y) ≤ ρ(X)+ ρ(Y)
4. Προσθετικότητα για ανεξάρτητους κινδύνους (additivity for independent risk) : Εάν τα X,Y έχουν θετική η αρνητική συσχέτιση, τότε ρ(X+Y) = ρ(X)+ ρ(Y)
5. Υπερ-αθροιστικότητα για κινδύνους με αρνητική εξάρτηση τεταρτημορίου (superadditivity for NQD risk): ρ(X+Y) ≥ ρ(X)+ ρ(Y)

Αναφορικά με την τρίτη και τελευταία ιδιότητα, η θετική εξάρτηση τεταρτημορίου δυο τυχαίων μεταβλητών X, Y που εκφράζουν τον κίνδυνο, ικανοποιούν την εξής ανισότητα:

$$P(X \leq\ x\ \kappa\alpha\iota\ Y \leq\ y) >\ P(X \leq\ x)P(Y \leq\ y) \quad \forall x, y\epsilon R$$

Συνεπώς, η πιθανότητα δυο κίνδυνων με θετική εξάρτηση τεταρτημορίου να έχουν χαμηλές τιμές ταυτόχρονα, είναι μεγαλύτερη από την περίπτωση οι δυο κίνδυνοι να είναι ανεξάρτητοι. Διότι στην περίπτωση που οι δυο τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες, η πιθανότητα της ένωσής τους ισούται με το γινόμενο των πιθανοτήτων τους. Η διαφορετική φορά των δυο μελών είναι η αρνητική εξάρτηση τεταρτημορίου:

$$P(X \leq x \,\kappa\alpha\iota\, Y \leq y) > P(X \leq x)P(Y \leq y) \quad \forall x, y \epsilon R$$

Ωστόσο, όποιο συναρτησιακό κινδύνου ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες, δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της θετικής ομογένειας (positive homogeneity): $\rho(\alpha X) = \alpha\rho(X)$

Επιπρόσθετα, η εκθετική αρχή ασφαλίστρου έχει την μορφή ενός καινούργιου μέτρου κινδύνου που ονομάζεται entropic value at risk (EVaR). Το συγκεκριμένο μέτρο παρουσιάστηκε από τον Ahmadi-Javid (2012), και είναι ένα συνεπές (coherent) μέτρο κινδύνου, καθώς ικανοποιεί τις ιδιότητες του ορισμού 3.1.1 . Εκτός από την συνέπεια (coherency), το EVaR βασίζεται και σε άλλες κατάλληλες ιδιότητες. Επί παραδείγματι, σε αντίθεση με γνωστά μονότονα μέτρα κινδύνου, όπως είναι και η αξία σε κίνδυνο (VaR), το EVaR είναι γνήσια μονότονο. Επίσης, είναι αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές (law invariant) και είναι κυρτό (convex) μέτρο κινδύνου.

Το EVaR αποτελεί ένα ισχυρό άνω φράγμα έναντι της αξίας σε κίνδυνο (VaR). Από την ανισότητα Chernoff για κάθε σταθερό αριθμό $\alpha \in [0, 1]$ και $X \in \mathbf{L}_{M^+}$, με $\mathbf{L}_{M^+}$ να είναι το σύνολο όλων των Borel μετρήσιμων συναρτήσεων $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ των οποίων η ροπογεννήτρια τους $M_X(z) = E[e^{zX}]$ ορίζεται για κάθε $z \geq 0$, συνεπάγεται ότι:

$$\Pr(X \geq a) \leq e^{-za} M_X(z), \text{ για κάθε } z > 0. \ (2.2)$$

Από την λύση της εξίσωσης $e^{-za} M_X(z) = \alpha$ ως προς α, με $\alpha \in [0,1]$, έχουμε:

$$a_X(\alpha, z) := z^{-1} \ln(M_X(z)/\alpha)$$

Οπότε η (2.2) σχέση γράφεται $\Pr(X \geq a_X(\alpha, z)) \leq \alpha$. Ουσιαστικά, για κάθε $z > 0$, το $a_X(\alpha, z)$ είναι το άνω φράγμα για την αξία σε κίνδυνο $\mathrm{VaR}_{1-\alpha}(X)$. Χρησιμοποιώντας την ροπογεννήτρια της τ.μ. X, δημιουργείτε ένα νέο μέτρο κινδύνου που είναι το άνω φράγμα της $\mathrm{VaR}_{1-\alpha}(X)$.Ωστόσο, στην περίπτωση που το $\alpha = 1$, τότε το $a_X(\alpha, z)$ είναι η εκθετική αρχή ασφαλίστρου. Στην πρόσφατη χρηματοοικονομική βιβλιογραφία υπάγεται στην κατηγορία των κυρτών μέτρων κινδύνου και ονομάζεται entropic value at risk (EVaR).

Ορισμός 2.2.1(EVaR)**:** Το Entropic value at risk (EVaR) για $X \in \mathbf{L}_{M^+}$ με επίπεδο εμπιστοσύνης $1 - \alpha$ ορίζεται όπως ακολούθως:

$$\mathrm{EVaR}_{1-\alpha}(X) \coloneqq \inf_{z>0}\{a_X(\alpha, z)\} = \inf_{z>0}\left\{z^{-1} \ln\left(\frac{M_X(z)}{\alpha}\right)\right\}$$

Βασικά, το EVaR είναι ισχυρό άνω φράγμα έναντι της αξίας σε κίνδυνο (VaR), σύμφωνα με την ανισότητα Chernoff. Τέλος, είναι ένα συνεπές και κυρτό συναρτησιακό κινδύνου.

Λήμμα 2.2.1 (EVaR είναι κυρτό) Το **:** Η εξίσωση $\kappa_\alpha(X,t) := a_X(\alpha, t^{-1})$, με $X \in \mathbf{L}_{M^+}$ και $t > 0$, είναι συνεπές στο (X,t) για όλα τα $\alpha \in [0,1]$.

Απόδειξη

Αρχικά πρέπει να αποδειχτεί ότι, για όλα τα $\lambda \in [0,1], X, Y \in \mathbf{L}_{M^+}$και $t_1, t_2 > 0$:

$$\lambda\kappa_\alpha(X,t_1) + (1-\lambda)\kappa_\alpha(Y,t_2) \geq \kappa_\alpha(\lambda X + (1-\lambda)Y, \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)$$

Το οποίο είναι ισοδύναμο με την ανισότητα

$$\lambda t_1 \ln M_X(t_1^{-1}) + (1-\lambda)t_2 \ln M_Y(t_2^{-1})$$

$$\geq (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \ln M_{\lambda X + (1-\lambda)Y}((\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)^{-1})$$

Ορίζουμε με $t = \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2$ και $w = \lambda t_1/t$, το αριστερό μέλος της πιο πάνω ανισότητας μπορεί να γραφτεί ως ακολούθως

$$t\big(w \ln M_X(t_1^{-1}) + (1-w)\ln M_Y(t_2^{-1})\big) \quad (2.3)$$

Από την ανισότητα του Jensen ισχύει ότι

$$w \ln M_X(t_1^{-1}) \geq \ln E\left[\left(e^{Xt_1^{-1}}\right)^{w}\right], \quad (1-w)\ln M_Y(t_2^{-1}) \geq \ln E\left[\left(e^{Yt_2^{-1}}\right)^{1-w}\right], (2.4)$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο λογάριθμος της ροπογεννήτριας είναι κυρτή συνάρτηση, από (2.3) και (2.4) συνεπάγεται ότι:

$$t\big(w \ln M_X(t_1^{-1}) + (1-w)\ln M_Y(t_2^{-1})\big)$$

$$\geq t(lnE\big[\big(e^{\lambda X t^{-1}}\big)\big] + lnE\big[\big(e^{(1-\lambda)Y t^{-1}}\big)\big])$$

$$\geq t(lnE\big[\big(e^{\lambda X t^{-1} + (1-\lambda)Y t^{-1}}\big)\big]$$

$$= (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \ln M_{\lambda X + (1-\lambda)Y}((\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)^{-1})$$

Επομένως, αποδείχτηκε το ζητούμενο.

Θεώρημα 2.2.1(γνήσια μονοτονία του EVaR): Εάν X και Y είναι δύο τυχαίες μεταβλητές στο $\mathbf{L}_M$, οι οποίες ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

(1) $X \geq Y$
(2) $Pr\{X > Y\} > 0$

(3) $ess\ sup(X) > ess\ sup(Y)$ ή $ess\ sup(X) = ess\ sup(Y) = +\infty$, όπου το $ess\ sup(X)$ είναι το ουσιώδες supremum της τ.μ. X

Απόδειξη

Ορίζοντας $f_X(t,\alpha) = t\ log\ E(e^{t^{-1}X}) - t\ ln\ \alpha$, η EVaR γράφεται ως εξής

$$EVaR_{1-\alpha}(X) = \inf_{t>0}\{f_X(t,\alpha)\}$$

Από τις συνθήκες (1) και (2) ισχύει ότι $E(e^{t^{-1}X}) > E(e^{t^{-1}Y})$ για $t > 0$, οπότε

$$f_X(t,\alpha) = t\ log\ E\ (e^{t^{-1}X}) - t\ ln\ \alpha > f_Y(t,\alpha) = t\ log\ E\ \ et - 1Y\ ) - t\ ln\ \alpha$$

Ακόμα, για την συνθήκη (3)

$$\lim_{t\to 0} f_X(t,\alpha) = ess\ sup(X) > \lim_{t\to 0} f_Y(t,\alpha) = ess\ sup(Y)$$

ή

$$\lim_{t\to 0} f_X(t,\alpha) = \lim_{t\to 0} f_Y(t,\alpha) = +\infty$$

Επομένως,

$$EVaR_{1-\alpha}(X) = \inf_{t>0}\{f_X(t,\alpha)\} > EVaR_{1-\alpha}(Y) = \inf_{t>0}\{f_Y(t,\alpha)\}$$

Πρόταση 2.2.1: Το $EVaR$ είναι το άνω φράγμα για την αξία κινδύνου (VaR) με το ίδιο επίπεδο εμπιστοσύνης, τέτοιο ώστε για $X \in \mathbf{L}_{M^+}$και για κάθε $\alpha \in [0,1]$ ισχύει ότι

$$VaR_{1-\alpha}(X) \leq EVaR_{1-\alpha}(X)$$

Επίσης,

$$E(X) \leq EVaR_{1-\alpha}(X) \leq ess\ sup(X)$$

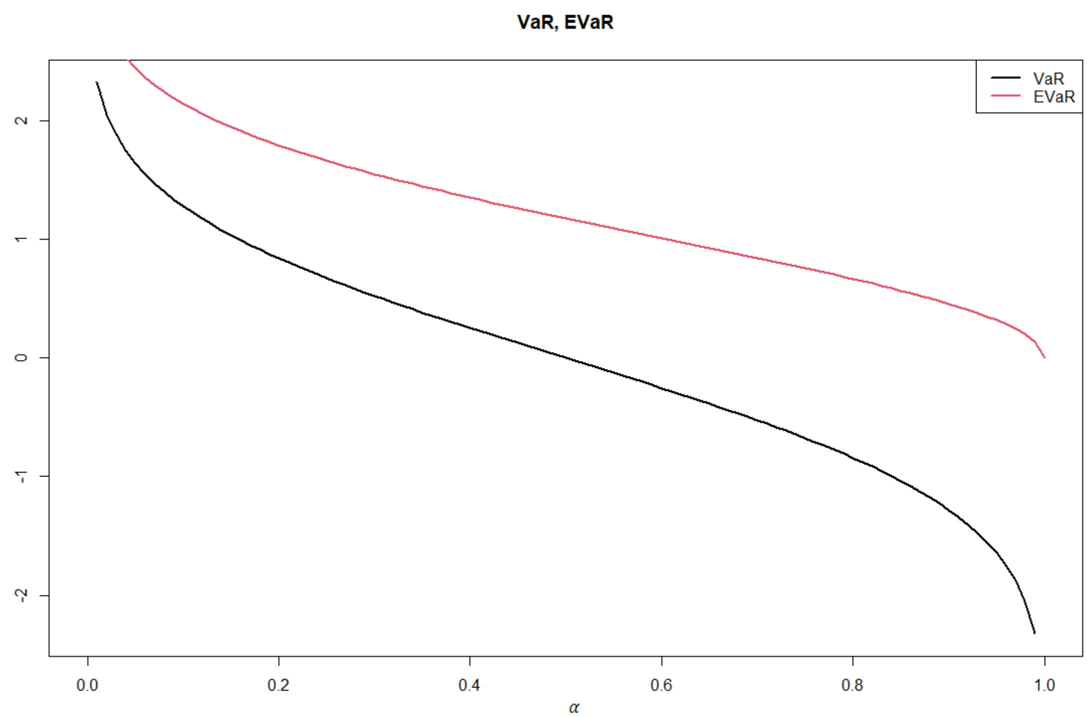
Όπου $EVaR_0(X) = E(X)$ και $\lim_{\alpha\to 0} EVaR_{1-\alpha}(X) = ess\ sup(X)$

Η πρόταση επισημαίνει ότι η $EVaR$ είναι περισσότερο risk-averse συγκριτικά με την αξία σε κίνδυνο. Συγκεκριμένα, το $EVaR$ είναι κατάλληλο για χρηματοοικονομικούς οργανισμούς η για ασφαλιστικές εταιρείες που επιλέγουν να διαθέσουν περισσότερο κεφάλαιο για την κάλυψη ενδεχόμενου κινδύνου. Ωστόσο, αυτή η λύση δεν είναι επιθυμητή από εταιρείες οι οποίες επιθυμούν να συγκεντρώσουν το λιγότερο δυνατόν κεφάλαιο και να είναι περισσότερο εκτεθειμένες στον κίνδυνο με απώτερο σκοπό το επιπλέον κέρδος. Η σύγκριση ανάμεσα στην αξία σε κινδύνου (VaR) και στο $EVaR$ μπορεί να αποτυπωθεί μέσω ενός παραδείγματος. Έστω ότι μια τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Συνεπάγεται εύκολα ότι

$$VaR_{1-\alpha}(X) = \mu + z_\alpha \sigma,$$

$$EVaR_{1-\alpha}(X) = \mu + \sqrt{-2 \ln\alpha}\sigma$$

Όπου το z_α είναι το άνω α-ποσοστημόριο της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.



Σχήμα 2.2.1

Στο Σχήμα 2.2.1 απεικονίζεται η αξία σε κίνδυνο (VaR) και το EVaR στην περίπτωση που η τ.μ. X ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή $X \sim N(0,1)$. Όπως αναφέρθηκε και από την πρόταση , το EVAR είναι ένα άνω φράγμα της αξίας σε κίνδυνο (VaR) για κάθε τιμή του επιπέδου $\alpha \in [0,1]$.

Κώδικας για R-studio

```
curve(qnorm(1-x,0,1),0,1,lwd=2,col=1,main="EVaR, VaR")
curve(sqrt(-2*log(x)),0,1,lwd=2,col=2,add=TRUE)
legend("topright",c("VaR","EVaR"),col=1:4,lty=rep(1,4),lwd=rep(2,4))
```

2.3 Διαφορές ανάμεσα σε εκθετική αρχή ασφαλίστρου (Exponential premium) και αξία σε κίνδυνο (Value at Risk).

Στην παρούσα ενότητα θα επισημανθεί ότι η αξία σε κίνδυνο ορίζεται σε κατανομές με ελαφριές και βαριές ουρές, ενώ η αρχή ασφαλίστρου ορίζεται μόνο σε κατανομές με ελαφριές ουρές. Αρχικά, για να δείξουμε αυτήν την διαφορά των δύο συναρτησιακών κινδύνων, θα ορισθούν οι κατανομές με βαριές ουρές. Έπειτα, με την χρησιμοποίηση του ορισμού θα αποδειχτεί πως δεν μπορεί να υπολογιστεί η εκθετική αρχή ασφαλίστρου σε κατανομές με βαριές ουρές. Τέλος, με την χρήση του προγράμματος R studio θα προσομοιωθούν δεδομένα από μια κατανομή με ελαφριά ουρά και μία με βαριά ουρά, ώστε να αποδειχτεί ότι και στις δύο κατανομές η αξία σε κίνδυνο ορίζεται.

Οι κατανομές με βαριές ουρές έχουν διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στον κλάδο των ασφαλιστικών και των οικονομικών. Αυτό οφείλεται στις ακραίες καταστάσεις που εμφανίζονται κατά καιρούς, όπως για παράδειγμα η σύγχρονη πανδημία του Covid-19 που παρατηρήθηκε αύξηση της θνησιμότητας. Αν και η πιθανότητα εμφάνισης αυτών των καταστάσεων δεν είναι μεγάλη, ωστόσο όταν συμβούν προκαλούν μεγάλες ζημιές στους χρηματοπιστωτικούς οργανισμούς και στις ασφαλιστικές εταιρείες. Γι αυτό και είναι χρήσιμές οι κατανομές με βαριές ουρές για τις μεταβλητές που εκφράζουν ασφαλιστικές απώλειες, διότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας τους συγκλίνει πολύ αργά στο μηδέν όταν οι τιμές τους τείνουν στο άπειρο. Γνωστές κατανομές με βαριές ουρές είναι η Lognormal, Pareto, Weibull.

Ορισμός 2.3.1: Μια κατανομή F_X είναι κατανομή με (δεξιά) βαριά ουρά αν και μόνο αν

$$\int_R e^{\lambda x} F(dx) = \infty \text{ για } \lambda > 0$$

Όταν, δηλαδή, η ροπογεννήτρια $E[e^{\lambda X}]$ μιας κατανομής να ισούται με το άπειρο.

Ορισμός 2.3.2: Μια κατανομή F_X είναι κατανομή με (δεξιά) ελαφριά ουρά αν και μόνο αν

$$\int_R e^{\lambda x} F(dx) < \infty \text{ για } \lambda > 0$$

Διαφορετικά, αν και μόνο αν η κατανομή δεν έχει βαριά ουρά. Συνεπώς, για κάθε κατανομή F_X με ελαφριά ουρά στο $R^+ = [0, +\infty)$, όλες οι ροπές είναι πεπερασμένες, δηλαδή, $\int_0^\infty x^\kappa \; F(dx) < \infty$, για κάθε $\kappa > 0$.

Παράδειγμα 2.3.1: Να αποδειχτούν οι παρακάτω προτάσεις

I. Η κανονική κατανομή έχει ελαφριά ουρά
II. Η κατανομή Pareto έχει βαριά ουρά.

(I) Εάν μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο μ και τυπική απόκλιση σ, τότε η συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας είναι

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \equiv N(x \mid \mu, \sigma^2)$$

Για να δείξουμε ότι έχει ελαφριά ουρά πρώτα θα υπολογίσουμε την ροπογεννήτρια της κανονικής κατανομής, ώστε να διακρίνουμε εάν ορίζεται και είναι πεπερασμένη.

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} N(x \mid \mu, \sigma^2) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 tx]\right\} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[x^2 - 2(\mu + \sigma^2 t)x + \mu^2]\right\} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[[x^2 - 2(\mu + \sigma^2 t)x + (\mu + \sigma^2 t)^2] + \mu^2 - (\mu + \sigma^2 t)^2\right]\right\} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(x - (\mu + \sigma^2 t)\right)^2 + \mu^2 - (\mu + \sigma^2 t)^2\right]\right\} dx$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[\mu^2 - (\mu + \sigma^2 t)^2]\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(x - (\mu + \sigma^2 t)\right)^2\right]\right\} dx$$

$$= \exp(\mu t + \sigma^2 t^2/2) \int_{-\infty}^{\infty} N(x \mid \mu + \sigma^2 t, \sigma^2) dx = \exp(\mu t + \sigma^2 t^2/2)$$

Συνεπώς, η ροπογεννήτρια της κανονικής κατανομής έχει την τιμή $\exp(\mu t + \sigma^2 t^2/2)$ και είναι πεπερασμένη για κάθε τιμη του t.

(II) Η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της Pareto κατανομής της τ.μ. X για κάποιο x_0 και για $\kappa > 0$, δίνεται από

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha/\kappa}, \qquad x \geq x_0$$

Η ροπογεννήτρια της Pareto κατανομής δεν ορίζεται και οι κ ροπές ορίζονται μόνο στην περίπτωση όπου $\kappa < \alpha$ και ισούνται με

$$E[X^\kappa] = \frac{a x_0^k}{a - k}$$

Αφού η ροπογεννήτρια και η κ ροπή (για $\kappa > \alpha$) της κατανομής Pareto δεν ορίζονται, τότε η Pareto θεωρείται κατανομή με βαριά(δεξιά) ουρά.

Παράδειγμα 2.3.2: Έστω X μια τυχαία μεταβλητή που εκφράζει ασφαλιστικές απώλειες. Να διαπιστωθεί εάν η αξία σε κίνδυνο και η εκθετική αρχή ασφαλίστρου ορίζονται στις παρακάτω περιπτώσεις κατανομών:

(I) Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κανονική κατανομή. Ο υπολογισμός της αξίας σε κίνδυνο, για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και 99%, να πραγματοποιηθεί με παραμετρική εκτίμηση από δεδομένα που θα προσομοιωθούν από κανονική κατανομή με μέσο 60 και τυπική απόκλιση 130. Το μέγεθος των δεδομένων θα είναι 500 τιμές που εκφράζουν ασφαλιστικές απώλειες.

(II) Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί Pareto. Η αξία σε κίνδυνο να υπολογιστεί για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και 99%.

(I)

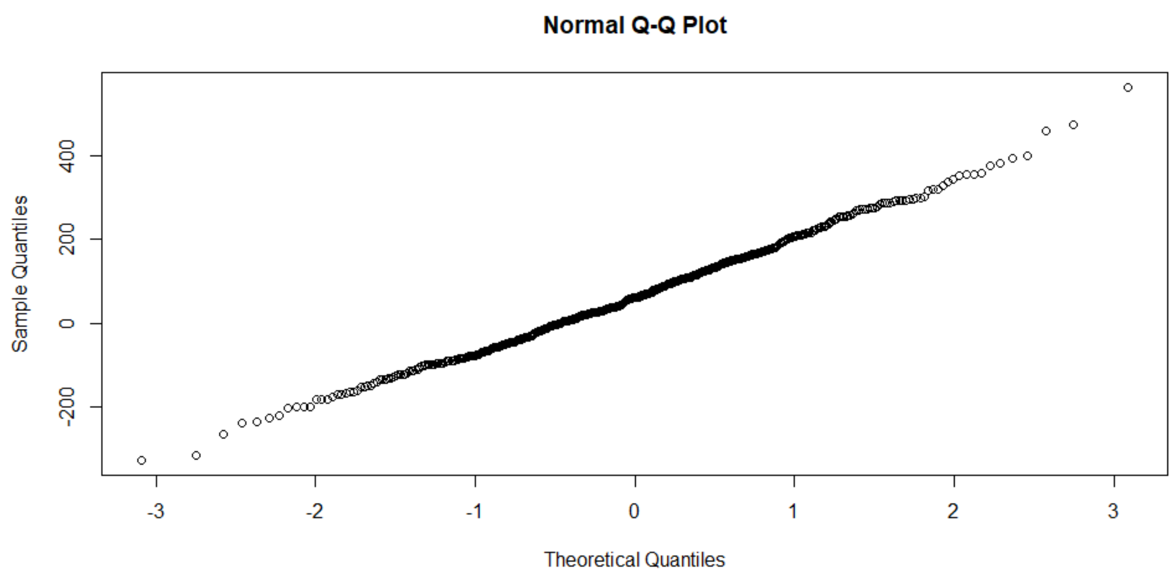
- Εάν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο μ και τυπική απόκλιση σ τότε η εκθετική αρχή ασφαλίστρου ορίζεται. Από το παράδειγμα 2.3.1 ,που υπολογίστηκε η ροπογεννήτρια της κανονικής κατανομής, είναι εύκολο να υπολογιστεί και η εκθετική αρχή του ασφαλίστρου. Από τον υπολογισμό της εκθετικής αρχής ασφαλίστρου.
  $\rho(X) = \frac{1}{a} log E[e^{aX}]$

Εάν αντικαταστήσουμε το $E[e^{aX}]$ με το $M_X(t) = E[e^{tX}] = \exp(\mu t + \sigma^2 t^2/2)$ που είναι το αποτέλεσμα του παραδείγματος 2.3.1, τότε:

$$\rho(X) = \alpha + \frac{\sigma^2 \alpha}{2}$$

Οπότε η αρχή ασφαλίστρου μπορεί να οριστεί σε κατανομές με ελαφριές ουρές, διότι η ροπογεννήτρια τους είναι πεπερασμένη από ορισμό 2.3.2.

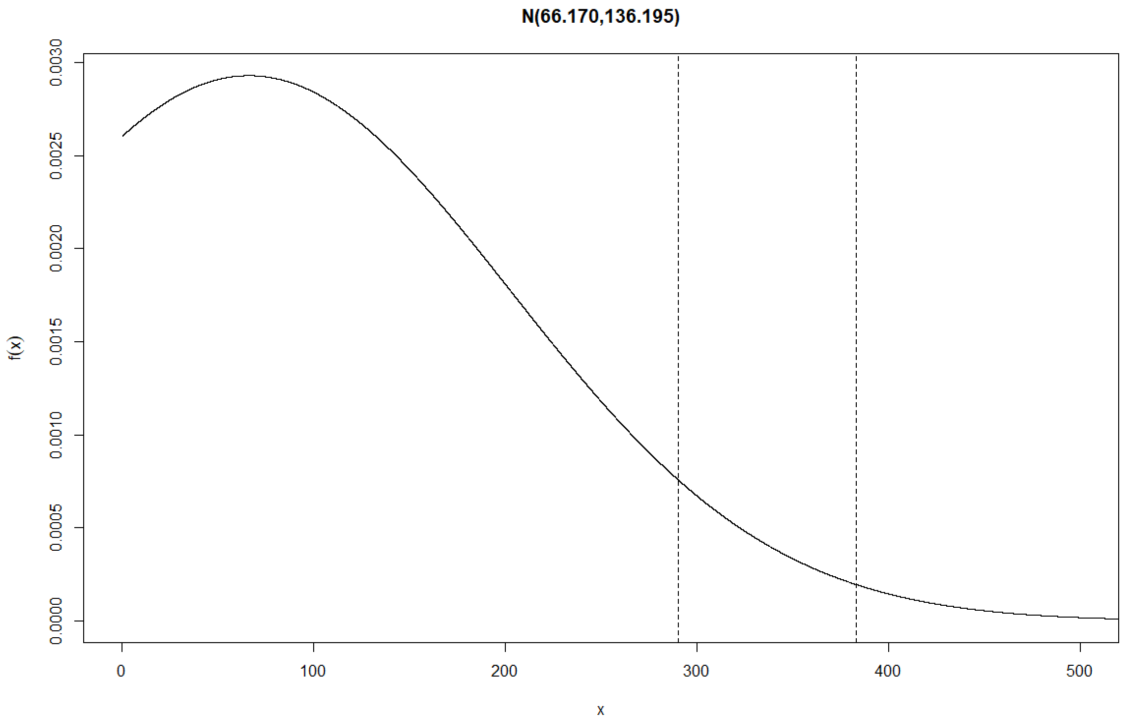
- Στην περίπτωση της αξίας σε κίνδυνο θα πάρουμε ένα δείγμα πεντακοσίων τιμών από κανονική κατανομή με μέσο 60 και τυπική απόκλιση 130. Έπειτα, θα θεωρήσουμε ότι το δείγμα μας αποτυπώνει πραγματικά δεδομένα και ότι δεν έχουμε πληροφορία για την κατανομή των 500 τιμών που εκφράζουν ασφαλιστικές απώλειες. Για την εύρεση της αξίας σε κίνδυνο, χρειάζεται να βρούμε την κατανομή που ακολουθούν τα δεδομένα μας. Αρχικά θα κατασκευάσουμε το QQ γράφημα για να εξακριβώσουμε εάν τα δεδομένα μας ακολουθούν κανονική κατανομή.



Σχήμα 2.3.1

Από το QQ γράφημα στο Σχήμα 2.3.1, φαίνεται ότι τα σημεία του γραφήματος είναι κοντά σε ευθεία γραμμή. Επομένως, τα δεδομένα ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Εν συνεχεία, θα εκτιμηθούν οι παράμετροι της μέσης τιμής και της διακύμανσης της κανονικής κατανομής που ακολουθεί το δείγμα μας. Η εκτίμηση θα πραγματοποιηθεί με την χρήση της μεθόδου της μέγιστης πιθανοφάνειας. Συγκεκριμένα, οι εκτιμητές για την μέση τιμή και για την τυπική απόκλιση είναι 66,170 και 136,195 αντίστοιχα. Για την παραμετρική εκτίμηση της αξίας σε κινδύνου για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και 99%, θα υπολογιστούν τα 95% και 99% ποσοστημόρια της κατανομής $N(66{,}170{,}136{,}195)$, τα οποία έχουν τιμές 290,191 και 383,007 αντίστοιχα.



Σχήμα 2.3.2

Επίσης, από το Σχήμα 2.3.2 φαίνεται ότι τα δεδομένα κατανέμονται κανονικά και οι διακεκομμένες γραμμές δείχνουν τις τιμές της αξίας σε κίνδυνο για τα επίπεδα εμπιστοσύνης 95% και 99%.

Ο κώδικας για το R-studio είναι ο κάτωθι:

```
set.seed(878)
 n<-500
 x<-rnorm(n,60,130)
qqnorm(x)
neglogL<-function(z){
     (n/2)*log(2*pi)+(n/2)*log(2*z[2])+(1/(2*z[2]))*sum((x-z[1])^2)}
estimators<-nlm(neglogL,c(40,120))
mu<-66.170
sigma<-136.195
xs<-seq(mu-66,mu+300,by=0.01)
ys<-dnorm(xs,mu,sigma)
plot(xs,ys,type="l",xlim=c(0,500),main="N(66.170,136.195)",xlab="x",
ylab=expression(f(x)))
abline(v=qnorm(0.95,mu, sigma),lty=2)
abline(v=qnorm(0.99,mu, sigma),lty=2)
```

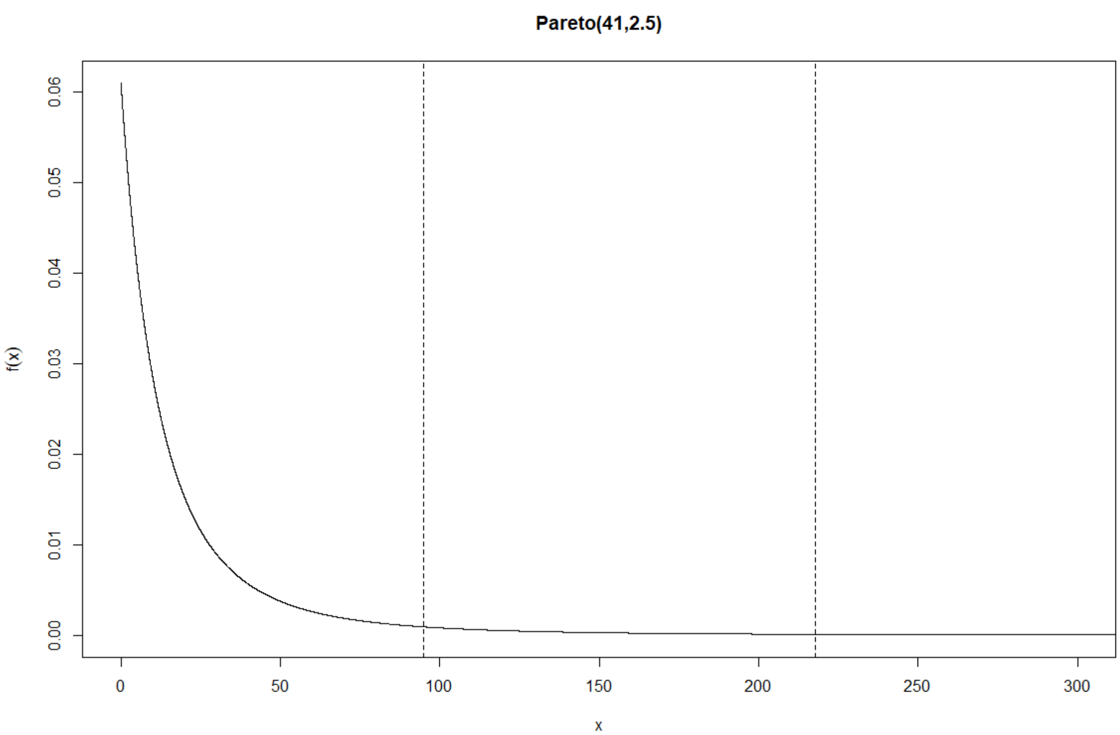
(II)

- Η Pareto κατανομή έχει βαριά (δεξιά) ουρά, επομένως δεν ορίζεται η ροπογεννήτρια της. Γι αυτόν τον λόγο δεν μπορεί να υπολογιστεί και η εκθετική αρχή ασφαλίστρου, καθώς δεν ορίζεται η ροπογεννήτρια $M_X(\alpha) = \mathrm{E}[e^{\alpha X}]$ στην Pareto κατανομή.

- Όμως, για την αξία σε κίνδυνο οι κατανομές με βαριά (δεξιά) ουρά ορίζονται. Εάν X είναι η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει ασφαλιστικές ζημιές, η οποία ακολουθεί κατανομή Pareto με γ=2,5 και θ=41 και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας να είναι

$$f_X(x) = \frac{\gamma\theta^{\gamma}}{(\theta - x)^{\gamma+1}}$$

Τότε η αξία σε κίνδυνο για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% είναι 94,892 , ενώ για επίπεδο εμπιστοσύνης 99% είναι 217,692. Η τιμής του $(1-\alpha)\%$ποσοστημορίου για την κατανομή Pareto, υπολογίζεται από τον τύπο $\Pr[X \leq Q_{1-\alpha}] = 0.95 \Leftrightarrow Q_{1-\alpha} = \frac{\theta}{(1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}} - \theta$



Σχήμα 2.3.3

Από το Σχήμα 2.3.3 φαίνεται ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κατανομή με βαρια ουρά, καθώς όσο αυξάνονται οι τιμές της τ.μ. X η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ μειώνεται με φθίνοντα ρυθμό. Αυτό φαίνεται και στην μεγάλη διαφορά που έχουν οι τιμές της VaR μεταξύ των επιπέδων εμπιστοσύνης 95% και 99%.

Ο κώδικας για το Rstudio

```
theta<-41
g<-2.5
q<-theta/(1-0.95)^(1/g)-theta
mu<-33
xs<-seq(mu-33,mu+300,by=0.01)
 for(i in 1:length(xs)){
    f[i]<-g*(theta^g)/(theta+xs[i])^(g+1)
         }
plot(xs,f,type="l",xlim=c(0,300),main="Pareto(41,2.5)",xlab="x",ylab=expression(f(x)))
abline(v=q<-theta/(1-0.95)^(1/g)-theta,lty=2)
abline(v=q<-theta/(1-0.99)^(1/g)-theta,lty=2)
```

3. Μέτρα κινδύνου (Monetary risk measure)

Έστω ένας μετρήσιμος χώρος που εκφράζει τις πιθανές καταστάσεις $(\Omega, \mathscr{F})$ και $\mathcal{X}$ το σύνολο των μετρήσιμων συναρτήσεων $X: \Omega \to \mathscr{R}$, όπου $X(\omega)$ εκφράζει την απόδοση ενός χαρτοφυλακίου η οποιουδήποτε αξιόγραφου.

Ο βασικός σκοπός ενός μέτρου κινδύνου είναι να ποσοτικοποιηθεί ο κίνδυνος μιας επένδυσης, ώστε ο επενδυτής να γνωρίζει το ποσό του κεφάλαιο που θα διακρατήσει για την κάλυψη ενδεχόμενης απώλειας.

Ορισμός 3.1: Μια συνάρτηση $\rho : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ με $\rho(0) \in \mathbb{R}$ ονομάζεται μέτρο κινδύνου (monetary risk measure) εάν για κάθε $X, Y \in \mathcal{X}$ ισχύουν τα εξής:

i. Μονοτονία (monotonicity): Εάν $X \leq Y$ τότε $\rho(X) \geq \rho(Y)$

ii. Αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές (translation invariance): Εάν $\alpha \epsilon R$ τοτε $\rho(X + m) = \rho(X) - m$

Για την ερμηνεία της ιδιότητας της μονοτονίας, υποθέτουμε ένα χαρτοφυλάκιο Y να έχει μεγαλύτερες μελλοντικές αποδόσεις από ένα χαρτοφυλάκιο X, τότε σε αυτήν την περίπτωση το χαρτοφυλάκιο X αναμένεται να έχει υψηλότερο κίνδυνο συγκριτικά με το χαρτοφυλάκιο Y, σε οποιοδήποτε ενδεχόμενη κατάσταση. Για παράδειγμα, εάν τώρα το X είναι ένα δικαίωμα προαίρεσης αγοράς (call option)[1] σε μία μετοχή, και το Y είναι ένα δικαίωμα προαίρεσης αγοράς (call option) με μικρότερη τιμή εξάσκησης, τότε η τιμή του παραγώγου Y θα έχει μεγαλύτερη τιμή έναντι του παραγώγου X. Εν τέλει, ο κάτοχος του δικαιώματος προαίρεσης αγοράς Y διατρέχει λιγότερο κίνδυνο απ τον κάτοχο του παράγωγο X.

Η ιδιότητα του αναλλοίωτου ως προς τις μεταφορές υποδεικνύει πως εάν σε μια επένδυση αξιόγραφου προστεθεί ένα σταθερό ποσό χρημάτων m, τότε ο κίνδυνος αυτής της επένδυσης μειώνεται κατά το ποσό χρημάτων που προστέθηκε επιπλέον. Συγκεκριμένα, αν το m είναι το κεφάλαιο που ο επενδυτή χρειάζεται ώστε να καλυφθεί ο

[1] Ένα call option (Ευρωπαϊκού τύπου) επί ενός υποκείμενου στοιχείου A, με τιμή εξάσκησης K και ημερομηνία λήξης T, παρέχει στον κάτοχο του το δικαίωμα να αγοράσει το υποκείμενο στοιχείο A στην τιμή K τη χρονική στιγμή T.

ενδεχόμενος κίνδυνος της επένδυσης Y, δηλαδή $m = \rho(Y)$, τότε εάν προστεθεί στην επένδυση, ο συνολικός κίνδυνος θα πρέπει να μηδενιστεί, $\rho(Y + m) = 0$.

Εάν ρ είναι ένα μέτρο κινδύνου, τότε το σύνολο

$$\mathcal{A}_\rho := \{X \in \mathcal{X} | \rho(X) \leq 0\} \quad (1)$$

ονομάζεται αποδεκτό σύνολο του μέτρου ρ, και το ρ μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω του αποδεκτού συνόλου:

$$\rho(X) = inf\{m \in R | X + m \in \mathcal{A}_\rho\}$$

Συνεπώς, ένα μέτρο κινδύνου μπορεί να θεωρηθεί ως μια κεφαλαιακή απαίτηση.
Δηλαδή, το $\rho(X)$ εκφράζει το ελάχιστο κεφάλαιο που πρέπει είναι διαθέσιμο, ώστε μια επένδυση X να είναι αποδεκτή.

Το αποδεκτό σύνολο $\mathcal{A}_\rho$ είναι μη αρνητικό και ικανοποιεί τις κάτωθι ιδιότητες:

- $inf\{m \in \mathbb{R} \mid m \in \mathcal{A}_\rho\} > -\infty$

- $X \in \mathcal{A}_\rho, Y \in \mathcal{X}, Y \geq X \Longrightarrow Y \in \mathcal{A}_\rho$

3.1 Συνεπή μέτρα κινδύνου (Coherent risk measures)

Ορισμός 3.1.1:Ένα συνεπές μέτρο κινδύνου (Coherent risk measure) ορίζεται μέσω μιας απεικόνισης ρ: $\mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει τις εξής ιδιότητες για κάθε $X, Y \in \mathcal{X}$:

i. Μονοτονία (monotonicity): Εάν $X \leq Y$,τότε ρ(X) ≥ ρ(Y)

ii. Αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές (translation invariance): Εάν $\alpha \,\epsilon \mathbb{R}$ τότε $\rho(X+m) = \rho(X) - m$

iii. Υπο-αθροιστικότητα (subadditivity) : $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

Εάν X και Y οι αποδόσεις ενός χαρτοφυλακίου, τότε ο κίνδυνος της ένωσης των δυο χαρτοφυλακίων δεν δημιουργεί επιπλέον κίνδυνο. Γι αυτό και είναι μικρότερος από το άθροισμα των κινδύνων του κάθε χαρτοφυλακίου ξεχωριστά. Αυτή η ιδιότητα σχετίζεται με την λογική της μείωσης του κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου μέσω της διαφοροποίηση του.

iv. Θετική ομογένεια (positive homogeneity): Αν $\lambda \geq 0$, τότε $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$

Έστω α ένας θετικός αριθμός, εάν σε μια απόδοση αξιόγραφου X πολλαπλασιαστεί ο αριθμός α, τότε το μέτρο $\rho(\alpha X)$ θα ισούται με α φορές το μέτρο $\rho(X)$.

Καθώς, η θετική τιμή ενός συνεπούς μέτρου $\rho(X) \geq 0$ δηλώνει το κεφάλαιο που διακρατείται για να καλυφθεί ο πιθανός κίνδυνος από κάποια επένδυση X, τοτε το αποδεκτό σύνολο $\mathcal{A}$ του ρ ορίζεται από το σύνολο:

$\mathcal{A}_\rho := \{X \in \mathcal{X} | \rho(\mathrm{X}) \leq 0\}$

Θεωρώντας ένα πεπερασμένο δειγματικό χώρο, τότε:
Αν $\mathcal{A}$ ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$\mathcal{A} \supseteq \{X \in \mathcal{X} : X \geq 0\}$

$\mathcal{A} \cap \{X \in \mathcal{X}: X \leq 0$ με $\mathrm{X}(\omega) < 0$ για κάθε $\omega \in \Omega\} = \emptyset$

$\mathcal{A}$ είναι κυρτός κώνος,

τότε $\rho_{\mathcal{A}}(X) = inf\{m \in R | X + m \in \mathcal{A}_\rho\}$ είναι συνεπές μέτρο. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή εάν ρ(X) είναι συνεπές μέτρο, τότε το $\mathcal{A}_\rho$ ικανοποιεί τις άνω ιδιότητες.

Παράδειγμα 3.1.1: Έστω δειγματικός χώρος ο οποίος αποτελείται από δυο στοιχεία, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.
Να βρεθεί το συνεπές μέτρο $\rho_{\mathcal{A}}$ που σχετίζεται με το αποδεκτό σύνολο
$\mathcal{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -2x; y \geq -\frac{x}{2}\right\}$

Να εξακριβωθεί ποια επένδυση είναι προτιμητέα σχετιζόμενη με το μέτρο κινδύνου $\rho_{\mathcal{A}}(X)$:

$$X_1 = \begin{cases} -30, & \omega_1 \\ 60, & \omega_2 \end{cases}, \quad X_2 = 0$$

Λύση

Είναι εύκολο να αποδειχτεί πως το σύνολο $\mathcal{A}$ ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες για τα συνεπή μέτρα. Οπότε το μέτρο κινδύνου που σχετίζεται με το $\mathcal{A}$ είναι συνεπές.

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) = inf\{m \in R | X + m \in \mathcal{A}_\rho\}$$

Καθώς $(X(\omega_1), X(\omega_2)) \in \mathbb{R}^2$, τότε το $m + X \in \mathcal{A}$ αν και μόνο αν

$$\begin{cases} m + X(\omega_2) \geq -2\big(m + X(\omega_1)\big) \\ m + X(\omega_2) \geq -\dfrac{m + X(\omega_1)}{2} \end{cases} \begin{cases} m \geq -\dfrac{2}{3}X(\omega_1) - \dfrac{1}{3}X(\omega_2) \\ m \geq -\dfrac{1}{3}X(\omega_1) - \dfrac{2}{3}X(\omega_2) \end{cases}$$

Συνεπάγεται ότι

$$m \geq sup\left\{-\frac{2}{3}X(\omega_1) - \frac{1}{3}X(\omega_2); -\frac{1}{3}X(\omega_1) - \frac{2}{3}X(\omega_2)\right\}$$

Επομένως,

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) = sup\left\{-\frac{2}{3}X(\omega_1) - \frac{1}{3}X(\omega_2); -\frac{1}{3}X(\omega_1) - \frac{2}{3}X(\omega_2)\right\}$$

Τέλος, θα υπολογίσουμε το μέτρο $\rho_{\mathcal{A}}(X)$ για τις μεταβλητές X_1, X_2

$$\rho_{\mathcal{A}}(X_1) = \sup\left\{-\frac{2}{3} \cdot (-30) - \frac{1}{3} \cdot 60; -\frac{1}{3} \cdot (-30) - \frac{2}{3} \cdot 60\right\} = -30$$

$$\rho_{\mathcal{A}}(X_2) = 0$$

Συμπεραίνουμε ότι και οι δύο επιλογές X_1, X_2 είναι αποδεκτές, παρόλο που η X_1είναι προτιμότερη από την X_2

Ορισμός 3.1.2: Η απεικόνιση $\rho: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ είναι ένα συνεπές μέτρο αν και μόνο αν υπάρχει υποσύνολο του $\mathcal{Q}$στο $\mathscr{M}_{1,f}(\mathbb{P})$ τέτοιο ώστε:

$$\rho_{\mathcal{Q}}(X) = \underset{Q \in \mathcal{Q}}{sup}\big(E_Q[-X]\big) \qquad X \in \mathcal{X}$$

Όπου $\mathscr{M}_{1,f}(\mathbb{P}) := \mathscr{M}_{1,f}(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ είναι το σύνολο όλων των πεπερασμένων και προσθετικών συναρτήσεων συνόλου $Q: \mathscr{F} \to [0,1]$.

Παράδειγμα 3.1.2: Να αποδειχτεί ότι το $\rho_{\mathcal{Q}}(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}}\big(E_Q[-X]\big)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες του συνεπούς μέτρου κινδύνου.

Απόδειξη

Για την ιδιότητα της υπο-αθροιστικότητας

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{Q}}(X+Y) &= \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[-X-Y] \\ &= \sup_{Q \in \mathcal{Q}}\big\{E_Q[-X] + E_Q[-Y]\big\} \\ &\leq \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[-X] + \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E[-Y] = \rho_{\mathcal{Q}}(X) + \rho_{\mathcal{Q}}(Y).\end{aligned}$$

Για την ιδιότητα της θετικής ομογένειας

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{Q}}(\lambda X) &= \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[-\lambda X] \\ &= \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \lambda E_Q[-X] \\ &= \lambda > 0 \lambda \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[-X] \\ &= \lambda \rho_{\mathcal{Q}}(X)\end{aligned}$$

Για την ιδιότητα της μονοτονίας

$$\text{Αν } X \leq Y \Leftrightarrow -X \geq -Y$$

$$E_Q[-X] \geqslant E_Q[-Y] \Leftrightarrow \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[-X] \geqslant \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[-Y]$$
$$\Leftrightarrow \rho_Q(X) \geqslant \rho_Q(Y).$$

Τέλος, για την ιδιότητα αναλλοίωτου ως προς τις μεταφορές

$$E_Q[-X-m] = E_Q[-X] - m \Leftrightarrow \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[-X-m] = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[-X] - m$$
$$\Leftrightarrow \rho_Q(X+m) = \rho_Q(X) - m.$$

Αφού ικανοποιούνται όλες οι ιδιότητες του ορισμού 3.1.1, τότε το μέτρο $\rho_Q(X)$ είναι συνεπές μέτρο κινδύνου.

3.2 Κυρτά μέτρα κινδύνου (Convex risk measures)

Έστω $\mathcal{X}$ είναι το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών $X: \Omega \to \mathbb{R}$, οι οποίες εκφράζουν τις μελλοντικές αποδόσεις μιας επένδυσης που ορίζονται στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Επιπλέον, με Ω ορίζεται ο προκαθορισμένος χώρος καταστάσεων, με $|\Omega|$ να είναι πεπερασμένο. Τέλος, το $X(\omega)$ εκφράζει την απόδοση μιας επένδυσης στην κατάσταση $\omega \in \Omega$.

Ορισμός 3.2.1: Η συνάρτηση $\rho: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται κυρτό μέτρο κινδύνου εάν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες για όλα τα $X, Y \in \mathcal{X}$

i. Κυρτότητα (convexity): $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$

Η ιδιότητα της κυρτότητας σχετίζεται με την μείωση του κινδύνου μέσω της διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου. Ο συνολικός κίνδυνος σε δύο χαρτοφυλάκια μειώνεται όταν σταθμιστούν σε ένα μικτό χαρτοφυλάκιο. Αυτή η διαπίστωση είναι εμφανής με την με την ανισότητα:
$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \le \rho(X) \vee \rho(Y)$, η οποία προκύπτει από την κυρτότητα και ονομάζεται ημι-κυρτότητα (quasi-convexity).

ii. Μονοτονία (monotonicity): Εάν $X \le Y$,τότε $\rho(X) \ge \rho(Y)$

iii. Αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές (translation invariance): Εάν $m \epsilon \mathbb{R}$ τοτε $\rho(X+m) = \rho(X) - m$

Ορισμός 3.2.2: Εάν ρ είναι ένα κυρτό μέτρο κινδύνου, τότε το σύνολο

$$\mathcal{A}_\rho := \{X \in \mathcal{X} | \rho(\mathrm{X}) \le 0\}$$

ονομάζεται αποδεκτό σύνολο του ρ.

Ορισμός 3.2.3: Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ να είναι το σύνολο αποδεκτών τυχαίων μεταβλητών. Για $X \epsilon \mathcal{X}$, αυτό το σύνολο σχετίζεται με το κάτωθι μέτρο κινδύνου $\rho_{\mathcal{A}}$

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) = inf\{m \in R | X + m \in \mathcal{A}_\rho\}$$

Η ερμηνεία του δεν διαφέρει με αυτήν του μέτρου κινδύνου. Δηλαδή, το $\rho_{\mathcal{A}}(X)$ δηλώνει το ποσό του κεφαλαίου που πρέπει να συμπληρωθεί σε ένα χαρτοφυλάκιο, ώστε ο κίνδυνος της επένδυσης να είναι διαχειρίσιμος και να ανήκει στο αποδεκτό σύνολο $\mathcal{A}$.

Πρόταση 3.2.1: Εάν ρ ένα κυρτό μέτρο κινδύνου με αποδεκτό σύνολο $\mathcal{A}_\rho$. Τότε

i. $\rho_{\mathcal{A}}(X) = \rho$
ii. $\mathcal{A}_\rho$ είναι ένα μη κενό και κυρτό σύνολο
iii. Εάν X ∈ $\mathcal{A}_\rho$ και Y ∈ $\mathcal{X}$ τέτοια ώστε $X \le Y$, τότε Y∈ $\mathcal{A}_\rho$
iv. Εάν ρ είναι ένα συνεπές μέτρο κινδύνου, τότε το $\mathcal{A}_\rho$ είναι κυρτός κώνος

Αντίστροφα, αν $\mathcal{A}$ είναι ένα μη κενό και κυρτό υποσύνολο του $\mathcal{X}$, το οποίο ικανοποιεί την τρίτη ιδιότητα πιο πάνω, τότε

v. Το $\rho_{\mathcal{A}}$ είναι κυρτό μέτρο κινδύνου
vi. Εάν $\mathcal{A}$ είναι κυρτός κώνος, τότε $\rho_{\mathcal{A}}$ είναι ένα συνεπές μέτρο κινδύνου

Απόδειξη

i. Για κάθε X ∈ $\mathcal{A}_\rho$

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{A}_\rho}(X) &= inf\{m \in \mathbb{R}: m + X \in \mathcal{A}_\rho\} \\ &= inf\{m \in \mathbb{R}: m + X \in \{Y \in \mathcal{X}: \rho(Y) \leq 0\}\} \\ &= inf\{m \in \mathbb{R}: \rho(m + X) \leq 0\} \\ &= inf\{m \in \mathbb{R}: \rho(X) - m \leq 0\} \\ &= inf\{m \in \mathbb{R}: \rho(X) \leq m\} \\ &= \rho(X) \end{aligned}$$

Όπου στην συγκεκριμένη απόδειξη χρησιμοποιήθηκαν οι ορισμοί 3.2.1 και 3.2.3 για τα κυρτά μέτρα κινδύνου και για το αποδεκτό τους σύνολο τους αντίστοιχα.

ii. Το $\mathcal{A}_\rho \neq \emptyset$ επειδή $X = 0 \in \mathcal{A}_\rho$, Επίσης, το ρ είναι κυρτή συνάρτηση, καθώς το $\mathcal{A}_\rho$ είναι κυρτό σύνολο.

iii. Επειδή το $X \in \mathcal{A}_\rho$,τότε το $\rho(X) \leq 0$. Επίσης, για $Y \in \mathcal{X}$ ισχύει ότι $X \leq Y$, και από ορισμό 3.2.1 ισχύει ότι $\rho(Y) \leq \rho(X)$.Επομένως:

$$\rho(Y) \leq \rho(X) \leq 0$$

Η τελευταία σχέση συνεπάγει ότι το $Y \in \mathcal{A}_\rho$ από τον ορισμό 3.2.3 του αποδεκτού συνόλου.

iv. Εάν το ρ είναι ένα συνεπές μέτρο με $X, Y \in \mathcal{A}_\rho$ και $\alpha, \beta \geq 0$. Τότε, από την θετική ομογένεια και την προσθετικότητα του συνεπούς μέτρου κινδύνου, ισχύει ότι:

$\rho(\alpha X + \beta Y) \leq \alpha\rho(X) + \beta\rho(Y) \leq \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$

Οπότε αX + βY ∈ $\mathcal{A}_\rho$, οπότε το $\mathcal{A}_\rho$ είναι κυρτός κώνος (από ορισμό του κυρτού κώνου)

v. Για να αποδειχτεί πως $\rho_{\mathcal{A}} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ είναι κυρτό μέτρο κινδύνου, θα πρέπει να ικανοποιεί της ιδιότητες του ορισμού 3.2.1. Οπότε, για $0 \leq \lambda \leq 1$, $X, Y \in \mathcal{X}$, θα εξετάσουμε τις εξης περιπτώσεις:

Για την ιδιότητα της κυρτότητας

$$
\begin{aligned}
\rho_{\mathcal{A}}(\lambda X + (1-\lambda)Y) &= inf\{m \in \mathbb{R}: m + \lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathcal{A}\} \\
&\leq \lambda inf\{m \in \mathbb{R}: m + X \in \mathcal{A}\} \\
&\quad +(1-\lambda) inf\{m \in \mathbb{R}: m + Y \in \mathcal{A}\} \\
&= \lambda \rho_{\mathcal{A}}(X) + (1-\lambda)\rho_{\mathcal{A}}(Y)
\end{aligned}
$$

Για την ιδιότητα της μονοτονίας

Εάν $Y, X \in \mathcal{X}$ και ισχύει ότι $X \leq Y$

$$
\begin{aligned}
\rho_{\mathcal{A}}(X) &= inf\{m \in \mathbb{R}: m + X \in \mathcal{A}\} \\
&\geq inf\{m \in \mathbb{R}: m + X \in \mathcal{A}\} \\
&= \rho_{\mathcal{A}}(Y)
\end{aligned}
$$

Για την ιδιότητα των αναλλοίωτων στις μεταφορές

Για $\kappa \in \mathbb{R}$ και $X \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\rho_{\mathcal{A}}(X + k) &= inf\{m \in \mathbb{R}: m + X + k \in \mathcal{A}\} \\
&= inf\{s - k \in \mathbb{R}: s + X \in \mathcal{A}\} \\
&= inf\{s \in \mathbb{R}: s + X \in \mathcal{A}\} - k \\
&= \rho_{\mathcal{A}}(X) - k.
\end{aligned}
$$

Επομένως, το μέτρο $\rho_{\mathcal{A}}$ ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες του κυρτού μέτρου. Αυτό συνεπάγει ότι το $\rho_{\mathcal{A}}$ είναι ένα κυρτό μέτρο κινδύνου.

vi. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη απόδειξη, για να αποδείξω ότι το μέτρο $\rho_{\mathcal{A}}$ είναι συνεπές , αρκεί να αποδείξω ότι ικανοποιεί την θετική ομογένεια:

$$
\begin{aligned}
\rho_{\mathcal{A}}(\alpha X) &= inf\{m \in \mathbb{R}: m + \alpha X \in \mathcal{A}\} \\
&= inf\left\{m \in \mathbb{R}: \alpha\left(\frac{m}{\alpha} + X\right) \in \mathcal{A}\right\} \\
&= inf\left\{m \in \mathbb{R}: \frac{m}{\alpha} + X \in \mathcal{A}\right\} \\
&= inf\{\alpha k \in \mathbb{R}: k + X \in \mathcal{A}\} \\
&= \alpha inf\{k \in \mathbb{R}: k + X \in \mathcal{A}\} \\
&= \alpha \rho_{\mathcal{A}}(X)
\end{aligned}
$$

Αφού το μέτρο $\rho_{\mathcal{A}}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες της μονοτονία, της κυρτότητα, του αναλλοίωτου ως προς τις μεταφορές και της θετικής ομογένειας, έπεται ότι είναι συνεπές μέτρο κινδύνου από ορισμό 3.1.1.

Ορισμός 3.2.4: Υποθέτουμε ότι το Ω είναι πεπερασμένο. Τότε, κάθε κυρτό μέτρο κινδύνου $\rho: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ μπορεί να αναπαρασταθεί με την μορφή:

$$
\rho(X) = \sup_{Q \in \mathbb{P}}\{E_Q[-X] - a(Q)\}
$$

Όπου E_Q δηλώνει την αναμενόμενη τιμή με μέτρο πιθανότητας Q και $\alpha: \mathbb{P} \to (-\infty, +\infty]$ είναι η εξίσωση penalty, η οποία είναι κυρτή και κλειστή.

Απόδειξη

Για να αποδείξουμε ότι $\rho(X)$ είναι κυρτό μέτρο πιθανότητας, θα πρέπει να αποδειχτεί ότι ικανοποιεί τις ιδιότητες του ορισμού 3.2.1

Για την απόδειξη της κυρτότητας, εάν $\lambda \in [0,1], m \in \mathbb{R}, X, Y \in \mathcal{X}$

$$\begin{aligned}\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) &= \sup_{Q\in\mathbb{P}}\{E_Q[-(\lambda X + (1-\lambda)Y)] - \alpha(Q)\} \\ &= \sup_{Q\in\mathbb{P}}\{\lambda E_Q[-X] + (1-\lambda)E_Q[-Y] - \alpha(Q)\} \\ &\leq \lambda \sup_{Q\in\mathbb{P}}\{E_Q[-X] - \alpha(Q)\} \\ &\quad + (1-\lambda)\sup_{Q\in\mathbb{P}}\{E_Q[-Y] - \alpha(Q)\} \\ &= \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y).\end{aligned}$$

Για την απόδειξη της μονοτονίας, υποθέτουμε ότι $X \leq Y \Leftrightarrow -X \geq -Y$,οπότε

$$\begin{aligned}\rho(X) &= \sup_{Q\in\mathbb{P}}\{E_Q[-X] - \alpha(Q)\} \\ &\geq \sup_{Q\in\mathbb{P}}\{E_Q[-Y] - \alpha(Q)\} \\ &= \rho(Y)\end{aligned}$$

Τέλος, για την απόδειξη του αναλλοίωτου ως προς τις κατανομές

$$\begin{aligned}\rho(X + m\mathbf{1}) &= \sup_{Q\in\mathbb{P}}\{E_Q[-(X + m\mathbf{1})] - \alpha(Q)\} \\ &= \sup_{Q\in\mathbb{P}}\{E_Q[-X] - mE_Q[\mathbf{1}] - \alpha(Q)\} \\ &= \sup_{Q\in\mathbb{P}}\{E_Q[-X] - m - \alpha(Q)\} \\ &= \sup_{Q\in\mathbb{P}}\{E_Q[-X] - \alpha(Q)\} - m \\ &= \rho(X) - m\end{aligned}$$

Άρα, το μέτρο $\rho(X)$ είναι κυρτό μέτρο κινδύνου, καθώς ικανοποιεί τις άνω ιδιότητες.

Πρόταση 3.2.2: Τα συνεπή μέτρα κινδύνου είναι κυρτά μέτρα κινδύνου. Το αντίστροφο ισχύει στην περίπτωση που το $\mathcal{A}$ είναι κυρτός κώνος (από πρόταση 3.2.1 και ιδιότητα έξι).

Απόδειξη

Έστω $\lambda \in [0,1]$, $X, Y \in \mathcal{X}$, και $\rho: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ είναι ένα συνεπές μέτρο.
Οπότε από την αρχή της υπο-αθροιστικότητας ισχύει:

$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \rho(\lambda X) + \rho((1 - \lambda)Y) \Leftrightarrow$(από θετική ομοιογένεια)

$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$

Αφού ικανοποιείται η ιδιότητα της κυρτότητας, το μέτρο ρ είναι κυρτό μέτρο κινδύνου.

3.3 Συνδυασμός συναρτησιακών κινδύνων με συνεπή μέτρα

Στην παρούσα ενότητα θα γίνει αναφορά στα συνεπή και αναλλοίωτα ως προς τις κατανομές μέτρα κινδύνου (law invariant coherent risk measures), τα οποία παρουσιάστηκαν πρώτη φορά από τον Kusuoka (2001). Τα συγκεκριμένα μέτρα συνδυάζουν τις έννοιες των συναρτησιακών κινδύνων, δηλαδή τα μέτρα που είναι αναλλοίωτα ως προς τις κατανομές (law invariant), και των συνεπών μέτρων (coherent risk measure). Επίσης, οι Inui και Kijima (2004) απέδειξαν ότι αυτά τα μέτρα είναι κυρτοί συνδυασμοί του αναμενόμενου ελλείμματος (Expected shortfall), χρησιμοποιώντας τον ορισμό για τα spectral μέτρα κίνδυνου που παρουσιάστηκαν από τον Acerbi (2002). Συγκεκριμένα, εάν υποθέτουμε μια τυχαία μεταβλητή X ανήκει στους πραγματικούς αριθμούς με χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, η οποία εκφράζει την απώλεια ή το κέδρος από μια επένδυση σε ένα χρηματοφυλάκιο. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X είναι η $F_X(x)$, και η αντίστροφη συνάρτηση ${F_X}^{-1}(x)$, $0 < x < 1$. Από Acerbi (2002), κάθε μέτρο κινδύνου με την μορφή $\int_0^1 F_X^{-1}(x)\phi(x)\mathrm{d}x$ είναι συνεπές και αναλλοίωτο ως προς τις κατανομές, εάν και μόνο αν το $\phi(x)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και φθίνουσα στο x. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα οι Inui και Kijima (2004) απέδειξαν ότι κάθε συνεπές spectral μέτρο κινδύνου είναι κυρτός συνδυασμός αναμενόμενου ελλείμματος (Expected shortfall).

Ορισμός 3.3.1(Expected shortfall): Το αναμενόμενο έλλειμμα (ES) με 100(1-α)% επίπεδο εμπιστοσύνης ορίζεται ως ακολούθως

$\mathrm{ES}_{1-\alpha} = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} F_X^{-1}(p)\mathrm{d}p$ (3.3)

Εάν θέσουμε το $100\%\alpha$-ποσοστημόριο της κατανομής $F_X(x)$ με x_a, τέτοιο ώστε $x_a = -VaR_{1-\alpha}$. Τότε, το $\mathrm{ES}_{1-\alpha}$ ισούται με

$$\mathrm{ES}_{1-\alpha} = \mathrm{VaR}_{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{x_\alpha} F_X(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{x_\alpha} x f_X(x)\mathrm{d}x = -E[X \mid X \leqslant x_\alpha]$$

Το ES υπολογίζει τον μέσο όρο για τις απώλειες που είναι μεγαλύτερες του VaR. Επίσης, το ES είναι περισσότερο συντηρητικό ως προς τον κίνδυνο συγκριτικά με το VaR , καθώς $\mathrm{ES}_{1-\alpha} \geq \mathrm{VaR}_{1-\alpha}$.

Ορισμός 3.3.2 (spectral risk measure): Εάν $\mathcal{A}$ είναι η τάξη των συναρτήσεων $\phi(p)$ που ορίζονται στο [0,1] με $\phi(p) \geq 0$, $\int_0^1 \varphi(p)\mathrm{d}p = 1$ και $\phi(p)$ είναι φθίνουσα στο p. Για τις αποδόσεις ενός χαρτοφυλακίου με συνάρτηση πιθανότητας $F_X(p)$, το spectral μέτρο κινδύνου έχει την μορφή

$$M_X = -\int_0^1 F_X^{-1}(p)\phi(p)\mathrm{d}p$$

Το spectral μέτρο κινδύνου M_X είναι αναλλοίωτο ως προς τις κατανομές (law invariant) και συνεπές μέτρο αν και μόνο αν $\varphi \in \mathcal{A}$. Εάν χρησιμοποιήσουμε την σχέση (3.3) και την ολοκλήρωση κατά παράγοντες τότε συνεπάγεται ότι

$$-\int_0^1 F_X^{-1}(p)\phi(p)\mathrm{d}p = \int_0^1 \mathrm{ES}_{1-\alpha}\mathrm{d}\mu(\alpha) - \phi(1)E[X]$$

Όπου $d\mu(\alpha) = -\alpha d\varphi(\alpha)$. Επισημαίνεται ότι για λόγους απλότητας το $\varphi(1) = 0$, καθώς για $\varphi \in \mathcal{A}$ το $\varphi(1) = 1$ δηλώνει ότι $\varphi(p) = 1$ για κάθε $p \in [0,1]$. Επίσης, το $\mu(\alpha)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνάρτηση κατανομής για τυχαίες μεταβλητές στο [0,1].

Εάν Y είναι μια τέτοια τυχαία μεταβλητή, τότε ακολουθεί ο χαρακτηρισμός ενός αναλλοίωτου ως προς τις κατανομές και συνεπούς μέτρου κινδύνου.

Πρόταση 3.3.2: Εάν $\varphi(1) = 0$ στον ορισμό 3.3.1, τότε ένα μέτρο κινδύνου M_X για X είναι συνεπές αν και μόνο αν έχει την εξής μορφή

$$M_X = E[\mathrm{ES}_{1-Y}]$$

Για κάποια τυχαία μεταβλητή Y, ανεξάρτητη από το X και ορισμένη στο $[0,1]$. Επομένως, κάθε αναλλοίωτο κατά νόμο (law invariant) συνεπές μέτρο κινδύνου είναι κυρτός συνδυασμός αναμενόμενου ελλείμματος (Expected shortfall).

3.4 Διαφορές μεταξύ συναρτησιακών κινδύνων και μέτρων κινδύνων.

Η βασική διαφορά ανάμεσα σε ένα συναρτησιακό κινδύνου και σε ένα μέτρου κινδύνου, εντοπίζεται στην ιδιότητα του πρώτου να είναι αναλλοίωτο ως προς τις κατανομές (law invariant), ενώ ένα μέτρο κινδύνου δεν ικανοποιεί απαραίτητα αυτήν την ιδιότητα. Για να αποδειχτεί αυτός ο ισχυρισμός, θα δοθεί αντιπαράδειγμα ενός συνεπούς μέτρου που δεν είναι αναλλοίωτο ως προς τις κατανομές (law invariant). Τέλος, θα αποδειχτεί πως ένα συναρτησιακό κινδύνου δεν είναι απαραίτητα συνεπές και κυρτό. Συγκεκριμένα, θα αποδειχτεί ότι το μέτρο VaR ικανοποιεί τις ιδιότητες της θετικής ομογένειας, της μονοτονίας και του αναλλοίωτου ως προς τις μεταθέσεις, εντούτοις δεν ικανοποιεί τις ιδιότητες της υπο-προσθετικότητας και της κυρτότητας.

Παράδειγμα 3.4.1: Να δοθεί ένα συνεπές μέτρο που δεν είναι αναλλοίωτο ως προς τις κατανομές.

Λύση

Αρχικά, δίνεται το παρακάτω μέτρο κινδύνου

$$\rho(X) = \sup\{\mathrm{E[X]}, \mathrm{E[X|Z} > z]\}$$

Το συγκεκριμένο μέτρο ισούται με το μέγιστο ανάμεσα στην προσδοκώμενη τιμή της μεταβλητής X και στην προσδοκώμενη τιμή της δεσμευμένης μεταβλητής X δοθέντος ότι το Z ξεπερνά ένα όριο. Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι αυτό το μέτρο έχει την μορφή του συνεπούς μέτρου από τον ορισμό 3.1.2. Καταρχήν, εάν θεωρήσουμε ότι το X είναι οι μελλοντικές απώλειες και το $\mathbb{P}$ εκφράζει το πραγματικό μέτρο πιθανότητας, τότε η προσδοκώμενη τιμή του X υπολογίζεται με βάση το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ και δηλώνει το κεφάλαιο που διακρατείται για να καλύψει τις απώλειες του X. Εάν υποθέσουμε ότι το X σχετίζεται με χαρτοφυλάκιο ασφαλειών ζωής, τότε η προσδοκώμενη τιμή $\mathrm{E}[\mathrm{X}|\mathrm{Z} > \mathrm{z}]$ εκφράζει το κεφαλαίου που καλύπτει τον κίνδυνο σε ακραίες καταστάσεις, για παράδειγμα, όταν η θνησιμότητα είναι υψηλή (Z>z). Το μέτρο πιθανότητας το οποίο δηλώνει τις ακραίες καταστάσεις το ορίζουμε ως $Q[A] = P[A|Z > z]$ για γεγονότα A. Επομένως το μέτρο ρ ισοδύναμα μπορεί να γραφτεί ως:

$$\rho(X) = \sup\{E_{\mathbb{P}}[\mathrm{X}], \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[\mathrm{X}]\}$$

Αφού αποδείξαμε ότι το μέτρο ρ έχει την μορφή του ορισμού 3.1.2, τότε είναι και συνεπές μέτρο κινδύνου. Ωστόσο, δεν είναι και αναλλοίωτο ως προς τις κατανομές. Έστω Y και Z να είναι δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες ακολουθούν την ίδια κατανομή. Τότε ο υπολογισμός του $\rho(Y)$ δίνεται από τον κάτωθι τύπο:

$\rho(Y) = \sup\{\mathrm{E}[\mathrm{Y}], \mathrm{E}[\mathrm{Y}|\mathrm{Z} > \mathbb{z}]\} \Leftrightarrow$ από ανεξαρτησία των Y, Z

$\rho(Y) = E[Y]$ (3.4)

Για τον υπολογισμό του $\rho(Z)$

$\rho(Z) = \sup\{\mathrm{E}[\mathrm{Z}], \mathrm{E}[\mathrm{Z}|\mathrm{Z} > \mathbb{z}]\} \Leftrightarrow$

$\rho(Z) > E[\mathbb{z}]$ $\Leftrightarrow$ Επειδή Ζ και Υ έχουν ίδια κατανομή

$\rho(Z) > E[Y]$ $\Leftrightarrow$ Από (3.4)

$\rho(Z) > \rho[Y]$

Αφού $\rho(Z) \neq \rho[Y]$ το μέτρο ρ δεν είναι αναλλοίωτο ως προς τις κατανομές,

Παράδειγμα 3.4.2: Να αποδειχτεί ότι η αξία σε κίνδυνο (VaR) δεν ικανοποιεί τις ιδιότητες των κυρτών και των συνεπών μέτρων κινδύνων.

Απόδειξη

Αρχικά θα εξεταστεί εάν η αξία σε κίνδυνο ικανοποιεί τις ιδιότητες των συνεπών μέτρων. Εάν θεωρήσουμε ότι οι τ.μ. μεταβλητές εκφράζουν ασφαλιστικές απώλειες, τότε

Για την ιδιότητα της θετικής ομογένειας
Έστω $p \in (0,1)$ και $\alpha \geq 0$, τότε:
$\mathrm{VaR}_{1-p}(\alpha X) = inf\{x: \mathbf{P}(\alpha X \leq x) > 1-p\} = \alpha\, inf\left\{\frac{x}{\alpha}: \mathbf{P}\left(X \leq \frac{x}{\alpha}\right) > 1-p\right\} =$
$\alpha \mathrm{VaR}_{1-p}(X)$

Για την ιδιότητα της Μονοτονίας
Εάν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y εκφράζουν τον κίνδυνο και ισχύει ότι $X \leq Y$. Τότε, για $Y \leq s \Rightarrow X \leq s$ έχουμε $P(Y \leq s) \leq P(X \leq s)$. Επομένως

$$\{s: \mathbf{P}(X \leq s) \geq 1-p\} \supset \{s: \mathbf{P}(Y \leq s) \geq 1-p\}$$
$$\Rightarrow inf\{s: \mathbf{P}(X \leq s) \geq 1-p\} \leq inf\{s: \mathbf{P}(Y \leq s) \geq 1-p\}$$
$$\Rightarrow \mathrm{VaR}_{1-p}(X) \leq \mathrm{VaR}_{1-p}(Y).$$

Για την ιδιότητα του αναλλοίωτου ως προς τις μεταθέσεις

$$\mathrm{VaR}_{1-p}(X+k) = inf\{s: \mathbf{P}(X+k \leq s) \geq 1-p\} = inf\{s: \mathbf{P}(X \leq s-k) \geq 1-p\}$$
$$= k + inf\{s-k: \mathbf{P}(X \leq s-k) \geq 1-p\} = k + \mathrm{VaR}_{1-p}(X)$$

Συνεπώς, η αξία σε κίνδυνο ικανοποιεί τις άνω ιδιότητες, ωστόσο δεν ικανοποιεί την υπο-προσθετικότητα. Αυτό αποδεικνύεται με το κάτωθι αντιπαράδειγμα:

Εάν S και T ακολουθούν την κατανομή Pareto, με $S, T \sim$ Pareto(1,1) να είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Τότε για όλα τα $p \in (0,1)$, ισχύει ότι:

$$\mathrm{VaR}_{1-p}(S+T) > \mathrm{VaR}_{1-p}(S) + \mathrm{VaR}_{1-p}(T)$$

Η πάνω σχέση ισχύει διότι η αθροιστική συνάρτηση Pareto(1,1) δίνεται από τον τύπο $F_S(x) = 1 - \frac{1}{x}$ $, x > 1$. Οπότε η αξία σε κίνδυνο ισούται με $VaR_{1-p}(S) = \frac{1}{p}$. Εν συνεχεία, υπολογίζουμε την πιθανότητα το άθροισμα τον δύο μεταβλητών να είναι μικρότερη από ένα όριο t:

$$Pr[S+T \leq t] = 1 - \frac{2}{t} - 2\frac{log(t-1)}{t^2}, t > 2$$

Εάν αντικαταστήσουμε το t με το $2VaR_{1-p}(S)$, έχουμε:

$$Pr\left[S+T \leq 2VaR_{1-p}(S)\right] = 1-p-\frac{p^2}{2} log\left(\frac{2-p}{p}\right) < 1-p$$

Άρα αποδείξαμε ότι για κάθε p έχουμε $VaR_{1-p}[S] + VaR_{1-p}[T] < VaR_{1-p}[S+T]$. Αυτή η σχέση δηλώνει πως για το συγκεκριμένο ζεύγος S, T η αξία σε κίνδυνο ικανοποιεί την υπερ-προσθετικότητα και όχι την υπο-προσθετικότητα. Συνεπώς, η αξία σε κίνδυνο δεν είναι ένα συνεπές μέτρο.

Για την ιδιότητα της κυρτότητας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ζεύγος S, T που η αξία σε κίνδυνο ικανοποιεί την υπερ-προσθετικότητα. Έστω $\lambda \in [0,1]$, τότε από την ιδιότητα της υπερ-προσθετικότητας ισχύει:

$VaR_{1-p}(\lambda S + (1-\lambda)T) > VaR_{1-p}(\lambda S) + VaR_{1-p}((1-\lambda)T) \Leftrightarrow$ από θετική ομογένεια

$VaR_{1-p}(\lambda S + (1-\lambda)T) > \lambda VaR_{1-p}(S) + (1-\lambda)VaR_{1-p}(T)$

Επομένως, η αξία σε κίνδυνο (VaR) δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της κυρτότητας.

4.Το αναμενόμενο έλλειμμα (Expected shortfall)

Το αναμενόμενο έλλειμμα (Expected shortfall) σχετίζεται αρκετά με την αξία σε κίνδυνο, ωστόσο από την ανάλυση των Rockafellar και Uryasev (2002) και των Acerbi και Tasche (2002) αποδεικνύεται ότι είναι συνεπές μέτρο σε αντίθεση με την αξία σε κίνδυνο. Επίσης, μια άλλη διαφορά είναι πως το αναμενόμενο έλλειμμα δίνει καλύτερη πληροφορία ως προς τους ακραίους κινδύνους συγκριτικά με την VaR. Αυτό συνεπάγεται από το γεγονός ότι το αναμενόμενο έλλειμμα υπολογίζει την αναμενόμενη ζημιά η οποία συμβαίνει στις α 100% χειρότερες καταστάσεις που μπορεί να βρεθεί το χαρτοφυλάκιο.

Ορισμός 4.1: Έστω X μια τυχαία μεταβλητή που εκφράζει ασφαλιστικές απώλειες με $E(|L|) < \infty$ και F_X η αθροιστική συνάρτηση κατανομής, τότε το αναμενόμενο έλλειμμα σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha \in (0,1)$, ορίζεται ως

$$ES_{1-a} = \frac{1}{a}\int_{1-a}^{1} q_u\,(\mathrm{F_X})\mathrm{du}$$

Όπου $q_u(F_X) = {F_X}^{-1}(u)$ να είναι η συνάρτηση ποσοστημορίου. Επίσης, εάν η τ.μ. X εκφράζει αποδόσεις ενός χαρτοφυλακίου τότε το ES_{1-a} υπολογίζεται σύμφωνα με τον ορισμό 3.3.1.

Επίσης, το αναμενόμενο έλλειμμα μπορεί να γραφτεί και με βάση την VaR:

$$ES_{1-a} = \frac{1}{a}\int_{1-a}^{1} VaR_u\,(\mathrm{F_X})\mathrm{du}$$

Ουσιαστικά, το αναμενόμενο έλλειμμα είναι ο μέσος όρος της αξίας σε κίνδυνο για τα επίπεδα όπου $u \geq 1-\alpha$, γι αυτό και το μέτρο αυτό συνυπολογίζει τις ακραίες τιμές που βρίσκονται στην δεξιά ουρά κάποιας κατανομής ασφαλιστικών απωλειών. Είναι προφανές ότι το ES_{1-a} εξαρτάται μόνο από την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X και ισχύει ότι $ES_{1-a} \geq VaR_{1-a}$.

Ορισμός 4.2: Για μια ολοκληρώσιμη μεταβλητή ασφαλιστικής ζημιάς X, με συνεχή αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας F_X και για κάθε $\alpha \in (0,1)$, ισχύει ότι

$$ES_{1-a} = \frac{E(X; X \geq q_{1-a}(X))}{a} = E(X|\mathrm{X} \geq \mathrm{VaR}_{1-\alpha})$$

Ενώ στην περίπτωση που η τ.μ. X εκφράζει αποδόσεις χαρτοφυλακίου

$$ES_{1-a} = E(-X|\mathrm{X} \leq -\mathrm{VaR}_{1-\alpha})$$

Παράδειγμα 4.1 (διακριτές τιμές): Έστω X μια τυχαία μεταβλητή που εκφράζει ασφαλιστική ζημιά. Επίσης, δίνεται και η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής

$$X = \begin{cases} 0 & \text{για πιθανότητα } 0.9 \\ 100 & \text{για πιθανότητα } 0.06 \\ 1000 & \text{για πιθανότητα } 0.04 \end{cases}$$

Να υπολογιστεί το αναμενόμενο έλλειμμα για επίπεδο εμπιστοσύνης 90% και 95%.

Λύση

Αρχικά η τιμή του 90%ποσοστημορίου είναι $q_{0.90} = 0$, οπότε για κάθε τιμές του X που είναι μεγαλύτερες από το μηδέν, θα υπολογίσω την αναμενόμενη τιμή τους.

$$ES_{0.90} = E[X \mid X > 0] = \frac{(0.06)(100) + (0.04)(1000)}{0.10} = 460$$

Στην περίπτωση που ζητάμε το $ES_{0.90}$, υπολογίζουμε, πρώτα, την τιμή του 95%ποσοστημορίου που είναι $q_{0.96} = q_{0.95} = 100$. Έπειτα, υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή της X, για τις τιμές της X που είναι μεγαλύτερες από 100 είναι:

$$ES_{0.90} = E[X \mid X > 100] = \frac{(0.01)(100) + (0.04)(1000)}{0.05} = 820$$

Παράδειγμα 4.2 (συνεχείς τιμές): Έστω X οι αποδόσεις ενός χαρτοφυλακίου και 400 € είναι το κεφάλαιο που διακρατείται για να καλύψει τον ενδεχόμενο κίνδυνο του χαρτοφυλακίου. Εάν η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την Pareto κατανομή με παραμέτρους $x_0 = 100$ και $\alpha = 2$.Να υπολογιστεί το αναμενόμενο έλλειμμα για επίπεδο 10% του χαρτοφυλακίου.

Λύση

Ορίζω Y να αναπαριστά της αποδόσεις του χαρτοφυλακίου μαζί με το κεφάλαιο των 400 €, δηλαδή $Y = X + 400$. Ακόμα η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y είναι:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0; & \text{εαν } y < x_0 \\ 1 - \left(\frac{x_0}{y}\right)^{a}; & \text{εαν } y \geq x_0 \\ 0; & \text{εαν } y < x_0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \{a x_0^{a} y^{-a-1}; \quad \text{if } y \geq x_0$$

Στην κατανομή Pareto για να υπολογιστεί το α_0 ποσοστημόριο λύνεται η εξίσωση $F_Y(y) = \alpha_0$ ως προς y. Συγκεκριμένα,

$$\left(\frac{x_0}{y}\right)^{a} = 1 - \alpha_0$$

$$y = \frac{x_0}{(1-\alpha_0)^{1/a}} \quad (4.1)$$

Η Y ανήκει στο L^1, καθώς $E[X] = \frac{\alpha}{\alpha-1} x_0 = 200$, οπότε το αναμενόμενο έλλειμμα θα ισούται με $ES_{1-\alpha_0} = E_{\mathbb{P}}\left[-Y \mid Y \leq -\mathrm{VaR}_{1-\alpha_0}(Y)\right]$, Συνεπάγεται ότι,

$$ES_{1-\alpha_0}(Y) = E_{\mathbb{P}}\left[-Y \mid Y \leq -VaR_{1-\alpha_0}(Y)\right] = -\frac{E_{\mathbb{P}}\left[Y\mathbf{1}_{\{Y\leq -VaR_{1-\alpha_0}(Y)\}}\right]}{P\left(Y \leq -VaR_{1-\alpha_0}(Y)\right)} \qquad (4.2)$$

Από (4.1) αντικαθιστούμε όπου $-\mathrm{VaR}_{1-\alpha_0}(Y)$ την $y^* = \frac{x_0}{(1-\alpha_0)^{1/a}}$.

$$E_{\mathbb{P}}\left[Y\mathbf{1}_{\{Y\leq -VaR_{1-\alpha_0}(Y)\}}\right] = \int_{x_0}^{y^*} a x_0^a y^{-a} dy = \left[\frac{a}{1-a} x_0^a y^{1-a}\right]\Big|_{x_0}^{y^*}$$

$$= \frac{a}{a-1} x_0 \left[1 - \frac{1}{(1-\alpha_0)^{1/a-1}}\right]$$

$$= E[Y] + \frac{a}{a-1}(1-\alpha_0)\mathrm{VaR}_{1-\alpha_0}(Y)$$

Από (4.2)

$$ES_{1-\alpha_0}(Y) = E_{\mathbb{P}}\left[-Y \mid Y \leq -VaR_{1-\alpha_0}(Y)\right]$$

$$-\frac{E[Y] + \frac{a}{a-1}(1-\alpha_0)\mathrm{VaR}_{1-\alpha_0}(Y)}{\alpha_0}$$

$$-\frac{200 + 2 \cdot 0.9 \cdot (-105.41)}{0.1} = -102.62€$$

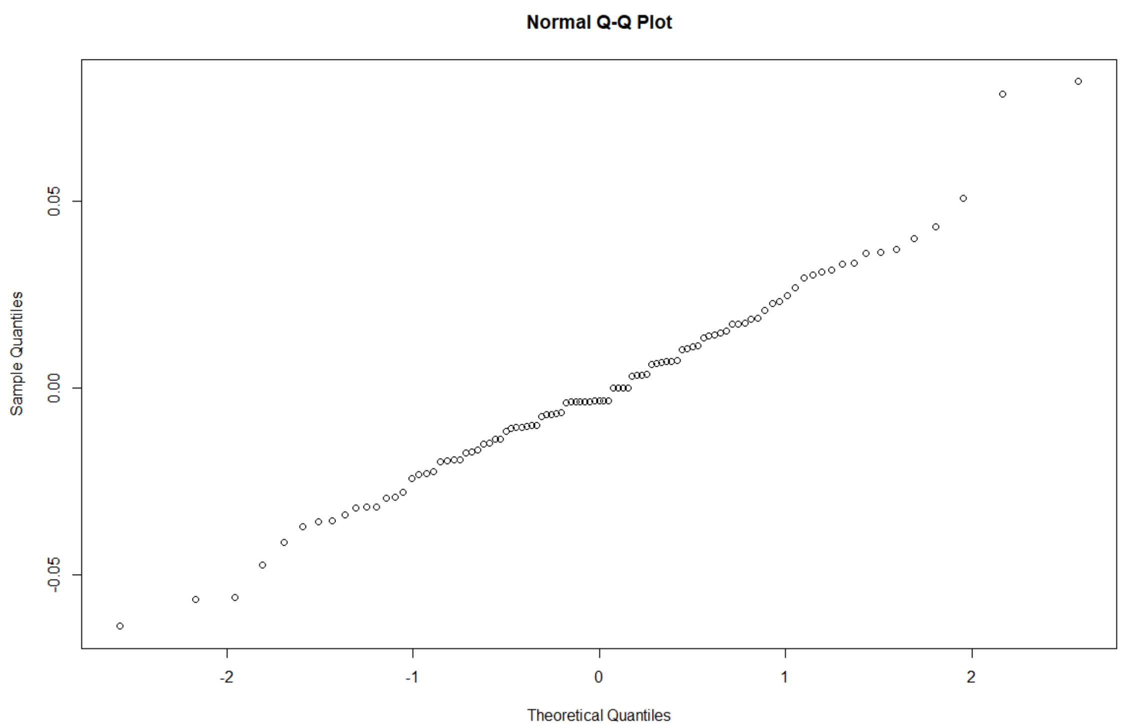
Αφού το αναμενόμενο έλλειμμα είναι αρνητικός αριθμός, σημαίνει ότι το κεφάλαιο των 400€ επαρκεί για να καλύψει κάποιο ενδεχόμενο κίνδυνο και δεν χρειάζεται να προστεθεί επιπλέον ποσό στο χαρτοφυλάκιο.

4.1 Παραμετρική εκτίμηση αναμενόμενου ελλείμματος (Expected shortfall)

Στα προηγούμενα παραδείγματα η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής ήταν γνωστή, ωστόσο σε πραγματικά δεδομένα η κατανομή του δείγματος είναι άγνωστη. Γι αυτό με κατάλληλους ελέγχους επιλέγουμε εκείνη την κατανομή, η οποία προσομοιάζει με τα δεδομένα μας. Όταν βρεθεί η κατανομή, και κα’ επέκταση γνωρίζουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των δεδομένων, τότε ο υπολογισμός του αναμενόμενου ελλείμματος υπολογίζεται από τους τύπους των ορισμών 4.1, 4.2.

Αρχικά, θα επιλέξουμε ένα δείγμα που αφορά τις ημερήσιες χρηματιστηριακές τιμές κλεισίματος της μετοχής της δημόσιας επιχείρησης ηλεκτρισμού (ΔΕΗ Α.Ε.) για την περίοδο 02/11/2016 έως 24/03/2017.[2] Έπειτα, θα υπολογιστούν οι ημερήσιες αποδόσεις της μετοχής για το συγκεκριμένο διάστημα. Ο υπολογισμός της απόδοσης προκύπτει από την διαφορά της τιμής της επόμενης ημέρας μείον της προηγούμενης δια της προηγούμενης ημέρας, και πολλαπλασιάζοντας το κλάσμα επί εκατό θα έχουμε το ποσοστό της απόδοσης. Αφού δημιουργήσαμε δείγμα με τις ποσοστιαίες αποδόσεις της μετοχής, θα ελέγξουμε αν ακολουθούν την κανονική κατανομή με την χρήση QQ γραφήματος και ελέγχου των Shapiro–Wilk .

```
library(readxl)
Data <- read_excel(file.choose())
View(Data)
x<-Data$R
shapiro.test(x)
qqnorm(x)
```



Σχήμα 4.1.1

[2] ΔΗΜΟΣΙΑ ΕΠΙΧ/ΣΗ ΗΛΕΚΤ/ΣΜΟΥ Α.Ε | ΔΕΗ | Μετοχή | Χρηματιστήριο | Ιστορικό (naftemporiki.gr)

Από το Σχήμα 4.1.1 φαίνεται πως τα σημεία δημιουργούν μια ευθεία γραμμή, αυτό είναι δείγμα ότι τα δεδομένα μας ακολουθούν κανονική κατανομή. Επίσης, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε πως οι ποσοστιαίες αποδόσεις της μετοχής ακολουθούν κανονική κατανομή με βάση τον έλεγχο των Shapiro–Wilk . Συγκεκριμένα, το p-value του ελέγχου ισούται με 0.2883, ακόμα και αν θεωρήσουμε ένα μεγάλο επίπεδο σημαντικότητας 10%, δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση, επομένως είναι αποδεκτή η υπόθεση πως τα δεδομένα ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Εν συνεχεία, εκτιμάται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση με την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας, όπου η εκτιμώμενη μέση τιμή είναι -0,044 και εκτιμώμενη τυπική απόκλιση 1,152.

```
neglogL<-function(z){
     (n/2)*log(2*pi)+(n/2)*log(2*z[2])+(1/(2*z[2]))*sum((x-z[1])^2)}
estimators<-nlm(neglogL,c(-0.04417235,2.603195))
mu<--0.044
sigma<-1.152
```

Αφού αποδείξαμε ότι τα δεδομένα ακολουθούν την $N(-0{,}044\,,1{,}152)$, προβαίνουμε στον υπολογισμό του αναμενόμενου ελλείμματος για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%.

Εάν φ(z) είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυπικής κανονικής κατανομής,

$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$

Τότε

$$ES_{1-\alpha} = E[-Y \mid Y \leq q_\alpha]$$
$$= -\frac{1}{\alpha}\int_0^{q_\alpha} \frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy$$

Αν ορίσουμε με $z = \frac{y-\mu}{\sigma}$ τότε

$$ES_{1-\alpha} = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{q_\alpha-\mu}{\sigma}} \frac{\sigma z+\mu}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left\{\int_0^{\frac{q_\alpha-\mu}{\sigma}} \frac{\sigma z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \mu\int_0^{\frac{q_\alpha-\mu}{\sigma}} \phi(z) dz\right\}$$

Αντικαθιστώντας $u = z^2/2$ στο πρώτο ολοκλήρωμα, ενώ το δεύτερο ολοκλήρωμα ισούται με

$$\mu\Phi\left(\frac{q_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \mu\alpha$$

Το αναμενόμενο έλλειμμα υπολογίζεται από τον τύπο.

$$ES_{1-\alpha} = -\mu + \frac{\sigma}{\alpha}\phi\left(\frac{q_\alpha - \mu}{\sigma}\right)$$

Επομένως, για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% το αναμενόμενο έλλειμμα ισούται με 2,420245.

Ένα άλλος τρόπος για να υπολογιστεί το αναμενόμενο έλλειμμα είναι να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$ES_{0,95} = -\frac{1}{0,05}\int_0^{0,05} VaR_u\,(\mathrm{F_X})\mathrm{du}$$

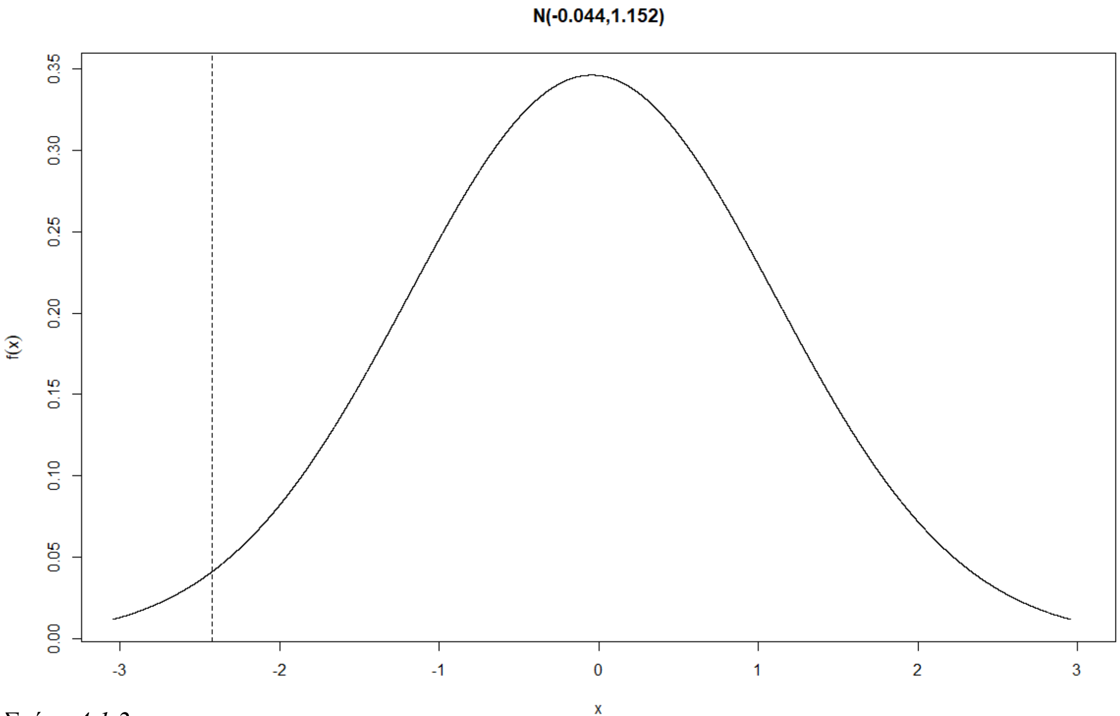
Το ολοκλήρωμα του $VaR_u(\mathrm{F_X})$ μπορεί να υπολογιστεί με την μέθοδο Monte Carlo.

```
listA<-runif(10000,0,0.05)
listB<-0.05*qnorm(listA,-0.044,1.152)
mean(listB)
```

Το ολοκλήρωμα της αξία σε κίνδυνο ισούται με -0,1210593, ενώ το αναμενόμενο έλλειμμα ισούται με 2,421186. Παρατηρούμε ότι το $ES_{0,95}$ με την προσομοίωση Monte Carlo δεν διαφέρει πολύ από τον υπολογισμό του μαθηματικού ολοκληρώματος.

Δίνεται ο κώδικας της R-studio για την διαγραμματική απεικόνιση της κατανομής $N(-0{,}044\ ,1{,}152)$ και του αναμένόμενου ελλείμματος (ES).

```
xs<-seq(mu-3,mu+3,by=0.0001)
ys<-dnorm(xs,mu,sigma)
plot(xs,ys,type="l",xlim=c(-3,3),main="N(-0.044,1.152)",xlab="x",
     ylab=expression(f(x)))
abline(v=-2.420245,lty=2)
abline(v=-2.421186,lty=2)
```



Σχήμα 4.1.2

Στο Σχήμα 4.1.2 η διακεκομμένη γραμμή δείχνει την τιμή του $ES_{0,95}$ και για τις δύο μεθόδους που προαναφέραμε, καθώς οι τιμές τους είναι σχεδόν ίσες.

4.2 Μη-παραμετρική εκτίμηση αναμενόμενου ελλείμματος (Expected shortfall)

Στην μη παραμετρική μέθοδος δεν υποθέτουμε κάποια κατανομή που μπορεί να προσομοιάζει με τα δεδομένα. Συγκεκριμένα, ο υπολογισμός του αναμενόμενου ελλείμματος βασίζεται στην ιστορική προσομοίωση. Η χρησιμοποίηση της ιστορικής προσομοίωσης απαιτεί τη συλλογή επαρκών ιστορικών στοιχείων για τις αξίες των χρεογράφων η χαρτοφυλακίων για μια σειρά $T+1$ χρονικών στιγμών (ημέρες, εβδομάδες, κλπ.). Βάσει των στοιχείων αυτών υπολογίζεται η απόδοση r_t για κάθε χρονική περίοδο $t = 1,2,\dots,T$. Οι αποδόσεις κατατάσσονται από τη χαμηλότερη προς τη υψηλότερη. Για επίπεδο εμπιστοσύνης $1-\alpha$ μπορεί εύκολα να υπολογιστεί η αξία σε κίνδυνο και το αναμενόμενο έλλειμμα. Αρχικά, υπολογίζεται η απόδοση r^* για την οποία ισχύει ότι $r < r^*$ για πλήθος αποδόσεων $n = \alpha T$. Το r^*είναι η αξία σε κίνδυνο, ενώ ο μέσος όρος των αποδόσεων που είναι μικρότερες από την απόδοση r^*, είναι το αναμενόμενο έλλειμμα.

Επίσης, οι Acerbi και Tasche (2002) απέδειξαν ότι ο μέσος όρος συγκλίνει στο αναμενόμενο έλλειμμα ES_{1-a} στην περίπτωση που η εκτιμήτρια της αναμενόμενης αξίας σε κίνδυνο $X_{\lfloor n\alpha \rfloor:n}$ δεν συγκλίνει στο κάτω α-ποσοστημόριο του δείγματος VaR_{1-a}. Δηλαδή στην περίπτωση που δεν υπάρχει μοναδικό α-ποσοστημόριο.

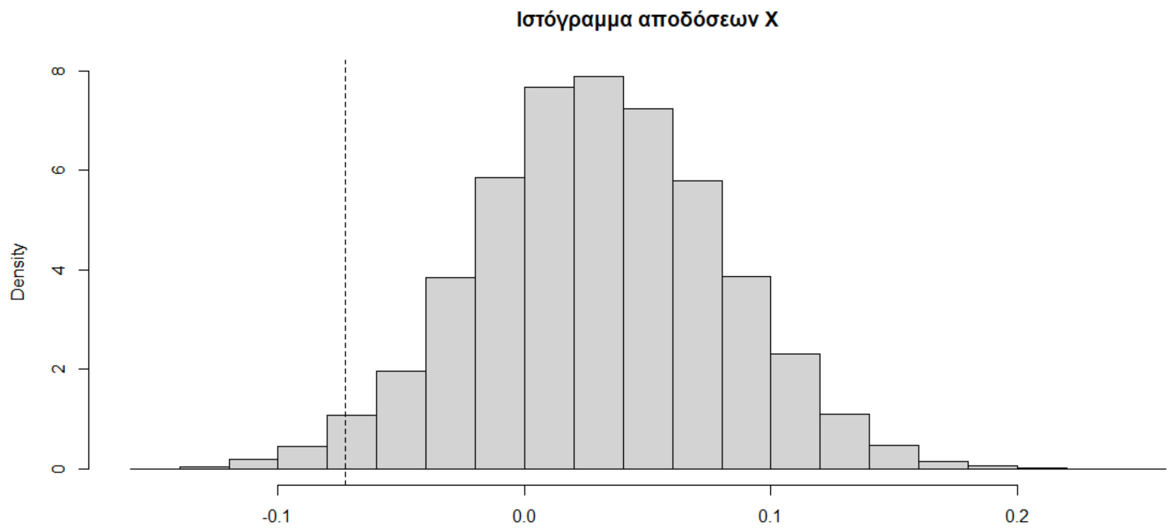
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{\lfloor n\alpha \rfloor} X_{i:n}}{\lfloor n\alpha \rfloor} = ES_{1-a}$$

Όπου $X_{i:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ και με $\lfloor x \rfloor$ συμβολίζεται το ακέραιος μέρος του αριθμού $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z}: n \leq x\}$.

Έστω ότι έχουμε πραγματικά δεδομένα από τις ημερήσιες αποδόσεις μιας μετοχής. Τα δεδομένα θα παρθούν από την κανονική κατανομή με μέσο 0,23 και τυπική απόκλιση 0,05 και το πλήθος του δείγματος θα είναι 10.000. Για να υπολογίσουμε το αναμενόμενο έλλειμμα για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%, θα πρέπει να υπολογιστεί η $VaR_{0.95}$. Στην προκειμένη περίπτωση η αξία σε κίνδυνο είναι η πεντηκοστή πρώτη μεγαλύτερη απόδοση από το δείγμα μας. Έπειτα, θα υπολογίσουμε τον μέσο όρο των πεντακοσίων μικρότερων αποδόσεων. Παραθέτεται ο κώδικας υπολογισμού για την εύρεση του $ES_{0,95}$

```
set.seed(885)
n<-10000
x<-rnorm(n,0.03,0.05)
y<-sort(x)
r<-c()
for (j in 1:500) {
   r[j]<-y[j]
   }

ES<--mean(r)
hist(x,probability=T,main="Ιστόγραμμα αποδόσεων X",xlab="")
abline(v=-0.07265602,lty=2)
```



Σχήμα 4.2.1

Όπου η διακεκομμένη γραμμή στο Σχήμα 4.2.1 είναι η τιμή του $ES_{0,95}$ και ισούται με 0,0726.

Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία έγινε ανάλυση στο θεωρητικό πλαίσιο αλλά και στο υπολογιστικό κομμάτι της μέτρησης κινδύνου. Για αρκετά χρόνια οι κλάδοι των αναλογιστικών και των χρηματοοικονομικών προτείνουν μέτρα κινδύνου για να καλυφτεί μια ενδεχόμενη ζημιά. Είναι ζωτικής σημασίας για μια ασφαλιστική εταιρεία και σε έναν χρηματοπιστωτικό οργανισμό να αποφύγουν κινδύνους που οδηγούν στην χρεοκοπία. Γι αυτό και η εύρεση κατάλληλων μέτρων κινδύνου αποσκοπεί στην ποσοτικοποίηση του κινδύνου με ακρίβεια. Όμως, όλα τα μέτρα κινδύνου που έχουν προταθεί έχουν πλεονεκτήματα αλλά και μειονεκτήματα. Για παράδειγμα η εκθετική αρχή ασφαλίστρου ενώ ικανοποιεί πολύ καλές ιδιότητες, ωστόσο δεν ορίζεται σε κατανομές που έχουν βαριά (δεξιά) ουρά. Ένα καλό συναρτησιακό κινδύνου που υπολογίζει αυτές τις κατανομές είναι η αξία σε κίνδυνο (VaR), εντούτοις δεν συνυπολογίζει τις ακραίες τιμές μιας βαριάς ουράς. Τα τελευταία χρόνια ένα μέτρο που μπορεί να αντικαταστήσει το VaR είναι το αναμενόμενο έλλειμμα (Expected shortfall). Θεωρείται κατάλληλο μέτρο γιατί ικανοποιεί τις ιδιότητες των συνεπών αλλά και των κυρτών μέτρων κινδύνων, και συνυπολογίζει τις ακραίες τιμές μιας κατανομής. Από την άλλη γίνεται κριτική στο αναμενόμενο έλλειμμα ότι υπάρχουν δυσκολίες ως προς την εφαρμογή ελέγχων που επικυρώνουν ότι οι πραγματικές απώλειες βρίσκονται εντός των ορίων που ορίζει η εκτιμώμενη ES (backtesting), καθώς και ότι μειονεκτεί ως προς την ακρίβεια στους υπολογισμούς του. Πάντως, δεν έχει αποδειχτεί ότι βρέθηκε κάποιο ιδανικό μέτρο κινδύνου, οι μελέτες ακόμα συνεχίζονται. Τα κριτήρια για τον τρόπο που θα μετρηθεί ο κίνδυνος ποικίλουν. Γι αυτό η παρακολούθηση των νέων ερευνών και των ρυθμιστικών αρχών, είναι ένας καλός τρόπος αξιολόγησης της επιλογής του κατάλληλου μέτρου κινδύνου.

Βιβλιογραφία

Acerbi, C., Tasche, D., 2002, *On the coherence of expected shortfall*, Journal of Banking and Finance 26:1487–1503.

Ahmadi-Javid, A., 2012, *Entropic value-at-risk: a new coherent risk measure*, J. Optim. Theory Appl. 155(3), 1105–1123.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D., 1999, *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance 9, 203-228.

Deprez, O., Gerber, H., 1985, *On convex principles of premium calculation*, Insurance: Mathematics and Economics 4, 179-189.

Dowd, K., 2005, *Measuring Market Risk*, Chichester :Wiley & Sons.

Everitt, B., Melnick, E., 2008, *Encyclopedia of quantitative risk analysis and assessment*, New York: John Wiley & Sons

Fischer, M., Moser, T., Pfeuffer, M., 2018, *A Discussion on Recent Risk Measures with Application to Credit Risk: Calculating Risk Contributions and Identifying Risk Concentrations*, Risks 6, 142

Föllmer, H., Schied, A., 2016, *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*, De Gruyter Graduate, Berlin: De Gruyter.

Föllmer, H., Schied, A., 2002, *Convex measures of risk and trading constraints*, Finance and Stochastics 6, 429-447.

Föllmer, H., Schied, A., 2002, *Robust preferences and convex risk measures*, in Advances in Finance and Stochastics, Essays in Honor of Dieter Sondermann ,Springer,berlin, pp. 39-56.

Föllmer, H., Knispel, T., 2013, *Convex risk measure: basic facts, law invariant and beyond, asymptotic for large portfolios*, Handbook of the Fundamentals of Financial Decision Making, Part II, pp. 507-554 2013.

Foss, S., Korshunov, D., Zachary, S,. 2011, *An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions*, Vol. 6., Springer.

Gerber, H. U.,1974 , *On additive premium calculation principles*, Astin Bulletin 7, 215-222.

Gianin, E. R., Sgarra, C., 2007, *Mathematical Finance: Theory Review and Exercises From Binomial Model to Risk Measures*, Verlag Italia :Springer.

Hardy, M. R., 2006, *An Introduction to Risk Measures for Actuarial Applications, SOA Syllabus Study Note*. Society of Actuaries.

Inui, K., Kijima, M., 2005, *On the significance of expected shortfall as a coherent risk measure*, Journal of Banking & Finance, 29, 853–864

Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M., 2008, *Modern Actuarial risk theory: Using R*, 2nd edition, Berlin and Heidelberg: Springer.

Kountzakis, C. E., 2019, *Sensitivity of Risk Measures Defined on L^1 – Spaces*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 13, no. 9, 449 – 453.

Kusuoka, S., 2001, *On law invariant coherent risk measures*, Advances in Mathematical Economics 3:83–95.

Lüthi, H.-J., Doege, J., 2005, *Convex risk measures for portfolio optimization and concepts of flexibility*, Mathematical programming, 104(2-3):541-559.

McNeil, A. , Frey, R., Embrechts, P., 2015, *Quantitative Risk Management Concepts, Techniques and Tools*, Princeton Series in Finance Princeton University Press, Princeton.

Rockafellar, R., T., Uryasev, S., 2002, *Conditional value at risk for general loss distributions*, Journal of Banking & Finance 7: 1443–71.

Sereda, E. N., et al., 2010, *Distortion risk measures in portfolio optimization*, In Handbook of portfolio construction 649-673. Berlin: Springer.

Tsanakas, A., Desli, E., 2005, *Measurement and pricing of risk in insurance markets. Risk Analysis*, 25, No, 6:1653-1668.

Wang, S. S., Young, V.R., Panjer, H.H., 1997. *Axiomatic characterization of insurances prices*, Insurance: Mathematics & Economics 21, 173-183.

Young, V. R., 2014, *Premium Principles*, Wiley StatsRef: Statistics Reference Online