Αγγελος Μαυρικης

Στοχαστικη Αναλυση για Semimartingales

Stochastic Analysis for Semimartingales

Η παρουσα Διατριβη
εκπονηθηκε στο Τμημα Στατιστικης και
Αναλογιστικων-Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων
ως μερικη ικανοποιηση των απαιτησεων για την αποκτηση του
Μεταπτυχιακου Διπλωματος Ειδικευσης στα
Αναλογιστικα-Χρηματοοικονομικα Μαθηματικα

Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών-Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών,
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Σάμος 13 Σεπτεμβρίου 2021

Τριμελης Επιτροπη

Στάυρος Βακερούδης, Επιβλέπων Καθηγητής

Στέλιος Ξανθόπουλος, Μέλος

Ελευθέριος Ταχτσής, Μέλος

Στην Ομορφιά μου!

Ευχαριστιες

Η διατριβή αυτή έγινε υπό την καθοδήγηση του καθηγητή του Πανεπιστημίου Αιγαίου Σταύρου Βακερούδη τον οποίο και ευχαριστώ για την αμέριστη συμπαράστασή του, την άριστη συνεργασία που είχαμε κατά την εκπόνηση της διατριβής και για όλους τους ορίζοντες που μου άνοιξε ώστε να κατασταλάξω σε αυτά που πραγματικά με ενδιαφέρουν. Επίσης, ευχαριστώ τα μέλη της Τριμελούς Επιτροπής, τον καθηγητή Στέλιο Ξανθόπουλο και τον καθηγητή Ελευθέριο Ταχτσή για τις εύστοχες παρατηρήσεις και τις συμβουλές τους.Τέλος, ένα μεγαλύτερο ευχαριστώ στη Μητέρα μου Αναστασία που πάντα με στηρίζει για να πετύχω τους στόχους μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Σε αυτή την εργασία μελετάται η γενίκευση του Στοχαστικού Ολοκληρώματος και εφαρμόζεται στην κατασκευή ολοκληρώματος πάνω στις ανελίξεις Levy. Πιο συγκεκριμένα δίνεται μια αυστηρή κατασκεύη του ολοκληρώματος του Itô χρησιμοποιώντας ως ολοκληρωτή Semimaringale διαδικασίες. Όπως θα φανεί και στη συνέχεια οι διαδικασίες Lévy είναι άμεσα συνδεδεμένες με τις Semimaringale διαδικασίες και έτσι η κατασκεύη ενός ολοκληρώματος κατά Itô πάνω σε αυτή την σπουδαία κλάση διαδικασιών προκύπτει άμεσα. Ο ορισμός ενος τέτοιου ολοκληρώματος είναι μια σημαντική επιτυχία της Στοχαστικής Ανάλυσης καθώς επιτρέπει την μοντελοποίηση στοχαστικών διαφορικών συστημάτων όπου ο θόρυβος είναι πιο σύνθετος σε σχέση με τον κλασσικό θόρυβο που περιγράφεται από την Κίνηση Brown.

Μέρος I

Ολοκλήρωμα Itô

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες

Σε αυτό το κεφάλαιο δίνονται βασικοί ορισμοί και κάποιες έννοιες που θα συναντήσουμε παρακάτω.

1.1 Διήθηση και Χρόνος Διακοπής

Ορισμός 1.1.1. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανότητας. Η διήθηση $F_t, t{\geq}0$ είναι μια αύξουσα συλλογή υποσυνόλων της F.*
Η διήθηση $F_t, t{\geq}0$ καλείται πλήρης αν,

$$N = \{A \in F : P(A) = 0\} \subset \mathcal{F}_0 \tag{1.1}$$

Παράδειγμα 1.1.2. *Έστω $\{X_t : t{\geq}0\}$ μια ανέλιξη. Τότε η $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : t \geq s)$ είναι μια διήθηση για την X_t.*

Παράδειγμα 1.1.3. *Δοθήσεις της διήθησης του προηγούμενου παραδείγματος, μια άλλη διήθηση που μπορεί να οριστεί είναι η $\mathcal{F}_t^+ = \bigcap_{s \geq t} \mathcal{F}_t$*

Παρατήρηση 1.1.4. *Γενικά οι $\mathcal{F}_t^+$ και $\mathcal{F}_t$ δεν ταυτίζονται.*

Ορισμός 1.1.5. *Έστω $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ μια διήθηση. Τότε η $\{X_t : t \geq 0\}$ καλείται προσαρμοσμένη αν $\forall t \geq 0$ η X_t είναι $\mathcal{F}_t$ -μετρήσιμη.*

Η $\mathcal{F}_t$ καλείται Προοδευτικά Μετρήσιμη (Progressively Measurable) αν $\forall t \geq 0$ η $X : [0, t] \times \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη για την σ-άλγεβρα $\mathcal{B}([0, t]) \otimes F_t$.
Αν για $A \in \mathcal{B}([0, t]) \otimes F_t$ ώστε η $1_A(s, w)$ να είναι προοδευτικά μετρήσιμη τότε καλείται προοδευτική σ-άλγεβρα.

Παρατήρηση 1.1.6. *Προφανώς μια προοδευτικά μετρήσιμη διαδικασία είναι προσαρμοσμένη.Το αντίθετο δεν ισχύει πάντα.*
Πράγματι,
Έστω η X_t μια συλλογή τυπικών κανονικών τυχαίων μεταβλητών και $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : t \geq s)$. Τότε η $\{X_t, t \geq 0\}$ είναι προσαρμοσμένη. Όμως, για δοσμένο $w \in W$ το σύνολο

$$\{s \leq t | X_s(\omega) > 0\} \notin \mathcal{B}([0, t]). \tag{1.2}$$

Άρα η X_t δεν είναι προοδευτικά μετρήσιμη.
Ωστόσο, κάτω από λογικές συνθήκες συνέχειας οι προσαρμοσμένες διαδικασίες είναι προοδευτικά μετρήσιμες.

Πρόταση 1.1.7. *Έστω X δεξια συνεχής και προσαρμοσμένη διαδικασία. Τότε η X είναι προοδευτικά μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{F}_t^{\epsilon} = \mathcal{F}_{t+\epsilon}$
Μια προσαρμοσμένη διαδικασία είναι προοδευτικά μετρήσιμη με διήθηση την $\mathcal{F}_t$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ είναι προοδευτικά μετρήσιμη υπό την διήθηση $\mathcal{F}_t^{\epsilon}$, αφού $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_t^{\epsilon}$.
Τώρα, υποθέτουμε οτι η X είναι προοδευτικά μετρήσιμη για την $\mathcal{F}_t^{\epsilon}, \epsilon > 0$.
Ορίζουμε,

$$X_s^{\epsilon} = X_s 1_{s\in[0,t-\epsilon]} + X_t 1_{s=t} \tag{1.3}$$

Τότε η $X_s^{\epsilon}(w)$ είναι $\mathcal{B}([0,t]) \otimes F_t$ - μετρήσιμη. Η X είναι το δεξί όριο της X_s^{ϵ} ($X = lim_{\epsilon \longrightarrow 0} X_{t+\epsilon}$) και είναι προσαρμοσμένη, άρα είναι $\mathcal{B}([0,t]) \otimes F_t$ - μετρήσιμη. Ακόμα, το μόνο που μένει να δείξουμε είναι οτι για δοθέν $\epsilon > 0$ η X είναι προοδευτική υπό την διήθηση $(\mathcal{F}_t^{\epsilon}, t \geq 0)$.
Ορίζουμε την διαδικασία

$$X_t^n = \sum_{k=1}^{\infty} X_{\frac{k}{n}} 1_{t\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})} \tag{1.4}$$

Η X^n είναι προοδευτικά μετρήσιμη υπό την διήθηση $(\mathcal{F}_t^{\epsilon}, t \geq 0)$ αν $\epsilon > \frac{1}{n}$ και η X είναι το δεξί όριο της X^n άρα, ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Ορισμός 1.1.8. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανότητας εφοδιασμένος με την διήθηση $\mathcal{F}_t, t \geq 0$.*
Τότε η απεικόνιση $T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+ \bigcup \{\infty\}$ είναι Χρόνος Διακοπής αν $\forall t \geq 0$ ισχύει

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \tag{1.5}$$

Για κάθε Χρόνο Διακοπής αντιστοιχίζεται μια σ-άλγεβρα ως εξής:

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} \mid \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\} \tag{1.6}$$

Πρόταση 1.1.9. (i) *Η $T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+ \bigcup \{\infty\}$ είναι ένας $\mathcal{F}_t^+$ - Χρόνος Διακοπής αν και μόνο αν $\forall t \geq 0$, $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$*

(ii) *Αν S ,T είναι δύο Χρόνοι Διακοπής τότε $S \vee T$ και $S \wedge T$ είναι χρόνοι διακοπής.*

(iii) *Αν S_n είναι μια αύξουσα ακολουθία χρόνων διακοπής τότε το $S = lim_{n\to\infty} S_n$ είναι χρόνος διακοπής.*

(iv) *Αν S_n είναι μια φθίνουσα ακολουθία χρόνων διακοπής τότε το $S = lim_{n\to\infty} S_n$ είναι χρόνος διακοπής για την διήθηση $\mathcal{F}_t^+$, $t \geq 0$.*

Απόδειξη. (i) Υποθέτουμε οτι T είναι $\mathcal{F}_t^+$ - Χρόνος Διακοπής τότε

$$\{T < t\} = \bigcup_{s<t}\{T \leq t\} = \bigcup_{s<t}(\bigcap_{u \geq t} \mathcal{F}_u) \subset \mathcal{F}_t \tag{1.7}$$

Αντίθετα, αν $\forall t$, $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ τότε

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{s \geq t}\{T < s\} \in \bigcap_{s \geq t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t^+ \tag{1.8}$$

(ii) $\{S \vee T \leq t\} = \{S \leq t\} \cup \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$
και
$\{S \wedge T \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

(iii) Αφού $S_n \subset S_{n+1}$

$\{S \leq t\} = \bigcap \{S_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

(iv) $\{S < t\} = \bigcup \{S_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

και από την (i) $S : \mathcal{F}_t^+$ - Χρόνος Διακοπής.

□

Στη συνέχεια θα ορίσουμε δύο γνωστές διαδικασίες και θα δώσουμε μερικές χρήσιμες ιδιότητες αυτών.

1.2 Κίνηση Brown και Διαδικασία Poisson

Ορισμός 1.2.1. *Η διαδικασία $\{B_t : t \geq 0\}$ ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ονομάζεται Κίνηση Brown με τιμές στον R αν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:*

(i) $B_0 = y \quad y \in \mathbb{R}$

(ii) *Έχει στάσιμες προσαυξήσεις. Δηλαδή, για μια διαμέριση $0 \leq t_0, t_1, ..., t_n, \forall n$ οι τυχαίες μεταβλητές*

$$B_1 \,, B_{t_2} - B_{t_1}, \, ... \,, B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \tag{1.9}$$

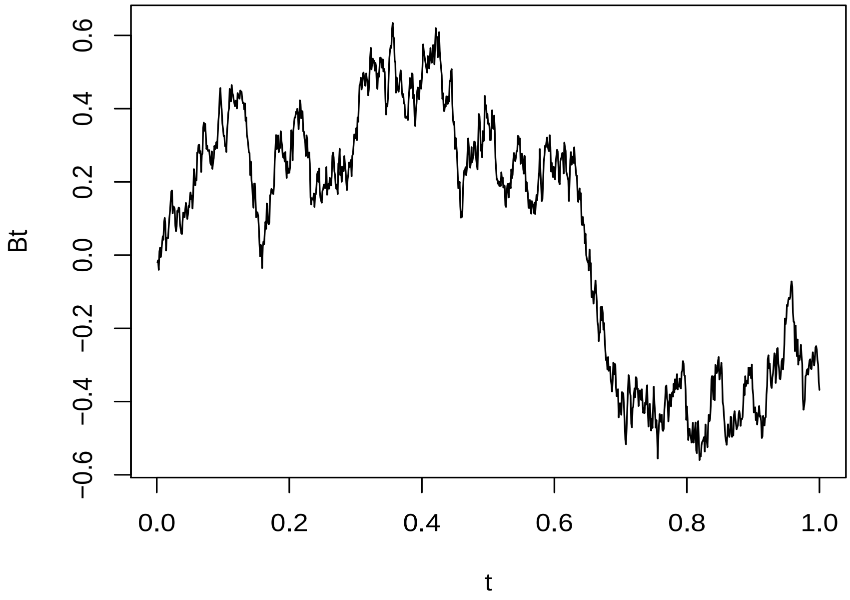
είναι ανεξάρτητες.

(iii) *Έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Δηλαδή,*

$$\forall s \leq t, \quad B_t - B_s \overset{D}{=} B_{t-s} \tag{1.10}$$

(iv) *Έχει σχεδόν βεβαίως συνεχείς τροχιές.*

Σημείωση 1.2.2. *Στην περίπτωση όπου $B_0 = 0$ η διαδικασία $\{B_t : t \geq 0\}$ θα καλείται Τυπική Κίνηση Brown.*



Σχήμα 1.1: Μονοπάτι Κίνησης Brown

Πρόταση 1.2.3. *Έστω* $(B_t)_{t\geq 0}$ *μια τυπική Κίνηση Brown. Οι παρακάτω διαδικασίες είναι επίσης τυπικές Κινήσεις Brown.*

(i) $\forall \alpha > 0 \quad X_t = \alpha B_{\frac{t}{\alpha^2}} \quad (Rescaling)$

(ii) $\forall \alpha > 0 \quad Z_t = \alpha^{-\frac{1}{2}} B_{\alpha t} \quad (Scaling)$

(iii) $Y_t = \begin{cases} tB_{\frac{1}{t}}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$

$(Time - Inversion)$

Απόδειξη. (i) Εύκολα παίρνουμε ότι $X_0 = \alpha B_{\frac{0}{\alpha^2}} = 0$
Τώρα, για $0 \leq s < t$ έχουμε ότι
$X_t - X_s = \alpha(B_{\frac{t}{\alpha^2}} - B_{\frac{s}{\alpha^2}}) \Rightarrow$
$X_t - X_s \stackrel{D}{=} \alpha B_{\frac{t-s}{\alpha^2}} \sim \alpha N(0, \frac{t-s}{\alpha^2}) \Rightarrow X_t - X_s \sim N(0, t-s).$
Επειδή η συνέχεια και η ανεξαρτησία των προσαυξήσεων ισχύει,
η $\{X_t, t \geq 0\}$ είναι μια τυπική Κίνηση Brown.

(ii) Παρόμοια με το i).

(iii) Προφανώς η Y_t ξεκινάει από το μηδέν.
Για την ανεξαρτησία των προσαυξήσεων έχουμε:

$\forall s, t > 0,$
$cov(Y_{t+s} - Y_t, Y_t) =$
$E[Y_{t+s}Y_t] - E[Y_t^2] = t(t+s)min\{\frac{1}{t+s}, \frac{1}{t}\} - t^2\frac{1}{t} = t - t = 0$
Επιπλέον, είναι κανονικά κατανεμημένες και
$var(Y_t - Y_s) = E[Y_t^2 + Y_s^2 - 2Y_tY_s] = t^2\frac{1}{t} - s^2\frac{1}{s} - 2(ts)min\{\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\} =$
$t + s - 2s = t - s, \quad \forall 0 < s < t.$
Τέλος, για $t > 0$ η διαδικασία είναι συνεχής. Όμως η Y_t έχει την ίδια κατανομή με την Κίνηση *Brown* στο $\mathbb{Q} \cap (0, \infty)$ και $\underset{n\to\infty}{lim} Y_{\frac{1}{n}} = \underset{t\to 0}{lim} Y_t = 0$.
Έπομένως είναι συνεχής στο μηδέν και έχουμε το ζητούμενο.

□

Σημείωση 1.2.4. *Οι διαδικασίες της Πρότασης 1.2.3 δεν είναι οι μοναδικές ιδιότητες της Κίνησης Brown.*

Παράδειγμα 1.2.5. *Έστω $B := B_t$ μια τυπική Κίνηση Brown τότε ισχύει ότι*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Y_t}{t} = \lim_{t\to\infty} t\frac{B_{\frac{1}{t}}}{t} = \lim_{t\to\infty} B_{\frac{1}{t}} = 0 \tag{1.11}$$

Σχόλιο 1.2.6. *Όπως θα φανεί στη συνέχεια η Κίνηση Brown όπως και η διαδικασία Poisson που ακολουθεί ανήκουν σε μια μεγάλη και γνωστή κλάση ανελίξεων ανεξάρτητων και στάσιμων προσαυξήσεων.*

Ορισμός 1.2.7. *Μια διαδικασία απαρίθμησης $(N_t)_{t\geq 0}$ ονομάζεται Διαδικασία Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$ αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) $N_0 = 0$

(ii) *Έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις.*

(iii) *Ο αριθμός των γεγονότων σε κάθε διάστημα χρόνου μήκους t είναι Poisson κατανεμημένος με παράμετρο λt. Δηλαδή,*

$$N_t \sim Poiss(\lambda t) \quad \forall 0 \geq s < t : P(N_t = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \tag{1.12}$$

Σημείωση 1.2.8. (i) *Μια διαδικασία N_t ονομάζεται διαδικασία απαρίθμησης αν αναπαριστά το πλήθος των συμβάντων που πραγματοποιούνται στο χρονικό διάστημα $[0, t]$.*

(ii) *Στην περίπτωση που η παράμετρος της ανέλιξης Poisson δεν είναι σταθερή αλλά συνάρτηση του χρόνου, η διαδικασία καλείται Μη ομογενής ανέλιξη Poisson και η τρίτη ιδιότητα του ορισμού δεν ικανοποιείται εν γένει. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με την ομογενή διαδικασία.*

Πρόταση 1.2.9. *Η ανέλιξη $\{N_t : t \geq 0\}$ είναι στοχαστικά συνεχής(κατά πιθανότητα).*

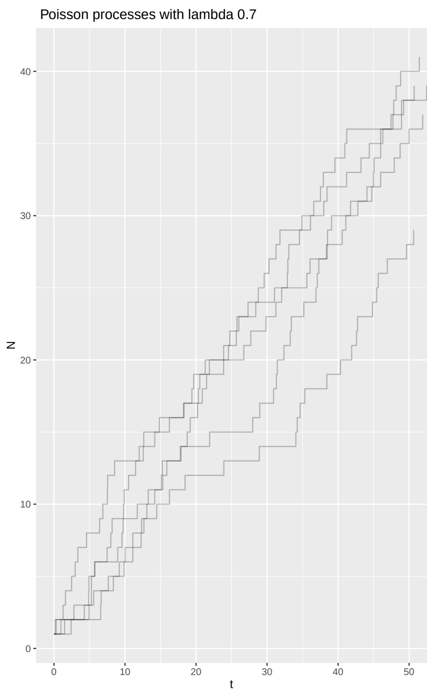
Απόδειξη. Για $0 \leq s < t$ έχουμε ότι $N_s < N_t$. Επομένως, για $\epsilon > 0$ και $s < t$ θα δείξουμε ότι

$$P(|N_t - N_s| \geq \epsilon) \underset{s\to t}{\longrightarrow} 0 \tag{1.13}$$

Πράγματι,από την ανισότητα Markov προκύπτει ότι

$$P(|N_t - N_s| \geq \epsilon) = P(N_t - N_s \geq \epsilon) \leq \frac{E[N_t - N_s]}{\epsilon^2} = \frac{\lambda(t-s)}{\epsilon^2} \xrightarrow[s \to t]{} 0 \tag{1.14}$$

Άρα έχουμε το ζητούμενο. $\square$



Σχήμα 1.2: Μονοπάτια Poisson

Σχόλιο 1.2.10. *Η διαδικασία Poisson μπορεί να οριστεί και με άλλους τρόπους, χρησιμοποιώντας τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που περιγράφουν τους χρόνους όπου η διαδικασία παραμένει σε μια κατάσταση.*

1.3 Martingale

Ορισμός 1.3.1. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανότητας εφοδιασμένος με μια διήθηση $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$.Τότε η ανέλιξη $\{X_t : t \geq 0\}$ είναι $\mathbb{P}-martingale$ αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες, $\forall t \geq 0$*

(i) *η X_t είναι $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη.*

(ii) $E[|X_t|] < \infty$

(iii) $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$, $\forall 0 \leq s < t$

Αν για μια διαδικασία ικανοποιούνται οι πρώτες δύο συνθήκες, όμως για την τρίτη ισχύει είτε $E[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$ είτε $E[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$. Τότε η διαδικασία καλείται $\mathbb{P} - sub - martingale$ και $\mathbb{P} - super - martingale$ αντίστοιχα.

Σχόλιο 1.3.2. *Στη συνέχεια για λόγους ευκολίας αντί για $\mathbb{P}-(super-sub-)martingale$ ή $\mathcal{F}_t-(super-sub-)martingale$ θα γράφουμε $(super-sub-)martingale$ εκτός αν θεωρείται απαραίτητο να δηλώσουμε το μέτρο ή την διήθηση.*

Παράδειγμα 1.3.3. *Η Κίνηση Brown είναι martingale ενω η διαδικασία Poisson είναι sub-martingale.*
Οι πρώτες δύο ιδιότητες του ορισμού προκύπτουν εύκολα, θα δείξουμε την τρίτη ιδιότητα.
Για την Κίνηση Brown έχουμε $\forall s < t$,
$E[B_t|\mathcal{F}_s] = E[B_t-B_s+B_s|\mathcal{F}_s] = E[B_t-B_s|\mathcal{F}_s]+E[B_s|\mathcal{F}_s] = E[B_{t-s}]+B_s = B_s$
Άρα $B_t : martingale$.
Τώρα, για την διαδικασία Poisson
$E[N_t|\mathcal{F}_s] = E[N_t - N_s + N_s|\mathcal{F}_s] = E[N_t - N_s|\mathcal{F}_s] + E[N_s|\mathcal{F}_s] =$
$= E[N_{t-s}] + N_s = \lambda(t-s) + N_s \Rightarrow$
$E[N_t|\mathcal{F}_s] \geq N_s$
Άρα $N_t : sub-martingale$.

Πρόταση 1.3.4. *Αν X, Y δύο maringale διαδικασίες τότε*

$$E[\sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})] = E[X_nY_n] - E[X_0Y_0] \tag{1.15}$$

Απόδειξη. Αφού $X, Y : martingales$ έχουμε ότι

$$E[X_{k-1}Y_k] = E\{E[X_{k-1}Y_k|\mathcal{F}_{k-1}]\} = E\{X_{k-1}E[Y_k|\mathcal{F}_{k-1}]\} = E[X_{k-1}Y_{k-1}],$$

και όμοια

$$E[Y_{k-1}X_k] = E\{E[Y_{k-1}X_k|\mathcal{F}_{k-1}]\} = E\{Y_{k-1}E[X_k|\mathcal{F}_{k-1}]\} = E[Y_{k-1}X_{k-1}]$$

Άρα,

$E[\sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})] =$

$\sum_{k=1}^{n}\{E[X_kY_k] - [X_{k-1}Y_k] - [X_kY_{k-1}] + [X_{k-1}Y_{k-1}]\} =$

$\sum_{k=1}^{n}\{E[X_kY_k] - E[X_{k-1}Y_{k-1}]\} =$

$E[X_nY_n] - E[X_0Y_0]$

□

Πρόταση 1.3.5. (i) *Αν X είναι μια $\mathcal{F}_t - sub - martingale$ και έστω f μια κυρτή, μη-φθίνουσα και Lipschitz συνάρτηση. Τότε η $f(X)$ είναι $sub - martingale$.*

(ii) *Αν X είναι $\mathcal{F}_t - martingale$ και f κυρτή, Lipschitz συνάρτηση τότε η $f(X)$ είναι $sub - martingale$.*

Παράδειγμα 1.3.6. *Έστω $f(x) = x^2$ τότε η f είναι μη φθίνουσα, κυρτή και Lipschitz (σε κάθε φραγμένο διάστημα).Στό προηγούμενο παράδειγμα δείξαμε οτι*

η Κίνηση Brown $B := B_t$ *είναι martingale ενώ η Poisson* $N := N_t$ *είναι sub-martingale διαδικασία στο* $[0, t]$.*Θα δείξουμε ότι η Poisson καλύπτει το i) της παραπάνω πρότασης και η Κίνηση Brown το ii).*
Πράγματι,
η $f(N_t) = N_t^2$ *είναι* $\mathcal{F}_t$*-μετρήσιμη αφού έχου πληροφορίες μέχρι το χρόνο* t *και* $E[N_t^2] = \lambda^2 t^2 + \lambda t < \infty$.
Για την τελευταία ιδιότητα έχουμε:
$E[N_t^2|\mathcal{F}_s] = E[(N_t - N_s + N_s)^2|\mathcal{F}_s] = E[(N_t - N_s)^2 + N_s^2 + 2(N_t - N_s)N_s|\mathcal{F}_s] = E[(N_{t-s}^2)] + N_s^2 + 2E[(N_t - N_s)N_s] \geq N_s^2$
Επομένως, η $f(N_t)$ *είναι* $sub-martingale$.
Ομοίως , για την B
η $f(B_t) = B_t^2$ *είναι* $\mathcal{F}_t$*-μετρήσιμη αφού έχου πληροφορίες μέχρι το χρόνο* t *και* $E[B_t^2] = t < \infty$.
$E[B_t^2|\mathcal{F}_s] = E[(B_t - B_s + B_s)^2|\mathcal{F}_s] = E[(B_t - B_s)^2 + B_s^2 + 2(B_t - B_s)B_s|\mathcal{F}_s] = t - s + B_s^2 \Rightarrow f(B_t) \geq B_s^2$
Άρα, η $f(B_t)$ *είναι* $sub-martingale$.

Σχόλιο 1.3.7. *Όπως θα δούμε και στο επόμενο κεφάλαιο αυτές οι διαδικασίες μπορούν να γίνουν martingale αν αφαιρέσουμε από τις διαδικασίες την τετραγωνική τους κύμανση.*

1.3α′ Local Martingale

Σε αυτή την υποενότητα θα ορίσουμε μια πιο γενική κλάση διαδικασιών martingale αυτής των Local-Martingale.

Ορισμός 1.3.8. *Μια διαδικασία* $M := (M_t)_{t\geq 0}$ *καλείται Local-Martingale αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $M_0 = 0 \ \ \forall \omega \in \Omega \ \ a.s$

(ii) *είναι* $\mathcal{F}_t$*-προσαρμοσμένη*

(iii) $\forall \omega$ *η* M *είναι συνεχής.*

(iv) *υπάρχει ακολουθία χρόνων διακοπής* τ_n *όπου* $\tau_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty, \ \ \forall \omega$ *έτσι ώστε, για όλα τα* n *η* $\{M_{t\wedge\tau_n} : t \geq 0\}$ *είναι martingale.*

Σχόλιο 1.3.9. *Θα μπορούσε κάποιος να δώσει ένα παρόμοιο ορισμός για τις διακριτές ανελίξεις. Ωστόσο, μια διακριτή ανέλιξη* X *είναι Local Martingale, αν και μόνο αν,* $\forall n$ *η* $X_n \in L^1$.
Αυτός ο χαρακτηρισμός δεν ισχύει γενικά για τις συνεχείς martingale.

Πρόταση 1.3.10. *Έστω* $X := (X_t)_{t\geq 0}$ *μια Local Martingale διαδικασία και έστω ότι υπάρχει* $K \in (0, \infty)$ *ούτως ώστε* $|X_t| \leq K$. *Τότε η* X *είναι martingale.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε οτι η X ικανοποιεί τις τρείς ιδιότητες του ορισμου των *martingale.*

(i) Αφού η X είναι Local-Martingale θα είναι προσαρμοσμένη.

(ii) Επίσης, η X είναι φραγμένη από το K άρα έπεται ότι $E[|X_t|] < \infty$

(iii) Θεωρούμε μια ακολουθία χρόνων διακοπής όπως στον ορισμό.
Επομένως, για $0 \leq s < t$ έχουμε

$$E[X_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_s] = X_{s\wedge\tau_n} \tag{1.16}$$

Άρα από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης για $n \to \infty$

$$E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s \tag{1.17}$$

και παίρνουμε το ζητούμενο.

$\square$

Πρόταση 1.3.11. *Έστω $X := (X_t)_{t\geq 0}$ μια Local Martingale διαδικασία και έστω ότι υπάρχει χρόνος διακοπής T. Τότε η διαδικασία $(M_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ είναι Local Martingale.*

Κεφάλαιο 2

Κύμανση

2.1 Πεπερασμένη Κύμανση

Η Διαδικασία Τετραγωνικής Κύμανσης είναι ιδιαίτερα σημαντική για την κατασκεύη του γενικευμένου στοχαστικού ολοκληρώματος Itô. Στη συνέχεια θα δώσουμε δύο ορισμούς αυτών των ανελίξεων.

Ορισμός 2.1.1. *Έστω $X := (X_t)_{t\geq 0}$ μια ανέλιξη και έστω η διαμέριση του $[0,t]$*

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_k = t$$

(2.1)

Ορίζουμε την διαδικασία

$$Z_t^p = \sum_{i=1}^{k-1} \left| X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \right|$$

(2.2)

Αν $\forall t, \ \ \sup Z_t^p < \infty$ τότε η X_t ονομάζεται Διαδικασία Πεπερασμένης Κύμανσης. Αν, επιπλέον, $\lim\limits_{t\to\infty} \sup Z_t^p < \infty$ τότε η X_t ονομάζεται Διαδικασία Φραγμένης Κύμανσης.

Θεώρημα 2.1.2. *Αν $(X_t)_{t\geq 0}$ μια συνεχής martingale με $X_0 = 0$ και $\sup Z_t^p < \infty$ τότε $X_t = 0, \quad \forall t$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την διαμέριση $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_k = t$ και την $\mathcal{F}_{t_i}, \quad i = 1, ..., k$. Τότε έχοντας υπόψιν την πρόταση 1.3.3 εύκολα παίρνουμε

$$E[X_t^2] = \sum_{i=0}^{k-1} E[(X_{t-i+1} - X_{t-i})^2] \tag{2.3}$$

Όμως η X είναι διαδικασία πεπερασμένης κύμανσης, άρα
(2.4)
$$E[X_t^2] = \sum_{i=0}^{k-1} E[(X_{t-i+1} - X_{t-i})(X_{t-i+1} - X_{t-i})] \leq CE[\sup |X_{t-i+1} - X_{t-i}|]$$

Για $\sup |t_{i+1} - t_i| \longrightarrow 0$ από την συνέχεια της X προκύπτει ότι
$E[X_t^2] = E[X_t] = 0$ και συνεπώς $X_t = 0$ □

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω M είναι μια localmartingale με $M_0 = 0$.*
Αν η M είναι διαδικασία πεπερασμένης κύμανσης τότε $M = 0$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η M είναι πεπερασμένης κύμανσης και επιλέγουμε την ακολουθία χρόνων διακοπής

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 \ : \ \int_0^t |dM_s| \geq n\} \tag{2.5}$$

Τότε $\tau_n \longrightarrow 0$ καθώς $n \to \infty$ και από την Πρόταση 1.3.11 η $M_{t\wedge\tau_n}$ είναι $local-martingale$.
Θεωρούμε την διαμέριση

$$\Delta^p = (0 = t_0 < t_1 < ... < t_p = t) \tag{2.6}$$

έτσι

$E[(M_{t\wedge\tau_n})^2] = \sum_{k=1}^p E[(M_{t_k\wedge\tau_n})^2 - (M_{t_{k-1}\wedge\tau_n})^2]$

$= \sum_{k=1}^p E[(M_{t_k\wedge\tau_n} - M_{t_{k-1}\wedge\tau_n})^2]$

$\leq E[\sup\limits_l |M_{t_l\wedge\tau_n} - M_{t_{l-1}\wedge\tau_n}| \sum_{k=1}^p |M_{t_k\wedge\tau_n} - M_{t_{k-1}\wedge\tau_n}|]$

$\leq CE[\sup\limits_l |M_{t_l\wedge\tau_n} - M_{t_{l-1}\wedge\tau_n}|]$

Συνεπώς, εφόσον η $M_{t\wedge\tau_n}$ είναι πεπερασμένης κύμανσης και έχει συνεχείς τροχιές έπεται ότι $E[(M_{t\wedge\tau_n})^2] = 0$.
Από το Λήμμα του Fatou παίρνοντας το όριο καθώς το $n \to \infty$ προκύπτει ότι $E[(M_t)^2] = 0$.
Επομένως, $M_t = 0 \quad a.s$

□

Παρατήρηση 2.1.4. *Από τα τελευταία δύο Θεωρήματα είναι φανερό ότι οι $non-trivialmartingale(localmartingales)$ έχουν άπειρη κύμανση. Για αυτό το λόγο όλη η σημασία των ταλαντώσεων περιέχεται στις διαδικασίες τετραγωνικής κύμανσης.*

2.2 Τετραγωνική Κύμανση

Μπορούμε να ορίσουμε τις διαδικασίες Τετραγωνική Κύμανσης με δύο τρόπους.

Ορισμός 2.2.1. *Έστω* $\{X_t, t \geq 0\}$ *μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη διαδικασία martingale και έστω* $[X]_t$ *μια αύξουσα και συνεχής διαδικασία τέτοια ώστε* $A_t := X_t^2 - [X]_t$ *να είναι martingale με* $A_0 = 0$. *Τότε η* $[X]_t$ *καλείται Διαδικασία Τετραγωνικής Κύμανσης.*

Ορισμός 2.2.2. *Έστω* $\{X_t : t \geq 0\}$ *μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη διαδικασία martingale και έστω η διαμέριση* $\Delta^k = (0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = t)$ *του* $[0,t]$. *Τότε η διαδικασία Τετραγωνικής Κύμανσης ορίζεται ως εξής*

$$\sum_{i=0}^{k}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \xrightarrow[\sup|t_{i+1}-t_i|\to 0]{L^2} [X]_t \tag{2.7}$$

ή εναλλακτικά, $\forall\epsilon > 0$ *και για* $k > 0$

$$P(\sup_{s\in[0,t]} |[X]_s - \sum_{i=0}^{k}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2| > k) < \epsilon \tag{2.8}$$

Το πιο γνωστό παράδειγμα διαδικασίας άπειρης κύμανσης και πεπερασμένης τετραγωνικής κύμανσης είναι η Κίνηση Brown.

Παράδειγμα 2.2.3. ***(Θεώρημα Lévy)*** *Έστω* $(B_t)_{t\geq o}$ *μια τυπική Κίνηση Brown. Ορίζουμε την ακολουθία διαμερίσεων*

$$\Delta_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_{p_n}^n\} \tag{2.9}$$

έτσι ώστε $\|\Delta_n\| = \max_{1\leq i\leq p_n} |t_i^n - t_{i-1}^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
Τότε,

$$[B]_t = \sum_{i=0}^{p_n} |B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} t \tag{2.10}$$

Απόδειξη: *Θα δείξουμε οτι*

$\| \sum_{i=0}^{p_n} |B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}|^2 - t\|_{L^2}^2 = E[(\sum_{i=0}^{p_n} |B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}|^2 - t)^2] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Θέτουμε $Y_i := (B_{t_{i+1}^n} - B^{t_i^n})^2 - (t_i^n - t_{i-1}^n)$

Αφού $\sum_{i=0}^{p_n} |t_i^n - t_{i-1}^n| = t$ *έχουμε ότι*

$E[Y_i] = E[\sum_{i=0}^{p_n} |B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}|^2 - t] =$

$E[\sum_{i=0}^{p_n} |B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}|^2 - \sum_{i=0}^{p_n} |t_i^n - t_{i-1}^n|] =$

$E[\sum_{i=0}^{p_n}(B^2_{t_{i+1}^n - t_i^n} - |t_i^n - t_{i-1}^n|)] \overset{(scaling)}{=} E[\sum_{i=0}^{p_n}(|t_i^n - t_{i-1}^n)B_1^2 - (t_i^n - t_{i-1}^n)] =$

$\sum_{i=0}^{p_n}(|t_i^n - t_{i-1}^n)E[B_1^2 - 1] = 0$

(Το τελευταίο αποτέλεσμα προκύπτει από το γεγονός οτι $B_1 \sim N(0,1)$ *οπότε*

$E[B_1^2] = 1)$

Άρα, $E[Y_i^2] = var(Y_i) + (E[Y_i])^2 = var(Y_i)$ *και από τις ανεξάρτητες προσαυξήσεις τις κίνησης Brown έχουμε* Y_i *ανεξάρτητα* $\forall i$.
Επομένως,

$E[Y_i^2] = (t_i^n - t_{i-1}^n)^2 var(B_1^2) = 2(t_i^n - t_{i-1}^n)^2$

Αφού, $var(B_1^2) = E[Y_i^4] - (E[Y_i^2])^2 = 3 - 1 = 2$

Οπότε,

$\| \sum_{i=0}^{p_n} |B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}|^2 - t\|_{L^2}^2 = E[| \sum_{i=0}^{p_n} Y_i|^2] =$

$var(\sum_{i=0}^{p_n} Y_i) + (E[\sum_{i=0}^{p_n} Y_i])^2 =$

$\sum_{i=0}^{p_n} var(Y_i) + 0 = 2\sum_{i=0}^{p_n} |t_i^n - t_{i-1}^n|^2 \Rightarrow$

$\| \sum_{i=0}^{p_n} |B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}|^2 - t\|_{L^2}^2 \leq 2 \max_{1\leq i\leq p_n} |t_i^n - t_{i-1}^n| \sum_{i=0}^{p_n} |t_i^n - t_{i-1}^n|^2 =$

$2t \max_{1\leq i\leq p_n} |t_i^n - t_{i-1}^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Άρα, $[B]_t \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} t$

Παράδειγμα 2.2.4. *Θα δείξουμε οτι η διαδικασία* $A_t := B_t^2 - [B]_t$ *είναι martingale, όπου* B_t *είναι μια τυπική Κίνηση Brown.*

Πράγματι,

η A_t *είναι μετρήσιμη για την διήθηση* $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : \ s < t)$ *και*

$E[|A_t|] = E[|B_t^2 - [B]_t|] \leq E[|B_t^2|] + t \leq 2t < \infty$

Τέλος, από το Παράδειγμα 1.3.6 έχουμε

$E[B_t^2|\mathcal{F}_s] = t - s + B_s^2 \Rightarrow$

$E[B_t^2 - t|\mathcal{F}_s] = B_s^2 - s \Rightarrow$

$E[B_t^2 - [B]_t|\mathcal{F}_s] = B_s^2 - [B]_s \Rightarrow$

$E[A_t|\mathcal{F}_s] = A_s$.

Οι διαδικασίες Τετραγωνικής Κύμανσης γενικεύονται σε $local - martingales$ *και σε περισσότερες από μια διαδικασίες.*

Θεώρημα 2.2.5. *Έστω* M *μια* $local - martingales$ *ανέλιξη.*
Τότε υπάρχει μια μοναδική αύξουσα συνεχής διαδικασία $[M]$ *τέτοια ώστε η* $\{M_t^2 - [M]_t : \ t \geq 0\}$ *είναι* $local - martingales$.
Ακόμα, θεωρούμε μια ακολουθία διαμερίσεων στον $\mathbb{R}^+$

$$\Delta_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < ..., n \geq 0\} \tag{2.11}$$

έτσι ώστε $\|\Delta_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
Τότε,

$$[X]_t \xrightarrow[n\to\infty]{P} \sum_{k=1}^{\infty}(M_{t_k^n\wedge t} - M_{t_{k-1}^n\wedge t})^2 \tag{2.12}$$

Απόδειξη. (βλ.[4]) □

Σημείωση 2.2.6. *Οι διαδικασίες Τετραγωνικής Κύμανσης δεν είναι πάντα ντετερμινιστικές.*

Ορισμός 2.2.7. *Έστω M και N δύο local − martingale ανελίξεις. Τότε,*

$$[M,N] = \frac{1}{2}([M+N,M+N] - [M] - [N]) \tag{2.13}$$

Από το τελευταίο θεώρημα παίρνουμε τις ακόλουθες ιδιότητες.

- *Η [M,N] είναι η μοναδική διαδικασία τετραγωνικής κύμανσης για την οποία η MN-[M,N] είναι local − martingale.*
- *Η συνάρτηση* $(M,N) \longmapsto [M,N]$ *είναι συμμετρική.*
  Δηλαδή, $[M,N] = [N,M]$
- *Αν* $\Delta_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < ..., n \geq 0\}$ *είναι μια ακολουθία διαμερίσεων με* $\|\Delta_n\| = \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *τότε,*

$$[M,N]_t \xrightarrow[n\to\infty]{P} \sum_{k=1}^{\infty}(M_{t_k^n\wedge t} - M_{t_{k-1}^n\wedge t})(N_{t_k^n\wedge t} - N_{t_{k-1}^n\wedge t}) \tag{2.14}$$

- *Είναι θετικά ομογενής* $[\lambda M,N] = \lambda[M,N] \quad ,\lambda \in \mathbb{R}^+$

Παράδειγμα 2.2.8. *Έστω ένας χώρος πιθανότητας και έστω* B_1 , B_2 *δύο ανεξάρτητες κινήσεις Brown έτσι ώστε* $[B_1,B_2] = 0$*.Τότε για κάποιο* $p \in [-1,1]$ *ισχύει* $[B_1\,,\bar{B}] = pt$ *όπου* $\bar{B} = pB_1 + \sqrt{1-p^2}B_2$.
Πράγματι,

$[B_1, pB_1 + \sqrt{1-p^2}B_2] = [B_1, pB_1] + [B_1, \sqrt{1-p^2}B_2] =$

$p[B_1,B_1] + \sqrt{1-p^2}[B_1,B_2] = p[B_1] + 0 = tp$

Το επόμενο θεώρημα συνδέει την ολοκληρωσιμότητα των local − martingale με την διαδικασία τετραγωνικής κύμανσης.

Θεώρημα 2.2.9. *Έστω M μια local − martingale ανέλιξη με* $M_0 = 0$.

α) Η ανέλιξη M είναι L^2*- φραγμένη martingale (δηλ.,* $sup_{t\geq 0}E[|M_t|^2] < \infty$*) αν και μόνο αν* $E([M]_\infty) < +\infty$.

β) Η M είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμο martingale (δηλ., $\forall t$, $E[|M_t|^2] < \infty$*) αν και μόνο αν* $E([M]_t) < +\infty$

Απόδειξη. (βλ. [4]) □

Από το θεώρημα προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 2.2.10. *Έστω M μια local − martingale με $M_0 = 0$ a.s. Τότε $P(\forall t,\ M_t = 0) = 1$ αν και μόνο αν $[M] \equiv 0$*

Απόδειξη. Αν $P(\forall t,\ M_t = 0) = 1$ τότε είναι προφανές οτι δεν ϋπάρχει' κύμανση. Θεωρούμε ότι $[M] \equiv 0$ τότε η διαδικασία M^2 είναι *martingale*.
Άρα, $\forall 0 \leq s < t$ ισχύει ότι $E[M_t^2] = E[M_s^2]$ και από την συνέχεια της M έπεται το αποτέλεσμα.

□

2.3 semimartingale

Ολοκληρώνουμε αυτό το κεφάλαιο με μια κλάση διαδικασιών για την οποία γενικεύεται το ολοκλήρωμα Itô.

Ορισμός 2.3.1. *Για ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ η διαδικασία $(X_t)_{t\geq 0}$ καλείται semimartingale αν είναι της μορφής*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t \tag{2.15}$$

όπου $X_0 \in \mathcal{F}_0$, $(M_t)_{t\geq 0}$ είναι local − martingale η οποία ξεκινάει από το μηδέν και $(A_t)_{t\geq 0}$ είναι διαδικασία πεπερασμένης κύμανσης η οποία ξεκινάει από το μηδέν επίσης.

Παρατήρηση 2.3.2. *Από τα προηγούμενα θεωρήματα είναι εύκολο να δειχθεί οτι*

α) Ο διαχωρισμίς του ορισμού 2.3.1 είναι μοναδικός

β) Αν $X_t^{'} = M_t^{'} + A_t^{'}$ είναι μια άλλη semimartingale διαδικασία τότε

$$[X, X^{'}]_t = [M, M^{'}]_t$$

Το επόμενο θεώρημα εκφράζει την σχέση μεταξύ των συνεχών ανεξάρτητων προσαυξήσεων διαδικασιών και των semimartingale διαδικασιών.

Θεώρημα 2.3.3. *Έστω Y μια διαδικασία που για δοσμένο χώρο πιθανότητας είναι συνεχής με ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Τότε η Y μπορεί να γραφεί στη μορφή*

$$Y = X + f \tag{2.16}$$

όπου X είναι μια ανεξάρτητων πρπσαυξήσεων semimartingale διαδικασία και f μια συνεχής ντετερμινιστική συνάρτηση.

Κεφάλαιο 3

Ολοκλήρωμα Itô

3.1 Ολοκλήρωμα ως προς local-martingale

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα κατά Itô μιας προοδευτικά-μετρήσιμης διαδικασίας έχοντας ως ολοκληρωτή μια semimartingale διαδιασία. Η συγκεκριμένη μορφή αποτελεί την πιο γενική περίπτωση του στοχαστικού ολοκληρώματος κατά Itô.
Αρχικά, θα δώσουμε μια αυστηρή ερμηνεία στο (στοχαστικό) ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας ως ολοκληρωτή μια local-martingale ανέλιξη και έπειτα θα επεκτείνουμε αυτή σε μια semimartingale.

Ορισμός 3.1.1. *Έστω M μια martingale ανέλιξη.*
Αν ισχύει ότι $\sup\limits_{t\geq 0} E[(M_t)^2] < \infty$ τότε η $M \in \mathcal{H}^2$. Με άλλα λόγια ο $\mathcal{H}^2$ είναι ο χώρος των L^2-φραγμένων martingale.

Μπορούμε να ορίσουμε ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{H}^2$ ως εξής:

$$\langle M, N\rangle_{\mathcal{H}^2} = E([M,N]_\infty)$$

Ο $\mathcal{H}^2$ εφοδιασμένος με το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο είναι πλήρης.

Πρόταση 3.1.2. *Ο $(\mathcal{H}^2, <,>_{\mathcal{H}^2})$ είναι χώρος Hilbert.*

Απόδειξη. Ουσιαστικά θα δείξουμε οτι ο $\mathcal{H}^2$ είναι πλήρης.
Έστω $M^{(n)}$, $n \geq 0$ μια ακολουθία Cauchy έτσι ώστε:

$$\lim_{m,n\to\infty} E[(M_\infty^{(n)} - M_\infty^{(m)})^2] = \lim_{m,n\to\infty} E([M^{(n)} - M^{(m)}]_\infty) = 0 \tag{3.1}$$

επομένως από την ανισότητα Doob έχουμε

$$\lim_{m,n\to\infty} E[\sup_{t\geq 0}\left|M_\infty^{(n)} - M_\infty^{(m)}\right|^2] = 0 \tag{3.2}$$

και άρα μπορούμε να βρούμε μια αύξουσα ακολουθία p_k έτσι ώστε

$$\mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^\infty \sup_{t\geq 0}\left|M_t^{(p_k)} - M_t^{(p_{k-1})}\right|^2\right] \leq \sum_{k=1}^\infty E\left(\sup_{t\geq 0}\left|M_t^{(p_k)} - M^{(p_{k-1})}\right|\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Συνεπώς, η $\sum_{k=1}^{\infty} E\left(\sup_{t\geq 0}\left|M_t^{(p_k)} - M^{(p_{k-1}}\right|\right)$ είναι σχεδόν βεβαίως πεπερασμένη, έστι η $M^{(p_k)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνεχή προσαρμοσμένη διαδικσία M. Για κάθε $s < t$ καθώς η $M_t^{(p_k)}$ συγκλίνει στον L^2 στην M_t παίρνοντας τα όρια στην σχέση

$$E\left(M_t^{(p_k)}|\mathcal{F}_s\right) = M_s^{(p_k)} \tag{3.3}$$

προκύπτει οτι η M_t είναι *martingale*.
Επιπλέον, καθώς η ακολουθία $M^{(p_k)}$ ικανοποιεί την σχέση (3.2) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στον L^2 και η $M \in \mathcal{H}^2$.
Τελικά,

$$E\left([M^{p_k} - M]_{\infty}\right) = E\left[(M^{p_k} - M)^2\right] \longrightarrow 0 \tag{3.4}$$

δηλαδή, κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει σε μια ανέλιξη M στον $\mathcal{H}^2$. □

Ορισμός 3.1.3. *Για $M \in \mathcal{H}^2$ ορίζουμε ως $L^2(M)$ τον χώρο των προοδευτικά μετρήσιμων διαδικασιών X έτσι ώστε*

$$E\left(\int_0^{+\infty} X_s^2 d[M]_s\right) < +\infty \tag{3.5}$$

Παρατήρηση 3.1.4. *α) Η X δεν είναι απαραίτητα συνεχής.*

β) Διαφορετικά, $L^2(M) = L^2\left(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{F}, \mu\right)$ όπου $\mathcal{F}$ είναι προοδευτική σ-άλγεβρα και $\mu(A) = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_A(s,.)d[M]_s$.

Πρόταση 3.1.5. *Ο $(L^2(M), <,>_{L^2(M)})$ είναι χώρος Hilbert με*

$$< X, K >_{L^2(M)} = E\left(\int_0^{+\infty} X_s K_s d[M]_s\right) \tag{3.6}$$

Ορισμός 3.1.6. *Έστω H_0 ο διανυσματικός υπόχωρος του $L^2(M)$ που περιέχει τις διαδικασίες βήματος.*
Η $X \in H_0$ αν για $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p, \quad p > 1$ γράφεται ως

$$X_s = \sum_{i=0}^{p-1} X_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1})}(s) \tag{3.7}$$

όπου $X_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ και είναι φραγμένη.

Πρόταση 3.1.7. *Ο H_0 είναι πυκνός υπόχωρος του $L^2(M)$ για κάθε $M \in H^2$*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι αν $X \in L^2(M)$ είναι ορθογώνια με τον H_0, τότε $X = 0$. Έστω $N\mathbf{1}_{(s,t]} \in H_0$ μια $\mathcal{F}_s$- μετρήσιμη και φραγμένη. Αν η X είναι ορθογώνια με την $N\mathbf{1}_{(s,t]}$ τότε,

$$< N\mathbf{1}_{(s,t]}, X >_{L^2(M)} = 0 \iff$$

$$E\left(\int_0^{+\infty} N\mathbf{1}_{(s,t]} X_s d[M]_s\right) = 0 \iff$$

$$E\left(\int_s^t NX_s d[M]_s\right) = 0 \quad (*)$$

Έστω $K_t = \int_0^t X_s d[M]_s$ εφόσον $X \in L^2(M)$, $M \in H^2$ και από την ανισότητα Cauchy-Schwarz προκύπτει ότι η $K_t \in L^1$.
Τότε,

$$E[NK_t - NK_s] =$$

$$E\left(\int_0^t NX_s d[M]_s - \int_0^s NX_u d[M]_u\right)$$

$$E\left(\int_s^t NX_s d[M]_s\right) \stackrel{(\star)}{=} 0 \Rightarrow E[NK_t] - E[NK_s] = 0 \Rightarrow$$

$$NK_s = E[NK_t | \mathcal{F}_s]$$

Άρα, η K_s είναι *martingale*.
Επίσης, η K είναι πεπερασμένης κύμανσης και άρα από το Θεώρημα 2.1.2 έχουμε ότι $\mu(\forall t, K_t \neq 0) = 0$
Έτσι, $\forall t, X = 0$ μ-σχεδόν παντού. □

Δίνεται τώρα ο ορισμός του στοχαστικού ολοκληρώματος απλών διαδικασιών βήματος πάνω σε L^2-φραγμένες martingale διαδικασίες.

Ορισμός 3.1.8. *Έστω $M \in H^2$ και $F \in H_0$ τότε $F \bullet M \in H^2$ και ορίζεται ως εξής:*

$$(F \bullet M)_t = \sum_{i=1}^{p-1} F_i (M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_{i+1} \wedge t}) \tag{3.8}$$

Θεώρημα 3.1.9. *Έστω η απεικόνιση $F \bullet M$ όπως στο προηγούμενο ορισμό . Τότε η $F \bullet M$ μπορεί να επεκταθεί μοναδικά σε μια ισομετρία από τον $L^2(M)$ στον H^2.*

Απόδειξη. Η απεικόνιση $F \bullet M$ είναι φραγμένη στον L^2 και ακόμα

$$[F \bullet M]_t = \sum_{i=1}^{p-1} F_i^2 ([M]_{t_{i+1} \wedge t} - [M]_{t_{i+1} \wedge t})$$

Έχουμε,

$$\|F \bullet M\|_{H^2}^2 = E\Big(\sum_{i=1}^{p-1} F_i^2 ([M]_{t_{i+1} \wedge t} - [M]_{t_{i+1} \wedge t})\Big)$$
$$= \mathrm{E}\left(\int_0^\infty F_s^2 d[M]_s\right) = \|F\|_{L^2(M)}^2.$$

Από την Πρόταση 3.1.7 αυτή η ισομετρία μπορεί να επεκταθεί με μοναδικό τρόπο από τον $(L^2(M), \|\cdot\|_{L^2(M)}^2)$ στον $(H^2, \|\cdot\|_{H^2}^2)$. □

Εφόσον οι διαδικασίες Τετραγωνικής Κύμανσης είναι με την σειρά τους διαδικασίες Πεπερασμένης Κύμανσης, κάποιος μπορεί να ορίσει ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας ως ολοκληρωτή μια διαδικασία Τετραγωνικής Κύμανσης. Το επόμενο θεώρημα δίνει μια διάσημη ανισότητα.

Θεώρημα 3.1.10. *(Ανισότητα Kunita-Watanabe) Έστω X, Y δύο προοδευτικά μετρήσιμες διαδικασίες και M, N δύο local−martingale. Τότε, $\forall t \in \mathbf{R}^+ \cup \{\infty\}$*

$$\int_0^t |X_s Y_s||d[M,N]_s| \le \left(\int_0^t X_s^2 d[M]_s\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t Y_s^2 d[N]_s\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.9}$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της Τετραγωνικής Κύμανσης και την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε, $\forall s < t$

$$|[M,N]_t - [M,N]_s| \le \left([M]_t - [M]_s\right)^{\frac{1}{2}} \left([N]_t - [N]_s\right)^{\frac{1}{2}}, \ a.s \tag{3.10}$$

Θεωρούμε την διαμέριση $s = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$ και ξανα παίρνουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\sum_{i=1}^n |[M,N]_{t_i} - [M,N]_{t_{i-1}}| \le \sum_{i=1}^n \left([M]_{t_i} - [M]_{t_{i-1}}\right)^{\frac{1}{2}} \left([N]_{t_i} - [N]_{t_{i-1}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^n ([M]_{t_i} - [M]_{t_{i-1}})\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n ([N]_{t_i} - [N]_{t_{i-1}})\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left([M]_t - [M]_s\right)^{\frac{1}{2}} \left([N]_t - [N]_s\right)^{\frac{1}{2}}$$

παίρνοντας το supremum προκύπτει ότι,

$$\int_0^t |d[M,N]_s| \le \left(\int_0^t d[M]_s\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t d[N]_s\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.11}$$

Τώρα, για B_n ξένα σύνολα-*Borel* φραγμένα, θεωρούμε τις συναρτήσεις

$X = \sum_n h_n \mathbf{1}_{B_n}$ και $Y = \sum_n k_n \mathbf{1}_{B_n}$

Τότε,

$\int_0^t |X_s Y_s||d[M,N]_s| = \sum_n |h_n k_n| \int_{B_n} |d[M,N]_s|$

$\le \sum_n |h_n k_n| \left(\int_{B_n} d[M]_s\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_n} d[N]_s\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\leq \left(\int_{B_n} \sum_n h_n^2 d[M]_s \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_n} \sum_n k_n^2 d[N]_s \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^t X_s^2 d[M]_s \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t Y_s^2 d[N]_s \right)^{\frac{1}{2}}$$

Αφού το αυξανόμενο όριο των X, Y προσεγγίζει τις προοδευτικά μετρήσιμες διαδικασίες, έχουμε το ζητούμενο.

□

Σημείωση 3.1.11. *Αν F είναι μια διαδικασία πεπερασμένης κύμανσης, τότε για μια διαμέριση του $[0,t]$ ισχύει*

$$\sup \sum_i |F_i - F_{i-1}| = |\mu|([0,t]) \tag{3.12}$$

Πόρισμα 3.1.12. *Έστω M, N να ανήκουν στον H^2 . Τότε,*

$$E\Bigg(|[M,N]_\infty| \Bigg) \leq \sqrt{E\Bigg(|[M]_\infty| \Bigg)} \sqrt{E\Bigg(|[N]_\infty| \Bigg)} \tag{3.13}$$

Θεώρημα 3.1.13. *Έστω $M, N \in H^2$ και $X \in H_0$ τότε ισχύει ότι,*

1. *$[X \bullet M, N] = X \bullet [M, N]$*
2. *Η 1. ισχύει και για $X \in L^2(M)$*

Απόδειξη. 1. Έχουμε ότι,

$$[X \bullet M, N]_t = [\textstyle\sum_{k=1}^p X_k (M_{t_k \wedge \cdot} - M_{t_{k-1} \wedge \cdot}), N]_t$$

$$= \textstyle\sum_{k=1}^p X_k [M_{t_k \wedge \cdot} - M_{t_{k-1} \wedge \cdot}, N]_t$$

$$= \textstyle\sum_{k=1}^p X_k ([M, N]_{t_k \wedge t} - [M, N]_{t_{k-1} \wedge t})$$

$$= X \bullet [M, N]_t$$

2. Τώρα, για να δείξουμε την σχέση για $X \in L^2(M)$ θεωρούμε μια ακολουθία X_n η οποία συγκλίνει στον $L^2(M)$ στην X. Έπειτα, από την ιδιότητα της ισομετρίας παίρνουμε ότι $X_n \bullet M \longrightarrow X \bullet M$ στον H^2.
   Αναλυτικά, θεωρούμε την διαδικασία $K = X_n \bullet M - X \bullet M$.
   Από το Πόρισμα 3.1.12 έχουμε

   $$E\Bigg(|[K,N]_\infty| \Bigg) \leq \sqrt{E\Bigg(|[K]_\infty| \Bigg)} \sqrt{E\Bigg(|[N]_\infty| \Bigg)}$$

   $$\leq \|K\|_{H^2} \sqrt{E\Bigg(|[N]_\infty| \Bigg)}$$

   Άρα, για L^1-όριο έχουμε ότι $[X \bullet M, N]_\infty = \lim_{n \to +\infty} [X_n \bullet M, N]_\infty$

   Τέλος, καλώντας πάλι την σχέση του Πορίσματος 3.1.12 έχουμε

   $$E\Bigg(|\int_0^{+\infty} (X_{n,s} - X_s) d[M,N]_s| \Bigg) \leq E([N]_\infty) \cdot \|X_n - X\|_{L^2(M)} \tag{3.14}$$

Συνεπώς, $[X \bullet M, N]_\infty = (X \bullet [M,N])_\infty$

Επιλέγοντας την N σταματημένη στον χρόνο t έπεται το ζητούμενο.

□

Σχόλιο 3.1.14. *Η παραπάνω ιδιότητα φανερώνει οτι η Τετραγωνική Κύμανση στοχαστικού ολοκληρώματος με μια άλλη διαδικασία του H^2 είναι ένα ολοκλήρωμα $Riemann - Stieltjes$.*

Πρόταση 3.1.15. *Έστω $K \in L^2(M)$ και $Y \in L^2(M)$ τότε*

(i) $KY \in L^2(M)$

(ii) $(KY) \bullet M = K \bullet (Y \bullet M)$

Απόδειξη. (βλ.[4]) □

Η παραπάνω πρόταση μας οδηγεί σε ένα απλό, αλλά ενδιαφέρον αποτέλεσμα σχετικά με το εσωτερικό γινόμενο του $L^2(M)$.

Πρόταση 3.1.16. *Έστω $K, Y \in L^2(M)$ και $M \in H^2$ τότε,*

$$< K, Y >_{L^2(M)} = E\Big([K \bullet M, Y \bullet M]\Big) \tag{3.15}$$

Απόδειξη. έχουμε ότι,

$$[K \bullet M, Y \bullet M] = K \bullet [M, Y \bullet M] =$$

$$= K \bullet (Y \bullet [M,M]) = KY \bullet [M] \Rightarrow$$

$$[K \bullet M, Y \bullet M] = \int_0^t K_s Y_s d[M]_s \quad (1).$$

Όπου οι ισότητες οφείλονται στην προηγούμενη πρόταση και στην συμμετρική ιδιότητα της Τετραγωνικής Κύμανσης.
Άρα, παίρνοντας την μέση τιμή στην σχάσε (1)προκύπτει το ζητούμενο. □

Σημείωση 3.1.17. *Η μέχρι τώρα κατασκευή δεν ισχύει πάντα[4].Για αυτό το λόγο θα θεωρήσουμε διαδικασίες που είναι τοπικά ολοκληρώσιμες με την ακόλουθη έννοια:*

$$L^2_{LOC}(M) = \{progressively\ measurable\ \ X : \forall t \geq 0\ \ , \int_0^t X_s^2 d[M]_s < +\infty\ \ a.s\}$$

Θεώρημα 3.1.18. *Έστω M $local - martingale$ με $M_0 = 0$ $a.s$*
Τότε, $\forall N$ $local - martingale$ και $\forall X \in L^2_{LOC}(M)$ υπάρχει μοναδική $local - martingale$ διαδικασία $X \bullet M$ η οποία ξεκινάει από το μηδέν ώστε,

(α) $[X \bullet M, N] = X \bullet [M,N]$

(β) $(\mathbf{1}_{(0,T]}X) = (X \bullet M)_T = X \bullet M_T$

Για κάθε χρόνο διακοπής T.

3.2 Ολοκλήρωμα ως προς Semimartingale

Πριν επεκτείνουμε την κατασκευή του στοχαστικού ολοκληρώματος σε *semimartingale* ανελίξεις θα χρειαστεί να δώσουμε ένα επιπλέον ορισμό των ολοκληρωτέων διαδικασιών.

Ορισμός 3.2.1. *Μια προοδευτικά μετρήσιμη ανέλιξη X ονομάζεται τοπικά-φραγμένη αν,*

$$\forall t \geq 0\,, \quad \sup_{s\in[0,t]} |X_s| < +\infty \quad a.s$$

Σχόλιο 3.2.2. *Αν X είναι τοπικά-φραγμένη, τότε $X \in L^2_{LOC}(M)$.Επιπλέον, αν A είναι μια διαδικασία φραγμένης κύμανσης ισχύει ότι*

$$\forall t \geq 0, \quad \int_0^t |X_s||dA_s| <= \infty \quad , a.s \tag{3.16}$$

Συνέπεια των παραπάνω είναι η ζητούμενη επέκταση.

Ορισμός 3.2.3. *Έστω F μια semimaringale ανέλιξη και X μια τοπικά-φραγμένη προοδευτικά μετρήσιμη. Τότε,*

$$X \bullet F = X \bullet M + X \bullet A \tag{3.17}$$

ή

$$\int_0^t X_s dF_s = \int_0^t X_s dM_s + \int_0^t X_s dA_s \tag{3.18}$$

Πρόταση 3.2.4. *Έστω X μια τοπικά-φραγμένη προοδευτικά μετρήσιμη και αριστερά συνεχής ανέλιξη.*
Τότε,

$$\int_0^t X_s dF_s = \overset{\mathbf{P}}{\lim_{n\to+\infty}} \sum_{i=0}^{p_n-1} X_{t_i^{(n)}} \left(F_{t_i^{(n)}} - F_{t_{i-1}^{(n)}} \right) \tag{3.19}$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την σχέση πρώτα για την διαδικασία πεπερασμένησ κύμανσης και έπειτα για την $local - martingale$.
Θεωρούμε την διαμέριση $\Delta_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < ..., n \geq 0\}$ ώστε $\|\Delta_n\| = \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Έχουμε ότι $X_{t,n} \in H_0$ και $X_{t,n} \xrightarrow{o.e} X \in L^2_{LOC}$.
Άρα, υπάρχει $X' \in L^2(M)$ η οποία κυριαρχεί της X και ακόμα,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} X_{t_i^{(n)}} \left(A_{t_i^{(n)}} - A_{t_{i-1}^{(n)}} \right) = \int_0^t X_{s,n} \mu_{ds} \tag{3.20}$$

Επομένως, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης για τον $L^2(A)$ ισχύει ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \|X_{t,n} - X_t\|_{L^2(A)} = 0 \tag{3.21}$$

Συνεπώς,

$$\int_0^t X_s dA_s = \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbf{P}}{\lim}} \sum_{i=0}^{p_n-1} X_{t_i^{(n)}} \left(A_{t_i^{(n)}} - A_{t_{i-1}^{(n)}} \right) \tag{3.22}$$

Τώρα, για την $local - martingale$ συνιστώσα έχουμε,
$X_{t,n} = X_{t_i^{(n)}}$ όπως πριν και M $local - martingale$ φραγμένη στο $[0,t]$. Από την ιδιότητα της ισομετρίας προκύπτει ότι

$$E\left(\left(X_{t,n} \bullet M_t - X_t \bullet M_t \right)^2 \right) =$$

$$= E\left(\int_o^t (X_{s,n} - X_s)^2 \right) =$$

$$= \| X_{t,n} - X_t \|^2_{L^2_{LOC}(M)}$$

Αφού η X είναι αριστερά συνεχής, παίρνοντας τα όρια καθώς το $n \to \infty$ από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης το δεξί μέλος μηδενίζεται και έπεται το ζητούμενο.

□

Παρατήρηση 3.2.5. *Εύκολα προκύπτει ότι οι προηγούμενες προτάσεις σε σχέση με το ολοκλήρωμα σε local−martingale καλύπτουν και την επέκταση σε semimartingale.*

Θα ολοκληρώσουμε την ενότητα αυτή κάνοντας μια αναφορά στην διάσημη φόρμουλα του Itô.Στο τελευταίο μέρος της εργασίας θα αναφερθούμε πάλι σε αυτή δίνοντας και κάποια παραδείγματα.

Θεώρημα 3.2.6. *(Φόρμουλα του Itô) Έστω* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *ώστε* $f \in \mathcal{C}^2$ *και* $X_{1,t}, ..., X_{k,t}$ *συνεχείς semimartingale διαδικασίες.*
Τότε, $f(X_{1,t}, ..., X_{k,t})$ *ειναι συνεχής semimartingale και*

$$f(X_{1,t}, ..., X_{k,t}) - f(X_{1,0}, ..., X_{k,0}) = \textstyle\sum_{j=1}^k \int_0^t \partial_{X_j} f(X_{1,s}, ..., X_{k,s}) dX_{j,s}$$

$$+\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{1\le j,i\le k} \int_0^t \partial_{X_j X_i} f(X_{1,s}, ..., X_{k,s}) d[X_j, X_i]_s$$

Σημείωση 3.2.7. *Η Φόρμουλα του Itô συχνά την γράφεται σε διαφορική μορφή ως εξής:*

$$df(X_{1,t}, ..., X_{k,t}) = \textstyle\sum_{j=1}^k \partial_j f(X_{1,s}, ..., X_{k,s}) dX_{j,s}$$

$$+\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{1\le j,i\le k} \partial_{ji} f(X_{1,s}, ..., X_{k,s}) d[X_j, X_i]_s$$

Σχόλιο 3.2.8. *Η Φόρμουλα του Itô είναι μια επέκταση της φόρμουλας αλλαγής μεταβλητης για συνεχή και πεπερασμένης κύμανσης ανέλιξη.Επιπλέον συνδέει τις επαρκώς λείες συναρτήσεις με τις semimartingale διαδικασίες.*

Μέρος II

Εφαρμογή Ολοκληρώματος Itô

Κεφάλαιο 4

Ανελίξεις Lévy

Σε αυτό το κεφάλαιο ορίζουμε την κλάση των διαδικασιών και δείχνουμε κάποιες ¨καλές' ιδιότητες που ικανοποιούν. Στόχος είναι να κατασκευάσουμε-εφαρμόσουμε στοχαστικό ολοκλήρωμα κατά Itô σε σχέση με αυτή την κλάση διαδικασιών.

Ορισμός 4.0.1. *Έστω $X = X_t : t \geq 0$ μια διαδικασία ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Η X ονομάζεται διαδικασία αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες*

(i) $X_0 = 0, \quad a.s$

(ii) *έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις*

(iii) *έχει στάσιμες προσαυξήσεις*

(iv) *είναι δεξιά συνεχής και έχει αριστερά όρια.*

Οι διαδικασίες συνδέονται με τις απείρως διαιρεμένες κατανομές. Μια κατανομή μ ονομάζεται απείρως διαιρεμένη αν για $n = 1, 2, ...$ $\mu = \mu_n^{*n}$ όπου μ_n^{*n} είναι η n-φορές συνέλιξη της μ.
Επίσης, αν X είναι μια τυχαία μεταβλητή με χαρακτηριστικό εκθέτη $\psi(c) = -\log E[e^{icX}], \qquad c \in \mathbb{R}$. Τότε η X έχει απείρως διαρεμένη κατανομή αν ο χαρακτηριστικός εκθέτης γράφεται στην μορφή:

$$\psi(c) = n\psi(\tfrac{c}{n}), \qquad n = 1, 2, ...$$

Ο πλήρης χαρακτηρισμός των τυχαίων μεταβλητών με πλήρως διαιρεμένη κατανομή μέσου του χαρακτηριστικού εκθέτη δίνεται από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.0.2. *(Lévy-Khintchine φόρμουλα) Ένα μέτρο μ της τυχαίας μεταβλητής X είναι απείρως διαιρεμένο με χαρακτηριστικό εκθέτη ψ :*

$$E[e^{icX}] = e^{-\psi(c)}$$

αν και μόνο αν υπάρχει μια τριπλέτα (α, σ, Π) με $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ και Π ένα μέτρο στον $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ το οποίο ικανοποιεί την συνθήκη

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) \Pi(dx) < +\infty$$

έτσι ώστε,

$$\psi(c) = iac + \frac{1}{2}\sigma^2 c^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{icx} + icx\mathbf{1}_{(|x|<1)})\Pi(dx) \tag{4.1}$$

Το μέτρο Π *ονομάζεται χαρακτηριστικό μέτρο Lévy.*

Από τις (ii) και (iii) του ορισμού των ανελίξεων , γράφοντας μια ανέλιξη X_t στη μορφή:

$$X_t = X_{\frac{t}{n}} + (X_{\frac{2t}{n}} - X_{\frac{t}{n}}) + ... + (X_{\frac{nt}{n}} - X_{\frac{(n-1)t}{n}}) \tag{4.2}$$

η σχέση της με τις απείρως διαιρεμένες κατανομές γίνεται φανερή.
Το επόμενο θεώρημα είναι η επέκταση της Φόρμουλας Lévy-Khintchine για διαδικασίες .

Θεώρημα 4.0.3. *Έστω (α,σ,Π) μια τριπλέτα με* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma \in (0, +\infty)$ *και* Π *το χαρακτηριστικό μέτρο Lévy.*
Ορίζουμε $\forall c \in \mathbb{R}$,

$$\psi(c) = iac + \frac{1}{2}\sigma^2 c^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{icx} + icx\mathbf{1}_{(|x|<1)})\Pi(dx). \tag{4.3}$$

Τότε, υπάρχει χώρος πιθανότητας $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *στον οποίο ορίζεται Lévy διαδικασία με χαρακτηριστικό εκθέτη* ψ.

Παράδειγμα 4.0.4. *Από τον ορισμό της Κίνησης Brown προκύπτει άμεσα ότι είναι μια διαδικασία Lévy.*
Διαφορετικά, αφού B_t *ακολουθεί κανονική κατανομή* $N(0,t)$ *έχουμε ότι*

$\psi(c) = -\log E[e^{icB_t}] = -\log(e^{-\frac{c^2 t}{2}}) = \frac{c^2}{2}t$ *Άρα, η* B_t *είναι μια διαδικασία με* $\alpha = 0$ *και* $\Pi(dx) = 0$.

Παράδειγμα 4.0.5. *Έστω* $(N_t)_{t\geq 0}$ *μια ανέλιξη Poisson. Έστω επίσης* Y_j *μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών από κάποια κατανομη G, που δεν ορίζεται στο μηδέν.Τότε η σύνθετη διαδικασία Poisson*

$$M_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j$$

είναι μια ανέλιξη Lévy με χαρακτηριστική τριπλέτα $(\lambda \int_{|Y|<1} yG(dY), 0, \lambda G(Y))$.
Πράγματι,

$$E[e^{icM_t}] = E[e^{ic\sum_{j=1}^{N_t} Y_j}] = \sum_{j=1}^{\infty} E[e^{ic\sum_{j=1}^{n} Y_j}]P(N_t = n) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} E[e^{icY_1}]^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\lambda \int_{\mathbb{R}} e^{icY_1}G(dY)\right)^n \frac{e^{-\lambda}}{n!} =$$

$$= e^{\lambda \int_{\mathbb{R}} e^{icY_1}G(dY) - \lambda} = e^{-\lambda \int_{\mathbb{R}}(1-e^{icY_1})G(dY)}$$

Άρα, ο χαρακτηριστικός εκθέτης γίνεται $\psi(c) = \lambda \int_{\mathbb{R}}(1 - e^{icY_1})G(dY)$.

4.1 Τροχιές των διαδικασιών Lévy

Η μελέτη της τροχιάς μιας ανέλιξης οδήγησε στην διάσπαση της σε τέσσερεις, διαφορετικές ως προς την συμπεριφορά των τροχιών τους, διαδικασίες . Το άθροισμα αυτών των τεσσάρων συνθέτει μια γενική ανέλιξη .
Κάτω από τον ακόλουθο μετασχηματισμό στον χαρακτηριστικό εκθέτη της φόρμουλας Lévy-Khintchine παίρνουμε:

$$\psi(c) = iac + \tfrac{1}{2}\sigma^2 c^2 + \Pi(\mathbb{R} - (-1,1)) \int_{|x|>1} (1 - e^{icx} + icx\mathbf{1}_{(|x|<1)}) \tfrac{\Pi(dx)}{\Pi(\mathbb{R}-(-1,1))}$$

$$+\Pi(\mathbb{R} - (-1,1)) \int_{0<|x|<1} (1 - e^{icx} + icx) \tfrac{\Pi(dx)}{\Pi(\mathbb{R}-(-1,1))}$$

Παρατηρούμε ότι $\psi_1(c) = iac$ είναι ο χαρακτηριστικός εκθέτης μιας διαδικασίας $f(t) = -at$, η $\psi_2(c) = \frac{1}{2}\sigma^2 c^2$ είναι ο χαρακτηριστικός εκθέτης μιας τυπικής Κίνησης Brown σB_t και

$$\psi_3(c) = \Pi(\mathbb{R} - (-1,1)) \int_{|x|>1} (1 - e^{icx} + icx\mathbf{1}_{(|x|<1)}) \tfrac{\Pi(dx)}{\Pi(\mathbb{R}-(-1,1))}$$

είναι ο εκθέτης μιας σύνθετης Poisson με παράμετρο $\Pi(\mathbb{R} - (-1,1))$ όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, όπου η κατανομή των ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών είναι η

$$G(dx) = \tfrac{\Pi(dx)}{\Pi(\mathbb{R}-(-1,1))}, \qquad |x| > 1, \qquad \Pi(\mathbb{R} - (-1,1)) \neq 0$$

Επομένως, μέχρι τώρα μπορούμε να θεωρήσουμε τρείς ανεξάρτητες διαδικασίες , μια ντετερμινιστική, μια τυπική Κίνηση Brown και μια σύνθετηδιαδικασία Poisson. Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει διαδικασία με χαρακτηριστικό εκθέτη

$$\psi_4(c) = \Pi(\mathbb{R} - (-1,1)) \int_{0<|x|<1} (1 - e^{icx} + icx) \frac{\Pi(dx)}{\Pi(\mathbb{R} - (-1,1))} \tag{4.4}$$

Η ψ_4 μπορεί να γραφεί ως εξής.
Θέτουμε $\lambda_n = \Pi\Big(x: \; 2^{-(n+1)} \leq |x| < 2^{-n}\Big)$ έτσι

$$\psi_4(c) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \Bigg\{ \lambda_n \int_{2^{-(n+1)} \leq |x| < 2^{-n}} (1 - e^{icx} + icx) G_n(dx) \Bigg\}$$

$$= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \Bigg\{ \lambda_n \int_{2^{-(n+1)} \leq |x| < 2^{-n}} (1 - e^{icx}) G_n(dx) + ic\lambda_n \int_{2^{-(n+1)} \leq |x| < 2^{-n}} x G_n(dx) \Bigg\}$$

Επομένως, για κάθε n παίρνουμε μια σύνθετηPoisson που οδηγεί στο ότι η διαδικσία με χαρακτηριστικό εκθέτη την ψ_4 είναι ένα άπειρο γινόμενο σύνθετων Poisson, ανεξάρτητων μεταξύ τους με τάση.
Η ύπαρξη μίας τέτοιας διαδικασίας οφείλεται στην θεωρία των τυχαίων μέτρων και συγκεκριμένα των τυχαίων μέτρων Poisson.

Θεώρημα 4.1.1. *Έστω $\mathbb{E}$ ένα αριθμήσιμο σύνολο.*

(α) *Υποθέτουμε ότι* $(N_t^e)_{t\geq 0}$ *,*$e \in \mathbb{E}$ *είναι ανεξάρτητες ανελίξεις Poisson με παραμέτρους* $\lambda_e > 0$ *αντίστοιχα. Τότε,*

$$N_t = \sum_{e\in\mathbb{E}} N_t^e \quad , t \geq 0 \tag{4.5}$$

είναι μια διαδικασία Poisson με παράμετρο $\lambda = \sum_{e\in\mathbb{E}} \lambda_e$.

(β) *Αντίθετα, έστω η* N_t *μία ανέλιξη Poisson με παράμετρο* $\lambda > 0$ *και* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών από το* Ω *στο* $\mathbb{E}$*, ανεξάρτητες από την* N_t*. Τότε,*

$$N_t^e = \sum_{j=1}^{N_t} \mathbf{1}_{\{s_j=e\}} \quad , t \geq 0 \tag{4.6}$$

είναι ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με παραμέτρους $\lambda_{\pi_e} : \pi_e = P(s_1 = e)$.

Απόδειξη. (α) Από το γεγονός ότι το άθροισμα ανεξάρτητων Poisson τυχαίων μεταβλητών έχει Poisson κατανομή και την γραμμικότητα της μέσης τιμής προκύπτει εύκολα το ζητούμενο.

(β) Τώρα, μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το σύνολο $\mathbb{E}$ είναι πεπερασμένο. Τότε η απεικόνιση $N_{t,e} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^e$ με

$$N_{t,e} = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j, \quad Y_j = (\mathbf{1}_{\{e\}}(s_j))_{e\in\mathbb{E}} \tag{4.7}$$

είναι μια σύνθετη Poisson στον $\mathbb{R}^e$.
Από το Παράδειγμα 4.0.5 παίρνουμε ότι $E[exp\{icN_{t,e}\}] = exp\{\lambda(E[exp\{icY_1\}]) - 1\}$.
Άρα,

$$E[exp\{icY_1\}] = E[exp\{i \textstyle\sum_e c_e \mathbf{1}_{\{e\}}(s_1)\}] = \sum_{e\in\mathbb{E}} \pi_e exp\{ic_e\}$$

με $\sum pi_e = 1$. Επομένως,

$$E[exp\{icN_{t,e}\}] = \prod_{e\in\mathbb{E}} exp\left(\lambda t \pi_e (exp\{ic_e - 1\})\right) \tag{4.8}$$

$\forall c \in \mathbb{R}^k$ και $t \geq 0$.

□

Ορισμός 4.1.2. *Έστω* $(\mathbf{X}, \mathcal{A}, \Pi)$ *ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου. Μία συλλογή* $N_t(A)$, $A \in \mathcal{A}$ *τυχαίων μεταβλητών ορισμένων στον* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ονομάζεται τυχαίο μέτρο Poisson αν και μόνο αν*

(i) *η* $N_t(\omega)$ *είναι ένα μέτρο απαρίθμησης στην* $\mathcal{A}$ *,*$\forall t \geq 0$, $\forall \omega \in \Omega$.

(ii) *Αν* $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ *με* $A_i \neq A_j$, $\forall i \neq j$ *τότε οι* $N_t(A_1), ..., N_t(A_n)$ *είναι ανεξάρτητες στοχαστικές διαδικασίες.*

Σχόλιο 4.1.3. *Η συνάρτηση κατανομής του τυχαίου μέτρου Poisson ορίζεται στην* $\mathcal{B}(0,\infty) \times \mathcal{A}$ *με παράμετρο* $dt\Pi(dy)$ *ώστε*

$$N_t(A) = N((0,t] \times A), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{A} \tag{4.9}$$

Θεώρημα 4.1.4. *Έστω $(\mathbf{X}, \mathcal{A}, \Pi)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου.*

(i) *Έστω ότι η συνολική μάζα του Π είναι $\Pi(\mathbf{X}) = \lambda$. Τότε,*

$$M_t = \sum_{j=1}^{N_t} \delta_{Y_j} \tag{4.10}$$

είναι ένα τυχαίο μέτρο Poisson με παράμετρο Π και οι iid τυχαίες μεταβλητές Y_j έχουν κατανομή $G := \frac{\Pi}{\lambda}$.
Η N_t είναι μια διαδικασία Poisson με παράμετρο λ.

(ii) *Αν $(N_t^{(n)})_{t\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι ανεξάρτητα μέτρα Poisson στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbf{X}, \mathcal{A})$ με παραμέτρους Π_n, τότε η*

$$\widehat{M_t} = \sum_{n=1}^{+\infty} N_t^{(n)} \tag{4.11}$$

είναι ένα τυχαίο μέτρο Poisson με παράμετρο $\Pi = \sum \Pi_n$.

Κατασκευή σύνθετης διαδικασίας Poisson από τυχαία μέτρα Poisson

Υποθέτουμε ότι M_t είναι ένα τυχαίο μέτρο Poisson ορισμένο στον $\mathbf{X} = \mathbb{R}^d - \{0\}$ με παράμετρο το πεπερασμένο μέτρο Π. Τότε το support του M_t θα είναι πεπερασμένο για κάθε $t \geq 0$.
Ορίζουμε την διαδικασία

$$X_t = \int_{\mathbb{R}-\{0\}} y M_t(dy) = \sum_{y \in supp(M_t)} y M_t(\{y\}). \tag{4.12}$$

Τότε η X είναι μια σύνθετη διαδικασία Poisson με παράμετρο Π.
Το επόμενο θεώρημα γενικεύει αυτόν τον ισχυρισμό.

Θεώρημα 4.1.5. *Για κάθε τυχαίο μέτρο Poisson σε ένα μετρήσιμο χώρο $(\mathbf{X}, \mathcal{A})$ με παράμετρο το πεπερασμένο μέτρο Π και για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, η διαδικασία*

$$Mf_t = \int f(y) M_t(dy) \tag{4.13}$$

είναι σύνθετη διαδικασία Poisson με παράμετρο $\Pi \circ f^{-1}$.

Απόδειξη. (βλ. [6]) □

Πόρισμα 4.1.6. *Θεωρούμε την διήθηση $\mathcal{F}_t^M = \sigma(M_t(A) \mid 0 \leq s \geq t,\ A \in \mathbf{X})$. Οι διαδικασίες,*

(i) $\widetilde{MF}_t = Mf_t - t\int f d\Pi$

(ii) $\epsilon M_t = exp\Big(icMf_t + t\int(1 - e^{icf})d\Pi\Big)$ *,$\forall f$ μετρήσιμη και $c \in \mathbb{R}$*

είναι martingales ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_t^M$.

Απόδειξη. Αν $f \in Ł^1(\Pi)$ τότε,

$$\int \Pi \circ f^{-1}(dx) = \int f d\Pi < +\infty.$$

Επίσης, από τις ιδιότητες της σύνθετης διαδικασίας Poisson έχουμε ότι

$$E[Mf_t] = t \int f d\Pi$$

και

$$E[e^{icMf_t}] = e^{-t\int_{\mathbf{X}}(1-e^{icf(x)})\Pi(dx)}.$$

Τώρα, οι ανελίξεις $\widetilde{MF}_t$,ϵM_t είναι προσαρμοσμένες και ανήκουν στον L^1 από τις απαιτήσεις για την f και το μέτρο Π.
Άρα, αρκεί να δείξουμε την τρίτη ιδιότητα.

Για την (i)

$$E[\widetilde{MF}_t \mid \mathcal{F}_s^M] - \widetilde{MF}_t =$$

$$E[\{Mf_t - t\int f d\Pi \mid \mathcal{F}_s^M] - Mf_s + s\int f d\Pi =$$

$$E[Mf_t - Mf_s \mid \mathcal{F}_s^M] - (t-s)\int f d\Pi =$$

$$E[Mf_{t-s}] - (t-s)\int f d\Pi = 0$$

Επομένως, η $\widetilde{MF}_t$ είναι *martingale*.

Για την (ii)
Θέτουμε $g = (1 - e^{icf})$.

$$E[\epsilon M_t \mid \mathcal{F}_s^M] = E[e^{ic(Mf_t - Mf_s)} \mid \mathcal{F}_s^M] e^{icMf_t + s\int f d\Pi + (t-s)\int g d\Pi} =$$

$$E[e^{ic(Mf_{t-s})} \mid \mathcal{F}_s^M] e^{icMf_t + s\int g d\Pi + (t-s)\int f d\Pi} =$$

$$e^{-(t-s)\int f d\Pi} e^{icMf_t + s\int g d\Pi + (t-s)\int f d\Pi} \Rightarrow$$

$$E[\epsilon M_t \mid \mathcal{F}_s^M] = \epsilon M_s.$$

Άρα, η ϵM_t είναι *martingale*. □

Παρατήρηση 4.1.7. *Αν η $f \in L^2(\Pi)$ τότε η $\widetilde{Mf}_t$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale διαδικασία.*
Πράγματι,

$$E\Big[(\widetilde{Mf}_t)^2\Big] = var(\widetilde{Mf}_t) = t\int f^2 d\Pi < +\infty.$$

Παρατήρηση 4.1.8. *Έστω M_t να είναι ένα τυχαίο μέτρο Poisson με παράμετρο Π. Τότε, $\forall f \in L^1(\Pi)$ η ανέλιξη $\widetilde{Mf}_t = \int f(y)\widetilde{M}_t(dy)$ είναι martingale με $\widetilde{M}_t(dy) = M_t(dy) - \Pi(dy)$.*

Κατασκευή διαδικασίας Lévy με άπειρα άλματα.

Έστω $\Pi(dy)$ ένα σ-πεπερασμένο μέτρο στον $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ έτσι ώστε $\Pi(|y| > \epsilon) < \infty$, $\forall \epsilon > 0$. Για ένα χώρο μέτρου $(\mathbf{X}, \mathcal{A}, \mu)$ συμβολίζουμε $\mu^A(B) = \mu(B \cap A)$, έτσι $\mu^A(dy) = \mathbf{1}_A(dy)\mu(dy)$. Τότε, από τον ορισμό του τυχαίου μέτρου Poisson παίρνουμε την ακόλουθη ιδιότητα.
Αν $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ δύο ξένα σύνολο, τότε M_t^A και M_t^B είναι ανεξάρτητα μέτρα Poisson με παραμέτρους Π^A και Π^B αντίστοιχα.

Για $\epsilon \in (0,1)$ θεωρούμε την σύνθετη ανέλιξη Poisson

$$M_t^{\epsilon,1} := \int_{\epsilon<|y|<1} y M_t(dy).$$

Τότε, η ανέλιξη

$$\widetilde{M_t^{\epsilon,1}} = \int_{\epsilon<|y|<1} y(M_t^{\epsilon,1}(dy) - t\Pi^{(\epsilon,1]}(dy))$$

είναι *martingale* ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_t^M = \sigma\Big(M_s(B) \mid s \in [0,t]\ ,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})\Big)$.

Θεωρούμε τον χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων ανελίξεων *martingale* H_M^2, σε σχέση με την διήθηση $\mathcal{F}_t^M$ με νόρμα $\|M\|^2 = E[M_t^2]$. Το επόμενο αποτέλεσμα είναι πολύ σημαντικό.

Λήμμα 4.1.9. (i) *Έστω* $\int_{|y|\le 1} |y|^2 \Pi(dy) < +\infty$. *Τότε, υπάρχει* $\widehat{M} \in H_M^2$ *έτσι ώστε*

$$E\Big(\sup_{0\le s\le t} |\widehat{M}^{\frac{1}{n},1} - \widehat{M}_t|\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.14}$$

(ii) *Η* $\widehat{M}$ *είναι διαδικασία Lévy με χαρακτηριστικό εκθέτη*

$$\psi(c) = \int_{|y|\le 1} (1 - e^{icy} + icy)\Pi(dy) \quad .\forall c \in \mathbb{R} \tag{4.15}$$

Απόδειξη. (i) Έστω $\epsilon, \delta \in (0,1)$ με $\delta < \epsilon$. Τότε,

$$M_t^{\delta,1} - M_t^{\epsilon,1} = M_t^{\delta,\epsilon} = \int_{\delta<|y|\le\epsilon} y M_t(dy). \tag{4.16}$$

Η $M_t^{\delta,\epsilon} = M_t^{\delta,1} - M_t^{\epsilon,1}$ είναι σύνθετη διαδικασία Poisson με παράμετρο $\Pi^{(\delta,\epsilon]}$ και η διαδικασία

$$\widehat{M}_t^{\delta,1} - \widehat{M}_t^{\epsilon,1} = \widehat{M}_t^{\delta,\epsilon} = M_t^{\delta,\epsilon} - t\int y\Pi^{(\delta,\epsilon]}(dy)$$

είναι *martingale*.
Άρα, η ανέλιξη

$$|M_t^{\delta,1} - M_t^{\epsilon,1}|^2 - t\int |y|^2 \Pi^{(\delta,\epsilon]}(dy)$$

είναι *martingale* επίσης.
Επομένως,

$$\|M_t^{\delta,1} - M_t^{\epsilon,1}\|^2 = E\Big(|M_t^{\delta,1} - M_t^{\epsilon,1}|^2\Big) \leq t \int_{\delta<|y|\leq\epsilon} |y|^2 \Pi(dy) < +\infty.$$

Οπότε,$M_t^{\frac{1}{n},1}$ είναι ακολουθία *Cauchy* στον χώρο *Hilbert* H_M^2 και άρα, έπεται το ζητούμενο.

(ii) Η $M_t^{\delta,1}$ είναι σύνθετη διαδικασία Poisson με χαρακτηριστικό εκθέτη

$$\psi_\epsilon(c) = \int_{\epsilon<|y|\leq 1} (1 - e^{icy})\Pi(dy).$$

Άρα, για την $\widehat{M}_t^{\epsilon,1} = M_t^{\epsilon,1} - E[M_t^{\epsilon,1}]$ έχουμε,

$$E\Big(e^{ic\widehat{M}_t^{\epsilon,1}}\Big) = E\Big(e^{icM_t^{\epsilon,1}}\Big)e^{-icE[M_t^{\epsilon,1}]} =$$

$$e^{\psi_\epsilon(c) - icE[M_t^{\epsilon,1}]} = e^{-t\widehat{\psi}_\epsilon(c)}$$

όπου,

$$\widehat{\psi}_\epsilon(c) = \psi_\epsilon(c) - ic\int_{\epsilon<|y|\leq 1} y\Pi(dy) = \int_{\epsilon<|y|\leq 1} (1 - e^{icy} + icy)\Pi(dy)$$

$$\Rightarrow \widehat{\psi}_\epsilon(c) \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \psi_\epsilon(c).$$

Αφού $M_t = \lim_{n\to\infty} M^{\frac{1}{n},1}$ έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις,

$$E\Big[e^{icM_t}\Big] = \lim_{n\to\infty} E\Big[e_t^{icM^{\frac{1}{n},1}}\Big] = e^{-t\psi(c)}.$$

□

Σημείωση 4.1.10. *Ορίζουμε την διαδικασία*

$$M_t^{\frac{1}{n}} := M_t^1 + M_t^{\frac{1}{n},1} + t\int_{\frac{1}{n}<|y|\leq 1} y\Pi(dy) =$$

$$\int_{|y|\geq 1} y\Pi(dy) + M_t^{\frac{1}{n},1} + t\int_{\frac{1}{n}<|y|\leq 1} y\Pi(dy).$$

Η πρώτη συνιστώσα της $M_t^{\frac{1}{n}}$ *περιγράφει τα μεγάλα άλματα, η δεύτερη τα μικρά και ο τελευταίος όρος είναι μια τάση.*

Για την ανέλιξη $(M_t)_{t\geq 0}$ *ορίζουμε την νόρμα*

$$\|M\| = \sqrt{E\Big(\sup_{0\leq s\leq t} |M_s|^2\Big)}.$$

Δίνεται ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα για την κατασκευή των ανελίξεων Lévy.

Θεώρημα 4.1.11. *Έστω* Π *ένα σ-πεπερασμένο μέτρο στον* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *και* $t \in [0,T]$. *Τότε,*

(i) *αν* $\int_{|y|<1} |y|\Pi(dy) < +\infty$ *ή αν* $\Pi(A) = \Pi(-A)$ $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ *και* $\int_{|y|<1} |y^2|\Pi(dy) < +\infty$. *Τότε, υπάρχει μία ανέλιξη Lévy* M_t *με χαρακτηριστικό εκθέτη*

$$\psi_\epsilon(c) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|>\epsilon}(1-e^{icy})\Pi(dy), \qquad \forall c\in\mathbb{R}$$

έτσι ώστε $\quad \|M^{\frac{1}{n}} - M\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

(ii) *Γενικότερα, αν* $\int_{|y|<1}|y|\Pi(dy) < +\infty$, *τότε υπάρχει μία ανέλιξη Lévy* $(\widetilde{X}_t)$ *με χαρακτηριστικό εκθέτη*

$$\psi_\epsilon(c) = \int(1-e^{icy}+icy\mathbf{1}_{\{|y|<1\}})\Pi(dy), \qquad \forall c\in\mathbb{R}$$

έτσι ώστε $\quad \|M^1 + M^{\frac{1}{n},1} - \widetilde{X}_t\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Απόδειξη. (βλ. [6]) □

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με τρόπο ανάλογο αυτού που ξεκίνησε, δίνοντας το κυριότερο θεώρημα χαρακτηρισμού της τροχιάς μίας ανέλιξης Lévy.

Θεώρημα 4.1.12. *(Διαχωρισμός Lévy-Itô) Για κάθε* $\alpha\in\mathbb{R}$, $\sigma\in(0.+\infty)$ *και* Π *σ-πεπερασμένο μέτρο ορισμένο στην* $\mathcal{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ *ώστε*

$$\int|1\wedge y^2|\Pi(dy) < +\infty.$$

Η διαδικασία

$$X_t = \sigma B_t + \alpha t + \int_{|y|>1} yM_t(dy) + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|y|\le 1} y\widetilde{M}_t(dy)$$

είναι ανέλιξη Lévy με χαρακτηριστικό εκθέτη

$$\psi(c) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(1-e^{icy}+icy\mathbf{1}_{\{|y|<1\}})\Pi(dy).$$

Όπου, B_t *είναι μια τυπική Κίνηση Brown,* M_t *ένα τυχαίο μέτρο Poisson και* $\widetilde{M}_t(dy) = M_t(dy) - t\Pi(dy)$.
Αντίστροφα, κάθε διαδικασία Lévy μπορεί να διαχωριστεί όπως η X_t *με* $M_t = \sum_{s<t,\Delta X_s\neq 0}\Delta X_s, \quad t\ge 0.$

Απόδειξη. (βλ. [2]) □

Σχόλιο 4.1.13. *Η Κίνηση Brown είναι το κομμάτι της διάχυσης, η ντετερμινιστική διαδικασία* αt *είναι η τάση της διαδικασίας Lévy, το τρίτο μέρος εκφράζει τα άλματα μεγέθους μεγαλύτερου της μονάδας και το τελευταίο τα μικρά άλματα.*

4.2 Ολοκλήρωμα ως προς ανελίξεις Lévy

Στόχος αυτής της ενότητας είναι να δείξει ότι η κατασκευή του ολοκληρώματος κατά Itô του πρώτου μέρους της εργασίας, εξασφαλίζει την ύπαρξη ολοκληρώματος μιας τοπικά φραγμένης διαδικασίας σε σχέση με μια ανέλιξη Lévy.
Συγκεκριμένα, για $F \in L^2_{LOC}$ και X: ανέλιξη Lévy το ολοκλήρωμα $Y := \int F dX$ έχει νόημα.

Πρόταση 4.2.1. *Κάθε διαδικασία Lévy είναι semimartingale.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό της semimartingale διαδικασίας παίρνουμε τον διαχωρισμό

$$X_t = Z_t + A_t$$

όπου, Z_t *local−martingale* διαδικασία και A_t διαδικασία πεπερασμένης κύμανσης. Βασιζόμενοι στο Θεώρημα 4.1.12 θεωρούμε,

$$Z_t = \sigma B_t + \int_{|y|<1} y\widetilde{M}_t(dy) \text{ και } A_t = \alpha t + \int_{|y|\geq 1} y M_t(dy).$$

Τότε, η A_t είναι διαδικασία πεπερασμένης κύμανσης και Z_t *local − martingale* διαδικασία όπως το θέλαμε. □

Σημείωση 4.2.2. *Ορίζουμε,*

$$L^2_{LOC}(M) = \Big\{ g(s,y) \text{ προοδευτικά μετρήσιμη} : \int_0^t \int_Y |g(s,y)|^2 M(dsdy) < +\infty \quad a.s \Big\}.$$

Όπου, με $L^2(M)$ συμβολίζουμε τον χώρο των μετρήσιμων g ώστε $E\Big[\int_0^t \int_Y |g(s,y)|^2 M(dsdy) \Big] < +\infty$ για M ένα τυχαίο μέτρο Poisson.
Επίσης,

$$L^2_{LOC}(B) = \Big\{ b(s) \text{προοδευτικά μετρήσιμη}: \int_0^t |b(s)|^2 d[B]_s < +\infty \quad a.s \Big\}$$

όπου B μια τυπική Κίνηση Brown.
Τώρα, για $f, g \in L^2_{LOC}(B)$ και $g \in L^2_{LOC}(M)$ θέλουμε να ορίσουμε

$$Z_t := \alpha \int_0^t f(s)ds + \sigma \int_0^t b(s)dB_s + \int_0^t \int_Y g(s,y)\widetilde{M}(dsdy).$$

Για τους πρώτους δύο όρους οι ορισμοί είναι γνωστοί οπότε θα ασχοληθούμε με τον τελευταίο όρο.
Έστω $g_n \in H_0(M)$. Δηλαδή, $g_n(s,y) = \sum_{i=1}^n \psi_i(y)\mathbf{1}_{(s_{i-1},s_i]}(s)$ και $\psi_i(y)$ $\mathcal{B} \times \mathcal{F}_{s_i}$-μετρήσιμη συνάρτηση με $E\Big[\int |g(s,y)|^2 \Pi(dy) \Big] < +\infty$.

Ορισμός 4.2.3. *Το στοχαστικό ολοκλήρωμα σε σχέση με το τυχαίο μέτρο Poisson δίνεται από την σχέση*

$$(g_n \bullet \widetilde{M})_t := \sum_i \psi_i(y)(\widetilde{M}(s_i \wedge t \times dy) - \widetilde{M}(s_{i-1} \wedge t \times dy)). \tag{4.17}$$

Πόρισμα 4.2.4. *Ισχύει ότι,*

$$\|(g_n \bullet \widetilde{M})_t\|_{H^2_M} = \|g_n\|_{L^2(\widetilde{M})}. \tag{4.18}$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι,

$$\|(g_n \bullet \widetilde{M})_t\|^2_{H^2_M} = E\Big[\sum_i \psi_i^2(y)([\widetilde{M}(\cdot \wedge t \times dy)]_{s_i} - [\widetilde{M}(\cdot \wedge t \times dy)]_{s_{i-1}})\Big] =$$

$$= E\Big[\int \psi_i^2(y)[\widetilde{M}(\cdot \wedge t \times dy)]_t\Big] = \|g_n\|^2_{L^2(\widetilde{M})}.$$

□

Παρατήρηση 4.2.5. *Έστω t_i μια διαμέριση του $[0,t]$.*
Έχουμε ότι, $\sum_i |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}| = M_t(E) = \Delta M_s$.
Άρα, $\sum_i [\widetilde{M}_{t_{i+1}} - \widetilde{M}_{t_i}] = [\widetilde{M}]_t - \Delta M_s = M_t(E)$ και $\|\widetilde{M}_{t_{i+1}} - \widetilde{M}_{t_i}\|_{H^2_M} = E\Big([\widetilde{M}]_t\Big) = t\Pi(E)$ για $\Pi(E) < +\infty$.

Πρόταση 4.2.6. *Έστω $g \in L^2_{LOC}(\widetilde{M})$. Τότε,*

$$\int_0^t g_n(s,y)\widetilde{M}(dsdy) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t \int_Y g(s,y)\widetilde{M}(dsdy). \tag{4.19}$$

Απόδειξη. Από την ισομετρία του Itô έχουμε ότι
$\|g_n \bullet \widetilde{M} - g \bullet \widetilde{M}\|_{H^2_M} = \|g_n - g\|_{L^2(\widetilde{M})}$.

Για $g_n \in H^2_0(\widetilde{M})$ η $g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g \in L^2(\widetilde{M})$ αφού ο $H_0(\widetilde{M})$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^2(\widetilde{M})$.
Άρα, έχουμε το ζητούμενο. □

Σημείωση 4.2.7. *Υποθέτουμε ότι,*

$$E\Big[\int_0^t \int_Y |g(s,y)| ds\Pi(dy)\Big] < +\infty.$$

Η διαδιακασία

$$\int_0^t \int_Y g(s,y)\widetilde{M}(dsdy) := \int_0^t \int_Y g(s,y)M(dsdy) - \int_0^t \int_Y |g(s,y)| ds\Pi(dy)$$

είναι martingale.

Σχόλιο 4.2.8. *Ουσιαστικά σε αυτή την ενότητα δείξαμε ότι η γενίκευση του ολοκληρώματος Itô έχει άμεση εφαρμογή σε μια τεράστια κλάση ανελίξεων όπως αυτή των ανελίξεων Lévy. Η κατασκευή σε σχέση με την Κίνηση Brown είναι γνωστή από τον στοχαστικό λογισμό και ο τρόπος είναι εντελώς ανάλογος.*

Ολοκληρώνοντας, θα δώσουμε την Φόρμουλα του Itô για τις ανελίξεις Lévy και ένα πολύ ενδιαφέρον θεώρημα σχετικά με αυτή.

Θεώρημα 4.2.9. *(Φόρμουλα του Itô για ανελίξεις Lévy).*
Έστω X μια ανέλιξη Lévy με τον διαχωρισμό

$$dX_t = \alpha dt + \sigma dB_t + \int_Y y\widetilde{M}(dtdy)$$

και $F_t = f(t, X_t)$ μια συνάρτηση με $F \in \mathcal{C}^{1,2}$. Τότε,

$$dF_t = \partial_t f(t,X_t) + \partial_x f(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{xx} f(t,X_t)dt+ \tag{4.20}$$

$$\int_Y \Bigg(f(t, X_{t^-} + y) - f(t, X_{t^-}) - y\partial_x f(t, X_{t^-}) M(dtdy) \Bigg).$$

Απόδειξη. $Jacob - Shiryaev$ □

Πόρισμα 4.2.10. *Έστω $F_t = f(X_t)$ μια συνάρτηση με $F \in \mathcal{C}^2$. Τότε,*

$$dF_t = f'(x_t)dX_t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 f''(X_t)dt$$
$$+\int_Y \Bigg(f(t, X_{t^-} + y) - f(t, X_{t^-}) - yf'(X_{t^-}) M(dtdy) \Bigg).$$

Σημείωση 4.2.11. *Η τελευταία σχέση σε ολοκληρωτική μορφή γίνεται,*

$$f(X_t) = f(x_0) + \int_0^t f'(x_t)dX_t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t f''(X_t)dt +$$
$$\int_0^t \int_Y \Bigg(f(t, X_{t^-} + y) - f(t, X_{t^-}) - yf'(X_{t^-}) \Bigg) M(dtdy).$$

Στο επόμενο παράδειγμα δίνεται μια απλή εφαρμογή της Φόρμουλας του Itô για ανελίξεις Lévy.

Παράδειγμα 4.2.12. *Έστω X_t μια διαδικασία Lévy με χαρακτηριστική τριπλέτα (α, σ, Π) και $X_0 = 1$.*
Θεωρούμε την $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \log(|x|)$. Η $f \in \mathcal{C}^2$ με $f'(x) = \frac{1}{x}$ και $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Εφαρμόζοντας την Φόρμουλα του Itô για την διαδικασία $f(X_t) = \log|X_t|$ έχουμε ότι,

$$\log|X_t| = \log|X_0| + \int_0^t \tfrac{1}{X_{s^-}} dX_s - \tfrac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t \tfrac{1}{X_s^2} ds$$
$$+ \textstyle\sum_{0 \le s \le t} \Big(\log|X_s| - \log|X_{s^-}| - \tfrac{1}{X_{s^-}} \Delta X_s \Big) \Rightarrow$$
$$\log|X_t| = \int_0^t \tfrac{1}{X_{s^-}} - \tfrac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t \tfrac{1}{X_t^2} dt + \textstyle\sum_{0 \le s \le t} \Big(\log \tfrac{|X_s|}{|X_{s^-}|} - \tfrac{1}{X_{s^-}} \Delta X_s \Big).$$

Αλλιώς,

$$\log|X_t| = \int_0^t \tfrac{1}{X_{s^-}} dX_s - \tfrac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t \tfrac{1}{X_s^2} ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Big(\log|1 + \tfrac{y}{X_{s^-}}| - \tfrac{y}{X_{s^-}} \Big) M(dsdy).$$

Θεώρημα 4.2.13. *(Kunita-Watanabe).Έστω $X_t^i = (X_t^1, X_t^2, ..., X_t^k)$ μια k-διάστατη ανέλιξη Lévy με την αναπαράσταση,*

$$X_t^i = X_0^i + A_t^i + Z_t^i + \int_0^t \int_Y g^i(s, y) \widetilde{M}(dsdy) + \int_0^t \int_Y h^i(s, y) M(dsdy), \, , i = 1, ..., k$$

όπου,A συνεχής προσαρμοσμένη διαδικασία πεπερασμένης κλυμανσης, Z συνεχής $local - martingale$ και οι h, g ικανοποιούν την συνθήκη $|g| \cdot |h| = 0$.
Έστω $F(X_t^1, X_t^2, ..., X_t^k)$ μία $\mathcal{C}^2$ συνάρτηση. Τότε,

$$F(X_t^1, X_t^2, ..., X_t^k) = F(X_0^1, X_0^2, ..., X_0^k) + \textstyle\sum_{i=1}^k \int_0^t \frac{\partial F}{\partial X_i}(X_{s^-}) dZ_t^i$$
$$+ \textstyle\sum_{i=1}^k \int_0^t \frac{\partial F}{\partial X_i}(X_{s^-}) dA_t^i$$
$$+ \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i,j=1}^k \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial_{X_j}}(X_{s^-}) d[Z^i, Z^j]_s$$

$$+\int_0^t \int_Y \Big(F(X^i_{s-} + g(s,y)) - F(X^i_{s-})\Big)\widetilde{M}(dsdy)$$

$$+\int_0^t \int_Y \Big(F(X^i_{s-} + h(s,y)) - F(X^i_{s-})\Big)M(dsdy)$$

$$+\int_0^t \int_Y \Bigg\{F(X^i_{s-} + g(s,y)) - F(X^i_{s-}) - \sum_{i=1}^k g^i(s,y)\frac{\partial F}{\partial X_i}(X_{s-})\Bigg\}d\Pi(dy).$$

Απόδειξη. (βλ. [13]) □

Σχόλιο 4.2.14. *Η συνθήκη $|g(s,y)| \cdot |h(s,y)| = 0$ σημαίνει ότι οι διαδικασίες $\widetilde{M}_t(g)$ και $M_t(h)$ δεν κάνουν άλματα ταυτόχρονα.*

Πράγματι,

$$\sum_{s\le t} |\Delta\widetilde{M}_t(g)| \cdot |\Delta M_t(h)| = M_t(|g| \cdot |h|)$$

το οποίο μηδενίζεται αν και μόνο αν $|g| \cdot |h| = 0$, a.s.

Πρόταση 4.2.15. *(Εφαρμογή). Έστω Y_t μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη Κίνηση Brown. Τότε η Y_t είναι κανονικά κατανεμημένη και επιπλέον, είναι α-νεξάρτητη από κάθε τυχαίο μέτρο Poisson.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι η Y_t είναι μονοδιάστατη με $E[Y_t] = 0$ και $E[Y_t^2] = \sigma^2 t$.
Τότε, ισχύει ότι $[Y]_t = \sigma^2 t$.
Έστω $X_t = M_t(E_0)$ ένα τυχαίο μέτρο Poisson με $\Pi(E_0) < +\infty$.
Ορίζουμε την ανέλιξη $F(t) := e^{i\alpha Y_t}e^{ibX_t}$ και από το Θεώρημα (Kunita-Watanabe) παίρνουμε ότι,

$$F(t) = i\alpha \int_0^t F(s^-)Y(ds) - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \int_0^t F(s^-)\sigma^2 ds$$

$$+\int_0^t \int_Y F(s^-)(e^{ib} - 1)\mathbf{1}_{E_0}(y)\widetilde{M}(dsdy)$$

$$+\int_0^t \int_Y (e^{ib} - 1)\mathbf{1}_{E_0}(y)ds\Pi(dy).$$

Τώρα, παίρνοντας την μέση τιμή έχουμε,

$$E[F(t)] = -\tfrac{1}{2}\alpha^2\sigma^2 \int_0^t E[F(s^-)]ds + (e^{ib} - 1)\Pi(E_0)\int E[F(s)]ds.$$

Συνεπώς,

$$E[F(t)] = exp\Bigg\{-\tfrac{1}{2}\alpha^2\sigma^2 t + t(e^{ib} - 1)\Pi(E_0)\Bigg\} \Rightarrow$$

$$E[e^{i\alpha Y_t}e^{ibX_t}] = E[e^{i\alpha Y_t}] \cdot E[e^{ibX_t}].$$

Επομένως, οι Y και X είναι ανεξάρτητες. □

Βιβλιογραφία

[1] Alili L. Patie P., *Representations of the First Hitting Time Density of an Ornstein-Uhlenbeck Process* , Stochastic Models (2005).

[2] Applebaum D., *Lévy Processes and Stochastic Calculus* , Cambridge University Press (2009).

[3] Bichteler C., *Stochastic Integration and L^p-Theory of Semimartingales* , The Annals of Probability vol 9.(1981).

[4] Bourgade P., *Stochastic Analysis* , Notebook,(2009).

[5] Chung K., *Introduction to Stochastic Integration* , Springer (1990).

[6] Eberle A., *Stochastic Analysis* , Notebook ,(1992).

[7] Sheng-wu He Jia-gang Wang Jia-an Yan, *Semimaringale Theory and Stochastic Calculus* , Science Press,(2012).

[8] Jacob J. Shiryaev A. , *Limit Theorems of Stochastic Processes*, Springer,(2003).

[9] Klebner F. , *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*, Imperial College Press,(2005).

[10] Kyprianou A. , *Fluctuations of Lévy Processes with Applications*, Springer,(2014).

[11] Papapantoleon A. , *An introduction to Lévy processes with applications in finance*, Notebook,(2008).

[12] Protter P. , *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer,(2003).

[13] Rao M. , *Real and Stochastic Analysis*, Springer,(2004).

[14] Sato K. , *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press ,(1999).

[15] Yor M. Revuz D. , *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer,(1999).

[16] Γιαννακόπουλος Α., *Στοχαστική Ανάλυση και εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική*, [ηλεκτ. βιβλίο], (2003)

[17] Κουμουλλής Γ. Νεγεπόντης Σ., *Θεωρία Μέτρου*, Συμμετρία,(2005).

[18] Νεγεπόντης Σ. Ζαχαριάδης Θ. Καλαμίδας Ν. Φαρμάκη Β., *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Συμμετρία,(1997).

[19] Χελιώτης Δ., *Εισαγωγή στον στοχαστικό λογισμό*, [ηλεκτ. βιβλίο] Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλίων. , (2015)