Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών, Κατεύθυνση Μαθηματικών

REVERSE MATHEMATICS
Ανάστροφα Μαθηματικά: Από τα αξιώματα στα θεωρήματα

Πτυχιακή Εργασία

της

ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΣ Π. ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΠΟΥΛΟΥ

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Κορνάρος
Επίκουρος Καθηγητής

Καρλόβασι,2022

Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών, Κατεύθυνση Μαθηματικών

REVERSE MATHEMATICS
Ανάστροφα Μαθηματικά:
Από τα αξιώματα στα θεωρήματα

Πτυχιακή Εργασία

της

ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΣ Π. ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΠΟΥΛΟΥ

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Κορνάρος
Επίκουρος Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 17 Ιουνίου 2022.

(Υπογραφή)	*(Υπογραφή)*	*(Υπογραφή)*
....	....	....
Χαράλαμπος Κορνάρος	Μιχαήλ Ανούσης	Θεοδόσης Δημητράκος
Επίκουρος Καθηγητής	Επίκουρος Καθηγητής	Επίκουρος Καθηγητής

Καρλόβασι,2022

Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών, Κατεύθυνση Μαθηματικών

ΔΗΛΩΣΗ ΜΗ ΛΟΓΟΚΛΟΠΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΗΨΗΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΗΣ ΕΥΘΥΝΗΣ

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, δηλώνω ενυπογράφως ότι είμαι αποκλειστικός συγγραφέας της παρούσας Πτυχιακής Εργασίας, για την ολοκλήρωση της οποίας κάθε βοήθεια είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται λεπτομερώς στην εργασία αυτή. Έχω αναφέρει πλήρως και με σαφείς αναφορές, όλες τις πηγές χρήσης δεδομένων, απόψεων, θέσεων και προτάσεων, ιδεών και λεκτικών αναφορών, είτε κατά κυριολεξία είτε βάσει επιστημονικής παράφρασης. Αναλαμβάνω την προσωπική και ατομική ευθύνη ότι σε περίπτωση αποτυχίας στην υλοποίηση των ανωτέρω δηλωθέντων στοιχείων, είμαι υπόλογος έναντι λογοκλοπής, γεγονός που σημαίνει αποτυχία στην Πτυχιακή μου Εργασία και κατά συνέπεια αποτυχία απόκτησης του Τίτλου Σπουδών, πέραν των λοιπών συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων. Δηλώνω, συνεπώς, ότι αυτή η Πτυχιακή Εργασία προετοιμάστηκε και ολοκληρώθηκε από εμένα προσωπικά και αποκλειστικά και ότι, αναλαμβάνω πλήρως όλες τις συνέπειες του νόμου στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής άλλης πνευματικής ιδιοκτησίας.

(Υπογραφή)

. . . .
Α. Π. ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΠΟΥΛΟΥ

Στην γιαγιά μου, Αναστασία

Ευχαριστίες

Θα ήθελα καταρχήν να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Κορνάρο για την επίβλεψη αυτής της πτυχιακής εργασίας και την σημαντική του βοήθεια. Επίσης, τον ευχαριστώ για την καθοδήγησή του και την εξαιρετική συνεργασία που είχαμε. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους επιτηρητές κύριο Ανούση και κύριο Θεοδόση αλλά και τον αναπληρωτή κύριο Τσολομύτη. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την καθοδήγηση και την ηθική συμπαράσταση που μου προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια.

Περιεχόμενα

Κατάλογος σχημάτων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα ανάστροφα μαθηματικά είναι ένα νέο πεδίο των μαθηματικών που απαντά σε κάποια “παλιά” ερωτήματα. Ανάμεσα στα δυο χιλιάδες χρόνια όπου οι μαθηματικοί αποδίδουν θεωρήματα από αξιώματα, συχνά υπάρχει το ερώτημα: ποια αξιώματα χρειάζονται ώστε να αποδείξουμε ένα δοσμένο θεώρημα; Μόνο, τα τελευταία διακόσια χρόνια έχουν απαντηθεί τέτοιου είδους ερωτήσεις και μόνο τα τελευταία σαράντα χρόνια έχει αναπτυχθεί μια συστηματική προσέγγιση πάνω σε αυτό. Έτσι, στα ανάστροφα μαθηματικά αντί να αναζητούμε τις συνέπειες ενός δοσμένου αξιώματος, αναζητούμε τα κατάλληλα αξιώματα που χρειάζονται για να αποδείξουμε δοσμένα θεωρήματα. Το κριτήριο για ένα αξίωμα να είναι κατάλληλο εκφράστηκε από τον Harvey Friedman, θεμελιωτή των ανάστροφων μαθηματικών, το 1975:

When the theorem is proved from the right axiom, the axioms can be proved from the theorem. (Όταν ένα θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί από το κατάλληλο αξίωμα, τότε το αξίωμα μπορεί να αποδειχθεί από το θεώρημα αυτό.)

Η αναζήτηση, λοιπόν, αυτών των αξιωμάτων μας ταξιδεύει πίσω στην Ευκλείδεια εποχή και το αξίωμα των παραλλήλων. Για πολλά χρόνια, το αξίωμα αυτό δίχαζε την μαθηματική κοινότητα για την χρησιμότητα του στην απόδειξη θεωρημάτων, όπως για παράδειγμα το Πυθαγόρειο θεώρημα. Πάρα όλα αυτά στην γεωμετρία, το αξίωμα των παραλλήλων είναι το κατάλληλο αξίωμα για την απόδειξη πολλών ευκλείδειων θεωρημάτων.

Βλέποντας το αξίωμα των παραλλήλων αλλά και το αξίωμα της επιλογής από την θεωρία συνόλων παρατηρούμε ότι και τα δύο αυτά αξιώματα ενστερνίζονται την ιδέα των ανάστροφων μαθηματικών. Έτσι ανάμεσα σε δύο σημαντικούς κλάδους των μαθηματικών δηλαδή την γεωμετρία και την θεωρία συνόλων βρίσκεται η θεωρία των πραγματικών αριθμών.

Οι πραγματικοί αριθμοί, έτσι όπως τους αντιλαμβανόμαστε σήμερα, προέκυψαν από τις προσπάθειες να αριθμητικοποιηθεί η ανάλυση και η γεωμετρία. Κατασκευάζοντας πραγματικούς αριθμούς από σύνολα ρητών αριθμών είναι εφικτό να κωδικοποιήσουμε ακολουθίες από πραγματικούς αριθμούς και συνεχής συναρτήσεις από σύνολα πραγματικών αριθμών. Έτσι αριθμητικοποείται η ανάλυση και τα βασικά θεωρήματα της ανάλυσης. Ύστερα, διερωτόμαστε ποια αξιώματα χρειαζόμαστε για να αποδείξουμε αυτά τα βασικά θεωρήματα; Η απάντηση στο περίπου είναι ένα σύνολο από αξιώματα των φυσικών αριθμών (PEANO) αλλά και ένα σύνολο από αξιώματα ύπαρξης.

Το σύνολο από αξιώματα ύπαρξης εμφανίζεται σε διάφορες μορφές *ισχύος*, που εξαρτώνται από την ισχύ των θεωρημάτων που θέλουμε να αποδείξουμε. Το πιο ασθενές σε ισχύ είναι άρρηκτα συνδεδεμένο με τα θεμέλια της *υπολογισιμότητας*: μας επιβεβαιώνει την ύπαρξη των υπολογίσιμων συνόλων. Αυτό το αξίωμα μας βοηθά να μελετήσουμε έννοιες της υπολογισιμότητας που εμφανίζονται σε προβλήματα της ανάλυσης διότι και η ανάλυση και η υπολογισιμότητα ξεκινούν από μία κοινή βάση, την αριθμητική. Μετά από μία ανεπίσημη εισαγωγή στην υπολογισιμότητα θα αναπτύξουμε προσεκτικά την έννοια του υπολογισμού και της αριθμητικοποίησης του στο κεφάλαιο 4.

Τελικό αλλά εξίσου σημαντικό είναι η συγκέντρωση των ιδεών της ανάλυσης και της αριθμητικής σε κάποια συστήματα αξιωμάτων, γνωστά ως RCA_0, WKL_0 και ACA_0. Αυτά τα συστήματα αποδεικνύουν κάποια από τα πιο βασικά θεωρήματα της ανάλυσης. Σημειωτέον, ταξινομούν τα βασικά θεωρήματα σε τρία επίπεδα αφού τα περισσότερα θεωρήματα είναι ισοδύναμα με τα αξιώματα που τα αποδεικνύουν, όπως είπαμε και στην αρχή.

θα δούμε, για παράδειγμα, ότι το αξίωμα RCA_0 μπορεί να αποδείξει το θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής ενώ το χαρακτηριστικό αξίωμα $WKLO_0$ μπορεί να αποδείξει το Heine-Borel θεώρημα και τέλος το αξίωμα ACA_0 μπορεί να αποδείξει το κριτήριο της ακολουθίας Cauchy και το Bolzano-Weirstrass Θεώρημα.

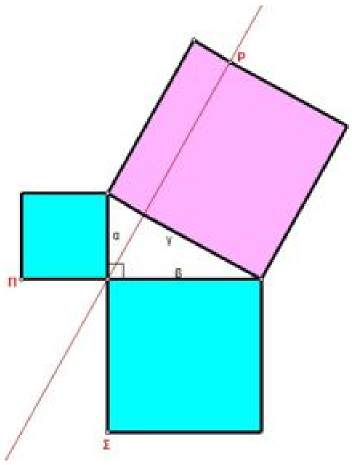
Έτσι, στα ”ανάστροφα μαθηματικά” συναντάμε τα συνήθης χαρακτηριστικά από ένα εισαγωγικό μάθημα στην πραγματική ανάλυση, αλλά σε μία εντελώς καινούργια εκδοχή.

Κεφάλαιο 1

Ιστορική Αναδρομή

1.1 Το αξίωμα των παραλλήλων

Ο Ευκλείδης (300 πχ) θέτει αξιώματα για αυτό που εμείς γνωρίζουμε και θεωρούμε δεδομένο σήμερα, την Ευκλείδεια γεωμετρία. Τα αξιώματα του Ευκλείδη είναι γνωστά ως ατελής, παρόλο αυτά, υποτυπώνουν ένα ολοκληρωμένο σύστημα αξιωμάτων και διαχωρίζουν τα προφανή «βασικά» αξιώματα από τα λιγότερο προφανή όπου είναι και βασικά για την δημιουργία ενός θεωρήματος. Χρησιμοποιώντας τα βασικά αξιώματα είναι πιθανό να αποδείξουμε αρκετά θεωρήματα ενός αναμενόμενου είδους. Ωστόσο τα βασικά αυτά αξιώματα αποτυγχάνουν στο να αποδείξουν το χαρακτηριστικό θεώρημα της ευκλείδειας γεωμετρίας, το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

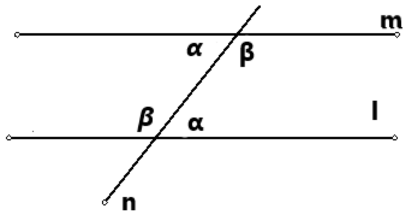


Σχήμα 1.1: *Το πυθαγόρειο θεώρημα*

Το θεώρημα σύμφωνα με τον Πυθαγόρα είναι: « ‘εν τοίς ‘ορθογωνίοις τριγώνοις το` ‘απο`τις τη`ν ‘ορθη`ν γωνίαν ‘υποτεινούσης πλευρας τετράγωνον ‘ίσον ‘εστι`τοίς ‘απο`των τη`ν ‘ορθη`ν γωνίαν περιεχουσων πλευρων τετραγώνοις.». Δηλαδή το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο καθέτων πλευρών. Βέβαια παρατηρούμε ότι κανένα από τα βασικά αξιώματα του Ευκλείδη, δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη τετραγώνων όπως αυτών που βλέπουμε στο σχήμα 1.1. Για να αποδείξουμε το πυθαγόρειο θεώρημα όπως ο Ευκλείδης αντιλήφτηκε, χρειαζόμαστε ένα αξίωμα για το άπειρο: *το αξίωμα των παραλλήλων*.

Θα μπορούσαμε να ονομάσουμε το αξίωμα των παραλλήλων ένα αξίωμα που αφορά το άπειρο επειδή αναφέρετε σε ευθείες που δεν συναντιούνται, όσο μακριά και να τις προεκτείνουμε. Αυτόν τον παραλληλισμό δεν μπορούμε να το «δούμε» εκτός εάν έχουμε την δύναμη να «δούμε» στο άπειρο και ο Ευκλείδης προτίμησε να μην αναλάβει μία τέτοια υπεράνθρωπη δύναμη. Αντί αυτού, έδωσε ένα κριτήριο για παραλλήλους, για το οποίο οι ευθείες δεν είναι παράλληλες, αφού η τομή δυο ευθειών μπορεί να «ιδωθεί» από μια ορισμένη απόσταση μακριά.

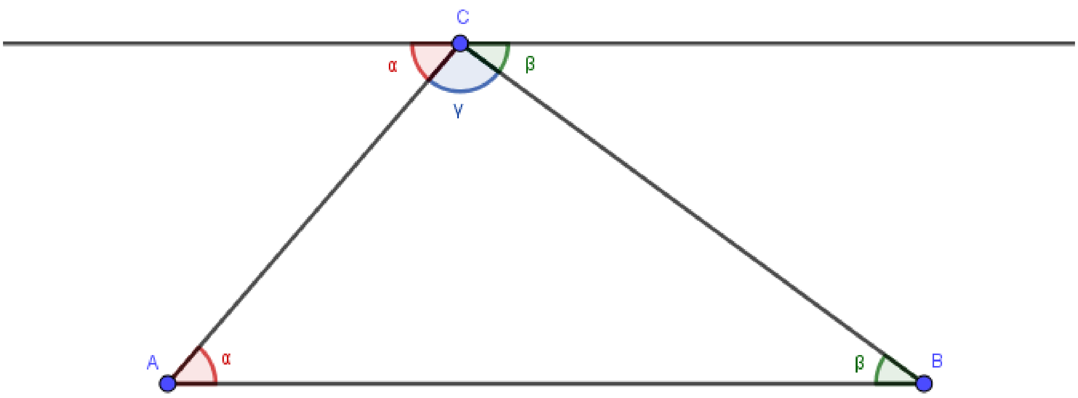
Αξίωμα των παραλλήλων: Εάν μία ευθεία n που τέμνει δύο άλλες ευθείες l και m σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά γωνίες με άθροισμα μικρότερο από δυο ορθές τότε οι δυο ευθείες τέμνονται και μάλιστα στο ημιεπίπεδο εκείνο που περιέχει τις εντός κι επί τα αυτά γωνίες.



Σχήμα 1.2: *Γωνίες που περιέχουν το αξίωμα των παραλλήλων*

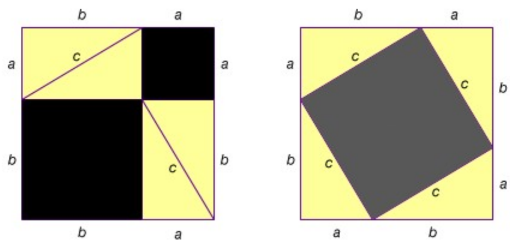
Επιπρόσθετα, ακολουθεί το γεγονός ότι εάν το άθροισμα των γωνιών $\alpha + \beta$ είναι ίσο με δυο ορθές τότε οι ευθείες l και m δεν μπορούν να «συναντηθούν», επειδή εάν συναντηθούν από την μια πλευρά (σχηματίζοντας ένα τρίγωνο) θα πρέπει να συναντηθούν και από την άλλη (σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας (Π-Γ-Π)), αφού υπάρχουν γωνίες και και στις δυο πλευρές και η μία πλευρά είναι κοινή. Αυτό διαψεύδει την μοναδικότητα μιας ευθείας που περνά από δύο σημεία.

Έτσι το Ευκλείδειο αξίωμα για τις ευθείες που δεν είναι παράλληλες μεταξύ τους δείχνει ότι οι παράλληλες ευθείες υπάρχουν. Από αυτές τις παράλληλες ευθείες μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με μια ευθεία γωνία (ή π), όπως βλέπουμε και στο παρακάτω σχήμα. Με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε ότι ένα ισοσκελές τρίγωνο με την γωνία ανάμεσα στις ίσες πλευρές να ισούται με $\frac{\pi}{2}$ οι άλλες δυο γωνίες του ισούνται με $\frac{\pi}{4}$, έτσι βάζοντας δύο τέτοια τρίγωνα μαζί φτιάχνουμε ένα τετράγωνο.



Σχήμα 1.3: *Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου*

Η απόδειξη του Πυθαγορείου τώρα μπορεί να υλοποιηθεί και υπάρχουν πολλοί τρόποι για να την ολοκληρώσουμε. Πιθανότατα η πιο εύκολη είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, στο οποίο το γκρίζο τετράγωνο και τα δύο μαύρα τετράγωνα είναι ίσα. Πράγματι και το γκρίζο τετράγωνο αλλά και τα δύο μαύρα τετράγωνα είναι ακριβώς ίσα με το μεγάλο τετράγωνο μείον τέσσερα ίσα ορθογώνια τρίγωνα, (χρωματισμένα με κίτρινο χρώμα στο παρακάτω σχήμα).



Σχήμα 1.4: *Βλέποντας το πυθαγόρειο θεώρημα*

1.1.1 Ισοδύναμα με το αξίωμα των παραλλήλων

Αρκετοί μαθηματικοί θεωρούν το αξίωμα των παραλλήλων ως ένα ”ψεγάδι” της Ευκλείδειας γεωμετρίας - όπως ακριβώς το ονόμασε ο Saccheri (1733) - έτσι, προσπάθησαν να δείξουν ότι ακολουθείται από τα άλλα αξιώματα. Οι προσπάθειές τους συνήθως πήραν την μορφή της αφαίρεσης του αξιώματος από μία φαινομενικά πιο προφανή πρόταση, ελπίζοντας ότι το πρόβλημα θα μειωθεί σε κάτι πιο απλό. Οι παρακάτω προτάσεις αποδείχτηκαν ισοδύναμες με το αξίωμα των παραλλήλων :

-Ύπαρξη των ορθογωνίων (al-Haytham, al-Tusi, στον μεσαίωνα)

-Ύπαρξη όμοιων τριγώνων σε διαφορετικά μεγέθη (Wsuallis, 1963)

-Άθροισμα γωνιών ενός τριγώνου ίσο με π (Legendere's 'Elements de geometrie, 1823)

-Τρία μη-συγγραμμικά σημεία βρίσκονται πάνω σε κύκλο (Farkas Bolyai, 1832)

Όλα αυτά τα θεωρήματα αποδεικνύονται από το αξίωμα των παραλλήλων, έτσι αυτά είναι ισοδύναμα με αυτό σε ισχύ, δηλαδή η ισοδυναμία τους με το αξίωμα της παραλληλίας μπορεί να αποδειχθεί μόνο από το αξιώματα. Ο γιος του Bolyai, Jonas ήταν ένας από τους βασικούς ερευνητές της υπόθεσης μιας υποθετικής μη-Ευκλείδειας γεωμετρίας στην οποία το αξίωμα των παραλλήλων δεν ισχύει, αλλά τα υπόλοιπα αξιώματα του Ευκλείδη αληθεύουν.

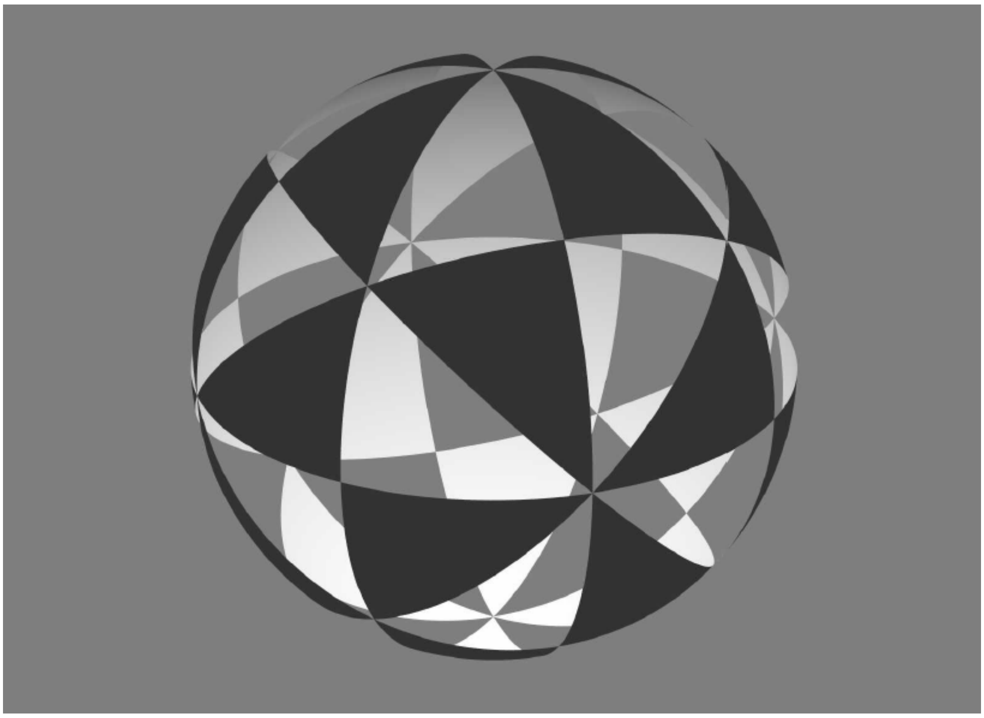
Αλλά πριν δούμε μία μη-Ευκλείδεια γεωμετρία, βοηθάει να δούμε την σφαιρική γεωμετρία. Η σφαιρική γεωμετρία είναι ξεκάθαρα διαφορετική από την Ευκλείδεια όχι μόνο στην απουσία των παραλλήλων, αλλά και στην απουσία των άπειρων ευθειών, παρόλα αυτά μοιράζονται μια κοινή γλώσσα "σημείων", "ευθειών" και "γωνιών". Βλέποντας, λοιπόν δυο διαφορετικές ερμηνείες αυτών των λέξεων θα είναι πιο εύκολο να κατανοήσουμε μια άλλη ερμηνεία, ένα άλλο μοντέλο, το μοντέλο των μη-Ευκλείδειων γεωμετριών.

1.2 Σφαιρική και μη-ευκλείδεια γεωμετρία

Όπως οι κύκλοι και οι ευθείες στο επίπεδο είναι μέρος των δύο διαστάσεων στην Ευκλείδεια γεωμετρία, έτσι και οι σφαίρες και τα επίπεδα είναι μέρος των τριών διαστάσεων στην Ευκλείδεια γεωμετρία. Πράγματι, έχει αναφερθεί αλλά όχι μελετηθεί σε βάθος στα 'Στοιχεία' του Ευκλείδη, βιβλίο XI. Οι αρχαίοι Έλληνες έκαναν μία μελέτη με ισχύ πάνω στην σφαιρική γεωμετρία, συγκεκριμένα στην σφαιρική τριγωνομετρία, στην μελέτη τους για την αστρονομία. Ακόμα, οι θαλασσοπόροι, ενδιαφέρθηκαν για την σφαιρική γεωμετρία, κυρίως στην εύρεση γραμμής θέσεως ή την επίλυση του τριγώνου θέσεως για τον προσδιορισμό του γεωγραφικού στίγματος. Η έννοια της γωνίας μεταξύ δυο γραμμών επίσης βρίσκει νόημα, ως η γωνία μεταξύ των αντίστοιχων επιπέδων (όμοια, ως γωνία ανάμεσα στις εφαπτόμενες των μεγάλων κύκλων).

Πράγματι, είναι πιο εύκολο να περιγράψουμε ένα σφαιρικό τρίγωνο από τις γωνίες του, παρά από τα μήκη των πλευρών του. Όλα τα σφαιρικά τρίγωνα με τις ίδιες γωνίες είναι γεγονός πως έχουν το ίδιο μέγεθος εξαιτίας ενός διάσημου θεωρήματος του Harriot, 1603: *Το άθροισμα των γωνιών ενός σφαιρικού τριγώνου μείον π είναι πάντοτε ανάλογο με το εμβαδόν του.*

Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για να καλύψουμε την επιφάνεια μιας σφαίρας με συμπαγή τρίγωνα. Στην παρακάτω εικόνα μπορούμε να δούμε μία σφαίρα της οποίας η επιφάνεια διατηρείται σε 48 τρίγωνα κάθε ένα από αυτά έχει $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, αντίστοιχα γωνίες.(Για να είναι πιο εύκολο στον αναγνώστη να δει την επιφάνεια, έχουμε αποκόψει από δύο διαδοχικά τρίγωνα το ένα εξ αυτών). Οπότε το παρακάτω αποτελεί το πρότυπο μοντέλο της σφαιρικής γεωμετρίας: *τα "σημεία"* είναι οποιαδήποτε σημεία της επιφάνεια της σφαίρας, *οι ”ευθείες”* είναι μεγάλοι κύκλοι και *οι ”γωνίες”* είναι οι γωνίες ανάμεσα στις εφαπτόμενες των μεγάλων κύκλων στο σημείο τομής τους. *”Απόσταση”* δύο σημείων της σφαίρας είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ των σημείων αυτών μετρούμενη κατά μήκος της περιμέτρου του μεγαλύτερου κύκλου που τους συνδέει.



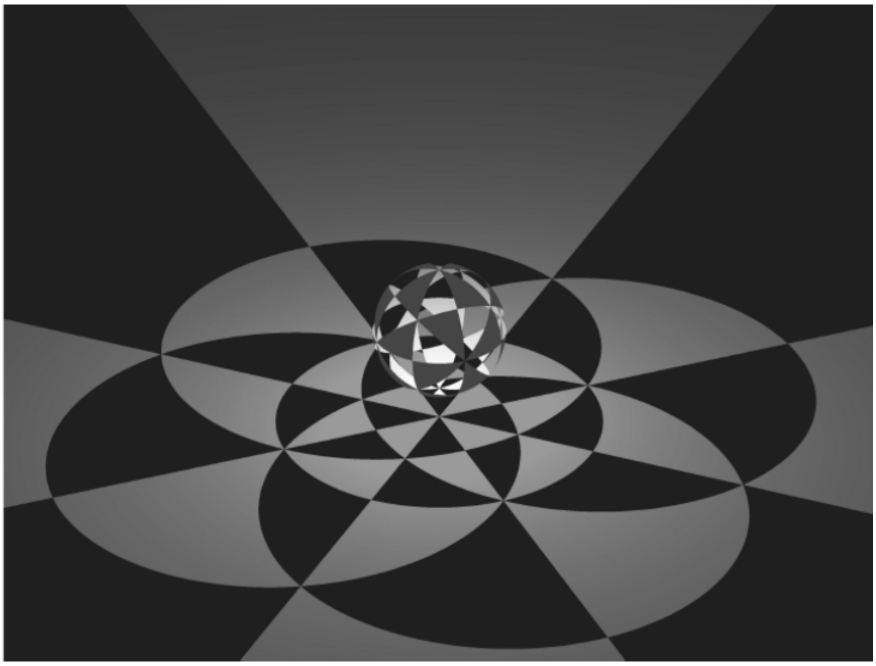
Σχήμα 1.5: *”Πλακοστρώνοντας” την σφαίρα με τρίγωνα*

Τώρα θα δούμε ένα άλλο μοντέλο προβάλλοντας την παραπάνω σφαίρα στο μια επίπεδη επιφάνεια. Συγκεκριμένα, τοποθετούμε μια πηγή φωτός ακριβώς στο βόρειο πόλο της για να δημιουργηθούν σκιές πάνω στο επίπεδο. Το αποτέλεσμα βρίσκεται στο παρακάτω σχήμα. Η εικόνα δείχνει δύο αξιοσημείωτα χαρακτηριστικά των προβολών του βόρειου πόλου τα οποία είναι γνωστά ως στερεογραφικές προβολές:

-οι κύκλοι σχεδιάζουν κύκλους,
-οι γωνίες διατηρούνται.

Έτσι, τα ”σημεία” είναι ακόμα σημεία, οι ”γραμμές” είναι ακόμα κύκλοι και οι γωνίες είναι ακόμα γωνίες ανάμεσα στις εφαπτόμενες των κύκλων.Δυστυχώς, η ”απόσταση” δεν είναι κάποια από τις γνωστές Ευκλείδειες αποστάσεις οποιουδήποτε είδους, διότι ίσες αποστάσεις πάνω στην σφαίρα προβάλλονται σε άνισες Ευκλείδειες αποστάσεις στο επίπεδο.

Παρόλα αυτά, δεν έχουμε σχεδιάσει όλη την σφαίρα στο επίπεδο, αλλά την σφαίρα χωρίς το βόρειο πόλο της (δηλαδή το σημείο που βρίσκεται η πηγή φωτός). Για να το διορθώσουμε αυτό ”θα προσθέσουμε” στο επίπεδο *ένα σημείο στο ”άπειρο*, δηλαδή ένα σημείο που προσεγγίζεται από τις σκιές των μεγίστων κύκλων της σφαίρας που διέρχονται από τον βόρειο πόλο της. Το σημείο στο άπειρο συμπληρώνει κάθε ευθεία γραμμή σε μία κλειστή καμπύλη , έτσι γίνονται οι κύκλοι. Συμπερασματικά,η δεύτερη ερμηνεία του σφαιρικού γεωμετρικού μοντέλου αναφέρεται ως: όλες οι γραμμές είναι κύκλοι και όλες οι γωνίες είναι γωνίες ανάμεσα στους κύκλους.



Σχήμα 1.6: *Προβάλλοντας την σφαίρα μέσα στο επίπεδο*

Νέα θεμέλια στην γεωμετρία και στα μαθηματικά

Η ανακάλυψη νέων μη-ευκλείδειων γεωμετριών ”ταρακούνησε” τα θεμέλια των μαθηματικών, τα οποία πριν τον δέκατο ένατο αιώνα βασιζόταν σε Ευκλείδειες έννοιες όπως η ”ευθεία” και το ”επίπεδο”. Δημιουργώντας αμφιβολίες για την σημασία των λέξεων αυτών, η μη-Ευκλείδεια γεωμετρία ενθαρρύνει την δημιουργία μιας μελέτης για τα θεμέλια της *αριθμητικής* αφού οι θεμελιώδης ιδιότητες των αριθμών ήταν αναμφισβήτητες.

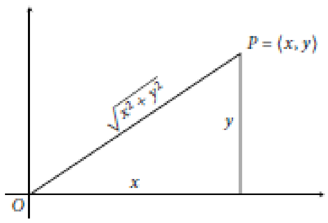
Συγκεκριμένα, η ”ευθεία” επανα-οικοδομήθηκε ως το σύστημα $\mathbb{R}$ *των πραγματικών αριθμών*, το οποίο έχει και αλγεβρικές και γεωμετρικές ιδιότητες.Θα περιγράψουμε σε κάποια από τα επόμενα κεφάλαια την ανάδειξη της γεωμετρίας βασισμένη ή επηρεασμένη από την έννοια των πραγματικών αριθμών.

1.3 Διανυσματική γεωμετρία

Η πρώτη κύρια πρόοδος στην γεωμετρία ύστερα από τους αρχαίους Έλληνες και τον Ευκλείδη, έγινε από τους Fermat και Descartes το 1620 και δημοσιεύτηκε το 1637 στο βιβλίο του Descartes « La Geometrie» (Γεωμετρία). Η καινοτομία της χρήσης άλγεβρας στην γεωμετρία, περιγράφει γραμμές και καμπύλες με εξισώσεις, έτσι μειώνονται πολλά προβλήματα της γεωμετρίας όσον αφορά τους υπολογισμούς.

Πριν όμως ”αλγεβροτικοποιήσουν” την γεωμετρία πρώτα έπρεπε να την *αριθμητικοποιήσουν*, ένα βήμα το οποίο τους πήγε πολύ πιο πέρα από τον Ευκλείδη. Στην πραγματικότητα, ήταν ένα πρώτο βήμα προς μία ευρεία αριθμητικοποίηση της γεωμετρίας και της ανάλυσης που συνέβη στον 19ο αιώνα.

Όπως κάθε φοιτητής των μαθηματικών γνωρίζει σήμερα, το Ευκλείδειο επίπεδο είναι αριθμητικοποιημένο, αφού μπορούμε σε κάθε σημείο P του επιπέδου να προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες του, δηλαδή ένα μοναδικό ζεύγος πραγματικών αριθμών ως x και y. Οι αριθμοί x και y απεικονίζονται ως κατακόρυφες ή οριζόντιες αποστάσεις του P από την αρχή των αξόνων O, όπου σε αυτή την περίπτωση η απόσταση |OP|, από το P στο O είναι ίση με $\sqrt{x^2+y^2}$, από το πυθαγόρειο θεώρημα. Το P μπορεί να *οριστεί* ως το διατεταγμένο ζεύγος $<x, y>$ και η απόσταση του από το O ως $\sqrt{x^2+y^2}$. Πιο γενικά, η απόσταση από το $P_1 = <x_1, y_1>$ στο $P_2 = <x_2, y_2>$ ορίζεται ως $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.



Σχήμα 1.7: *Οι συντεταγμένες στο επίπεδο*

Τα σημεία $<x, y>$ βρίσκονται σε μία γραμμή εάν ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής $ax + by + c = 0$ και οι εξισώσεις για κύκλους είναι τετραγωνικές εξισώσεις, οι οποίες εκφράζουν σταθερή απόσταση από ένα σημείο. Για παράδειγμα τα σημεία που απέχουν από το O απόσταση ίση 1 ικανοποιούν την εξίσωση $x^2+y^2 = 1$.

Έτσι, έχουμε μια εύκολα ”αλγεβρική” μετάφραση για όλες τις Ευκλείδειες γεωμετρίες και όχι μόνο, αφού δεν υπάρχει κανένα εμπόδιο, εκτός από την αλγεβρική δυσκολία για να μελετήσουμε καμπύλες που ικανοποιούν τυχαίες πολυωνυμικές εξισώσεις. Η Ευκλείδεια γεωμετρία δεν αντιστοιχεί ακριβώς στην αλγεβρική γεωμετρία. Η Ευκλείδεια γεωμετρία είναι πιο ”γραμμική”.

Γραμμική γεωμετρία του Grassmann

Το τέλειο αλγεβρικό ζευγάρι για την Ευκλείδεια γεωμετρία βρέθηκε από τον Grassmann το 1840 στην έννοια ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου. Τα πρώτα του έργα πάνω στο θέμα αυτό,το 1844 και το 1847, ήταν ακατανόητα στους υπόλοιπους μαθηματικούς και η ιδέα του άρχιζε να προκαλεί έλξη μόνο όταν ο Peano (1888) έδωσε αξιώματα για τους πραγματικούς διανυσματικούς χώρους.

Ορισμός 1.1. *Ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος είναι ένα σύνολο V από στοιχεία που λέγονται διανύσματα (υποδηλώνονται από τα γράμματα με έντονη γραφή), ο οποίος περιλαμβάνει ένα διάνυσμα* ***0*** *που ονομάζεται μηδενικό διάνυσμα και για κάθε $u \in V$, ένα* *διάνυσμα −u λέγεται αντίθετο του u. Ο V έχει πράξεις την πρόσθεση και τον βαθμιαίο πολλαπλασιασμό* $(a, b, c, ... \in V)$ *οι οποίοι ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:*

$$\boldsymbol{u+v=v+u}$$

$$\boldsymbol{u+(v+w)=(u+v)+w}$$

$$\boldsymbol{u+0=u}$$

$$\boldsymbol{u+(-u)=0}$$

$$\boldsymbol{1u=u}$$

$$a\boldsymbol{(u+v)} = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}$$

$$(a+b)\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{u}$$

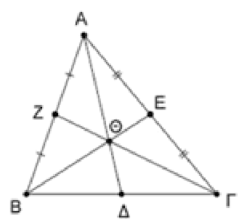
$$a(b\boldsymbol{u}) = (ab)\boldsymbol{u}$$

Τυπικά $V = \mathbb{R}^n = \{<x_1, ..., x_n> : x_1, ..., x_n\}$, με 0 την "αρχή των αξόνων", $+$ την συνήθη πρόσθεση των n-άδων και τον βαθμιαίο πολλαπλασιασμό τέτοιο ώστε:

$$\forall a \in \mathbb{R}, a<x_1, ..., x_n> = <ax_1, ..., ax_n>.$$

Αυτός ο διανυσματικός χώρος ονομάζεται ο πραγματικός n-διάστατος αφινικός (affine) χώρος. Δεν είναι ένας Ευκλείδειος χώρος, αφού δεν υπάρχει η έννοια της απόστασης ή της γωνίας, άλλα έχει σημαντικό γεωμετρικό περιεχόμενο. Ο $\mathbb{R}^n$ έχει ευθείες (συμπεριλαμβανομένου των παραλλήλων ευθειών) και επίσης την έννοια του μήκους σε δεδομένη κατεύθυνση. Για παράδειγμα, $\frac{1}{2}\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ είναι το μέσο της ευθείας από το **0** μέχρι **v** και γενικά a**v** είναι a φορές όσες είναι η απόσταση του **0** από το **v**.

Μία άλλη έννοια στην διανυσματική γεωμετρία είναι το κέντρο μάζας. Συγκεκριμένα, το κέντρο μάζας ενός τριγώνου με διανύσματα **u,v,w** είναι το σημείο $\frac{1}{3}$(**u+v+w**).



Σχήμα 1.8: *Τα ύψη ενός τριγώνου*

Για να προάγουμε την διανυσματική γεωμετρία στην Ευκλείδεια γεωμετρία πρέπει να προσθέσουμε την έννοια του *εσωτερικού γινομένου* των διανυσμάτων **u** και **v** :

Ορισμός 1.2. *Εάν* $\boldsymbol{u} = <u_1, ..., u_n>$ *και* $\boldsymbol{v} = <v_1, ..., v_n>$*τότε*

$$\boldsymbol{uv} = u_1 v_1 + ... + u_n v_n.$$

Για παράδειγμα, στον $\mathbb{R}^2$ έχουμε

$$\mathbf{uu} = (u_1)^2 + (u_2)^2,$$

έτσι το Ευκλείδειο μήκος $|\mathbf{u}|$ του $\mathbf{u}$ δίνεται από τον τύπο $|\mathbf{u}| = \sqrt{(\mathbf{uu})}$. Όπως ο Grassmann παρατήρησε, ο ορισμός του εσωτερικού γινομένου καθιστά το Πυθαγόρειο Θεώρημα αληθές σχεδόν εξ' ορισμού.

Η έννοια της Ευκλείδειας γωνίας επίσης απορρέει από το εσωτερικό γινόμενο αφού $\mathbf{uv} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|cos\theta$, όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζουν οι δύο τεμνόμενες ευθείες από το $\mathbf{0}$ στο $\mathbf{u}$ και από το $\mathbf{0}$ στο $\mathbf{v}$ αντίστοιχα. Έτσι ο Grassmann βρήκε έναν άλλο τρόπο να περιγράψει την Ευκλείδεια γεωμετρία ως την ”βασική θεωρία” συν ένα επιπλέον ”κατάλληλο αξίωμα” για να αποδείξει το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Κάνοντας ένα διανυσματικό χώρο μη-ευκλείδειο

Η ”βασική” ιδιότητα στο εσωτερικό γινόμενο του Grassmann είναι ότι είναι θετικά ορισμένο, δηλαδή $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{uu} > 0$ εάν $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, έτσι κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα έχει θετικό μήκος. Η θεωρία της σχετικότητας του Einstein ενέπνευσε τον Minkowski (1908) να παρουσιάσει ένα μη-θετικά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^4$ των χρονοχωρικών διανυσμάτων $\langle t, x, y, z\rangle$:

$$\langle t_1, x_1, y_1, z_1\rangle \cdot \langle t_2, x_2, y_2, z_2\rangle = -t_1t_2 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Με το εσωτερικό γινόμενο του Minowski το $\mathbf{u} = \langle t, x, y, z\rangle$ έχει μήκος $|\mathbf{u}|$ δοσμένο από τον τύπο:

$$|\mathbf{u}|^2 = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

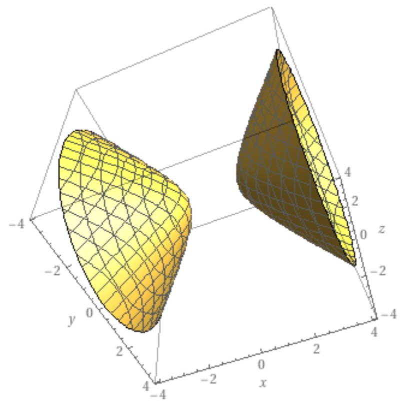
το οποίο είναι ξεκάθαρα μηδέν ή αρνητικό για πολλά διανύσματα. Για να το αντιληφθούμε πιο εύκολα θεωρούμε την αντίστοιχη έννοια του μήκους στον $\mathbb{R}^3$ με διανύσματα $\mathbf{u} = \langle t, x, y\rangle$ δοσμένο από τον τύπο:

$$|\mathbf{u}|^2 = -t^2 + x^2 + y^2.$$

Αυτό σημαίνει ότι στον $\mathbb{R}^3$ έχουμε σφαίρα ακτίνας $\sqrt{-1}$ και κέντρου 0 , που αποτελείται από τα $\mathbf{u} = \langle t, x, y\rangle$ τέτοιο ώστε

$$-t^2 + x^2 + y^2 = -1$$

Αυτή η επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ είναι υπερβολοειδές με τύπο $t^2 - x^2 - y^2 = 1$.



Σχήμα 1.9: *Το υπερβολικό μοντέλο της μη-ευκλείδειας γεωμετρίας*

1.4 Αξιώματα Hilbert

Τα στοιχεία του Ευκλείδη είναι η πρώτη "παρουσίαση" των μαθηματικών που έχει επιβιώσει ανά τα χρόνια. Είναι το πιο γνωστό βιβλίο με θέμα την γεωμετρία, συμπεραίνουμε θεωρήματα από αξιώματα με έναν τρόπο που έγινε πρότυπο για τα μαθηματικά μέχρι το 19ο αιώνα. Ύστερα, η ανακάλυψη μη-Ευκλείδειων γεωμετριών τοποθετεί την Ευκλείδεια γεωμετρία κάτω από το μικροσκόπιο ενώ τα αξιώματα της δεν ήταν πλήρης. Αλλά αυτό ενίσχυσε το κίνημα προς την αξιωματικοποίηση. Τα κενά στην Ευκλείδεια γεωμετρία συμπληρώθηκαν από τον Hilbert το 1899 και στο μεταξύ το αξιωματικό κίνημα της θεωρίας των αριθμών και της άλγεβρας δόθηκαν από τον Dedekind, τον Peano και άλλους.

Ο Ευκλείδης χρησιμοποιούσε επαγωγικούς χειρισμούς πάνω στους αριθμούς των "Στοιχείων" αλλά αυτοί οι χειρισμοί αποδείχτηκαν περίπλοκοι μετά από την ανακάλυψη τον αρρήτων αριθμών, οι οποίοι θεωρήθηκαν ότι δεν ήταν κανονικοί αριθμοί (με αποτέλεσμα να αποκλείονται κάποιες γεωμετρικές οντότητες όπως για παράδειγμα $\sqrt{2}$, η διαγώνιος ενός τετραγώνου). Τα άρρητα μεγέθη δεν συμβάδιζαν πλήρως με τους ακέραιους ή τους ρητούς αριθμούς μέχρι την δημοσίευση του βιβλίου του Dedekind το 1872 για τους άρρητους αριθμούς. Ο Dedekind βρήκε πως ο Ευκλείδης ήταν στη σωστή κατεύθυνση, η μόνη ιδέα που χρειαζόταν για να κάνει την θεωρία των άρρητων μεγεθών κομμάτι της θεωρίας των αριθμών ήταν η αποδοχή της ύπαρξης άπειρων συνόλων από ρητούς αριθμούς.

Τα δυο κύρια νήματα που αναφέρονται στα Στοιχεία του Ευκλείδη, η γεωμετρία και οι πραγματικοί αριθμοί, ενώθηκαν στο βιβλίο του Hilbert (1899) Grundlages der Geometrie (θεμέλια της γεωμετρίας). Εδώ, ο Hilbert όχι απλά συμπλήρωσε τα κενά στα αξιώματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας, αλλά παρουσίασε δυο επιπλέον αξιώματα που συμπλήρωσαν την γεωμετρική εικόνα του συστήματος των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Ο Hilbert (1899) ανακάλυψε ότι η Ευκλείδεια γεωμετρία και η αριθμητική των πραγματικών αριθμών ακολουθούνται από 17 αξιώματα. Όλα εκτός από 2 είναι ξεκάθαρα γεωμετρικά. Οι εξαιρέσεις, λοιπόν, είναι το *Αρχιμήδειο αξίωμα* ή *Αρχιμήδεια ιδιότητα* στο οποίο κανένα ευθύγραμμο τμήμα δεν είναι "άπειρα μεγάλο" και το *αξίωμα της πλη-*

ρότητας που ισχυρίζεται ότι δεν υπάρχουν ”κενά” σε μία ευθεία. (Αυτά τα δύο αξιώματα δεν χρειάζονταν στον Ευκλείδη διότι ότι τα σημεία τα κατασκεύαζε με κανόνα και διαβήτη). Σκοπός τους είναι να αποδείξουν ότι κάθε ευθεία που ικανοποιεί αυτά τα αξιώματα είναι ουσιαστικά η ευθεία ” $\mathbb{R}$” των πραγματικών αριθμών.

Έτσι, τα γεωμετρικά αξιώματα του Hilbert παρήγαγαν όχι μόνο τα θεωρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας αλλά ταυτόχρονα παρήγαγαν την *άλγεβρα*, την οποία ο Ευκλείδης δεν είχε προβλέψει. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τα αλγεβρικά αξιώματα που παρουσίασε ένα προς ένα ο Hilbert.

Κατηγορίες αξιωμάτων Hilbert

I) Αξιώματα Ανήκειν ή Συνδέσεως (connection)

II) Αξιώματα Διάταξης (order)

III) Αξίωμα Παραλλήλων (parallel)

IV) Αξιώματα Ισότητας (congruence)

V) Αξίωμα Συνέχειας ή Αρχιμήδειο αξίωμα (Archimedes)

VI) Αξίωμα Πληρότητας(completeness)

Αξιώματα Ανήκειν ή Συνδέσεως

Τα αξιώματα αυτά, αποδεικνύουν μια σύνδεση ανάμεσα στις ευθείες και τα σημεία.

1. Κάθε ευθεία περιέχει δυο διαφορετικά σημεία Α,Β.

2. Αν έχουμε δυο διαφορετικά σημεία Α,Β τότε υπάρχει μοναδική ευθεία περιέχουσα τα σημεία αυτά.(Δείτε σχήμα 1.10)

3. Κάθε επίπεδο περιέχει τρία διαφορετικά σημεία Α,Β,Γ και μη συνευθειακά.(Δείτε σχήμα 1.10)

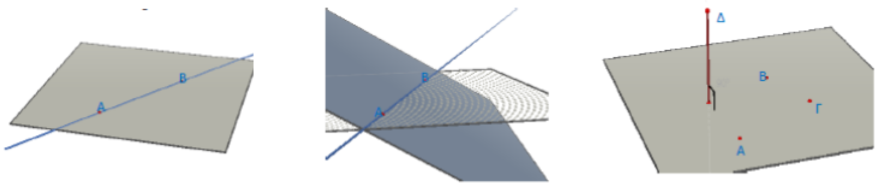
4. Αν τρία διαφορετικά σημεία Α,Β,Γ είναι μη συνευθειακά, τότε υπάρχει μοναδικό επίπεδο που περιέχει τα σημεία αυτά.

5. Αν δύο σημεία Α,Β ανήκουν σε ένα επίπεδο, τότε η ευθεία που ορίζουν τα δύο σημεία ανήκει επίσης στο επίπεδο.(Δείτε σχήμα 1.11)

6. Αν δύο διαφορετικά επίπεδα έχουν ένα κοινό σημείο Α, τότε έχουν και δεύτερο κοινό σημείο. (Δείτε σχήμα 1.11)

7. Στο χώρο υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα σημεία Α,Β,Γ,Δ που δεν είναι συνεπίπεδα. (Δείτε σχήμα 1.11)

Σχήμα 1.10: *Μοναδική ευθεία και επίπεδο*



Σχήμα 1.11: *Μοναδική ευθεία και σημεία στο επίπεδο*

Αξιώματα Διάταξης

Τα αξιώματα αυτά εκφράζουν την διάταξη μιας ακολουθίας από σημεία πάνω σε μία ευθεία γραμμή του επίπεδου ή του χώρου.

1. Εάν υπάρχει ένα σημείο Β που βρίσκεται ανάμεσα στα Α και Γ τότε το Β βρίσκεται επίσης ανάμεσα στα Γ και Α και υπάρχει μία ευθεία που διέρχεται από αυτά τα τρία διαφορετικά σημεία.

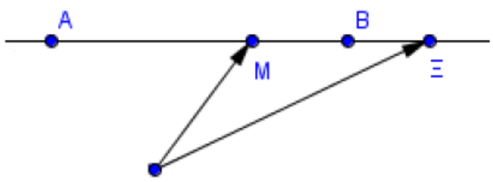
2. Αν Α,Β δύο διαφορετικά σημεία μιας ευθείας, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ που βρίσκεται μεταξύ των Α και Β και τουλάχιστον ένα σημείο Ξ ώστε το Β να βρίσκεται μεταξύ των Α και Ξ. (Δείτε σχήμα 1.12)

3. Αν Α, Β, Γ τρία διαφορετικά σημεία μιας ευθείας, τότε ένα μόνο εξ αυτών βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο.

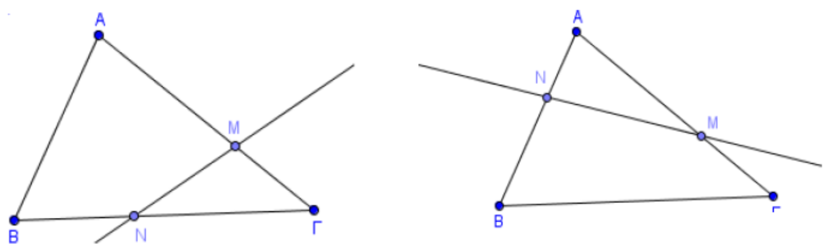
Ορισμός 1.3. *Ονομάζουμε ευθύγραμμο τμήμα ένα τμήμα μιας ευθείας που φράζεται από δύο διαφορετικά σημεία Α,Β και περιέχει κάθε σημείο της ευθείας που βρίσκεται μεταξύ των Α και Β.*

4. Αν Α,Β,Γ τρία σημεία που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία και α μία ευθεία που βρίσκεται στο επίπεδο ΑΒΓ τότε εάν η ευθεία α περνά ανάμεσα από ένα σημείο του

ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ, τότε θα περνά και από ένα σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ ή ένα σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό ως το θεώρημα του Pasch. (Δείτε σχήμα 1.13)



Σχήμα 1.12: *Δεύτερο αξίωμα διάταξης*

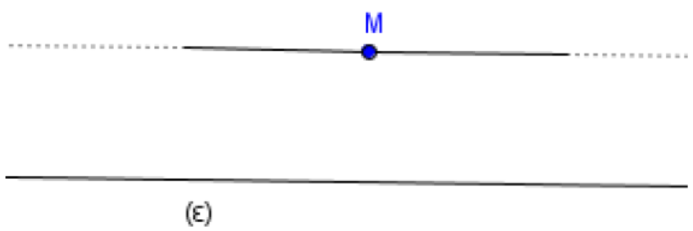


Σχήμα 1.13: *Τέταρτο αξίωμα διάταξης*

Αξίωμα των παραλλήλων

Το αξίωμα αυτό απλοποιεί τις θεμελιώδης αρχές της γεωμετρίας και διευκολύνει σε μεγάλο βαθμό την εξέλιξη τους.

Αξίωμα:Στο επίπεδο α, για κάθε ευθεία (ε) και για κάθε σημείο Μ που δεν ανήκει στην ευθεία, υπάρχει μοναδική ευθεία δια του σημείου Μ, η οποία δεν έχει κοινό σημείο με την (ε). Αυτή η ευθεία που περνά από το σημείο Μ ονομάζεται παράλληλη στην (ε).



Σχήμα 1.14: *Αξίωμα των παραλλήλων*

Αυτό το αξίωμα των παραλλήλων περιέχει δύο ισχυρισμούς. Ο πρώτος είναι ότι στο επίπεδο α, υπάρχει πάντα μια ευθεία που περνά από το Α η οποία δεν ανήκει στην ευθεία (ε). Ο δεύτερος ισχυρισμός είναι ότι μία και μόνο μια ευθεία υφίσταται.

Αξιώματα ισότητας

Τα αξιώματα αυτά ορίζουν την έννοια της ισότητας. Χωρίζονται σε 3 κατηγορίες, τα αξιώματα ισότητας ευθύγραμμων τμημάτων, τα αξιώματα ισότητας γωνιών και το αξίωμα ισότητας τριγώνου.

1. Εάν Α,Β είναι δύο σημεία μίας ευθείας ε και Α΄ ένα σημείο στην ίδια ή σε άλλη ευθεία ε τότε σε μία καθορισμένη μεριά της ε ως προς το Α΄ μπορούμε να προσδιορίσουμε μοναδικό σημείο Β΄ ώστε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ να είναι ίσο με το Α΄Β΄, δηλαδή ΑΒ=Α΄Β΄. **Σημείωση**: Κάθε ευθύγραμμο τμήμα είναι ίσο με τον εαυτό του.

2. Εάν δυο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, Α΄Β΄ είναι ίσα προς ένα τρίτο Α΄΄Β΄΄ τότε είναι και μεταξύ τους ίσα. Έτσι, εάν ΑΒ=Α΄Β΄ και ΑΒ=Α΄΄Β΄΄, τότε Α΄Β΄=Α΄΄Β΄΄.

3. Αν ΑΒ και ΒΓ δύο ευθύγραμμα τμήματα μίας ευθείας ε τα οποία δεν έχουν κοινά σημεία εκτός από το Β και, επιπλέον, αν Α΄Β΄ και Β΄Γ΄ δύο ευθύγραμμα τμήματα της ίδιας ή μιας άλλης ευθείας ε΄τα οποία, ομοίως, δεν έχουν κοινά σημεία εκτός από το Β΄ τότε εάν ΑΒ=Α΄Β΄ και ΒΓ=Β΄Γ΄ ισχύει ΑΓ=Α΄Γ΄.

4.Έστω μια γωνία $\angle(h,k)$ που βρίσκεται στο επίπεδο a και έστω a' μια ευθεία που βρίσκεται στο επίπεδο α'. Υποθέτουμε επίσης ότι στο επίπεδο α' επιλέγουμε ένα εκ των δύο ημιεπιπέδων που χωρίζει η ευθεία a' το επίπεδο αυτό. Ορίζουμε h' μία ημιευθεία της ευθείας a' με αρχή το σημείο $'$ της ευθείας αυτής. Τότε, στο επίπεδο α' υπάρχει μια μοναδική ημιευθεία k' έτσι ώστε η γωνία $\angle(h,k)$ ή $\angle(k,h)$, είναι ίση με την γωνία $\angle(h,k)$ και συγχρόνως όλα τα εσωτερικά σημεία της γωνίας $\angle(h,k)$ βρίσκονται πάνω στο επιλεγμένο ημιεπίπεδο του a'. Αυτό εκφράζεται με την ισότητα $\angle(h,k) = \angle(h,k)$.

5. Εάν μία γωνία $\angle(h,k)$ είναι ίση με την γωνία $\angle(h,k)$ και την $\angle(h,k)$τότε η γωνία $\angle(h,k)$ είναι ίση με την $\angle(h,k)$.

6.Εάν δυο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και την περιεχόμενη γωνία ίση, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Αξίωμα συνέχειας ή Αρχιμήδειο αξίωμα

Αυτό το αξίωμα καθιστά δυνατή στην γεωμετρία την εισαγωγή της ιδέας της συνέχειας.

Αξίωμα :Έστω A_1 ένα οποιοδήποτε σημείο μιας ευθείας ανάμεσα στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Έστω τα σημεία $A_2, A_3, A_4, \ldots$ έτσι ώστε το σημείο A_1 να βρίσκεται ανάμεσα στο Α και το A_2, το σημείο A_2 να βρίσκεται ανάμεσα στο A_1και το A_3,κλπ.. .Γενικά, έστω ότι τα τμήματα $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots$ είναι ίσα. Τότε μεταξύ αυτής της σειράς των σημείων, υπάρχει πάντα ένα συγκεκριμένο σημείο A_n τέτοιο ώστε το σημείο Β να βρίσκεται ανάμεσα στο Α και το A_n.

Σχήμα 1.15: *Αρχιμήδειο αξίωμα*

Αξίωμα της πληρότητας

Αξίωμα.Υποθέστε ότι όλα τα σημεία μίας ευθείας l διαιρούνται σε δύο μη-κενά ξένα υποσύνολα A και B, έτσι ώστε όλα τα σημεία του A να βρίσκονται αριστερότερα από όλα τα σημεία του B. Τότε υπάρχει ένα και μοναδικό σημείο P που να ανήκει είτε στο A και να είναι το πιο δεξιό σημείο του είτε στο B και να είναι το πιο αριστερό σημείο του.

Μία επέκταση μιας ευθείας με καινούργια σημεία έτσι ώστε να διατηρούνται οι προηγούμενες σχέσεις μεταξύ των σημείων της πρώτης ευθείας και στην οποία επίσης να διατηρούνται οι στοιχειώδεις σχέσεις διάταξης και ισοδυναμίας που περιγράφονται από τα παραπάνω αξιώματα, εκτός του αξιώματος των παραλλήλων, είναι αδύνατη.

Τα αξιώματα αυτά δίνουν ακριβές νόημα στο πότε ένα θεώρημα είναι ισοδύναμο με το αξίωμα των παραλλήλων: δηλαδή, η ισοδυναμία αυτή μπορεί να αποδειχτεί χρησιμοποιώντας όλα τα βασικά αξιώματα του Hilbert χωρίς όμως την χρήση του αξιώματος των παραλλήλων. Συνεπώς όλα τα θεωρήματα που νομίζαμε πως είναι ισοδύναμα με το αξίωμα των παραλλήλων, είναι τελικά ισοδύναμα με αυτό με την παραπάνω όμως έννοια. Είναι πλέον γνωστό το ότι να αποδεικνύουμε ισοδυναμίες σε ένα πιο "αδύναμο" σύστημα αξιωμάτων αποτελεί την ουσία των ανάστροφων μαθηματικών. Στην συνέχεια θα δούμε και άλλα τέτοια ιστορικά παραδείγματα. Σήμερα αυτή η ιδέα έχει αναπτυχθεί πλήρως στον τομέα της ανάλυσης.

Αλγεβρικό Σημείωμα στα Αξιώματα Hilbert

Τα αξιώματα ανήκειν ή συνδέσεως μας επιτρέπουν να ορίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο σημείων πάνω σε μία ευθεία.

Για την κατασκευή του αθροίσματος επιλέγουμε ένα σημείο O σε μία ευθεία, ύστερα για κάθε σημείο a και b της ευθείας κατασκευάζουμε ένα σημείο $a+b$ με την βοήθεια των παραλλήλων. Ως αποτέλεσμα, οι παράλληλες επιτρέπουν στο σημείο b να "οριστεί" κατά μήκος της γραμμής μεταξύ των O έως και a.

Για την κατασκευή του γινομένου, επίσης επιλέγουμε ένα σημείο, ας το συμβολίσουμε με 1, στην ευθεία και κάποιες παράλληλες που μας επιτρέπουν να "μεγεθύνουμε" την απόσταση από το O έως και b κατασκευάζοντας το σημείο ab.

Με την βοήθεια των αξιωμάτων ισότητας, αποδεικνύουμε ότι το άθροισμα και το γινόμενο έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες (οι οποίες είναι ιδιότητες των σωμάτων):

Πρόσθεση:

$$a + b = b + a \text{ (αντιμεταθετικότητα)}$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c \text{ (προσεταιριστικότητα)}$$

$$a + 0 = a\text{(ουδέτερο στοιχείο)}$$

$$a + (a) = 0\text{(αντίστροφο)}$$

$$a(b + c) = ab + bc\text{(επιμεριστική ιδιότητα)}$$

Πολλαπλασιασμός:

$$ab = ba\text{(αντιμεταθετικότητα)}$$

$$a(bc) = (ab)c\text{(προσεταιριστικότητα)}$$

$$a1 = a \text{ (ουδέτερο στοιχείο)}$$

$$aa^{-1} = 1, \forall a \neq 0 \text{ (αντίστροφο)}$$

Τα αξιώματα της διάταξης δίνουν στα σημεία μιας ευθείας μια διάταξη, ≤, με τις ιδιότητες $\forall a, b, c$:

- $a \leq a$
- εάν $a \neq b$ τότε είτε a$<$ b είτε $b < a$, αλλά όχι ταυτοχρόνως
- εάν $a \leq b$ και $b \leq c$ τότε $a \leq c$.

Οι σχέσεις των διατάξεων σε συνδυασμό με τις ιδιότητες του σώματος παράγουν ένα διατεταγμένο σώμα, όπου οι ιδιότητες του είναι:

- εάν $a \leq b$ τότε $a + c \leq b + c$
- εάν $0 \leq a$ και $0 \leq b$ τότε $0 \leq ab$.

Τέλος, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα πλήρες Αρχιμήδειο διατεταγμένο σώμα είναι ισομορφικό με το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Δοσμένου ενός τέτοιου, σώματος $\mathbb{F}$, η ιδέα της απόδειξη είναι να κατασκευάσουμε ένα αντίγραφο των πραγματικών αριθμών μέσα στο $\mathbb{F}$ με βάση τα παρακάτω στάδια:

1. Από το στοιχείο $1 \in \mathbb{F}$, κατασκευάζουμε τους "θετικούς ακεραίους" στο $\mathbb{F}$, $1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1, \ldots$ χρησιμοποιώντας την + πράξη στο $\mathbb{F}$.

2. Κατασκευάζομαι τους ”ακέραιους” στο $\mathbb{F}$ χρησιμοποιώντας το 0και την - πράξη στο $\mathbb{F}$.

3. Κατασκευάζομαι τους ”ρητούς” στο $\mathbb{F}$ χρησιμοποιώντας το ουδέτερο στοιχείο και το αντίστροφο.

4. Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες της διάταξης και της πληρότητας του $\mathbb{F}$ για να κατασκευάσουμε τους ”πραγματικούς αριθμούς” στο $\mathbb{F}$.

5. Επαληθεύουμε ότι οι ”πραγματικοί αριθμοί” στο $\mathbb{F}$ εξαντλούν τα μέλη στο $\mathbb{F}$ και έχουν τις ίδιες ιδιότητες με τους πραγματικούς αριθμούς.

Έτσι, γνωρίζουμε ότι κάθε πλήρης Αρχιμήδειο διατεταγμένο σώμα είναι ουσιαστικά το ίδιο με το $\mathbb{R}$. Το επόμενο ερώτημα είναι: Πόσο καλά μπορούμε να αντιληφθούμε το $\mathbb{R}$;

1.5 Καλή διάταξη και το αξίωμα της επιλογής

Στο βιβλίο V των στοιχείων, ο Ευκλείδης δίνει μια εκλεπτυσμένη παρουσίαση της γεωμετρικής ευθείας και της σχέσης της με τους φυσικούς αριθμούς. Σχεδόν σταμάτησε να θεωρεί τα άρρητα σημεία σαν κάποιους αριθμούς, αλλά ουσιαστικά έδειξε ότι κάθε σημείο της ευθείας μπορεί να προσεγγισθεί αυθαίρετα καλά από ρητούς αριθμούς. Αυτό σημαίνει ότι κάθε σημείο ”καθορίζεται” από τους κάποιους ρητούς(για παράδειγμα, από αυτούς που βρίσκονται στα δεξιά του). Έτσι το μόνο που χρειαζόμαστε είναι να ”αποδεχτούμε” τα άπειρα σύνολα ως μαθηματικά αντικείμενα, προκειμένου να δούμε τα όλα τα σημεία της ευθείας ως αριθμητικά αντικείμενα.

Παρόλα αυτά, ως και τα μέσα του 19ου αιώνα, οι περισσότεροι μαθηματικοί απέρριπταν την ιδέα ότι τα άπειρα σύνολα είναι μαθηματικά αντικείμενα, επηρεαζόμενοι από την διάκριση των αρχαίων Ελλήνων μεταξύ της ”εν δυνάμει” και ”πραγματικής” άπειρης οντότητας. Για παράδειγμα, ήταν επιτρεπτό να θεωρήσουμε τους φυσικούς αριθμούς ως μία ανοιχτή διαδικασία- ξεκινώντας με το 0 και στην συνέχεια προσθέτοντας 1- αλλά όχι ως μία ολοκληρωμένη ή πραγματική οντότητα $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$. Σήμερα, αυτό μοιάζει ως μια χωρίς νόημα διάκριση, αφού όλα τα άπειρα σύνολα μπορούν να θεωρηθούν ως ”εν δυνάμει” άπειρες οντότητες.

Για παράδειγμα, οι ακέραιοι μπορούν να θεωρηθούν ως μία ”εν δυνάμει” άπειρη οντότητα τοποθετώντας τους σε διάταξη:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...$$

Οι θετικοί ρητοί μπορούν ομοίως να θεωρηθούν ως μια ”εν δυνάμει” άπειρη οντότητα τοποθετώντας τους σε διάταξη:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \cdots$$

Ομοίως, μπορούμε να θεωρήσουμε τους ρητούς $\mathbb{Q}$, επίσης ως μία ”εν δυνάμει” άπειρη οντότητα τοποθετώντας τους σε διάταξη θετικών και αρνητικών στοιχείων:

$$0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots$$

Έτσι, τα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, όπου τώρα ξέρουμε ότι είναι σύνολα, μπορούσαν να θεωρηθούν ως ”εν δυνάμει” άπειρες οντότητες από τους μαθηματικούς οι οποίοι πίστευαν στην διάκριση μεταξύ ”εν δυνάμει” και ”πραγματικού”.

Ένα πιο σοβαρό πρόβλημα, αναγεννιέται το 1874, όταν ο Cantor έδειξε ότι το $\mathbb{R}$ δεν είναι, με κανένα τρόπο, μία ”εν δυνάμει” άπειρη οντότητα.

Μη-αριθμήσιμα σύνολα

Δείξαμε, λοιπόν, ότι με μία διαδικασία μέτρησης στοιχείων :

1ο στοιχείο ,2ο στοιχείο, 3ο στοιχείο,...

όπου το κάθε στοιχείο ”φθάνει” σε ένα πεπερασμένο στάδιο, τα σύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ είναι ”εν δυνάμει” άπειρες οντότητες. Ο Cantor (1874) έδειξε ότι το $\mathbb{R}$ είναι μη-αριθμήσιμο με την έννοια του ότι δεν υπάρχει μια τέτοια διάταξη του $\mathbb{R}$.

Έδειξε ότι κάθε ακολουθία $x_1, x_2, x_3, \ldots$ πραγματικών αριθμών θα αποτύχει στο να συμπεριλάβει όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Πράγματι, δοθέντος του δεκαδικού αναπτύγματος $x_1, x_2, x_3, \ldots$ μπορούμε να υπολογίσουμε κάποιον x που δεν έχει αυτό το συγκεκριμένο δεκαδικό ανάπτυγμα. Για παράδειγμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω κανόνα κατασκευής:

$$\text{n-ιοστό δεκαδικό ψηφίο του } x = \begin{cases} 1 & : \text{εάν το n-ιοστό δεκαδικό ψηφίο του } x_n \neq 1 \\ 2 & : \text{εάν το n-ιοστό δεκαδικό ψηφίο του } x_n = 1 \end{cases}$$

Συνεπώς, το x δεν μπορεί να έχει το παραπάνω δεκαδικό ανάπτυγμα $x_n, n = 1, 2, \ldots$ αφού το x διαφέρει από το παραπάνω δεκαδικό ανάπτυγμα στην n-ιοστή δεκαδική θέση.

Έτσι, εάν αποδεχτούμε το $\mathbb{R}$, τότε πρέπει να το αποδεχτούμε ως ”πραγματική” άπειρη οντότητα. Η απόδειξη δόθηκε από τον Cantor (1891). Είναι, παρεμπιπτόντως, προάγγελος για πολλές από τις αποδείξεις για το $\mathbb{R}$ που θα δούμε αργότερα. Δοσμένου ενός τυχαίου στοιχείου, όπως μια ακολουθία ή μια συνάρτηση, μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός άλλου στοιχείου υπολογίζοντας το από το δοσμένο στοιχείο. Ο υπολογισμός ενός νέου στοιχείου που συσχετίζεται με κάποια άλλα, σπάνια εμφανίζεται στην κλασσική ανάλυση, αλλά είναι σημαντικός όπως θα το διαπιστώσουμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Καλή διάταξη

Το θεώρημα του Cantor δείχνει ότι το $\mathbb{R}$ δεν μπορεί να διαταχθεί με έναν απλό τρόπο όπως το $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ και το $\mathbb{Q}$ μπορούν : 1ο στοιχείο ,2ο στοιχείο, 3ο στοιχείο,... . Παρόλα αυτά ο Cantor (1883) δήλωσε την άποψη του με μία πιο γενική διάταξη :

Σε επόμενο άρθρο μου, θα συζητήσω τον νόμο της σκέψης μου, που ορίζει ότι είναι πάντα δυνατό να φέρουμε ένα καλά-διατεταγμένο σύνολο στην μορφή ενός καλάδιατεταγμένου συνόλου ένας νόμος ο οποίος μοιάζει να είναι θεμελιώδης, βαρυσήμαντος και αρκετά σπουδαίος.(Ewald (1966), vol III,p 886)

Ο Cantor ονόμασε ένα σύνολο S καλά-διατεταγμένο εάν η διάταξη είναι τέτοια ώστε κάθε μη-κενό υποσύνολο T του S να έχει ένα ελάχιστο στοιχείο. Σίγουρα, έτσι είναι διατεταγμένα τα σύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ και το $\mathbb{Q}$, όπου κάθε στοιχείο περιγράφεται από θετικό ακέραιο. Έτσι, ορίζεται και η ακόλουθη διάταξη του $\mathbb{Z}$:

$$0, 1, 2, 3, \ldots - 1, -2, 3, .$$

στην οποία το 0 και οι θετικοί ακέραιοι προηγούνται από όλους τους αρνητικούς ακεραίους. Εάν το T είναι μη-κενό υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ τότε το ελάχιστο στοιχείο του T στην προηγούμενη διάταξη είναι

ο τελευταίος μη-αρνητικός ακέραιος του T , εάν το T έχει μη-αρνητικά στοιχεία

ή

ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος του T, εάν το T έχει μόνο θετικά στοιχεία.

Παρόλα αυτά, όταν αναφερόμαστε στο R όλη η ανθρώπινη ευφυΐα αποτυγχάνει να βρει ένα καλά-διατεταγμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η συνήθης διάταξη $\leq$ αποτυγχάνει, αφού τα υποσύνολα όπως το $x \in R : o \leq x$ δεν έχουν ελάχιστα στοιχεία. Ο Cantor ήταν τολμηρός ώστε να υποθέσει ότι η καλή διάταξη υπάρχει για όλα τα καλώς-ορισμένα σύνολα, όπου σίγουρα περιλαμβάνεται και το $\mathbb{R}$.

Το θεώρημα καλής διάταξης και το αξίωμα του Zermelo

Ο Cantor σκέφτηκε ότι ο ”θεμελιώδης νόμος σκέψης” θα έπρεπε να είναι αξίωμα της θεωρίας συνόλων. Αλλά δεν συνέστησε ένα σύνολο από αξιώματα για την θεωρία συνόλων, οπότε έμεινε ασαφές εάν η καλή-διάταξη είναι αξίωμα ή θεώρημα. Η εικόνα ξεκαθάρισε όταν ο Zermelo (1904) απέδειξε την καλή-διάταξη από μια διαισθητικά απλούστερη εικασία, γνωστή ως το αξίωμα της επιλογής.

Αξίωμα της επιλογής (Axiom of choice [AC]): Για κάθε σύνολο X, μη κενών συνόλων, υπάρχει μια συνάρτηση f επιλογής, δηλαδή μία συνάρτηση f τέτοια ώστε να ισχύει $f(x) \in X$ για κάθε $x \in X$.

Για να εφοδιάσει την απόδειξη του με ένα ακριβές πλαίσιο (και ταυτόχρονα να ξεκαθαρίσει κάποιες αμφιβολίες για τα θεμέλια της θεωρίας συνόλων) ο Zermelo (1908) έδωσε το πρώτο σύνολο από αξιώματα, για την θεωρία συνόλων. Μέσα στο σύστημα αυτό, όπου τώρα ονομάζεται $\mathbb{Z}$, ήταν εφικτό να αποδειχθεί ότι το AC (αξίωμα της επιλογής) είναι ισοδύναμο με το θεώρημα καλής διάταξης. Ο Fraenkel (1922) ενδυνάμωσε ένα από τα αξιώματα του Zermelo, εξασφαλίζοντας ένα σύστημα από αξιώματα που σήμερα είναι γνωστό ως θεωρία συνόλων ZF.

Τα αξιώματα ZF της θεωρίας συνόλων έμειναν αμετάβλητα από 1922 και έγιναν αποδεκτά ως θεμέλιο για όλους τους κύριους μαθηματικούς κλάδους, τουλάχιστον όταν συμπληρώθηκε από το AC. Πράγματι, αποδείχθηκε στα αξιώματα ZF ότι το AC είναι ισοδύναμο με πολλά σπουδαία θεωρήματα περιλαμβανομένου και του θεωρήματος της καλής διάταξης, όπου προφανώς δεν ήταν αποδείξιμο από το σύστημα ZF.

Αυτό το αποτέλεσμα τοποθετεί το AC σε θέση ξεχωριστή συγκριτικά με το ZF, όπως και το αξίωμα των παραλλήλων είναι ξεχωριστό συγκριτικά με τα υπόλοιπα αξιώματα του Ευκλείδη. Όλα εκείνα τα θεωρήματα που αποδείχθηκαν ισοδύναμα με το ZF δεν ήταν ξεκάθαρα στα πρώτα ενδιαφέροντα των ερευνητών έως ότου έγινε γνωστό ότι το AC δεν μπορεί να αποδειχθεί στο ZF. Έτσι το (1963), ο Cohen έδειξε ότι το AC δεν μπορεί να αποδειχθεί από το ZF, κατασκευάζοντας ένα μοντέλο του συστήματος ZF στο οποίο το AC είναι ψευδής. Η κατασκευή του, ήταν μία σημαντική επιτυχία που άλλαξε ολοκληρωτικά την εικόνα.

1.6 Λογική και υπολογισιμότητα

Προηγουμένως, είδαμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$ είναι ουσιαστικό κομμάτι των θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών. Ταυτόχρονα, έχουμε δει ότι η κατανόηση που έχουμε ως προς το $\mathbb{R}$ δεν θα ολοκληρωθεί ποτέ, αφού το $\mathbb{R}$ είναι μη απαριθμήσιμο.

Αφού, δεν μπορούμε να καταγράψουμε όλα τα στοιχεία του $\mathbb{R}$, δεν μπορούμε σίγουρα να καταγράψουμε όλες τις αληθινές προτάσεις σχετικά με τους πραγματικούς αριθμούς, πόσο μάλλον να δημιουργήσουμε ένα σύστημα αξιωμάτων για να τις αποδείξουμε. Αυτή, η παρατήρηση είναι το πρώτο βήμα στο δρόμο προς το θεώρημα των Gödel (1931) και Turing (1936) για τα θεωρήματα που δεν μπορούν να αποδειχτούν και τα άλυτα αλγοριθμικά προβλήματα.

Το θεώρημα του Gödel αποκλείει κάθε πιθανότητα ενός ολοκληρωμένου αξιωματικού συστήματος για την ανάλυση. Ύστερα, παρουσιάζει μια δυνατότητα. Εάν είμαστε αρκετά τυχεροί, ίσως μπορούμε να βρούμε μια "βασική θεωρία" για την ανάλυση, στην οποία θα αποδείξουμε ότι τα σπουδαία θεωρήματα είναι ισοδύναμα με ορισμένα αξιώματα-αξιώματα που παίζουν ένα σημαντικό ρόλο, όπως το αξίωμα των παραλλήλων στη γεωμετρία ή το AC στην θεωρία συνόλων, προσεγγίζοντας τα επιθυμητά θεωρήματα στην "τροχιά" των ισοδύναμων θεωρημάτων.

Αυτό πράγματι έγινε. Γνωρίζουμε σήμερα, μια βασική θεωρία, ονόματι RCA_0 και τουλάχιστον τέσσερα αξιώματα ύπαρξης κάποιων συγκεκριμένων συνόλων που παίζουν τέτοιο ρόλο για τα θεωρήματα της ανάλυσης. Επιπλέον, τα αξιώματα αυτά είναι αυξανόμενης "ισχύος", δηλαδή καθένα από αυτά που έχει μεγαλύτερη "ισχύ" από κάποιο άλλο, τότε μπορεί και να αποδείξει το ασθενέστερο αξίωμα. Έτσι, ταξινομούνται τα θεωρήματα της ανάλυσης με βάση την μαθηματική ισχύ τους. Τα κρίσιμα αξιώματα υποδηλώνουν "την ύπαρξη κάποιων συνόλων" αντί να εξασφαλίζουν το αξίωμα της "ύπαρξης των πραγματικών αριθμών", αφού είναι τεχνικά πιο βολικό να κωδικοποιήσουμε τους πραγματικούς ως σύνολα φυσικών αριθμών. Τα παραπάνω αξιώματα βεβαιώνουν ότι υπάρχει ένα σύνολο φυσικών αριθμών n, που αντιστοιχεί σε κάθε ιδιότητα $\phi(n)$ μιας συγκεκριμένης κλάση ιδιοτήτων.

Το RCA_0 εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός συνόλου για την κλάση όλων των υπολογίσιμων ιδιοτήτων $\phi(n)$. Αυτές είναι ιδιότητες, για τις οποίες υπάρχει ένας αλγόριθμος, που αποφασίζει $\forall n$ εάν ισχύει το $\phi(n)$. Αποδεικνύεται, ότι το RCA_0 είναι εντελώς ανίσχυρο για να αποδείξει πολλά σημαντικά θεωρήματα της ανάλυσης. Παρόλα αυτά το RCA_0 μπορεί να αποδείξει ισοδυναμίες, αφού συνήθως αυτές εμπλέκουν τον υπολογισμό ενός στοιχείου, (όπως μία ακολουθία ή μια συνάρτηση) δοσμένου ενός κάποιου άλλου στοιχείου. Για παράδειγμα, το RCA_0 δεν μπορεί να αποδείξει το θεώρημα Bolzano-Weierstrass αλλά μπορεί να αποδείξει ότι το B-W είναι ισοδύναμο με ένα αξίωμα που βεβαιώνει την ύπαρξη όλων εκείνων των συνόλων που δημιουργούνται από την οποιαδήποτε αριθμητικά ορίσιμη ιδιότητα $\phi(n)$. Έτσι, εάν προσθέσουμε αυτό το παραπάνω αξίωμα στο RCA_0, κατασκευάζουμε ένα ”ισχυρό” αξιωματικό σύστημα στο οποίο το B-W είναι αποδείξιμο.

Με αυτό τον τρόπο, βρίσκουμε ότι στα περισσότερα από τα σπουδαία θεωρήματα της ανάλυσης μπορεί να τους ανατεθεί ένα ακριβές επίπεδο ”ισχύος”. Είναι είτε στο χαμηλότερο επίπεδο - δηλαδή που αποδεικνύονται από το RCA_0- είτε σε κάποιο υψηλότερο επίπεδο ισχύος, που αντιπροσωπεύεται με κάποιο από τα τέσσερα αξιώματα που θα αναφέρουμε μελλοντικά. Σε αυτή την εργασία θα περιοριστούμε στα τρία μόνο από αυτά τα επίπεδα με τα οποία μπορούμε να αποδείξουμε τα σπουδαιότερα θεωρήματα της ανάλυσης.

Αριθμητικοποίηση

Έτσι, βλέπουμε ότι μία μελέτη για την αριθμητική και τον υπολογισμό θα χρειαστεί πριν ορίσουμε το σύστημα RCA_0. Η αριθμητική από μόνη της είναι αξιωματοποιημένη με ένα αρκετά συγκεκριμένο τρόπο, όπου μας οδηγεί πίσω στα αξιώματα Peano (1889).Αλλά πριν από αυτό θα πρέπει να μιλήσουμε για την αριθμητικοποίηση.

Η αξιοσημείωτη σύγκλιση μεταξύ ανάλυσης και υπολογισμού σε ένα κοινό παρανομαστή της αριθμητικής είναι αυτό που κάνει τα ανάστροφα μαθηματικά στην ανάλυση χρήσιμα και εφαρμόσιμα.

Κεφάλαιο **2**

Κλασσική αριθμητικοποίηση και ανάλυση

Στο διεθνές Κογκρέσο Μαθηματικών στο Παρίσι, 1900, ο Henri Poincare συνόψισε την θεωρία των θεμελίων της ανάλυσης ως εξής :

-Σήμερα, στον τομέα της ανάλυσης απομένουν μόνο φυσικοί αριθμοί ή άπειρα ή μη-άπειρα συστήματα φυσικών αριθμών... Τα μαθηματικά, όπως λέμε, έχουν αριθμητικοποιηθεί. (POINCARE (1902))

Ο Poincare μιλούσε στο τέλος ενός αιώνα προόδου και αναταραχής για τα μαθηματικά. Όπως γνωρίζουμε από το πρώτο κεφάλαιο, ο 19ος αιώνας έφερε στο φως νέες γεωμετρίες, νέες άλγεβρες, νέες έννοιες στους αριθμούς και στις συναρτήσεις, ακόμα και νέα "άπειρα" , για τα οποία τα παραδοσιακά θεμέλια των μαθηματικών κατά τον Ευκλείδη ήταν ξεκάθαρα ανεπαρκής.

Με την ελπίδα να κατασκευάσουν ασφαλή θεμέλια για το απέραντο οικοδόμημα των μαθηματικών, οι μαθηματικοί στράφηκαν στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών 0,1,2,3,... Από αυτούς (και από σύνολα αυτών) ξαναέχτισαν τους πραγματικούς και τους μιγαδικούς αριθμούς, τις συναρτήσεις και τα γεωμετρικά αντικείμενα όπου ήταν η κύρια ενασχόληση των μαθηματικών. Αυτό, ήταν το εγχείρημα της αριθμητικοποίησης.

Θα περιγράψουμε, λοιπόν, πως μεταβαίνουμε από τους φυσικούς στους ρητούς, μετά στους πραγματικούς και μιγαδικούς και στις συνεχείς συναρτήσεις. Έτσι αριθμητικοποιούμε τα θεμέλια της ανάλυσης και της γεωμετρίας. Ύστερα, θα στραφούμε στα θεμέλια των φυσικών αριθμών , τα αξιώματα Peano, τα οποία μας δίνουν μια πρώτη ματιά στην λογική που βρίσκεται πίσω από το εγχείρημα της αριθμητικοποίησης.

2.1 Από τους φυσικούς στους ρητούς αριθμούς

Οι ακέραιοι αριθμοί

Ας υποθέσουμε, προς το παρόν, ότι οι φυσικοί αριθμοί $1, 2, 3, ..$ και οι πράξεις τους, πρόσθεση $(+)$ και πολλαπλασιασμός $(.)$ είναι δοσμένα. Από αυτούς, δημιουργούμε το σύστημα $<i, j>$ των ακεραίων ως διατεταγμένα ζεύγος $<m, n>$ των φυσικών αριθμών m,n, όπου $<m, n>$ θα το ερμηνεύουμε ως την διαφορά m-n. Αυτό σημαίνει ότι ο αρνητικός ακέραιος -1 αντιπροσωπεύεται από άπειρα ζεύγη:

$$-1 = <0,1> = <1,2> = <2,3> = <3,4> = ...$$

παρόλα αυτά, μπορούμε να αποφανθούμε για το πότε δυο ζεύγη αντιπροσωπεύουν τον ίδιο ακέραιο μέσω ενός κριτηρίου που περιλαμβάνει μόνο τους φυσικούς και την πρόσθεση :

$$<m_1, n_1> = <m_2, n_2> \Leftrightarrow m_1 + n_2 = m_2 + n_1.$$

Η κατασκευή των αρνητικών αριθμών από ζεύγη φυσικών δεν είναι απλά μία καθαρή μαθηματική αφαίρεση. Η ίδια ιδέα έχει χρησιμοποιηθεί για αιώνες στην *διπλογραφία*, όπου ένα λογιστικός ισολογισμός (ο οποίος μπορεί να είναι αρνητικός) μπορεί να εκφραστεί ως ζεύγος δύο θετικών αριθμών, των πιστωτικών και χρεωστικών ποσών. Αυτή η ιδέα μας πηγαίνει πίσω στον Pacioli (1494) και στον ρόλο του στην ιστορία των αρνητικών αριθμών.

Ακόμα, είναι εύκολο να επεκτείνουμε τις $(+)$ και $(.)$ συναρτήσεις από τους φυσικούς στους ακέραιους αριθμούς. Συγκεκριμένα:

$$<m_1, n_1> \cdot <m_2, n_2> = <m_1 m_2 + n_1 n_2, m_1 n_2 + m_2 n_1>.$$

Σημειώστε ότι αυτός ο ορισμός απαντά στο αμφιλεγόμενο ερώτημα του $(-1) \cdot (-1)$, επειδή το -1 αντιπροσωπεύεται από το ζεύγος $<0,1>$ και

$$<0,1> . <0,1> = <0 . 0 + 1 . 1, 0 . 1 + 0 . 1> = <1,0>,$$

όπου αντιπροσωπεύει τον αριθμό 1.

Φυσικά, έχουμε τον ορισμό της αφαίρεσης για όλους τους ακεραίους :

$$<m_1, n_1> - <m_2, n_2> = <m_1 + n_2, m_2 + n_1>.$$

Τα παρακάτω μπορούν να αποδειχθούν αλλά παραλείπονται:

1. Οι πράξεις +, -, και . είναι *καλά ορισμένες*, δηλαδή ανεξάρτητες από την επιλογή των αντιπροσώπων.

2. Οι πράξεις +, -, και . έχουν τις εξής αλγεβρικές ιδιότητες -οι οποίες ονομάζονται αξιώματα του δακτυλίου-(όπου -a,εννοούμε 0-a) :

Πρόσθεση:

$$a+b=b+a \text{ (αντιμεταθετικότητα)}$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c \text{ (προσεταιριστικότητα)}$$

$$a+0=a\text{(ουδέτερο στοιχείο)}$$

$$a+(a)=0\text{(αντίστροφο)}$$

$$a(b+c)=ab+bc\text{(επιμεριστική ιδιότητα)}$$

Πολλαπλασιασμός:

$$ab=ba\text{(αντιμεταθετικότητα)}$$

$$a(bc)=(ab)c\text{(προσεταιριστικότητα)}$$

$$a1=a \text{ (ουδέτερο στοιχείο)}$$

$$aa^{-1}=1, \forall a \neq 0 \text{ (αντίστροφο)}$$

Αυτά εξαρτώνται από τις σχετικές ιδιότητες των φυσικών αριθμών , όπου θα συζητήσουμε στην παρακάτω ενότητα 2.6.

Οι ρητοί αριθμοί

Από το σύστημα των ακεραίων $\mathbb{Z}$ όπου είναι σχεδιασμένο ώστε να επιτρέπει την αφαίρεση σε όλες τις περιπτώσεις, δημιουργούμε το σύστημα $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών ως διατεταγμένα ζεύγη $<i,j>$ των ακεραίων, όπου $j \neq 0$. Το $<i,j>$ το ερμηνεύουμε ως το κλάσμα i/j, έτσι πάλι υπάρχουν άπειροι αντιπρόσωποι για κάθε ρητό αριθμό. Οι ορισμοί του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης είναι κατά τα γνωστά:

$$<i_1,j_1> \cdot <i_2,j_2> = <i_1 \cdot i_2, j_1 \cdot j_2>$$

και

$$<i_1,j_1> + <i_2,j_2> = <i_1 j_2 + i_2 j_1, j_1 \cdot j_2>.$$

Αλγεβρικές ιδιότητες

Οι ορισμοί των ακέραιων και των ρητών αριθμών, λοιπόν, μας δείχνουν γιατί τα ερωτήματα για αυτούς μπορούν να μειωθούν σε ερωτήματα για τους φυσικούς αριθμούς και τις πράξεις τους. Αυτό σημαίνει ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι θεμελιώδεις για τους ακέραιους και τους ρητούς. Στην πράξη, προτιμούμε να δουλεύουμε με ακεραίους ή ρητούς αριθμούς. Δεν εισάγουν μόνο την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αλλά και την αφαίρεση και την διαίρεση, όπου οι κανόνες τους για υπολογισμούς είναι πιο απλοί. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι ρητοί αριθμοί έχουν ”καλύτερες” αλγεβρικές ιδιότητες από τους φυσικούς. Αυτές είναι οι ιδιότητες του *σώματος*, δηλαδή οι προηγούμενες ιδιότητες του δακτυλίου συν την αντίστροφη ιδιότητα του πολλαπλασιασμού: $a \cdot a^{-1} = 1$, όπου $a \neq 0$. Παρόλα αυτά, οι κανόνες για τους υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς μπορούν να αναχθούν στις γνωστές πράξεις μεταξύ φυσικών αριθμών.

Τα επόμενα βήματα για την αριθμητικοποίηση υπερβαίνουν την άλγεβρα. Αναγνωρίζοντας τα σύνολα των ρητών αριθμών μπορούμε να επεκτείνουμε το σύστημα των αριθμών σε ένα μεγαλύτερο που αποδέχεται ορισμένες *άπειρες πράξεις*, όπως για παράδειγμα ο σχηματισμός άπειρων αθροισμάτων. Αυτό είναι καίριο σημείο για την οικοδόμηση ενός θεμελίου για την ανάλυση.

2.2 Από ρητούς στους πραγματικούς

Από την εποχή του Πυθαγόρα είναι γνωστό ότι οι ρητοί αριθμοί δεν καλύπτουν όλη την ευθεία. Δεν περιλαμβάνουν, για παράδειγμα, το σημείο $\sqrt{2}$. Για να γεμίσουν τα κενά της ευθείας, οι μαθηματικοί επινόησαν διάφορες άπειρες διαδικασίες, όπου δημιουργούν νέα σημεία, όπως τα άπειρα αθροίσματα, του άπειρους δεκαδικούς και τα άπειρα συνεχή κλάσματα. Αλλά ο πιο άμεσος τρόπος να γεμίσουμε τα κενά στους ρητούς αριθμούς είναι εκείνος όπου πηγάζει από μία ιδέα του Dedekind(1872) : **γέμισε κάθε κενό με το κενό το ίδιο**.

Μπορούμε να δούμε κάθε κενό (ή τομή όπως την έλεγε ο Dedekind) στο σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών ως μια διαμέριση του $\mathbb{Q}$ σε δύο διαφορετικά σύνολα, L και U (κατώτερο και ανώτερο), όπου L δεν έχει μεγαλύτερο στοιχείο και U δεν έχει μικρότερο στοιχείο και κάθε στοιχείο του L είναι μικρότερο από όλα τα στοιχεία του U. Αυτά τα κενά, επίσης, είναι άπειρα αντικείμενα, αλλά είναι τα πιο κατάλληλα για να συμπληρώσουμε την ευθεία. Έτσι υπάρχουν το σύνολο $\mathbb{Q}$ και οι τομές του $\mathbb{Q}$, που μαζί συμπληρώνουν την ευθεία.

Αυτό στην αρχή μπορεί να μοιάζει ως ένα τρικ, αλλά το τρικ αυτό λειτουργεί εξαιρετικά καλά. Δεν συμπληρώνει μόνο το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών στο χωρίς κενά σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών, αλλά παράλληλα μας εξασφαλίζει ότι το $\mathbb{R}$ είναι σώμα, αφού οι ιδιότητες του σώματος άμεσα κληρονομούνται από το $\mathbb{Q}$. Αυτό γίνεται ξεκάθαρο εάν επεκτείνουμε την ιδέα της τομής του Dedekind ώστε να περιλαμβάνει και ρητούς αριθμούς, με την προϋπόθεση ότι το L δεν έχει μέγιστο στοιχείο. Πράγματι, κάθε πραγματικός αριθμός μπορεί να αντιπροσωπευτεί ως ένα κατώτερο σύνολο L, όπου μπορούμε να το ονομάσουμε *η κάτω τομή Dedekind*:

Ορισμός 2.4. *Ένας πραγματικός αριθμός είναι ένα σύνολο L των ρητών όπου είναι άνω φραγμένο και "από κάτω κλειστό": δηλαδή, εάν $s \in L$ και ο ρητός $t < s$ τότε $t \in L$.*

θα δώσουμε εδώ ένα παράδειγμα πως το $\mathbb{R}$ κληρονομεί τις ιδιότητες του σώματος από το $\mathbb{Q}$ στην περίπτωση της πρόσθεσης.

Ορισμός 2.5. *: Εάν L_1 και L_2 είναι πραγματικοί αριθμοί το άθροισμα $L_1 + L_2$ ορίζεται ως:*

$$L_1 + L_2 = \{s_1 + s_2 : s_1 \in L_1 \text{ και } s_2 \in L_2\}.$$

Από τον ορισμό αυτό, η ανακλαστικότητα, η επιμεριστικότητα, το μοναδιαίο και το ουδέτερο στοιχείο ακολουθούν αμέσως μετά. Για παράδειγμα, η προσεταιριστικότητα έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} L_1 + (L_2 + L_3) &= \{s_1 + (s_2 + s_3) : s_1 \in L_1, s_2 \in L_2, s_3 \in L_3\} \\ &= \{(s_1 + s_2) + s_3 : s_1 \in s_1, s_2 \in L_2, s_3 \in L_3\} \\ &= (L_1 + L_2) + L_3. \end{aligned}$$

Ο ορισμός του γινομένου είναι λίγο διαφορετικός. Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη στο αρνητικό μέρος της τομής και έτσι θα παραχθούν αυθαίρετα μεγάλοι θετικοί ρητοί. Έτσι το σύνολο που προκύπτει δεν είναι μία κάτω τομή Dedekind. Ένας τρόπος να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό είναι να ορίσουμε τους *θετικούς πραγματικούς αριθμούς* μέσω των τομών Dedekind στους θετικούς ρητούς και να ορίσουμε τα γινόμενα τους. Ύστερα, θα μεταχειριστούμε τους τυχαίους πραγματικούς σαν ζεύγη θετικών πραγματικών όπως κάναμε όταν κατασκευάζαμε τους ακέραιους από τους ρητούς αριθμούς. Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού στο σώμα των πραγματικών προκύπτουν από τις αντίστοιχες ιδιότητες στους ρητούς.

Έτσι, οι πραγματικοί αριθμοί συμπεριφέρονται όπως θα συμπεριφέρονταν κανονικοί "αριθμοί". Τώρα, πρέπει να δούμε πόσο καλά συμπεριφέρονται σε άπειρες πράξεις. Θα σημειώνουμε καταρχήν ότι το $\mathbb{R}$ κληρονομεί την διάταξη από το $\mathbb{Q}$, η οποία έχει οριστεί με χρήση της σχέσης $\subsetneqq$:

Ορισμός 2.6. *: Λέμε ότι $L_1 < L_2$, εάν $L_1 \subsetneqq L_2$.*

Μία άμεση συνέπεια του ορισμού αυτού είναι μια αρχή όπου ήταν ο κύριος στόχος του ορισμού του Dedekind για τους πραγματικούς αριθμούς.

Θεώρημα 2.1. *: **Αρχή ελαχίστου άνω φράγματος**: Εάν X είναι ένα οποιοδήποτε φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών, τότε το X έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα.*

Απόδειξη. : Θεωρούμε ότι η κάτω τομή Dedekind αντιπροσωπεύει τον αριθμό $x \in X$. Αφού το X είναι φραγμένο από πάνω, τότε υπάρχει ένας ρητός αριθμός q μεγαλύτερος από κάθε άλλο στοιχείο κάθε συνόλου L. Έτσι, η ένωση L^* όλων των συνόλων L είναι από μόνη της μία κάτω τομή Dedekind, ορίζοντας μερικούς αριθμούς x^*.

Προφανώς, κάθε $L \subseteq L^*$, έτσι $x \leq x^* \forall x \in X$. Αυτό σημαίνει ότι το x^* είναι άνω φράγμα του X. Το x^* είναι το μικρότερο άνω φράγμα, αφού για κάθε $y < x^*$, έχουμε ότι $y <$ κάποιο στοιχείο κάποιου L και ως εκ τούτου $y <$ κάποιο $x \in X$. □

Η αρχή του ελαχίστου άνω φράγματος πρωτο-αναφέρθηκε από τον Bolzano (1817), πριν υπήρχε ένας ορισμός του $\mathbb{R}$ τόσο ακριβής όσο να επιτρέπει την απόδειξη της αρχής.

Οι μιγαδικοί αριθμοί

Από μια αρχική σκοπιά, οι μιγαδικοί δεν περιλαμβάνουν νέες ιδέες εκτός από αυτές που χρησιμοποιήθηκαν ώστε να κατασκευάσουμε το $\mathbb{R}$, οπότε δεν θα τους μελετήσουμε λεπτομερώς. Παρόλα αυτά, είναι ενδιαφέρον ιστορικά το πρώτο παράδειγμα όπου οι μιγαδικοί ήταν ορισμένοι ως διατεταγμένα ζεύγη. Ο Hamilton(1835) όρισε τους μιγαδικούς $a + bi$ να είναι ως τα διατεταγμένα ζεύγη $<a, b>$ από πραγματικούς αριθμούς και όρισε το άθροισμα και το γινόμενο τους με τους παρακάτω κανόνες:

$$<a_1, b_1> + <a_2, b_2> = <a_1 + a_2, b_1 + b_2>$$

$$<a_1, b_1> . <a_2, b_2> = <a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1>.$$

Έτσι έχουμε

$$(a_1 + b_1i) . (a_2 + b_2i) = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i,$$

και αντιλαμβανόμαστε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί $\mathbb{C}$ έχουν τις ιδιότητες του σώματος και $i^2 = -1$. Με τους ορισμούς του Hamilton οι ιδιότητες του σώματος των μιγαδικών αριθμών κληρονομούνται από αυτούς τους πραγματικούς αριθμούς.

2.3 Οι ιδιότητες της πληρότητας του $\mathbb{R}$

Η ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος αφορά φραγμένα σύνολα των πραγματικών αριθμών. Στην βασική ανάλυση, όπου μελετάμε, θα χρησιμοποιήσουμε φραγμένες ακολουθίες πραγματικών αριθμών $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Εφόσον τα στοιχεία μιας ακολουθίας αποτελούν ένα σύνολο, $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών θα έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Μία ακόμη πιο ειδική περίπτωση είναι το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, το οποίο δηλώνει ότι μία φραγμένη και *μονότονη* ακολουθία έχει μοναδικό *όριο*. Δεν έχουμε όμως ορίσει μέχρι στιγμής την έννοια του ορίου:

Ορισμός 2.7. *: Μία ακολουθία $x_0, x_1, x_2, \ldots$ έχει όριο ℓ εάν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε για κάθε $n < N \Rightarrow |x_0 - \ell| < \epsilon$.*

Αυτή η σχέση εκφράζεται ως $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$ ή κάποιες φορές $x_n \to \ell$ καθώς $n \to \infty$ και επίσης λέμε ότι η ακολουθία συγκλίνει εάν έχει όριο.

Ακολουθία κιβωτισμένων κλειστών διαστημάτων

Μια ακολουθία $[a_0, b_0], [a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots$ από κλειστά διαστήματα καλείται *κιβωτισμένη* εάν ισχύει

$$[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots$$

εάν επιπλέον τα διαστήματα $[a_n, b_n]$ γίνονται αυθαίρετα μικρά ή ισοδύναμα $b_n - a_n \to 0$ καθώς το $n \to +\infty$ τότε υπάρχει *ένα και μοναδικό* κοινό σημείο στα διαστήματα αυτά.

Μπορούμε να ονομάσουμε αυτή την ιδιότητα του $\mathbb{R}$ ως την πληρότητα των πραγματικών αριθμών για τα κιβωτισμένα διαστημάτα.

Το Κριτήριο Σύγκλισης του Cauchy

Εάν μία ακολουθία είναι φραγμένη και μονότονη τότε δεν χρειάζεται κάποιο κριτήριο σύγκλισης για να βρούμε το όριο της. Αλλά οι μονότονες ακολουθίες είναι ιδιαίτερες. Υπάρχει ένα εντελώς γενικό κριτήριο σύγκλισης όπου δεν κάνει καμία αναφορά στην έννοια του ορίου, το κριτήριο του Cauchy(1821):

Κριτήριο σύγκλισης του Cauchy : Μία ακολουθία $x_0, x_1, x_2, ...$ συγκλίνει εάν και μόνο εάν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε για κάθε

$$m, n > N \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon.$$

Απόδειξη. Εάν η ακολουθία συγκλίνει τότε θα έχει όριο ℓ και από τον ορισμό γνωρίζουμε ότι $\forall \epsilon > 0$, υπάρχει ένα N τέτοιο ώστε για κάθε

$$n > N \Rightarrow |x_n - \ell| < \epsilon/2.$$

Συγκεκριμένα, προκύπτει ότι για κάθε

$$m, n > N \Rightarrow |x_m - x_n| = |x_m - \ell - (x_n - \ell)| \leq |x_m - \ell| + |x_n - \ell| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Δηλαδή, η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy.

Αντίστροφα, έστω ότι η ακολουθία είναι Cauchy θα δείξουμε κατ' αρχήν ότι είναι φραγμένη.

Αφού είναι Cauchy, υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $|x_n - x_{n_1}| < 1, \forall n > n_1$.

Επομένως, $|x_n| < 1 + |x_{n_1}|$ για κάθε $n > n_1$.

Συνεπώς, $x_n \leq max\{|x_1|, ..., |x_{n_1 - 1}|, 1 + |x_{n_1}|\}$ για κάθε n. Άρα η x_n είναι φραγμένη.

Θα ορίσουμε μία κατάλληλη ακολουθία κιβωτισμένων κλειστών διαστημάτων $[a_n, b_n]$. Ορίζουμε

a_n= το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$

b_n= το μικρότερο άνω φράγμα του $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$.

Είναι προφανές ότι ισχύει

$$[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots,$$

και ότι τα διαστήματα αυτά γίνονται αυθαίρετα μικρά από το κριτήριο του Cauchy. Συνεπώς από την ιδιότητα της πληρότητας των κιβωτισμένων διαστημάτων προκύπτει ένα μοναδικό σημείο ℓ μέσα σε όλα αυτά τα διαστήματα. Οπότε, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα N, έτσι ώστε, για κάθε

$$n > N \Rightarrow |x_n - \ell| < \epsilon,$$

συνεπώς η ακολουθία $x_0, x_1, x_2, \ldots$ συγκλίνει στο ℓ. □

Αυτό το θεώρημα δίνει έναν επιπλέον τρόπο έκφρασης της πληρότητας του $\mathbb{R}$: κάθε ακολουθία Cauchy, έχει όριο (συγκλίνει).

2.4 Συναρτήσεις και σύνολα

Είδαμε πως οι ακέραιοι και οι ρητοί ανάγονται στους φυσικούς αριθμούς και πως οι πραγματικοί ανάγονται σε σύνολα ρητών αριθμών. Το επόμενο που πρέπει να αριθμητικοποιήσουμε είναι οι συναρτήσεις.

Η ακολουθία $x_0, x_1, x_2, \ldots$ είναι μία συνάρτηση f των φυσικών αριθμών με πραγματικές τιμές, δηλαδή

$$f(n) = x_n.$$

Αυτή η συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύνολο από διατεταγμένα ζεύγη :

$$f = \{< 0, f(0) >, < 1, f(1) >, < 2, f(2) >, \ldots\}.$$

Πράγματι, κάθε συνάρτηση f με Π.Ο. D μπορεί να θεωρηθεί ως το σύνολο

$$< x, y >: x \in D \text{ και } f(x) = y.$$

Αυτό μας δείχνει πως οι συναρτήσεις μπορούν να θεωρηθούν ως σύνολα και να προστεθούν στην πληθώρα των διατεταγμένων ζευγών, όπου ήδη έχουμε χρησιμοποιήσει για να ορίσουμε τους ακεραίους και τους ρητούς αριθμούς.

Για να επιτύχουμε τον τελικό στόχο της αριθμητικοποίησης, δηλαδή να αναγάγουμε όλες τις έννοιες της ανάλυσης σε φυσικούς αριθμούς ή σε σύνολα από φυσικούς αριθμούς, πρέπει να βρούμε έναν τρόπο να κωδικοποιήσουμε το ζεύγος δύο αριθμών με ένα μοναδικό αριθμό.

Κωδικοποίηση ακολουθιών και κάποιων άλλων συναρτήσεων

Αφού κάθε πραγματικός x_n μπορεί να κωδικοποιηθεί με ένα σύνολο $X_n \subseteq \mathbb{N}$, με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να κωδικοποιήσουμε την ακολουθία $\{< n, x_n >: n \in \mathbb{N}\}$ με ένα σύνολο ζευγών από φυσικούς αριθμούς:

$$\{< n, k >: k \in x_n \text{ και } n \in \mathbb{N}\}$$

και συνεπώς σε ένα σύνολο φυσικών αριθμών:

$$X = \{P(n, K) : k \in X \text{ και } n \in \mathbb{N}\}.$$

Με P συμβολίζουμε μια κατάλληλη μία προς μία συνάρτηση από το σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ η οποία λέγεται συνάρτηση ζευγαρώματος και αντιστοιχεί κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών σε ένα και μοναδικό φυσικό αριθμό.

Έτσι μία ακολουθία πραγματικών αριθμών μπορεί να κωδικοποιηθεί από ένα σύνολο $X \subseteq \mathbb{N}$ αφού είναι μία συνάρτηση με Π.Ο. το $\mathbb{N}$. Το ίδιο μπορεί να γίνει και με κάθε συνάρτηση της οποίας το Π.Ο. μπορεί να κωδικοποιηθεί από το $\mathbb{N}$, όπως είναι η συνάρτηση με Π.Ο. το $\mathbb{Q}$.

Όπως θα δούμε αργότερα, αυτό μας επιτρέπει να κωδικοποιήσουμε κάθε συνεχή συνάρτηση πραγματικών αριθμών από ένα σύνολο φυσικών αριθμών.

2.5 Οι Συνεχείς Συναρτήσεις

Ο πιο συνήθης τρόπος να ορίσουμε μια συνεχή πραγματική συνάρτηση, μας οδηγεί πίσω στον Cauchy (1821). Τυποποιούμε, ουσιαστικά, την ιδέα ότι το $f(x)$ ”πλησιάζει” στο $f(a)$ καθώς το x ”πλησιάζει” στο a.

Ορισμός 2.8. *Μία συνάρτηση f λέγεται* συνεχής *στο $a \in \mathbb{R}$ εάν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Μία συνάρτηση f είναι *συνεχής σε ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}$* εάν η f είναι συνεχής σε κάθε $a \in S$.

Μία συνέπεια του ορισμού είναι το παρακάτω:

Ακολουθιακή Συνέχεια: Εάν η f είναι συνεχής στο $x = a$ και ορίζεται στα σημεία $a_0, a_1, a_2, ...$ με $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ τότε $f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$.

Απόδειξη. : Εξ’ ορισμού για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Επίσης, αφού $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει ένα $\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n > N \Rightarrow |a_n - a| < \delta$$

$$|f(a_n) - f(a)| < \epsilon, \text{ λόγω της συνέχειας της} f \text{στο} x = a.$$

Και έτσι έχουμε $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$. □

Αφού κάθε πραγματικός αριθμός a είναι το ελάχιστο άνω φράγμα ενός συνόλου L, προκύπτει ότι είναι το όριο της ακολουθίας $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Οπότε, κάθε συνάρτηση f συνεχής στο a η οποία ορίζεται τουλάχιστον σε κάποιο ανοιχτό διάστημα ακτίνας δ γύρω από το a, ορίζεται με κάποια ακολουθία ρητών αριθμών $a_0, a_1, a_2, \ldots$ με όριο το a. Έτσι προκύπτει από την ακολουθιακή συνέχεια ότι

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

Με άλλα λόγια, κάθε τιμή $f(a)$ της f *προσδιορίζεται* από τις τιμές της f σε ρητά σημεία.

Προκύπτει ότι κάθε *συνεχής* συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ *μπορεί να κωδικοποιηθεί από ένα σύνολο φυσικών αριθμών*, και έτσι το εγχείρημα της αριθμητικοποίησης επεκτείνεται έτσι ώστε να περιλάβει τις συνεχείς συναρτήσεις. Τελικά, σύμφωνα με τον Borel(1898) κάθε συνεχή συνάρτηση μπορεί να κωδικοποιηθεί από έναν πραγματικό αριθμό.

Η Κωδικοποίηση των συνεχών Συναρτήσεων Μέσω Ρητών Διαστημάτων

Υπάρχει ένας πιο άμεσος τρόπος να ορίσουμε τις συνεχείς συναρτήσεις, ο οποίος παρουσιάστηκε από τον Hausdorff (1914) και οδηγεί σε μία πιο φυσική κωδικοποίηση αυτών.

Ορισμός 2.9. *: Ένα* ανοιχτό διάστημα *του $\mathbb{R}$ είναι ένα σύνολο της μορφής:*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a > x > b\}.$$

Ένα ανοιχτό *σύνολο (στο $\mathbb{R}$) είναι μία τυχαία ένωση ανοιχτών διαστημάτων.*

Η χαρακτηριστική ιδιότητα ενός ανοιχτού συνόλου U είναι ότι για κάθε $x \in U$ και για κάποιο $\delta > 0$ όλα τα σημεία της απόστασης από το δ μέχρι το x είναι επίσης μέσα στο U. Αυτή οδηγεί στο "χαρακτηρισμό" του Hausdorff για τις συνεχείς συναρτήσεις, όπου χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $f((c, d))$ για να συμβολίσουμε ότι: $\{f(x) : x \in (c, d)\}$.

Χαρακτηρισμός του Hausdorff για την συνέχεια : Μία πραγματική συνάρτηση f σε ένα ανοιχτό σύνολο U είναι συνεχής εάν και μόνο εάν για κάθε τιμή της $f(x)$ και κάθε (a, b) που ανήκει στο $f(x)$, υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα (c, d) που περιέχει το x τέτοιο ώστε $f((c, d)) \subseteq (c, d)$.

Απόδειξη. : Αφού η f είναι συνεχής για κάθε $x \in U$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Συγκεκριμένα, εάν $f(x) \in (a, b)$ και $\epsilon = \min(f(x) - a, b - f(x))$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x') \in (a, b)$ όπου $x' \in (x - \delta, x + \delta) \subseteq U$. Έτσι, εάν ορίσουμε $(x - \delta, x + \delta) = (c, d)$, έχουμε ότι

$$f((c, d)) \subseteq (a, b).$$

Αντίστροφα, εάν για κάθε (a, b) όπου ανήκει το $f(x)$ υπάρχει (c, d) που ανήκει στο x, με $f((c, d)) \subseteq (a, b)$ τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει (c, d) που ανήκει στο x με $f((c, d)) \subseteq (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$. Συνεπώς, εάν $\delta = \min(x - c, d - x)$ έχουμε

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon,$$

έτσι η f είναι συνεχής στο x για κάθε $x \in U$ και συνεπώς η f είναι συνεχής στο U.

□

Προκύπτει από τον χαρακτηρισμό του Hausdorff ότι μπορούμε να κωδικοποιήσουμε κάθε συνεχή συνάρτηση f σε ένα ανοιχτό σύνολο U με τα ζεύγη των ρητών διαστημάτων $< (a, b), (c, d) >$ τέτοια ώστε $f((c, d)) \subseteq (a, b)$. Αυτό συμβαίνει γιατί το x και το $f(x)$ καθορίζονται από τα ρητά διαστήματα που τα περιέχουν και εάν $f((c, d))$ περιέχεται σε ένα ρητό διάστημα (a, b), μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι το (c, d) είναι επίσης ρητό, κάνοντας το λίγο μικρότερο, εάν κάτι τέτοιο είναι αναγκαίο.

Με την κατάλληλη χρήση, των ζευγών συναρτήσεων μπορούμε να κωδικοποιήσουμε τα διατεταγμένα σύνολα ζευγών $< (a, b), (c, d) >$ και συνεπώς της συνάρτησης f από ένα σύνολο φυσικών αριθμών.

2.6 Τα αξιώματα Peano

Στις προηγούμενες υπο-ενότητες του κεφαλαίου αυτού, έχουμε περιγράψει πως οι βασικές έννοιες της ανάλυσης, από τους πραγματικούς αριθμούς έως τις συνεχείς συναρτήσεις, προέρχονται από τους φυσικούς αριθμούς και τα σύνολα αυτών. Τώρα θα εκθέσουμε τα θεμέλια των ίδιων των φυσικών αριθμών και των πράξεων τους, της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

Η κύρια έννοια των θεμελίων αυτών είναι η *επαγωγή*, όπου αναγνωρίστηκε από τον Grassmann (1861) ως την βάση για τον ορισμό της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και της απόδειξης των αλγεβρικών ιδιοτήτων όπως $a + b = b + a$. Οι ιδέες του Grassmann, εμπεριέχονται σε ένα σύστημα αξιωμάτων για τους φυσικούς αριθμούς από τον Peano(1889) και το σύστημα αυτό είναι γνωστό ως *Αριθμητική Peano* (PA).

Ανά τα χρόνια, η λίστα των Αξιωμάτων αυτών έχει διαφοροποιηθεί ελαφρώς. Στο αρχικό σύστημα Peano, το 1 (ένα) ήταν ο μικρότερος αριθμός, σήμερα παίρνουμε το 0 (μηδέν) σαν ελάχιστο. Υπάρχει επίσης μία ποικιλία για το αξίωμα της επαγωγής. Αρχικά, διατυπώθηκε ως μία ιδιότητα σε αυθαίρετα σύνολα αλλά σήμερα την περιορίζουμε σε ορίσιμες ιδιότητες της γλώσσας της PA. Ένας λόγος για τον περιορισμό αυτών είναι ότι επιθυμούμε να διαχωρίσουμε την έννοια του συνόλου των φυσικών αριθμών από την έννοια των φυσικών αριθμών αυτών κάθε αυτών, έτσι δεν συμπεριλαμβάνουμε πλέον την έννοια του συνόλου στα αξιώματα Peano.

Αξιώματα της πράξης επόμενο

1. Για κάθε n, $0 \neq S(n)$.

2. Για κάθε m και n, $S(m) \neq S(n) \Rightarrow m \neq n$.

Αξιώματα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού

3. Για κάθε m και n, $m + 0 = m$ και $m + S(n) = S(m + n)$.

4. Για κάθε m και n, $m \cdot 0 = m$ και $m \cdot S(n) = m \cdot n + m$.

   Με S συμβολίζουμε την συνάρτηση του επομένου και με 0 συμβολίζουμε το μικρότερο στοιχείο των φυσικών αριθμών.

   Τα αξιώματα 1-4 είναι ένας πολύ συνοπτικός τρόπος να αποδώσουμε όλα τα ιδιαίτερα στοιχεία της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού των φυσικών αριθμών -καλύπτουν αυτό που λέμε την ”αριθμητική του δημοτικού σχολείου”. Αλλά για να συλλάβουμε την πιο υψηλού επιπέδου αριθμητική χρειάζεται να εισάγουμε την αρχή της επαγωγής. Είναι η επαγωγή που μας επιτρέπει να αποδείξουμε τις βασικές αλγεβρικές ιδιότητες των σωμάτων $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$.

Αξίωμα της επαγωγής

   Η επαγωγή είναι η αρχή που μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι μία ιδιότητα $\phi(n)$ ισχύει για κάθε n αφού πρώτα έχουμε αποδείξει ότι

   - το $\phi(0)$ ισχύει (βασικό βήμα)
   - για κάθε n, εάν $\phi(n)$ ισχύει τότε $\phi(S(n))$ ισχύει (επαγωγικό βήμα).

   Χρησιμοποιώντας το σύμβολο του $\forall n$ για να συμβολίσουμε το ”για κάθε n”, εκφράζουμε την αρχή της επαγωγής με το παρακάτω αξίωμα:

5. $[\phi(0)$ και $\forall n(\phi(n)) \Rightarrow \phi(S(n))] \Rightarrow \forall n \phi(n))$.

Το επαγωγικό αξίωμα που χρησιμοποιείται από τον Peano αξίζει μια σύντομη αναφορά, εδώ, γιατί θα το χρησιμοποιήσουμε παρακάτω στο σύστημα ACA_0.

Παραδείγματα αποδείξεων με την χρήση της επαγωγής

Η συνάρτηση S είναι ίση με την πρόσθεση κατά 1 :Για κάθε φυσικό αριθμό n, $S(n) = n + 1$.

Απόδειξη. : Ο αριθμός 1 ορίζεται ως το $S(0)$ έτσι,

$$\begin{aligned} n + 1 &= n + S(0) \\ &= S(n + 0) \\ &= S(n), \text{ αφού } n + 0 = n \text{ από τον ορισμό της πρόσθεσης.} \end{aligned}$$

□

.

Αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης με το +1 :Για κάθε φυσικό αριθμό n, $1 + n = n + 1$.

Απόδειξη. : Αφού $S(n) = n + 1$ από την προηγούμενη πρόταση, αρκεί να δείξουμε ότι $S(n) = 1 + n$. Με την χρήση της επαγωγής: Για το πρώτο βήμα $n = 0$, έχουμε :

$$S(0) = 1 = 1 + 0$$

. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε $S(k) = k + 1$, έτσι $k + 1 = 1 + k$ και S(S(k)):

$$S(S(k)) = S(S(k + 1))$$

$$= S(1 + k)$$

$$= 1 + S(k)$$

.

Έτσι, $S(n) = 1 + n$, για κάθε φυσικό αριθμό n. □

2.7 Η Γλώσσα Των Αξιωμάτων Peano

Η *γλώσσα* της αριθμητικής αποτελείται από τα παρακάτω σύμβολα:

Σταθερός όρος: 0,

Μεταβλητές: $a, b, c, ...$(Roman letters),

Σύμβολα Συνάρτησης: $S, +, \cdot$

Σύμβολο Σχέσεις: $=$

Λογικά Σύμβολα: $\wedge$ (και), $\vee$ (ή), $\neg$ (όχι), $\Rightarrow$ (συνεπάγεται), $\forall$ (για κάθε), $\exists$ (υπάρχει),

Παρενθέσεις: $(,)$.

Αυτά τα σύμβολα, εφοδιασμένα με κάποιους κανόνες μας δίνουν την δυνατότητα να κατασκευάσουμε *όρους, εξισώσεις* και *τύπους*. Για παράδειγμα, μπορούμε να κατασκευάσουμε της ισότητα $t_1 = t_2$ από τους όρους t_1 ,t_2.

Οι ισότητες είναι οι πιο απλές μορφές αριθμητικών τύπων, από αυτές κατασκευάζουμε νέους τύπους με την βοήθεια των λογικούς συνδέσμων (πράξεις Boolean): $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$ και των ποσοδεικτών $\forall, exists$. Έτσι εάν ϕ_1 και ϕ_2 είναι τύποι τότε επίσης είναι τύποι και οι:

$$(\phi_1 \wedge \phi_2), (\phi_1 \vee \phi_2), (\neg\phi_1), (\forall x \phi_1), (\exists x \phi_1),$$

όπου x είναι μια μεταβλητή στην ϕ_1 που βρίσκεται εκτός πεδίου εφαρμογής κάποιου από των ποσοδεικτών $\forall, \exists$.

Η γλώσσα των αξιωμάτων PEANO είναι ικανή να εκφράσει όλες τις συνήθεις προτάσεις για τους φυσικούς αριθμούς και όλες τις συνήθεις σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες των φυσικών αριθμών.

Απαλοιφή των λογικών συνδέσμων της σύζευξης και της διάζευξης

Τα σύμβολα των πράξεων Boolean $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$ χρησιμοποιούνται για να διευκολύνουν την ερμηνεία της φυσικής γλώσσας στη γλώσσας της *PA*.

Παρόλα αυτά, είναι πιο πιθανό και μερικές φορές βολικό θα λέγαμε, να δουλεύουμε με ένα μικρότερο σύνολο λογικών συμβόλων.

Για παράδειγμα, μπορούμε να απλοποιήσουμε τον λογικό σύνδεσμο $\Rightarrow$, αφού

$$\phi_1 \Rightarrow \phi_2$$

είναι ισοδύναμο με

$$(\neg\phi_1) \vee \phi_2$$

.

Επίσης, μπορούμε να απλοποιήσουμε ένα από τα σύμβολα $\wedge$, $\vee$ αφού:

$$(\phi_1 \wedge \phi_2)\text{είναι ισοδύναμο με}\neg((\neg\phi_1) \wedge \neg(\phi_2))$$

και

$$(\phi_1 \vee \phi_2)\text{είναι ισοδύναμο με}\neg((\neg\phi_1) \vee \neg(\phi_2)).$$

Η Μορφή Prenex

Απλοποιώντας, δηλαδή μειώνοντας τους συνδέσμους που χρησιμοποιούμε, οδηγούμαστε σε μια πιο σημαντική απλοποιημένη μορφή, στην χρήση των $\forall$, *exists* γνωστή και ως *μορφή Prenex*. Η μορφή Prenex επιτυγχάνεται εφαρμόζοντας τις ακόλουθες ισοδυναμίες (το $\Leftrightarrow$ υποδηλώνει την λογική ισοδυναμία) για να μετακινήσουμε τα $\forall$, *exists* δεξιά των λογικών συνδέσμων:

$$\neg\forall x\phi \Leftrightarrow \exists x\neg\phi$$

$$\neg\exists\forall x\phi \Leftrightarrow \forall x\neg\phi$$

$$\phi_1 \vee \forall x\phi_2(x) \Leftrightarrow \forall y(\phi_1 \wedge \phi_2(y))$$

$$\phi_1 \vee \exists x\phi_2(x) \Leftrightarrow \exists y(\phi_1 \wedge \phi_2(y))$$

.

2.8 Αριθμητικά Ορίσιμα Σύνολα

Από εδώ και στο εξής θα ονομάζουμε τις ιδιότητες που ορίζονται στην PA καθώς και τα αντίστοιχα τους σύνολα, ως *αριθμητικά ορίσιμα*. Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, τις ισότητες που προαναφέρθηκαν, μπορούμε να αναγάγουμε κάθε αριθμητικά ορισμένη ιδιότητα $a(u)$ σε έναν τύπο της μορφής Prenex:

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \phi(x_1 x_2 \dots x_n, u),$$

όπου $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ είναι κάποιου από τους ποσοδείκτες $\forall$ ή $\exists$ και ϕ ένας τύπος χωρίς ποσοδείκτες.

Ακόμα, μπορούμε να αναγάγουμε κάθε δυο ποσοδείκτες του ίδιου τύπου σε έναν, επειδή ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες

$$\forall x \forall y \phi(x, y) \Leftrightarrow \forall z \phi(P_1(z), P_2(z)) \text{και}$$

$$\exists x \exists y \phi(x, y) \Leftrightarrow \exists z \phi(P_1(z), P_2(z)),$$

όπου P_1, P_2 είναι οι συναρτήσεις προβολής.

Με αυτές τις αναγωγές καταλήγουμε σε έναν Prenex τύπο στον οποίο οι ποσοδείκτες εναλλάσονται είτε

$$\forall z_1 \exists z_2 \dots \psi(z_1, z_2, \dots, z_m, u)$$

είτε σε

$$\exists z_1 \forall z_2 \dots \psi(z_1, z_2, \dots, z_m, u),$$

όπου ψ είναι ένας συνδυασμός από τύπους, ελεύθερους από ποσοδείκτες, που περιέχουν όρους με τις μεταβλητές $z_1, z_2, \dots z_n, u$, χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις $S, +, \cdot, P_1, P_2$ και το κατηγόρημα της ισότητας $=$. Ο πρώτος τύπος παραπάνω είναι γνωστός ως Π_m^0 τύπος και ο δεύτερος ως Σ_m^0 τύπος.

Συμπερασματικά, το m είναι ένα καλό μέτρο της πολυπλοκότητας μιας αριθμητικής ιδιότητας $a(u)$. Συγκεκριμένα, οι Σ_1^0 ιδιότητες είναι ιδιότητες υπολογιστικά απαριθμήσιμες.

Προκύπτει από τον ορισμό του Σ_m^0 παραπάνω, μία ιδιότητα $a(u)$ είναι Σ_1^0 εάν υπάρχει ένας τύπος ελεύθερος από ποσοδείκτες $\psi(z, u)$ τέτοιος ώστε

$$a(u) \Leftrightarrow \exists z \psi(z, u).$$

2.9 Κλασσική ανάλυση

Δείξαμε ότι πολλοί βασικοί κλάδοι της ανάλυσης, όπως οι πραγματικοί αριθμοί, οι ακολουθίες, οι συνεχείς συναρτήσεις μπορούν να αριθμητικοποιηθούν. Έτσι, μπορούν να οριστούν ή να κωδικοποιηθούν από φυσικούς αριθμούς και σύνολα φυσικών αριθμών. Αυτή η ανακάλυψη μας δείχνει τον δρόμο για τα αξιωματικά συστήματα της ανάλυσης, βασισμένα στην PA, το σύστημα της αριθμητικής Peano. Θα δούμε, λοιπόν, τις βασικές έννοιες που προκύπτουν όταν οι πραγματικοί αριθμοί και οι συνεχείς συναρτήσεις μελετούνται.

2.9.1 Τα Όρια

Όρια ακολουθιών

Η κλασσική ανάλυση ασχολείται με το αποτέλεσμα άπειρων διαδικασιών των πραγματικών αριθμών ή αλλιώς τα όρια. Για παράδειγμα, οι ακόλουθες εξισώσεις εκφράζουν τους πραγματικούς αριθμούς $\frac{1}{3}, \sqrt{2}, \pi$ ως αποτέλεσμα απείρων διαδικασιών.

$$\frac{1}{3} = 0,333333\ldots$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots}}}}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$$

Σε κάθε περίπτωση, το δεξί μέλος προκύπτει από μια διαδικασία που παράγει μια άπειρη ακολουθία ρητών αριθμών:

- Ο άπειρος δεκαδικός προκύπτει από την ακολουθία άπειρων δεκαδικών

$$0,3, 0,33, 0,333, \ldots$$

- Το άπειρο συνεχές κλάσμα προκύπτει από την ακολουθία άπειρων κλασμάτων

$$1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\ldots}}$$

- Το άπειρο άθροισμα προκύπτει από την ακολουθία μερικών αθροισμάτων

$$1, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$

Όρια συναρτήσεων

Μία ακολουθία $a_1, a_2, a_3, \ldots$ θα μπορούσε να δειχθεί ως συνάρτηση f θετικών ακεραίων,

$$f(n) = a_n$$

έτσι μπορούμε να δούμε το όριο της, ℓ ως το όριο της $f(n)$ όταν το n τείνει στο άπειρο.

Ορισμός 2.10. *Εάν η f είναι μία συνάρτηση που ορίζεται σε κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$,*

1.
$$f(x) \to \ell \text{ όταν το } x \to a \text{ για κάθε } \epsilon > 0, \text{ υπάρχει ένα } \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε}$$
$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

2.
$$f(x) \to \ell \text{ όταν το } x \to \infty \text{ για κάθε } \epsilon > 0, \text{ υπάρχει ένα } N > 0 \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$x > N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

Οριακά σημεία ενός συνόλου

Ορισμός 2.11. *Ένα σημείο ℓ ονομάζεται* οριακό σημείο *ενός συνόλου $S \subseteq \mathbb{R}$, εάν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχουν σημεία του S εκτός του ℓ τα οποία ανήκουν στο $(\ell - \epsilon, \ell + \epsilon)$.*

2.9.2 Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής

Ο τρόπος που φανταζόμαστε την γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης είναι ως μια καμπύλη που ”δεν έχει κενά” όπως η πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ δεν έχει κενά. Παρόλα αυτά, ο συνήθης ορισμός της συνεχούς συνάρτησης έχει να κάνει με την έννοια του ορίου και η ιδέα ότι η γραφική παράσταση δεν έχει κενά λήφθηκε από ένα Θεώρημα.

Θεώρημα 2.2. *(Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής) Εάν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$, με $f(a) < 0$ και $f(b) > 0$ τότε $f(c) = 0$ για κάποιο c στο $[a, b]$.*

Πριν αποδείξουμε το θεώρημα θα σημειώσουμε ότι δεν υπάρχει τίποτα ιδιαίτερο με την τιμή 0 του f. Μία παρόμοια απόδειξη μας δείχνει ότι η f παίρνει οποιαδήποτε τιμή ανάμεσα στο $f(a)$ και το $f(b)$- και γι αυτό ονομάζεται και θεώρημα ενδιάμεσης τιμής. Συγκεκριμένα, τα τελικά σημεία a και b του συνόλου είναι αυθαίρετα. Έτσι μπορούμε να πάρουμε το $a = 0$ και $b = 1$ χωρίς βλάβη της γενικότητας και θα το χρησιμοποιήσουμε στην παρακάτω απόδειξη.

Απόδειξη. Στο μισό του διαστήματος $[0, 1]$ - είτε το $[0, 1/2]$ ή το $[1/2, 1]$- έχουμε το $f(x) \leq 0$ στο ένα τέλος του υποδιαστήματος και $f(x) \geq 0$ στο άλλο. Εάν η $f(x) = 0$ είτε στο ένα είτε στο άλλο τότε έχουμε τελειώσει. Εάν όχι έχουμε το υποδιάστημα $[a_1, b_1]$ με $f(a_1) < 0$ και $f(b_1) > 0$ και θα επαναλάβουμε την διαδικασία στο $[a_1, b_1]$.

Έτσι, εάν το $f(x) \neq 0$ στο μισό του συνόλου $[a_1, b_1]$ παίρνουμε ακριβώς το μισό από το σύνολο $[a_2, b_2]$ του $[a_1, b_1]$ για το οποίο $f(a_2) < 0$ και $f(b_2) > 0$. Προχωρώντας με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε είτε ένα σημείο διχοτόμησης x σε κάποιο στάδιο, με $f(x) = 0$ ή διαφορετικά να έχουμε μία άπειρη κιβωτισμένη ακολουθία από κλειστά διαστήματα

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots,$$

τέτοια ώστε $f(a_n) < 0$ και $f(b_n) > 0$ για κάθε n. Επίσης, αφού κάθε διάστημα είναι το μισό του προηγούμενου, έχουν ένα κοινό σημείο, c, από την πληρότητα των κιβωτισμένων διαστημάτων.

Πρέπει να έχουμε $f(c) = 0$. Πράγματι, εάν το $f(c) > 0$ τότε από την συνέχεια του f έχουμε $f(a_n), f(b_n) > 0$ για κάθε a_n, b_n που είναι αρκετά κοντά στο c, που έρχεται σε αντίθεση με την παραπάνω κατασκευή των a_n, b_n. Ομοίως δουλεύουμε και στην περίπτωση όπου το $f(c) < 0$.

Έτσι, είτε βρίσκουμε ένα σημείο στο οποίο ισχύει $f(x) = 0$ σε κάποιο στάδιο της διχοτόμησης, ή βρίσκουμε ένα σημείο ως το όριο των διαστημάτων που προκύπτει από την διαδικασία της διχοτόμησης. □

2.9.3 θεώρημα BOLZANO-WEIERSTRASS

Είναι προφανές ότι ένα πεπερασμένο σύνολο δεν μπορεί να έχει οριακά σημεία. Ακόμα όμως και στην περίπτωση που είναι άπειρο δεν εξασφαλίζεται ότι θα έχει οριακά σημεία, όπως για παράδειγμα το $\mathbb{N}$.

Θεώρημα 2.3. *(Bolzano-Weierstrass)Εάν το S είναι ένα άπειρο σύνολο από σημεία μεταξύ των πραγματικών αριθμών a και b, τότε το S έχει ένα οριακό σημείο.*

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να πάρουμε το $a = 0$ και $b = 1$, έτσι το S είναι ένα σύνολο από σημεία στο $[0, 1]$. Αφού το S είναι ένα άπειρο σύνολο, τουλάχιστον ένα από τα δύο μισά υποσύνολα του $[0, 1]$ - είτε το $[0, 1/2]$ ή το $[1/2, 1]$- περιέχει άπειρα πολλά σημεία του S. Έστω $[a_1, b_1]$ είναι το δεξί μισό του $[0, 1]$ που περιέχει άπειρα πολλά σημεία του S επαναλαμβάνουμε το εγχείρημα στο $[a_1, b_1]$. Όπου μας δίνει το μισό $[a_2, b_2]$ του $[a_1, b_1]$ όπου επίσης περιέχει άπειρα πολλά στοιχεία του S. Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο αποκτούμε μία άπειρη κιβωτισμένη ακολουθία από κλειστά διαστήματα

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots,$$

όπου κάθε ένα από αυτά περιέχει άπειρα πολλά στοιχεία του S.

Από την ιδιότητα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών για τα κιβωτισμένα διαστήματα προκύπτει ότι υπάρχει ένα και μοναδικό σημείο c κοινό σε όλα τα $[a_n, b_n]$. Επίσης, αφού αυτά τα διαστήματα είναι επαρκώς μικρά, κάθε γειτονιά του c περιέχει κάποιο $[a_n, b_n]$ και συνεπώς άπειρα πολλά στοιχεία του S. Έτσι το c είναι ένα οριακό σημείο του συνόλου S. □

Θεώρημα 2.4. *(Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες) Κάθε άπειρη φραγμένη ακολουθία $x_1, x_2, x_3, \dots$ πραγματικών αριθμών έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \dots$*

Απόδειξη. Έστω $x_\nu \nu, \nu \in \mathbb{N}$ μια φραγμένη ακολουθία, δηλαδή $|x_\nu| \leq M, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Τότε άπειροι όροι $|x_\nu|, \nu \in \mathbb{N}$ βρίσκονται στο διάστημα $[-M, M]$. Αν πάρουμε τώρα τα διαστήματα $[-M, 0]$ και $[0, M]$, τότε σε ένα από αυτά ή και στα δύο θα βρίσκονται άπειροι όροι της $|x_\nu|, \nu \in \mathbb{N}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι οι άπειροι όροι βρίσκονται στο $[0, M]$. Θέτουμε $\alpha_1 = 0$ και $\beta_1 = M$. Τότε σε ένα από τα διαστήματα$[\alpha_1, \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}]$ και $[\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}, \beta_1]$ ή και στα δύο υπάρχουν άπειροι όροι της $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$. Ονομάζουμε $[\alpha_2, \beta_2]$, εκείνο το διάστημα που περιέχει τους άπειρους όρους. Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο παίρνουμε μία ακολουθία κιβωτισμένων κλειστών διαστημάτων $[\alpha_\nu, \beta_\nu], \nu \in \mathbb{N}$ που περιέχουν άπειρα στοιχεία της $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και που το μήκος είναι

$$\beta_\nu - \alpha_\nu = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^{\nu-1}} \to 0.$$

Συνεπώς, έχουμε έναν κιβωτισμό κλειστών διαστημάτων του Cantor και από αξίωμα της πληρότητας των πραγματικών, υπάρχει μοναδικό $\xi \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\alpha_\nu \leq \xi \leq \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $\lim \alpha_\nu = \xi, \lim \beta_\nu = \xi$.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ξ είναι όριο κάποιας υπακολουθίας. Παίρνουμε έναν όρο $x_{k_1} \in [\alpha_1, \beta_1]$ και στην συνέχεια επιλέγουμε έναν $x_{k_2} \in [\alpha_2, \beta_2]$ με $k_2 > k_1$, έναν $x_{k_3} \in [\alpha_3, \beta_3]$ με $k_3 > k_2$, κ.ο.κ. Η επιλογή αυτή των δεικτών $k_1, k_2, k_3, \ldots$ είναι δυνατή, γιατί καθένα από τα διαστήματα $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$ περιέχει άπειρους όρους $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$. Τότε η $x_{k_\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ είναι μία υπακολουθία της $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $\alpha_\nu \leq x_{k_\nu} \leq \beta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Επειδή $\lim \alpha_\nu = \xi = \lim \beta_\nu$ έχουμε $\lim x_{k_\nu} = \xi$. □

2.9.4 Θεώρημα HEINE-BOREL

Συνεχίζοντας, μελετάμε ένα άλλο θεώρημα θεμελιώδους σημασίας, το θεώρημα Heine-Borel. Παρά την παρόμοια απόδειξη τους, το Heine-Borel είναι πιο αδύναμο από το Bolzano-Weierstrass με έναν διακριτό αλλά με ακρίβεια καθορισμένο τρόπο.

Θεώρημα 2.5. *(Heine-Borel)Εάν το S είναι ένα άπειρο σύνολο από ανοιχτά διαστήματα που καλύπτει το διάστημα $[0, 1]$, τότε υπάρχει κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο του S που επίσης το καλύπτει.*

Απόδειξη. Έστω ότι κανένα πεπερασμένο υποσύνολο του S δεν καλύπτει το $[0, 1]$. Έτσι, τουλάχιστον ένα από τα δύο μισά υποσύνολα του $[0, 1]$ - είτε το $[0, 1/2]$ ή το $[1/2, 1]$- επίσης δεν μπορεί να καλυφτεί από πεπερασμένου πλήθους στοιχεία του S.

Έστω $[a_1, b_1]$ το αριστερό μισό και επαναλαμβάνω την διαμέριση. Αυτό μας δίνει το $[a_2, b_2]$ του$[a_1, b_1]$ όπου επίσης δεν μπορεί να καλυφτεί από πεπερασμένου πλήθους στοιχεία του S, κοκ. Με αυτό τον τρόπο, αποκτούμε μία άπειρα κιβωτισμένη ακολουθία κλειστών διαστημάτων

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots,$$

κανένα από τα οποία δεν μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένου πλήθους στοιχεία του S.

Από την ιδιότητα της πληρότητας του $\mathbb{R}$ για τα κιβωτισμένα διαστήματα προκύπτει ότι υπάρχει ένα και μοναδικό σημείο c . Αλλά το c είναι μέσα σε κάποια ανοιχτά διαστήματα I που ανήκουν στο S, και επιπλέον το ίδιο γίνεται σε κάθε επαρκώς μικρό σύνολο $[a_n, b_n]$. Αυτό αντικρούει την υπόθεση ότι κάθε ένα από τα $[a_n, b_n]$ δεν μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένου πλήθους διαστήματα του S. Οπότε το $[0, 1]$ πράγματι μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένου πλήθους στοιχεία του S.

□

Θεώρημα 2.6. *(Heine-Borel για ακολουθίες) Εάν $I_1, I_2, I_3, \ldots$ είναι μία άπειρη ακολουθία ανοιχτών διαστημάτων που καλύπτει το $[0, 1]$, τότε η πεπερασμένη ακολουθία $I_1, \ldots I_n$ επίσης καλύπτει το $[0, 1]$ για κάθε n.*

Απόδειξη. Έστω ότι το $S = \{I_1, I_2, I_3, \ldots\}$. Τότε από το θεώρημα ότι πεπερασμένα πολλά σύνολα των I_k καλύπτουν το $[0, 1]$. Για κάποιο n, αυτά τα I_k περιλαμβάνονται στην ακολουθία $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n$. □

2.9.5 Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Είδαμε, λοιπόν, ότι η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης δεν έχει "κενά". Έτσι, θα δείξουμε ότι σε ένα κλειστό διάστημα επίσης δεν υπάρχουν "κενά" στην αρχή ή στο τέλος.

Θεώρημα 2.7. *(θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής)*

Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$, τότε η f παίρνει στο $[0,1]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [0,1]$ τέτοια ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{για κάθε} \quad x \in [0,1].$$

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι η f είναι φραγμένη στο $[0,1]$. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι φραγμένη στο $[0,1]$, έτσι η f παίρνει αυθαίρετα μεγάλες θετικές και αρνητικές τιμές. Σε αυτή την περίπτωση η f είναι μη φραγμένη σε κάποιο μισό του $[0,1]$. Ως συνήθως, παίρνουμε το δεξί κομμάτι αυτού του μισού να είναι το $[\alpha_1, \beta_1]$ και επαναλαμβάνουμε το επιχείρημα (δηλαδή να περιορίσουμε το σύνολο προς το σημείο που δεν είναι φραγμένη η f.)

Αυτό, λοιπόν, μας δίνει μία άπειρη ακολουθία από κλειστά διαστήματα

$$[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset [\alpha_3, \beta_3] \supset \ldots,$$

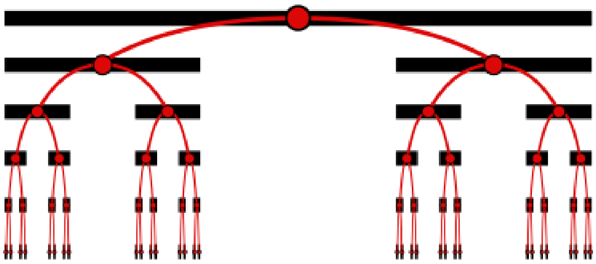
με την f να είναι μη φραγμένη στο $[\alpha_n, \beta_n]$. Αφού κάθε $[\alpha_n, \beta_n]$ έχει την μισή ακτίνα του προηγούμενου, τότε υπάρχει μοναδικό σημείο c το οποίο είναι κοινό σε όλα τα $[\alpha_n, \beta_n]$. Όλες οι τιμές του $[\alpha_n, \beta_n]$, αφού η f είναι συνεχής, για κατάλληλο $alpha_n, \beta_n$ είναι περίπου $f(c)$ κατά προσέγγιση $\pm\epsilon, \epsilon > 0$. Αυτό όμως σημαίνει ότι η f είναι *φραγμένη* στο $[\alpha_n, \beta_n]$ και έχουμε μία αντίφαση. Αυτή η αντίφαση μας δείχνει ότι η f είναι πράγματι φραγμένη στο $[0,1]$. Έτσι, από την πληρότητα του $\mathbb{R}$, υπάρχει ελάχιστο άνω φράγμα, ℓ για τις τιμές της f στο $[0,1]$.

Εάν το ℓ δεν είναι μία τιμή της f τότε η εξίσωση $\frac{1}{1-f(x)}$ είναι συνεχής και μη φραγμένη στο $[0,1]$, όπου μόλις δείξαμε ότι είναι αδύνατο. Έτσι, το ℓ είναι η μέγιστη τιμή M στο $[0,1]$. Όμοια μπορούμε να δείξουμε και την ύπαρξη της ελάχιστης τιμής m. □

2.9.6 Το σύνολο Cantor

Μία σημαντική κατασκευή που περιλαμβάνει ακολουθίες κιβωτισμένων διαστημάτων είναι το σύνολο του Cantor ή το δύο τρίτα σύνολο. Κατασκευάζεται, αφαιρώντας το μεσαίο τρίτο ένος τμήματος γραμμής και στην συνέχεια επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία με τα υπόλοιπα μικρότερα τμήματα. Τα σημεία του συνόλου του Cantor είναι εκείνα που είναι κοινά σε όλα τα σύνολα των κλειστών διαστημάτων που εμφανίζονται σε αυτή την άπειρη κατασκευή. Τα σύνολα των διαστημάτων που λαμβάνονται στα πρώτα έξι στάδια εμφανίζονται στο σχήμα 2.1. Τα σημεία του συνόλου Cantor αντιστοιχούν στα άπειρα μονοπάτια του δέντρου που φαίνονται στο σχήμα 2.2 , όπου ονομάζεται ένα ολοκληρωμένο δυαδικό δέντρο.

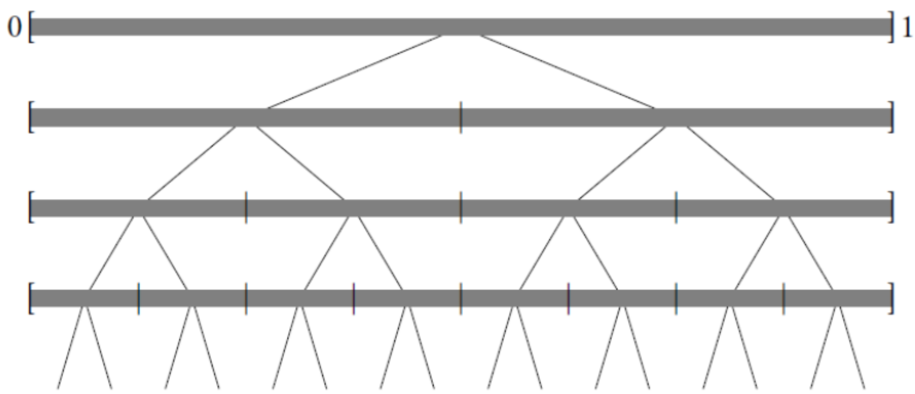
Σχήμα 2.1: *Πρώιμα στάδια κατασκευής ενός συνόλου Cantor*



Σχήμα 2.2: *Κατασκευάζοντας το σύνολο Cantor μέσω ενός δέντρου*

2.9.7 Δέντρα στην ανάλυση

Όπως ήδη θα έχετε παρατηρήσει πολλές από τις προηγούμενες αποδείξεις του κεφαλαίου 2.9 βασίζονται σε επαναλαμβανόμενες διχοτομήσεις κλειστών διαστημάτων και τον μετέπειτα προσδιορισμό κάποιων σημείων από κιβωτισμένες ακολουθίες διαστημάτων των οποίων τα μήκη τείνουν στο μηδέν. Το σύνολο όλων των διαστημάτων από επαναλαμβανόμενες διχοτομήσεις μπορεί να απεικονιστεί ως ένα δυαδικό δέντρο, όπως βλέπουμε στην επόμενη εικόνα.



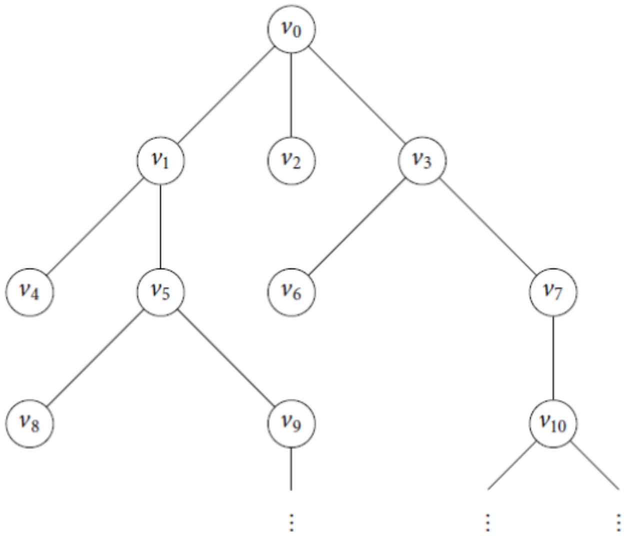
Σχήμα 2.3: *Πλήρες δυαδικό δέντρο διχοτομημένων διαστημάτων*

Αυτό το δέντρο έχει ολόκληρο το διάστημα (συνήθως το $[0, 1]$) ως την υψηλότερη κορυφή του και οι κορυφές κάτω από αυτό είναι τα υποδιαστήματα που λαμβάνονται από την διχοτόμηση. Έτσι κάθε κορυφή έχει δύο κορυφές κάτω από αυτή, γι' αυτό και το δέντρο ονομάζεται πλήρες δυαδικό δέντρο B. Τα σημεία του $[0, 1]$ αντιστοιχούν σε άπειρες κιβωτισμένες ακολουθίες υποδιαστημάτων και ως εκ τούτου σε άπειρα μονοπάτια στο B. Για παράδειγμα, το αριστερό άπειρο μονοπάτι στο δέντρο αντιστοιχεί στην ακολουθία

$$[0, 1] \supset [0, \frac{1}{2}] \supset [0, \frac{1}{4}] \supset [0, \frac{1}{8}] \supset, \ldots,$$

η οποία ορίζει το σημείο 0.

Στις παραπάνω αποδείξεις απευθυνόμαστε σε ειδικά επιχειρήματα για να βρούμε άπειρα μονοπάτια, αλλά υπάρχει ένα απλό γενικό κριτήριο για την ύπαρξη τους εξαιτίας του Kőnig (1927), όπου αφορά δέντρα με μικρή διακλάδωση . Ένα τέτοιο δέντρο T μπορεί να οριστεί ως μια γραφική παράσταση με υψηλότερη κορυφή το v_0 που συνδέεται με άλλες πεπερασμένες κορυφές $v_1, \ldots, v_n$ και γενικά ένα δέντρο ορίζεται ως μια κατασκευή που κάθε κορυφή v_m συνδέεται με πεπερασμένου πλήθους νέες κορυφές.



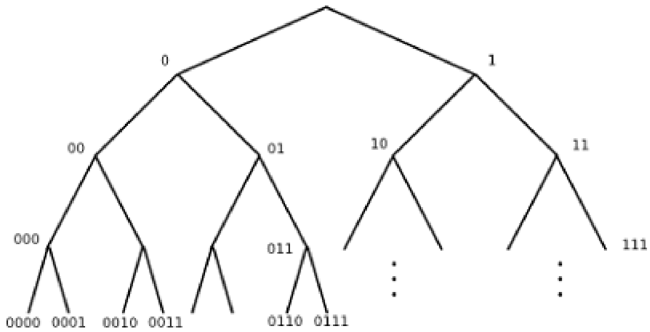
Σχήμα 2.4: *Ένα πεπερασμένα διακλαδούμενο δέντρο*

Το βασικό θεώρημα του Kőnig, το οποίο θα ονομάζουμε *το λήμμα του απείρου του Kőnig* ή *λήμμα του Kőnig*, λέει ότι *εάν ένα πεπερασμένο διακλαδικό δέντρο έχει άπειρα πολλές κορυφές, τότε έχει ένα άπειρο μονοπάτι*. Η απόδειξη του, που μοιάζει με την λογική των θεωρημάτων Bolzano-Weierstrass Heine-Borel, περιλαμβάνει επαναλαμβανόμενες διχοτομήσεις ενός απείρου συνόλου σε πεπερασμένα κομμάτια. Συγκεκριμένα, αφού το T έχει άπειρα πολλές κορυφές, μία από τις πεπερασμένα πολλές κορυφές που ξεκινά πο το v_0 οδηγεί σε ένα υποδέντρο T_1 με άπειρα πολλές κορυφές. Ομοίως, μία από τις πεπερασμένα πολλές κορυφές που ξεκινά από την υψηλότερη κορυφή του T_1 οδηγεί σε ένα υποδέντρο T_{12} του T_1 με άπειρα πολλές κορυφές. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία άπειρες φορές καταλήγουμε σε ένα άπειρο μονοπάτι στο T.

Το *ασθενές Kőnig λήμμα* είναι μία ειδική περίπτωση όπου το T είναι ένα υποδέντρο του ολοκληρωμένου δυαδικού δέντρου. Παρακάτω θα δούμε ότι το θεώρημα Bolzano-Weierstrass είναι ισοδύναμο σε ισχύ με το *ισχύρό Kőnig λήμμα*. Το ισχυρό Kőnig λήμμα είναι επίσης ισοδύναμο με πολλές ιδιότητες της πληρότητας του $\mathbb{R}$, όπως το ελάχιστο άνω φράγμα και το κριτήριο σύγκλισης του Cauchy. Έτσι, *τα δέντρα είναι η έννοια κλειδί* *στην ανάλυση*, γεγονός που δεν εκτιμήθηκε έως ότου ήρθαν στο φως τα ανάστροφα μαθηματικά.

Αριθμητικοποίηση των δέντρων

Είναι ξεκάθαρο ότι μόνο πεπερασμένου πλήθους κορυφές ενός δυαδικού δέντρου ή ενός πεπερασμένα διακλαδούμενου δέντρου είναι ένα πεπερασμένο πλήθος κορυφών μακρυά από την υψηλότερη κορυφή. Οπότε οι κορυφές μπορούν να απαριθμηθούν, απαριθμώντας αυτές που είναι μία κορυφή μακρυά από την υψηλότερη κορυφή και μετά αυτές που είναι δύο κορυφές μακρυά κοκ. Αυτό σημαίνει ότι τέτοια δέντρα μπορούν να κωδικοποιηθούν μέσω συνόλων των πραγματικών αριθμών και έτσι ώστε να μπορούν να μελετηθούν στο πλαίσιο της αριθμητικοποίησης. Το πλήρες δυαδικό δέντρο έχει κορυφές που κωδικοποιούνται πιο φυσιολογικά χρησιμοποιώντας δυαδικές ακολουθίες των 0 και 1.



Σχήμα 2.5: *Ονομάζοντας τις κορυφές ενός ολοκληρωμένου δυαδικού δέντρου*

Όπως βλέπουμε και στο παραπάνω σχήμα, η ρίζα του δυαδικού δέντρου κωδικοποιήθηκε από την κενή συμβολοσειρά, ενώ οι κορυφές που βρίσκονται μετά από αυτήν κωδικοποιήθηκαν με τα 0 και 1 αντίστοιχα. Γενικά, οι κορυφές που κρέμονται κάτω από μια κορυφή που έχει κωδικοποιηθεί με την συμβολοσειρά σ έχουν κωδικό αντίστοιχα $\sigma 0$ η αριστερή κορυφή και $\sigma 1$ η δεξιά. Ένα *δυαδικό δέντρο T* μπορεί τώρα να οριστεί ως ένα υποσύνολο του συνόλου των δυαδικών συμβολοσειρών το οποίο έχει την ιδιότητα ότι εάν το $\sigma 0 \in T$ ή $\sigma 1 \in T$ τότε $\sigma \in T$. Για παράδειγμα το σύνολο $T = \{\emptyset, 0, 1, 00, 01, 10, 010, 100, 101, \ldots\}$ πληρεί τον ορισμό που δώσαμε παραπάνω και άρα είναι ένα δυαδικό δέντρο. Η γραφική παράσταση του δίνεται στο σχήμα 2.5.

Κεφάλαιο 3

Υπολογισιμότητα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε μια κατασκευαστική προσέγγιση της ανάλυσης, χρησιμοποιώντας το σύστημα RCA. Τα αρχικά RCA σημαίνουν Recursive Comprehension Axiom ή αλλιώς Αξίωμα Αναδρομικής Συλλογής. Ο στόχος αυτού του αξιώματος είναι να αποδώσουμε τις βασικές έννοιες της ανάλυσης, δηλαδή τους πραγματικούς αριθμούς και τις πραγματικές συναρτήσεις, χρησιμοποιώντας τις υπολογίσιμες πράξεις των ρητών αριθμών.

Έτσι, λοιπόν, πριν συνεχίσουμε στο αξίωμα θα μελετήσουμε πρώτα τις υπολογίσιμες ακολουθίες και τα υπολογίσιμα σύνολα των ρητών αριθμών. Η υπολογισιμότητα είναι μια μη-συνηθισμένη μαθηματική διαδικασία, αφού χρησιμοποιείται περισσότερο ανεπίσημα. Πιο πολύ, λοιπόν, αναφέρεται στις καθημερινές δραστηριότητες, όπως είναι η σύνταξη μιας λίστας, παρά στην εφαρμογή ενός συγκεκριμένου ορισμού. Παρόλα αυτά υπάρχει ένας συγκεκριμένος ορισμός της υπολογισιμότητας, έτσι η ανεπίσημη περιγραφή της μπορεί να τυποποιηθεί.

Όταν, λοιπόν, χρησιμοποιούμε την ιδέα της υπολογισιμότητας στην ανάλυση, ο πιο κατάλληλος ορισμός του υπολογιστικά απαριθμήσιμου συνόλου είναι αυτός του Σ_1^0 συνόλου. Αυτή η συνοχή ανάμεσα στην ιδέα της υπολογισιμότητας και του Σ_1^0, υποδηλώνει ότι η ανάλυση και η υπολογισιμότητα έχουν μια κοινή αριθμητική βάση.

3.1 Υπολογισιμότητα και Churh's Thesis

Γύρω στο 1900, οι μαθηματικοί ξεκίνησαν να προβληματίζονται για την ύπαρξη *αλγορίθμων*. Ένα δημοφιλής παράδειγμα ήταν το " δέκατο πρόβλημα του Hilbert ", όπως ονομάστηκε, αφού ήταν δέκατο στην λίστα των προβλημάτων όπου ο Hilbert παρουσίασε στο Διεθνές Κογκρέσο των Μαθηματικών στο Παρίσι το 1900. Το δέκατο πρόβλημα παρουσιάστηκε ώς εξής:

Με δεδομένη μια Διοφαντική εξίσωση με οποιονδήποτε αριθμό άγνωστων ποσοτήτων και με ορθολογικούς ακέραιους αριθμητικούς συντελεστές: Να επινοηθεί μια διαδικασία, σύμφωνα με την οποία μπορεί να προσδιοριστεί, σε έναν πεπερασμένο αριθμό πράξεων, εάν η εξίσωση είναι επιλύσιμη σε λογικούς ακέραιους αριθμούς.

Δηλαδή να ευρεθεί ένας αλγόριθμος που δεδομένου ενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές να μπορεί να αποφασίσει αν το πολυώνυμο έχει ακέραιες ρίζες.

Μία τέτοια εξίσωση είναι της μορφής

$D(x_1, ..., x_n) =$,

όπου D πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές λέγεται Διοφαντική προς τιμήν του Έλληνα (Αλεξανδρινού) μαθηματικού Διόφαντου, που έζησε τον 3ο αιώνα μ.Χ.

Η ανακάλυψη ίσως ενός τέτοιου αλγορίθμου θα ήταν μια πιθανή λύση στο δέκατο πρόβλημα του Hilbert, αλλά όπως αποδείχτηκε αργότερα μία τέτοια λύση δεν υπάρχει, αφού δεν υπάρχει κανένας αλγόριθμος που να "αποφασίζει", για κάποιο τυχαίο πολυώνυμο $p(x, y, z, \dots)$, εάν η εξίσωση $p(x, y, z, \dots) = 0$ έχει λύση για τους ακεραίους $x, y, z, \dots$.

Το αποτέλεσμα σύμφωνα με τον Matijasevic (1917), θα μπορούσε να αποδειχθεί μόνο όταν βρεθεί ο ορισμός του αλγορίθμου κάτι το οποίο δεν ήταν γνωστό το 1900. Οι πρώτοι ορισμοί της έννοιας του αλγορίθμου, ανακαλύφθηκαν από τον Post γύρω στο 1920 σε μία ανάλυση των αποδεικτικών διαδικασιών της μαθηματικής λογικής. Αλλά ο Post απέφυγε να τους δημοσιεύσει γιατί φαινόταν αδύνατο να αποδείξει ότι η αόριστη έννοια του αλγορίθμου ή του υπολογισμού, είχε συλληφθεί από τους ίδιους του, τους ορισμούς. Οι μαθηματικοί σιγουρεύτηκαν ότι η έννοια του αλγορίθμου ορίστηκε, αφού ο Church και ο Turing ανεξάρτητα ο ένας τον άλλον, έθεσαν ορισμούς του αλγορίθμου ισοδύναμους μεταξύ τους αλλά και με τους ορισμούς του Post.

Αργότερα θα δοθεί ένας ακριβής ορισμός της υπολογισιμότητας, τώρα είναι σημαντικό να καταλάβουμε τα γενικά χαρακτηριστικά του οποιουδήποτε ορισμού της υπολογισιμότητας:

1. Κάθε αλγόριθμος μπορεί να γραφεί ως μια πεπερασμένη ακολουθία από σύμβολα σε ένα πεπερασμένο αλφάβητο.

2. Κάθε αλγόριθμος λαμβάνει εισόδους, οι οποίοι είναι επίσης πεπερασμένες σειρές συμβόλων (συμβολοσειρές) από ένα πεπερασμένο αλφάβητο.

3. Σε κάθε είσοδο, ο αλγόριθμος εκτελεί *μια σειρά από βήματα*, πάντα τα ίδια βήματα για την ίδια είσοδο. Η ακολουθία των βημάτων μπορεί να ονομαστεί και *υπολογισμός* του αλγορίθμου για την δοσμένη είσοδο.

4. Εάν ο υπολογισμός τερματίσει, υπάρχει μια συμβολοσειρά *εξόδου*, η οποία μπορεί να ερμηνευθεί ως συνάρτηση της συμβολοσειράς εισόδου.

5. Όταν οι αλγόριθμοι δίνονται ως σειρές συμβόλων έχουν ενιαία ερμηνεία, έτσι υπάρχει *ένας καθολικός αλγόριθμος* ο οποίος δεδομένου ενός αλγορίθμου A με είσοδο I θα αναπαράγει τον υπολογισμό ενός αλγορίθμου A με είσοδο I.

Δύο από τους πιο σημαντικούς τύπους αλγορίθμων είναι:

1. Εκείνος όπου οι συμβολοσειρές εισόδου και εξόδου είναι αριθμοί, σε αυτή την περίπτωση ο αλγόριθμος ορίζει *μια υπολογίσιμη συνάρτηση* (θετικών ακεραίων).

2. Εκείνος όπου οι συμβολοσειρές εισόδου σχηματίζουν ένα σύνολο ερωτήσεων P με απαντήσεις ναι /όχι και οι συμβολοσειρές εξόδου είναι οι λέξεις ΝΑΙ ή ΌΧΙ.

> Σε αυτή την περίπτωση έχουμε έναν αλγόριθμο για το πρόβλημα P. Ο αλγόριθμος αυτός επιλύει το P εάν δίνει την σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση του P. Επίσης, το σύνολο των ερωτήσεων με απάντηση ναι είναι ένα *υπολογίσιμο σύνολο*.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι δεν απαιτείται πάντα ο υπολογισμός ενός αλγορίθμου για να τερματίσει κάθε είσοδος. Το να αποφασίζουμε εάν ένας αλγόριθμος θα τερματίσει (να δώσει κάποια απάντηση) για την οποιαδήποτε είσοδο είναι από μόνο του ένα σημαντικό πρόβλημα, στην πραγματικότητα είναι ένα πρόβλημα που κανένας αλγόριθμος δεν μπορεί να λύσει. Έτσι εάν προσπαθήσουμε να περιοριστούμε την κλάση των αλγορίθμων εκείνων που θα τερματίσουν ανεξάρτητα από την είσοδο, θα είναι ατελής. Ο μόνος τρόπος να συλλάβουμε την έννοια του αλγορίθμου επακριβώς είναι να συμπεριλάβουμε αλγορίθμους που μερικές φορές δεν τερματίζουν.

Προκύπτει ότι οι συναρτήσεις που υπολογίζονται από αλγορίθμους περιλαμβάνουν κάποιες των οποίων το πεδίο ορισμού είναι μόνο μέρος του $\mathbb{N}$. Για αυτό τον λόγον ονομάζονται *μερικώς υπολογίσιμες συναρτήσεις*. Ο όρος αυτός συνήθως αναφέρεται σε εκείνες τις συναρτήσεις που το πεδίο ορισμού τους είναι μόνο ένα μέρος του $\mathbb{N}$. Κάποιες από αυτές τις ονομάζουμε *ολικά υπολογίσιμες συναρτήσεις* όταν θέλουμε να τονίσουμε ότι αυτές ορίζονται για όλους τους θετικούς ακεραίους.

Η υπόθεση ότι οι διαφορετικοί ορισμοί ενός αλγορίθμου από τους Post, Church και Turing συλλαμβάνουν την άτυπη έννοια ενός αλγορίθμου ονομάζεται *θέση του Church* αφού προτάθηκε από τον ίδιο το 1936. Όπως παρατηρήθηκε, η υπόθεση αυτή χρειάζεται όταν θέλουμε να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός αλγορίθμου. Η θέση του Church μας επιτρέπει επίσης να είμαστε πιο ελαστικοί όταν αποδεικνύουμε την ύπαρξη ενός αλγορίθμου. Εάν μπορούμε να περιγράψουμε έναν αλγόριθμο με μη-αυστηρό τρόπο, τότε μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να περιγραφεί αυστηρά.

Παρατηρούμε, λοιπόν, μόνο μία ελαστική αλλά ταυτόχρονα χρήσιμη σχέση αλγορίθμων και αριθμών: *υπάρχει μία υπολογίσιμη λίστα* από $A_1, A_2, A_3, \ldots$ όλων των αλγορίθμων, έτσι ώστε κάθε αλγόριθμος να αντιστοιχίζεται με έναν αριθμό. Αφού κάθε αλγόριθμος αντιπροσωπεύεται από μία συμβολοσειρά γραμμάτων ενός πεπερασμένου αλφαβήτου, αρκεί για να απαριθμήσουμε όλες τις συμβολοσειρές.

3.2 Το πρόβλημα του τερματισμού

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα που αποτελείται από τις ακόλουθες ερωτήσεις, το οποίο το ονομάζουμε πρόβλημα της αυτο-εξέτασης.

Q_n: Μπορεί ο αλγόριθμος A_n με είσοδο n να δίνει έξοδο την απάντηση ΟΧΙ;

Ας υποθέσουμε ότι το A είναι ένας αλγόριθμος που λύνει το πρόβλημα. Είναι ορθό να δεχτούμε αντί για την ερώτηση Q_n να έχουμε ως είσοδο για το A τον αριθμό n, αφού η ερώτηση Q_n μπορεί να κωδικοποιηθεί από τον αριθμό n. Έτσι, για κάθε είσοδο n, το A έχει έξοδο το ΝΑΙ εάν το A_n με είσοδο n έχει έξοδο το ΟΧΙ και αντίστροφα, εάν το A_n έχει έξοδο το ΝΑΙ.

Τώρα, αφού το A είναι ένας αλγόριθμος, έχουμε ότι $A = A_m$ για κάποιο αριθμό m. Τι μπορεί να δώσει το A_m με είσοδο το m; Εάν το A_m έχει έξοδο το ΟΧΙ τότε η απάντηση στο ερώτημα Q_m είναι ΝΑΙ, έτσι το A_m έχει έξοδο ΝΑΙ, το οποίο αποτελεί αντίφαση. Υπάρχει μια παρόμοια αντίφαση εάν η απάντηση στο ερώτημα Q_m είναι ΟΧΙ, ο αλγόριθμος $A = A_m$ δεν μπορεί να απαντήσει ορθά στην ερώτηση Q_m. Το A αποτυγχάνει να λύσει το πρόβλημα της αυτο-εξέτασης και έχουμε καταλήξει σε άτοπο.

Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται πρόβλημα της αυτο-εξέτασης γιατί θέλουμε να μάθουμε τι συμβαίνει όταν ένας αλγόριθμος εφαρμόζεται στον ίδιο του τον αριθμό, όπου είναι ουσιαστικά ο ίδιος ο αλγόριθμος.

Το μόνο πράγμα που μας αποτρέπει από το να γνωρίζουμε την απάντηση στο ερώτημα Q_n είναι το να γνωρίζουμε εάν το A_n τερματίζει σε μία γνωστή είσοδο. Το τελευταίο ονομάζεται *πρόβλημα του τερματισμού* και είναι μη επιλύσιμο διότι διαφορετικά θα είχαμε λύση για το πρόβλημα της αυτο-εξέτασης.

Το πρόβλημα του τερματισμού πρωτοαποδείχτηκε να είναι μη επιλύσιμο από τον Turing(1936). Όπως θα δούμε, η ιδέα της αυτο-αναφοράς είναι το κλειδί σε πολλές αποδείξεις της μη-υπολογισιμότητας ή μη-επιλυσιμότητας.

3.3 Υπολογιστικά απαριθμήσιμα σύνολα

Στενά συνδεδεμένα με την έννοια της υπολογίσιμης συνάρτησης και τα επιλύσιμα προβλήματα είναι και η έννοια του υπολογιστικά απαριθμήσιμου συνόλου. Ανεπίσημα, ένα σύνολο X ονομάζεται υπολογιστικά απαριθμήσιμο εάν υπάρχει ένας υπολογισμός ο οποίος παράγει μία λίστα $x_1, x_2, x_3, \ldots$ από όλα τα στοιχεία του X. Υπάρχουν αρκετοί ισοδύναμοι τρόποι για να ορίσουμε αυτού του είδους τα σύνολα X με την βοήθεια της έννοιας της υπολογίσιμης συνάρτησης.

1. Το X (εάν δεν είναι κενό) είναι το πεδίο τιμών μίας ολικής υπολογίσιμης συνάρτησης f της οποίας το πεδίο ορισμού είναι οι θετικοί ακέραιοι. Σε αυτή την περίπτωση δημιουργείται μία λίστα από στοιχεία του X, $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots.$

2. Εάν το X είναι άπειρο, τότε το X είναι το πεδίο τιμών μίας μία-προς-μία ολικά υπολογίσιμης συνάρτησης g της οποίας το πεδίο ορισμού είναι οι θετικοί ακέραιοι. Υπολογίζουμε $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ όπως στο προηγούμενο ορισμό, αλλά δεν βάζουμε την $f(n)$ στην λίστα μέχρι να ελεγχθεί ότι η $f(n)$ διαφέρει από όλες τις τιμές της f που έχουν ήδη μπει στη λίστα. Έτσι, το $g(m)$ είναι το m-οστό στοιχείο που βάζουμε στην λίστα.

3. Το X είναι το πεδίο ορισμού μίας μερικώς υπολογίσιμης συνάρτησης Φ, όπου Φ υπολογίζεται από τον ακόλουθο αλγόριθμο. Δοσμένης μίας εισόδου k, υπολογίζουμε τις συναρτήσεις $f(1), f(2), f(3), \ldots$ διαδοχικά. Εάν ένα από αυτά βρεθεί να είναι το k τότε $\Phi(k) = 1$.

   Αντιστρόφως, εάν η Φ είναι οποιαδήποτε μερική υπολογίσιμη συνάρτηση, τα στοιχεία του πεδίου ορισμού της μπορούν να απαριθμηθούν από έναν υπολογισμό σε στάδια, όπως ακολούθως. Στο στάδιο n, εκτελούμε n βήματα από κάθε υπολογισμό των $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$. Εάν ο υπολογισμός κάποιου $\Phi(k)$ σταματήσει σε κάποιο στάδιο, τότε τοποθετούμε το k στην λίστα.

Στους τρεις ορισμούς που είδαμε τα στοιχεία $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ή $f(1), f(2), f(3), \ldots$ δεν θεωρούνται να είναι θετικοί ακέραιοι. Μπορούν να είναι ρητοί αριθμοί, ή οποιαδήποτε άλλα αντικείμενα που μπορούν να ονομαστούν από λέξεις ενός πεπερασμένου αλφαβήτου. Παρόλα αυτά, χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι είναι θετικοί ακέραιοι, αφού οι λέξεις ενός πεπερασμένου αλφαβήτου μπορούν να κωδικοποιηθούν από θετικούς ακέραιους, απαριθμώντας τους με σειρά μήκους και αλφαβητική σειρά. Από εδώ και πέρα θα θεωρούμε, εκτός εάν δηλωθεί διαφορετικά, ότι τα στοιχεία των υπολογιστικά αριθμήσιμων συνόλων είναι θετικοί ακέραιοι.

Μεταξύ των υπολογιστικά απαριθμήσιμων συνόλων X είναι εκείνα για τα οποία το πρόβλημα μέλους είναι επιλύσιμο. Δηλαδή, υπάρχει ένας αλγόριθμος ο οποίος αποφασίζει, για κάθε θετικό ακέραιο k, εάν $k \in X$. Αυτό το σύνολο ονομάζεται *υπολογίσιμο*. Ισοδύναμοι ορισμοί με το υπολογίσιμο σύνολο είναι οι παρακάτω:

1. Η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου X, δηλαδή η

$$x(n) = \begin{cases} 1 & : \text{εάν } n \in X \\ 0 & : \text{εάν } n \notin X \end{cases}$$

   είναι υπολογίσιμη.

2. Εάν είναι άπειρο, το X είναι το πεδίο τιμών οποιαδήποτε *αύξουσας* υπολογίσιμης συνάρτησης f των θετικών ακεραίων.

3. Το σύνολο X και το συμπλήρωμα του $-$ είναι και τα δύο υπολογιστικά απαριθμήσιμα.

Όλα αυτά τα αποτελέσματα εμφανίστηκαν στο πρώτο άρθρο για τα υπολογιστικά απαριθμήσιμα σύνολα του Post (1944). Ο Post βρήκε παραδείγματα από υπολογιστικά απαριθμήσιμα σύνολα που δεν είναι υπολογίσιμα. Το βασικό του παράδειγμα κατασκευάστηκε από την διαφωνία της "αυτο-αναφοράς", όπως αυτό που χρησιμοποιήθηκε για να αποδείξει την μη-επιλυσιμότητα του προβλήματος της αυτο-εξέτασης.

Για να περιγράψουμε το βασικό παράδειγμα του Post θα εισάγουμε ένα συμβολισμό για τις μερικά υπολογίσιμες συναρτήσεις. Δοσμένης μιας απαρίθμησης $A_1, A_2, A_3, \ldots$ των αλγορίθμων, έστω Φ_k μια μερικά υπολογίσιμη συνάρτηση των θετικών ακεραίων που υπολογίζονται από τον αλγόριθμο A_k. Η τιμή της $\Phi_k(n)$ είναι η έξοδος (εάν βέβαια υπάρχει) όταν στον αλγόριθμο A_k δίνεται ως είσοδος ο αριθμός για το n.

Από την ιδιότητα της καθολικότητας των αλγορίθμων όπου αναφέραμε προηγουμένως στο 5 χαρακτηριστικό της έννοιας της υπολογισιμότητας, το $\Phi_k(n)$ είναι υπολογίσιμο σαν συνάρτηση των δύο μεταβλητών k και n. Για να υπολογίσουμε το $\Phi_k(n)$ δημιουργείται μία λίστα από αλγορίθμους μέχρι το A_k, μετά τρέχουμε το A_k με είσοδο n. Τώρα θα δούμε το παράδειγμα του Post.

Υπολογιστικά απαριθμήσιμο αλλά μη-υπολογίσιμο σύνολο. Εάν $D = \{k : \Phi_k(n) = 0\}$ τότε το D είναι υπολογιστικά απαριθμήσιμο αλλά μη-υπολογίσιμο σύνολο.

Απόδειξη. Αφού το $\Phi_k(n)$ είναι μια μερικά υπολογίσιμη συνάρτηση του k και του n, $\Phi_k(n)$ είναι αντιστοίχως μία μερικά υπολογίσιμη συνάρτηση. Έτσι, το D είναι υπολογιστικά απαριθμήσιμο: καταγράφουμε σε μία λίστα τα στοιχεία του D στον υπολογισμό, τα οποία, στο στάδιο n, κάνουν n βήματα στους υπολογισμούς $\Phi_1(1), \Phi_2(2), \ldots, \Phi_n(n)$ και καταγράφουμε σε μία λίστα όλα τα k σε κάθε στάδιο όπου $\Phi_k(k) = 0$.

Τώρα ας υποθέσουμε, ότι το D είναι υπολογίσιμο. Τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση

$$d(m) = \begin{cases} 1 & : \text{εάν } m \in D \\ 0 & : \text{εάν } m \notin D \end{cases}$$

είναι υπολογίσιμη και $d = \Phi_k$ για κάποιο k. Τότε έχουμε την αντίφαση

$$k \notin D \Leftrightarrow d(k) = 0 \Leftrightarrow \Phi_k(k) = 0 \Leftrightarrow k \in D$$

. Άτοπο, άρα το D είναι μη-υπολογίσιμο.

□

Η ύπαρξη ενός υπολογιστικά απαριθμήσιμου αλλά μη-υπολογίσιμου συνόλου επηρεάζει τη χρήση της ανάλυσης στο σύστημα RCA_0, όπου δέχεται μόνο τα υπολογιστικά σύνολα. Πολλές φυσικά προκύπτουσες ακολουθίες $r_1, r_2, r_3, \ldots$ (από ρητούς αριθμούς) είναι υπολογιστικά απαριθμήσιμες αλλά όχι απαραίτητα υπολογίσιμες. Για να ”παρουσιάσουμε” μια τέτοια ακολουθία στο RCA_0, την κωδικοποιούμε από το σύνολο των ζευγών $S = \{<n, r_n> : n \in \mathbb{N}\}$. Αφού η $r_1, r_2, r_3, \ldots$ είναι υπολογιστικά απαριθμήσιμη υπάρχει μία υπολογίσιμη συνάρτηση f με $f(n) = r_n$. Το σύνολο S των ζευγών είναι υπολογίσιμο αφού μπορούμε να αποφασίσουμε εάν ένα ζεύγος της μορφής $<n, r_n>$ είναι στο S υπολογίζοντας το $f(n)$ και ελέγχοντας εάν είναι ίσα με το r. Το να υπολογίσουμε *το όριο* της ακολουθίες $r_1, r_2, r_3, \ldots$ είναι μία άλλη ιστορία.

3.4 Υπολογίσιμες Ακολουθίες στην Ανάλυση

Τα υπολογιστικά αντικείμενα είναι τα ”πιο συμπαγή” άπειρα αντικείμενα, έτσι θα ήταν τέλειο εάν η ανάλυση είχε να κάνει μόνο με υπολογίσιμους πραγματικούς αριθμούς και υπολογίσιμες συναρτήσεις. Οι γνωστοί μας άρρητοι αριθμοί όπως $\sqrt{2}, \pi$ και e είναι υπολογίσιμοι, υπό την έννοια ότι το n-οστό ψηφίο στην δεκαδική τους ανάπτυξη είναι μία υπολογίσιμη συνάρτηση του n. Είναι εύκολο, όμως, να δούμε ότι η ανάλυση δεν μπορεί να είναι εντελώς υπολογίσιμη. Εάν πάρουμε μία ακολουθία ρητών αριθμών $r_1, r_2, r_3, \ldots$ για την οποία το r_n να είναι υπολογίσιμη συνάρτηση του n, τότε έχουμε:

Υπολογίσιμη ακολουθία ρητών με ένα όριο μη υπολογίσιμο. Υπάρχει μία υπολογίσιμη ακολουθία ρητών με όριο του οποίου το n-οστό δεκαδικό ψηφίο δεν είναι μία υπολογίσιμη συνάρτηση του n.

Απόδειξη. Έστω f μία μια-προς-μια ολικά υπολογίσιμη συνάρτηση με πεδίο τιμών το D, όπου D είναι ένα υπολογιστικά απαριθμήσιμο αλλά μη-υπολογίσιμο σύνολο. Έτσι έχουμε μια υπολογίσιμη ακολουθία $r_1, r_2, r_3, \ldots$ ρητών αριθμών r_n, όπου

$$r_n = \Sigma_{i=1}^{n} 2^{-f(i)}$$

Πράγματι, το r_n έχει ένα πεπερασμένο δυαδικό ανάπτυγμα με το 1 να είναι στις θέσεις $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ και 0 αλλού. Το δυαδικό ανάπτυγμα του ορίου έχει 1 στην k-οστή θέση για $k \in D$ και 0 αλλού, οπότε αυτό το δυαδικό ανάπτυγμα κωδικοποιεί την χαρακτηριστική συνάρτηση d του D. Ξέρουμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση του D είναι μη-υπολογίσιμη, οπότε ούτε το δυαδικό ανάπτυγμα του ορίου είναι υπολογίσιμο. □

Το παράδειγμα αυτό στην πραγματικότητα μας δείχνει ότι μια υπολογίσιμη *αύξουσα* ακολουθία ρητών αριθμών μπορεί να μην έχει ένα υπολογίσιμο ελάχιστο άνω φράγμα, αφού είναι προφανές από τον ορισμό του r_n ότι $r_{n+1} > r_n$.

Το παραπάνω παράδειγμα μας δείχνει ότι η αρχή του ελαχίστου άνω φράγματος *δεν είναι αποδείξιμη* στο RCA_0. Μπορούμε να κωδικοποιήσουμε τις υπολογίσιμες ακολουθίες χρησιμοποιώντας υπολογίσιμα ζεύγη $<r, r_n>$, τα οποία ανήκουν στο μοντέλο RCA_0, όπου θα κατασκευάσουμε πιο μετά, του οποίου τα σύνολα είναι όλα εκείνα που είναι υπολογίσιμα. Αλλά το οριακό σημείο της ακολουθίας, που δεν είναι υπολογίσιμο, δεν ανήκει στο μοντέλο αυτό και έτσι δεν ικανοποιεί την πρόταση ότι κάθε φραγμένη ακολουθία έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα.

3.5 Υπολογίσιμο δέντρο με μη-υπολογίσιμο μονοπάτι

Είδαμε στο κεφάλαιο 2 ότι πολλά βασικά αποτελέσματα της ανάλυσης προκύπτουν από το ασθενές λήμμα του Kőnig, δηλαδή ότι κάθε άπειρο δυαδικό δέντρο έχει ένα άπειρο δυαδικό μονοπάτι. Αυτά τα αποτελέσματα είναι "προβληματικά" στην υπολογίσιμη ανάλυση και στην πραγματικότητα ένα νέο αξίωμα χρειάζεται για να τα αποδείξουμε, επειδή ένα υπολογίσιμο άπειρο δέντρο δεν ανάγκη να έχει κάποιο υπολογίσιμο άπειρο μονοπάτι. Θα δώσουμε ένα τέτοιο παράδειγμα.

Πρώτα θα κατασκευάσουμε ένα ζεύγος από υπολογιστικά απαριθμήσιμα σύνολα A, B, τα οποία είναι *υπολογιστικά αδιαχώριστα*. Μία υπολογίσιμη συνάρτηση f *διαχωρίζει* τα σύνολα A και B εάν η f παίρνει τις τιμές 0 και 1 και

$$f(n) = \begin{cases} 1 & : \text{εάν } n \in A \\ 0 & : \text{εάν } n \in B \end{cases}$$

Ορίζουμε A και B χρησιμοποιώντας την απαρίθμηση των υπολογιστικά μερικών συναρτήσεων $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots$, δηλαδή:

$$A = \{K : \Phi_k(k) = 0\}$$

$$B = \{K : \Phi_k(k) = 1\}$$

Αυτά τα σύνολα αποφεύγουν κάθε υπολογίσιμη συνάρτηση Φ που προσπαθεί να τα διαχωρίσει. Κάθε υπολογίσιμη συνάρτηση $f = \Phi_k$ για κάποιο k, έτσι εάν υποθέσουμε ότι η f διαχωρίζει το A από το B έχουμε

$$\Phi_k(k) = 0 \Rightarrow k \in B \Rightarrow \Phi_k(k) = 1$$

$$\Phi_k(k) = 1 \Rightarrow k \in A \Rightarrow \Phi_k(k) = 0$$

Έτσι, η τιμή της $\Phi_k(k)$ είναι αντιφατική και ως αποτέλεσμα καμία υπολογίσιμη συνάρτηση f δεν διαχωρίζει το A από το B.

Χρησιμοποιούμε τα A, B για να κατασκευάσουμε ένα άπειρο δυαδικό δέντρο T, του οποίου το άπειρο μονοπάτι διαχωρίζει το A από το B, όπου θεωρούμε τα μονοπάτια ως ακολουθίες των 0 και 1. Οπότε τα άπειρα μονοπάτια είναι μη-υπολογίσιμα.

Υπολογίσιμο δέντρο με μη-υπολογίσιμο μονοπάτι. Υπάρχει ένα άπειρο δυαδικό δέντρο T, οι κορυφές του οποίου φτιάχνουν ένα υπολογίσιμο σύνολο, αλλά των κορυφών όλα τα άπειρα μονοπάτια διαχωρίζουν τα σύνολα A και B.

3.6 Υπολογισιμότητα και μη-πληρότητα

Η κεντρική ιδέα των ανάστροφων μαθηματικών βασίζεται στην *αναζήτηση* των σωστών αξιωμάτων για την απόδειξη σημαντικών θεωρημάτων αλλά η δευτερεύουσα ιδέα είναι η ”αδυναμία” μερικών αξιωματικών συστημάτων να αποδείξουν κάποια θεωρήματα. Στην τελική, εάν υπήρχε ένα προφανές αξιωματικό σύστημα για να αποδείξουμε όλα τα θεωρήματα τότε το ερώτημα περί ”σωστών αξιωμάτων” μετά βίας θα προέκυπτε. Το ερώτημα είναι αναπόφευκτο επειδή τα αξιωματικά συστήματα είναι *από μόνα τους* ημιτελής. Κάθε σταθερό αξιωματικό σύστημα στα μαθηματικά θα αποτύχει να αποδείξει κάποια θεωρήματα, έτσι είμαστε δεσμευμένοι στο να χρειαζόμαστε νέα αξιώματα ώστε να αποδείξουμε κάποια θεωρήματα που δεν διαθέτουν απόδειξη.

Η μη-πληρότητα είναι στενά συνδεδεμένη με την έννοια του υπολογισμού. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε ένα φορμαλιστικό σύστημα ώστε να είναι ένας αλγόριθμος που υπολογιστικά απαριθμεί θεωρήματα. Αυτό καλύπτει κάθε αξιωματικό σύστημα που χρησιμοποιούμε και κάθε απλό σύστημα παραγωγικών θεωρημάτων που μπορεί λογικά να ισχυριστεί ότι είναι επίσημο.

Είναι εύκολο τώρα να δούμε πως οι μη-αποδείξιμες προτάσεις ισχύουν μέσω των υπολογιστικά απαριθμήσιμων αλλά μη-υπολογίσιμων συνόλων D. Αφού το D είναι υπολογιστικά απαριθμήσιμο το συμπλήρωμα του δεν είναι. Έτσι, δεν μπορούμε υπολογιστικά να απαριθμήσουμε όλες τις προτάσεις της μορφής ”$n \notin D$”. Αλλά ένα φορμαλιστικό σύστημα, εξ'ορισμού υπολογιστικά παράγει θεωρήματα, έτσι δεν υπάρχει φορμαλιστικό F όπου τα θεωρήματα να περιλαμβάνουν όλες τις αληθινές προτάσεις της μορφής ”$n \notin D$ (εκτός εάν το F είναι *αδύναμο* σε ισχύ και παράγει κάποιες ψευδείς προτάσεις). Εάν ερμηνεύσουμε την έννοια του φορμαλιστικού συστήματος ευρέως -ως μια μηχανή που παράγει θεωρήματα - η μη-πληρότητα των ισχυρών φορμαλιστικών συστημάτων είναι μία σχεδόν προφανής συνέπεια της ύπαρξης του συνόλου D. Η μη-πληρότητα σε αυτή την γενική μορφή ανακαλύφθηκε από τον Post την περίοδο του 1920, ο οποίος δημοσιοποίησε το εγχείρημα του στην ερεύνα του με όνομα Post

(1944).

Η μη-πληρότητα επανήλθε στην δημοσιότητα από τον Gödel (1931) από ένα πιο τεχνικό εγχείρημα αλλά σε ισχυρότερη μορφή: ότι τα φορμαλιστικά συστήματα για την ”αριθμητική”, όπως το *PA*, είναι ατελές. Η μη-πληρότητα του Gödel προέρχεται από την αριθμητικοποίηση του υπολογισμού του Post. Το αποτέλεσμα της αριθμητικοποίησης είναι ότι προτάσεις που αφορούν τα υπολογιστικά απαριθμήσιμα σύνολα μπορούν να μεταφραστούν σε προτάσεις στην γλώσσα PA. Έτσι, αντί για την εύρεση αποδείξιμων προτάσεων της μορφής ”$n \notin D$”, βρίσκουμε μη-αποδείξιμες προτάσεις για την πρόσθεση ή τον πολλαπλασιασμό των πραγματικών αριθμών.

Το θεώρημα του Gödel αποκαλύπτει ότι η μη-πληρότητα υπάρχει σε ένα πιο πρώιμο στάδιο, αλλά οι μη-αποδείξιμες προτάσεις που εκτιμήθηκε από την κατασκευή του δεν είναι εγγενώς ενδιαφέροντες.

3.7 Υπολογισιμότητα και Ανάλυση

Ενδιαφέροντες προτάσεις χωρίς απόδειξη εμφανίζονται όταν επεκτείνουμε την PA σε ένα σύστημα της ανάλυσης παρουσιάζοντας μεταβλητές για σύνολα φυσικών αριθμών. Τότε είναι πιθανόν δυνατό να μιλήσουμε για άπειρες ακολουθίες και συνεχείς συναρτήσεις, ώστε να αναρωτηθούμε ποια θεωρήματα για αυτά είναι αποδείξιμα. Η απάντηση εξαρτάται από το ποιο σύστημα *υπαρξιακών αξιωμάτων για σύνολα* υιοθετούμε.

Το απλούστερο σύστημα υπαρξιακών αξιωμάτων για σύνολα λέει ότι τα υπολογίσιμα σύνολα φυσικών αριθμών υπάρχουν. Η αριθμητικοποίηση του υπολογισμού μας δείχνει ότι τα υπολογίσιμα σύνολα έχουν μια φυσική περιγραφή στην γλώσσα PA: είναι σύνολα όπου και τα δύο Σ^0_1 και Π^0_1 ορίζονται. Έτσι, αυτό το σύστημα υπαρξιακών αξιωμάτων για σύνολα είναι μια φυσική προσθήκη στην PA, που δίνει το σύστημα RCA_0 της υπολογίσιμης ανάλυσης. Μπορούμε να δούμε αμέσως ότι εάν μόνο τα υπολογίσιμα σύνολα χρειάζονται για να υπάρχουν τα συστήματα υπαρξιακών αξιωμάτων για σύνολα, τότε το επακόλουθο αξιωματικό σύστημα δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη των μη-υπολογίσιμων συνόλων όπως το *D*. Πόσο μάλλον, δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη ενός ορίου για κάθε μονότονη φραγμένη ακολουθία ρητών. Έτσι, έχουμε μια φυσική περίπτωση μη-πληρότητας: το θεώρημα της μονότονης σύγκλισης, που λέει ότι κάθε φραγμένη ακολουθία έχει ένα όριο, δεν είναι αποδείξιμο στην υπολογίσιμη ανάλυση.

Αναπτύσσουμε το σύστημα RCA_0 της υπολογίσιμης ανάλυσης παρακάτω. Παρόλο την προφανή μη-πληρότητα του - η εξ'αιτίας αυτής- το RCA_0 είναι ένα χρήσιμο σύστημα. Μπορεί να αποδείξει μόνο μερικά σημαντικά θεωρήματα της ανάλυσης, όπως είναι το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, αλλά είναι ικανό να αποδείξει *ισοδυναμίες* μεταξύ θεωρημάτων όπου το RCA_0 δεν μπορεί να αποδείξει απευθείας. Για παράδειγμα, το RCA_0 μπορεί να αποδείξει ότι το θεώρημα της μονότονης σύγκλισης είναι ίσο με το θεώρημα Bolzano-Weierstrass.

Έτσι, το RCA_0 είναι μία ιδανική βασική θεωρία για να μελετήσουμε θεωρήματα της ανάλυσης. Συγκεκριμένα, επειδή το RCA_0 δεν είναι ικανό να αποδείξει συγκεκριμένα θεωρήματα, είναι ικανό να συγκρίνει σε ισχύ τα θεωρήματα βρίσκοντας το σύστημα υπαρξιακών αξιωμάτων για σύνολα που είναι ισοδύναμο.

3.8 Αριθμητικοποιώντας την υπολογιστική απαρίθμηση

Σε αυτή την ενότητα θα επισημοποιήσουμε την ιδέα ότι κάθε μη-κενό Σ_1^0 σύνολο S μπορεί να καταγραφεί με έναν υπολογιστικό τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι υπάρχει μία συνάρτηση f που το πεδίο τιμών της είναι το S -έτσι το $f(0), f(1), f(2)$ είναι μια "λίστα" από στοιχεία του S- και η f είναι υπολογίσιμη με την έννοια του ότι η σχέση $f(m) = n$ μπορεί να περιγραφεί ταυτόχρονα με μία σχέση Σ_1^0 και Π_1^0 στο σύστημα PA. Αυτό αριθμητικά σημαίνει ότι είναι υπολογιστικά απαριθμήσιμο και ότι έχει ένα υπολογιστικά απαριθμήσιμο συμπλήρωμα.

3.8.1 Αριθμητικοποιώντας την "αναδρομή"

Το κύριο πρόβλημα της αριθμητικοποίησης του ορισμού της f είναι ότι ο ορισμός είναι *αναδρομικός*, δηλαδή το $f(n+1)$ ορίζεται ως συνάρτηση του $f(m)$. Έτσι για να επιτρέψουμε στην αριθμητικοποίηση να θεμελιωθεί ομαλά, πρέπει πρώτα να εξηγήσουμε πως θα αριθμητικοποιήσουμε μία ειδική περίπτωση της αναδρομής.

Ορισμός 3.12. *Μία συνάρτηση $F : N \to N$ είναι αναπαραστάσιμη στο σύστημα PA ή* αριθμητικά αναπαραστάσιμη, *εάν η σχέση $F(n) = m$ αντιπροσωπεύεται από κάποιο τύπο $\psi(m, n)$ στην γλώσσα PA.*

Αριθμητικοποιώντας την αναδρομή. Εάν η F είναι *αριθμητικά αναπαραστάσιμη* και η f ορίζεται από την σχέση $f(0) = x_0$ και $f(m+1) = F(f(m))$ τότε η f είναι *αριθμητικά αναπαραστάσιμη*.

Απόδειξη. Η ιδέα της απόδειξης είναι ότι το $f(m)$ είναι ο τελευταίος όρος της ακολουθίας $x_0, x_1, \ldots, x_m$ όπου το $x_0 = f(0)$ και για κάθε $i < m, x_{i+1} = F(x_i)$. Μπορούμε να εκφράσουμε την ύπαρξη μιας τέτοιας ακολουθίας με την βοήθεια της Gödel β-συνάρτησης. Μία τέτοια συνάρτηση μπορεί να μας βοηθήσει να κωδικοποιήσουμε μία πεπερασμένη ακολουθία αριθμών από μόνο έναν αριθμό (κωδικό). Για να ορίσουμε την συνάρτηση αυτή ας θυμηθούμε την εξίσωση της διαίρεσης

$$rem(a, b) = r(q < a)(a = bq + r \wedge r < b).$$

Ορισμός 3.13. *Ορίζουμε την β-συνάρτηση μέσω του τύπου που δεν περιέχει ποσοδείκτες:*

$$\beta(c, d, i) = x \Leftrightarrow rem(c, 1 + (i+1) \cdot d) = x$$

$$\Leftrightarrow (\exists q < c)[c = (1 + (i+1) \cdot d) \cdot q + x \wedge x < 1 + (i+1) \cdot d,]$$

Στην συνέχεια έχουμε το $x_i = \beta(c, d, i)$ για κάποιο c, d, τότε το $f(m) = n$ γίνεται

$$(\exists c, d)[\beta(c, d, 0) = x_0 \wedge (i < m)(\beta(c, d, i+1) = F(\beta(c, d, i+1))) \wedge \beta(c, d, m) = n].$$

Αφού β και F είναι αριθμητικά αναπαραστάσιμες, έχουμε ένα αριθμητικό τύπο που αναπαριστά την f.

□

Παρατηρούμε, ότι ο μόνος ποσοδείκτης στον παραπάνω τύπο είναι το $\exists$, στην αρχή του τύπου. Έτσι, δεδομένου του ότι το F είναι από μόνο του Σ_1^0, θα έχουμε έναν Σ_1^0 τύπο για την σχέση $f(m) = n$. Μπορούμε να έχουμε έναν Σ_1^0 τύπο για την σχέση $f(m) \neq n$, αφού το μόνο που χρειαζόμαστε είναι να αλλάξουμε το $= n$ στο τέλος του τύπου με $\neq n$. Μετά, αφού το $f(m) = n$ είναι ίσο με το $f(m) \neq n$ μπορούμε να εκφράσουμε την σχέση $f(m) = n$ με την άρνηση του τύπου Σ_1^0 για την σχέση $f(m) \neq n$ και αυτός ο τύπος θα είναι ένας $\prod_1^0$ τύπος.

3.8.2 Υπολογίσιμη Απαρίθμηση

Ξεκινάμε με κάποιες στοιχειώδεις παρατηρήσεις που μας επιτρέπουν να δουλέψουμε με μια απλή υπόθεση.

Πρώτα, παρατηρούμε ότι κάθε Σ_1^0 τύπος, δηλαδή $\exists m_1, \ldots, \exists m_k \phi(m_1, m_2, \ldots, m_k, n)$ όπου το ϕ είναι Σ_0^0 τύπος είναι ισοδύναμος με έναν άλλο τύπο που έχει μόνο έναν ποσοδείκτη $\exists$, δηλαδή της μορφής

$$\exists m \phi(P_1^k(m), \phi(P_1^k(m), \ldots, \phi(P_k^k(m), n),$$

όπου $P_1^k, \ldots, P_k^k$ είναι οι συναρτήσεις προβολής για τις k-άδες συναρτήσεις P^k. *

Όταν $m = P^3(m_1, m_2, m_3)$, για παράδειγμα, οι συναρτήσεις προβολής είναι οι εξής

$$P_1^3(m) = m_1, P_2^3(m) = m_2, P_3^3(m) = m_3.$$

Η συνάρτηση ζευγαρώματος P είναι Σ_0^0 αφού

$$P(x, y) = z \leftrightarrow 2 \cdot z = 2 \cdot x + (x + y)(x + y + 1),$$

και έτσι είναι οι συναρτήσεις προβολής της αφού

$$P_1(z) = x \leftrightarrow (\exists y \leq z)[P(x, y) = z], P_2(z) = y \leftrightarrow (\exists x \leq z)[P(x, y) = z].$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να συμπεράνουμε ότι όλες οι συναρτήσεις $P_1^k, \ldots, P_k^k$ είναι Σ_0^0, οπότε ο

$$\exists m \phi(P_1^k(m), \ldots, P_k^k(m), n)$$

είναι Σ_0^0 τύπος.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι κάθε Σ_1^0 σύνολο S ορίζεται από

$$n \in S \leftrightarrow \exists m \phi(m,n),$$

όπου η ϕ είναι μία Σ_1^0 τύπος.

Δεύτερον, εάν το S είναι μη-κενό, αλλά πεπερασμένο, μπορούμε να διαλέξουμε ένα $\phi(m,n)$ που αληθεύει για άπειρα πολλά ζεύγη της μορφής $< m, n >$. Συγκεκριμένα, εάν το $S = \{n_1, \ldots, n_\ell\}$ τότε

$$n \in S \leftrightarrow \exists m \phi(m,n) \text{όπου } \phi(m,n) = \exists m[m = m \wedge (n = n_1 \vee \cdots \vee n = n_\ell)].$$

Υπολογίσιμη απαρίθμηση ενός Σ_1^0 συνόλου. Εάν το S είναι ένα μη-κενό σύνολο Σ_1^0, τότε το S είναι το πεδίο τιμών μίας συνάρτησης g όπου είναι συγχρόνως Σ_1^0 και Π_1^0 τύπος.

Απόδειξη. Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$n \in S \leftrightarrow \exists \phi(m,n),$$

όπου ϕ είναι ένας $\Sigma 0^0$ τύπος που ικανοποιείται από άπειρα πολλά ζεύγη $< m, m >$. Πρώτα, θα θεωρήσουμε μια συνάρτηση f της οποίας το πεδίο τιμών περιέχεται από τους αριθμούς $t = P(m,n)$ έτσι ώστε να ισχύει ο τύπος $\phi(m,n)$. Δηλαδή, ορίζουμε την f αναδρομικά από τις σχέσεις

$$f(0) = \text{το μικρότερο} t \text{τέτοιο ώστε να ισχύει} \phi(P_1(t), P_2(t))$$

$$f(s+1) = \text{το μικρότερο} t > f(s) \text{τέτοιο ώστε να ισχύει} \phi(P_1(t), P_2(t)).$$

Με άλλα λόγια, η f είναι ορισμένη από τις σχέσεις $f(0) = t_0$ και $f(s+1) = F(f(s))$, όπου

$$F(u) = v \leftrightarrow v = \text{ το μικρότερο} t > u \text{έτσι ώστε να ισχύει} \phi(P_1(t), P_2(t))$$

$$\leftrightarrow v > u \wedge \phi(P_1(v), P_2(v)) \wedge (\forall i < v)(i > u \Rightarrow \neg\phi(P_1(i), P_2(i)))$$

Έτσι, η F έχει έναν Σ_0^0 ορισμό και από την αριθμητικοποίηση της αναδρομής ισχύει ότι η f είναι και Σ_1^0 και Π_1^0 τύπος.

Τελικά, αφού η f έχει πεδίο τιμών $\{t :]phi(P_1(t), P_2(t))\} = \{P(m,n) : \phi(m,n)\}$ και $P_2(P(m,n)) = n$, ισχύει ότι η συνάρτηση

$$g(t) = P_2(f(t))$$

έχει πεδίο τιμών το $\{n : \exists m \phi(m,n).\}$

$\square$

3.9 Αριθμητικοποιώντας την υπολογίσιμη ανάλυση

Τώρα που γνωρίζουμε το αριθμητικό νόημα του υπολογιστικά απαριθμήσιμου συνόλου, του υπολογίσιμου συνόλου και της υπολογίσιμης συνάρτησης μπορούμε να δούμε πως να τροποποιήσουμε τα PA για να φτιάξουμε ένα αξιωματικό σύστημα για την υπολογίσιμη ανάλυση.

Πρώτα, πρέπει να υπάρχει ένα αξίωμα (αξιωματικό σχήμα) που να υποστηρίζει την ύπαρξη των υπολογίσιμων συνόλων. Έτσι, εάν η ϕ είναι μία ιδιότητα των φυσικών αριθμών που μπορεί να εκφραστεί ταυτόχρονα ως Σ_1^0 και ως Π_1^0 τύπο, τότε σχηματίζουμε το παρακάτω αξίωμα:

$$\exists X \forall n [n \in X \leftrightarrow \phi(n)], \tag{RCA_x}$$

που ονομάζεται *αξίωμα αναδρομικής συλλογής*. Το (RCA_x) είναι πράγματι ένα αξιωματικό σχήμα, αφού υπάρχουν άπειρα πολλές ιδιότητες του ϕ που εκφράζονται ταυτόχρονα ως Σ_1^0 και ως Π_1^0 τύποι. Επίσης, το ϕ μπορεί να περιέχει και άλλα σύνολα μεταβλητών εκτός του X. Αυτό μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε υπολογίσιμες πράξεις σε τυχαία σύνολα. Για παράδειγμα, το (RCA_x) μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι εάν το Y είναι ένα σύνολο τότε είναι και η συλλογή Z των αρτίων αριθμών του Y ένα σύνολο, αφού

$$n \in Z \leftrightarrow n \in Y \wedge (\exists m < n)(n = 2m)$$

και με την προϋπόθεση ότι το δεξί μέλος ανήκει ταυτόχρονα στους Σ_1^0 και στους Π_1^0 τύπους.

Δεύτερον, περιορίζουμε το επαγωγικό αξίωμα της PA

$$[\phi(0) \wedge \forall n \phi(n) \Rightarrow \phi(n+1)] \Rightarrow \forall n \phi(n),$$

για τύπους ϕ οι οποίοι είναι Σ_1^0 τύποι. Το παραπάνω σχήμα ονομάζεται *επαγωγή για Σ_1^0 τύπους* (Σ_1^0 induction). Το σύστημα που προκύπτει από την PA περιορίζοντας το αξίωμα της επαγωγής σε επαγωγή για Σ_1^0 τύπους και προσθέτοντας το αξίωμα της αναδρομικής συλλογής ονομάζεται (RCA_0). [1]

Όπως έχουμε δει, υπάρχουν πολλά μη-υπολογίσιμα σύνολα και συναρτήσεις, οπότε περιμένουμε το (RCA_0) να έχει περιορισμένο εύρος. Πράγματι, θα δούμε ότι το (RCA_0) αποτυγχάνει να αποδείξει πολλά βασικά θεωρήματα της ανάλυσης. Παρόλα αυτά, το (RCA_0) είναι αρκετά καλό στο να αποδεικνύει *ισοδυναμίες* ανάμεσα σε σημαντικά θεωρήματα. Για παράδειγμα, το (RCA_0) μπορεί να αποδείξει ότι το θεώρημα Heine-Borel είναι ισοδύναμο με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις, παρόλο που δεν μπορεί να αποδείξει κανένα από αυτά ευθέως.

[1] Πίσω από το 0 στο (RCA_0) κρύβεται μια μικρή ιστορία. Ο Friedman το 1975 πρότεινε ένα σύστημα με επαγωγή για όλους τους αριθμητικούς τύπους ϕ αλλά το 1976 βρήκε ότι η επαγωγή για Σ_1^0 τύπους συνήθως είναι υπεραρκετή και εξού και η αλλαγή του ονόματος. Η επαγωγή για τους Σ_1^0 τύπους προτιμάτε επειδή θέλουμε ένα βασικό σύστημα να είναι όσο το δυνατόν πιο θεμελιώδες.

Παράδειγμα απόδειξης στο (RCA_0)

Η απόδειξη που είδαμε προηγουμένως στην υπολογίσιμη απαρίθμηση ενός συνόλου Σ_1^0, μπορεί να μεταφραστεί σε μία απόδειξη στο (RCA_0) με το ακόλουθο θεώρημα.

Υλοποιώντας ένα Σ_1^0 τύπο μέσω μιας συνάρτησης. Για κάθε Σ_1^0 τύπο $\exists m\phi(m,n)$, υπάρχει μία συνάρτηση $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\exists m[g(m) = n] \leftrightarrow \exists m\phi(m,n)$.

Απόδειξη. Δοσμένης της $\phi(m,n)$, μπορούμε να γράψουμε έναν ορισμό της g συνάρτησης της οποίας το πεδίο τιμών είναι τα n τέτοια ώστε να ισχύει $\exists m\phi(m,n)$. Η συνάρτηση g μπορεί να οριστεί ταυτόχρονα ως Σ_1^0 και ως Π_1^0 τύπος, όπως έχουμε δει, έτσι η g υπάρχει από το αξίωμα της αναδρομικής συλλογής.

Το πρώτο βήμα της προηγούμενης απόδειξης ήταν να ορίσουμε μια συνάρτηση f αναδρομικά της οποίας το πεδίο τιμών είναι οι αριθμοί $t = P(m,n)$ έτσι ώστε να ισχύει η $\phi(m,n)$, που μπορούμε τώρα την κατασκευάσουμε χρησιμοποιώντας την Σ_1^0 επαγωγή. Έτσι, έχουμε μία απόδειξη στο (RCA_0) όπου η g υπάρχει και $\exists m[g(m) = n] \leftrightarrow \exists m\phi(m,n)$. □

Το ότι το (RCA_0) αποδεικνύει την ύπαρξη μιας συνάρτησης g, σημαίνει ότι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών $< n, g(n) >$ είναι υπολογίσιμο. Δεν έχουμε αποδείξει ότι στο (RCA_0) το σύνολο $\{n : \exists m\phi(m,n)\}$, δηλαδή το πεδίο τιμών της g, υπάρχει. Πράγματι, δεν μπορούμε να το κάνουμε αυτό στο (RCA_0), όταν το $\{n : \exists m\phi(m,n)\}$ είναι υπολογιστικά απαριθμήσιμο αλλά όχι υπολογίσιμο.

Για να ισχυριστούμε την ύπαρξη ενός τέτοιου συνόλου $\{n : \exists m\phi(m,n)\}$ χρειαζόμαστε κάτι παραπάνω από την αναδρομική συλλογή, θα χρειαστούμε την Σ_1^0 *συλλογή*. Ένα σύστημα που έχει την Σ_1^0 συλλογή, ονομάζεται ACA_0 και θα το αναλύσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Το minimal μοντέλο του RCA_0

Το αξίωμα αναδρομικής συλλογής περιέχει τους συνήθεις αριθμούς και τα υπολογιστικά σύνολα των φυσικών αριθμών, αφού υπάρχουν συγκεκριμένα σύνολα που μπορούν να οριστούν ταυτόχρονα ως Σ_1^0 και ως Π_1^0 τύποι. Τα σύνολα αυτά είναι απαραίτητα για κάθε μοντέλο του αξιώματος της αναδρομικής συλλογής. Είναι επίσης αρκετό να έχουμε μόνο τα υπολογίσιμα σύνολα μέσα στο μοντέλο, αφού κάθε σύνολο που ορίζεται από τα υπολογίσιμα σύνολα με την συνθήκη ότι είναι ταυτόχρονα Σ_1^0 και Π_1^0 τύπος είναι από μόνο του υπολογίσιμο.

Έτσι, το *minimal μοντέλο* του RCA_0 περιέχει τους φυσικούς αριθμούς και τα υπολογιστικά σύνολα. Κάθε θεώρημα του RCA_0 πρέπει να ισχύει στο minimal μοντέλο. Αυτό το γεγονός μας εξηγεί το φαινόμενο ότι κάθε θεώρημα που εμπλέκει την ύπαρξη μη-υπολογίσιμων συνόλων δεν μπορεί να αποδειχθεί στο RCA_0.

Για παράδειγμα, το RCA_0 δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη του πεδίου τιμών κάθε συνάρτησης g, επειδή υπάρχει μία συνάρτηση g που είναι υπολογίσιμη με ένα μη-υπολογίσιμο πεδίο τιμών.

Κεφάλαιο 4

Αριθμητική Συλλογή

Εάν θέλουμε να επεκτείνουμε την ανάλυση σε ένα σύστημα που βασίζεται στα *PA* με μεταβλητές για σύνολα, το πιο προφανές σύστημα υπαρξιακών αξιωμάτων για σύνολα ονομάζεται *αριθμητική συλλογή*. Το αξίωμα αυτό βεβαιώνει την ύπαρξη ενός συνόλου X των φυσικών αριθμών για κάθε ιδιότητα ϕ ορισμένη στην γλώσσα των *PA*.

Πιο συγκεκριμένα, εάν το $\phi(n)$ είναι μία ιδιότητα ορισμένη στην γλώσσα των PA μαζί με μεταβλητές για σύνολα, αλλά χωρίς όμως να περιέχει κανένα *ποσοδείκτη για σύνολα*, τότε υπάρχει ένα σύνολο X του οποίου τα στοιχεία είναι φυσικοί αριθμοί n έτσι ώστε να ισχύει $\phi(n)$. Δηλαδή,

$$\exists X \forall n [n \in X \Leftrightarrow \phi(n)]. \qquad (\ast)$$

Αφού ισχυριζόμαστε την $\ast$ για όλους τους τύπους ϕ, το αξίωμα της αριθμητικής συλλογής είναι πράγματι ένα αξιωματικό σχήμα.

Ο λόγος που επιτρέψαμε τις μεταβλητές για σύνολα μέσα στην ϕ είναι για να επιτρέψουμε στα σύνολα να οριστούν με την βοήθεια κάποιων "δοσμένων" συνόλων. (Όπως είπαμε στο 3.2.3). Ο λόγος που δεν επιτρέψαμε να εμφανίζονται ποσοδείκτες για σύνολα στην ϕ είναι για να αποφύγουμε ορισμούς στους οποίους ένα σύνολο ορίζεται με την βοήθεια όλων των υποσυνόλων των φυσικών αριθμών.

Το σύστημα που αποτελείται από τα *PA* συν την αριθμητική συλλογή ($\ast$) ονομάζεται ACA_0. Το σύστημα αυτό βρίσκεται στο καλύτερο σημείο ανάμεσα σε όλα τα αξιωματικά συστήματα της ανάλυσης. Είναι αρκετά δυνατό σε ισχύ για να αποδείξει όλα τα βασικά θεωρήματα της ανάλυσης -όπως θα δούμε- ωστόσο έχει ακριβώς την ίδια ισχύ με τα *PA* στο να αποδεικνύει θεωρήματα της θεωρίας αριθμών (δηλαδή θεωρήματα που δεν περιέχουν μεταβλητές για σύνολα).

Επίσης, αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι το αξίωμα της αριθμητικής συλλογής δεν συνεπάγεται τα βασικά θεωρήματα της ανάλυσης. Είναι πράγματι *ισοδύναμο* με κάποια από αυτά και η ισοδυναμία μπορεί να αποδειχθεί στο ασθενές σε ισχύ σύστημα RCA_0 της υπολογίσιμης ανάλυσης όπου είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

4.1 Το αξιωματικό σύστημα ACA_0

Το ACA_0 έχει τα ίδια αξιώματα με τα PA, εκτός της επαγωγής των PA που αντικαθίσταται από την επαγωγή για μεταβλητές για σύνολα,

$$\forall X[[0 \in X \wedge \forall n(n \in X \Rightarrow n+1 \in X)] \Rightarrow \forall n(n \in X)]$$

και το σύνολο υπαρξιακού αξιώματος είναι η *αριθμητική συλλογή*

$$\exists X(n \in X \Leftrightarrow \phi(n)) \qquad (ACA_x)$$

όπου το $\phi(n)$ είναι ένας οποιοσδήποτε τύπος χωρίς ποσοδείκτες για σύνολα στον οποίο η μεταβλητή X δεν είναι ελεύθερη μεταβλητή. Συγκεκριμένα, εάν το $\phi(n)$ δεν έχει μεταβλητές για σύνολα -οπότε είναι ένας τύπος των PA- τότε το αξίωμα της επαγωγής για μεταβλητές για σύνολα ισχύει για το σύνολο X των n με την ιδιότητα $\phi(n)$, οπότε

$$[\phi(0) \wedge \forall n(\phi(n) \Rightarrow \phi(n+1))] \Rightarrow \forall n \phi(n).$$

Έτσι, με την παρουσία της αριθμητικής συλλογής, η επαγωγή για μεταβλητές για σύνολα συνεπάγεται την επαγωγή της PA και συνεπώς όλα τα θεωρήματα της PA μπορούν να αποδειχθούν στο ACA_0.

Οπότε αυτή η ικανότητα του ACA_0 να αποδεικνύει προτάσεις για τα σύνολα των φυσικών αριθμών (και συνεπώς για τους πραγματικούς αριθμούς και τις συναρτήσεις) δεν μας βοηθά να αποδείξουμε προτάσεις για τους ίδιους τους φυσικούς αριθμούς. Παρόλα αυτά, δίνει την δυνατότητα στο ACA_0 να αποδείξει τα βασικά θεωρήματα της ανάλυσης[1].

4.2 Η Σ_1^0 συλλογή και η αριθμητική συλλογή

Θα δούμε ότι η αριθμητική συλλογή προκύπτει από ένα φαινομενικά πιο αδύναμο αξίωμα συλλογής: την Σ_1^0 συλλογή:

$$\exists X(n \in X \Rightarrow \phi(n))$$

όπου το $\phi(n)$ είναι ένας Σ_1^0 τύπος, στον οποίο το X δεν είναι μια ελεύθερη μεταβλητή (έτσι κάθε μεταβλητή για σύνολα μέσα στο ϕ διαφέρει από το X και δεν είναι ποσοδεικτημένη). Αυτό που κάνει το αποτέλεσμα αληθές είναι το γεγονός ότι ο τύπος $\phi(n)$ στο Σ_1^0 περιέχει μεταβλητές για σύνολα, έτσι κάποια σύνολα μπορούν να οριστούν *με όρους* προηγούμενων ορισμένων συνόλων.

Από το Σ_1^0 στην αριθμητική συλλογή. *Κάθε περίπτωση της αριθμητικής συλλογής είναι αποδείξιμη από την Σ_1^0 συλλογή.*

[1] Ο δείκτης 0 στο ACA_0 αντικατοπτρίζει ιστορικά ως μία εξασθένιση του προκατόχου συστήματος που ονομαζόταν ACA, στο οποίο ο τύπος της ϕ επιτρεπόταν να έχει ποσοδείκτες για σύνολα. Το ACA δεν βρίσκεται στο καλύτερο σημείο όπως το ACA_0 αφού το ACA είναι πιο δυνατό σε ισχύ από τα PA στο να αποδεικνύει θεωρήματα της θεωρίας αριθμών.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε από το κεφάλαιο 2 ότι κάθε αριθμητικός τύπος είναι Σ^0_n τύπος για κάποιο n. Έτσι, μπορούμε να αποδείξουμε, με την επαγωγή στο n, ότι κάθε Σ^0_n περίπτωση της αριθμητικής συλλογής είναι αποδείξιμη από την Σ^0_1 συλλογή.

Το πρώτο βήμα $n = 1$ προκύπτει άμεσα από την Σ^0_1 συλλογή, οπότε μας μένει να δούμε πως από το Σ^0_k σύνολο θα προκύψει από το Σ^0_{k+1} σύνολο από την Σ^0_1 συλλογή.

Έστω $\phi(n) = \exists \ell \forall m \psi(l, m, n)$ να είναι Σ^0_{k+1} τύπος, έτσι ο τύπος $\exists m \neg \psi(l, m, n)$ είναι το Σ^0_k. Από την υπόθεση της επαγωγής το σύνολο

$$Y = \{< l, n >: \exists m \neg \psi(l, m, n)\}$$

μπορεί να κατασκευαστεί χρησιμοποιώντας την Σ^0_1 συλλογή. Παρατηρούμε ότι $< l, n > \notin Y \Leftrightarrow \forall m \psi(l, m, n)$ και έτσι το σύνολο

$$X = \{n : \phi(n)\}$$

ορίζεται από τον τύπο

$$n \in X \Leftrightarrow \exists \ell m \psi(l, m, n)$$

$$\exists \ell (< l, n > \notin Y)$$

.

Ο τελευταίος τύπος είναι Σ^0_1 με το ελεύθερο σύνολο μεταβλητών Y. Έτσι, αφού το Y μπορεί να κατασκευαστεί από την Σ^0_1 με τον ίδιο τρόπο και το X. □

Η Σ^0_1 συλλογή και το πεδίο τιμών των συναρτήσεων.

Η σύνδεση μεταξύ της αριθμητικής συλλογής και της ανάλυσης θεμελιώθηκε από την ισοδυναμία της Σ^0_1 συλλογής (μέσα στο RCA_0) και της ακόλουθης πρότασης:

Ύπαρξη του πεδίου τιμών. Το πεδίο τιμών κάθε επί συνάρτησης $f : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ υπάρχει.

Είναι ξεκάθαρο ότι η Σ^0_1 συλλογή συνεπάγεται την ύπαρξη του πεδίου τιμών R της f, αφού το πεδίο τιμών R της f είναι ορίσιμο από την f μέσω της Σ^0_1 συνθήκη:

$$n \in R \Leftrightarrow \exists m[f(m) = n].$$

Παρόλα αυτά, το αντίστροφο δεν είναι προφανές. Εξαρτάται από την αριθμητικοποίηση της αναδρομής που ορίσαμε και το αξίωμα της αναδρομικής συλλογής του κεφαλαίου 3.2.(δεν μπορούμε να πάρουμε μία Σ^0_1 συλλογή χωρίς να υποθέσουμε κάποια μορφή συλλογής)

Ύπαρξη πεδίου τιμών $\Rightarrow$ Σ^0_1 συλλογή. Εάν το πεδίο τιμών κάθε επί συνάρτησης $f : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ υπάρχει, τότε η Σ^0_1 συλλογή ισχύει.

Απόδειξη. Όπως έχουμε δει μπορούμε να αποδείξουμε στο RCA_0 την ύπαρξη συνάρτησης, όπου το πεδίο τιμών της ικανοποιεί μία δοθείσα Σ^0_1 συνθήκη. Έτσι, εάν το πεδίο τιμών κάθε συνάρτησης υπάρχει, το σύνολο των τιμών που ικανοποιεί κάθε Σ_1^0 συνθήκη υπάρχει.

Άρα, η Σ_1^0 ισχύει. $\square$

Η Σ_1^0 επαγωγή και αξιωματικά συστήματα που είναι ασθενέστερα από το ACA_0

Στο ACA, χάρη στην αριθμητική συλλογή, η Σ_1^0 επαγωγή σημαίνει επαγωγή για κάθε αριθμητική ϕ, αλλά σε πιο ασθενή αξιωματικά συστήματα δεν ισχύει αυτό. Τα δύο ασθενέστερα συστήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε είναι:

- το RCA_0, που το αξιωματικό σχήμα του, μας βεβαιώνει την ύπαρξη μόνο των υπολογίσιμων συνόλων και
- το WKL_0, που το αξιωματικό σχήμα του μας βεβαιώνει, με την βοήθεια του αξιώματος RCA_0, την ύπαρξη των άπειρων μονοπατιών σε άπειρα δυαδικά δέντρα (αυτό είναι το ασθενές λήμμα του Kőnig).

Όπως έχουμε πει το RCA_0 αποδεικνύει μόνο τα βασικά θεωρήματα της ανάλυσης, παρόλα αυτά όπως έχουμε πει είναι ικανό να αποδείξει ισοδύναμες ανάμεσα σε σύνολα υπαρξιακών αξιωμάτων και θεωρήματα της ανάλυσης.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε τέτοιες ισότητες ενώ στο επόμενο θα δούμε γιατί αυτές οι αποδείξεις μπορούν να υλοποιηθούν στο RCA_0.

4.3 Ιδιότητες πληρότητες χρησιμοποιώντας το ACA_0.

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε πώς το ACA_0 αποτυπώνει τις βασικές αρχές της ανάλυσης, αποδεικνύοντας ότι η αριθμητική συλλογή είναι ισοδύναμη με τις ακολουθίες ιδιότητες πληρότητας του $\mathbb{R}$. Τα αποτελέσματα αυτά ανακοινώθηκαν από τον Friedman(1976).

1. Θεώρημα Bolzano-Weierstrass (Ακολουθιακό).

   Κάθε φραγμένη άπειρη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

2. Αρχή ελαχίστου άνω φράγματος (Ακολουθιακή).

   Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα.

3. Κριτήριο σύγκλισης του Cauchy.

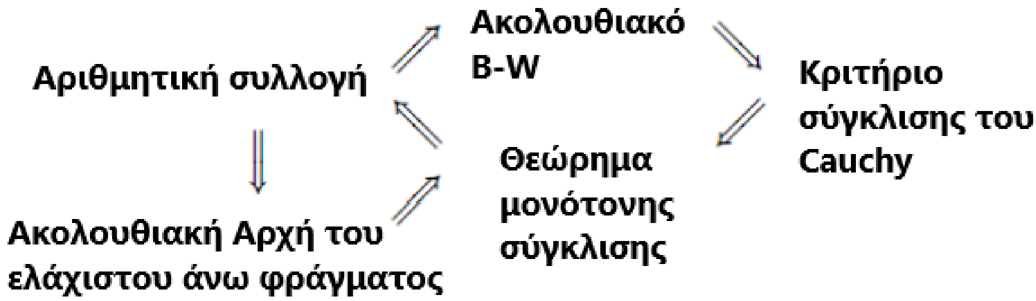
   Μία ακολουθία $x_0, x_1, x_2, \ldots$ είναι συγκλίνουσα εάν έχει μία ιδιότητα ότι για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει ένα n τέτοιο ώστε $|x_m - x_n| < \epsilon$ για όλα τα $m < n$.

4. Θεώρημα μονότονης σύγκλισης

   Κάθε φραγμένη μονότονη ακολουθία είναι συγκλίνουσα.

Οι αποδείξεις αποκαλύπτουν το ”αριθμητικό περιεχόμενο” αυτών των διάσημων θεωρημάτων.

Για να απλοποιήσουμε τις αποδείξεις αυτές θα υποθέσουμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί, οι ακολουθίες πραγματικών αριθμών, οι ακολουθίες κλειστών διαστημάτων, κλπ, κωδικοποιούνται από σύνολα φυσικών αριθμών όπως εξηγήσαμε στο κεφάλαιο 2. Μπορούμε τώρα να βεβαιώσουμε την ύπαρξη πολλών ακολουθιών, οι οποίες είναι ορισμένες από αριθμητικές συνθήκες(για παράδειγμα, ένας πραγματικός αριθμός που κατασκευάζεται μέσω μιας ακολουθίας κλειστών κιβωτισμένων διαστημάτων με μήκη που τείνουν στο 0) μέσω της αριθμητικής συλλογής. Οι ισοδυναμίες θα αποδειχθούν όπως στην παρακάτω εικόνα.



Σχήμα 4.1: *Ισοδυναμίες*

Αριθμητική συλλογή $\Rightarrow$ Ακολουθιακό B-W.

Απόδειξη. Έστω ότι $x_0, x_1, x_2, \dots$ είναι μία ακολουθία πραγματικών αριθμών και θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι κάθε $x_1 \in [0,1] = I_0$. Για να βρούμε μία συγκλίνουσα υπακολουθία διχοτομούμε το I_0 και επιλέγουμε το δεξί μισό I_1 που περιέχει άπειρα πολλά x_i και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία στο I_1. Έτσι έχουμε μια ακολουθία διαστημάτων

$$I_k = [f(k)\dot{2}^{-k}, f(k+1)\dot{2}^{-k}],$$

όπου το

$f(k) =$ το μεγαλύτερο $j < 2^k$ τέτοιο ώστε $j < 2^{-k} \leq x_i \leq (j+1)\dot{2}^{-k}$ για άπειρα πολλά i.

Ο ορισμός αυτός είναι αριθμητικός, έτσι η f υπάρχει από την αριθμητική συλλογή. Επίσης, τα I_k είναι κιβωτισμένα και έχουν μήκος 2^{-k}, χρησιμοποιώντας την Σ_1^0 επαγωγή, οπότε αυτή η ακολουθία διαστημάτων ορίζει έναν πραγματικό αριθμό x. Έτσι, από την ακολουθία $x_0, x_1, x_2, \dots$ και $I_0, I_1, I_2, \dots$ ορίζουμε

$$x_{n_k} = \text{ πρώτο στοιχείο της } x_0, x_1, x_2, \dots \text{ στο } I_k \text{ με } n_k > n_{k-1}.$$

Αυτή η ακολουθία συγκλίνει, στο σημείο x που είναι ορισμένο από τα διαστήματα I_k.

□

Ακολουθιακό B-W $\Rightarrow$ Κριτήριο του Cauchy.

Απόδειξη. Έστω μία ακολουθία $x_0, x_1, x_2, \ldots$ που ικανοποιεί το κριτήριο του Cauchy.

$$(\forall \epsilon > 0)\exists n \forall m (m > n \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon). \tag{4.3}$$

Έτσι, η ακολουθία είναι φραγμένη και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία από το B-W.

Το όριο x της υπακολουθίας $x_{n_0}, x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ είναι και όριο της $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Αφού εάν το x_{n_k} είναι σε απόσταση μικρότερη από ϵ από το x, τότε όλα τα x_m με $m > n_k$ βρίσκεται σε απόσταση μικρότερη του 2ϵ από το x, χρησιμοποιώντας 4.3. Έτσι, το όριο της $x_0, x_1, x_2, \ldots$ υπάρχει και είναι ίσο με x.

□

Κριτήριο του Cauchy $\Rightarrow$ Κριτήριο μονότονης σύγκλισης.

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός αυτός ισχύει, αφού μία μονότονη ακολουθία που δεν ικανοποιεί το κριτήριο του Cauchy είναι μη-φραγμένη. Για να δούμε το γιατί, θεωρούμε ότι έχουμε $\epsilon > 0$ για το οποίο δεν υπάρχει κανένα n τέτοιο ώστε $|x_m - x_n| < \epsilon, \forall m > n$. Σε αυτή την περίπτωση, $\forall n$ υπάρχει ένα $m > n$ με $x_m - x_n > \epsilon$ (υποθέτοντας ότι η μονότονη ακολουθία μας είναι αύξουσα). Ψάχνοντας για όλο και πιο μεγάλα n βρίσκουμε ότι

$$x_n < x_m < x'_n < x'_m < x''_n < x''_m < \ldots,$$

με

$$x_m - x_n \geq \epsilon, x'_m - x'_n \geq \epsilon, x''_m - x''_n \geq \epsilon, \ldots$$

έτσι ώστε η ακολουθία $x_0, x_1, x_2, \ldots$ εκτινάσσεται πέρα από όλα τα φράγματα. Έτσι, μία φραγμένη αύξουσα ακολουθία ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy και είναι συγκλίνουσα (όμοια δουλεύουμε και για μία φραγμένη φθίνουσα ακολουθία). □

Κριτήριο μονότονης σύγκλισης $\Rightarrow$ Αριθμητική συλλογή.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε επί συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ το πεδίο τιμών υπάρχει, αφού αυτό συνεπάγεται την Σ^0_1 συλλογή (και συνεπώς της αριθμητικής συλλογής) όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Δοσμένης μιας επί συνάρτησης $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ θα αποδείξουμε ότι το πεδίο τιμών της f υπάρχει, με την έννοια ότι μπορούμε να το *υπολογίσουμε* μέσω της f. Πρώτα, θα υπολογίσουμε την φραγμένη αύξουσα ακολουθία $c_0, c_1, c_2, \ldots$, όπου

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} 2^{-f(i)}.$$

Η μονότονη σύγκλιση μας δίνει την ύπαρξη του

$$c = \lim_{n\to\infty} c_n = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-f(i)}.$$

Έτσι, από το c μπορούμε να υπολογίσουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών n στο πεδίο τιμών της f αφού

$$n \in \text{ πεδίο τιμών της } f \Leftrightarrow \text{ το } n - \text{οστό δυαδικό ψηφίο του } c \text{ είναι το 1}.$$

□

Αριθμητική συλλογή ⇒ Ακολουθιακή Αρχή του ελαχίστου άνω φράγματος.

Απόδειξη. Έστω ότι $x_0, x_1, x_2, \ldots$ είναι μία φραγμένη ακολουθία για την οποία μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\forall x_i \in [0,1] = I_0$. Διχοτομούμε το I_0 και έχουμε το δεξί μισό του I_0, το I_1 που περιέχει κάποια x_i και γενικά

$$I_{k+1} = \text{ δεξί μισό του} I_k \text{ που περιέχει κάποιο } x_i.$$

Έτσι, όπως και στην απόδειξη, Αριθμητική συλλογή ⇔ Ακολουθιακό B-W, βρίσκουμε μία ακολουθία $I_0, I_1, I_2, \ldots$ και το κοινό τους σημείο x υπάρχει από την αριθμητική συλλογή.

Από τον ορισμό του I_k και του x έπεται ότι κάθε $x_i \geq x$ και επιπλέον εάν $y < x$ τότε $y <$ κάποιου x_i. Το x είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του x_i.

□

Ακολουθιακή Αρχή του ελαχίστου άνω φράγματος ⇒ Κριτήριο μονότονης σύγκλισης.

Απόδειξη. Αυτό ισχύει, αφού το ελάχιστο άνω φράγμα μιας μονότονης αύξουσας ακολουθίας είναι το όριο της. Στην περίπτωση που έχουμε μία μονότονη φθίνουσα ακολουθία τότε έχει ένα όριο επαναλαμβάνοντας την παραπάνω απόδειξη με την αντίθετη ακολουθία. □

4.4 Αριθμητικοποίηση των δέντρων

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι πολλά βασικά θεωρήματα της ανάλυσης, αποδεικνύονται από την κατασκευή άπειρων διχοτομήσεων. Παρατηρήσαμε ότι αυτή η κατασκευή εκφράζεται μέσα από *το ασθενές λήμμα του Kőnig*, που λέει ότι ένα άπειρα διακλαδούμενο δέντρο έχει ένα άπειρο μονοπάτι. Το ασθενές λήμμα του Kőnig είναι μία ειδική περίπτωση του *άπειρου λήμματος του Kőnig*, που λέει ότι ένα άπειρο *πεπερασμένα διακλαδούμενο* δέντρο έχει ένα άπειρο μονοπάτι. Στην επόμενη ενότητα θα αποδείξουμε το άπειρο λήμμα του Kőnig στο ACA_0. Η απόδειξη είναι αρκετά απλή αλλά πρώτα θα πρέπει να κάνουμε κατάλληλη κωδικοποίηση των δέντρων μέσω συνόλων από θετικούς ακέραιους. Υπάρχουν δύο φυσιολογικοί τρόποι να το κάνουμε αυτό: ένας συγκεκριμένος στα δυαδικά δέντρα και ένας άλλος τρόπος στα δέντρα γενικά.

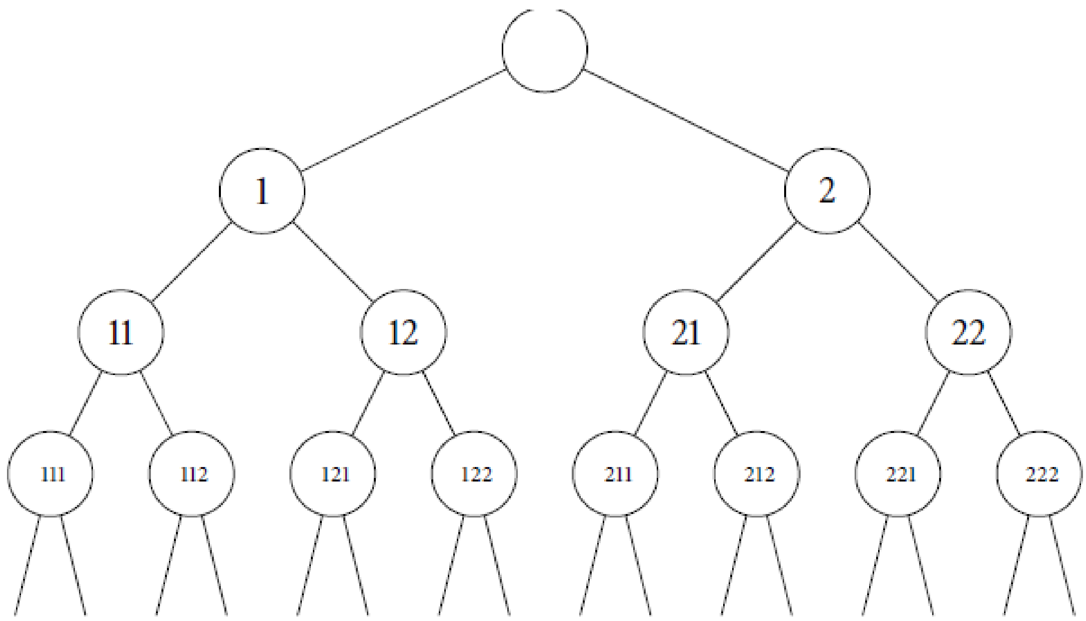
Και οι δύο τρόποι κωδικοποιούν κάθε κορυφή ενός δέντρου μέσω μιας πεπερασμένης ακολουθίας θετικών ακεραίων με τον ”πιο ψηλό” κόμβο να κωδικοποιείται με την κενή ακολουθία και κάθε άλλο κόμβο v να κωδικοποιείται μέσω μιας ακολουθίας $< n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k >$, όπου $< n_1, \ldots, n_{k-1} >$ κωδικοποιεί έναν άλλο κόμβο του δέντρου (τον κόμβο πάνω από το v). Υπάρχουν δύο τρόποι να κωδικοποιήσουμε πεπερασμένες ακολουθίες:

1. Κωδικοποιώντας ”γράμματα” $a_1, a_2, a_3, \ldots$ από τα δυαδικά νούμερα $12, 122, 1222, \ldots$ και ενώνοντας τα γράμματα αυτά μέσω της συνάρτησης συγκόλλησης $\frown$. (Η συνάρτηση αυτή συγκολλεί δύο λέξεις την μία πίσω από την άλλη. Για παράδειγμα αν $a = 1211$ και $b = 221$ τότε $a \frown b = 1211221$ και $b \frown a = 2211211$.)

2. Κωδικοποιώντας μία ακολουθία θετικών ακεραίων $n_1, n_2, \ldots n_k$ μέσω των τιμών μιας Gödel β-συνάρτησης $\beta(c, d, i)$ για κάποια c, d και $i = 1, 2, \ldots, k$.

Και οι δύο τρόποι είναι λειτουργικοί, αλλά ο πρώτος είναι προτιμότερος, αφού η συνάρτηση συγκόλλησης είναι ένα βασικό κομμάτι του ορισμού του δέντρου.

Πράγματι, για τα δυαδικά δέντρα μπορούμε να αντιπροσωπεύσουμε τις κορυφές από τυχαία δυαδικά νούμερα. Το *πλήρες* δυαδικό δέντρο C έχει κόμβους που προσδιορίζονται από κατάλληλα δυαδικά νούμερα όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα. Ένα τυχαίο δυαδικό δέντρο B είναι ένα υπόδεντρο του C. Το B είναι ένα σύνολο από δυαδικά νούμερα με την ιδιότητα ότι εάν το $u \frown 1 \in B$ ή το $u \frown 2 \in B$ τότε το $u \in B$.



Σχήμα 4.2: *Το πλήρες δυαδικό δέντρο των δυαδικών νούμερων.*

Ορισμός 4.14. *Ένα δέντρο είναι ένα σύνολο T πεπερασμένων ακολουθιών (κατάλληλα κωδικοποιημένο από δυαδικά ψηφία) θετικών ακεραίων με την ιδιότητα ότι*

$$< n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k > \in T \Rightarrow < n_1, \ldots, n_{k-1} > \in T.$$

Το T είναι πεπερασμένα διακλαδούμενο *εάν για κάθε $< n_1, \ldots, n_{k-1} > \in T$ υπάρχουν μόνο πεπερασμένα πολλά n_k τέτοια ώστε $< n_1, \ldots, n_k > \in T$. Ο κόμβος v είναι μία* επέκταση *του κόμβου u εάν $u =< m_1, \ldots, m_k >$ και $v =< m_1, \ldots, m_k, n_1, \ldots, n_\ell >$ για κάποιο $n_1, \ldots, n_\ell$.*

Ένα άπειρο μονοπάτι *ενός δέντρου T είναι μία άπειρη ακολουθία $n_1, n_2, n_3, \ldots$ τέτοια ώστε $< n_1, \ldots, n_k > \in T$.*

Για παράδειγμα, στο πλήρες δυαδικό δέντρο, το 122 είναι μία επέκταση του 1 και το $111 \cdots$ είναι το πιο αριστερό άπειρο μονοπάτι μέσα στο δέντρο.

4.5 Το άπειρο λήμμα του Kőnig

Η ισχύς του λήμματος του άπειρου του Kőnig μπορεί να μετρηθεί αποδεικνύοντας ότι είναι ισοδύναμο με την αριθμητική συλλογή, όπως θα δούμε παρακάτω. Η ισοδυναμία τους ανακοινώθηκε από τον Friedman το 1976. Το ασθενές λήμμα του Kőnig είναι όντως πιο ασθενές, παρόλο την παρόμοια τους απόδειξη. Και στις δύο εκδοχές, βρίσκουμε ένα άπειρο μονοπάτι σε ένα δέντρο επιλέγοντας επαναλαμβανόμενα μία από την πεπερασμένα πολλές (δηλαδή πεπερασμένου πλήθους) κορυφές που οδηγεί σε ένα άπειρο μονοπάτι του δέντρου.

Παρόλο αυτά, δεν είναι προφανές το γιατί υπάρχει διαφορά στο εάν η επιλογή είναι ανάμεσα σε 2 κορυφές ή τυχαία πεπερασμένο αριθμό κορυφών. Το ασθενές λήμμα του Kőnig θα μελετηθεί στο επόμενο κεφάλαιο, όπου θα δούμε πιο ενδιαφέρουσες ισοδυναμίες του.

Το λήμμα του απείρου του Kőnig. Εάν το T είναι ένα άπειρο, πεπερασμένα διακλαδούμενο, δέντρο, τότε το T έχει ένα άπειρο μονοπάτι.

Απόδειξη. Αναπαριστούμε το T, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, από το σύνολο T των πεπερασμένων ακολουθιών u των φυσικών αριθμών. Κάθε στοιχείο $u \in T$ εκπροσωπεί μία κορυφή, οπότε τα αρχικά τμήματα του u επίσης ανήκουν στο T και εκπροσωπούν τους κόμβους πάνω από το u στο μοναδικό μονοπάτι που οδηγεί στον πρώτο κόμβο (κενή ακολουθία). Οι πιθανοί διάδοχοι του (δηλαδή οι επόμενοι κόμβοι) $u =< n_1, \ldots, n_{k-1}$ είναι οι ακολουθίες $< n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k >$, όπου $n_k \in \mathbb{N}$ και τα κατατάσσουμε σύμφωνα με το μέγεθος των n_k.

Η υπόθεση ότι το T είναι πεπερασμένα διακλαδούμενο σημαίνει ότι κάθε $u \in T$ έχει μόνο πεπερασμένα πολλούς επόμενους κόμβους. Το άπειρο λήμμα αποδεικνύεται επιλέγοντας επαναλαμβανόμενα διαδοχικά στοιχεία μίας άπειρης ακολουθίας $< n_1, n_2, \cdots >$ τέτοια ώστε $< n_1, \ldots, n_k > \in T$.

Βήμα 1. Έστω ότι το $< n_1 >$ είναι η ελάχιστη από τις πεπερασμένα πολλές κορυφές κάτω από τον πρώτο κόμβο (κενή ακολουθία), που έχει άπειρα πολλές επεκτάσεις στο T.

Βήμα k. Υποθέτουμε ότι το $u =< n_1, \ldots, n_{k-1} >$ είναι ένας κόμβος με άπειρα πολλές επεκτάσεις στο T, διαλέγουμε τον διάδοχο $< n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k >$ του u όπου είναι ελάχιστος ανάμεσα στους άπειρα πολλούς διαδόχους του u και έχει άπειρα πολλές επεκτάσεις στο T.

Χρησιμοποιώντας την αριθμητικοποίηση των δέντρων, που είδαμε προηγουμένως και τον αριθμητικό ορισμό της ιδιότητας του να έχει ένα δέντρο άπειρα πολλές επεκτάσεις, μπορούμε να φτιάξουμε έναν αναδρομικό (και άρα αριθμητικό) ορισμό της ακολουθίας $< n_1, n_2, n_3, \cdots >$. Η ύπαρξη της ακολουθίας και συνεπώς η ύπαρξη ενός άπειρου μονοπατιού προκύπτουν από την αριθμητική συλλογή.

□

Αυτό μας δείχνει ότι το λήμμα του απείρου του Kőnig είναι αποδείξιμο στο ACA_0. Αντίστροφα, έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

Άπειρο λήμμα του Kőnig ⇒ Αριθμητική συλλογή

Απόδειξη. Όπως και στην απόδειξη ότι η μονότονη σύγκλιση συνεπάγεται την αριθμητική συλλογή,είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι το άπειρο λήμμα του Kőnig συνεπάγεται το ότι το πεδίο τιμών κάθε συνάρτησης $f : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ υπάρχει,επειδή αυτό με την σειρά του αποδεικνύει την αριθμητική συλλογή.

Έτσι, μένει να δείξουμε ότι, δοσμένης μίας συνάρτησης $f : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$, μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο τιμών της f με την βοήθεια του άπειρου λήμματος του Kőnig. Μπορούμε να το κάνουμε αυτό υπολογίζοντας από την f ένα πεπερασμένα διακλαδούμενο δέντρο T_f του οποίου το μοναδικό άπειρο μονοπάτι σ ορίζεται από

$$\sigma(i) = \begin{cases} 0 & , \text{εάν } i \notin \text{ πεδίο τιμών της } f \\ m+1 & , \text{εάν } f(m) = i \end{cases}$$

Από το σ μπορούμε να αποφασίσουμε ποια στοιχεία ανήκουν στο πεδίο τιμών της f, διότι

$$i \in \text{ πεδίο τιμών } f \Leftrightarrow \sigma(i) > 0.$$

Έτσι, εάν το σ υπάρχει το πεδίο τιμών της f ομοίως υπάρχει - και θα δούμε ότι το σ υπάρχει από το άπειρο λήμμα του Kőnig.

Όπως εξηγήσαμε το T_f έχει ένα πάνω κόμβο ίσο με την κενή ακολουθία και κάτω από αυτό τους κόμβους που είναι οι ακολουθίες $< m_0, m_1, \ldots, m_k >$ φυσικών αριθμών. Αποφασίζουμε εάν το $< m_0, m_1, \ldots, m_k > \in T_f$ από το παρακάτω κριτήριο.

$$< m_0, m_1, \ldots, m_k > \in T_f \Leftrightarrow (\forall i, j \leq k)[m_1 = 0 \Leftrightarrow f(j) \neq i] \text{και}$$

$$(\forall i \leq k)[m_i > 0 \Leftrightarrow f(m-1) = i] \tag{4.4}$$

Για παράδειγμα, εάν $< 7, 5, 0, 2 > \in \Pi T_f$ αυτό σημαίνει ότι $0, 1, 3 \in \Pi T_f$, αφού $f(6) = 0, f(4) = 1, f(1) = 3$ και ότι $2 \notin \Pi T_f$ εκτός εάν $f(m) = 2$ για κάποιο $m > 3$. Πιο γενικά, παρατηρούμε ότι:

1. Εάν $< m_0, m_1, \ldots, m_k > \in T_f$ τότε $m_i = 0$ μόνο αν $f(m) = i$, για κάποιο $m > k$.

2. Εάν $< m_0, m_1, \ldots, m_k > \in T_f$ και $1 < k$ τότε $< m_0, m_1, \ldots, m_\ell > \in T_f$ αφού εάν ισχύει η 4.4 για κάποιο k ισχύει και για κάποιο $\ell < k$. Άρα το T_f είναι ένα δέντρο.

3. Αφού όλοι οι ποσοδείκτες στην 4.4 είναι φραγμένοι, η 4.4 ισχύει από την f, έτσι το T_f υπάρχει από την αναδρομική συλλογή.

4. Το T_f είναι πεπερασμένα διακλαδούμενο αφού κάθε κόμβος $< m_0, \dots, m_k > \in T_f$ έχει το πολύ δύο διαδόχους $< m_0, \dots, m_k, 0 >$ και $< m_0, \dots, m_k, m+1 >$, το τελευταίο ισχύει εάν $k+1 = f(m)$ για κάποιο $m > k$.

5. Κάθε αρχικό κομμάτι $< \sigma(0), \dots, \sigma(k) >$ του σ είναι μέσα στο T_f αφού ικανοποιεί την 4.4. Έτσι το T_f είναι άπειρο και άρα περιέχει ένα άπειρο μονοπάτι από το άπειρο λήμμα του Kőnig.

Μένει να δείξουμε ότι το σ είναι το *μοναδικό* άπειρο μονοπάτι στο T_f. Για να το δείξουμε αυτό αρκεί να δείξουμε ότι εάν

$$< m_0, m_1, \dots m_k > \neq [< \sigma(0), \sigma(1), \dots \sigma(k) >,$$

τότε όλα τα μονοπάτια από το $< m_0, m_1, \dots m_k >$ τερματίζουν. Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $m_k \neq \sigma(k)$ και ότι οι προηγούμενοι όροι και των δύο ακολουθιών συμφωνούν. Αυτό συμβαίνει μόνο εάν $m_k = 0$ και $f(m) = k$ μόνο για κάποιο $m > k$, οπότε στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $\sigma(k) = m + 1$. Αλλά τότε όλες οι επεκτάσεις $(m_0, m_1, \dots, m_k)$ μήκους μεγαλύτερου από το m θα αποτύχουν να ικανοποιήσουν την συνθήκη 4.4 και δεν θα ανήκουν στο T_f. □

Αξίζει να σημειωθεί ότι το δέντρο T_f στην πάνω απόδειξη είναι ένα δυαδικό δέντρο αφού κάθε κόμβος έχει το πολύ δύο διαδόχους. Έτσι φαίνεται ότι χρειαζόμαστε το ασθενές λήμμα του Kőnig για τα άπειρα μονοπάτια δυαδικών δέντρων. Παρόλα αυτά, για να *κατασκευάσουμε* το T_f πρέπει να δουλέψουμε στο δέντρο που περιέχει όλες τις ακολουθίες των φυσικών αριθμών, αφού δεν μπορούμε να προβλέψουμε πόσο μεγάλο θα χρειαστεί να είναι ένα m για να δώσουμε μία δοθείσα τιμή i στο $f(m)$. Δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε το T_f μέσα στο πλήρες δυαδικό δέντρο.

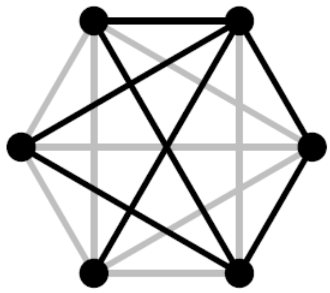
Αφού η αριθμητική συλλογή συνεπάγεται το άπειρο λήμμα του Kőnig και άρα το ασθενές λήμμα του Kőnig, όλα τα κλασσικά θεωρήματα που είναι αποδείξιμα από το ασθενές λήμμα του Kőnig είναι θεωρήματα του ACA_0.

4.6 Η θεωρία του Ramsey

Η θεωρία του Ramsey είναι ένα μεγάλο κομμάτι των μαθηματικών, μέσω της οποίας "βάζουμε τάξη μέσα στην αταξία", σε πεπερασμένες αλλά και άπειρες κατασκευές. Προέρχεται από μία εργασία του Ramsey 1930 στην λογική, αλλά από τότε έγινε μέρος της συνδυαστικής. Θα σχεδιάσουμε κάποια βασικά αποτελέσματα της θεωρίας του Ramsey και θα εξηγήσουμε την σχέση τους με το ACA_0.

Ένα πεπερασμένο παράδειγμα που θα μας βοηθήσει να καταλάβουμε το είδος της "τάξης" που μας αποκαλύπτει η θεωρία του Ramsey είναι: *σε κάθε ομάδα έξι ανθρώπων υπάρχουν είτε τρεις που όλοι γνωρίζονται μεταξύ τους ή τρεις που δεν γνωρίζονται μεταξύ τους.*

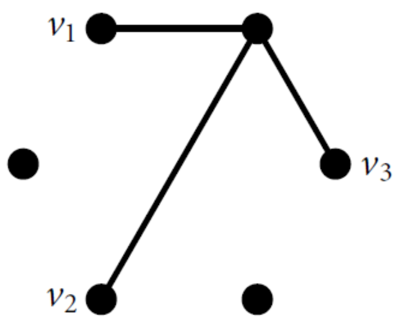
Για να αποδείξουμε αυτό το baby θεώρημα του Ramsey αναπαριστούμε τους 6 αυτούς ανθρώπους από κορυφές σε κάποιο γράφημα, ενώνουμε τις δύο κορυφές από μία μαύρη γραμμή εάν γνωρίζονται μεταξύ τους και με μία γκρι γραμμή εάν δεν γνωρίζονται. Δείτε το σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3: *Τυχαίο γράφημα έξι ανθρώπων.*

Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει πάντα ένα *μονοχρωματικό* τρίγωνο (όλες οι γραμμές μαύρες ή όλες γκρι). Για να δούμε τον λόγο που πρέπει να υπάρχει ένα τέτοιο τρίγωνο, θεωρούμε μια κορυφή v_0 του γραφήματος, το οποίο είναι το τελικό σημείο πέντε διαφορετικών γραμμών, οπότε τουλάχιστον τρεις γραμμές πρέπει να έχουν το ίδιο χρώμα, έστω μαύρο. Τώρα, παρατηρούμε τα άλλα άκρα $v_1 v_2 v_3$ των τριών γραμμών.(Σχήμα 4.4)

Εάν κάθε δύο από τα άκρα $v_1 v_2 v_3$ είναι συνδεδεμένα με μία μαύρη γραμμή, αυτό θα δημιουργήσει ένα μαύρο τρίγωνο. Στην περίπτωση που καμία από τις παραπάνω κορυφές δεν συνδέονται με μία μαύρη γραμμή, τότε προκύπτει ένα γκρι τρίγωνο με τις κορυφές αυτές.



Σχήμα 4.4: *Τυπικές κορυφές ενός γραφήματος.*

Η θεωρία του Ramsey συσχετίζεται με τα ανάστροφα μαθηματικά όταν μελετάμε τα άπειρα σύνολα κορυφών $X \subseteq \mathbb{N}$. Το *πλήρες γράφημα* K_x έχει ως σύνολο των κορυφών το και μία γραμμή ανάμεσα σε οποιαδήποτε δύο στοιχεία του . Ένα παράδειγμα του τι μπορούμε να αποδείξουμε είναι:

Το άπειρο θεώρημα του Ramsey για ζεύγη. Εάν οι γραμμές του $K_{\mathbb{N}}$ είναι χρωματισμένες από έναν πεπερασμένο αριθμό χρωμάτων, τότε το $K_{\mathbb{N}}$ περιέχει ένα μονοχρωματικό

K_x, όπου το X είναι ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$.

Απόδειξη. Επιλέγουμε κάποιο $v_0 \in \mathbb{N}$ και θεωρούμε το σύνολο όλων των άπειρα πολλών γραμμών με κορυφή v_0. Αφού υπάρχουν μόνο πεπερασμένα πολλά χρώματα, άπειρα πολλές γραμμές που ξεκινούν από το v_0 έχουν το ίδιο χρώμα. Έστω ${}_1$ να είναι το σύνολο των κορυφών στο άλλο άκρο αυτών των γραμμών και επιλέγουμε $v_1 \in {}_1$. Πάλι, άπειρα πολλές γραμμές που ξεκινούν από το v_1 έχουν το ίδιο χρώμα. Έστω ${}_2$ να είναι το σύνολο των κορυφών στο άλλο άκρο αυτών των γραμμών που ξεκινούν από το v_1 και επιλέγουμε $v_2 \in {}_2$ κοκ.

Με αυτό τον τρόπο έχουμε ένα άπειρο σύνολο από κορυφές $\{v_0, v_1, \ldots\}$ τέτοιο ώστε για κάθε v_i να ενώνεται το $\{v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, \ldots\}$ με γραμμές του ιδίου χρώματος. Επίσης, αφού υπάρχουν μόνο πεπερασμένα πολλά χρώματα, το *ίδιο* χρώμα, εμφανίζεται για άπειρα πολλά από τα v_i: ας τα ονομάσουμε $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Οπότε, εάν ορίσουμε το $X = \{x_0, \ldots\}$, το άπειρο γράφημα K_x είναι μονοχρωματικό. □

Το παραπάνω θεώρημα ονομάζεται θεώρημα του Ramsey για ζεύγη αφού τα άκρα του γραφήματος K_x είναι ουσιαστικά ζεύγη από στοιχεία του συνόλου X. Το ονομάζουμε RT_2 (RT=RAMSEY THEORY) για συντομία. Υπάρχει και ένα πιο τετριμμένο θεώρημα του Ramsey RT_1, ή ”θεώρημα του Ramsey για μονοσύνολα”, το οποίο λέει ότι εάν τα στοιχεία του $\mathbb{N}$ χρωματίζονται από πεπερασμένα πολλά χρώματα τότε το $\mathbb{N}$ έχει ένα άπειρο υποσύνολο X, του οποίου όλα τα στοιχεία έχουν το ίδιο χρώμα. Το RT_1 προκύπτει επίσης από την αριθμητική συλλογή, είναι γνωστό ως την *άπειρη αρχή του περιστερώνα*. Στην προηγούμενη απόδειξη ουσιαστικά υποθέσαμε ότι ισχύει το RT_1 και αποδείξαμε RT_2 άρα αποδείξαμε την συνεπαγωγή $RT_1 \Rightarrow RT_2$.

Τοιουτοτρόπως, υπάρχει ένα θεώρημα του Ramsey RT_3, το οποίο λέει ότι εάν όλες οι τριάδες των στοιχείων του $\mathbb{N}$ χρωματίζονται από πεπερασμένα πολλά χρώματα, τότε το $\mathbb{N}$ έχει ένα άπειρο υποσύνολο X του οποίου όλες οι τριάδες έχουν το ίδιο χρώμα. Πράγματι, προχωρώντας με παρόμοιο τρόπο από το 3 στο 4 και από το 4 στο 5 και τα λοιπά, μπορούμε να αποδείξουμε το θεώρημα του Ramsey RT_k για τον χρωματισμό $k-$άδων με πεπερασμένα πολλά χρώματα.

Κάθε θεώρημα του Ramsey RT_k μπορεί να αποδειχθεί στο ACA_0 και επίσης κάθε RT_k για $k \geq 3$ είναι ισοδύναμο με την αριθμητική συλλογή στο RCA_0. Δύο σημαντικά μη-ισοδύναμα με την αριθμητική συλλογή είναι τα ακόλουθα:

1. RT_2, το οποίο δεν συνεπάγεται την αριθμητική συλλογή αλλά την αναδρομική
2. $\forall k RT_k$, το οποίο συνεπάγεται την αριθμητική συλλογή αλλά δεν είναι αποδείξιμο στο ACA_0 .

Κεφάλαιο 5

Αναδρομική συλλογή

Το RCA_0 μπορεί να θεωρηθεί ως ένα κατάλληλο αξιωματικό σύστημα για την υπολογίσιμη ανάλυση. Είναι ένα σύστημα υπαρξιακών αξιωμάτων για σύνολα και ονομάζεται *αναδρομική συλλογή*.

Το δεύτερο πιο σημαντικό χαρακτηριστικό του RCA_0 είναι το αξίωμα της επαγωγής του, της Σ_1^0 επαγωγής, που επιτρέπει μόνο ιδιότητες των υπολογιστικά απαριθμήσιμων συνόλων να αποδειχθούν. Αυτό κάνει το RCA_0 ένα ασθενές σύστημα - δηλαδή ικανό να αποδείξει μόνο μερικά θεωρήματα- αλλά είναι ικανό να αποδείξει *ισοδυναμίες* ανάμεσα σε κλασσικά θεωρήματα.

Αυτό κάνει το RCA_0 μία κατάλληλη *βασική θεωρία*, για παράδειγμα, την ισοδυναμία της αριθμητικής συλλογής με τα θεωρήματα που συζητήσαμε στα κεφάλαια 4.3 και 4.4 και επίσης ένα νέο σύνολο ισοδυναμίας με το ασθενές λήμμα του Kőnig. Θα αποδείξουμε λοιπόν την ισοδυναμία ανάμεσα στο ασθενές λήμμα του Kőnig και το θεώρημα του Heine-Borel. Θα συζητήσουμε επίσης την ισοδυναμία του ασθενές λήμματος του Kőnig με ένα διάσημο θεώρημα της τοπολογίας, το θεώρημα του σταθερού σημείου του Brouwer.

Το θεώρημα Heine-Borel βρίσκεται αυστηρά ανάμεσα στο RCA_0 και στο ACA_0 θεμελιώνει την σπουδαιότητα του συστήματος WKL_0 του οποίου το σύστημα υπαρξιακού αξιώματος είναι το ασθενές λήμμα του Kőnig. Το RCA_0, το WKL_0 και το ACA_0 καλύπτουν τα βασικά θεωρήματα της ανάλυσης που τα ταξινομούμε σε τρία διαφορετικά επίπεδα ισχύος.

5.1 Το αξιωματικό σύστημα RCA_0

Εισάγαμε το RCA_0 στο κεφάλαιο 3. Για να επεκτείνουμε αυτό που αναλύσαμε σε εκείνο το κεφάλαιο, τα αξιώματα του RCA_0 είναι τα αξιώματα της PA εκτός του αξιώματος της επαγωγής, συν το παρακάτω αξίωμα για Σ_1^0 τύπους ϕ,

$$\forall n[\phi(0) \wedge \forall n \phi(n) \Rightarrow \phi(n+1)] \Rightarrow \forall n \phi(n) \qquad (\Sigma_1^0 \text{ επαγωγή})$$

Η Σ_1^0 επαγωγή χρησιμοποιείται για να αποδείξουμε ότι όλα τα στοιχεία μιας υπολογιστικά απαριθμήσιμης ακολουθίας έχουν μία συγκεκριμένη ιδιότητα. Το σύστημα υπαρξιακού αξιώματος είναι για όλους τους τους τύπους ϕ και ψ που είναι Σ_1^0 τύποι και Π_1^0 τύποι αντίστοιχα,

$$\forall n[\phi(n) \Leftrightarrow \psi(n)] \Rightarrow \exists X[n \in X \Leftrightarrow \phi(n)]. \qquad \text{(Αναδρομική συλλογή)}$$

Το αξίωμα αυτό προέκυψε από το αποτέλεσμα του Post το 1944 ότι ένα σύνολο είναι υπολογίσιμο εάν και μόνο εάν αυτό και το συμπλήρωμα του είναι υπολογιστικά απαριθμήσιμα και το γεγονός ότι τα υπολογιστικά απαριθμήσιμα σύνολα είναι Σ_1^0 τύποι. Υπενθυμίζουμε ότι οι τύποι ϕ και ψ μπορούν να περιέχουν μεταβλητές για σύνολα, αλλά όχι ποσοδείκτες για μεταβλητές που παριστάνουν σύνολα. Ως αποτέλεσμα, επιτρέπει στο RCA_0 να αποδεικνύει την ύπαρξη κάθε *υπολογίσιμου* συνόλου από δοσμένο σύνολο Y, για παράδειγμα το σύνολο Z των αρτίων αριθμών του Y.

Ένα σημαντικό παράδειγμα υπολογισμού από ένα δοσμένο σύνολο είναι ο διαγώνιος υπολογισμός μέσω του οποίου μπορούμε να αποδείξουμε την μη-αριθμησιμότητα του $\mathbb{R}$.

Μη-αριθμησιμότητα του $\mathbb{R}$. Για κάθε ακολουθία $x_1, x_2, x_3, \dots$ των πραγματικών αριθμών, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $x \neq$ κάθε x_n.

Απόδειξη. (στο RCA_0). Δοσμένης μίας ακολουθίας $x_1, x_2, x_3, \dots$ υπολογίζουμε το x από τον κανόνα

$$\text{n-ιοστό δεκαδικό ψηφίο του } x = \begin{cases} 1 & : \text{εάν το n-ιοστό δεκαδικό ψηφίο του } x_n \neq 1 \\ 2 & : \text{εάν το n-ιοστό δεκαδικό ψηφίο του } x_n = 1 \end{cases}$$

Έτσι, το x υπάρχει από την αριθμητική συλλογή, κάθε ψηφίο του x είναι είτε 1 είτε 2 και το x διαφέρει από το x_n στο n-οστό δεκαδικό σημείο. Αφού κάθε δεκαδικό ανάπτυγμα του οποίου τα ψηφία είναι είτε 1 είτε 2 είναι μοναδικό, αυτό κάνει το $x \neq$ κάθε x_n.

□

Παρόλα αυτά, όπως είπαμε και στο κεφάλαιο 3, το RCA_0 έχει ένα minimal μοντέλο στο οποίο όλα τα σύνολα είναι υπολογίσιμα. Οπότε, όταν ένα υπολογίσιμο σύνολο Y συσχετίζεται με ένα μη-υπολογίσιμο σύνολο Z, το RCA_0 δεν θα είναι ικανό να αποδείξει την ύπαρξη του Z, διότι το minimal μοντέλο θα περιέχει το Y αλλά όχι το Z. Για παράδειγμα, κάθε υπολογίσιμη συνάρτηση είναι στο minimal μοντέλο, αλλά όχι το πεδίο τιμών κάθε υπολογίσιμης συνάρτησης, αφού το πεδίο τιμών μπορεί να είναι μη-υπολογίσιμο. Όπως έχουμε δει, αυτός είναι ο λόγος που το RCA_0 δεν μπορεί να αποδείξει ότι ”υπάρχει το πεδίο τιμών κάθε συνάρτησης”. Παρόμοια επιχειρήματα μας επιτρέπουν να δείξουμε ότι κάποια σημαντικά θεωρήματα της ανάλυσης δεν είναι αποδείξιμα στο RCA_0, αφού συνεπάγονται την ύπαρξη κάποιων μη-υπολογίσιμων συνόλων. Συγκεκριμένα, το RCA_0 είναι ασθενές στο να αποδείξει την αρχή του ελαχίστου άνω φράγματος ή το θεώρημα Heine-Borel ή το θεώρημα Bolzano-Weierstrass.

5.2 Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής

Η αναπόφευκτη δυσκολία με τους πραγματικούς αριθμούς σημαίνει ότι γενικά δεν μπορούμε να ξέρουμε εάν το $f(x) = 0$, για δοσμένο x και συνεχής συνάρτηση f. Αλλά όταν $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$ μας επιτρέπει να αποδείξουμε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής. Κάναμε μία αρχική προσπάθεια να το αποδείξουμε στο κεφάλαιο 3.3 αλλά υπάρχουν δυο προβλήματα με αυτή την προσπάθεια:

1. Εάν το $f(c) = 0$ σε κάποιο σημείο c δεν θα το βρούμε κατά ανάγκη , όση ώρα και να υπολογίσουμε το $f(c)$.

2. Εάν $f(c) < 0$ ή το $f(c) > 0$ σε κάποιο σημείο c,τότε *τελικά* θα το διαπιστώσουμε, αλλά δεν ξέρουμε πόσα στάδια θα πρέπει να περιμένουμε.

Δεν μπορούμε να κάνουμε κάτι για το πρώτο πρόβλημα οπότε πρέπει να ασχοληθούμε μόνο με το δεύτερο. Για να το αντιμετωπίσουμε ξεκινάμε όλο και περισσότερους υπολογισμούς και περιμένουμε για το αποτέλεσμα. Σε αυτή την περίπτωση, περιμένουμε για κάποια σημεία c όπου $f(c) < 0$ ή το $f(c) > 0$ να βρεθούν και να τα χρησιμοποιούμε για όσο χρόνο αυτοί παραμένουν ”αρκετά κοντά” στο μέσο του διαστήματος.

θεώρημα ενδιάμεσης τιμής. Εάν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[0, 1]$, με $f(0) < 0$ και $f(1) > 0$ τότε $f(c) = 0$ για κάποιο c στο $[0, 1]$.

Απόδειξη. Εάν η $f = 0$ σε ένα υποδιάστημα του $[0, 1]$ τότε $f(c) = 0$ για κάποιο ρητό (και υπολογίσιμο) σημείο c, το οποίο υπάρχει από την αναδρομική συλλογή. Αλλιώς, υπολογίζουμε τις τιμές της f σε στάδια όπως παρακάτω.

Στάδιο 1. Κάνουμε ένα βήμα στον υπολογισμό του $f(\frac{1}{2})$.

Στάδιο s**.** Κάναμε s βήματα στον υπολογισμό των $f(\frac{r}{2^s})$, για $r = 1, 2, \ldots, 2^s - 1$. Έτσι, το στάδιο s συνεχίζει όλους τους υπολογισμούς που βρίσκονται σε εξέλιξη στο στάδιο $s - 1$, όπως επίσης ξεκινάμε νέους υπολογισμούς στα σημεία που βρίσκονται στο μέσο όλων των σημείων του προηγούμενου σταδίου όπου οι υπολογισμοί έχουν ήδη ξεκινήσει.

Με αυτό τον τρόπο, θα βρούμε τελικά κάθε σημείο της μορφής $x = \frac{r}{2^s}$ στο οποίο $f(x) < 0$ ή $f(x) > 0$. Και *κάθε υποδιάστημα* του $[0, 1]$ περιέχει τέτοια σημεία, αφού τώρα υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει υποδιάστημα στο οποίο το f είναι σταθερά μηδέν. Αυτό μας επιτρέπει να διορθώσουμε την αρχική προσπάθεια που κάναμε νωρίτερα κοιτώντας τώρα ”μεσοδιαστήματα” αντί ”σημεία που βρίσκονται ενδιάμεσα σε κάποια διαστήματα”.

Ξεκινάμε με ένα διάστημα στο μισό του $[0, 1]$, έστω το δεύτερο τρίτο του συνόλου, και έστω c_1 να είναι το πρώτο σημείο x που βρήκαμε σε αυτό, για το οποίο $f(x) < 0$ ή $f(x) > 0$. Τότε το f περνά από θετικές σε αρνητικές τιμές είτε στο $[0, c_1]$ ή $[c_1, 1]$. Έστω ότι I_1 είναι το υποδιάστημα στο οποίο συμβαίνει αυτό και κοιτάμε το δεύτερο μισό του I_1. Ομοίως βρίσκουμε το υποδιάστημα I_2 του I_1 ανάμεσα στο σημείο c_2 στο δεύτερο μισό του I_2 και ένα από τα τελικά του σημεία, στο οποίο η f περνά από τις θετικές στις αρνητικές τιμές.

Συνεχίζοντας, με αυτό τον τρόπο έχουμε (μέσω της Σ_1^0 επαγωγής) μία κιβωτισμένη ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ τέτοια ώστε το f να περνά από θετικές σε αρνητικές τιμές σε κάθε I_n. Επίσης, κάθε I_n είναι το πολύ τα $\frac{2}{3}$ σε μήκος του προκατόχου, οπότε το μήκος του I_n τείνει στο 0 και η ακολουθία $I_1, I_2, I_3, \ldots$ ορίζει έναν πραγματικό αριθμό c, από την αναδρομική συλλογή. Είναι ξεκάθαρο από την συνέχεια της f ότι $f(c) = 0$.

□

5.3 Αναθεωρώντας το σύνολο του Cantor

Για να μελετήσουμε το ασθενές λήμμα του Kőnig επισκεπτόμαστε πάλι τα δυαδικά δέντρα και την σύνδεση τους με το σύνολο του Cantor, C που είδαμε στο κεφάλαιο 2. Εκεί είδαμε ότι το C αποτελείται από τα σημεία που μένουν στο $[0, 1]$ ύστερα από την αφαίρεση των ακόλουθων διαστημάτων, τα οποία θα ονομάσουμε C-συμπληρωματικά διαστήματα:

$$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

$$(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \qquad (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$$

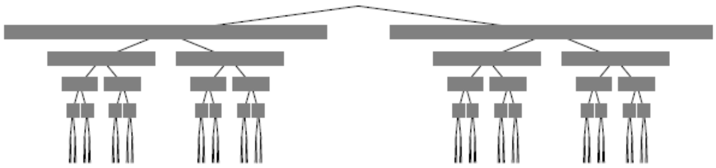
$$(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}) \qquad (\frac{7}{27}, \frac{8}{27}) \qquad (\frac{19}{27}, \frac{20}{27}) \qquad (\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$$

....

Επίσης είδαμε ότι τα σημεία του C αντιστοιχούν σε άπειρα μονοπάτια σε ένα πλήρες δυαδικό δέντρο του οποίου οι κόμβοι στο σημείο n είναι κλειστά διαστήματα που έμειναν αφού αφαιρέσαμε τα διαστήματα στο επίπεδο n της λίστας των C-συμπληρωματικών διαστημάτων που είδαμε πιο πάνω. Η παρακάτω εικόνα μας δείχνει αυτά τα διαστήματα πάλι, στα διαδοχικά τους επίπεδα.

Σχήμα 5.1: *Το $[0, 1]$ αφού αφαιρέσαμε τα C-συμπληρωματικά διαστήματα*

Τώρα "επεκτείνουμε" κάθε μαύρο κλειστό διάστημα σε ένα γκρι *ανοιχτό* διάστημα αυξάνοντας το μήκος του σε ένα τρίτο σε κάθε άκρο (αλλά αφαιρώντας όμως τα άκρα κάθε συνόλου). Για παράδειγμα, τα διαστήματα $[0, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, 1]$ στο επίπεδο 1 της παραπάνω εικόνας επεκτείνονται σε $(-\frac{1}{9}, \frac{4}{9}), (\frac{5}{9}, \frac{10}{9})$. Τα επεκταμένα διαστήματα σε κάθε επίπεδο καλύπτουν το C, οπότε τα ονομάζουμε *C-επικαλυπτικά* διαστήματα. Η σμίκρυνση της επέκτασης αυτής επιβεβαιώνει ότι κάθε δύο *C-επικαλυπτικά* διαστήματα που δεν είναι στο ίδιο μονοπάτι δεν συνδέονται. Η εικόνα παρακάτω μας δείχνει τα πρώτα 4 στάδια των C-επικαλυπτικών διαστημάτων, που μπαίνουν πάνω από τους κόμβους των δέντρων των οποίων τα μονοπάτια αντιπροσωπεύουν τα στοιχεία του C.



Σχήμα 5.2: *Τα C-καλυπτικά διαστήματα*

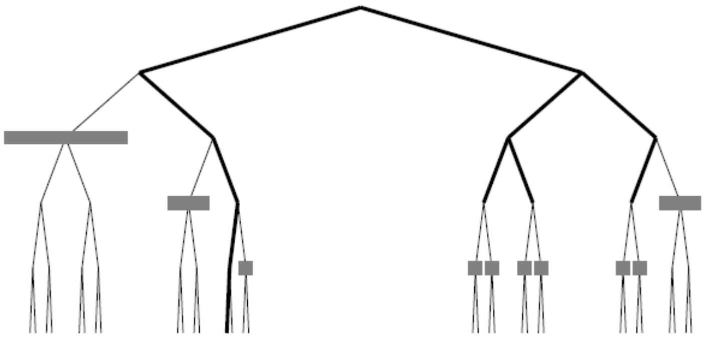
Μαζί, τα C-συμπληρωματικά και τα C-επικαλυπτικά διαστήματα καλύπτουν το $[0, 1]$. Έτσι, σύμφωνα με το θεώρημα Heine-Borel, ένα πεπερασμένο υποσύνολο τους επίσης καλύπτει το $[0, 1]$. Αυτό μας επιτρέπει να επιλέξουμε C-επικαλυπτικά διαστήματα για να ταιριάζουν σε ένα δοσμένο δυαδικό δέντρο, έτσι ώστε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Heine-Borel για να αποδείξουμε κατάλληλα αποτελέσματα για τα δέντρα. Συγκεκριμένα, μπορούμε να δείξουμε ότι το Heine-Borel συνεπάγεται το ασθενές λήμμα του Kőnig και αυτή η συνεπαγωγή είναι αποδείξιμη μέσα στο σύστημα RCA_0.

5.4 Από το Heine-Borel στο ασθενές λήμμα του Kőnig

Η κλασσική απόδειξη του θεωρήματος Heine-Borel στο κεφάλαιο 2.4 υποδηλώνει ότι προέκυψε από το ασθενές λήμμα του Kőnig και μπορούμε να ελπίσουμε ότι θα αποδείξουμε και το αντίστροφο. Παρόλα αυτά, πρέπει να κινηθούμε λίγο διαφορετικά για να αποδείξουμε την ισοδυναμία ανάμεσα σε αυτά τα δύο θεωρήματα στο RCA_0. Πρέπει, λοιπόν, να χρησιμοποιήσουμε την ακολουθιακή μορφή του Heine-Borel και πρέπει να κάνουμε τις αποδείξεις όσο το δυνατό πιο υπολογίσιμες. Αυτά τα αποτελέσματα προέκυψαν από τον Simpson.

Το πρώτο μας μέλημα είναι να αποδείξουμε ότι το ακολουθιακό Heine-Borel συνεπάγεται το ασθενές λήμμα του Kőnig στην ακολουθιακή μορφή του (ισοδύναμη με την κανονική μορφή του): εάν T είναι ένα δυαδικό δέντρο με χωρίς άπειρα μονοπάτια, τότε το T είναι πεπερασμένο. Η προσέγγιση μας είναι στο να δούμε το T ως ένα υπόδεντρο ενός πλήρους δυαδικού δέντρου B του οποίου τα άπειρα μονοπάτια είναι στοιχεία του C και να συνδέσουμε κάποια C-επικαλυπτικά διαστήματα με το T. Ύστερα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Heine-Borel για να συμπεράνουμε ότι το T είναι πεπερασμένο.

Περνάμε από το T σε ένα σύνολο C-επικαλυπτικών διαστημάτων χρησιμοποιώντας κόμβους που ονομάζονται *πεπερασμένα φύλλα* του T, ορίζονται παρακάτω, στα οποία τοποθετούμε τα αντίστοιχα C-επικαλυπτικά διαστήματα. Παρακάτω βλέπουμε ένα παράδειγμα, με τους κόμβους του T που είναι χρωματισμένοι με bolt και τα C-επικαλυπτικά διαστήματα που είναι τοποθετημένα στα πεσμένα φύλλα του T.



Σχήμα 5.3: *Καλύπτοντας τα πεσμένα φύλλα ενός δέντρου*

Ορισμός 5.15. *Ένας κόμβος v του B ονομάζεται* πεσμένο φύλλο *του T εάν $v \notin T$ αλλά $u \in T$, όπου u είναι ο κόμβος πάνω από το v.*

Δύο παρατηρήσεις είναι άμεσες από τον ορισμό:

- Εάν το T δεν έχει άπειρο μονοπάτι τότε τα C-επικαλυπτικά διαστήματα που καλύπτουν τα πεσμένα φύλλα του T καλύπτουν όλα το C -αφού ένα σημείο που δεν καλύπτεται αντιστοιχεί σε ένα άπειρο μονοπάτι, το οποίο φυσικά το T δεν έχει.
- Τα C-επικαλυπτικά διαστήματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικά πεσμένα φύλλα του T είναι ξένα μεταξύ τους -αφού τα C-επικαλυπτικά διαστήματα επικαλύπτονται μόνο εάν βρίσκονται στο ίδιο μονοπάτι και ένα πεσμένο φύλλο δεν μπορεί να βρεθεί στο μονοπάτι του άλλου αφού ένα πεσμένο φύλλο τερματίζει όλα τα μονοπάτια που βρίσκονται κάτω από αυτό.

Ένα πιο σημαντικό αποτέλεσμα για τα μονοπάτια που δεν καλύπτονται είναι το ακόλουθο:

Λήμμα του άπειρα υπολογίσιμου μονοπατιού Εάν το T είναι ένα άπειρο υπολογίσιμο δέντρο με ένα πεπερασμένο αριθμό πεσμένων φύλλων, τότε το T έχει ένα άπειρα υπολογίσιμο μονοπάτι.

Απόδειξη. Αφού το T έχει μόνο πεπερασμένα πολλά πεσμένα φύλλα, υπάρχει ένα επίπεδο n κάτω από το οποίο δεν υπάρχουν πεσμένα φύλλα. Έστω v_1 να είναι ο πιο αριστερός κόμβος του T κάτω από το επίπεδο του n, το οποίο πρέπει να υπάρχει αφού το T έχει πεπερασμένα πολλούς κόμβους.

Αφού δεν υπάρχει πεσμένο φύλλο κάτω από το v_1, ένας από τους δύο κόμβους του B ακριβώς κάτω από το v_1 ανήκει στο T. Έστω v_2 να είναι το πιο αριστερό από τα δύο και επαναλαμβάνουμε για το v_2. Πάλι, τουλάχιστον ένας από τους δύο κόμβους του B ακριβώς κάτω από το v_2 ανήκει στο T. κ.ο.κ.

Με αυτό τον τρόπο μπορούμε *να υπολογίσουμε* (υπολογιστικά) ένα άπειρο μονοπάτι $v_1, v_2, v_3, \ldots$ στο T. □

Το Heine-Borel συνεπάγεται το ασθενές λήμμα του Kőnig. Εάν το T είναι ένα δέντρο χωρίς άπειρα μονοπάτια, τότε το T είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη. Εάν το T είναι ένα δέντρο με ένα μη-άπειρο μονοπάτι, θεωρούμε το σύνολο των C-επικαλυπτικών διαστημάτων να είναι τοποθετημένο στα πεσμένα φύλλα του T. Τότε, από την πρώτη παρατήρηση που είδαμε αυτό το σύνολο των διαστημάτων καλύπτει το C. Έτσι, συνδέοντας αυτά τα διαστήματα με τα C-συμπληρωματικά διαστήματα καλύπτουμε το $[0, 1]$ από ανοιχτά διαστήματα. Το θεώρημα Heine-Borel λέει ότι πεπερασμένα πολλά από αυτά τα διαστήματα επίσης καλύπτουν το $[0, 1]$. Συγκεκριμένα, παίρνουμε πεπερασμένα πολλά C-επικαλυπτικά διαστήματα τοποθετημένα σε πεσμένα φύλλα του T, που καλύπτουν το C.

Στην συνέχεια, αφού τα διαστήματα τοποθετούνται σε αυθαίρετα πεσμένα φύλλα είναι ξένα μεταξύ τους τότε από την δεύτερη παρατήρηση ισχύει ότι το T έχει μόνο πεπερασμένα πολλά πεσμένα φύλλα. Αλλά εάν το T είναι άπειρο, προκύπτει από το λήμμα του άπειρα υπολογίσιμου μονοπατιού και από την αναδρομική συλλογή ότι το T έχει ένα άπειρο μονοπάτι, το οποίο είναι αντίθετο με την υπόθεση μας. Άρα καταλήξαμε σε άτοπο και το T είναι πεπερασμένο. □

Αυτό που μόλις αποδείξαμε μπορεί να αποδειχθεί στο RCA_0, χάρη στην υπολογισιμότητα του μονοπατιού από το δέντρο στο λήμμα. Η συνεπαγωγή αυτή, απαιτεί μόνο μία ειδική περίπτωση του Heine-Borel, όπου τα επικαλυπτικά διαστήματα δημιουργούν μία *ακολουθία*. (Το σύνολο των C-συμπληρωματικών και των C-επικαλυπτικών διαστημάτων μπορούν να γραφτούν ως μία ακολουθία απαριθμώντας τα επίπεδο προς επίπεδο.) Επίσης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα άκρα των διαστημάτων είναι *ρητοί*. Αυτή είναι η φυσική εκδοχή του Heine-Borel, αλλά πρέπει να γίνει ξεκάθαρο ότι δεν είναι η κλασσική εκδοχή, το ονομάζουμε *ακολουθιακό Heine-Borel*. Όπως το κλασσικό έτσι και το ακολουθιακό είναι αποδείξιμα στο RCA_0.

Η παραπάνω απόδειξη μας δείχνει ότι το ακολουθιακό θεώρημα Heine-Borel συνεπάγεται το ασθενές λήμμα του Kőnig στο RCA_0. Θα δούμε τώρα ότι ισχύει το αντίστροφο στο RCA_0.

5.5 Από το ασθενές λήμμα του Kőnig στο Heine-Borel

Το ακολουθιακό θεώρημα Heine-Borel λέει ότι: εάν μία ακολουθία $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$ ρητών διαστημάτων καλύπτει το $[0, 1]$ τότε κάποιο αρχικό κομμάτι της ακολουθίας $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ επίσης καλύπτει το $[0, 1]$. Θα το αποδείξουμε μέσω του ασθενούς λήμματος του Kőnig. Η απόδειξη είναι όμοια με την κατασκευή του συνόλου Cantor C, φτιάχνοντας ένα δυαδικό δέντρο του οποίου οι κόμβοι στο επίπεδο n είναι κλειστά διαστήματα που μένουν όταν τα διαστήματα $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ αφαιρούνται από το $[0, 1]$.

Το ασθενές λήμμα του Kőnig συνεπάγεται το ακολουθιακό Heine-Borel. Εάν (a_i, b_i) είναι ρητά διαστήματα τέτοια ώστε η άπειρη ακολουθία $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$ να καλύπτει το $[0, 1]$ τότε για κάποιο n, η $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ επίσης καλύπτει το $[0, 1]$.

Απόδειξη. Δοσμένης της ακολουθίας ρητών διαστημάτων $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$ κατασκευάζουμε ένα δέντρο T του οποίου οι κόμβοι που είναι στο επίπεδο n είναι κλειστά υποδιαστήματα του $[0,1]$, δηλαδή είναι υποδιαστήματα της μορφής $[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}]$ τα οποία δεν καλύπτονται πλήρως από το $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots,(a_n,b_n)$

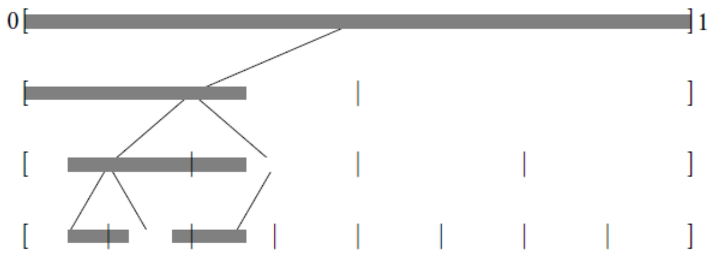
Για παράδειγμα, όταν τα πρώτα τρία διαστήματα του (a_i,b_i) είναι τα $(\frac{1}{3},\frac{4}{3}),(-\frac{1}{8},\frac{1}{16})$ και $(\frac{5}{32},\frac{7}{32})$ όπως βλέπουμε και στην παρακάτω εικόνα οι αντίστοιχοι κόμβοι του T είναι

$$[0,\frac{1}{2}] \text{ στο επίπεδο 1 αφού } [\frac{1}{2},1] \text{ καλύπτεται από το } [\frac{1}{3},\frac{4}{3}],$$

$$[0,\frac{1}{4}],[\frac{1}{4},\frac{1}{2}] \text{ στο επίπεδο 2 αφού κανένα δεν καλύπτεται από τα } (\frac{1}{3},\frac{4}{3}),(-\frac{1}{8},\frac{1}{16})$$

$$[0,\frac{1}{8}],[\frac{1}{8},\frac{1}{4}],[\frac{1}{4},\frac{3}{8}] \text{ στο επίπεδο 3 αφού} [\frac{1}{8},\frac{1}{4}] \text{ δεν καλύπτεται από το } (\frac{5}{32},\frac{7}{32}).$$

Υπάρχει ένας κόμβος του T από κάθε υποδιάστημα στο επίπεδο n στο κάθε μισό αυτού που παραμένει στο επίπεδο $n+1$. Έτσι το T είναι δυαδικό δέντρο.



Σχήμα 5.4: *Το δέντρο των διαστημάτων που δεν καλύπτονται πλήρως*

Αφού $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots$ καλύπτει το $[0,1]$, κάθε $x\in[0,1]$ πέφτει σε κάποιο (a_i,b_i). Πράγματι, για n αρκετά μεγάλο, το ένα από τα 2^n διαστήματα που περιέχει το x πέφτει σε κάποιο (a_i,b_i) και όμοια κάνουν τα υποδιαστήματα δεξιά και αριστερά από αυτό. Στο στάδιο που αυτό συμβαίνει, κανένα από τα τρία υποδιαστήματα δεν μπαίνουν στο T και με αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να τερματίζουν όλα τα μονοπάτια του T που κατευθύνονται στο x . Έτσι, το T δεν έχει άπειρο μονοπάτι και το T είναι πεπερασμένο από το ασθενές λήμμα του Kőnig.

Εάν το n είναι το πρώτο επίπεδο που δεν περιλαμβάνει κόμβους του T, τότε συνεπάγεται από τον ορισμό του T, ότι το $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots,(a_n,b_n)$ καλύπτει το $[0,1]$. □

Στην προηγούμενη απόδειξη το δέντρο T είναι προφανώς υπολογίσιμο από την ακολουθία $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots$ οπότε η απόδειξη μπορεί να γίνει μέσα στο RCA_0. Έτσι, παρόλο που το ασθενές λήμμα του Kőnig αλλά ούτε και το ακολουθιακό θεώρημα Heine-Borel είναι αποδείξιμα στο RCA_0, η ισοδυναμία τους είναι. Έτσι, το ασθενές λήμμα του Kőnig είναι το ”σωστό” αξίωμα για να προσθέσουμε στο RCA_0 για να αποδείξουμε το ακολουθιακό θεώρημα Heine-Borel.

5.6 Θεωρήματα του WKL_0

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε το $WKL_0 = RCA_0 +$ το ασθενές λήμμα του Kőnig , έτσι το WKL_0 είναι το RCA_0 με το ασθενές λήμμα του Kőnig ως ένα πρόσθετο σύνολο υπαρξιακού αξιώματος (συγκεκριμένα το ασθενές λήμμα του Kőnig συνεπάγεται την αναδρομική συλλογή, έτσι είναι το *σύνολο υπαρξιακού αξιώματος* του WKL_0). Συνεπάγεται, λοιπόν, από τα αποτελέσματα που είδαμε ότι το Heine-Borel είναι θεώρημα του WKL_0. Δεν είναι θεώρημα του RCA_0, αφού το ασθενές λήμμα του Kőnig δεν αποδεικνύεται στο RCA_0, σύμφωνα με το αντιπαράδειγμα στην ενότητα 3.5.

Το WKL_0 είναι αξιοσημείωτο αφού μπορεί να αποδείξει όχι μόνο βασικά θεωρήματα όπως το Heine-Borel αλλά επίσης και σημαντικά θεωρήματα που θεωρούνται πιο δύσκολα. Ανάμεσα σε αυτά είναι και το θεώρημα του σταθερού σημείου του Brouwer[1]σε 2 ή παραπάνω διαστάσεις.

Το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer για μία διάσταση συνεπάγεται εύκολα από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, οπότε είναι αποδείξιμο στο RCA_0. Η διαφορά ανάμεσα στο RCA_0 και το WKL_0 φαίνεται στην διαφορά ανάμεσα στη μία και στις παραπάνω διαστάσεις. Μία απόδειξη για το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer είναι σχετικά εύκολη αφού μία από της στάνταρ αποδείξεις -από το λεγόμενο *λήμμα του Sperner*- μετατρέπεται εύκολα μία απόδειξη στο WKL_0.

Λιγότερο προφανές είναι το αντίστροφο. Κατά συνέπεια, το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer είναι ισοδύναμο με το ασθενές λήμμα του Kőnig μέσω του RCA_0.

[1] Κάθε συνεχής συνάρτηση f από την μοναδιαία σφαίρα D_n στον εαυτό της $f : D_n \to D_n$, έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει ένα x με $f(x) = x$.

5.7 Τα ”μεγάλα πέντε” συστήματα

Τα θεωρήματα της ανάλυσης και της τοπολογίας που είδαμε ως τώρα ταιριάζουν άψογα με τα συστήματα RCA_0, WKL_0 και ACA_0. Εάν το RCA_0 δεν τα αποδεικνύει απευθείας τότε μπορεί να αποδείξει ισοδυναμίες είτε με το ασθενές λήμμα του Kőnig ή με την αριθμητική συλλογή και τα αξιώματα WKL_0 και ACA_0 αντίστοιχα. Είναι λοιπόν δελεαστικό να τελειώσουμε την εργασία αυτή με την ακόλουθη ταξινόμηση των θεωρημάτων.

Το RCA_0 αποδεικνύει το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής

Το ACA_0 αποδεικνύει το άπειρο λήμμα του Kőnig

$\Leftrightarrow$ το ακολουθιακό θεώρημα Bolzano-Weierstrass

$\Leftrightarrow$ την ακολουθιακή αρχή ελαχίστου άνω φράγματος

$\Leftrightarrow$ το κριτήριο σύγκλισης του Cauchy

(Οι ισοδυναμίες αποδεικνύονται από το RCA_0).

Το WKL_0 αποδεικνύει το ακολουθιακό θεώρημα Heine-Borel

$\Leftrightarrow$ το Θεώρημα ομοιόμορφης συνέχειας

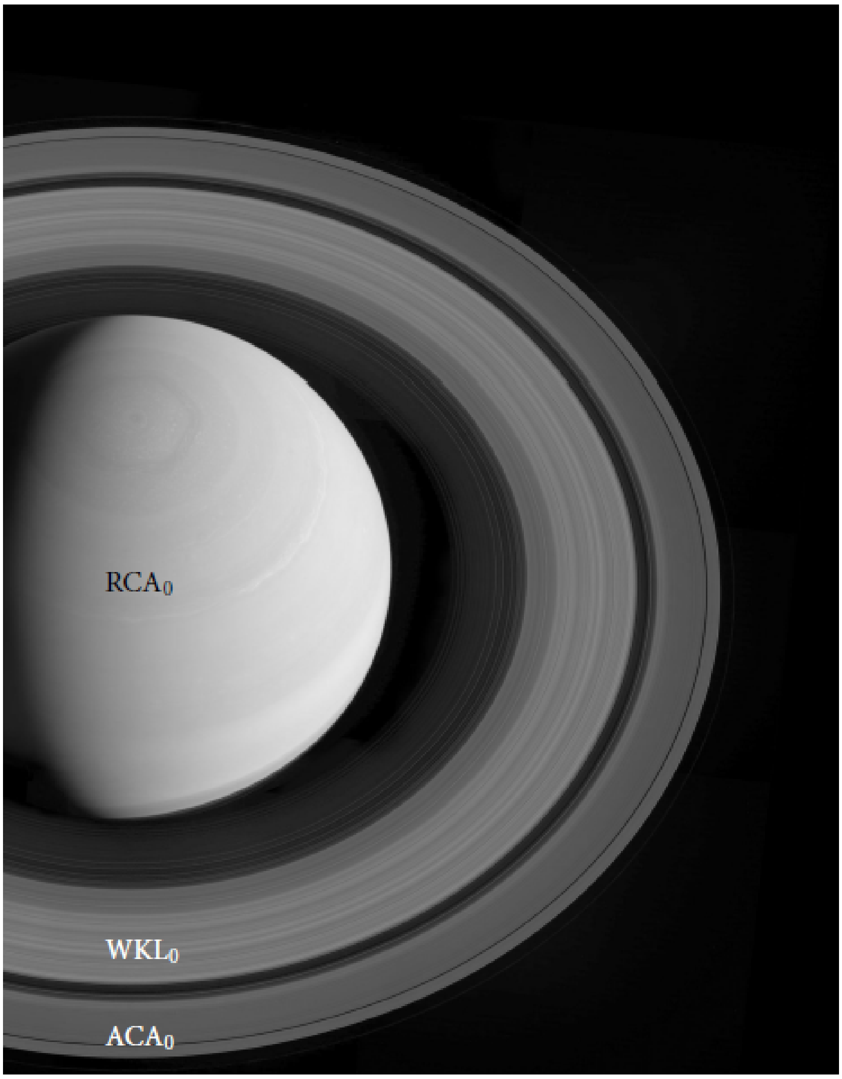
$\Leftrightarrow$ το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

$\Leftrightarrow$ το ολοκλήρωμα Riemann για συνεχείς συναρτήσεις

$\Leftrightarrow$ το θεώρημα του σταθερού σημείου του Brouwer

$\Leftrightarrow$ το θεώρημα της καμπύλης Jordan

(Οι ισοδυναμίες αποδεικνύονται από το RCA_0).

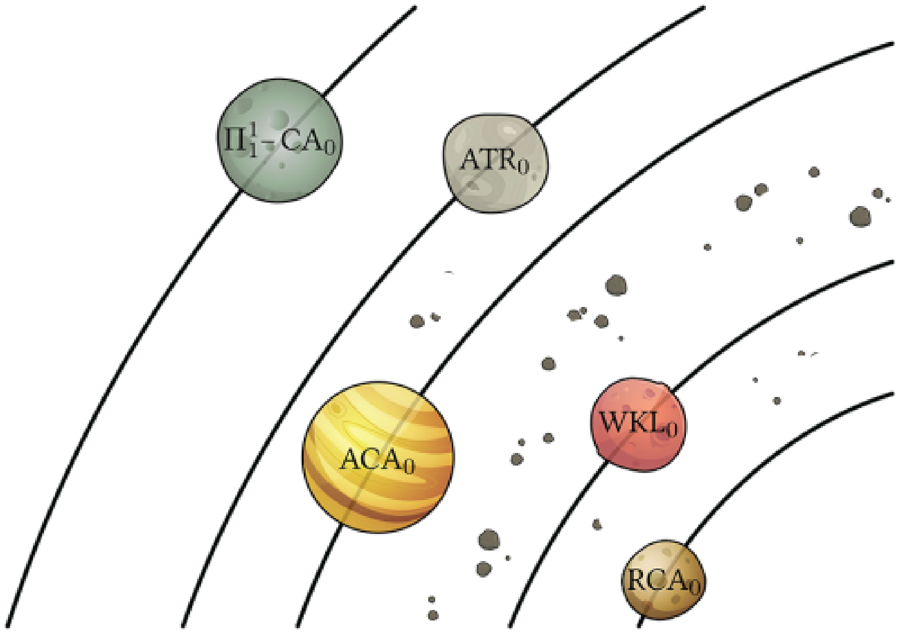


Σχήμα 5.5: *Το RCA_0 και δύο από τους δακτυλίους του.*

Τα μαθηματικά όμως ποτέ δεν τελειώνουν έτσι απλά και στην πραγματικότητα υπάρχουν ανώμαλα θεωρήματα, κάποια εκ των ποίων αποδεικνύονται από δύο νέα συστήματα. Ένα τέτοιο θεώρημα είναι και το άπειρο θεώρημα του Ramsey $\forall k RT(k)$ που αναφέραμε στο κεφάλαιο 4. Όπως είπαμε το άπειρο θεώρημα του Ramsey δεν είναι αποδείξιμο στο ACA_0, όμως κάποιες από τις ειδικές του περιπτώσεις είναι ισοδύναμες με την αριθμητική συλλογή.

Έτσι, ελπίζουμε ότι το άπειρο λήμμα του Ramsey είναι αποδείξιμο από ένα ισχυρό σύνολο υπαρξιακών αξιωμάτων. Δύο τέτοια αξιώματα έχουν ξεχωρίσει και έχουν μία ποικιλία ενδιαφερουσών ισοδυναμιών. Το πιο ασθενές από τα δύο ονομάζεται *αριθμητική υπερπεπερασμένη συλλογή* και προσθέτοντας την στην PA μας δίνει ένα σύστημα που ονομάζεται ATR_0. Το ATR_0 είναι αρκετά ισχυρό για να αποδείξει το άπειρο θεώρημα του Ramsey, για την ακρίβεια είναι υπεραρκετό αφού το άπειρο θεώρημα του Ramsey δεν συνεπάγεται την αριθμητική υπερπεπερασμένη συλλογή.

Το πιο ισχυρό, εκ των δύο, σύνολο υπαρξιακών αξιωμάτων ονομάζεται Π^1_1 *συλλογή*. Το σύμβολο Π^1_1 υποδηλώνει ότι οι ιδιότητες $\phi(n)$ επιτρέπεται να περιλαμβάνουν ένα γενικό σύνολο για ποσοδείκτες. Ένας τέτοιος ποσοδείκτης προκύπτει στον ορισμό μίας *αλά διατεταγμένης σχέσης* R του $\mathbb{N}$, όπου το R είναι μια γραμμική διάταξη και κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ένα ελάχιστο στοιχείο υπό την διατεταγμένη σχέση R. Το σύστημα με την Π^1_1 συλλογή ως το σύνολο υπαρξιακών αξιωμάτων ονομάζεται $\Pi^1_1 - CA_0$. Τα συστήματα RCA_0, WKL_0, ACA_0, ATR_0 και $\Pi^1_1 - CA_0$ είναι τα πέντε μεγάλα συστήματα αφού μαζί καλύπτουν τα περισσότερα από τα θεωρήματα που υπάρχουν στα μαθηματικά.



Σχήμα 5.6: *Τα ”μεγάλα πέντε” συστήματα*

Κεφάλαιο 6

Παραδείγματα Βιβλιογραφικών Αναφορών

Τύπος βιβλιογραφικής πηγής	Αριθμός αναφοράς
Βιβλίο ξενόγλωσσο	[1], [2], [3]
Βιβλίο ελληνικό	[4], [5]
Ιστοσελίδα	[6],

Βιβλιογραφία

[1] John Stillwell. *Reverse Mathematics*. Princeton University Press, New Jersey, 2018.

[2] Stephen G.Simpson. *Reverse Mathematics*. Sam Buss, Massachusetts, 2005.

[3] PH. D DAVID HILBERT. *The Foundations of Geometry*. THE OPEN COURT PUBLISHING COMPANY, ILLINOIS, 1950.

[4] Σωτήρης Κ. Ντούγιας. *Απειροστικός λογισμός Ι*. Leader Books, Αθήνα, 3η έκδοση, 2007.

[5] Ian Stewart και David Tall. *Τα θεμέλια των μαθηματικών*. Odysseus plublishing, 2η έκδοση, 1977.

[6] *Από την Ευκλείδεια Γεωμετρία στη Γεωμετρία των Δικτύων*. http://stellad-old.pde.sch.gr/pekes/wp-content/uploads/2019/09/2019-09-%CE%93%CE%95%CE%A9%CE%9C%CE%95%CE%A4%CE%A1%CE%99%CE%91-%CE%94%CE%99%CE%9A%CE%A4%CE%A5%CE%91-1.pdf.