ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
που εκπονήθηκε για τη χορήγηση
Διπλώματος Μεταπτυχιακών Σπουδών
από τον

ΓΚΟΝΟ ΦΙΛΙΠΠΟ ΤΟΥ ΙΩΑΝΝΗ

Α.Μ. 4282020008

ΘΕΜΑ: Εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής σε σχολικά εγχειρίδια θετικών επιστημών: μια διεπιστημονική προσέγγιση για το μάθημα των Οικονομικών επιστημών.

Impressions of the rate of change in science textbooks: an interdisciplinary approach to the subject of Economics.

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Ανδρέας Μούτσιος – Ρέντζος	Επίκουρος – Καθηγητής	Ε.Κ.Π.Α.	Επιβλέπων
Φραγκίσκος Καλαβάσης	Καθηγητής	ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ	Μέλος
Γεώργιος Κρητικός	Μέλος, ΕΔΙΠ	ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ	Μέλος

Ρόδος, 2022

Η έγκριση της παρούσης Διπλωματικής Εργασίας στο πλαίσιο του Π.Μ.Σ. «Διδακτική Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση: Διεπιστημονική Προσέγγιση» του Τμήματος Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού του Πανεπιστημίου Αιγαίου δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέως.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους συνέβαλλαν στην ολοκλήρωση αυτής της μελέτης. Καταρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω το επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ανδρέα Μούτσιο-Ρέντζο για την συνεχή του υποστήριξη και καθοδήγηση. Επιπρόσθετα θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της συμβουλευτικής μου επιτροπής κ. Φραγκίσκο Καλαβάση και Γεώργιο Κρητικό για την υπομονή τους και τις πάντα χρήσιμες συμβουλές τους. Χωρίς την επιστημονική συμβολή των παραπάνω θα ήταν αδύνατο να εκπονηθεί η συγκεκριμένη μελέτη. Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω την σύζυγο μου και τα παιδιά μου για την υπομονή και υποστήριξη που έδειξαν όλο αυτό το διάστημα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Περίληψη……………………………………………………………………….5
2. Εισαγωγή……………………………………………………………….……9
3. Βιβλιογραφική Ανασκόπηση………………………………………………14
3.1 Η Έννοια του Ρυθμού Μεταβολής……………………………………………14
3.2 Οι Μαθηματικές Αναπαραστάσεις…………………………………………21
3.3 Τα Σχολικά Εγχειρίδια……………………………………………………...22
3.4 Η Παρούσα Μελέτη – Ερευνητικά Ερωτήματα………………………………23
4. Μεθοδολογία…………………………………………………………………25
4.1 Το Εργαλείο Καταγραφής Δεδομένων………………………………………25
5. Οι Εμφανίσεις του Ρυθμού Μεταβολής στα Σχολικά Εγχειρίδια της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης………………………………………………...29
5.1 Οι Εμφανίσεις του Ρυθμού Μεταβολής στο Μάθημα Αρχές Οικονομικής Θεωρίας………………………………………………………………………29
5.2 Οι Εμφανίσεις του Ρυθμού Μεταβολής στο Μάθημα της Φυσικής…………….37
5.3 Οι Εμφανίσεις του Ρυθμού Μεταβολής στο Μάθημα της Χημείας…………….43
5.4 Οι Εμφανίσεις του Ρυθμού Μεταβολής στο Μάθημα των Μαθηματικών……...45
6. Ανάλυση των Δεδομένων και των Αποτελεσμάτων……………………………..48
6.1 Τα αποτελέσματα στο μάθημα Αρχές Οικονομικής Θεωρίας…………………...48
6.2 Τα αποτελέσματα στο μάθημα της Φυσικής……………………………………50
6.3 Τα αποτελέσματα στο μάθημα της Χημείας……………………………………52
6.4 Τα αποτελέσματα στο μάθημα των Μαθηματικών……………………………...54
7. Συζήτηση……………………………………………………………………...57
8. Τα συμπεράσματα της Έρευνας………………………………………………64

Βιβλιογραφία…………………………………………………………………70

Παράρτημα ……………………………………………………………….…75

1. ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία θα μελετηθεί ο ρυθμός μεταβολής και οι εμφανίσεις του στα σχολικά εγχειρίδια διαφορετικών επιστημονικών πεδίων, σε σύγκριση με αυτές στο μάθημα των Οικονομικών. Οι μαθητές τις Γ΄ Λυκείου έρχονται αντιμέτωποι με έννοιες όπως το Κόστος Ευκαιρίας, το Οριακό Προϊόν, το Οριακό κόστος και άλλες, που είναι πρωτόγνωρες για αυτούς. Είναι όμως αυτό πραγματικό; Μήπως απλά πρόκειται για μια έννοια που τους είναι οικεία και για την οποία υπάρχει ήδη η προ υπάρχουσα γνώση, αλλά οι μαθητές δεν κατορθώνουν να αναγνωρίσουν την διαφορετική της αναπαράσταση; Ακόμη και για αυτούς που δεν συγκλίνουν με το κονστρουκτιβιστικό μοντέλο η ύπαρξη προηγούμενης γνώσης θεωρείται σημαντική, διότι είναι αδύνατο για κάποιον να χτίσει νέα γνώση χωρίς να ξέρει ποια είναι η προγενέστερή του. (Kapur, 2011). Επομένως είναι πολύ σημαντικό για τους μαθητές να μπορούν να αναγνωρίσουν αυτές τις έννοιες και να τις συνδυάσουν με αυτά που ήδη γνωρίζουν, και να καταχτήσουν έτσι μεγαλύτερο επίπεδο γνώσης. Εξάλλου μέσω των αναπαραστάσεων υπάρχει η δυνατότητα υπέρβασης γνωστικών ή διδακτικών εμποδίων (Goldin & Shteingold, 2001)

Βασισμένη σε αυτή την λογική, στην παρούσα εργασία ασχοληθήκαμε με την έννοια του ρυθμού μεταβολής. Αυτή η επιλογή δεν είναι τυχαία διότι ο ρυθμός μεταβολής έχει εξέχουσα σημασία στην οικονομική επιστήμη, αφού πολλά οικονομικά μοντέλα ισορροπούν σε σημεία που κάποιος ρυθμός μεταβολής ισούται με κάποιο ελάχιστο ή μέγιστο, (MR=MC=P, MC=min AVC, κτλ.). Σε αυτή την ανάλυση μια απλή γνώση ενός ορισμού η ενός τύπου δεν είναι αρκετή. Απαραίτητη είναι η πλήρη κατανόηση της έννοιας, αλλά και των διαφορετικών αναπαραστάσεων της, καθώς και η μετάβαση από την μία στην άλλη, δηλαδή από την εννοιολογική στην αλγεβρική, μετά στο σχεδιάγραμμα και τον πίνακα και αντίστροφα. Για την κατανόηση των Οικονομικών εννοιών είναι απαραίτητο οι μαθητές να κάνουν τις απαραίτητες συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών επιστημονικών πεδίων, τις μετασυνδέσεις και έπειτα να κατακτήσουν την γνώση σε ένα μεταγνωστικό επίπεδο. Αυτό οφείλετε κυρίως στην φύση των Οικονομικών προβλημάτων, τα όποια είναι προβλήματα που προέρχονται από την καθημερινή μας ζωή και απαιτούν την διεπιστημονική οπτική για την επίλυση τους. Όλα αυτά ενώ αρχικά φαντάζουν άγνωστα, στην πραγματικότητα δεν είναι, και αν κάποιος εξαιρέσει την καθαρά οικονομική εννοιολογική τοποθέτηση όλες οι υπόλοιπες αναπαραστάσεις βρίσκονται ήδη στα σχολικά εγχειρίδια της φυσικής, της χημείας και των μαθηματικών απλά οι μαθητές αποτυγχάνουν να κάνουν την σύνδεση. Σύμφωνα με την «Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση» τα προβλήματα του πραγματικού κόσμου χρησιμοποιούνται σαν πηγή ή έναρξη για την εκμάθηση και την ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών. Έτσι λοιπόν, καταδείξαμε αυτές τις εμφανίσεις που είναι διάσπαρτες στα σχολικά εγχειρίδια και τονίσαμε ότι, αν οι μαθητές μπορούν να τις αναγνωρίσουν και μπορέσουν να κάνουν τις απαραίτητες συνδέσεις, θα επιτύχουν ένα υψηλότερο επίπεδο γνώσης. Βέβαια σε αυτό πρέπει να ληφθεί υπόψη και ο τρόπος που παρουσιάζονται οι έννοιες στα σχολικά εγχειρίδια καθώς και η προσέγγιση που γίνεται από τον εκάστοτε εκπαιδευτικό, των οποίων οι ρόλοι είναι πολύ σημαντικοί. Όλα τα παραπάνω έγιναν με βάση την συστημική προσέγγιση και με εναρκτήριο τις εμφανίσεις της έννοιας του ρυθμού μεταβολής στα σχολικά εγχειρίδια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και πιο συγκεκριμένα στις τάξεις του Λυκείου και τα μαθήματα των Μαθηματικών, της Φυσικής, της Χημείας και των Αρχών Οικονομικής Επιστήμης.

Πιο συγκεκριμένα αφού έγινε μια ανάλυση της υπάρχουσας κατάστασης, κατόπιν επικεντρωθήκαμε στην μελέτη των σχολικών εγχειριδίων και της εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής σε διαφορετικά επιστημονικά πεδία. Έπειτα αναλύσαμε αυτές τις εμφανίσεις με συγκεκριμένα κριτήρια για να διαπιστώσουμε τις συγκλίσεις και τις αποκλίσεις μεταξύ των επιστημονικών πεδίων και τα συγκρίναμε με αυτές στο μάθημα του Α.Ο.Θ. (Αρχές Οικονομικής Θεωρία). Έτσι μπορέσαμε να καταλάβουμε καλύτερα τον τρόπο που αντιδρούν οι μαθητές όταν έρχονται αντιμέτωποι με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις, και πως καταφέρνουν να κάνουν τις συνδέσεις και μετασυνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών εννοιών ώστε να φτάσουν στο μεταγνωστικό επίπεδο που είναι απαραίτητο για την επίλυση των οικονομικών προβλημάτων.

1. SUMMARY

In the present thesis, the rate of change and its appearances in school textbooks of different scientific fields will be studied, compared to those in the subject of Economics. The students of the Third Lyceum are confronted with concepts such as the Opportunity Cost, the Marginal Product, the Marginal Cost and others that are unprecedented for them. But is this real? Is it simply a concept that is familiar to them and about which pre-existing knowledge already exists, but the students fail to recognize its different representation? Even for those who do not converge with the constructivist model, the existence of prior knowledge is considered important, because it is impossible for someone to build new knowledge without knowing what his predecessor is. (Kapur, 2011). It is therefore very important for students to be able to recognize these concepts and combine them with what they already know, and thus acquire a greater level of knowledge. Moreover, through representations there is the possibility of overcoming cognitive or teaching obstacles (Goldin & Shteingold, 2001).

Based on this logic, in this paper we dealed with the concept of the rate of change. This choice is not random because the rate of change is of paramount importance in economics, since many economic models balance at points where a rate of change equals a minimum or maximum, (MR=MC=P, MC=min AVC, etc.). In this analysis a simple knowledge of a definition or one type is not enough. It is necessary to fully understand the concept, but also its different representations, as well as the transition from one to the other, that is, from the conceptual to the algebraic, then to the diagram and the table and vice versa. In order to understand economic concepts it is necessary for students to make the necessary connections between different scientific fields, the interconnections and then to acquire knowledge at a metacognitive level. This is mainly due to the nature of economic problems, which are problems that come from our daily life and require the interdisciplinary perspective to solve them. All this while initially seem unknown, in fact it is not, and if one excludes the purely economic conceptual positioning all the other representations are already in the textbooks of physics, chemistry and mathematics simply the students fail to make the connection. According to "Realistic Mathematical Education", the problems of the real world are used as a source or initiation for the learning and development of mathematical concepts. So, we demonstrated these appearances that are scattered in the textbooks and we emphasized that if the students can recognize them and can make the necessary connections, they will achieve a higher level of knowledge. Of course, this must also take into account the way the concepts are presented in school textbooks as well as the approach taken by each teacher, whose roles are very important. All the above was based on the systemic approach and with the inaugural appearances of the concept of rhythm of change in secondary education textbooks and more specifically in Lyceum classes and mathematics, physics, chemistry and principles of economics.

More specifically, after an analysis of the current situation, we then focused on the study of school textbooks and the appearances of the rate of change in different scientific fields. Then we analyzed these appearances with specific criteria in order to ascertain the convergences and divergences between the scientific fields and we compared them with them in the course of A.O.Th. (Principles of Economic Theory). In this way, we were able to better understand the way students react when confronted with the different representations, and how they manage to make the connections and connections between the different concepts in order to reach the metacognitive level necessary to solve financial problems.

2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στη σύγχρονη οικονομία της γνώσης, οι κοινωνίες απαιτούν μεγαλύτερο μαθηματικό και επιστημονικό αλφαβητισμό και τεχνογνωσία από τους πολίτες τους από ποτέ. Στο επίκεντρο αυτών των απαιτήσεων βρίσκεται η ανάγκη για μεγαλύτερη συμμετοχή των μαθητών στα σχολικά μαθηματικά και την επιστήμη (Bishop, 2008). Συγχρόνως η αλματώδης τεχνολογική εξέλιξη οδηγεί όλο και περισσότερο σε μεγαλύτερο καταμερισμό της εργασίας δημιουργώντας όλο και πιο πολύπλοκα και απαιτητικά αλληλεξαρτούμενα συστήματα. Επομένως οδηγούμαστε σε μια αυξανόμενη ενδεχομενικότητα και πολυπλοκότητα που επηρεάζουν και το σχολείο ως σύστημα και την κοινωνία ως σύνολο. Σύμφωνα με το Κοντάκο (2014) ο όρος «ενδεχομενικότητα» περιγράφει το δεδομένο (το δοκιμασμένο, το προσδοκώμενο, το μελετημένο, το υποτιθέμενο) όσον αφορά μια πιθανή ετερότητα˙ περιγράφει αντικείμενα στον ορίζοντα μελλοντικών αλλαγών. Προϋποθέτει το δεδομένο κόσμο, δεν περιγράφει καθόλου το ενδεχόμενο, αλλά αυτό, που βάσει της πραγματικότητας ενδέχεται να συμβεί διαφορετικά. Πολυπλοκότητα από την άλλη, είναι όταν το όλον είναι μεγαλύτερο και μικρότερο από το άθροισμα των μερών του. Η κομβική έννοια, ως ιδιότητα ή ικανότητα των κοινωνικών συστημάτων (ερμηνευτική οντολογία: τι και πώς το μπορούν; Ποικιλοτροπία), είναι αναμφισβήτητα η πολυπλοκότητα, η οποία προσδιορίζει το βαθμό της πολυμορφίας, της δικτύωσης και του φόρτου, συνεπακόλουθα, ενός πεδίου αποφάσεων. (Κοντάκος, 2018). Για πολλούς ερευνητές υπάρχει μία κοινή αντικειμενική έννοια του όρου πολυπλοκότητα. Πηγαίνοντας πίσω στην Λατινική ρίζα της λέξης ‘’complexus’’ που σημαίνει περιπλέκω, περιελίσσω, περισφίγγω, καταλήγουμε στα παρακάτω: προκειμένου να έχουμε ένα πολύπλοκο χρειαζόμαστε δύο ή περισσότερα στοιχεία, τα οποία είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με τέτοιο τρόπο που κάνει τον διαχωρισμό τους πολύ δύσκολο. (Αρνέλλος & Σπύρου, 2002)

Μεταξύ των εκπαιδευτικών που ενδιαφέρονται για την πολυπλοκότητα, υπάρχει συχνή απήχηση στις έννοιες ότι ένα πολύπλοκο σύστημα είναι αυτό που γνωρίζει (δηλαδή, αντιλαμβάνεται, ενεργεί, συμμετέχει και αναπτύσσεται) ή/και μαθαίνει (προσαρμόζεται, εξελίσσεται, διατηρεί την αυτοσυνέπεια κ.λπ.) (Davis & Simmt, 2003). Αφενός η αναβάθμιση των Μαθηματικών από τη συνύφανσή τους με το πεδίο της πολυπλοκότητας, αφετέρου τα απογοητευτικά αποτελέσματα των διεθνών συγκριτικών ερευνών για την σχολική αποτυχία στην νοηματική κατανόηση των γλωσσών, των μαθηματικών και των επιστημών, κατέστησαν το διεπιστημονικό τοπίο πεδίο ερευνών και αντιπαραθέσεων για το περιεχόμενο και τις διασυνδέσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης (Καλαβάσης & Μούτσιος Ρέντζος, 2018). Επιπλέον η αγορά εργασίας και κατά συνέπεια το εκπαιδευτικό σύστημα απαιτεί την στροφή προς την επίλυση πραγματικών προβλημάτων, που απαιτούν την συνεργασία όλο και περισσότερων επιστημονικών πεδίων.

Χρήσιμο σε αυτό το σημείο θα ήταν να αναφερθούμε στις θεωρίες μάθησης, τονίζοντας τα βασικά τους χαρακτηριστικά τους. Η πρώτη που θα αναφερθούμε είναι αυτή του Συμπεριφορισμού. Η θεωρία αυτή βασίζεται στην λογική ότι η ανάπτυξη συνηθειών – συμπεριφορών από τον μαθητή μέσα από συγκεκριμένη σειρά μαθημάτων οδηγεί στην μάθηση με τα λιγότερα πιθανά λάθη. (Καλαβάσης, Καφούση, Σκουμπουρδή, & Φεσάκης, 2018). Η μάθηση ορίζεται ως μια αλλαγή στη συμπεριφορά του μαθητή μέσω εμπειριών και ασκήσεων που τίθενται από τον εκπαιδευτή (Κοτρίδης & Παπαδοπούλου, 2010). Ο μπιχεβιορισμός όπως αλλιώς αναφέρεται, είναι μια θεωρία για την ανθρώπινη ανάπτυξη που ξεκίνησε από τον Αμερικανό εκπαιδευτικό ψυχολόγο Edward Thorndike και αναπτύχθηκε από τους επίσης Αμερικάνους John Watson και B.F. Skinner. Υποστηρίζει ότι οι άνθρωποι μπορούν να εκπαιδευτούν ή να προετοιμαστούν να ανταποκρίνονται με συγκεκριμένους τρόπους σε συγκεκριμένα ερεθίσματα και πως αν υπάρχουν τα σωστά ερεθίσματα προσωπικότητες και συμπεριφορές ατόμων, ακόμη και ολόκληροι πολιτισμοί μπορούν να κωδικοποιηθούν και να ελεγχθούν. Συμπεριφορά, σύμφωνα με τον πιο πάνω ορισμό είναι η ανταπόκριση ενός οργανισμού σε ερεθίσματα ή κίνητρα. Η συμπεριφορά είναι αντικειμενική και μπορεί να παρατηρηθεί και να αξιολογηθεί. (Δημητριάδης, 2015). Επομένως κύρια σημεία της θεωρίας είναι η έμφαση στην μάθηση συμπεριφορών, η ενίσχυση αυτών των συμπεριφορών ή η αποθάρρυνση των μη επιθυμητών. Ο ρόλος του μαθητή είναι παθητικός, ενώ ο εκπαιδευτικός κάνει χρήση κυρίως του πειράματος και της παρατήρησης, χρησιμοποιώντας την ποσοτική ερευνητική μεθοδολογία και την επανάληψη. Η μάθηση εκδηλώνεται με την εμφάνιση αλλαγής της συμπεριφοράς του εκπαιδευόμενου και ενισχύεται με την ανταμοιβή, όταν εκδηλώνεται η επιθυμητή συμπεριφορά. Επικρίθηκε τα τελευταία χρόνια διότι ο μαθητής αντιμετωπίζεται ως ένας παθητικός δέκτης που συσσωρεύει πληροφορίες και δεξιότητες.

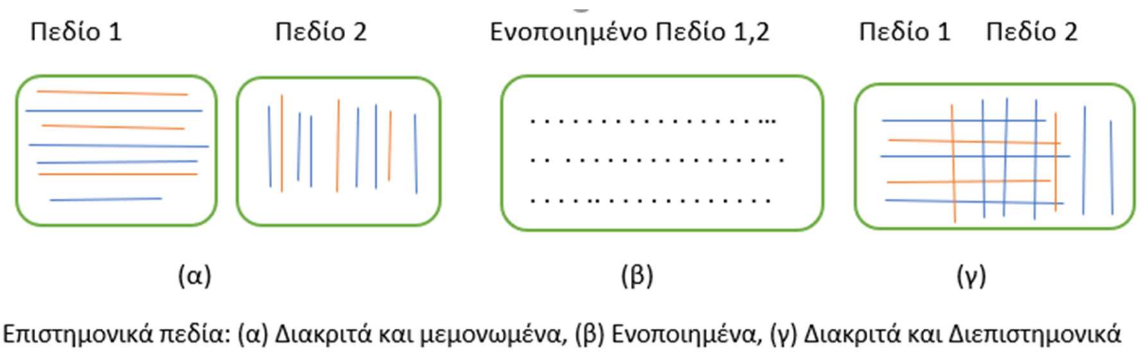
Νεότερη σε εξέλιξη και γενικότερης αποδοχής τυγχάνει η θεωρία του Κονστρουκτιβισμού. Η ανάπτυξη της μάθησης είναι μια διαρκής οικοδόμηση των γνώσεων σε αλληλεπίδραση με το περιβάλλον. Σε αυτό το μοντέλο οι μαθητευόμενοι βοηθιούνται να ερμηνεύσουν και να οικοδομήσουν τις δικές τους σημαντικές παραστάσεις και κατανοήσεις του εξωτερικού κόσμου (Δημητριάδης, 2015). Αυτό επιτυγχάνεται με την σύνθεση νέων εμπειριών σε σχέση με αυτά που ήδη γνωρίζουν, την διερεύνηση και την επικοινωνία με τους άλλους και το περιβάλλον. Σε αυτή την περίπτωση μιλάμε για ανακάλυψη της γνώσης μέσα από σχετικές καταστάσεις και εμπειρίες. Ο όρος κονστρουκτιβισμός προέρχεται από τη λατινική λέξη construere που σημαίνει δομώ μαζί, και ως θεωρία μάθησης έχει επηρεάσει σε μεγάλο βαθμό την έρευνα και τη διδασκαλία (Δημητριάδης, 2015). Το θεωρητικό υπόβαθρο αυτής της προσέγγισης θεωρεί ότι η γνώση είναι η μία διάσταση της μαθηματικής σκέψης και ότι άλλες κεντρικές διαστάσεις της μαθηματικής επίδοσης είναι οι στρατηγικές λύσης προβλήματος, η μεταγνώση και οι στάσεις. (Καλαβάσης, κ.ά., 2018). Κύριος εκφραστής ο Piaget, που έδωσε έμφαση στα επίπεδα γνωστικής ανάπτυξης, δηλαδή ότι η ανάπτυξη είναι προϋπόθεση της μάθησης, για αυτό και η θεωρία του ονομάστηκε γνωστικός Κονστροκτουβισμός. Ο Piaget θεωρεί ότι οι άνθρωποι δεν μπορούν να καταλάβουν και να χρησιμοποιήσουν αμέσως την πληροφορία που τους δίνεται, αλλά δημιουργούν τη δική τους γνώση μέσα από την εμπειρία τους. Παράλληλα αναπτύχθηκε και ο κοινωνικός Κονστροκτουβισμός, βασισμένος στον Ρώσο Lev Vygotsky που τόνισε την σημασία των κοινωνικών και των πολιτιστικών παραγόντων στην δημιουργία της γνώσης. Σύμφωνα με αυτόν αν και οι διανοητικές λειτουργίες παίζουν σημαντικό ρόλο στην εξελικτική διαδικασία του παιδιού, ο πυρήνας της εξέλιξης είναι οι κοινωνικοί παράγοντες που παρεμβάλλονται ή περιβάλλουν το άτομο. Η εξέλιξη δημιουργείται με την εμπλοκή εξωτερικών και εσωτερικών παραγόντων (Δημητριάδης, 2015). Επομένως στο κονστρουβιστικό μοντέλο στόχος δεν είναι η μετάδοση της πληροφορίας, αλλά η ανάπτυξη γνώσης από τον μαθητή, βασισμένη στις εμπειρίες του αλλά και την κοινωνική του αλληλεπίδραση.

Ο Bruner την δεκαετία του 60 ήρθε να προσθέσει μια ακόμη προσέγγιση, αυτή της Ανακαλυπτικής Μάθησης. Η μάθηση θα γίνεται μέσω της ανακάλυψης και δεν στοχεύει στην κατανόηση έτοιμων δομών. Η πρόταση του Bruner βασίζεται στην προγενέστερη γνώση και την κατανόηση μιας έννοιας, η οποία αναπτύσσεται και εμβαθύνεται. Ανέπτυξε ένα μοντέλο τριών σταδίων των αναπαραστάσεων, τις ενεργητικές ή πραξιακές (enactive), τις εικονικές (iconic) και τις συμβολικές (symbolic) και τόνισε την σημασία της μετάβασης από την μία στην άλλη (Εμβαλωτής & Πατσιομίτου, 2009). Η μάθηση είναι μια ενεργητική διαδικασία ανακάλυψης, προκύπτει μέσα από τον πειραματισμό και την δράση. (Καλαβάσης & Μούτσιος-Ρέντζος, 2015)

Προς αυτή την κατεύθυνση είναι στραμμένες και θεωρίες όπως αυτή των ρεαλιστικών μαθηματικών, που τονίζουν την ανάπτυξη των απαραίτητων ικανοτήτων για την αντιμετώπιση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου. Σύμφωνα με τον Streefland (2000) στην «Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση» τα προβλήματα του πραγματικού κόσμου χρησιμοποιούνται σαν πηγή ή έναρξης για την εκμάθηση και την ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών και τονίζει ότι «γνωρίζω μαθηματικά» σημαίνει «ξέρω να κάνω μαθηματικά». Στα ρεαλιστικά μαθηματικά το 'πραγματικό' μπορεί να αναφέρεται σε οποιοδήποτε αισθητηριακό ή νοητικό βίωμα το οποίο 'ανήκει' στον κόσμο των μαθητών/μαθητριών. Με αυτό τον τρόπο, η όποια προβληματική, προς αντιμετώπιση και επίλυση, κατάσταση είναι 'πραγματική' και, συνεπώς, οι δράσεις και οι μετασχηματισμοί αποκτούν ουσιαστικό νόημα. (Μούτσιος -Ρέντζος, 2014)

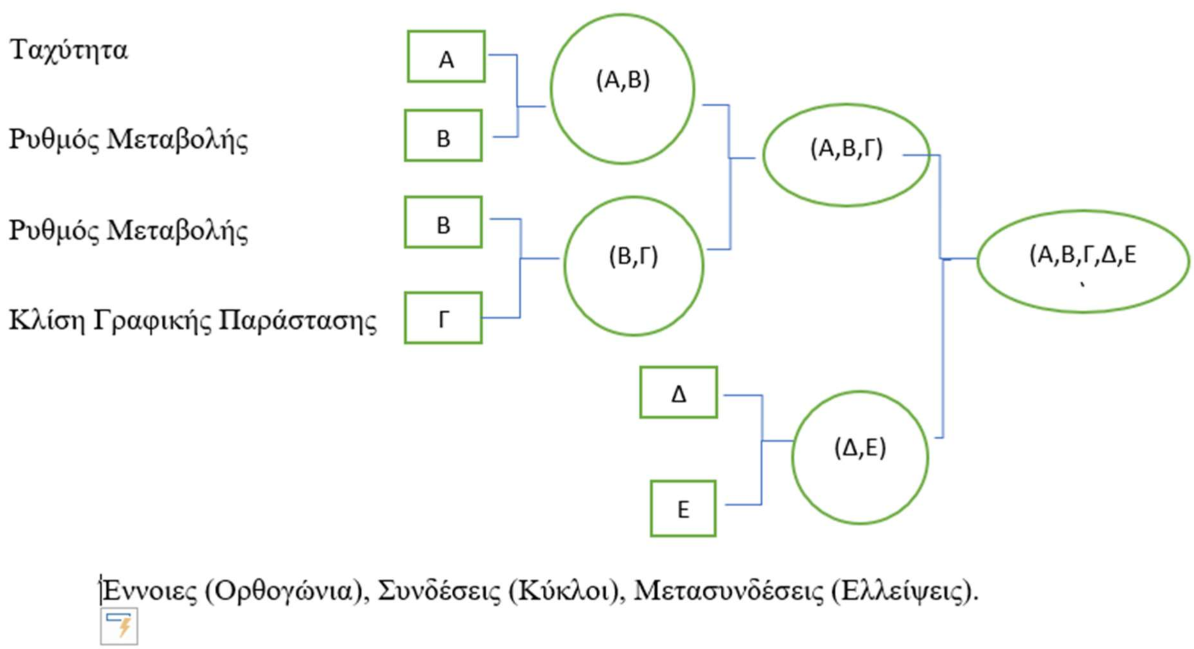
Τα τελευταία χρόνια, η προσπάθεια να ξεπεραστεί το χάσμα μεταξύ επιστήμης και τέχνης, καθώς και ο διαχωρισμός μεταξύ βιολογίας και φυσικής έχει επανεμφανιστεί. Σήμερα, η επιστημονική κοινότητα επιτυγχάνει πρόοδο μέσω του σπασίματος των πειθαρχικών ραφών και της έκρηξης σε νέους τομείς που φαίνονταν ερμητικά σφραγισμένοι πριν. Ένας ενισχυμένος ρυθμός ανταλλαγής πληροφοριών τις τελευταίες δύο δεκαετίες παρείχε γόνιμες συνθήκες που συνδέουν ανόμοια σώματα γνώσης (Nikitina & Mansilla, 2003). Έτσι, στην εργασία τους ανέπτυξαν τρεις στρατηγικές για να αποφύγουν την απομόνωση των επιστημών και των μαθηματικών στο κλασικό σχολικό πρόγραμμα και την επίτευξη συνδέσεων μεταξύ των διαφορετικών επιστημονικών πεδίων. Με βάση την θεωρία τους οι καθηγητές μαθηματικών και επιστημών μπορούν να μάθουν από τη σχολή ανθρωπιστικών επιστημών και αντίστροφα και να επικεντρώνουν τα προγράμματα σπουδών τους σε προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο, που απαιτούν τον συνδυασμό όλων των παραπάνω. Επομένως η Διεπιστημονική Προσέγγιση είναι μια αναγκαιότητα, που συμβάλει στη πληρέστερη κατανόηση των επιστημών και την ανάδυση νέων επαυξημένων πραγματικοτήτων και επιστημονικών πεδίων για έρευνα.

Υποστηρίζεται ότι σε ένα περιβάλλον διεπιστημονικής μάθησης, οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να συλλογιστούν μεταγνωστικά, επιτρέποντας στις μετασυνδέσεις να έρθουν στο μαθησιακό προσκήνιο. Με τον όρο μετασυνδέσεις, αναφερόμαστε στις συνδέσεις που προκύπτουν κατά τον μεταγνωστικό αναστοχασμό, συνδέοντας τις υπάρχουσες συνδέσεις των διαφορετικών μαθημάτων (και των αντίστοιχων κλάδων) για τη δημιουργία νέων συνδέσεων σε ένα μεταεπίπεδο (Κρητικός & Μούτσιος-Ρέντζος, 2018). Εξάλλου, οι ραγδαίες τεχνολογικές εξελίξεις και ο όλο και μεγαλύτερος καταμερισμός των έργων διογκώνει την πολυπλοκότητα τόσο στον εργασιακό, όσο και στον εκπαιδευτικό τομέα και απαιτεί όλο και περισσότερο την ανάπτυξη ικανοτήτων και γνώσεων στραμμένα προς την επίλυση πραγματικών προβλημάτων. Αυτό έχει σαν συνέπεια, τα προβλήματα να είναι όλο και πιο σύνθετα και να απαιτούν τον συνδυασμό διαφορετικών επιστημών για την επίλυση τους, επομένως όλο και περισσότερων αναπαραστάσεων. Πρέπει να τονιστεί ότι διεπιστημονικότητα δεν σημαίνει ενοποίηση των επιστημών. Οι Κρητικός & Μούτσιος-Ρέντζος (2018) τονίζουν ότι η διεπιστημονικότητα στοχεύει στην κατάργηση της μόνωσης, παράλληλα αναγνωρίζει και αναδεικνύει τις διαφορετικές επιστημονικές προσεγγίσεις (εικόνα 1), αφού οφείλει την ύπαρξή της στη διάκριση των επιστημονικών πεδίων.



Εικόνα 2.1 Κρητικός & Μούτσιος -Ρέντζος (2018)

Οι ίδιοι συνεχίζουν αναφέροντας ότι μέσα σε ένα τέτοιο περιβάλλον μάθησης, ο μαθητής μπορεί να συλλογιστεί μεταγνωστικά και να φέρει στο προσκήνιο μετασυνδέσεις. Μάλιστα χρησιμοποιούν και τον ρυθμό μεταβολής ως παράδειγμα για να εξηγήσουν αυτές τις μετασυνδέσεις. (εικόνα 2)



Εικόνα 2.2. Κρητικός & Μούτσιος - Ρέντζος (2018)

Με βάση το παράδειγμα παραπάνω σε ένα διεπιστημονικό πλαίσιο διδασκαλίας των Μαθηματικών και της Φυσικής, οι μαθητές διδάσκονται τις έννοιες του ρυθμού μεταβολής και της ταχύτητας. Έτσι μπορεί να φανερωθεί σχέση μεταξύ του Α (ταχύτητα) και του Β (Ρυθμός μεταβολής) ή αντίστοιχα μπορούμε να έχουμε την σχέση Γ (Κλίση της γραφικής παράστασης) και Β, σε Γνωστικό επίπεδο. Κατόπιν σε ένα μεταγνωστικό επίπεδο μπορεί να προκύψει μια σχέση μεταξύ του Α,Β και Γ συνδέοντας έτσι και τις τρεις έννοιες αλλά και την Ταχύτητα (Α) με την Κλίση (Γ). Έτσι στο σχήμα παραπάνω (εικόνα 2) φαίνεται η δημιουργία μετασυνδέσεων. Οι Κρητικός και Μούτσιος -Ρέντζος τονίζουν ότι η μάθηση σε αυτό το επίπεδο επέρχεται όχι με την σύνδεση εννοιών, αλλά με την σύνδεση μετασυνδέσεων, δηλαδή η σύνδεση των εννοιών Α και Δ, θα επέλθει με την σύνδεση των μετασυνδέσεων (Α,Β,Γ) και (Δ,Ε), ενώ παράλληλα έχουμε και άλλες μετασυνδέσεις (Α,Ε), (Β,Δ), (Β,Ε).

Αυτό ακριβώς είναι και το ζητούμενο στην Οικονομική Επιστήμη. Ο μελετητής καλείται να εξηγήσει κοινωνικά φαινόμενα, για παράδειγμα πως αντιδρά ένα καταναλωτής στην μεταβολή των τιμών (1^o επιστημονικό πεδίο), χρησιμοποιώντας μαθηματικές έννοιες (2^o επιστημονικό πεδίο), αλλά και έννοιες από άλλα επιστημονικά πεδία (3^o επιστημονικό πεδίο), να κάνει τις συνδέσεις και μετασυνδέσεις, και πάνω σε αυτές χτίζει νέες θεωρίες, σε ένα επίπεδο που μια επιστήμη από μόνη της δεν θα έφτανε, λύνοντας έτσι πραγματικά προβλήματα σε ένα μεταγνωστικό επίπεδο. Σε καμία περίπτωση δεν μιλάμε για ενοποίηση των επιστημών, αλλά για καθαρά διεπιστημονική προσέγγιση όπου ο μαθητής θα μπορεί να μεταβεί από τα διαφορετικά επιστημονικά πεδία σε ένα νέο επίπεδο, αλλά και αντίστροφα, όπου το κάθε ένα από αυτά τα επίπεδα είναι διακριτό. Σε αντίθετη περίπτωση ο μαθητής θα οδηγείται σε αποτυχίες και δεν θα μπορεί να μεταβεί στο μεταγνωστικό επίπεδο που είναι το ζητούμενο. Αν προσθέσουμε ότι λόγω της εξέλιξης της τεχνολογίας τα προβλήματα γίνονται όλο και πιο απαιτητικά, καταλαβαίνουμε ότι η αναγκαιότητα για τους μαθητές να μπορούν να κάνουν τις απαραίτητες συνδέσεις μεταξύ των επιστημών αλλά και να μεταβαίνουν από την μία στην άλλη και αντίστροφά θα γίνεται όλο και πιο επιτακτική με την πάροδο του χρόνου. Εξάλλου οι συνδέσεις μεταξύ εννοιών σε μία διδακτική ενότητα μπορούν να αποτελέσουν το νήμα για διεπιστημονικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία άλλων ενοτήτων (Κρητικός & Μούτσιος-Ρέντζος, 2018).

Σημαντικό ρόλο στην κατανόηση των μαθηματικών διαδραματίζουν οι αναπαραστάσεις. Ο Duval (1995) τόνισε ότι κατά την διδασκαλία είναι κρίσιμης σημασίας η χρήση σημειωτικών αναπαραστάσεων μιας μαθηματικής έννοιας και των μεταφράσεων της μεταξύ σημειωτικών συστημάτων, με στόχο την ανάδυση της μαθηματικής έννοιας ανάμεσα στις καταδείξεις της. Στο μάθημα των Οικονομικών υπάρχουν πολλές διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας. Ύψιστη σημασία για την βαθύτερη κατανόηση της, έχει η αναγνώριση αυτών των αναπαραστάσεων και η δυνατότητα της μετάβασης από την μία στην άλλη. Ούτως ή άλλως τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στο μάθημα αυτό, είναι προβλήματα του πραγματικού κόσμου που χαρακτηρίζονται για την πολυπλοκότητα τους και απαιτούν τον συνδυασμό πολλών επιστημονικών πεδίων για την επίλυση τους. Ταυτόχρονα η εννοιολογική κατανόηση των ατόμων ενισχύεται κάθε φορά που χρησιμοποιούνται οπτικές απεικονίσεις, καθώς είναι ωφέλιμο να υπάρχουν πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της μαθηματικής γνώσης (Aspinwal, Shaw, & Presmeg, 1997). Όλα αυτά σε συνδυασμό με το γεγονός ότι τα διάφορα επιστημονικά πεδία, και κυρίως τα μαθηματικά στο σχολείο τείνουν να απομονώνονται αυστηρά στο δικό τους αντικείμενο επιβάλλουν μια στροφή προς μια διεπιστημονική προσέγγιση των προβλημάτων για να μπορούν να ανταπεξέρχονται οι μαθητές στις απαιτήσεις μαθημάτων, όπως τα οικονομικά.

3. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ.

3.1 Η ΈΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΡΥΘΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Σκόπιμο είναι πριν από οποιαδήποτε ανάλυση να μελετήσουμε την έννοια του ρυθμού μεταβολής και την εμφάνιση του στα διάφορα επιστημονικά πεδία. Στα μαθηματικά ο ρυθμός μεταβολής ως έννοια εμφανίζεται στο Λογισμό και την έννοια του ορίου. Οι αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί, στην προσπάθεια τους να μετρήσουν την μεταβολή στα γεωμετρικά σχήματα, είναι κατά πολλούς οι θεμελιωτές του ολοκληρωτικού λογισμού. Ο Εύδοξος και στην συνέχεια ο Αρχιμήδης, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της εξάντλησης προσπάθησαν να υπολογίσουν το εμβαδόν διάφορων σχημάτων, και ουσιαστικά μπορούν να θεωρηθούν θεμελιωτές του ολοκληρωτικού λογισμού (Γουλέρμας, 2012). Η προσέγγιση τους ήταν κυρίως διαισθητική και καταπιανόταν με την εξήγηση γεωμετρικών σχημάτων και όχι με την ποιοτική ανάλυση της μεταβολής. Ανάλογες αναφορές έγιναν στην Κίνα κατά τον 3 και 5 αιώνα μχ. καθώς και τον μεσαίωνα στην Ινδία ο Madhava Sangamagrama και το σχολείο Kerala της αστρονομίας και των μαθηματικών, με τις σειρές Τέιλορ. Μετέπειτα ακολούθησαν αρκετοί όπως ο μαθηματικός B. Cavalieri, γνωστός για τα προβλήματα του στην οπτική και την κίνηση, την έννοια ενός αδιαίρετου ενώ ασχολήθηκε με την αστρονομία. Στη συνέχεια ο Μαθηματικός Pierre De Fermat, ήταν ο πρώτος που αντιμετώπισε συστηματικά το πρόβλημα των εφαπτομένων. Αυτοί όμως που έθεσαν τις βάσεις για την έννοια του λογισμού δεν ήταν άλλοι από τον Ισαάκ Νεύτων, ο οποίος ασχολήθηκε με τα Μαθηματικά, την Φυσική, την Αλχημεία, την Αστρονομία και γενικότερα την Φιλοσοφία, καθώς και τον πολυμαθή Γκότφριντ Βίλχελμ Λάιμπνιτς (ήταν Μαθηματικός, Φιλόσοφος, Θεολόγος, έγραψε για την ηθική, την πολιτική , την ιστορία), παρά το γεγονός ότι ο δεύτερος αρχικά κατηγορήθηκε για λογοκλοπή από τον Νεύτωνα. Ο διαφορετικός όμως τρόπος που χρησιμοποίησαν για να φτάσουν στα συμπεράσματα τους, οδήγησε στο συμπέρασμα ότι κάτι τέτοιο δεν ίσχυε. Πρώτος δημοσίευσε ο Λάιμπνιτς τον Οκτώβριο του 1684 στο περιοδικό Acta Eruditorum στην Λειψία, όπου παρουσίαζε την θεωρία του στον διαφορικό λογισμό σε εξήμιση σελίδες. Δεύτερος ο Νεύτων μέσα στο έργο του ''Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica'', που δημοσιεύτηκε στις 5 Ιουλίου 1687 περιέγραφε τους νόμους του σχετικά με την κίνηση και την βαρύτητα. Κατόπιν αυτών και των επομένων δημοσιεύσεων τους, οι δυο τους θεωρούνται πατέρες του Λογισμού, ο Νεύτων κυρίως ως προς τις εφαρμογές τους στην Φυσική, ενώ ο Λάιμπνιτς περισσότερο ως προς τον συμβολισμό που χρησιμοποιείται έως και σήμερα. Πριν από αυτούς και τον λογισμό, η κίνηση των σωμάτων βασιζόταν στην κινητική, δηλαδή την παρατήρηση και περιγραφή της. Ο Νεύτωνας εισήγαγε μια δυναμική θεωρία που εξηγούσε με φυσικούς νόμους την κίνηση των σωμάτων, όπως ένα μήλο που πέφτει από το δέντρο. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του λοιπόν ''η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα ισούται με το ρυθμό μεταβολής της ορμής του''.

$\boldsymbol{\Sigma F} = \frac{d^p}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{mv})$ όπου **m** η μάζα του σώματος και **v** η ταχύτητα του ή

$\boldsymbol{\Sigma F} = \boldsymbol{ma}$ όπου $\boldsymbol{\alpha}$ η επιτάχυνση που αποκτά το σώμα.

Με αυτό τον τρόπο ο Νεύτωνας όρισε ως ταχύτητα το ρυθμό μεταβολής του σημείου ως προς τον χρόνο και επιτάχυνση τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας.

Αντίστοιχα ο Λάιμπνιτς όρισε ως παράγωγο της $\boldsymbol{y = f(x)}$ την $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f'(x)}$.

Όπου $\frac{dy}{d^x}$ ήθελε να ορίσει την απειροελάχιστη μεταβολή που επέρχεται στο $\mathbf{y}$ από μια απειροελάχιστη μεταβολή του $\mathbf{x}$.

Στις αρχές του λογισμού επικρίθηκε από πολλούς μαθηματικούς ότι η χρήση των απειροελάχιστων μεταβολών δεν ήταν αυστηρή. Κύριοι επικριτές ήταν ο Μαθηματικός Michel Rolle (Traité d'Algebre 1690) και ο Φιλόσοφος Bishop Berkeley (The Analyst 1934). Απάντηση σε αυτή την κρητική προσπάθησε να δώσει ο Αστρονόμος και Μαθηματικός Lagrange, με δύο του βιβλία (Théorie des fonctions analytiques 1797 και Leçons sur le calcul des fonctions 1801). Ο Lagrange προσπάθησε να δώσει μια αυστηρή βάση στους λογισμούς μειώνοντας τον σε άλγεβρα, εξαλείφοντας από αυτό όλες τις αναφορές σε απειροελάχιστες ή όρια. Αυτό επιτεύχθηκε με τα έργα των Cauchy, Bolzano και Weierstrass, δηλαδή δόθηκε μια αυστηρή βάση για τον λογισμό. Ο Μαθηματικός Cauchy ο οποίος είχε και τις ιδιότητες του Μηχανικού και Φυσικού (Cours d'analyse of 1821) με τις θεωρίες του για τον ορισμό της συνέχειας και τον ορισμό του για το όριο, και ο Weierstrass (Μαθηματικός) που διατύπωσε εκ νέου το ορισμό του ορίου, έθεσαν αυστηρότερες βάσεις για τον λογισμό. Ο λογισμός απασχόλησε και πιο σύγχρονους μαθηματικούς όπως ο Skolen (1934) και ο Robinson (1966) ο οποίος υποστήριξε ότι «οι ιδέες του Leibniz μπορούν να δικαιωθούν πλήρως» από τη δική του αυστηρή θεωρία των απειροελάχιστων. (Kleiner, 2001).

Έκτοτε ο ρυθμός μεταβολής ως έννοια συναντάται σε πολλά επιστημονικά πεδία, την φυσική, τα μαθηματικά, την βιολογία την μηχανική αλλά και τα οικονομικά. Στην βιολογία για παράδειγμα ο Ludwig von Bertalanffy διατύπωσε το 1969 την ισότητα για την ανάπτυξη ενός οργανισμού ως εξής: $\frac{dW}{dt} = nS - kv$ όπου $\mathbf{W}$ το βάρος του οργανισμού, $\mathbf{t}$ ο χρόνος, $\mathbf{S}$ είναι περιοχή της επιφάνειας του οργανισμού, και $\mathbf{V}$ ο φυσικό όγκος του οργανισμού. Το $\boldsymbol{\eta}$ και $\mathbf{k}$ είναι ο συντελεστής του αναβολισμού και ο συντελεστής του καταβολισμού αντίστοιχα. Με αυτό τον ρυθμό μεταβολής εξηγούσε την ανάπτυξη ενός οργανισμού.

Αντίστοιχες εξισώσεις έχουμε και στην Οικονομική Επιστήμη. Ο πατέρας της Οικονομικής επιστήμης και για πολλούς ο ιδρυτής του καπιταλισμού θεωρήθηκε ο Adam Smith με το βιβλίο του "Μια έρευνα της φύσης και των αιτιών του Πλούτου των Εθνών" (1776), παρά το γεγονός ότι ο ίδιος δίδασκε Ηθική Φιλοσοφία στο πανεπιστήμιο της Γλασκόβης. Το έργο του αυτό θεωρήθηκε το πρώτο ολοκληρωμένο επιστημονικό έργο της Οικονομικής επιστήμης. (Δρακόπουλος, Γκότσης & Γριμάνη, 2015). Ο A. Smith, ο D. Ricardo, ο T Malthus ο K. Marx και S. Mill είναι οι κύριοι εκπρόσωποι της κλασικής θεωρίας. Οι περισσότεροι κλασικοί χρησιμοποιούν την επαγωγική μέθοδο με τη λογική παραγωγή. Ο Ricardo για παράδειγμα δεν χρησιμοποιεί μαθηματικά αλλά λογικά επιχειρήματα.

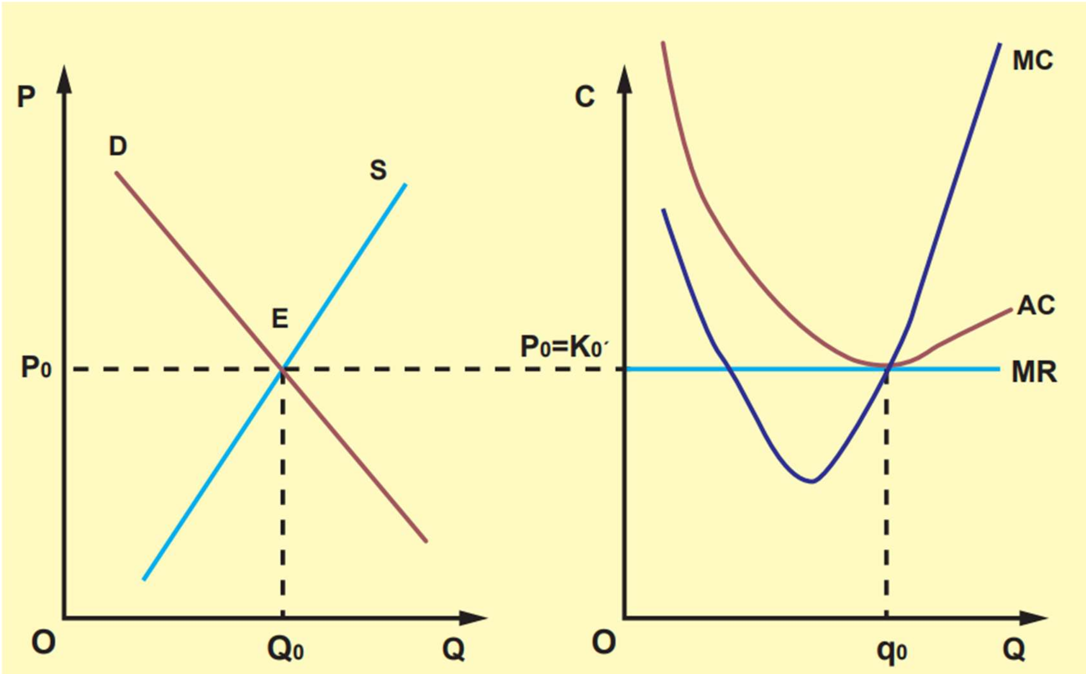
Ο ρυθμός μεταβολής πρωτοεμφανίστηκε στην Οικονομική επιστήμη ως έννοια από την λεγόμενη Ψυχολογική ή Αυστριακή σχολή, η οποία χρησιμοποίησε σαν κύριο όργανο ανάλυσης την ψυχολογική ερμηνεία της χρησιμότητας των αγαθών. Έδωσαν διάφορες ερμηνείες στο πρόβλημα της αξίας των αγαθών στηριγμένοι στην έννοια τις οριακής χρησιμότητας και για αυτό οι οπαδοί της σχολής αυτής ονομάστηκαν Οριακοί- Marginalists (Σαραντίδης, 1995). Ένα αντικείμενο έχει αξία επειδή μας δίνει ικανοποίηση ή χρησιμότητα. Πιο συγκεκριμένα, η αξία προέρχεται από την οριακή χρησιμότητα που προσδίδει το αντικείμενο. Οριακή χρησιμότητα είναι η επιπλέον χρησιμότητα από την κατανάλωση μιας επιπλέον μονάδας προϊόντος (Δρακόπουλος, κ.ά., 2015). Για να κατανοήσουμε την έννοια της συνολικής και οριακής χρησιμότητας δίδεται ο παρακάτω πίνακας.

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ	ΟΡΙΑΚΗ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ
1^{Ο} ΠΟΤΗΡΙ ΜΠΥΡΑ= 10 ΜΟΝΑΔΕΣ ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ	10 ΜΟΝΑΔΕΣ ΟΡΙΑΚΗ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ
2^{Ο} ΠΟΤΗΡΙ ΜΠΥΡΑ= 18 ΜΟΝΑΔΕΣ ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ	8 ΜΟΝΑΔΕΣ ΟΡΙΑΚΗ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ
3^{Ο} ΠΟΤΗΡΙ ΜΠΥΡΑ= 25 ΜΟΝΑΔΕΣ ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ	7 ΜΟΝΑΔΕΣ ΟΡΙΑΚΗ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ
4^{Ο} ΠΟΤΗΡΙ ΜΠΥΡΑ= 31 ΜΟΝΑΔΕΣ ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ	6 ΜΟΝΑΔΕΣ ΟΡΙΑΚΗ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ

Πίνακας 3.1.

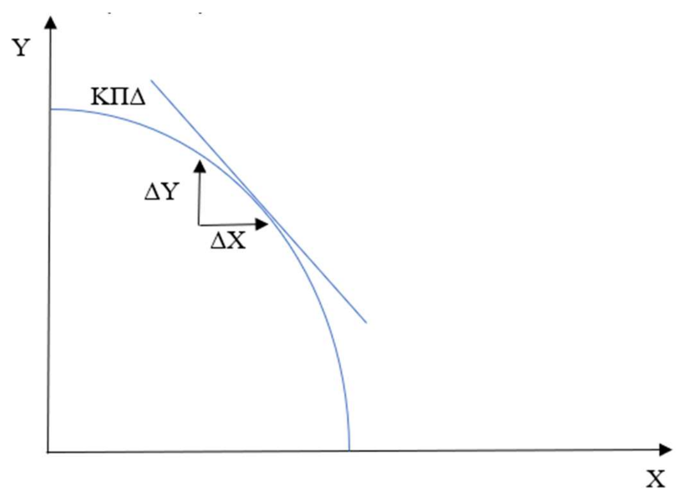
Ευνόητο είναι ότι η οριακή χρησιμότητα είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνολικής χρησιμότητας.

Στην συνέχεια η Μαθηματική Σχολή της Λοζάνης (L. Walras, V. Pareto, A. Cournot, F. Edgeworth, A. Marshall και άλλοι) προσπάθησαν να διατυπώσουν τις Οικονομικές σχέσεις με μαθηματικές σχέσεις και μεθόδους. Διατύπωσαν την θεωρία της οικονομικής ισορροπίας για αυτό και ονομάστηκε και "σχολή της οικονομικής ισορροπίας" (Σαραντίδης, 1995). Μέσα σε αυτή συναντάμε διάφορους ρυθμούς μεταβολής όπως για παράδειγμα το οριακό προϊόν -(MP) Marginal Product (ο ρυθμός μεταβολής του συνολικού προϊόντος (TP)-Total product) , το οριακό κόστος (MC) Marginal Cost (ο ρυθμός μεταβολής του συνολικού κόστους (TC) – Total Cost), το οριακό έσοδο (MR) – Marginal Revenue (ο ρυθμός μεταβολής των συνολικών εσόδων (TR) – Total Revenue) και άλλα. Η ισορροπία επιτυγχάνεται σε σημεία που εξισώνονται κάποιοι ρυθμοί μεταβολής. Για παράδειγμα η ισορροπία στον ελεύθερο ανταγωνισμό είναι εκεί όπου MC=MR=P (όπου P η τιμή του προϊόντος στην αγορά. (Γκαμαλέτσος, 1989). Ποιο συγκεκριμένα αναφέρει ότι η επιχείρηση στην βραχυχρόνια περίοδο βρίσκεται σε ισορροπία βραχυχρόνια, δηλαδή πετυχαίνει το μέγιστο του συνολικού της κέρδους, στο επίπεδο παραγωγής όπου η εφαπτομένη της καμπύλης του συνολικού κόστους γίνεται παράλληλη της γραμμής του συνολικού εσόδου. Δηλαδή στο επίπεδο εκείνο όπου η καμπύλη του οριακού κόστους τέμνει εκ των κάτω την καμπύλη (εδώ παράλληλη γραμμή του οριακού εσόδου (εικόνα 3.1)



Εικόνα 3.1. Βιβλίο Αρχές Οικονομικής Επιστήμης Α.Ο.Θ. σελ. 123

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι κυρίαρχη θέση μέσα στην θεωρία τόσο της Μικροοικονομικής ,όσο και της Μακροοικονομικής ανάλυσης έχει ο ρυθμός μεταβολής ο οποίος παρουσιάζεται σε διαφορετικές έννοιες και αναπαραστάσεις. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων ή Καμπύλη Μετασχηματισμού στην οποία απεικονίζεται μια οικονομία η οποία παράγει μόνο δύο αγαθά Χ και Ψ, χρησιμοποιώντας όλους τους παραγωγικούς συντελεστές αποδοτικά, δηλαδή όλες τις παραγωγικές της δυνατότητες (Εικόνα 3.2). Με αυτό τον τρόπο η αύξηση της παραγωγής του Χ απαιτεί την θυσία του αγαθού Ψ, κάτι που ονομάζεται κατά Pareto αποτελεσματικότητα.



Εικόνα 3.2. Βιβλίο Αρχές Οικονομικής Επιστήμης Α.Ο.Θ. σελ. 18

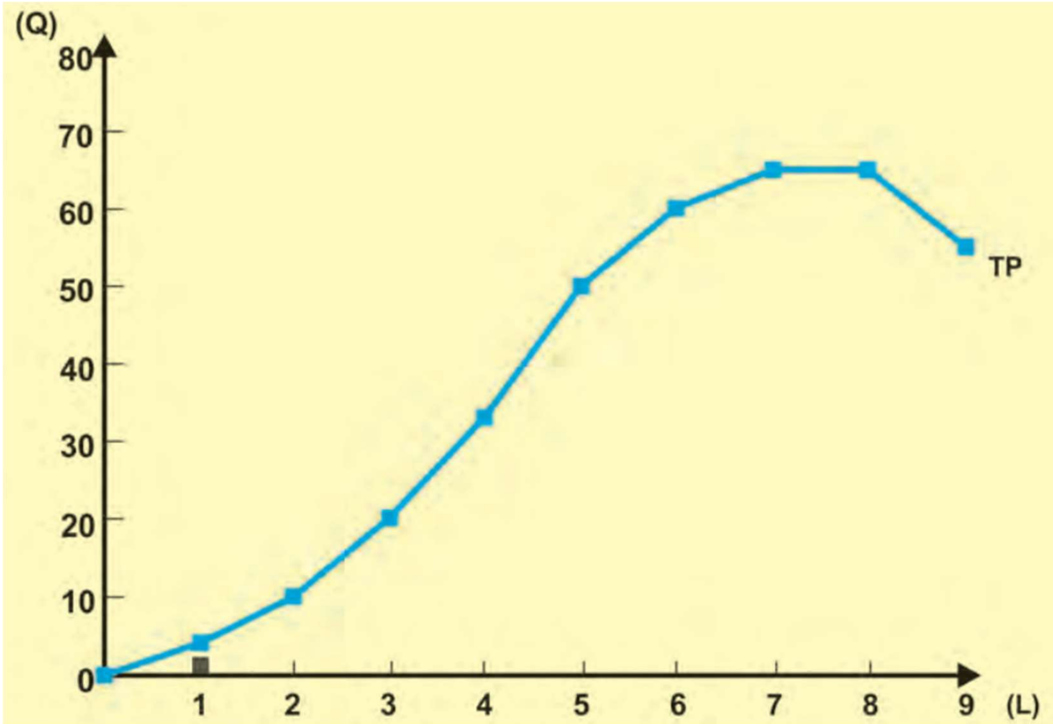
Βασισμένοι στην Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων ορίζουμε την έννοια του πραγματικού κόστος (εναλλακτικού κόστους ή κόστους ευκαιρίας)ως εξής:

Πραγματικό κόστος του Χ(σε όρους του Ψ) = $\frac{\boldsymbol{θυσία\ του\ αγαθού\ Y}}{\boldsymbol{παραγωγή\ του\ αγαθού\ X}} = \frac{\boldsymbol{Δy}}{\boldsymbol{Δx}}$ που δεν είναι τίποτα άλλο από τον ρυθμό μεταβολής μεταξύ των δύο σημείων, σε απόλυτη τιμή.

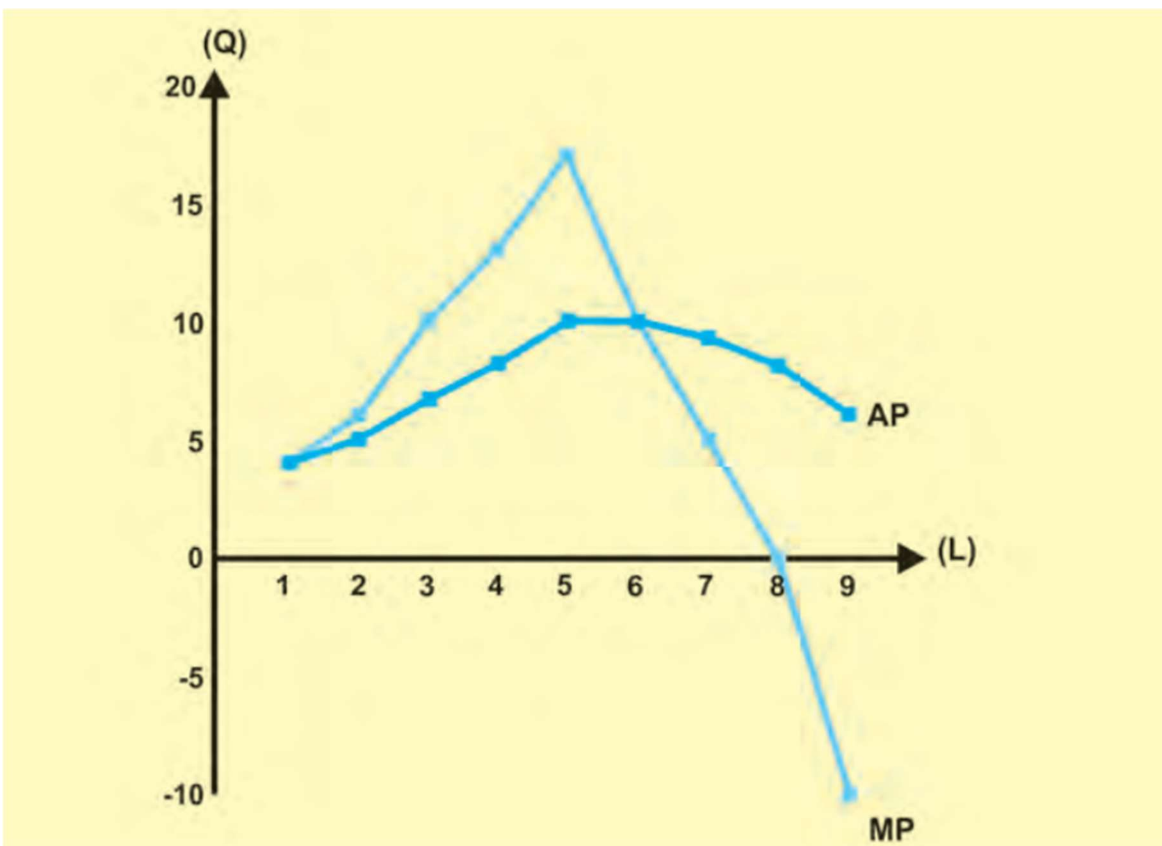
Ανάλογα υπολογίζουμε το οριακό προϊόν MP ενός παραγωγικού συντελεστή, έστω για παράδειγμα, του συντελεστή Εργασία L. Δηλαδή ορίζουμε ως οριακό προϊόν μια συνάρτησης Q= f (L) την μεταβολή που επέρχεται στο προϊόν όταν μεταβληθεί ο μεταβλητός συντελεστής L κατά μία μονάδα, επομένως είναι ο ρυθμός μεταβολής του προϊόντος, άρα η κλίση της εφαπτομένης κατά μήκος της καμπύλης του συνολικού προϊόντος Q ή αλλιώς η πρώτη παράγωγος στο σημείο. Δηλαδή $\mathbf{MP} = \frac{\mathbf{ΔQ}}{\mathbf{ΔL}} = \frac{\boldsymbol{Q-Qo}}{\boldsymbol{P-Po}} = \mathbf{Q'}$. (εικόνα 3.3 & 3.4)

Χαρακτηριστικά οι Λιανός & Ψειρίδου,(2015) ορίζουν:

«Το οριακό προϊόν ενός συντελεστή παραγωγής είναι η επιπλέον παραγόμενη ποσότητα από μία αύξηση κατά μία μονάδα του συντελεστή αυτού. Για παράδειγμα, εάν σε μία επιχείρηση με 20 εργαζόμενους και συνολικό προϊόν 2 τόνους ψωμί, προσθέσουμε άλλον έναν εργαζόμενο και η παραγωγή ανέλθει στους 2,2 τόνους, τότε το οριακό προϊόν του επιπλέον εργαζομένου) είναι 200 κιλά. Εάν σε μία επιχείρηση με 500 εργαζομένους και παραγωγή 100 τεμαχίων προσθέσουμε άλλους δύο, και η παραγωγή αυξηθεί σε 106 τεμάχια, τότε το οριακό προϊόν της εργασίας μπορεί να υπολογιστεί ως 6 / 2 = 3 τεμάχια. Γενικά, εάν η εκροή αυξηθεί κατά ΔQ από μια αύξηση της εργασίας κατά ΔL, το οριακό προϊόν της εργασίας MPL (από Marginal Product of Labour) υπολογίζεται ως: $\mathbf{MP_L} = \frac{\boldsymbol{ΔQ}}{\boldsymbol{ΔL}}$. Διαγραμματικά, το οριακό προϊόν της εργασίας δίδεται από την κλίση της εφαπτομένης σε κάθε σημείο της καμπύλης συνολικού προϊόντος (θυμηθείτε ότι κάθε σημείο της καμπύλης συνολικού προϊόντος αντιστοιχεί σε διαφορετικό επίπεδο χρησιμοποιούμενης εργασίας). Στο διάγραμμα 3.3. απεικονίζεται η συνάρτηση παραγωγής Q = f(L,K). Στο διάγραμμα 3.4. απεικονίζονται οι καμπύλες του οριακού προϊόντος της εργασίας (MP_L) και του μέσου προϊόντος της εργασίας (AP_L)»



Εικόνα 3.3. Βιβλίο Αρχές Οικονομικής Επιστήμης σελ. 55

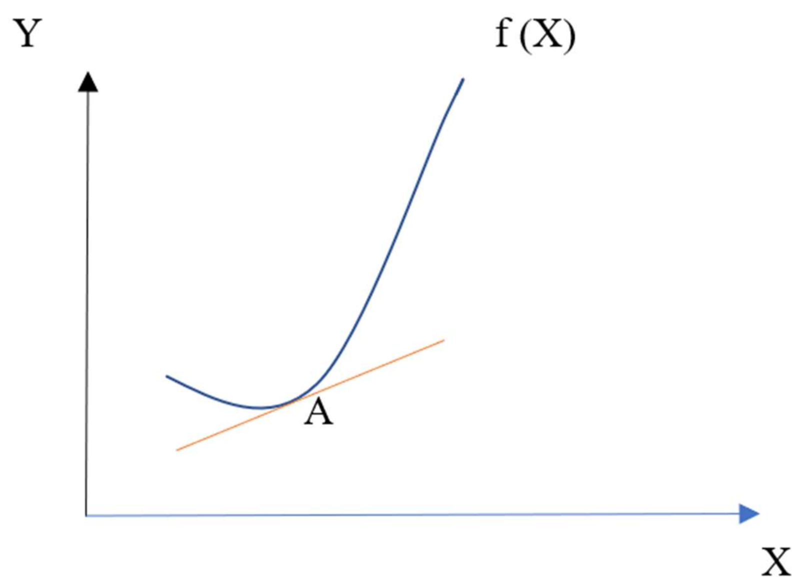


Εικόνα 3.4. Βιβλίο Αρχές Οικονομικής Επιστήμης σελ. 57

Στα μαθηματικά της ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης f ορίζεται συνήθως με την βοήθεια παραδειγμάτων ως εξής (Κηζίρογλου, 2015):

« για το πρώτο παράδειγμα, εκτός από τη συνάρτηση θέσης x(t) είναι χρήσιμο κανείς να μελετήσει το πόσο «γρήγορα» μεταβάλλεται η θέση x(t), σε σχέση με τον χρόνο. Δηλαδή, το πολύ ή λίγο αυξάνεται ή μειώνεται το x(t), για μια δεδομένη μεταβολή του t. Ο λόγος μεταβολής του x για μια μεταβολή του t, δια την μεταβολή αυτή του t, εκφράζει αυτόν ακριβώς τον «ρυθμό μεταβολής» της θέσης x, ως προς τον χρόνο. Έτσι, ο ρυθμός μεταβολής της θέσης είναι η ταχύτητα της κίνησης και εφόσον υπολογιστεί για κάθε χρονική στιγμή t, εκφράζεται με μια νέα συνάρτηση του χρόνου u(t). Η u(t) είναι ο «ρυθμός μεταβολής» (ή αλλιώς η «παράγωγος») της x(t) ως προς τον χρόνο. Ομοίως, ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός σώματος είναι η επιτάχυνση α(t).

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής ορίζεται ως $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ στο σημείο χ_0,και ουσιαστικά πρόκειται για την κλίση της εφαπτομένης σε μια καμπύλη στο σημείο Α, δηλαδή τον συντελεστή διεύθυνσης της (εικόνα 3.5.).



Εικόνα 3.5. Η κλίση της Εφαπτομένης

Η Zandieh (2000) πρότεινε τρεις διαφορετικές οριακές διαδικασίες για την προσέγγιση της έννοιας της παραγώγου και συγκεκριμένα, την διαδικασία της μέσης ταχύτητας, την διαδικασία της κλίσης των τεμνουσών και την διαδικασία του ρυθμού μεταβολής. Αντίστοιχα η έρευνα των Maull & Berry (2000) έδειξε ότι οι φοιτητές των μαθηματικών θεωρούν την κλίση της εφαπτομένης ευθείας ως την καταλληλότερη αναπαράσταση της έννοιας της παραγώγου, ενώ οι φοιτητές μηχανικής προτιμούν τον ρυθμό μεταβολής ως αναπαράσταση της παραγώγου.

Συμπέρασμα όλων των παραπάνω είναι ότι ο ρυθμός μεταβολής είναι μια διεπιστημονική έννοια που συναντάται σε όλα τα επιστημονικά πεδία των θετικών επιστημών, διαμορφωμένη στις ανάγκες και απαιτήσεις καθενός από αυτά. Ανεξάρτητα από την διαφορετική αναπαράσταση η έννοια παραμένει η ίδια και η γνώση της από ένα επιστημονικό πεδίο συντελεί στην κατανόηση μιας αντίστοιχης έννοιας σε κάποιο άλλο. Πολύ χρήσιμό θα ήταν να μελετήσουμε αυτές τις διαφορετικές εμφανίσεις στα σχολικά εγχειρίδια και να μελετήσουμε τον τρόπο που προσεγγίζονται από καθένα επιστημονικό πεδίο ξεχωριστά.

3.2 ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ.

Βασικός παράγοντας για την διδασκαλία των φυσικών επιστημών είναι ο τρόπος που οι μαθητές κατακτούν την γνώση. Σημαντικό ρόλο σε αυτό διαδραματίζουν οι διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας. Μια μαθηματική αναπαράσταση δεν μπορεί να γίνει κατανοητή μεμονωμένα. (Goldin & Shteingold, 2001). Είναι απαραίτητη η μετάβαση από την μία σε κάποια άλλη για την κατανόηση μιας έννοιας, από μια αλγεβρική εξίσωση για παράδειγμα σε ένα γράφημα. Ο Kaput (2002) αναφέρει ότι ‘’Αναπαράσταση’’ είναι η αναπαράσταση μιας όψης μιας εμπειρίας κάποιου, από κάποια άλλη. Στην προσπάθεια τους οι μαθητές για να επιλύσουν προβλήματα του πραγματικού κόσμου είναι πολύ σημαντικό να μπορούν να κάνουν μεταβάσεις από μία αναπαράσταση σε μια άλλη. Μια αναπαράσταση είναι συνήθως ένα σημάδι ή μια ρύθμιση παραμέτρων σημείων, χαρακτήρων ή αντικειμένων. Το σημαντικό είναι ότι μπορεί να αντιπροσωπεύει (να συμβολίζει, να απεικονίζει, να κωδικοποιεί ή να αντιπροσωπεύει) κάτι άλλο από τον εαυτό του (Goldin & Shteingold, 2001). Σύμφωνα με τον Duval (2006) οι αναπαραστάσεις μπορεί να είναι προσωπικές πεποιθήσεις, συλλήψεις ή παρανοήσεις στις οποίες ένα άτομο φτάνει μέσα από τις προσωπικές λεκτικές και σχηματικές κατασκευές. Σύμφωνα με αυτόν η εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης σχετίζεται με την ανάπτυξη των σημειωτικών συστημάτων. Επιπλέον, τόνισε ότι υπάρχουν δύο είδη μετασχηματισμού ανάμεσα στα σημειωτικά συστήματα. Το πρώτο είδος είναι αυτό που ονόμασε επεξεργασία (treatment), δηλαδή αυτοί οι μετασχηματισμοί που γίνονται ανάμεσα στο ίδιο μητρώο αναπαράστασης (register of representation). Για παράδειγμα το 1/2 +1/2= 0,5+0,5. Το δεύτερο είδος είναι αυτό που ονόμασε μετατροπή (conversions), κατά τις οποίες μεταβάλλεται το μητρώο αναπαράστασης χωρίς να μεταβάλλεται το αντικείμενο που υποδηλώνεται. Να μεταβούμε από μία συνάρτηση σε μια γραφική παράσταση για παράδειγμα. Η ικανότητα της μετάφρασης από την μία αναπαράσταση μια έννοιας στην άλλη σχετίζεται με την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων (Gagatsis & Shiakalli, 2004).

Μια άλλη διάκριση των αναπαραστάσεων είναι σε εξωτερικές (external) και εσωτερικές (mental or internal) σύμφωνα με τον Kaput (1999). Εξωτερικές είναι εκείνες τις αναπαραστάσεις όπου γίνονται αντιληπτές μέσω γλωσσικών ή πραγματικών αντικειμένων, πίνακες, γραφικές ή αλγεβρικές αναπαραστάσεις. Εσωτερικές είναι ο τρόπος με τον οποίο το κάθε άτομο οργανώνει και κατανοεί τις έννοιες. Σύμφωνα με τους Goldin & Shteingold (2001) τα εξωτερικά συστήματα αναπαράστασης κυμαίνονται από τα συμβατικά συστήματα συμβόλων των μαθηματικών (καρτεσιανό σύστημα ,ή η γραμμή των αριθμών), μέχρι ένα δομημένο μαθησιακό περιβάλλον (χειραγωγικά υλικά). Τα εσωτερικά συστήματα, αντίθετα, περιλαμβάνουν τις δομές και τις αναθέσεις νοήματος των μαθητών στις μαθηματικές σημειώσεις, καθώς και τη φυσική τους γλώσσα, τις οπτικές εικόνες και τη χωρική αναπαράσταση τους, τις στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων και την ευρετική τους, και (πολύ σημαντική) την επίδραση τους σε σχέση με τα μαθηματικά. Η αλληλεπίδραση μεταξύ εσωτερικής και εξωτερικής εκπροσώπησης είναι θεμελιώδης για την αποτελεσματική διδασκαλία και μάθηση. Στην Οικονομική επιστήμη η γνώση των εξωτερικών αναπαραστάσεων είναι θεμελιώδης, μα το ουσιαστικότερο είναι οι εσωτερικές συνδέσεις που κάνουν οι μαθητές για να κατανοήσουν τις έννοιες. Για αυτό τον λόγο η σύνδεση τους με αντίστοιχες έννοιες άλλων επιστημονικών πεδίων είναι πολλές φορές πολύ πιο αποτελεσματική. Οι Goldin & Shteingold (2001) υποστηρίζουν ότι η αποτελεσματική μαθηματική σκέψη περιλαμβάνει την κατανόηση των σχέσεων μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας «το ίδιο» καθώς και των δομικών ομοιοτήτων (και διαφορών) μεταξύ των αναπαραστάσεων συστημάτων.

3.3 ΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ.

Απαραίτητο είναι πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση μας να κάνουμε αναφορά για σχολικά εγχειρίδια και την αναγκαιότητα τους. Το σχολικό βιβλίο είναι ακόμη σημαντικό, διότι, αφενός, σε πολλά εκπαιδευτικά συστήματα συνιστά ένα από τα κυρίαρχα μέσα διδασκαλίας και μάθησης και, αφετέρου, ως κείμενο παρουσιάζει ερευνητικό ενδιαφέρον, καθώς, μεταξύ άλλων, παράγει και αναπαράγει ιδεολογίες (Μπονίδης, 2009). Τα επιστημονικά εγχειρίδια χρησιμοποιούνται συχνά για να μεταφέρουν πολλές από τις πληροφορίες που λαμβάνουν οι μαθητές σε μαθήματα θετικών επιστημών. Επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο οι καθηγητές θετικών επιστημών οργανώνουν το πρόγραμμα σπουδών και τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται την επιστημονική επιχείρηση (Chiappetta, Fillman & Sethna, 1991). Όπως αναφέρεται στο Εθνικό Συμβούλιο Παιδείας (2006), τα σχολικά εγχειρίδια κατασκευάζουν και νοηματοδοτούν την πραγματικότητα και ως εκ τούτου μπορεί να παίζουν άμεσο ρόλο στη διαμόρφωση αντιλήψεων, στερεοτύπων και προκαταλήψεων (ρατσισμός, ξενοφοβία, σεξισμός, σκοταδισμός). Οι περισσότεροι συγκλίνουν ότι τα σχολικά εγχειρίδια έχουν ορισμένα χαρακτηριστικά τα οποία τα καθιστούν το πιο διαδεδομένο μέσο διδασκαλίας.

Οι Καψάλης και Χαραλάμπους (2008) αναφέρουν ότι τα σχολικά βιβλία:

- Παρέχουν βασικές πληροφορίες για το υπό μελέτη αντικείμενο,
- Είναι εύκολα στην μεταφορά,
- Χρησιμοποιούνται εξατομικευμένα από τον μαθητή με τον τρόπο που επιβάλει ο ίδιος,
- Είναι ελαφριά
- Παρέχονται δωρεάν.

Σύμφωνα με τους Chiappetta, Fillman & Sethna (1991) οι κατηγορίες για την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων είναι :

- Η γνώση της επιστήμης.
- Η ερευνητική φύση της επιστήμης.
- Η επιστήμη ως τρόπος σκέψης.
- Η αλληλεπίδραση επιστήμης, τεχνολογίας και κοινωνίας.

Η πρώτη κατηγορία έχει να κάνει με το αν το σχολικό βιβλίο παρουσιάζει ή βάζει τον μαθητή να μάθει επιστημονικές αρχές, θεωρίες κτλ.. Η δεύτερη εάν παροτρύνει τον μαθητή να ερευνήσει και να μάθει από μόνος του και να παρατηρήσει, να υπολογίσει κτλ. Η τρίτη έχει να κάνει με το αν δείχνει στον μαθητή πως η επιστήμη ανακάλυψε το συγκεκριμένο θέμα, δηλαδή αν παρουσιάζει τα πειράματα των επιστημόνων, την ιστορική εξέλιξη κτλ., συντελώντας στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης. Τέλος η τελευταία κατηγορία έχει να κάνει με το αν παρουσιάζεται η επίδραση της επιστήμης στην κοινωνία.

Άλλα κριτήρια για την αξιολόγηση των σχολικών εγχειριδίων είναι αυτά που αναφέρονται:

- Στην εξωτερική εμφάνιση του βιβλίου τα δομικά και τεχνικά χαρακτηριστικά του κειμένου και του περικείμενου του.
- Στην παιδαγωγική καταλληλόλητα του βιβλίου.
- Στην σχέση του βιβλίου με το πρόγραμμα σπουδών.
- Την σχέση του βιβλίου με την επιστήμη στην οποία αναφέρεται.
- Τα θέματα που αφορούν το βιβλίο και την σχέση του με την κοινωνία. (Θέος, 2012 & Μπονίδης, 2005)

Ο Ο.ΕΠ.ΕΚ (2008) τονίζει την ανάγκη της εφαρμογής της διαθεματικότητας και διεπιστημονικότητας στην προσέγγιση της γνώσης και επομένως στη διδασκαλία και το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων. Επομένως θα πρέπει η διδασκαλία των μαθημάτων με τρόπο που τα μαθήματα να παραμένουν διακριτά, παράλληλα όμως να γίνεται προσπάθεια για την συσχέτιση του περιεχομένου τους. Προς αυτή την κατεύθυνση θα είναι προσανατολισμένη και η δική μας μελέτη. Κατά πόσο δηλαδή στα σχολικά εγχειρίδιά είναι εμφανής η διαθεματικότητα και η διεπιστημονικότητα, είτε μέσω μιας προσπάθειας για ενοποιητικής προσέγγισης της γνώσης, ή συσχέτισης των διαφορετικών επιστημών. Να μελετηθεί δηλαδή αν υπάρχει διαφοροποίηση μεταξύ των διδασκόμενων μαθημάτων και αν γίνονται προσπάθειες σύγκλισης των πρακτικών μεταξύ των επιστημονικών πεδίων. Η χρήση διεπιστημονικών εννοιών, ή διαθεματικών δραστηριοτήτων καθώς και η ύπαρξη προβλημάτων του πραγματικού κόσμου θα μπορούσαν να είναι δείγματα αυτών των πρακτικών.

Για την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων έχουν αναπτυχθεί διάφορα εργαλεία κατά καιρούς σε διάφορες μελέτες. Χρήσιμο για αυτή την μελέτη είναι αυτό που αναπτύχθηκε στις εργασίες των Στασινάκης & Κολιόπουλος (2009), Ξενάκη (2017) και Λουκάς (2019). Στις παραπάνω εργασίες παρά τις μικρό-αποκλίσεις μεταξύ τους μελετήθηκαν τα εγχειρίδια ως προς τα εξής:

Θέση: Εντοπισμός της έννοιας σε θεματικές ενότητες και υπό-ενότητες.

Χρόνος: Καταγραφή του πότε πρόκειται να διδαχθεί.

Περιεχόμενο: Προσδιορισμός της εννοιολογικής , μεθοδολογικής και πολιτισμικής προσέγγισης των εννοιών. Φράσεις κλειδιά, που αποκαλύπτουν τις παραπάνω προσεγγίσεις.

Μορφή: Εντοπισμός του τρόπου έκφρασης είτε στο κείμενο, στης ασκήσεις, στα διαγράμματα και τις εικόνες.

Παρατηρήσεις: Γίνεται μια πρώτη αποτίμηση των δεδομένων, για να τυπωθεί μια γενική θεώρηση για τους στόχους που υπηρετεί κάθε εγχειρίδιο.

3.4. Η ΠΑΡΟΥΣΑ ΜΕΛΕΤΗ - ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ.

Με βάση τα παραπάνω στην παρούσα εργασία μελετήσαμε τις εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής σε διαφορετικά επιστημονικά πεδία και πιο συγκεκριμένα στα σχολικά εγχειρίδια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η αξία αυτής της ανάλυσης είναι σημαντική, διότι θα μπορούσε να συμβάλει στη ανάδειξη της σημασίας της διεπιστημονικής προσέγγισης για την Οικονομική επιστήμη, ενώ παράλληλα να δώσει προτάσεις για τον εκπαιδευτικό σχεδιασμό των σχολικών εγχειριδίων και την βελτίωση της διδασκαλίας των συγκεκριμένων κατευθύνσεων και όχι μόνο. Προς αυτή την κατεύθυνση κινείται και η Διπλωματική Εργασία του Λουκά (2019), που μελέτησε τις εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών και της Οικονομίας της Γ’ Λυκείου. Ύστερα και από τις πρόσφατες ανακοινώνεις του υπουργείου παιδείας για αντικατάσταση των σχολικών εγχειριδίων και για αλλαγές του σχολικού προγράμματος η εργασία αυτή γίνεται όλο και πιο επίκαιρη.

Σημαντικό είναι να τονιστεί οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν την συμπεριφορά των οικονομικών μεγεθών, που είναι ρυθμοί μεταβολής, όπως είναι το οριακό προϊόν, το οριακό κόστος και το οριακό έσοδο. Η γνώση της συμπεριφοράς τους είναι απαραίτητη για την κατανόηση της μεγιστοποίησης των κερδών μιας επιχείρησης και επομένως της ισορροπίας της σε διάφορες μορφές αγορών. Τέτοιες δυσκολίες αντιμετωπίζουν ακόμη και φοιτητές στα πρώτα έτη του πανεπιστημίου. Ο Asano (2006) αναφέρει ότι η πλειοψηφία των πρωτοετών φοιτητών φαίνεται να δυσκολεύεται να το εφαρμόσει στο πρόβλημα μεγιστοποίησης των κερδών μιας επιχείρησης. Επιπλέον τονίζει ότι «όλοι οι οικονομολόγοι γνωρίζουν ότι η κατανόηση της οριακής ανάλυσης είναι ζωτικής σημασίας για τη μελέτη της οικονομίας. Η κατανόηση αυτού του υλικού μπορεί να είναι ζωτικής σημασίας για τους φοιτητές για να καθορίσουν εάν θα συνεχίσουν ή όχι τις σπουδές τους στα οικονομικά».

Όλα τα παραπάνω τονίζουν την επικαιρότητα αυτής της εργασίας καθώς και την αξία της συγκεκριμένης έρευνας. Για την ανάλυση αυτή θα θέσουμε τα εξής ερωτήματα ως προς τα σχολικά εγχειρίδια:

- Ποιες είναι οι εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής στο σχολικό εγχειρίδιο Αρχές Οικονομικής Θεωρίας στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση;
- Ποιες είναι οι εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής στα σχολικά εγχειρίδια της Φυσικής στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση;
- Ποιες είναι οι εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής στα σχολικά εγχειρίδια της Χημείας στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση;
- Ποιες είναι οι εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση;
- Ποιες οι συνδέσεις μεταξύ αυτών των εμφανίσεων στα διαφορετικά επιστημονικά πεδία;

Ειδικότερα σχετικά με τις παραπάνω εμφανίσεις θα θέσουμε τα εξής επιμέρους ερωτήματα:

- Ποιος είναι ο **Χρόνος** που συναντώνται αυτές οι εμφανίσεις;
- Ποιο είναι το **Περιεχόμενο** αυτών των εμφανίσεων;
- Ποιο το **Θέμα** καθεμίας από αυτές τις εμφανίσεις;
- Ποια είναι η **Θέση** αυτών των εμφανίσεων;
- Ποιο το **Είδος των Αναπαραστάσεων** που χρησιμοποιούνται;
- Ποιες οι εμφανίσεις των **Όρων**, Οριακός-ή, Στιγμιαία, Κλίση, Συντελεστής Διεύθυνσης, Παράγωγος, Όριο;

4. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ.

Στην παρούσα παράγραφο θα αναλύσουμε την μεθοδολογική προσέγγιση που ακολουθήθηκε για την ανάλυση και ερμηνεία των δεδομένων αυτής της έρευνας, ως προς τις εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής. Θα γίνει ποσοτική ανάλυση όσο και ποιοτική ανάλυση ακολουθώντας την συστημική προσέγγιση. Σύμφωνα με αυτή το σχολείο είναι ένα σύστημα από μόνο του, ενώ συγχρόνως είναι και υπό-μονάδα ενός άλλου συστήματος (Μούτσιος-Ρέντζος & Καλαβάσης, 2013 & Κοντάκος, 2018). Επιπρόσθετα ως προς την χρήση τόσο της ποσοτικής όσο και της ποιοτικής μεθόδου ο Robson (2007) τονίζει ότι χρησιμοποιώντας μία μόνο μέθοδο οι ερευνητές μπορεί να καταλήξουν σε ένα αρκετά ξεκάθαρο αποτέλεσμα το οποίο μπορεί να τους ξεγελάσει και να πιστεύουν ότι ανακάλυψαν την «σωστή» απάντηση. Χρησιμοποιώντας όμως και άλλες επιπρόσθετες μεθόδους μπορεί να εμφανιστούν διαφοροποιημένες απαντήσεις που να αναιρούν την παραπάνω βεβαιότητα τους.

4.1. ΤΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΚΑΤΑΓΡΑΦΗΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ.

Αρχικά πρέπει να τονίσουμε ότι θα μελετηθούν όλα τα σχολικά εγχειρίδια του Μαθητή, καθώς και τα εγχειρίδια «Λύσεις των Ασκήσεων» των τάξεων του Λυκείου, για τα Μαθήματα Αρχές Οικονομικής Θεωρίας, Φυσικής, Χημείας και Μαθηματικών.

Ως προς τις **εμφανίσεις** νοείται οποιαδήποτε αναφορά λεκτικά στον όρο «Ρυθμός Μεταβολής» ή οι εμφανίσεις του τύπου $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Σε αυτό προστέθηκαν οι εμφανίσεις που γίνονται με μαθηματικό τύπο, με εικόνα, με γραφική παράσταση, πίνακα ή οποιοδήποτε άλλο τρόπο στον οποίο τονίζεται ότι αφορά ρυθμό μεταβολής ή αποτελεί αναπαράσταση αυτού. Οι ασκήσεις που επιλέχθηκαν είναι αυτές που η επίλυση τους απαιτεί την χρήση του ρυθμού μεταβολής, όπως αυτή εμφανίζεται στα εγχειρίδια « Λύσεις των Μαθημάτων». Οι εμφανίσεις αυτές μελετήθηκαν ως προς τα παρακάτω στοιχεία:

Ως προς τον **Χρόνο** μελετήθηκε σε ποια τάξη του λυκείου συναντάτε ο ρυθμός μεταβολής για κάθε ένα από εξεταζόμενα μαθήματα, για να διαπιστώσουμε την συνέχεια αυτών των εμφανίσεων και η διασπορά τους σε όλες τις τάξεις του Λυκείου.

Παράλληλα αναλύσαμε το **Περιεχόμενο** αυτών, σε Μαθηματικό, Οικονομικό, Φυσικό ή Χημικό, για να διαπιστώσουμε μέσα από πιο επιστημονικό πεδίο παρουσιάζεται αυτή η έννοια, αλλά συγχρόνως να τονίσουμε την διεπιστημονικότητα και την σύνδεση με άλλα επιστημονικά πεδία, που προϋπάρχει στα σχολικά εγχειρίδια, καθώς και τις αποκλίσεις τους.

Κατόπιν μελετήσαμε το **Θέμα** της κάθε εμφάνισης για να διαπιστώσουμε την μορφή με την οποία παρουσιάζεται η έννοια. Πιο συγκεκριμένα αν ήταν μέρος μίας από τις ακόλουθες κατηγορίες:

- **Θεωρητικό πλαίσιο**
- **Εφαρμογή κατανόησης /λυμένο παράδειγμα,**
- **Ερωτήσεις,**
- **Άσκηση / Πρόβλημα, Δραστηριότητα**.

Επιπλέον μελετήθηκε η **Θέση** αυτών των εμφανίσεων, ώστε να κατανοηθεί το πλαίσιο μέσα στο οποίο διδάσκεται η συγκεκριμένη έννοια, δηλαδή ποια ενότητα ή υποενότητα αφορά.

Επιπρόσθετα, μελετήσαμε τις εμφανίσεις αυτές ως προς το **είδος της αναπαράστασης**, αν δηλαδή ανήκει σε μια από τις παρακάτω κατηγορίες:

- **Λεκτικός ή κείμενο,**
- **Μαθηματικός τύπος,**
- **Εικόνα,**
- **Γραφική παράσταση,**
- **Πίνακας,**
- **Συνδυασμός περισσοτέρων από μίας αναπαράστασης.**

Στόχος ήταν να αναδειχθούν οι συσχετίσεις μεταξύ των διάφορων επιστημών και οι ομοιότητες στον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζεται ο ρυθμός μεταβολής στα διαφορετικά επιστημονικά πεδία.

Για να τονίσουμε αυτές τις συσχετίσεις παρατηρήσαμε και τις εμφανίσεις των εξής όρων (λεκτικά ή με τον μαθηματικό τους τύπο) :

- **Οριακός / οριακή**,
- **Στιγμιαία**,
- **Κλίση**,
- **Συντελεστής διεύθυνσης,**
- **Παράγωγος,**
- **Όριο.**

Ο τρόπος συλλογής των δεδομένων έχει ομοιότητες με παλαιότερες έρευνες όπως αυτές των Στασινάκης & Κολιόπουλος (2009), Ξενάκη (2017) και Λουκάς (2019), αλλά έχει διαμορφωθεί στις ανάγκες της συγκεκριμένης έρευνας. Τα στοιχεία αυτά θα συγκεντρωθούν σε πίνακες ανά μάθημα (Πίνακας Ι), ένας θα αφορά τις εμφανίσεις στα εγχειρίδια του Μαθητή, ο δεύτερος τις εμφανίσεις στα εγχειρίδια Λύσεις των ασκήσεων και ο τρίτος θα είναι άθροισμα των δύο προηγούμενων.

<table>
<tr><td colspan="6"><u>Χρόνος</u></td></tr>
<tr><td colspan="2">Α΄ Λυκείου</td><td colspan="2">Β΄ Λυκείου</td><td colspan="2">Γ΄ Λυκείου</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="6"><u>Περιεχόμενο</u></td></tr>
<tr><td>Μαθηματικό</td><td>Οικονομικό</td><td>Φυσικό</td><td>Χημικό</td><td colspan="2">Άλλο</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="6"><u>Θέμα</u></td></tr>
<tr><td>Θεωρητικό Πλαίσιο</td><td colspan="2">Εφαρμογή κατανόησης/ Λυμένο παράδειγμα</td><td>Ερωτήσεις</td><td colspan="2">Ασκήσεις/Πρόβλημα/Δραστηριότητες</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="6"><u>Αναπαράσταση</u></td></tr>
<tr><td>Λεκτικό / Κείμενο</td><td>Μαθηματικός Τύπος</td><td>Εικόνα</td><td>Γραφική Παράσταση</td><td>Πίνακας</td><td>Συνδυασμός Αναπαραστάσεων</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6"><u>Εμφανίσεις των όρων</u></td></tr>
<tr><td>Οριακός / Οριακή</td><td>Στιγμιαία</td><td>Κλίση</td><td>Συντελεστής Διεύθυνσης</td><td>Παράγωγός</td><td>Όριο</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Πίνακας 4.1. Οι εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής στα σχολικά εγχειρίδια.

Πιο συγκεκριμένα στα Μαθηματικά μελετήθηκαν τα εξής εγχειρίδια:

1. Αδαμόπουλος, Λ., Δαμιανού, Χ. & Σβέρκος, Α. (2001). *Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ' Ενιαίου Λυκείου.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.
2. Αδαμόπουλος, Λ., Δαμιανού, Χ. & Σβέρκος, Α. (2001). *Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ' Ενιαίου Λυκείου, Λύσεις των Ασκήσεων.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.
3. Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., Αδαμόπουλος Λ., & Δαμιανού Χ. (1991). *Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.
4. Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., Αδαμόπουλος Λ., & Δαμιανού Χ. (1991). *Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου, Λύσεις των Ασκήσεων.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.
5. Στυλιανός, Α., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ. & Πολύζος, Γ. (2021). *Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Υγείας και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής Γ' Γενικού Λυκείου*. ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.
6. Στυλιανός, Α., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ. & Πολύζος, Γ. (2021). *Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Υγείας και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής Γ' Γενικού Λυκείου, Λύσεις των Ασκήσεων*. ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Στην φυσική μελετήθηκαν τα εγχειρίδια:

1. Αλεξάκης, Ν., Αμπατζής, Σ., Γκουγκούσης, Γ., Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Κόκκοτας, Π., Περιστερόπουλος, Π. & Τιμόθεου, Γ., (2010) *Φυσική Γ΄ Τάξης Ενιαίου Λυκείου.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.
2. Αλεξάκης, Ν., Αμπατζής, Σ., Γκουγκούσης, Γ., Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Κόκκοτας, Π., Περιστερόπουλος, Π. & Τιμόθεου, Γ., (2010) *Φυσική Γ΄ Τάξης Ενιαίου Λυκείου, Λύσεις των Ασκήσεων.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.
3. Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Κόκκοτας, Π., Περιστερόπουλος, Π. & Τιμόθεου, Γ., (2010). *Φυσική Γενικής Παιδείας Α' Τάξης Ενιαίου Λυκείου.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.
4. Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Κόκκοτας, Π., Περιστερόπουλος, Π. & Τιμόθεου, Γ., (2013). *Φυσική Γενικής Παιδείας Β' Τάξης Ενιαίου Λυκείου*. ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.
5. Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Κόκκοτας, Π., Περιστερόπουλος, Π. & Τιμόθεου, Γ., (2013). *Φυσική Γενικής Παιδείας Β' Τάξης Ενιαίου Λυκείου, Λύσεις των Ασκήσεων.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.
6. Ιωάννου Α., Ντάνος Γ., Πήττας Α., & Ράπτης Σ., (2019). *Φυσική Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου (Γ ΄Τεύχος).* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.
7. Ιωάννου Α., Ντάνος Γ., Πήττας Α., & Ράπτης Σ., (2019). *Φυσική Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου (Γ΄ τεύχος), Λύσεις των Ασκήσεων.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.
8. Ιωάννου Α., Ντάνος Γ., Πήττας Α., & Ράπτης Σ., (2019). *Φυσική Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου (Β΄ Τεύχος).* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

9. Ιωάννου Α., Ντάνος Γ., Πήττας Α., & Ράπτης Σ., (2019). *Φυσική Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου(Β΄ Τεύχος), Λύσεις των Ασκήσεων.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

10. Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Κόκκοτας, Π., Περιστερόπουλος, Π., Τιμόθεου, Γ., Αλεξάκης Ν., Αμπατζής Σ., & Γκουγκούσης Γ., (2019). *Φυσική Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου (Α΄ τεύχος).* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

11. Ιωάννου Α., Ντάνος Γ., Πήττας Α., & Ράπτης Σ., (2013). *Φυσική Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Β' Τάξης Ενιαίου Λυκείου.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

12. Ιωάννου Α., Ντάνος Γ., Πήττας Α., & Ράπτης Σ., (2013). *Φυσική Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Β' Τάξης Ενιαίου Λυκείου, Λύσεις των Ασκήσεων.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Στο μάθημα Αρχές Οικονομικής Θεωρίας μελετήθηκαν τα εγχειρίδια:

1. Λιανός, Θ., Παπαβασιλείου, Α. & Χατζηανδρέου, Α. (2019). *Αρχές Οικονομικής Θεωρίας, Ομάδας Προσανατολισμού Σπουδών Πληροφορικής & Οικονομίας, Λ, Γ' Τάξης Γενικού Λυκείου.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.
2. Λιανός, Θ., Παπαβασιλείου, Α. & Χατζηανδρέου, Α. (2019). *Αρχές Οικονομικής Θεωρίας, Ομάδας Προσανατολισμού Σπουδών Πληροφορικής & Οικονομίας, Λύσεις των Ασκήσεων, Γ' Τάξης Γενικού Λυκείου.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Τέλος στο μάθημα της Χημείας μελετήθηκαν τα παρακάτω εγχειρίδια:

1. Λιοδάκης Σ., Γάκης Δ., Θεοδωρόπουλος Δ., Θεοδωρόπουλος Π. & Κάλλης Α., (2010). *Χημεία θετικής κατεύθυνσης Β' Τάξης Ενιαίου Λυκείου.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.
2. Λιοδάκης Σ., Γάκης Δ., Θεοδωρόπουλος Δ., Θεοδωρόπουλος Π. & Κάλλης Α., (2010). *Χημεία θετικής κατεύθυνσης Β' Τάξης Ενιαίου Λυκείου, Λύσεις των Ασκήσεων.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.
3. Λιοδάκης Σ., Γάκης Δ., Θεοδωρόπουλος Δ., Θεοδωρόπουλος Π. & Κάλλης Α., (2010). *Χημεία θετικής κατεύθυνσης Α' Τάξης Ενιαίου Λυκείου.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.
4. Λιοδάκης Σ., Γάκης Δ., Θεοδωρόπουλος Δ., Θεοδωρόπουλος Π. & Κάλλης Α., (2010). *Χημεία θετικής κατεύθυνσης Α' Τάξης Ενιαίου Λυκείου, Λύσεις των Ασκήσεων.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.
5. Λιοδάκης Σ., Γάκης Δ., Θεοδωρόπουλος Δ., Θεοδωρόπουλος Π. & Κάλλης Α., (2012). *Χημεία θετικής κατεύθυνσης Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.
6. Λιοδάκης Σ., Γάκης Δ., Θεοδωρόπουλος Δ., Θεοδωρόπουλος Π. & Κάλλης Α., (2012). *Χημεία θετικής κατεύθυνσης Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου, Λύσεις των Ασκήσεων.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

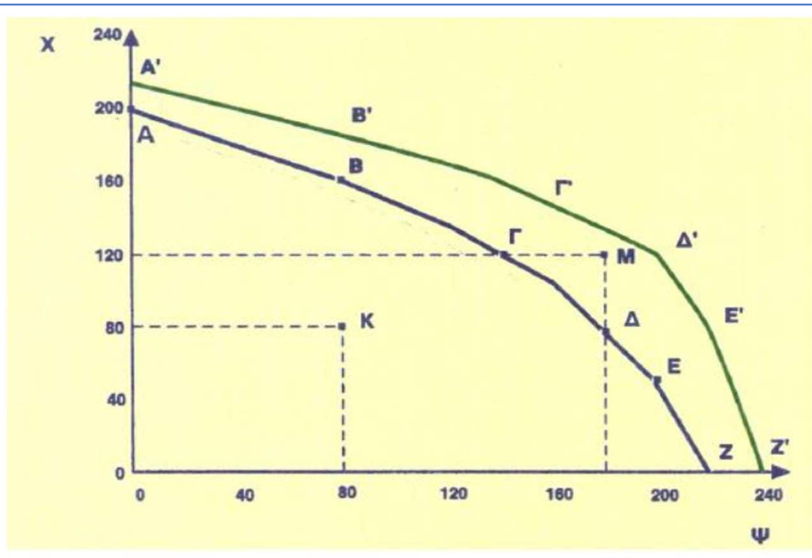
5. ΟΙ ΕΜΦΑΝΙΣΕΙΣ ΤΟΥ ΡΥΘΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ.

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε τις εμφανίσεις του ρυθμού στα σχολικά εγχειρίδια του μαθήματος Αρχές Οικονομικής Θεωρίας, στο μάθημα των Μαθηματικών, αλλά και στα μαθήματα της Φυσικής και της Χημείας. Πιο συγκεκριμένα θα παρουσιάσουμε όλες τις εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής με κριτήριο την σαφή αναφορά στον όρο ‘’ρυθμός μεταβολής ή την χρήση του λόγου $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Στόχος είναι να διαπιστώσουμε την ύπαρξη της έννοιας στα διαφορετικά επιστημονικά πεδία καθώς και των συγκλίσεων και αποκλίσεων στη εκάστοτε προσέγγιση. Επιπλέον, θέλουμε να διαπιστώσουμε το είδος των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται σε κάθε μια από αυτές περιπτώσεις και να επισημάνουμε αυτές που μπορούν να συμβάλουν στις συνδέσεις μεταξύ των επιστημονικών πεδίων.

5.1. ΟΙ ΕΜΦΑΝΙΣΕΙΣ ΤΟΥ ΡΥΘΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΡΧΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ.

Αρχικά θα ξεκινήσουμε με το μάθημα Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Α.Ο.Θ.) που διδάσκεται στη Γ΄ Λυκείου στην ομάδα προσανατολισμού σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής.

Συναντάμε τον ρυθμό μεταβολής στην έννοια του πραγματικού κόστους ή κόστους ευκαιρίας. Πιο συγκεκριμένα στο πρώτο κεφάλαιο, διδάσκεται η έννοια της καμπύλης παραγωγικών δυνατοτήτων όπου μια οικονομία χρησιμοποιώντας όλους τους παραγωγικούς συντελεστές αποδοτικά και με δεδομένη την τεχνολογία παράγει δύο μόνο αγαθά (έστω χ και ψ), όπως στο παρακάτω γράφημα, εικόνα 5.1.



Διάγραμμα 1.2. Η Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων και η Μετατόπιση της

Εικόνα 5.1. Βιβλίο Αρχές Οικονομικής Θεωρίας σελ. 18

Με βάση την καμπύλη παραγωγικών δυνατοτήτων και ένα παράδειγμα που δίδεται ορίζεται το κόστος ευκαιρίας ή εναλλακτικό κόστος ως εξής, Εικόνα 5.2:

Γενικά,

Κόστος ευκαιρίας του αγαθού Υ (σε όρους του αγαθού Χ) $= \dfrac{\text{Μονάδες του αγαθού Χ που θυσιάζονται}}{\text{Μονάδες του αγαθού Υ που παράγονται}}$

ή $KE_Y = \dfrac{\Delta X}{\Delta Y}$ (οι μονάδες του αγαθού Χ που θυσιάστηκαν για την παραγωγή μιας επιπλέον μονάδας του αγαθού Ψ)

Κόστος ευκαιρίας του αγαθού Χ (σε όρους του αγαθού Υ) $= \dfrac{\text{Μονάδες του αγαθού Υ που θυσιάζονται}}{\text{Μονάδες του αγαθού Χ που παράγονται}}$

ή $KE_X = \dfrac{\Delta Y}{\Delta X}$ (οι μονάδες του αγαθού Ψ που θυσιάστηκαν για την παραγωγή μιας επιπλέον μονάδας του αγαθού Χ)

Εικόνα 5.2. Βιβλίο Αρχές Οικονομικής Θεωρίας σελ. 21

Κατόπιν παρατίθεται ο παρακάτω πίνακας για να εξηγήσει τον τρόπο υπολογισμού του κόστους (εικόνα 5.3)

Πίνακας 1.1.

Συνδυασμοί Ποσοτήτων	Ποσότητες Ψωμιού	Ποσότητες Όπλων	Κόστος όπλων σε μονάδες ψωμιού	Κόστος ψωμιού σε μονάδες όπλων
Α	120	0		
			20 : 50 = 0,4	50 : 20 = 2,5
Β	100	50		
			30 : 15 = 2	15 : 30 = 0.5
Γ	70	65		
			70 : 15 = 4,67	15 : 70 = 0,21
Δ	0	80		

Εικόνα 5.3. Βιβλίο Αρχές Οικονομικής Θεωρίας σελ. 21

Σε αυτή την περίπτωση διαπιστώνουμε ότι δίδονται τέσσερις διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας για να γίνει κατανοητή, οι οποίες είναι η εννοιολογική, η αλγεβρική , η γραφική της παράσταση και ο πίνακας. Στο τέλος του κεφαλαίου δίνονται και τέσσερις ασκήσεις για επίλυση , δύο με την μορφή κειμένου, μία με την βοήθεια διαγράμματος και άλλη μια με την βοήθεια πίνακα (σελ. 26).

Στο δεύτερο κεφάλαιο συναντάμε ξανά τον ρυθμό μεταβολής μέσα στην γραμμική συνάρτηση ζήτησης. Πιο συγκεκριμένα αναφέρεται στο συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας και αναφέρει τα χαρακτηριστικά του, Εικόνα 5.4.:

i) Γραμμική συνάρτηση ζήτησης:

Η γραμμική συνάρτηση ζήτησης έχει τον τύπο: $Q_D = α + β\,P$ και είναι ευθεία γραμμή. Η σταθερά **α** είναι πάντα θετικός αριθμός, ενώ ο συντελεστής **β** εξαρτάται από την κλίση της ευθείας και είναι πάντα αρνητικός αριθμός, αφού η κλίση της ευθείας εκφράζει την αρνητική σχέση μεταξύ ζητούμενης ποσότητας και τιμής (Νόμος Ζήτησης). Με δεδομένα ότι η ζητούμενη ποσότητα και η τιμή δεν μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές, θα πρέπει:

$Q_D \geq 0$ και $P \geq 0$.

Εικόνα 5.4. Βιβλίο Αρχές Οικονομικής Θεωρίας σελ. 21

Στο ίδιο κεφάλαιο συναντάμε τον ρυθμό μεταβολής στον τύπο της ελαστικότητας ζήτησης, χωρίς να γίνεται ιδιαίτερη μνεία σε αυτόν. Με την βοήθεια ενός πίνακα και παραθέτει ένα παράδειγμα και προχωρά στους μαθηματικούς υπολογισμούς. Έτσι ορίζει ότι η Ελαστικότητα ως προς την τιμή είναι ο λόγος της ποσοστιαίας μεταβολής της ζητούμενης ποσότητας προς την ποσοστιαία μεταβολή της τιμής και ουσιαστικά δείχνει πόσο της % θα μεταβληθεί η ζητούμενη ποσότητα Q όταν μεταβληθεί η τιμή P κατά 1%. Στο σχολικό εγχειρίδιο τονίζεται ότι δείχνει τον βαθμό αντίδρασης ή ανταπόκρισης του Καταναλωτή όταν μεταβληθεί η τιμή και δίδει τον σχετικό τύπο, Εικόνα 5.5.).

$$E_D = \frac{\frac{ΔQ}{Q_1}\cdot 100}{\frac{ΔP}{P_1}\cdot 100} \quad ή \quad E_D = \frac{\frac{ΔQ}{Q_1}}{\frac{ΔP}{P_1}} \quad ή \quad E_D = \frac{ΔQ}{ΔP}\cdot\frac{P_1}{Q_1}$$

Εικόνα 5.5. Βιβλίο Αρχές Οικονομικής Θεωρίας σελ. 40

Ουσιαστικά η ελαστικότητα είναι το γινόμενο του ρυθμού μεταβολής στο σημείο P_1, Q_1 και του λόγου P/Q στο ίδιο σημείο, πράγμα που είναι απαραίτητο να ο μαθητής να γνωρίσει, για την επίλυση των ασκήσεων αλλά και την κατανόηση της έννοιας της ελαστικότητας. Στο τέλος του κεφαλαίου με παρόμοιο τρόπο ορίζεται και η ελαστικότητα εισοδήματος, Εικόνα 5.6

$$E_Y = \frac{\frac{ΔQ}{Q_1}\cdot 100}{\frac{ΔY}{Y_1}\cdot 100} \quad ή \quad E_Y = \frac{ΔQ}{ΔY}\cdot\frac{Y_1}{Q_1}$$

Εικόνα 5.6. Βιβλίο Αρχές Οικονομικής Θεωρίας σελ. 47

Σε κάθε περίπτωση τους δίνετε ένας πίνακας για εξάσκηση και κατανόηση της έννοιας και δίδονται και οι σχετικοί αλγεβρικοί υπολογισμοί Εικόνα 5.7.

Πίνακας 2.1.

	Τιμή (Ευρώ)	Ζητούμενη ποσότητα (κιλά)
Α	20	40
Β	16	60
Γ	12	90
Δ	8	120
Ε	4	150

Πίνακας 2.7.

	Ζητούμενη ποσότητα Q	Τιμή Μονάδος P	Εισόδημα Καταναλωτών Y
Α	10	150	50.000
Β	12	150	55.000
Γ	15	150	60.000
Δ	18	150	72.000
Ε	22,5	150	96.000

Εικόνα 5.7. Βιβλίο Αρχές Οικονομικής Θεωρίας σελ. 41 & 47

Στο τέλος του κεφαλαίου δίδονται 10 ασκήσεις από τις οποίες οι 9 εμπλέκουν την έννοια του ρυθμού μεταβολής για την επίλυση τους, και ποιο συγκεκριμένα της ελαστικότητας ζήτησης και του συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας. Δύο από αυτές δίδουν γραφική παράσταση, άλλες δύο είναι πολλαπλής επιλογής, σε δύο ακόμη δίδονται πίνακες που απαιτούν συμπλήρωση και οι υπόλοιπες είναι με την μορφή κειμένου.

Σε συνέχεια το σχολικό εγχειρίδιο κάνει αναφορά στον ρυθμό μεταβολής στο κεφάλαιο 3 με τις έννοιες του οριακού προϊόντος και του οριακού κόστους. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο αναφέρει ξεκάθαρα τον όρο ρυθμό μεταβολής, αφού το οριακό προϊόν είναι ο ρυθμός μεταβολής του συνολικού προϊόντος και το οριακό κόστος ο ρυθμός μεταβολής του συνολικού κόστους. Πριν από αυτό ορίζει τις έννοιες των προϊόντων και του κόστους αντίστοιχα. Ποιο συγκεκριμένα ορίζει το οριακό κόστος όπως παρακάτω Εικόνα 5.8.

Οριακό προϊόν (Marginal Product, MP) ενός συντελεστή είναι η μεταβολή που επέρχεται στο συνολικό προϊόν, όταν μεταβάλλεται ο μεταβλητός συντελεστής κατά μία μονάδα. Υπολογίζεται ως εξής:

$$\text{Οριακό Προϊόν} = \frac{\text{Μεταβολή συνολικού προϊόντος}}{\text{Μεταβολή στην ποσότητα του μεταβλητού συντελεστή (εργάτες)}} \text{ ή}$$

$$MP = \frac{\Delta Q}{\Delta L},$$

όπου MP = Οριακό Προϊόν και το Δ = Συμβολίζει τη μεταβολή

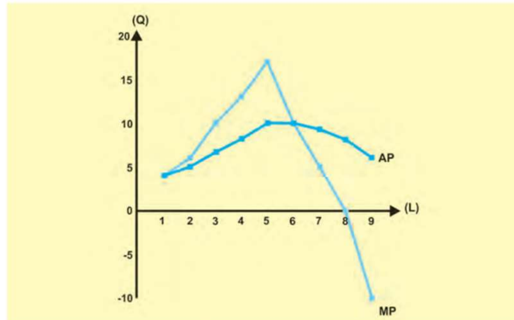
Το οριακό προϊόν μετρά το ρυθμό μεταβολής του συνολικού προϊόντος, εξαιτίας της προσθήκης κάθε φορά στην παραγωγή του τελευταίου εργάτη. Πρέπει να σημειωθεί ότι το οριακό προϊόν της εργασίας δεν είναι το προϊόν που παράγει κάθε φορά ο συγκεκριμένος επιπλέον εργάτης, αλλά η μεταβολή που επέρχεται στις συνθήκες παραγωγής και, συνεπώς, στο συνολικό προϊόν, εξαιτίας της παρουσίας του επιπλέον εργάτη.

Εικόνα 5.8. Βιβλίο Αρχές Οικονομικής Θεωρίας σελ. 56

Ενώ ακολουθεί και σχετικός πίνακας και γραφική παράσταση των εννοιών για την καλύτερη κατανόηση τους Εικόνα 5.9:

Πίνακας 3.2. Μέσο και Οριακό Προϊόν

Αριθμός εργατών (L)	Συνολικό προϊόν (TP ή Q)	Μέσο προϊόν AP=Q/L	Οριακό προϊόν MP=ΔQ/ΔL
0	0	-	-
1	4	4	4
2	10	5	6
3	20	6,7	10
4	33	8,2	13
5	50	10	17
6	60	10	10
7	65	9,3	5
8	65	8,1	0
9	55	6,1	-10



Διάγραμμα 3.2. Καμπύλες μέσου και οριακού προϊόντος

Εικόνα 5.9. Βιβλίο Αρχές Οικονομικής Θεωρίας σελ. 56 & 57

Αντίστοιχα ορίζεται και το οριακό, αφού πάλι προηγηθεί η ανάλυση όλων των μορφών κόστους αλλά και του μέσου κόστους, Εικόνα 5.10:

4. Οριακό κόστος

Το οριακό κόστος δείχνει το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το συνολικό κόστος, όταν μεταβάλλεται η παραγωγή κατά μια μονάδα. Το οριακό κόστος (Marginal Cost, MC) είναι ο λόγος της μεταβολής του συνολικού κόστους προς τη μεταβολή του προϊόντος.

$$\text{Οριακό Κόστος} = \frac{\text{Μεταβολή Συνολικού Κόστους}}{\text{Μεταβολή του Προϊόντος}} \text{ ή } MC = \frac{\Delta(TC)}{\Delta Q}.$$

Και, επειδή στη μεταβολή του συνολικού κόστους συμμετέχει μόνο το μεταβλητό κόστος, ενώ το σταθερό δεν μεταβάλλεται:

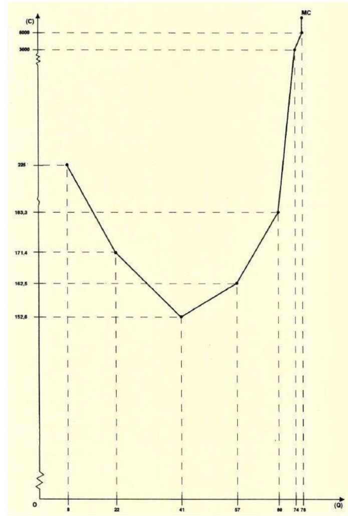
$$\text{Οριακό Κόστος} = \frac{\text{Μεταβολή Μεταβλητού Κόστους}}{\text{Μεταβολή του Προϊόντος}} \text{ ή } MC = \frac{\Delta(VC)}{\Delta Q}.$$

Εικόνα 5.10. Βιβλίο Αρχές Οικονομικής Θεωρίας σελ. 65

Επίσης δίδεται ένας πίνακας για την κατανόηση του υπολογισμού του και το σχετικό γράφημα, Εικόνα 5.11.

Πίνακας 3.6 Οριακό Κόστος

Προϊόν (Q) (1)	Μεταβολή Προϊόντος (ΔQ) (2)	Συνολικό Κόστος (TC) (3)	Μεταβολή Συνολικού Κόστους Δ(TC) (4)	Οριακό Κόστος (MC) (5)
0	0	4000		
8	8	5800	1800	225
22	14	8200	2400	171,4
41	19	11100	2900	152,6
57	16	13700	2600	162,5
69	12	15900	2200	183,3
74	5	17400	1500	300
76	2	18600	1200	600
76	0	19600	1000	∞



Εικόνα 5.11. Βιβλίο Αρχές Οικονομικής Θεωρίας σελ. 66 & 67

Στο τέλος του κεφαλαίου (σελ. 75-77) δίδονται ερωτήσεις εμβάθυνσης και 5 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής , ενώ κατόπιν δίδονται 9 ασκήσεις όπου για την επίλυση τους είναι απαραίτητη η χρήση του ρυθμού μεταβολής, οι επτά με την μορφή πίνακα προς συμπλήρωση και οι δύο με την μορφή κειμένου (5 & 8). Σε ορισμένες ζητείται και η κατασκευή των σχετικών διαγραμμάτων.

Στην συνέχεια στο κεφάλαιο 4 ορίζει με παρόμοιο τρόπο με το δεύτερο κεφάλαιο την γραμμική συνάρτηση προσφοράς και αναφέρει τα χαρακτηριστικά του συντελεστή διεύθυνσης όπως παρακάτω Εικόνα 5.12.

$Q_S = f(P)$

όπου Q_S = προσφερόμενη ποσότητα

P = τιμή του αγαθού

Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης είναι η καμπύλη προσφοράς. Η συνάρτηση προσφοράς μπορεί να έχει διάφορες αλγεβρικές μορφές. Εμείς, για ευκολία, θα θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση προσφοράς είναι γραμμική. Η μορφή της είναι $\mathbf{Q_S = \gamma + \delta P}$. Η σταθερά **γ** στη συνάρτηση προσφοράς μπορεί να είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός, αλλά ο συντελεστής **δ** είναι πάντα θετικός αριθμός και εκφράζει τη θετική κλίση της καμπύλης προσφοράς, που πηγάζει από το νόμο της προσφοράς. Η ποσότητα και η τιμή δεν μπορεί να έχουν αρνητικές τιμές και ισχύει $\mathbf{Q_S \geq 0, P \geq 0}$.

Εικόνα 5.12. Βιβλίο Αρχές Οικονομικής Θεωρίας σελ. 80

Επίσης στο ίδιο κεφάλαιο ο ρυθμός μεταβολής εμφανίζεται και στον τύπο της ελαστικότητας προσφοράς ως εξής, η οποία είναι ο λόγος της ποσοστιαίας μεταβολής της προσφερόμενης ποσότητας ως προς την ποσοστιαία μεταβολή της τιμής P Εικόνα 5.13.

$$E_S = \frac{\Delta Q}{Q_1} : \frac{\Delta P}{P_1} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P_1}{Q_1},$$

Εικόνα 5.13. Βιβλίο Αρχές Οικονομικής Θεωρίας σελ.86)

Στο τέλος του κεφαλαίου υπάρχουν τρεις ασκήσεις συνδυαστικές με το τρίτο κεφάλαιο όπου απαιτείται η χρήση του ρυθμού μεταβολής για την επίλυση τους.

Τέλος στο έκτο κεφάλαιο γίνεται εκτενής αναφορά στο ρυθμό μεταβολή με την έννοια του οριακού εσόδου. Μάλιστα στο συγκεκριμένο κεφάλαιο τονίζει τη σημασία των ρυθμών μεταβολής για την οικονομική επιστήμη αφού παρουσιάζει και τις ισορροπίες των διάφορων μορφών αγοράς που επιτυγχάνεται στο σημείου που εξισώνονται το οριακό κόστος με το οριακό έσοδο, δηλαδή δύο διαφορετικοί ρυθμοί μεταβολής. Πιο συγκεκριμένα το οριακό έσοδο παρουσιάζεται ως εξής αφού πριν ορίσει το συνολικό και μέσο έσοδο. Εικόνα 5.14.

Συνολικά έσοδα (total revenue) μιας επιχείρησης είναι οι συνολικές εισπράξεις της από την πώληση ορισμένης ποσότητας ενός προϊόντος. Το συνολικό έσοδο (TR) υπολογίζεται από το γινόμενο της τιμής (P) επί την ποσότητα (Q):

$$\mathbf{TR = P \cdot Q \ (1)}$$

Η παραπάνω συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί γραφικά. Εφόσον στον **τέλειο ανταγωνισμό** η τιμή είναι δεδομένη για την επιχείρηση, το συνολικό έσοδο εξαρτάται μόνον από την πωλούμενη ποσότητα (Q). Επομένως, η συνάρτηση (1) είναι ευθεία γραμμή και διέρχεται από την αρχή των αξόνων [διάγραμμα 6.1].

Αν διαιρέσουμε το συνολικό έσοδο με την πωλούμενη ποσότητα, βρίσκουμε το **μέσο έσοδο** (AR) (average revenue), δηλαδή το έσοδο ανά μονάδα προϊόντος που πωλείται:

$$AR = \frac{TR}{Q} \qquad (2)$$

Το επιπλέον έσοδο από την πώληση μιας επιπλέον μονάδας προϊόντος ονομάζεται **οριακό έσοδο** (marginal revenue ή MR) και υπολογίζεται από το λόγο της μεταβολής του συνολικού εσόδου προς τη μεταβολή της πωλούμενης ποσότητας:

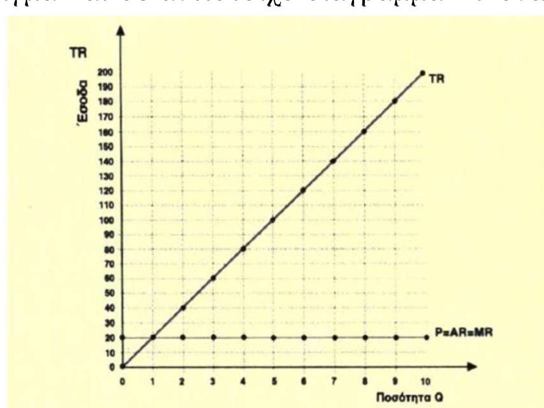
$$MR = \frac{\Delta(P \cdot Q)}{\Delta Q} \qquad (2)$$

Εικόνα 5.14. Βιβλίο Αρχές Οικονομικής Θεωρίας σελ.111

Κατόπιν προχωρά σε αριθμητικό παράδειγμα και σε αντίστοιχό διάγραμμα Εικόνα 5.15.

Πίνακας 6.1. Παράδειγμα υπολογισμού συνολικού μέσου και οριακού εσόδου

Μονάδες Προϊόντος Q	Τιμή Μονάδας P	Συνολικό Έσοδο TR = P · Q	Μέσο Έσοδο AR	Οριακό Έσοδο MR
0	20	0	20	20
1	20	20	20	20
2	20	40	20	20
3	20	60	20	20
4	20	80	20	20
5	20	100	20	20
6	20	120	20	20
7	20	140	20	20
8	20	160	20	20
9	20	180	20	20
10	20	200	20	20



Διάγραμμα 6.1. Οι καμπύλες συνολικού, μέσου και οριακού εσόδου

Εικόνα 5.15. Βιβλίο Αρχές Οικονομικής Θεωρίας σελ.112

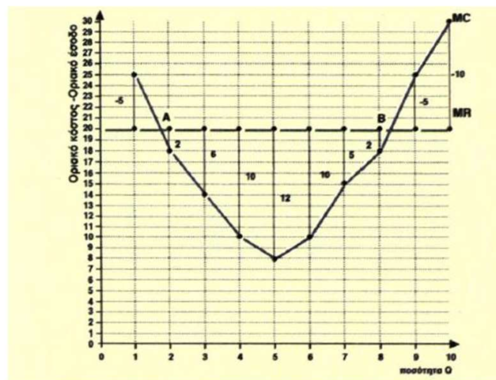
Τέλος αφού παρουσιάζει ξανά τα κόστη (κεφάλαιο 3) προχωρά στις συνθήκες ισορροπίας χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα(εικόνα 5.16 & 4.17.)

(iv) Συνθήκη ισορροπίας της επιχείρησης

Στο προηγούμενο τμήμα προσδιορίσαμε τη θέση ισορροπίας της επιχείρησης βρίσκοντας την ποσότητα του προϊόντος που αποφέρει το μέγιστο κέρδος, μελετώντας τη συμπεριφορά του συνολικού εσόδου και του συνολικού κόστους. Ένας άλλος τρόπος προσδιορισμού της θέσης ισορροπίας είναι αυτός που εξετάζει τη συμπεριφορά του οριακού εσόδου (M R) και του οριακού κόστους (M C).

Πίνακας 6.5.

Παραγόμενη Ποσότητα	Οριακό έσοδο	Οριακό κόστος	Κέρδος από παραγωγή μιας επιπλέον μονάδας προϊόντος	Άθροισμα κερδών από συνολική παραγωγή	Σταθερό κόστος	Συνολικό κέρδος
1	20	25	-5	-5	10	-15
2	20	18	2	-3	10	-13
3	20	14	6	3	10	-7
4	20	10	10	13	10	3
5	20	8	12	25	10	15
6	20	10	10	35	10	25
7	20	15	5	40	10	30
8	20	18	2	42	10	32
9	20	25	-5	37	10	27
10	20	30	-10	27	10	17



Διάγραμμα 6.5. Η θέση ισορροπίας της επιχείρησης, όταν MC=MR

Εικόνα 5.16. Βιβλίο Αρχές Οικονομικής Θεωρίας σελ.118 & 119

Στα σημεία A και B όπου οι καμπύλες τέμνονται το οριακό κόστος είναι ίσο με οριακό έσοδο και η διαφορά MR-MC είναι μηδέν. Το σημείο A βρίσκεται στο κατερχόμενο τμήμα της καμπύλης του οριακού κόστους και η επιχείρηση έχει μόνο ζημιά. Το σημείο B βρίσκεται στο ανερχόμενο τμήμα της καμπύλης του οριακού κόστους, με αποτέλεσμα όλες οι προηγούμενες μονάδες προϊόντος στο τμήμα AB να φέρουν κέρδος στην επιχείρηση. Επομένως, **η συνθήκη ισορροπίας της επιχείρησης προκύπτει από την ισότητα οριακού εσόδου και οριακού κόστους, όταν το οριακό κόστος ανέρχεται**.

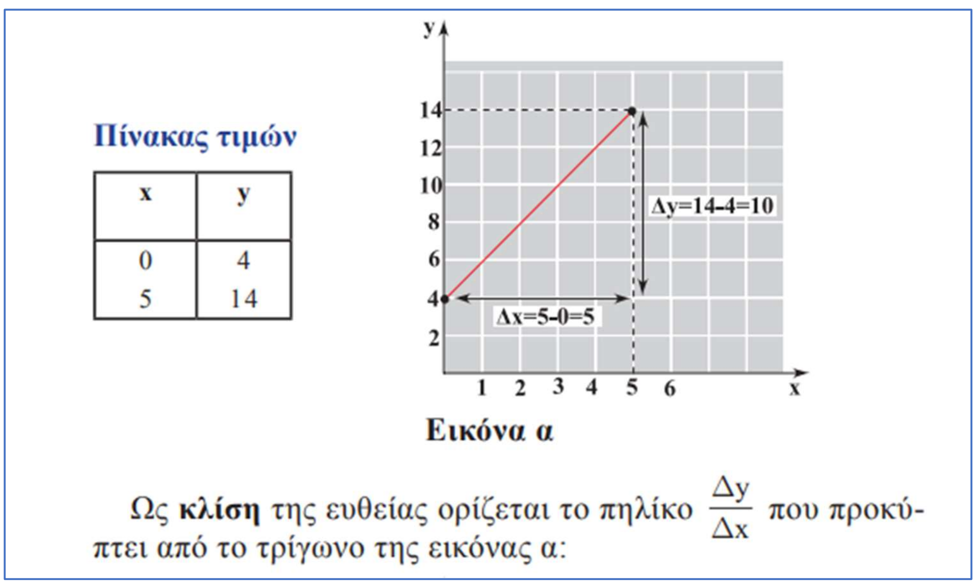
Σύμφωνα με τη συνθήκη ισορροπίας, στο παράδειγμα [διάγραμμα 6.5] η θέση ισορροπίας είναι ανάμεσα στην 8η και 9η μονάδα προϊόντος. Αν η μονάδα μέτρησης της ποσότητας του προϊόντος δεν υποδιαιρείται, τότε η θέση ισορροπίας είναι στην 8η μονάδα (Q=8), αφού στην 9η μονάδα (Q=9) το οριακό κόστος είναι μεγαλύτερο από το οριακό έσοδο. Μπορούμε να καταλήξουμε **στο συμπέρασμα: Η επιχείρηση βρίσκει τη θέση ισορροπίας της, δηλαδή μεγιστοποιεί το κέρδος της (ή ελαχιστοποιεί τη ζημιά της), όταν φθάσει & εκείνο το μέγεθος παραγωγής, όπου το οριακό κόστος ανερχόμενο ισούται με το οριακό έσοδο, δηλαδή** $\mathbf{MC\uparrow = MR = P = AR}$.

Εικόνα 5.17. Βιβλίο Αρχές Οικονομικής Θεωρίας σελ.119

Η παραπάνω σχέση αφορά την ισορροπία στον ελεύθερο ανταγωνισμό και με ανάλογο τρόπο προσδιορίζονται και η ισορροπίες στις υπόλοιπες μορφές αγοράς. Εξέχουσα θέση σε αυτές τις θεωρίες έχει ο ρυθμός μεταβολής του κόστους και των εσόδων (οριακό κόστος και οριακό έσοδο αντίστοιχα) και είναι απαραίτητη η βαθύτερη κατανόηση των εννοιών και των διαφορετικών τους αναπαραστάσεων, για να κατανοήσει ο μαθητής αυτές τις συνθήκες ισορροπίας.

5.2. ΟΙ ΕΜΦΑΝΙΣΕΙΣ ΤΟΥ ΡΥΘΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ.

Στο μάθημα της φυσικής έχουμε αρκετές εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής σε διάφορες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Αρχικά, στο εγχειρίδιο της Α΄ Λυκείου (Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Κόκκοτας, Π., Περιστερόπουλος, Π. & Τιμόθεου, Γ., (2010). Φυσική Γενικής Παιδείας Α′ Τάξης Ενιαίου Λυκείου. ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.) στην εισαγωγή κάνει αναφορά στο ρυθμό μεταβολής στην ανάλυση των βασικών εννοιών με την χρήση ενός παραδείγματος πάνω στην θερμοκρασία και ορίζει το πηλίκο $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ της μεταβολής ενός φυσικού μεγέθους Φ διά της μεταβολής του χρόνου Δt, μας δίνει το ρυθμό μεταβολής του φυσικού μεγέθους Φ, δηλαδή το πόσο αλλάζει το μέγεθος αυτό σε 1s. Στη συνέχεια προχωρά στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων και διευκρινίζει πως ορίζεται η κλίση τους με παραδείγματα με πίνακες, γραφικές παραστάσεις και αλγεβρικό υπολογισμό.(εικόνα 26). Επίσης δίνει δύο αντίστοιχες δραστηριότητες για τον υπολογισμό της κλίσης, θέτοντας και ερωτήματα ως προς την σημασία της.


Πίνακας τιμών

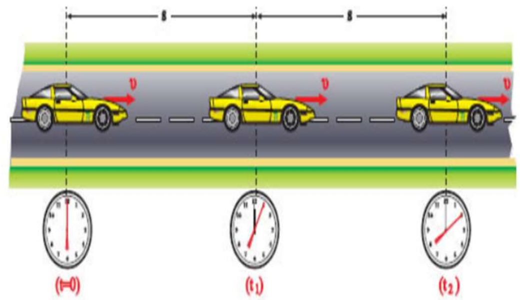
x	y
0	4
5	14

Εικόνα α

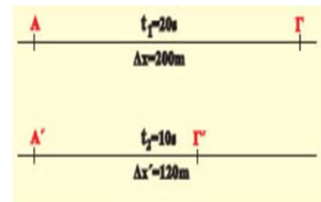
Ως **κλίση** της ευθείας ορίζεται το πηλίκο $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ που προκύπτει από το τρίγωνο της εικόνας α:

Εικόνα 5.18 Βιβλίο Φυσικής Α΄ Λυκείου σελ.30.

Στην συνέχεια στο κεφάλαιο 1 ορίζει την έννοια της ταχύτητας με την βοήθεια παραδειγμάτων και μαθηματικών υπολογισμών, Εικόνα 5.19.



Εικόνα 1.1.10α
Σε ίσους χρόνους το αυτοκίνητο διανύει ίσα διαστήματα.

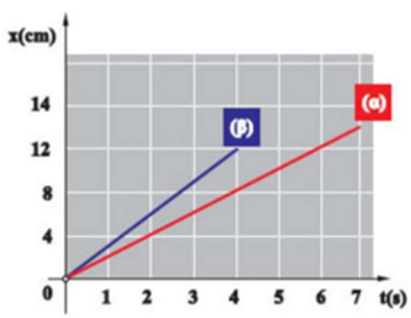


Εικόνα 1.1.10β
Τα δύο κινητά διανύουν τις αποστάσεις ΑΓ, Α' Γ' σε διαφορετικούς χρόνους.

Εικόνα 5.19. Βιβλίο Φυσικής Α΄ Λυκείου σελ.42 & 43

Ορίζει λοιπόν ως ταχύτητα το πηλίκο της μετατόπισης ως προς την αντίστοιχη χρονική διάρκεια δηλαδή U= $\frac{\Delta X}{\Delta t}$. Επομένως είναι ο ρυθμός μεταβολής του σημείου σε σχέση με το χρόνο. Παραθέτει και σχετική γραφική παράσταση και πίνακα τιμών για την κατανόηση της έννοιας

Και συνεχίζει με το ορισμό της έννοιας της ταχύτητας και σχετικά διαγράμματα Εικόνα 5.20.



Εικόνα 1.1.11
Γραφική παράσταση των μετατοπίσεων των κινητών (α), (β), σε συνάρτηση με το χρόνο.

Πίνακας Τιμών

t(s)	x_α(m)	x_β(m)
1	2	3
2	4	6
3	6	9
4	8	12
5	10	
6	12	
7	14	

Εικόνα 5.20. βιβλίο Φυσικής Α΄ Λυκείου σελ.44

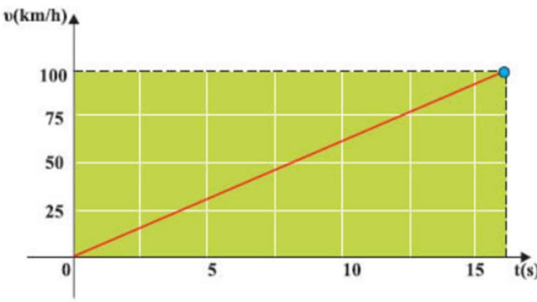
Στο τέλος καταλήγει την ανάλυση του με το συμπέρασμα ότι **η κλίση της ευθείας στο διάγραμμα της μετατόπισης σε συνάρτηση με το χρόνο δίνει την ταχύτητα στην ευθύγραμμη κίνηση.** Επομένως ορίζεται ως ταχύτητα ο ρυθμός μεταβολής του σημείου ως προς τον χρόνο και συνδέει την έννοια με την κλίση της ευθείας.

Παρακάτω στο ίδιο κεφάλαιο ορίζεται και η έννοια της επιτάχυνσης α ως το πηλίκο α=$\frac{\Delta U}{\Delta t}$ Στην ουσία μιλάμε για τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας σε σχέση με τον χρόνο και δίνει τον ορισμό της ως διάνυσμα ως εξής. Ορίζουμε ως επιτάχυνση α σε μία ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση, το διανυσματικό μέγεθος του οποίου η τιμή ισούται με το πηλίκο της μεταβολής Δυ της ταχύτητας διά του χρόνου Δt στον οποίο γίνεται η μεταβολή αυτή.

Στην επόμενη παράγραφο ορίζει την εξίσωση της ταχύτητας σε σχέση με την επιτάχυνση δηλαδή U=α t, ορίζει την επιταχυνόμενη και επιβραδυνόμενη κίνηση και δίνει σχετικό παράδειγμα με τους σχετικούς πίνακες και τα διαγράμματα Εικόνα 5.21.

Πίνακας 3

t(s)	υ(km/h)
0	0
15,8	100



Εικόνα 1.1.17

Εικόνα 5.21. βιβλίο Φυσικής Α΄ Λυκείου σελ.53

Τελιώνοντας τονίζει την σημασία της κλίσης της ευθείας της ταχύτητας ως εξής Εικόνα 5.22.

Τίθεται το ερώτημα: ποια είναι η φυσική σημασία της κλίσης της ευθείας της εικόνας 1.1.18;

Επειδή η κλίση προκύπτει ως το πηλίκο της μεταβολής της ταχύτητας με το χρόνο, $\frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$ με το οποίο έχουμε ορίσει την επιτάχυνση, συμπεραίνουμε ότι **η κλίση της ευθείας στο διάγραμμα της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνει την επιτάχυνση** στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση.

Εικόνα 5.22. βιβλίο Φυσικής Α΄ Λυκείου σελ.53

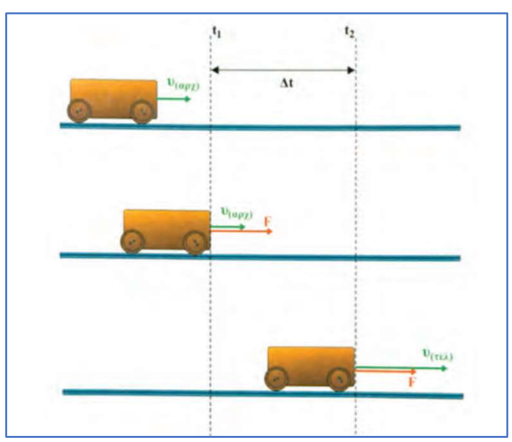
Στο σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Λυκείου (Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Κόκκοτας, Π., Περιστερόπουλος, Π. & Τιμόθεου, Γ., (2013). Φυσική Γενικής Παιδείας Β′ Τάξης Ενιαίου Λυκείου. ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.) ο ρυθμός μεταβολής συναντάται στο κεφάλαιο 2,4 ‘’ Η δύναμη και η μεταβολή της Ορμής. Με την βοήθεια ενός σχήματος (εικόνα 31) προχωρά στην ανάλυση του θεμελιώδη νόμου της Μηχανικής του Νεύτωνα $\vec{F} = m\vec{\alpha}$, ως εξής :

$$\vec{F} = m\frac{\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} \quad ή \quad \vec{F} = \frac{m\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda} - m\vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t}$$

άρα

$$\vec{F} = \frac{\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t}$$

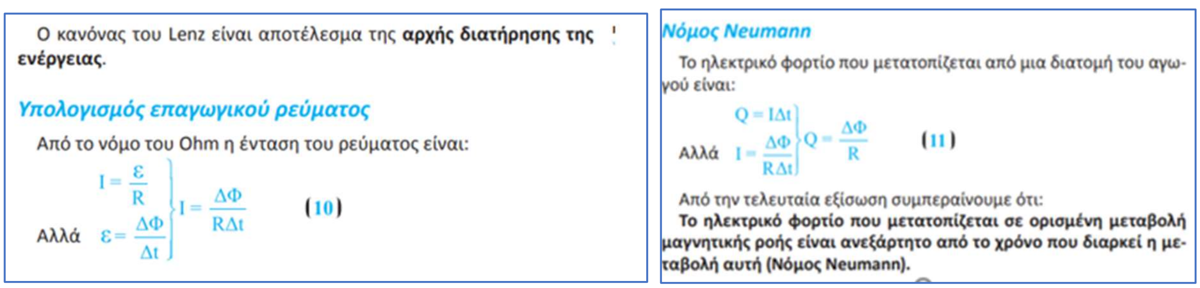
όπου $m\vec{u}_{\tau\varepsilon\lambda}$ είναι η τελική ορμή $P_{\tau\varepsilon\lambda}$ του σώματος και $m\vec{u}_{\alpha\rho\chi}$ η αρχική ορμή του $P_{\alpha\rho\chi}$.



Εικόνα 5.23 Βιβλίο Φυσικής Β΄ Λυκείου σελ.47

Με βάση αυτά καταλήγει στο συμπέρασμα ότι “για να αλλάξει η ορμή ενός σώματος απαιτείται η άσκηση δύναμης’’ και προχωρά σε παραδείγματα και δίνει 2 δραστηριότητες. Η ίδια σχέση χρησιμοποιείται και στο παρακάτω κεφάλαιο 2.5 ‘’Η αρχή της διατήρησης της ορμής’’ και πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιεί την εξής ισότητα $\overrightarrow{\mathrm{F_1}} = -\overrightarrow{\mathrm{F_2}}$ ή $\mathrm{m_1}\frac{\Delta\overrightarrow{\upsilon_1}}{\Delta \mathrm{t}} = -\mathrm{m_2}\frac{\Delta\overrightarrow{\upsilon_2}}{\Delta \mathrm{t}}$, αφού πρωτίστως τονίζει το συμπέρασμα ότι “η συνολική ορμή ενός μονωμένου συστήματος σωμάτων διατηρείται σταθερή’’. Στην συνέχεια δίδεται μια εφαρμογή και δύο δραστηριότητες με εικόνες. Στα επόμενα κεφάλαια δεν γίνεται σαφής αναφορά ούτε στον όρο ρυθμό μεταβολής ούτε γίνεται χρήση του τύπου $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Το σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Λυκείου {Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Κόκκοτας, Π., Περιστερόπουλος, Π., Τιμόθεου, Γ., Αλεξάκης Ν., Αμπατζής Σ., & Γκουγκούσης Γ., (2019). Φυσική Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου (Α΄ τεύχος). ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.} έχει πολλά κοινά κεφάλαια με το βιβλίο της Β’ Λυκείου. Το δεύτερο κεφάλαιο είναι το ίδιο με αυτό της Β΄ Λυκείου όποτε εκεί συναντάμε το ρυθμό μεταβολής στην έννοια της Ορμής. Σε αυτό το εγχειρίδιο έχει προστεθεί το κεφάλαιο 4 του ηλεκτρομαγνητισμού. Στην παράγραφο 4.6, γ) “ο Νόμος της Επαγωγής (Faraday) ’’, εισάγεται η έννοια της ηλεκτρεγερτικής δύναμης από επαγωγή, η οποία είναι ανάλογη με το ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής ΔΦ/Δt και τον αριθμό Ν σπειρών του πηνίου, $\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\cdot N$. Για την κατανόηση του, δίδεται σχετικό παράδειγμα. Κατόπιν στην δ) παράγραφο με βάση τον παραπάνω νόμο του Faraday προχωρά στην διατύπωση του νόμου του Lenz και του Neumann, Εικόνα 5.24.. Επιπλέον υπάρχουν παραδείγματα αλλά και ασκήσεις προς επίλυση για την κατανόηση της έννοιας.


Ο κανόνας του Lenz είναι αποτέλεσμα της **αρχής διατήρησης της ενέργειας**.

Υπολογισμός επαγωγικού ρεύματος

Από το νόμο του Ohm η ένταση του ρεύματος είναι:

$$\left.\begin{array}{l} I = \frac{\varepsilon}{R} \\ \text{Αλλά} \quad \varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \end{array}\right\} I = \frac{\Delta\Phi}{R\Delta t} \qquad (10)$$

Νόμος Neumann

Το ηλεκτρικό φορτίο που μετατοπίζεται από μια διατομή του αγωγού είναι:

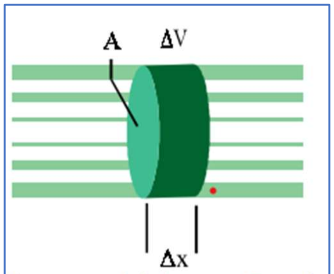
$$\left.\begin{array}{l} Q = I\Delta t \\ \text{Αλλά} \quad I = \frac{\Delta\Phi}{R\Delta t} \end{array}\right\} Q = \frac{\Delta\Phi}{R} \qquad (11)$$

Από την τελευταία εξίσωση συμπεραίνουμε ότι:
Το ηλεκτρικό φορτίο που μετατοπίζεται σε ορισμένη μεταβολή μαγνητικής ροής είναι ανεξάρτητο από το χρόνο που διαρκεί η μεταβολή αυτή (Νόμος Neumann).

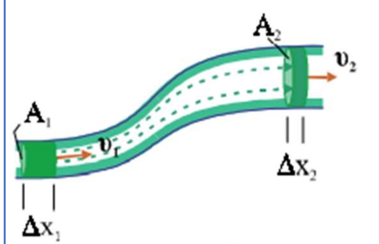
Εικόνα 5.24. Βιβλίο Φυσικής Γ΄ Λυκείου σελ. 161

Αντίστοιχες εμφανίσεις υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια της Γ’ Λυκείου{ Ιωάννου Α., Ντάνος Γ., Πήττας Α., & Ράπτης Σ., (2019). Φυσική Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου(Γ’ τεύχος). ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.} όπου ο ρυθμός μεταβολής εμφανίζεται συνεχώς. Αρχικά στο τέλος του κεφαλαίου 1 και πιο συγκεκριμένα στο Ένθετο του κεφαλαίου αυτού, ορίζει ότι η ταχύτητα ενός σώματος, που κινείται ευθύγραμμα, κάποια χρονική στιγμή, είναι $\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Τονίζει ότι είναι η παράγωγος του x ως προς t . Στην συνέχεια ορίζει και την επιτάχυνση ως εξής: Η επιτάχυνση ενός σώματος, που κινείται ευθύγραμμα, κάποια στιγμή είναι $\alpha = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$.

Στο κεφάλαιο 3, παράγραφος 3.3 Ρευστά σε κίνηση, συναντάμε την έννοια της παροχής του σωλήνα η οποία ορίζεται ως ο λόγος της μεταβολής του όγκου V ενός υγρού προς την μεταβολή του χρόνου t, δηλαδή $\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ (1). Στην συνέχεια ορίζει ότι αν η διατομή του σωλήνα είναι Α και το υγρό στο χρονικό διάστημα Δt έχει μετατοπιστεί κατά Δx, τότε μπορούμε να γράψουμε ΔV= ΑΔx (2). Συνδυάζοντας την 1και 2 καταλήγει στον τύπο Π= $\frac{A\Delta x}{\Delta t}$= Αυ. Για την επεξήγηση της έννοιας χρησιμοποιούνται και εικόνες, Εικόνα 5.25.



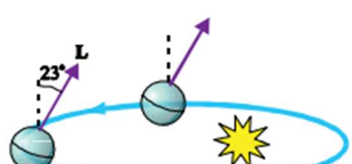
Στο χρονικό διάστημα Δt, από μια διατομή Α του σωλήνα περνάει υγρό όγκου Α Δx.
Σχήμα 3-7.



Αν το ρευστό που ρέει στο σωλήνα είναι ασυμπίεστο, το γινόμενο Α υ είναι σταθερό.
Σχήμα 3-8.

Εικόνα 5.25 Βιβλίο Φυσικής Γ΄ Λυκείου σελ.93

Στο κεφάλαιο 4 , παράγραφος 4,7 Στροφορμή, η οποία ορίζεται ως εξής*: το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν σε ένα στερεό που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της Στροφορμής του.* Βέβαια ορίζεται με την βοήθεια της παραγώγου. $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = \frac{dL}{dt}$ όπου $\tau_{\varepsilon\xi}$ η ροπή μιας εξωτερικής δύναμης ,dL η μεταβολή της στροφορμής dL=I*dω , dω η μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας και dt ο απειροστά μικρός χρόνος. Αυτός είναι ο δεύτερος νόμος του Newton στη στροφική κίνηση. Ο ίδιος τύπος χρησιμοποιείται και στην επόμενη παράγραφο η διατήρηση της στροφορμής στην οποία δίδονται εικόνες και σχήματα για την επεξήγηση της έννοιας, Εικόνα 5.26. Στο τέλος του κεφαλαίου δίδονται 7 ερωτήσεις και 9 ασκήσεις πάνω στην Στροφορμή. .

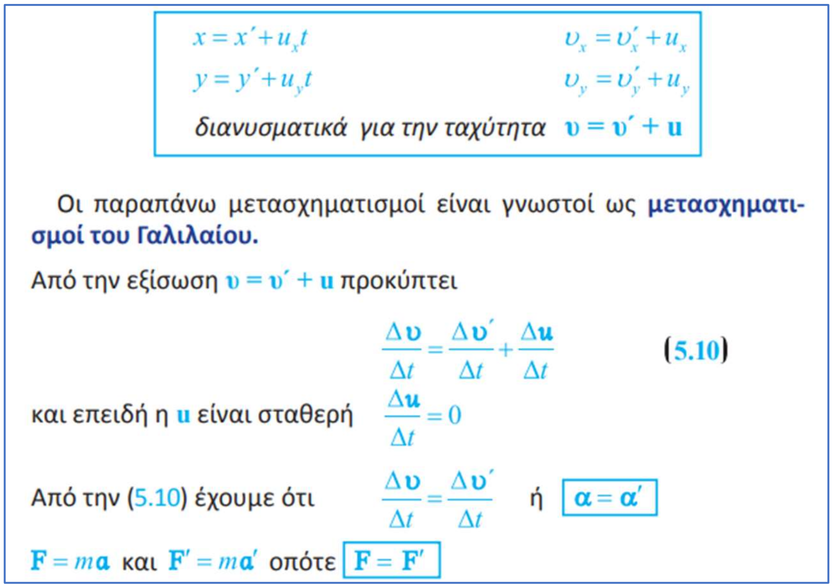


Η στροφορμή της Γης -λόγω της ιδιοπεριστροφής της- διατηρείται σταθερή.
Σχήμα 4-29.

Η χορεύτρια συμπτύσσοντας τα άκρα της αυξάνει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της.
Εικόνα 4-4.

Εικόνα 5.26. Βιβλίο Φυσικής Γ΄ Λυκείου σελ.126

Στο κεφάλαιο 5 στην παράγραφο 5,6, Σχετική ταχύτητα σε αδρανειακά συστήματα με την χρήση διαγραμμάτων καταλήγει στους μετασχηματισμούς θέσης και ταχύτητας που είναι και γνωστοί ως μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου, Εικόνα 5.27., και καταλήγει στο συμπέρασμα: ‘‘Όταν δηλαδή, ένα υλικό σημείο P δέχεται δύναμη και επιταχύνεται η δύναμη και η επιτάχυνση γίνονται αντιληπτές με τον ίδιο τρόπο και από τα δύο συστήματα αναφοράς, υπό τον όρο πάντα ότι τα Σ και Σ΄ είναι αδρανειακά, δηλαδή η u είναι σταθερή’’. Στην συνέχεια δίδονται και τρία παραδείγματα με την χρήση διαγραμμάτων για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας.



$x = x' + u_x t \qquad \upsilon_x = \upsilon'_x + u_x$

$y = y' + u_y t \qquad \upsilon_y = \upsilon'_y + u_y$

διανυσματικά για την ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}' + \mathbf{u}$

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί είναι γνωστοί ως **μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου.**

Από την εξίσωση $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}' + \mathbf{u}$ προκύπτει

$$\frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}'}{\Delta t} + \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} \qquad (5.10)$$

και επειδή η $\mathbf{u}$ είναι σταθερή $\frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} = 0$

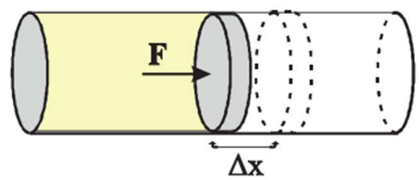
Από την (5.10) έχουμε ότι $\frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}'}{\Delta t}$ ή $\boxed{\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}'}$

$\mathbf{F} = m\boldsymbol{\alpha}$ και $\mathbf{F}' = m\boldsymbol{\alpha}'$ οπότε $\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{F}'}$

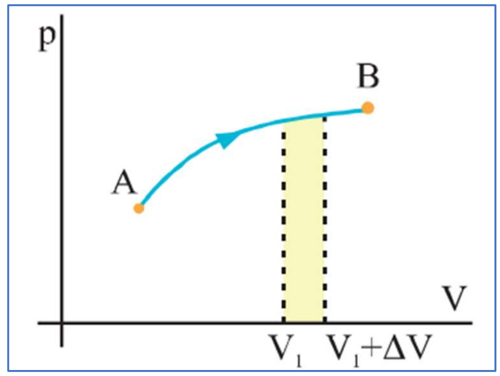
Εικόνα 5.27. βιβλίο Φυσικής Γ΄ Λυκείου σελ.163

Επιπλέον στην 5.8 “Προώθηση του Πυραύλου’’ υπολογίζεται η προωστική δύναμη του πυραύλου με την χρήση της παραγώγου, ως F = m $\frac{dm}{dt}$ όπου ο $\frac{dm}{dt}$ είναι ο ρυθμός εκτόξευσης των καυσαερίων του πυραύλου

Αντίστοιχα στο δεύτερο τεύχος του βιβλίου της Γ΄ Λυκείου {Ιωάννου Α., Ντάνος Γ., Πήττας Α., & Ράπτης Σ., (2019). Φυσική Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου(Β΄ τεύχος). ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.} ο ρυθμός μεταβολής εμφανίζεται στο δεύτερο κεφάλαιο, παράγραφο 2,5, ‘‘Έργο παραγόμενο από αέριο κατά την διάρκεια μεταβολών του όγκου’’ με την βοήθεια ενός σχήματος και διαγραμμάτων Εικόνα 5.28.. Εδώ ορίζεται το έργο που ασκείται από μία δύναμη σε ένα έμβολο το οποίο μετακινείται κατά Δ_x ($\Delta W = F\, \Delta_X$).



Σχ. 2.5 Το αέριο εκτονώνεται και το έμβολο μετατοπίζεται κατά Δx. Η δύναμη F που ασκεί το αέριο στο έμβολο παράγει έργο ΔW.



Εικόνα 5.28. Βιβλίο Φυσικής Γ΄ Λυκείου σελ.40

Στο κεφάλαιο 5 και ειδικότερα στην παράγραφο 5,2 "Ηλεκτρομαγνητική επαγωγή'' ορίζεται η έννοια της Ηλεκτρεγερτικής Δύναμης. "Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται σε ένα κύκλωμα είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής που διέρχεται από την επιφάνεια που ορίζει το κύκλωμα'', $E_{ΕΠ} = \frac{|\Delta\Phi B|}{\Delta t}$. Ο νόμος αυτός ονομάζεται νόμος της της επαγωγής ή νόμος του Faraday. Για την επεξήγηση της έννοιας δίδονται σχετικά σχήματα, αλλά και ένα λυμένο παράδειγμα. Ο συγκεκριμένος νόμος χρησιμοποιείται στις επόμενες παραγράφους του κεφαλαίου (5.3, 5.4, 5.5, 5.13, 5.14), όπου μελετάται ο ευθύγραμμος αγωγός κινούμενος σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, ο κανόνας του Lenz, ο Στρεφόμενος αγωγός η αμοιβαία Επαγωγή και η Αυτεπαγωγή. Σε όλες τις παραγράφους δίδονται λυμένα παραδείγματα με σχήματα και γραφικές παραστάσεις και στην σύνοψη γίνεται συγκεντρωτική παρουσίαση όλων των ρυθμών μεταβολής που σχετίζονται με την επαγωγή. Επιπλέον υπάρχουν σχετικές ερωτήσεις και ασκήσεις στο τέλος του κεφαλαίου.

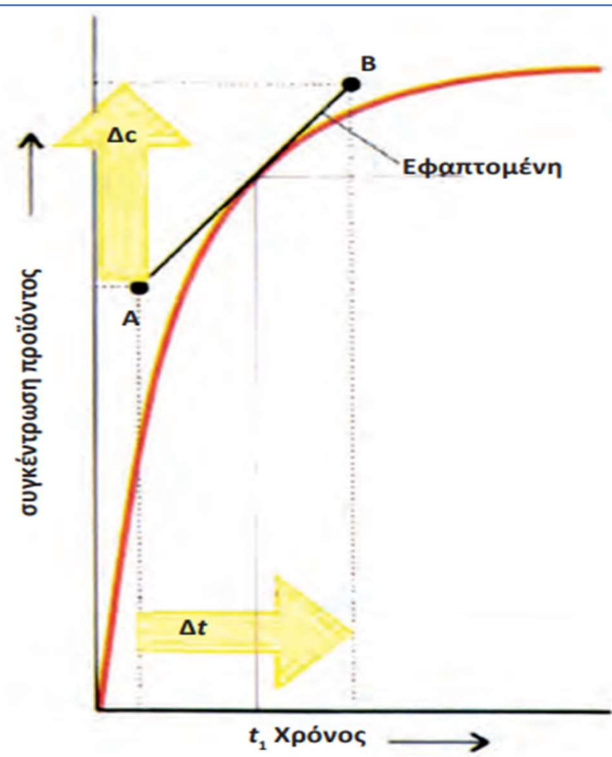
Συμπέρασμα όλων των παραπάνω είναι ότι στην φυσική οι εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής είναι πάρα πολλές, λόγω του ότι ο ρυθμός μεταβολής είναι ένα από τα βασικά εργαλεία της ανάλυσης τους. Πρέπει να τονιστεί ότι κατανόηση της έννοιας είναι απαραίτητη για την φυσική και αυτό γίνεται με πολλές και διαφορετικές αναπαραστάσεις, εικόνες, αλγεβρικούς τύπους, σχήματα και άλλα. Επιπρόσθετα υπάρχουν μεγάλες ομοιότητες μεταξύ όλων αυτών των αναπαραστάσεων, με τις αντίστοιχες του ρυθμού μεταβολής στην Οικονομική επιστήμη πράγμα που κάνει τις συνδέσεις μεταξύ αυτών όλο και περισσοτερο διακριτές.

5.3. ΟΙ ΕΜΦΑΝΙΣΕΙΣ ΤΟΥ ΡΥΘΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ ΧΗΜΕΙΑΣ.

Εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής όπως είναι φυσικό υπάρχουν και στο μάθημα της χημείας. Μια από αυτές τις εμφανίσεις είναι στο μάθημα της Α΄ Λυκείου (Λιοδάκης Σ., Γάκης Δ., Θεοδωρόπουλος Δ., Θεοδωρόπουλος Π. & Κάλλης Α., (2010). Χημεία θετικής κατεύθυνσης Α' Τάξης Ενιαίου Λυκείου. ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.) στο τρίτο κεφάλαιο όπου αναφέρεται στην έννοια της ταχύτητας μιας αντίδρασης. Πιο συγκεκριμένα με την βοήθεια δύο παραδειγμάτων, της διάβρωσης του σιδήρου και της έκρηξης της πυρίτιδας, εξηγεί την έννοια της ταχύτητας της αντίδρασης και την ορίζει ως " την μεταβολή της συγκέντρωσης ενός από τα αντιδρώντα ή τα προϊόντα, στη μονάδα του χρόνου''. Στην συνέχεια προχωρά σε παράγοντες που επηρεάζουν την ταχύτητα. Χρησιμοποιεί μόνο παραδείγματα, χωρίς εικόνες, γραφήματα ή αλγεβρικούς τύπους.

Ανάλογα ορίζεται και η ταχύτητα στην χημεία της Γ΄ Λυκείου προσανατολισμού (Λιοδάκης Σ., Γάκης Δ., Θεοδωρόπουλος Δ., Θεοδωρόπουλος Π. & Κάλλης Α., (2012). Χημεία θετικής κατεύθυνσης Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου. ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.) στο κεφάλαιο 3 της χημικής κινητικής (σελ. 71) . Αφού τονίζει την σημασία του παράγοντα χρόνου, στην παράγραφο 3.1 με την βοήθεια μια χημικής αντίδρασης ($2HI(g) \rightarrow H_2(g)+I_2(g)$) και ορίζει έτσι τον ρυθμό μεταβολής της συγκέντρωσης ως εξής : $\boxed{\upsilon_{HI} = \frac{-(\text{μεταβολή συγκέντρωσης HI})}{\text{αντίστοιχο χρόνο}} = \frac{-\Delta[HI]}{\Delta t}}$.

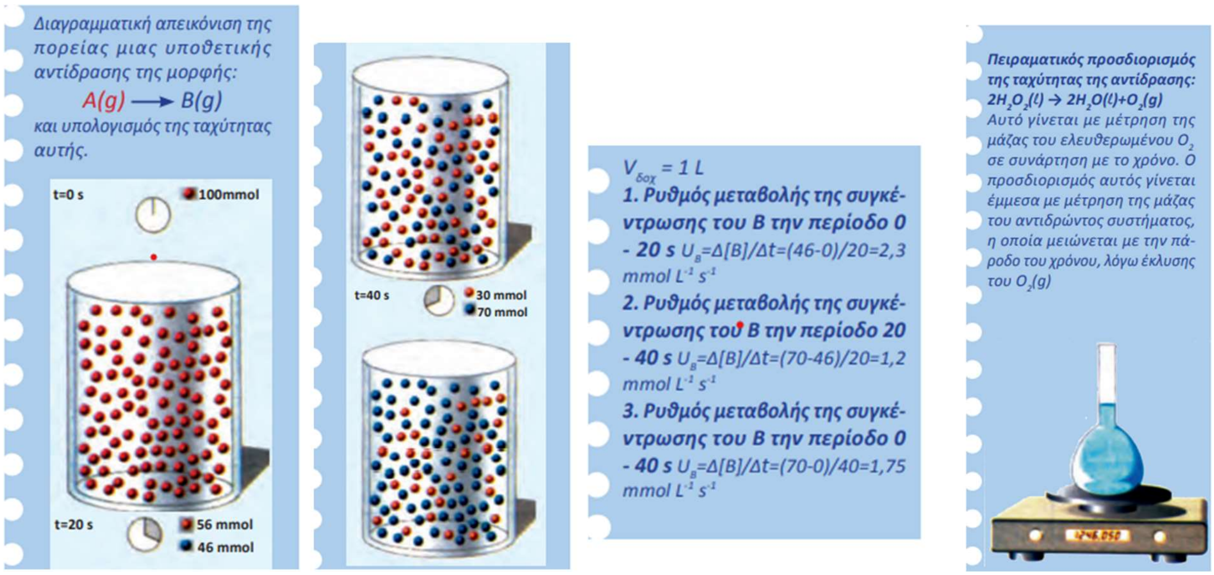
Με αυτό τον τρόπο ορίζει ως ταχύτητα μιας χημικής αντίδρασης της μορφής Αα +Ββ $\rightarrow$ γΓ +Δδ ως $\boxed{\upsilon = -\frac{1}{\alpha}\frac{\Delta[A]}{\Delta t} = -\frac{1}{\beta}\frac{\Delta[B]}{\Delta t} = \frac{1}{\gamma}\frac{\Delta[\Gamma]}{\Delta t} = \frac{1}{\delta}\frac{\Delta[\Delta]}{\Delta t}}$ και αντίστοιχα ορίζει την στιγμιαία ταχύτητα ως $\boxed{\upsilon = -\frac{1}{\alpha}\frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{\beta}\frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{d[\Gamma]}{dt} = \frac{1}{\delta}\frac{d[\Delta]}{dt}}$ όπου dc είναι μια απειροελάχιστη μεταβολή της συγκέντρωσης c, κατά την απειροελάχιστη μεταβολή dt του χρόνου στη χρονική στιγμή t. Στην συνέχεια δίνει σχήμα της καμπύλης αντίδρασης στο οποίο εξηγεί τον υπολογισμό της ταχύτητας με την βοήθεια της εφαπτομένης Εικόνα 5.29.



ΣΧΗΜΑ 3.3 Για να υπολογίσουμε τη στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_1, φέρνουμε την εφαπτομένη της καμπύλης που αντιστοιχεί στο σημείο t_1 και υπολογίζουμε τη κλίση της. Η κλίση της ευθείας αυτής βρίσκεται αν πάρουμε δύο σημεία της Α και Β και υπολογίσουμε το Δc και Δt. Η στιγμιαία ταχύτητα σχηματισμού προϊόντος υ_{t1} τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση: $\upsilon_{t1} = \Delta c/\Delta t$

Εικόνα 5.29 Βιβλίο Χημείας Προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου σελ.75

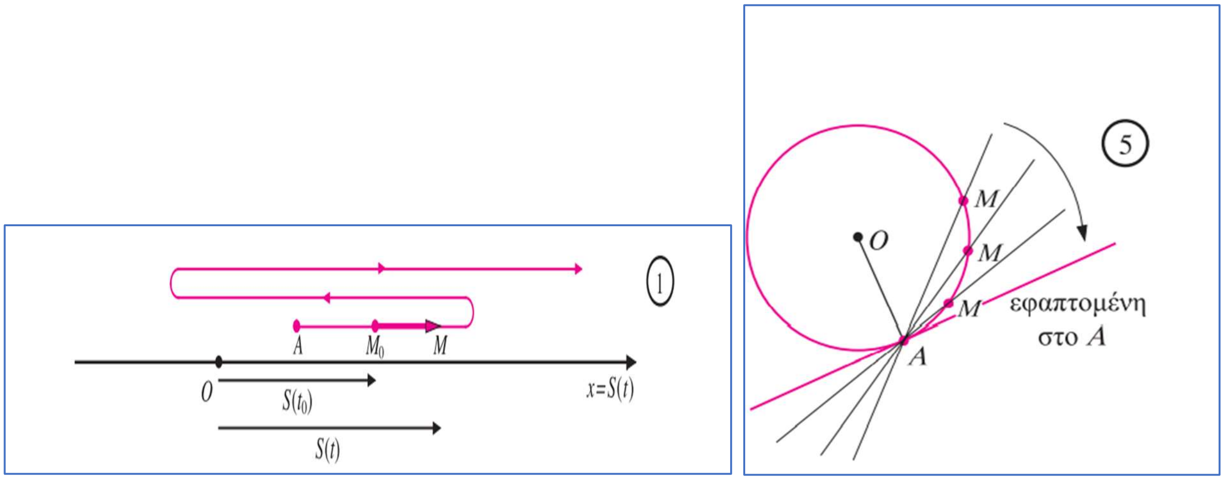
Στο ίδιο σημείο παραθέτει δύο παραδείγματα ρυθμού μεταβολής της συγκέντρωσης και της ταχύτητας αντίδρασης με εικόνες, Εικόνα 5.30., και συγχρόνως προχωρά στον μαθηματικό υπολογισμό τους, ενώ παρακάτω προχωρά σε λυμένα παραδείγματα όπου γίνεται χρήση πινάκων δεδομένων, γραφικές παραστάσεις και μαθηματικοί υπολογισμοί. Αυτό που πρέπει να τονιστεί στις εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής στην χημεία είναι η χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων, οι οποίες είναι ποικίλες και απαραίτητες για την πληρέστερη παρουσίαση των εννοιών.



Εικόνα 5.30. Βιβλίο Χημείας Προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου σελ.75

5.4. ΟΙ ΕΜΦΑΝΙΣΕΙΣ ΤΟΥ ΡΥΘΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.

Όπως είναι φυσικό ο ρυθμός μεταβολής εμφανίζεται πολύ συχνά στα εγχειρίδια των μαθηματικών. Αρχικά συναντάμε τον ρυθμό μεταβολής στην Γ' Λυκείου στα μαθηματικά προσανατολισμού (Στυλιανός, Α., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ. & Πολύζος, Γ. (2021). Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Υγείας και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής Γ' Γενικού Λυκείου. ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.) στον κεφάλαιο του διαφορικού λογισμού και πιο συγκεκριμένα στην παράγραφο "2.1 Η έννοια της παραγώγου''. Χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα από την φυσική, την μεταβολή της θέσης ενός σώματος, ορίζει την ταχύτητα (μέση και στιγμιαία δίνοντας τους σχετικούς τύπους. Στην συνέχεια αναφέρει το πρόβλημα της εφαπτομένης τονίζοντας την έννοια της οριακής θέσης του σημείου Μ που κινείται στον κύκλο την εφαπτομένη ΑΜ. , Εικόνα 5.31.



Εικόνα 5.31. Βιβλίο Μαθηματικών Γ΄ Λυκείου σελ.91 & 93

Με βάση αυτά προχωρά στο ορισμό της παραγώγου στο σημείο ως $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Και τονίζει ότι

Η τελευταία ισότητα οδήγησε το Leibniz να συμβολίσει την παράγωγο στο x_0 με $\frac{df(x_0)}{dx}$ ή $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$. Ο συμβολισμός $f'(x_0)$ είναι μεταγενέστερος και οφείλεται στον Lagrange.

Στην συνέχεια ορίζει την στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης x = S(t) τη χρονική στιγμή t_0. Δηλαδή, είναι $υ(t_0) = S'(t_0)$ και ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της Cf μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0. Δηλαδή, είναι $λ = f'(x_0)$. Σε αυτά παραθέτει παραδείγματα με σχετικά διαγράμματα και αλγεβρικούς υπολογισμούς. Ο ρυθμός μεταβολής ως έννοια συναντάται στην παράγραφο 2.4 πάλι με την βοήθεια του παραδείγματός της στιγμιαίας ταχύτητας τονίζοντας ότι είναι ο ρυθμός μεταβολής του σημείου ως προς το χρόνο. Δίνεται τον παρακάτω ορισμό Εικόνα 5.32.

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$.

Εικόνα 5.32. Βιβλίο Μαθηματικών Γ΄ Λυκείου σελ.123

Τέλος για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας χρησιμοποιείται το παράδειγμα της επιτάχυνσης, αλλά και του οριακού κέρδους, της οριακής είσπραξης και του οριακού κόστους. Επιπλέον στις εφαρμογές που ακολουθούν δίδεται μια εφαρμογή με την μεταβολή ενός εμβαδού και άλλη μία με τον ρυθμό μεταβολής του κέρδους. Επιπλέον και μία από τις ασκήσεις που ακολουθούν έχει να κάνει με τον ρυθμό μεταβολής του κέρδους.

Ο ρυθμός μεταβολής συναντάται και στα μαθηματικά γενικής παιδείας (Αδαμόπουλος, Λ., Δαμιανού, Χ. & Σβέρκος, Α. (2001). Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ' Ενιαίου Λυκείου. ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ). Στο κεφάλαιο 1.2 η έννοια της παραγώγου παρουσιάζεται το θέμα της εφαπτομένης και κατόπιν ο ορισμός της στιγμιαίας ταχύτητας, καταλήγοντας και τα δύο σε υπολογισμό ενός ορίου της μορφής $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$. Κατόπιν ορίζει την παράγωγο στο σημείο x_0, αφού πρώτα τονίσει ότι υπάρχουν πολλά προβλήματα διαφορετικής φύσεως, όπως της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος, την ταχύτητα μιας χημικής αντίδρασης και το οριακό κόστος που χρησιμοποιούν το ίδιο όριο για τον υπολογισμό τους. Έτσι ορίζει ως παράγωγο το

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Εικόνα 5.33 Βιβλίο Μαθηματικών Γενικής Παιδείας Γ΄ Λυκείου σελ.22

και τονίζει ότι "η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής (rate of change) του y=f(x) ως προς το x, όταν $x=x_0$. Έτσι, σύμφωνα με αυτά ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της f (x) ως προς x όταν $x = x_0$. Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση x = f(t) θα είναι τη χρονική στιγμή t_0, $υ(t_0)= f'(t_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της f(t) ως προς t όταν $t = t_0$. Στην συνέχεια του σχολικού εγχειριδίου χρησιμοποιείται η παράγωγος για τον υπολογισμό του ρυθμού μεταβολής και μάλιστα δίδονται και αρκετά παραδείγματα από την Οικονομική Επιστήμη.

6. ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.

Στην παράγραφο αυτή γίνεται ανάλυση των δεδομένων σε κάθε επιστημονικό πεδίο ξεχωριστά, με βάση την εμφάνιση τους στα σχολικά εγχειρίδια και των στοιχείων που τονίστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο και γίνεται συνοπτική τους εμφάνιση σε συγκεντρωτικό πίνακα. Πρέπει να τονιστεί ότι όλες οι εμφανίσεις που μελετήθηκαν βρίσκονται σε παράρτημα στο τέλος της εργασίας.

6.1. ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΡΧΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ.

Στον πίνακα που ακολουθεί (6.1.) αναλύονται οι εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής στο μάθημα Αρχές Οικονομικής Επιστήμης.

Χρόνος					
Α΄ Λυκείου		**Β΄ Λυκείου**		**Γ΄ Λυκείου**	
-		-		65	
Περιεχόμενο					
Μαθηματικό	**Οικονομικό**	**Φυσικό**	**Χημικό**	**Άλλο**	
48	24				
Θέμα					
Θεωρητικό Πλαίσιο	**Εφαρμογή κατανόησης/ Λυμένο παράδειγμα**		**Ερωτήσεις**	**Ασκήσεις/Πρόβλημα/Δραστηριότητες**	
23	19			22	
Αναπαράσταση					
Λεκτικό / Κείμενο	**Μαθηματικός Τύπος**	**Εικόνα**	**Γραφική Παράσταση**	**Πίνακας**	**Συνδυασμός Αναπαραστάσεων**
23	10		10	25	22
Εμφανίσεις των όρων					
Οριακός / Οριακή	**Στιγμιαία**	**Κλίση**	**Συντελεστής Διεύθυνσης**	**Παράγωγός**	**Όριο**
26		2	2		

Πίνακας 6.1. Εμφανίσεις στο μάθημα Αρχές Οικονομικής Θεωρίας.

Οι εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής στο μάθημα των Οικονομικών γίνεται στην Γ΄ Λυκείου σε πέντε κεφάλαια του σχολικού εγχειριδίου. Αρχικά στο πρώτο κεφάλαιο με την έννοια του πραγματικού ή εναλλακτικού κόστους. Στο δεύτερο κεφάλαιο όταν συναντάμε την συνάρτηση Ζήτησης και την Ελαστικότητα Ζήτησης. Στο τρίτο με τις έννοιες του οριακού προϊόντος και Οριακού κόστους, ενώ στο τέταρτο με τις έννοιες της συνάρτησης προσφοράς και ελαστικότητας προσφοράς. Τέλος στο έκτο κεφάλαιο στην ισορροπία στις διάφορες μορφές αγοράς συναντάμε το οριακό έσοδο και το οριακό κόστος.

Στον παρακάτω πίνακα (6.2.) αναλύονται οι εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής στο εγχειρίδιο Αρχές Οικονομικής Επιστήμης, Λύσεις των Ασκήσεων.

Χρόνος		
Α΄ Λυκείου	**Β΄ Λυκείου**	**Γ΄ Λυκείου**

-		-		37	
Περιεχόμενο					
Μαθηματικό	**Οικονομικό**	**Φυσικό**	**Χημικό**	**Άλλο**	
37	37				
Θέμα					
Θεωρητικό Πλαίσιο	**Εφαρμογή κατανόησης/ Λυμένο παράδειγμα**		**Ερωτήσεις**	**Ασκήσεις/Πρόβλημα/Δραστηριότητες**	
				37	
Αναπαράσταση					
Λεκτικό / Κείμενο	**Μαθηματικός Τύπος**	**Εικόνα**	**Γραφική Παράσταση**	**Πίνακας**	**Συνδυασμός Αναπαραστάσεων**
12	29		6	21	24
Εμφανίσεις των όρων					
Οριακός / Οριακή	**Στιγμιαία**	**Κλίση**	**Συντελεστής Διεύθυνσης**	**Παράγωγός**	**Όριο**
29		1			

Πίνακας 6.2. Εμφανίσεις στο μάθημα Αρχές Οικονομικής Θεωρίας – Λύσεις των Ασκήσεων**.**

Όλες οι εμφανίσεις έχουν και μαθηματικό και οικονομικό περιεχόμενο, πράγμα που μαρτυρά την αναγκαιότητα των μαθηματικών για την επίλυση Οικονομικών προβλημάτων. Επιπλέον η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, πινάκων και γραφικών παραστάσεων είναι ένα στοιχείο που εύκολα γίνεται αντιληπτό.

Στον παρακάτω πίνακα (6.3) αναλύονται αθροιστικά οι εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής στο μάθημα Αρχές Οικονομικής Επιστήμης.

Χρόνος					
Α΄ Λυκείου		**Β΄ Λυκείου**		**Γ΄ Λυκείου**	
-		-		102	
Περιεχόμενο					
Μαθηματικό	**Οικονομικό**	**Φυσικό**	**Χημικό**	**Άλλο**	
85	61				
Θέμα					
Θεωρητικό Πλαίσιο	**Εφαρμογή κατανόησης/ Λυμένο παράδειγμα**		**Ερωτήσεις**	**Ασκήσεις/Πρόβλημα/Δραστηριότητες**	
23	19			59	
Αναπαράσταση					
Λεκτικό / Κείμενο	**Μαθηματικός Τύπος**	**Εικόνα**	**Γραφική Παράσταση**	**Πίνακας**	**Συνδυασμός Αναπαραστάσεων**
35	39		16	46	46
Εμφανίσεις των όρων					
Οριακός / Οριακή	**Στιγμιαία**	**Κλίση**	**Συντελεστής Διεύθυνσης**	**Παράγωγός**	**Όριο**
55		3	2		

Πίνακας 6.3. Εμφανίσεις στο μάθημα Αρχές Οικονομικής Θεωρίας – Σύνολο

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων προκύπτουν τα παρακάτω :

Ως προς τον **Χρόνο** η εμφανίσεις γίνονται στην τάξη της Γ΄ Λυκείου.

Ως προς το **Περιεχόμενο** των εμφανίσεων διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για οικονομικές έννοιες οι οποίες παρουσιάζονται με την βοήθεια των μαθηματικών. Ογδόντα πέντε (85) εμφανίσεις έχουν μαθηματικό περιεχόμενο ενώ εξήντα μία (61) Οικονομικό.

Ως προς το **Θέμα**, το θεωρητικό πλαίσιο (23 εμφανίσεις) ακολουθείται από αντίστοιχα παραδείγματα (19 εμφανίσεις) και εφαρμογές, ενώ οι ασκήσεις που πλαισιώνουν την θεωρία (59 εμφανίσεις), που αν εξαιρέσουμε το 3^{ο} κεφάλαιο, είναι σχετικά ανεπαρκείς για την πλήρη κατανόηση της έννοιας.

Ως προς τις **Αναπαραστάσεις**, αυτές είναι κυρίως λεκτικές (35) όμως σημαντικό ρόλο διαδραματίζουν οι πίνακες (46), οι γραφικές παραστάσεις (16) και οι μαθηματικοί τύποι (39). Πρέπει να τονιστεί ότι σε κάθε εμφάνιση υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας για την καλύτερη κατανόηση της και αρκετά συχνά υπάρχουν και οι τέσσερις που εμφανίζονται σε αυτό το εγχειρίδιο (46).

Τέλος ως προς την εμφάνιση των **Όρων**, συχνότερα χρησιμοποιείται ο όρος οριακή μεταβολή και δεν χρησιμοποιείται καθόλου ο όρος παράγωγός , αλλά ούτε και ο όρος όριο. Οι όροι κλίση και συντελεστής διεύθυνσης έχουν μόνο 3 και 2 εμφανίσεις αντίστοιχα. Συμπερασματικά θα πρέπει να τονίσουμε την σημασία των πολλαπλών αναπαραστάσεων (46) για το μάθημα των οικονομικών. Η κατανόηση μιας έννοιας βασίζεται στην χρήση αυτών αφού μόνο με των συνδυασμό τους μπορούν οι μαθητές να φτάσουν σε ένα μεταγνωστικό επίπεδο και να μπορέσουν να αναπτύξουν την Οικονομική τους σκέψη.

6.2. ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τις εμφανίσει του Ρυθμού μεταβολής στα εγχειρίδια της Φυσικής του Λυκείου.

Χρόνος					
Α΄ Λυκείου		**Β΄ Λυκείου**		**Γ΄ Λυκείου**	
72		22		131	
Περιεχόμενο					
Μαθηματικό	**Οικονομικό**	**Φυσικό**	**Χημικό**	**Άλλο**	
100		153			
Θέμα					
Θεωρητικό Πλαίσιο	**Εφαρμογή κατανόησης/ Λυμένο παράδειγμα**		**Ερωτήσεις**	**Ασκήσεις/Πρόβλημα/Δραστηριότητες**	
82	32		28	83	
Αναπαράσταση					
Λεκτικό / Κείμενο	**Μαθηματικός Τύπος**	**Εικόνα**	**Γραφική Παράσταση**	**Πίνακας**	**Συνδυασμός Αναπαραστάσεων**
188	75	53	30	9	120
Εμφανίσεις των όρων					
Οριακός / Οριακή	**Στιγμιαία**	**Κλίση**	**Συντελεστής Διεύθυνσης**	**Παράγωγός**	**Όριο**
	2	15		5	

Πίνακας 6.4. Εμφανίσεις στο μάθημα της Φυσικής.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τις εμφανίσεις του Ρυθμού μεταβολής στα εγχειρίδια της Φυσικής του Λυκείου, Λύσεις των ασκήσεων.

Χρόνος					
Α΄ Λυκείου		**Β΄ Λυκείου**		**Γ΄ Λυκείου**	
		10		36	
Περιεχόμενο					
Μαθηματικό	**Οικονομικό**	**Φυσικό**	**Χημικό**	**Άλλο**	
42		42			
Θέμα					
Θεωρητικό Πλαίσιο	**Εφαρμογή κατανόησης/ Λυμένο παράδειγμα**		**Ερωτήσεις**	**Ασκήσεις/Πρόβλημα/Δραστηριότητες**	
				46	
Αναπαράσταση					
Λεκτικό / Κείμενο	**Μαθηματικός Τύπος**	**Εικόνα**	**Γραφική Παράσταση**	**Πίνακας**	**Συνδυασμός Αναπαραστάσεων**
31	46	2	4		31
Εμφανίσεις των όρων					
Οριακός / Οριακή	**Στιγμιαία**	**Κλίση**	**Συντελεστής Διεύθυνσης**	**Παράγωγός**	**Όριο**
		1		2	

Πίνακας 6.5 Εμφανίσεις στο μάθημα της Φυσικής, Λύσεις των Ασκήσεων.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει αθροιστικά τις εμφανίσεις του Ρυθμού μεταβολής στα εγχειρίδια της Φυσικής του Λυκείου.

Χρόνος					
Α΄ Λυκείου		**Β΄ Λυκείου**		**Γ΄ Λυκείου**	
72		32		167	
Περιεχόμενο					
Μαθηματικό	**Οικονομικό**	**Φυσικό**	**Χημικό**	**Άλλο**	
142		195			
Θέμα					
Θεωρητικό Πλαίσιο	**Εφαρμογή κατανόησης/ Λυμένο παράδειγμα**		**Ερωτήσεις**	**Ασκήσεις/Πρόβλημα/Δραστηριότητες**	
82	32		28	129	
Αναπαράσταση					
Λεκτικό / Κείμενο	**Μαθηματικός Τύπος**	**Εικόνα**	**Γραφική Παράσταση**	**Πίνακας**	**Συνδυασμός Αναπαραστάσεων**
219	121	55	34	9	151
Εμφανίσεις των όρων					
Οριακός / Οριακή	**Στιγμιαία**	**Κλίση**	**Συντελεστής Διεύθυνσης**	**Παράγωγός**	**Όριο**
	2	16		7	

Πίνακας 6.6. Εμφανίσεις στο μάθημα της Φυσικής Σύνολο.

Το μάθημα της φυσικής είναι αυτό με τις περισσότερες εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής. Επίσης, είναι σημαντικό να τονιστεί ότι αυτές γίνονται σε όλες τις τάξεις του Λυκείου. Αρχικά στην Α΄ Λυκείου ο ρυθμός μεταβολής εμφανίζεται στην εισαγωγή όπου μελετώνται οι βασικές έννοιες και όπου υπάρχει παράγραφος που αναφέρεται στις μεταβολές και τον ρυθμό μεταβολής. Κατόπιν στο 1^{ο} κεφάλαιο “ευθύγραμμη κίνηση” όπου αναπτύσσονται οι έννοιες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης. Στην Β΄ Λυκείου στο δεύτερο κεφάλαιο “Η δύναμη και η μεταβολή της

Ορμής'' συναντάμε την μεταβολή της Ορμής. Τέλος στην Γ΄ Λυκείου και στα τρία τεύχη εμφανίζονται ρυθμοί μεταβολής. Τόσο στο πρώτο τεύχος όπου έχει κοινό κεφάλαιο με αυτό της Β΄ Λυκείου ‘' Η δύναμη και η μεταβολή της Ορμής'', αλλά και στο κεφάλαιο τέσσερα ‘' Ηλεκτρομαγνητισμός''. Αντίστοιχα στο τεύχος Β, στο 5^{o} κεφάλαιο, συναντάμε έννοιες όπως η Ηλεκτρομαγνητική Επαγωγή , η Σχετική Ταχύτητα σε Αδρανειακά συστήματα, η Αυτεπαγωγή και ο Νόμος της Επαγωγής, καθώς και στο Γ΄ τεύχος όπου στο 1^{o}, το 3^{o} και 4^{o} κεφάλαιο μελετώνται η εύρεση της ταχύτητας με τον διαφορικό λογισμό, τα Ρευστά σε κίνηση και η Στροφορμή. Ο ρυθμός μεταβολής έχει εξέχουσα σημασία σε όλα αυτά τα κεφάλαια. Συνολικά υπάρχουν διακόσιες εβδομήντα μία εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής.

Πιο συγκεκριμένα:

Ως προς το **Χρόνο** έχουμε εμφανίσεις και στις τρεις τάξεις του Λυκείου, 72 στην Α΄, 32 στην Β΄ και 167 στην Γ΄ Λυκείου.

Ως προς το **Περιεχόμενο**, οι περισσότερες έχουν περιεχόμενο από τη Φυσική επιστήμη (195), αλλά σημαντικός αριθμός έχει μαθηματικό περιεχόμενο (142).

Ως προς το **Θέμα**, το θεωρητικό πλαίσιο (82) καλύπτεται από αντίστοιχες εμφανίσεις σε ασκήσεις (129) , ενώ υπάρχουν αρκετά παραδείγματα (32) και ερωτήσεις. (28)

Ως προς τις **Αναπαραστάσεις** το λεκτικό μέρος (219) πάντα ακολουθείται από μια αντίστοιχη αναπαράσταση, είτε αυτή είναι μαθηματικός τύπος (121), είτε είναι εικόνα η οποία χρησιμοποιείται αρκετά ως αναπαράσταση (55), είτε είναι γραφική παράσταση (34) ή πίνακας (9).

Ως προς τις εμφανίσεις των **Όρων** ο όρος Στιγμιαία εμφανίζεται 2 φορές, ο Όρος Κλίση 16 και η Παράγωγος 7.

Αυτό που πρέπει πάλι να τονιστεί είναι η σημασία των πολλαπλών αναπαραστάσεων, που δίχως αυτές είναι δύσκολη, αν όχι αδύνατη η κατανόηση μιας έννοιας. Επιπλέον πρέπει να τονιστεί ότι για τον υπολογισμό του ρυθμού μεταβολής , όπως και στα οικονομικά προτιμάται ο τύπος της μορφής $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, και πολύ σπάνια η παράγωγος ή το όριο. Γενικότερα υπάρχουν πολλές ομοιότητες στον τρόπο που χρησιμοποιούν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις του ρυθμού μεταβολής η Φυσική και η Οικονομική Επιστήμη.

6.3. ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ ΧΗΜΕΙΑΣ.

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής στο μάθημα της Χημείας.

Χρόνος				
Α΄ Λυκείου		**Β΄ Λυκείου**		**Γ΄ Λυκείου**
1				**42**
Περιεχόμενο				
Μαθηματικό	**Οικονομικό**	**Φυσικό**	**Χημικό**	**Άλλο**
30			42	
Θέμα				
Θεωρητικό Πλαίσιο	**Εφαρμογή κατανόησης/ Λυμένο παράδειγμα**		**Ερωτήσεις**	**Ασκήσεις/Πρόβλημα/Δραστηριότητες**
22	10			10

Αναπαράσταση					
Λεκτικό / Κείμενο	**Μαθηματικός Τύπος**	**Εικόνα**	**Γραφική Παράσταση**	**Πίνακας**	**Συνδυασμός Αναπαραστάσεων**
28	18	8	10	2	21
Εμφανίσεις των όρων					
Οριακός / Οριακή	**Στιγμιαία**	**Κλίση**	**Συντελεστής Διεύθυνσης**	**Παράγωγός**	**Όριο**
	4	4		4	

Πίνακας 6.7. Εμφανίσεις στο μάθημα της Χημείας.

Ο πίνακας που ακολουθεί δείχνει τις εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής στο μάθημα της Χημείας, Λύσεις των ασκήσεων.

Χρόνος					
Α΄ Λυκείου		**Β΄ Λυκείου**		**Γ΄ Λυκείου**	
				12	
Περιεχόμενο					
Μαθηματικό	**Οικονομικό**	**Φυσικό**	**Χημικό**	**Άλλο**	
12			12		
Θέμα					
Θεωρητικό Πλαίσιο	**Εφαρμογή κατανόησης/ Λυμένο παράδειγμα**		**Ερωτήσεις**	**Ασκήσεις/Πρόβλημα/Δραστηριότητες**	
				12	
Αναπαράσταση					
Λεκτικό / Κείμενο	**Μαθηματικός Τύπος**	**Εικόνα**	**Γραφική Παράσταση**	**Πίνακας**	**Συνδυασμός Αναπαραστάσεων**
2	12				2
Εμφανίσεις των όρων					
Οριακός / Οριακή	**Στιγμιαία**	**Κλίση**	**Συντελεστής Διεύθυνσης**	**Παράγωγός**	**Όριο**

Πίνακας 6.8. Εμφανίσεις στο μάθημα της Χημείας – Λύσεις των Ασκήσεων.

Ο πίνακας που ακολουθεί δείχνει αθροιστικά τις εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής στο μάθημα της Χημείας.

Χρόνος					
Α΄ Λυκείου		**Β΄ Λυκείου**		**Γ΄ Λυκείου**	
1				**54**	
Περιεχόμενο					
Μαθηματικό	**Οικονομικό**	**Φυσικό**	**Χημικό**	**Άλλο**	
42			54		
Θέμα					
Θεωρητικό Πλαίσιο	**Εφαρμογή κατανόησης/ Λυμένο παράδειγμα**		**Ερωτήσεις**	**Ασκήσεις/Πρόβλημα/Δραστηριότητες**	
22	10			22	
Αναπαράσταση					
Λεκτικό / Κείμενο	**Μαθηματικός Τύπος**	**Εικόνα**	**Γραφική Παράσταση**	**Πίνακας**	**Συνδυασμός Αναπαραστάσεων**

30	30	8	10	2	23
Εμφανίσεις των όρων					
Οριακός / Οριακή	**Στιγμιαία**	**Κλίση**	**Συντελεστής Διεύθυνσης**	**Παράγωγός**	**Όριο**
	4	4		4	

Πίνακας 6.9. Εμφανίσεις στο μάθημα της Χημείας – Σύνολο.

Στο μάθημα της Χημείας συναντάμε τον ρυθμό μεταβολής στην Γ΄ Λυκείου, αν εξαιρέσουμε μια αναφορά που γίνεται στην Α΄ Λυκείου για την ταχύτητα αντίδρασης. Πιο συγκεκριμένα στο 3$^{\text{ο}}$ κεφάλαιο της χημείας της Γ΄ Λυκείου ‘’ Χημική Κινητική’’ συναντάμε την έννοια της ταχύτητας αντίδρασης.

Ως προς τον **Χρόνο** οι εμφανίσεις γίνονται κυρίως στην Γ΄ Λυκείου(54), ενώ μία εμφάνιση έχουμε και στη Α΄.

Ως προς το **Περιεχόμενο** αυτές είναι κυρίως από το μάθημα της Χημείας (54), ενώ 41 έχουν μαθηματικό περιεχόμενο.

Ως προς το **Θέμα** οφείλουμε να τονίσουμε η ανάπτυξη της έννοιες εκτός του θεωρητικού του πλαισίου (22) έχει και τις αντίστοιχες εφαρμογές (10) και ασκήσεις (22) για την πληρέστερη ανάπτυξη της.

Ως προς τις **Αναπαραστάσεις**, η εμφάνιση πολλαπλών αναπαραστάσεων (23) είναι αυτό που διακρίνεται, αφού για την ανάπτυξη της έννοιας γίνεται τόσο με εικόνες (8), γραφικές παραστάσεις (10), μαθηματικούς τύπους (30), αλλά και πίνακες (2).

Ως προς την εμφάνιση των Όρων, ο όρος στιγμιαία, κλίση και παράγωγος έχουν από 4 εμφανίσεις.

Για ακόμη μια φορά τονίζεται η σημασία του συνδυασμού των αναπαραστάσεων και η ομοιότητα με αυτές των άλλων επιστημονικών πεδίων. Επιπλέον, για τον υπολογισμό του ρυθμού μεταβολής προτιμάτε ο τύπος της μορφής $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ όπως και στα προηγούμενα επιστημονικά πεδία που αναφέραμε ενώ χρησιμοποιείται η παράγωγός 4 φορές μόνο.

6.4. ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής στο μάθημα των μαθηματικών.

Χρόνος				
Α΄ Λυκείου		**Β΄ Λυκείου**		**Γ΄ Λυκείου**
				66
Περιεχόμενο				
Μαθηματικό	**Οικονομικό**	**Φυσικό**	**Χημικό**	**Άλλο**
55	11	11		2
Θέμα				
Θεωρητικό Πλαίσιο	**Εφαρμογή κατανόησης/ Λυμένο παράδειγμα**		**Ερωτήσεις**	**Ασκήσεις/Πρόβλημα/Δραστηριότητες**
27	11			28

Αναπαράσταση					
Λεκτικό / Κείμενο	**Μαθηματικός Τύπος**	**Εικόνα**	**Γραφική Παράσταση**	**Πίνακας**	**Συνδυασμός Αναπαραστάσεων**
55	40	2	15		45
Εμφανίσεις των όρων					
Οριακός / Οριακή	**Στιγμιαία**	**Κλίση**	**Συντελεστής Διεύθυνσης**	**Παράγωγός**	**Όριο**
9	2	4	4	19	13

Πίνακας 6.10. Εμφανίσεις στο μάθημα των Μαθηματικών

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής στο μάθημα των μαθηματικών, Λύσεις των ασκήσεων.

Χρόνος					
Α΄ Λυκείου		**Β΄ Λυκείου**		**Γ΄ Λυκείου**	
				3	
Περιεχόμενο					
Μαθηματικό	**Οικονομικό**	**Φυσικό**	**Χημικό**	**Άλλο**	
3		2			
Θέμα					
Θεωρητικό Πλαίσιο	**Εφαρμογή κατανόησης/ Λυμένο παράδειγμα**		**Ερωτήσεις**	**Ασκήσεις/Πρόβλημα/Δραστηριότητες**	
				3	
Αναπαράσταση					
Λεκτικό / Κείμενο	**Μαθηματικός Τύπος**	**Εικόνα**	**Γραφική Παράσταση**	**Πίνακας**	**Συνδυασμός Αναπαραστάσεων**
3	3			1	3
Εμφανίσεις των όρων					
Οριακός / Οριακή	**Στιγμιαία**	**Κλίση**	**Συντελεστής Διεύθυνσης**	**Παράγωγός**	**Όριο**
				3	

Πίνακας 6.11. Εμφανίσεις στο μάθημα των Μαθηματικών- Λύσεις των Ασκήσεων.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται αθροιστικά οι εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής στο μάθημα των μαθηματικών.

Χρόνος					
Α΄ Λυκείου		**Β΄ Λυκείου**		**Γ΄ Λυκείου**	
				69	
Περιεχόμενο					
Μαθηματικό	**Οικονομικό**	**Φυσικό**	**Χημικό**	**Άλλο**	
58	11	13		2	
Θέμα					
Θεωρητικό Πλαίσιο	**Εφαρμογή κατανόησης/ Λυμένο παράδειγμα**		**Ερωτήσεις**	**Ασκήσεις/Πρόβλημα/Δραστηριότητες**	
27	11			31	
Αναπαράσταση					
Λεκτικό / Κείμενο	**Μαθηματικός Τύπος**	**Εικόνα**	**Γραφική Παράσταση**	**Πίνακας**	**Συνδυασμός Αναπαραστάσεων**
58	43	2	15		48

<u>Εμφανίσεις των όρων</u>					
Οριακός / Οριακή	**Στιγμιαία**	**Κλίση**	**Συντελεστής Διεύθυνσης**	**Παράγωγός**	**Όριο**
9	2	4	4	22	13

Πίνακας 6.12. Εμφανίσεις στο μάθημα των Μαθηματικών- Σύνολο.

Εμφανίσεις του Ρυθμού μεταβολής στα Μαθηματικά συναντάμε στην Γ΄ Λυκείου τόσο στα Μαθηματικά προσανατολισμού, όσο και στα μαθηματικά γενικής παιδείας. Στα Μαθηματικά προσανατολισμού εμφανίσεις έχουμε αρχικά στο κεφάλαιο 2 με την έννοια της παραγώγου και τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο, όμως στο ίδιο κεφάλαιο υπάρχει και παράγραφος “Ρυθμός Μεταβολής’’. Στα Μαθηματικά γενικής παιδείας ο ρυθμός συναντάται στο 1^{o} κεφάλαιο όπου πραγματεύονται έννοιες όπως “η στιγμιαία ταχύτητα, η παράγωγός της f στο $x=x_0$, προβλήματα της εφαπτομένης, η έννοια της παραγώγου και ο ορισμός της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο’’. Ειδικότερα:

Ως προς το **Χρόνο** εμφανίσεις έχουμε στην Γ΄ Λυκείου (69).

Ως προς το **Περιεχόμενο** στα μαθηματικά εκτός από το μαθηματικό (58), βρίσκουμε και εμφανίσεις από άλλα επιστημονικά πεδία, για παράδειγμα την φυσική (13) και την οικονομία (11), ενώ δύο (2) εμφανίσεις είναι από την βιολογία.

Ως προς το **Θέμα** η θεωρία (27) ακολουθείται από τις ανάλογες εφαρμογές (11) και ασκήσεις (31).

Ως προς τις **Αναπαραστάσεις** πάντα ακολουθούνται από μια αντίστοιχη ενός άλλου τύπου, είτε είναι μαθηματικός τύπος (43), ή λεκτικές (58), είτε γραφικές παραστάσεις (15) ή εικόνα (2). Πάντως η ύπαρξη πολλαπλών αναπαραστάσεων είναι και εδώ εμφανής (48).

Ως προς την εμφάνιση των **Όρων** πολύ σημαντικό είναι ότι στα μαθηματικά έχουμε εμφανίσεις όλων αυτών που μελετήθηκαν, δηλαδή του όρου οριακή (9), του όρου στιγμιαία (2), του όρου κλίση (4) και του συντελεστή διεύθυνσης(4). Επιπλέον προτιμάται η χρήση της παραγώγου (22) και του ορίου (13) για τον υπολογισμό του ρυθμού μεταβολής, κάτι το οποίο δεν ισχύει για τα υπόλοιπα επιστημονικά πεδία.

Γενικότερα οι συγκλίσεις με τα υπόλοιπα επιστημονικά πεδία είναι εμφανέστατες τόσο ως προς την χρήση των αναπαραστάσεων, τόσο ως προς και τα παραδείγματα για την κατανόηση της έννοιας. Για παράδειγμα χρησιμοποιείται η έννοια της ταχύτητας και της επιτάχυνσης για την ερμηνεία της έννοιας κάτι που γίνεται και στην φυσική.

7 ΣΥΖΗΤΗΣΗ.

Σκόπιμο σε αυτό το σημείο είναι να τονιστεί η σημασία των αποτελεσμάτων αυτής της έρευνας σε σύγκριση με αντίστοιχες ερευνητικές μελέτες. Αρχικά όσο αφορά τις **εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολής**, η έρευνα μας έρχεται σε συμφωνία με αυτή του Λουκά (2019), ο οποίος τόνισε την εμφάνιση του ρυθμού μεταβολής σε δύο διακριτά σχολικά αντικείμενα, τα μαθηματικά της Γ΄ Λυκείου και του Α.Ο.Θ. (Αρχές Οικονομικής Επιστήμης). Στην παρούσα εργασία αυτό επιβεβαιώθηκε σε τέσσερα μαθήματα, σε όλες τις τάξεις του λυκείου, πράγμα που επιβεβαιώνει την διεπιστημονικότητα της έννοιας του ρυθμού μεταβολής. Ακόμη, οι εμφανίσεις στο μάθημα της Φυσικής και της Χημείας, δηλαδή πέρα από αυτές στο μάθημα των Μαθηματικών που έχουν ήδη μελετηθεί, καταδεικνύουν συνδέσεις και μετασυνδέσεις που δεν είχαν λάβει υπόψη τους προηγούμενες εργασίες. Αν προστεθούν σε αυτό οι ομοιότητες ως προς τις εμφανίσεις σε ορισμένα πεδία, αλλά και οι διαφοροποιήσεις σε άλλα, δίδεται μια πιο σφαιρική εικόνα για την υπάρχουσα κατάσταση και εμφανίζονται πολύ μεγαλύτερες δυνατότητες για την δημιουργία συγκλίσεων αλλά και την ανάπτυξη στρατηγικών για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας. Επιπλέον, επισημάνθηκε και η σημασία του ρυθμού μεταβολής συγκεκριμένα για το μάθημα των Οικονομικών, κάτι που καταδεικνύουν οι εμφανίσεις του στο σχολικό εγχειρίδιο. Άξιο αναφοράς είναι η ότι η Αυστριακή σχολή ονομαζόταν και ‘’Οριακοί’’ (Marginalists), πράγμα που αποδεικνύει την σημασία που προσδίδουν οι Οικονομολόγοι στο ρυθμό μεταβολής. Σύμφωνα με τον Σαραντίδη (1995), οι διάφορες ερμηνείες που έδωσαν στο πρόβλημα της αξίας των αγαθών, στηρίχθηκε στην έννοια τις οριακής χρησιμότητας, κάτι που τους έδωσε αυτή την ονομασία, αφού κύριο μέρος της θεωρίας τους ήταν ένας ρυθμός μεταβολής δηλαδή η οριακή χρησιμότητα.

Πρέπει να τονιστεί ότι οι εμφανίσεις μελετήθηκαν ως προς τον **Χρόνο**, το **Περιεχόμενο**, την **Θέση**, την **Αναπαράσταση** και **Όρους** κλειδιά, κάτι που συναντάται και σε άλλες εργασίες που μελέτησαν τα σχολικά εγχειρίδια, όπως του Λουκά (2019),των Στασινάκης & Κολιόπουλος (2009) και της Ξενάκη (2017). Όλο και περισσότερες έρευνες στρέφονται με αυτό τον τρόπο στην μελέτη των σχολικών εγχειριδίων ως προς την διεπιστημονικότητα τους, αναλύοντας τα σχολικά εγχειρίδια χρησιμοποιώντας διεπιστημονικά εργαλεία. Τα σχολικά εγχειρίδια είναι σημαντικό να μελετηθούν, διότι εκτός του ότι είναι τα κυρίαρχα μέσα διδασκαλίας, παράγουν και αναπαράγουν ιδεολογίες (Μπονίδης, 2009), ενώ παράλληλα σύμφωνα με το Εθνικό Συμβούλιο Παιδείας, (2006), τα σχολικά εγχειρίδια κατασκευάζουν και νοηματοδοτούν την πραγματικότητα. Όλα αυτά σηματοδοτούν την σημασία της μελέτης των σχολικών εγχειριδίων, αλλά και της διεπιστημονικής προσέγγισης σε αυτά. Αυτό θα συντελέσει και στην κατάργηση της μόνωσης, αλλά και την ανάδυση διαφορετικών επιστημονικών προσεγγίσεων (Κρητικός & Μούτσιος-Ρέντζος, 2018), η οποία θα προέρχεται από την σύγκλιση των επιστημονικών πεδίων και την σύνδεση εννοιών που δεν θα ήταν δυνατή χωρίς την διεπιστημονική προσέγγιση. Παράλληλα, πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι το διεπιστημονικό τοπίο, έχει μετατραπεί σε πεδίο ερευνών και αντιπαραθέσεων για το περιεχόμενο και τις διασυνδέσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης. (Καλαβάσης & Μούτσιος-Ρέντζος, 2018). Πιο συγκεκριμένα :

Ως προς τον **Χρόνο,** οι περισσότερες έρευνες στρέφονται στην μελέτη εμφανίσεων μέσα σε ένα συγκεκριμένο σχολικό έτος και συνήθως μελετούν το σχολικό πρόγραμμα και το χρονικό πλαίσιο στο οποίο διδάσκεται κάποια έννοια. Μια τέτοια προσέγγιση ακολούθησε και η εργασία του Λουκά (2019) που μελέτησε τις εμφανίσεις στα σχολικά εγχειρίδια της Γ’ Λυκείου στα

Μαθηματικά και στο μάθημα Αρχές Οικονομικής Θεωρίας. Πιο συγκεκριμένα μελέτησε σε πιο τετράμηνο γίνονται αυτές οι εμφανίσεις, ποιες συνδέσεις γίνονται μεταξύ αυτών των εμφανίσεων και κατά πόσο αυτές έχουν την ίδια σημασία; Με βάση την ανάλυση του το χρονικό σημείο που βρίσκονται στην διδασκαλία του μαθήματος παίζει καθοριστικό ρόλο για την κατανόηση της έννοιας. Βέβαια τονίζει ότι με το πέρας της διδασκαλίας των δύο μαθημάτων αναδεικνύεται η διεπιστημονικότητα της έννοιας και οι συνδέσεις μεταξύ των μαθημάτων καθώς και η σημασία του χρόνου κατά τον οποίο διδάσκονται αυτές οι εμφανίσεις.

Στην συγκεκριμένη εργασία δεν περιοριστήκαμε σε ένα σχολικό έτος, αλλά μελετήσαμε αυτές τις εμφανίσεις σε όλες τις τάξεις του Λυκείου. Έτσι τονίσαμε την ύπαρξη συνδέσεων μεταξύ των διαφορετικών επιστημονικών πεδίων που δεν περιορίζονται μέσα σε ένα σχολικό έτος, ενώ συνάμα αποδείξαμε ότι υπάρχει μια συνέχεια σε αυτές τις εμφανίσεις, δίχως όμως αυτό να έχει γίνει με βάση κάποιο προγραμματισμό. Παρόλα αυτά σε κάθε χρονική στιγμή που γίνεται μια εμφάνιση, υπάρχει μια αντίστοιχη σε κάποιο άλλο επιστημονικό πεδίο με το οποίο μπορεί να γίνει μια σύνδεση. Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί και η σημασία που έχει η προγενέστερη γνώση. Η θεωρία του Bruner βασίζεται στην προγενέστερη γνώση και την κατανόηση μιας έννοιας, η οποία αναπτύσσεται και εμβαθύνεται (Εμβαλωτής & Πατσιομίτου, 2009). Επιπρόσθετα είναι αδύνατο για κάποιο να χτίσει νέα γνώση, αν δεν ξέρει ποια είναι η προγενέστερη του (Kapur, 2001). Άρα οι προηγούμενες εμφανίσεις μιας έννοιας συντελούν στην καλύτερη κατανόηση της, αλλά και την ανάπτυξη της σε ένα άλλο μεταγνωστικό επίπεδο, ενώ παράλληλα δημιουργούν μια συνέχεια για τον τρόπο με τον οποίο χτίζεται η γνώση.

Ως προς το **Περιεχόμενο**, αυτό που παρατηρείται στις περισσότερες έρευνες είναι ότι όταν μελετούν εμφανίσεις μιας έννοιας ως προς δύο επιστημονικά πεδία, και συνήθως είναι τα μαθηματικά με κάποιο άλλο. Η Ξενάκη (2017) μελέτησε τα Μαθηματικά και την Γεωγραφία, ο Λουκάς (2019) τα Μαθηματικά σε σχέση με τις Αρχές Οικονομικής Επιστήμης. Αυτό είναι και εν μέρη λογικό διότι τα μαθηματικά είναι ο συνδετικός κρίκος μεταξύ των διάφορων επιστημονικών κλάδων και το εργαλείο το όποιο διαδραμάτισε κυρίαρχο ρόλο στην εξέλιξη των υπολοίπων επιστημών. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα της Οικονομίας, όπου οι πρώτοι ερευνητές της, όπως ο Adam Smith, ο Ricardo κτλ., ξεκίνησαν χωρίς την χρήση των μαθηματικών, αλλά με την χρήση λογικών επιχειρημάτων. Όμως η Αυστριακή σχολή και κατόπιν η Μαθηματική σχολή της Λοζάνης εισήγαγαν τα μαθηματικά και συνετέλεσαν στην εξέλιξη της Οικονομικής Επιστήμης (Σαραντίδης, 1995). Αντίστοιχα παραδείγματα υπάρχουν και στα υπόλοιπα επιστημονικά πεδία, όπου τα μαθηματικά έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη τους, όπως και το αντίστροφο, για παράδειγμα η εξέλιξη των υπολογιστών έχει συμβάλει στην αλματώδη εξέλιξη των μαθηματικών, της βιολογίας αλλά και των υπολοίπων επιστημονικών πεδίων.

Όμως συνδέσεις δεν γίνονται μόνο μεταξύ των Μαθηματικών και κάποιου άλλου επιστημονικού πεδίου, ή μόνο μεταξύ αυστηρά δύο επιστημονικών πεδίων. Συνδέσεις υπάρχουν και μεταξύ της Φυσικής και της Χημείας, των Οικονομικών και της Φυσικής, αλλά και μεταξύ της Φυσικής της Χημείας των Οικονομικών και των Μαθηματικών μαζί. Αυτό έγινε αντιληπτό σε αυτή την έρευνα ότι οι συνδέσεις είναι πάρα πολλές και μπορούν να γίνουν με οποιοδήποτε άλλο επιστημονικό πεδίο. Άλλωστε σύμφωνα με τους Nikitina & Mansilla (2003) «η άλγεβρα και η γεωμετρία, η φυσική και η βιολογία, η ιστορία και η γεωλογία μπορούν να συνδυαστούν γύρω από βασικές έννοιες όπως η γραμμικότητα, η αλλαγή και η κλίμακα. Η σκέψη εννοιολογικά για την επιστήμη και τα μαθηματικά σημαίνει σκέψη από την άποψη της ενοποίησης επιστημονικών ιδεών ή μαθηματικών κατασκευών που έχουν τη δυνατότητα να παράγουν καλά εργαλεία και αντιλήψεις». Πολλές φορές μια έννοια ενός επιστημονικού πεδίου γίνεται ευκολότερα αντιληπτή αν αυτή συνδεθεί με μια αντίστοιχη από ένα άλλο επιστημονικό πεδίο, ή αν αυτή συμπληρωθεί από μια έννοια/αναπαράσταση που προέρχεται από άλλο πεδίο. Για παράδειγμα οι μαθητές στην προσπάθεια να κατανοήσουν την συμπεριφορά του Οριακού κόστους (MC= $\frac{\Delta VC}{\Delta Q}$), συχνά ανακαλούν έννοιες από την φυσική και συχνότερα αυτή της ταχύτητας (U= $\frac{\Delta x}{\Delta t}$), ή ακόμη τα σχολικά εγχειρίδια χρησιμοποιούν παραδείγματα από άλλα επιστημονικά πεδία για την πληρέστερη κατανόηση μιας έννοιας, όπως τα μαθηματικά χρησιμοποιούν πάλι την ταχύτητα για την κατανόηση της παραγώγου. Επομένως, η μελέτη του περιεχομένου μιας εμφάνισης είναι σημαντική κάτι που καταδεικνύεται και από το γεγονός ότι πολλές μελέτες χρησιμοποιούν αυτό το κριτήριο, αλλά και από την συγκεκριμένη εργασία, που τόνισε την εμφάνιση μιας έννοιας σε τέσσερα διαφορετικά επιστημονικά πεδία στα σχολικά εγχειρίδια.

Ως προς το **Θέμα**, η συγκεκριμένη ανάλυση των εγχειριδίων είναι κάτι που συναντάται σε πολλές μελέτες μια και κρίνεται απαραίτητη για την κατανόηση του τρόπου που παρουσιάζεται μια έννοια. Με αυτό τον τρόπο εάν η έννοια εμφανίζεται ως μέρος του Θεωρητικού Πλαισίου, μιας Εφαρμογής ή Παραδείγματός, είναι μέρος μια Ερώτησης ή είναι Άσκηση προς επίλυση, μας δίνει πληρέστερη εικόνα του τρόπου που γίνεται αντιληπτή και κατανοητή μια έννοια. Αντίστοιχή ήταν και η ανάλυση που έκαναν ως προς το θέμα και οι Λουκάς (2019), οι Στασινάκης & Κολιόπουλος (2009) και η Ξενάκη (2017) και είναι και αυτή που υιοθετήθηκε και από την συγκεκριμένη εργασία. Είναι σημαντικό για τον ερευνητή να γνωρίζει αν μια εμφάνιση είναι μέρος του Θεωρητικού πλαισίου ή Άσκηση προς επίλυση για παράδειγμα, διότι έτσι μπορεί να κατανοήσει με καλύτερο τρόπο το πως προσεγγίζεται μια έννοια και οδηγηθεί σε ασφαλέστερα συμπεράσματα. Επιπλέον συντελεί στην εξεύρεση κοινών σημείων μεταξύ των διαφορετικών επιστημονικών πεδίων και την δημιουργία συνδέσεων μεταξύ τους. Ιδιαίτερα στα σχολικά εγχειρίδια, συγκλίσεις ή αποκλίσεις, για τον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζεται το θεωρητικό πλαίσιο ή οι ασκήσεις και οι εφαρμογές στα διάφορα επιστημονικά πεδία, βοηθούν στον καλύτερο προγραμματισμό των μαθημάτων αλλά και του γενικότερου σχολικού προγράμματος.

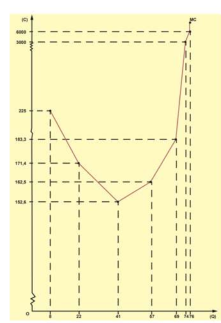
Ως προς τις **Αναπαραστάσεις**, η σύγχρονη βιβλιογραφία κατακλύζεται από έρευνες οι οποίες διαπραγματεύονται τις διαφορετικές αναπαραστάσεις και την σημασία που έχουν για την ερμηνεία και κατανόηση μιας έννοιας. Μέσα από αυτές αναδύεται και η σημασία των εργαλείων, όπως είναι οι διαφορετικές αναπαραστάσεις, για την κατανόηση μιας έννοιας. Ο Duval (1995) τόνισε αυτή την σημασία των αναπαραστάσεων και των μεταφράσεων τους μεταξύ των διαφορετικών σημειωτικών συστημάτων κάτι που τονίζεται και σε αυτή την εργασία. Οι αναπαραστάσεις και κυρίως οι πολλαπλές αναπαραστάσεις διαδραματίζουν εξέχοντα ρόλο στα σχολικά εγχειρίδια, πράγμα με το οποίο συμφωνούν και οι Aspinwal, Shaw, & Presmeg (1997) συμπληρώνοντας ότι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις συμβάλουν στην καλύτερη εννοιολογική κατανόηση. Αυτό αναφέρει και ο Λουκάς (2019) επισημαίνοντας την σημασία του εμπλουτισμού της ερμηνείας μιας έννοιας (του ρυθμού μεταβολής στην δική του περίπτωση) μέσω και άλλων αναπαραστάσεων (προτείνει για παράδειγμα την ερμηνεία μέσω της παραγώγου).

Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις και κυρίως οι πολλαπλές αναπαραστάσεις μιας έννοιας είναι ένα εργαλείο που χρησιμοποιείται πολύ συχνά στα σχολικά εγχειρίδια. Η κατανόηση μιας έννοιας σχετίζεται με την ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις και να μπορούν να μεταβαίνουν από την μία στην άλλη. Για αυτό τον λόγο και οι περισσότερες μελέτες που αφορούν σχολικά εγχειρίδια, μελετούν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις και τα είδη τους, δηλαδή αν είναι εννοιολογική, μαθηματικός τύπος, γραφική παράσταση ή εικόνα, αλλά πολλές φορές τις κατατάσσουν με άλλα κριτήρια, αν είναι πληροφοριακές, διακοσμητικές, βοηθητικές αναπαραστατικές ή βοηθητικές οργανωτικές (Λουκάς, 2019). Ανεξάρτητα από το κριτήριο που υιοθετείται κάθε φορά, το σημαντικό είναι η ύπαρξη όμοιων αναπαραστάσεων μια έννοιας μεταξύ διαφορετικών επιστημονικών πεδίων, κάτι που συντελεί στην ακόμη μεγαλύτερη σύνδεση αυτών καθώς και στην διαπίστωση ότι μία αναπαράσταση από ένα επιστημονικό πεδίο είναι δυνατό να συμβάλει στην κατανόηση μια έννοιας σε ένα άλλο. Για να γίνουμε πιο κατανοητοί στα Μαθηματικά για να γίνει αντιληπτή η έννοια της παραγώγου, χρησιμοποιείται η μεταβολή της θέσης ενός σώματος και η έννοια της ταχύτητας χρησιμοποιώντας αναπαραστάσεις τόσο από την φυσική όσο και τα μαθηματικά. Στην οικονομία οι γραφικές παραστάσεις και οι πίνακες τα οποία είναι καθαρά μαθηματικά εργαλεία, διαδραματίζουν ουσιαστικό ρόλο στην κατανόηση των οικονομικών εννοιών, και αφού συνδυαστούν με τις οικονομικές έννοιες δημιουργούν μια νέα έννοια σε ένα μεταγνωστικό επίπεδο, το οποίο δεν θα ήταν δυνατό να γίνει χωρίς των συνδυασμό αυτών. Ο Duval (1995) τόνισε ότι κατά την διδασκαλία είναι κρίσιμης σημασίας η χρήση σημειωτικών αναπαραστάσεων μιας μαθηματικής έννοιας και των μεταφράσεων της μεταξύ σημειωτικών συστημάτων, με στόχο την ανάδυση της μαθηματικής έννοιας ανάμεσα στις καταδείξεις της. Επιπλέον οι συνδέσεις μεταξύ τους και οι μετασυνδέσεις οδηγούν σε ένα νέο μεταγνωστικό επίπεδο γνώσης. Οι Κρητικός & Μούτσιος-Ρέντζος (2018) τονίζουν ότι μετασυνδέσεις, είναι συνδέσεις που προκύπτουν κατά τον μεταγνωστικό αναστοχασμό, συνδέοντας τις υπάρχουσες συνδέσεις των διαφορετικών μαθημάτων (και των αντίστοιχων κλάδων) για τη δημιουργία νέων συνδέσεων σε ένα μεταεπίπεδο, πράγμα που είναι εμφανές πλέον σε όλα τα επιστημονικά πεδία και κυρίως στα Οικονομικά.

Δεν πρέπει να αμελούμε ότι η κατανόηση μια έννοιας πολύ συχνά απαιτεί την χρήση περισσοτέρων από μία αναπαραστάσεων, διότι διαφορετικά δεν μπορεί να γίνει πλήρως αντιληπτή μια έννοια. Στα Οικονομικά για παράδειγμα, ορίζουμε ως Οριακό κόστος MC την μεταβολή που επέρχεται στο συνολικό κόστος TC, όταν μεταβληθεί η παραγόμενη ποσότητα Q κατά μία μονάδα. Συγχρόνως τονίζουμε ότι είναι ο ρυθμός μεταβολής του Συνολικού Κόστους και ότι αρχικά κατέρχεται και μετά ανέρχεται. Αν παραμείνουμε καθαρά στο λεκτικό μέρος και δεν παρουσιάσουμε την έννοια αυτή και με άλλες αναπαραστάσεις, για παράδειγμα με πίνακα και γραφική παράσταση, Εικόνα 7.1., είναι βέβαιο ότι ο μαθητής δεν κατανοήσει την συμπεριφορά αυτή του οριακού κόστος, ώστε να μπορέσουμε μετά να προχωρήσουμε και να την εξηγήσουμε σε ένα νέο μεταγνωστικό επίπεδο.

Πίνακας 3.6. Οριακό Κόστος

Προϊόν (Q) (1)	Μεταβολή Προϊόντος (ΔQ) (2)	Συνολικό Κόστος (TC) (3)	Μεταβολή Συνολικού Κόστους Δ(TC) (4)	Οριακό Κόστος (MC) (5)
0	0	4000	-	-
8	8	5800	1800	225
22	14	8200	2400	171,4
41	19	11100	2900	152,6
57	16	13700	2600	162,5
69	12	15900	2200	183,3
74	5	17400	1500	300
76	2	18600	1200	600
76	0	19600	1000	∞



Διάγραμμα 3.7. Καμπύλη του Οριακού Κόστους

Εικόνα 7.1. Βιβλίο Αρχές Οικονομική Θεωρίας σελ. 66 & 67.

Οι Aspinwal, Shaw, & Presmeg (1997) τόνισαν το πόσο ωφέλιμο είναι να υπάρχουν πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της μαθηματικής γνώσης και κατά πόσο ενισχύεται η κατανόηση μιας έννοιας από την χρήση οπτικών απεικονίσεων. Στην ίδια λογική κινούνται και οι Goldin & Shteingold (2001) που υποστηρίζουν ότι μια μαθηματική αναπαράσταση δεν μπορεί να γίνει κατανοητή μεμονωμένα, αλλά απαιτείται η χρήση πολλών αναπαραστάσεων καθώς και η δυνατότητα μετάβασης από την μία στην άλλη.

Επιπλέον σημαντικό είναι να λάβουμε υπόψιν και τη διάκριση των αναπαραστάσεων σε εσωτερικές και εξωτερικές (Kaput, 1999), καθώς και την διάκριση του Duval (2006) σε επεξεργασία (treatment) και μετατροπή (conversions). Με βάση τα παραπάνω είναι σημαντικό να ερευνούμε τους μετασχηματισμούς μεταξύ διαφορετικών σημειωτικών συστημάτων, αλλά συγχρόνως να μελετάμε και τον τρόπο που οργανώνει και κατανοεί την έννοια ένας μαθητής, ενώ παράλληλα χρήσιμο είναι να γνωρίζουμε αν για την κατανόηση μιας έννοιας χρησιμοποιούμε το ίδιο μητρώο αναπαράστασης ή είναι απαραίτητο να μεταβούμε από ένα μητρώο σε κάποιο άλλο. Επομένως οι εμφανίσεις και οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στα σχολικά εγχειρίδια δίνουν πληροφορίες αλλά και εργαλεία για την καλύτερη οργάνωση και διδασκαλία μιας έννοιας.

Ως προς την χρήση **Όρων** κλειδιά. η αναζήτηση τους είναι πολύ σημαντική, όταν μελετάμε σχολικά εγχειρίδια κυρίως για την εννοιολογική προσέγγιση του αντικειμένου που μελετάται. Σύμφωνα με την Ξενάκη (2017) η έρευνα λέξεων ή φράσεων κλειδιά αποκωδικοποιεί το εννοιολογικό πλαίσιο των σχολικών εγχειριδίων, ενώ παράλληλα αποκαλύπτουν την μεθοδολογική προσέγγιση στα σχολικά εγχειρίδια και διαφωτίζουν σχετικά με τα πολιτισμικά χαρακτηριστικά των εργαλείων. Εδώ έρχεται να προστεθεί και η ομοιότητα των όρων που χρησιμοποιούνται στα διαφορετικά επιστημονικά εγχειρίδια πράγμα που κάνει τις συνδέσεις μεταξύ τους ακόμη πιο άμεσες. Ο όρος Οριακός χρησιμοποιείται στα Οικονομικά, αλλά και στα Μαθηματικά για παράδειγμα, ο όρος στιγμιαία στην Φυσική και τα Μαθηματικά, φέρνοντας τις δύο επιστήμες πιο κοντά, τονίζοντας έτσι ακόμη περισσότερο την σχέση μεταξύ τους, αλλά και της συγκλίσεις στην μεθοδολογική προσέγγιση των εννοιών. Επιπλέον η μελέτη Όρων που αντιπροσωπεύουν την ίδια έννοια δίνει ένα εργαλείο στους μαθητές για το που θα βρουν μια αντίστοιχη έννοια από κάποιο άλλο επιστημονικό πεδίο, την οποία μπορούν να χρησιμοποιήσουν προς όφελος τους, για να κατανοήσουν αυτό που μελετούν, αλλά και να κάνουν συνδέσεις. Αντίστοιχα, οι καθηγητές θα μπορούσαν να τις χρησιμοποιούν ώστε να χτίσουν συνδέσεις και μεθόδους για την καλύτερη διδασκαλία μιας έννοιας, και να χρησιμοποιήσουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις ή την προγενέστερη γνώση για να βοηθήσουν τους μαθητές.

Μέσα από όλα αυτά, αναδύονται και στοιχεία τα οποία δεν είναι στις προθέσεις αυτής της έρευνας. Αρχικά αυτό που διαφαίνεται είναι η όλο και αυξανόμενη πολυπλοκότητα κάτι το οποίο τόνιζε και στην εργασία ο Λουκάς (2019). Σε αυτό συμβάλουν πολλά στοιχεία όπως είναι το πόσο γρήγορά εξελίσσεται η τεχνολογία, ο όλο και μεγαλύτερος καταμερισμός των έργων, αλλά και οι νέες προκλήσεις που τίθενται στα εκάστοτε εκπαιδευτικά συστήματα, τα οποία οφείλουν να ακολουθούν τις εξελίξεις και να έχουν ένα αποτέλεσμα το οποίο να είναι στραμμένο στις ανάγκες του πραγματικού κόσμου και τις ανάγκες τις αγοράς εργασίας. Για παράδειγμα ένας μηχανολόγος όταν κατασκευάζει ένα έργο δεν καλείται μόνο να επιλύσει θέματα που αφορούν μόνο το δικό του επιστημονικό πεδίο, αλλά παράλληλα καλείται να αντιμετωπίσει και θέματα που εμπλέκουν άλλα, όπως για παράδειγμα την κοστολόγηση του έργου. Με βάση αυτά ζητείται όλο και πιο επιτακτικά από το εκπαιδευτικό σύστημα η ανάπτυξη ικανοτήτων, οι οποίες θα δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου, κάτι που συχνά θα απαιτεί των συνδυασμό πολλών επιστημονικών πεδίων. Συνάμα τα προβλήματα που αντιμετωπίζει η σύγχρονη ανθρωπότητα, είναι από τη φύση τους πολύπλοκα και αν σε αυτό προστεθεί και η αυξανόμενη σχολική αποτυχία σύμφωνα με τα διεθνή τεστ και η αδυναμία των μαθητών να αντιμετωπίσουν προβλήματα του πραγματικού κόσμου, η διεπιστημονική προσέγγιση γίνεται ένα όλο και αυξανόμενο επιστημονικό πεδίο έρευνας. Σε αυτό συμφωνούν και οι Καλαβάσης & Μούτσιος-Ρέντζος (2018) που συνάμα τονίζουν ότι «θα χρειαστεί ακόμα χρόνος για να αρχίσουμε να αντιλαμβανόμαστε την διεπιστημονικότητα ως πεδίο συν-διαμόρφωσης και ως γνωστική κατασκευή μιας αμφίδρομης γέφυρας διακριτών επιστημών, αλλά και ως στοιχείο εμπλουτισμού της κάθε διακριτής επιστήμης».

Επιπρόσθετα πρέπει να τονιστεί και η αδυναμία των μαθητών να χειριστούν οικονομικά μεγέθη όπως ο ρυθμός μεταβολής, δηλαδή το Οριακό Προϊόν, το Οριακό Κόστος, το Οριακό Έσοδο κτλ. Κάτι αντίστοιχο τόνισε και ο Asano (2006) ο οποίος ανέφερε την αδυναμία των πρωτοετών φοιτητών να χειριστούν προβλήματα μεγιστοποίησης των κερδών μιας επιχείρησης, τα οποία έχουν να κάνουν κυρίως με τον χειρισμό εννοιών που είναι ρυθμοί μεταβολής. Επιπλέον, τόνισε την σημασία που έχει η κατανόηση αυτών των εννοιών και πρόσθεσε ότι διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο για την συνέχιση η μη των σπουδών τους στα Οικονομικά. Ανάλογες είναι και οι αντιδράσεις των μαθητών κατά την διδασκαλία του μαθήματος Αρχές Οικονομικής Θεωρίας, όπου η ικανότητα τους ή μη να χειριστούν αυτές τις έννοιες διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο για το αν θα επιλέξουν ή όχι αυτή την κατεύθυνση σπουδών. Βέβαια, σε αυτό διαδραματίζει και σημαντικό ρόλο και η προγενέστερη γνώση, αλλά και η ικανότητα τους να συνδέουν αυτές τις έννοιες με άλλες προγενέστερες από άλλα επιστημονικά πεδία, καθώς και η ικανότητα τους να μπορούν να χειρίζονται τις διαφορετικές αναπαραστάσεις.

Παράλληλα τονίζεται και η σημασία που έχει στην διδασκαλία των οικονομικών η ικανότητα του μαθητή να μπορεί να συλλογιστεί μεταγνωστικά, δηλαδή να δημιουργεί σχέσεις μεταξύ των εννοιών σε ένα επίπεδο και μετά άλλες σχέσεις σε ένα μεταγνωστικό επίπεδο που προέκυψε από τις προηγούμενες, συνδέοντας έτσι έννοιες που αρχικά δεν σχετίζονται μεταξύ τους. Και όλα αυτά σε ένα επίπεδο που κάθε επιστήμη είναι διακριτή, αλλά συνάμα και η διεπιστημονική τους συσχέτιση. Αυτές οι συνδέσεις αποτελούν το νήμα για διεπιστημονικές προσεγγίσεις σύμφωνα με τους Κρητικό & Μούτσιο-Ρέντζο (2018). Στα οικονομικά είναι σύνηθες να χρησιμοποιείται μια έννοια από τον πραγματικό κόσμο, πως αντιδρά ο καταναλωτής στην μεταβολή των τιμών για παράδειγμα, και να συνδυάζεται με έννοιες από τα Μαθηματικά (τον ρυθμό μεταβολής, το καρτεσιανό σύστημα κτλ.), και να συνδέονται αυτές οι έννοιες σε ένα μεταγνωστικό επίπεδο, πάνω στο οποίο θα χτίζεται μια νέα έννοια, κάτι που δεν θα μπορούσε να συμβεί αν οι έννοιες μελετιούνταν μεμονωμένα. Συγχρόνως όμως, αυτές οι έννοιες γίνονται διακριτές καθώς και το επιστημονικό πεδίο από το οποίο προέρχονται.

Τέλος αυτό που τονίζεται όλο και περισσότερο στην βιβλιογραφία και κοινό συμπέρασμα όλων των ερευνών είναι η όλο και αυξανόμενη συσχέτιση μεταξύ των διαφορετικών επιστημονικών πεδίων, κάτι που γίνεται εμφανές στα σχολικά εγχειρίδια και στην παρούσα μελέτη. Όλο και περισσότερες μελέτες συμφωνούν με την άποψη ότι θα πρέπει να υπάρξει μια σύγκλιση μεταξύ των σχολικών εγχειριδίων και μια στροφή στην διεπιστημονική προσέγγιση κάτι που πιθανό σημαίνει τον εκ νέου σχεδιασμό των σχολικών βιβλίων, αλλά και αναμόρφωση του σχολικού προγράμματος.

8. ΤΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΈΡΕΥΝΑΣ.

Στην παρούσα εργασία ξεκινήσαμε παρουσιάζοντας την υπάρχουσα κατάσταση τονίζοντας την σημασία της πολυπλοκότητας στην σύγχρονη εποχή και την εξεύρεση τρόπων για την αντιμετώπιση της. Τονίσαμε με αυτόν τον τρόπο την αναγκαιότητα για την διεπιστημονική προσέγγιση των προβλημάτων και την αναγκαιότητα της ανάπτυξης ικανοτήτων για την αντιμετώπιση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου. Σύμφωνα με τους Καλαβάση & Μούτσιο Ρέντζο (2018) «η αναγκαιότητα εκπαιδευτικού σχεδιασμού αυτής της νοητικής διασύνδεσης των θετικών επιστημών και της ταυτόχρονης γνωστικής αλληλεπίδρασης της μαθησιακής διεργασίας με το ψηφιακό και δικτυακό περιβάλλον των ΤΠΕ, συνιστά την μέγιστη πρόκληση του 21ου αιώνα για τα Μαθηματικά στην Εκπαίδευση και για την αξιακή ανά-πλαισίωση της διδασκαλίας τους».

Βασισμένοι σε αυτή την λογική επιλέξαμε να μελετήσουμε τον ρυθμό μεταβολής, καθώς αποτελεί μια έννοια που είναι πολύ σημαντική στην ανάλυση πολλών επιστημονικών πεδίων. Έτσι μελετήσαμε την εμφάνιση της και την ιστορική της αναδρομή στα διαφορετικά επιστημονικά πεδία και στην συνέχεια αναλύσαμε την σημασία των διαφορετικών αναπαραστάσεων αυτής της έννοιας καθώς και την σημασία των σχολικών εγχειριδίων και τους λόγους που μας οδήγησαν στο να μελετήσουμε τις εμφανίσεις στα σχολικά εγχειρίδια. Οι εμφανίσεις αυτές βρίσκονται στον παρακάτω πίνακα ο οποίος αφορά όλα τα επιστημονικά πεδία τα οποία μελετήθηκαν, δηλαδή των Οικονομικών, της Φυσικής, της Χημείας και των Μαθηματικών στις τάξεις του γενικού Λυκείου, Πίνακας 7.1.

<table>
<tr><td colspan="6"><u>Χρόνος</u></td></tr>
<tr><td colspan="2">Α΄ Λυκείου</td><td colspan="2">Β΄ Λυκείου</td><td colspan="2">Γ΄ Λυκείου</td></tr>
<tr><td colspan="2">73</td><td colspan="2">32</td><td colspan="2">392</td></tr>
<tr><td colspan="6"><u>Περιεχόμενο</u></td></tr>
<tr><td>Μαθηματικό</td><td>Οικονομικό</td><td>Φυσικό</td><td>Χημικό</td><td colspan="2">Άλλο</td></tr>
<tr><td>327</td><td>72</td><td>208</td><td>54</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td colspan="6"><u>Θέμα</u></td></tr>
<tr><td>Θεωρητικό Πλαίσιο</td><td colspan="2">Εφαρμογή κατανόησης/ Λυμένο παράδειγμα</td><td>Ερωτήσεις</td><td colspan="2">Ασκήσεις/Πρόβλημα/Δραστηριότητες</td></tr>
<tr><td>154</td><td colspan="2">72</td><td>28</td><td colspan="2">241</td></tr>
<tr><td colspan="6"><u>Αναπαράσταση</u></td></tr>
<tr><td>Λεκτικό / Κείμενο</td><td>Μαθηματικός Τύπος</td><td>Εικόνα</td><td>Γραφική Παράσταση</td><td>Πίνακας</td><td>Συνδυασμός Αναπαραστάσεων</td></tr>
<tr><td>342</td><td>233</td><td>25</td><td>75</td><td>57</td><td>268</td></tr>
<tr><td colspan="6"><u>Εμφανίσεις των όρων</u></td></tr>
<tr><td>Οριακός / Οριακή</td><td>Στιγμιαία</td><td>Κλίση</td><td>Συντελεστής Διεύθυνσης</td><td>Παράγωγός</td><td>Όριο</td></tr>
<tr><td>64</td><td>11</td><td>26</td><td>4</td><td>33</td><td>13</td></tr>
</table>

Πίνακας 7.1 Εμφανίσεις στα Μαθήματα Γενικού Λυκείου- Σύνολο.

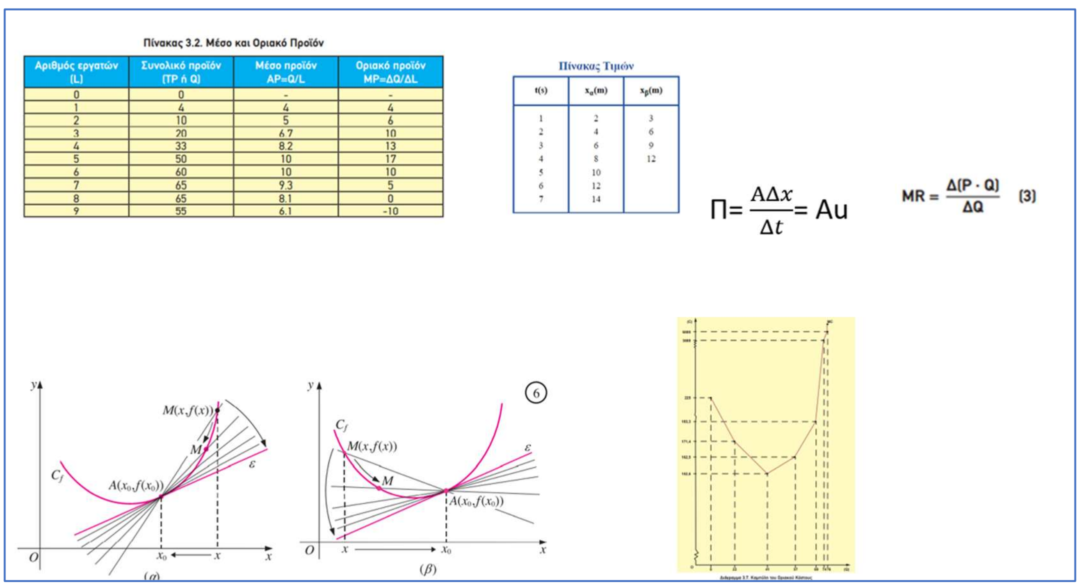
Για την πληρέστερη μελέτη των παραπάνω εμφανίσεων χρησιμοποιήθηκαν τα κριτήρια, όπως ο **Χρόνος**, που σχετίζεται με την τάξη του λυκείου που συναντάται η έννοια, το **Περιεχόμενο** που τονίζει με πιο επιστημονικό πεδίο σχετίζεται η εμφάνιση, το **Θέμα** που έχει να κάνει με τον τρόπο παρουσιάζεται η έννοια, αν είναι άσκηση, θεωρία κτλ., την **Αναπαράσταση** που χρησιμοποιείται για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας, και τέλος την εμφάνιση **Όρων** κλειδιά που τονίζουν την εννοιολογική προσέγγιση της έννοιας.

Σχετικά με τις εμφανίσεις ως προς τον **Χρόνο**, αυτές είναι κυρίως στην Γ΄ Λυκείου για όλα τα μαθήματα. Στην Φυσική μόνο έχουμε εμφανίσεις στην Β΄ Λυκείου ενώ στην Α΄ Λυκείου μόνο μία είναι στην Χημεία και οι υπόλοιπες στην Φυσική. Άξιο αναφοράς είναι ότι στα μαθηματικά δεν γίνεται αναφορά στην έννοια του ρυθμού μεταβολής στις μικρότερες τάξεις, παρά το γεγονός ότι πραγματεύονται έννοιες όπως ο συντελεστής διεύθυνσης που θα μπορούσε να συνδυαστεί με τον ρυθμό μεταβολής. Κάτι αντίστοιχο τονίζει και ο Λουκάς (2019) στην εργασία του. Επιπλέον αυτό που παρατηρήθηκε είναι ότι κατά την διάρκεια του σχολικού έτους υπάρχουν αναπαραστάσεις σε τουλάχιστον δύο εγχειρίδια, πράγμα που κάνει σαφές ότι είναι δυνατές οι συνδέσεις μεταξύ των επιστημονικών πεδίων. Επιπλέον, πρέπει να τονιστεί ότι τα στα περισσότερα επιστημονικά πεδία χρησιμοποιείται ο τύπος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ και έχουμε εμφανίσεις καθ' όλη την διάρκεια του σχολικού έτους, ενώ στα μαθηματικά χρησιμοποιείται η έννοια της παραγώγου στο σημείο πράγμα το οποίο γίνεται προς το τέλος του δεύτερου τετράμηνου. Αυτό που διαφαίνεται από τις εμφανίσεις είναι ότι δεν υπάρχει κάποια σύγκλιση ως προς το χρόνο που διδάσκονται, στα διαφορετικά επιστημονικά πεδία. Παρόλα αυτά είναι τόσες πολλές που επιτρέπουν στους μαθητές να αναγνωρίζουν τις ομοιότητες με την ίδια έννοια που έχουν διδαχθεί σε προγενέστερο χρόνο, σε κάποιο άλλο επιστημονικό πεδίο. Για παράδειγμα κατά την διδασκαλία των οικονομικών, όταν συναντάται ένας ρυθμός μεταβολής, πολύ συχνά τον συνδέουν με την ταχύτητα ή την επιτάχυνση που έχουν διδαχθεί σε προηγούμενες τάξεις. Το βέβαιο είναι ότι σε κανένα από τα πεδία δεν υπάρχει προγενέστερη γνώση, εκτός από την φυσική στην οποία έχουμε αναπαραστάσεις σε όλα τα σχολικά έτη του λυκείου. Μάλιστα το κεφάλαιο της ορμής της Β΄ Λυκείου επαναλαμβάνεται αυτούσιο στην Γ΄ Λυκείου. Αποτέλεσμα των παραπάνω είναι ότι θα μπορούσε να γίνει ένας γενικότερος προγραμματισμός για το πότε θα γίνονται οι εμφανίσεις του ρυθμού σε κάθε επιστημονικό πεδίο σε συνδυασμό με τα υπόλοιπα. Αφού, υπάρχουν οι εμφανίσεις στα διαφορετικά επιστημονικά πεδία, θα μπορούσαν να οργανωθούν χρονολογικά, ώστε να αποτελούν προγενέστερη γνώση, κάτι το οποίο θα ενισχυόταν αν χρησιμοποιούνταν και αντίστοιχες αναπαραστάσεις.

Σχετικά με τις εμφανίσεις ως προς το **Περιεχόμενο** τους, αυτές που επικρατούν είναι αυτές του Μαθηματικού περιεχομένου (327) με την Φυσική (208) να ακολουθεί, που είναι φυσιολογικό, αφού είναι το μάθημα με τις περισσότερες αναπαραστάσεις. Διαπίστωση μας είναι ότι σε όλα τα επιστημονικά πεδία, εκτός από τις εμφανίσεις που έχουν περιεχόμενο από το ίδιο επιστημονικό πεδίο, υπάρχουν και εμφανίσεις από τα μαθηματικά. Πολλά βασίζουν την ανάπτυξη της θεωρίας τους σε μαθηματικές αναπαραστάσεις πράγμα που επιβάλει και τις εμφανίσεις μαθηματικού περιεχομένου. Εξάλλου πολλά επιστημονικά πεδία έχουν συνδέσει την εξέλιξη τους με την εξέλιξη των μαθηματικών. Στα οικονομικά αυτό γίνεται ακόμη και περισσότερο εμφανές, όπου σταθερά το εννοιολογικό μέρος ακολουθείται και από μία τουλάχιστον αντίστοιχη μαθηματική αναπαράσταση. Στα μαθηματικά δε, έχουμε εμφανίσεις με περιεχόμενο από όλα τα άλλα επιστημονικά πεδία (πλην της χημείας) πράγμα που δείχνει τον βαθμό της σύνδεσης των επιστημονικών πεδίων, αλλά και τις διεπιστημονικότητας των εννοιών. Συνάμα τονίζεται η σημασία των μαθηματικών αναπαραστάσεων για τα υπόλοιπα επιστημονικά πεδία. Τέλος το σημαντικότερο είναι ότι υπάρχουν εμφανίσεις από όλα τα επιστημονικά πεδία οι οποίες έχουν μεγάλες ομοιότητες μεταξύ τους και καθιστά βέβαιη την δυνατότητα συνδέσεων μεταξύ τους.

Ως προς το **Θέμα** σε όλα τα επιστημονικά πεδία βλέπουμε την ίδια λογική, δηλαδή το θεωρητικό πλαίσιο (154 εμφανίσεις) να συμπληρώνεται από αντίστοιχες εφαρμογές ή λυμένα παραδείγματα (72 εμφανίσεις) και στο τέλος να δίδονται σχετικές ασκήσεις (241 εμφανίσεις) σε επαρκή βαθμό. Στο μάθημα Αρχές Οικονομικής Θεωρίας αυτές αρκετές φορές θεωρούνται ανεπαρκείς, αλλά αυτό δεν μεταβάλλει το γεγονός ότι αυτές οι ομοιότητες κάνουν τις συνδέσεις μεταξύ των επιστημών ευκολότερες. Άξιο αναφοράς είναι ότι συχνά στην ανάλυση μας, ένα θεωρητικό πλαίσιο ενός επιστημονικού πεδίου χρησιμοποιεί μια εφαρμογή ενός άλλου επιστημονικού πεδίου για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας. Για παράδειγμα στα μαθηματικά στο ρυθμό μεταβολής χρησιμοποιείται μια εφαρμογή της φυσικής και συγκεκριμένα αυτή της ταχύτητας. Το Θέμα επιλέχθηκε ως κριτήριο, για να μελετήσουμε τον τρόπο προσέγγισης των εννοιών, και οι εμφανίσεις μαρτυρούν ότι οι συγκλίσεις με βάση αυτό το κριτήριο είναι μεγάλες. Βέβαια αυτό θα μπορούσε να γίνεται περισσότερο εμφανές αν γινόντουσαν σαφές αναφορές από άλλα επιστημονικά πεδία όταν παρουσιάζεται μια έννοια. Δηλαδή, όταν διδάσκεται η έννοια στα οικονομικά να χρησιμοποιούνται αναφορές και παραδείγματα από τα μαθηματικά, για να γίνονται ευκολότερα οι συνδέσεις, και το αντίστοιχο και στα άλλα επιστημονικά πεδία.

Ως προς τις **Αναπαραστάσεις** αρχικά διαπιστώσαμε ότι σε όλα τα εγχειρίδια έχουμε πολλαπλές παραστάσεις (268 εμφανίσεις). Επιπλέον οι ομοιότητες μεταξύ αυτών είναι πολύ σημαντικές και συντελούν στην διασύνδεση των διαφορετικών επιστημονικών πεδίων. Πέρα από τους μαθηματικούς τύπους (233 εμφανίσεις) που η ομοιότητα είναι ευδιάκριτη, αντίστοιχα παραδείγματα έχουμε και στους πίνακες (57 εμφανίσεις), στις γραφικές παραστάσεις (75 εμφανίσεις) και τον λεκτικό τρόπο (342 εμφανίσεις) που ορίζεται μια έννοια. Στην εικόνα 43 σας παραθέτουμε αυτές τις ομοιότητες από αναπαραστάσεις διαφορετικών πεδίων.



Πίνακας 3.2. Μέσο και Οριακό Προϊόν

Αριθμός εργατών (L)	Συνολικό προϊόν (TP ή Q)	Μέσο προϊόν AP=Q/L	Οριακό προϊόν MP=ΔQ/ΔL
0	0	-	-
1	4	4	4
2	10	5	6
3	20	6.7	10
4	33	8.2	13
5	50	10	17
6	60	10	10
7	65	9.3	5
8	65	8.1	0
9	55	6.1	-10

Πίνακας Τιμών

t(s)	x_α(m)	x_β(m)
1	2	3
2	4	6
3	6	9
4	8	12
5	10	
6	12	
7	14	

$$\Pi = \frac{A\Delta x}{\Delta t} = Au$$

$$MR = \frac{\Delta(P \cdot Q)}{\Delta Q} \quad (3)$$

Εικόνα 7.1 Ομοιότητες μεταξύ των αναπαραστάσεων διαφορετικών επιστημονικών πεδίων.

Τα παραπάνω μαρτυρούν ότι η μετάβαση από το ένα επιστημονικό πεδίο στο άλλο είναι εύκολη, όπως είναι και η δημιουργία συνδέσεων, αρκεί ο μαθητής να κατανοήσει το διαφορετικό εννοιολογικό πλαίσιο. Για παράδειγμα ένας ρυθμός μεταβολής στη οικονομία ορίζεται ως εξής «Οριακό προϊόν (Marginal Product, MP) ενός συντελεστή είναι η μεταβολή που επέρχεται στο συνολικό προϊόν, όταν μεταβάλλεται ο μεταβλητός συντελεστής κατά μία μονάδα» , ενώ στη Φυσική « το πηλίκο ΔΦ/Δt της μεταβολής ενός φυσικού μεγέθους Φ διά της μεταβολής του χρόνου

Δt, μας δίνει το ρυθμό μεταβολής του φυσικού μεγέθους Φ, δηλαδή το πόσο αλλάζει το μέγεθος αυτό σε 1s». Επιπρόσθετα, οι πίνακες που χρησιμοποιούνται στην Χημεία και την Φυσική είναι πανομοιότυποι με αυτούς στο μάθημα Αρχές Οικονομικής Θεωρίας. Αντίστοιχες είναι και οι ομοιότητες στις γραφικές παραστάσεις και μόνο στις εικόνες υπάρχουν σημαντικές διαφοροποιήσεις, πράγμα λογικό αφού παρουσιάζουν τις αντίστοιχες έννοιες από κάθε επιστημονικό πεδίο. Αυτό βέβαια δεν μειώνει την σημασία τους για την ανάπτυξη των εννοιών και την δημιουργία συνδέσεων.

Τέλος ως προς τις εμφανίσεις των **Όρων** «Οριακή, στιγμιαία, κλίση και Συντελεστής Διεύθυνσης», υπάρχει και εδώ σύγκλιση. Σε όλα τα εγχειρίδια βρίσκουμε εμφανίσεις αυτών με κυριότερο αυτό των Μαθηματικών, όπου υπάρχουν όλες. Σε αυτό το σημείο βρίσκουμε και μια μεγάλη διαφορά μεταξύ των μαθηματικών και των υπολοίπων. Στα μαθηματικά προτιμάται κυρίως η χρήση της παραγώγου στο σημείο για τον υπολογισμό του ρυθμού μεταβολής ενώ στα υπόλοιπα ο τύπος των διαφορών $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Αυτό βέβαια γίνεται για διαφορετικούς λόγους σε κάθε επιστημονικό πεδίο. Για παράδειγμα στα μαθηματικά, για λόγους ευκολίας υπολογισμού και ταχύτητας, χρησιμοποιείται η παράγωγος, στα Οικονομικά ο λόγος $\frac{\Delta TC}{\Delta Q}$, διότι έτσι γίνεται καλύτερα κατανοητή η έννοια της μεταβολής του κόστους όταν αυξηθεί η παραγωγή. Αντίστοιχα στη χημεία ο λόγος $\frac{\Delta c}{\Delta t}$, διότι έτσι ερμηνεύεται καλύτερα η ταχύτητα αντίδρασης. Αυτό όμως δεν αναίρει την χρήση ενός διαφορετικού τρόπου, όταν η αναπαράσταση που έχει επιλεχθεί έχει εξυπηρετήσει τον σκοπό της. Για παράδειγμα στην οικονομία οι φοιτητές χρησιμοποιούν την παράγωγο για τον υπολογισμό του οριακού κόστους, προϊόντος κτλ., διότι θεωρείται ότι έχει κατανοηθεί η ουσία της έννοιας από αυτούς.

Το βέβαιο είναι, ότι ο ρυθμός μεταβολής είναι μια κατεξοχήν διεπιστημονική έννοια η οποία συναντάται σε όλα τα επιστημονικά πεδία των θετικών επιστημών. Η σύνδεση των επιστημονικών πεδίων είναι εμφανής κάτι που φαίνεται και στα σχολικά εγχειρίδια και οπωσδήποτε πρέπει να λαμβάνεται υπόψιν τόσο κατά τον σχεδιασμό των σχολικών εγχειριδίων, αλλά και κατά τον σχεδιασμό του σχολικού προγράμματος, κάτι το οποίο όμως δεν έχει γίνει. Βέβαια οι εμφανίσεις του ρυθμού είναι τόσο πολλές στα σχολικά εγχειρίδια που είναι βέβαιο ότι οι μαθητές θα κάνουν την σύνδεση μεταξύ τους, αλλά όχι με ένα σχεδιασμένο και προγραμματισμένο τρόπο, αφήνοντάς αβέβαιο το κατά πόσο αυτές οι συνδέσεις θα τους ωφελήσουν.

Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να προχωρήσουμε στις παρακάτω προτάσεις. Αρχικά είναι ξεκάθαρο ότι υπάρχει περιθώριο για μεγαλύτερη σύγκλιση μεταξύ των μαθηματικών και των υπολοίπων επιστημονικών πεδίων γύρω από την χρήση του τύπου $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ και της παραγώγου περισσότερο στις υπόλοιπες επιστήμες. Χρήσιμο θα ήταν να γίνεται αναφορά στις δύο αυτές έννοιες, να τονιστούν οι διαφορές τους και οι ομοιότητες τους, ώστε να γίνεται καλύτερα αντιληπτός ο λόγος χρήσης τους, αλλά και οι έννοιες που προσδιορίζουν. Για παράδειγμα στα μαθηματικά της Α΄ Λυκείου όταν διδάσκονται οι συντελεστές διεύθυνσης και οι κλίσεις, θα μπορούσε να αναφερθεί και ο ρυθμός μεταβολής και να γίνει χρήση αυτού του τύπου, χρησιμοποιώντας παραδείγματα, τα οποία κάλλιστα θα μπορούσε να είναι και από άλλα επιστημονικά πεδία. Με την χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων όπως πινάκων, εικόνων και διαγραμμάτων, θα μπορούσε να επιτευχθεί μια πληρέστερη κατανόηση της έννοιας από τους μαθητές, αλλά και μια προετοιμασία για τα υπόλοιπα που θα διδαχθούν. Παράλληλα, με αυτό τον τρόπο γίνεται μια διασύνδεση με τα άλλα επιστημονικά πεδία, ενώ μπορεί να γίνει και ακριβής αναφορά που θα συναντήσουν αυτές τις έννοιες στο μέλλον (πχ το κόστος, την ταχύτητα, την επιτάχυνση, την ταχύτητα αντίδρασης, κτλ.) επιτυγχάνοντας έτσι μια ενοποίηση της έννοιας, ώστε να μπορούν να κατακτήσουν εργαλεία οι μαθητές για το μέλλον. Αυτό πάντα θα γίνεται με βάση το γνωστικό επίπεδο που βρίσκονται οι μαθητές και τις αναπαραστάσεις που γνωρίζουν και μπορούν να χρησιμοποιήσουν, δίνοντας τους έτσι και ένα έναυσμα για νέα γνώση σε ένα νέο μεταγνωστικό επίπεδο. Από την άλλη πλευρά και τα άλλα εγχειρίδια θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν εργαλεία όπως η παράγωγός για παράδειγμα. Άλλωστε, ανάλογη πρόταση είχε γίνει και από αντίστοιχη έρευνα του Λουκά (2019). Για παράδειγμα στο μάθημα των Αρχών Οικονομικής Επιστήμης, θα μπορούσε να προστεθεί κεφάλαιο στο τέλος του εγχειριδίου, και αφού έχουν ήδη διδαχθεί τις έννοιες με τον τρόπο τον οποίο θα διασφαλίσει την κατανόηση της έννοιας από οικονομική σκοπιά. Το κεφάλαιο αυτό θα πραγματεύεται τους τρόπους με τους οποίους χειριζόμαστε τους ρυθμούς μεταβολής μέσα στην οικονομία με την προσέγγιση της παραγώγου. Αυτό θα εξασφάλιζε και την προσέγγιση που επιθυμεί το σχολικό εγχειρίδιο, και μια επιπλέον προσέγγιση που μάλιστα χρησιμοποιείται στα πανεπιστημιακά εγχειρίδια, αλλά και μια πιο διεπιστημονική και ολοκληρωμένη προσέγγισή με όλα τα οφέλη που μπορεί να αποκομίσει ένας μαθητής.

Επιπλέον όπως τονίστηκε και προηγουμένως, ένας καλύτερος σχεδιασμός ως προς τον χρόνο που γίνονται οι εμφανίσεις στα διάφορα σχολικά εγχειρίδια, λαμβάνοντας υπόψιν και τα άλλα υπόλοιπα επιστημονικά πεδία και μια διεπιστημονική προσέγγιση στην ανάπτυξη της έννοιας θα συντελέσει σε μια πιο ολοκληρωμένη ανάπτυξη της έννοιας, αλλά και την δημιουργία προηγούμενης γνώσης, έστω και αν αυτή προέρχεται από άλλο επιστημονικό πεδίο.

Από την άλλη πλευρά πολύ ενδιαφέρον έχει, να μελετηθεί με την παρούσα κατάσταση των εγχειριδίων, αν οι μαθητές αναγνωρίζουν αυτές τις διαφορετικές εμφανίσεις της ίδιας έννοιας, δηλαδή του ρυθμού μεταβολής, αν καταφέρνουν να κάνουν αυτές τις συνδέσεις, και αν ναι, ποιες είναι αυτές οι αναπαραστάσεις που συντελούν περισσότερο ή λιγότερο στο να γίνουν αυτές οι συνδέσεις. Για παράδειγμα στην οικονομία ένας μαθητής που μπορεί να κάνει αυτές τις συνδέσεις μπορεί ευκολότερα να χρησιμοποιήσει αυτές της διαφορετικές αναπαραστάσεις και να μπορέσει να μεταβεί σε ένα άλλο μεταγνωστικό επίπεδο και να αναπτύξει την οικονομική του σκέψη. Κάτι τέτοιο είναι κατανοητό ότι παρουσιάζει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον, αφού θα μπορούσε να επηρεάσει τον τρόπο σχεδιασμού των σχολικών εγχειριδίων καθώς και τον γενικότερο προγραμματισμό των μαθημάτων.

Κάτι αντίστοιχο θα μπορούσε να γίνει και από πλευράς των καθηγητών και το πως προσεγγίζουν την έννοια του ρυθμού μεταβολής και κατά πόσο θεωρούν ότι μια διεπιστημονική προσέγγιση της έννοιας θα μπορούσε να ευνοήσει τις δικές τους διδακτικές πρακτικές. Όλες οι έρευνες πάντως τονίζουν την αναγκαιότητα ενός εκπαιδευτικού σχεδιασμού με γνώμονα την διασύνδεση των επιστημονικών θετικών επιστημών για την αντιμετώπιση των όλο και πιο πολύπλοκων προβλημάτων του πραγματικού κόσμου.

Εν κατακλείδι, αυτό που τονίσαμε στην παρούσα εργασία είναι ότι οι εμφανίσεις του ρυθμού μεταβολή είναι πολλές στα σχολικά εγχειρίδια, γίνονται σε όλα τα επιστημονικά πεδία και έχουν πολλές ομοιότητες μεταξύ τους, ως προς πολλές παραμέτρους. Επομένως η διασύνδεση των εννοιών είναι εφικτή κάτι που συχνά γίνεται από τους μαθητές ακόμη και αν αυτό δεν έχει γίνει με βάση κάποιο προγραμματισμό. Με αυτό τον τρόπο αναδεικνύεται η ανάγκη για την διεπιστημονική προσέγγιση κάτι που θα αναδείξει τις έννοιες, αλλά και αναπτύξει τις ικανότητες των μαθητών. Άλλωστε επιταγή της εποχής μας είναι η ανάπτυξη ικανοτήτων για την αντιμετώπιση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου που απαιτεί τον συνδυασμό των επιστημονικών πεδίων και την δημιουργία συγκλίσεων και συνδέσεων μεταξύ τους.

Βιβλιογραφία

Αδαμόπουλος, Λ., Δαμιανού, Χ. & Σβέρκος, Α. (2001). *Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ' Ενιαίου Λυκείου.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Αδαμόπουλος, Λ., Δαμιανού, Χ. & Σβέρκος, Α. (2001). *Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ' Ενιαίου Λυκείου, Λύσεις των Ασκήσεων.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Αλεξάκης, Ν., Αμπατζής, Σ., Γκουγκούσης, Γ., Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Κόκκοτας, Π., Περιστερόπουλος, Π. & Τιμόθεου, Γ., (2010) *Φυσική Γ΄ Τάξης Ενιαίου Λυκείου.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Αλεξάκης, Ν., Αμπατζής, Σ., Γκουγκούσης, Γ., Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Κόκκοτας, Π., Περιστερόπουλος, Π. & Τιμόθεου, Γ., (2010) *Φυσική Γ΄ Τάξης Ενιαίου Λυκείου, Λύσεις των Ασκήσεων.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Αθανασίου, Κ. (2015). Διδακτική των Φυσικών Επιστημών-Εποικοδομητισμός.

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., Αδαμόπουλος Λ., & Δαμιανού Χ. (1991). *Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., Αδαμόπουλος Λ., & Δαμιανού Χ. (1991). *Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου, Λύσεις των Ασκήσεων.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Αρνέλλος, Α., & Σπύρου Θ., (2002). Εισαγωγή στην Συστημική Θεωρία, *σημειώσεις μαθήματος*.

Asano, A. (2006). Teaching marginal analysis: On the importance of emphasising the second-order condition. *International Review of Economics Education*, *5*(1), 46-59.

Andresen, M., & Lindenskov, L. (2009). *New roles for mathematics in multi-disciplinary, upper secondary school projects. ZDM,* 41(1-2), 213-222.

Berndt, M., Schmidt, F. M., Sailer, M., Fischer, F., Fischer, M. R., & Zottmann, J. M. (2021). Investigating statistical literacy and scientific reasoning & argumentation in medical-, social sciences-, and economics students. *Learning and Individual Differences*, 86, 101963.

Bertalanffy, L. V. (1969). General system theory, New York (George Braziller) 1969.

Bishop, A. (2008). Values in mathematics and science education: Similarities and differences. *The Mathematics Enthusiast*, *5*(1), 47-58.

Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Κόκκοτας, Π., Περιστερόπουλος, Π. & Τιμόθεου, Γ., (2010). *Φυσική Γενικής Παιδείας Α' Τάξης Ενιαίου Λυκείου.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Κόκκοτας, Π., Περιστερόπουλος, Π. & Τιμόθεου, Γ., (2013). *Φυσική Γενικής Παιδείας Β' Τάξης Ενιαίου Λυκείου*. ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Κόκκοτας, Π., Περιστερόπουλος, Π. & Τιμόθεου, Γ., (2013). *Φυσική Γενικής Παιδείας Β' Τάξης Ενιαίου Λυκείου, Λύσεις των Ασκήσεων.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Κόκκοτας, Π., Περιστερόπουλος, Π., Τιμόθεου, Γ., Αλεξάκης Ν., Αμπατζής Σ., & Γκουγκούσης Γ., (2019). *Φυσική Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου (Α΄ τεύχος).* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Boyer, C. B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development:(The concepts of the calculus).* Courier Corporation.

Γκαμαλέτσος, Γ. Θ. (1989) .*Θεωρητική Οικονομική*. Πειραιάς: Εκδόσεις Α. Σταμούλης.

Γουλέρμας, Α. Α. (2012). *Η αστρονομία του Ευδόξου του Κνίδιου* (Bachelor's thesis).

Chiappetta, E. L., Fillman, D. A., & Sethna, G. H. (1991). A method to quantify major themes of scientific literacy in science textbooks. *Journal of research in science teaching*, *28*(8), 713-725.

Davis, B., & Simmt, E. (2003). Understanding learning systems: Mathematics education and complexity science. *Journal for research in mathematics education*, *34*(2), 137-167.

Davis, B., & Sengupta, P. (2020). Complexity in mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education,* 113-117.

Δημητριάδης, Σ. (2015). Θεωρίες μάθησης και εκπαιδευτικό λογισμικό. Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών.

Δρακόπουλος, Σ., Γκότσης, Γ., & Γριμάνη, Α. (2015). Η Μεθοδολογική Εξέλιξη της Οικονομικής Επιστήμης.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61(1), 103-131.

Euricon, E. Π. E. (2011). *Κριτήρια αξιολόγησης και αξιοποίησης εκπαιδευτικού υλικού*.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. *The roles of representation in school mathematics*, *2001*, 1-23.

Gulkilik, H., Moyer-Packenham, P. S., Ugurlu, H. H., & Yuruk, N. (2020). Characterizing the growth of one student's mathematical understanding in a multi-representational learning environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, 58, 100756.

Haja, S. (2005). Investigating the Problem Solving Competency of Pre Service Teachers in Dynamic Geometry Environment. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 81-87.

Højgaard, T., & Sølberg, J. (2019). Competencies and Curricula: Two Case Stories of Two-Dimensional Curriculum Development. *European Journal of Science and Mathematics Education,* 7(1), 50-60.

Ιωάννου Α., Ντάνος Γ., Πήττας Α., & Ράπτης Σ., (2019). *Φυσική Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου (Γ ΄Τεύχος).* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Ιωάννου Α., Ντάνος Γ., Πήττας Α., & Ράπτης Σ., (2019). *Φυσική Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου (Γ΄ τεύχος), Λύσεις των Ασκήσεων.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Ιωάννου Α., Ντάνος Γ., Πήττας Α., & Ράπτης Σ., (2019). *Φυσική Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου (Β΄ Τεύχος).* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Ιωάννου Α., Ντάνος Γ., Πήττας Α., & Ράπτης Σ., (2019). *Φυσική Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου(Β΄ Τεύχος), Λύσεις των Ασκήσεων.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Ιωάννου Α., Ντάνος Γ., Πήττας Α., & Ράπτης Σ., (2013). *Φυσική Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Β' Τάξης Ενιαίου Λυκείου.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Ιωάννου Α., Ντάνος Γ., Πήττας Α., & Ράπτης Σ., (2013). *Φυσική Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Β' Τάξης Ενιαίου Λυκείου, Λύσεις των Ασκήσεων.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Καψάλης, Α.- Χαραλάμπους, Δ. (2008). Σχολικά εγχειρίδια, θεσμική Εξέλιξη και Σύγχρονη Προβληματική. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Kapur, M. (2011). A further study of productive failure in mathematical problem solving: Unpacking the design components. *Instructional Science*, 39(4), 561-579.

Κιζήρογλου, Μ. (2015). Λογισμός για μηχανικούς.

Κρητικός, Γ., & Μούτσιος-Ρέντζος, Α. (2018). Μηχανική των διεπιστημονικών αναστοχασμών στη σχολική μονάδα. Στο Α. Κοντάκος & Φ. Καλαβάσης (Επιμ.), *Θέματα Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού* (τ. 10, σελ. 111-126), Αθήνα: Διάδραση

Λαγουμιντζής, Γ., Βλαχόπουλος, Γ., & Κουτσογιάννης, Κ. (2015). Μέθοδοι Συλλογής Δεδομένων.

Λιανός, Θ., Παπαβασιλείου, Α. & Χατζηανδρέου, Α. (2019). *Αρχές Οικονομικής Θεωρίας, Ομάδας Προσανατολισμού Σπουδών Πληροφορικής & Οικονομίας, Λ, Γ' Τάξης Γενικού Λυκείου.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Λιανός, Θ., Παπαβασιλείου, Α. & Χατζηανδρέου, Α. (2019). *Αρχές Οικονομικής Θεωρίας, Ομάδας Προσανατολισμού Σπουδών Πληροφορικής & Οικονομίας, Λύσεις των Ασκήσεων, Γ' Τάξης Γενικού Λυκείου.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Λιανός, Θ., & Ψειρίδου, Α. (2015). Οικονομική ανάλυση και πολική-Μακροοικονομική.

Λιοδάκης Σ., Γάκης Δ., Θεοδωρόπουλος Δ., Θεοδωρόπουλος Π. & Κάλλης Α., (2010). *Χημεία θετικής κατεύθυνσης Β' Τάξης Ενιαίου Λυκείου.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Λιοδάκης Σ., Γάκης Δ., Θεοδωρόπουλος Δ., Θεοδωρόπουλος Π. & Κάλλης Α., (2010). *Χημεία θετικής κατεύθυνσης Β' Τάξης Ενιαίου Λυκείου, Λύσεις των Ασκήσεων.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Λιοδάκης Σ., Γάκης Δ., Θεοδωρόπουλος Δ., Θεοδωρόπουλος Π. & Κάλλης Α., (2010). *Χημεία θετικής κατεύθυνσης Α' Τάξης Ενιαίου Λυκείου.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Λιοδάκης Σ., Γάκης Δ., Θεοδωρόπουλος Δ., Θεοδωρόπουλος Π. & Κάλλης Α., (2010). *Χημεία θετικής κατεύθυνσης Α' Τάξης Ενιαίου Λυκείου, Λύσεις των Ασκήσεων.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Λιοδάκης Σ., Γάκης Δ., Θεοδωρόπουλος Δ., Θεοδωρόπουλος Π. & Κάλλης Α., (2012). *Χημεία θετικής κατεύθυνσης Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Λιοδάκης Σ., Γάκης Δ., Θεοδωρόπουλος Δ., Θεοδωρόπουλος Π. & Κάλλης Α., (2012). *Χημεία θετικής κατεύθυνσης Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου, Λύσεις των Ασκήσεων.* ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Λουκάς, Ι. (2019). *Εμφανίσεις της έννοιας του ρυθμού μεταβολής στα μαθηματικά και στα οικονομικά της Γ' Λυκείου.*

Moutsios-Rentzos, A. (2014, October). Η σχέση θεωρίας και υλικού στο σχεδιασμό μιας πρότασης για τη διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος [The relationship between theory and material in the design of a teaching of the Pythagorean Theorem]. In *Proceedings of the 1st Panhellenic Conference with International Participation about Educational Material in Mathematics and Sciences* (pp. 17-18).

Μούτσιος-Ρέντζος, Α. & Καλαβάσης, Φ. (2018).*Η πρόκληση της Διεπιστημονικότητας για τα Μαθηματικά στην Εκπαίδευση.* Ε.Μ.Ε., 211-223.

Μπεμπένη, Μ. & Βαμβακούση, Ξ. (2011). Εννοιολογική και Διαδικαστική Γνώση για τους ρητούς και η σχέση τους με τις προσεγγίσεις των μαθητών στη μελέτη των μαθηματικών. Στο Μ. Καλμυρίδου, & Ξ. Βαμβακούση, (Επ.), *Πρακτικά της 4ου Συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ*(σελ 331- 340). Ιωάννινα : Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Μπιζά, Ε. (2008). *Διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών για την εφαπτόμενη ευθεία στην ανάλυση* (Doctoral dissertation, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Σχολή Θετικών Επιστημών. Τμήμα Μαθηματικών).

Μπονίδης, Κ. (2009). Κριτικές μεθοδολογικές προσεγγίσεις στην έρευνα του περιεχομένου των σχολικών βιβλίων: θεωρητικές παραδοχές και «παραδείγματα» ανάλυσης. *Συγκριτική και Διεθνής Εκπαιδευτική Επιθεώρηση*, *13*, 86-122.

Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 9-28.

Ξυστούρη, Ξ. & Πίττα - Πανταζή, Δ. (2011). Εννοιολογική και Ένα θεωρητικό μοντέλο για την κατανόηση της ικανότητας των γεωμετρικών μετασχηματισμών στο δημοτικό. Στο Μ. Καλμυρίδου, & Ξ. Βαμβακούση, (Επ.), *Πρακτικά της 4ου Συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ*(σελ 361- 370). Ιωάννινα : Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Πατσιομίτου, Σ., & Εμβαλωτής, Α. (2009). Οι αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων ως μέσο οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης: Τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία. *Θέματα επιστημών και τεχνολογίας στην εκπαίδευση*, *2*(3), 247-272.

Πιπίνος, Γ.,(2006) Διδακτική αξιοποίηση της θεωρίας των van Hiele. *Επιστημονικό βήμα,* 5, 66-83.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it?. *In Learning Mathematics* (pp. 61-86). Springer, Dordrecht.

Robson, C. (2007). Η έρευνα του πραγματικού κόσμου. *Αθήνα: Gutenberg*.

Roth, W. M. (2020). Interdisciplinary approaches in mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education Cham*: Springer, 415-419.

Sáenz, C. (2009). The role of contextual, conceptual and procedural knowledge in activating mathematical competencies (PISA). *Educational Studies in Mathematics*, 71(2), 123-143.

Σαραντίδης Α. Σ., (1995). *Σύγχρονη Μικροοικονομική Ανάλυση.* Πειραιάς

Σκουμπουρδή, Χ., Φεσάκης, Γ., Καφούση, Σ., & Καλαβάσης, Φ. Η Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών: Αυξανόμενη πολλαπλότητα των ερευνητικών εργαλείων και συνεχής διεύρυνση των θεωρητικών προσεγγίσεων για τη μελέτη ενός σύνθετου και πολύπλοκου φαινομένου.

Sumirattana, S., Makanong, A., & Thipkong, S. (2017). Using realistic mathematics education and the DAPIC problem-solving process to enhance secondary school students' mathematical literacy. *Kasetsart Journal of Social Sciences,* 38(3), 307-315.

Στασινάκης, Π. Κ., & Κολιόπουλος, Δ. (2009). Ανάλυση εγχειριδίων βιολογίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση: Η περίπτωση της έννοιας της θρέψης φυτών και ζώων. *Θέματα Επιστημών και Τεχνολογίας στην Εκπαίδευση*, *2*(1-2), 103-125.

Στυλιανός, Α., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ. & Πολύζος, Γ. (2021). *Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Υγείας και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής Γ' Γενικού Λυκείου*. ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Στυλιανός, Α., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ. & Πολύζος, Γ. (2021). *Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Υγείας και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής Γ' Γενικού Λυκείου, Λύσεις των Ασκήσεων*. ΥΠΕΠΘ. Αθήνα: ΟΕΒΔ.

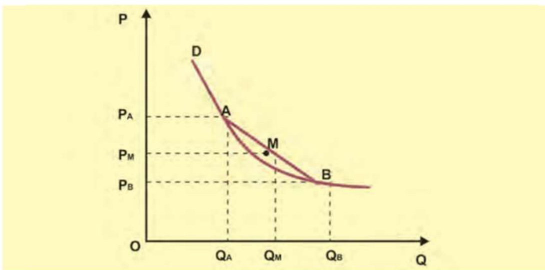
Τερτίκας, Χ. (2020). Διδασκαλία της έννοιας της παράγωγου συνάρτησης σε σημείο με τη χρήση νέων τεχνολογιών.

Τριανταφύλλου Χ., & Σπηλιωτοπούλου Β.,(2015). Πρακτικές αιτιολόγησης εκπαιδευτικών όταν ανασκευάζουν εναλλακτικές αντιλήψεις φοιτητών για την περιοδικότητα. Στο Δ. Δεσλή, Ι Παπαδόπουλος, & Μ. Τζεδάκη(Επ), *Πρακτικά 6ου Πανελλήνιου Συνέδριου της Εν.Ε.Δι.Μ.* (σελ 638- 647). Θεσσαλονίκη :Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

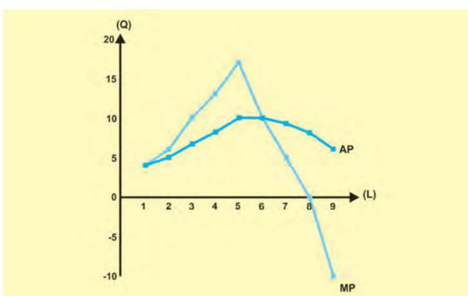
Faulkner, F., Breen, C., Prendergast, M., & Carr, M. (2020). Measuring the Mathematical Problem Solving and Procedural Skills of Students in an Irish Higher Education Institution--A Pilot Study. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 8(2), 92-106.

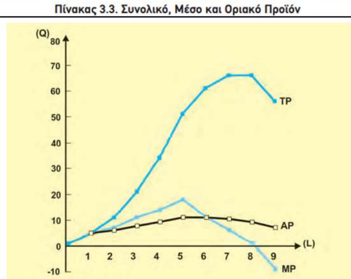
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ : ΟΙ ΕΜΦΑΝΙΣΕΙΣ ΤΟΥ ΡΥΘΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

<table>
<tr><th>ΕΜΦΑΝΙΣΗ</th><th>ΧΡΟΝΟΣ</th><th>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ</th><th>ΘΕΜΑ - ΘΕΣΗ</th><th>ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ</th><th>ΚΕΦΑΛΑΙΟ</th><th>ΣΕΛΙΔΑ</th></tr>
<tr><td colspan="7">Αρχές Οικονομικής Θεωρίας</td></tr>
<tr><td>Γενικά,
$$\text{Κόστος ευκαιρίας του αγαθού Υ (σε όρους του αγαθού Χ)} = \frac{\text{Μονάδες του αγαθού Χ που θυσιάζονται}}{\text{Μονάδες του αγαθού Υ που παράγονται}}$$</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Οικονομικό</td><td>Θεωρητικό Πλαίσιο – Βασικές έννοιες – Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων.</td><td>Λεκτικό</td><td>$1^{ο}$</td><td>21</td></tr>
<tr><td>ή $KE_Y = \frac{\Delta X}{\Delta Y}$ (οι μονάδες του αγαθού Χ που θυσιάστηκαν για την παραγωγή μιας επιπλέον μονάδας του αγαθού Ψ)</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό Οικονομικό</td><td>Θεωρητικό Πλαίσιο – Βασικές έννοιες – Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων.</td><td>Λεκτικό – Μαθηματικός τύπος</td><td>$1^{ο}$</td><td>21</td></tr>
<tr><td>$$\text{Κόστος ευκαιρίας του αγαθού Χ (σε όρους του αγαθού Υ)} = \frac{\text{Μονάδες του αγαθού Υ που θυσιάζονται}}{\text{Μονάδες του αγαθού Χ που παράγονται}}$$</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Οικονομικό</td><td>Θεωρητικό Πλαίσιο – Βασικές έννοιες – Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων.</td><td>Λεκτικό</td><td>$1^{ο}$</td><td>21</td></tr>
<tr><td>ή $KE_X = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$ (οι μονάδες του αγαθού Ψ που θυσιάστηκαν για την παραγωγή μιας επιπλέον μονάδας του αγαθού Χ)</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό Οικονομικό</td><td>Θεωρητικό Πλαίσιο – Βασικές έννοιες – Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων.</td><td>Λεκτικό – Μαθηματικός τύπος</td><td>$1^{ο}$</td><td>21</td></tr>
<tr><td>8) Από τον παρακάτω πίνακα να κατασκευαστούν οι καμπύλες παραγωγικών δυνατοτήτων της οικονομίας για τα ζεύγη των αγαθών Χ, Ψ και Χ, Φ και για τους συνδυασμούς των ποσοτήτων στα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Σχολιάστε το αποτέλεσμα. Επίσης να βρεθεί το κόστος ευκαιρίας του Φ σε όρους του Χ.
<table>
<tr><th></th><th>Χ</th><th>Ψ</th><th>Φ</th></tr>
<tr><td>Α</td><td>50</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Β</td><td>40</td><td>10</td><td>14</td></tr>
<tr><td>Γ</td><td>30</td><td>20</td><td>26</td></tr>
<tr><td>Δ</td><td>20</td><td>30</td><td>37</td></tr>
<tr><td>Ε</td><td>10</td><td>40</td><td>44</td></tr>
<tr><td>Ζ</td><td>0</td><td>50</td><td>50</td></tr>
</table></td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό Οικονομικό</td><td>Ασκήσεις - Βασικές έννοιες – Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων.</td><td>Λεκτικό - Πίνακας</td><td>$1^{ο}$</td><td>26</td></tr>
<tr><td>9. Στο παραπάνω πρόβλημα υποθέστε ότι η τεχνολογία βελτιώνεται με τρόπο που διπλασιάζει την παραγωγή του αγαθού Φ. Κατασκευάστε τη νέα καμπύλη παραγωγικών δυνατοτήτων μεταξύ Χ και Φ.</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Οικονομικό</td><td>Ασκήσεις - Βασικές έννοιες – Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων.</td><td>Λεκτικό</td><td>$1^{ο}$</td><td>26</td></tr>
<tr><td>11. Μια οικονομία παράγει δύο αγαθά Χ και Ψ και απασχολεί όλους τους παραγωγικούς συντελεστές με δεδομένη τεχνολογία, όπως στον πίνακα:
<table>
<tr><th></th><th>Χ</th><th>Ψ</th></tr>
<tr><td>Α</td><td>0</td><td>500</td></tr>
<tr><td>Β</td><td>100</td><td>300</td></tr>
<tr><td>Γ</td><td>150</td><td>150</td></tr>
<tr><td>Δ</td><td>180</td><td>0</td></tr>
</table>
Με τη βοήθεια του κόστους ευκαιρίας να εξεταστεί (υπολογιστικά) αν οι παρακάτω συνδυασμοί είναι εφικτοί:
(α) Χ = 160 και Ψ = 110
(β) Χ = 140 και Ψ = 180
(γ) Χ = 90 και Ψ = 310</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό Οικονομικό</td><td>Ασκήσεις - Βασικές έννοιες – Καμπύλη Παραγωγικών Δυνατοτήτων.</td><td>Λεκτικό - Πίνακας</td><td>$1^{ο}$</td><td>26</td></tr>
<tr><td><u>i) Γραμμική συνάρτηση ζήτησης:</u>
Η γραμμική συνάρτηση ζήτησης έχει τον τύπο: $Q_D = α + β P$ και είναι ευθεία γραμμή. Η σταθερά α είναι πάντα θετικός αριθμός, ενώ ο συντελεστής β εξαρτάται από την κλίση της ευθείας και είναι πάντα αρνητικός αριθμός, αφού η κλίση της ευθείας εκφράζει την αρνητική σχέση μεταξύ ζητούμενης ποσότητας και τιμής (Νόμος Ζήτησης). Με δεδομένα ότι η ζητούμενη ποσότητα και η τιμή δεν μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές, θα πρέπει:</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό Οικονομικό</td><td>Θεωρητικό Πλαίσιο– Η Ζήτηση των Αγαθών – Συνάρτηση Ζήτησης</td><td>Λεκτικό</td><td>$2^{ο}$</td><td>32</td></tr>
<tr><td>Ο λόγος αυτός, δηλαδή η ποσοστιαία μεταβολή της ζητούμενης ποσότητας προς την ποσοστιαία μεταβολή της τιμής, ονομάζεται ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή. Μπορούμε λοιπόν να αντιληφθούμε την ελαστικότητα της ζήτησης ως προς την τιμή ως το βαθμό ανταπόκρισης ή αντίδρασης των καταναλωτών στις μεταβολές της τιμής, όλων των άλλων παραγόντων σταθερών (ceteris paribus).</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Οικονομικό</td><td>Θεωρητικό Πλαίσιο– Η Ζήτηση των Αγαθών – Ελαστικότητα Ζήτησης</td><td>Λεκτικό</td><td>$2^{ο}$</td><td>40</td></tr>
</table>

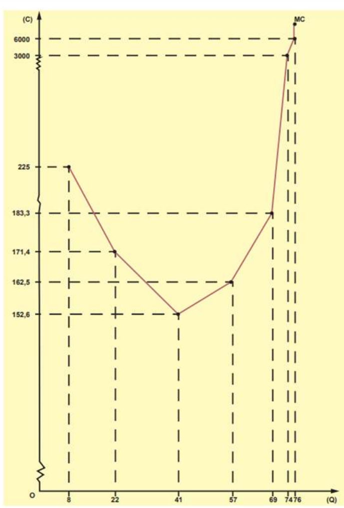
<table>
<tr>
<td>Γενικά η ελαστικότητα ζήτησης συμβολίζεται με E_D και ορίζεται ως
$$E_D = \frac{\frac{\Delta Q}{Q_1} \cdot 100}{\frac{\Delta P}{P_1} \cdot 100} \quad ή \quad E_D = \frac{\frac{\Delta Q}{Q_1}}{\frac{\Delta P}{P_1}} \quad ή \quad E_D = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P_1}{Q_1}$$</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Μαθηματικό</td>
<td>Θεωρητικό Πλαίσιο– Η Ζήτηση των Αγαθών – Ελαστικότητα Ζήτησης</td>
<td>Μαθηματικός τύπος</td>
<td>$2^{ο}$</td>
<td>40</td>
</tr>
<tr>
<td>Πίνακας 2.5.
<table><tr><th></th><th>Τιμή (Ευρώ)</th><th>Ζητούμενη ποσότητα (κιλά)</th></tr><tr><td>Α</td><td>20</td><td>40</td></tr><tr><td>Β</td><td>16</td><td>60</td></tr><tr><td>Γ</td><td>12</td><td>90</td></tr><tr><td>Δ</td><td>8</td><td>120</td></tr><tr><td>Ε</td><td>4</td><td>150</td></tr></table></td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Μαθηματικό</td>
<td>Παράδειγμα – Η ζήτηση των αγαθών – Ελαστικότητα Ζήτησης</td>
<td>Πίνακας</td>
<td>$2^{Ο}$</td>
<td>41</td>
</tr>
<tr>
<td>

Διάγραμμα 2.11. Ελαστικότητα τόξου</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Μαθηματικό</td>
<td>Παράδειγμα – Η Ζήτηση των Αγαθών – Ελαστικότητα σημείου και Ελαστικότητα τόξου</td>
<td>Γραφική Παράσταση</td>
<td>$2^{ο}$</td>
<td>41</td>
</tr>
<tr>
<td>Αν στον τύπο της ελαστικότητας αντικαταστήσουμε το λόγο P/Q με το λόγο P_M/Q_M, θα έχουμε:
$$E_{AB} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{\frac{P_A + P_B}{2}}{\frac{Q_A + Q_B}{2}} \quad ή \quad E_{AB} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P_A + P_B}{Q_A + Q_B}$$
Αυτός είναι ο τύπος της ελαστικότητας της ζήτησης τόξου ή τοξοειδούς ελαστικότητας.</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Μαθηματικό</td>
<td>Θεωρητικό Πλαίσιο– Η Ζήτηση των Αγαθών – Ελαστικότητα σημείου και Ελαστικότητα τόξου</td>
<td>Μαθηματικός Τύπος</td>
<td>$2^{ο}$</td>
<td>42</td>
</tr>
<tr>
<td>Πίνακας 2.6.
<table><tr><th></th><th>Τιμή</th><th>Ζητούμενη ποσότητα</th><th>Συνολική Δαπάνη</th><th>Ελαστικότητα</th><th>Ζήτηση</th></tr><tr><td>Α</td><td>12</td><td>20</td><td>240</td><td>-6</td><td>ελαστική</td></tr><tr><td>Β</td><td>10</td><td>40</td><td>400</td><td>-3,75</td><td>ελαστική</td></tr><tr><td>Γ</td><td>8</td><td>70</td><td>560</td><td>-1,71</td><td>ελαστική</td></tr><tr><td>Δ</td><td>6</td><td>100</td><td>600</td><td>-0,9</td><td>ανελαστική</td></tr><tr><td>Ε</td><td>4</td><td>130</td><td>520</td><td>-0,3</td><td>ανελαστική</td></tr><tr><td>Ζ</td><td>2</td><td>150</td><td>300</td><td></td><td></td></tr></table></td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Μαθηματικό</td>
<td>Παράδειγμα – Η ζήτηση των αγαθών – Ελαστικότητα Ζήτησης</td>
<td>Πίνακας</td>
<td>$2^{ο}$</td>
<td>46</td>
</tr>
<tr>
<td>Η ελαστικότητα της ζήτησης ως προς το εισόδημα εκφράζει την αντίδραση των καταναλωτών στη ζητούμενη ποσότητα ενός αγαθού που οφείλεται στις μεταβολές του εισοδήματός τους, όταν η τιμή και οι άλλοι προσδιοριστικοί παράγοντες της ζήτησης παραμένουν σταθεροί. Η εισοδηματική ελαστικότητα υπολογίζεται με το λόγο της ποσοστιαίας μεταβολής της ζητούμενης ποσότητας προς την ποσοστιαία μεταβολή του εισοδήματος. Αν παραστήσουμε με Υ το εισόδημα και E_Y την εισοδηματική ελαστικότητα, τότε:</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Οικονομικό</td>
<td>Θεωρητικό Πλαίσιο– Η Ζήτηση των Αγαθών – Ελαστικότητα ζήτησης ως προς το εισόδημα</td>
<td>Λεκτικό</td>
<td>$2^{ο}$</td>
<td>47</td>
</tr>
<tr>
<td>$$E_Y = \frac{\frac{\Delta Q}{Q_1} \cdot 100}{\frac{\Delta Y}{Y_1} \cdot 100} \quad ή \quad E_Y = \frac{\Delta Q}{\Delta Y} \cdot \frac{Y_1}{Q_1}$$</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Μαθηματικό</td>
<td>Θεωρητικό Πλαίσιο– Η Ζήτηση των Αγαθών – Ελαστικότητα ζήτησης ως προς το εισόδημα</td>
<td>Μαθηματικός Τύπος</td>
<td>$2^{ο}$</td>
<td>47</td>
</tr>
<tr>
<td>Πίνακας 2.7.
<table><tr><th></th><th>Ζητούμενη ποσότητα Q</th><th>Τιμή Μονάδος P</th><th>Εισόδημα Καταναλωτών Y</th></tr><tr><td>Α</td><td>10</td><td>150</td><td>50.000</td></tr><tr><td>Β</td><td>12</td><td>150</td><td>55.000</td></tr><tr><td>Γ</td><td>15</td><td>150</td><td>60.000</td></tr><tr><td>Δ</td><td>18</td><td>150</td><td>72.000</td></tr><tr><td>Ε</td><td>22,5</td><td>150</td><td>96.000</td></tr></table></td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Μαθηματικό</td>
<td>Παράδειγμα – Η ζήτηση των αγαθών – Ελαστικότητα Ζήτησης ως προς το εισόδημα</td>
<td>Πίνακας</td>
<td>$2^{ο}$</td>
<td>47</td>
</tr>
<tr>
<td>6. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, όταν:
Η ελαστικότητα ζήτησης από το Α στο Β είναι -0,4 και από το Γ στο Β είναι -0,5.
<table><tr><th></th><th>P Τιμή</th><th>Q_D Ζητούμενη Ποσότητα</th></tr><tr><td>Α</td><td>50</td><td>150</td></tr><tr><td>Β</td><td>60</td><td></td></tr><tr><td>Γ</td><td></td><td>100</td></tr></table></td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Μαθηματικό</td>
<td>Ασκήσεις – Η Ζήτηση των αγαθών.</td>
<td>Πίνακας</td>
<td>$2^{ο}$</td>
<td>50</td>
</tr>
<tr>
<td>7. Η ζήτηση ενός αγαθού δίνεται από τη συνάρτηση $Q_D = 300 - 2P$. Να βρεθεί η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή, όταν η τιμή του αγαθού αυξάνεται από 50 ευρώ σε 60 ευρώ.</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Οικονομικό</td>
<td>Ασκήσεις – Η Ζήτηση των αγαθών.</td>
<td>Λεκτικό</td>
<td>$2^{ο}$</td>
<td>50</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>8. Με τα δεδομένα του πίνακα να βρεθούν οι ελαστικότητες ζήτησης ως προς το εισόδημα και οι ελαστικότητες ζήτησης ως προς την τιμή. Πόσες καμπύλες ζήτησης μπορούν να γίνουν με τα δεδομένα του πίνακα;
<table>
<tr><th></th><th>P
Τιμή</th><th>Q
Ζητούμενη Ποσότητα</th><th>Y
Εισόδημα</th></tr>
<tr><td>Α</td><td>100</td><td>50</td><td>200.000</td></tr>
<tr><td>Β</td><td>100</td><td>120</td><td>250.000</td></tr>
<tr><td>Γ</td><td>80</td><td>200</td><td>300.000</td></tr>
<tr><td>Δ</td><td>150</td><td>30</td><td>200.000</td></tr>
<tr><td>Ε</td><td>150</td><td>80</td><td>250.000</td></tr>
</table>
</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό</td><td>Ασκήσεις – Η Ζήτηση των αγαθών.</td><td>Πίνακας</td><td>2ο</td><td>50</td>
</tr>
<tr>
<td>9. Η αρχικά ζητούμενη ποσότητα είναι 400 κιλά. Αν αυξηθεί το εισόδημα 15% (εισοδηματική ελαστικότητα 0,8) και μετά αυξηθεί η τιμή 10% (ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή -0,5), ποια είναι η τελικά ζητούμενη ποσότητα;</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Οικονομικό</td><td>Ασκήσεις – Η Ζήτηση των αγαθών.</td><td>Λεκτικό</td><td>2ο</td><td>50</td>
</tr>
<tr>
<td>Οριακό προϊόν (Marginal Product, MP) ενός συντελεστή είναι η μεταβολή που επέρχεται στο συνολικό προϊόν, όταν μεταβάλλεται ο μεταβλητός συντελεστής κατά μία μονάδα. Υπολογίζεται ως εξής:
$$\text{Οριακό Προϊόν} = \frac{\text{Μεταβολή συνολικού προϊόντος}}{\text{Μεταβολή στην ποσότητα του μεταβλητού συντελεστή (εργάτες)}} \quad ή$$</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Οικονομικό</td><td>Θεωρητικό πλαίσιο – Παραγωγή της επιχείρησης – Οριακό προϊόν</td><td>Λεκτικό</td><td>3ο</td><td>56</td>
</tr>
<tr>
<td>$$MP = \frac{\Delta Q}{\Delta L},$$</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό</td><td>Θεωρητικό πλαίσιο – Παραγωγή της επιχείρησης – Οριακό προϊόν</td><td>Μαθηματικός Τύπος</td><td>3ο</td><td>56</td>
</tr>
<tr>
<td>Το οριακό προϊόν μετρά το ρυθμό μεταβολής του συνολικού προϊόντος, εξαιτίας της προσθήκης κάθε φορά στην παραγωγή του τελευταίου εργάτη. Πρέπει να σημειωθεί ότι το οριακό προϊόν της εργασίας δεν είναι το προϊόν που παράγει κάθε φορά ο συγκεκριμένος επιπλέον εργάτης, αλλά η μεταβολή που επέρχεται στις συνθήκες παραγωγής και, συνεπώς, στο συνολικό προϊόν, εξαιτίας της παρουσίας του επιπλέον εργάτη.</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Οικονομικό</td><td>Θεωρητικό πλαίσιο – Παραγωγή της επιχείρησης – Οριακό προϊόν</td><td>Λεκτικό</td><td>3ο</td><td>56</td>
</tr>
<tr>
<td>Πίνακας 3.2. Μέσο και Οριακό Προϊόν
<table>
<tr><th>Αριθμός εργατών (L)</th><th>Συνολικό προϊόν (TP ή Q)</th><th>Μέσο προϊόν AP=Q/L</th><th>Οριακό προϊόν MP=ΔQ/ΔL</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>10</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>20</td><td>6.7</td><td>10</td></tr>
<tr><td>4</td><td>33</td><td>8.2</td><td>13</td></tr>
<tr><td>5</td><td>50</td><td>10</td><td>17</td></tr>
<tr><td>6</td><td>60</td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td>7</td><td>65</td><td>9.3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>8</td><td>65</td><td>8.1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>9</td><td>55</td><td>6.1</td><td>-10</td></tr>
</table>
</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό</td><td>Παράδειγμα – Η παραγωγή της επιχείρησης – Οριακό Προϊόν</td><td>Πίνακας</td><td>3ο</td><td>56</td>
</tr>
<tr>
<td>

Διάγραμμα 3.2. Καμπύλες μέσου και οριακού προϊόντος</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό</td><td>Παράδειγμα – Η Παραγωγή της επιχείρησης – Οριακό Προϊόν</td><td>Γραφική Παράσταση</td><td>3ο</td><td>57</td>
</tr>
<tr>
<td><table>
<tr><th>Ποσότητα Εδάφους</th><th>Αριθμός Εργατών (L)</th><th>Συνολικό Προϊόν (TP ή Q)</th><th>Μέσο Προϊόν (AP)</th><th>Οριακό Προϊόν (MP)</th></tr>
<tr><td>10</td><td>0</td><td>0</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>10</td><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>10</td><td>2</td><td>10</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>10</td><td>3</td><td>20</td><td>6.7</td><td>10</td></tr>
<tr><td>10</td><td>4</td><td>33</td><td>8.2</td><td>13</td></tr>
<tr><td>10</td><td>5</td><td>50</td><td>10</td><td>17</td></tr>
<tr><td>10</td><td>6</td><td>60</td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td>10</td><td>7</td><td>65</td><td>9.3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>10</td><td>8</td><td>65</td><td>8.1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>10</td><td>9</td><td>55</td><td>6.1</td><td>-10</td></tr>
</table>
Πίνακας 3.3. Συνολικό, Μέσο και Οριακό Προϊόν</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό</td><td>Παράδειγμα – Η παραγωγή της επιχείρησης – Οριακό Προϊόν</td><td>Πίνακας</td><td>3ο</td><td>58</td>
</tr>
<tr>
<td>

Διάγραμμα 3.3. Καμπύλες Συνολικού, Μέσου και Οριακού προϊόντος</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό</td><td>Παράδειγμα – Η Παραγωγή της επιχείρησης – Οριακό Προϊόν</td><td>Γραφική Παράσταση</td><td>3ο</td><td>58</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>Το οριακό κόστος δείχνει το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το συνολικό κόστος, όταν μεταβάλλεται η παραγωγή κατά μια μονάδα. Το οριακό κόστος (Marginal Cost, MC) είναι ο λόγος της μεταβολής του συνολικού κόστους προς τη μεταβολή του προϊόντος.</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Οικονομικό</td><td>Θεωρητικό πλαίσιο – Το κόστος παραγωγής – Οριακό κόστος</td><td>Λεκτικό</td><td>$3^{ο}$</td><td>65</td></tr>
<tr><td>$$\text{Οριακό Κόστος} = \frac{\text{Μεταβολή Συνολικού Κόστους}}{\text{Μεταβολή του Προϊόντος}}$$</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Οικονομικό</td><td>Θεωρητικό πλαίσιο – Το κόστος παραγωγής – Οριακό κόστος</td><td>Λεκτικό</td><td>$3^{ο}$</td><td>65</td></tr>
<tr><td>$$MC = \frac{\Delta(TC)}{\Delta Q}.$$</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό</td><td>Θεωρητικό πλαίσιο – Το κόστος παραγωγής – Οριακό κόστος</td><td>Μαθηματικός Τύπος</td><td>$3^{ο}$</td><td>65</td></tr>
<tr><td>$$\text{Οριακό Κόστος} = \frac{\text{Μεταβολή Μεταβλητού Κόστους}}{\text{Μεταβολή του Προϊόντος}}$$</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Οικονομικό</td><td>Θεωρητικό πλαίσιο – Το κόστος παραγωγής – Οριακό κόστος</td><td>Λεκτικό</td><td>$3^{ο}$</td><td>65</td></tr>
<tr><td>$$MC = \frac{\Delta(VC)}{\Delta Q}.$$</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό</td><td>Θεωρητικό πλαίσιο – Το κόστος παραγωγής – Οριακό κόστος</td><td>Μαθηματικός Τύπος</td><td>$3^{ο}$</td><td>65</td></tr>
<tr><td>Πίνακας 3.6. Οριακό Κόστος
<table>
<tr><th>Προϊόν (Q) (1)</th><th>Μεταβολή Προϊόντος (ΔQ) (2)</th><th>Συνολικό Κόστος (TC) (3)</th><th>Μεταβολή Συνολικού Κόστους Δ(TC) (4)</th><th>Οριακό Κόστος (MC) (5)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>4000</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>8</td><td>8</td><td>5800</td><td>1800</td><td>225</td></tr>
<tr><td>22</td><td>14</td><td>8200</td><td>2400</td><td>171,4</td></tr>
<tr><td>41</td><td>19</td><td>11100</td><td>2900</td><td>152,6</td></tr>
<tr><td>57</td><td>16</td><td>13700</td><td>2600</td><td>162,5</td></tr>
<tr><td>69</td><td>12</td><td>15900</td><td>2200</td><td>183,3</td></tr>
<tr><td>74</td><td>5</td><td>17400</td><td>1500</td><td>300</td></tr>
<tr><td>76</td><td>2</td><td>18600</td><td>1200</td><td>600</td></tr>
<tr><td>76</td><td>0</td><td>19600</td><td>1000</td><td>∞</td></tr>
</table></td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό</td><td>Παράδειγμα – Το κόστος Παραγωγής – Οριακό Κόστος</td><td>Πίνακας</td><td>$3^{ο}$</td><td>66</td></tr>
<tr><td>

Διάγραμμα 3.7. Καμπύλη του Οριακού Κόστους</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό</td><td>Παράδειγμα – Το Κόστος Παραγωγής– Οριακό Κόστος</td><td>Γραφική Παράσταση</td><td>$3^{ο}$</td><td>67</td></tr>
<tr><td>1. Δίνεται ο ακόλουθος πίνακας μιας επιχείρησης που λειτουργεί στη βραχυχρόνια περίοδο (εκτός από την εργασία, οι υπόλοιποι συντελεστές είναι σταθεροί):
<table>
<tr><th>Αριθμός Εργατών</th><th>Συνολικό Προϊόν</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>40</td></tr>
<tr><td>2</td><td>90</td></tr>
<tr><td>3</td><td>180</td></tr>
<tr><td>4</td><td>260</td></tr>
<tr><td>5</td><td>310</td></tr>
<tr><td>6</td><td>310</td></tr>
<tr><td>7</td><td>290</td></tr>
<tr><td>8</td><td>260</td></tr>
</table>
α) Να εξηγήσετε εάν ισχύει ο νόμος της φθίνουσας απόδοσης και σε ποια ποσότητα του μεταβλητού συντελεστή "εργασία" φαίνεται η λειτουργία του και γιατί.
β) Να εξηγήσετε σε ποια επίπεδα απασχόλησης έχουμε τη μεγιστοποίηση του συνολικού προϊόντος και πού αρχίζει η καθοδική πορεία του. Να δείξετε γραφικά τα σημεία.</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό</td><td>Ασκήσεις – Η παραγωγή της επιχείρησης , Το κόστος Παραγωγής</td><td>Πίνακας</td><td>$3^{ο}$</td><td>75</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>2. Να συμπληρώσετε τα κενά του παρακάτω πίνακα:
<table>
<tr><th>Αριθμός Εργατών L</th><th>Συνολικό Προϊόν TP</th><th>Μέσο Προϊόν AP</th><th>Οριακό Προϊόν MP</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td>14</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td>16</td></tr>
<tr><td>3</td><td>54</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td>26</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>24</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>150</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td></td><td>11</td></tr>
<tr><td>8</td><td></td><td></td><td>7</td></tr>
<tr><td>9</td><td>168</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td></td><td>16</td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Μαθηματικό</td>
<td>Ασκήσεις – Η παραγωγή της επιχείρησης , Το κόστος Παραγωγής</td>
<td>Πίνακας</td>
<td>3ο</td>
<td>75</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:
<table>
<tr><th>Προϊόν Q</th><th>Σταθερό Κόστος</th><th>Μεταβλητό Κόστος</th><th>Συνολικό Κόστος</th><th>Μέσο Σταθερό Κόστος</th><th>Μέσο Μεταβλητό Κόστος</th><th>Μέσο Συνολικό Κόστος</th><th>Οριακό Κόστος</th></tr>
<tr><td>0</td><td>500</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td></td><td>2.500</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>20</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>230</td></tr>
<tr><td>30</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>240</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>9.360</td><td></td><td></td><td>260</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>280</td><td></td><td>460</td></tr>
</table>
</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Μαθηματικό</td>
<td>Ασκήσεις – Η παραγωγή της επιχείρησης , Το κόστος Παραγωγής</td>
<td>Πίνακας</td>
<td>3ο</td>
<td>76</td>
</tr>
<tr>
<td>4. Μια επιχείρηση λειτουργεί στη βραχυχρόνια περίοδο και παρουσιάζει τα στοιχεία παραγωγής, όπως φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.
<table>
<tr><th>Ποσότητα Εργασίας</th><th>Συνολικό Προϊόν</th><th>Οριακό Προϊόν</th><th>Οριακό Κόστος</th></tr>
<tr><td>0</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-</td><td>-</td><td>60</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-</td><td>-</td><td>40</td></tr>
<tr><td>3</td><td>-</td><td>-</td><td>30</td></tr>
<tr><td>4</td><td>-</td><td>-</td><td>24</td></tr>
<tr><td>5</td><td>-</td><td>-</td><td>24</td></tr>
<tr><td>6</td><td>-</td><td>-</td><td>30</td></tr>
<tr><td>7</td><td>-</td><td>-</td><td>40</td></tr>
<tr><td>8</td><td>-</td><td>-</td><td>60</td></tr>
</table>
Η αμοιβή της εργασίας που είναι ο μοναδικός μεταβλητός συντελεστής, είναι ίση και σταθερή με 6.000 χρηματικές μονάδες ανά εργάτη.
α) Να συμπληρωθούν τα κενά του πίνακα.
β) Να εξηγήσετε πότε αρχίζει να εμφανίζεται ο νόμος της φθίνουσας απόδοσης.
</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Μαθηματικό</td>
<td>Ασκήσεις – Η παραγωγή της επιχείρησης , Το κόστος Παραγωγής</td>
<td>Πίνακας</td>
<td>3ο</td>
<td>76</td>
</tr>
<tr>
<td>5. Μια επιχείρηση που λειτουργεί στη βραχυχρόνια περίοδο παραγωγής σε επίπεδο παραγωγής 8 μονάδων παρουσιάζει μέσο μεταβλητό κόστος ίσο με 5 ευρώ. Η αύξηση της παραγωγής στη συνέχεια της παραγωγικής διαδικασίας δείχνει ότι η τιμή του οριακού κόστους είναι 12 ευρώ και του μέσου μεταβλητού 8,5 ευρώ. Μια νέα αύξηση της παραγωγής κατά 4 μονάδες διαμορφώνει το μέσο συνολικό κόστος στα 18 ευρώ. Το μέσο σταθερό κόστος στο επίπεδο παραγωγής των 8 μονάδων είναι 20 ευρώ.
α) Να βρεθεί το μέσο συνολικό κόστος της 12ης μονάδας παραγωγής.
β) Πόσο μεταβάλλεται το μεταβλητό κόστος της επιχείρησης, όταν η παραγωγή αυξάνεται από 15 σε 18 μονάδες παραγωγής;
</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Οικονομικό</td>
<td>Ασκήσεις – Η παραγωγή της επιχείρησης , Το κόστος Παραγωγής</td>
<td>Λεκτικό</td>
<td>3ο</td>
<td>76</td>
</tr>
<tr>
<td>6. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται ο αριθμός εργατών και το συνολικό προϊόν. Μόνος μεταβλητός συντελεστής είναι η εργασία. Ο εργατικός μισθός είναι W= 4.620
<table>
<tr><td>L</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>Q</td><td>0</td><td>5</td><td>12</td><td>21</td><td>32</td><td>40</td><td>42</td><td>42</td></tr>
</table>
α) Να βρεθούν το μέσο και το οριακό προϊόν και να παρασταθούν γραφικά στο ίδιο διάγραμμα. β) Να βρεθούν το μέσο μεταβλητό και το οριακό κόστος και να παρασταθούν γραφικά στο ίδιο διάγραμμα. γ) Να βρεθούν οι αντιστοιχίες στα δύο διαγράμματα.
</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Μαθηματικό</td>
<td>Ασκήσεις – Η παραγωγή της επιχείρησης , Το κόστος Παραγωγής</td>
<td>Πίνακας</td>
<td>3ο</td>
<td>77</td>
</tr>
<tr>
<td>7. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, όταν το μέσο προϊόν στον πέμπτο εργάτη είναι μέγιστο.
<table>
<tr><th>Αριθμός Εργατών</th><th>Συνολικό Προϊόν</th><th>Μέσο Προϊόν</th><th>Οριακό Προϊόν</th><th>Μέσο Μεταβλητό Κόστος</th><th>Μεταβλητό Κόστος</th><th>Οριακό Κόστος</th></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>8</td><td></td><td></td><td>11.424</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>357</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td>402</td><td></td><td>1302</td></tr>
</table>
</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Μαθηματικό</td>
<td>Ασκήσεις – Η παραγωγή της επιχείρησης , Το κόστος Παραγωγής</td>
<td>Πίνακας</td>
<td>3ο</td>
<td>77</td>
</tr>
<tr>
<td>8. Επιχείρηση που απασχολεί 5 εργάτες παράγει συνολικά 250 μονάδες προϊόντος. Αν απασχολήσει 6 εργάτες, η συνολική παραγωγή αυξάνει κατά 20 μονάδες και το μεταβλητό κόστος ανά προϊόν γίνεται 280 ευρώ, ενώ, αν απασχολήσει 7 εργάτες, το μεταβλητό κόστος ανά προϊόν γίνεται 315 ευρώ. Μοναδικός μεταβλητός συντελεστής είναι η εργασία. Αν η επιχείρηση αυξήσει την παραγωγή της από 264 σε 275 μονάδες, με τι κόστος θα επιβαρυνθεί;</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Οικονομικό</td>
<td>Ασκήσεις – Η παραγωγή της επιχείρησης , Το κόστος Παραγωγής</td>
<td>Λεκτικό</td>
<td>3ο</td>
<td>77</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>9. Ο πίνακας παραγωγής μιας επιχείρησης είναι ο ακόλουθος:
<table><tr><td>L</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>Q</td><td>0</td><td>8</td><td>20</td><td>36</td><td>56</td><td>80</td><td>96</td><td>105</td><td>112</td></tr></table>
Δίνονται: Εργατικός μισθός W=5040 χρηματικές μονάδες, κόστος πρώτων υλών 2520 χρηματικές μονάδες ανά προϊόν και σταθερό κόστος 12600 χρηματικές μονάδες. Να υπολογιστούν: α) Το μεταβλητό και το συνολικό κόστος για κάθε επίπεδο παραγωγής. β) Πόσο θα μειωθεί το κόστος, αν η παραγωγή μειωθεί από 100 μονάδες σε 85 μονάδες προϊόντος; γ) Αν παράγει 80 μονάδες και θέλει να μειώσει το κόστος κατά 54.600 χρηματικές μονάδες, πόσες μονάδες πρέπει να ελαττωθεί η παραγωγή;
[ΑΠ: γ) 43.505 χρηματικές μονάδες δ) 20 μονάδες]</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό - Οικονομικό</td><td>Ασκήσεις – Η παραγωγή της επιχείρησης , Το κόστος Παραγωγής</td><td>Πίνακας - Λεκτικό</td><td>3ο</td><td>77</td></tr>
<tr><td>Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης είναι η καμπύλη προσφοράς. Η συνάρτηση προσφοράς μπορεί να έχει διάφορες αλγεβρικές μορφές. Εμείς, για ευκολία, θα θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση προσφοράς είναι γραμμική. Η μορφή της είναι $\mathbf{Q_s = \gamma + \delta P}$. Η σταθερά **γ** στη συνάρτηση προσφοράς μπορεί να είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός, αλλά ο συντελεστής **δ** είναι πάντα θετικός αριθμός και εκφράζει τη θετική κλίση της καμπύλης προσφοράς, που πηγάζει από το νόμο της προσφοράς. Η ποσότητα και η τιμή δεν μπορεί να έχουν αρνητικές τιμές και ισχύει $\mathbf{Q_s \geq 0, P \geq 0}$.</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό</td><td>Θεωρητικό Πλαίσιο – Η Προσφορά των αγαθών – Συνάρτηση Προσφοράς.</td><td>Λεκτικό</td><td>4ο</td><td>82</td></tr>
<tr><td>**7. Η ελαστικότητα της προσφοράς**
Η σχέση ανάμεσα στην τιμή και στην προσφερόμενη ποσότητα ενός αγαθού εκφράζεται από το νόμο της προσφοράς, γραφική παράσταση του οποίου είναι η καμπύλη προσφοράς. Όμως οι καμπύλες προσφοράς διαφέρουν μεταξύ τους, ανάλογα με την ευαισθησία της επιχείρησης στις μεταβολές της τιμής. **Η ελαστικότητα της προσφοράς μετρά αυτήν την αντίδραση της προσφοράς στις μεταβολές της τιμής και ορίζεται ως ο λόγος της ποσοστιαίας μεταβολής της προσφερόμενης ποσότητας προς την ποσοστιαία μεταβολή της τιμής.** Αν παραστήσουμε με E_s την ελαστικότητα της προσφοράς, τότε</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Οικονομικό</td><td>Θεωρητικό Πλαίσιο – Η Προσφορά των αγαθών – Η Ελαστικότητα της Προσφοράς.</td><td>Λεκτικό</td><td>4ο</td><td>86</td></tr>
<tr><td>$$E_s = \frac{\Delta Q}{Q_1} : \frac{\Delta P}{P_1} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P_1}{Q_1},$$</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό</td><td>Θεωρητικό Πλαίσιο – Η Προσφορά των αγαθών – Η Ελαστικότητα της Προσφοράς.</td><td>Μαθηματικός Τύπος</td><td>4ο</td><td>86</td></tr>
<tr><td>1. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας που αφορά μια επιχείρηση η οποία λειτουργεί σε βραχυχρόνια περίοδο:
<table><tr><th>Συνολικό Προϊόν</th><th>Συνολικό Κόστος</th></tr><tr><td>0</td><td>60</td></tr><tr><td>1</td><td>100</td></tr><tr><td>2</td><td>126</td></tr><tr><td>3</td><td>159</td></tr><tr><td>4</td><td>212</td></tr><tr><td>5</td><td>285</td></tr><tr><td>6</td><td>390</td></tr><tr><td>7</td><td>510</td></tr></table>
α. Να παρασταθεί γραφικά η καμπύλη προσφοράς της επιχείρησης.
β. Να βρεθεί η ελαστικότητα της προσφοράς, όταν η τιμή μειώνεται από 73 ευρώ σε 53 ευρώ.</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό</td><td>Ασκήσεις – Η Προσφορά των Αγαθών.</td><td>Πίνακας</td><td>4ο</td><td>90</td></tr>
<tr><td>2. Μια επιχείρηση που λειτουργεί στη βραχυχρόνια περίοδο παρουσιάζει τα ακόλουθα δεδομένα:
<table><tr><th>Αριθμός Εργατών</th><th>Συνολικό Προϊόν</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>7</td></tr><tr><td>2</td><td>25</td></tr><tr><td>3</td><td>45</td></tr><tr><td>4</td><td>60</td></tr><tr><td>5</td><td>66</td></tr><tr><td>6</td><td>70</td></tr><tr><td>7</td><td>72</td></tr></table>
Αν η αμοιβή της εργασίας, που είναι ο μοναδικός μεταβλητός συντελεστής, είναι 7500 χρ. μον.:
α) Να παρασταθεί γραφικά η καμπύλη προσφοράς της επιχείρησης.
β) Να υπολογιστεί η ελαστικότητα της προσφοράς, όταν η τιμή πώλησης αυξάνεται από 1875 χρ. μον. σε 3750 χρ. μον.</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό</td><td>Ασκήσεις – Η Προσφορά των Αγαθών.</td><td>Πίνακας</td><td>4ο</td><td>90 - 91</td></tr>
<tr><td>3. Τα πιο κάτω δεδομένα αφορούν μια επιχείρηση η οποία λειτουργεί σε βραχυχρόνια περίοδο:
<table><tr><th>Αριθμός Εργατών</th><th>Συνολικό Προϊόν</th><th>Μέσο Προϊόν</th><th>Οριακό Προϊόν</th></tr><tr><td>1</td><td>10</td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><td>2</td><td>-</td><td>-</td><td>15</td></tr><tr><td>3</td><td>45</td><td>15</td><td>-</td></tr><tr><td>4</td><td>60</td><td>-</td><td>15</td></tr><tr><td>5</td><td>-</td><td>14</td><td>-</td></tr><tr><td>6</td><td>75</td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>
Ζητείται:
α. Να συμπληρωθούν τα κενά του πίνακα.
β. Εάν οι πρώτες ύλες που απαιτούνται για κάθε μονάδα παραγωγής είναι 10 χρ. μον. και η αμοιβή κάθε εργάτη είναι 5000 χρ. μον., να κατασκευαστεί ο πίνακας προσφοράς της επιχείρησης.</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td><td>Μαθηματικό</td><td>Ασκήσεις – Η Προσφορά των Αγαθών.</td><td>Πίνακας</td><td>4ο</td><td>91</td></tr>
</table>

Το επιπλέον έσοδο από την πώληση μιας επιπλέον μονάδας προϊόντος ονομάζεται **οριακό έσοδο** (marginal revenue ή MR) και υπολογίζεται από το λόγο της μεταβολής του συνολικού εσόδου προς τη μεταβολή της πωλούμενης ποσότητας:

Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)	Οικονομικό	Θεωρητικό Πλαίσιο – Μορφές Αγοράς – Έσοδα Κόστος και Ισορροπία της Επιχείρησης στον πλήρη ανταγωνισμό	Λεκτικό	6ο	111

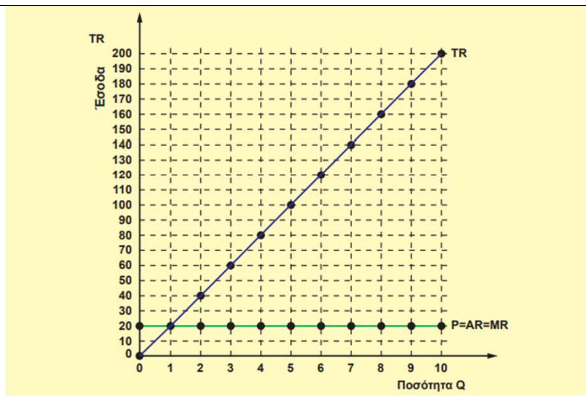
$$MR = \frac{\Delta(P \cdot Q)}{\Delta Q} \quad (3)$$

Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)	Μαθηματικό	Θεωρητικό Πλαίσιο – Μορφές Αγοράς – Έσοδα Κόστος και Ισορροπία της Επιχείρησης στον πλήρη ανταγωνισμό	Μαθηματικός Τύπος	6ο	111

Πίνακας 6.1. Παράδειγμα υπολογισμού συνολικού μέσου και οριακού εσόδου

Μονάδες Προϊόντος Q	Τιμή Μονάδας P	Συνολικό Έσοδο TR = P · Q	Μέσο Έσοδο AR	Οριακό Έσοδο MR
0	20	0	20	20
1	20	20	20	20
2	20	40	20	20
3	20	60	20	20
4	20	80	20	20
5	20	100	20	20
6	20	120	20	20
7	20	140	20	20
8	20	160	20	20
9	20	180	20	20
10	20	200	20	20

Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)	Μαθηματικό	Παράδειγμα – Μορφές Αγοράς - Έσοδα, Κόστος και Ισορροπία της Επιχείρησης στον πλήρη ανταγωνισμό	Πίνακας	6ο	112



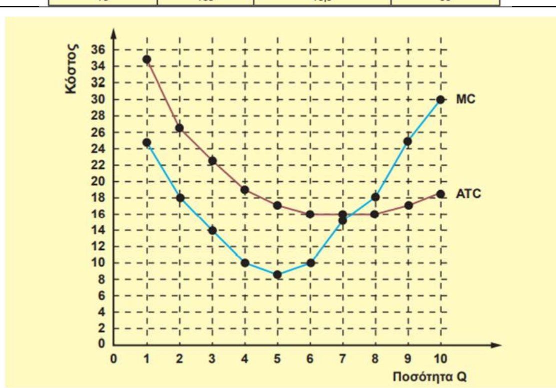
Διάγραμμα 6.1. Οι καμπύλες συνολικού, μέσου και οριακού εσόδου

Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)	Μαθηματικό	Παράδειγμα – Μορφές Αγοράς - Έσοδα, Κόστος και Ισορροπία της Επιχείρησης στον πλήρη ανταγωνισμό	Γραφική Παράσταση	6ο	112

Πίνακας 6.2. Το κόστος της επιχείρησης

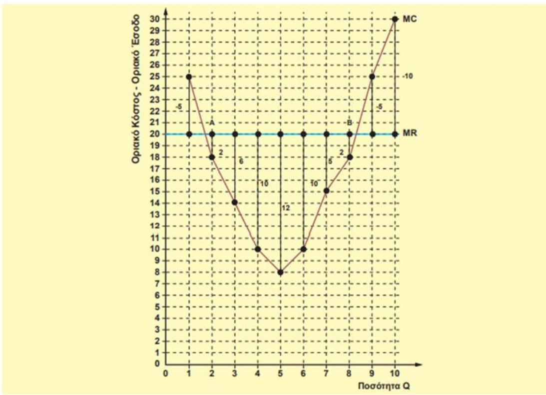
Ποσότητα Προϊόντος	Συνολικό Κόστος TC	Μέσο (συνολικό) κόστος $ATC = \frac{TC}{Q}$	Οριακό κόστος $MC = \frac{\Delta(TC)}{\Delta Q}$
0	10	-	-
1	35	35	25
2	53	26,5	18
3	67	22,3	14
4	77	19,25	10
5	85	17	8
6	95	15,8	10
7	110	15,7	15
8	128	16	18
9	153	17	25
10	183	18,3	30

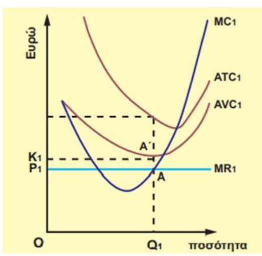
Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)	Μαθηματικό	Παράδειγμα – Μορφές Αγοράς - Έσοδα, Κόστος και Ισορροπία της Επιχείρησης στον πλήρη ανταγωνισμό	Πίνακας	6ο	113

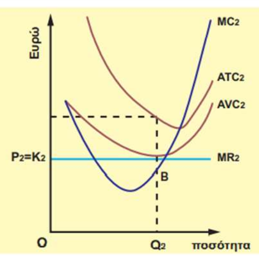


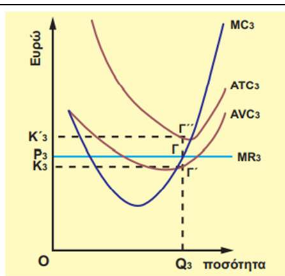
Διάγραμμα 6.2.β. Οι καμπύλες οριακού και μέσου (συνολικού) κόστους

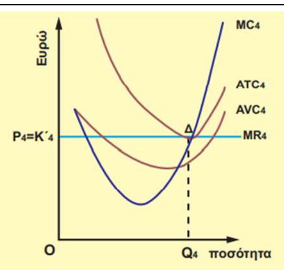
Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)	Μαθηματικό	Παράδειγμα – Μορφές Αγοράς - Έσοδα, Κόστος και Ισορροπία της Επιχείρησης στον πλήρη ανταγωνισμό	Γραφική Παράσταση	6ο	114

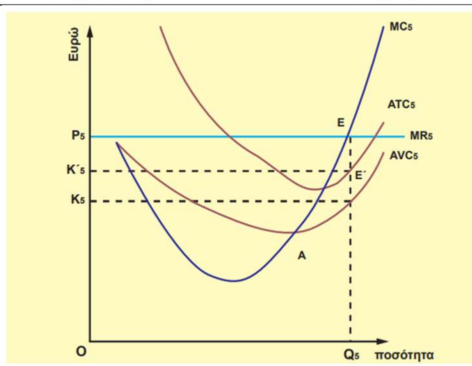
<table>
<tr>
<td>
Πίνακας 6.5.
<table>
<tr><th>Παραγόμενη Ποσότητα</th><th>Οριακό έσοδο</th><th>Οριακό κόστος</th><th>Κέρδος από παραγωγή μιας επιπλέον μονάδας προϊόντος</th><th>Άθροισμα κερδών από συνολική παραγωγή</th><th>Σταθερό κόστος</th><th>Συνολικό κέρδος</th></tr>
<tr><td>1</td><td>20</td><td>25</td><td>-5</td><td>-5</td><td>10</td><td>-15</td></tr>
<tr><td>2</td><td>20</td><td>18</td><td>2</td><td>-3</td><td>10</td><td>-13</td></tr>
<tr><td>3</td><td>20</td><td>14</td><td>6</td><td>3</td><td>10</td><td>-7</td></tr>
<tr><td>4</td><td>20</td><td>10</td><td>10</td><td>13</td><td>10</td><td>3</td></tr>
<tr><td>5</td><td>20</td><td>8</td><td>12</td><td>25</td><td>10</td><td>15</td></tr>
<tr><td>6</td><td>20</td><td>10</td><td>10</td><td>35</td><td>10</td><td>25</td></tr>
<tr><td>7</td><td>20</td><td>15</td><td>5</td><td>40</td><td>10</td><td>30</td></tr>
<tr><td>8</td><td>20</td><td>18</td><td>2</td><td>42</td><td>10</td><td>32</td></tr>
<tr><td>9</td><td>20</td><td>25</td><td>-5</td><td>37</td><td>10</td><td>27</td></tr>
<tr><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>-10</td><td>27</td><td>10</td><td>17</td></tr>
</table>
</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Μαθηματικό</td>
<td>Παράδειγμα – Μορφές Αγοράς - Έσοδα, Κόστος και Ισορροπία της Επιχείρησης στον πλήρη ανταγωνισμό</td>
<td>Πίνακας</td>
<td>6ο</td>
<td>118</td>
</tr>
<tr>
<td>


Διάγραμμα 6.5. Η θέση ισορροπίας της επιχείρησης, όταν MC=MR
</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Μαθηματικό</td>
<td>Παράδειγμα – Μορφές Αγοράς - Έσοδα, Κόστος και Ισορροπία της Επιχείρησης στον πλήρη ανταγωνισμό</td>
<td>Γραφική Παράσταση</td>
<td>6ο</td>
<td>119</td>
</tr>
<tr>
<td>


Διάγραμμα 6.6.α


Διάγραμμα 6.6.β
</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Μαθηματικό</td>
<td>Παράδειγμα – Μορφές Αγοράς - Η καμπύλη προσφοράς της επιχείρησης στον πλήρη ανταγωνισμό</td>
<td>Γραφική Παράσταση</td>
<td>6ο</td>
<td>120</td>
</tr>
<tr>
<td>


Διάγραμμα 6.6.γ


Διάγραμμα 6.6.δ
</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Μαθηματικό</td>
<td>Παράδειγμα – Μορφές Αγοράς - Η καμπύλη προσφοράς της επιχείρησης στον πλήρη ανταγωνισμό</td>
<td>Γραφική Παράσταση</td>
<td>6ο</td>
<td>121</td>
</tr>
<tr>
<td>


Διάγραμμα 6.6.ε
</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Μαθηματικό</td>
<td>Παράδειγμα – Μορφές Αγοράς - Η καμπύλη προσφοράς της επιχείρησης στον πλήρη ανταγωνισμό</td>
<td>Γραφική Παράσταση</td>
<td>6ο</td>
<td>122</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

1. Για ένα προϊόν σε αγορά πλήρους ανταγωνισμού δίνονται οι αγοραίες συναρτήσεις ζήτησης $Q_D = 180 - 18P$ και προσφοράς $Qs = 4+4P$. Μια επιχείρηση που παράγει το προϊόν αυτό έχει παραγωγή και κόστος, όπως φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Να βρεθεί η θέση ισορροπίας της επιχείρησης και να υπολογιστεί το κέρδος της.

<table>
<tr><td>Προϊόν</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Σταθερό κόστος</td><td>18</td><td>18</td><td>18</td><td>18</td><td>18</td><td>18</td><td>18</td><td>18</td><td>18</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Μεταβλητό κόστος</td><td>0</td><td>6</td><td>10</td><td>12</td><td>16</td><td>22</td><td>30</td><td>40</td><td>52</td><td>66</td></tr>
</table>

</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Μαθηματικό</td>
<td>Ασκήσεις – Μορφές Αγοράς</td>
<td>Πίνακας</td>
<td>6ο</td>
<td>130</td>
</tr>
<tr>
<td>

3. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται τα στοιχεία κόστους και παραγωγής για μια επιχείρηση που λειτουργεί σε πλήρως ανταγωνιστική αγορά.

(α) Να παρασταθεί γραφικά η θέση ισορροπίας της επιχείρησης, αν η τιμή του προϊόντος είναι i) 1000 ii) 3200 iii) 7000.

(β) Να βρεθούν το κέρδος ή η ζημιά για κάθε μια από τις παραπάνω τιμές:

i) Υπολογιστικά.

ii) Γραφικά από το διάγραμμα με το οριακό, μέσο μεταβλητό, μέσο συνολικό κόστος.

iii) Γραφικά από το διάγραμμα συνολικού εσόδου και συνολικού κόστους.

<table>
<tr><td>Προϊόν</td><td>Σταθερό Κόστος</td><td>Μεταβλητό Κόστος</td></tr>
<tr><td>0</td><td>10.000</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>10.000</td><td>3.000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>10.000</td><td>5.000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>10.000</td><td>6.000</td></tr>
<tr><td>4</td><td>10.000</td><td>6.800</td></tr>
<tr><td>5</td><td>10.000</td><td>7.800</td></tr>
<tr><td>6</td><td>10.000</td><td>11.000</td></tr>
<tr><td>7</td><td>10.000</td><td>18.000</td></tr>
<tr><td>8</td><td>10.000</td><td>26.000</td></tr>
<tr><td>9</td><td>10.000</td><td>35.000</td></tr>
<tr><td>10</td><td>10.000</td><td>45.000</td></tr>
</table>

</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Μαθηματικό Οικονομικό</td>
<td>Ασκήσεις – Μορφές Αγοράς</td>
<td>Πίνακας - Λεκτικό</td>
<td>6ο</td>
<td>130 - 131</td>
</tr>
<tr>
<td>

4. Μια επιχείρηση σε αγορά τέλειου ανταγωνισμού, παράγει όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακας. Ο εργατικός μισθός είναι 1000 ευρώ και το κόστος της πρώτης ύλης είναι 100 ευρώ για κάθε προϊόν. Σταθερό κόστος 2000 ευρώ. Η αγοραία συνάρτηση ζήτησης είναι $Q_D = 52.500 - 250P$ και η αγοραία συνάρτηση προσφοράς είναι $Qs = 100\ P$

(α) Να βρεθεί η θέση ισορροπίας της επιχείρησης και να αιτιολογηθεί αν η επιχείρηση πρέπει να παράγει.

(β) Αν η αγοραία συνάρτηση ζήτησης γίνει $Q'_D = 30.000 - 50\ P$, να βρεθεί η νέα θέση ισορροπίας και να υπολογισθούν τα κέρδη της επιχείρησης.

(γ) Πόσο θα αυξηθεί το κόστος της επιχείρησης αν αυξήσει την παραγωγή της από 90 σε 105 μονάδες προϊόντος;

<table>
<tr><td>L</td><td>Q</td></tr>
<tr><td>4</td><td>80</td></tr>
<tr><td>5</td><td>100</td></tr>
<tr><td>6</td><td>110</td></tr>
</table>

</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ)</td>
<td>Μαθηματικό Οικονομικό</td>
<td>Ασκήσεις – Μορφές Αγοράς</td>
<td>Πίνακας - Λεκτικό</td>
<td>6ο</td>
<td>131</td>
</tr>
<tr>
<td>

Η Κ.Π.Δ. για τα αγαθά Χ, Ψ είναι τεθλασμένη και προς τα δεξιά της άλλης για τους συνδυασμούς Β΄Γ΄Δ΄Ε΄. Η κλίση είναι αρνητική, αλλά διαφέρει μεταξύ των ευθύγραμμων τμημάτων.

Το κόστος ευκαιρίας του Φ σε όρους Χ δίνεται ως εξής:

<table>
<tr><td>Ποσότητα Φ</td><td>από 0-14</td><td>από 14-26</td><td>από 26-37</td><td>από 37-44</td><td>από 44-50</td></tr>
<tr><td>Κόστος</td><td>0,71</td><td>0,83</td><td>0,91</td><td>1,43</td><td>1,67</td></tr>
</table>

</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td>
<td>Μαθηματικό Οικονομικό</td>
<td>Ασκήσεις – Βασικές Οικονομικές έννοιες</td>
<td>Πίνακας - Λεκτικό</td>
<td>1ο</td>
<td>3</td>
</tr>
<tr>
<td>

11. Βρίσκουμε το κόστος ευκαιρίας του αγαθού Χ σε όρους του Ψ:

Από Α σε Β: $KE_X = \frac{\Delta\Psi}{\Delta X} = \frac{200}{100} = 2$

Από Β σε Γ: $KE_X = \frac{\Delta\Psi}{\Delta X} = \frac{150}{50} = 3$

Από Γ σε Δ: $KE_X = \frac{\Delta\Psi}{\Delta X} = \frac{150}{30} = 5$

<table>
<tr><td></td><td>Χ</td><td>Ψ</td></tr>
<tr><td>Α</td><td>0</td><td>500</td></tr>
<tr><td></td><td>$X_3 = 90$</td><td>$\Psi_3 = ;$</td></tr>
<tr><td>Β</td><td>100</td><td>300</td></tr>
<tr><td></td><td>$X_2 = 140$</td><td>$\Psi_2 = ;$</td></tr>
<tr><td>Γ</td><td>150</td><td>150</td></tr>
<tr><td></td><td>$X_1 = 160$</td><td>$\Psi_1 = ;$</td></tr>
<tr><td>Δ</td><td>180</td><td>0</td></tr>
</table>

</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td>
<td>Μαθηματικό Οικονομικό</td>
<td>Ασκήσεις – Βασικές Οικονομικές έννοιες</td>
<td>Πίνακας – Μαθηματικός Τύπος</td>
<td>1ο</td>
<td>4</td>
</tr>
<tr>
<td>

6. Αν Q_1 η ζητούμενη ποσότητα στο Β, τότε

$$-0,4 = \frac{Q_1 - 150}{60-50}\cdot\frac{50}{150} \Rightarrow -0,4 = \frac{Q_1 - 150}{10}\cdot\frac{1}{3} \Rightarrow Q_1 - 150 = -12 \Rightarrow Q_1 = 138.$$

Αν P_1 η τιμή στο Γ, τότε

$$-0,5 = \frac{138-100}{60-P_1}\cdot\frac{P_1}{100} \Rightarrow -0,5 = \frac{38\cdot P_1}{(60-P_1)\cdot 100} \Rightarrow 38\cdot P_1 = -50\,(60-P_1) \Rightarrow$$

</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td>
<td>Μαθηματικό Οικονομικό</td>
<td>Ασκήσεις – Η Ζήτηση των αγαθών.</td>
<td>Μαθηματικός Τύπος</td>
<td>2ο</td>
<td>5</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>

$$E_D = \frac{\frac{\Delta Q}{Q_1}}{\frac{\Delta P}{P_1}} = \frac{\frac{180-200}{200}}{\frac{60-50}{50}} = \frac{\frac{-20}{200}}{\frac{10}{50}} = \frac{-1000}{2000} = -0,5$$

</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td><td>Μαθηματικό Οικονομικό</td><td>Ασκήσεις – Η Ζήτηση των αγαθών.</td><td>Μαθηματικός Τύπος</td><td>2ο</td><td>5</td></tr>
<tr><td>

$$E_D = \frac{30-50}{150-100}\cdot\frac{100}{50} = \frac{-20}{50}\cdot 2 = \frac{-4}{5} = -0,8$$

Από το Β στο Ε είναι:

$$E_D = \frac{80-120}{150-100}\cdot\frac{100}{120} = \frac{-40}{50}\cdot\frac{10}{12} = \frac{-400}{600} = -0,66$$

</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td><td>Μαθηματικό Οικονομικό</td><td>Ασκήσεις – Η Ζήτηση των αγαθών.</td><td>Μαθηματικός Τύπος</td><td>2ο</td><td>6</td></tr>
<tr><td>

$$E_Y = \frac{120-50}{250000-200000}\cdot\frac{200000}{50} = \frac{140}{25} = 5,6$$

$$E_Y = \frac{80-30}{250000-200000}\cdot\frac{200000}{30} = \frac{100}{15} = 6,66$$

</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td><td>Μαθηματικό Οικονομικό</td><td>Ασκήσεις – Η Ζήτηση των αγαθών.</td><td>Μαθηματικός Τύπος</td><td>2ο</td><td>6</td></tr>
<tr><td>

$$E_Y = \frac{\text{ποσοστιαία αύξηση της ζήτησης}}{\text{ποσοστιαία αύξηση του εισοδήματος}} \Rightarrow$$

</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td><td>Μαθηματικό Οικονομικό</td><td>Ασκήσεις – Η Ζήτηση των αγαθών.</td><td>Μαθηματικός Τύπος - Λεκτικός</td><td>2ο</td><td>7</td></tr>
<tr><td>

$$E_D = \frac{\text{ποσοστιαία μείωση της ζητούμενης ποσότητας}}{\text{ποσοστιαία αύξηση της τιμής}} \Rightarrow$$

</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td><td>Μαθηματικό Οικονομικό</td><td>Ασκήσεις – Η Ζήτηση των αγαθών.</td><td>Μαθηματικός Τύπος - Λεκτικός</td><td>2ο</td><td>7</td></tr>
<tr><td>

$$E_D = \frac{\text{ποσοστιαία μεταβολή της ζητούμενης ποσότητας}}{\text{ποσοστιαία μεταβολή της τιμής}} \Rightarrow$$

</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td><td>Μαθηματικό Οικονομικό</td><td>Ασκήσεις – Η Ζήτηση των αγαθών.</td><td>Μαθηματικός Τύπος - Λεκτικός</td><td>2ο</td><td>8</td></tr>
<tr><td>

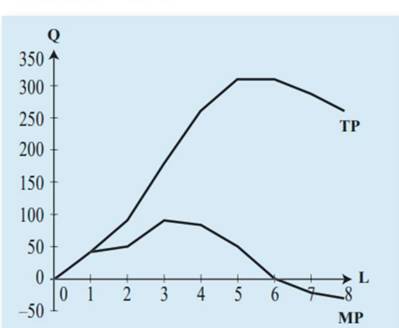
1. α) Με βάση τα δεδομένα του πίνακα, υπολογίζουμε το μέσο και το οριακό προϊόν της εργασίας χρησιμοποιώντας τους τύπους:

$AP = \frac{Q}{L}$ $\quad MP = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$

<table>
<tr><th>Αριθμός Εργατών</th><th>Συνολικό Προϊόν</th><th>Μέσο Προϊόν</th><th>Οριακό Προϊόν</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>1</td><td>40</td><td>40</td><td>40</td></tr>
<tr><td>2</td><td>90</td><td>45</td><td>50</td></tr>
<tr><td>3</td><td>180</td><td>60</td><td>90</td></tr>
<tr><td>4</td><td>260</td><td>65</td><td>80</td></tr>
<tr><td>5</td><td>310</td><td>62</td><td>50</td></tr>
<tr><td>6</td><td>310</td><td>51,7</td><td>0</td></tr>
<tr><td>7</td><td>290</td><td>41,4</td><td>–20</td></tr>
<tr><td>8</td><td>260</td><td>32,5</td><td>–30</td></tr>
</table>

</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td><td>Μαθηματικό Οικονομικό</td><td>Ασκήσεις – Η Παραγωγή των αγαθών – Το κόστος της επιχείρησης.</td><td>Μαθηματικός Τύπος – Λεκτικός - Πίνακας</td><td>3ο</td><td>9</td></tr>
<tr><td>

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1



</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td><td>Μαθηματικό Οικονομικό</td><td>Ασκήσεις – Η Παραγωγή των αγαθών – Το κόστος της επιχείρησης</td><td>Γραφική Παράσταση</td><td>3ο</td><td>10</td></tr>
</table>

2. Με βάση τα δεδομένα του πίνακα, συμπληρώνουμε τα κενά χρησιμοποιώντας τους τύπους:

$$AP = \frac{Q}{L} \Rightarrow Q = AP \cdot L \quad \text{και} \quad MP = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

Μπορούμε να βρούμε το συνολικό προϊόν, όταν δίνεται το οριακό, χρησιμοποιώντας τον τύπο του οριακού προϊόντος.

Αριθμός Εργατών L	Συνολικό Προϊόν TP(Q)	Μέσο Προϊόν AP	Οριακό Προϊόν MP
1	$14 \times 1 = 14$	14	$\frac{14-0}{1-0} = 14$
2	$16 = \frac{X-14}{2-1} \Rightarrow X = 30$	$30:2 = 15$	16
3	54	$54:3 = 18$	$\frac{54-30}{3-2} = 24$
4	$16 = \frac{X-54}{4-3} \Rightarrow X = 80$	$80:4 = 20$	26
5	$24 \times 5 = 120$	24	$\frac{120-80}{5-4} = 40$
6	150	$150:6 = 25$	$\frac{150-120}{6-5} = 30$
7	$11 = \frac{X-150}{7-6} \Rightarrow X = 161$	$161:7 = 23$	11
8	$7 = \frac{X-161}{8-7} \Rightarrow X = 168$	$168:8 = 21$	7
9	168	$168:9 = 18,6$	$\frac{168-168}{9-8} = 0$
10	$16 \times 10 = 160$	16	$\frac{160-168}{10-9} = -8$

Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων	Μαθηματικό Οικονομικό	Ασκήσεις – Η Παραγωγή των αγαθών – Το κόστος της επιχείρησης	Μαθηματικός Τύπος – Λεκτικός - Πίνακας	3ο	10

3.

Προϊόν	Σταθερό Κόστος	Μεταβλητό Κόστος	Συνολικό Κόστος	Μέσο Σταθερό Κόστος	Μέσο Μεταβλητό Κόστος	Μέσο Συνολικό Κόστος	Οριακό Κόστος
Q	FC	VC	TC	AFC	AVC	ATC	MC
0	500	0	500	–	–	–	–
10	500	2.500	3.000	50	250	300	250
20	500	$X_3 = 4.800$	$X_6 = 5.300$	$X_{10} = 25$	$X_{14} = 240$	$X_{15} = 265$	230
30	500	$X_4 = 7.200$	$X_7 = 7.700$	$X_{11} = 16,6$	240	$X_{16} = 256,6$	$X_{17} = 240$
$X_1 = 36$	500	9.360	$X_8 = 9.860$	$X_{12} = 13,8$	260	$X_{18} = 273,8$	$X_{19} = 360$
$X_2 = 40$	500	$X_5 = 11.200$	$X_9 = 11.700$	$X_{13} = 12,5$	280	$X_{20} = 292,5$	460

Το σταθερό κόστος είναι σε όλα τα επίπεδα 500.
Υπολογίζουμε τα μεγέθη από τους τύπους:

$$MC = \frac{\Delta VC}{\Delta Q} \ (1) \quad AFC = \frac{FC}{Q} \ (2) \quad AVC = \frac{VC}{Q} \ (3) \quad ATC = \frac{TC}{Q} \ (4)$$

Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων	Μαθηματικό Οικονομικό	Ασκήσεις – Η Παραγωγή των αγαθών – Το κόστος της επιχείρησης	Μαθηματικός Τύπος – Λεκτικός - Πίνακας	3ο	11

Σύμφωνα με τον τύπο $MP = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$,

έχουμε:

$$100 = \frac{Q_1 - 0}{1-0} \Rightarrow Q_1 = 100 \qquad 250 = \frac{Q_5 - 700}{5-4} \Rightarrow Q_5 = 950$$

$$150 = \frac{Q_2 - 100}{2-1} \Rightarrow Q_2 = 250 \qquad 200 = \frac{Q_6 - 950}{6-5} \Rightarrow Q_6 = 1.150$$

$$200 = \frac{Q_3 - 250}{3-2} \Rightarrow Q_3 = 450 \qquad 150 = \frac{Q_7 - 1.150}{7-6} \Rightarrow Q_7 = 1.300$$

$$250 = \frac{Q_4 - 450}{4-3} \Rightarrow Q_4 = 700 \qquad 100 = \frac{Q_8 - 1.300}{8-7} \Rightarrow Q_8 = 1.400$$

Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων	Μαθηματικό Οικονομικό	Ασκήσεις – Η Παραγωγή των αγαθών – Το κόστος της επιχείρησης	Μαθηματικός Τύπος	3ο	12

5. α) Κατασκευάζουμε τον πίνακα δεδομένων:

	Προϊόν	Μέσο Μεταβλητό Κόστος	Οριακό Κόστος	Μέσο Συνολικό Κόστος	Μέσο Σταθερό Κόστος
	8	5			20
έστω	X	8,5	12		
έστω	X + 4			18	

Έστω ότι το προϊόν μετά την αύξηση της παραγωγής είναι X και στη συνέχεια γίνεται X + 4.

$$\text{Οριακό Κόστος} = \frac{\text{Μεταβολή Μεταβλητού Κόστους}}{\text{Μεταβολή παραγωγής}}$$

Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων	Μαθηματικό Οικονομικό	Ασκήσεις – Η Παραγωγή των αγαθών – Το κόστος της επιχείρησης	Μαθηματικός Τύπος – Λεκτικός - Πίνακας	3ο	13

<table>
<tr><td>

Το οριακό κόστος όμως της 17ης και 18ης μονάδας πρέπει να υπολογισθεί από τον τύπο

$$ΟΚ = \frac{\text{Μεταβολή συνολικού κόστους}}{\text{Μεταβολή παραγωγής}} = \frac{TC_{20} - TC_{16}}{Q_{20} - Q_{16}},$$

</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td><td>Μαθηματικό Οικονομικό</td><td>Ασκήσεις – Η Παραγωγή των αγαθών – Το κόστος της επιχείρησης</td><td>Μαθηματικός Τύπος – Λεκτικός</td><td>$3^{ο}$</td><td>14</td></tr>
<tr><td>

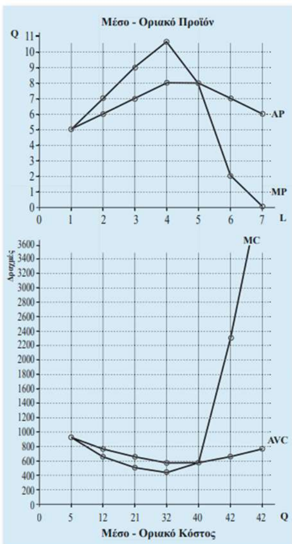
Υπολογίζουμε το οριακό προϊόν από τον τύπο: $MP = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$

$MP_1 = \frac{5-0}{1-0} = 5$ $MP_2 = \frac{12-5}{2-1} = 7$ $MP_3 = \frac{21-12}{3-2} = 9$ $MP_4 = \frac{32-21}{4-3} = 11$

$MP_5 = \frac{40-32}{5-4} = 8$ $MP_6 = \frac{42-40}{6-5} = 2$ $MP_7 = \frac{42-42}{7-6} = 0$

</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td><td>Μαθηματικό Οικονομικό</td><td>Ασκήσεις – Η Παραγωγή των αγαθών – Το κόστος της επιχείρησης</td><td>Μαθηματικός Τύπος</td><td>$3^{ο}$</td><td>15</td></tr>
<tr><td>

Παρατήρηση: Στο διάγραμμα μέσου - οριακού προϊόντος, ο οριζόντιος άξονας μετράει τον μεταβλητό συντελεστή εργασία (Ε), ενώ στο διάγραμμα μέσου μεταβλητού - οριακού κόστους ο οριζόντιος άξονας μετράει την παραγόμενη ποσότητα του προϊόντος (Q). Για να είναι δυνατή η αντιστοίχιση, πρέπει ο οριζόντιος άξονας των ποσοτήτων (Q) του διαγράμματος μέσου μεταβλητού και οριακού κόστους να βαθμολογηθεί με τις ποσότητες προϊόντος που αντιστοιχούν στα επίπεδα απασχόλησης του διαγράμματος μέσου και οριακού προϊόντος.



</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td><td>Μαθηματικό Οικονομικό</td><td>Ασκήσεις – Η Παραγωγή των αγαθών – Το κόστος της επιχείρησης</td><td>Γραφική Παράσταση - Λεκτικός</td><td>$3^{ο}$</td><td>16</td></tr>
<tr><td>

7.

<table>
<tr><th>Εργασία</th><th>Συνολικό Προϊόν</th><th>Μέσο Προϊόν</th><th>Οριακό Προϊόν</th><th>Μέσο Μεταβλητό Κόστος</th><th>Μεταβλητό Κόστος</th><th>Οριακό Κόστος</th></tr>
<tr><td>4</td><td>$X_4 = 32$</td><td>8</td><td>–</td><td>357</td><td>11.424</td><td>–</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$X_5 = 40$</td><td>8</td><td>8</td><td>357</td><td>14.280</td><td>357</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$X_6 = 42$</td><td>7</td><td>2</td><td>402</td><td>16.884</td><td>1.302</td></tr>
</table>

Στους 5 εργάτες το μέσο προϊόν γίνεται μέγιστο, άρα είναι ίσο με το οριακό προϊόν:

$AP_5 = \frac{X_5}{5}$ και $MP_5 = \frac{X_5 - 32}{5-4}$, $\frac{X_5}{5} = \frac{X_5 - 32}{1} \Rightarrow X_5 = 40.$

</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td><td>Μαθηματικό Οικονομικό</td><td>Ασκήσεις – Η Παραγωγή των αγαθών – Το κόστος της επιχείρησης</td><td>Μαθηματικός Τύπος - Πίνακας</td><td>$3^{ο}$</td><td>17</td></tr>
<tr><td>

8. Με τα δεδομένα της άσκησης κατασκευάζουμε τον πίνακα, τον οποίο συμπληρώνουμε με τους παρακάτω υπολογισμούς:

<table>
<tr><th>Εργασία L</th><th>Συνολικό Προϊόν Q</th><th>Μέσο Μεταβλητό Κόστος ACV</th><th>Μεταβλητό Κόστος VC</th><th>Οριακό Προϊόν MP</th><th>Οριακό Κόστος MC</th></tr>
<tr><td>5</td><td>250</td><td>252</td><td>63.000</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>6</td><td>270</td><td>280</td><td>75.600</td><td>20</td><td>630</td></tr>
<tr><td>7</td><td>280</td><td>315</td><td>88.200</td><td>10</td><td>1.260</td></tr>
</table>

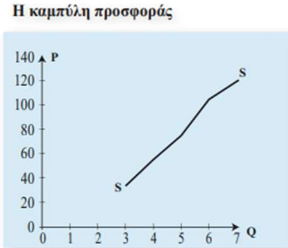
</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td><td>Μαθηματικό Οικονομικό</td><td>Ασκήσεις – Η Παραγωγή των αγαθών – Το κόστος της επιχείρησης</td><td>Πίνακας</td><td>$3^{ο}$</td><td>17</td></tr>
<tr><td>

Το οριακό προϊόν στον 6ο και 7ο εργάτη είναι:

$$MP_6 = \frac{Q_6 - Q_5}{L_6 - L_5} = \frac{270-250}{6-5} = 20$$

$$MP_7 = \frac{Q_7 - Q_6}{L_7 - L_6} = \frac{280-270}{7-6} = 10$$

</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td><td>Μαθηματικό Οικονομικό</td><td>Ασκήσεις – Η Παραγωγή των αγαθών – Το κόστος της επιχείρησης</td><td>Μαθηματικός Τύπος</td><td>$3^{ο}$</td><td>18</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε το συνολικό κόστος για κάθε επίπεδο παραγωγής.
Το οριακό κόστος: $MC = \frac{\Delta VC}{\Delta Q}$.
Το οριακό κόστος για τον 1ο εργάτη είναι: $MC_1 = \frac{25200-0}{8-0} = 3150$.
Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε το οριακό κόστος για κάθε επίπεδο παραγωγής.
Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται όλα τα αποτελέσματα:
<table>
<tr><th>Εργασία L</th><th>Προϊόν Q</th><th>Σταθερό Κόστος FC</th><th>Μεταβλητό Κόστος VC</th><th>Συνολικό Κόστος TC</th><th>Οριακό Κόστος MC</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>12.600</td><td>0</td><td>12.600</td><td>–</td></tr>
<tr><td>1</td><td>8</td><td>12.600</td><td>25.200</td><td>37.800</td><td>3.150</td></tr>
<tr><td>2</td><td>20</td><td>12.600</td><td>60.480</td><td>73.080</td><td>2.940</td></tr>
<tr><td>3</td><td>36</td><td>12.600</td><td>105.840</td><td>118.440</td><td>2.835</td></tr>
<tr><td>4</td><td>56</td><td>12.600</td><td>161.280</td><td>173.880</td><td>2.772</td></tr>
<tr><td>5</td><td>80</td><td>12.600</td><td>226.800</td><td>239.400</td><td>2.730</td></tr>
<tr><td>6</td><td>96</td><td>12.600</td><td>272.160</td><td>284.760</td><td>2.835</td></tr>
<tr><td>7</td><td>105</td><td>12.600</td><td>299.880</td><td>312.480</td><td>3.080</td></tr>
<tr><td>8</td><td>112</td><td>12.600</td><td>322.560</td><td>335.160</td><td>3.240</td></tr>
</table>
</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td>
<td>Μαθηματικό Οικονομικό</td>
<td>Ασκήσεις – Η Παραγωγή των αγαθών – Το κόστος της επιχείρησης</td>
<td>Μαθηματικός Τύπος - Πίνακας</td>
<td>3ο</td>
<td>19</td>
</tr>
<tr>
<td>
γ) Το οριακό κόστος από 56 μέχρι 80 μονάδες προϊόντος είναι 2730 χρ. μονάδες. Άρα, όταν η επιχείρηση μειώνει την παραγωγή της κατά μία μονάδα προϊόντος από τις 80 μονάδες προϊόντος, το κόστος της μειώνεται κατά 2730 χρηματικές μονάδες. Αφού θέλει να μειώσει το κόστος της κατά 54.600 χρηματικές μονάδες, πρέπει να μειώσει την παραγωγή της κατά:
$\frac{54.600}{2730} = 20$ μονάδες προϊόντος.
</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td>
<td>Μαθηματικό Οικονομικό</td>
<td>Ασκήσεις – Η Παραγωγή των αγαθών – Το κόστος της επιχείρησης</td>
<td>Λεκτικός</td>
<td>3ο</td>
<td>20</td>
</tr>
<tr>
<td>
1. α) Η καμπύλη προσφοράς της επιχείρησης στη βραχυχρόνια περίοδο είναι το ανερχόμενο τμήμα της καμπύλης του οριακού κόστους, που βρίσκεται πάνω από την καμπύλη του μέσου μεταβλητού κόστους. Επομένως, υπολογίζω το μεταβλητό κόστος, το μέσο μεταβλητό κόστος και το οριακό κόστος της επιχείρησης σύμφωνα με τα δεδομένα του πίνακα με βάση τους τύπους:
$AVC = \frac{VC}{Q}$, $MC = \frac{\Delta VC}{\Delta Q}$ και $VC = TC - FC$
<table>
<tr><th>Προϊόν</th><th>Συνολικό Κόστος</th><th>Μεταβλητό Κόστος</th><th>Μέσο Μεταβλητό Κόστος</th><th>Οριακό Κόστος</th></tr>
<tr><td>Q</td><td>TC</td><td>VC</td><td>AVC</td><td>MC</td></tr>
<tr><td>0</td><td>60</td><td>0</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>1</td><td>100</td><td>40</td><td>40</td><td>40</td></tr>
<tr><td>2</td><td>126</td><td>66</td><td>33</td><td>26</td></tr>
<tr><td>3</td><td>159</td><td>99</td><td>33</td><td>33</td></tr>
<tr><td>4</td><td>212</td><td>152</td><td>38</td><td>53</td></tr>
<tr><td>5</td><td>285</td><td>225</td><td>45</td><td>73</td></tr>
<tr><td>6</td><td>390</td><td>330</td><td>55</td><td>105</td></tr>
<tr><td>7</td><td>510</td><td>450</td><td>64,2</td><td>120</td></tr>
</table>
</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td>
<td>Μαθηματικό Οικονομικό</td>
<td>Ασκήσεις – Η Προσφορά των Αγαθών</td>
<td>Μαθηματικός Τύπος - Πίνακας</td>
<td>4ο</td>
<td>21</td>
</tr>
<tr>
<td>
Ο Πίνακας προσφοράς
<table>
<tr><th>P</th><th>Q_S</th></tr>
<tr><td>33</td><td>3</td></tr>
<tr><td>53</td><td>4</td></tr>
<tr><td>73</td><td>5</td></tr>
<tr><td>105</td><td>6</td></tr>
<tr><td>120</td><td>7</td></tr>
</table>
Η καμπύλη προσφοράς


β) Σύμφωνα με τον τύπο της ελαστικότητας της προσφοράς,
$E_S = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P_1}{Q_1} = \frac{4-5}{53-73} \cdot \frac{73}{5} = 0,73$
</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td>
<td>Μαθηματικό Οικονομικό</td>
<td>Ασκήσεις – Η Προσφορά των Αγαθών</td>
<td>Μαθηματικός Τύπος – Πίνακας – Γραφική Παράσταση</td>
<td>4ο</td>
<td>22</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

2. Υπολογίζω το μεταβλητό κόστος, αφού η εργασία είναι ο μοναδικός μεταβλητός συντελεστής, ως εξής:
$VC = W \cdot L$, όπου W = αμοιβή εργασίας και L = αριθμός εργατών.
Στη συνέχεια, υπολογίζω το μέσο μεταβλητό κόστος και το οριακό κόστος. Το οριακό κόστος μπορεί να υπολογιστεί είτε από τον τύπο:

$MC = \frac{\Delta VC}{\Delta Q}$ είτε από $MC = \frac{W}{MP}$

<table>
<tr><th>Εργάτες</th><th>Συνολικό Προϊόν</th><th>Μεταβλητό Κόστος</th><th>Μέσο Μεταβλητό Κόστος</th><th>Οριακό Κόστος</th></tr>
<tr><td>L</td><td>Q</td><td>VC</td><td>AVC</td><td>MC</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>1</td><td>7</td><td>7.500</td><td>1.071,4</td><td>1.071,4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>25</td><td>15.000</td><td>600</td><td>416,7</td></tr>
<tr><td>3</td><td>45</td><td>22.500</td><td>500</td><td>375</td></tr>
<tr><td>4</td><td>60</td><td>30.000</td><td>500</td><td>500</td></tr>
<tr><td>5</td><td>66</td><td>37.500</td><td>568,2</td><td>1.250</td></tr>
<tr><td>6</td><td>70</td><td>45.000</td><td>642,8</td><td>1.875</td></tr>
<tr><td>7</td><td>72</td><td>52.500</td><td>729,1</td><td>3.750</td></tr>
</table>

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td>
<td>Μαθηματικό Οικονομικό</td>
<td>Ασκήσεις – Η Προσφορά των Αγαθών</td>
<td>Μαθηματικός Τύπος – Πίνακας</td>
<td>4º</td>
<td>22</td>
</tr>
<tr>
<td>

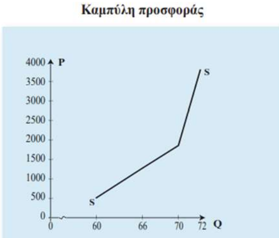
Πίνακας προσφοράς

<table>
<tr><th>P</th><th>Q_s</th></tr>
<tr><td>**500**</td><td>**60**</td></tr>
<tr><td>**1.250**</td><td>**66**</td></tr>
<tr><td>**1.875**</td><td>**70**</td></tr>
<tr><td>**3.750**</td><td>**72**</td></tr>
</table>

β) Σύμφωνα με τον τύπο της ελαστικότητας της προσφοράς,

$E_s = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P_1}{Q_1} = \frac{72 - 70}{3.750 - 1.875} \cdot \frac{1.875}{70} = 0,028$

Καμπύλη προσφοράς



</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td>
<td>Μαθηματικό Οικονομικό</td>
<td>Ασκήσεις – Η Προσφορά των Αγαθών</td>
<td>Μαθηματικός Τύπος – Πίνακας – Γραφική Παράσταση.</td>
<td>4º</td>
<td>23</td>
</tr>
<tr>
<td>

3. α) Από τους τύπους $MP = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$ και $AP = \frac{Q}{L}$ συμπληρώνω:

<table>
<tr><th>Ποσότητα Εργασίας L</th><th>Συνολικό Προϊόν TP ή Q</th><th>Μέσο Προϊόν AP</th><th>Οριακό Προϊόν MP</th></tr>
<tr><td>1</td><td>10</td><td>10 : 1 = 10</td><td>$\frac{10-0}{1-0}=10$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>10 + 15 = 25</td><td>25 : 2 = 12,5</td><td>15</td></tr>
<tr><td>3</td><td>45</td><td>45 : 3 = 15</td><td>$\frac{45-25}{3-2}=20$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>60</td><td>60 : 4 = 15</td><td>15</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$14 \cdot 5 = 70$</td><td>14</td><td>$\frac{70-60}{5-4}=10$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>75</td><td>12,5</td><td>$\frac{75-70}{6-5}=5$</td></tr>
</table>

</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td>
<td>Μαθηματικό Οικονομικό</td>
<td>Ασκήσεις – Η Προσφορά των Αγαθών</td>
<td>Μαθηματικός Τύπος – Πίνακας</td>
<td>4º</td>
<td>23 – 24</td>
</tr>
<tr>
<td>

β) Υπολογίζω το μεταβλητό κόστος από τα δεδομένα, που είναι η αμοιβή της εργασίας και η πρώτη ύλη του προϊόντος. Στη συνέχεια υπολογίζω το μέσο μεταβλητό κόστος και το οριακό κόστος.

<table>
<tr><th>Εργασία</th><th>Συνολικό Προϊόν</th><th>Μεταβλητό Κόστος</th><th>Οριακό Κόστος</th><th>Μέσο Μεταβλητό Κόστος</th></tr>
<tr><td>L</td><td>TP ή Q</td><td>VC</td><td>MC</td><td>$AVC \left(\frac{VC}{Q}\right)$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>10</td><td>$10 \cdot 10 + 5000 = 5100$</td><td>$\frac{5100}{10-0}=510$</td><td>$\frac{5100}{10}=510$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>25</td><td>$25 \cdot 10 + 5000 \cdot 2 = 10250$</td><td>$\frac{10250-5100}{25-10}=343,3$</td><td>$\frac{10250}{25}=410$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>45</td><td>$45 \cdot 10 + 5000 \cdot 3 = 15450$</td><td>$\frac{15450-10250}{45-25}=260$</td><td>$\frac{15450}{45}=343,3$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>60</td><td>$60 \cdot 10 + 5000 \cdot 4 = 20600$</td><td>$\frac{20600-15450}{60-45}=343,3$</td><td>$\frac{20600}{60}=343,3$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>70</td><td>$70 \cdot 10 + 5000 \cdot 5 = 25700$</td><td>$\frac{25700-20600}{70-60}=510$</td><td>$\frac{25700}{70}=367,1$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>75</td><td>$75 \cdot 10 + 5000 \cdot 6 = 30750$</td><td>$\frac{30750-25700}{75-70}=1010$</td><td>$\frac{30750}{75}=410$</td></tr>
</table>

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

</td>
<td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td>
<td>Μαθηματικό Οικονομικό</td>
<td>Ασκήσεις – Η Προσφορά των Αγαθών</td>
<td>Μαθηματικός Τύπος – Πίνακας</td>
<td>4º</td>
<td>24</td>
</tr>
</table>

2.

P	Q_D	Q_S	Πλεόνασμα
80	40	40	
100	$X_1 = 25$	$X_2 = 45$	20

$$E_D = \frac{Q_{τελ.} - Q_{αρχ.}}{P_{τελ.} - P_{αρχ.}} \cdot \frac{P_{αρχ.}}{Q_{αρχ.}} \Rightarrow -1{,}5 = \frac{X_1 - 40}{100 - 80} \cdot \frac{80}{40} \Rightarrow X_1 = 25$$

$$E_S = \frac{Q_{τελ.} - Q_{αρχ.}}{P_{τελ.} - P_{αρχ.}} \cdot \frac{P_{αρχ.}}{Q_{αρχ.}} \Rightarrow 0{,}5 = \frac{X_1 - 40}{100 - 80} \cdot \frac{80}{40} \Rightarrow X_2 = 45$$

Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων	Μαθηματικό Οικονομικό	Ασκήσεις – Η Αγορά	Μαθηματικός Τύπος – Πίνακας	5ο	26

4.

P	Q_D	Q_S	Πλεόνασμα
8	300	200	
$P_0 = ;$	$Q_0 = ;$	$Q_0 = ;$	

$$E_D = \frac{Q_{τελ.} - Q_{αρχ.}}{P_{τελ.} - P_{αρχ.}} \cdot \frac{P_{αρχ.}}{Q_{αρχ.}} \Rightarrow -0{,}4 = \frac{Q_0 - 300}{P_0 - 8} \cdot \frac{8}{300} \Rightarrow 8\ Q_0 + 120\ P_0 = 3.360 \quad (1)$$

$$E_S = \frac{Q_{τελ.} - Q_{αρχ.}}{P_{τελ.} - P_{αρχ.}} \cdot \frac{P_{αρχ.}}{Q_{αρχ.}} \Rightarrow -0{,}4 = \frac{Q_0 - 200}{P_0 - 8} \cdot \frac{8}{200} \Rightarrow 8\ Q_0 - 80\ P_0 = 960 \quad (2)$$

Από (1) και (2) με αφαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε: $P_0 = 12$ ευρώ.
Για $P_0 = 12$ ευρώ αντικαθιστώντας στην (1) ή (2) βρίσκουμε: $Q_0 = 240$ μονάδες.
Άρα, το σημείο ισορροπίας είναι $P_0 = 12$ ευρώ και $Q_0 = 240$ μονάδες.

Βρίσκουμε τις συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς από τον τύπο:

$$\frac{Q - Q_1}{P - P_1} = \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1}$$

$$\frac{Q_D - 300}{P - 8} = \frac{240 - 300}{12 - 8} \Rightarrow Q_D = 420 - 15\ P$$

$$\frac{Q_S - 200}{P - 8} = \frac{240 - 200}{12 - 8} \Rightarrow Q_S = 120 + 10\ P$$

Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων	Μαθηματικό Οικονομικό	Ασκήσεις – Η Αγορά	Μαθηματικός Τύπος – Πίνακας	5ο	27

α) Αφού η συνάρτηση ζήτησης είναι γραμμική, μπορούμε να προσδιορίσουμε τον τύπο της από τις συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ από τον τύπο της ευθείας:

$$\frac{Q - Q_Γ}{P - P_Γ} = \frac{Q_Δ - Q_Γ}{P_Δ - P_Γ} \Rightarrow \frac{Q - 1800}{P - 55} = \frac{2000 - 1800}{50 - 55} \Rightarrow Q_D = 4000 - 40P$$

Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων	Μαθηματικό Οικονομικό	Ασκήσεις – Η Αγορά	Μαθηματικός Τύπος - Λεκτικός	5ο	28

α) Γνωρίζουμε δύο σημεία της ευθείας της προσφοράς (Α και Β) με τις συντεταγμένες τους, επομένως μπορούμε να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση της προσφοράς από τον τύπο:

$$\frac{Q - Q_A}{P - P_A} = \frac{Q_B - Q_A}{P_B - P_A} \Rightarrow \frac{Q - 180}{P - 20} = \frac{220 - 180}{30 - 20} \Rightarrow Q_S = 100 + 4\,P$$

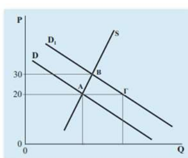
β) Στην τιμή των 20 χρημ. μονάδων η ζητούμενη ποσότητα στο νέο εισόδημα θα είναι $Q_Γ$. Εφόσον γνωρίζουμε την εισοδηματική ελαστικότητα ($E_Y = 2$), μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα $Q_Γ$ από τον τύπο:

$$E_Y = \frac{Q_Γ - Q_A}{Y_Γ - Y_A} \cdot \frac{Y_A}{Q_A}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$2 = \frac{Q_Γ - 180}{350.000 - 300.000} \cdot \frac{300.000}{180}$$

$Q_Γ = 240$.



Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων	Μαθηματικό Οικονομικό	Ασκήσεις – Η Αγορά	Μαθηματικός Τύπος – Γραφική Παράσταση	5ο	29

Υπολογίζουμε το Μέσο Μεταβλητό Κόστος (AVC) και το Οριακό Κόστος (MC) της επιχείρησης από τους τύπους:

$$AVC = \frac{VC}{Q} \quad \text{και} \quad MC = \frac{\Delta VC}{\Delta Q}, \text{ όπου VC = Μεταβλητό Κόστος}$$

Προϊόν	Σταθερό Κόστος	Μεταβλητό Κόστος	Μέσο Μεταβλητό Κόστος	Οριακό Κόστος
0	18	0	–	–
1	18	6	6	6
2	18	10	5	4
3	18	12	4	2
4	18	16	4	4
5	18	22	4,4	6
6	18	30	5	8
7	18	40	5,7	10
8	18	52	6,5	12
9	18	66	7,3	14

Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων	Μαθηματικό Οικονομικό	Ασκήσεις – Μορφές Αγοράς	Μαθηματικός Τύπος – Πίνακας	6ο	31

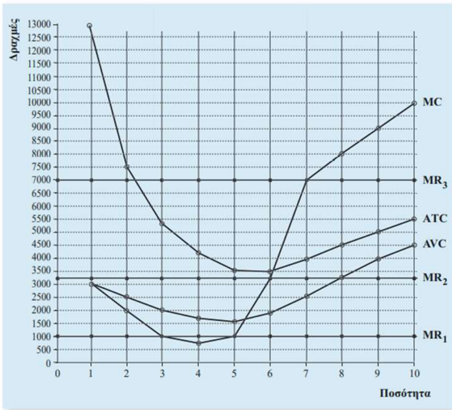
3. Με τα δεδομένα της άσκησης υπολογίζουμε το μέσο μεταβλητό κόστος (AVC), το μέσο συνολικό κόστος (ATC) και το οριακό κόστος (MC) της επιχείρησης από τους τύπους:

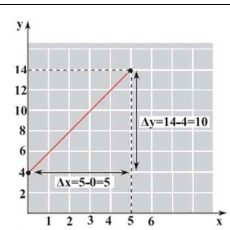
$$AVC = \frac{VC}{Q} \qquad ATC = \frac{TC}{Q} \qquad MC = \frac{\Delta VC}{\Delta Q}$$

Τα αποτελέσματα των υπολογισμών φαίνονται στον πίνακα 1.

Q	Σταθερό Κόστος FC	Μεταβλητό Κόστος VC	Συνολικό Κόστος TC	Μέσο Μεταβλητό Κόστος AVC	Μέσο Συνολικό Κόστος ATC	Οριακό Κόστος MC
0	10.000	0	10.000	–	–	–
1	10.000	3.000	13.000	3.000	13.000	3.000
2	10.000	5.000	15.000	2.500	7.500	2.000
3	10.000	6.000	16.000	2.000	5.333	1.000
4	10.000	6.800	16.800	1.700	4.200	800
5	10.000	7.800	17.800	1560	3.560	1.000
6	10.000	11.000	21.000	1.833	3.500	3.200
7	10.000	18.000	28.000	2.571	4.000	7.000
8	10.000	26.000	36.000	3.250	4.500	8.000
9	10.000	35.000	45.000	3.889	5.000	9.000
10	10.000	45.000	55.000	4.500	5.500	10.000

Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων	Μαθηματικό Οικονομικό	Ασκήσεις – Μορφές Αγοράς	Μαθηματικός Τύπος – Πίνακας	6ο	31 – 32

<table>
<tr><td>

Διάγραμμα 1</td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td><td>Μαθηματικό Οικονομικό</td><td>Ασκήσεις – Μορφές Αγοράς</td><td>Γραφική Παράσταση</td><td>6ο</td><td>34</td></tr>
<tr><td><table>
<tr><th>L</th><th>Q</th><th>Κόστος εργασίας</th><th>Κόστος πρώτων υλών</th><th>Μεταβλητό Κόστος VC</th><th>Μέσο Μεταβλητό Κόστος AVC</th><th>Οριακό Κόστος MC</th><th>Σταθερό Κόστος FC</th><th>Συνολικό Κόστος TC</th></tr>
<tr><td>4</td><td>80</td><td>4.000</td><td>8.000</td><td>12.000</td><td>150</td><td>–</td><td>2.000</td><td>14.000</td></tr>
<tr><td>5</td><td>100</td><td>5.000</td><td>10.000</td><td>15.000</td><td>150</td><td>150</td><td>2.000</td><td>17.000</td></tr>
<tr><td>6</td><td>110</td><td>6.000</td><td>11.000</td><td>17.000</td><td>154,5</td><td>200</td><td>2.000</td><td>19.000</td></tr>
</table></td><td>Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (Γ) Λύσεις των Ασκήσεων</td><td>Μαθηματικό Οικονομικό</td><td>Ασκήσεις – Μορφές Αγοράς</td><td>Πίνακας</td><td>6ο</td><td>38</td></tr>
<tr><td colspan="7">Φυσική</td></tr>
<tr><td>Αν οι μεταβολές της θερμοκρασίας γίνονται μέσα στην ίδια χρονική διάρκεια Δt, π.χ. 10s, τότε η σύγκριση θα είναι εύκολη. Το ίδιο εύκολο είναι αν αναχθούμε στη μονάδα χρόνου το 1s. Αυτό γίνεται αν διαιρέσουμε τη μεταβολή της θερμοκρασίας Δθ με τη χρονική διάρκεια Δt, οπότε έχουμε:
$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{10\ ^oC}{10s} = 1\ ^oC/s$, δηλαδή σε 1s η θερμοκρασία αυξήθηκε κατά 1 ^oC.
$\frac{\Delta\theta'}{\Delta t'} = \frac{20\ ^oC}{16s} = 1{,}25\ ^oC/s$, δηλαδή σε 1s η θερμοκρασία αυξήθηκε κατά 1,25 ^oC.</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Φυσική -Μαθηματικά</td><td>Παράδειγμα - Εισαγωγή</td><td>Λεκτικό – Μαθηματικός τύπος</td><td>εισαγωγή</td><td>29</td></tr>
<tr><td>Άρα η θερμοκρασία του δεύτερου σώματος αυξάνεται γρηγορότερα ή ο “ρυθμός μεταβολής” της είναι μεγαλύτερος όπως συνήθως λέμε.
Συνεπώς το πηλίκο $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ μας δίνει το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας.</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Φυσική -Μαθηματικά</td><td>Παράδειγμα - Εισαγωγή</td><td>Λεκτικό – Μαθηματικός τύπος</td><td>εισαγωγή</td><td>29</td></tr>
<tr><td>Γενικεύοντας, το πηλίκο $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ της μεταβολής ενός φυσικού μεγέθους Φ διά της μεταβολής του χρόνου Δt, μας δίνει το ρυθμό μεταβολής του φυσικού μεγέθους Φ, δηλαδή το πόσο αλλάζει το μέγεθος αυτό σε 1s.</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Φυσική -Μαθηματικά</td><td>Θεωρητικό πλαίσιο - Εισαγωγή</td><td>Λεκτικό – Μαθηματικός τύπος</td><td>Εισαγωγή</td><td>29</td></tr>
<tr><td>Πίνακας τιμών
<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>14</td></tr></table>


Εικόνα α
Ως κλίση της ευθείας ορίζεται το πηλίκο $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ που προκύπτει από το τρίγωνο της εικόνας α:
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10}{5} = 2.$</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Φυσική -Μαθηματικά</td><td>Παράδειγμα - Εισαγωγή</td><td>Λεκτικό – Μαθηματικός τύπος – Πίνακας – Γραφική Παράσταση</td><td>Εισαγωγή</td><td>30</td></tr>
<tr><td>Δραστηριότητα 1
Να υπολογίσετε την κλίση της ευθείας στην εικόνα 6.
Ποια είναι η φυσική σημασία της κλίσης αυτής;</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Φυσική</td><td>Δραστηριότητα Ευθύγραμμη Κίνηση</td><td>Λεκτικό</td><td>Εισαγωγή</td><td>31</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>

Δραστηριότητα 2

Ομοίως υπολογίστε την κλίση του σημείου 2 της εικόνας γ.

</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Φυσική</td><td>Δραστηριότητα Ευθύγραμμη Κίνηση</td><td>Λεκτικό</td><td>Εισαγωγή</td><td>31</td></tr>
<tr><td>

Πίνακας τιμών

<table><tr><th>m(gr)</th><th>V(cm³)</th></tr><tr><td>0
10</td><td>0
60</td></tr></table>

</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Μαθηματικά</td><td>Δραστηριότητα</td><td>Πίνακας</td><td>Εισαγωγή</td><td>31</td></tr>
<tr><td>

Μπορούμε να βρούμε την κλίση της καμπύλης όπως στην περίπτωση της ευθείας γραμμής;

Μήπως η καμπύλη δεν έχει μια κλίση, αλλά κάθε σημείο της έχει τη δική του κλίση;

Πράγματι κάθε σημείο της έχει κλίση που βρίσκεται αν φέρουμε την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο αυτό, όπως φαίνεται στην εικόνα γ, και φτιάξουμε ένα οποιοδήποτε ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα τμήμα της εφαπτόμενης που φέραμε, π.χ. η κλίση του σημείου 1 είναι:

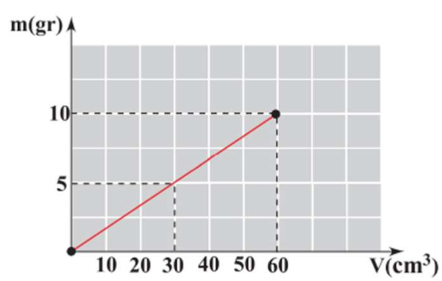
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{9}{1,7} = 5,3.$$

</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Μαθηματικά</td><td>Δραστηριότητα</td><td>Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος</td><td>Εισαγωγή</td><td>31</td></tr>
<tr><td>

Πίνακας τιμών

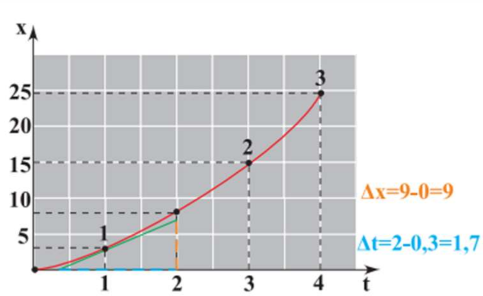
<table><tr><th>t</th><th>x</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>8</td></tr><tr><td>3</td><td>15</td></tr><tr><td>4</td><td>24</td></tr></table>

</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Μαθηματικά</td><td>Δραστηριότητα</td><td>Πίνακας</td><td>Εισαγωγή</td><td>31</td></tr>
<tr><td>

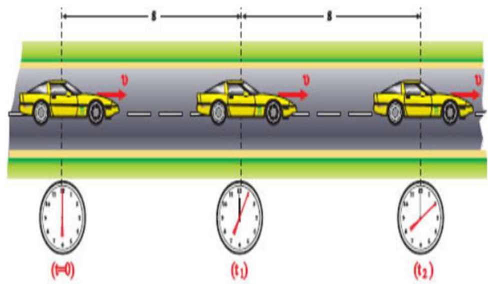
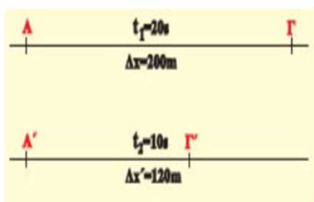
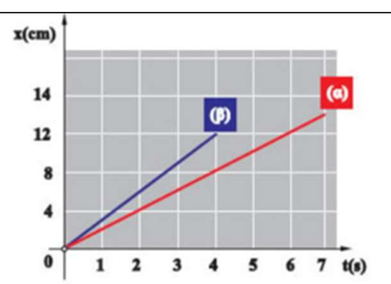


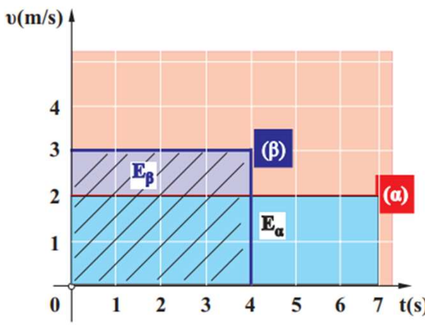
Εικόνα β

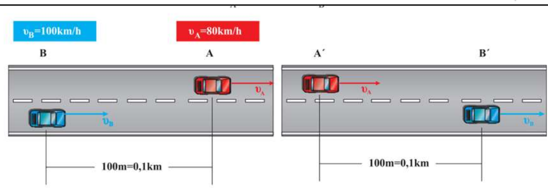
</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Μαθηματικά</td><td>Δραστηριότητα</td><td>Γραφική Παράσταση</td><td>Εισαγωγή</td><td>31</td></tr>
<tr><td>

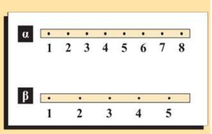


</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Μαθηματικά</td><td>Δραστηριότητα</td><td>Γραφική Παράσταση</td><td>Εισαγωγή</td><td>31</td></tr>
</table>

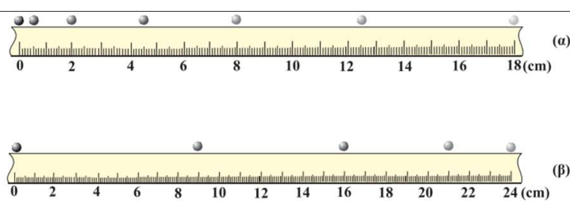
 **Εικόνα 1.1.10α** *Σε ίσους χρόνους το αυτοκίνητο διανύει ίσα διαστήματα.*	Φυσική (Α)	Φυσική	Παράδειγμα	Εικόνα	1ο	42
 **Εικόνα 1.1.10β** *Τα δύο κινητά διανύουν τις αποστάσεις ΑΓ, Α' Γ' σε διαφορετικούς χρόνους.*	Φυσική (Α)	Φυσική	Παράδειγμα	Εικόνα	1ο	43
$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{200m}{20s} = 10m/s$ και $\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{120m}{10s} = 12m/s.$	Φυσική (Α)	Φυσική -Μαθηματικά	Παράδειγμα	Μαθηματικός Τύπος	1ο	43
Η διαδικασία αυτή που ακολουθήσαμε μας οδηγεί στον ορισμό της έννοιας της ταχύτητας υ, ως το πηλίκο της μετατόπισης προς την αντίστοιχη χρονική διάρκεια. Δηλαδή: $\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (1.1.1) *Έτσι μπορούμε να απαντάμε στην ερώτηση ποιο κινητό κινείται γρηγορότερα.*	Φυσική (Α)	Φυσική -Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο Ευθύγραμμη Κίνηση - Ταχύτητα	Λεκτικό – Μαθηματικός τύπος	1ο	43
Για να απαντήσουμε και στο ερώτημα προς τα πού κινείται το κινητό, πρέπει να λάβουμε υπόψη, ότι η μετατόπιση είναι μέγεθος διανυσματικό ($\Delta\vec{x}$), άρα και η ταχύτητα θα είναι επίσης μέγεθος διανυσματικό. Δηλαδή: $\vec{\upsilon} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$ (1.1.2) Η μονάδα της ταχύτητας στο Διεθνές Σύστημα S.I. είναι **1m/s**.	Φυσική (Α)	Φυσική -Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο Ευθύγραμμη Κίνηση - Ταχύτητα	Λεκτικό – Μαθηματικός τύπος	1ο	43
Παρατηρούμε, ότι οι γραφικές παραστάσεις είναι ευθείες γραμμές, όπως ήταν αναμενόμενο, εφόσον η αλγεβρική σχέση μεταξύ των μεγεθών x, t είναι γραμμική, που όμως έχουν διαφορετική κλίση. Το ερώτημα που τίθεται είναι: Ποια είναι η φυσική σημασία των κλίσεων των δύο ευθειών που προέκυψαν από τη γραφική παράσταση των πειραματικών δεδομένων του πίνακα; Επειδή η κλίση προκύπτει ως το πηλίκο της μετατόπισης διά του χρόνου $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, με το οποίο πηλίκο έχουμε ορίσει την ταχύτητα, συμπεραίνουμε ότι:	Φυσική (Α)	Φυσική -Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο Ευθύγραμμη Κίνηση - Ταχύτητα	Λεκτικό – Μαθηματικός τύπος	1ο	44
 **Εικόνα 1.1.11** *Γραφική παράσταση των μετατοπίσεων των κινητών (α), (β), σε συνάρτηση με το χρόνο.*	Φυσική (Α)	Μαθηματικά	Παράδειγμα	Γραφική Παράσταση	1ο	44

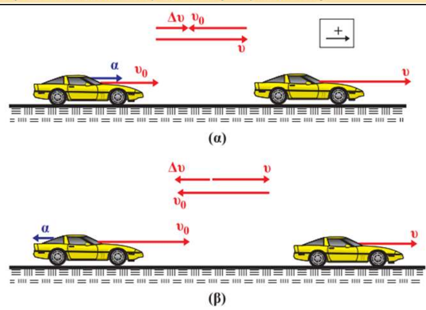
<table>
<tr><td>
Πίνακας Τιμών
<table>
<tr><th>t(s)</th><th>x_α(m)</th><th>x_β(m)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td><td>9</td></tr>
<tr><td>4</td><td>8</td><td>12</td></tr>
<tr><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>12</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>14</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Μαθηματικά</td><td>Παράδειγμα</td><td>Πίνακας</td><td>1ο</td><td>44</td></tr>
<tr><td>
Η κλίση της ευθείας στο διάγραμμα της μετατόπισης σε συνάρτηση με το χρόνο δίνει την ταχύτητα στην ευθύγραμμη κίνηση.
Κλίση ευθείας α: $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{14m}{7s} = 2\frac{m}{s} = \upsilon_\alpha$
Κλίση ευθείας β: $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{12m}{4s} = 3\frac{m}{s} = \upsilon_\beta$
</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Μαθηματικά</td><td>Παράδειγμα - κλίση</td><td>Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος</td><td>1ο</td><td>45</td></tr>
<tr><td>


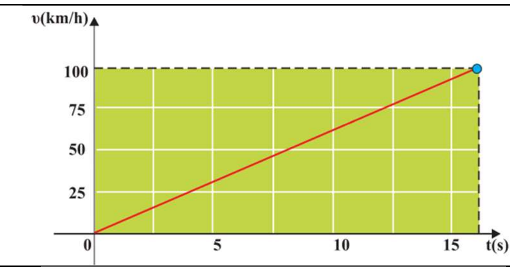
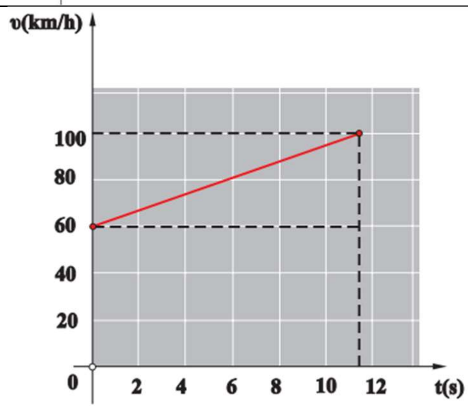
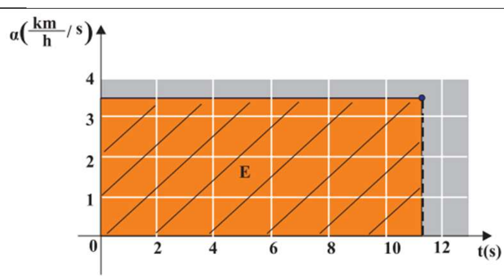
</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Μαθηματικά</td><td>Παράδειγμα - κλίση</td><td>Γραφική Παράσταση</td><td>1ο</td><td>45</td></tr>
<tr><td>
Εφαρμογή
Δύο αυτοκίνητα Α, Β κινούνται ευθύγραμμα και ομαλά σε ένα τμήμα της εθνικής οδού Πατρών-Πύργου με ταχύτητες 80km/h και 100km/h αντίστοιχα. Κάποια χρονική στιγμή το αυτοκίνητο Β απέχει από το προπορευόμενο αυτοκίνητο Α 100m και στη συνέχεια το προσπερνά.
α) Μετά από πόσο χρόνο τα αυτοκίνητα θα απέχουν πάλι 100m;
β) Πόσο θα έχει μετατοπιστεί κάθε αυτοκίνητο, όταν απέχουν πάλι 100m; Ο υπολογισμός να γίνει με την εξίσωση της κίνησης, αλλά και γραφικά.
</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Φυσική</td><td>Εφαρμογή – Ευθύγραμμη Κίνηση - Ταχύτητα</td><td>Λεκτικό</td><td>1ο</td><td>45-46</td></tr>
<tr><td>


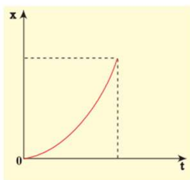
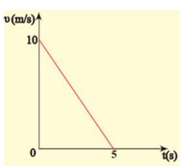
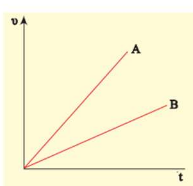
Εικόνα α
</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Φυσική</td><td>Εφαρμογή – Ταχύτητα</td><td>Εικόνα</td><td>1ο</td><td>46</td></tr>
<tr><td>
Δραστηριότητα
Οι χαρτοταινίες που φαίνονται στην εικόνα αναφέρονται σε δύο ευθύγραμμες ομαλές κινήσεις δύο αμαξιδίων και προέκυψαν με τη βοήθεια του ηλεκτρικού χρονομετρητή.


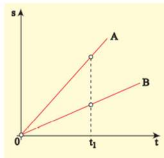
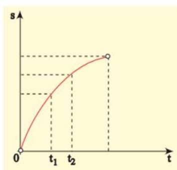
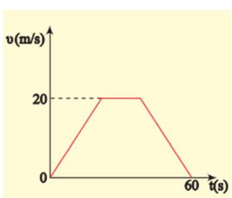
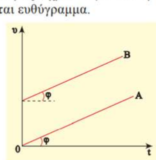
α) Μετρήστε με ένα κανόνα τις μετατοπίσεις από την κουκίδα 1 έως την κουκίδα 2, από τη 2 έως την 3 κ.ο.κ και στις δύο χαρτοταινίες. Τι παρατηρείτε;
β) Υπολογίστε την ταχύτητα του κάθε αμαξιδίου. Ποιο κινείται γρηγορότερα;
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της μετατόπισης σε συνάρτηση με το χρόνο για κάθε αμαξίδιο.
</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Φυσική</td><td>Δραστηριότητα – Ταχύτητα</td><td>Λεκτικό - Εικόνα</td><td>1ο</td><td>47</td></tr>
</table>

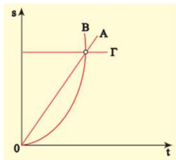
ΠΙΝΑΚΑΣ 1  	Φυσική (Α)	Φυσική	Παράδειγμα – Επιτάχυνση	Εικόνα - Πίνακας	$1^{ο}$	50
ΠΙΝΑΚΑΣ 2  	Φυσική (Α)	Φυσική	Παράδειγμα – Επιτάχυνση	Εικόνα - Πίνακας	$1^{ο}$	50
Στη Φυσική, για να συγκρίνουμε τις επιταχύνσεις των κινητών, των οποίων η κίνηση δεν είναι ομαλή, εργαζόμαστε με τον προηγούμενο τρόπο, δηλαδή βρίσκουμε πόσο αλλάζει η ταχύτητα στη μονάδα του χρόνου, διαιρώντας τη μεταβολή της ταχύτητας με το χρόνο. Έτσι υπολογίζουμε την επιτάχυνση ή το ρυθμό με τον οποίο αλλάζει η ταχύτητα, όπως λέμε.	Φυσική (Α)	Φυσική	Θεωρητικό πλαίσιο – Ευθύγραμμη Κίνηση - Επιτάχυνση	Λεκτικό	$1^{ο}$	50
Το πηλίκο $\frac{\Delta υ}{\Delta t}$ το ονομάζουμε επιτάχυνση και το συμβολίζουμε με το γράμμα α, δηλαδή:	Φυσική (Α)	Φυσική Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο – Ευθύγραμμη Κίνηση - Επιτάχυνση	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	$1^{ο}$	50
$α = \frac{\Delta υ}{\Delta t}$ (1.1.5)	Φυσική (Α)	Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο – Ευθύγραμμη Κίνηση - Επιτάχυνση	Μαθηματικός Τύπος	$1^{ο}$	50
Μονάδα επιτάχυνσης στο Διεθνές Σύστημα S.I. είναι το $\frac{1 m/s}{s} = 1 \frac{m}{s^2}$. Στο κεφάλαιο αυτό θα περιοριστούμε **μόνο** στην περιγραφή κινήσεων που η ταχύτητά τους αλλάζει το ίδιο στη μονάδα του χρόνου ή αλλάζει όπως λέμε με σταθερό ρυθμό, δηλαδή σε κινήσεις στις οποίες η επιτάχυνση $α = \frac{\Delta υ}{\Delta t}$ είναι σταθερή. Για παράδειγμα αν $α = 2 m/s^2$, τότε σε κάθε δευτερόλεπτο η ταχύτητα αλλάζει 2m/s.	Φυσική (Α)	Φυσική -Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο – Ευθύγραμμη Κίνηση - Επιτάχυνση	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	$1^{ο}$	50
 	Φυσική (Α)	Φυσική	Παράδειγμα – Επιτάχυνση	Εικόνα	$1^{ο}$	51

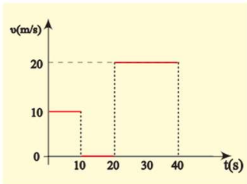
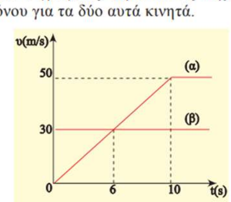
<table>
<tr><td>Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με την τιμή της επιτάχυνσης, αλλά η ταχύτητα και η μεταβολή της ταχύτητας είναι διανύσματα, οπότε και η επιτάχυνση είναι διάνυσμα.
Ορίζουμε ως επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ σε μια ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση, το διανυσματικό μέγεθος του οποίου η τιμή ισούται με το πηλίκο της μεταβολής $\Delta\vec{\upsilon}$ της ταχύτητας διά του χρόνου Δt στον οποίο γίνεται η μεταβολή αυτή. Στη γλώσσα των μαθηματικών μπορούμε να γράψουμε:</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Φυσική</td><td>Θεωρητικό πλαίσιο – Ευθύγραμμη Κίνηση - Επιτάχυνση</td><td>Λεκτικό</td><td>1ο</td><td>51</td></tr>
<tr><td>$$\vec{\alpha} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} \qquad (1.1.6)$$</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Μαθηματικά</td><td>Θεωρητικό πλαίσιο – Ευθύγραμμη Κίνηση - Επιτάχυνση</td><td>Μαθηματικός Τύπος</td><td>1ο</td><td>51</td></tr>
<tr><td>Δραστηριότητα
α) Υπολογίστε τις επιταχύνσεις στις κινήσεις που φαίνονται στις στροβοσκοπικές φωτογραφίες της εικόνας 1.1.15. Θεωρήστε ότι $\Delta t = \frac{1}{50}$s.
β) Σχεδιάστε τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις σε δύο σημεία των κινήσεων.</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Φυσική -Μαθηματικά</td><td>Δραστηριότητα – Ευθύγραμμη Κίνηση - Επιτάχυνση</td><td>Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος</td><td>1ο</td><td>51</td></tr>
<tr><td>Δραστηριότητα
Υπολογίστε το πηλίκο $\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$ για μερικά από τα αυτοκίνητα του Πίνακα 1. Χρησιμοποιήστε ως μονάδα το $1\frac{km/s}{s}$. Συζητήστε τα αποτελέσματα στην ομάδα σας.</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Φυσική -Μαθηματικά</td><td>Δραστηριότητα – Ευθύγραμμη Κίνηση - Επιτάχυνση</td><td>Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος</td><td>1Ο</td><td>51</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Φυσική</td><td>Παράδειγμα – Επιτάχυνση</td><td>Εικόνα</td><td>1ο</td><td>52</td></tr>
<tr><td>α) Η εξίσωση της ταχύτητας.
Από τον ορισμό της επιτάχυνσης $\vec{\alpha} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$ προκύπτει ότι η μεταβολή $\Delta\vec{\upsilon}$ της ταχύτητας στο χρόνο Δt είναι:
$$\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\alpha}\,\Delta t$$
Αν τη χρονική στιγμή μηδέν, η ταχύτητα του κινητού είναι υ_0 (αρχική ταχύτητα) και τη χρονική στιγμή t είναι υ, τότε η μεταβολή $\Delta\vec{\upsilon}$ είναι:
$$\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0 = \vec{\alpha}(t-0) \text{ ή } \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\alpha}\,t.$$</td><td>Φυσική (Α)</td><td>Φυσική -Μαθηματικά</td><td>Θεωρητικό πλαίσιο – Ευθύγραμμη Κίνηση - Επιτάχυνση</td><td>Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος</td><td>1ο</td><td>52</td></tr>
<tr><td>Πίνακας 3
<table><tr><th>t(s)</th><th>υ(km/h)</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>15,8</td><td>100</td></tr></table></td><td>Φυσική (Α)</td><td>Μαθηματικά</td><td>Παράδειγμα – Επιτάχυνση</td><td>Πίνακας</td><td>1ο</td><td>53</td></tr>
<tr><td>Πίνακας 4
<table><tr><th>t(s)</th><th>υ(km/h)</th></tr><tr><td>0</td><td>60</td></tr><tr><td>11,4</td><td>100</td></tr></table></td><td>Φυσική (Α)</td><td>Μαθηματικά</td><td>Παράδειγμα – Επιτάχυνση</td><td>Πίνακας</td><td>1ο</td><td>53</td></tr>
</table>

Επειδή τα διανύσματα $\vec{\upsilon}_0, \vec{\upsilon}, \vec{\alpha}$ είναι συγγραμμικά στην ευθύγραμμη κίνηση, η πρόσθεσή τους ανάγεται σε αλγεβρική πρόσθεση των τιμών τους. Μπορούμε λοιπόν να καθορίσουμε θετική και αρνητική φορά (Εικ. 1.1.16), και να οδηγηθούμε στην αλγεβρική μορφή των προηγούμενων εξισώσεων: στην επιταχυνόμενη κίνηση: $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$ (1.1.7) στην επιβραδυνόμενη κίνηση: $\upsilon = \upsilon_0 - \alpha t$ (1.1.8) Αν η αρχική ταχύτητα είναι $\upsilon_0 = 0$ από τη σχέση (1.1.7) προκύπτει: $\upsilon = \alpha t$ (1.1.9)	Φυσική (Α)	Φυσική -Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο – Ευθύγραμμη Κίνηση - Επιτάχυνση	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	1ο	53
	Φυσική (Α)	Μαθηματικά	Παράδειγμα – Επιτάχυνση	Γραφική Παράσταση	1ο	53
	Φυσική (Α)	Μαθηματικά	Παράδειγμα – Επιτάχυνση	Γραφική Παράσταση	1ο	53
Τίθεται το ερώτημα: ποια είναι η φυσική σημασία της κλίσης της ευθείας της εικόνας 1.1.18; Επειδή η κλίση προκύπτει ως το πηλίκο της μεταβολής της ταχύτητας με το χρόνο, $\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$, με το οποίο έχουμε ορίσει την επιτάχυνση, συμπεραίνουμε ότι **η κλίση της ευθείας στο διάγραμμα της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνει την επιτάχυνση** στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση. Κλίση ευθείας: $\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{40km/h}{11,4s} = 3,51\frac{km/h}{s} = \alpha$	Φυσική (Α)	Μαθηματικά	Παράδειγμα – Ευθύγραμμη Κίνηση - Επιτάχυνση	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	1ο	54
	Φυσική (Α)	Μαθηματικά	Παράδειγμα – Ευθύγραμμη Κίνηση - Επιτάχυνση	Γραφική Παράσταση	1ο	54
Όταν η κίνηση είναι **ευθύγραμμη ομαλή**, το κινητό διανύει ίσες μετατοπίσεις σε ίσους χρόνους, κινούμενο κατά την ίδια φορά. Η **ταχύτητα** στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι το διανυσματικό μέγεθος που προκύπτει ως το πηλίκο της μετατόπισης προς την αντίστοιχη χρονική διάρκεια, σύμφωνα με τον τύπο $\vec{\upsilon} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$	Φυσική (Α)	Φυσική – Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ευθύγραμμη Κίνηση- Περίληψη	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	1ο	61

9. Να συγκρίνετε τις ταχύτητες 10m/s και 36km/h.	Φυσική (Α)	Φυσική	Ερωτήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό	$1^{Ο}$	63
10. Σε ποια κίνηση ταυτίζονται η τιμή της μέσης και της στιγμιαίας ταχύτητας;	Φυσική (Α)	Φυσική	Ερωτήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό	$1^{Ο}$	63
11. Πώς γίνεται ο υπολογισμός της επιτάχυνσης ενός κινητού, το οποίο κινείται ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα, από το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου;	Φυσική (Α)	Φυσική	Ερωτήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό	$1^{ο}$	63
12. Ένας σκιέρ κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντια πίστα και το διάγραμμα της θέσης του με το χρόνο φαίνεται στην εικόνα. Μπορούμε από το διάγραμμα να συμπεράνουμε ότι η ταχύτητα του σκιέρ αυξάνεται; 	Φυσική (Α)	Φυσική -Μαθηματικά	Ερωτήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό – Γραφική Παράσταση	$1^{ο}$	63-64
13. Δύο μαθητές Α και Β συζητούν για ένα θέμα Φυσικής. Ο μαθητής Α ρωτά τον Β. “Στην εικόνα φαίνεται το διάγραμμα της ταχύτητας ενός κινητού σε συνάρτηση με το χρόνο. Μπορούμε να υπολογίσουμε το διάστημα που διέτρεξε το κινητό, μέχρι να σταματήσει;”  Ο μαθητής Β αφού σκέφτηκε λίγο είπε: “Το διάστημα που διέτρεξε το κινητό είναι 25m”. Να εξετάσετε την ορθότητα της απάντησης του μαθητή Β.	Φυσική (Α)	Φυσική -Μαθηματικά	Ερωτήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό – Γραφική Παράσταση	$1^{ο}$	64
14. Στην εικόνα φαίνεται πώς μεταβάλλεται η ταχύτητα δύο κινητών, που κινούνται ευθύγραμμα, σε συνάρτηση με το χρόνο.  Α. Να συγκρίνετε τις επιταχύνσεις των δυο κινητών. Β. Ποιο από τα δύο κινητά διανύει μεγαλύτερη απόσταση στον ίδιο χρόνο κίνησης; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.	Φυσική (Α)	Φυσική -Μαθηματικά	Ερωτήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό – Γραφική Παράσταση	$1^{ο}$	64
25. Να συμπληρωθούν τα κενά στις επόμενες προτάσεις: Α. Σε διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου για ένα κινητό, από το .... του τμήματος μεταξύ γραφικής παράστασης και άξονα χρόνου, υπολογίζουμε τη θέση του κινητού. Β. Σε ένα διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου για ένα κινητό από την ………………. της γραφικής παράστασης υπολογίζουμε την τιμή της επιτάχυνσης.	Φυσική (Α)	Φυσική	Ερωτήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό	$1^{ο}$	66

26. Στο διάγραμμα της εικόνας φαίνεται η γραφική παράσταση διαστήματος - χρόνου για δύο κινητά Α και Β. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;  Α. Το κινητό Α έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το Β. Β. Το κινητό Β έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το Α. Γ. Τα κινητά έχουν την ίδια ταχύτητα. Δ. Τα κινητά δεν έχουν ταχύτητα.	Φυσική (Α)	Φυσική – Μαθηματικά	Ερωτήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό – Γραφική Παράσταση	1ο	66
28. Ένα κινητό κάνει ευθύγραμμη κίνηση και το διάστημα που διανύει μεταβάλλεται όπως στην εικόνα.  Σε ποια από τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 η ταχύτητα του κινητού είναι μεγαλύτερη; Να δικαιολογήσετε γιατί η κίνησή του δεν είναι ομαλή.	Φυσική (Α)	Φυσική- Μαθηματικά	Ερωτήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό – Γραφική Παράσταση	1ο	66
30. Στην εικόνα φαίνεται το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου, ενός αυτοκινήτου. Το εμβαδό του τραπεζίου αντιπροσωπεύει: Α. Την ταχύτητα του αυτοκινήτου. Β. Την επιτάχυνση του αυτοκινήτου. Γ. Το διανυόμενο διάστημα. Δ. Δεν αντιπροσωπεύει τίποτα από αυτά.  	Φυσική (Α)	Φυσική – Μαθηματικά	Ερωτήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό – Γραφική Παράσταση	1ο	66-67
31. Στην εικόνα φαίνονται τα διαγράμματα ταχύτητας - χρόνου για δύο δρομείς που κινούνται ευθύγραμμα.  Με ποια από τις παρακάτω προτάσεις συμφωνείτε; Α. Οι δύο δρομείς κινούνται με την ίδια επιτάχυνση. Β. Οι δύο δρομείς κινούνται με την ίδια ταχύτητα. Γ. Οι δύο δρομείς κινούνται ο ένας δίπλα στον άλλο. Δ. Στον ίδιο χρόνο διανύουν ίσες αποστάσεις.	Φυσική (Α)	Φυσική – Μαθηματικά	Ερωτήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό – Γραφική Παράσταση	1ο	67

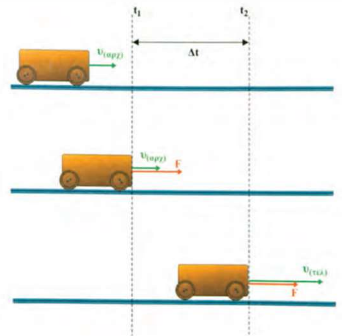
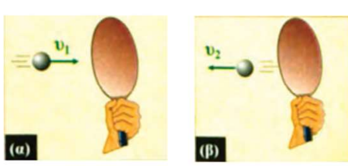
32. Στην εικόνα φαίνονται τα διαγράμματα διαστήματος - χρόνου για τρία σώματα Α, Β και Γ που κινούνται ευθύγραμμα. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή;  Α. Το σώμα Α κινείται με σταθερή επιτάχυνση, το σώμα Β κινείται με σταθερή ταχύτητα και το Γ είναι σταματημένο. Β. Το σώμα Α κινείται με σταθερή ταχύτητα, το σώμα Β με σταθερή επιτάχυνση και το σώμα Γ είναι σταματημένο. Γ. Το σώμα Α κινείται με σταθερή επιτάχυνση το σώμα Β είναι σταματημένο και το σώμα Γ με σταθερή ταχύτητα.	Φυσική (Α)	Φυσική – Μαθηματικά	Ερωτήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό – Γραφική Παράσταση	1^{ο}	67
38. Ένα αυτοκίνητο προσπερνά ένα άλλο. Τη χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο αυτοκίνητα βρίσκονται το ένα δίπλα στο άλλο: Α. Η ταχύτητα του ενός είναι ίση με την ταχύτητα του άλλου. Β. Οι ταχύτητές τους είναι διαφορετικές. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.	Φυσική (Α)	Φυσική	Ερωτήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό	1^{ο}	68
39. Ο οδηγός ενός αυτοκινήτου φρενάρει όταν βλέπει να ανάβει το πορτοκαλί φως στο σηματοδότη ενός δρόμου: Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές; Α. Η επιτάχυνση και η ταχύτητα έχουν αντίθετη φορά. Β. Η επιτάχυνση και η ταχύτητα έχουν την ίδια φορά. Γ. Η επιτάχυνση έχει ίδια φορά με τη μεταβολή της ταχύτητας. Δ. Η επιτάχυνση έχει αντίθετη φορά με τη μεταβολή της ταχύτητας.	Φυσική (Α)	Φυσική	Ερωτήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό	1^{ο}	68
40. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις αν είναι σωστές (Σ), ή λανθασμένες (Λ). - Τη χρονική στιγμή που ξεκινά ένα ποδήλατο η ταχύτητά του είναι μηδέν. - Τη χρονική στιγμή που ξεκινά ένα ποδήλατο η επιτάχυνσή του είναι μηδέν. - Η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν την ίδια διεύθυνση στην ευθύγραμμη κίνηση. - Η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν πάντοτε την ίδια φορά στην ευθύγραμμη κίνηση.	Φυσική (Α)	Φυσική	Ερωτήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό	1^{ο}	68
1. Ένα αυτοκίνητο διανύει απόσταση 120m σε χρόνο 4s με σταθερή ταχύτητα. Να υπολογίσετε την τιμή της ταχύτητας του αυτοκινήτου και να κάνετε τα διαγράμματα ταχύτητας - χρόνου και διαστήματος - χρόνου.	Φυσική (Α)	Φυσική	Ασκήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό	1^{ο}	69
2. Μια ατμομηχανή έχει μήκος $\ell = 20m$, κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 10m/s$ και περνά μια γέφυρα μήκους $s = 1.980m$. Για πόσο χρόνο θα βρίσκεται τμήμα της ατμομηχανής πάνω στη γέφυρα;	Φυσική (Α)	Φυσική	Ασκήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό	1^{ο}	69

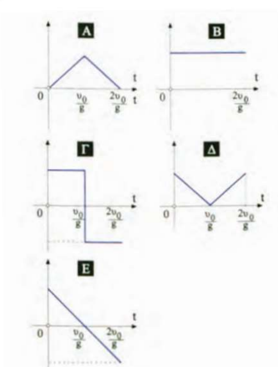
3. Όχημα κάνει ευθύγραμμη κίνηση και το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου φαίνεται στην εικόνα.  Α. Να βρεθεί το συνολικό διάστημα που διανύει το όχημα. Β. Ποια είναι η τιμή της μέσης ταχύτητας του οχήματος; Γ. Να γίνει το διάγραμμα διαστήματος - χρόνου.	Φυσική (Α)	Φυσική -Μαθηματικά	Ασκήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό – Γραφική Παράσταση	$1^{ο}$	69
4. Δύο αυτοκίνητα ξεκινάνε ταυτόχρονα από τα σημεία Α και Β μιας ευθύγραμμης διαδρομής κινούμενα αντίθετα με σταθερές ταχύτητες $υ_1$ = 36km/h και $υ_2$ = 54km/h αντίστοιχα. Α. Να βρεθεί μετά από πόσο χρόνο και σε ποιο σημείο θα συναντηθούν τα αυτοκίνητα, αν είναι ΑΒ = 1km. Β. Να γίνουν τα διαγράμματα ταχύτητας - χρόνου και διαστήματος - χρόνου και για τα δύο κινητά σε κοινά συστήματα αξόνων.	Φυσική (Α)	Φυσική	Ασκήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό	$1^{ο}$	69
5. Περιπολικό αρχίζει να καταδιώκει μοτοσυκλετιστή που βρίσκεται σε απόσταση d = 500m μπροστά από το περιπολικό. Το περιπολικό έχει σταθερή ταχύτητα $υ_π$ = 30m/s, ενώ ο μοτοσυκλετιστής κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_Μ$ = 20m/s. Να βρεθούν: Α. Ο χρόνος t που απαιτείται για να φτάσει το περιπολικό τον μοτοσυκλετιστή. Β. Το διάστημα που θα διανύσει το περιπολικό στο χρόνο αυτό.	Φυσική (Α)	Φυσική	Ασκήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό	$1^{ο}$	69
6. Η εξίσωση κίνησης ενός ποδηλάτη που κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά είναι: x = 10t (x σε m, t σε s). Να γίνει το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου για την κίνηση αυτή, από t = 0 μέχρι t = 5s. Να υπολογίσετε το διάστημα που διάνυσε ο ποδηλάτης σε 5s.	Φυσική (Α)	Φυσική	Ασκήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό	$1^{ο}$	69
7. Ένας μοτοσυκλετιστής ξεκινά από την ηρεμία και κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο με σταθερή επιτάχυνση 2m/s^2. Να υπολογιστούν: Α. Η ταχύτητά του μετά από 15s. Β. Η απόσταση που διάνυσε στο χρόνο αυτό.	Φυσική (Α)	Φυσική	Ασκήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό	$1^{ο}$	69
***11.** Δύο κινητά βρίσκονται στο ίδιο σημείο ευθύγραμμου δρόμου και ξεκινούν ταυτόχρονα. Στο διάγραμμα της εικόνας φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις ταχύτητας - χρόνου για τα δύο αυτά κινητά.  Να υπολογιστούν: Α. Σε ποια χρονική στιγμή η ταχύτητα των κινητών έχει την ίδια τιμή; Β. Στα 10s πόσα m προηγείται το κινητό β του κινητού α; Γ. Σε ποια χρονική στιγμή συναντώνται τα κινητά;	Φυσική (Α)	Φυσική -Μαθηματικά	Ασκήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση	Λεκτικό – Γραφική Παράσταση	$1^{Ο}$	70

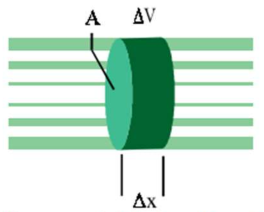
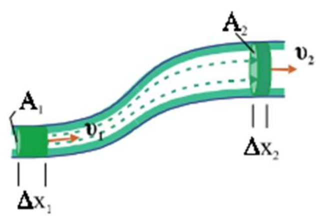
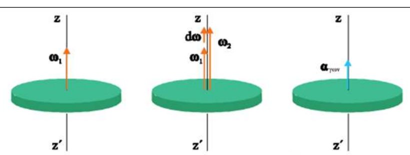
<table>
<tr>
<td>
12. Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την ηρεμία και κινείται με σταθερή επιτάχυνση. Για να περάσει από δύο σημεία Α και Β που απέχουν μεταξύ τους απόσταση d = 200m χρειάζεται χρόνο 10s. Αν η ταχύτητα του αυτοκινήτου τη στιγμή που περνά από το σημείο Β είναι $υ_Β = 30m/s$ να βρεθούν:
Α. η ταχύτητά του όταν περνά από το σημείο Α και
Β. η επιτάχυνσή του.
</td>
<td>Φυσική (Α)</td>
<td>Φυσική</td>
<td>Ασκήσεις – Ευθύγραμμη Κίνηση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση</td>
<td>Λεκτικό</td>
<td>1ο</td>
<td>70</td>
</tr>
<tr>
<td>
Δραστηριότητα

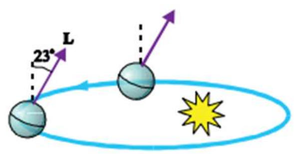
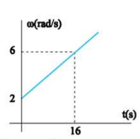
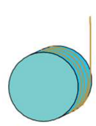
Μια σφαίρα του μπιλιάρδου αφήνεται να πέσει ελεύθερα δίπλα σε μία μετροταινία και φωτογραφίζεται η πτώση της με διαδοχικές φωτογραφίες που λαμβάνονται σε μικρά διαστήματα (π.χ. κάθε 1/30 του s).
Από την ανάλυση της φωτογραφίας της εικόνας προκύπτει πίνακας τιμών με δέκα διαφορετικές χρονικές στιγμές (1,2,...11) και μετρήσιμες μεταβολές διαστήματος (Δs).
ΠΙΝΑΚΑΣ
<table>
<tr><th>Αριθμός διαστήματος</th><th>Μετατόπιση Δs (cm)</th><th>Μέση ταχύτητα Δs/Δt=υ (cm/s)</th><th>Μεταβολή στη μέση ταχύτητα Δυ (cm/s)</th><th>Επιτάχυνση Δυ/Δt (m/s²)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>7,70</td><td>231</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>8,75</td><td>263</td><td>32</td><td>9,6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>9,80</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>10,85</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>11,99</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>13,09</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>14,18</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>15,22</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>16,31</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>17,45</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>11</td><td>18,52</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Μέση επιτάχυνση =</td></tr>
</table>
Από τα διάφορα Δs και τη σταθερή διαφορά χρόνου (Δt = 1/30s) μεταξύ κάθε φωτογραφίας και της επομένης, προκύπτουν διάφορες τιμές για τη μέση ταχύτητα και την επιτάχυνση $υ = \frac{Δs}{Δt}$, $g = \frac{Δυ}{Δt}$.
Συγκεκριμένα, κατά τη διάρκεια του 1ου Δt = 1/30s η
</td>
<td>Φυσική (Α)</td>
<td>Φυσική - Μαθηματικά</td>
<td>Δραστηριότητα – Δυναμική σε μια Διάσταση</td>
<td>Λεκτικό – Πίνακας – Εικόνα – Μαθηματικός Τύπος</td>
<td>1Ο</td>
<td>92</td>
</tr>
<tr>
<td>
σφαίρα πέφτει κατά Δs = 7,7cm, όπως φαίνεται από την ανάλυση της εικόνας. Έτσι, η μέση ταχύτητα θα είναι:
$$υ_1 = \frac{Δs}{Δt} \quad ή \quad υ_1 = \frac{7,7}{0,033}\frac{cm}{s} = 231cm/s.$$
Αντίστοιχα, κατά τη διάρκεια του 2ου Δt = 1/30s, η σφαίρα πέφτει κατά Δs = 8,75cm. Είναι λοιπόν
$$υ_2 = \frac{Δs}{Δt} \quad ή \quad υ_2 = 262,5cm/s.$$
Από τη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας ($Δυ = υ_2 - υ_1$) και τη σταθερή μεταβολή χρόνου (Δt = 1/30s) προκύπτει η τιμή της επιτάχυνσης, που αντιστοιχεί στη μεταβολή αυτή, δηλαδή:
$$g = \frac{Δυ}{Δt} \quad ή \quad g = \frac{263-231}{0,033}\frac{cm/s}{s} \quad ή \quad g = 960cm/s^2$$
Επαναλαμβάνοντας την ίδια εργασία μεταξύ των στιγμών 2 και 3, 3 και 4, 4 και 5 κ.ο.κ., να βρείτε τελικά ένα σύνολο τιμών από τις οποίες να υπολογίσετε το μέσο όρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας.
Πρέπει όμως να τονίσουμε ότι, για τη μελέτη της πτώσης των σωμάτων επιλέγουμε μικρά διαστήματα, σ' ένα συνολικό μήκος που να μην υπερβαίνει τα 2m και σώματα μεγάλης πυκνότητας, ώστε να είναι πρακτικά αμελητέα η αντίσταση του αέρα. Οι αποκλίσεις των τιμών που βρήκατε από τη γνωστή τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας οφείλονται στα πειραματικά σφάλματα.
</td>
<td>Φυσική (Α)</td>
<td>Φυσική - Μαθηματικά</td>
<td>Δραστηριότητα – Δυναμική σε μια Διάσταση</td>
<td>Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος</td>
<td>1Ο</td>
<td>93</td>
</tr>
<tr>
<td>
Κατά την πρόσκρουση ενός αυτοκινήτου σε σταθερό εμπόδιο, π.χ. τοίχο, ο χρόνος στον οποίο το όχημα σταματάει είναι πολύ μικρός, συνήθως κλάσμα του δευτερολέπτου. Έτσι, σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, $F = mα$, ή $F = m\frac{Δυ}{Δt}$, η δύναμη F είναι πολύ μεγάλη και το αποτέλεσμα της σύγκρουσης πολύ σοβαρό. Σε πολλά αυτοκίνητα το εμπρόσθιο τμήμα έχει σχεδιαστεί να θραύεται ώστε ο χρόνος σύγκρουσης να γίνεται μεγαλύτερος. Ίσως για το λόγο αυτό οι προφυλακτήρες των αυτοκινήτων δεν είναι πλέον μεταλλικοί.
Ο αερόσακος είναι ένα σύστημα (Εικ. 2) σχεδιασμένο να φουσκώνει κατά τη σύγκρουση.
Έτσι, προστατεύονται τα σώματα των επιβατών από την πρόσκρουση στο τιμόνι και το παρμπρίζ του αυτοκινήτου και επιπλέον αυξάνει το χρόνο που το σώμα των επιβατών ακινητοποιείται.
Ωστόσο, οι περισσότεροι τραυματισμοί

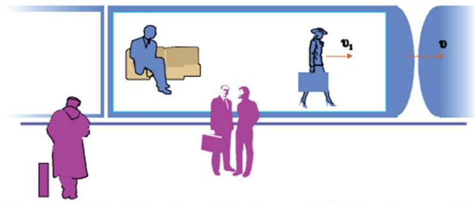
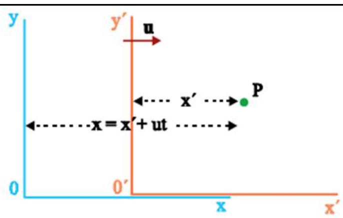
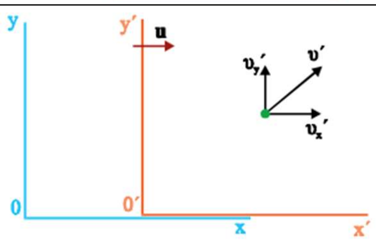
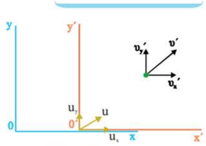
Εικόνα 2
</td>
<td>Φυσική (Α)</td>
<td>Φυσική - Μαθηματικά</td>
<td>Δραστηριότητα – Δυναμική σε μια Διάσταση – Οι ζώνες ασφαλείας και οι αερόσακοι</td>
<td>Λεκτικό – Εικόνα – Μαθηματικός Τύπος</td>
<td>1ο</td>
<td>97</td>
</tr>
</table>

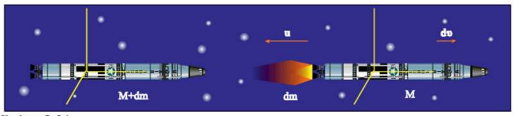
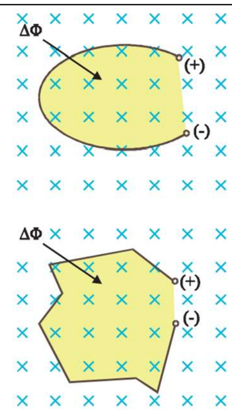
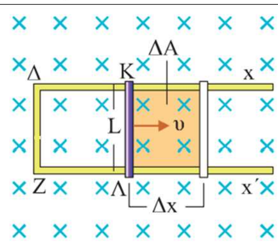
Τη σχέση αυτή μπορούμε να τη βρούμε, αν συνδυάσουμε το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής: $\vec{F} = m\vec{\alpha}$ με τη σχέση $\vec{\alpha} = \frac{\vec{\upsilon}_{τελ} - \vec{\upsilon}_{αρχ}}{\Delta t}$ που ορίζει την επιτάχυνση. Αντικαθιστώντας στην πρώτη την τιμή της επιτάχυνσης από τη δεύτερη προκύπτει ότι: $\vec{F} = m\frac{\vec{\upsilon}_{τελ} - \vec{\upsilon}_{αρχ}}{\Delta t}$ ή $\vec{F} = \frac{m\vec{\upsilon}_{τελ} - m\vec{\upsilon}_{αρχ}}{\Delta t}$	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική – Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Η δύναμη και η μεταβολή της ορμής	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	2ο	47
	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Παράδειγμα – Η δύναμη και η μεταβολή της ορμής.	Εικόνα	2ο	47
Γνωρίζουμε όμως ότι το γινόμενο $m\vec{\upsilon}_{τελ}$ είναι η τελική ορμή $\vec{p}_{τελ}$ του σώματος και $m\vec{\upsilon}_{αρχ}$ η αρχική ορμή του $\vec{p}_{αρχ}$. Η παραπάνω σχέση γράφεται έτσι: $\vec{F} = \frac{\vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ}}{\Delta t}$ **(2)** Στην περίπτωση που τα διανύσματα $\vec{p}_{αρχ}$ και $\vec{p}_{τελ}$ είναι συγγραμμικά, η σχέση (2) γράφεται: $F = \frac{p_{τελ} - p_{αρχ}}{\Delta t}$ **(3)** Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η μεταβολή της ορμής $(\vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ})$ διά του χρόνου Δt εντός του οποίου συμβαίνει αυτή ισούται με τη δύναμη $\vec{F}$ που την προκαλεί. **Συνεπώς για να αλλάξει η ορμή ενός σώματος απαιτείται η άσκηση δύναμης**.	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική – Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Η δύναμη και η μεταβολή της ορμής	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	2ο	48
Ας εξετάσουμε το νόημα που έχει αυτό το συμπέρασμα μέσα από ένα παράδειγμα. Όλοι μας λέμε ότι στο ποδόσφαιρο για να αποκτήσει η μπάλα μεγάλη ταχύτητα και συνεπώς μεγάλη ορμή πρέπει να της δώσουμε μια "δυνατή κλωτσιά" (Εικ. 2.14). Τι σημαίνει όμως αυτό;  **Εικ. 2.14**	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Παράδειγμα– Η δύναμη και η μεταβολή της ορμής	Λεκτικό - Εικόνα	2ο	48
Ένα μπαλάκι του πινγκ-πονγκ προσπίπτει κάθετα πάνω στη ρακέτα με ταχύτητα υ_1 και ανακλάται με ταχύτητα αντίθετης κατεύθυνσης υ_2. Αν γνωρίζουμε ότι το μπαλάκι έχει μάζα m μπορούμε με τη βοήθεια της σχέσης (3) να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκήθηκε. Δοκιμάστε διάφορα ζεύγη τιμών και συζητήστε τα αποτελέσματα που βρίσκετε. Η μάζα που έχει το μπαλάκι είναι 10g και το Δt ≈ 0,1s. 	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Δραστηριότητα – Η δύναμη και η μεταβολή της ορμής	Λεκτικό - Εικόνα	2ο	49

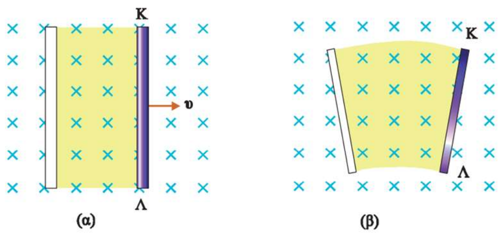
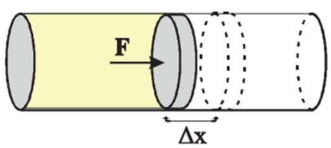
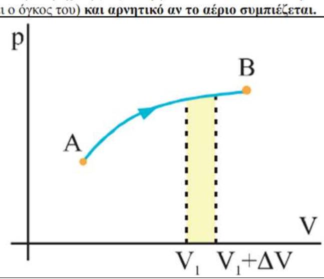
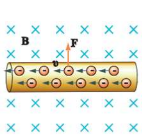
Στις προηγούμενες παραγράφους μελετήσαμε την έννοια ορμής και τη σχέση της με τη δύναμη. Με τη βοήθεια των σχέσεων: $p = mυ$ και $F = \frac{Δp}{Δt}$ μπορούμε: α) Να υπολογίσουμε, κατ' εκτίμηση, την ορμή που έχει ένα μικρό ή μεγάλο κινούμενο σώμα. β) Να εκτιμήσουμε τη δύναμη που απαιτείται για να το σταματήσουμε. Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται κατ' εκτίμηση τιμές για τη μάζα και την ταχύτητα.	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική -Μαθηματικά	Δραστηριότητα – Η δύναμη και η μεταβολή της ορμής	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	2ο	50
Η συνολική ορμή ενός μονωμένου συστήματος σωμάτων διατηρείται σταθερή. Η πρόταση αυτή είναι άμεση συνέπεια του τρίτου νόμου του Νεύτωνα σύμφωνα με τον οποίο η δράση είναι ίση με την αντίδραση. Ας θεωρήσουμε δύο σώματα που αλληλεπιδρούν. Εφ' όσον οι δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτά είναι αντίθετες, θα ισχύει: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ ή $m_1\frac{Δ\vec{υ}_1}{Δt} = -m_2\frac{Δ\vec{υ}_2}{Δt}$ Όμως ο χρόνος αλληλεπίδρασης Δt είναι ίδιος και για τα δύο σώματα και κατά συνέπεια $m_1Δ\vec{υ}_1 = -m_2Δ\vec{υ}_2$.	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική -Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Η Αρχή διατήρησης της Ορμής	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	2ο	52
Τα φαινόμενα όπως η σύγκρουση δύο αυτοκινήτων, το σφήνωμα του βλήματος στο στόχο, ο βομβαρδισμός των πυρήνων των ατόμων με σωματίδια όπως τα πρωτόνια, κ.λπ., υπάγονται σε μια γενικότερη κατηγορία και ονομάζονται φαινόμενα κρούσης. Κατά τη διάρκειά τους αναπτύσσονται πολύ μεγάλες δυνάμεις αλληλεπίδρασης και αυτό μας επιτρέπει να θεωρούμε τα συστήματα πρακτικά μονωμένα. Η αλλαγή της κινητικής κατάστασης ενός σώματος μπορεί να περιγραφεί με το διανυσματικό μέγεθος που ονομάζουμε ορμή p. Η **ορμή** δίνεται από τη σχέση $\vec{p} = m\vec{υ}$ και έχει κατεύθυνση την κατεύθυνση της ταχύτητας του σώματος. Η δύναμη που προκαλεί τη μεταβολή της ορμής δίνεται από τη σχέση: $\vec{F} = \frac{Δ\vec{p}}{Δt} = \frac{\vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ}}{Δt}$	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική -Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Η Αρχή διατήρησης της Ορμής - Περίληψη	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	2ο	59
10. Ένα σώμα ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $υ_0$ και κινείται μόνο με την επίδραση του βάρους του. Το σώμα φτάνει στο μέγιστο ύψος σε χρόνο $\frac{υ_0}{g}$. Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα αντιστοιχεί στη συνάρτηση $p = f(t)$ και ποιο στη $\frac{Δp}{Δt} = f(t)$; 	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική -Μαθηματικά	Ερωτήσεις – Η Αρχή διατήρησης της Ορμής	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος – Γραφική Παράσταση	2ο	61
17. Μπαλάκι του πινγκ-πονγκ πέφτει κάθετα πάνω σε ακίνητη ρακέτα. Η ταχύτητα πρόσπτωσης έχει μεγαλύτερη τιμή από την ταχύτητα απομάκρυνσης. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή και γιατί; Α. Η δύναμη που προκάλεσε την αλλαγή στην ορμή έχει τιμή $F = \frac{Δp}{Δt}$, όπου Δt η χρονική διάρκεια επαφής με τη ρακέτα. Β. Η κατεύθυνση της δύναμης που προκάλεσε την αλλαγή της ορμής είναι ίδια με της ταχύτητας πρόσπτωσης. Γ. Η κατεύθυνση της δύναμης που προκάλεσε την αλλαγή της ορμής είναι ίδια με της ταχύτητας απομάκρυνσης.	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική -Μαθηματικά	Ερωτήσεις – Η Αρχή διατήρησης της Ορμής	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	2ο	63
18. Οι αθλητές του καράτε δίνουν απότομα και "κοφτά" κτυπήματα και πετυχαίνουν να σπάσουν στερεά σώματα όπως τούβλα, καδρόνια, κ.τ.λ. Νομίζετε ότι αυτό σχετίζεται με τη σχέση $F = \frac{Δp}{Δt}$;	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική -Μαθηματικά	Ερωτήσεις – Η Αρχή διατήρησης της Ορμής	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	2ο	64
$υ = \lim_{Δt \to 0} \frac{Δx}{Δt}$.	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική- Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο – Εύρεση της ταχύτητας με τον διαφορικό λογισμό	Μαθηματικός Τύπος	1ο	42

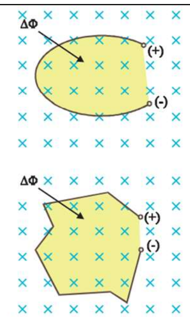
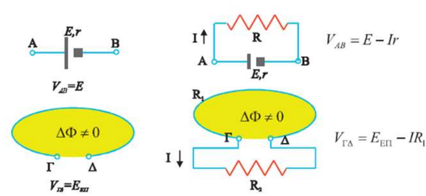
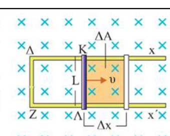
$a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$.	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική- Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο – Εύρεση της ταχύτητας με τον διαφορικό λογισμό	Μαθηματικός Τύπος	1ο	42
$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t}$	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική- Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο – Ρευστά σε κίνηση	Μαθηματικός Τύπος	3ο	92
$\Delta V = A\Delta x$	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική- Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο – Ρευστά σε κίνηση	Μαθηματικός Τύπος	3ο	92
$\Pi = \frac{A\Delta x}{\Delta t} = Au$	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική- Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο – Ρευστά σε κίνηση	Μαθηματικός Τύπος	3ο	92
 *Στο χρονικό διάστημα Δt, από μια διατομή Α του σωλήνα περνάει υγρό όγκου Α Δx.* **Σχήμα 3-7.**	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική	Θεωρητικό πλαίσιο – Ρευστά σε κίνηση	Λεκτικό – Εικόνα	3ο	92
 *Αν το ρευστό που ρέει στο σωλήνα είναι ασυμπίεστο, το γινόμενο Α υ είναι σταθερό.* **Σχήμα 3-8.**	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική	Θεωρητικό πλαίσιο – Ρευστά σε κίνηση	Λεκτικό - Εικόνα	3ο	92
3.27 Μια αντλία χρησιμοποιείται για την άντληση νερού από πηγάδι βάθους 5m. Το νερό βγαίνει από την αντλία με σωλήνα διατομής $10\ cm^2$ και με ταχύτητα $\upsilon = 20\ m/s$. Υπολογίστε την ισχύ της αντλίας. Δίνεται η πυκνότητα του νερού $\rho = 10^3\ kg/m^3$ και $g = 10\ m/s^2$.	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική	Προβλήματα– Ρευστά σε κίνηση.	Λεκτικό	3ο	106
 *(α) Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου αυξάνεται κατά dω. Ο δίσκος έχει γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{γων}$.* **Σχήμα 4-3.** **Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του σώματος τη στιγμή *t*, ονομάζεται γωνιακή επιτάχυνση του σώματος.** $\boxed{\alpha_{γων} = \frac{d\omega}{dt}}$ **Η γωνιακή επιτάχυνση έχει την κατεύθυνση του διανύσματος dω και μονάδα $1\ rad/s^2$.**	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική – Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο – Κινήσεις των στερεών σωμάτων.	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος – Εικόνα	4ο	110
Η επιτάχυνση a του σώματος είναι ίση με το ρυθμό που αυξάνεται η ταχύτητα ενός σημείου της περιφέρειας της τροχαλίας. Για την επιτάχυνση αυτή ισχύει $a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = \alpha_{γων} R \quad (4.11)$	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική – Μαθηματικά	Παράδειγμα – Κινήσεις των στερεών σωμάτων.	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	4ο	122

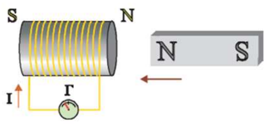
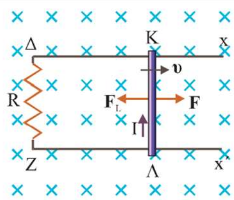
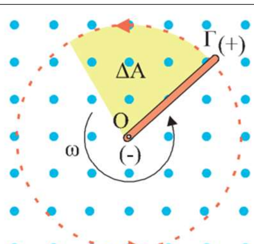
και εξαιτίας της (4.7) $\boxed{\Sigma\tau=\frac{dL}{dt}}$ **(4.18)** Επομένως **το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν σε ένα στερεό που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του.**	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική- Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο – Στροφορμή	Λεκτικό - Μαθηματικός Τύπος	4ο	125
 *Η στροφορμή της Γης -λόγω της ιδιοπεριστροφής της- διατηρείται σταθερή.* **Σχήμα 4-29.**	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική	Θεωρητικό πλαίσιο – Στροφορμή	Λεκτικό - Εικόνα	4ο	126
	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική	Θεωρητικό πλαίσιο – Στροφορμή	Εικόνα	4ο	126
 *Η χορεύτρια συμπτύσσοντας τα άκρα της αυξάνει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της.* **Εικόνα 4-4.**	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική	Θεωρητικό πλαίσιο – Στροφορμή	Εικόνα	4ο	126
4.2 Ένα σώμα κάνει ομαλή στροφική κίνηση. Ποια είναι η γωνιακή του επιτάχυνση;	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική	Ερωτήσεις – Κινηματική της περιστροφής	Λεκτικός	4ο	134
4.32 Η γωνιακή ταχύτητα ενός τροχού που στρέφεται μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος 4.53. Ποια είναι η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού; Ποια χρονική στιγμή η γωνιακή ταχύτητα του τροχού θα έχει τιμή 20 rad/s; *[Απ: $0,25\ rad/s^2$, $72\ s$]*  Σχήμα 4-53.	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική- Μαθηματικά	Ασκήσεις- Κινηματική του στερεού	Λεκτικός – Γραφική Παράσταση	4ο	140
4.68 Το γιο - γιο του σχήματος αποτελείται από κύλινδρο με μάζα $m = 120g$ και ακτίνα $R = 1,5\ cm$, γύρω από τον οποίο έχει τυλιχτεί πολλές φορές νήμα (σχ. 4.72). Κρατώντας το ελεύθερο άκρο του νήματος, αφήνουμε τον κύλινδρο να κατεβαίνει. Να υπολογίσετε α) το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η στροφορμή του κυλίνδρου καθώς κατεβαίνει, και β) την ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη στιγμή που έχει ξετυλιχτεί σκοινί μήκους 30cm. Θεωρήστε το νήμα κατακόρυφο. Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του είναι $I=\frac{1}{2}mR^2$. Δίνεται $g=10\ m/s^2$. *[Απ: α) $6\times10^{-3}\ kg\,m^2/s^2$, β) $2\ m/s$]*  Σχήμα 4-72.	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική	Προβλήματα – Μηχανική στερεού σώματος.	Λεκτικός - Εικόνα	4ο	146

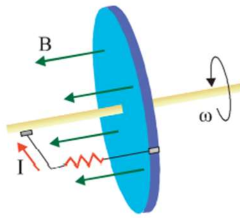
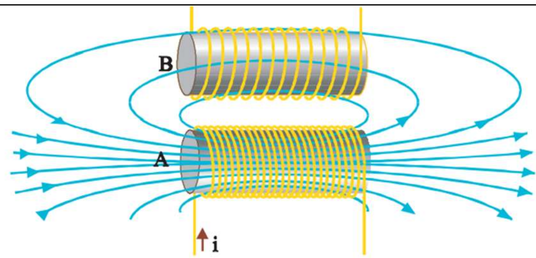
 *Η ταχύτητα ενός επιβάτη του τρένου, γίνεται αντιληπτή με διαφορετικό τρόπο από ένα παρατηρητή Α που βρίσκεται ακίνητος μέσα στο τρένο και από κάποιο παρατηρητή Β που είναι ακίνητος στο σταθμό.* **Σχήμα 5-12.**	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική	Θεωρητικό πλαίσιο – Σχετική ταχύτητα σε αδρανειακά συστήματα	Λεκτικό - Εικόνα	5ο	161
 **Σχήμα 5-14.**	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο – Σχετική ταχύτητα σε αδρανειακά συστήματα	Γραφική Παράσταση	5ο	162
 **Σχήμα 5-15.**	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο – Σχετική ταχύτητα σε αδρανειακά συστήματα	Γραφική Παράσταση	5ο	162
Από τους μετασχηματισμούς θέσης εύκολα προκύπτουν οι συνιστώσες της ταχύτητας του P όπως γίνεται αντιληπτή από το Σ. $x = x' + ut$ άρα $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'}{\Delta t} + u\frac{\Delta t}{\Delta t}$ οπότε $\upsilon_x = \upsilon'_x + u$ $y = y'$ άρα $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{\Delta t}$ οπότε $\upsilon_y = \upsilon'_y$ Αν η ταχύτητα **u** με την οποία κινείται το Σ′ ως προς το Σ δεν είναι παράλληλη στον Ox, αναλύουμε τη **u** στις συνιστώσες $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$ (σχ. 5.16). **Σχήμα 5-15.**  **Σχήμα 5-16.**	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική- Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο – Σχετική ταχύτητα σε αδρανειακά συστήματα	Λεκτικός – Γραφική Παράσταση	4Ο	162
$x = x' + u_x t$ $\qquad \upsilon_x = \upsilon'_x + u_x$ $y = y' + u_y t$ $\qquad \upsilon_y = \upsilon'_y + u_y$ *διανυσματικά για την ταχύτητα* $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}' + \mathbf{u}$ Οι παραπάνω μετασχηματισμοί είναι γνωστοί ως **μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου.** Από την εξίσωση $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}' + \mathbf{u}$ προκύπτει $\frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}'}{\Delta t} + \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} \qquad (5.10)$ και επειδή η **u** είναι σταθερή $\frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} = 0$ Από την (5.10) έχουμε ότι $\frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}'}{\Delta t}$ ή $\boxed{\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}'}$ $\mathbf{F} = m\boldsymbol{\alpha}$ και $\mathbf{F}' = m\boldsymbol{\alpha}'$ οπότε $\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{F}'}$	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική- Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο – Σχετική ταχύτητα σε αδρανειακά συστήματα	Μαθηματικός Τύπος	5ο	163

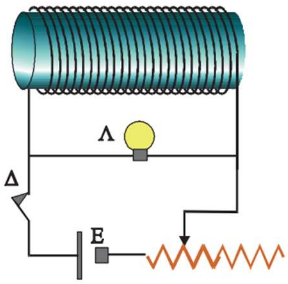
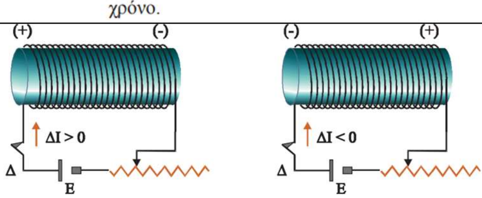
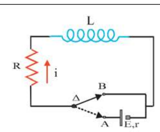
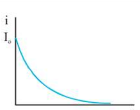
 Σχήμα 5-24. Εφόσον το σύστημα είναι μονωμένο εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής με τις ταχύτητες να αναφέρονται όλες στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας. $p_{πριν} = p_{μετά}$ άρα $0=-dmu+Md\upsilon$ Θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε την προωστική δύναμη που δέχεται ο πύραυλος. Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει $Md\upsilon = dmu$ και $M\frac{d\upsilon}{dt}=u\frac{dm}{dt}$ δηλαδή $Ma=u\frac{dm}{dt}$ και τελικά $\boxed{F=u\frac{dm}{dt}}$ όπου $\frac{dm}{dt}$ ο ρυθμός με τον οποίο εκτοξεύονται τα καυσαέρια του πυραύλου.	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική- Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο – Προώθηση του πυραύλου.	Μαθηματικός Τύπος - Εικόνα	5ο	168
5.37 Τα καυσαέρια βγαίνουν από ένα πύραυλο που κινείται στο διάστημα με ρυθμό $dm/dt=140\ kg/s$ και σχετική ταχύτητα $u=1000\ m/s$ ως προς τον πύραυλο. Να υπολογίσετε την προωστική δύναμη του πυραύλου και την επιτάχυνσή του κάποια χρονική στιγμή που η μάζα του είναι $M=10\ ton$. [Απ: 140.000 N , 14 m/s^2]	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική	Ασκήσεις – Σχετική ταχύτητα σε αδρανειακά συστήματα	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	5ο	180
5.38 Ένας πύραυλος ταξιδεύει στο διάστημα και κάποια χρονική στιγμή έχει μάζα $4000\ kg$, μαζί με τα καύσιμά του. Η ταχύτητα με την οποία εκτοξεύονται τα καυσαέρια είναι $1500\ m/s$ ως προς τον πύραυλο. Πόσα kg καυσαερίων πρέπει να αποβάλλει ανά δευτερόλεπτο ο πύραυλος ώστε να αποκτήσει στιγμιαία επιτάχυνση $15\ m/s^2$. [Απ: 40 kg/s]	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική	Ασκήσεις – Σχετική ταχύτητα σε αδρανειακά συστήματα	Λεκτικός	5ο	180
 Σχ. 5.3 Όταν μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια που ορίζει ένας αγωγός με το σχήμα του, στα άκρα του αγωγού εμφανίζεται τάση από επαγωγή. Τα πρόσημα + και - στο σχήμα είναι αυθαίρετα.	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική	Θεωρητικό πλαίσιο – Ηλεκτρομαγνητική Επαγωγή	Λεκτικό - Εικόνα	5ο	185
 Σχ. 5.7 Καθώς ο αγωγός ΚΛ κινείται, μεταβάλλεται το εμβαδόν του πλαισίου ΚΔΖΛ, με αποτέλεσμα να μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από αυτό.	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική	Θεωρητικό πλαίσιο – Ευθύγραμμος αγωγός κινούμενος σε ομογενές μαγνητικό πεδίο.	Λεκτικό - Εικόνα	5ο	189

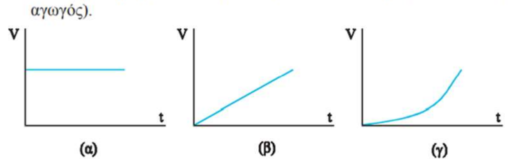
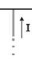
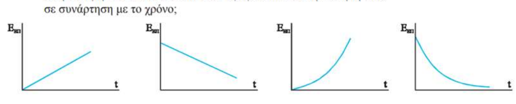
 **Σχ. 5.8** Στην περίπτωση ενός αγωγού που κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο, ΔΦ είναι η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια που ορίζει ο αγωγός με την κίνησή του.	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική	Θεωρητικό πλαίσιο – Ευθύγραμμος αγωγός κινούμενος σε ομογενές μαγνητικό πεδίο.	Λεκτικό - Εικόνα	5^{O}	189
7.23 Πόσα φωτόνια με μήκος κύματος $\lambda = 663$ nm πρέπει να προσκρούουν ανά δευτερόλεπτο κάθετα σε μια απόλυτα ανακλαστική επιφάνεια, ώστε να ασκήσουν σ' αυτή δύναμη 1N. Δίνεται $h = 6,63 \times 10^{-34}\,Js$ *[Απ: 5×10^{26} φωτόνια/s]*	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ	Φυσική	Ασκήσεις - Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο - Ορμή φωτονίων	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	7^{o}	251
 **Σχ. 2.5** Το αέριο εκτονώνεται και το έμβολο μετατοπίζεται κατά Δx. Η δύναμη F που ασκεί το αέριο στο έμβολο παράγει έργο ΔW.	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική - Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο – Έργο παραγόμενο από αέριο κατά την μεταβολή όγκων.	Εικόνα- Λεκτικό	2^{o}	40
Καθώς τα μόρια του αερίου μέσα στον κύλινδρο συγκρούονται με τα τοιχώματα του κυλίνδρου ασκούν δυνάμεις σ' αυτά. Έστω **F** η ολική δύναμη που ασκεί το αέριο στο έμβολο. Αν το έμβολο μετακινηθεί προς τα έξω κατά την πολύ μικρή απόσταση Δx, το έργο που παράγει η δύναμη που ασκεί το αέριο είναι: $\Delta W = F\,\Delta x$ (2.1) Αν το εμβαδόν του εμβόλου είναι A και η πίεση του αερίου p, ισχύει $p = \frac{F}{A}$ ή $F = p\,A$ και η σχέση (2.1) γίνεται $\Delta W = p\,A\,\Delta x$ (2.2) Όμως $A\,\Delta x = \Delta V$ όπου ΔV η πολύ μικρή μεταβολή του όγκου του αερίου. Έτσι μπορούμε να εκφράσουμε το έργο που παράγει το αέριο $\boxed{\Delta W = p\,\Delta V}$ (2.3) Σύμφωνα με τη σχέση (2.3) **το έργο είναι θετικό αν το αέριο εκτονώνεται** (αυξάνει ο όγκος του) **και αρνητικό αν το αέριο συμπιέζεται.**	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική - Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο – Έργο παραγόμενο από αέριο κατά την μεταβολή όγκων.	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	2^{o}	40
	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο – Έργο παραγόμενο από αέριο κατά την μεταβολή όγκων.	Γραφική Παράσταση	2^{o}	40
 **Σχ. 4.24** Ένα στοιχειώδες τμήμα ρευματοφόρου αγωγού μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Τα ηλεκτρόνια που κινούνται στον αγωγό δέχονται δύναμη από το μαγνητικό πεδίο. Η δύναμη σημειώνεται ενδεικτικά πάνω σε ένα φορτίο. **Απόδειξη της σχέσης** $F = BIl$ ημφ Το κάθε φορτίο που κινείται μέσα στον αγωγό δέχεται δύναμη $B\|q\|\upsilon$ ημφ. Για να βρούμε τη δύναμη που δέχεται ο αγωγός θα πολλαπλασιάσουμε τη δύναμη που δέχεται κάθε φορτίο με το συνολικό αριθμό των φορέων φορτίου μέσα στον αγωγό. Αν n είναι οι φορείς φορτίου ανά μονάδα όγκου, επειδή ο όγκος του σύρματος είναι $A \cdot l$ (A: η διατομή του σύρματος), ο ολικός αριθμός φορέων φορτίου είναι $nA \cdot l$. Η ολική δύναμη που δέχεται ο αγωγός είναι $F = nAl\,B\|q\|\upsilon$ ημφ (4.19) Όμως το γινόμενο $nA\|q\|\upsilon$ δίνει το ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό. Πράγματι, η ταχύτητα των φορέων γράφεται $\upsilon = \Delta x / \Delta t$ οπότε $nA\|q\|\upsilon = nA\|q\|\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Το γινόμενο $A\Delta x$ δίνει τον όγκο του τμήματος του αγωγού μήκους Δx, οπότε το γινόμενο $nA\Delta x$ είναι ο ολικός αριθμός φορέων σ' αυτό το τμήμα του αγωγού και το $\|q\|nA\Delta x$ είναι το ολικό φορτίο $\|\Delta Q\|$ που μετακινείται στο τμήμα Δx του αγωγού $nA\|q\|\upsilon = nA\|q\|\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\|\Delta Q\|}{\Delta t} = I$ (4.20) και η σχέση (4.19) γίνεται $F = BIl$ ημφ	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική – Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο- Δύναμη Laplace – Απόδειξη.	Λεκτικό- Μαθηματικός τύπος – Εικόνα	4^{o}	164

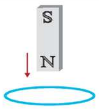
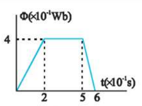
 **Σχ. 5.3** Όταν μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια που ορίζει ένας αγωγός με το σχήμα του, στα άκρα του αγωγού εμφανίζεται τάση από επαγωγή. Τα πρόσημα + και - στο σχήμα είναι αυθαίρετα.	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Θεωρητικό πλαίσιο – Ηλεκτρομαγνητική Επαγωγή	Λεκτικός - Εικόνα	5ο	185
Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται σε ένα κύκλωμα είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής που διέρχεται από την επιφάνεια που ορίζει το κύκλωμα.	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Θεωρητικό πλαίσιο – Ηλεκτρομαγνητική Επαγωγή	Λεκτικός	5ο	186
$$E_{ΕΠ} = \frac{\lvert\Delta\Phi_B\rvert}{\Delta t}$$	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική -Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο – Ηλεκτρομαγνητική Επαγωγή	Μαθηματικός Τύπος	5ο	186
1. Η σχέση (5.1) δίνει τη μέση ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται στο κύκλωμα σε χρόνο Δt. Για να υπολογίσουμε την ηλεκτρεγερτική δύναμη, στο κύκλωμα, κάποια στιγμή t πρέπει ο χρόνος Δt να είναι απειροστά μικρός. $$E_{ΕΠ} = N\frac{\lvert d\Phi_B\rvert}{dt}$$ 2. Αν ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής είναι σταθερός και η $E_{ΕΠ}$ θα έχει σταθερή τιμή στο χρονικό διάστημα Δt. 3. Το πηνίο ή το πλαίσιο που αναφέρθηκαν προηγούμενα, έγιναν ηλεκτρικές πηγές. Επομένως η τάση στα άκρα τους θα εξαρτάται από το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα. Η σχέση (5.1) δίνει την ηλεκτρεγερτική δύναμη αυτής της πηγής, δηλαδή την τάση στα άκρα του αγωγού όταν δε διαρρέεται από ρεύμα. Αν ο αγωγός συνδεθεί σε κλειστό κύκλωμα, η τάση στα άκρα του δεν είναι ίση με την ηλεκτρεγερτική δύναμη αλλά είναι μειωμένη κατά τον παράγοντα IR, όπου R η αντίστασή του.  Σχ. 5.4	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική - Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο - Ο κανόνας του lenz και η αρχή διατήρησης της ενέργειας στο φαινόμενο της επαγωγής.	Λεκτικό – Μαθηματικός τύπος – Εικόνα	5ο	186
Απάντηση: α) Εφόσον μεταβάλλεται το μαγνητικό πεδίο, μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια που ορίζουν οι σπείρες του πλαισίου. Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται στο πλαίσιο είναι: $$E_{ΕΠ} = N\frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t} \quad (5.1)$$ $$\Delta\Phi = \Delta(BA) = A\,\Delta B = A(B_2 - B_1)$$	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική - Μαθηματικά	Παράδειγμα - Ο κανόνας του lenz και η αρχή διατήρησης της ενέργειας στο φαινόμενο της επαγωγής.	Λεκτικό – Μαθηματικός τύπος	5ο	187
Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε με το νόμο του Faraday. Ας επανέλθουμε στον αγωγό ΚΛ που ολισθαίνει πάνω στους ακίνητους αγωγούς xΔZx′. Ο αγωγός που κινείται και οι ακίνητοι αγωγοί σχηματίζουν ένα κλειστό πλαίσιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με αυξανόμενο εμβαδόν Α. Σύμφωνα με το νόμο του Faraday, στο πλαίσιο θα αναπτυχθεί ΗΕΔ από επαγωγή $$E_{ΕΠ} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta(BA)}{\Delta t} = \frac{B\Delta A}{\Delta t} = \frac{BL\Delta x}{\Delta t} = BL\upsilon$$ Βέβαια στην περίπτωση ενός ευθύγραμμου αγωγού που κινείται μέσα στο μαγνητικό πεδίο (σχ. 5.5), το πηλίκο $\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$ στο νόμο του Faraday, δεν μπορεί να παρέχει το ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής, γιατί δεν έχει νόημα η μαγνητική ροή που διέρχεται από ένα ευθύγραμμο τμήμα όπως είναι ο αγωγός. Στην περίπτωση αυτή $\Delta\Phi_B$ είναι μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια που ορίζει ο αγωγός με την κίνησή του (σχ. 5.8).  **Σχ. 5.7** Καθώς ο αγωγός ΚΛ κινείται, μεταβάλλεται το εμβαδόν του πλαισίου ΚΔΖΛ, με αποτέλεσμα να μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από αυτό.	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική - Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο – ευθύγραμμος αγωγός κινούμενος σε ομογενές μαγνητικό πεδίο.	Λεκτικό – Μαθηματικός τύπος – Εικόνα	5ο	189

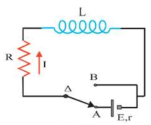
τα επαγωγικά ρεύματα έχουν τέτοια φορά ώστε να αντιτίθενται στο αίτιο που τα προκαλεί. Παίρνοντας υπόψη τον κανόνα του Lenz, που προσδιορίζει τη φορά του επαγωγικού ρεύματος, άρα και την πολικότητα της επαγωγικής τάσης, γράφουμε τη σχέση (5.1) που εκφράζει το νόμο της επαγωγής με τη μορφή: $E_{ΕΠ} = -N\frac{ΔΦ}{Δt}$	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική - Μαθηματικά	Θεωρητικό πλαίσιο - Ο κανόνας του lenz και η αρχή διατήρησης της ενέργειας στο φαινόμενο της επαγωγής.	Μαθηματικός Τύπος	5ο	192
 **Σχ. 5.13** Ο μαγνήτης πλησιάζει στο πηνίο. Σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz, το ρεύμα που επάγεται στο πηνίο έχει τέτοια φορά ώστε απέναντι από το μαγνήτη που πλησιάζει το πηνίο να δημιουργεί όμοιο μαγνητικό πόλο.	Φυσική (Γ)	Φυσική	Θεωρητικό πλαίσιο - Ο κανόνας του lenz και η αρχή διατήρησης της ενέργειας στο φαινόμενο της επαγωγής.	Λεκτικό - Εικόνα	5Ο	192
 **Σχ. 5.14** Ο αγωγός ΚΛ ολισθαίνει πάνω στους ακίνητους αγωγούς Δx και Zx'. Σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz το ρεύμα από επαγωγή που δημιουργείται στο κύκλωμα, έχει τέτοια φορά, ώστε ο κινούμενος αγωγός να δέχεται δύναμη Laplace, που αντιτίθεται στην κίνησή του.	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Θεωρητικό πλαίσιο - Ο κανόνας του lenz και η αρχή διατήρησης της ενέργειας στο φαινόμενο της επαγωγής.	Λεκτικό - Εικόνα	5ο	192
$E_{ΕΠ} = \frac{ΔΦ_B}{Δt}$ $Φ_B = BA$ $E_{ΕΠ} = \frac{BΔA}{Δt}$	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική - Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Στρεφόμενος Αγωγός.	Μαθηματικός Τύπος	5ο	194
Ο αγωγός σαρώνει την επιφάνεια δίσκου που έχει κέντρο Ο και ακτίνα L. Ο ρυθμός $\frac{ΔA}{Δt}$ με τον οποίο σαρώνεται η επιφάνεια είναι σταθερός αφού η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής είναι σταθερή. Έτσι μπορούμε να γράψουμε ότι $\frac{ΔA}{Δt} = \frac{πL^2}{T}$ (5.7)	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική - Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Στρεφόμενος Αγωγός.	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	5ο	194
 **Σχ. 5.16** Ο αγωγός ΟΓ στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από το άκρο του Ο, μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Το επίπεδο περιστροφής του είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές του πεδίου.	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Στρεφόμενος αγωγός.	Λεκτικό - Εικόνα	5ο	194

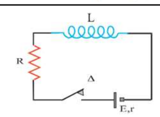
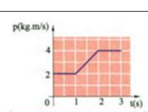
 **Σχ. 5.17** Ο δίσκος στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Η στροφική κίνηση του δίσκου γίνεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Το επίπεδο του δίσκου είναι συνεχώς κάθετο στο μαγνητικό πεδίο.	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Στρεφόμενος αγωγός.	Λεκτικό - Εικόνα	5ο	194
	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Αμοιβαία Επαγωγή.	Εικόνα	5ο	204
Στην περίπτωση της αμοιβαίας επαγωγής ο νόμος της επαγωγής $E_{ΕΠ} = -N\frac{ΔΦ}{Δt}$ μπορεί να πάρει τη μορφή $$\boxed{E_{ΕΠ} = -M\frac{Δi}{Δt}} \qquad (5.9)$$	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική - Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Στρεφόμενος Αγωγός.	Μαθηματικός Τύπος	5ο	204
 **Εικ. 5.10** Μετασχηματιστής. Η λειτουργία του στηρίζεται στο Φαινόμενο της αμοιβαίας επαγωγής. Η τάση που εφαρμόζεται στο ένα πηνίο μετασχηματίζεται σε μια άλλη τάση διαφορετικού πλάτους στο δεύτερο πηνίο.	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Αμοιβαία Επαγωγή.	Λεκτικό - Εικόνα	5ο	204
Η επαγόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη στο πηνίο 2 θα είναι: $$E_{ΕΠ2} = -N_2\frac{ΔΦ_B}{Δt} = -N_2 μ_o n_1 A\frac{Δi_1}{Δt}$$ όπου N_2 ο αριθμός σπειρών του πηνίου 2. Το σταθερό γινόμενο $N_2 μ_o n_1 A$, που θα το συμβολίζουμε με M_{21} εξαρτάται μόνο από τα γεωμετρικά στοιχεία των δύο πηνίων.	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Αμοιβαία Επαγωγή - Υπολογισμός συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής δύο πηνίων	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	5ο	205
Εάν επαναλάβουμε τη διαδικασία στην αντίθετη περίπτωση όπου ένα μεταβαλλόμενο ρεύμα i_2 στο πηνίο 2 επάγει ΗΕΔ στο πηνίο 1 καταλήγουμε στη σχέση $$E_{ΕΠ1} = -M_{12}\frac{Δi_2}{Δt}$$	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Αμοιβαία Επαγωγή - Υπολογισμός συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής δύο πηνίων	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	5ο	205

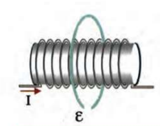
 **Σχ. 5.34** Αν ανοίξουμε το διακόπτη θα παρατηρήσουμε ότι ο λαμπτήρας εξακολουθεί να φωτοβολεί για λίγο χρόνο.	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Αυτεπαγωγή	Λεκτικό - Εικόνα	5^o	205
 **Το πηνίο αντιδρά σε κάθε μεταβολή της έντασης του ρεύματος που το διαρρέει.**	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Αυτεπαγωγή	Λεκτικό - Εικόνα	5^o	206
Αυτεπαγωγή ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο δημιουργείται ηλεκτρεγερτική δύναμη σε ένα κύκλωμα, όταν μεταβάλλεται το ρεύμα που το διαρρέει. Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που δημιουργείται ονομάζεται ηλεκτρεγερτική δύναμη από αυτεπαγωγή ($E_{ΑΥΤ}$).	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Αυτεπαγωγή	Λεκτικός	5^o	206
Ο νόμος της αυτεπαγωγής Το φαινόμενο της αυτεπαγωγής αποτελεί μια ειδική περίπτωση του φαινομένου της επαγωγής. Ο νόμος της επαγωγής $E_{ΕΠ} = -N\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$ γίνεται στην περίπτωση της αυτεπαγωγής $$E_{ΑΥΤ} = -L\frac{\Delta i}{\Delta t} \quad (5.10)$$ Ο συντελεστής αναλογίας L ονομάζεται **συντελεστής αυτεπαγωγής ή αυτεπαγωγή.** Το (-) στη σχέση είναι συνέπεια του κανόνα του Lenz. Από τη σχέση (5.10), που αποτελεί ειδική έκφραση του νόμου της επαγωγής, προκύπτει ότι **η ηλεκτρεγερτική δύναμη από αυτεπαγωγή σε ένα κύκλωμα είναι ανάλογη με το ρυθμό μεταβολής της έντασης του ρεύματος που το διαρρέει.** Η σχέση (5.10) δίνει τη μέση ηλεκτρεγερτική δύναμη από αυτεπαγωγή. Για να βρούμε την τιμή της μια χρονική στιγμή πρέπει ο χρόνος Δt να είναι απειροστά μικρός. $$\boxed{E_{ΑΥΤ} = -L\frac{di}{dt}}$$	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική - Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Αυτεπαγωγή	Μαθηματικός Τύπος	5^o	207
  **Σχ. 5.37** Η μετακίνηση του μεταγωγού από τη θέση Α στη θέση Β δε μηδενίζει αμέσως το ρεύμα στο κύκλωμα εξαιτίας της ηλεκτρεγερτικής δύναμης από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται στο πηνίο.	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική - Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Αυτεπαγωγή	Λεκτικό – Εικόνα – Γραφική Παράσταση	5^o	207

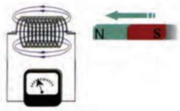
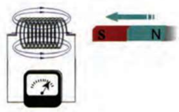
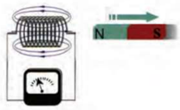
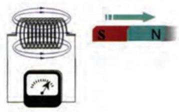
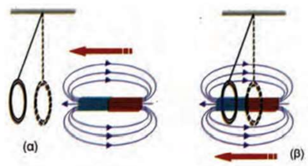
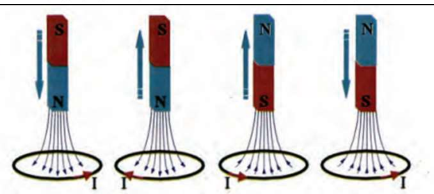
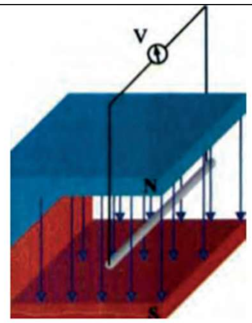
ΣΥΝΟΨΗ Όταν μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια που ορίζει ένας αγωγός με το σχήμα του, στον αγωγό επάγεται ηλεκτρεγερτική δύναμη η οποία ισούται με το ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής. $E_{ΕΠ} = N\frac{\lvert\Delta\Phi_B\rvert}{\Delta t}$ **Όταν ευθύγραμμος αγωγός μήκους L κινείται** με σταθερή ταχύτητα υ (υ ⊥ L) σε επίπεδο κάθετο στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου **B**, εμφανίζει ΗΕΔ από επαγωγή, ίση με $E_{ΕΠ} = B\upsilon L$ **Σε ευθύγραμμο αγωγό μήκους L που στρέφεται** με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα, παράλληλο με τις δυναμικές γραμμές πεδίου Β, που περνάει από το ένα του άκρο, εμφανίζεται ΗΕΔ από επαγωγή ίση με $E_{ΕΠ} = \frac{1}{2}B\omega L^2$ Τα επαγωγικά ρεύματα έχουν πάντα τέτοια φορά ώστε να αντιτίθενται στο αίτιο που τα προκαλεί. Ο **κανόνας του Lenz** εκφράζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας στην επαγωγή. **Στα άκρα στρεφόμενου πλαισίου N σπειρών**, εμβαδού A, που στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα που βρίσκεται στο επίπεδό του και είναι κάθετος στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου **B** αναπτύσσεται από επαγωγή του εναλλασσόμενη τάση. $\upsilon = V\,ημ\,\omega t$, όπου $V = N\omega BA$ **Ενεργός ένταση** εναλλασσόμενου ρεύματος είναι η σταθερή ένταση ρεύματος που θα προκαλούσε το ίδιο θερμικό αποτέλεσμα αν διέρρεε έναν ωμικό αγωγό για το ίδιο χρονικό διάστημα με το εναλλασσόμενο ρεύμα. $I_{εν} = \frac{I}{\sqrt{2}}$ **Ενεργός τάση** είναι εκείνη η σταθερή τάση που αν εφαρμοσθεί στα άκρα ενός αντιστάτη αυτός διαρρέεται από σταθερό ρεύμα έντασης ίσης με την ενεργό ένταση. $V_{εν} = \frac{V}{\sqrt{2}}$ **Ηλεκτρογεννήτρια** είναι διάταξη που μετατρέπει μηχανική ενέργεια σε ηλεκτρική. Η λειτουργία της βασίζεται στο φαινόμενο της επαγωγής. **Οι ηλεκτρικοί κινητήρες** είναι διατάξεις που μετατρέπουν την ηλεκτρική ενέργεια σε μηχανική. Το φαινόμενο της εμφάνισης ΗΕΔ από επαγωγή σ' ένα κύκλωμα εξαιτίας της μεταβολής της έντασης του ρεύματος σ' ένα άλλο κύκλωμα λέγεται **αμοιβαία επαγωγή** $E_{ΕΠ1} = -M\frac{di_2}{dt}$ και $E_{ΕΠ2} = -M\frac{di_1}{dt}$ όπου M ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής των δύο κυκλωμάτων. Η επαγωγική ΗΕΔ που αναπτύσσεται σ' ένα κύκλωμα λόγω της μεταβολής της έντασης του ρεύματος που το διαρρέει λέγεται ΗΕΔ από **αυτεπαγωγή**. $E_{ΑΥΤ} = -L\frac{di}{dt}$ όπου L ο συντελεστής αυτεπαγωγής του κυκλώματος.	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική -Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο - Σύνοψη	Λεκτικό	5ο	210
5.4 Αν η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια που ορίζει ένας αγωγός αυξάνεται με σταθερό ρυθμό, η ηλεκτρεγερτική δύναμη που δημιουργείται στον αγωγό α) αυξάνεται; β) μειώνεται; ή γ) μένει σταθερή;	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Ερωτήσεις – Νόμος της Επαγωγής	Λεκτικός	5ο	212
 5.5 Στο διάγραμμα $E_{ΕΠ} = f(t)$ του σχήματος 5.40 παριστάνεται γραφικά η ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται σε ένα κύκλωμα. Τι εκφράζει το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται ανάμεσα στη γραμμή του διαγράμματος και τον άξονα των χρόνων;	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Ερωτήσεις – Νόμος της Επαγωγής	Λεκτικός – Γραφική Παράσταση	5ο	212
5.6 Το συνολικό φορτίο που μετακινείται σε κλειστό κύκλωμα, λόγω του φαινομένου της επαγωγής, εξαρτάται από α) τη χρονική διάρκεια του φαινομένου. β) το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η μαγνητική ροή. γ) την ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα. δ) την ωμική αντίσταση που παρουσιάζει το κύκλωμα. Επιλέξτε τη σωστή πρόταση.	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Ερωτήσεις – Νόμος της Επαγωγής	Λεκτικός	5ο	212
5.10 Ένας αγωγός αφήνεται να πέσει από ύψος h, σε περιοχή στην οποία υπάρχει οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο. Ο αγωγός, σε όλη τη διάρκεια της κίνησής του, παραμένει οριζόντιος και κάθετος στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα παριστάνει την τάση στα άκρα του στις διάφορες χρονικές στιγμές; (Ως χρονική στιγμή μηδέν θεωρείται η στιγμή που αφέθηκε ελεύθερος ο αγωγός).  Σχ. 5.42	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική – Μαθηματικά	Ερωτήσεις – Το φαινόμενο της επαγωγής σε κινούμενο αγωγό	Λεκτικός – Γραφική Παράσταση	5ο	213
5.11 Ακίνητος ευθύγραμμος αγωγός πολύ μεγάλου μήκους διαρρέεται από σταθερό ρεύμα έντασης I. Αγωγός AB είναι παράλληλος στον πρώτο και απομακρύνεται από αυτόν με σταθερή ταχύτητα υ (σχ. 5.43). Ποιο από τα διαγράμματα στο σχήμα 5.44 παριστάνει την ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στον αγωγό AB κατά την κίνησή του, σε συνάρτηση με το χρόνο;  Σχ. 5.43  Σχ. 5.44	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική – Μαθηματικά	Ερωτήσεις – Το φαινόμενο της επαγωγής σε κινούμενο αγωγό	Λεκτικός – Γραφική Παράσταση	5ο	213

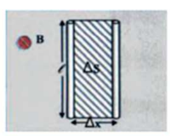
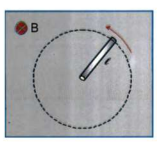
 Σχ. 5.47 5.16 Αφήνουμε ένα μαγνήτη να πέσει κατακόρυφα. Κάτω από το μαγνήτη βρίσκεται οριζόντιος κυκλικός αγωγός (σχ. 5.47). Να συγκρίνετε την επιτάχυνση που έχει ο μαγνήτης στις διάφορες θέσεις του με την επιτάχυνση της βαρύτητας. 5.17 Βρείτε τη φορά του ρεύματος στο πηνίο $Π_2$ μόλις κλείσουμε το διακόπτη στο πηνίο $Π_1$ (σχ. 5.48).	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Ερωτήσεις – Το φαινόμενο της επαγωγής σε κινούμενο αγωγό	Λεκτικός - Εικόνα	5ο	214
5.27 Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει ένα πηνίο μεταβάλλεται από την τιμή I στην τιμή 2I. Η ηλεκτρεγερτική δύναμη από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται στο πηνίο α) είναι μεγαλύτερη αν η μεταβολή της έντασης του ρεύματος γίνει γρήγορα. β) δεν εξαρτάται από το χρόνο στον οποίο γίνεται η μεταβολή αλλά μόνο από την αρχική και τελική τιμή της έντασης του ρεύματος. γ) εξαρτάται από την ωμική αντίσταση που υπάρχει στο κύκλωμα. δ) εξαρτάται από την πηγή που τροφοδοτεί το κύκλωμα. Ποια από τις προηγούμενες προτάσεις είναι ορθή;	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Ερωτήσεις - Αμοιβαία επαγωγή - αυτεπαγωγή	Λεκτικός	5ο	216
5.34 Κυκλικός αγωγός εμβαδού $A = 10^{-1}\ m^2$ τοποθετείται με το επίπεδό του κάθετο στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου B = 0,2 T. Να βρεθεί η ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή που δημιουργείται στον αγωγό αν μέσα σε χρόνο $\Delta t = 10^{-2}$ s α) το πεδίο μηδενίζεται, β) το πεδίο διπλασιάζεται, γ) η φορά του πεδίου αντιστρέφεται, δ) το πεδίο παραμένει σταθερό και ο αγωγός στρέφεται κατά 90° ώστε να γίνει παράλληλος με τις δυναμικές γραμμές. [Απ: 2 V, 2 V, 4 V, 2 V]	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις ο νόμος της επαγωγής.	Λεκτικός	5ο	218
5.35 Κυκλικός αγωγός ακτίνας $r = 10/\sqrt{\pi}$ cm έχει αντίσταση R = 2 Ω. Ο αγωγός τοποθετείται με το επίπεδό του κάθετο σε ομογενές μαγνητικό πεδίο που αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $\Delta B/\Delta t = 0{,}2$ T/s. Να βρείτε την ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον κυκλικό αγωγό και τη θερμική ισχύ που αναπτύσσεται σ' αυτόν. [Απ: 10^{-3} A, 2×10^{-6} W]	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις ο νόμος της επαγωγής.	Λεκτικός	5ο	218
 Σχ. 5.52 5.36 Η μαγνητική ροή που διέρχεται από κλειστό συρμάτινο πλαίσιο αντίστασης R = 10 Ω, μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος 5.52. Να γίνουν, με την ίδια κλίμακα χρόνου, τα διαγράμματα: α) της ηλεκτρεγερτικής δύναμης από επαγωγή που αναπτύσσεται στο πλαίσιο. β) της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο.	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις ο νόμος της επαγωγής.	Λεκτικός – Γραφική Παράσταση	5ο	218
5.37 Κυκλικό πλαίσιο ακτίνας r = 2 cm με N = 100 σπείρες έχει αντίσταση R = 25 Ω. Το πλαίσιο βρίσκεται ολόκληρο μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο που σχηματίζεται ανάμεσα στους πόλους ενός ηλεκτρομαγνήτη, με το επίπεδο των σπειρών του κάθετο στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Στα άκρα του πλαισίου συνδέεται βαλλιστικό γαλβανόμετρο. (Το βαλλιστικό γαλβανόμετρο είναι ένα ευαίσθητο όργανο που μετράει την ποσότητα του φορτίου που μετακινείται στους αγωγούς.) Το βαλλιστικό γαλβανόμετρο έχει αντίσταση $R_Γ$ = 45 Ω. Απομακρύνουμε το πλαίσιο από το πεδίο και διαπιστώνουμε ότι στη διάρκεια της απομάκρυνσης κινήθηκε στο κύκλωμα φορτίο 183,4 μC. Να υπολογιστεί το μέτρο B του μαγνητικού πεδίου ανάμεσα στους πόλους του ηλεκτρομαγνήτη. [Απ: $10{,}22\times10^{-2}$ T]	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις ο νόμος της επαγωγής.	Λεκτικός	5ο	218
5.38 Ένα μακρύ σωληνοειδές έχει 200 σπείρες/cm και διαρρέεται από ρεύμα I = 4 A. Στο εσωτερικό του υπάρχει κυκλικό πλαίσιο με 100 σπείρες και διάμετρο d = 2 cm. Το επίπεδο του κυκλικού πλαισίου είναι κάθετο στον άξονα του σωληνοειδούς. Το ρεύμα στο σωληνοειδές μηδενίζεται σε χρόνο Δt = 0,02 s. Υπολογίστε τη μέση ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται στο κυκλικό πλαίσιο. Δίνονται $\mu_o = 4\pi\times10^{-7}$ Tm/A, $\pi^2 = 10$. [Απ: 0,16 V]	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις ο νόμος της επαγωγής.	Λεκτικός	5ο	218 - 219
5.52 Ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής δύο πηνίων είναι M = 0,2 H. Η ένταση του ρεύματος στο ένα πηνίο μεταβάλλεται με ρυθμό $di/dt = 50$ A/s. Ποια είναι η ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται στο άλλο πηνίο; [Απ: 10 V]	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Ασκήσεις -Αμοιβαία Επαγωγή	Λεκτικός	5ο	220
5.53 Ένα μακρύ πηνίο $Π_1$ έχει n = 1000 σπείρες/m. Το εμβαδόν κάθε σπείρας είναι $A = 10^{-3}\ m^2$. Ένα δεύτερο πηνίο $Π_2$ με N = 200 σπείρες περιβάλλει το κεντρικό μέρος του πρώτου. Κάποια στιγμή, η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο $Π_1$ αυξάνεται με ρυθμό 10 A/s. Να υπολογιστούν: α) Ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής των δύο πηνίων. β) Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται στο πηνίο $Π_2$. Δίνεται: $\mu_o = 4\pi\times10^{-7}$ Vs/Am [Απ: $0{,}8\pi\times10^{-4}$ H, $8\pi\times10^{-4}$ V]	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Ασκήσεις -Αμοιβαία Επαγωγή	Λεκτικός	5ο	220

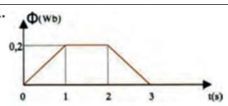
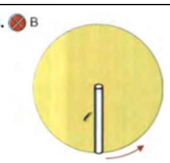
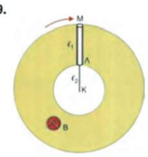
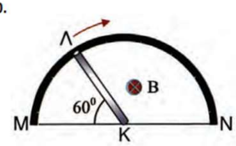
5.54 Ένα πηνίο με μήκος l = 10 cm, έχει N = 100 σπείρες, εμβαδού $A = 10^{-3}\ m^2$ η κάθε μία. Να υπολογιστεί η ηλεκτρεγερτική δύναμη από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται στο πηνίο τη στιγμή που το ρεύμα που το διαρρέει μεταβάλλεται με ρυθμό 150 A / s. Δίνεται $\mu_o = 4\pi\times10^{-7}$ Vs / Am. [Απ: $6\pi\times10^{-3}$ V]	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Ασκήσεις -Αμοιβαία Επαγωγή	Λεκτικός	5ο	222
5.55 Πηνίο έχει N = 400 σπείρες. Όταν διαρρέεται από ρεύμα I = 5 A, η μαγνητική ροή που διέρχεται από κάθε σπείρα του είναι $\Phi_B = 10^{-3}$ Wb . Να υπολογιστεί ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου. [Απ: 0,08 H]	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Ασκήσεις – Αυτεπαγωγή	Λεκτικός	5ο	222
 Σχ. 5.56 5.57 Στο κύκλωμα του σχήματος 5.56 η πηγή έχει ηλεκτρεγερτική δύναμη E = 24 V και αμελητέα εσωτερική αντίσταση. Ο αντιστάτης έχει αντίσταση R = 10 Ω. Το πηνίο είναι ιδανικό και έχει συντελεστή αυτεπαγωγής L = 0,02 H. α) Αρχικά ο μεταγωγός βρίσκεται στη θέση Α και το κύκλωμα διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I_o. Να υπολογιστεί η τιμή αυτού του ρεύματος. β) Ο μεταγωγός μεταφέρεται απότομα στη θέση Β. Κάποια στιγμή, το ρεύμα στο κύκλωμα έχει τιμή i = 1 A. Να υπολογιστεί η ηλεκτρεγερτική δύναμη από αυτεπαγωγή στο πηνίο και ο ρυθμός μεταβολής του ρεύματος τη στιγμή αυτή. γ) Να υπολογιστεί η θερμότητα που θα παραχθεί στο κύκλωμα, από τη στιγμή που ο μεταγωγός μεταφέρθηκε στη θέση Β μέχρι να μηδενιστεί το ρεύμα στο κύκλωμα. [Απ: α) 2,4 A β) 10V, -500 A / s γ) 0,058 J]	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Ασκήσεις – Αυτεπαγωγή	Λεκτικός - Εικόνα	5ο	222
5.58 Ένα κλειστό κυκλικό πλαίσιο με ακτίνα r = 8 cm και N σπείρες έχει κατασκευαστεί από χάλκινο σύρμα διατομής $s = 0{,}1\ cm^2$. Το πλαίσιο βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $B = 2\times10^{-5}$ T με το επίπεδό του κάθετο στις δυναμικές γραμμές. Το πλαίσιο στρέφεται κατά 180°, με άξονα περιστροφής μια διάμετρό του. Να υπολογιστεί το φορτίο που θα περάσει από μία διατομή του σύρματος. Δίνεται η ειδική αντίσταση του χαλκού $\rho = 1{,}6\times10^{-6}\ \Omega$ cm. [Απ: 10^{-3} C]	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Προβλήματα - Επαγωγή	Λεκτικός	5ο	223
5.59 Ορθογώνιο πλαίσιο αποτελείται από δύο σύρματα χρωμονικελίνης τα οποία είναι ακίνητα και απέχουν απόσταση l = 10 cm και παρουσιάζουν αντίσταση R* = 0,01 Ω/cm. Τα άλλα δύο σύρματα είναι χάλκινα και χωρίς αντίσταση. Το ένα είναι ακίνητο και το άλλο μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω στα σύρματα χρωμονικελίνης. Το πλαίσιο βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής $B = 5\times10^{-2}$ T με το επίπεδό του κάθετο στις δυναμικές γραμμές. Το κινητό χάλκινο σύρμα κινείται με σταθερή ταχύτητα. Αν τη χρονική στιγμή μηδέν η απόσταση ανάμεσα στα χάλκινα σύρματα είναι αμελητέα, α) να βρεθεί σχέση που συνδέει την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο με το χρόνο. β) να υπολογιστεί η τιμή της έντασης του ρεύματος τη στιγμή t = 2 s. γ) να γίνει γραφική παράσταση της έντασης του ρεύματος με το χρόνο. [Απ: α) $\frac{2{,}5\times10^{-3}}{t}$ A β) 1,25 mA]	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική – Μαθηματικά	Προβλήματα - Επαγωγή	Λεκτικός	5ο	223
5.60 Δύο παράλληλα, οριζόντια σύρματα, ΑΓ και Α′Γ′, μεγάλου μήκους και αμελητέας αντίστασης συνδέονται στα άκρα τους Α και Α′ με τρίτο σύρμα αντίστασης R_1 = 0,1 Ω. Ένα τέταρτο σύρμα ΣΣ′ με μάζα m = 0,1 kg , μήκος L = 1 m και αντίσταση R_2 = 0,5 Ω μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές, μένοντας κάθετο και σε επαφή, στα σημεία Σ και Σ′, με τα σύρματα ΑΓ και Α′Γ′. Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο B = 0,2 T κάθετο στο επίπεδο των συρμάτων. α) Ασκούμε στο σύρμα ΣΣ′, που αρχικά είναι ακίνητο, σταθερή δύναμη F = 1 N παράλληλη στα ΑΓ και Α′Γ′ οπότε η ταχύτητά του αποκτά κάποια σταθερή τιμή. Να υπολογιστεί η τάση στα άκρα του μετά τη σταθεροποίηση της ταχύτητας. β) Κάποια στιγμή παύει να ασκείται η δύναμη **F** και η ταχύτητα του σύρματος ΣΣ′ μετά από λίγο μηδενίζεται. β_1. Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σύρματος ΣΣ′ τη χρονική στιγμή που η ταχύτητά του μικραίνοντας έγινε ίση με το μισό της μέγιστης τιμής της. β_2. Να υπολογιστεί η θερμότητα που απέβαλε το κύκλωμα στο περιβάλλον κατά τη διάρκεια της επιβράδυνσης του σύρματος. [Απ: α) 0,5 V, β) -5 m / s^2, -3,75 W, 11,25 J]	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Προβλήματα - Επαγωγή	Λεκτικός	5ο	223 - 224
5.62 Δύο παράλληλοι οριζόντιοι αγωγοί Αx και Α′x′ με αμελητέα αντίσταση απέχουν μεταξύ τους l = 1 m και τα άκρα τους Α και Α′ συνδέονται με αγωγό αντίστασης R = 5 Ω. Ένας άλλος αγωγός ΚΛ, με μάζα m = 0,5 kg, χωρίς αντίσταση, μπορεί και ολισθαίνει χωρίς τριβές μένοντας κάθετος και σε επαφή με τους παράλληλους αγωγούς Αx και Α′x′. Το σύστημα των τεσσάρων αγωγών βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο B = 0,5 T κάθετο στο επίπεδό τους. Ο αγωγός ΚΛ είναι αρχικά ακίνητος. Τη χρονική στιγμή t = 0 ασκείται στον αγωγό ΚΛ δύναμη **F**, της ίδιας διεύθυνσης με αυτή των παράλληλων αγωγών, η οποία τον εξαναγκάζει να κινηθεί με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 2\ m/s^2$. α) Να γίνει το διάγραμμα F = f(t) β) Αν το έργο που παράγει η δύναμη **F** από τη χρονική στιγμή t = 0 μέχρι τη χρονική στιγμή t = 6 s είναι 50,4 J να υπολογιστεί η θερμότητα που παράχθηκε στην αντίσταση στο ίδιο χρονικό διάστημα. γ) Να υπολογιστεί ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται η κινητική ενέργεια του αγωγού τη χρονική στιγμή t = 6 s. [Απ: β) 14,4 J, γ) 12 J/s]	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Προβλήματα - Επαγωγή	Λεκτικός	5ο	224

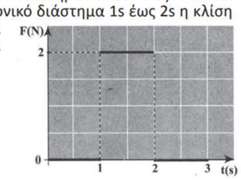
5.66 Δύο παράλληλοι οριζόντιοι αγωγοί χωρίς αντίσταση, που απέχουν μεταξύ τους $l = 0,5$ m, συνδέονται στα άκρα τους με ιδανικό πηνίο συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 25 \times 10^{-3}$ H. Ένας αγωγός ΑΓ, με μάζα m = 150 g και αντίσταση $R = 5 \times 10^{-2}\ \Omega$, μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές μένοντας κάθετος και σε επαφή με τους παράλληλους αγωγούς. Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο B = 0,1 T. Ασκώντας στον αγωγό ΑΓ κάποια δύναμη **F**, παράλληλη με τους οριζόντιους αγωγούς, τον κινούμε με τρόπο ώστε η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα να δίνεται από τη σχέση i = 2t + 3 (SI). α) Να υπολογιστεί η ηλεκτρεγερτική δύναμη από αυτεπαγωγή που δημιουργείται στο πηνίο κατά τη διάρκεια του φαινομένου. β) Να βρεθεί και να αποδοθεί γραφικά η σχέση που συνδέει την ταχύτητα του αγωγού ΑΓ με το χρόνο. γ) Να υπολογιστεί ο ρυθμός Δυ/Δt με τον οποίο αυξάνεται η ταχύτητα του αγωγού κατά τη διάρκεια του φαινομένου. δ) Να υπολογιστεί ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται ενέργεια στο κύκλωμα μέσω του έργου της **F**, τη χρονική στιγμή t = 4 s. [Απ: α) 0,05 V β) υ = 2t + 4 (SI) γ) 2 m / s² δ) 10,2 J / s]	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Προβλήματα - Επαγωγή	Λεκτικός	5ο	225 - 226
 Σχ. 5.61 5.68 Το κύκλωμα του σχήματος 5.61 αποτελείται από πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης E = 40 V και εσωτερικής αντίστασης r = 2 Ω, ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L = 0,5 H και αντιστάτη με αντίσταση R = 8 Ω. Κάποια στιγμή κλείνουμε το διακόπτη του κυκλώματος. Να υπολογιστούν: α) Η τελική τιμή της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα. β) Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται από αυτεπαγωγή στο πηνίο τη στιγμή κατά την οποία το ρεύμα στο κύκλωμα αυξάνεται με ρυθμό di/dt = 6 A/s. γ) Η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα και η ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στο πηνίο την ίδια στιγμή. δ) Ο ρυθμός με τον οποίο αποθηκεύεται ενέργεια στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου την ίδια στιγμή. [Απ: α) 4 A, β) 3 V, γ) 3,7 A 3,42 J δ) 11,1 W]	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική	Προβλήματα - Επαγωγή	Λεκτικός - Εικόνα	5ο	226
Η τρίτη είναι ο **νόμος της επαγωγής του Faraday** $E_{ΕΠ} = -N\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$ Μια διάσταση αυτού του νόμου, την οποία δεν την αναλύσαμε, είναι ότι ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο.	Φυσική (Γ) Τεύχος Β	Φυσική – Μαθηματικά	Ένθετο – Οι εξισώσεις του Maxwell.	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	5ο	228
3. Ένας ποδοσφαιριστής κτυπάει μια ακίνητη μπάλα και αυτή αποκτά ταχύτητα 24m/s. Αν η μπάλα έχει μάζα 0,5kg και η διάρκεια της επαφής του ποδιού του ποδοσφαιριστή με την μπάλα είναι 0,03s, ποια είναι η μέση τιμή δύναμης που ασκήθηκε στην μπάλα;	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Ασκήσεις – Διατήρηση της ορμής	Λεκτικός	2ο	65
4. Ένας αλεξιπτωτιστής εγκαταλείπει το ελικόπτερο και πέφτει με το αλεξίπτωτό του να μην έχει ανοίξει ακόμη. Αν η συνολική του μάζα είναι m = 90kg, ποιος νομίζετε ότι είναι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του; Πόση ταχύτητα θα αποκτήσει ο αλεξιπτωτιστής μετά από ένα δευτερόλεπτο; Δίνεται: $g = 10m/s^2$.	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Ασκήσεις – Διατήρηση της ορμής	Λεκτικός	2ο	65
5. Μια μπάλα μάζας 0,5kg αφήνεται να πέσει από τέτοιο ύψος, ώστε να φτάσει στο δάπεδο με ταχύτητα $υ_1 = 30m/s$. Η μπάλα αναπηδά κατακόρυφα με ταχύτητα $υ_2 = 10m/s$, αφού μείνει σ' επαφή με το δάπεδο για χρόνο Δt = 0,25s. Να βρείτε: Α. Τη μεταβολή της ορμής της μπάλας κατά τη διάρκεια Δt. Β. Τη μέση δύναμη που δέχθηκε η μπάλα. Δίνεται: $g = 10m/s^2$.	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Ασκήσεις – Διατήρηση της ορμής	Λεκτικός	2Ο	65
6. Ένα σπορ αυτοκίνητο Maserati ξεκινάει από την ηρεμία και αποκτά, κινούμενο σε οριζόντιο δρόμο, ταχύτητα 90km/h σε χρόνο t = 5s. Αν η μάζα του αυτοκινήτου είναι 1.600kg να βρείτε: Α. Τη μεταβολή της ορμής του αυτοκινήτου. Β. Τη δύναμη που μπορεί να προκαλέσει μια τέτοια μεταβολή ορμής στο χρόνο αυτό.	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Ασκήσεις – Διατήρηση της ορμής	Λεκτικός	2Ο	65
7. Κατά τη διάρκεια μιας καταιγίδας πέφτουν κάθετα σ' ένα υπόστεγο 500 σταγόνες βροχής ανά δευτερόλεπτο με μέση ταχύτητα 17m/s. Οι σταγόνες, που έχουν μέση μάζα $3 \cdot 10^{-5}$kg, δεν αναπηδούν κατά την πτώση τους στο υπόστεγο, και γλιστρούν χωρίς να συσσωρεύονται σ' αυτό. Α. Πόση είναι η μεταβολή της ορμής κάθε σταγόνας καθώς πέφτει στο υπόστεγο; Β. Πόση είναι η μέση δύναμη που προκαλείται από τις σταγόνες της βροχής στο υπόστεγο;	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Ασκήσεις – Διατήρηση της ορμής	Λεκτικός	2Ο	65
8. Η ορμή ενός σώματος μάζας m = 1kg μεταβάλλεται όπως φαίνεται στην εικόνα. Η αρχική και η τελική ορμή έχουν την ίδια κατεύθυνση. Α. Πόση είναι η ελάχιστη και πόση είναι η μέγιστη ταχύτητα του σώματος; Β. Να παραστήσετε γραφικά τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο. 	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική – Μαθηματικά	Ασκήσεις – Διατήρηση της ορμής	Λεκτικός - Εικόνα	2Ο	65

9. Ένα βαρύ κιβώτιο μάζας $200kg$ ωθείται από έναν εργάτη πάνω σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο το κιβώτιο έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,1$. Ο εργάτης, ασκώντας στο αρχικά ακίνητο κιβώτιο οριζόντια μέση δύναμη $F = 500N$, το μετακινεί για χρόνο $t = 4s$. Πόση νομίζετε ότι θα είναι τότε η ταχύτητα του κιβωτίου; Δίνεται: $g = 10m/s^2$.	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Ασκήσεις – Διατήρηση της ορμής	Λεκτικός	$2^{ο}$	66
10. Ένα μπαλάκι του τένις μάζας $m = 100g$ πέφτει με οριζόντια ταχύτητα $\upsilon_1 = 10m/s$ σε κατακόρυφο τοίχο και ανακλάται με επίσης οριζόντια ταχύτητα $\upsilon_2 = 8m/s$. Να βρείτε: Α. Την ορμή που έχει το μπαλάκι πριν και μετά την επαφή του με τον τοίχο. Β. Τη μεταβολή της ορμής του, λόγω της σύγκρουσης με τον τοίχο. Γ. Τη μέση δύναμη που δέχθηκε το μπαλάκι από τον τοίχο, αν η επαφή διαρκεί χρόνο $\Delta t = 0,1s$.	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Ασκήσεις – Διατήρηση της ορμής	Λεκτικό	$2^{ο}$	66
***11.** Από ακίνητο πυροβόλο, του οποίου η μάζα είναι $M = 1.000kg$, εκτοξεύεται βλήμα μάζας $m = 1kg$ με οριζόντια ταχύτητα $\upsilon_0 = 1.000m/s$. Α. Πόση ταχύτητα αποκτά το πυροβόλο μετά την εκπυρσοκρότηση; Β. Αν το πυροβόλο έχει με το δάπεδο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,05$, για πόσο χρόνο θα κινηθεί; 	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Ασκήσεις – Διατήρηση της ορμής	Λεκτικό - Εικόνα	$2^{ο}$	66
13. Ένα βλήμα μάζας $m_1 = 100g$ κινείται με οριζόντια ταχύτητα $\upsilon_1 = 400m/s$ και διαπερνά ένα ακίνητο κιβώτιο μάζας $m_2 = 2kg$, που βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Αν το βλήμα βγαίνει από το κιβώτιο με ταχύτητα $\upsilon_1' = 100m/s$ σε χρόνο $\Delta t = 0,1s$ να βρείτε: Α. Την ταχύτητα που αποκτά το κιβώτιο. Β. Τη μέση οριζόντια δύναμη που ασκεί το βλήμα στο κιβώτιο.	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Ασκήσεις – Διατήρηση της ορμής	Λεκτικό	$2^{ο}$	66 - 67
15. Ένας μικρός μαθητής μάζας $m = 60kg$ ταξιδεύει με αυτοκίνητο που κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 72km/h$. Ο μαθητής, υπακούοντας στον κώδικα οδικής κυκλοφορίας, φοράει ζώνη ασφαλείας. Το αυτοκίνητο, που έχει συνολικά μάζα $M = 1.200kg$, συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με άλλο αυτοκίνητο που κινείται αντιθέτως, με αποτέλεσμα και τα δύο να ακινητοποιηθούν σε χρόνο $t = 0,12s$. Να βρείτε: Α. Την ορμή του δεύτερου αυτοκινήτου πριν τη σύγκρουση. Β. Τη δύναμη που δέχτηκε ο μαθητής από τη ζώνη ασφαλείας. Να συγκρίνετε αυτή τη δύναμη με το βάρος του μαθητή.	Φυσική (Β) & Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Ασκήσεις – Διατήρηση της ορμής	Λεκτικό	$2^{ο}$	67
Η ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή που δημιουργείται σε ένα πηνίο είναι ανάλογη με το ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής ΔΦ/Δt και ανάλογη με τον αριθμό N των σπειρών του πηνίου $\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}N$ **(9)**	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική – Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ηλεκτρομαγνητισμός – Νόμος Επαγωγής	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	$4^{ο}$	156
Η σημασία του αρνητικού προσήμου δικαιολογείται με τον κανόνα Lenz που περιγράφεται πιο κάτω. Δώσαμε το νόμο της επαγωγής με τη βοήθεια ενός πηνίου, είναι φανερό, όμως, ότι **ισχύει για οποιοδήποτε κύκλωμα**. Τότε ο τύπος θα γίνεται: $\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ Επειδή συνήθως μας ενδιαφέρει το μέτρο της επαγωγικής τάσης το αρνητικό πρόσημο μπορούμε να το παραλείπουμε.	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική – Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ηλεκτρομαγνητισμός – Νόμος Επαγωγής	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	$4^{ο}$	156
Παράδειγμα 7 **Ένα σωληνοειδές έχει 100σπείρες/m, κάθε σπείρα έχει εμβαδόν $S = 0,2m^2$ και διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I = 10A$. Στο κέντρο του σωληνοειδούς και κάθετα προς τον άξονά του βρίσκεται ένας κυκλικός αγωγός που περιβάλλει το σωληνοειδές. Αν διπλασιαστεί η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το σωληνοειδές σε χρόνο $\Delta t = 0,01s$ να υπολογιστεί η επαγωγική τάση που θα αναπτυχθεί στον κυκλικό αγωγό.** 	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Παράδειγμα– Ηλεκτρομαγνητισμός – Νόμος Επαγωγής	Λεκτικό - Εικόνα	$4^{ο}$	157
Όταν διπλασιάσουμε την ένταση του ρεύματος, θα διπλασιαστεί και η ένταση του μαγνητικού πεδίου, αφού αυτή είναι ανάλογη προς το ρεύμα, δηλαδή θα γίνει $B_2 = 8\pi 10^{-4}T$. Η μεταβολή της ροής πάνω στον κυκλικό αγωγό θα είναι: $\Delta\Phi = \Phi_{τελ} - \Phi_{αρχ} \Rightarrow \Delta\Phi = B_2S - B_1S$ Άρα η ΗΕΔ επαγωγής που θα αναπτυχθεί στις άκρες του κυκλικού αγωγού θα είναι: $\mathcal{E} = \frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\lvert B_2S - B_1S\rvert}{\Delta t} \Rightarrow$ $\mathcal{E} = \frac{8\pi 10^{-4}T \cdot 2m^2 - 4\pi 10^{-4}T \cdot 2m^2}{0,1\pi s} \Rightarrow \mathcal{E} = 8 \cdot 10^{-3}V \Rightarrow \mathcal{E} = 8mV$	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική – Μαθηματικά	Παράδειγμα– Ηλεκτρομαγνητισμός – Νόμος Επαγωγής	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	$4^{ο}$	157

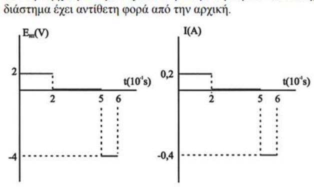
 **Εικόνα 4.6-62.** *Το δεξιό άκρο του πηνίου γίνεται βόρειος πόλος.*  **Εικόνα 4.6-63.** *Το δεξιό άκρο του πηνίου γίνεται νότιος πόλος.*  **Εικόνα 4.6-64.** *Το δεξιό άκρο του πηνίου γίνεται νότιος πόλος.*  **Εικόνα 4.6-65.** *Το δεξιό άκρο του πηνίου γίνεται βόρειος πόλος.*	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ηλεκτρομαγνητισμός- Επαγωγικό ρεύμα.	Λεκτικό - Εικόνα	4ο	159
 **Εικόνα 4.6-66.** *α) Όταν ο μαγνήτης πλησιάζει ο δακτύλιος απομακρύνεται. β) Όταν ο μαγνήτης απομακρύνεται ο δακτύλιος πλησιάζει.*	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ηλεκτρομαγνητισμός- Επαγωγικό ρεύμα.	Λεκτικό - Εικόνα	4ο	160
 **Εικόνα 4.6-67.** *Φαίνονται οι φορές των επαγωγικών ρευμάτων καθώς ο μαγνήτης κινείται κατά μήκος του άξονα του κυκλικού αγωγού.*	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ηλεκτρομαγνητισμός- Επαγωγικό ρεύμα.	Λεκτικό - Εικόνα	4ο	160
 *Όταν ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα φρενάρει και σταματά γρήγορα τις ταλαντεύσεις του.* **Εικόνα 4.6-68.**	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ηλεκτρομαγνητισμός- Επαγωγικό ρεύμα.	Λεκτικό - Εικόνα	4ο	161
Ο κανόνας του Lenz είναι αποτέλεσμα της **αρχής διατήρησης της ενέργειας**. ***Υπολογισμός επαγωγικού ρεύματος*** Από το νόμο του Ohm η ένταση του ρεύματος είναι: $\left.\begin{array}{l} I=\dfrac{\varepsilon}{R} \\ \text{Αλλά}\ \ \varepsilon=\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}\end{array}\right\} I=\dfrac{\Delta\Phi}{R\Delta t}$ **(10)**	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική – Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ηλεκτρομαγνητισμός- Επαγωγικό ρεύμα.	Μαθηματικός Τύπος	4ο	161

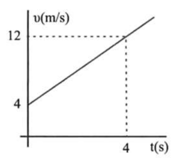
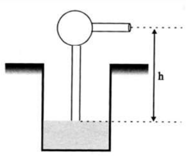
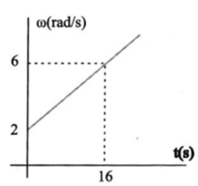
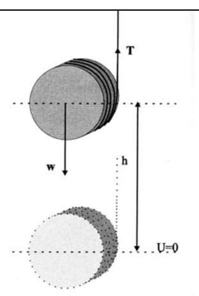
Νόμος Neumann Το ηλεκτρικό φορτίο που μετατοπίζεται από μια διατομή του αγωγού είναι: Αλλά $\left.\begin{array}{l} Q = I\Delta t \\ I = \dfrac{\Delta\Phi}{R\Delta t} \end{array}\right\} Q = \dfrac{\Delta\Phi}{R}$ **(11)** Από την τελευταία εξίσωση συμπεραίνουμε ότι: **Το ηλεκτρικό φορτίο που μετατοπίζεται σε ορισμένη μεταβολή μαγνητικής ροής είναι ανεξάρτητο από το χρόνο που διαρκεί η μεταβολή αυτή (Νόμος Neumann).**	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική – Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ηλεκτρομαγνητισμός- Επαγωγικό ρεύμα.	Λεκτικός- Μαθηματικός Τύπος	4ο	161
Παράδειγμα 8 **Μια μεταλλική ράβδος έχει αντίσταση $R_1 = 8\Omega$. Η ράβδος έχει μήκος $\ell = 0{,}5m$ και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές εφαπτόμενη πάνω σε δύο οριζόντιες μεταλλικές ράγες, οι άκρες των οποίων συνδέονται με γαλβανόμετρο εσωτερικής αντίστασης $R_2 = 2\Omega$. Η ράβδος αρχίζει να κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 4m/s^2$ με την** **επίδραση εξωτερικής δύναμης. Αν το όλο σύστημα βρίσκεται μέσα σε κατακόρυφο μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 2 \cdot 10^{-2}T$, να υπολογιστεί το ηλεκτρικό φορτίο που θα περάσει από το γαλβανόμετρο σε χρόνο $t = 10s$.**	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Παράδειγμα – Ηλεκτρομαγνητισμός- Επαγωγικό ρεύμα.	Λεκτικός- Μαθηματικός Τύπος	4ο	161 - 162
Η ΗΕΔ από επαγωγή είναι ανάλογη με την ταχύτητα μεταβολής της μαγνητικής ροής. **Νόμος επαγωγής** $\mathcal{E} = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική – Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ηλεκτρομαγνητισμός- Επαγωγικό ρεύμα.	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	4ο	163
5. Το μέτρο της Η.Ε.Δ. από επαγωγή ισούται με: $\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = \dfrac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t}$. Το πρόσημο «-» δεν το λαμβάνουμε υπόψη μας, αν η $\mathcal{E}_{\varepsilon\pi}$ είναι η μόνη πηγή που υπάρχει στο κύκλωμα.	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ηλεκτρομαγνητισμός – Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων.	Λεκτικός- Μαθηματικός Τύπος	4ο	165
6. Όταν ένας ευθύγραμμος αγωγός κινείται ευθύγραμμα ομαλά μέσα σε μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές γραμμές έχουμε: $\mathcal{E} = \dfrac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t} \Rightarrow \mathcal{E} = \dfrac{B\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow \mathcal{E} = \dfrac{B\ell\Delta x}{\Delta t} \overset{\frac{\Delta x}{\Delta t} = \upsilon}{\Rightarrow} \mathcal{E} = B\upsilon\ell$ Η τελευταία σχέση ισχύει ακόμα και αν η ταχύτητα του αγωγού μεταβάλλεται. Τότε όμως η σχέση $E = B\upsilon\ell$ θα μας δίνει την τιμή της Η.Ε.Δ. από επαγωγή για την αντίστοιχη τιμή της ταχύτητας υ. 	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ηλεκτρομαγνητισμός – Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων.	Μαθηματικός Τύπος - Εικόνα	4ο	165
7. Η μέση τιμή της Η.Ε.Δ. από επαγωγή θα βρίσκεται πάντοτε από τη σχέση $\mathcal{E} = \dfrac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t}$.	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ηλεκτρομαγνητισμός – Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων.	Μαθηματικός Τύπος	4ο	165
8. Όταν ένας αγωγός μήκους ℓ περιστρέφεται γύρω από ένα άκρο του κάθετα στις δυναμικές γραμμές με σταθερή γωνιακή ταχύτητα έχουμε: $\mathcal{E} = \dfrac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t} \underset{\Delta t = T}{\overset{\text{για 1 περιστροφή}}{\Rightarrow}} \dfrac{B\Delta S}{T} \overset{\Delta S = \pi\ell^2}{\Rightarrow}$ $\mathcal{E} = \dfrac{B\pi\ell^2}{T}$  **9.** Στο διάγραμμα $\Phi = f(t)$ η κλίση της καμπύλης σε κάθε σημείο της δίνει την Η.Ε.Δ. από επαγωγή.	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ηλεκτρομαγνητισμός – Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων.	Μαθηματικός Τύπος - Εικόνα	4ο	166
13. Ένα ηλεκτρικό φορτίο $q = 32 \cdot 10^{-3}C$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας $r = 3{,}2cm$ και συχνότητας $f = \dfrac{10^3}{\pi}$ Hz. Να υπολογιστεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο της κυκλικής τροχιάς.	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Προβλήματα – Ηλεκτρομαγνητισμός	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	4ο	180
44. Σε πηνίο που έχει $N = 100$ σπείρες αυξάνεται η ροή κατά $10^{-2}Wb$ σε χρόνο $\Delta t = 0{,}2s$. Να υπολογιστεί η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται.	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Προβλήματα – Ηλεκτρομαγνητισμός	Λεκτικός	4ο	187
45. Ένας κυκλικός αγωγός ακτίνας $r = 10cm$ βρίσκεται κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $B = 0{,}1T$. Αν σε χρόνο $\Delta t = 0{,}1s$ ο κυκλικός αγωγός στραφεί κατά 90° γύρω από κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του να υπολογιστεί η ΗΕΔ από επαγωγή.	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Προβλήματα – Ηλεκτρομαγνητισμός	Λεκτικός	4ο	187
46. Ένα κυκλικό πλαίσιο ακτίνας $r = 20cm$ αποτελείται από $N = 20$ σπείρες και είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές μαγνητικού πεδίου έντασης $B = 2T$. Να υπολογιστεί η ΗΕΔ από επαγωγή που θα αναπτυχθεί στο πλαίσιο όταν σε χρόνο $\Delta t = \pi s$ α) το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής τετραπλασιαστεί, β) το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής υποτετραπλασιαστεί, γ) η φορά της μαγνητικής επαγωγής αντιστραφεί.	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Προβλήματα – Ηλεκτρομαγνητισμός	Λεκτικός	4ο	187

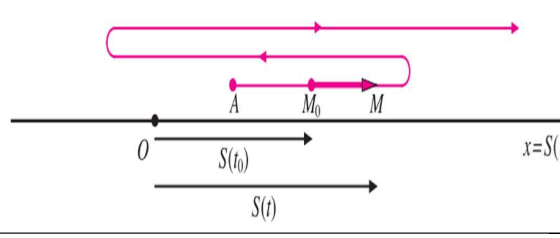
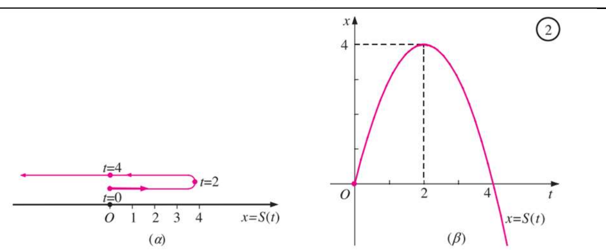
47. Ένα πηνίο έχει $N = 100$ σπείρες και το εμβαδόν κάθε σπείρας είναι $S = 100cm^2$. Το πηνίο βρίσκεται με τον άξονά του παράλληλο σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 2T$ και έχει αντίσταση $R_1 = 0{,}9\Omega$ ανά σπείρα. Αν συνδέσουμε τις άκρες του πηνίου με αμπερόμετρο αντίστασης $R_2 = 10\Omega$, να βρεθεί η ένδειξή του όταν σε χρόνο $\Delta t = 1s$ η ένταση του μαγνητικού πεδίου α) διπλασιάζεται, β) μηδενίζεται.	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Προβλήματα – Ηλεκτρομαγνητισμός	Λεκτικός	4ο	187
48. Ένα σωληνοειδές διαρρέεται από $I = 2A$ έχει $n = 5$σπείρες/cm, αντίσταση $R_{ολ} = 40\Omega$ και το εμβαδόν κάθε σπείρας είναι $S = 20cm^2$. Να υπολογιστούν η ΗΕΔ από επαγωγή και το φορτίο που θα αναπτυχτεί αν: α) διακόψουμε το ρεύμα σε χρόνο $\Delta t = 0{,}01s$, β) βάλουμε μέσα στο σωληνοειδές σιδηρομαγνητικό υλικό που έχει μαγνητική διαπερατότητα $\mu = 2001$ σε χρόνο $\Delta t = 1s$. Δίνεται $\ell = 1m$.	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Προβλήματα – Ηλεκτρομαγνητισμός	Λεκτικός	4ο	188
49. Ένας συρμάτινος δακτύλιος έχει ακτίνα $r = 10\sqrt{\pi}$ cm, κόβεται σε κάποιο σημείο και συνδέεται πυκνωτής χωρητικότητας $C = 2\mu F$. Ο δακτύλιος τοποθετείται κάθετα στις δυναμικές γραμμές μαγνητικού πεδίου η ένταση του οποίου μεταβάλλεται με ρυθμό $\Delta B/\Delta t = 2T/s$. Να υπολογιστούν α) το φορτίο του πυκνωτή, β) η ενέργεια που αποθηκεύεται σ' αυτόν. ($\pi^2 \simeq 10$)	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Προβλήματα – Ηλεκτρομαγνητισμός	Λεκτικός	4ο	188
50. Ένα κυκλικό πλαίσιο έχει $N = 20$ σπείρες, το εμβαδόν κάθε σπείρας είναι $S = 0{,}2m^2$, το πλαίσιο είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου και κάθε σπείρα έχει αντίσταση $R = 2\Omega$. Όταν τις άκρες του πλαισίου τις συνδέσουμε με γαλβανόμετρο αντίστασης $R_1 = 10\Omega$ και βγάλουμε το πλαίσιο απότομα από το μαγνητικό πεδίο το γαλβανόμετρο δείχνει ότι περνά μέσα απ' αυτό φορτίο $q = \frac{5}{3}10^{-3}C$. Να υπολογιστεί το μέτρο της έντασης του ομογενούς μαγνητικού πεδίου.	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Προβλήματα – Ηλεκτρομαγνητισμός	Λεκτικός	4ο	188
51.  Ένα τετράγωνο πλαίσιο έχει αντίσταση $R = 10\Omega$ και βρίσκεται κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου η ροή του οποίου μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στην εικόνα. Να γίνει το διάγραμμα α) της ΗΕΔ με το χρόνο και β) του επαγωγικού ρεύματος με το χρόνο.	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική- Μαθηματικά	Προβλήματα – Ηλεκτρομαγνητισμός	Λεκτικός- Γραφική Παράσταση	4ο	188
58.  Ένας ευθύγραμμος αγωγός μήκους $\ell = 15cm$ περιστρέφεται μέσα σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 0{,}5T$, με συχνότητα $f = 60Hz$ σε επίπεδο κάθετο στις δυναμικές γραμμές του πεδίου γύρω από το ένα άκρο του. Να υπολογιστεί η ΗΕΔ από επαγωγή στις άκρες του αγωγού.	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική- Μαθηματικά	Προβλήματα – Ηλεκτρομαγνητισμός	Λεκτικός - Εικόνα	4ο	191
59.  Ο αγωγός ΛΜ μήκους $\ell_1 = 1m$ δένεται με μονωτικό νήμα μήκους $\ell_2 = 2m$ και περιστρέφεται με συχνότητα $f = \frac{20}{\pi}Hz$ οριζόντια μέσα σε κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 10^{-4}T$. Να υπολογιστεί η ΗΕΔ από επαγωγή στις άκρες ΛΜ του αγωγού.	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Προβλήματα – Ηλεκτρομαγνητισμός	Λεκτικός - εικόνα	4ο	191
60.  Ο αγωγός ΚΛ έχει μήκος $\ell = 3m$ και περιστρέφεται με συχνότητα $f = \frac{10}{\pi}$ Hz ώστε να εφάπτεται συνεχώς πάνω σε ημιπεριφέρεια από ομογενές σύρμα αντίστασης $R = 9\Omega$. Το σύστημα βρίσκεται συνεχώς μέσα σε κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 0{,}2T$. Να υπολογιστεί η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τη ράβδο και τους αγωγούς ΚΜ και ΚΝ όταν η ράβδος σχηματίζει γωνία 60° με την ΚΜ. Οι αγωγοί ΚΜ, ΚΝ και η ράβδος ΚΛ δεν έχουν αντίσταση.	Φυσική (Γ) Τεύχος Α	Φυσική	Προβλήματα – Ηλεκτρομαγνητισμός	Λεκτικός - Εικόνα	4ο	191

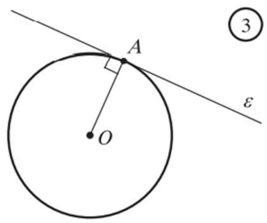
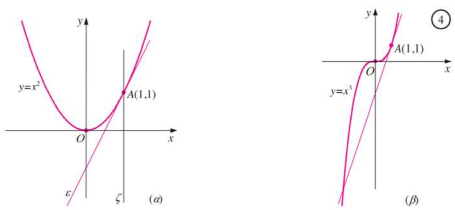
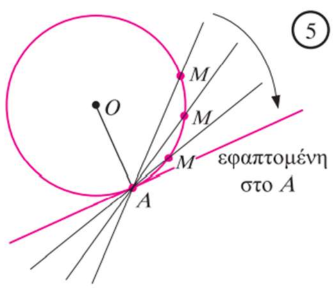
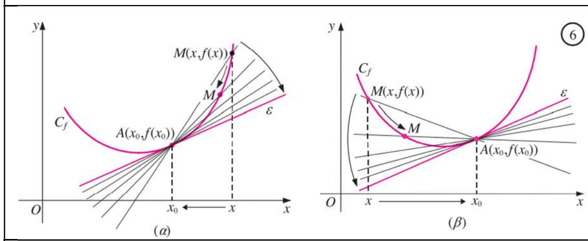
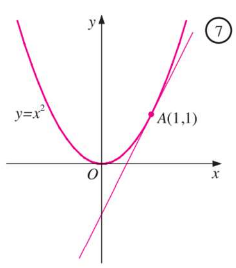
3. Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε: $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} - m\upsilon_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} = \frac{m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}}{\Delta t}$ ή $F = \frac{0,5 \cdot 24}{0,03} N$ ή $F = 400N.$	Φυσική (Β) - Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Διατήρηση της Ορμής	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	2^{o}	8
4. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι: $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F$ ή $\frac{\Delta p}{\Delta t} = B = mg = 90 \cdot 10N$ ή $\frac{\Delta p}{\Delta t} = 900N.$ Επειδή ο αλεξιπτωτιστής θεωρούμε ότι κάνει ελεύθερη πτώση έχουμε $\upsilon = gt = 10 \cdot 1 m/s$ ή $\upsilon = 10 m/s.$	Φυσική (Β) - Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Διατήρηση της Ορμής	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	2^{o}	8
$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{20}{0,25} N$ ή $F = 80N.$	Φυσική (Β) - Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Διατήρηση της Ορμής	Μαθηματικός Τύπος	2^{o}	9
B. Η ζητούμενη δύναμη υπολογίζεται από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{4 \cdot 10^4}{5} N$ ή $F = 8 \cdot 10^3 N.$	Φυσική (Β) - Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Διατήρηση της Ορμής	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	2^{o}	9
B. Για τη μέση δύναμη βρίσκουμε: $F = \frac{\Delta p_{o\lambda}}{\Delta t} = \frac{500 \cdot 51 \cdot 10^{-5}}{1} N$ ή $F = 255 \cdot 10^{-3} N.$	Φυσική (Β) - Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Διατήρηση της Ορμής	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	2^{o}	9
B. Η συνισταμένη δύναμη όπως προκύπτει από τη σχέση $\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ είναι μηδέν για τα χρονικά διαστήματα 0s έως 1s και 2s έως 3s. Αντίθετα κατά το χρονικό διάστημα 1s έως 2s η κλίση της ευθείας είναι σταθερή και κατά συνέπεια η δύναμη έχει σταθερή τιμή $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{4-2}{1} N$ ή $F = 2N.$ Έτσι έχουμε:  	Φυσική (Β) - Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Διατήρηση της Ορμής	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος – Γραφική Παράσταση	2^{o}	9
$\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ ή $F - T = \frac{m\upsilon - 0}{\Delta t}$ ή $\upsilon = \frac{(F-T)\Delta t}{m} =$ $= \frac{(500-200)4}{200} m/s$ ή $\upsilon = 6 m/s.$	Φυσική (Β) - Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Διατήρηση της Ορμής	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	2^{o}	10
B. Από το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής έχουμε: $\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$, όπου ΣF είναι μόνο η τριβή T. Έτσι βρίσκουμε: $T = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ ή $\mu M g = \frac{0 - MV}{\Delta t}$ ή $\mu g = \frac{-V}{\Delta t}$ ή	Φυσική (Β) - Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Διατήρηση της Ορμής	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	2^{o}	10
B. Η ζητούμενη μέση δύναμη F είναι: $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m_2\upsilon_2 - 0}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 15}{0,1} N$ ή $F = 300N.$	Φυσική (Β) - Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Διατήρηση της Ορμής	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	2^{o}	11
B. Ο μαθητής έχει αρχικά την ταχύτητα του πρώτου αυτοκινήτου, δηλαδή $\upsilon = 20 m/s$. Έτσι από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η δύναμη F που του ασκεί η ζώνη για να τον ακινητοποιήσει τελικά είναι: $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_{\tau\varepsilon\lambda} - p_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} = \frac{0 - m\upsilon}{\Delta t}$ ή $F = \frac{0 - 60 \cdot 20}{0,12} N$ ή $F = -10.000N.$ Μπορείτε να διαπιστώσετε ότι η δύναμη αυτή είναι πολύ μεγαλύτερη από το βάρος $B = mg = 60 \cdot 10N = 600N.$	Φυσική (Β) - Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Διατήρηση της Ορμής	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	2^{o}	12
13. $\left. \begin{array}{l} B = k_\mu \frac{2\pi I}{r} \\ I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q}{T} = fq \end{array} \right\} B = k_\mu \frac{2fq}{r} \Rightarrow$ $B = 10^{-7} \frac{2\pi 10^3 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{\pi 3,2 \cdot 10^{-2}} T \Rightarrow B = 2 \cdot 10^{-4} T$	Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Ηλεκτρομαγνητισμός.	Μαθηματικός Τύπος	4^{o}	32
44. $\mathcal{E} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} N = \frac{10^{-2} \cdot 10^2}{0,2} = 5V$	Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Ηλεκτρομαγνητισμός	Μαθηματικός Τύπος	4^{o}	40

$\mathcal{E}=\frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t}N \Rightarrow \mathcal{E}=\frac{B\cdot S}{\Delta t}N \Rightarrow \mathcal{E}=\frac{0,1\cdot\pi(10\cdot 10^{-2})^2}{0,1}1 \Rightarrow \mathcal{E}=\pi\cdot 10^{-2}V.$	Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Ηλεκτρομαγνητισμός.	Μαθηματικός Τύπος	4ο	40
$\mathcal{E}=\frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t}N \Rightarrow \mathcal{E}=\frac{3B\cdot S}{\Delta t}N \Rightarrow \mathcal{E}=\frac{3\cdot 2\cdot 4\pi\cdot 10^{-2}}{\pi}20 \Rightarrow \mathcal{E}=4,8V.$ **Β.** $\left.\begin{array}{l}\Phi_{\alpha\rho\chi}=B\cdot S\\ \Phi_{\tau\varepsilon\lambda}=\frac{B}{4}S\end{array}\right\} \Rightarrow \lvert\Delta\Phi\rvert=\lvert\Phi_{\tau\varepsilon\lambda}-\Phi_{\alpha\rho\chi}\rvert=\left\lvert\frac{B}{4}S\text{-}B\cdot S\right\rvert=\frac{3}{4}B\cdot S$ $\mathcal{E}=\frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t}N \Rightarrow \mathcal{E}=\frac{3B\cdot S}{4\cdot\Delta t}N \Rightarrow \mathcal{E}=\frac{3\cdot 2\cdot 4\pi\cdot 10^{-2}}{4\cdot\pi}20=1,2V$ **Γ.** $\left.\begin{array}{l}\Phi_{\alpha\rho\chi}=B\cdot S\\ \Phi_{\tau\varepsilon\lambda}=BS\cdot\sigma\upsilon\nu 180^{o}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\Phi=\lvert\Phi_{\tau\varepsilon\lambda}-\Phi_{\alpha\rho\chi}\rvert=\lvert -BS-BS\rvert=2B\cdot S$ $\mathcal{E}=\frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t}N \Rightarrow \mathcal{E}=\frac{2BS}{\Delta t}N=\frac{2\cdot 2\cdot 4\pi\cdot 10^{-2}}{\pi}20=3,2V$	Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Ηλεκτρομαγνητισμός.	Μαθηματικός Τύπος	4ο	41
Α. $\mathcal{E}=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}N=\frac{\lvert\Phi_{\tau\varepsilon\lambda}-\Phi_{\alpha\rho\chi}\rvert}{\Delta t}N \Rightarrow \mathcal{E}=\frac{\lvert 2BS-BS\rvert}{\Delta t}N \Rightarrow$ $\mathcal{E}=\frac{BS}{\Delta t}N \Rightarrow \mathcal{E}=\frac{2\cdot 100\cdot 10^{-4}}{1}10^2=2V$	Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Ηλεκτρομαγνητισμός.	Μαθηματικός Τύπος	4ο	41
Β. $\mathcal{E}=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}N \Rightarrow \mathcal{E}=\frac{\lvert\Phi_{\tau\varepsilon\lambda}-\Phi_{\alpha\rho\chi}\rvert}{\Delta t}N \Rightarrow \mathcal{E}=\frac{\lvert 0-BS\rvert}{\Delta t}N \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathcal{E}=\frac{2\cdot 100\cdot 10^{-4}}{1}10^2 \Rightarrow \mathcal{E}=2V$ $I=\frac{\mathcal{E}}{R}=\frac{2}{100}=2\cdot 10^{-2}A.$	Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Ηλεκτρομαγνητισμός.	Μαθηματικός Τύπος	4ο	42
$\mathcal{E}=\frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t}N=4\pi\cdot 10^{-2}V$ $Q=\frac{\Delta\Phi}{R_{o\lambda}}N=\frac{8\pi\cdot 10^{-7}}{40}500=\pi 10^{-5}C$	Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Ηλεκτρομαγνητισμός.	Μαθηματικός Τύπος	4ο	42
49. Α. $\mathcal{E}=\frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t} \Rightarrow \mathcal{E}=\frac{\Delta BS}{\Delta t} \Rightarrow \mathcal{E}=\pi r^2\frac{\Delta B}{\Delta t} \Rightarrow \mathcal{E}=2\cdot\pi(10\sqrt{\pi}\cdot 10^{-2})^2 \Rightarrow$ $\mathcal{E}=2\pi\cdot 10^2\cdot\pi\cdot 10^{-4} \Rightarrow \mathcal{E}=2\pi^2\cdot 10^{-2} \Rightarrow \mathcal{E}=0,2V$ $Q=C\mathcal{E} \Rightarrow Q=2\cdot 0,2=0,4\mu C$	Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Ηλεκτρομαγνητισμός.	Μαθηματικός Τύπος	4ο	42
51. $\mathcal{E}_1=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \mathcal{E}_1=\frac{0,2-0}{1}=0,2V$ **Α.** Από (1 έως 2)s $\mathcal{E}_2=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\frac{0,2-0,2}{1}=0V$ Από (2 έως 3)s $\mathcal{E}_3=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\frac{(0-0,2)}{1}=-0,2V$	Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Ηλεκτρομαγνητισμός.	Μαθηματικός Τύπος	4ο	43
58. $\mathcal{E}=\frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t}=\frac{B\cdot\Delta S}{\Delta t}\underset{\Delta S=\pi\ell^2}{\overset{\gamma\iota\alpha\ \Delta t=T}{\Rightarrow}}\mathcal{E}=\frac{B\cdot\pi\ell^2}{T}\overset{f=1/T}{\Rightarrow}\mathcal{E}=B\cdot\pi\cdot\ell^2 f \Rightarrow$ $\mathcal{E}=0,5\cdot\pi\,(0,15)^2 60 \Rightarrow \mathcal{E}=2,12V.$	Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Ηλεκτρομαγνητισμός.	Μαθηματικός Τύπος	4ο	45
59. $\mathcal{E}=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\frac{B\cdot\Delta S}{\Delta t}\overset{\gamma\iota\alpha\ \Delta t=T}{\Rightarrow}\mathcal{E}=\frac{B\cdot\pi(KM)^2-B\pi(K\Lambda)^2}{T} \Rightarrow$ $\mathcal{E}=B\pi\frac{(KM)^2-(K\Lambda)^2}{T} \Rightarrow \mathcal{E}=B\pi\left\{(KM)^2-(K\Lambda)^2\right\}f \Rightarrow$ $\mathcal{E}=10^{-4}\cdot\pi\left(3^2-2^2\right)\frac{20}{\pi} \Rightarrow \mathcal{E}=10^{-2}V$	Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Ηλεκτρομαγνητισμός.	Μαθηματικός Τύπος	4ο	45
60. $\mathcal{E}=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\frac{B\cdot\Delta S}{\Delta t}=\frac{B\cdot\pi\ell^2}{T} \Rightarrow \mathcal{E}=Bf\pi\ell^2$ $\mathcal{E}=0,2\frac{10}{\pi}\pi\cdot 3^2 \Rightarrow \mathcal{E}=18V$	Φυσική (Γ) Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Ηλεκτρομαγνητισμός.	Μαθηματικός Τύπος	4ο	45

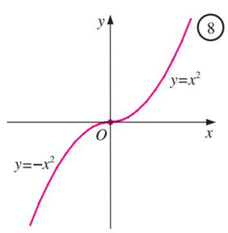
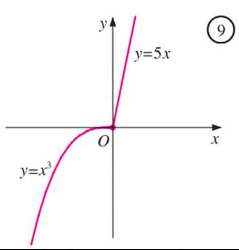
Νόμος της επαγωγής 5.34 α) $E_{ΕΠ} = \frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t} = \frac{\lvert 0 - BA\rvert}{\Delta t} = 2V$ β) $E_{ΕΠ} = \frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t} = \frac{\lvert 2BA - BA\rvert}{\Delta t} = 2V$ γ) $E_{ΕΠ} = \frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t} = \frac{\lvert BA συν180^o - BA\rvert}{\Delta t} = 4V$ δ) $E_{ΕΠ} = \frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t} = \frac{\lvert BA συν90^o - BA\rvert}{\Delta t} = 2V$	Φυσική (Γ) Τεύχος Β – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Νόμος της Επαγωγής	Μαθηματικός Τύπος	5ο	86
5.35 $E_{ΕΠ} = \frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t} = \frac{A\ \Delta B}{\Delta t} = \pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = 0,2\times 10^{-2} V$ $I = \frac{E_{ΕΠ}}{R} = 10^{-3} A \qquad P = I^2 R = 2\times 10^{-6} W$	Φυσική (Γ) Τεύχος Β – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Νόμος της Επαγωγής	Μαθηματικός Τύπος	5ο	87
5.36 Στο χρονικό διάστημα $0 - 2\times 10^{-1} s$ είναι $E_1 = \frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t} = 2V \quad I_1 = \frac{E_1}{R} = 0,2A$ Στο διάστημα $2\times 10^{-1} s - 5\times 10^{-1} s$ είναι $E_2 = \frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t} = 0$ και $I_2 = \frac{E_2}{R} = 0$ Τέλος στο διάστημα $5\times 10^{-1} s - 6\times 10^{-1} s$ θα είναι $E_3 = \frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t} = 4V$ και $I_3 = \frac{E_3}{R} = 0,4A$ Επειδή σ' αυτό το χρονικό διάστημα η μαγνητική ροή μειώνεται, η ηλεκτρεγερτική δύναμη που δημιουργείται έχει αντίθετη πολικότητα από την αρχική. Επομένως και το ηλεκτρικό ρεύμα σ' αυτό το χρονικό διάστημα έχει αντίθετη φορά από την αρχική.  	Φυσική (Γ) Τεύχος Β – Λύσεις των Ασκήσεων.	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Νόμος της Επαγωγής	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος – Γραφική Παράσταση	5ο	87
5.37 $E_{ΕΠ} = N\frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t}$ $I = \frac{E_{ΕΠ}}{R + R_Γ}$ ή $I = N\frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t(R + R_Γ)}$ ή $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = N\frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t(R + R_Γ)}$ ή $\Delta Q = N\frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{R + R_Γ}$ ή $\Delta Q = N\frac{\lvert 0 - BA\rvert}{R + R_Γ}$ ή $\Delta Q = N\frac{B\pi r^2}{R + R_Γ}$ άρα $B = \frac{\Delta Q(R + R_Γ)}{N\pi r^2} = 10,22\times 10^{-2} T$	Φυσική (Γ) Τεύχος Β – Λύσεις των Ασκήσεων	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Νόμος της Επαγωγής	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	5ο	88
5.38 Όταν το σωληνοειδές διαρρέεται από ρεύμα Ι, στο εσωτερικό του δημιουργείται ομογενές μαγνητικό πεδίο $B = \mu_o In$ (1). Όταν μηδενιστεί το ρεύμα μηδενίζεται και το μαγνητικό πεδίο. Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται στο κυκλικό πλαίσιο είναι: $E_{ΕΠ} = N\frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t} = \frac{\lvert 0 - BA\rvert}{\Delta t} = N\frac{B\pi d^2}{4\Delta t}$ Λαμβάνοντας υπόψη την (1) βρίσκουμε $E_{ΕΠ} = N\frac{\mu_o In\pi d^2}{4\Delta t} = 0,16V$	Φυσική (Γ) Τεύχος Β – Λύσεις των Ασκήσεων	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Νόμος της Επαγωγής	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	5ο	88
5.55 Έστω ότι, όταν το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα I από κάθε σπείρα του διέρχεται μαγνητική ροή Φ. Αν το ρεύμα μηδενιστεί σε χρόνο Δt στο πηνίο δημιουργείται ηλεκτρεγερτική δύναμη η μέση τιμή της οποίας είναι: $E_{ΕΠ} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ ή $E_{ΕΠ} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$ άρα $N\Delta\Phi = L\,\Delta I$ ή $N(0 - \Phi) = L(0 - I)$ άρα $L = \frac{N\Phi}{I} = 0,08H$	Φυσική (Γ) Τεύχος Β – Λύσεις των Ασκήσεων	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Αυτεπαγωγή	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	5ο	93

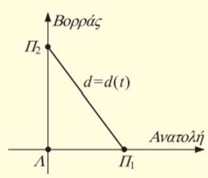
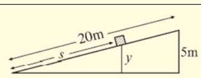
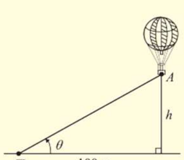
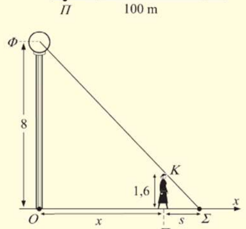
5.58 $E_{ΕΠ} = N\frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{\Delta t}$, $I = \frac{E_{ΕΠ}}{R}$ ή $I = N\frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{R\,\Delta t}$ ή $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = N\frac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{R\,\Delta t}$ ή $\Delta Q = N\frac{\lvert BA\sigma\upsilon\nu 180 - BA\sigma\upsilon\nu 0\rvert}{R} = N\frac{2BA}{R}$ ή $\Delta Q = N\frac{2B\pi r^2}{\rho\frac{l}{s}}$ ή $\Delta Q = N\frac{2B\pi r^2}{\rho\frac{N2\pi r}{s}}$ ή $\Delta Q = \frac{Bsr}{\rho} = 10^{-3}C$	Φυσική (Γ) Τεύχος Β – Λύσεις των Ασκήσεων	Φυσική - Μαθηματικά	Προβλήματα – Νόμος της Επαγωγής	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	5ο	94
β) Το ρεύμα στο κύκλωμα είναι: $I = \frac{E_{ΕΠ} + E_{αυτ}}{R}$ ή $E_{ΕΠ} = IR + E_{αυτ}$ ή $Bl\upsilon = (2t+3)R + E_{αυτ}$ άρα $\upsilon = 2t + 4$ (SI) Η γραφική παράσταση της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο σχήμα 5.20  Σχ. 5.20 γ) Όπως φαίνεται από το διάγραμμα υ-t του σχήματος 5.20 η κίνηση του αγωγού είναι ομαλά επιταχυνόμενη. $\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1} = 2m/s^2$ δ) $I = 2t + 3$ (SI) για $t = 4s$ $I = 11A$ $F_L = BIl = 0,55N$ $F - F_L = ma$ επομένως $F = 0,85N$ $\frac{dW_F}{dt} = P_F = F\upsilon = 10,2W$	Φυσική (Γ) Τεύχος Β – Λύσεις των Ασκήσεων	Φυσική - Μαθηματικά	Προβλήματα – Νόμος της Επαγωγής	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος – Γραφική Παράσταση	5ο	101
3.27 Από το θεώρημα έργου ενέργειας για την άντληση μάζας m νερού έχουμε  $\frac{1}{2}m\upsilon^2 = W_{αντλίας} + W_w$ ή $\frac{1}{2}m\upsilon^2 = W_{αντλίας} - mgh$ οπότε το έργο της αντλίας είναι $W_{αντλίας} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + mgh = m\left(\frac{\upsilon^2}{2} + gh\right)$ Η ισχύς που προσφέρει η αντλία είναι $P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \left(\frac{\upsilon^2}{2} + gh\right)\frac{\Delta m}{\Delta t}$ Όμως $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho\frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho\Pi = \rho A\upsilon$ και επομένως $P = \left(\frac{\upsilon^2}{2} + gh\right)\rho A\upsilon = 5000\ W$	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ – Λύσεις των Ασκήσεων	Φυσική - Μαθηματικά	Προβλήματα – Ρευστά σε κίνηση	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος – Εικόνα	3ο	45
Κινηματική του στερεού 4.32 $\alpha_{γων} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 0,25\ rad/s^2$ $\omega = \omega_0 + \alpha_{γων}t$ οπότε $t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha_{γων}} = 72\ s$  	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ – Λύσεις των Ασκήσεων	Φυσική - Μαθηματικά	Προβλήματα – Μηχανική Στερεού Σώματος – Κινηματική του Στερεού	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος – Γραφική Παράσταση	4ο	52
4.68 α) $\Sigma F = ma_{cm}$ οπότε $w - T = ma_{cm}$ ή $mg - T = ma_{cm}$ και $a_{cm} = \frac{mg - T}{m}$ (1) $\Sigma\tau = I\alpha_{γων}$ (ως προς τον άξονα του κυλίνδρου) ή $TR = \frac{1}{2}mR^2\alpha_{γων}$ (2) όμως $\alpha_{γων} = \frac{a_{cm}}{R}$ (3) Η (2) λόγω της (3) και της (1) γίνεται $TR = \frac{1}{2}mR^2\frac{mg - T}{mR} = R\frac{mg - T}{2}$ και $T = \frac{mg}{3}$ $\frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma\tau = TR = \frac{mgR}{3}$ ή $\frac{\Delta L}{\Delta t} = 6\times10^{-3}\,kgm^2/s^2$  	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ – Λύσεις των Ασκήσεων	Φυσική - Μαθηματικά	Προβλήματα – Μηχανική Στερεού Σώματος – Κινητική ενέργεια - έργο	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος – Εικόνα	4ο	68

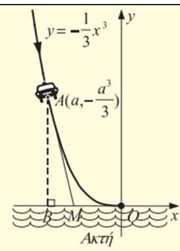
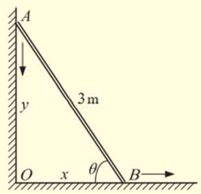
5.37 Η προωστική δύναμη που ασκούν τα καυσαέρια στον πύραυλο δίνεται από τη σχέση $F = u\frac{dm}{dt} = 140000\ N$ όμως επίσης $F = Ma$ και $a = \frac{F}{M} = 14\ m/s^2$.	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ – Λύσεις των Ασκήσεων	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Κρούσεις και σχετικές κινήσεις	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	5ο	82
5.38 $F = u\frac{dm}{dt}$ επίσης $F = Ma$ οπότε $u\frac{dm}{dt} = Ma$ και $\frac{dm}{dt} = \frac{Ma}{u} = 40\ kg/s$.	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ – Λύσεις των Ασκήσεων	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Κρούσεις και σχετικές κινήσεις	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	5ο	83
7.23 Αν η επιφάνεια είναι απόλυτα ανακλαστική τα φωτόνια ανακλώνται με ορμή ίδιου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης με αυτή που προσπίπτουν. Αν p το μέτρο της ορμής ενός προσπίπτοντος φωτονίου το μέτρο της μεταβολής της ορμής του κατά την ανάκλαση είναι $\Delta p = 2p$. Η δύναμη που είναι υπεύθυνη για τη μεταβολή αυτή της ορμής, άρα και η δύναμη που ασκεί το φωτόνιο στην επιφάνεια (δράση - αντίδραση) έχει μέτρο $F_1 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2p}{\Delta t}$, όπου Δt είναι η διάρκεια της κρούσης. Αν N είναι ο αριθμός των φωτονίων που προσπίπτουν ανά δευτερόλεπτο στην επιφάνεια, σε χρόνο Δt θα προσπίπτουν $N\Delta t$ φωτόνια και θα ασκούν συνολικά δύναμη $F_{ολ} = N\Delta t\frac{2p}{\Delta t} = N2p$ Επομένως $N = \frac{F_{ολ}}{2p} = \frac{F_{ολ}}{2\frac{h}{\lambda}} = \frac{F_{ολ}\lambda}{2h} = 5\times10^{26}$ φωτόνια / s	Φυσική (Γ) Τεύχος Γ – Λύσεις των Ασκήσεων	Φυσική - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Στοιχεία Κβαντομηχανικής - Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο - Ορμή φωτονίων	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	7ο	107 - 108
Μαθηματικά						
Όσο το t είναι πλησιέστερα στο t_0, τόσο η μέση ταχύτητα του κινητού δίνει με καλύτερη προσέγγιση το *ρυθμό αλλαγής* της θέσης του κινητού κοντά στο t_0. Για το λόγο αυτό το όριο της μέσης ταχύτητας, καθώς το t τείνει στο t_0, το ονομάζουμε **στιγμιαία ταχύτητα** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και τη συμβολίζουμε με $\upsilon(t_0)$. Δηλαδή:	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Η Έννοια της Παραγώγου	Λεκτικός	2ο	91
$\upsilon(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Η Έννοια της Παραγώγου	Μαθηματικός Τύπος	2ο	91
	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Φυσική - Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο- Η Έννοια της Παραγώγου	Γραφική Παράσταση	2ο	91
	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Φυσική - Μαθηματικά	Παράδειγμα – Η έννοια της Παραγώγου	Γραφική Παράσταση	2ο	92

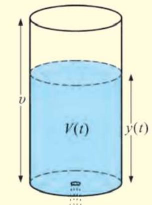
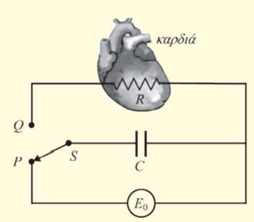
<table>
<tr><td>
</td><td>Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)</td><td>Μαθηματικά</td><td>Θεωρητικό Πλαίσιο- Πρόβλημα της Εφαπτομένης</td><td>Γραφική Παράσταση</td><td>2ο</td><td>92</td></tr>
<tr><td>• $\upsilon(1)=\lim\limits_{t\to 1}\frac{S(t)-S(1)}{t-1}=\lim\limits_{t\to 1}\frac{-t^2+4t-3}{t-1}=\lim\limits_{t\to 1}\frac{-(t-1)(t-3)}{t-1}=2$
• $\upsilon(2)=\lim\limits_{t\to 2}\frac{S(t)-S(2)}{t-2}=\lim\limits_{t\to 2}\frac{-t^2+4t-4}{t-2}=\lim\limits_{t\to 2}\frac{-(t-2)(t-2)}{t-2}=0$
• $\upsilon(3)=\lim\limits_{t\to 3}\frac{S(t)-S(3)}{t-3}=\lim\limits_{t\to 3}\frac{-t^2+4t-3}{t-3}=\lim\limits_{t\to 3}\frac{-(t-1)(t-3)}{t-3}=-2.$
ΣΧΟΛΙΟ
Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}>0$, οπότε είναι $\upsilon(t_0)\geq 0$, ενώ, όταν το κινητό κινείται προς τα αριστερά κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}<0$, οπότε είναι $\upsilon(t_0)\leq 0$.</td><td>Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)</td><td>Μαθηματικά</td><td>Παράδειγμα – Η Έννοια της Παραγώγου</td><td>Λεκτικό - Μαθηματικός Τύπος</td><td>2ο</td><td>92</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)</td><td>Μαθηματικά</td><td>Θεωρητικό Πλαίσιο- Πρόβλημα της Εφαπτομένης</td><td>Γραφική Παράσταση</td><td>2ο</td><td>93</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)</td><td>Μαθηματικά</td><td>Θεωρητικό Πλαίσιο- Πρόβλημα της Εφαπτομένης</td><td>Γραφική Παράσταση</td><td>2ο</td><td>93</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)</td><td>Μαθηματικά</td><td>Θεωρητικό Πλαίσιο- Πρόβλημα της Εφαπτομένης</td><td>Γραφική Παράσταση</td><td>2ο</td><td>93</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)</td><td>Μαθηματικά</td><td>Θεωρητικό Πλαίσιο- Πρόβλημα της Εφαπτομένης</td><td>Γραφική Παράσταση</td><td>2ο</td><td>94</td></tr>
</table>

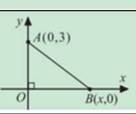
Καθώς το x τείνει στο x_0 με $x > x_0$, η τέμνουσα AM φαίνεται να παίρνει μια οριακή θέση ε (Σχ. 6α). Την ίδια οριακή θέση φαίνεται να παίρνει και όταν το x τείνει στο x_0 με $x < x_0$ (Σχ. 6β). Την οριακή θέση της AM θα μπορούσαμε να την ονομάσουμε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο A. Επειδή η κλίση της τέμνουσας AM είναι ίση με $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, είναι λογικό να αναμένουμε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ θα έχει κλίση το $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Η Έννοια της Παραγώγου	Λεκτικό - Μαθηματικός Τύπος	2ο	94
ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A, την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Η Έννοια της Παραγώγου	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	2ο	94
$$\lambda=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$ Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$ και το σημείο της $A(1,1)$. Επειδή $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=$$ $$=\lim_{x\to 1}(x+1)=2,$$ ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1,1)$. Η εφαπτομένη αυτή έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=2$ και εξίσωση $y-1=2(x-1)$.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Παραδείγματα – Η Έννοια της Παραγώγου	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	2ο	94
Ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο Στα προηγούμενα, οι ορισμοί της στιγμιαίας ταχύτητας ενός κινητού και της εφαπτομένης σε σημείο μιας καμπύλης μας οδήγησαν σε ένα όριο της μορφής $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά -Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ορισμός Παραγώγου Συνάρτησης σε Σημείο	Λεκτικό - Μαθηματικός Τύπος	2ο	94
ΟΡΙΣΜΟΣ Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ορισμός Παραγώγου Συνάρτησης σε Σημείο	Λεκτικό - Μαθηματικός Τύπος	2ο	95
$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$ Πολλές φορές το $h=x-x_0$ συμβολίζεται με Δx, ενώ το $f(x_0+h)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο παραπάνω τύπος γράφεται: $$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ορισμός Παραγώγου Συνάρτησης σε Σημείο	Λεκτικό - Μαθηματικός Τύπος	2ο	95
Η τελευταία ισότητα οδήγησε το Leibniz να συμβολίσει την παράγωγο στο x_0 με $\frac{df(x_0)}{dx}$ ή $\frac{df(x)}{dx}\Big\|_{x=x_0}$. Ο συμβολισμός $f'(x_0)$ είναι μεταγενέστερος και οφείλεται στον Lagrange. Είναι φανερό ότι, αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f, τότε: Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο R τα όρια $$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\ \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ και είναι ίσα.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ορισμός Παραγώγου Συνάρτησης σε Σημείο	Λεκτικό - Μαθηματικός Τύπος	2ο	95

— η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-x^2 & , \ x<0 \\ x^2 & , \ x\geq 0\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^2-0}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-0}{x}=0$, ενώ — η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^3 & , \ x<0 \\ 5x & , \ x\geq 0\end{cases}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-0}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x-0}{x}=5$.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ορισμός Παραγώγου Συνάρτησης σε Σημείο	Λεκτικό - Μαθηματικός Τύπος	2ο	95
ΣΧΟΛΙΑ Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό: ● Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x=S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0. Δηλαδή, είναι $\boldsymbol{\upsilon(t_0)=S'(t_0)}$. ● Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0. Δηλαδή, είναι $\boldsymbol{\lambda=f'(x_0)}$, οπότε η εξίσωση της *εφαπτομένης* ε είναι: $\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}$ Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και **κλίση της C_f στο A** ή **κλίση της f στο x_0**.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά -Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ορισμός Παραγώγου Συνάρτησης σε Σημείο	Λεκτικό - Μαθηματικός Τύπος	2ο	96
	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Παράδειγμα - Ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο	Γραφική Παράσταση	2ο	96
	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Παράδειγμα - Ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο	Γραφική Παράσταση	2ο	96
Στην αρχή του κεφαλαίου αυτού, ορίσαμε τη στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 ως το όριο $\lim\limits_{t\to t_0}\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}=S'(t_0)$. Το όριο αυτό το λέμε και **ρυθμό μεταβολής** της τετμημένης S του κινητού ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0. Γενικά,	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ρυθμός Μεταβολής	Λεκτικό - Μαθηματικός Τύπος	2Ο	123
Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$, όταν f είναι συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y προς το x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ρυθμός Μεταβολής	Λεκτικός	2ο	123
Για παράδειγμα, ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $\upsilon'(t_0)$, της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0. Η παράγωγος $\upsilon'(t_0)$ λέγεται **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha(t_0)}$. Είναι δηλαδή $\boldsymbol{\alpha(t_0)=\upsilon'(t_0)=S''(t_0)}$.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Φυσική	Θεωρητικό Πλαίσιο – Παράδειγμα- Ρυθμός Μεταβολής	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	2ο	123
Στην οικονομία, το κόστος παραγωγής K, η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x, όταν $x=x_0$ και	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Οικονομικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Παράδειγμα- Ρυθμός Μεταβολής	Λεκτικός	2ο	123 - 124

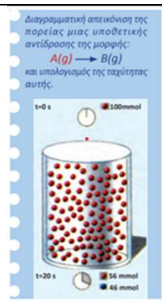
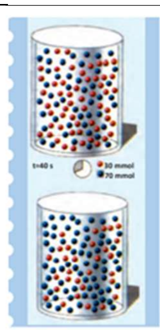
λέγεται **οριακό κόστος στο x_0**. Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες **οριακή είσπραξη στο x_0** και **οριακό κέρδος στο x_0**.						
1. Ένα βότσαλο που ρίχνεται σε μία λίμνη προκαλεί κυκλικό κυματισμό. Μία συσκευή μέτρησης δείχνει ότι τη χρονική στιγμή t_0 που η ακτίνα r του κυματισμού είναι 50 cm, ο ρυθμός μεταβολής της r είναι 20 cm/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E που περικλείεται από το κυκλικό κύμα, τη χρονική στιγμή t_0.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Φυσική – Μαθηματικά	Εφαρμογή - Ρυθμός Μεταβολής	Λεκτικός	2ο	124
2. Αν το συνολικό κόστος παραγωγής x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι $K(x)$ και η συνολική είσπραξη από την πώλησή τους είναι $E(x)$, τότε $P(x) = E(x) - K(x)$ είναι το συνολικό κέρδος και $K_\mu(x) = \dfrac{K(x)}{x}$ είναι το μέσο κόστος. **i) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους μηδενίζεται όταν ο ρυθμός μεταβολής του κόστους και ο ρυθμός μεταβολής της είσπραξης είναι ίσοι.** **ii) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους μηδενίζεται όταν το μέσο κόστος είναι ίσο με το οριακό κόστος.**	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Οικονομικά	Εφαρμογή - Ρυθμός Μεταβολής	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	2ο	124
1. Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της, που ελαττώνεται, δίνεται σε cm από τον τύπο $r = 4 - t^2$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας E και του όγκου V της μπάλας, όταν $t = 1$sec. (Θυμηθείτε ότι $E = 4\pi r^2$ και $V = \frac{4}{3}\pi r^3$).	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Ασκήσεις - Ρυθμός Μεταβολής	Λεκτικός- Μαθηματικός Τύπος	2ο	125
2. Ο όγκος V ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει αυξάνεται με ρυθμό 100 cm³/sec. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η ακτίνα του r τη χρονική στιγμή t_0, που αυτή είναι ίση με 9 cm;	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Ασκήσεις - Ρυθμός Μεταβολής	Λεκτικός	2ο	125
3. Το κόστος παραγωγής, $K(x)$, και η τιμή πώλησης, $\Pi(x)$, x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος δίνονται από τις συναρτήσεις $K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000$ και $\Pi(x) = 420x$ αντιστοίχως. Να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους, $P(x) = \Pi(x) - K(x)$, είναι θετικός.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Οικονομικά	Ασκήσεις - Ρυθμός Μεταβολής	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	2ο	125
4. Δύο πλοία Π_1 και Π_2 αναχωρούν συγχρόνως από ένα λιμάνι Λ. Το πλοίο Π_1 κινείται ανατολικά με ταχύτητα 15 km/h και το Π_2 βόρεια με ταχύτητα 20 km/h.  i) Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των Π_1 και Π_2 ii) Να αποδείξετε ότι η απόσταση $d = (\Pi_1\Pi_2)$ των δυο πλοίων αυξάνεται με σταθερό ρυθμό τον οποίο και να προσδιορίσετε.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Ασκήσεις - Ρυθμός Μεταβολής	Λεκτικός – Γραφική Παράσταση	2ο	125 - 126
5. Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \frac{1}{4}x^2$, $x \geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y, αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Ασκήσεις - Ρυθμός Μεταβολής	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	2ο	126
1. Αν η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό 10 cm²/sec, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος αυτής όταν $r = 85$ cm.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Ασκήσεις - Ρυθμός Μεταβολής	Λεκτικός	2ο	126
2. Έστω T το εμβαδόν του τριγώνου OAB που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $B(0,\ln x)$, με $x > 1$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 4 cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού T, όταν $x = 5$cm.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Ασκήσεις - Ρυθμός Μεταβολής	Λεκτικός	2ο	126
3. Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί στη ράμπα του διπλανού σχήματος και το κουτί κινείται με ταχύτητα 3 m/s. Να βρείτε πόσο γρήγορα ανυψώνεται το κουτί, δηλαδή το ρυθμό μεταβολής του y.  4. Ένα αερόστατο A αφήνει το έδαφος σε απόσταση 100 m από έναν παρατηρητή Π με ταχύτητα 50 m/min. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία θ που σχηματίζει η $A\Pi$ με το έδαφος τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μπαλλόνι βρίσκεται σε ύψος 100 m.  5. Μία γυναίκα ύψους 1,60 m απομακρύνεται από τη βάση ενός φανοστάτη ύψους 8 m με ταχύτητα 0,8 m/s. Με ποια ταχύτητα αυξάνεται ο ίσκιος της; 	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά *3	Ασκήσεις - Ρυθμός Μεταβολής *3	Λεκτικός – Γραφική Παράσταση *3	2ο	126

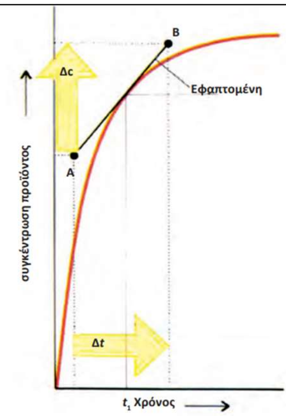
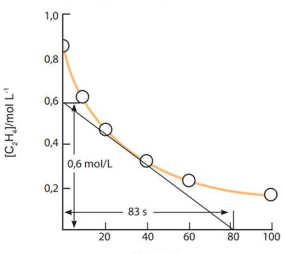
6. Ένα περιπολικό A κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=-\frac{1}{3}x^3$, $x\le 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (Σχήμα). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $$\alpha'(t)=-\alpha(t)$$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου M της ακτής στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3. 	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Ασκήσεις - Ρυθμός Μεταβολής	Λεκτικός – Γραφική Παράσταση	2ο	127
7. Μία σκάλα μήκους 3 m είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλυστράει στο δάπεδο με ρυθμό 0,1 m/sec. Τη χρονική στιγμή t_0, που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5 m, να βρείτε: i) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ (Σχήμα). ii) Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή A της σκάλας. 	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Ασκήσεις - Ρυθμός Μεταβολής	Λεκτικός – Γραφική Παράσταση	2ο	127
8. Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2+y^2=1$. Καθώς περνάει από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Ασκήσεις - Ρυθμός Μεταβολής	Λεκτικός	2ο	127
" Όταν η συνάρτηση $y=f(x)$ παραμένει συνεχής σ' ένα διάστημα της μεταβλητής x και δοθεί σ' αυτή τη μεταβλητή μια τιμή που ανήκει σ' αυτό το διάστημα, τότε κάθε απειροελάχιστη αύξηση της μεταβλητής παράγει μια απειροελάχιστη αύξηση της συνάρτησης. Συνεπώς, αν τεθεί $\Delta x=i$, τότε οι δυο όροι του πηλίκου διαφορών $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Διαφορικός Λογισμός - Ιστορικό Σημείωμα	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	2ο	183
"Έστω z μια δεύτερη συνάρτηση του x, συνδεόμενη με την πρώτη $y=f(x)$ μέσω του τύπου $z=F(y)$. Η z ή $F[f(x)]$ είναι αυτή που ονομάζεται συνάρτηση μιας συνάρτησης της μεταβλητής x και αν οι απειροελάχιστες και ταυτόχρονες αυξήσεις των x, y και z συμβολιστούν με Δx, Δy, Δz αντίστοιχα, τότε θα είναι $$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta x}=\frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (1)$$ *Από αυτήν, περνώντας στα όρια, έχουμε* $$z'=F'(y)\cdot y'=F'[f(x)]\cdot f'(x)\text{"}^{(*)}$$	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Διαφορικός Λογισμός - Ιστορικό Σημείωμα	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	2ο	184
— Η εύρεση του πληθυσμού $N(t)$ μιας κοινωνίας βακτηριδίων τη χρονική στιγμή t, αν είναι γνωστός ο ρυθμός αύξησης $N'(t)$ του πληθυσμού.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά – Βιολογία	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ολοκληρωτικός - Λογισμός	Λεκτικός	3ο	185
2. Η είσπραξη $E(x)$, από την πώληση x μονάδων ενός προϊόντος ($0\le x\le 100$) μιας βιομηχανίας, μεταβάλλεται με ρυθμό $E'(x)=100-x$ (σε χιλιάδες ευρώ ανά μονάδα προϊόντος), ενώ ο ρυθμός μεταβολής του κόστους παραγωγής είναι σταθερός και ισούται με 2 (σε χιλιάδες ευρώ ανά μονάδα προϊόντος). Να βρεθεί το κέρδος της βιομηχανίας από την παραγωγή 100 μονάδων προϊόντος, υποθέτοντας ότι το κέρδος είναι μηδέν όταν η βιομηχανία δεν παράγει προϊόντα. *ΛΥΣΗ* Αν $P(x)$ είναι το κέρδος και $K(x)$ είναι το κόστος παραγωγής για x μονάδες προϊόντος, τότε $$P(x)=E(x)-K(x),$$	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά – Οικονομικά	Εφαρμογή – Ολοκληρωτικός Λογισμός	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	3ο	188
5. Ο πληθυσμός $N(t)$, σε εκατομμύρια, μιας κοινωνίας βακτηριδίων, αυξάνεται με ρυθμό $N'(t)=\frac{1}{20}e^{t/20}$ ανά λεπτό. Να βρείτε την αύξηση του πληθυσμού στα πρώτα 60 λεπτά.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά - Βιολογία	Ασκήσεις – Ολοκληρωτικός Λογισμός	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	3ο	190
6. Μια βιομηχανία έχει διαπιστώσει ότι για εβδομαδιαία παραγωγή x εξαρτημάτων έχει οριακό κόστος x^2+5x (ευρώ ανά μονάδα προϊόντος). Να βρείτε τη συνάρτηση κόστους της εβδομαδιαίας παραγωγής, αν είναι γνωστό ότι τα σταθερά εβδομαδιαία έξοδα της βιομηχανίας, όταν δεν παράγει κανένα εξάρτημα, είναι 100 (ευρώ).	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά – Οικονομικά	Ασκήσεις – Ολοκληρωτικός Λογισμός	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	3ο	190
2. Ένας βιομήχανος, ο οποίος επενδύει x χιλιάδες ευρώ στη βελτίωση της παραγωγής του εργοστασίου του, αναμένει να έχει κέρδος $P(x)$ χιλιάδες ευρώ από αυτή την επένδυση. Μια ανάλυση της παραγωγής έδειξε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους $P(x)$, που οφείλεται στην επένδυση αυτή, δίνεται από τον τύπο $P'(x)=5{,}8e^{-x/2000}$. Να βρείτε το συνολικό κέρδος που οφείλεται σε αύξηση της επένδυσης από 4.000.000 ευρώ σε 6.000.000 ευρώ.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά – Οικονομικά	Ασκήσεις – Ολοκληρωτικός Λογισμός	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	3ο	190

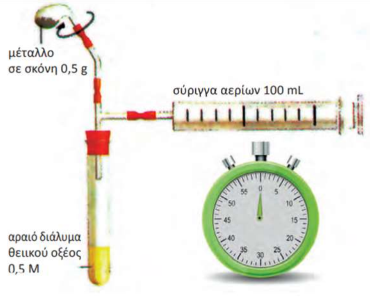
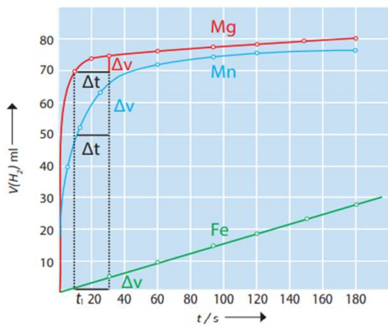
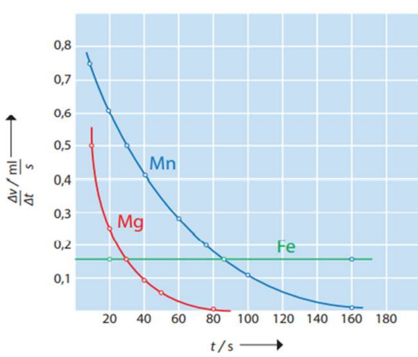
3. Από την πώληση ενός νέου προϊόντος μιας εταιρείας διαπιστώθηκε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους $K(t)$ δίνεται από τον τύπο $K'(t) = 800 - 0{,}6t$ (σε ευρώ την ημέρα), ενώ ο ρυθμός μεταβολής της είσπραξης $E(t)$ στο τέλος των t ημερών δίνεται από τον τύπο $E'(t) = 1000 + 0{,}3t$ (σε ευρώ την ημέρα). Να βρείτε το συνολικό κέρδος της εταιρείας από την τρίτη έως και την έκτη ημέρα παραγωγής.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά – Οικονομικά	Ασκήσεις – Ολοκληρωτικός Λογισμός	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	3ο	190 - 191
2. Ο πληθυσμός $P(t)$, $0 \le t \le 20$, μιας πόλης, που προέκυψε από συγχώνευση 10 κοινοτήτων, αυξάνεται με ρυθμό (σε άτομα ανά έτος) που δίνεται από τον τύπο $P'(t) = te^{t/10}$, $0 \le t \le 20$, όπου t είναι ο αριθμός των ετών μετά τη συγχώνευση. Να βρεθεί ο πληθυσμός $P(t)$ της πόλης t χρόνια μετά τη συγχώνευση, αν γνωρίζουμε ότι ο πληθυσμός ήταν 10000 κάτοικοι κατά τη στιγμή της συγχώνευσης.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Εφαρμογές – Ολοκληρωτικός Λογισμός – Μέθοδοι Ολοκλήρωσης	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	3ο	194
Διαφορικές εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές Έχει αποδειχτεί πειραματικά, ότι ο ρυθμός μεταβολής, ως προς το χρόνο, του πληθυσμού $y = P(t)$ μιας κοινωνίας, η οποία δεν επηρεάζεται από εξωτερικούς παράγοντες, είναι ανάλογος του πληθυσμού. Δηλαδή, ισχύει $P'(t) = \alpha P(t)$,	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Ολοκληρωτικός Λογισμός – Διαφορικές Εξισώσεις	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	3ο	201
6. Έχει αποδειχτεί πειραματικά ότι ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας θ ενός σώματος, όταν αυτό βρεθεί σε περιβάλλον σταθερής θερμοκρασίας T με $\theta > T$, είναι $\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - T),\ k > 0.$ Να βρείτε τη θερμοκρασία $\theta(t)$, αν $\theta(0) = \theta_0$.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά – Φυσική	Ασκήσεις– Ολοκληρωτικός Λογισμός – Διαφορικές Εξισώσεις	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	3ο	206
7. Ο πληθυσμός $P = P(t)$ μιας χώρας μεταναστεύει με σταθερό ρυθμό $m > 0$. Δίνεται ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού P, αν δεν υπήρχε η μετανάστευση, θα ήταν ανάλογος του P. i) Να δικαιολογήσετε ότι ο πληθυσμός P ικανοποιεί την εξίσωση $P' = kP - m$, $k > 0$ σταθερά. ii) Να βρείτε τη συνάρτηση $P = P(t)$, αν $P(0) = P_0$ iii) Να αποδείξετε ότι: — Αν $m < kP_0$, τότε ο πληθυσμός αυξάνεται.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά	Ασκήσεις– Ολοκληρωτικός Λογισμός – Διαφορικές Εξισώσεις	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	3ο	206
8. Έστω $y = y(t)$ το ύψος και $V = V(t)$ ο όγκος του νερού μιας δεξαμενής τη χρονική στιγμή t. Η δεξαμενή αδειάζει από μια κυκλική οπή εμβαδού α που βρίσκεται στον πυθμένα της. Σύμφωνα με το νόμο του Torricelli ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του νερού είναι $\frac{dV}{dt} = -\alpha\sqrt{2gy},\ g = 10\ \text{m/s}^2.$  i) Αν η δεξαμενή είναι κυλινδρική με ύψος 3,6 m, ακτίνα 1 m και η ακτίνα της οπής είναι 0,1 m, να αποδείξετε ότι το y ικανοποιεί την εξίσωση $y' = -\frac{\sqrt{5}}{50}\sqrt{y}$ ii) Να βρείτε το ύψος $y(t)$, αν είναι γνωστό ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ η δεξαμενή ήταν γεμάτη. iii) Πόσος χρόνος θα χρειαστεί για να αδειάσει τελείως η δεξαμενή; (Δίνεται ότι ο όγκος του κυλίνδρου είναι $V = \pi r^2 \upsilon$).	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά – Φυσική	Ασκήσεις– Ολοκληρωτικός Λογισμός – Διαφορικές Εξισώσεις	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος - Εικόνα	3ο	207
9. Ένας βηματοδότης αποτελείται από μια μπαταρία και έναν πυκνωτή, ενώ η καρδιά παίζει το ρόλο της αντίστασης, όπως φαίνεται στο σχήμα. Όταν ο διακόπτης S βρίσκεται στη θέση P, ο πυκνωτής φορτίζεται ενώ, όταν βρίσκεται στη θέση Q, ο πυκνωτής εκφορτίζεται και προκαλεί ηλεκτρικό ερέθισμα στην καρδιά. Κατά τη διάρκεια αυτή στην καρδιά εφαρμόζεται ηλεκτρεγερτική δύναμη E που ικανοποιεί την εξίσωση  $\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{RC}E,\ t_1 < t < t_2.$ όπου R, C σταθερές. Να βρείτε την $E(t)$, αν $E(t_1) = E_0$.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ)	Μαθηματικά – Φυσική	Ασκήσεις– Ολοκληρωτικός Λογισμός – Διαφορικές Εξισώσεις	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος - Εικόνα	3ο	207

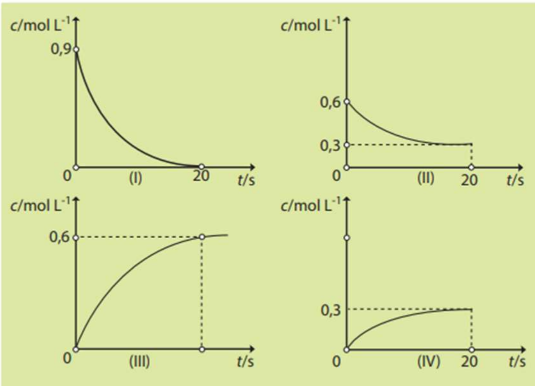
Αν σκεφτούμε όπως στην προηγούμενη ειδική περίπτωση, συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 θα είναι $$\upsilon = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}.$$ Δηλαδή θα είναι το όριο του λόγου της μεταβολής της τετμημένης του κινητού προς την αύξηση του χρόνου, καθώς η τελευταία τείνει προς το μηδέν χωρίς στην πραγματικότητα να γίνεται ίση με το μηδέν.	Μαθηματικά Γενικής Παιδείας (Γ)	Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Στιγμιαία Ταχύτητα	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	1^{o}	22
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$	Μαθηματικά Γενικής Παιδείας (Γ)	Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο - Παράγωγος της f στο x = x_0	Μαθηματικός Τύπος	1^{O}	22
Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει **το ρυθμό μεταβολής** (rate of change) του $y = f(x)$ ως προς το x, όταν $x = x_0$. Έτσι, σύμφωνα με όσα εκθέσαμε στην προηγούμενη παράγραφο: • Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = x_0$. • Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0 $$\upsilon(t_0) = f'(t_0),$$ δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ ως προς t όταν $t = t_0$.	Μαθηματικά Γενικής Παιδείας (Γ)	Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο - Παράγωγος της f στο x = x_0	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	1^{o}	23
2. **Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3}{x}$.** **i) Να βρεθεί η $f'(3)$.** **ii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο της $(3, f(3))$ και να σχεδιαστεί η εφαπτομένη αυτή.**	Μαθηματικά Γενικής Παιδείας (Γ)	Μαθηματικά	Εφαρμογές - Παράγωγος της f στο x = x_0	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	1^{o}	25
3. i) Το μήκος L ενός κύκλου ακτίνας r είναι $L = 2\pi r$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του L ως προς r, όταν $r = 3$. ii) Το εμβαδόν E ενός κύκλου ακτίνας r είναι $E = \pi r^2$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του E ως προς r, όταν $r = 2$.	Μαθηματικά Γενικής Παιδείας (Γ)	Μαθηματικά	Ασκήσεις - Παράγωγος της f στο x = x_0	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	1^{o}	26
4. i) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ενός τετραγώνου πλευράς x ως προς x όταν $x = 5$. ii) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου ενός κύβου πλευράς x ως προς x, όταν $x = 10$. **5.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης: i) $f(x) = x^2$ στο $A(3, f(3))$ ii) $f(x) = 2\sqrt{x}$ στο $A(4, f(4))$.	Μαθηματικά Γενικής Παιδείας (Γ)	Μαθηματικά	Ασκήσεις - Παράγωγος της f στο x = x_0	Λεκτικός	1^{o}	27
20. Το βάρος B σε γραμμάρια ενός θηλυκού ποντικιού ύστερα από t εβδομάδες δίνεται προσεγγιστικά από τη συνάρτηση $B(t) = 1 + \frac{1}{4}(t+2)^2$, όπου $t \leq 8$. Να βρείτε το ρυθμό ανάπτυξης του ποντικιού: i) ύστερα από t εβδομάδες και ii) ύστερα από 1, 2 και 8 εβδομάδες.	Μαθηματικά Γενικής Παιδείας (Γ)	Μαθηματικά	Ασκήσεις - Παράγωγος της f στο x = x_0	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	1^{O}	37
21. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων $A(0,3)$ και $B(x,0)$ ως προς x όταν $x = 10$. 	Μαθηματικά Γενικής Παιδείας (Γ)	Μαθηματικά	Ασκήσεις - Παράγωγος της f στο x = x_0	Λεκτικός – Γραφική Παράσταση	1^{o}	37
2. **Το κέρδος P σε ευρώ από την πώληση ενός αυτοκινήτου ορισμένου τύπου και ο χρόνος παραγωγής του t σε ώρες σχετίζονται με τον τύπο:** $$P(t) = 20\left(200 - \frac{250}{t} - t^2\right),\ t > 3.$$ **Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό κέρδος.**	Μαθηματικά Γενικής Παιδείας (Γ)	Οικονομικά	Εφαρμογές - Το Κριτήριο της Δεύτερης Παραγώγου	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	1^{o}	44
2. Το κόστος C της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος από μια βιοτεχνία που απασχολεί ν εργάτες δίνεται από τον τύπο: $$C(x) = x^3 - 3\nu x^2 + 5\nu^3 \text{ ευρώ}$$ Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι $16 - \nu$ ευρώ. Να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παράγονται ημερησίως και από πόσους εργάτες, ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος.	Μαθηματικά Γενικής Παιδείας (Γ)	Οικονομικά	Γενικές Ασκήσεις	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	1^{o}	48

8. Αν $C(x)$ είναι το συνολικό κόστος για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος, τότε η συνάρτηση C λέγεται **συνάρτηση κόστους**, το πηλίκο $c(x)=\frac{C(x)}{x}$ λέγεται **μέσο κόστος** και το όριο $\lim_{h\to 0}\frac{C(x+h)-C(x)}{h}$ λέγεται **οριακό κόστος**. α) Να αποδείξετε ότι αν για κάποιο x το μέσο κόστος είναι ελάχιστο, τότε ισχύει: οριακό κόστος = μέσο κόστος. β) Μια εταιρεία εκτιμά ότι το κόστος (σε δολάρια) για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος είναι $C(x)=\frac{1}{1000}\cdot x^2+2x+2600$. i) Να βρείτε το κόστος, το μέσο κόστος και το οριακό κόστος για την παραγωγή 1000 μονάδων, 2000 μονάδων και 3000 μονάδων. ii) Ποιο είναι το επίπεδο παραγωγής για το οποίο το μέσο κόστος είναι το χαμηλότερο και ποια είναι η ελάχιστη τιμή του μέσου κόστους;	Μαθηματικά Γενικής Παιδείας (Γ)	Οικονομικά	Γενικές Ασκήσεις	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	1Ο	48 - 49
9. Αν x μονάδες ενός προϊόντος είναι διαθέσιμες για πώληση, τότε η τιμή πώλησης $p(x)$ της μονάδας του προϊόντος λέγεται **συνάρτηση ζήτησης**. Από την πώληση x μονάδων του προϊόντος, τα συνολικά έσοδα είναι $R(x)=x\cdot p(x)$. Η συνάρτηση R λέγεται **συνάρτηση εσόδων** και η παράγωγος R' λέγεται **οριακή συνάρτηση εσόδων**. Επίσης από την πώληση x μονάδων του προϊόντος το συνολικό κέρδος είναι $P(x)=R(x)-C(x)$. Η συνάρτηση P καλείται **συνάρτηση κέρδους** και η παράγωγος P' καλείται **οριακή συνάρτηση κέρδους**. α) Να αποδείξετε ότι αν το κέρδος για κάποιο x είναι μέγιστο, τότε τα οριακά έσοδα είναι ίσα με το οριακό κόστος. β) Ποιο είναι το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη για μια εταιρεία, αν η συνάρτηση κόστους είναι $C(x)=3800+5x-0{,}001x^2$ και η συνάρτηση ζήτησης $p(x)=50-0{,}01x$;	Μαθηματικά Γενικής Παιδείας (Γ)	Οικονομικά	Γενικές Ασκήσεις	Λεκτικός – Μαθηματικός Τύπος	1Ο	49
Τα x, s είναι συναρτήσεις του χρόνου t και ισχύει, $x'(t)=0{,}8$ m/s ενώ $s'(t)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής του ίσκιου της γυναίκας. Από την (1) έχουμε: $0{,}2=\frac{s}{x+s}\Leftrightarrow s=0{,}2(x+s)\Leftrightarrow 0{,}8s=0{,}2x\Leftrightarrow s(t)=\frac{1}{4}x(t).$ Επομένως $s'(t)=\frac{1}{4}x'(t)=0{,}25x'(t)$ Άρα $s'(t)=0{,}25\cdot 0{,}8=0{,}2$ m/s.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ) – Λύσεις των Ασκήσεων	Μαθηματικά – Φυσική	Ασκήσεις - Διαφορικός Λογισμός 2.4	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	2ο	89
8. Ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας ως προς τη δόση του φαρμάκου είναι $h(x)=T'(x)=2x-\frac{3}{4}x^2$. Για κάθε $x\in(0,3)$ είναι $h'(x)=2-\frac{6x}{4}$, οπότε $h'(x)=0\Leftrightarrow 2-\frac{6x}{4}=0\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}.$ Το πρόσημο της h', η μονοτονία και τα ακρότατα της h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & \frac{4}{3} & & 3 \\ \hline h'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline h(x) & & \nearrow & \underset{\max}{\frac{4}{3}} & \searrow & \end{array}$ Δηλαδή, ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας ως προς τη δόση x του φαρμάκου γίνεται μέγιστος όταν $x=\frac{4}{3}$ mgr.	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ) – Λύσεις των Ασκήσεων	Μαθηματικά – Φυσική	Ασκήσεις - Διαφορικός Λογισμός 2.7	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος – Πίνακας	2ο	114
Είναι όμως $P_1'(t)=k\cdot P(t),\ k>0,$ αφού έχουμε ρυθμό αύξησης του $P_1(t)$ ανάλογο του $P(t)$. Επίσης είναι $P_2'(t)=m$, οπότε η (1) γράφεται $P'(t)=kP(t)-m,$	Μαθηματικά Προσανατολισμού (Γ) – Λύσεις των Ασκήσεων	Μαθηματικά	Ασκήσεις – Ολοκληρωτικός Λογισμός 3.3	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	3Ο	195
Χημεία						

➢ ***Ταχύτητα μιας αντίδρασης ορίζεται η μεταβολή της συγκέντρωσης ενός από τα αντιδρώντα ή τα προϊόντα, στη μονάδα του χρόνου.***	Χημεία (Α)	Χημεία	Θεωρητικό Πλαίσιο	Λεκτικό	3ο	98
Ταχύτητα αντίδρασης - Ορισμός Ας πάρουμε για παράδειγμα την αντίδραση: $2HI(g) \longrightarrow H_2(g)+I_2(g)$ Η ταχύτητα διάσπασης του HI (ή καλύτερα ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης του HI) δίνεται από τη σχέση: $\upsilon_{HI}=\frac{-(\text{μεταβολή συγκέντρωσης HI})}{\text{αντίστοιχο χρόνο}}=\frac{-\Delta[HI]}{\Delta t}$ Το αρνητικό πρόσημο εισάγεται, ώστε η ταχύτητα διάσπασης, δηλαδή ο **ρυθμός** μεταβολής της συγκέντρωσης του HI, να πάρει θετικές τιμές. $\Delta[HI]=[HI]_{τελ}-[HI]_{αρχ}<0$ και $\frac{-\Delta[HI]}{\Delta t}>0$	Χημεία Προσανατολισμού (Γ) Τεύχος Β, Α	Χημεία – Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο- Χημική Κινητική	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	3ο	73, 87
$\upsilon_{HI}=\frac{-(\text{μεταβολή συγκέντρωσης HI})}{\text{αντίστοιχο χρόνο}}=\frac{-\Delta[HI]}{\Delta t}$	Χημεία Προσανατολισμού (Γ) Τεύχος Β, Α	Χημεία – Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο- Χημική Κινητική	Μαθηματικός Τύπος	3ο	73 ,87
$\upsilon=-\frac{1}{\alpha}\frac{\Delta[A]}{\Delta t}=-\frac{1}{\beta}\frac{\Delta[B]}{\Delta t}=\frac{1}{\gamma}\frac{\Delta[\Gamma]}{\Delta t}=\frac{1}{\delta}\frac{\Delta[\Delta]}{\Delta t}$	Χημεία Προσανατολισμού (Γ) Τεύχος Β, Α	Χημεία – Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο- Χημική Κινητική	Μαθηματικός Τύπος	3ο	74, 88
$\upsilon=-\frac{1}{\alpha}\frac{d[A]}{dt}=-\frac{1}{\beta}\frac{d[B]}{dt}=\frac{1}{\gamma}\frac{d[\Gamma]}{dt}=\frac{1}{\delta}\frac{d[\Delta]}{dt}$	Χημεία Προσανατολισμού (Γ) Τεύχος Β, Α	Χημεία – Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο- Χημική Κινητική	Μαθηματικός Τύπος	3ο	74, 88
	Χημεία Προσανατολισμού (Γ) Τεύχος Β, Α	Χημεία	Θεωρητικό Πλαίσιο – Χημική Κινητική	Λεκτικό - Εικόνα	3ο	74 & 75, 88 & 89
	Χημεία Προσανατολισμού (Γ) Τεύχος Β, Α	Χημεία	Θεωρητικό Πλαίσιο – Χημική Κινητική	Εικόνα	3ο	74 & 75, 88 & 89
$V_{δοχ}=1$ L **1. Ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης του Β την περίοδο 0 - 20 s** $U_B=\Delta[B]/\Delta t=(46-0)/20=2,3$ mmol L^{-1} s^{-1} **2. Ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης του Β την περίοδο 20 - 40 s** $U_B=\Delta[B]/\Delta t=(70-46)/20=1,2$ mmol L^{-1} s^{-1} **3. Ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης του Β την περίοδο 0 - 40 s** $U_B=\Delta[B]/\Delta t=(70-0)/40=1,75$ mmol L^{-1} s^{-1}	Χημεία Προσανατολισμού (Γ) Τεύχος Β, Α	Χημεία – Μαθηματικός Τύπος	Θεωρητικό Πλαίσιο – Χημική Κινητική	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	3ο	74 & 75, 88 & 89

 	Χημεία Προσανατολισμού (Γ) Τεύχος Β, Α	Χημεία	Θεωρητικό Πλαίσιο – Χημική Κινητική	Λεκτικό - Εικόνα	3ο	74 & 75, 88 & 89
 ΣΧΗΜΑ 3.3 Για να υπολογίσουμε τη στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_1, φέρνουμε την εφαπτομένη της καμπύλης που αντιστοιχεί στο σημείο t_1 και υπολογίζουμε τη κλίση της. Η κλίση της ευθείας αυτής βρίσκεται αν πάρουμε δύο σημεία της Α και Β και υπολογίσουμε το Δc και Δt. Η στιγμιαία ταχύτητα σχηματισμού προϊόντος $υ_{t1}$ τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση: $υ_{t1}= Δc/Δt$	Χημεία Προσανατολισμού (Γ) Τεύχος Β, Α	Χημεία - Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο – Χημική Κινητική	Λεκτικό – Γραφική Παράσταση	3ο	75 & 89
Παράδειγμα 3.1 Η ταχύτητα σχηματισμού της NH_3 $N_2(g)+3H_2(g) \longrightarrow 2NH_3(g)$ είναι 2,5 mol L^{-1} h^{-1} α) Ποιος είναι ο ρυθμός κατανάλωσης του H_2 στο ίδιο χρονικό διάστημα; β) Ποια είναι η ταχύτητα της αντίδρασης; **ΛΥΣΗ** α) Από την αντίδραση εύκολα υπολογίζουμε ότι: $N_2+3H_2 \longrightarrow 2NH_3$ $\frac{3\ mol}{x} = \frac{2\ mol}{2{,}5\ mol}$ ή x = 3,75 mol άρα ο ρυθμός κατανάλωση του H_2 είναι 3,75 mol L^{-1} h^{-1}. β) Η ταχύτητα της αντίδρασης είναι: $υ = -\frac{1}{3}\frac{Δ[H_2]}{Δt} = \frac{1}{2}\frac{Δ[NH_3]}{Δt} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5\,mol\,L^{-1}\,h^{-1} = 1{,}25\ molL^{-1}\ h^{-1}$	Χημεία Προσανατολισμού (Γ) Τεύχος Β, Α	Χημεία - Μαθηματικά	Παράδειγμα – Χημική Κινητική	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	3ο	75 & 89
α. Για τα πρώτα 20 s εύκολα υπολογίζουμε ότι: $υ = -\frac{1}{2}\frac{Δ[CH_2=CH_2]}{Δt} = -\frac{1}{2}\frac{(0{,}51-0{,}91)mol\ L^{-1}}{20s} = 0{,}01\ mol\ L^{-}$ β. Σχεδιάζουμε την καμπύλη μεταβολής της συγκεντρώσεως C_2H_4 συναρτήσει του χρόνου Από την καμπύλη της αντίδρασης υπολογίζουμε την ταχύτητα της αντίδρασης 30s μετά την έναρξη των μετρήσεων  $υ= -\frac{1}{2}\frac{Δ[CH_2=CH_2]}{Δt} = -\frac{1}{2}\frac{-0{,}6\ mol\ L^{-1}}{83\ s} = 0{,}00361\ mol\ L^{-1}\ s^{-1}$	Χημεία Προσανατολισμού (Γ) Τεύχος Β, Α	Χημεία - Μαθηματικά	Παράδειγμα – Χημική Κινητική	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος – Γραφική Παράσταση	3ο	76 & 90

 ΣΧΗΜΑ 3.9 Πειραματική διάταξη για την κινητική μελέτη της αντίδρασης $M+H_2SO_4 \longrightarrow MSO_4+H_2\uparrow$	Χημεία Προσανατολισμού (Γ) Τεύχος Β, Α	Χημεία	Εφαρμογή - Ένα πείραμα χημικής κινητικής μελέτης	Εικόνα	3ο	84 & 98
 ΣΧΗΜΑ 3.10 Καμπύλες αντίδρασης (V-t).	Χημεία Προσανατολισμού (Γ) Τεύχος Β, Α	Χημεία Μαθηματικά	Εφαρμογή - Ένα πείραμα χημικής κινητικής μελέτης	Γραφική Παράσταση	3ο	85 & 99
 ΣΧΗΜΑ 3.11 Ταχύτητα αντίδρασης σε συνάρτηση με το χρόνο (ΔV/Δt-t).	Χημεία Προσανατολισμού (Γ) Τεύχος Β, Α	Χημεία - Μαθηματικά	Εφαρμογή - Ένα πείραμα χημικής κινητικής μελέτης	Γραφική Παράσταση	3ο	85 & 99
3. Ταχύτητα αντίδρασης, u, είναι η μεταβολή της συγκέντρωσης ενός από τα αντιδρώντα ή τα προϊόντα, Δc, στην αντίστοιχη μεταβολή του χρόνου, Δt. Δηλαδή, $u = \frac{\Delta c}{\Delta t}$	Χημεία Προσανατολισμού (Γ) Τεύχος Β, Α	Χημεία – Μαθηματικά	Θεωρητικό Πλαίσιο-Χημική Κινητική - Ανακεφαλαίωση	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	3ο	89 & 103
31. Για την αντίδραση: $2A(g)+3B(g) \longrightarrow \Gamma(g)+2\Delta(g)$ ποιος από τους παρακάτω λόγους δεν εκφράζει την ταχύτητα της αντίδρασης: (α) $-\frac{d[A]}{2dt}$ (β) $-\frac{d[B]}{3dt}$ (γ) $\frac{d[\Gamma]}{dt}$ (δ) $\frac{d[\Delta]}{dt}$	Χημεία Προσανατολισμού (Γ) Τεύχος Β, Α	Χημεία – Μαθηματικά	Ασκήσεις Προβλήματα - Χημική Κινητική	Λεκτικό – Μαθηματικός Τύπος	3ο	92 & 106
32. Σε δοχείο όγκου 2 L εισάγουμε 0,8 mol αερίου Α και 0,3 mol αερίου Β,που αντιδρούν σύμφωνα με τη χημική εξίσωση: $A(g)+B(g) \longrightarrow \Gamma(g)$ Μετά από 2 s υπάρχουν στο δοχείο 0,6 mol Α. Ποια είναι η μέση ταχύτητα της αντίδρασης για τα δύο πρώτα δευτερόλεπτα;	Χημεία Προσανατολισμού (Γ) Τεύχος Β, Α	Χημεία – Μαθηματικά	Ασκήσεις Προβλήματα - Χημική Κινητική	Λεκτικό	3ο	92 & 106
33. Σε δοχείο όγκου 1 L εισάγονται 0,6 mol αερίου Α και 2 mol αερίου Β, που αντιδρούν σύμφωνα με τη χημική εξίσωση $A(g)+2B(g) \longrightarrow 3\Gamma(g)$ Μετά από 10 s περισσεύουν 0,4 mol Α. Να υπολογιστεί η μέση ταχύτητα της αντίδρασης για τα πρώτα 10 s.	Χημεία Προσανατολισμού (Γ) Τεύχος Β, Α	Χημεία – Μαθηματικά	Ασκήσεις Προβλήματα - Χημική Κινητική	Λεκτικό	3ο	92 & 106

<table>
<tr>
<td>* * 52. Οι γραφικές παραστάσεις των συγκεντρώσεων των ουσιών που συμμετέχουν στην αντίδραση: $A(g)+3\Gamma(g) \longrightarrow 2B(g)+\Delta(g)$ σε συνάρτηση με το χρόνο, φαίνονται στα παρακάτω τέσσερα (Ι έως IV) διαγράμματα.


(α) Ποια από τις καμπύλες αυτές αντιστοιχεί στην ουσία Α, ποια στη Β, ποια στη Γ και ποια στη Δ;
(β) Να υπολογίσετε τις συγκεντρώσεις όλων των σωμάτων μετά το τέλος της αντίδρασης.
(γ) Ποια είναι η μέση ταχύτητα της αντίδρασης για τα πρώτα 20 s;
(δ) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης κάθε ουσίας Α, Β, Γ και Δ στα πρώτα 20s;
(ε) Ποια είναι η ταχύτητα της αντίδρασης τη χρονική στιγμή $t = 20$ s;</td>
<td>Χημεία Προσανατολισμού (Γ) Τεύχος Β, Α</td>
<td>Χημεία – Μαθηματικά</td>
<td>Ασκήσεις Προβλήματα - Χημική Κινητική</td>
<td>Λεκτικό – Γραφική Παράσταση</td>
<td>3ο</td>
<td>96 & 110</td>
</tr>
<tr>
<td>* * 54. Σε δοχείο όγκου 1 L εισάγουμε 6 mol αερίου Α και 5 mol αερίου Β, τα οποία αντιδρούν σύμφωνα με την αντίδραση:
$A(g)+B(g) \longrightarrow \Gamma(g)+\Delta(g)$
Για τον προσδιορισμό της ταχύτητας αντίδρασης έγινε μια σειρά μετρήσεων, την οποία αναφέρουμε στον ακόλουθο πίνακα:
<table>
<tr><td>t/min</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>c_Γ/mol L⁻¹</td><td>0</td><td>3</td><td>4</td><td>4,5</td><td>4,7</td></tr>
</table>
(α) Να γίνει η γραφική παράσταση της σχέσης $c_\Gamma = f(t)$.
(β) Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα της αντίδρασης για τα 2 πρώτα λεπτά.
(γ) Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα της αντίδρασης για το χρονικό διάστημα 1,5 min - 2,5 min.
(δ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα της αντίδρασης για τη χρονική στιγμή $t = 2$ min</td>
<td>Χημεία Προσανατολισμού (Γ) Τεύχος Β, Α</td>
<td>Χημεία</td>
<td>Ασκήσεις Προβλήματα - Χημική Κινητική</td>
<td>Λεκτικό - Πίνακας</td>
<td>3ο</td>
<td>97 & 111</td>
</tr>
<tr>
<td>Τ
Ταχύτητα (ρυθμός μεταβολής) αντίδρασης: η μεταβολή της συγκέντρωσης των αντιδρώντων ή προϊόντων στη μονάδα του χρόνου.</td>
<td>Χημεία Προσανατολισμού (Γ) Τεύχος Α</td>
<td>Χημεία</td>
<td>Παράρτημα – Λεξιλόγιο όρων</td>
<td>Λεκτικός</td>
<td>Π α ρ ά ρτ η μ α</td>
<td>Π5</td>
</tr>
<tr>
<td>49. $\left.\begin{matrix}\Delta T_b = k_b m \\ \Delta T_f = k_f m\end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{\Delta T_b}{\Delta T_f} = \dfrac{k_b}{k_f} \Rightarrow \dfrac{0,4\,^\circ C}{\Delta \theta_f} = \dfrac{0,52}{1,86} \Rightarrow \Delta T_f = 1,43\,^\circ C$
Άρα το σημείο πήξης του διαλύματος είναι –1,43 °C.</td>
<td>Χημεία Προσανατολισμού (Γ) – Τεύχος Α – Λύσεις των Ασκήσεων</td>
<td>Χημεία - Μαθηματικά</td>
<td>Ασκήσεις - Διαμοριακές δυνάμεις - καταστάσεις της ύλης - προσθετικές ιδιότητες -Ζεσεοσκοπία - Κρυοσκοπία</td>
<td>Μαθηματικός Τύπος</td>
<td>1ο</td>
<td>11</td>
</tr>
<tr>
<td>31. Η $\dfrac{d[\Delta]}{dt}$ δεν είναι η ταχύτητα της αντίδρασης, η ταχύτητα είναι $\dfrac{1}{2}\dfrac{d[\Delta]}{dt}$.</td>
<td>Χημεία Προσανατολισμού (Γ) – Τεύχος Α, Β – Λύσεις των Ασκήσεων</td>
<td>Χημεία - Μαθηματικά</td>
<td>Ασκήσεις - Διαμοριακές δυνάμεις - καταστάσεις της ύλης - προσθετικές ιδιότητες -Ζεσεοσκοπία - Κρυοσκοπία</td>
<td>Λεκτικό Μαθηματικός Τύπος</td>
<td>3ο</td>
<td>25 , 20</td>
</tr>
<tr>
<td>32. $\upsilon = -\dfrac{\Delta[A]}{\Delta t} = -\dfrac{-\dfrac{0,2}{2}}{2}\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}\cdot s^{-1}} = 0,05\ \mathrm{mol\cdot L^{-1}\cdot s^{-1}}$.</td>
<td>Χημεία Προσανατολισμού (Γ) – Τεύχος Α, Β – Λύσεις των Ασκήσεων</td>
<td>Χημεία - Μαθηματικά</td>
<td>Ασκήσεις – Χημική Κινητική</td>
<td>Μαθηματικός Τύπος</td>
<td>3ο</td>
<td>25 , 20</td>
</tr>
</table>

33. $\upsilon = -\frac{\Delta[A]}{\Delta t} = \frac{0,2}{\frac{1}{10}} mol \cdot L^{-1} \cdot s^{-1} = 0,02\ mol \cdot L^{-1} \cdot s^{-1}$.	Χημεία Προσανατολισμού (Γ) – Τεύχος Α, Β – Λύσεις των Ασκήσεων	Χημεία - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Χημική Κινητική	Μαθηματικός Τύπος	3ο	25 , 20
52. α, β. Διάγραμμα Ι: Γ 0 Διάγραμμα ΙΙ: Α 0,3 Μ Διάγραμμα ΙΙΙ: Β 0,6 Μ Διάγραμμα IV: Δ 0,3 Μ γ. $\upsilon = -\frac{\Delta[A]}{\Delta t} = -\frac{[0,3-0,6]}{20} mol \cdot L^{-1} \cdot s^{-1} = 0,015\ mol \cdot L^{-1} \cdot s^{-1}$ δ. Α: $0,015\ mol \cdot L^{-1} \cdot s^{-1}$ Β: $0,03\ mol \cdot L^{-1} \cdot s^{-1}$ Γ: $0,045\ mol \cdot L^{-1} \cdot s^{-1}$ Δ: $0,015\ mol \cdot L^{-1} \cdot s^{-1}$ ε. Τη χρονική στιγμή t = 20 s η ταχύτητα της αντίδρασης είναι μηδέν.	Χημεία Προσανατολισμού (Γ) – Τεύχος Α, Β – Λύσεις των Ασκήσεων	Χημεία - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Χημική Κινητική	Μαθηματικός Τύπος	3ο	28 , 23
54. α. (Γραφική παράσταση) β. $\upsilon = \frac{\Delta[\Gamma]}{\Delta t} = -\frac{4\ mol \cdot L^{-1}}{2\ min^{-1}} = 2\ mol \cdot L^{-1} \cdot min^{-1}$ γ. Βρίσκεται γραφικά. δ. Βρίσκεται γραφικά.	Χημεία Προσανατολισμού (Γ) – Τεύχος Α, Β – Λύσεις των Ασκήσεων	Χημεία - Μαθηματικά	Ασκήσεις – Χημική Κινητική	Μαθηματικός Τύπος	3ο	29 , 24