ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
«ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τα Μαθηματικά στη Βαβυλωνία:
Η περίπτωση της πλάκας Plimpton 322

Ιωάννης Κουδούνας
Α.Μ. 3132019017

Σάμος 2022

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τα Μαθηματικά στη Βαβυλωνία:
Η περίπτωση της πλάκας Plimpton 322

Ιωάννης Κουδούνας
Α.Μ. 3132019017

Σάμος 2022

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Κωνσταντίνα Ζορμπαλά (επιβλέπουσα καθηγήτρια)

Ανδρέας Παπασαλούρος

Μιχαήλ Ανούσης

Αναπληρωματικό μέλος: Νικόλαος Δαφνής

Ημερομηνία παρουσίασης: 25/02/2022

Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο φοίτησής μου στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα «Σπουδές στα μαθηματικά» του τμήματος μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου και το θέμα με το οποίο ασχολείται είναι «Τα μαθηματικά στη Βαβυλωνία: Η περίπτωση της πλάκας Plimpton 322».

Το θέμα της εργασίας που επέλεξα έγινε με αφορμή την επαγγελματική μου ενασχόληση με τη διδασκαλία των μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα, το σχολικό έτος 2019-2020 προσλήφθηκα ως αναπληρωτής καθηγητής μαθηματικών στη Σάμο για να διδάξω το μάθημα των μαθηματικών στο Γυμνάσιο Καρλοβασίου στο οποίο βρίσκομαι και σήμερα. Όταν διδάσκω τα μαθηματικά στο τέλος των κεφαλαίων των σχολικών βιβλίων υπάρχουν ιστορικά ένθετα, τα οποία πολλά από αυτά αναφέρονται στη Βαβυλώνα και στην ιστορία της.

Επιπρόσθετα, στη διάρκεια του μεταπτυχιακού μου προγράμματος παρακολούθησα το μάθημα της Ιστορίας των μαθηματικών, όπου ένα μέρος του μαθήματος αναφερόταν στα Βαβυλωνιακά μαθηματικά και το οποίο μου κέντρισε ιδιαίτερα το ενδιαφέρον και την περιέργεια να μάθω περισσότερα.

Όλα τα παραπάνω, καθώς και το γεγονός ότι ο αριθμός των μελετών και των επιστημονικών ερευνών είναι περιορισμένος πάνω στα Βαβυλωνιακά μαθηματικά αποτέλεσαν για μένα σημαντικό κίνητρο και ευκαιρία να καταλήξω στο παραπάνω θέμα για τη διπλωματική μου εργασία.

Καρλόβασι, Φεβρουάριος 2022

ΕΥΧΑΡΙΣΤΗΡΙΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους που στάθηκαν δίπλα μου και συνέβαλλαν με την αμέριστη στήριξή τους να ολοκληρώσω με επιτυχία το μεταπτυχιακό μου, *«Σπουδές στα Μαθηματικά»* του Πανεπιστημίου Αιγαίου, καθώς και τη συγγραφή της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπουσα καθηγήτρια μου κ. Κωνσταντίνα Ζορμπαλά της οποίας η συμβολή ήταν μεγάλη για την ολοκλήρωση της εργασίας αυτής. Η επιστημονική της καθοδήγηση, οι υποδείξεις της, ο πολύτιμος χρόνος που μου διέθεσε και η συμπαράστασή της έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να την ευχαριστήσω για το θέμα που μου πρότεινε, καθώς μου έδωσε την ευκαιρία να εμβαθύνω τις γνώσεις μου στα Βαβυλωνιακά μαθηματικά που αποτελούν ένα πολύ σημαντικό τμήμα της Ιστορίας των μαθηματικών.

Τέλος, θέλω φυσικά να ευχαριστήσω και την οικογένεια μου για τη συνεχή στήριξη που έδειξαν σε όλο το διάστημα που διήρκησαν οι μεταπτυχιακές μου σπουδές.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο Βαβυλωνιακός πολιτισμός είναι ο πρώτος πολιτισμός του αρχαίου κόσμου που ασχολήθηκε με τη μελέτη των μαθηματικών. Ονομάστηκαν «Βαβυλωνιακά μαθηματικά» λόγω του ότι η Βαβυλώνα ήταν η πιο φημισμένη πόλη της αρχαίας Μεσοποταμίας.[1] Η Μεσοποταμία ήταν μια περιοχή η οποία εντοπίζεται στην ανατολική Μεσόγειο μεταξύ των ποταμών Τίγρη και Ευφράτη. Ήταν γνωστή ως Εύφορη Ημισέληνος, με τον εν λόγω όρο να έχει επινοηθεί το 1916 από τον Αιγυπτιολόγο J.H.Breasted (1865-1935) προκειμένου να περιγράψει την περιοχή που σχετιζόταν με το Βιβλικό Κήπο της Εδέμ. Υπήρξε το σπίτι πολλών διαφορετικών πολιτισμών σε διάστημα χιλιάδων χρόνων οι οποίοι συνέβαλλαν σημαντικά στην ανθρώπινη εξέλιξη και στην ανάπτυξη του πολιτισμού.[2]

Τα ερείπια της Μεσοποταμίας βρίσκονται στο σημερινό Ιράκ, με τη Βαβυλώνα να συνεχίζει ακόμα και σήμερα να προσελκύει ιδιαίτερα το ενδιαφέρον του δυτικού κόσμου λόγω του ρόλου που κατέχει στη Βίβλο.[3] Ο Claudius James Rich (1787-1821) ήταν ο πρώτος εξερευνητής-αρχαιολόγος που ξεκίνησε ανασκαφές στα ερείπια της Βαβυλώνας.[4] Επίσης, ο Γερμανός αρχιτέκτονας-αρχαιολόγος Robert Koldewey (1855-1925) το 1897 επέλεξε την τοποθεσία της Βαβυλώνας για να κάνει ανασκαφές, όπου συνέχισε να εργάζεται εκεί με μικρή διακοπή τα επόμενα 18 χρόνια.[5]

Πολλές πτυχές της καθημερινής ζωής που σήμερα θεωρούνται δεδομένες είχαν αναπτυχθεί για πρώτη φορά στην περιοχή αυτή αποτελώντας με τον τρόπο αυτό το σπίτι των μεγάλων πολιτισμών της Μεσοποταμίας. Μάλιστα, ο Ασσυριολόγος Samuel Noah Kramer (1897-1990) έχει καταγράψει 39 «πρωτιές» στον ανθρώπινο πολιτισμό οι οποίες προερχόταν από τους κατοίκους της Μεσοποταμίας.[6] Μεταξύ 1922 και 1934 ο Άγγλος αρχαιολόγος Charles Leonard Woolley (1880-1960) ανακάλυψε την αρχαία πόλη της Ur, οι ανακαλύψεις του οποίου επιβεβαιώνουν την αρχαία μεγαλοπρέπεια και τη σημασία του πολιτισμού της Μεσοποταμίας.[7]

Ο χαμένος κόσμος της Μ. Ανατολής ανακαλύφθηκε από τους Βρετανούς και τους Γάλλους το 19ο αιώνα λόγω της διπλωματικής επιρροής και των εμπορικών συμφερόντων που είχαν στην περιοχή με αποτέλεσμα να κυριαρχήσουν στο χώρο των αρχαιολογικών εξερευνήσεων.[8] Οι ανασκαφές που έγιναν στην περιοχή της Μεσοποταμίας έφεραν στο φως τεράστιες ποσότητες πήλινων δισκίων σφηνοειδούς γραφής και αντικειμένων τέχνης, τα οποία έχουν καταλήξει σε μουσεία της Δύσης. Οι πολυπλοκότητες της σφηνοειδούς γραφής άρχισαν να ξετυλίγονται κατά τη διάρκεια του 19ου αιώνα.[9] Πιο συγκεκριμένα, η αποκρυπτογράφησή της ξεκίνησε από το

[1] Bertman, 2003, 7.
[2] Mark, 2018.
[3] Bertman, 2003, 7.
[4] ό.π., 48.
[5] ό.π., 44.
[6] Mark, 2018
[7] Bertman, ό.π., 49.
[8] ό.π., 40.
[9] Robson, 2008, 4.

Γερμανό φιλόλογο Georg Friedrich Grotefend (1775-1853) ο οποίος το 1802 κατάφερε να διαβάσει την επιγραφή Behistun του Πέρση βασιλιά Δαρείου Α΄ βασιζόμενος σε προηγούμενο αντίγραφο του Karsten Niebuhr και κατά συνέπεια είναι ο πρώτος σύγχρονος λόγιος που διάβασε κείμενα σφηνοειδούς γραφής.[10]

Τα σφηνοειδή μαθηματικά κείμενα άρχισαν να αποκρυπτογραφούνται και να ερμηνεύονται χάρη στις έρευνες του Otto Neugebauer (1899-1990), κορυφαίου ερευνητή των μαθηματικών και της αστρονομίας της Μεσοποταμίας. Από όταν ξεκίνησαν οι μελέτες της σφηνοειδούς γραφής ήταν γνωστό πως οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν τους αριθμούς και τη μετρολογία. Επίσης, γνωστά ήταν η ύπαρξη ενός θεσιακού αριθμητικού συστήματος με βάση το 60 (εξηνταδικό σύστημα),όπως και η χρήση του στην Παλαιά Βαβυλωνιακή μαθηματική αστρονομία. Κατά τη διάρκεια των επόμενων δεκαετιών ένας σημαντικός αριθμός Βαβυλωνιακών και Σουμεριακών κειμένων καταμέτρησης αποκρυπτογραφήθηκαν. Μέχρι το τέλος της δεκαετίας του 1920 τα Βαβυλωνιακά μαθηματικά είχαν αρχίσει να θεωρούνται και να αντιμετωπίζονται όπως τα Αιγυπτιακά μαθηματικά, μετά την έμμεση αναγνώριση από τον Raymond C. Archibald (1875-1955) ο οποίος είχε προσθέσει ένα μέρος των Βαβυλωνιακών μαθηματικών στην εξαντλητική βιβλιογραφία του για τα αρχαία Αιγυπτιακά μαθηματικά.[11]

Στα τέλη της δεκαετίας του 1920 ο Neugebauer παρουσίασε για πρώτη φορά τις Βαβυλωνιακές λύσεις οι οποίες αφορούσαν εξισώσεις δευτέρου βαθμού. Αυτό το γεγονός προκάλεσε τη μεγάλη έκπληξη των ιστορικών, καθώς μέχρι τότε η αρχή της χρήσης των αλγεβρικών εξισώσεων δευτέρου βαθμού αποδιδόταν στους Ινδούς μαθηματικούς, όπου μετέπειτα την δανείστηκαν και οι Άραβες μέσω του Διόφαντου ή του Ευκλείδη. Μετά την παρουσίαση αυτών των λύσεων, ο Neugebauer πρότεινε οι γεωμετρικές προτάσεις στο 2ο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη να θεωρούνται η γεωμετρική μετάφραση της Βαβυλωνιακής άλγεβρας, με αποτέλεσμα να καθιερωθεί ο όρος «γεωμετρική άλγεβρα». Ο εν λόγω όρος όμως αποτέλεσε την αφορμή να ξεκινήσει μια μεγάλη διαφωνία μεταξύ των ιστορικών για τις επόμενες δεκαετίες.[12]

Το 1935 ο Neugebauer δημοσίευσε όλα τα ως τότε γνωστά μαθηματικά κείμενα σφηνοειδούς γραφής σε 3 τόμους με τίτλο *«Mathematische Keilschrift»*. Στη συνέχεια, ο διακεκριμένος Ασσυριολόγος Thureau-Dangin (1872-1944) δημοσίευσε το 1938 το βιβλίο του με τίτλο *«Texts mathematiques babyloniens»* συνεισφέροντας έτσι με την εξαιρετική φιλολογική του ικανότητα στο πεδίο των ερευνών.[13] Μέχρι το τέλος της δεκαετίας του 1930 οι κοινές προσπάθειες του Neugebauer και του Thureau-Dangin, οι οποίες υποστηρίχτηκαν από τον Kurt Vogel, Soloman Gatz και άλλους, είχαν δημιουργήσει μια αρκετά λεπτομερή εικόνα για τα Βαβυλωνιακά μαθηματικά, όπου τα αλγεβρικά προβλήματα καταλάμβαναν εξέχουσα θέση.[14]

Εκείνη την εποχή τα περισσότερα μαθηματικά κείμενα ανήκαν στην Παλαιά Βαβυλωνιακή περίοδο (2000-1600 π.Χ.), ενώ πολύ λίγα ήταν από την εποχή των

---

[10] Bertman, ό.π., 43.
[11] Høyrup, 2002, 1.
[12] Høyrup, 2002, 2.
[13] Robson, ό.π., 4
[14] Høyrup, ό.π., 3

Σελευκίδων(3ος και 2ος αι. π.Χ.). Παρόλο που οι εμφανείς αλλαγές στην ορολογία από τη μια περίοδο στην άλλη είχαν επισημανθεί από τον Neugebauer, τα Βαβυλωνιακά μαθηματικά θεωρήθηκαν σχεδόν ίδια και στις δύο περιόδους. Ο Neugebauer και ο Thureau-Dangin είχαν δημιουργήσει μια αλγεβρική ερμηνεία του Βαβυλωνιακού συνολικού έργου που σύντομα είχε καταφέρει να κερδίσει την παγκόσμια αποδοχή.[15] Για δεκαετίες η αλγεβρική ερμηνεία και οι μεταφράσεις που βασίζονταν σε αυτήν αποτέλεσαν τη βάση για όλες τις εργασίες που ακολούθησαν, όπως αυτή του E. M. Bruins και της M. Rutte, όπου το 1961 δημοσίευσαν έναν τόμο με τίτλο «*Textes Mathematiques de Suse*» που περιέχει κείμενα που ανακαλύφθηκαν το 1933 στη Σούσα.[16]

Φαίνεται λοιπόν πως οι ιστορικοί βασίζονταν στις μεταφράσεις και τις ερμηνείες του Neugebauer, Thureau-Dangin και Bruins και στις δημοφιλείς παρουσιάσεις του Neugebauer οι οποίες ήταν το «*Vorgieschische Mathematik*» το 1934 και το «*Exact Sciences in Antiquity*» το 1957, αλλά και του B. L. Van der Waerden το «*Erwachende Wissenchaft*» το 1556.[17] Κατά τη διάρκεια των δεκαετιών του '70 και '80 η προσοχή στράφηκε σε παλαιότερες μαθηματικές τεχνικές, όπου με επικεφαλή τον Joran Friberg βρέθηκαν και αναλύθηκαν από μακρινές τοποθεσίες (πχ. την Elba της ανατολικής Συρίας ή τη Susa του νοτιοδυτικού Ιράν) τα συστήματα καταμέτρησης, τα συστήματα αρίθμησης και οι μετρολογίες.[18]

Ο Neugebauer και ο Thureau-Dangin έκαναν τις μεταφράσεις τους σε μια στιγμή που η τεχνική ορολογία των Βαβυλωνιακών κειμένων δεν είχε ακόμα αποκρυπτογραφηθεί, εκτός από κάποιους μαθηματικούς όρους των οποίων το μαθηματικό νόημα μπορούσε να μαντέψει κάποιος από τη γενική ερμηνεία των κειμένων. Έτσι, η πρώτη ερμηνεία των Βαβυλωνιακών κειμένων ήταν καθαρά αριθμητική.[19]

Στις αρχές της δεκαετίας του 1980 ο Δανός ιστορικός Jens Høyrup (1943-) άρχισε να μελετά πιο προσεκτικά τη μαθηματική ορολογία στα Βαβυλωνιακά κείμενα. Το έργο του Høyrup σηματοδότησε μια αλλαγή στον τρόπο που οι ιστορικοί παρουσίαζαν τα μαθηματικά της Μεσοποταμίας ως τότε, δηλαδή ως μια τεχνική υπολογισμού που έμοιαζε πολύ με τη σημερινή άλγεβρα. Το έργο του Høyrup ήταν στην πραγματικότητα μια ανάλυση στο λεξιλόγιο των μαθηματικών της Μεσοποταμίας. Πιο συγκεκριμένα, ήταν μια προσεκτική ανάλυση των Ακκαδικών λέξεων που χρησιμοποιούσαν οι μαθηματικοί εκείνη την εποχή, καθώς και του τρόπου που συνδέονταν οι λέξεις μεταξύ τους. Με αυτόν τον τρόπο ανέτρεψε πλήρως τη μέχρι τότε κατανόηση της Βαβυλωνιακής άλγεβρας δείχνοντας ότι βασίζεται σε μια πολύ συγκεκριμένη αντίληψη του αριθμού όσον αφορά τη μέτρηση των επιφανειών και των τμημάτων.[20]

---

[15] Høyrup, ό.π.
[16] Robson, ό.π.
[17] Høyrup, 2010, 90.
[18] Robson, ό.π., 7.
[19] Høyrup, ό.π.
[20] Robson, ό.π., 7.

Μέχρι σήμερα το δημοσιευμένο σώμα των Βαβυλωνιακών μαθηματικών περιλαμβάνει πάνω από 950 πλάκες σφηνοειδούς γραφής. Το μεγαλύτερο μέρος από αυτές αφορούν παιδαγωγικές μαθηματικές ασκήσεις μαζί με τις λύσεις τους, καθώς και μετρολογικούς και μαθηματικούς πίνακες. Οι εν λόγω πλάκες αποτελούν περίπου το 80% των δημοσιευμένων πηγών (περίπου 780 πλάκες) και χρονολογούνται στις αρχές της 2ης χιλιετίας π.Χ. (Παλαιά Βαβυλωνιακή Περίοδος). Επίσης, υπάρχουν περίπου 60 πλάκες από την 3η χιλιετία π.Χ. οι οποίες αποτελούν περίπου το 6% των δημοσιευμένων πηγών. Τέλος, περίπου 120 πλάκες αποτελούν το 13% των δημοσιευμένων πηγών και χρονολογούνται μετά το 1500 π.Χ. Κατά συνέπεια, η κύρια εστίαση της προσοχής των ιστορικών έγκειται στο μεγάλο σώμα της Παλαιάς Βαβυλωνιακής περιόδου.[21]

Στην Ελλάδα οι αναφορές που έχουμε στα Βαβυλωνιακά μαθηματικά είναι κυρίως σε σχέση με τη διαμάχη γύρω από τη γεωμετρική άλγεβρα όπως το κείμενο των Γ. Θωμαΐδη, και Ν. Καστάνη. με τίτλο *«Ο Όρος “Γεωμετρική Άλγεβρα” στο Στόχαστρο μιας Σύγχρονης Επιστημολογικής Διαμάχης»*. Ό,τι γνωρίζουμε μέχρι σήμερα για τα μαθηματικά που αναπτύχθηκαν σε αυτή την περιοχή είναι από τα βιβλία ιστορίας των μαθηματικών, όπου όλα κάνουν μια σύντομη επισκόπηση των Βαβυλωνιακών μαθηματικών, όπως ο V. Katz με το βιβλίο του *«History of Mathematics», ο* C. B. Boyer με το *«A History of Mathematics»* και μια αναλυτική παρουσίαση ο B. L. Van der Waerden με το *«Η Αφύπνιση της Επιστήμης: Αιγυπτιακά, Βαβυλωνιακά και Ελληνικά Μαθηματικά»*. Αναλυτικές πληροφορίες για τα Βαβυλωνιακά μαθηματικά μαθαίνουμε από τα επιστημονικά κείμενα που δημοσιεύονται σε επιστημονικά περιοδικά και βιβλία, όπως τα άρθρα της Eleanor Robson και του Jens Høyrup, τα οποία όμως επειδή είναι ερευνητικά άρθρα αναλύουν και ερμηνεύουν ένα συγκεκριμένο τμήμα των Βαβυλωνιακών μαθηματικών. Η παρούσα διπλωματική εργασία επιχειρεί να κάνει μια συνολική παρουσίαση των μαθηματικών των Βαβυλωνίων βασιζόμενη στη μέχρι τώρα ιστορική έρευνα.

Συνοπτικά, η δομή της παρούσας εργασίας έχει ως εξής:

Στο 1ο Κεφάλαιο παρουσιάζεται η ιστορία της Μεσοποταμίας, ο πολιτισμός της, καθώς και τα σημαντικότερα επιτεύγματα εκείνης της εποχής. Γίνεται διάκριση σε χρονολογικές περιόδους και αναφέρονται τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους.

Στο 2ο Κεφάλαιο αναλύεται η ιστορική εξέλιξη των Βαβυλωνιακών μαθηματικών, καθώς και τα επιτεύγματά τους. Παρατίθενται πληροφορίες για το εξηνταδικό θεσιακό σύστημα αρίθμησης και των γνωρισμάτων που το διακρίνουν. Στο τέλος, παρουσιάζονται οι όροι της «Βαβυλωνιακής άλγεβρας», της «Βαβυλωνιακής γεωμετρίας», καθώς και το ζήτημα της διαμάχης που επέφερε ο όρος της «γεωμετρικής άλγεβρας».

Στο 3ο Κεφάλαιο γίνεται περιγραφή της πλάκας Plimpton 322, των λαθών της και παρουσιάζονται αναλυτικά οι τρεις βασικές ερμηνείες για τη λειτουργία της. Κατά την ολοκλήρωση του κεφαλαίου παρατίθεται μια πρόσφατη ερμηνεία της πλάκας Plimpton 322, όπως δημοσιεύτηκε το 2017 από τους Mansfield και Wildberger.

---

[21] ό.π., 8.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΜΕΣΟΠΟΤΑΜΙΑΣ

Μεσοποταμία είναι η περιοχή που βρίσκεται στη νοτιοδυτική Ασία. Η ονομασία της, που προέρχεται από τους Έλληνες και σημαίνει «μεταξύ των ποταμών» αναφέρεται στη χώρα που βρίσκεται μεταξύ των ποταμών Τίγρη και Ευφράτη. Στις μέρες μας περιλαμβάνει την ανατολική Συρία, τη νοτιοανατολική Τουρκία και το μεγαλύτερο μέρος του Ιράκ. Η περιοχή αυτή που οι Άραβες την ονόμαζαν Al-Jazirah δηλαδή νησί, ήταν το κέντρο ενός πολιτισμού του οποίου η επιρροή επεκτάθηκε σε όλη τη Μέση Ανατολή ως την κοιλάδα του Ινδού στην Ινδική υποήπειρο, στην Αίγυπτο και στη Μεσόγειο.[22]

Εικόνα 1: Χάρτης της Μεσοποταμίας[23]

Στην «Εύφορη Ημισέληνο», όπως ονομάστηκε από τον Αιγυπτιολόγο J. H. Breasted,[24] αναπτύχθηκαν πολλοί πολιτισμοί διαφορετικών γλωσσών και η ιστορία της χωρίζεται σε διακριτές χρονολογικές περιόδους. Αξίζει να σημειωθεί ότι η περιοχή δεν είχε πραγματική γεωγραφική ενότητα και καμία μόνιμη πρωτεύουσα, γεγονός που την

[22] Kuiper, 2011, 17.
[23] https://www.shorthistory.org/images/mesopotamia-map.jpg
[24] Mark, 2018, https://www.ancient.eu/Mesopotamia/

κάνει να ξεχωρίζει από άλλους πολιτισμούς με μεγαλύτερη ομοιομορφία, όπως για παράδειγμα από αυτόν της Αιγύπτου. Παρόλο που η γραφή και το πάνθεον των θεών λειτουργούσαν ως ενοποιητικοί παράγοντες, η ποικιλομορφία και η πολλαπλότητα παρέμειναν με εμφανή τρόπο στην περιοχή. Πιο συγκεκριμένα, η σημασία της γραφής γίνεται αντιληπτή από το πλήθος των γραπτών κειμένων όπου συχνά πολλά από αυτά τα κείμενα ήταν αντίγραφά ενός μόνο κειμένου. Περισσότερα από χίλια ονόματα θεοτήτων συνιστούσαν το πάνθεον, παρά το γεγονός ότι πολλά από αυτά τα ονόματα αναφέρονταν στον ίδιο θεό.[25]

1.1 Ο Πολιτισμός της Μεσοποταμίας

Ο πολιτισμός της Μεσοποταμίας είναι γνωστός για τα επιτεύγματά του σε διάφορους τομείς και πιο συγκεκριμένα, στη νομική επιστήμη, στα μαθηματικά, στην αστρονομία, στην αρχιτεκτονική, στη γραφή και στη λογοτεχνία. Η άνθιση και η εξέλιξη της θεωρίας των νομικών επιστημών συντελέστηκε από νωρίς και εκφραζόταν σε διάφορες συλλογές νομικών αποφάσεων, τους λεγόμενους κώδικες, με πιο γνωστό τον κώδικα του Χαμουραμπί. Κοινό στοιχείο σε όλους τους κώδικες αποτελούσε η ανησυχία του ηγεμόνα προς τα αδύναμα στρώματα του λαού, τις χήρες και τα ορφανά, παρόλο που μερικές φορές οι φράσεις τους ήταν μόνο λογοτεχνικά κλισέ.[26]

Εικόνα 2: Ο κώδικας του Hammurabi[27]

Ο κόσμος των μαθηματικών και της αστρονομίας οφείλει πολλά στους Βαβυλώνιους. Το εξηνταδικό θεσιακό σύστημα αρίθμησης που ανέπτυξαν ήταν ένα εξαιρετικά

[25] Kuiper, ό.π., 20κ.ε.
[26] Kuiper, ό.π., 22.
[27] https://www.worldhistory.org/image/2790/law-code-tablet-of-king-hammurabi-from-nippur/

εξελιγμένο μαθηματικό σύστημα που είχε ως βάση τον αριθμό 60 αντί για το 10 που έχουμε εμείς σήμερα. Ο υπολογισμός του χρόνου και των γωνιών που χρησιμοποιούμε ακόμα και σήμερα οφείλεται στο συγκεκριμένο σύστημα. Ο χρόνος μετρήθηκε με ένα ηλιακό ρολόι και χωρίστηκε σε 12 ώρες για το φως της ημέρας και 12 ώρες για το σκοτάδι με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί το 24ωρο και εν συνεχεία το έτος. Ο κλάδος της αστρονομίας αναπτύχθηκε για να χαρτογραφήσει τα αστέρια και να κατονομαστούν οι εποχές, με σκοπό να γινόταν γνωστό ποιες εποχές του χρόνου ήταν οι κατάλληλες και για ποιες δραστηριότητες.[28]

Τα αρχιτεκτονικά επιτεύγματα βασίστηκαν στα υλικά που είχε άφθονα η περιοχή και αυτά ήταν η λάσπη και τα καλάμια. Τα σπίτια ακόμα και ολόκληρες πόλεις ήταν κατασκευασμένες με τούβλα από πηλό και καλάμια. Τα κανάλια άρδευσης και οι όχθες τους ήταν φτιαγμένα από λάσπη ενισχυμένη από καλάμια, από πηλό επίσης κατασκευάζονταν τα γεωργικά εργαλεία.[29] Τα τεχνικά επιτεύγματα τελειοποιήθηκαν με την οικοδόμηση των ζιγκουράτ τα οποία διακρίνονταν για τον τεράστιο όγκο τους. Τα ζιγκουράτ ήταν πύργοι ναών που έμοιαζαν με τις πυραμίδες και ήταν κατασκευασμένα με τούβλα από πηλό τα οποία στη συνέχεια έβαφαν.[30]

Εικόνα 3: Το ζιγκουράτ της Ur στην αεροπορική βάση Ali στο Ιράκ[31]

Η γραφή αποτελεί μια από τις πιο ανθεκτικές κληρονομιές της αρχαίας Μέσης Ανατολής διαπερνώντας όλες τις πτυχές της ζωής.[32] Από την όγδοη χιλιετία π.Χ. ξεκίνησαν τη χρήση ενός συστήματος αριθμητικής καταγραφής βασισμένο σε μικρά πήλινα κέρματα (*tokens*). Τα κέρματα ήταν μικρά πήλινα αντικείμενα διαφόρων σχημάτων. Τα *tokens* χρησιμοποιούνταν ως μέσο αναπαράστασης των προϊόντων που

[28] Mark, 2019, https://www.ancient.eu/Mesopotamian_Science/
[29] Robson, 2000, 150.
[30] Kuiper, ό.π., 23.
[31] https://www.worldhistory.org/image/197/great-ziggurat-of-ur/
[32] Kuiper, ό.π.

οι άνθρωποι καλλιεργούσαν και είχαν τόσο ποσοτικό όσο και ποιοτικό συμβολισμό, αντιπροσώπευαν δηλαδή έναν συγκεκριμένο αριθμό ενός συγκεκριμένου αντικειμένου. Κατά την τέταρτη χιλιετία π.Χ. φαίνεται ότι το συγκεκριμένο σύστημα αριθμητικής καταγραφής αποτέλεσε αντικείμενο έμπνευσης τόσο στη γραφή όσο και στους αριθμητικούς και μετρολογικούς συμβολισμούς. Αυτό το σύστημα γραφής είναι γνωστό ως σφηνοειδής γραφή, γιατί οι άνθρωποι χάραζαν πάνω στον πηλό με ένα αιχμηρό καλάμι.[33]

Ένα από τα μεγαλύτερα πολιτιστικά επιτεύγματα της Μεσοποταμίας είναι η λογοτεχνία της. Παρόλο που υπάρχουν πολλές συλλογές λογοτεχνικών έργων που έχουν μεταφραστεί, δεν μπορεί να ειπωθεί ότι η «λογοτεχνία της σφηνοειδούς γραφής» έχει κατανοηθεί στο βαθμό στην έκταση που της αξίζει. Αυτό οφείλεται στις δυσκολίες κατανόησης της γλώσσας και στο γεγονός ότι πολλές πήλινες πινακίδες που έχουν βρεθεί είναι σπασμένες , όποτε εξακολουθούν να υπάρχουν μεγάλα κενά κατά τη μελέτη τους.[34] Ένα από τα πιο γνωστά λογοτεχνικά έργα της αρχαίας Μεσοποταμίας είναι το *Έπος του Γκιλγκαμές*. Το *Έπος του Γκιλγκαμές* είναι ένα επικό ποίημα που αναφέρεται στο Σουμεριακό βασιλιά Gilgames της Uruk και στον Enkidu, έναν άγριο άνθρωπο που γίνεται φίλος του βασιλιά και μαζί αναλαμβάνουν ριψοκίνδυνες αποστολές. Το έργο θεωρείται ελλιπές, καθώς μόνο το 80% της ιστορίας έχει διασωθεί, ανακαλύφθηκε στη Νινευή, στα ερείπια της βιβλιοθήκης του Ashurbanipal και χρονολογείται τον 7ο αιώνα π.Χ.[35]

Η Μεσοποταμία ήταν γνωστή στην αρχαιότητα ως η χώρα της μάθησης και λέγεται ότι εκεί σπούδασε ο Θαλής ο Μιλήσιος. Επίσης, εικάζεται ότι ο Θαλής είχε επηρεαστεί από τους Βαβυλώνιους για τον ισχυρισμό του ότι το νερό είναι η πρώτη αρχή από την οποία ρέουν τα πάντα. Οι πνευματικές αναζητήσεις εκτιμήθηκαν ιδιαίτερα σε όλη τη Μεσοποταμία και τα σχολεία όπου δίδασκαν οι ιερείς και αργότερα οι γραφείς ήταν τόσο πολυάριθμα όσο και οι ναοί. Στα σχολεία διδάσκονταν η ανάγνωση, η γραφή, η θρησκεία, το δίκαιο, η ιατρική και η αστρολογία.[36]

1.2 Η Ιστορία της Μεσοποταμίας

Η ιστορία της περιοχής και η ανάπτυξη των πολιτισμών που άκμασαν εκεί, γίνεται πιο εύκολα κατανοητή αν την διαιρέσουμε σε περιόδους. Αρχαιολογικές ανασκαφές που ξεκίνησαν τη δεκαετία του 1840 μ.Χ. αποκάλυψαν ανθρώπινους οικισμούς που χρονολογούνται από το 10000 π.Χ. στη Μεσοποταμία.[37] Κατά τη διάρκεια της εποχής του λίθου (10000 - 5800 π.Χ.) άρχισε η αγροτική επανάσταση. Ενώ μέχρι τότε η οικονομία βασιζόταν στη συλλογή τροφής μέσω του κυνηγιού, του ψαρέματος, της συγκομιδής βρώσιμων φυτών και στην αναζήτηση καταφυγίου - σπηλιών τώρα οι

[33] Robson, ό.π.
[34] Kuiper, ό.π., 23κ.ε.
[35] Bertman, ό.π., 149κ.ε.
[36] Mark, 2018, https://www.ancient.eu/Mesopotamia/
[37] Mark, ό.π., https://www.ancient.eu/Mesopotamia/

κάτοικοι που διέμεναν στην περιοχή αυτή άρχισαν να ασχολούνται με την εξημέρωση των ζώων, να καλλιεργούν τη γη, να δημιουργούν οικισμούς και να διαμένουν σε σπίτια κατασκευασμένα από καλάμια και πλίνθους από πηλό. Επίσης, σε αυτή την περίοδο παρατηρείται μια χρήση των εργαλείων και των κεραμικών.[38]

Η Χαλκολιθική Περίοδος (5800 - 3750 π.Χ.) χαρακτηρίζεται από προοδευτικές εξελίξεις στις ζωές των ανθρώπων που ζουν στους οικισμούς. Οι εξελίξεις αυτές οφείλονται στην αγροτική επανάσταση της προηγούμενης περιόδου. Τα αποθέματα φαγητού αυξήθηκαν, ο πληθυσμός μεγάλωσε και οι κοινότητες εξελίσσονται σε αναδυόμενες πόλεις. Τα ονόματα των κοινοτήτων αυτών είναι Tell Hassuna, Samara, Tell Halaf και al-Ubaid και οι προοδευτικές υποπερίοδοι ονομάστηκαν αντίστοιχα Hassuna, Samara, Halaf και Ubaid. Αυτές χρονολογούνται από τις αρχές της 6ης χιλιετίας π.Χ. έως τις αρχές της τέταρτης χιλιετίας π.Χ.[39]

Από τα μέσα της 4ης χιλιετίας π.Χ., το κλίμα της βόρειας Μεσοποταμίας άρχισε να γίνεται πιο ψυχρό και ξηρό, έτσι δημιουργήθηκε ένα αφιλόξενο περιβάλλον για τη γεωργία η οποία εξαρτιόταν άμεσα από τη βροχή. Ως εκ τούτου, οι άποικοι από τα βόρεια μετανάστευσαν στα νότια σε πιο γόνιμες περιοχές, με επακόλουθο την αστικοποίηση αυτών με πρώτη την πόλη Uruk (3750 - 3150 π.Χ.) και έπειτα η Jemdet Nasr (3150 - 2900 π.Χ.). Την εποχή αυτή λαμβάνουν χώρα ριζικές αλλαγές όπως η γέννηση του πολιτισμού, η εμφάνιση ενός περίπλοκου τύπου κοινωνίας χαρακτηριζόμενη από μεγάλα πληθυσμιακά κέντρα, η εξειδίκευση και η αλληλεξάρτηση του εργατικού δυναμικού, η ανάπτυξη και η συγκέντρωση του πλούτου. Ακόμη, αυτή την εποχή παρατηρούνται εξελίξεις στη μεταλλουργία συνοδευόμενες από έναν σημαντικό αριθμό εφευρέσεων, όπως ο τροχός, το άροτρο, το άρμα, το ιστιοφόρο και η κυλινδρική σφραγίδα. Η τελευταία αποτελεί την πιο χαρακτηριστική μορφή τέχνης στην αρχαία Μεσοποταμία και αποδεικνύει τη σπουδαιότητα της ιδιοκτησίας και των επιχειρηματικών δραστηριοτήτων στην καθημερινή ζωή της χώρας. Η πιο σημαντική ανακάλυψη όμως ήταν η γραφή, καθώς είχε επίδραση σε όλο τον κόσμο, εμφανίζεται σε σφηνοειδή μορφή στην Uruk γύρω στο 3300 π.Χ.[40]

Στις αρχές της 3ης χιλιετίας π.Χ. οι κλιματικές αλλαγές που είχαν συμβεί στο βορρά την προηγούμενη περίοδο τώρα άρχισαν να επιδρούν και στο νότο στεγνώνοντας τα ποτάμια και δημιουργώντας ελάχιστη καλλιεργήσιμη γη. Το πρόβλημα λύθηκε με τη δημιουργία μεγάλων δικτύων αρδευτικών καναλιών, αλλά τώρα οι πόλεις διαπληκτίζονταν για τα δικαιώματά τους στη χρήση του νερού. Κάποιες από τις διαμάχες αυτές κατέληγαν σε ένοπλες συγκρούσεις με αποτέλεσμα να ανέλθουν ηγεμονίες υπό την αρχηγία της μίας ή της άλλης πόλης- κράτους. Σε γενικές γραμμές, η νότια Μεσοποταμία ήταν μια περιοχή με γόνιμο έδαφος και επαρκές νερό, συνθήκες δηλαδή που δημιουργούσαν τις προϋποθέσεις για μια καλή ζωή. Η πλούσια αγροτική παραγωγή και τα προϊόντα που παρασκεύαζαν οδήγησαν το νότιο τμήμα της περιοχής, γνωστό ως Sumer να πλουτίσει μέσω του εμπορίου και να αποκτήσει ακατέργαστα υλικά στα οποία παρατηρούνταν έλλειψη. Μεταξύ των πόλεων που

---

[38] Bertman, 2003, 54κ.ε.
[39] Bertman, ό.π., 55.
[40] Bertman, ό.π., 55κ.ε.

άκμασαν αυτή την περίοδο ήταν η Kish, η Isin, η Nippur, η Shuruppak, η Lagash, η Uruk, η Larsa, η Ur και η Eridu.[41]

Το 2334 π.Χ. ένας Σημιτικός λαός που κατοικούσε βόρεια της Sumer άρχισε εκστρατεία προς το νότο και κατέκτησε τους Σουμέριους. Αρχηγός της πρώτης αυτοκρατορίας που δημιουργήθηκε στη Μεσοποταμία ήταν ο βασιλιάς Sargon. Ο Sargon κυβερνούσε από μια πόλη που ο ίδιος ίδρυσε και την ονόμασε Agede από όπου προέρχεται και το όνομα «Akkadian», ένας περιγραφικός όρος της Σημιτικής γλώσσας και του λαού του Sargon. Οι Ακκάδιοι σεβάστηκαν το Σουμεριακό πολιτισμό και υιοθέτησαν κάποια στοιχεία του, όπως τη σφηνοειδή γραφή. Μετά από 55 χρόνια ο Sargon πέθανε και τη βασιλεία ανέλαβε ο εγγονός του Naram- Sin, ο οποίος κυβέρνησε για άλλα 37 χρόνια.[42]

Μετά την κατάρρευση της Ακκαδικής αυτοκρατορίας το 2193 π.Χ., μια άγρια φυλή νομάδων που ονομαζόταν Guti κατάφερε να επικρατήσει στη Μεσοποταμία για σχεδόν έναν αιώνα, αλλά τελικά εκδιώχθηκαν από μια συμμαχία Σουμέριων βασιλιάδων. Οι δύο Σουμέριοι ηγέτες ήταν ο Gudea της Lagash, διάσημος για τα θρησκόληπτα πορτρέτα του σκαλισμένα στην πέτρα και ο Ur- Nammu της Ur ο ιδρυτής της Τρίτης Δυναστείας της Ur. Αυτό που πρέπει να αποδώσουμε στον Ur- Nammu είναι το ζιγκουράτ της Ur ένα από τα καλύτερα διατηρημένα μνημεία της αρχαίας Μεσοποταμίας. Το 2004 π.Χ. υπό την πίεση των Ελαμιτών στα βορειοανατολικά και από μια Σημιτική φυλή τους Αμορίτες στα βορειοδυτικά η χρυσή εποχή του Σουμεριακού πολιτισμού έφθασε στο τέλος της με την πτώση της Ur.[43]

Έναν αιώνα μετά την πτώση της Ur το 1900 π.Χ. οι Αμορίτες, φυλή που ασκούσε δύναμη στη βόρεια Μεσοποταμία και έλεγχε το βασίλειο της Mari, ίδρυσαν την επονομαζόμενη Πρώτη Βαβυλωνιακή Δυναστεία η οποία είχε ως κέντρο την πόλη της Βαβυλώνας. Ο σημαντικότερος εκπρόσωπος της Πρώτης Δυναστείας της Βαβυλωνίας ήταν ο Hammurabi (1792 - 1750 π.Χ.) ο οποίος βασίλευσε για 43 χρόνια και αναδείχτηκε σε έναν σημαντικό νομοθέτη και κυβερνήτη της Μεσοποταμίας. Ενάμιση αιώνα μετά το θάνατό του, η δυναστεία του τελείωσε όταν η πόλη της Βαβυλωνίας αιχμαλωτίστηκε και λεηλατήθηκε από τους Χιττίτες, στα χρόνια που ακολούθησαν μέχρι την πρώτη χιλιετία π.Χ. δεν υπήρξε κάποια αξιόλογη πρόοδος στον πολιτισμό και στις επιστήμες.[44]

Το 911 π.Χ. οι Ασσύριοι που ήταν τρομεροί επιδρομείς κατέκτησαν την περιοχή και ίδρυσαν τη δική τους αυτοκρατορία. Υπό τη διακυβέρνηση σημαντικών βασιλιάδων, όπως ο Sennacherib (705 - 681 π.Χ.) και ο Ashurbanipal (668 - 627 π.Χ.) οι επιτυχίες της Ασσυρίας επεκτάθηκαν σε όλη την Εγγύς Ανατολή καθιστώντας τη Νινευή μια από τις πιο πλούσιες πόλεις του αρχαίου κόσμου. Η Ασσυριακή Αυτοκρατορία ωστόσο έγινε θύμα της δικιάς της φιλοδοξίας και της δυσαρέσκειας των λαών που είχαν συντριβεί και καταπιεστεί. Το 612 π.Χ. η Νινευή έπεσε στα χέρια μιας συνδυασμένης στρατιωτικής δύναμης των Βαβυλωνίων και των Μήδων.[45]

[41] Bertman, ό.π., 56.
[42] Bertman, ό.π.
[43] Bertman, ό.π., 56κ.ε.
[44] Bertman, ό.π., 57.
[45] Bertman, ό.π.

Τριάντα χρόνια πριν την πτώση της Νινευής, οι Χαλδαίοι ένας λαός που κατοικούσε στη νότια Μεσοποταμία αναλαμβάνει το θρόνο της Βαβυλώνας. Η Βαβυλώνα γίνεται ξανά πρωτεύουσα και υπό την ηγεσία του παντοδύναμου κυβερνήτη Nebuchadnezzar II (604 – 562 π.Χ.) φθάνει στο απόγειο της δόξας της. Η αυτοκρατορία του Nebuchadnezzar II είναι ευρύτερα διαδεδομένη ως Νέα Βαβυλωνιακή Αυτοκρατορία. Όμως, υπό το βάρος των λιγότερο αποφασισμένων και αδίστακτων διαδόχων η δύναμη της Βαβυλώνας μειώθηκε. Το 539 π.Χ. η εναπομένουσα αυτοκρατορία φτάνει στο τέλος της, καθώς ο Πέρσης βασιλιάς Κύρος θέτει ολόκληρη την περιοχή υπό την περσική κατοχή.[46]

Εικόνα 4: Η Πύλη του Ischtar που στεκόταν στην είσοδο της αρχαίας πόλης της Βαβυλώνας[47]

Μετά τη νίκη του Κύρου στη Βαβυλώνα, η περιοχή που παλαιότερα κυβερνούσαν οι Χαλδαίοι βασιλιάδες κατακτήθηκε από τους Πέρσες. Κατά τη διάρκεια των δύο αιώνων της Περσικής κυριαρχίας, σημειώθηκε πτώση στην οικονομία και στον πολιτισμό της Μεσοποταμίας και η Ακκαδική γλώσσα αντικαταστάθηκε από την Αραμική, ως η κοινή γλώσσα της Εγγύς Ανατολής.[48]

Το 331 π.Χ., ο χαρισματικός Μακεδόνας ηγέτης Αλέξανδρος νίκησε το στρατό του Πέρση βασιλιά Δαρείου ΙΙΙ στην πεδιάδα της Γκαουγκαμέλα. Έπειτα, ο Μέγας Αλέξανδρος συνέχισε στη Βαβυλώνα, όπου απελευθέρωσε την πόλη και τον υποδέχτηκαν ως βασιλιά της χώρας. Ο Αλέξανδρος έκανε τη Βαβυλώνα πρωτεύουσα της νέας αυτοκρατορίας του, πασχίζοντας για γεωγραφική ενότητα και προωθώντας την πολιτιστική συγχώνευση Ανατολικών και Δυτικών φυλών και αξιών.

Μετά το θάνατο του Μέγα Αλέξανδρου το 323 π.Χ. η αυτοκρατορία του μοιράστηκε μεταξύ των στρατηγών που πολέμησαν στο πλευρό του. Ο Σέλευκος που ήταν ένας

[46] Bertman, ό.π., 57κ.ε.
[47] https://www.worldhistory.org/image/11280/great-gate-of-ishtar/
[48] Bertman, ό.π., 58.

από αυτούς πήρε τη Μεσοποταμία ως μερίδιο από τα λάφυρα και ίδρυσε τη Σελευκιδική δυναστεία η οποία κυβερνούσε τη χώρα μέχρι το 126 π.Χ. όταν και καταλήφθηκε από τους Πόρθιους. Η ιστορία της αρχαίας Μεσοποταμίας φθάνει στο τέλος της με την Ισλαμική κατάκτηση το 651 μ.Χ.[49]

[49] Bertman, ό.π.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΤΑ ΒΑΒΥΛΩΝΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τα βιβλία της Ιστορίας των μαθηματικών με οποιαδήποτε από τις παρακάτω ονομασίες: μαθηματικά της Μεσοποταμίας, Βαβυλωνιακά μαθηματικά, μαθηματικά του αρχαίου Ιράκ, μαθηματικά των Σουμερίων αναφέρονται στα μαθηματικά που αναπτύχθηκαν στην περιοχή μεταξύ των ποταμών Τίγρη και Ευφράτη. Σε αυτήν την περιοχή, πριν από 5000 χιλιάδες χρόνια στις πρώτες πόλεις του αρχαίου κόσμου αναπτύχθηκαν οι πρώτες συστηματικές λογιστικές τεχνικές χρησιμοποιώντας πήλινα κέρματα, τα λεγόμενα *tokens*. Τα *tokens* αντιπροσώπευαν σταθερές ποσότητες εμπορευμάτων και αποθηκευμένων αγαθών. Αργότερα, στις αρχές της 2ης χιλιετίας π.Χ. στην ίδια περιοχή χρησιμοποιήθηκε ευρέως το πρώτο θεσιακό σύστημα αρίθμησης, το περίφημο εξηνταδικό θεσιακό σύστημα. Τα πρώτα ευρέως διαδεδομένα στοιχεία για τα μαθηματικά προέρχονται επίσης από τον ίδιο τόπο και χρόνο. Σε αυτά περιλαμβάνονται μια πολύ ακριβής προσέγγιση για την τετραγωνική ρίζα του 2, μια πρώιμη εισαγωγή της άλγεβρας (όπως χαρακτηρίζεται από τους ιστορικούς[50]) και η γνώση να κατασκευάζουν Πυθαγόρειες τριάδες. Το πιο γνωστό μαθηματικό επίτευγμα αυτής της εποχής είναι η σφηνοειδής πινακίδα Plimpton 322, η οποία είναι θαυμαστή και έχει συζητηθεί ευρέως, καθώς υπάρχουν διάφοροι ισχυρισμοί για την ερμηνεία της που κυμαίνονται από τη θεωρία αριθμών έως την τριγωνομετρία και την αστρονομία. Ωστόσο, τα περισσότερα στοιχεία για τη μαθηματική αστρονομία προέρχονται από την 1η χιλιετία π.Χ. όπου καθίσταται σαφές πως οι Βαβυλωνιακές αστρονομικές παρατηρήσεις, τα υπολογιστικά μοντέλα και το εξηνταδικό θεσιακό αριθμητικό σύστημα είχαν όλα αντίκτυπο στη μετέπειτα ανάπτυξη της αστρονομίας του αρχαίου κόσμου, ιδιαίτερα μέσω του έργου του Πτολεμαίου (100 μ.Χ. – 170 μ.Χ.). Δεν προκαλεί λοιπόν έκπληξη το γεγονός ότι από την ανακάλυψή τους πριν από έναν αιώνα τα μαθηματικά της Μεσοποταμίας διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην ιστορία των μαθηματικών.[51]

2.1 Ιστορική Εξέλιξη των Βαβυλωνιακών μαθηματικών

Ο όρος «Βαβυλωνιακά μαθηματικά» αναφέρεται στη μαθηματική γνώση και στις μαθηματικές πρακτικές που βασίζονται στη σφηνοειδή παράδοση από τα μέσα της 4ης χιλιετίας π.Χ. μέχρι την εξαφάνισή της στα πρώτα χρόνια μ.Χ. Η αναφορά στο σύστημα γραφής δεν είναι τυχαία. Σε όλη την ιστορία της η ανάπτυξη και ο προσανατολισμός των Βαβυλωνιακών μαθηματικών ήταν στενά συνδεδεμένα με τη διαχείριση γραπτών εγγράφων και την τέχνη των «γραφέων». Όλες οι πηγές που

[50] Αναλυτικά πάνω στη λεγόμενη «γεωμετρική άλγεβρα» και τη διαμάχη γύρω απ' αυτήν βλ. ενότητα 2.3.2.

[51] Robson, 2008, 1κ.ε.

διαθέτουμε προέρχονται από έγγραφα γραμμένα σε πήλινες πλάκες. Η προσεκτική ανάγνωση των πηγών αποκαλύπτει ότι η γραπτή παράδοση πρέπει να έχει εμπνευστεί από παραδόσεις που προέρχονται από τα χρόνια πριν την εμφάνιση των γραφέων και πιο συγκεκριμένα από ομάδες εμπόρων, επιθεωρητών, οικοδόμων και άλλων όμοιων ομάδων.[52]

Η γραφή δημιουργήθηκε στη νότια Μεσοποταμία, στη μετέπειτα περιοχή των Σουμερίων, μετά τα μέσα της 4ης χιλιετίας π.Χ. και συνδέθηκε με τον πρώιμο σχηματισμό ενός γραφειοκρατικού κράτους. Ως αφορμή για την εφεύρεσή της υπήρξε ένα λογιστικό σύστημα βασισμένο σε πήλινα *tokens* που έχουν χρησιμοποιηθεί στην Εγγύς Ανατολή από την 8η χιλιετία π.Χ.[53]

2.1.1 Από τα «tokens» στα μαθηματικά

Η παλαιότερη μαθηματική τεχνική που μπορεί να βεβαιωθεί στην Εγγύς Ανατολή αναφέρεται σε μικρά αντικείμενα καμένου πηλού που βρέθηκαν ήδη από τις αρχές της 8ης χιλιετίας π.Χ. και εξακολουθούσαν να υπάρχουν μέχρι τα πρώτα χρόνια εμφάνισης της γραφής. Τα *tokens* ήταν κατασκευασμένα σε διάφορα γεωμετρικά σχήματα, όπου τα πιο συχνά από αυτά ήταν οι κώνοι, οι σφαίρες, οι ράβδοι, οι κυκλικοί δίσκοι και άλλα σχήματα. Πολλά σχήματα τα συναντάμε σε δύο διαφορετικά μεγέθη και σε πολλές περιπτώσεις έχουν χαραγμένες πάνω τους διάφορες τομές. Τέτοια σχήματα έχουν βρεθεί σε ανασκαφές που έχουν γίνει στις πόλεις, Tell Abada (5000 π.Χ.) στο κεντροανατολικό Ιράκ και στην Tepe Gawara (4000 π.Χ.) κοντά στη Νινευή.[54]

Εικόνα 5: Tokens που βρέθηκαν στην Tepe Gawra[55]

Τα *tokens* που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια της 4ης χιλιετίας εξελίχθηκαν από απλά σχήματα σε πιο σύνθετα φέροντας πάνω τους σημάδια. Η εξέλιξή τους αυτή

[52] Høyrup, 2018, 58.
[53] ό.π., 59.
[54] Høyrup, 1991, 33κ.ε.
[55] https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-mesopotamian-accounting-tokens

εξυπηρετούσε τις ανάγκες που απαιτούσε ένα οργανωμένο γραφειοκρατικό σύστημα. Τα *tokens* συνήθως συμβόλιζαν αγαθά οικονομικής σημασίας και είχαν τόσο ποιοτικό όσο και ποσοτικό συμβολισμό. Με άλλα λόγια, κοινές ομάδες ή ποσότητες προϊόντων θα μπορούσαν να αντιπροσωπεύονται από ένα και μόνο *token*. Για παράδειγμα, ένας δίσκος χαραγμένος με έναν σταυρό αντιπροσωπεύει ένα πρόβατο, δύο τέτοιοι δίσκοι δύο πρόβατα κ.λπ. Παρατηρούμε ότι ο σημειωμένος δίσκος αντιπροσωπεύει τόσο την ποιότητα (πρόβατο) όσο και την ποσότητα (ένα). Ένας μικρός κώνος αντιπροσωπεύει έναν συγκεκριμένο μετρητή σιτηρών (δηλαδή έναν συγκεκριμένο τύπο καλαθιού ή βάζου που περιέχει σιτηρά), μια μικρή σφαίρα για ένα άλλο μεγαλύτερο μέτρο/δοχείο και μεγάλους κώνους και σφαίρες για ακόμα μεγαλύτερες διαστάσεις. Άλλοι τύποι μπορεί να υποδηλώνουν άλλα βασικά προϊόντα, όπως αποξηραμένα φρούτα, λάδι, μαλλί κ.ά. Συχνά ωστόσο είναι αδύνατο να προσδιοριστεί με ακρίβεια ποιο εμπόρευμα απεικονίζει ένα συγκεκριμένο *token* (βλ. εικόνα 6).[56]

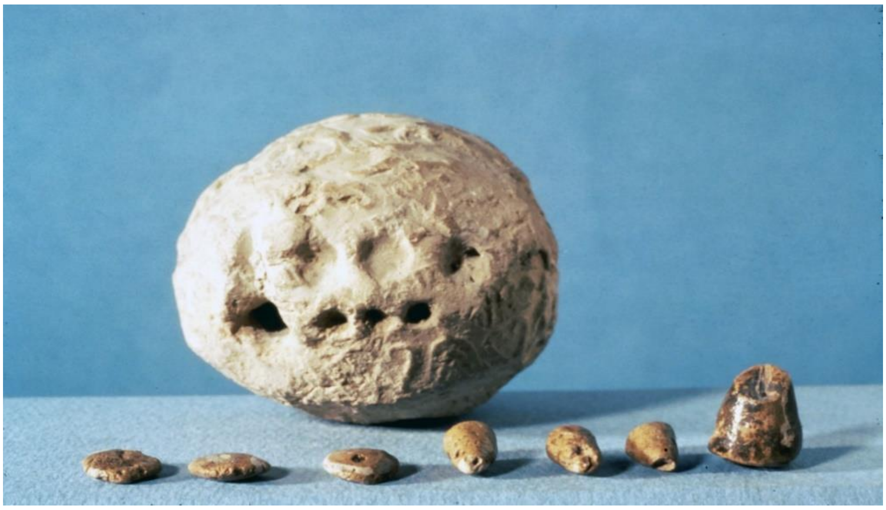
Εικόνα 6: Tokens από την πόλη Girsu[57]

Η αύξηση των τύπων *token* την 4η χιλιετία π.Χ. ανταποκρίνεται στην ανάγκη μιας πιο οργανωμένης οικονομίας. Με την ανάπτυξη του εμπορίου τα *tokens* χρησιμοποιήθηκαν τώρα ως «δελτία αποστολής» για εμπορεύματα[58]. Τοποθετούνταν μέσα σε σφραγισμένες στρογγυλές πήλινες θήκες, τα «bullae», των οποίων οι επιφάνειες καλύπτονταν με κυλινδρικές σφραγίδες με σκοπό την εξασφάλιση της ιδιοκτησίας και για να αποφευχθεί η παραβίαση. Η κυλινδρική σφραγίδα εκπροσωπούσε το άτομο που την είχε στην κατοχή του και τη χρησιμοποιούσε στις διάφορες δραστηριότητές του. Ο κάτοχος της σφραγίδας, αντί για υπογραφή αποτύπωνε τα αντίστοιχα μοτίβα σε κάθε αντικείμενο από πηλό που αναφερόταν σε

[56] Høyrup, ό.π., 34κ.ε.
[57] https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-mesopotamian-accounting-tokens: *Tokens* από την πόλη Girsu (σημερινό Irak) τα οποία χρονολογούνται περίπου το 3300 π.Χ. Βλέποντας την επάνω σειρά από δεξιά προς τα αριστερά, τα *tokens* αντιπροσώπευαν ένα μήκος υφάσματος, ένα βάζο λάδι, το συγκεκριμένο δεν έχει μεταφραστεί, μία δόση σιταριού. Συνεχίζοντας κατά μήκος της κάτω σειράς από αριστερά προς δεξιά: ένα πρόβατο, ένα μήκος σχοινιού, ένα ingot (μονάδα μέτρησης) από μέταλλο, ένα ένδυμα.
[58] Høyrup, ό.π., 35.

κάποια οικονομική ή νομική δραστηριότητα που σχετίζονταν με αυτόν, γυρίζοντας τον κύλινδρο γύρω από τον άξονά του[59].

Ένα μειονέκτημα των σφραγισμένων «bullae» ήταν ότι έπρεπε να σπάσει η θήκη για να ελεγχθεί το περιεχόμενό της. Αυτό το πρόβλημα ξεπεράστηκε πιέζοντας τα *tokens* στην εξωτερική επιφάνεια της θήκης αφήνοντας έτσι το καθένα μια «αποτύπωση» στον πηλό πριν τοποθετηθούν μέσα στη «bulla»[60] (βλ. εικόνα 7).



Εικόνα 7: Bullae και tokens από την πόλη Susa[61]

Ακολούθως, παρατίθεται ο συμβολισμός τους εκείνη την εποχή:[62]

- το μικρό κώνο, που αντιπροσώπευε τη μονάδα, με μια λεπτή εγκοπή (σφήνα)
- το βόλο, που συμβόλιζε τη δεκάδα, με ένα μικρό κύκλο
- το μεγάλο κώνο που συμβόλιζε την εξηντάδα με μια παχιά εγκοπή (σφήνα)
- το μεγάλο κώνο με χαραγμένο ένα μικρό κύκλο, που αντιπροσώπευε τις 600 μονάδες, με μια παχιά εγκοπή που φέρει ένα μικρό κύκλο
- τη σφαίρα, που συμβόλιζε τις 3600 μονάδες με, ένα μεγάλο κύκλο
- τη διατρητή σφαίρα, που αντιπροσώπευε τις 36000 μονάδες, με ένα μεγάλο κύκλο που είχε ένα μικρότερο στο εσωτερικό του.

[59] Robson, 2000, 150.
[60] Høyrup, ό.π., 35.
[61] https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-mesopotamian-accounting-tokens: Πήλινη θήκη και τα εσωκλειόμενα *tokens*. Βρέθηκε στην πόλη Susa, το σημερινό Ιράν και χρονολογείται περίπου το 3300 π.Χ. Κάθε δίσκος αντιπροσώπευε "ένα κοπάδι" (πιθανόν 10 ζώα). Ο μεγάλος κώνος αντιπροσώπευε ένα πολύ μεγάλο μέτρο σιτηρών, ενώ οι μικροί κώνοι μικρά μέτρα σιτηρών.
[62] Ifrah, 2000, 84.

					
1	10	60	600	3600	36000

Σύντομα παρατηρήθηκε ότι τα εσωκλειόμενα *tokens* είναι πλέον περιττά και η εξέλιξη αυτού του συστήματος προχώρησε ένα βήμα παραπέρα. Τα «bullae» αντικαταστάθηκαν από ένα ίσιο κομμάτι πηλού (πλάκα), όπου οι αποτυπώσεις των *tokens* μπορούσαν να γίνουν πάνω σε αυτό ή καλύτερα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί μια γραφίδα από καλάμι ικανή να κάνει παρόμοιες αποτυπώσεις και έπειτα η πλάκα να σφραγιστεί από έναν αξιωματούχο. Έτσι, το 3250 π.Χ. οι πήλινες θήκες αντικαθίστανται από πήλινες πλάκες σε ορθογώνια σχήματα. Αυτές είναι οι πρώτες γνήσιες πήλινες πλάκες, γνωστές ως «αριθμητικές πινακίδες»[63] (βλ. εικόνα 8).

Εικόνα 8: Αριθμητικές πλάκες από τη Susa[64]

Αυτές οι πλάκες δεν περιείχαν σημεία γραφής ακόμα, διότι οι αντίστοιχες πληροφορίες που αναφέρονταν είναι όπως και στα bullae, αποκλειστικά συμβολικές και αριθμητικές, καθώς χρησιμοποιούσαν τις αποτυπώσεις των *tokens* που αντιπροσώπευαν τόσο έναν αριθμό όσο και ένα αντικείμενο.

Γύρω στο 3200 π.Χ. εμφανίστηκε μια περαιτέρω εξέλιξη, καθώς πάνω στις πλάκες άρχισαν να εμφανίζονται νέα σχήματα δίπλα από τις αποτυπώσεις των αριθμών. Αυτά τα σχήματα παρουσίαζαν αντικείμενα κάθε είδους και προορίζονταν να καθορίσουν

[63] Høyrup, ό.π., 35κ.ε.

[64] https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-mesopotamian-accounting-tokens: Αριθμητικές πλάκες από τη Susa του Ιράν, περίπου 3200 π.Χ. Κάθε κυκλική αποτύπωση αντιπροσώπευε ένα μεγάλο μέτρο σιτηρών, κάθε σφήνα ή αποτύπωση σε μορφή κώνου υποδείκνυε μικρότερο μέτρο σιτηρών. Οι ελαφρύτερες αποτυπώσεις που καλύπτουν τις πλάκες, καθώς και τη θήκη στην εικόνα 7 είναι από τις σφραγίδες των αξιωματούχων. Ο γραφέας-λογιστής θα κυλούσε την κυλινδρική σφραγίδα του σε όλο το δισκίο ή το φάκελο, καλύπτοντας ολόκληρη την επιφάνεια. Στη συνέχεια, πίεζε τα *tokens* ή τη γραφίδα στο δισκίο ή τη θήκη για να κάνει τα βαθύτερα σημάδια.

τη φύση των εμπορευμάτων ή άλλων ειδών που σχετίζονταν με τη μία ή την άλλη συναλλαγή. Τα αντικείμενα απεικονίζονταν πάνω στον πηλό είτε με το σχέδιο του ίδιου του αντικειμένου χαραγμένο με αιχμηρό καλάμι είτε από το *token* που αυτό αντιπροσώπευε.[65] Για παράδειγμα, κατασκεύαζαν μια πλάκα για να σημειώσουν το αποτέλεσμα της καταγραφής 187 προβάτων, μια άλλη για την καταγραφή 33 δοχείων λαδιού κ.ά. Τέτοιες αποτυπώσεις αντιπροσωπεύουν την αρχή της αρίθμησης και τα εγχάρακτα εικονογράμματα την αρχή της γραφής (βλ. εικόνα 9).

Εικόνα 9: Πήλινη πινακίδα από τη Godin Tepe[66]

Ως φορείς πληροφοριών, οι αριθμητικές πλάκες είχαν ένα πλεονέκτημα έναντι των «bullae», καθώς η επιφάνεια μιας περίπου τετραγωνικής πλάκας θα μπορούσε να δομηθεί σε τμήματα χαράσσοντάς την με γραμμές (βλ. εικόνα 10). Ένα άλλο πλεονέκτημα ήταν ότι μέσω των σφηνοειδών συμβόλων η ποιότητα θα μπορούσε να διαχωριστεί ή να προστεθεί στην ποσότητα. Για παράδειγμα, ένας σχεδιασμένος κύκλος με έναν σταυρό αντιπροσώπευε τα πρόβατα και οι αποτυπώσεις των μικρών και μεγάλων κώνων και σφαιρών αντιπροσώπευαν τον αριθμό των προβάτων.[67]

[65] Robson, ό.π.

[66] https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-mesopotamian-accounting-tokens : Πλάκα με αποτυπώσεις και εγχαράξεις από την Godin Tepe του Ιράν, περίπου 3100 π.Χ. Οι κυκλικές εγκοπές αντιπροσώπευαν τις δεκάδες και οι σφήνες τις μονάδες. Το εγχάρακτο σχήμα στα δεξιά είναι μια απεικόνιση ενός δοχείου λαδιού και αυτή η πλάκα ήταν μια καταγραφή, συνολικά, 33 βάζων λαδιού. Σε αυτή την πλάκα οι έξι αποτυπώσεις αντιπροσωπεύουν αριθμούς και το εγχάρακτο σχήμα ένα συγκεκριμένο αντικείμενο.

[67] Høyrup, ό.π., 36.

Εικόνα 10: Αριθμητική πλάκα από την Uruk[68]

Η εφεύρεση της γραφής καθιστά πλέον εφικτή την καταγραφή των μαθηματικών πράξεων, όπως της αριθμητικής. Τα εμπορεύματα που καταμετρούνται δεν μπορούν συνήθως να προσδιοριστούν, καθώς τα χαραγμένα σημάδια που τα αντιπροσωπεύουν στην πλειονότητα τους δεν έχουν μεταφραστεί ακόμα. Από την άλλη, οι αριθμοί αυτοί καθ' αυτοί που καταγράφονται μπορούν να αναγνωριστούν με ευκολία.[69]

Η όλη αυτή εξέλιξη και πιο συγκεκριμένα από την εισαγωγή των «bullae» με τις αποτυπώσεις των *tokens* μέχρι τη δημιουργία του «εικονογραφικού σεναρίου» πάνω σε πήλινες πλάκες συνδυάστηκε με την ανάπτυξη μιας σύνθετης κοινωνίας και με τις ανάγκες της κρατικής διοίκησης για ακριβέστερους ελέγχους. Η γραφή και οι υπολογισμοί εξυπηρετούσαν αποκλειστικά τη λογιστική. Η βελτίωση της τήρησης βιβλίων είναι βελτίωση μιας μαθηματικής τεχνικής, η οποία είναι αποτέλεσμα του κρατικού σχηματισμού. Βέβαια, η τήρηση βιβλίων από μόνη της δεν αποτελεί μαθηματικά.[70]

Σε αυτό το σημείο παρατίθεται η άποψη του Høyrup για το τι αποτελεί μαθηματικά και από ποιο σημείο και μετά μπορεί να οριστεί η μετάβαση ενός πολιτισμού στα μαθηματικά:[71]

> *«Εάν πρόκειται να αναζητήσουμε τα μαθηματικά ως μία οντότητα, μπορούμε έτσι να επιλέξουμε μεταξύ δύο επιλογών: είτε ορίζουμε έναν συγκεκριμένο τομέα (παραδοσιακά αριθμό και καταμέτρηση) ως τα μαθηματικά τους, γεγονός που θα μας επιτρέψει να υποθέσουμε την ύπαρξη μαθηματικών πολύ*

[68] From Accounting to Writing | Denise Schmandt-Besserat (utexas.edu): Αριθμητική πλάκα που ασχολείται με ποσότητες κλωστοϋφαντουργικών προϊόντων, από το Uruk του Ιράκ, περίπου 3100 π.Χ.
[69] Robson, ό.π.
[70] Høyrup, ό.π., 36κ.ε.
[71] Høyrup, 1991, 32κ.ε.

πίσω σε ένα αόριστο παρελθόν ή μπορούμε να αποφασίσουμε (όπως σκοπεύω να κάνω) ότι το χαρακτηριστικό γνώρισμα των μαθηματικών ως μία οντότητα είναι ο συντονισμός πολλών αφηρημένων πρακτικών. Η επιλογή του συντονισμού ως καθοριστικού χαρακτηριστικού δεν μας απαλλάσσει από κάθε αυθαιρεσία. Εξακολουθεί να τίθεται το ερώτημα, π.χ. εάν η καταμέτρηση και η προσθήκη αποτελούν μία ή δύο πρακτικές· εάν είναι δύο, η εισαγωγή της προσθήκης είναι ήδη μαθηματικά, δεδομένου ότι δεν μπορεί να γίνει μεμονωμένα από την καταμέτρηση. Έτσι, θα καταλήξω ορίζοντας τη μετάβαση στα μαθηματικά ως το σημείο, όπου οι προϋπάρχουσες και προηγουμένως ανεξάρτητες μαθηματικές πρακτικές συντονίζονται μέσω μιας ελάχιστης τουλάχιστον διαισθητικής κατανόησης των επίσημων σχέσεων».[72]

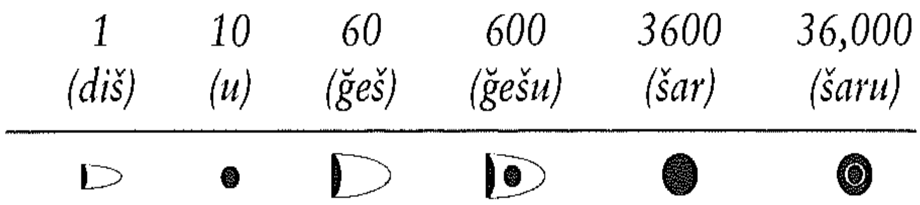
Αρχικά, μπορούμε να εξετάσουμε τις μετρολογικές ακολουθίες και τα αριθμητικά συστήματα που χρησιμοποιούνταν στα κείμενα. Μια ομάδα από το Βερολίνο εντόπισε τέτοια συστήματα στις αρχαίες πινακίδες της Uruk.

Το πρώτο πράγμα που πρέπει να ειπωθεί σχετικά με τα συστήματα καταμέτρησης είναι ότι η καταμέτρηση εξακολουθεί να γίνεται με τη χρήση των εκτυπώσεων των *tokens* πάνω στον πηλό. Στην πραγματικότητα, αν και τα βασικά σημάδια είναι εικόνες των μικρών και μεγάλων σφαιρών και κώνων, αρκετά διαφορετικά συστήματα είναι σε χρήση, με διαφορετικές σχέσεις μεταξύ των οπτικά πανομοιότυπων συμβόλων. Επίσης, παρατηρείται μια εκτεταμένη χρήση συστημάτων με βάση τον αριθμό 60.[73]

Σύμφωνα με τον Høyrup μια «ακολουθία για καταμέτρηση» χαρακτηρίζεται από το διαχωρισμό της ποσότητας από την ποιότητα. Για παράδειγμα, «3 πρόβατα» ή «6 m». Από την άλλη μεριά, μια μετρολογική ακολουθία έχει την ποιότητα εγγενή στην ποσότητα. Για παράδειγμα, «mmmm» αντί για «4 m». Σε όλη την ιστορία των Μεσοποτάμιων μαθηματικών αυτή η διάκριση παραμένει λιγότερο σαφής από ότι θα προτιμούσε ένας ιστορικός των μαθηματικών. Αντί για το δικό μας «4 m» ένας παλαιός βαβυλωνιακός γραφέας θα είχε γράψει «4» περιμένοντας όλους να γνωρίζουν ότι τα μήκη μετρούνται σε αυτή τη μονάδα.

Πρώτον, υπάρχουν δύο «ακολουθίες για την καταμέτρηση». Η πρώτη (εξηνταδικό σύστημα σύμφωνα με τον Høyrup ή δεκαδικό- εξηνταδικό)[74] ξεκινά από έναν μικρό κώνο για το 1, συνεχίζει με έναν μικρό κύκλο για το 10, έναν μεγάλο κώνο για το 60, έπειτα ένας μεγάλος κώνος με χαραγμένο έναν μικρό κύκλο για το 600, έναν μεγάλο κύκλο για το 3600 και ολοκληρώνεται με έναν μεγάλο κύκλο με χαραγμένο έναν μικρό για το 36000. Αυτό το σύστημα, που χαρακτηρίζεται από τη συστηματική αλλαγή μεταξύ των παραγόντων 10 και 6, χρησιμοποιείται για να μετρήσει τους σκλάβους, τα βοοειδή, τα εργαλεία που κατασκευάζονται από ξύλο ή πέτρα, τα αγγεία (που αντιπροσωπεύουν μια συγκεκριμένη περιεκτικότητα) και πιθανώς τα μήκη.[75]

[72] Μετάφραση από εμένα, Ι.Κ.
[73] Høyrup, ό.π., 37.
[74] Αναλυτικά για το εξηνταδικό σύστημα στην ενότητα 2.2.
[75] Høyrup, ό.π., 37κ.ε.



Εικόνα 11: Σύστημα καταμέτρησης στα τέλη της 4ης χιλιετίας π.Χ.[76]

Το άλλο σύστημα καταμέτρησης (διεξηνταδικό, «bisexagesimal system») περιέχει τους όρους 1, 10, 60, 120, 1200, 7200 δηλαδή οι διαδοχικοί παράγοντες είναι αντίστοιχα 10, 6, 2, 10, 6. Αυτό το σύστημα χρησιμοποιούνταν για την καταμέτρηση προϊόντων που σχετίζονταν με σιτηρά (μερίδες ψωμιού κ.ά.), καθώς και για ορισμένα άλλα προϊόντα.[77]

Εκτός αυτού, έχουν εντοπιστεί τρεις μετρολογικές ακολουθίες. Η μία χρησιμοποιείται για τις διαστάσεις χωρητικότητας σιτηρών. Εάν η βασική μονάδα είναι Β (ένας μικρός κώνος), οι επόμενοι είναι 6 Β (μικρός κύκλος), 60 Β (μεγάλος κύκλος), 180 Β (μεγάλος κώνος) και 1800 Β (μεγάλος κώνος με το χαραγμένο μικρό κύκλο)- η παραγοντική ακολουθία είναι έτσι 6, 10, 3, 10. Παρατηρούμε ότι οι αναλογίες διαφέρουν από εκείνες του εξηνταδικού συστήματος αριθμών.[78]

Μια άλλη μετρολογική ακολουθία (που μαρτυρείται μόνο στην Uruk III) χρησιμοποιείται για επιφάνειες. Αυτή χρησιμοποιήθηκε και σε πολύ μεταγενέστερους χρόνους, γεγονός που μας επιτρέπει να ερμηνεύσουμε το μικρό κώνο ως «iku» (περίπου 60m·60m). Στη συνέχεια, ακολουθεί ένας μικρός κώνος με χαραγμένο μικρό κύκλο (6 iku), έναν μικρό κύκλο (18 iku), ένας μεγάλος κύκλος με χαραγμένο μικρό κύκλο (180 iku) και ένας μεγάλος κύκλος (720 iku). Παρατηρούμε ότι η παραγοντική ακολουθία είναι 6, 3, 10, 6. Τέλος, υπάρχει και μια τρίτη μετρολογική ακολουθία, αλλά είναι άγνωστης χρήσης.[79]

Προφανώς, όλες οι αλληλουχίες βασίζονται στην αρχή της ομαδοποίησης, η οποία αποδεικνύει ότι οι αρχές που προέρχονται από την καταμέτρηση εφαρμόστηκαν στην τακτοποίηση των φυσικών διαστάσεων. Εκτός από αυτό το ομολογουμένως σημαντικό βήμα, ωστόσο η πληθώρα των ακολουθιών και η απουσία οποιουδήποτε συστήματος στη διαδοχή των ίδιων συμβόλων και στην ακολουθία των αναλογιών δεν αποτελεί απόδειξη ότι τα μαθηματικά είχαν ακόμα αρχίσει κατά τον Høyrup.[80]

Η αρχή των μαθηματικών αποδεικνύεται αν μελετήσουμε κάποια χαρακτηριστικά που δεν έχουν αναφερθεί ακόμα. Αρχικά, αυτά που περιγράψαμε μέχρι τώρα είναι μόνο ένα μέρος των ακολουθιών, καθώς ξεκινούν από τη βασική μονάδα και συνεχίζουν με τα πολλαπλάσιά της. Σε αυτό το μέρος των ακολουθιών τα σύμβολα προέρχονται

[76] Robson, 2008, 76.
[77] Høyrup, ό.π., 38.
[78] ό.π.
[79] ό.π.
[80] ό.π.

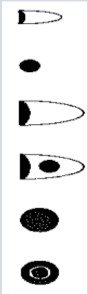
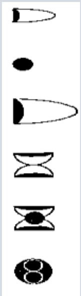
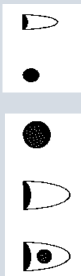
από το παλιό σύστημα των *tokens*, το οποίο μπορεί να είναι επ' αόριστόν μεγαλύτερης ηλικίας. Το άλλο μέρος των ακολουθιών αποτελείται από κλασματικές υπομονάδες, το οποίο είναι κάτι καινούριο.[81]

Η πρώτη υπομονάδα στο εξηνταδικό σύστημα ήταν το $1/2$ και συμβολιζόταν με έναν μικρό κώνο στραμμένος 90° μοίρες δεξιόστροφα. Ένα παρόμοιο βήμα έγινε και στο σύστημα των σιτηρών (bisexagesimal), παράγοντας το «$1/5$ B» = «C» και συνέχισε με το $1/n$ C (n=2, 3, 5 και ενδεχομένως υψηλότερες τιμές) και συμβολιζόταν από μικρούς κώνους διατεταγμένους σε ροζέτα. Αυτή η αντίστροφη καταμέτρηση αποτελεί κάτι καινούριο στα συστήματα μετρολογίας και θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως μια αρχή για τα μαθηματικά.[82]

81 ό.π.

82 ό.π., 38κ.ε.

Πίνακας 1: Συστήματα καταμέτρησης την 4η χιλιετία.[83]

ΣΥΣΤΗΜΑ	ΣΥΜΒΟΛΟ	ΟΝΟΜΑ ΜΟΝΑΔΑΣ ΚΑΙ Η ΣΗΜΕΡΙΝΗ ΑΞΙΑ
ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΜΗΚΩΝ		1 αντικείμενο ή 1 rod (6 m) 10 αντικείμενα ή 10 rods (60 m) 60 αντικείμενα ή 60 rods (360 m) 600 αντικείμενα ή 600 rods (3.6 km) 3600 αντικείμενα ή 3600 rods (21.6 km) 36000 αντικείμενα ή 36000 rods (216 km)
ΠΡΟΪΟΝΤΑ ΠΟΥ ΣΧΕΤΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕ ΣΙΤΗΡΑ (ΜΕΡΙΔΕΣ ΨΩΜΙ, ΚΑΝΑΤΕΣ ΜΠΥΡΑΣ)		1 αντικείμενο 10 αντικείμενα 60 αντικείμενα 120 αντικείμενα 1200 αντικείμενα 7200 αντικείμενα
ΜΕΤΡΗΣΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ		iku (3600 m^2) ese = 6 iku bur = 18 iku 180 iku 720 iku
ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΙΤΗΡΩΝ		B (βασική μονάδα) 6 B 60 B 180 B 1800 B
ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΥΠΟ ΜΟΝΑΔΕΣ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΙΤΗΡΩΝ ΚΑΙ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΣΙΤΗΡΩΝ		$1/2B$ $1/3B$ $1/4B$ $1/5B$ $1/6B$ $1/10B$

83 Robson, 2008, 291κ.ε.

Μια άλλη μετρολογική καινοτομία που βασίζεται στα μαθηματικά αφορά το ημερολόγιο. Το ημερολόγιο των Βαβυλωνίων είναι ένα ηλιακό ημερολόγιο. Το ένα έτος αποτελείται από 12 μήνες και ο κάθε μήνας έχει 29 ½ ημέρες κατά μέσο όρο, καθώς εναλλάσσονταν μεταξύ 29 και 30 ημερών. Περίπου κάθε 3 χρόνια εισάγεται ένας εμβόλιμος μήνας για να προσαρμοστεί το έτος στο τροπικό και στο γεωργικό έτος. Το εικονόγραμμα που συμβόλιζε το ημερολόγιο περιείχε έναν ήλιο μισό υψωμένο πάνω από τον ορίζοντα, όπου γύρω του υπήρχαν μολυβιές (strokes) για τη μέτρηση των ετών. Χρησιμοποιούσαν εξηνταδικούς αριθμούς για να συμβολίσουν τους μήνες και εξηνταδικούς αριθμούς στραμμένους κατά 90^o δεξιά για τις ημέρες.[84]

Η ελεύθερη δημιουργική χρήση αρκετών εξηνταδικών συστημάτων καταμέτρησης αναδεικνύει την ανεξαρτησία του πνεύματος και την απόφαση για το συνδυασμό διαφορετικών στοιχείων μαθηματικής σκέψης, προκειμένου να δημιουργηθεί ένα επαρκές εργαλείο, όπως το ημερολόγιο.[85]

Όλα όσα έχουν αναφερθεί μέχρι τώρα έχουν να κάνουν με την καταμέτρηση, τη μετρολογία και τη λογιστική. Σύμφωνα με τον Høyrup, αυτά τα τρία συνθέτουν ένα σύμπλεγμα που συνδέθηκε με το σχηματισμό ενός γραφειοκρατικού κράτους, δηλαδή ένα κοινωνικό σύστημα που χαρακτηρίζεται από ένα σύστημα ελέγχου «τριών επιπέδων».[86]

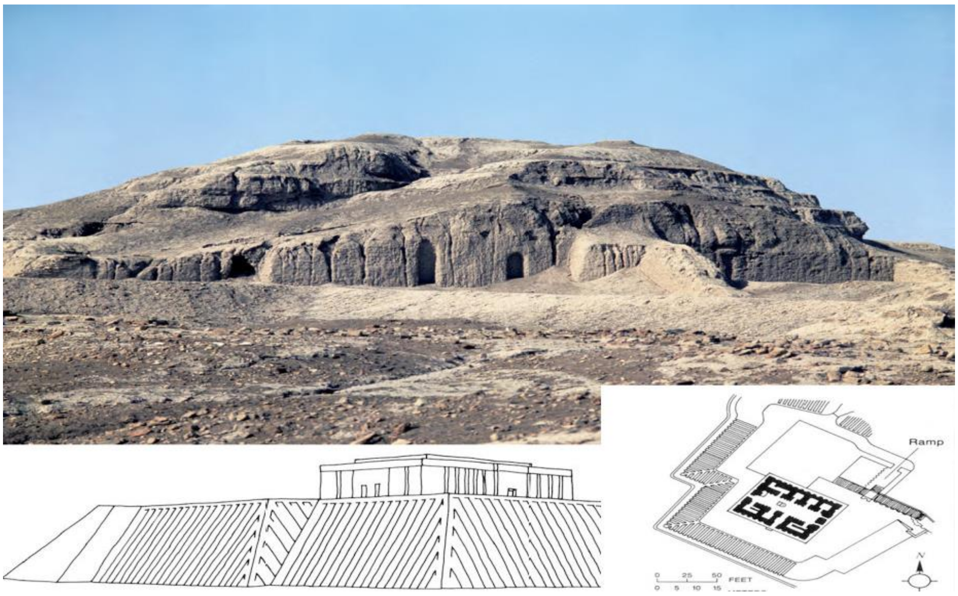
Το τελευταίο σύστημα που θα αναφέρουμε περιλαμβάνει τη γεωμετρική πρακτική. Δεν υπάρχει ακόμα απόδειξη ότι αυτήν την περίοδο υπολογίζονταν το εμβαδόν ενός ορθογώνιου χωραφιού από το μήκος και το πλάτος του, καθώς τα κείμενα που αναφέρονται σε μήκη και πλάτη δεν περιέχουν πληροφορίες για τον υπολογισμό μιας επιφάνειας. Μπορούμε να αναφέρουμε δυο έμμεσα στοιχεία. Το πρώτο είναι το σύστημα μέτρησης επιφανειών που είναι γνωστό από μεταγενέστερα ευρήματα και είναι έντονα προσανατολισμένο στη μονάδα μήκους. Έτσι, η βασική μονάδα περιοχής είναι το *sar,* το οποίο είναι το τετράγωνο της βασικής μονάδας μήκους που είναι το *nindan* ή *rod* και ισούται με 6m. Ακολουθεί το *iku* το οποίο είναι ένα τετράγωνο *ese* που σημαίνει σχοινί και ισούται 10 *nindan*. Η ακολουθία συνεχίζει με το *bar* που είναι ίσο με 18 *iku*.[87]

Ένα άλλο στοιχείο που έχει να κάνει με τη μέτρηση των επιφανειών προέρχεται από μια πλάκα της περιόδου αυτής που έχει βρεθεί. Η πλάκα ασχολείται με μια επιφάνεια στην οποία αναφέρονται τα δυο πανομοιότυπα μήκη και τα δύο ελαφρώς διαφορετικά πλάτη. Υπολογίζοντας την έκταση με την «τοπογραφική φόρμουλα»[88] βρίσκει κανείς μια πολύ μεγάλη ακέραια τιμή, $40\ km^2$. Η πολύ μεγάλη τιμή μας υποδεικνύει ότι έχουμε να κάνουμε με μια σχολική άσκηση και το γεγονός ότι το αποτέλεσμα είναι

[84] ό.π., 39κ.ε.
[85] ό.π., 40.
[86] Høyrup, 2018, 59.
[87] Høyrup, 1991, 40κ.ε.
[88] Μέσος όρος των μηκών επί το μέσο όρο από τα πλάτη. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιήθηκε στον υπολογισμό της επιφάνειας των όχι υπερβολικά ακανόνιστων τετραγώνων τουλάχιστον έως την Παλαιά Βαβυλωνιακή εποχή ακόμη και μέχρι το Μεσαίωνα.

ακέραιος αριθμός μας υποδηλώνει ότι η άσκηση διατυπώθηκε έτσι ώστε να επιτευχθεί η ακέραια τιμή.[89]

Η μέτρηση της περιοχής δεν είναι το μόνο στοιχείο γεωμετρικής πρακτικής που χρησιμοποιείται αυτήν την περίοδο. Ο ναός (ζιγκουράτ) από ασβεστόλιθο γνωστός ως *White Temple* (3200 – 3000 π.Χ.) και άλλοι δύο ναοί της $5^{ης}$ χιλιετίας διαθέτουν μια κανονικότητα που υποδηλώνει την αρχιτεκτονική κατασκευή. Μία από τις πολλές διαφορετικές ομάδες ειδικών που υπήρχαν αυτήν την περίοδο στην Uruk πρέπει να ήταν αρχιτέκτονες ειδικευμένοι στη γεωμετρική κατασκευή. Δεδομένου ότι μόνο τα κτίρια θρησκευτικών δραστηριοτήτων υποδηλώνουν την ύπαρξη γεωμετρικού σχεδίου οι αρχιτέκτονες πρέπει να εργάζονταν αποκλειστικά πάνω στην οικοδόμηση ναών.[90]



Εικόνα 12: Ζιγκουράτ της Uruk (White Temple)[91]

Τέλος, θα μπορούσαμε να πούμε με σιγουριά ότι ο σχεδιασμός των κτιρίων και των οικοδομικών εργασιών περιλάμβαναν τον υπολογισμό των απαιτήσεων τοιχοποιίας και εργατικού δυναμικού. Τα ακριβή γεωμετρικά σχέδια που έχουν βρεθεί σε συνδυασμό με ένα συγκεκριμένο μεγέθους τούβλο καταδεικνύουν ότι θα μπορούσαν να γίνουν τέτοιοι υπολογισμοί. Αν ισχύει αυτό, ο υπολογισμός των επιφανειών από τις διαστάσεις θα πρέπει ήδη να είχε προκύψει στον τομέα των αρχιτεκτόνων και η προσαρμογή της μέτρησης της επιφάνειας σε μετρήσεις μήκους θα περιλάμβανε

[89] Høyrup, ό.π., 41.
[90] ό.π., 41κ.ε.
[91] https://kirbyarthistory.tumblr.com/post/115617373232/white-temple-uruk-3200-3000-bce-using-only-mud

επίσης τον αρχιτεκτονικό κλάδο της πρακτικής γεωμετρίας. Έτσι, προκύπτει το φαινόμενο του συντονισμού μεταξύ των αριθμών και της μέτρησης των επιφανειών.[92]

> Μέχρι στιγμής η εμφάνιση των μαθηματικών αποδίδεται στον σχηματισμό του γραφειοκρατικού κράτους το οποίο ήταν συνέπεια της αλληλεπίδρασης με το σχολείο των γραφέων, όπως είδαμε παραπάνω ένα παράδειγμα άσκησης. Η εμφάνιση των μαθηματικών δεν έγινε από τις τεχνικές ανάγκες ή από τη γραφειοκρατική οργάνωση ή από τη γραφή αυτή κάθε αυτή, αλλά μόνο μέσω της αλληλεπίδρασης αυτών μεταξύ τους και με το σχολείο των γραφέων που παρείχε στους νέους γραφείς τεχνικές δεξιότητες πάνω στο γραφειοκρατικό σύστημα.[93]

2.1.2 Τα μαθηματικά της 3ης χιλιετίας

Γύρω στις αρχές της τρίτης χιλιετίας π.Χ., το κράτος Uruk έδωσε τη θέση του σε ένα σύστημα πόλεων-κρατών, όπου η διακυβέρνησή του γινόταν κυρίως από έναν στρατιωτικό ηγέτη(«βασιλιά») και παρατηρούνταν ανταγωνισμός μεταξύ των πόλεων-κρατών για την πρόσβασή τους στο νερό και άλλους πόρους. Για μερικούς αιώνες, η γραφή και ο υπολογισμός εξαφανίζονται από τον αρχαιολογικό ορίζοντα, αλλά επιστρέφουν δυναμικά γύρω στο 2550 π.Χ. τη στιγμή που το επάγγελμα του γραφέα διαχωρίστηκε από το στρώμα των ιερέων. Ταυτόχρονα, με την εμφάνιση των γραφέων βρίσκουμε τις πρώτες περιπτώσεις λογοτεχνικών κειμένων (έναν ύμνο ναού και μια συλλογή γνωμικών) στις πόλεις Shuruppak και Abu Salabikh.[94]

Σύμφωνα με τον Høyrup μια πρώτη τάση για τα μαθηματικά αυτής της εποχής είναι ότι έχουμε τα πρώτα δείγματα «καθαρών μαθηματικών» ή αλλιώς υπέρ- χρηστικά μαθηματικά. Με τον όρο υπέρ- χρηστικά μαθηματικά ο Høyrup αναφέρεται στα μαθηματικά που επισήμως φαινόταν ότι θα μπορούσαν να χρησιμεύσουν στην εξάσκηση των γραφέων, αλλά η ουσία τους υπερβαίνει αυτά που θα χρειαστούν στην καθημερινή πρακτική. Πιο συγκεκριμένα, αυτά αφορούν τη μαθηματική δραστηριότητα που εκτελείται προκειμένου να διερευνηθούν οι δυνατότητες των υπαρχόντων εννοιών και τεχνικών, αλλά όχι για άμεση χρήση τους στην πράξη. Για παράδειγμα, ένα πρόβλημα που χρονολογείται στην Πρώιμη Δυναστική περίοδο (Early Dynastic period 2600-2350 π.Χ.) αφορά την κατανομή του κριθαριού από μία αποθήκη σιτηρών που περιέχει 2400 *great gur* (μεγάλα βαρέλια) χωρητικότητας το καθένα 480 *sila* (λίτρα) σε μερίδες των 7 *sila* για κάθε εργαζόμενο. Το σωστό αποτέλεσμα είναι 164571 εργαζόμενοι, δηλαδή πρόκειται για έναν αριθμό που

[92] Høyrup, 1991, 42.
[93] ό.π., 44.
[94] Høyrup, 2012, 3.

υπερβαίνει τον πληθυσμό μιας πόλης- κράτους. Επίσης, ως διαιρέτης το 7 δεν θα εμφανιζόταν ποτέ στην πραγματική πρακτική, διότι δεν είναι συμβατός με τις μετρολογίες που εμπλέκονται - όπως είδαμε στην ενότητα 2.1.1 στα συστήματα καταμέτρησης που χρησιμοποιούσαν εκείνη την εποχή το 7 δεν ήταν παράγοντας σε κανένα από αυτά. Η αξία του προηγούμενου προβλήματος έγκειται στο ότι η λύση του αναπτύσσεται σε μια τεχνική που ένας εργαζόμενος γραφέας δεν θα χρειαζόταν ποτέ να εφαρμόσει.[95] Ένα άλλο κείμενο που αναλύθηκε από τον Joran Friberg προέρχεται από τη συριακή πόλη Ebla, χρονολογείται την ίδια περίοδο και ασχολείται με τη διαδοχική διαίρεση των αριθμών 100, 1000, 10000, 100000 και 260000 με τον αριθμό 33. Συγκεκριμένα στο κείμενο αναφέρεται εάν 33 άτομα παραλάβουν 1 *gubar* (μονάδα μέτρησης χωρητικότητας) κριθαριού, πόσο κριθάρι θα πάρουν τα 100, 1000, 10000, 100000 και 260000 άτομα;[96]

Παρατηρούμε ότι τα δυο αυτά προβλήματα εκτός από τον πολύ μεγάλο αριθμό μερίδων που αντιμετωπίζουν έχουν και ένα άλλο σημαντικό κοινό στοιχείο. Οι διαιρέτες (7, 33)[97] που υπάρχουν στα δυο προβλήματα δεν ταιριάζουν στις μετρολογίες και τα αριθμητικά συστήματα που χρησιμοποιούνταν εκείνη την περίοδο. Ο Friberg αναφέρει ως σημαντικό το γεγονός ότι κάποια από τα παλαιότερα γνωστά μαθηματικά κείμενα ασχολούνταν ακριβώς με το ίδιο είδος μη τετριμμένων προβλημάτων διαίρεσης. Η προφανής επίπτωση είναι ότι τα μαθηματικά πριν από περίπου τεσσεράμισι χιλιετίες ασχολούνταν με τη μελέτη μη τετριμμένων προβλημάτων διαίρεσης που αφορούσαν μεγάλους δεκαδικούς ή εξηνταδικούς αριθμούς με μη συνηθισμένους διαιρέτες, όπως το 7 και το 33.[98]

Η χρήση της γραφής για την καταγραφή της λογοτεχνίας είναι εξίσου υπέρ-χρηστική. Ο όρος «υπέρ- χρηστική χρήση» της γραφής έχει την έννοια ότι η γραφή πλέον δεν χρησιμοποιείται μόνο στη λογιστική ή στη διαχείριση του γραφειοκρατικού συστήματος, αλλά για πρώτη φορά η γραφή χρησιμοποιείται και στην καταγραφή λογοτεχνικών κειμένων, όπως στους ύμνους και στα έπη. Όπως αναφέρει ο Høyrup, η εμφάνιση των υπέρ- χρηστικών μαθηματικών και η υπέρ- χρηστική χρήση της γραφής μπορεί να θεωρηθεί ότι εξαρτάται από την επαγγελματική ημιαυτονομία των γραφέων. Ο ιερέας θα μπορούσε να είναι περήφανος που είναι ισχυρός και συνεργάτης των θεών, ο γραφέας από την άλλη θα έπρεπε να είναι περήφανος που είναι γραφέας, δηλαδή που κατέχει τις δύο τεχνικές για τις οποίες ήταν υπεύθυνος. Η επαγγελματική του υπερηφάνεια θα εξυπηρετούνταν καλύτερα αν αυτές τις τεχνικές τις κατακτούσε με την αριστεία, δηλαδή πέρα από ότι χρειαζόταν στην τετριμμένη καθημερινή ζωή.[99] Ωστόσο, εκτός από αυτές τις δεξιότητες, οι μελλοντικοί γραφείς διδάσκονταν να είναι υπερήφανοι για το επάγγελμά τους. Μια σειρά από κείμενα που έχουν διασωθεί χρησιμοποιήθηκαν στο σχολείο για να ενισχύσουν την επαγγελματική υπερηφάνεια των γραφέων. Αυτό που προκύπτει από τα διδακτικά κείμενα είναι ότι ο γραφέας αναμενόταν να είναι υπερήφανος για την ικανότητά του

---

[95] ό.π.
[96] Høyrup, 1991, 46.
[97] Περισσότερες πληροφορίες γι’ αυτούς τους αριθμούς που ο Neugebauer τους ονομάζει «μη κανονικούς» θα δούμε στην ενότητα 2.2.2, όπου θα παρουσιάσουμε αναλυτικά το πώς εκτελούσαν οι Βαβυλώνιοι τις διαιρέσεις τους.
[98] Høyrup, 1991, 46κ.ε.
[99] Høyrup, 2012, 3.

ως γραφέα και όχι για την εκπλήρωση των πραγματικών καθηκόντων του. Η επαγγελματική υπερηφάνεια του γραφέα χρειαζόταν κάτι πραγματικά δύσκολο που να χρησιμοποιηθεί ως βάση και οι δυσκολίες έπρεπε να ανήκουν τουλάχιστον επίσημα στο εύρος των καθηκόντων του, αν επρόκειτο να εξυπηρετήσουν την επαγγελματική υπερηφάνεια του.[100]

Ο λόγος ύπαρξης του επαγγέλματος των γραφέων ήταν φυσικά αυτή η καθημερινή εξάσκηση και η επέκτασή της πέραν του προηγούμενου πεδίου εφαρμογής της. Τα χρηστικά μαθηματικά όμως δεν εξαφανίστηκαν και κατά τη διάρκεια της 3ης χιλιετίας παρατηρήθηκε επέκταση των μετρολογιών. Ο Sargon της Akkad (μια πόλη που βρίσκεται κάπου κοντά στη σημερινή Βαγδάτη) ένωσε τη νότια και την κεντρική Μεσοποταμία σε ένα ενιαίο εδαφικό κράτος γύρω στο 2350 π.Χ. (επεκτεινόμενη σε μια γνήσια αυτοκρατορία υπό τους διαδόχους του). Η λογοτεχνία υπό τη μορφή ξαναγραμμένων εκδόσεων της μυθολογίας που ταιριάζουν στις νέες πολιτικές συνθήκες λειτουργούσε ως προπαγάνδα. Τα υπέρ- χρηστικά μαθηματικά δεν θα μπορούσαν να προσφέρουν καμία παρόμοια υπηρεσία, όπως η λογοτεχνία, αλλά από το σχολείο του Sargon είναι γνωστά μια σειρά από υπέρ- χρηστικά προβλήματα που ασχολούνται με ορθογώνια και τετράγωνα. Για παράδειγμα, ένα πρόβλημα δίνει το εμβαδόν και τη μία πλευρά ενός ορθογωνίου και ζητάει να υπολογιστεί η άλλη πλευρά. Ένα πρόβλημα που σύμφωνα με τον Høyrup δεν θα συναντούσε ποτέ κανένας φοροεισπράκτορας εκείνη την εποχή.[101]

Ταυτόχρονα, εκείνη την περίοδο μια άλλη τάση συμβαδίζει με εκείνη των μεταρρυθμίσεων της γραφής και των γραφειοκρατικών διαδικασιών. Αυτή η νέα τάση αφορούσε τις σκόπιμες και μεθοδικές αλλαγές στη μετρολογία προκειμένου να διευκολυνθούν οι γραφειοκρατικές διαδικασίες. Το σύστημα καταμέτρησης διακριτών αντικειμένων ήταν το πρώτο σύστημα το οποίο ομαδοποίησε μεμονωμένα μετρήσιμα αντικείμενα, όπως ανθρώπους, πρόβατα σε δεκάδες, εξηντάδες, έξι εκατοντάδες και σε τρεις χιλιάδες εξακόσιες μονάδες. Ήταν ίσως το πρώτο που ήταν σε σφηνοειδή γραφή. Οι μονάδες που είχαν σχήμα κώνου, όπως είχαμε δει την 4η χιλιετία, αντικαταστάθηκαν από κάθετες σφήνες, οι εξηντάδες με μεγαλύτερες και βαθύτερες σφήνες, ενώ οι δεκάδες που είχαν κυκλικό σχήμα αντικαταστάθηκαν από γωνιακές σφήνες.[102]

[100] Høyrup, 1991,
[101] ό.π.
[102] Robson, 2008, 75κ.ε.

Πίνακας 2: Η εξέλιξη του διακριτού συστήματος καταμέτρησης[103]

ΣΥΣΤΗΜΑ	1 (diš) 10 (u) 60 (ğeš) 600 (ğešu) 3600 (šar) 36,000 (šaru)
Αποτυπώσεις στον πηλό (στα τέλη της 4ης χιλιετίας).	
Σημάδια σφηνοειδούς γραφής (στα μέσα της 3ης χιλιετίας).	
Εξηνταδικό θεσιακό σύστημα (στα τέλη της 3ης χιλιετίας μόνο για υπολογισμούς).	

Κατά την περίοδο της αυτοκρατορίας του Sargon εισάγεται ένα νέο μέτρο χωρητικότητας για χρήση σε διαπεριφερειακές υποθέσεις της τάξης του βαρελιού, το *gur της Akkad (1 gur = 30 ban =300 sila =300 litres).*[104]

Παραπάνω αναφέρθηκε ότι κατά τη διάρκεια της 3ης χιλιετίας οι μετρολογίες επεκτάθηκαν. Οι προς τα πάνω και προς τα κάτω επεκτάσεις των μετρολογιών ήταν εξηνταδικές. Μια νέα μετρολογία μάλιστα αυτή του βάρους ήταν σχεδόν πλήρως εξηνταδική. Όταν ο χαλκός και το ασήμι απέκτησαν νομισματικές λειτουργίες, τότε απέκτησε και το βάρος λογιστικό ενδιαφέρον. Έτσι, στις αρχές της Πρώιμης Δυναστικής Περιόδου ΙΙΙ (2600- 2350 π.Χ.) εισήχθη μια νέα μετρολογία που αφορούσε το σύστημα του βάρους. Ξεκινώντας από την κορυφή ένα «φορτίο» περίπου 30 κιλά = 1 *talent* χωρίζεται σε 60 *mana,* το κάθε *mana* υποδιαιρείται σε 60 *gin* το μεταγενέστερο *shekel*. Το *gin* υποδιαιρείται σε *se* (σπόροι δημητριακών) που στην καθημερινή ζωή ζύγιζαν πολύ λίγο για υποδιαιρεθεί και άλλο ($1\ gin = 180\ se$).[105]

Ο Høyrup αναφέρει ότι έγιναν και άλλες αλλαγές για να διευκολυνθούν οι διοικητικές διαδικασίες και ως εκ τούτου δεν έγιναν σύμφωνα με την εξηνταδική αρχή. Τα μικρότερα μέτρα μήκους που βεβαιώνονται για πρώτη φορά κατά την Πρώιμη Δυναστική περίοδο ΙΙΙ χωρίζουν το *1 rod* σε 2 *reeds* ή 12 *cubits* και το *cubit* σε 30 *fingers*.

[103] Robson, 2008, 76.
[104] Høyrup, 1991, 45
[105] ό.π.

Πίνακας 3: Μετρολογίες της 3ης χιλιετίας[106]

ΣΥΣΤΗΜΑ	ΣΥΜΒΟΛΟ	ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ Η ΣΗΜΕΡΙΝΗ ΑΞΙΑ
ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΗΣ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ	dis u ges gesu sar saru	1 10 60 600 3600 36000
ΜΗΚΟΥΣ	1 rod = 2 reeds 1 reed = seed-cubits 1 seed-cubit = 2 cubits 1 cubit = 3 double - hands 1 double - hand = 10 fingers 1 finger	6 m 3 m 1 m 50 cm 17 cm 17 mm
ΒΑΡΟΥΣ	1 talent = 60 mana 1 mina = 60 gin (shekel) 1 gin = 180 se (grain) 1 grain	30 kg 0,5 kg 8,3 gr 0,05 gr
ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	1 gur = 5 bariga 1 bariga = 6 ban 1ban = 10 sila 1 sila	300 litres 60 litres 10 litres 1 litres

Αυτή η αντίφαση, δηλαδή ότι κάποιες αλλαγές που πραγματοποιήθηκαν στα μετρολογικά συστήματα δεν έγιναν σύμφωνα με το εξηνταδικό σύστημα (όπως στο σύστημα του μήκους που αναφέραμε παραπάνω) ενώ άλλες ήταν πλήρως εξηνταδικές, τελικά ξεπεράστηκε μετά την κατάρρευση της Ακκαδικής Αυτοκρατορίας γύρω στο 2200 π.Χ. Ο 21ος αιώνας έχει ιδιαίτερη σημασία, καθώς η τάση για ολοένα και μεγαλύτερη εναρμόνιση των μετρολογικών συστημάτων έφτασε

[106] Robson, 2008, 293.

στο απόγειό της στη διάρκεια της «Τρίτης Δυναστείας της Ur» («Ur III», 2112- 2000 π.Χ.). Μια στρατιωτική μεταρρύθμιση υπό το βασιλιά Sulgi ακολουθήθηκε αμέσως μετά από μια διοικητική και οικονομική μεταρρύθμιση.[107]

Η ουσία αυτής της μεταρρύθμισης ήταν η οργάνωση του εργατικού δυναμικού της χώρας υπό την εποπτεία των γραφέων. Οι γραφείς ήταν υπεύθυνοι για την παραγωγή μιας εργάσιμης ημέρας σύμφωνα με τους καθορισμένους κανόνες. Για παράδειγμα, πόσα τούβλα ενός συγκεκριμένου τύπου θα μπορούσαν να παραχθούν σε μία μέρα, πόση ποσότητα άμμου θα μπορούσε να μεταφερθεί από έναν εργαζόμενο σε μια συγκεκριμένη απόσταση σε μία μέρα, ποιος είναι ο αριθμός των τούβλων για μια μονάδα επιφάνειας, ποιος ο όγκος της πίσσας που απαιτείται ανά μονάδα επιφάνειας κ.λπ. Όπως μπορεί κάποιος να φανταστεί, ο έλεγχος όλων αυτών των εργασιών περιλάμβανε έναν τεράστιο αριθμό πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων.[108]

Ο τρόπος για να λειτουργήσει αυτό ήταν να υπάρχουν πλάκες (πίνακες) με όλους τους σχετικούς κανόνες, δηλαδή να μεταφράσουν χρησιμοποιώντας τις μετρολογικές πλάκες όλα τα παραδοσιακά μέτρα σε εξηνταδικούς αριθμούς που μετρούν μια επιφάνεια, μήκος κ.λπ. Αυτοί οι εξηνταδικοί αριθμοί ήταν ένα νέο θεσιακό σύστημα το λεγόμενο «εξηνταδικό θεσιακό σύστημα».[109] Οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις (οι διαιρέσεις θα μπορούσαν να γίνουν πολλαπλασιάζοντας το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη) στο εξηνταδικό θεσιακό σύστημα θα μπορούσαν να εκτελεστούν μέσω πλακών πολλαπλασιασμού και αντιστρόφων. Τέλος, το αποτέλεσμα που θα προέκυπτε μπορούσε να μεταφραστεί στις τρέχουσες μετρολογίες (π.χ. βάρος) μέσω μιας μετρολογικής πλάκας.[110] Για παράδειγμα, μια μετρολογική πλάκα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να μετατρέψει τις διαφορετικές μονάδες μήκους σε εξηνταδικά πολλαπλάσια του *nindan*. Μια πλάκα σταθερών παραγόντων θα αναφερόταν στην ποσότητα γης που μεταφέρει ένας εργαζόμενος σε μια μέρα, τον αριθμό των τούβλων για μια μονάδα επιφάνειας και τον όγκο της πίσσας που απαιτείται ανά μονάδα επιφάνειας. Αυτό ήταν το μεγάλο πλεονέκτημα του θεσιακού συστήματος σε μία από τις πιο γραφειοκρατικές κοινωνίες που υπήρξαν ποτέ, όπου οι γραφείς ήταν υπεύθυνοι για κάθε είδους παραγωγική δραστηριότητα.[111]

Ο Høyrup υποστηρίζει ότι το θεσιακό σύστημα εφευρέθηκε για την επίλυση των προβλημάτων που αναφέρθηκαν παραπάνω, αλλά δεδομένου ότι δεν έχουν βρεθεί τα απομνημονεύματα του δημιουργού του θεσιακού συστήματος δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι.[112] Ακόμη όμως και αν προϋπήρχε η ιδέα για το θεσιακό σύστημα αυτή από μόνη της δεν θα ήταν χρήσιμη, αλλά μόνο όταν ενσωματώνονταν σε ένα σύστημα αριθμητικών, μετρολογικών και αντιστρόφων πλακών θα έκανε την εφαρμογή της αξιόλογη. Αυτή η εφαρμογή της προϋποθέτει ότι ολόκληρο το σύστημα θα διδάσκονταν στα σχολεία των γραφέων τα οποία ήταν υπό τον κεντρικό έλεγχο και δίδασκαν αυτά που χρειάζονταν ένα γραφειοκρατικό κράτος. Μαθηματικές

[107] Høyrup, 2012, 4.
[108] ό.π.
[109] Αναλυτικά για το «εξηνταδικό θεσιακό σύστημα» στην ενότητα 2.2.
[110] ό.π.
[111] Høyrup, 1991, 49κ.ε.
[112] ό.π., 50.

σχολικές ασκήσεις από εκείνη την εποχή που να ασχολούνται με προβλήματα πέρα της διαχείρισης του κράτους δεν έχουν βρεθεί, πράγμα που δηλώνει ότι δεν υπήρχε χώρος για τη διδασκαλία υπέρ- χρηστικών μαθηματικών. Η διδασκαλία των μαθηματικών φαίνεται ότι αποτελούνταν από την κατάρτιση και την αποστήθιση των πλακών που ανήκαν στο θεσιακό σύστημα, καθώς και από την παραγωγή εγγράφων που χρησιμοποιούνταν ως υποδείγματα («model documents») προσαρμοσμένα στην καθημερινή ζωή.[113]

2.1.3 Παλαιά Βαβυλωνιακή περίοδος (2000- 1600 π.Χ.)

Μετά την κατάρρευση της Ur III το 2000 π.Χ. οι Σουμέριοι που διέμεναν στα νότια και οι Ακκάδιοι που κατοικούσαν βορειότερα συνενώθηκαν αρμονικά στο πλαίσιο της Πρώτης (Παλαιάς) Βαβυλωνιακής Αυτοκρατορίας η οποία είχε ως κέντρο την πόλη της Βαβυλώνας. Περί το 1792 - 1750 π.Χ. ιδρύθηκε η Πρώτη Βαβυλωνιακή Δυναστεία με κυριότερο εκπρόσωπό της το Χαμουραμπί ο οποίος αναδείχτηκε σε ένα σημαντικό νομοθέτη και κυβερνήτη.

Οι αρχές της δεύτερης χιλιετίας ή η Παλαιά Βαβυλωνιακή περίοδος (1900- 1600 π.Χ.) αποτέλεσε ένα διάστημα ευημερίας και πολιτισμικής ανάπτυξης. Η πλειοψηφία των μαθηματικών κειμένων που είναι γνωστά σήμερα έχουν γραφτεί τη συγκεκριμένη περίοδο και μάλιστα στη σημιτική Ακκαδική γλώσσα, ενώ τα μαθηματικά της προηγούμενης περιόδου γράφτηκαν στα Σουμεριακά. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι τα Παλαιά Βαβυλωνιακά μαθηματικά αποτελούν ένα σημείο καινοτομίας συγκριτικά με την ως τώρα παράδοση. Η κύρια διαφορά τους όμως σε σχέση με τα μαθηματικά της Ur III έγκειται στο γεγονός ότι σε αυτή την περίοδο κεντρική θέση έχουν τα υπέρ-χρηστικά μαθηματικά, σε αντίθεση με την προηγούμενη περίοδο όπου ήταν απολύτως προσανατολισμένα στα μαθηματικά που χρειάζονταν στην καθημερινή ζωή. Επιπλέον, σε αυτή την εποχή συναντάμε μία εξαιρετικά εξατομικευμένη οικονομία. Αναδεικνύονται διακριτές επαγγελματικές ομάδες (γραφείς, γιατροί, δάσκαλοι της γλώσσας, της λογοτεχνίας και των μαθηματικών) και ακόμη οι σχολές των γραφέων αναπτύσσουν ένα πρόγραμμα σπουδών που βοηθάει την ανάδειξη δεξιοτήτων που ξεπέρασαν τις απαιτήσεις των καθαρά πρακτικών αναγκών. Τα επιτεύγματα των Βαβυλωνιακών μαθηματικών αυτής της περιόδου είναι αποτέλεσμα των σχολείων, των γραφέων και της εκπαίδευσης που παρείχαν.[114]

Οι πλάκες που έχουν βρεθεί από εκείνη την εποχή, αποκαλύπτουν ζωτικής σημασίας πληροφορίες σχετικά με την κατάρτιση στην αριθμητική που διδάσκονταν στα σχολεία των γραφέων τα οποία λειτουργούσαν σε ιδιωτικές κατοικίες. Οι παλαιοί πίνακες μετρολογιών αναθεωρήθηκαν ριζικά και εισήχθησαν νέοι πίνακες που εκπαίδευαν τους γραφείς σε πιο αφηρημένες ιδιότητες του συστήματος σφηνοειδούς γραφής και του εξηνταδικού θεσιακού συστήματος. Χιλιάδες αριθμητικοί και

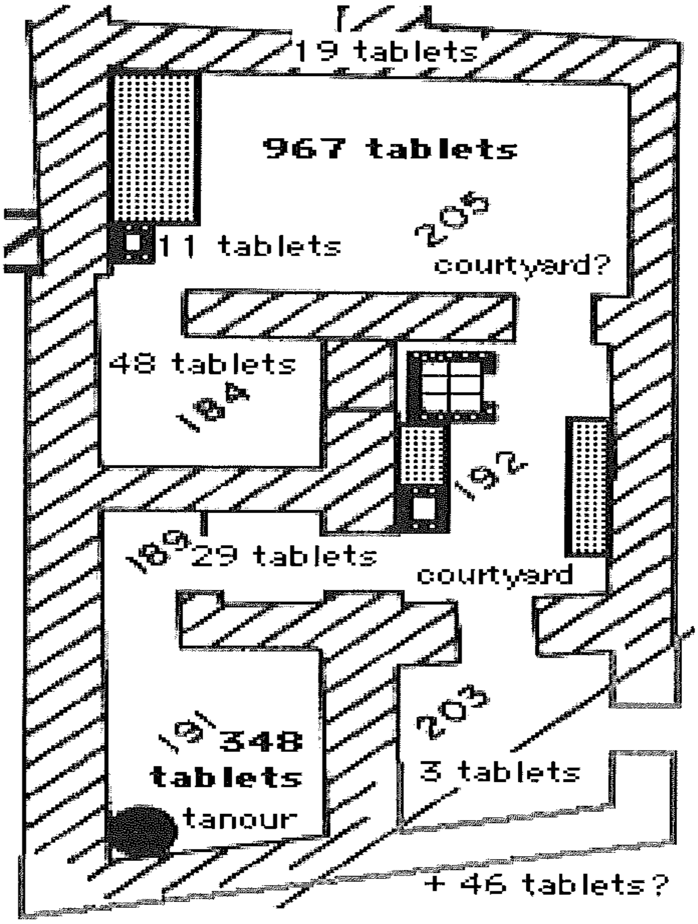
[113] Høyrup, 2012, 4.
[114] Høyrup, 2018, 61.

μετρολογικοί πίνακες και αρκετές εκατοντάδες μαθηματικά προβλήματα λέξεων βεβαιώνουν αυτό το νέο καθεστώς στο οποίο η έμφαση δινόταν περισσότερο στην ικανότητα υπολογισμού επιφανειών με σχεδόν αλγεβρικούς τρόπους παρά στην ικανότητα καταμέτρησης των ζώων ή υπολογισμού των ποσοστών εργασίας.[115]

Ο Høyrup αναφέρει ότι πολλά προβλήματα που ανήκουν σε αυτή την κατηγορία φαίνονται αρκετά «αφηρημένα». Για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα δίνεται το άθροισμα του μήκους και του πλάτους (l + w) ενός ορθογωνίου χωραφιού και το άθροισμα του εμβαδού (A) με τη διαφορά του μήκους από το πλάτος (A+ (l-w)) και στη συνέχεια ζητείται να υπολογιστεί το μήκος και το πλάτος.[116] Σε αυτή την περίπτωση μόνο η σημείωση «Πήγα γύρω από αυτό» που αναγράφεται στην πλάκα μας υποδηλώνει ότι το πρόβλημα αναφέρεται σε ένα πραγματικό χωράφι. Άλλα προβλήματα είναι ακόμα πιο γενικά και δεν εμφανίζουν κάποιο στοιχείο που να παραπέμπει στην καθημερινή ζωή.[117]

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, τα επιτεύγματα των Βαβυλωνιακών μαθηματικών αυτής της περιόδου είναι αποτέλεσμα των σχολείων, των γραφέων και της εκπαίδευσης που παρείχαν. Αρχαιολογικά ευρήματα από τις πόλεις Ur, Nippur και Sippar περιγράφουν το ρόλο των μαθηματικών στα προγράμματα σπουδών των συγκεκριμένων σχολών. Το House F στη Nippur έχει μακράν τα πιο λεπτομερή στοιχεία λόγω του τεράστιου αριθμού πλακών που ανασκάφηκαν εκεί. Αυτό το μικρό σπίτι, περίπου 100 μέτρα νοτιοανατολικά του συγκροτήματος ναών E-kur της Enlil χρησιμοποιήθηκε ως σχολείο στη βασιλεία του Samsu-iluna. Οι πλάκες που βρέθηκαν στο House F σύμφωνα με την Eleanor Robson μπορούν να χωριστούν σε 2 ομάδες. Οι μισές πλάκες περιέχουν κάποιες βασικές ασκήσεις που διδάσκονταν στο σχολείο και οι άλλες μισές περιέχουν αποσπάσματα από σουμερικά λογοτεχνικά έργα. Απ' αυτές τις δύο ομάδες πλακών αντλούμε σημαντικές πληροφορίες για τη μαθηματική εκπαίδευση.[118]

[115] Robson, 2008, 86.
[116] Το συγκεκριμένο πρόβλημα αναλύεται παρακάτω.
[117] Høyrup, 1991, 54κ.ε.
[118] Robson, 2008, 97κ.ε.



Εικόνα 13: Το House F της Nippur[119]

Οι βασικές ασκήσεις ήταν συγκεκριμένου είδους και οι πλάκες στις οποίες ήταν γραμμένες είχαν και αυτές συγκεκριμένο σχήμα και μέγεθος. Κάθε διαφορετικός τύπος πλάκας μπορεί να συσχετιστεί με μια συγκεκριμένη παιδαγωγική λειτουργία. Για παράδειγμα, οι πλάκες τύπου III στο House F χρησιμοποιήθηκαν για τους πίνακες πολλαπλασιασμού. Επίσης, οι πλάκες τύπου II έχουν μεγάλη ιστορική σημασία, καθώς αυτές είναι γραμμένες και στις δυο πλευρές τους και δίνουν αρκετές πληροφορίες στους ιστορικούς για την εκπαίδευση σε αυτά τα σχολεία. Οι διαφορετικοί τύποι πλακών που περιέχουν βασικές ασκήσεις και βρέθηκαν στο House F αναφέρονται στον παρακάτω πίνακα:

[119] Robson, 2008, 98: Αρχαιολογικό σχέδιο του House F στη Nippur που δείχνει ευρήματα από πλάκες.

Πίνακας 4: Τα είδη των πλακών που βρέθηκαν στο House F[120]

Τύπος πλάκας	***Περιγραφή***	***Λειτουργία (σειρά χρήσης)***	***Αριθμός μαθηματικών πλακών/Σύνολο πλακών***
I	Μεγάλη πλάκα με πολλές στήλες που περιέχει μια ολόκληρη άσκηση ή σημαντικό μέρος αυτής, προσεκτικά γραμμένο	Τελική παρουσίαση μιας ολοκληρωμένης άσκησης (4)	10/52
II	Μεγάλη πλάκα γραμμένη και από τις δυο μεριές: η μπροστινή μεριά περιέχει ένα υπόδειγμα 10 -30 γραμμών στην αριστερή στήλη και ένα αντίγραφο του μαθητή στη δεξιά στήλη συχνά με πολλές διορθώσεις. Η πίσω μεριά περιέχει μια ολόκληρη άσκηση ή ένα σημαντικό μέρος αυτής απρόσεκτα γραμμένο.	*Μπροστινή μεριά:* Πρώτη εκμάθηση ενός νέου αποσπάσματος (1) *Πίσω μεριά:* Γρήγορη ανάκληση από μια προηγούμενη άσκηση που έχει μάθει (3)	38/246
III	Μικρή πλάκα μιας στήλης με 20-30 γραμμές όπου περιέχει απόσπασμα μιας άσκησης, συνήθως αρκετά προσεκτικά γραμμένο	Αναπαραγωγή ενός αποσπάσματος που έχει γίνει αποστήθιση πρόσφατα (2)	31/52
IV	Μικρή στρογγυλή πλάκα 2 -3 γραμμών που περιέχει απόσπασμα από μια άσκηση, προσεκτικά γραμμένο. Μπορεί να περιέχει το υπόδειγμα μπροστά και στην πίσω μεριά ένα αντίγραφο	Αναπαραγωγή ενός αποσπάσματος που έμαθε πρόσφατα (2)	0/4

Παρακάτω στην εικόνα 14 βλέπουμε μια πλάκα τύπου II από το House F της Nippur. Αριστερά είναι η μπροστινή μεριά της πλάκας και δεξιά το πίσω μέρος της. Η μπροστινή όψη της πλάκας (αριστερά) δείχνει ένα αντίγραφο του πίνακα των αντιστρόφων, με το αντίγραφο του μαθητή στα δεξιά να έχει σβηστεί. Το πίσω μέρος της πλάκας (δεξιά) είναι μια λίστα με μετρήσεις χωρητικότητας.

[120] ό.π., 99.

Εικόνα 14: Πλάκα τύπου ΙΙ από το House F[121]

Εικόνα 15: Πλάκες τύπου ΙΙΙ από το House F[122]

Στην εικόνα 15 βλέπουμε δύο πλάκες τύπου ΙΙΙ που βρέθηκαν στο House F. Αριστερά απεικονίζεται ένας πίνακας πολλαπλασιασμού για το 1,40 (=100), ενώ δεξιά ένας πίνακας πολλαπλασιασμού για τον αριθμό 3.

Το πρόγραμμα σπουδών στο House F περιλάμβανε τέσσερις φάσεις. Σύμφωνα με την Robson είναι αδύνατο να πούμε πόσο καιρό διαρκούσε η εκμάθηση και μάλλον διέφερε ανάλογα τον μαθητή. Όπως αναφέρει, συγκεκριμένα ένας μαθητευόμενος

[121] Robson, 2008, 101.
[122] ό.π., 103.

μπορεί να ξόδευε οχτώ ημέρες μεταξύ δυο διαδοχικών πινάκων πολλαπλασιασμού (τύπου ΙΙΙ), ενώ ένας άλλος μαθητής να χρειαζόταν πέντε ημέρες. Ίσως οι μαθητευόμενοι, όπως συνέβαινε και σε πιο σύγχρονες σχολές τέτοιου είδους, να ξεκινούσαν σε ηλικία μόλις πέντε ή έξι ετών και να τελείωναν όταν ήταν ικανοί να κερδίσουν τα προς το ζην, συνήθως στην πρώιμη εφηβεία τους. Όμως, όλα αυτά είναι εικασίες.[123]

Στην πρώτη φάση της εκπαίδευσης στο House F οι μαθητές κατακτούσαν κάποια βασικά στοιχεία της σφηνοειδούς γραφής. Στη δεύτερη φάση ξεκινούσε η μαθηματική εκπαίδευση των μαθητών, όπου έρχονταν σε επαφή για πρώτη φορά με τα βάρη και τα μέτρα και με το πώς αυτά σημειώνονται σε ένα μετρολογικό κείμενο (πάντα σε φθίνουσα σειρά μεγέθους). Μια σειρά από έξι πλάκες περιέχει ακολουθίες που απαριθμούν ξύλινες βάρκες και δεξαμενές διαφορετικής χωρητικότητας, καθώς και τα ονόματα των διαφόρων μέτρων βάρους. Για παράδειγμα:[124]

gis-ma- 60-gur [βάρκα χωρητικότητας 60 gur (1 gur = 300 λίτρα)

gis-ma- 50-gur

gis-ma- 40-gur

gis-ma- 30-gur

gis-ma- 20-gur

gis-ma- 15-gur

gis-ma- 10-gur

gis-ma- 5-gur

gis-ma- tur (μικρή βάρκα)

gis-lid-ga (μέτρηση δεξαμενής)

gis-ba-ri-ga [δεξαμενή χωρητικότητας 60 sila (1 sila = 1 λίτρο)]

gis-ba-an (δεξαμενή χωρητικότητας 10 sila)

gis-ba-an-5-sila (δεξαμενή χωρητικότητας 5 sila)

gis-nig-2-sila

gis-1-sila

gis-1/2-sila

gis-rin (μέτρα βάρους)

[123] Robson, 2008, 102.
[124] Robson, 2008, 100.

gis-rin-1-gu-un [βάρος 1 talent (1 talent = 30 kg)]

gis-rin-ma-na [βάρος 1 mina (1 mina = 0,5 kg)

Στη συνέχεια, η τέταρτη πλάκα περιείχε μετρήσεις βάρους, ενώ η πέμπτη περιείχε μετρήσεις από καλάμια σε διάφορα μήκη:

na-1-gu (1 talent)

na-50-ma-na (50 mina)

na-40-ma-na

na-30-ma-na

⋮

na-5-ma-na

na-3-ma-na

na-2-ma-na

na-1-ma-na

na-10-gin (10 shekels)

⋮

na-20-se [20 grains (1 grain =0,05 gr)]

⋮

na-5-se (5 grains)

gi-1-ninda [καλάμι μήκους 1 rod (6 m)]

gi-1-kus [καλάμι μήκους 1 cubit (0,5 m)]

gi-1/2-kus

gi-1/3-kus

gi-2/3-kus

Τέλος, η έκτη πλάκα περιείχε τους διάφορους συμβολισμούς για τις μονάδες μέτρησης.

Στην <u>τρίτη φάση</u> στο House F πραγματοποιήθηκε η συστηματική εκμάθηση των μετρολογικών συστημάτων μαζί με την απομνημόνευση άλλων ασκήσεων σχετικά με τα πιο σύνθετα χαρακτηριστικά της σφηνοειδούς γραφής. Αυτή τη φορά οι μετρολογικές μονάδες γράφτηκαν σε αύξουσα σειρά: πρώτα οι χωρητικότητες από

1/3 sila σε 3600 *gur* (0,3 – 65.000.000 λίτρα), έπειτα τα βάρη από 1/2 *grain* σε 60 *talents* (0,05 g – 1.800 kg), στη συνέχεια οι επιφάνειες και οι όγκοι από 1/2 *sar* έως 7200 *bur* (12 m^2 –47.000 εκτάρια (1 εκτάριο = 10.000 m^2)) και τέλος τα μήκη από 1 *finger* έως 60 *leagues* (17 mm – 650 km). Ολόκληρη η σειρά, πλήρως γραμμένη, περιείχε αρκετές εκατοντάδες καταχωρήσεις, αν και ορισμένες ενότητες θα μπορούσαν να παραλειφθούν ή να συντομευθούν. Για παράδειγμα, θα μπορούσε να μορφοποιηθεί ως λίστα, με κάθε καταχώρηση να περιέχει την τυπική σήμανση μόνο για τα μέτρα ή έναν πίνακα, όπου τα τυποποιημένα μέτρα εξισώνονται με τιμές στο εξηνταδικό σύστημα.[125]

Επίσης, στην τρίτη φάση του προγράμματος σπουδών του House F παράλληλα με τη μετρολογία, ξεκινούσε η εκπαίδευση στην αριθμητική. Οι μαθητές απομνημόνευαν μια μεγάλη αλληλουχία γεγονότων, αυτή τη φορά μέσω της αντιγραφής και της σύνταξης τυποποιημένων πινάκων αντιστρόφων και πολλαπλασιασμού. Αρχικά, οι μαθητές μάθαιναν τους πίνακες και έπειτα τους αντέγραφαν καταχωρώντας τις πράξεις σε προτάσεις *25 a-ra 1 25, 25 a-ra 2 50* (25 φορές το 1 25, 25 φορές το 2 50), αλλά όταν ανακαλούσαν στη μνήμη τους μεγαλύτερες ακολουθίες πινάκων σε φθίνουσα σειρά τους έγραφαν σε συντομογραφία γράφοντας μόνο τους βασικούς αριθμούς, 1 25, 2 50, κ.λπ. Αρκετές πλάκες και των δύο ειδών επιβεβαιώνουν ότι ο δάσκαλος του House F παρουσίασε στους μαθητές ολόκληρη τη σειρά πινάκων πολλαπλασιασμού προκειμένου να τους μάθουν.[126]

Στην <u>τέταρτη φάση</u> των προγραμμάτων σπουδών παρατηρήθηκε περισσότερη εξάσκηση στη συγγραφή μετρολογικών μονάδων, ιδιαίτερα των επιφανειών, της χωρητικότητας και των βαρών, όταν οι μαθητές έμαθαν πώς να γράφουν νομικές συμβάσεις για πωλήσεις, δάνεια και κληρονομιές.[127]

[125] Robson, 2008, 100
[126] Robson, 2008, 100κ.ε.
[127] Robson, 2008, 100.

Πίνακας 5: Μετρολογίες της Παλαιάς Βαβυλωνιακής Περιόδου[128]

ΣΥΣΤΗΜΑ	ΣΥΜΒΟΛΟ	ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ Η ΣΗΜΕΡΙΝΗ ΑΞΙΑ
ΜΗΚΟΥΣ	1 finger 1 cubit = 30 fingers 1 rod = 12 cubits 1 chain = 60 cubits ή 5 rods 1 cable = 60 rods 1 league = 1800 rods ή 30 cables	17 mm 0,5 m 6 m 30 m 350 m 10,8 km
ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΚΑΙ ΟΓΚΩΝ	1 area sar = 1 rod square 1 volume sar = 1 area sar x 1 cubit 1 ubu = 50 sar 1 iku = 2 ubu =100 sar 1 ese = 6 iku	36 m^2 18 m^3 1800 m^2 ή 900 m^3 3600 m^2 ή 1800 m^3 21600 m^2 ή 108000 m^3
ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	1 sila 1ban = 10 sila 1 bariga = 6 ban 1 gur = 5 bariga	1 litre 10 litres 60 litres 300 litres
ΒΑΡΟΥΣ	1 grain 1 gin = 180 se (grain) 1 mina = 60 gin (shekel) 1 talent = 60 mana	0,05 gr 8,3 gr 0,5 kg 30 kg

Τέλος, υπάρχει πληθώρα μαθηματικών κειμένων από την Παλαιά Βαβυλωνιακή Περίοδο που έχουν βρεθεί σε ανασκαφές. Το σύνολο των μαθηματικών κειμένων από αυτή την περίοδο χωρίζεται σε δυο μεγάλες κατηγορίες και πιο συγκεκριμένα στα κείμενα που περιέχουν πίνακες πράξεων ή αλλιώς τα «κείμενα πίνακες»[129] και στα κείμενα που περιέχουν προβλήματα και τις λύσεις τους ή αλλιώς τα «κείμενα

[128] Robson, 2008, 294.
[129] Αναλύονται στην ενότητα 2.3.1.

προβλήματα».[130] Περίπου 160 πλάκες που περιέχουν συνολικά αρκετές χιλιάδες μαθηματικά προβλήματα έχουν δημοσιευθεί μέχρι σήμερα. Επίσης, έχουν δημοσιευτεί περίπου 400 πλάκες με μαθηματικό περιεχόμενο από αυτή την περίοδο. Σε αυτές περιλαμβάνονται κυρίως πλάκες με μαθηματικούς υπολογισμούς περίπου 60 πίνακες μετρολογιών, περίπου 40 πίνακες πολλαπλασιασμού, πίνακες αντιστρόφων, πίνακες τετραγώνων και κύβων και τέλος πίνακες οικονομικών υπολογισμών και εμπορικών συναλλαγών.[131]

2.1.4 Τα μαθηματικά της 1ης χιλιετίας π.Χ.

Μετά το θάνατο του Χαμμουραμπί, η αυτοκρατορία του έπεσε περί το 1600 π.Χ. υπό το βάρος των επιδρομών των Χιττιτών. Οι Χιττίτες χρησιμοποιούσαν οπλισμό φτιαγμένο από σίδερο υπερέχοντας έτσι από τον ανάλογο χάλκινο οπλισμό των αμυνόμενων, γεγονός που αποτέλεσε τη βασική αιτία της επικράτησής τους. Μια φυλή πολεμιστών οι Κασίτες ανέλαβε την εξουσία στην περιοχή της Βαβυλώνας όπου για πρώτη φορά σταμάτησε αυτήν τη μαθηματική-διοικητική δραστηριότητα η οποία επέζησε για τόσους αιώνες και αποτελούσε ένα σημαντικό συστατικό του επαγγέλματος των γραφέων.[132]

Το σχολείο των γραφέων εξαφανίστηκε. Η διοίκηση βέβαια εξακολουθούσε να χρειάζεται γραφείς για να εφαρμόσουν τις διάφορες λογιστικές τεχνικές, αλλά οι γραφείς εκπαιδεύονταν πλέον από την οικογένειά τους. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να εξαφανιστούν τα μαθηματικά σχεδόν τελείως από τον αρχαιολογικό ορίζοντα, καθώς πολύ λίγα αρχαιολογικά ευρήματα με μαθηματικά κείμενα έχουν βρεθεί από την περίοδο 1600 – 750 π.Χ.[133]

Οι περισσότερες μετρολογίες είχαν αλλάξει δραστικά σε σχέση με την Παλαιά Βαβυλωνιακή Περίοδο. Η μέτρηση της επιφάνειας που γίνονταν σε τετραγωνικά μέτρα αντικαταστάθηκε από τα μέτρα σπόρων (πίνακας 6). Οι σχέσεις μεταξύ των μέτρων χωρητικότητας είχαν μεταβληθεί από την εποχή της Παλαιάς Βαβυλώνας, το μέγεθος του *sila* (το Ακκαδικό qu) είχε παραμείνει σταθερό σε περίπου 1 *litre*, αλλά τώρα θεωρούνταν ότι χωράνε μόνο 6 *sila* σε ένα *sutu* (το Σουμεριανό *ban*), ενώ προηγουμένως χωρούσαν 10. Το ίδιο το *qu (sila)* υποδιαιρέθηκε τώρα σε 10 *akalu* αντί για 60 *sekel* όπως νωρίτερα. Ωστόσο, η βασική έννοια της χωρητικότητας παρέμεινε ίδια. Τα μέτρα μήκους είχαν μετατοπιστεί με παρόμοιους τρόπους: το *cubit* παρέμεινε σταθερό σε περίπου 0,5 μέτρα, αλλά τώρα αποτελείται από μόλις 24 *fingers* αντί για 30 που ήταν παλαιότερα. Το *rod* είχε επιμηκυνθεί για να αποτελείται από 14 *cubits*, αλλά συνηθέστερα χρησιμοποιούμενο τώρα ήταν το *reed*, που αποτελείται 7 *cubits*. Η μέτρηση της επιφάνειας είχε αλλάξει δραστικά. Η τυποποιημένη μονάδα της επιφάνειας δεν ήταν πλέον το *sar* ή το *square rod*, αλλά

[130] Αναλύονται στην ενότητα 2.3.1.
[131] Robson, 2008, 86κ.ε.
[132] Høyrup, 1991, 60κ.ε.
[133] ό.π

το *square reed* = 7 X 7 *cubits*, το οποίο υποδιαιρέθηκε στο *areal cubit* = 7 X 1 *linear cubits* και το *areal finger* = 7 *cubits* X 1 *finger*. Εναλλακτικά, η έκταση θα μπορούσε να καθοριστεί όσον αφορά τα μέτρα χωρητικότητας με τη χρήση σπόρων προς σπορά. Τα μέτρα βάρους παρέμειναν σχεδόν εντελώς αμετάβλητα, εκτός από το γεγονός ότι τα πολλαπλάσια του *talent* (όπως το *kurru*) καταμετρούνταν στο δεκαδικό σύστημα.[134]

Πίνακας 6: Μετρολογίες της 1ης χιλιετίας π.Χ.[135]

ΣΥΣΤΗΜΑ	ΣΥΜΒΟΛΟ	ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ Η ΣΗΜΕΡΙΝΗ ΑΞΙΑ
ΜΗΚΟΥΣ	1 finger	2 cm
	1 cubit = 24 fingers	0,5 m
	1 reed = 7 cubits	3,5 m
	1 rod = 2 reed = 14 cubits	7 m
ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ	1 finger × 1finger = 1small finger	4 cm^2
	1cubit × 1 finger = 1 grain	100 cm^2
	1 reed × 1 finger = 1 area finger	730 cm^2
	1 cubit × 1 cubit = 1 small cubit	0,25 m^2
	1 reed × 1 cubit = 1 area cubit	1,75 m^2
	1 reed × 1 read = 1 area reed	12, 25 m^2
ΜΕΤΡΩΝ ΣΠΟΡΩΝ ΓΙΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ	1 grain	70 cm^2
	1 akalu = 1080 grains	7,5 m^2
	1 qu = 10 akulu	75 m^2
	1 sutu = 6 qu	450 m^2
	1 panu = 6 sutu	2700 m^2
	1 kurru = 5 bariga	13500 m^2

Γύρω στα μέσα της 1ης χιλιετίας τα μαθηματικά εμφανίζονται και πάλι μέσω κάποιων μαθηματικών κειμένων που χρονολογούνται περίπου το 600 π.Χ. Τα κείμενα αυτά

[134] Robson, 2008, 185κ.ε.
[135] Robson, 2008, 296κ.ε

ασχολούνται με τις μετρήσεις επιφανειών, τη μετατροπή μεταξύ διαφόρων μέτρων σπόρων και με ορισμένα υπέρ- χρηστικά μαθηματικά προβλήματα που μοιάζουν με αυτά της Παλαιάς Βαβυλωνιακής Περιόδου.[136]

Οι γραφείς εκείνη την εποχή αυτοπροσδιορίζονται ως ιερείς (sangu) και δεν ήταν πλέον υπεύθυνοι για τις διάφορες διοικητικές εργασίες του κράτους ως λογιστές, αλλά θεωρούνταν αστρονόμοι. Οι αστρονόμοι – ιερείς δημιούργησαν τη Βαβυλωνιακή μαθηματική αστρονομία που βασιζόταν σε αριθμητικά συστήματα.[137]

Μια τελευταία ανάπτυξη πραγματοποιήθηκε την εποχή των Σελευκίδων μετά το 311 π.Χ. Αυτό τεκμηριώνεται από λίγα κείμενα, όπως για παράδειγμα ορισμένοι πίνακες αντιστρόφων που πιθανόν να συνδέονται με αστρονομικούς υπολογισμούς. Ένα άλλο κείμενο δείχνει να υπάρχει μια κάποια συνέχεια από την Παλαιά Βαβυλωνιακή Περίοδο, καθώς περιλαμβάνει αλγεβρικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού και κάποιες καινοτομίες, όπως η εύρεση του αθροίσματος των αριθμητικών προόδων $\sum 2^n$ και $\sum n^2$. Τέλος, ένα κείμενο περιέχει προβλήματα σχετικά με τα ορθογώνια και τις διαγώνιούς τους.[138]

136 Høyrup, 2018, 62.
137 Høyrup, 2018, 63.
138 Høyrup, 2018, 63.

Πίνακας 7: Χρονολογική εξέλιξη των Βαβυλωνιακών μαθηματικών[139]

ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΑ	***ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ***	***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ***
5000 – 4000 π.Χ.	Περίοδος Ubaid (5.500 – 4000 π.Χ.)	Καταμέτρηση με μικρά πήλινα αντικείμενα τα *tokens* σε διάφορα σχήματα.
4000 – 3000 π.Χ.	Περίοδος Uruk (4000 – 3000 π.Χ.)	Εξέλιξη του συστήματος καταμέτρησης *token* σε κλειστές θήκες *bullae*
		Τα πρώτα γνωστά γραπτά κείμενα: κείμενα που χρησιμοποιούν πολύπλοκα μετρολογικά συστήματα
3000 – 2000 π.Χ.	Πρώιμη Δυναστική Περίοδος (3000 - 2350 π.Χ.)	Πίνακες διαιρέσεων και πολλαπλασιασμού
	Αυτοκρατορία του Sargon (2350 – 2150 π.Χ.)	Νέα μετρολογικά συστήματα
	Αυτοκρατορία της Ur III(2100 – 2000 π.Χ.)	Εξηνταδικό σύστημα καταμέτρησης
2000 – 1000 π.Χ.	Παλαιά Βαβυλωνιακή Περίοδος (2000 – 1600 π.Χ.)	Πολλά μαθηματικά κείμενα από τα σχολεία των γραφέων
		Άνθηση της Βαβυλωνιακής άλγεβρας
1000 – 311 π.Χ.	Νέο Βαβυλωνιακή Περίοδος (625 – 539 π.Χ.)	Μαθηματικά και αστρονομία αναπτύσσονται από τους αστρονόμους – ιερείς.
	Περίοδος των Σελευκίδων (330 – 127 π.Χ.)	

139 Robson, 2000, 156.

2.2 Το εξηνταδικό θεσιακό σύστημα αρίθμησης

Η ανάπτυξη των αριθμητικών συστημάτων γραφής στη Μεσοποταμία χρειάστηκε τόσους αιώνες όσους και η ανάπτυξη της γραφής. Σύμφωνα με τον Otto Neugebauer, η προέλευση του εξηνταδικού συστήματος δεν είναι τόσο απλή, συνεπής ή μοναδική στο χρόνο, όπως ίσως να φαίνεται. Κατά τη διάρκεια των πολλών αιώνων χρήσης τους, η οποία συνεχίζεται μέχρι και σήμερα για εξειδικευμένα θέματα, όπως για παράδειγμα ο χρόνος, οι γωνίες και τα αστρονομικά συστήματα συντεταγμένων, ο εξηνταδικός συμβολισμός περιείχε πάντα ένα ισχυρό υπόστρωμα δεκαδικής σημειογραφίας και πιο συγκεκριμένα στον τρόπο με τον οποίο γράφονται τα εξηνταδικά ψηφία. Επίσης, η χρήση τους περιλάμβανε πάντα ασυνέπειες οι οποίες συνεχίζονται ακόμα σχετικά με το πού και πώς διάφορες βάσεις μπορούν να αντιπροσωπεύουν αριθμούς ακόμη και μέσα σε ένα ενιαίο κείμενο. Για παράδειγμα, μια πλάκα περιέχει εκατοντάδες εξηνταδικούς αριθμούς γραμμένους σε στήλες τη μια δίπλα στην άλλη, για τον υπολογισμό των ημερομηνιών της νέας σελήνης για ένα ορισμένο χρόνο. Στην ίδια πλάκα στο τέλος αναγράφεται το όνομα του γραφέα και η ημερομηνία γραφής του κειμένου όπου ο χρόνος εκφράζεται με τη μορφή 2 me 25 «2 εκατοντάδες 25», ενώ στο κυρίως κείμενο η ίδια ημερομηνία θα γραφόταν με το εξηνταδικό αριθμό 3, 45 ($=3\times60 + 45 = 225$). Με αλλά λόγια, ο Neugebauer αναφέρει ότι το εξηνταδικό σύστημα εφαρμόζεται με συνέπεια μόνο σε μαθηματικούς υπολογισμούς. Για όλα τα άλλα (ημερομηνίες, βάρος, επιφάνειες κ.λπ.) χρησιμοποιούσαν μεικτά συστήματα.[140]

Σε αυτήν την ενότητα θα αναπτύξουμε το εξηνταδικό σύστημα, όπως εμφανίζεται στα μαθηματικά κείμενα της Παλαιά Βαβυλωνιακής περιόδου. Η εντυπωσιακή ιδιομορφία του Βαβυλωνιακού συστήματος έγκειται στη θεσιακή αρίθμηση, δηλαδή η αξία των ψηφίων της καθοριζόταν από τη θέση τους στη γραφή των αριθμών.[141]

2.2.1 Ο Βαβυλωνιακός αριθμητικός συμβολισμός

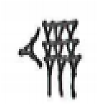
Οι Βαβυλώνιοι στα τέλη της 3ης χιλιετίας εφάρμοζαν ένα εξηνταδικό θεσιακό σύστημα αρίθμησης. Εξηνταδικό σημαίνει με βάση το 60, δηλαδή εξήντα μονάδες κάποιας τάξης ήταν ισοδύναμες με μια μονάδα της αμέσου επόμενης τάξης. Πιο συγκεκριμένα, οι αριθμοί από το 1 έως το 59 αποτελούσαν τις μονάδες 1ης τάξης, οι εξηντάδες αποτελούσαν τις μονάδες 2ης τάξης, οι πολλαπλασιαστές του 60 αποτελούσαν τις μονάδες 3ης τάξης κ.λπ. Το σύστημα αυτό χρησιμοποιεί δύο μόνο σύμβολα: την απλή κατακόρυφη σφήνα (καρφί (𒁹)), που παριστάνει τη μονάδα και τη γωνιακή σφήνα (𒌋), που παριστάνει τη δεκάδα. Τα δύο αυτά σύμβολα σχηματίζονταν με την πίεση μιας αιχμηρής γραφίδας στην πήλινη πινακίδα.[142]

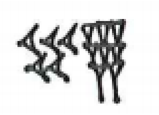
---

140 Neugebauer, 1990, 48κ.ε.
141 ό.π., 51.
142 Ifrah, 2000, 146κ.ε.

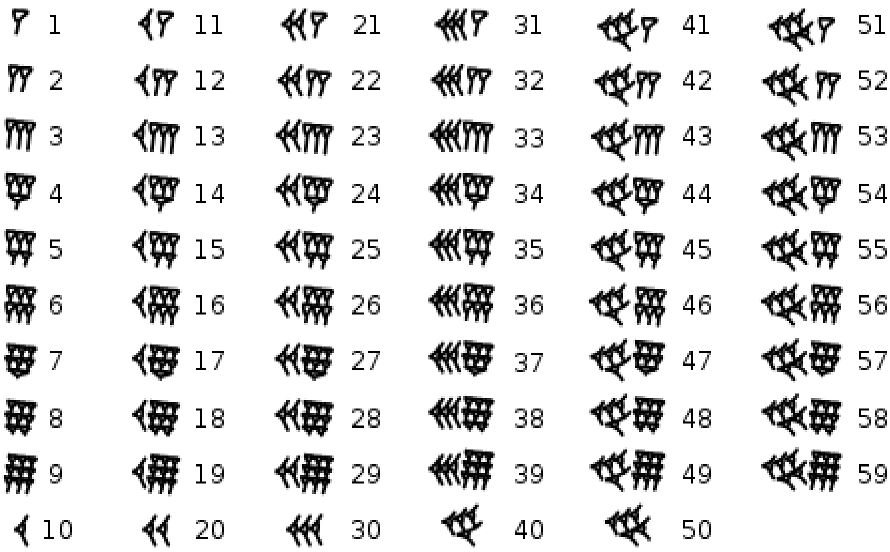
Οι αριθμοί από το 1 έως το 59 γράφονταν με προσθετικό τρόπο, επαναλαμβάνοντας αυτά τα δύο σχήματα όσες φορές χρειαζόταν. Για παράδειγμα, οι αριθμοί 5, 19 και 58 γράφονταν αντίστοιχα:[143]

 (5 καρφιά)

 (1 σφήνα και 9 καρφιά)

 (5 σφήνες και 8 καρφιά).

Στην εικόνα 16 βλέπουμε πώς συμβόλιζαν οι Βαβυλώνιοι τους αριθμούς από το 1 έως το 59.

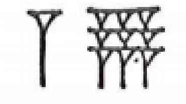


Εικόνα 16: Οι Βαβυλωνιακοί αριθμοί από το 1 ως το 59[144]

143 Ifrah, ό.π.

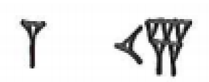
144 https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%95%CE%BE%CE%B7%CE%BD%CF%84%CE%B1%CE%B4%CE%B9%CE%BA%CF%8C_%CF%83%CF%8D%CF%83%CF%84%CE%B7%CE%BC%CE%B1_%CE%B1%CF%81%CE%AF%CE%B8%CE%BC%CE%B7%CF%83%CE%B7%CF%82

Μετά το 59 η γραφή γινόταν θεσιακή χρησιμοποιούσαν πάλι τα ίδια σύμβολα, αλλά με τη σημασία των εξηντάδων. Πιο συγκεκριμένα, μία εξηντάδα την αναπαριστούσαν με ένα καρφί, τις 2 εξηντάδες με 2 καρφιά, τις 10 εξηντάδες με μία γωνιακή σφήνα, τις 16 εξηντάδες με μία γωνιακή σφήνα και έξι καρφιά. Για παράδειγμα, το 69 γραφόταν:[145]

 (1 καρφί (= μία εξηντάδα) και 9 καρφιά (μονάδες))

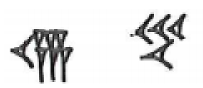
ενώ το 70:  (1 καρφί (εξηντάδα) και μια γωνιακή σφήνα (δεκάδα).

Επομένως, στο Βαβυλωνιακό σύστημα η αξία ενός ψηφίου διέφερε ανάλογα με τη θέση που κατείχε στη γραφή των αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, γράφανε τον αριθμό των μονάδων από το 1 ως το 59 στα δεξιά, ακολουθούσε προς τα αριστερά ο αριθμός των εξηντάδων, έπειτα στην τρίτη θέση προς τα αριστερά ο αριθμός των 60^2 κ.λπ. Για παράδειγμα, το ψηφίο 1 (𒁹) άξιζε μια απλή μονάδα όταν βρισκόταν στην πρώτη θέση από τα δεξιά, μια εξηντάδα στη δεύτερη θέση και μία εξηντάδα εξηντάδων στην τρίτη θέση κ.ο.κ. Για να γραφεί ο αριθμός 75 (μια εξηντάδα και δεκαπέντε μονάδες), έπρεπε να τοποθετηθεί ένα «15» στην πρώτη θέση και μια εξηντάδα στη δεύτερη θέση:[146]

 $(1 \times 60 + 15 = 75)$

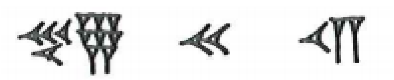
1 εξηντάδα, 15

Για να γραφεί ο αριθμός 1000 (= 16 εξηντάδες και 40 μονάδες), έπρεπε να τοποθετηθεί ένα «40» στη πρώτη θέση και ένα «16» στη δεύτερη:[147]

 $(16 \times 60 + 40 = 1000)$

16 εξηντάδες, 40

Επομένως, μια γραφή σαν αυτή:



---

[145] Ifrah, ό.π.
[146] Ifrah, ό.π., 147κ.ε.
[147] Ifrah, ό.π., 148.

θα αντιστοιχούσε στον αριθμό: $48 \times 60^2 + 20 \times 60 + 12 = 174012$.

Συνεπώς, η Βαβυλωνιακή αρίθμηση ήταν παρόμοια με το δικό μας σύστημα αρίθμησης με την έννοια ότι 60 μονάδες ενός είδους γράφονται ως μια μονάδα του επόμενου ανώτερου βαθμού. Η διαφορά τους έγκειται μόνο ως προς τη βάση που για τους Βαβυλωνίους ήταν το 60, ενώ στο δικό μας σύστημα είναι το 10 και τον τρόπο που διαμορφώνονταν τα ψηφία της.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί ο τρόπος μεταγραφής του Βαβυλωνιακού αριθμητικού συστήματος στις σύγχρονες εκδόσεις των Βαβυλωνιακών μαθηματικών κειμένων, καθώς έχει επικρατήσει να μην μετατρέπονται οι αριθμοί στο δεκαδικό σύστημα. Οι περισσότεροι ιστορικοί για να ξεχωρίσουν σε έναν ακέραιο αριθμό τις διαδοχικές δυνάμεις του 60 διαχωρίζουν με κόμμα (ή κενό διάστημα) τα ψηφία, για παράδειγμα ο αριθμός 174012 που είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα σε εξηνταδική αναγραφή είναι: 48,20,12 (=$48 \times 60^2 + 20 \times 60 + 12$). Όταν πρόκειται για κλασματικό αριθμό χωρίζουν το ακέραιο από το κλασματικό μέρος με ένα ερωτηματικό (;) όπως για παράδειγμα ο αριθμός 2;30 στο εξηνταδικό σύστημα αντιστοιχεί στο $2 + \frac{30}{60} = 2 + 0{,}5 = 2{,}5$ στο δεκαδικό σύστημα. Στον πίνακα 8 αναφέρουμε ορισμένα παραδείγματα για να γίνει πιο κατανοητός αυτός ο συμβολισμός:

Πίνακας 8

ΕΞΗΝΤΑΔΙΚΗ ΑΝΑΓΡΑΦΗ	*ΔΕΚΑΔΙΚΗ ΑΝΑΓΡΑΦΗ*
1,3	$1 \times 60 + 3 = 63$
2,12	$2 \times 60 + 12 = 132$
0;45	$0 \times 60 + \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$
1,25;30	$1 \times 60 + 25 + \frac{30}{60} = 85{,}5$
1;25,30	$1 + \frac{25}{60} + \frac{30}{60^2} = 1{,}424$
10,10,5	$10 \times 60^2 + 10 \times 60 + 5 = 4305$

Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό που παρουσιάζει το Βαβυλωνιακό αριθμητικό σύστημα είναι ότι δεν χρησιμοποιεί υποδιαστολή ή κάποιο άλλο σημάδι το οποίο θα διαχώριζε το κλασματικό από το ακέραιο μέρος του αριθμού. Το γεγονός αυτό έδινε ένα πλεονέκτημα στο σύστημα αφού όλοι οι αριθμοί αντιμετωπίζονταν στις πράξεις ως ακέραιοι όπως συμβαίνει σήμερα στο δεκαδικό σύστημα.[148]

Η έλλειψη αυτή όμως της υποδιαστολής προσέδιδε στο σύστημα ένα μειονέκτημα σε ότι αφορά τη σαφήνεια του κειμένου κατά την ανάγνωση. Για παράδειγμα, μια κατακόρυφη σφήνα (καρφί) θα μπορούσε να παριστάνει το 1 ή το 1×60 ή το $\frac{1}{60}$. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται και άλλα τέτοια παραδείγματα.

Πίνακας 9

ΒΑΒΥΛΩΝΙΑΚΗ ΑΝΑΓΡΑΦΗ	***ΕΞΗΝΤΑΔΙΚΗ ΑΝΑΓΡΑΦΗ***	***ΔΕΚΑΔΙΚΗ ΑΝΑΓΡΑΦΗ***
	1 ή 1,0 ή 0;1	1 ή $1 \times 60 = 60$ ή $\frac{1}{60}$
	2 ή 1,1 ή 1;1	2 ή $1 \times 60 + 1 = 61$ ή $1 + \frac{1}{60}$
	12 ή 10,2 ή 11,1	12 ή $10 \times 60 + 2 = 602$ ή $11 \times 60 + 1 = 661$

Μόνο από τα συμφραζόμενα του κειμένου ίσως θα μπορούσε κάποιος να καταλάβει σε ποιον αριθμό αναφέρεται το κείμενο.[149] Αυτή η ασάφεια κάπως ξεπεράστηκε από τους Μεσοποτάμιους γραφείς με τον πολύ σαφή διαχωρισμό των δύο αριθμών αφήνοντας ένα κενό ανάμεσά τους. Ας δούμε ένα παράδειγμα στη Βαβυλωνιακή γραφή:

$(2 \times 60 + 12 = 132)$

$(1 \times 60^2 + 1 \times 60 + 12 = 3672)$

Τέλος, η Βαβυλωνιακή θεσιακή αρίθμηση παρουσιάζει στην αρχική της ανάπτυξη ένα μειονέκτημα που αυτό οφείλεται στην έλλειψη συμβόλου για το μηδέν. Η δυσκολία από αυτό το γεγονός έγκειται στο ότι ορισμένοι αριθμοί μπορεί να παρερμηνευτούν. Για παράδειγμα, ο αριθμός 1,20 = 80 και 1,20 = $1 \times 60^2 + 0 \times 60 + 20 = 3620$ (αν υπήρχε το μηδέν θα γραφόταν 1, 0, 20). Το μειονέκτημα αυτό ξεπεράστηκε γύρω στο

[148] Friberg, 2007, 5.
[149] ό.π.

300 π.Χ. την περίοδο των Σελευκίδων.[150] Όταν συντάσσονταν αστρονομικά κείμενα, χρησιμοποίησαν για το μηδέν το σύμβολο  .[151] Σύμφωνα με τον Neugebaur, αυτό το σύμβολο το χρησιμοποιούσαν και νωρίτερα ως σημείο διαχωρισμού ανάμεσα σε δύο προτάσεις, γι’ αυτό στο σύγχρονο συμβολισμό οι ιστορικοί το μεταγράφουν ως τελεία. Συνεπώς, στα αστρονομικά κείμενα της περιόδου των Σελευκίδων βρίσκουμε περιπτώσεις αριθμών, όπως το 1, ., 20 ή το 1, ., ., 20 όπου εφαρμόζεται ακριβώς η ίδια αρχή όπως στο δικό μας δεκαδικό σύστημα π.χ. 201 ή 2001.

 $(1 \times 60 + 0 \times 60 + 25 = 85)$

Αυτή η καινοτομία με το σύμβολο για το μηδέν ήταν μόνο όταν το μηδέν βρισκόταν ανάμεσα σε δύο άλλα ψηφία. Ακόμα και από την τελευταία περίοδο της Βαβυλωνιακής γραφής δεν έχει βρεθεί κανένα παράδειγμα που να χρησιμοποιείται κάποιο μηδενικό σύμβολο στο τέλος του αριθμού. Σε τέτοιες περιπτώσεις μόνο από τα συμφραζόμενα στο πρόβλημα ή από το αποτέλεσμα του υπολογισμού θα καταλάβαιναν σε ποιον αριθμό αναφέρεται το κείμενο.[152]

Όπως αναφέραμε και νωρίτερα οι ασάφειες αυτές ως προς τα κλάσματα και τους ακεραίους δεν έχουν σημασία για την εκτέλεση των πράξεων. Για παράδειγμα, ο πολλαπλασιασμός τους γίνεται σαν να είναι ακέραιοι αριθμοί και το μόνο που χρειάζεται είναι να τοποθετηθεί στο τελικό γινόμενο η υποδιαστολή στην κατάλληλη θέση. Όπως αναφέρει ο Neugebauer, το ότι δεν χρειάζεται κάποιος να ασχοληθεί με ειδικές τιμές για κλάσματα και ακεραίους είναι ένα μεγάλο πλεονέκτημα του Βαβυλωνιακού συστήματος.[153]

2.2.2. *Οι βασικές πράξεις*

Πριν αναφερθούμε στον τρόπο που οι Βαβυλώνιοι εκτελούσαν τις βασικές πράξεις θα κάνουμε ένα σχόλιο για το συμβολισμό που θα χρησιμοποιήσουμε. Στην προηγούμενη ενότητα αναφέραμε ότι οι Βαβυλώνιοι δεν χρησιμοποιούσαν κάποιο σύμβολο για το μηδέν παρά μόνο στα κείμενα που έχουν βρεθεί από την εποχή των Σελευκίδων υπήρχε σύμβολο για το μηδέν και αυτό μόνο όταν το μηδέν βρισκόταν ανάμεσα σε δύο άλλα ψηφία. Έτσι, για λόγους σαφήνειας θα ακολουθήσουμε το συμβολισμό του

[150] Neugebauer, 1990, 53.
[151] Aaboe, 1997, 9.
[152] Neugebauer, ό.π.
[153] Neugebauer, ό.π, 54.

Friberg και θα εισάγουμε μηδενικά όπου χρειάζεται για να υποδείξουμε τα μηδενικά που λείπουν είτε ενδιάμεσα στον αριθμό είτε στο τέλος.[154]

<u>Προσθέσεις:</u>

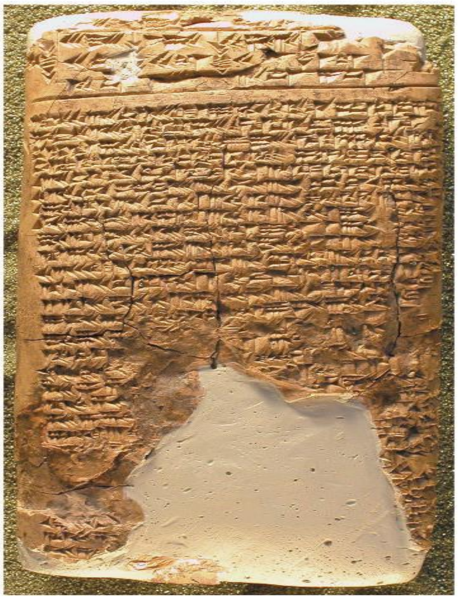
Από τα αρχαιολογικά ευρήματα που έχουν βρεθεί δεν είναι γνωστό το πώς οι Βαβυλώνιοι έκαναν τις προσθέσεις των εξηνταδικών αριθμών. Όταν σε ένα Παλαιό Βαβυλωνιακό μαθηματικό κείμενο πραγματοποιούνται προσθέσεις εξηνταδικών αριθμών το αποτέλεσμα δίνεται πάντα απευθείας. Σύμφωνα με τον Friberg, ίσως σε μια πήλινη πλάκα να μην υπήρχε αρκετός χώρος για να καταγραφεί με λεπτομέρειες ο αλγόριθμος της πρόσθεσης. Έτσι, οι προσθέσεις που δεν μπορούσαν να γίνουν με το μυαλό τις πραγματοποιούσαν πιθανώς σε μία άλλη πήλινη πλάκα και μετά τις έσβηναν.[155]

Ένα απλό παράδειγμα πρόσθεσης που αναφέρεται στην πίσω όψη της πλάκας *MS 2792* (εικόνα 17) αφορά την πρόσθεση του αριθμού των στρατιωτών από τέσσερα στρατεύματα για την κατασκευή μιας ράμπας. Ο αριθμός των στρατιωτών από κάθε στράτευμα ήταν αντίστοιχα: 4,30 - 8,00 - 6,40 – 7,30 έπειτα το κείμενο αναφέρει: «Προσθέστε τους στρατιώτες, 26,40». Η πρόσθεση θα πρέπει να έχει γίνει με τον ακόλουθο τρόπο:[156]

$$\begin{array}{r} \underline{1} \\ 4,30 \\ 8,00 \\ 6,40 \\ \underline{+\,7,30} \\ 26,40 \end{array}$$

Ακολουθώντας την εξής διαδικασία: προσθέτουμε τους αριθμούς στη δεξιά στήλη $30+40+30=100$. Το 100 αποτελείται από 1 εξηντάδα και 40 μονάδες οπότε στο Βαβυλωνιακό συμβολισμό γράφεται $1{,}40$ όπου το 40 μπαίνει στην τελευταία εξηνταδική θέση του αποτελέσματος, ενώ το 1 μεταφέρεται και προστίθεται στην αριστερή στήλη δηλαδή $1+4+8+6+7=26$ όπου το 26 θα γραφεί στην προηγούμενη εξηνταδική θέση του αποτελέσματος.

[154] Friberg, 2007, 5.
[155] ό.π., 6
[156] ό.π.



Εικόνα 17: Η πίσω όψη της πλάκας MS 2792[157]

Το παράδειγμα μας δείχνει ότι ο αλγόριθμος της πρόσθεσης είναι παρόμοιος με το γνωστό αλγόριθμο που χρησιμοποιούμε εμείς στο δεκαδικό σύστημα. Οι μόνες διαφορές είναι ότι στην πρόσθεση εξηνταδικών αριθμών χρησιμοποιούνται κάποιες φορές διψήφιοι αριθμοί αντί για δεκαδικούς μονοψήφιους αριθμούς και ότι στην πρόσθεση εξηνταδικών αριθμών μεταφέρονται εξηντάδες αντί για δεκάδες. Ας εφαρμόσουμε αυτόν τον αλγόριθμο σε ένα παράδειγμα με πιο μεγάλους αριθμούς:[158]

$$
\begin{array}{r}
\underline{1}\quad\;\; \underline{2}\qquad\qquad\qquad\quad \\
11, 51, 06, 40, 00, 00 \\
1, 19, 00, 44, 26, 40 \\
\underline{+ \quad 44, 26, 40, 00, 00} \\
13, 54, 34, 04, 26, 40
\end{array}
$$

Η διαδικασία είναι ίδια όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Ξεκινώντας από δεξιά, στην πρώτη στήλη προσθέτουμε τους αριθμούς $00 + 40 + 00 = 40$ και γράφουμε το 40 στην τελευταία εξηνταδική θέση του αποτελέσματος. Το ίδιο γίνεται και στην επόμενη στήλη $00 + 26 + 00 = 26$ όπου το 26 μπαίνει στη δεύτερη από το τέλος εξηνταδική θέση του αποτελέσματος. Στην τρίτη στήλη έχουμε $40 + 44 + 40 = 124$. Το 124 αποτελείται από 2 εξηντάδες και 4 μονάδες, άρα σύμφωνα με το Βαβυλωνιακό συμβολισμό γράφεται $2{,}04$. Το 04 μπαίνει στην τρίτη από το τέλος εξηνταδική θέση, ενώ το 2 μεταφέρεται και προστίθεται στην επόμενη στήλη ($4^{η}$ από δεξιά) όπου έχουμε $2 + 06 + 00 + 26 = 34$. Στην προτελευταία στήλη προσθέτουμε $51 + 19 + 44 = 114$, δηλαδή 1 εξηντάδα και 54 μονάδες (1, 54). Το 54 γράφεται στην αντίστοιχη

[157] ό.π., 494.
[158] ό.π., 6κ.ε.

εξηνταδική θέση, ενώ το 1 μεταφέρεται και προστίθεται στην επόμενη στήλη $1 + 11 + 1 = 13$ που είναι η πρώτη εξηνταδική θέση του αποτελέσματος.

Αφαιρέσεις:

Οι αφαιρέσεις εξηνταδικών αριθμών γίνονται και αυτές με παρόμοιο τρόπο, όπως και οι αφαιρέσεις στο δικό μας δεκαδικό σύστημα. Η μόνη διαφορά είναι ότι στην αφαίρεση εξηνταδικών αριθμών δανείζονται εξηντάδες αντί για δεκάδες, όπως φαίνεται στα δυο από τα τρία παραδείγματα που ακολουθούν:[159]

1ο παράδειγμα

$$\begin{array}{rrrrr} & 7, & 49, & 26, & 40 \\ - & 2, & 13, & 20, & 00 \\ \hline & 5, & 13, & 06, & 40 \end{array}$$

2ο παράδειγμα

$$\begin{array}{rrrrr} & & \underline{60} & & \\ & 5, & 36, & 06, & 40 \\ - & 1, & 51, & 06, & 40 \\ \hline & 3, & 45, & 00, & 00 \end{array}$$

3ο παράδειγμα

$$\begin{array}{rrrrr} & & & \underline{60} & \underline{60} \\ & 3, & 45, & 00, & 00 \\ - & 1, & 28, & 53, & 20 \\ \hline & 2, & 16, & 06, & 40 \end{array}$$

Το πρώτο παράδειγμα είναι απλό. Ξεκινώντας από τα δεξιά οι εξηνταδικές θέσεις του αφαιρετέου αφαιρούνται από τις αντίστοιχες εξηνταδικές θέσεις του μειωτέου. Το δεύτερο παράδειγμα είναι πιο περίπλοκο. Στην τρίτη θέση από τα δεξιά το 51 δεν μπορεί να αφαιρεθεί από το 36, οπότε δανείζεται μια εξηντάδα από την τέταρτη θέση. Στο τρίτο παράδειγμα γίνεται το ίδιο δύο φορές στην πρώτη και στη δεύτερη θέση από τα δεξιά.

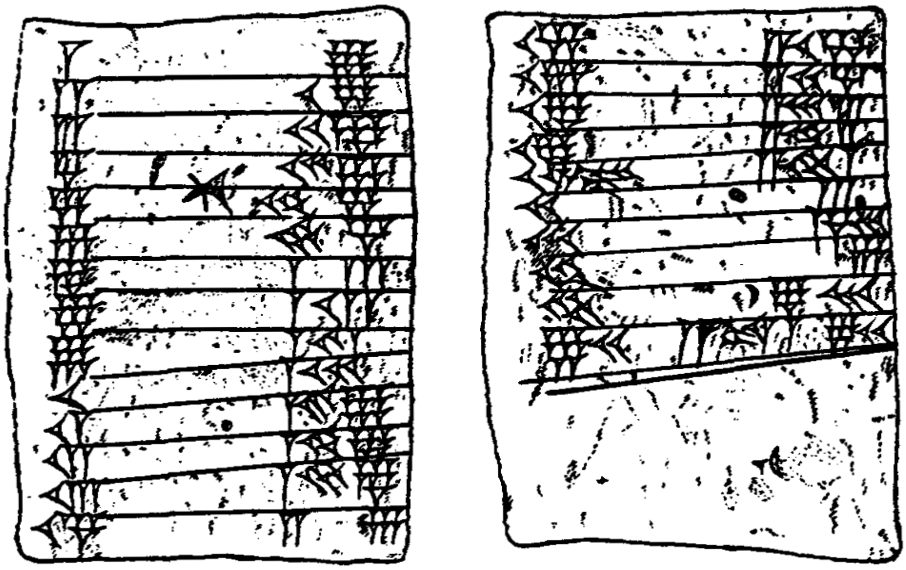
Πολλαπλασιασμοί:

Για την πράξη του πολλαπλασιασμού δεν μπορούμε να καταλήξουμε ποια μέθοδο ακολουθούσαν και εάν είχαν κάποια συγκεκριμένη. Οι πλάκες που έχουν βρεθεί στις αρχαιολογικές ανασκαφές με ασκήσεις πολλαπλασιασμού αποτελούνται μόνο από μια ερώτηση και μια απάντηση χωρίς να έχουν λεπτομέρειες για τους υπολογισμούς.[160]

Παρόλα αυτά έχουν βρεθεί παρά πολλές πλάκες με πίνακες πολλαπλασιασμού από τους οποίους βρίσκανε τα γινόμενα. Ένας πίνακας πολλαπλασιασμού για κάποιον αριθμό *n* δεν περιέχει όλους τους πολλαπλασιασμούς του *n* με τους αριθμούς από το 1 έως το 59, αλλά μόνο τους πολλαπλασιασμούς με τους αριθμούς 1 έως 20 και μετά τους πολλαπλασιασμούς με το 30, το 40 και το 50. Τους πολλαπλασιασμούς με τους υπόλοιπους αριθμούς τους έβρισκαν προσθέτοντας κάθε φορά δυο αριθμούς από έναν τέτοιο πίνακα. Στην εικόνα 18 απεικονίζεται ο πίνακας πολλαπλασιασμού για τον αριθμό 9 σε Βαβυλωνιακή γραφή. Η πλάκα είναι γραμμένη και στις 2 μεριές της

[159] ό.π., 7.
[160] ό.π., 7κ.ε.

όπου αριστερά είναι η μπροστινή όψη, ενώ δεξιά η πίσω όψη. Στον πίνακα 10 φαίνεται η εξηνταδική αναγραφή της.[161]



Εικόνα 18: Πίνακας πολλαπλασιασμού για τον αριθμό 9[162]

Πίνακας 10: Πίνακας πολλαπλασιασμού για το 9 σε εξηνταδική αναγραφή

Μπροστινή όψη		Πίσω όψη	
1	9	15	2, 15
2	18	16	2, 24
3	27	17	2, 33
4	36	18	2, 42
5	45	19	2, 51
6	54	20	3, 00
7	1, 03	30	4, 30
8	1, 12	40	6, 00
9	1, 21	50	7, 30
10	1, 30		
11	1, 39		
12	1, 48		
13	1, 57		
14	2, 06		

161 Ifrah, 2000, 154.
162 Aaboe, 1997, 7.

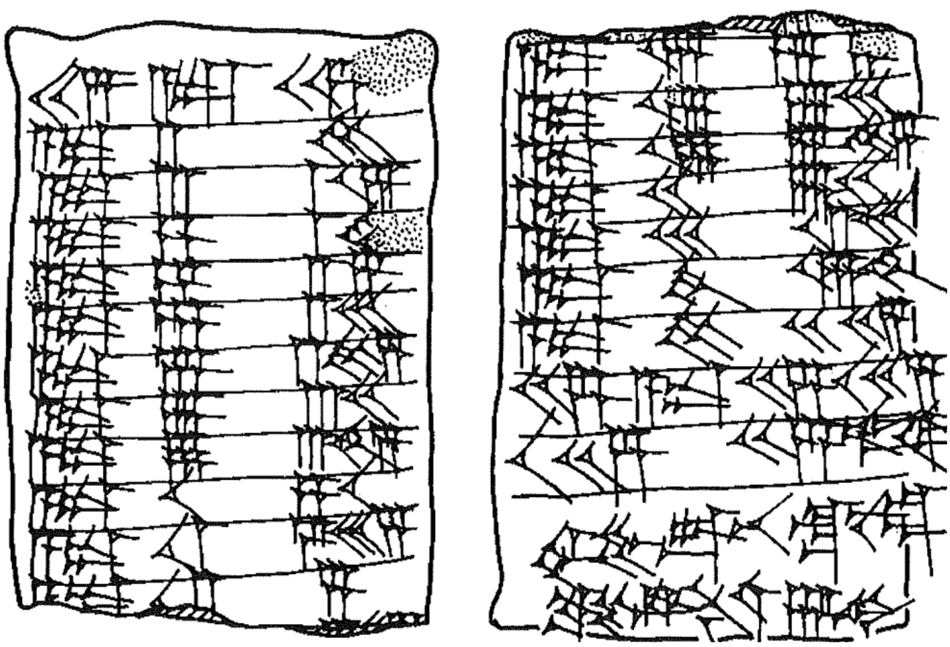
Για παράδειγμα, για να κάνουν τον υπολογισμό του 9 με το 23 μπορούσαν να βρουν από τον προηγούμενο πίνακα το γινόμενο του 9×20 και του 9×3 και να τα προσθέσουν:[163]

$$9 \times 23 = 9 \times (20 + 3) = 9 \times 20 + 9 \times 3 = (180 + 27 =)\ 3,00 + 27 = 3,27$$

Έχουν βρεθεί και ασκήσεις με το γινόμενο μεγαλύτερων αριθμών, όπως για παράδειγμα το γινόμενο του 25 με το 17, 30 (=1050). Η πιο προφανής μέθοδος για έναν Βαβυλωνιακό γραφέα θα ήταν να ανατρέξει στον πίνακα πολλαπλασιασμού για το 25 και να εφαρμόσει την εξής διαδικασία:[164]

$$25 \times 17{,}30 = 25 \times 17 + 25 \times 30 = \ 7{,}05{,}00 + 12{,}30\ = 7{,}17{,}30$$

Πολλές φορές ένας πίνακας πολλαπλασιασμού τελείωνε με τον πολλαπλασιασμό του αριθμού με τον εαυτό του, όπως στην εικόνα 19 όπου απεικονίζεται ο πίνακας πολλαπλασιασμού για το 25 και στον πίνακα 11 η εξηνταδική αναγραφή του.[165]



Εικόνα 19: Πίνακας πολλαπλασιασμού για το 25[166]

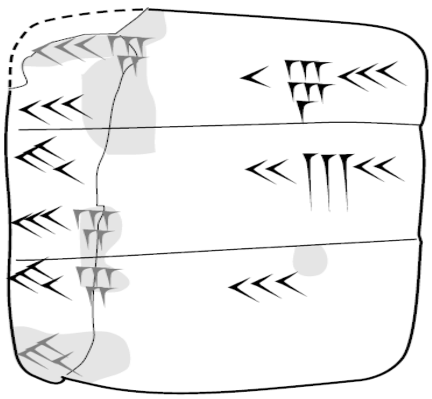
[163] Friberg, ό.π.
[164] ό.π., 8
[165] Robson, 2008, 87.
[166] ό.π., 88.

Πίνακας 11: Πίνακας πολλαπλασιασμού για το 25.

ΕΞΗΝΤΑΔΙΚΗ ΑΝΑΓΡΑΦΗ			
25 επί 1	25	επί 13	5, 25
επί 2	50	επί 14	5, 50
επί 3	1, 15	επί 15	6, 15
επί 4	1, 40	επί 16	6, 40
επί 5	2, 05	επί 17	7, 05
επί 6	2, 30	επί 18	7, 30
επί 7	2, 55	επί 19	7, 55
επί 8	3, 20	επί 20	8, 20
επί 9	3, 45	επί 30	12, 30
επί 10	4, 10	επί 40	16, 40
επί 11	4, 35	επί 50	20, 50
επί 12	5, 00	επί 25	10, 25

Έχουν βρεθεί δύο Βαβυλωνιακές πλάκες με στοιχειώδεις ασκήσεις πολλαπλασιασμού, η *MS 2729* και η *MS 2728.* Οι πλάκες δεν περιέχουν αναλυτικούς υπολογισμούς, αποτελούνται μόνο από μια ερώτηση και μια απάντηση. Στην πλάκα *MS 2729* υπάρχουν τρεις πολλαπλασιασμοί (βλ. εικόνα 20):

1. $35 \cdot 30 = 17{,}30\ (= 1050)$
2. $40 \cdot 35 = 23{,}20\ (= 1400)$
3. $45 \cdot 40 = 30{,}00\ (= 1800)$



Εικόνα 20: Η πλάκα *MS 2729* ζωγραφισμένη από τον Friberg[167]

[167] Friberg, 2007, 14.

Σύμφωνα με τον Friberg σε ένα σύγχρονο πλαίσιο, αυτοί οι τρεις υπολογισμοί θα γίνουν κατανοητοί ως απλές αριθμητικές ασκήσεις πολλαπλασιασμού. Στο πλαίσιο των Βαβυλώνιων μαθηματικών όμως είναι πιο πιθανό να γίνουν κατανοητές ως γεωμετρικές ασκήσεις πολλαπλασιασμού και πιο συγκεκριμένα ως παραδείγματα υπολογισμών εμβαδών ορθογωνίων. Για παράδειγμα, στην εικόνα 20 αν οι αριθμοί στα αριστερά μπορούν να θεωρηθούν ως οι πλευρές ορθογωνίων, τότε οι αριθμοί στα δεξιά είναι τα αντίστοιχα εμβαδά.[168]

Ο συγγραφέας του κειμένου ξεκίνησε στην άσκηση # 1 με δύο σχεδόν ίσους αριθμούς (30, 35 οι πλευρές του ορθογωνίου) που είναι και οι δύο πολλαπλάσια του 5. Στη συνέχεια, στην άσκηση # 2 έκανε τη μικρή πλευρά να είναι ίση με τη μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου από την άσκηση # 1 και η μικρή πλευρά στην άσκηση # 3 ίση με τη μεγάλη πλευρά στην άσκηση # 2. Έτσι, οι τρεις ασκήσεις αλληλοσυνδέονται (βλ. το πρώτο από τα τρία διαγράμματα που εμφανίζονται στην εικόνα 22 παρακάτω).

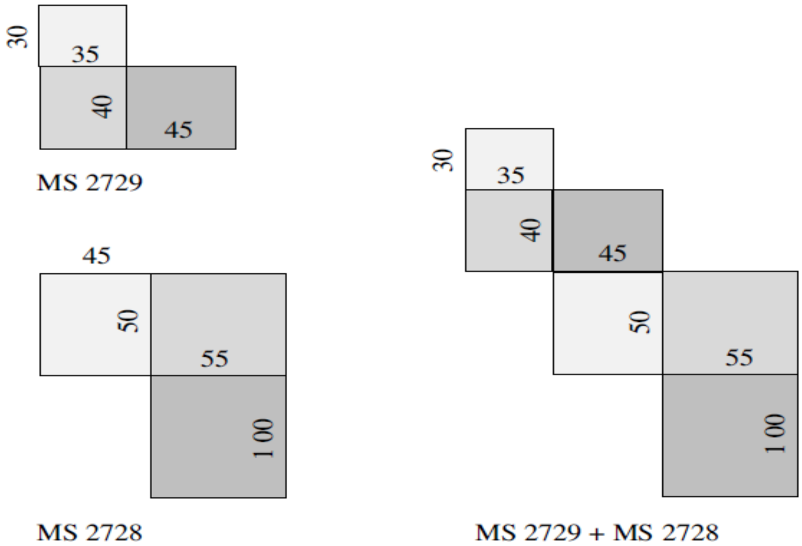
Ένα άλλο κείμενο του ίδιου είδους είναι η πλάκα *MS 2728* (βλ. εικόνα 21). Οι τρεις διαδοχικοί υπολογισμοί σε αυτό το κείμενο είναι:

1. $50 \cdot 45 = 37{,}30\ (= 2250)$
2. $55 \cdot 50 = 45{,}50\ (= 2750)$
3. $1{,}00 \cdot 55 = 55{,}00\ (= 3500)$

Εικόνα 21: Η πλάκα *MS 2728*[169]

[168] ό.π., 13.
[169] Friberg, 2007, 466.

Οι τρεις υπολογισμοί είναι διαδοχικοί με τον ίδιο τρόπο, όπως οι υπολογισμοί στην πλάκα *MS 2729*. Πιο συγκεκριμένα, η μικρή πλευρά στην άσκηση # 2 ίση με τη μεγάλη πλευρά στην άσκηση # 1 και η μικρή πλευρά στην άσκηση # 3 ίση με τη μεγάλη πλευρά στην άσκηση # 2. Έτσι, οι τρεις ασκήσεις στην πλάκα *MS 2728* μπορούν να θεωρηθούν, όπως και στην πλάκα *MS 2729,* ως ασκήσεις υπολογισμού εμβαδών ορθογωνίων οι οποίες αλληλοσυνδέονται (βλ. το δεύτερο διάγραμμα στην εικόνα 22 παρακάτω). Επιπλέον, δεδομένου ότι η μικρή πλευρά του τελευταίου ορθογωνίου στη πλάκα *MS 2729* ισούται με τη μικρή πλευρά του πρώτου ορθογωνίου στην πλάκα *MS 2728*, τα τρία ορθογώνια του κειμένου *MS 2729* μπορούν να συνδεθούν με τα τρία ορθογώνια της πλάκας MS 2728, όπως φαίνεται στο τρίτο διάγραμμα της εικόνας 22.[170]



Εικόνα 22: Γεωμετρική ερμηνεία των πλακών *MS 2728* και *MS 2729*[171]

<u>Διαιρέσεις:</u>

Οι διαιρέσεις στα Παλαιά Βαβυλωνιακά μαθηματικά κείμενα μετατρέπονταν σε πολλαπλασιασμούς. Πολλαπλασίαζαν το διαιρετέο με τον αντίστροφο (*igi*) του διαιρέτη. Οι Βαβυλώνιοι για να υπολογίσουν τη διαίρεση $30/16$ υπολόγιζαν τον αντίστροφο του 16 που είναι το 3, 45 και τον πολλαπλασίαζαν με το 30:[172]

$$30/16 = 30 \times igi\ 16 = 30 \times 0;3{,}45 = 30 \times 0;3 + 30 \times 0;0{,}45$$

$$= 1;30{,}00 + 0;22{,}30 = 1;52{,}30 \left(= 1 \times 60^0 + \frac{52}{60} + \frac{30}{60^2} = 1{,}875\right)$$

[170] Friberg, 2007, 13.
[171] Friberg, 2007, 15.
[172] Friberg, ό.π., 8.

Για να γίνονται πιο εύκολα αυτοί οι υπολογισμοί είχαν κατασκευάσει πίνακες αντιστρόφων. Ένας από τους πίνακες ο οποίος εμφανίζεται συχνά στις Βαβυλωνιακές πλάκες που έχουν βρεθεί περιέχει τους αντίστροφους των αριθμών από το 2 μέχρι το 81 και έχει μεταφραστεί από τον Neugebauer:[173]

Col. I	Col. II
2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7,30
9	6,40
10	6
12	5
15	4

Col. I	Col. II
16	3,45
18	3,20
20	3
24	2,30
25	2,24
27	2,13,20
30	2
32	1,52,30
36	1,40
40	1,30

Col. I	Col. II
45	1,20
48	1,15
50	1,12
54	1, 6 ,40
1	1
1,4	56,15
1,12	50
1,15	48
1,20	45
1,21	44,26,40

Εικόνα 23: Πίνακας αντιστρόφων[174]

Ο πίνακας στην εικόνα 23 αποτελείται από αριθμούς διατεταγμένους σε 2 στήλες στη Col I αριστερά και στη Col II δεξιά. Η δομή αυτού του πίνακα γίνεται κατανοητή όταν υπολογίσουμε σε κάθε γραμμή το γινόμενο του αριθμού από την αριστερή στήλη με τον αριθμό από τη δεξιά στήλη. Ξεκινώντας από την πρώτη γραμμή έχουμε :[175]

$$2 \times 30 = 60 = 1,0$$

$$3 \times 20 = 60 = 1,0$$

$$4 \times 15 = 60 = 1,0$$

$$\dots$$

$$8 \times 7,30 = 60^2 = 1,0,0$$

$$9 \times 6,40 = 60^2 = 1,0,0$$

$$\dots$$

[173] Neugebauer, 1990, 66
[174] Aaboe, 1997, 10.
[175] ό.π., 11.

Συνεχίζοντας τους πολλαπλασιασμούς και για τις 30 γραμμές του πίνακα θα παρατηρήσουμε ότι το αποτέλεσμα είναι πάντα μια δύναμη του 60. Να υπενθυμίσουμε σε αυτό το σημείο ότι οι Βαβυλώνιοι οποιαδήποτε δύναμη του 60 την συμβόλιζαν με ένα κάθετο καρφί, δηλαδή το «1» στο σύγχρονο συμβολισμό. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι πρόκειται για έναν πίνακα αντιστρόφων. Σε κάθε γραμμή ο αριθμός στη δεξιά στήλη είναι ο αντίστροφος του αριθμού στην αριστερή στήλη γραμμένοι ως εξηνταδικά κλάσματα:[176]

$$\frac{1}{2} = 0;30 \qquad \frac{1}{3} = 0;20 \qquad \frac{1}{4} = 0;15 \qquad \frac{1}{1{,}21} = 0;0,44,26,40.$$

Αν παρατηρήσουμε προσεκτικά τον παραπάνω πίνακα αντιστρόφων θα διαπιστώσουμε ότι δεν υπάρχουν αντίστροφοι αριθμοί για το 7, το 11, το 13, το 19, το 23 και για τα πολλαπλάσιά τους. Την έλλειψη αυτών των αριθμών από τον πίνακα αντιστρόφων θα την κατανοήσουμε αν αναλύσουμε το 60 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:[177]

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ και ως εκ τούτου κάθε δύναμη γράφεται : $60^n = 2^{2n} \times 3^n \times 5^n$.

Έτσι, εάν ένας ακέραιος περιέχει έναν πρώτο παράγοντα εκτός από το 2, το 3 και το 5 δεν μπορεί να διαιρέσει το 60, ούτε κάποια άλλη δύναμη του 60. Από την άλλη εάν περιέχει ως πρώτους παράγοντες μόνο τους παράγοντες 2, 3 και 5 μπορούμε να βρούμε μια δύναμη του 60 την οποία να διαιρεί. Για να το κατανοήσουμε αυτό καλύτερα ας δούμε το παρακάτω παράδειγμα με τον αριθμό 24.

Το 24 αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως εξής: $24 = 2^3 \times 3$ (1).

Για να φέρουμε το δεξιό μέλος της σχέσης (1) στη μορφή $2^{2n} \times 3^n \times 5^n$ πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (1) με το $2 \times 3 \times 5^2 = 150$ και έχουμε:

$$24 \times 150 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 = 60^2.$$

Στο Βαβυλωνιακό συμβολισμό γίνεται: $24 \times 2{,}30 = 1{,}0{,}0$, παρατηρώντας τον πίνακα των αντιστρόφων θα δούμε ότι ο αντίστροφος του 24 είναι το 2,30.[178]

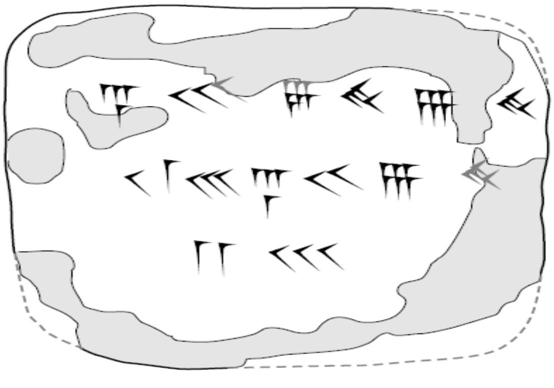
Έτσι, στον πίνακα αντιστρόφων δεν εμφανίζονται οι αριθμοί όπως το 7, το 11, το 13 κ.λπ. διότι περιέχουν πρώτους παράγοντες διαφορετικούς από το 2, το 3 και το 5. Τους αριθμούς αυτούς ο Neugebauer τους ονόμασε «μη κανονικούς» και τους υπόλοιπους, δηλαδή αυτούς που έχουν ως πρώτους παράγοντες τους αριθμούς 2, 3 και 5 τους ονόμασε «κανονικούς». Η διαφορά των κανονικών αριθμών από τους μη κανονικούς έγκειται στο ότι οι αντίστροφοι των κανονικών αριθμών μπορούν να εκφραστούν σε εξηκονταδικά κλάσματα με πεπερασμένο αριθμό δεκαδικών θέσεων.[179]

[176] Neugebauer, ό.π. 67.
[177] Aaboe, ό.π.
[178] ό.π.
[179] Neugebauer, ό.π.

Καταλήγοντας, για να εκτελέσουν οι Βαβυλώνιοι τη διαίρεση $3/8$, έβρισκαν από τον πίνακα αντιστρόφων τον αντίστροφο του 8 που είναι ο 0;7,30 και στη συνέχεια έβρισκαν το γινόμενο $3 \times 0; 7,30$ από έναν πίνακα πολλαπλασιασμού.

Φυσικά, δεν είναι πάντα δυνατόν να μετατραπεί ένα πρόβλημα διαίρεσης σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα πολλαπλασιασμού. Αυτό συμβαίνει όταν ο διαιρέτης είναι ένας κανονικός εξηνταδικός αριθμός «πολλών εξηνταδικών θέσεων». Ένα παράδειγμα τέτοιου είδους μπορεί να βρεθεί στην πλάκα *MS 3871* (βλ. εικόνα 24) και αποτελεί το μοναδικό γνωστό παράδειγμα Βαβυλωνιακής διαίρεσης. Στην πλάκα γίνεται η διαίρεση του αριθμού 11,34,26,40 με τον αριθμό 4,37,46,40 όμως δεν δίνονται λεπτομέρειες για τον αλγόριθμο διαίρεσης, αλλά είναι πιθανό η διαίρεση να επιτεύχθηκε με τη χρήση μιας απλής μεθόδου παραγοντοποίησης.[180]

Εικόνα 24: Η πλάκα *MS 3871*[181]



Εικόνα 25: Η πλάκα *MS 3871* ζωγραφισμένη από τον Friberg[182]

[180] Friberg, 2007, 8.
[181] Friberg, 2007, 466.
[182] Friberg, 2007, 22.

Στην πλάκα *MS 3871* είναι χαραγμένοι 3 εξηνταδικοί αριθμοί:

1. 4,37,46,40
2. 11,34,26,40
3. 2,30

Οι τρεις αριθμοί μπορούν να παραγοντοποιηθούν με τη χρήση του αλγορίθμου *trailing part* (θα αναλυθεί παρακάτω). Οι αριθμοί στο δικό μας συμβολισμό μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$4{,}37{,}46{,}40 = 2^6 \cdot 5^6$$

$$11{,}34{,}26{,}40 = 2^5 \cdot 5^7$$

$$2{,}30 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Έτσι, οι τρεις αριθμοί είναι κανονικοί εξηνταδικοί αριθμοί και έχουμε

$$4{,}37{,}46{,}40 \cdot 2{,}30 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5^7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot\ 11{,}34{,}26{,}40 = 60 \cdot 11{,}34{,}26{,}40$$

Σύμφωνα με τον Friberg η παραπάνω ανάλυση των αριθμών της πλάκα *MS 3871* δείχνει ότι το κείμενο είναι μια άσκηση διαίρεσης. Πιο συγκεκριμένα, ο γραφέας θα έπρεπε να υπολογίσει ποιος αριθμός θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με τον 4,37,46,40 για να δώσει 11,34,26,40; Η καταγεγραμμένη απάντηση είναι 2,30. Πιθανώς ο γραφέας χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο *trailing part* έκανε τους παρακάτω υπολογισμούς:[183]

4,37,4**6,40**	0;09	11,34,26,40
41,40	0;36	1,44,10
25	0;2,24	1,02,30
1		2,30

Ένας αλγόριθμος διαίρεσης όπως αυτός, ισοδυναμεί με την εύρεση μιας παραγοντοποίησης του αντιστρόφου του b = 4,37,46,40 και τον πολλαπλασιασμό του α = 11,34,26,40 με τον αντίστροφο κάθε φορά. Για παράδειγμα, ο b τελειώνει σε 6,40 που ο αντίστροφος του είναι το 0;09, οπότε πολλαπλασιάζουμε τον b και τον α με το 0;09 και προκύπτει αντίστοιχα $0;09 \cdot b = 41{,}40$ και $0;09 \cdot \alpha = 1{,}44{,}10$. Ο αλγόριθμος λειτουργεί κάθε φορά που το b είναι ένας κανονικός εξηνταδικός αριθμός[184] (αναλυτικά ο αλγόριθμός *trailing part* παρουσιάζεται παρακάτω).

[183] Friberg, 2007, 23.

[184] Friberg, 2007, 23.

Παραγοντοποίηση με τη χρήση του αλγορίθμου «trailing part»:

Η πλάκα *MS 2242* (βλ. εικόνα 26 παρακάτω) είναι ένα μικρό πήλινο δισκίο χαραγμένο με μια ακολουθία έξι εξηνταδικών αριθμών σε φθίνουσα σειρά. Η πρώτη καταχώρηση είναι ένας αριθμός 8 θέσεων, ενώ ο τελευταίος είναι ένας αριθμός με 2 εξηνταδικές θέσεις. Και οι έξι αριθμοί έχουν στις δύο τελευταίες θέσεις τους τον αριθμό 3,45. Οι έξι αριθμοί είναι:[185]

1. 46,20,54,51,30,14,03,45
2. 12,21,34,37,44,03,45
3. 3,17,45,14,03,45
4. 52,44,03,45
5. 14,03,45
6. 3,45

Εικόνα 26: Η πλάκα *MS 2242*[186]

Σύμφωνα με τον Friberg είναι πιθανό αυτό το κείμενο να είναι η απάντηση ενός μαθητή σε μια εργασία που του δόθηκε από το δάσκαλό του:[187]

«Κάνε παραγοντοποίηση τον κανονικό εξηνταδικό αριθμό πολλών θέσεων, 46,20,54,51,30,14,03,45.»

Είναι σχεδόν βέβαιο ότι η μέθοδος που χρησιμοποιούσε ο μαθητής ήταν ο Βαβυλωνιακός αλγόριθμος «*trailing part*». Για να δούμε πώς λειτουργεί η μέθοδος, εξετάζουμε αρχικά τον πρώτο αριθμό, 46,20,54,51,30,14,0**3,45**. Παρατηρούμε ότι στις 2 τελευταίες εξηνταδικές θέσεις του αριθμού βρίσκεται ο αριθμός 3,45 (*trailing part*), ο οποίος είναι ένας κανονικός εξηνταδικός αριθμός και περιέχεται στον πίνακα αντιστρόφων (βλ. εικόνα 23 παραπάνω). Ο αριθμός 3,45 μπορεί να αφαιρεθεί από το τελικό μέρος του πρώτου αριθμού μέσω του πολλαπλασιασμού με το 0;16 που είναι

185 Friberg, 2007, 24.
186 Friberg, 2007, 466.
187 Friberg, 2007, 24.

ο αντίστροφος του 3,45 και $0;16 \cdot 3{,}45 = 1{,}00$. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της πλάκας *MS 2242* ο αριθμός στη δεύτερη γραμμή υπολογίστηκε ως εξής:[188]

$$46{,}20{,}54{,}51{,}30{,}14{,}03{,}45 \cdot 0;16 = 12{,}21{,}34{,}37.44{,}03{,}45$$

Ο νέος αριθμός, επίσης, έχει στο τελικό μέρος του τον αριθμό 03,45. Ως εκ τούτου, η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί. Η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί χωρίς να αλλάξει κάτι εφόσον κάθε νέος αριθμός που υπολογίζεται εμφανίζει ως «*trailing part*» τον αριθμό 3,45. Στο παράδειγμα της πλάκας *MS 2242*, η διαδικασία επαναλήφθηκε 5 φορές. Κάθε φορά, ο νέος, μειωμένος αριθμός είχε στο τελικό μέρος του τον αριθμό 03,45. Ως εκ τούτου, τα διαδοχικά βήματα του αλγορίθμου ήταν:[189]

46,20,54,51,30,14,0**3,45**	$\times\ 0;16$
12,21,34,37,44,0**3,45**	$\times\ 0;16$
3,17,45,14,0**3,45**	$\times\ 0;16$
52,44,0**3,45**	$\times\ 0;16$
14,0**3,45**	$\times\ 0;16$
3,45	

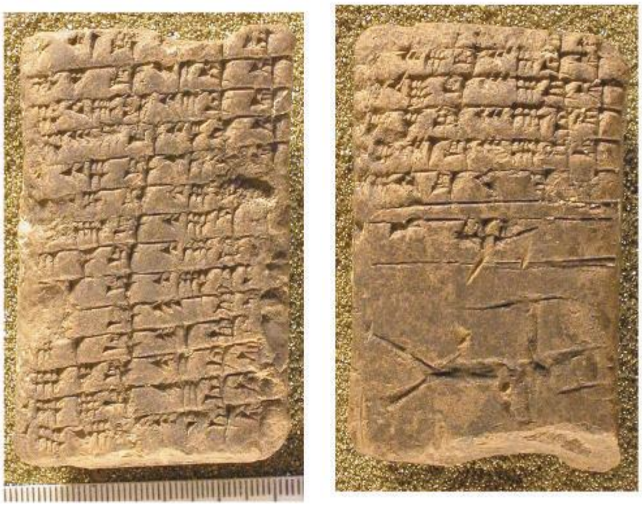
Δεδομένου ότι ο παράγοντας 3,45 αφαιρέθηκε κάθε φορά που επαναλήφθηκε η διαδικασία, προκύπτει ότι ο αριθμός 46,20,54,51,30,14,03,45 περιείχε το 3,45 ως παράγοντα 6 φορές. Με άλλα λόγια, η εφαρμογή του αλγόριθμου «*trailing part*» στην πλάκα *MS 2242* είχε ως αποτέλεσμα την αποτελεσματική παραγοντοποίηση του αριθμού 46,20,54,51,30,14,03,45. Επιπλέον από το συγκεκριμένο παράδειγμα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο αριθμός 46,20,54,51,30,14,03,45 είναι η 6η δύναμη του 3,45. Αυτό σημαίνει ότι οι 6 αριθμοί που καταγράφοντα στην πλάκα *MS 2242* είναι οι πρώτες 6 δυνάμεις του 3,45 σε φθίνουσα σειρά.[190]

<u>Εξαγωγή ριζών:</u>

Οι ιστορικοί μελετώντας τα κείμενα της Παλαιάς Βαβυλωνιακής περιόδου ανακάλυψαν την αριθμητική επιδεξιότητα των γραφέων εκείνης της εποχής. Βρήκαν πίνακες με τετράγωνα, όπως αυτός της πλάκας *MS 2794* (βλ. εικόνα 27). Η πλάκα *MS 2794* περιέχει τα τετράγωνα των αριθμών 1, 2, ..., 19, 20, 30, 40, 50. Επίσης, έχουν βρεθεί πίνακες με τετραγωνικές ρίζες, όπως η πλάκα *MS 2185* που περιέχει τις τετραγωνικές ρίζες από το 21, ..., 40 (βλ. εικόνα 28). Στις εικόνες 27 και 28 παρακάτω παρουσιάζονται οι δύο όψεις των πλακών *MS 2794* και *MS 2185* αντίστοιχα.

[188] Friberg, 2007, 24.
[189] Friberg, ό.π.
[190] ό.π.

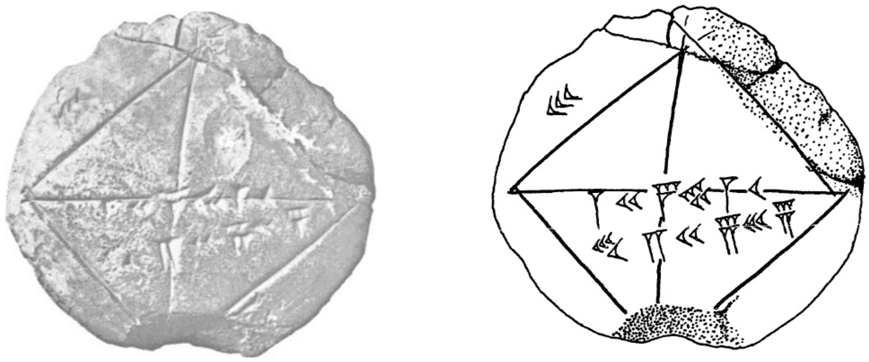
Εικόνα 27: Η πλάκα MS 2794[191]



Εικόνα 28: Η πλάκα MS 2185[192]

Ακόμη, έχουν βρεθεί προβλήματα όπου διακρίνεται ένα ενδιαφέρον για προσεγγίσεις μη κανονικών αριθμών. Αυτό επιβεβαιώνεται από τις πινακίδες που έχουν βρεθεί, όπου υπολογίζονται οι αντίστροφοι των αριθμών 7, 11, 13, 14 και 17 με μια πεπερασμένη έκφραση σε εξηνταδικά κλάσματα. Αυτό το ενδιαφέρον των Βαβυλωνίων για τα προβλήματα προσεγγίσεων επαληθεύεται από μια μικρή πινακίδα που τώρα βρίσκεται στη Βαβυλωνιακή συλλογή του Πανεπιστημίου του Yale (YBC 7289).[193]

[191] Friberg, 2007, 468.
[192] Friberg, ό.π.
[193] Neugebauer, ό.π., 69.



Εικόνα 29: Η πλάκα YBC 7289[194]

Όπως βλέπουμε στην εικόνα 29, στην πινακίδα YBC 7289 είναι σχεδιασμένο ένα τετράγωνο υπό κλίση και οι δυο διαγώνιοί του. Στην πάνω αριστερή πλευρά του τετραγώνου εμφανίζεται ο αριθμός 30, ενώ στη διαγώνιο οι αριθμοί 1;24,51,10 (πάνω) και 42;25,35 (κάτω). Το νόημα αυτών των αριθμών γίνεται κατανοητό αν πολλαπλασιάσουμε το 1; 24,51,10 με το 30, τότε προκύπτει ο τρίτος αριθμός:

$$1;24{,}51{,}10 \times 30 = 1;0{,}0 \times 30 + 0;24 \times 30 + 0;0{,}51 \times 30 + 0;0{,}0{,}10 \times 30 =$$

$$30;0,0 + 12;0,0 + 0;25{,}30 + 0;0{,}5 = 42;25{,}35$$

Έτσι, αν το 30 = a είναι η πλευρά του τετραγώνου, όπως φαίνεται από το σχήμα και το 42;25,35 = c η διαγώνιος, τότε από το θεώρημα του Πυθαγόρα $c^2 = 2a^2$, άρα $c = a\sqrt{2}$ από όπου συμπεραίνουμε ότι ο εξηνταδικός αριθμός 1;24,51,10 πρέπει να είναι μια προσέγγιση του $\sqrt{2}$. Πράγματι αν μετατρέψουμε τον αριθμό 1;24,51,10 στο δεκαδικό σύστημα έχουμε:

$$1;24{,}51{,}10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1{,}41421229\ldots$$

που είναι πολύ καλή προσέγγιση του $\sqrt{2}$.

Καταλήγοντας, από αυτή την πλάκα που περιέχει ένα σχήμα και τρεις αριθμούς μαθαίνουμε ότι οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν ότι η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι $\sqrt{2}$ φορές την πλευρά του. Αυτό υποδεικνύει ότι γνώριζαν τουλάχιστον μια ειδική περίπτωση της Πυθαγόρειας σχέσης. Τέλος, μαθαίνουμε ότι οι Βαβυλώνιοι κατείχαν αριθμητικές τεχνικές που ήταν ικανές να επιτύχουν μια πολύ καλή προσέγγιση του $\sqrt{2}$.[195]

[194] Aaboe, ό.π., 26κ.ε.
[195] Aaboe, ό.π., 25κ.ε.

2.3 Τα Βαβυλωνιακά μαθηματικά κείμενα

Οι πηγές των Βαβυλωνιακών μαθηματικών για τους ιστορικούς είναι οι πήλινες πινακίδες με κείμενα σφηνοειδούς γραφής που έχουν βρεθεί στις αρχαιολογικές ανασκαφές. Από τις πεντακόσιες χιλιάδες Βαβυλωνιακές πλάκες που έχουν βρεθεί σχεδόν πεντακόσιες διαθέτουν άμεσο μαθηματικό ενδιαφέρον. Οι πινακίδες αυτές βρίσκονται διασκορπισμένες σε συλλογές διαφόρων μουσείων και πανεπιστημίων.[196] Στα τέλη της δεκαετίας 1920 – 1930 ξεκίνησε η μελέτη, η αποκρυπτογράφηση και η ερμηνεία των σφηνοειδών μαθηματικών κειμένων μέσα από τις έρευνες του διακεκριμένου ερευνητή των μαθηματικών και της αστρονομίας της Μεσοποταμίας, του Αυστριακού Otto Neugebauer (1899 - 1990).[197]

Σύμφωνα με τον Neugebauer, η δημοσίευση πινακίδων είναι μια δύσκολη δουλειά. Οι ερευνητές που ασχολούνται με την ιστορία της επιστήμης της Μεσοποταμίας έρχονται αντιμέτωποι με δυσκολίες οι οποίες αφορούν στο γεγονός ότι οι πινακίδες είναι συνήθως σπασμένες και τα κομμάτια μιας πινακίδας πιθανόν να βρίσκονται σε διαφορετικά μουσεία. Παρακάτω φαίνονται, όπως αφηγείται ο ίδιος ο Neugebauer, οι δυσκολίες και τα βήματα που απαιτούνται μέχρι τη δημοσίευση ενός σφηνοειδούς κειμένου:[198]

> *«Δεν υπάρχει απλή μέθοδος δημοσίευσης. Στις περισσότερες περιπτώσεις οι φωτογραφίες δεν αρκούν, ακόμη και αν το κόστος τους δεν ήταν απαγορευτικό. Οι πινακίδες είναι συχνά χαραγμένες, όχι μόνο από τις δύο πλευρές αλλά και στα πλάγια. Μόνο με πολλαπλές φωτογραφίες τραβηγμένες με μεταβλητή κατεύθυνση φωτισμού θα επιτυγχανόταν ικανοποιητικό αποτέλεσμα. Το κόστος λοιπόν και η πραγματική ανάγκη οδήγησαν στην πρακτική της αντιγραφής με το χέρι. Πολλοί διαφορετικοί τρόποι αντιγραφής αναπτύχθηκαν από μεμονωμένους μελετητές, αρχίζοντας από μια σχεδόν σχηματική αναπαράσταση των συμβόλων και φτάνοντας στην ακριβολογική αναπαράσταση όλων των λεπτομερειών. […]. Η ιδανική μέθοδος δημοσίευσης θα ήταν βέβαια η άμεση αντιγραφή από το κείμενο. Στην πράξη όμως, αυτό συχνά αποκλείεται, επειδή το άμεσα συσχετισμένο υλικό είναι διασκορπισμένο σε ολόκληρο τον κόσμο. Ακόμη και αν κάποιος διαθέτει μεγάλη πείρα δεν μπορεί να αντιγράψει σωστά ένα κείμενο χωρίς την κατανόηση του περιεχομένου του. Σχεδόν κανένα κείμενο δεν γίνεται κατανοητό με την πρώτη προσπάθεια. Έτσι χρειάζεται να γίνουν επανειλημμένες αντιπαραβολές, συγκολλήσεις με άλλα κομμάτια και συγκρίσεις με άλλα κείμενα. Απαιτείται δουλειά χρόνων για να δημοσιευτεί ικανοποιητικά μια μικρή ομάδα από μερικές εκατοντάδες πινακίδες. Και καμιά δημοσίευση δεν είναι οριστική. Πάντοτε θα συμβεί ένα νέο και καθαρό μυαλό να βρει τη λύση ενός αινίγματος που διέφυγε του εκδότη, όσο μπορεί να φαίνεται προφανής εκ των υστέρων.»*[199]

---

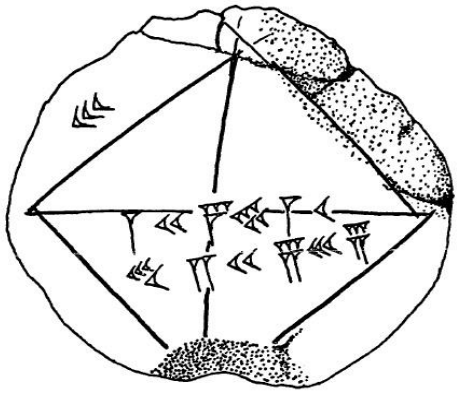
196 Neugebauer, 1990, 63κ.ε.
197 Høyrup, 2002, 1κ.ε.
198 Neugebauer, ό.π., 98κ.ε.
199 Μετάφραση από Χ.Ζ. και Ι.Α.

Όπως αναφέρει ο Neugebauer, οι ερευνητές χρησιμοποιούν τη μέθοδο της αντιγραφής με το χέρι. Για να κατανοήσουμε καλύτερα τα όσα αναφέρονται παραπάνω παρατίθεται το ακόλουθο παράδειγμα. Στην εικόνα 30 απεικονίζεται η πλάκα YBC 7289 που μελετήσαμε στην ενότητα 2.2.2. Το όνομα της συγκεκριμένης πινακίδας σημαίνει ότι πρόκειται για την πινακίδα με αύξοντα αριθμό 7289 στη Βαβυλωνιακή συλλογή του Πανεπιστημίου Yale και χρονολογείται περίπου το 1800 με 1600 π.Χ. Το περιεχόμενο αυτού του δισκίου μεταφράστηκε για πρώτη φορά και μεταγράφηκε από τον Otto Neugebauer και τον Abraham Sachs στο βιβλίο τους *Mathematical Cuneiform Texts (New Haven, CT: American Oriental Society)* το 1945.

Εικόνα 30: Η *πλάκα YBC 7289*[200]

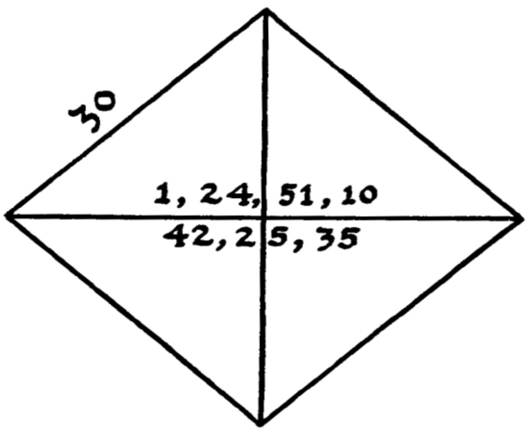
Παρακάτω φαίνεται μια αναπαράσταση της πινακίδας που έχει κάνει ο ιστορικός Asger Aaboe στο βιβλίο του *Episodes from the Early History of Mathematics (The Mathematical Association of America, 1997)*. Είναι φανερό ότι η αναπαράσταση είναι πιστή, καθώς σε αυτήν απεικονίζονται ακόμη και τα κατεστραμμένα τμήματα της πινακίδας.

200 https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/the-best-known-old-babylonian-tablet



Εικόνα 31: Αναπαράσταση της πλάκας *YBC 7289*[201]

Το επόμενο βήμα είναι η μετάφραση της πινακίδας, όπως γίνεται φανερό στην εικόνα 32. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η πινακίδα απεικονίζει ένα τετράγωνο υπό κλίση, τις δύο διαγώνιές του, με κάποια σύμβολα χαραγμένα κατά μήκος της μιας πλευράς και κάτω από την οριζόντια διαγώνιο και επομένως η μετάφρασή της δεν παρουσιάζει μεγάλες δυσκολίες.



Εικόνα 32: Μετάφραση της πλάκας *YBC 7289*[202]

Εδώ ολοκληρώνεται το στάδιο της ανάγνωσης της πινακίδας και έπεται η ερμηνεία της (βλέπε ενότητα 2.2.2).

[201] https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/the-best-known-old-babylonian-tablet#refs
[202] Aaboe, 1997, 27.

2.3.1 Τα είδη των κειμένων

Σχεδόν όλες οι πινακίδες μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο χρονολογικές περιόδους. Τα περισσότερα μαθηματικά κείμενα ανήκουν στη γνωστή ως Παλαιοβαβυλωνιακή Περίοδο (περίπου 1800 – 1600 π.Χ.) δηλαδή στην περίοδο της δυναστείας του Χαμουραμπί. Η δεύτερη ομάδα που είναι πολύ μικρότερη ανήκει στην περίοδο των Σελευκίδων, των διαδόχων του Μεγάλου Αλεξάνδρου που καλύπτει περίπου τους τρεις τελευταίους αιώνες π.Χ. Ο προσδιορισμός αυτών των χρονολογιών στηρίζεται σε απόλυτα έγκυρες παλαιογραφικές και γλωσσολογικές βάσεις. Το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ των περιόδων είναι μεγαλύτερο των χιλίων ετών και αυτό έχει αντίκτυπο τόσο στη γλώσσα όσο και στη μορφή των σημείων. Επομένως, κάποιος μπορεί να κατατάξει με σιγουριά μια πλάκα είτε στη μία είτε στην άλλη περίοδο. Όσον αφορά το περιεχόμενο των κειμένων δεν υπάρχουν μεγάλες αλλαγές μεταξύ των δυο περιόδων. Η μόνη ουσιαστική διαφορά που υποδηλώνει κάποια πρόοδο έγκειται στη χρήση του μηδενικού συμβόλου στα Σελευκιδικά κείμενα.[203]

Τα μαθηματικά κείμενα μπορούμε να τα κατατάξουμε σε δύο μεγάλες ομάδες: στα «κείμενα πίνακες» και στα «κείμενα προβλήματα». Η κατηγορία των κειμένων που περιέχουν πίνακες περιλαμβάνει τους πίνακες πολλαπλασιασμού (βλ. ενότητα 2.2.2), πίνακες με ζευγάρια αντιστρόφων (βλ. ενότητα 2.2.2), πίνακες τετραγώνων, καθώς και πίνακες με μετρολογίες (βλ. 2.1.2 και 2.1.3.).[204] Ο αριθμός των γνωστών κειμένων πινάκων σήμερα ξεπερνάει τις διακόσιες πινακίδες και τα περισσότερα από αυτά είναι σχολικά κείμενα δηλαδή ασκήσεις γραμμένες από μαθητευόμενους γραφείς.[205]

Η δεύτερη κατηγορία, τα «κείμενα προβλήματα», περιλαμβάνει μια μεγάλη ποικιλία μαθηματικών προβλημάτων αλγεβρικών και υπολογιστικής γεωμετρίας (όπως αναφέρουν κάποιοι ιστορικοί των μαθηματικών). Ακόμα και στις λίγες περιπτώσεις που περιλαμβάνονται γεωμετρικά σχήματα ο στόχος πάντα είναι να βρεθούν οι διαστάσεις ορισμένων πλευρών ή επιφανειών όταν δίνονται κάποιες άλλες διαστάσεις.[206] Τα κείμενα που περιλαμβάνουν προβλήματα μπορούν να υποδιαιρεθούν σε δυο κύριες κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία είναι αυτή όπου το κείμενο αρχίζει με ένα πρόβλημα και ύστερα προχωράει στη λύση του παραθέτοντας αναλυτικά τα βήματα που ακολουθεί (παραδείγματα 1 και 5 παρακάτω). Αυτά τα κείμενα συχνά τελειώνουν με τη φράση «τέτοια είναι η διαδικασία». Η δεύτερη κατηγορία είναι συλλογές προβλημάτων παρόμοιου είδους, παιδαγωγικά διατεταγμένα κατά σειρά αυξανόμενης δυσκολίας (παραδείγματα 2 και 4 παρακάτω).[207]

[203] Neugebauer, ό.π., 63.
[204] Høyrup, 2002, 8.
[205] Neugebauer, ό.π., 64κ.ε.
[206] Høyrup, 2002, 8.
[207] Neugebauer, 1990, 77.

Βαβυλωνιακή γεωμετρία:

Η γεωμετρία των Βαβυλωνίων σύμφωνα με τον Neugebauer λειτουργούσε ως πρόσχημα για τα αλγεβρικά προβλήματα αν και υπάρχει εκτεταμένη χρήση της γεωμετρικής ορολογίας. Αυτό φαίνεται από τα προβλήματα όπου προστίθενται εμβαδά και μήκη ή πολλαπλασιάζονται εμβαδά κατά παράβαση της γεωμετρικής αίσθησης.[208] Σκοπός ενός γεωμετρικού προβλήματος είναι ο υπολογισμός κάποιας αριθμητικής ποσότητας, όπως για παράδειγμα του μήκους, του εμβαδού ή του όγκου. Επίσης στα γεωμετρικά προβλήματα διατυπώνεται το πρόβλημα και στη συνέχεια παρουσιάζεται η λύση του σε βήματα. Γι' αυτό οι ιστορικοί κατατάσσουν τη Βαβυλωνιακή γεωμετρία στον κλάδο που ονομάζεται «μετρητική» και όχι στον κλάδο της «γεωμετρίας» αφού δεν ήταν αποδεικτική, αλλά καθαρά υπολογιστική. Δεν διατύπωναν θεωρήματα και δεν έχει βρεθεί τίποτα που να ισοδυναμεί με «απόδειξη» όσον αφορά τις σχέσεις ανάμεσα σε γεωμετρικά μεγέθη.[209]

Ωστόσο, οι ιστορικοί υποστηρίζουν ότι υπάρχουν περιπτώσεις όπου δε δικαιολογείται η αμφιβολία για τη σωστή ερμηνεία γεωμετρικών σχέσεων. Οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν την Πυθαγόρεια σχέση για το ορθογώνιο τρίγωνο (βλ. παράδειγμα 1). Επιπλέον, υπάρχουν οι σωστοί τύποι εμβαδού για τα γεωμετρικά σχήματα, όπως τρίγωνα και τραπέζια (βλ. παράδειγμα 2) και κακές προσεγγίσεις του εμβαδού και της περιμέτρου ενός κύκλου που οφείλονται στη λάθος προσέγγιση του αριθμού π (θεωρούσαν το $\pi = 3$ όπως στο παράδειγμα 3 παρακάτω), αν και ορισμένα κείμενα που βρέθηκαν πιο πρόσφατα υποδεικνύουν τη χρήση καλύτερων τιμών για το π.[210] Επίσης βρίσκουμε τύπους που άλλοι είναι σωστοί και άλλοι όχι για τους όγκους διαφόρων στερεών, όπως των πρισμάτων και των κυλίνδρων που τους υπολόγιζαν πολλαπλασιάζοντας το εμβαδόν της βάσης με το ύψος.[211]

Παράδειγμα 1

Αυτό το πρόβλημα χρονολογείται στην Παλαιά Βαβυλωνιακή Περίοδο, όπου εμφανίζεται ως Πρόβλημα 9 στην πλάκα BM 85196, μία πλάκα με διαστάσεις 19 × 12,3 cm που περιέχει 18 προβλήματα με διάφορα θέματα. Η πλάκα δημοσιεύθηκε αρχικά από τον Thureau-Dangin [1935] σε αντιγραφή, φωτογραφία, μεταγραφή, μετάφραση και σχολιασμό. Στη συνέχεια συμπεριλήφθηκε από τον Neugebauer στον τόμο 2 του *Mathematische Keilschrift Texte* (1935-1937). Μικρά τμήματα του Προβλήματος 9 λείπουν ή έχουν καταστραφεί, συμπεριλαμβανομένου δυστυχώς ενός μέρους της πρώτης γραμμής, αλλά η δομή του προβλήματος μπορεί να αποκατασταθεί με ασφάλεια. Το πρόβλημα έχει ως εξής:[212]

Ένα δοκάρι με μήκος 0;30 [που στέκεται σε ένα τοίχο ή κάτι σχετικό]. Το πάνω άκρο του κατά 0;06. Πόσο απομακρύνθηκε το κάτω άκρο από τον τοίχο;

[208] Neugebauer, 1990, 77.
[209] Neugebauer, ό.π., 77κ.ε.
[210] Aaboe, 1997, 29κ.ε.
[211] Waerden, 2003, 70κ.ε.
[212] Neugebauer, 1937

Στο κείμενο που ακολουθεί:

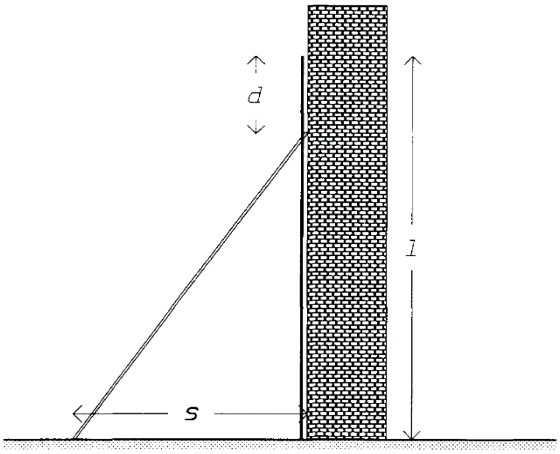
Πολλαπλασίασε το 0;24 με το 0;24, θα βρεις 0;9,36

Πολλαπλασίασε το 0;30 με το 0;30 θα βρεις 0;15

Αφαίρεσε το 0;9,36 από το 0;15, αποτέλεσμα 0;5,24

Ο αριθμός αυτός είναι το τετράγωνο του 0;18

Τόσο απομακρύνθηκε το δοκάρι από τον τοίχο.[213]



Σχήμα 1: Η δοκός στον τοίχο[214]

Σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα $l = 0;30$ δηλαδή $0 + \frac{30}{60} = 0{,}5$ και μια κάθετη πλευρά $h = l - d = 0;30 - 0;06 = 0;24$ δηλαδή $0 + \frac{24}{60} = 0{,}4$ και ζητείται η άλλη κάθετη πλευρά s. Η πλευρά s υπολογίζεται στα βήματα 1-5 που εμείς σήμερα θα τα γράφαμε με την Πυθαγόρεια σχέση $s = \sqrt{l^2 - h^2}$.[215]

Παράδειγμα 2

Το επόμενο πρόβλημα χρονολογείται από τη Σελευκιδική περίοδο και είναι το 3 από τα 7 διατηρημένα τμήματα της πλάκας VAT 7848.[216] Οι διαστάσεις του δισκίου είναι 14,2 × 10,5 × 1,0–2,2 cm και είναι χαραγμένο και στις δύο πλευρές, αλλά το πίσω μέρος είναι κατεστραμμένο (βλέπε εικόνα 33). Ένα περίπου τριγωνικό τμήμα λείπει από την επάνω αριστερή γωνία και ένα μικρό κομμάτι από την κάτω αριστερή άκρη.

[213] Μετάφραση Κ. Ζορμπαλά.
[214] Høyrup, 2002, 276.
[215] Waerden, ό.π., 70κ.ε.
[216] Aaboe, ό.π., 26κ.ε.

Το δισκίο ανήκει σε μια συλλογή από 44 δισκία που βρίσκονται στο Μουσείο Vorderasiatische στο Βερολίνο.

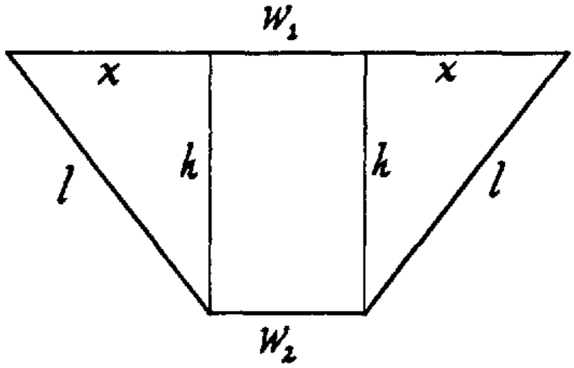
Εικόνα 33: Η πλάκα *VAT 7848*[217]

Το πρόβλημα έχει ως εξής:[218]

1. *Σε ένα τραπέζιο το μήκος είναι 30, το δεύτερο μήκος είναι 30, το άνω πλάτος είναι 50, το χαμηλότερο πλάτος είναι 14. 30 φορές το 30 κάνει 15,0*
2. *Αφαίρεσε το 14 από το 50, παραμένει 36. Το μισό είναι 18. 18 φορές το 18 είναι 5,24. Αφαιρείτε το 5,24 από το 15, παραμένει 9,36*
3. *Τι πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με τον εαυτό του ώστε το αποτέλεσμα να είναι 9,36;24 φορές το 24 είναι 9,36, 24 το είναι η τέμνουσα του τραπεζίου.*
4. *Πρόσθεσε 50 και 14, τα πλάτη και (το αποτέλεσμα είναι) 1,4. Τα μισά είναι 32. Πολλαπλασίασε το 24, με το 32 την τέμνουσα και (το αποτέλεσμα) είναι 12,48.*

Το πρόβλημα αυτό αφορά την εύρεση του εμβαδού ενός ισοσκελούς τραπεζίου διαστάσεων: $l = 30, w_1 = 50, w_2 = 14$, όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:

217 Proust, 2019, 202κ.ε.
218 Aaboe, ό.π., 28.



Σχήμα 2[219]

Στο πρώτο βήμα υπολογίζει το $l^2 = 30 \times 30 = 15{,}0\ (= 15 \times 60 = 900)$. Στο δεύτερο βήμα ουσιαστικά υπολογίζει το x του σχήματος:

$$x = \frac{w_1 - w_2}{2} = \frac{50 - 14}{2} = 18$$

Στη συνέχεια του δεύτερου βήματος υπολογίζει το ύψος του τραπεζίου h (τέμνουσα στο κείμενο) εφαρμόζοντας την Πυθαγόρεια σχέση για ορθογώνια τρίγωνα:

$$h = \sqrt{l^2 - x^2} = \sqrt{15,0 - 5,24} = \sqrt{9,36}$$

Το τρίτο βήμα ξεκινάει με τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας του 9,36 που είναι το 24. Άρα, το ύψος του τραπεζίου είναι το 24.

Στο τελευταίο βήμα υπολογίζει το εμβαδό του τραπεζίου χρησιμοποιώντας ουσιαστικά αυτό που εμείς σήμερα θα λέγαμε ο τύπος του εμβαδού για το τραπέζιο:

$$A = h \times \frac{w_1 + w_2}{2} = 24 \times 32 = 12,48\ (= 12 \times 60 + 48 = 768).$$[220]

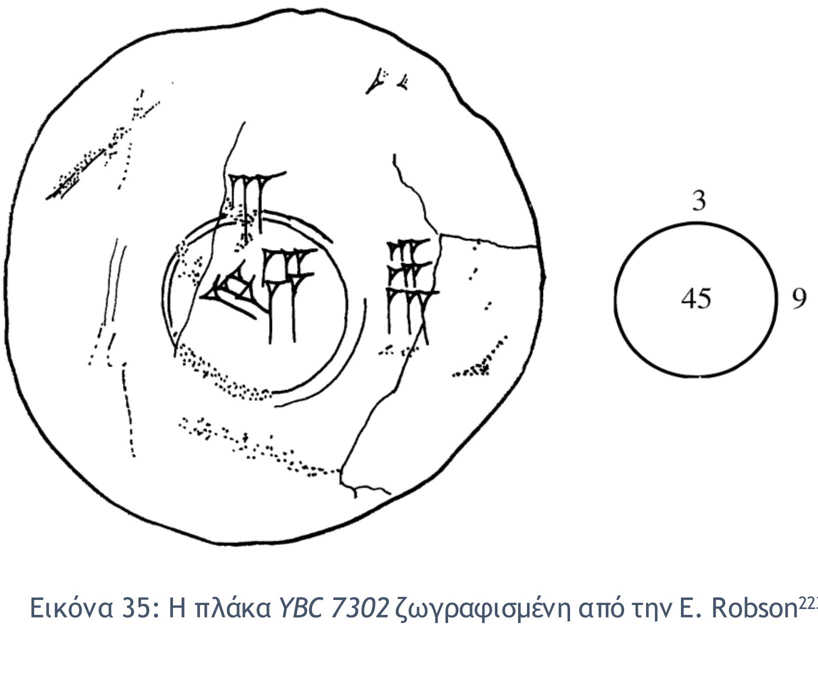
Παράδειγμα 3

Ένα παράδειγμα κύκλου που χρονολογείται στην Παλαιά Βαβυλωνιακή περίοδο είναι αυτό της πινακίδας YBC 7302 από τη πόλη Larsa που τώρα ανήκει στη συλλογή του Πανεπιστημίου του Yale. Η πλάκα έχει κυκλικό σχήμα με διάμετρο 8 cm περίπου και μάλλον γράφτηκε από κάποιον εκπαιδευόμενο γραφέα (εικόνα 34).

[219] Aaboe, 1997, 28, σχήμα 1.7.
[220] ό.π., 28.

Εικόνα 34: Η πλάκα *YBC 7302*[221]

Η πλάκα απεικονίζει έναν κύκλο με τρεις αριθμούς που είναι χαραγμένοι μέσα και γύρω από τον κύκλο σε σφηνοειδή γραφή. Στην κορυφή απεικονίζεται ο αριθμός 3, στα δεξιά του κύκλου ο αριθμός 9 και στο κέντρο του ο αριθμός 45. Στο δικό μας συμβολισμό φαίνεται όπως στις εικόνες 34 και 35.[222]



Εικόνα 35: Η πλάκα *YBC 7302* ζωγραφισμένη από την E. Robson[223]

[221] https://numberwarrior.wordpress.com/2008/12/03/on-the-ancient-babylonian-value-for-pi/
[222] Robson, 2002, 111.
[223] ό.π., 112.

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι το $9 = 3^2$ και $45 = 5 \times 9$. Επειδή το 45 βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου μπορούμε να υποθέσουμε ότι τόσο είναι το εμβαδό του (το οποίο ονομάζουμε A). Επίσης, υποθέτουμε ότι είτε το 3 είτε το 9 που βρίσκονται στο εξωτερικό του κύκλου αναπαριστούν την περιφέρειά του (την οποία ονομάζουμε c).

Εμείς για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του κύκλου χρησιμοποιούμε τη σχέση $A = \pi r^2$ (1) επίσης γνωρίζουμε ότι $c = 2\pi r$ (2), αλλά στο Βαβυλωνιακό πρόβλημα δεν παρατηρούμε καμία ακτίνα r σημειωμένη στον κύκλο. Λύνοντας τη σχέση (2) ως προς r και αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε ότι $A = c^2/4\pi$ (3). Από τη σχέση (3) καταλαβαίνουμε ότι 3 είναι η περιφέρεια του κύκλου (c) και 9 το τετράγωνο της. Αντικαθιστώντας και τη Βαβυλωνιακή προσέγγιση για τον αριθμό π ($\pi = 3$) στη σχέση (3) έχουμε:[224]

$$A = \frac{9}{4\pi} = \frac{9}{4 \times 3} = 9 \times 0;05 = 0;45$$

Δηλαδή παίρνουμε το 45 που είναι γραμμένο στο εσωτερικό του κύκλου, άρα οι υποθέσεις μας είναι σωστές.

Παρατηρούμε ότι οι Βαβυλώνιοι για τον υπολογισμό του εμβαδού χρησιμοποιούσαν τη σχέση $A = c^2/4\pi$ και όχι τη σχέση $A = \pi r^2$ που χρησιμοποιούμε εμείς σήμερα. Αυτό μας δείχνει ότι στην Παλαιά Βαβυλωνιακή περίοδο θεωρούσαν τον κύκλο ως ένα σχήμα που περιβάλλεται από μια περιφέρεια σε αντίθεση με εμάς σήμερα που θεωρούμε τον κύκλο ως ένα σχήμα που δημιουργείται από μία ακτίνα που περιστρέφεται γύρω από το κέντρο του.[225]

<u>Βαβυλωνιακή άλγεβρα:</u>

Στα τέλη της δεκαετίας του 1920, σε ένα σεμινάριο του Neugebauer στο Gottingen, παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά Βαβυλωνιακές λύσεις για τις εξισώσεις δευτέρου βαθμού. Μέχρι τότε η αρχή της χρήσης των αλγεβρικών εξισώσεων δευτέρου βαθμού αποδιδόταν στους Ινδούς μαθηματικούς και μετά τη δανείστηκαν οι Άραβες μέσω του Διόφαντου ή μέσω του Ευκλείδη (Στοιχεία ΙΙ), αλλά γεωμετρικά διατυπωμένη. Τα Στοιχεία ΙΙ του Ευκλείδη είχαν χαρακτηριστεί από τον Zeuthen ως «γεωμετρική άλγεβρα»[226] ήδη στη δεκαετία του 1880. Μετά την παρουσίαση της Βαβυλωνιακής άλγεβρας δευτέρου βαθμού στα τέλη της δεκαετίας του 1920, ο Neugebauer πρότεινε η γεωμετρία των Στοιχείων ΙΙ να θεωρείται γεωμετρική μετάφραση της άλγεβρας των Βαβυλωνίων.[227] Οι θέσεις του Neugebauer υποστηρίχθηκαν και από τον Bartel Leendert van der Waerden (1903 – 1996), με αποτέλεσμα την καθιέρωση του όρου «γεωμετρική άλγεβρα» στην ιστορική έρευνα ως ένα οριστικό και ακλόνητο συμπέρασμα.[228]

---

[224] Robson, 2001, 180κ.ε.
[225] ό.π., 181.
[226] Λεπτομέρειες για τον όρο «γεωμετρική άλγεβρα», καθώς και τη διαμάχη των ιστορικών γύρω από αυτόν θα δοθούν στην ενότητα 2.3.2
[227] Høyrup, 2018, 71.
[228] Θωμαΐδης, 1993, 28κ.ε.

Σύμφωνα με τον Neugebauer η έκταση της Βαβυλωνιακής άλγεβρας είναι πολύ μεγάλη και τον πιο σημαντικό πυρήνα αυτής τον αποτελούν οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις (παράδειγμα 4). Επίσης, σε πολλά Βαβυλωνιακά κείμενα συναντάμε γραμμικά προβλήματα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους, για παράδειγμα να βρεθούν δύο αριθμοί όταν δίνονται το γινόμενό τους και το άθροισμα ή διαφορά τους (παράδειγμα 5). Από τα πολλά λυμένα Βαβυλωνιακά προβλήματα που έχουν βρεθεί γίνεται ξεκάθαρο ότι αυτό που θεωρούσαν σημαντικό ήταν η γενική διαδικασία της λύσης και όχι τόσο το αριθμητικό αποτέλεσμα. Αυτό γίνεται αντιληπτό από μια γενική εξήγηση της μεθόδου που χρησιμοποιείται συνήθως. Για παράδειγμα, εμείς θα γράφαμε $x+y$, ενώ το Βαβυλωνιακό κείμενο λέει «5 και 3 το άθροισμα του μήκους και του πλάτους». Τέτοιου είδους προβλήματα μπορούμε όντως να τα μεταφέρουμε στο δικό μας συμβολισμό αν αντικαταστήσουμε τις «λέξεις» που χρησιμοποιούσαν για τις έννοιες του μήκους, του πλάτους, της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με τα δικά μας γράμματα και σύμβολα.[229]

Παράδειγμα 4

Το πρόβλημα που ακολουθεί περιέχεται στην πινακίδα BM 13901 του Βρετανικού Μουσείου. Αποτελεί το τρίτο από τα 24 τμήματα της πινακίδας η οποία δημοσιεύτηκε από τον Neugebauer στο *Mathematische Keilschrifttexte III* (1937).

Το πρόβλημα έχει ως εξής;[230]

1. Έχω προσθέσει το εμβαδό και τα δύο τρίτα της πλευράς του τετραγώνου μου το αποτέλεσμα είναι 0;35.
2. «1 ο παράγοντας» Τα δύο τρίτα του 1, του παράγοντα, είναι 0;40.
3. Το μισό από αυτό είναι το 0;20, πολλαπλασιαστέο με το 0;20 (και το αποτέλεσμα είναι) 0;6, 40
4. Πρόσθεσε αυτό στο 0;35 (και το αποτέλεσμα είναι) 0;41,40 που έχει τετραγωνική ρίζα το 0;50
5. Το 0;20 που το είχες πολλαπλασιάσει με τον εαυτό του αφαίρεσε το από το 0;50 και θα βρεις 0;30. 0;30 είναι η πλευρά του τετραγώνου.

Αυτό το παράδειγμα δηλώνει και επιλύει την τετραγωνική εξίσωση

$$x^2+\frac{2}{3}x=0;35$$

Αρχικά, μετατρέπουμε το $\frac{2}{3}$ στον αντίστοιχο εξηνταδικό αριθμό το 0;40 και η εξίσωση που έχουμε να λύσουμε είναι η εξής:

$$x^2+0;40x-0;35=0$$

[229] Neugebauer, ό.π., 78κ.ε.

[230] Aaboe, ό.π., 23.

Τα βήματα 3-5 της Βαβυλωνιακής λύσης αντιστοιχούν στα βήματα που πρέπει να ακολουθήσουμε προκειμένου να λύσουμε αυτή τη δευτεροβάθμια εξίσωση με βάση τον τύπο

$$x = \sqrt{\left(\frac{0;40}{2}\right)^2 + 0;35} - \frac{0;40}{2} = 0;30.$$

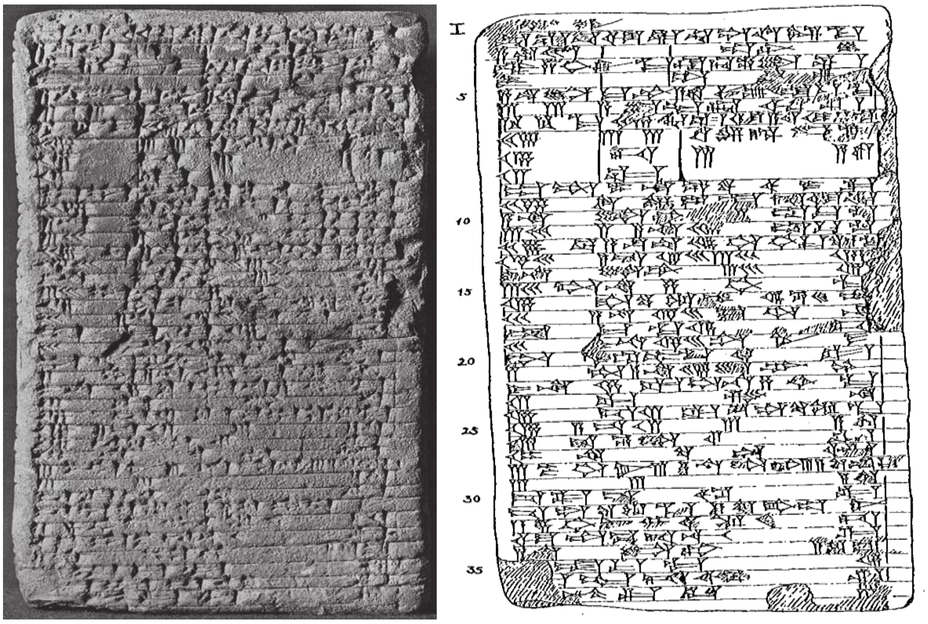
Πράγματι, στα βήματα 3-5 βρίσκουμε διαδοχικά το $\frac{0;40}{2}$, έπειτα το $\left(\frac{0;40}{2}\right)^2$, στη συνέχεια το άθροισμα $\left(\frac{0;40}{2}\right) + 0;35$, στο επόμενο βήμα βρίσκουμε την τετραγωνική ρίζα $\sqrt{\left(\frac{0;40}{2}\right) + 0;35}$ και στο τέλος τη διαφορά $\sqrt{\left(\frac{0;40}{2}\right) + 0;35} - \frac{0;40}{2}$.

Παράδειγμα 5

Το πρόβλημα που ακολουθεί περιέχεται στην πινακίδα AO 8862 που βρίσκεται στο μουσείο του Λούβρου (βλ. εικόνα 36). Θα παρουσιάσουμε τη μία πλευρά, όπως δημοσιεύτηκε από τον Neugebauer στο *Mathematische Keilschrifttexte- Text I (1935-1937)*. Στην εικόνα 37 απεικονίζεται η πλευρά της πλάκας που θα παρουσιαστεί παρακάτω και η αντιγραφή της από τον Neugebauer.

Εικόνα 36: Η πλάκα AO 8862[231]

[231] http://ressources.louvrelens.fr/EXPLOITATION/oeuvre-ao-8862.aspx



Εικόνα 37: Η πλάκα AO 8862 και η αντιγραφή της[232]

Η Βαβυλωνιακή διατύπωση του προβλήματος έχει ως εξής:[233]

Μήκος, πλάτος. Πολλαπλασίασα το μήκος και το πλάτος κι έτσι βρήκα την επιφάνεια. Κατόπιν πρόσθεσα στην επιφάνεια την υπεροχή του μήκους από το πλάτος: 3, 3. Έπειτα πρόσθεσα το μήκος και το πλάτος : 27. Ζητούνται το μήκος, το πλάτος και η επιφάνεια.

(Δεδομένα:) 27 και 3, 3 τα αθροίσματα.

(απάντηση:) 15 το μήκος, 3, 0 η επιφάνεια, 12 το πλάτος.

Θα ακολουθήσεις τούτη τη μέθοδο:

$$27 + 3,3 = 3,30$$

$$2 + 27 = 29$$

Πάρε το μισό του 29 (δηλαδή το 14;30)

$$14;30 \times 14;30 = 3,30;15$$

$$3,30;15 - 3,30 = 0;15$$

Η τετραγωνική ρίζα του 0;15 είναι 0;30

$$14;30 + 0;30 = 15 \text{ το μήκος}$$

$$14;30 - 0;30 = 14 \text{ το πλάτος}$$

232 Waerden, 2003, 65.

233 ό.π., 63.

Από το 14 αφαίρεσε το 2, που πρόσθεσες στο 27, το πλάτος. 12 είναι το πραγματικό πλάτος.

Πολλαπλασίασα το 15, το μήκος, με το 12, το πλάτος

$$15 \times 12 = 3,0 \ \textit{το εμβαδό}$$

$$15 - 12 = 3$$

$$3,0 + 3 = 3,3.$$

Η ερμηνεία του κειμένου:[234]

Στις πρώτες γραμμές διατυπώνεται το πρόβλημα. Έχουμε λοιπόν δυο εξισώσεις με δυο αγνώστους: x το μήκος y το πλάτος, άρα xy το εμβαδό. Ακολουθώντας τις τρεις πρώτες γραμμές προκύπτουν οι εξής εξισώσεις:

$$\begin{cases} xy + x - y = 3,3 \\ x + y = 27 \end{cases} \quad (1)$$

Στη συνέχεια, φαίνεται ο γραφέας να εισάγει μια νέα μεταβλητή y' αντί του πραγματικού πλάτους y:

$$y' = y + 2 \ \Rightarrow \ y = y' - 2$$

Η αλλαγή αυτή απλοποιεί το πρόβλημα και οι εξισώσεις ως προ x και y' γίνονται:

$$\begin{cases} xy' = 3,30 \\ x + y' = 29 \end{cases} \quad (2)$$

Η πρώτη από τις εξισώσεις του συστήματος (2) βρίσκεται αμέσως αν προσθέσουμε τις δυο εξισώσεις του συστήματος (1). Ο μετασχηματισμός του συστήματος (1) στο (2) στο Βαβυλωνιακό κείμενο φαίνεται από τις εξής γραμμές:

$$27 + 3,3 = 3,30$$

$$2 + 27 = 29$$

Ακολουθεί η επίλυση του απλοποιημένου συστήματος (2). Τη διαδικασία επίλυσης του συστήματος (2) τη βρίσκουμε και σε άλλα κείμενα. Με σύγχρονο αλγεβρικό τρόπο μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

Η λύση του συστήματος των εξισώσεων:

$$\begin{cases} xy' = P \\ x + y' = a \end{cases} \quad (3)$$

είναι η εξής:

$$x = \frac{1}{2}a + w \ (4)$$
$$y' = \frac{1}{2}a - w \ \ (5)$$
$$w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - P}. \ (6)$$

[234] ό.π., 64.

Αυτό που κάνουν οι Βαβυλώνιοι από τη σειρά: «*Πάρε το μισό του 29 (δηλαδή το 14;30),*» μέχρι τη σειρά: «*Από το 14 αφαίρεσε το 2, που πρόσθεσες στο 27, το πλάτος. 12 είναι το πραγματικό πλάτος.*» Αντιστοιχεί ουσιαστικά στην εφαρμογή των τύπων (4), (5), (6).

Τέλος, ένα άλλο Βαβυλωνιακό κείμενο (VAT 6598) περιέχει, ένα ανάλογο σύστημα της μορφής (3) στο οποίο αντί του αθροίσματος δίνεται η διαφορά:

$$\begin{cases} xy = P \\ x - y = d \end{cases} \quad (3)$$

Η λύση είναι η εξής:

$$x = w + \frac{1}{2}d$$
$$y = w - \frac{1}{2}d$$
$$w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}d\right)^2 + P}.$$

2.3.2 Η Διαμάχη των ιστορικών για τη «γεωμετρική άλγεβρα»

Ο όρος «γεωμετρική άλγεβρα» υποδηλώνει τη γεωμετρική διατύπωση και απόδειξη ενός αλγεβρικού προβλήματος. Χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στα τέλη του 19ου αιώνα, από τους Paul Tannery (1843 – 1904) και Hieronymus Georg Zeuthen (1839 – 1920) και καθιερώθηκε στην ιστοριογραφία μετά την κλασσική έκδοση των *Στοιχείων* του Ευκλείδη από τον Thomas Heath (1861 – 1940). Ο Heath χρησιμοποίησε τον όρο «γεωμετρική άλγεβρα» στην ανάλυση του Ευκλείδειου έργου.[235]

Οι θέσεις της ιστοριογραφίας σχετικά με το υπόβαθρο της «γεωμετρικής άλγεβρας» έχουν διατυπωθεί από τον Heath ως εξής:

> *«Η πρόσθεση και η αφαίρεση ποσοτήτων που αντιπροσωπεύονται στη γεωμετρική άλγεβρα από ευθύγραμμα τμήματα, εκτελούνται φυσικά με προέκταση του τμήματος στην απαιτούμενη έκταση ή με αποκοπή ενός μέρους απ' αυτό. Το ισοδύναμο του πολλαπλασιασμού είναι η κατασκευή ενός ορθογωνίου, του οποίου οι προσκείμενες πλευρές είναι τα δοθέντα τμήματα. Το ισοδύναμο της διαίρεσης μιας ποσότητας που αντιπροσωπεύεται από ένα τμήμα με μια άλλη ποσότητα που αντιπροσωπεύεται από ένα τμήμα, είναι απλώς η έκφραση ενός λόγου μεταξύ τμημάτων σύμφωνα με τις αρχές των βιβλίων V και VI. Η διαίρεση ενός γινομένου δύο ποσοτήτων με μια τρίτη αντιπροσωπεύεται στη γεωμετρική άλγεβρα από την εύρεση ενός ορθογωνίου με μια πλευρά δεομένου μήκους και ίσου προς ένα δοσμένο ορθογώνιο ή τετράγωνο. Αυτό είναι το πρόβλημα της παραβολής των χωρίων που λύθηκε στις προτάσεις I 44, 45. Η πρόσθεση και αφαίρεση γινομένων είναι, στην γεωμετρική άλγεβρα, η πρόσθεση και αφαίρεση ορθογωνίων ή τετραγώνων.*

[235] Θωμαΐδης, 1993, 27κ.ε.

Το άθροισμα ή η διαφορά μπορεί να μετασχηματιστεί σ' ένα απλό ορθογώνιο μέσω της παραβολής των χωρίων σε οποιοδήποτε τμήμα δοσμένου μήκους, αντιστοιχώντας στην αλγεβρική διαδικασία εύρεσης ενός κοινού μέτρου. Τέλος, η εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας είναι στη γεωμετρική άλγεβρα, η εύρεση ενός τετραγώνου ίσου προς ένα δοσμένο ορθογώνιο, πράγμα που γίνεται στην πρόταση II 14 με τη βοήθεια της I 47).»[236]

Η υπόθεση για την ύπαρξη μιας «γεωμετρικής άλγεβρας» των αρχαίων Ελλήνων ισχυροποιήθηκε όταν τα αρχαιολογικά ευρήματα που ήρθαν στο φως έδωσαν για πρώτη φορά μια αρκετά ικανοποιητική εικόνα των Βαβυλωνιακών μαθηματικών. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως (ενότητα 2.3.1) με τις δημοσιεύσεις του Neugebauer στα τέλη της δεκαετίας του 1920 άρχισε να προβάλλεται η άποψη ότι το περιεχόμενο της «γεωμετρικής άλγεβρας» των Ελληνικών μαθηματικών δεν ήταν παρά η γεωμετρική διατύπωση και απόδειξη των Βαβυλωνιακών αριθμητικών κανόνων για τη λύση προβλημάτων δευτέρου βαθμού.[237]

Η άποψη αυτή του Neugebauer υιοθετήθηκε και από τον B. van der Waerden. Ο Høyrup μάλιστα στο άρθρο του «*What is "geometric algebra", and what has it been in historiography?*» αναφέρει ότι ο van der Waerden άσκησε τη μεγαλύτερη επιρροή, ειδικά με το έργο του «*Science Awakening*».[238] Συγκεκριμένα, ο van der Waerden για τη Βαβυλωνιακή άλγεβρα αναφέρει:[239]

«Αυτό που είναι βέβαιο είναι ότι το γινόμενο το ερμήνευαν ως εμβαδόν ενός ορθογωνίου και το τετράγωνο ως εμβαδόν ενός τετραγώνου. Αυτό είναι σαφές από την ίδια την ορολογία. Πρέπει όμως να είμαστε προσεκτικοί και να μην μας παραπλανά η γεωμετρική ορολογία. Ο τρόπος του σκέπτεσθε των Βαβυλωνίων ήταν πρωτίστως αλγεβρικός. Είναι αλήθεια ότι τους άγνωστους αριθμούς τους απεικόνιζαν με γραμμές και επιφάνειες, αλλά παρέμεναν πάντοτε αριθμοί. Ακόμη και σε προβλήματα που είναι διατυπωμένα με γεωμετρικούς όρους, αυτό που ζητείται από τους Βαβυλώνιους είναι πάντοτε κάποιος υπολογισμός, ποτέ μια κατασκευή ή μια απόδειξη. Μέσα στο γεωμετρικό περίβλημα, είναι πάντοτε ορατός ο αλγεβρικός πυρήνας.»

Στη συνέχεια και για μια δεκαετία περίπου υπήρξε μια έντονη διαμάχη μεταξύ των ιστορικών όσον αφορά τον όρο «γεωμετρική άλγεβρα» η οποία άρχισε το 1969 με τον Ούγγρο ιστορικό των μαθηματικών Árpád Szabó (1878 – 1948).[240] Ο Szabó υποστήριξε τον καθαρό γεωμετρικό χαρακτήρα των προτάσεων του βιβλίου II των Στοιχείων. Επίσης, απέρριψε τόσο τον αλγεβρικό τρόπο ερμηνείας τους όσο και την υπόθεση της Βαβυλωνιακής προέλευσης των προβλημάτων. Τελικά, οι θέσεις και η κριτική του Szabó δεν επηρέασε μάλλον τους ιστορικούς, καθώς δεν παρατηρήθηκε αμφισβήτηση γύρω από τον όρο «γεωμετρική άλγεβρα».

Από τα μέσα της δεκαετίας του 1970 ξεκίνησε μια έντονη συζήτηση μεταξύ των ιστορικών των μαθηματικών με σημείο αιχμής τη «γεωμετρική άλγεβρα». Απαρχή

---

[236] ό.π., 41.
[237] ό.π, 28.
[238] Høyrup, 2016, 18κ.ε.
[239] Waerden, 2003, 73.
[240] Høyrup, 2016, 27.

αυτής της διαμάχης ήταν ένα άρθρο του Sabetai Unguru. Τον Αύγουστο του 1974 πραγματοποιήθηκε στην Ιαπωνία το 14ο Παγκόσμιο Συνέδριο της Ιστορίας της Επιστήμης, όπου ο Unguru μίλησε «για την ανάγκη να ξαναγραφτεί η Ιστορία των Ελληνικών μαθηματικών». Η ομιλία του θα μπορούσε να χαρακτηριστεί πως είχε έναν εξαιρετικά πολεμικό ύφος κατά των εκπροσώπων της παραδοσιακής ιστοριογραφίας των Αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών, πιο συγκεκριμένα κατά του Paul Tanerry, του Hieronymus Georg Zeuthen και του van der Waerden. Με έμφαση διατύπωσε ότι:[241]

> *«Η ιστοριογραφική θέση που ενσωματώθηκε στον όρο "γεωμετρική άλγεβρα" είναι προσβλητική, αφελής και ιστορικά αστήρικτη. Το να διαβάζει κανείς αρχαία μαθηματικά κείμενα έχοντας στο μυαλό του τα μοντέρνα μαθηματικά είναι η ασφαλέστερη μέθοδος για την παρανόηση του χαρακτήρα των αρχαίων μαθηματικών, στα οποία οι φιλοσοφικές προϋποθέσεις και οι μεταφυσικές δεσμεύσεις έπαιζαν έναν πιο θεμελιακό και αποφασιστικό ρόλο από ότι αυτές παίζουν στα μοντέρνα μαθηματικά. Το να υποθέτει κανείς ότι μπορεί να εφαρμόσει αυτόματα και αδιάκριτα σε κάθε μαθηματικό περιεχόμενο τις μοντέρνες τεχνικές χειρισμών των αλγεβρικών συμβόλων είναι ο ασφαλέστερος δρόμος για να αποτύχει να καταλάβει τις ενυπάρχουσες διαφορές που είναι ενσωματωμένες στα μαθηματικά περασμένων εποχών. Η Γεωμετρία δεν είναι Άλγεβρα! Η Γεωμετρία είναι σκέψη για το χώρο και τις ιδιότητες του. Η γεωμετρική σκέψη ενσωματώνεται στη διαγραμματική αναπαράσταση και συνοδεύεται από μια ρητορική συνιστώσα, την απόδειξη. Η αλγεβρική σκέψη χαρακτηρίζεται από το λειτουργικό (operational) συμβολισμό, από την αποκλειστική ενασχόληση μάλλον με μαθηματικές σχέσεις παρά με μαθηματικά αντικείμενα, από την απελευθέρωση από οποιεσδήποτε οντολογικές δεσμεύσεις και από την υπέρτατη αφαιρετικότητα. Η "γεωμετρική άλγεβρα" δεν είναι μόνο λογικά ανάρμοστη, αλλά και ιστορικά ανάρμοστη.»*

Το εν λόγω απόσπασμα της ομιλίας του καταδεικνύει την οπτική της κριτικής του Unguru, η οποία μπορεί να αποδοθεί πιο περιεκτικά από τη φράση: δεν μπορούμε να αγνοούμε «το χαρακτήρα των αρχαίων μαθηματικών» χωρίς τον κίνδυνο του αναχρονισμού. Στην ομιλία του αυτή υπαινίσσεται την αιτία της ιστορικής παρατυπίας με τη χρήση του όρου «γεωμετρική άλγεβρα» κατά την ανάλυση των Αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών. Ο ίδιος αφήνει να εννοηθεί ότι αυτό οφείλεται στο γεγονός πως «η ιστορία των μαθηματικών τυπικά γράφτηκε από μαθηματικούς». Σκοπός τους ήταν «να διαλευκάνουν τα μαθηματικά κείμενα του παρελθόντος και να τα μεταγράψουν στη μοντέρνα γλώσσα των μαθηματικών, μετατρέποντας με τον τρόπο αυτό εύκολα διαθέσιμα σε όλους τους ενδιαφερόμενους».[242]

Το 1975 παρουσιάζει στο περιοδικό *Archive for History of Exact Sciences* ένα άρθρο ίδιου θέματος και τίτλου. Η κεντρική θέση του Unguru είναι ότι: «τα μαθηματικά είναι μία αντανάκλαση της κουλτούρας» και συνεχίζει «σίγουρα δεν είναι απρόσβλητα από το διανοητικό και πολιτιστικό περιβάλλον μέσα στο οποίο ακμάζουν»[243] Συγκριτικά

---

[241] Θωμαΐδης, 1993, 30κ.ε.
[242] Θωμαΐδης, 1993, 31κ.ε.
[243] Unguru, 1975, 86.

με την εισήγησή του στο 14ο Παγκόσμιο Συνέδριο της Ιστορίας της Επιστήμης ο Unguru στο άρθρο επιχειρηματολογεί με την πρόσθετη ερμηνευτική αντιπαράθεση κάποιων προτάσεων από τα *Στοιχεία* που αντιπροσώπευαν τη «γεωμετρική άλγεβρα», ενώ παράλληλα πρόσθεσε άλλες δύο πτυχές στον αντίλογό του. Πιο συγκεκριμένα, εξέτασε το ιστοριογραφικό υπόστρωμα της διαμόρφωσης και υιοθέτησης του όρου «γεωμετρική άλγεβρα» από τους Tannery – Zeuthen από τη μια και τους Neugebauer – van der Waerden από την άλλη. Επίσης, αναφέρθηκε με υπαινιγμούς στο τι θα μπορούσε να αποτελεί την εναλλακτική προσέγγιση στην ιστορική ερμηνεία της «γεωμετρικής άλγεβρας».

Στο τέλος του άρθρου κάνει αναφορά στους Abel Rey και Michael Mahoney οι οποίοι αμφισβήτησαν το 1939 και το 1971 αντίστοιχα, την αλγεβρική ερμηνεία των μαθηματικών επισημαίνοντας τη διαφορά μεταξύ του γεωμετρικού και του αλγεβρικού τρόπου σκέψης.[244] Ο Unguru αφήνει να εννοηθεί, παρόλο που οι ίδιοι δεν έθεσαν ζήτημα νομιμότητας του όρου «γεωμετρική άλγεβρα», ότι αυτοί υπήρξαν οι πρόδρομοι αυτής της ιστοριογραφικής διαμάχης. Σύμφωνα όμως με τον Unguru, αυτός που απέρριψε ρητά την ιστορική αξία της έννοιας «γεωμετρική άλγεβρα», ήταν ο Arpad Szabó το 1969. Επιπλέον, ο Unguru θεωρεί ως σημαντικότερη συμβολή στην ιστοριογραφία των μαθηματικών, την ιστορική ανάλυση της ανάδυσης της άλγεβρας. Αυτή πραγματοποιήθηκε στα μέσα της δεκαετίας του 1930 απο τον Jacob Klein, βασισμένη στην εννοιολογική εξέλιξη του αριθμού από τους Πυθαγόρειους μέχρι και τον Wallis, χωρίς όμως να αναφερθεί στον όρο «γεωμετρική άλγεβρα».

Ο van der Waerden, είναι αυτός στον οποίο ασκήθηκε η περισσότερη κριτική, γι' αυτό αντέδρασε με ένα άρθρο στον ίδιο τόμο του περιοδικού, όπου τα επιχειρήματά του να επικεντρώνονται σε δύο σημεία:[245]

Το πρώτο επιχείρημα του van der Waerden επικεντρώνεται στην ιστορική αμφισβήτηση του χαρακτήρα της αλγεβρικής σκέψης που πρόβαλε στην κριτική του ο Unguru. Για τον van der Waerden, τα γνωρίσματα που καθορίζουν τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης που ανέφερε ο Unguru αφορούν τη μοντέρνα αντίληψη της άλγεβρας. Όπως γράφει ο ίδιος, όταν αναφέρεται στη Βαβυλωνιακή, στην Ελληνική ή την Αραβική άλγεβρα εννοεί την άλγεβρα του Al-Khwarizmi, του Cardano ή τη σχολική άλγεβρα. Έτσι, άλγεβρα γι' αυτόν είναι: «η τέχνη του χειρισμού αλγεβρικών εκφράσεων όπως $(a+b)^2$ και η επίλυση εξισώσεων όπως την $x^2+ax=b$».

Το δεύτερο επιχείρημα του van der Waerden αφορά στην αναίρεση του σκεπτικού για την υιοθέτηση του όρου «γεωμετρική άλγεβρα» που καταλόγισε ο Unguru στους εκπροσώπους αυτής της ιστοριογραφικής άποψης. Κατά τον van der Waerden, ο Zeuthen και οι υποστηριχτές του δεν απέδειξαν, όπως ισχυρίζεται ο Unguru, τον αλγεβρικό πυρήνα της σκέψης των αρχαίων μαθηματικών με το να καταστήσουν ευκολότερη την κατανόηση του Βιβλίου ΙΙ των *Στοιχείων*, μεταφράζοντας τα θεωρήματα με μοντέρνο συμβολισμό. Ο στόχος τους ήταν να μελετήσουν τη διατύπωση των θεωρημάτων και να προσπαθήσουν να ανασυγκροτήσουν τις αρχικές ιδέες του συγγραφέα. Συγκεκριμένα, αναφέρει:

---

[244] ό.π., 109κ.ε.
[245] Θωμαΐδης, ό.π., 34.

«Το βρήκαμε ολοφάνερο ότι αυτά τα θεωρήματα δεν προκύπτουν από γεωμετρικά προβλήματα. Δεν μπορέσαμε να βρούμε κάποιο ενδιαφέρον γεωμετρικό πρόβλημα το οποίο θα οδηγούσε στη δημιουργία θεωρημάτων όπως τα II 1-4. Από την άλλη μεριά βρήκαμε ότι η εξήγηση αυτών των θεωρημάτων ως προερχομένων από την άλγεβρα λειτουργούσε επιτυχώς. Κατά συνέπεια υιοθετήσαμε την εξήγηση αυτή.»

Ο van der Waerden καταλήγει λέγοντας:[246]

«Ο Unguru όπως πολλοί μη μαθηματικοί, χονδροειδώς υπερεκτιμούν τη σπουδαιότητα του συμβολισμού στα μαθηματικά. Αυτοί οι άνθρωποι βλέπουν τις εργασίες μας γεμάτες από τύπους και θεωρούν ότι αυτοί οι τύποι είναι ένα ουσιαστικό μέρος της μαθηματικής σκέψης. Εμείς, οι εν ενεργεία μαθηματικοί, γνωρίζουμε ότι σε πολλές περιπτώσεις οι τύποι δεν είναι καθόλου ουσιαστικοί, παρά μόνο βολικοί.»

Στον επόμενο τόμο του ίδιου περιοδικού υπήρχε απάντηση του Freudenthal με σκεπτικό ανάλογο και συμπληρωματικό με αυτό του van der Waerden. Μετά τον van der Waerden και τον Freudenthal, ένα τρίτος διακεκριμένος μαθηματικός ο André Weil το 1978, με τη δημοσίευση μιας επιστολής που έστειλε στον επιμελητή σύνταξης του περιοδικού *Archive for History of Exact Sciences*, θα συμπαραταχθεί στην υπεράσπιση του όρου «γεωμετρική άλγεβρα».

Στη συνέχεια της διαμάχης το 1979 ο Unguru με ένα κείμενο του ανταπαντά στους van der Waerden και Freudenthal. Το μεγαλύτερο μέρος του κειμένου του αφορά έναν σχολιασμό της πεποίθησης των δυο ιστορικών για την αλγεβρική υπόσταση που υπάρχει στα Αρχαία Ελληνικά μαθηματικά και ειδικότερα στον Ευκλείδη. Συγκεκριμένα αναφέρει:[247]

«[...] οι ισχυρισμοί του B. L. van der Waerden δείχνουν μια υποσυνείδητη πλην όμως καθαρή υπεράσπιση του επιχειρήματος ότι οι πραγματικές ρίζες της μεθοδολογικής θέσης που ενσωματώθηκε στην έννοια γεωμετρική άλγεβρα βρίσκονται στην ικανότητα του σύγχρονου μαθηματικού να διαβάζει γεωμετρικά κείμενα αλγεβρικά, χωρίς κανένα ιστορικό ενδοιασμό.»

Στη συνέχεια του κειμένου του αναφέρεται στον Freudenthal και στην άποψη του ότι το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της αλγεβρικής σκέψης είναι η ικανότητα να περιγραφούν οι σχέσεις, οι διαδικασίες λύσης και οι σχετικές τεχνικές με κάποιο γενικό τρόπο, αναφέροντας:[248]

«Όμως είναι ακριβώς η ανικανότητα του Βαβυλώνιου μαθηματικού να περιγράφει σχέσεις και διαδικασίες λύσης και σχετικές τεχνικές με ένα γενικό τρόπο, που δικαιολογεί την ανικανότητά του ως αλγεβριστή. Αυτό που ο Βαβυλώνιος μαθηματικός στερείται είναι ακριβώς η ικανότητα να απαλλάσσεται από τους ειδικούς, συγκεκριμένους αριθμούς και είναι αυτή η ανεπάρκεια που υπαγορεύει την ιδιαίτερη μορφή της προσέγγισής του. Αυτό

[246] ό.π., 35.
[247] ό.π., 37
[248] ό.π., 37κ.ε.

που μπορεί να παράγει είναι συνταγές, όχι γενικούς τύπους. Σε σχέση με τον Έλληνα μαθηματικό (γεωμέτρη) από την άλλη μεριά, όσο και αν είναι δικαιολογημένο να δούμε την προσέγγισή του ως μια γενική προσέγγιση (το ονομαζόμενο θεώρημα του Πυθαγόρα ισχύει για κάθε ορθογώνιο τρίγωνο κ.τ.λ.), η γλώσσα που χρησιμοποιεί είναι η γεωμετρική γλώσσα και η γενικότητα που εμπεριέχεται είναι μία φυσική συνέπεια που σχετίζεται με γεωμετρικές και όχι με αλγεβρικές οντότητες. Συνεπώς, από τα ίδια τα κριτήρια της "αλγεβρικής σκέψης" του Freudenthal, τα Βαβυλωνιακά και τα Ελληνικά μαθηματικά δεν είναι αλγεβρικά.»

Στη συνέχεια, ο Unguru σε συνεργασία με τον ιστορικό David Rowe δημοσίευσαν ένα άρθρο στο νεοσύστατο τότε περιοδικό Libertas Mathematica. Η κριτική του άρθρου αυτή τη φορά αφορούσε κυρίως στο μαθηματικό υπόβαθρο των απόψεων που έχουν οι υπερασπιστές της «γεωμετρικής άλγεβρας». Το απόσπασμα του άρθρου που ακολουθεί είναι χαρακτηριστικό:[249]

«[…] υπάρχουν σημαντικές διακρίσεις ανάμεσα στην άλγεβρα και τις συγκεκριμένες αριθμητικές σχέσεις που εμφανίζονται στο Βαβυλωνιακό και ορισμένο ελληνικό υλικό. Γιατί υπάρχει ένα απέραντο μαθηματικό χάσμα ανάμεσα στην κατοχή μιας γενικής γνώσης συγκεκριμένων αριθμητικών γεγονότων από τη μία μεριά και στη δυνατότητα να γίνει η γνώση αυτή αφηρημένη και συμβολικά διαπραγματεύσιμη χωρίς καμία αναφορά στο συγκεκριμένο, από την άλλη. Η άγνοια αυτών των διακρίσεων, […] υπήρξε ένας από τους κυριότερους λόγους που προέκυψε πάνω στη χρήση του όρου "άλγεβρα". Η αριθμητική λοιπόν προηγείται της άλγεβρα, δηλαδή η ύπαρξη ενός συνεκτικού αριθμητικού συστήματος είναι απαραίτητη για να έχουμε μια αλγεβρική υπερδομή και χωρίς μια σταθερή αριθμητική θεμελίωση, η απόπειρα να κάνουμε άλγεβρα (ή, στην προκειμένη περίπτωση, να βρούμε άλγεβρα) καταρρέει σαν χάρτινος πύργος. Η διαφωνία μας είναι ότι αυτό ακριβώς αποτελεί την αδυναμία της "γεωμετρικής άλγεβρας", τα αριθμητικά θεμέλια της οποίας, αν εξεταστούν προσεκτικά, αποκαλύπτονται μάλλον ασταθή. Για να φανεί αυτό πειστικά θα χρειαστεί μια εκτεταμένη συζήτηση των διάφορων πράξεων που συνιστούν τη "γεωμετρική αριθμητική", καθώς και μια εκτίμηση της πραγματικής του θέσης σ' αυτό που αισθανόμαστε να είναι μια βιώσιμη ερμηνεία των κλασσικών ελληνικών μαθηματικών. Αυτό που θα αναδυθεί πολύ καθαρά από αυτή τη συζήτηση είναι το γεγονός ότι υπάρχουν αξεπέραστες δυσκολίες, έμφυτες σ' αυτή την ίδια τη θεμελίωση της «γεωμετρικής άλγεβρας», και οι δυσκολίες αυτές δείχνουν κατηγορηματικά ότι η θεμελίωση είναι πάρα πολύ αδύναμη για να στηρίξει το βάρος της αναγκαίας αλγεβρικής υπερδομής.»

Ο Unguru και ο Rowe αντιπαραβάλουν μια λεπτομερή ανάλυση των πράξεων που εμφανίζονται στα *Στοιχεία*, τονίζοντας ιδιαίτερα το γεγονός ότι οι πράξεις αυτές εφαρμόζονται μόνο σε ομογενή μεγέθη. Από αυτό το γνώρισμα συμπεραίνεται ότι ο πολλαπλασιασμός, όπως εμφανίζεται στα *Στοιχεία*, δεν είναι συμβατός με το γενικευμένο πολλαπλασιασμό που εισάγεται από τον Heath. Το ίδιο βέβαια ισχύει και

[249] ό.π. 40.

στην περίπτωση της διαίρεσης ανάμεσα σε ένα σχηματισμό λόγου και σε μια παραβολή χωρίων.[250]

Το 1983, ο van der Waerden επαναφέρει το ζήτημα με μια μικρή αναφορά στο βιβλίο του *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Σε αυτήν, αφού υποστηρίζει εκ νέου τα ήδη γνωστά επιχειρήματά του υπέρ της «γεωμετρικής άλγεβρας», γράφει:[251]

> *«Πρέπει ωστόσο να παραδεχτώ ότι υπάρχει ένα στοιχείο αλήθειας στην κριτική του Unguru. Στο βιβλίο μου Science Awaking, είχα θεωρήσει την Ελληνική γεωμετρική άλγεβρα ακριβώς σαν μια μετάφραση της Βαβυλωνιακής άλγεβρας στη γλώσσα της γεωμετρίας. Βλέπω τώρα ότι η άποψη αυτή είναι εν μέρει σωστή, και ότι η Ελληνική γεωμετρική άλγεβρα ήταν το αποτέλεσμα μιας σύνθεσης ανάμεσα σε παλαιότερες γεωμετρικές παραδόσεις και στην Βαβυλωνιακή άλγεβρα.»*

Στη συνέχεια του βιβλίου του ο van der Waerden συνοψίζοντας την αναθεωρημένη αυτή άποψη για την προέλευση της «γεωμετρικής άλγεβρας» παραθέτει το εξής:[252]

> *«[...] οι Έλληνες συνδύασαν δύο παραδόσεις, που δημιουργήθηκαν και οι δύο στη Νεολιθική Εποχή: μια παράδοση διδασκαλίας των μαθηματικών μέσω προβλημάτων με αριθμητικές λύσεις, και μια γεωμετρικών κατασκευών και αποδείξεων. Η αλγεβρική παράδοση μεταβιβάστηκε κυρίως από τους Βαβυλώνιους και η γεωμετρική παράδοση πιθανώς έφτασε στην Ελλάδα μέσω της Αιγύπτου. Επίσης, στο βασίλειο των Ινδοευρωπαϊκών γλωσσών υπήρχε μια παράδοση γεωμετρικών κατασκευών βωμών, μέρος της οποίας διατηρήθηκε από τους Έλληνες στις Μυκήνες και την Κρήτη. Ίχνη αυτής της παράδοσης διατηρήθηκαν στις Ελληνικές Ιστορίες σχετικά με το "διπλασιασμό του κύβου". Υπενθυμίζουμε ότι η αρχή αυτού του προβλήματος ανάγεται στον βασιλιά Μίνωα της Κρήτης, ο οποίος ζητούσε να διπλασιάσει το μέγεθος ενός βωμού χωρίς να καταστρέψει την ωραία μορφή του. Έτσι, έχουμε τρεις πιθανούς δρόμους μεταφοράς, δηλαδή μέσω της Βαβυλώνας, της Αιγύπτου, και των Μυκηνών-Κρήτης.»*

Ο Δανός ιστορικός και ερευνητής των μαθηματικών, ο Jens Høyrup στις αρχές της δεκαετίας του 1980 άρχισε να μελετά πιο προσεκτικά τη μαθηματική ορολογία στα Βαβυλωνιακά κείμενα. Το 2002 δημοσίευσε το τελικό αποτέλεσμα του έργου στο βιβλίο του *Lengths, Widths, Surfaces*. Στο άρθρο του «*What is "geometric algebra", and what has it been in historiography?*» αναφέρει ότι:[253]

> *«Δεν βρήκε καμία "γεωμετρική άλγεβρα" στα μαθηματικά που δημιουργήθηκαν από τότε που η "άλγεβρα" πήρε το όνομά της, αν όχι απαραίτητα το νόημά της. Εάν υπάρχει λογική στο να μιλήσουμε για "γεωμετρική άλγεβρα", τότε αυτό θα έπρεπε να γίνει ως περιγραφή τεχνικών που προηγήθηκαν του al-Khwārizmī, και αυτό ακριβώς έκαναν όσοι μίλησαν γι' αυτήν, με εξαίρεση τον Rashed και άλλους λιγότερο σημαντικούς.*

[250] Βλ. την άποψη του Heath στην αρχή της ενότητας 2.3.3.
[251] Θωμαΐδης, 1993, 43κ.ε.
[252] ό.π., 44
[253] Høyrup, 2017, 130κ.ε.

Δεδομένου ότι κανένας από όσους παρήγαγαν μαθηματικά εκείνη την εποχή δε θα μπορούσε να σκεφτεί ότι ασχολείται με ένα είδος άλγεβρας, η "γεωμετρική άλγεβρα" θα μπορούσε απλώς να είναι ένα ερμηνευτικό εργαλείο και κατά συνέπεια ένα εργαλείο που χειρίζονται οι ιστορικοί των μαθηματικών.»

Το έργο του Høyrup για τη Βαβυλωνιακή άλγεβρα θα το αναλύσουμε στην επόμενη ενότητα.

Τέλος, οι ιστορικοί Μιχάλης Σιάλαρος και Γιάννης Χριστιανίδης στο άρθρο τους *«Situating the Debate on "Geometrical Algebra" within the Framework of Premodern Algebra»* που δημοσιεύτηκε το 2016 σημειώνουν ότι οι δύο πλευρές της συζήτησης για τη «γεωμετρική άλγεβρα», εκτός από τις έντονες διαφορές τους, μοιράζονται και κάποια κοινά στοιχεία που δεν μπορεί κάποιος να τα αγνοήσει. Το πρώτο κοινό στοιχείο που αποκαλύπτεται από τα γραπτά και των δύο πλευρών είναι η ανάγκη να παρουσιάσουν έναν ορισμό για την άλγεβρα και βασιζόμενοι σε αυτόν να ορίσουν τη *«γεωμετρική άλγεβρα»*.[254] Συγκεκριμένα αναφέρουν:[255]

«[…] είναι προφανές ότι και οι δύο πλευρές της συζήτησης σε κάποιο σημείο του διαλόγου προσπάθησαν να προσφέρουν έναν λειτουργικό ορισμό της άλγεβρας. Είναι επίσης σαφές ότι αν και προτάθηκαν διαφορετικές περιγραφές της άλγεβρας και κατά συνέπεια της αλγεβρικής λογικής, μια από τις κύριες ανησυχίες κάθε πλευράς ήταν να παράσχει έναν ιστορικά κατάλληλο ορισμό.»

Ένα άλλο κοινό στοιχείο των συζητήσεων για τη *«γεωμετρική άλγεβρα»* είναι ότι καμιά πλευρά δεν έλαβε υπόψη τη διάκριση μεταξύ της πρακτικής της επίλυσης προβλημάτων και της απόδειξης θεωρημάτων. Διαβάζοντας τα κείμενα της συζήτησης μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι και οι δυο πλευρές συνέδεσαν την αλγεβρική συλλογιστική κυρίως με θεωρητικές έρευνες όπως αυτές που εμπλέκονται σε αποδείξεις θεωρημάτων. Για παράδειγμα ο van der Waerden αναφέρει:[256]

«Έτσι, η "γεωμετρική άλγεβρα" είναι χωρίς αμφιβολία ένας αντιφατικός όρος όπως ισχυρίζεται ο Unguru, αλλά είναι μια πραγματικότητα. Είναι μια άλγεβρα που περιορίζεται σε τμήματα γραμμών και εμβαδών, και ως εκ τούτου μέρος της άλγεβρας, αλλά είναι επίσης μέρος της γεωμετρίας, δηλαδή ένα σύνολο γεωμετρικών θεωρημάτων και λύσεων προβλημάτων, στα οποία εξετάζονται μόνο τμήματα γραμμών, ορθογώνια και ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Παραδείγματα γεωμετρικής άλγεβρας είναι οι προτάσεις II.1-6 και II.9-10 του Ευκλείδη.»

Ως συνέπεια αυτής της προσέγγισης δεν δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή στον ιστορικό σκοπό για τον οποίο σχεδιάστηκε η άλγεβρα που ήταν *«να χρησιμεύσει ως μια γενική μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων στην αριθμητική.»*[257]

[254] Σιάλαρος, 2016, 130.
[255] ό.π., 131.
[256] ό.π., 132.
[257] ό.π.

Τέλος και οι δύο πλευρές προσδιόρισαν «ίχνη» άλγεβρας στις εναλλακτικές αποδείξεις II.2—10 του Ευκλείδη που προτείνει ο Ήρων της Αλεξάνδρειας. Συγκεκριμένα, ο Σιάλαρος και ο Χριστιανίδης αναφέρουν:[258]

> *«ένα τρίτο κοινό στοιχείο είναι ότι και οι δύο πλευρές αναγνώρισαν αλγεβρικά στοιχεία στις εναλλακτικές παρουσιάσεις των Στοιχείων II.2-10 του Ευκλείδη που διατηρήθηκαν σε ένα σχόλιο που εκπόνησε ο al- Nayrizi (τον ένατου με δέκατου αιώνα μ.Χ.) και αποδόθηκε στον Ήρων της Αλεξάνδρειας (τον πρώτο αιώνα μ.Χ.). Ακριβώς κάτω από αυτήν την ερμηνεία, ο Heath περιγράφει τις αποδείξεις ως "ημί-αλγεβρικές" και ο Mueller γράφει ότι "τα επιχειρήματα του Ήρωνα είναι πιο αλγεβρικά από το βιβλίο II των Στοιχείων του Ευκλείδη". Αν και ο Fried και ο Unguru παρέχουν πιο προσεκτικές περιγραφές, ταξινομούν επίσης τις αποδείξεις του Ήρων ως τις πρώτες προς την κατεύθυνση της γεωμετρικής άλγεβρας.»*

2.4 Η ερμηνεία του Jens Høyrup για τη Βαβυλωνιακή άλγεβρα

Στα τέλη της δεκαετίας του 1920 όταν ανακαλύφθηκε ότι η διαδικασία επίλυσης που ακολουθούσαν οι Βαβυλώνιοι σε ορισμένα κείμενα αντιστοιχούσε στη λύση εξισώσεων δευτέρου βαθμού, ένα μεγάλο μέρος της τεχνικής ορολογίας δεν είχε ακόμα μεταφραστεί. Γενικά, θεωρήθηκε και ήταν αποδεκτό για εξήντα χρόνια ότι οι έννοιες που αποτελούσαν τη βάση των προβλημάτων ήταν αριθμητικές. Έτσι, οι σχετικές πράξεις που περιλαμβάνονταν σε αυτά τα προβλήματα ήταν αριθμητικές προσθέσεις, αφαιρέσεις, πολλαπλασιασμοί και εξαγωγές ριζών. Ακόμη, πίστευαν ότι οι συνεχείς αναφορές σε μήκη, πλάτη και εμβαδά δεν ήταν τίποτε άλλο παρά ένας συμβολισμός για τους αριθμητικούς αγνώστους και τα αποτελέσματά τους (εμείς σήμερα τους συμβολίζουμε x, y $κ.λπ.$).[259] Έτσι, για 60 χρόνια οι ιστορικοί παρουσίαζαν την Παλαιά Βαβυλωνιακή άλγεβρα με κάτι που έμοιαζε πολύ με τη σημερινή άλγεβρα (π.χ. προβλήματα με εξισώσεις δευτέρου βαθμού).

Σύμφωνα με τον Høyrup, η πιο ακριβής ανάλυση των μαθηματικών κειμένων της Παλαιάς Βαβυλώνας δείχνει ότι αυτή η άποψη είναι λανθασμένη. Τα λεγόμενα αλγεβρικά κείμενα, τα οποία είναι αρκετά λεπτομερή ώστε να επιτρέπουν μια τέτοια ανάλυση, δείχνουν ότι δεν είναι απεικονίσεις αλγεβρικών υπολογισμών, όπως τους γνωρίζουμε. Φαίνεται να περιγράφουν έναν συγκεκριμένο τύπο γεωμετρικού χειρισμού ο οποίος έχει αναλυτικό χαρακτήρα, όπως η σύγχρονη αλγεβρική εξίσωση.[260]

Στις αρχές της δεκαετίας του 1980 ο Høyrup άρχισε να εξετάζει πιο προσεκτικά τη μαθηματική ορολογία των Βαβυλωνιακών κειμένων και προχώρησε σε ριζική επανεξέταση των μεταφράσεων των μαθηματικών κειμένων. Το 2002 εκδόθηκε το

[258] ό.π.
[259] Høyrup, 2018, 66κ.ε.
[260] Høyrup, 2010, 89κ.ε.

βιβλίο του *Lengths, Widths, Surfaces* το οποίο σύμφωνα με τον ίδιο είναι το τελικό αποτέλεσμα του έργου του. Ο Høyrup απέδειξε ότι στα Βαβυλωνιακά κείμενα υπάρχουν:[261]

- Δύο διαφορετικές (όχι συνώνυμες) πράξεις που είχαν ερμηνευθεί ως πρόσθεση.
- Ομοίως, υπήρχαν δύο διαφορετικές αφαιρέσεις (μόνο μία από τις οποίες είναι η αντίστροφη της μιας από τις δυο προσθέσεις)
- Δύο διαφορετικά "μισά"
- Τέσσερις διακριτοί "πολλαπλασιασμοί".

Αυτά δεν έχουν νόημα στην αριθμητική προσέγγιση του κειμένου μέσα στην οποία υπάρχει χώρος μόνο για μία από κάθε πράξη. Αν όμως οι λέξεις του κειμένου που μεταφράζονται ως μήκη, πλάτη, τετράγωνα και εμβαδά, δηλαδή να χρησιμοποιηθούν με την κυριολεκτική τους ερμηνεία και όχι σαν αριθμοί, τότε τα λόγια του Høyrup που αναφέραμε παραπάνω γίνονται κατανοητά, όπως θα δούμε παρακάτω. Η Βαβυλωνιακή άλγεβρα αποδεικνύεται ότι είναι μια τεχνική «αποκοπής και επικόλλησης» (cut-and-space) που χειρίζεται μετρήσιμα τμήματα γραμμών και εμβαδά σε αναλυτικές διαδικασίες οι οποίες στα αριθμητικά τους βήματα, αντιστοιχούν στις διαδικασίες της δικιάς μας άλγεβρας. [262]

Στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων του ο Høyrup έχει χρησιμοποιήσει την αρχή της «σύμμορφης μετάφρασης» (conformal translation)[263] σύμφωνα με την οποία οι διαφορετικοί όροι μεταφράζονται πάντα διαφορετικά και ο ίδιος όρος (εκτός αν η λέξη χρησιμοποιείται σε ξεχωριστές λειτουργίες) μεταφράζεται πάντα με τον ίδιο τρόπο. Οι μεταφράσεις επιλέγονται έτσι ώστε να ανταποκρίνονται στη γενική έννοια των αρχικών όρων.[264]

2.4.1 Οι μαθηματικές πράξεις

Τα κείμενα είναι γραμμένα σε σφηνοειδή γραφή, και πιο συγκεκριμένα στη Βαβυλωνιακή διάλεκτο της Ακκαδικής γλώσσας. Οι λέξεις μπορούν είτε να αποδίδονται σε φωνητική γραφή, όπου κάθε σημάδι αντιπροσωπεύει μια συλλαβή, είτε μέσω λογογραμμάτων, όπου κάθε σημάδι αντιπροσωπεύει μια ολόκληρη λέξη (συνήθως χωρίς ένδειξη γραμματικής μορφής, παρόλο που γραμματικά ή φωνητικά συμπληρώματα μπορούν να παρέχουν αυτές τις πληροφορίες).

Όπως αναφέρει ο Høyrup αυτό το είδος της μετάφρασης, «σύμμορφη μετάφραση», κάνει την ανάγνωση των κειμένων λίγο περίεργη όπως θα δούμε παρακάτω, αλλά μπορεί κάποιος να την συνηθίσει.

[261] ό.π.
[262] ό.π., 2018, 67.
[263] Δηλαδή διατήρησε τη δομή του πρωτότυπου κειμένου.
[264] Høyrup., 2002, 41.

Προσθέσεις:

Οι όροι που οι ιστορικοί θεωρούσαν ως συνώνυμα ονόματα για την πρόσθεση αποδεικνύεται ότι εμπίπτουν σε δύο ξεχωριστές ομάδες και ως εκ τούτου καλύπτουν δύο διαφορετικές πράξεις οι οποίες είναι:[265]

- *για να προσαρτήσει* (to append), αυτή η πράξη δηλώνεται στη Βαβυλωνιακή γραφή με τον Ακκαδικό όρο *wasabum* και το λογόγραμμα DAH. Είναι μια ασύμμετρη πράξη, όπου μια οντότητα ενώνεται με μια άλλη και χρησιμοποιείται μόνο για συγκεκριμένες προσθέσεις, όπου ένα από αυτά που προστίθενται απορροφάται στο άλλο το οποίο διατηρεί την ταυτότητά του αυξάνοντας παράλληλα το μέγεθός του. Για παράδειγμα, στον τραπεζικό μας λογαριασμό όταν προστίθεται ένας τόκος, ο τραπεζικός λογαριασμός παραμένει δικός μας μετά την πρόσθεση του τόκου. Δηλαδή ο λογαριασμός δεν έχασε την ταυτότητά του, απορρόφησε τον τόκο και παράλληλα αυξήθηκε.

- *για να συσσωρεύσει* (to accumulate), αυτή η πράξη στη Βαβυλωνιακή γραφή δηλώνεται με τον Ακκαδικό όρο *kamarum*/GAR.GAR. Είναι μια συμμετρική πράξη συλλέγοντας σε ένα άθροισμα δύο μεγέθη ή τους αριθμούς μέτρησής τους. Στη δεύτερη περίπτωση, η λειτουργία δεν χρειάζεται να είναι συγκεκριμένη και μπορούν να συλλεχθούν μεγέθη διαφορετικών ειδών (μήκη και εμβαδά – εμβαδά και όγκοι – εργαζόμενοι, τούβλα και εργάσιμες ημέρες).

Αφαιρέσεις:

Όπως αναφέρθηκε υπάρχουν δυο ειδών αφαιρέσεις και αυτές είναι:[266]

- *να σκίσει* (to tear off), αυτή η πράξη στα Βαβυλωνιακά κείμενα δηλώνεται με τον Ακκαδικό όρο *nasahum*/ZI, και έχει συνώνυμο το *να κόψει* (cutting off), *harasum*. Είναι συγκεκριμένη πράξη και είναι η αντίστροφη πράξη της προσάρτησης. Δηλαδή μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο όταν ο αφαιρετέος είναι πραγματικά μέρος της οντότητας από την οποία αφαιρείται.

- *σύγκριση* (comparison), αυτή η πράξη περιέχει τον Ακκαδικό όρο *eli…watarum*/UGU..DIRIG. Είναι και αυτή συγκεκριμένη πράξη και χρησιμοποιείται για να πει πόσο ένα μέγεθος A υπερβαίνει ένα άλλο μέγεθος B όπου το B δεν περιέχεται στο A, όπως για παράδειγμα ένα μήκος υπερβαίνει ή υπολείπεται μιας επιφάνειας. Τέλος, δεν είναι η αντίστροφη πράξη της συσσώρευσης και δεν μπορεί να είναι η αντίστροφη πράξη οποιασδήποτε πρόσθεσης.

[265] ό.π., 19.
[266] ό.π., 20.

Πολλαπλασιασμοί:

Τέσσερις διαφορετικές ομάδες όρων έχουν γίνει κατανοητές ως πολλαπλασιασμοί και αυτές είναι:[267]

- *βήματα του* (steps of), ο Βαβυλωνιακός συμβολισμός αυτής της πράξης είναι το λογόγραμμα A.RA. και είναι ο όρος που χρησιμοποιείται στους πίνακες πολλαπλασιασμού, «5 βήματα του 6 είναι 30». Επομένως είναι ένας πολλαπλασιασμός ενός αριθμού με έναν άλλο αριθμό.

- *για να ανυψωθεί* (to raise), αυτή η πράξη περιέχει τον Ακκαδικό όρο *nasum*/IL. Ο όρος αυτός ορίζει τον προσδιορισμό ενός συγκεκριμένου μεγέθους μέσω του πολλαπλασιασμού. Χρησιμοποιείται για όλους τους πολλαπλασιασμούς με τις τεχνικές σταθερές και τις μετρολογικές μετατροπές. Ειδικότερα για τον υπολογισμό των όγκων μέσω της βάσης και του ύψους και για τον προσδιορισμό των περιοχών όταν αυτό δεν συνεπάγεται την κατασκευή ενός ορθογωνίου (δηλαδή για τρίγωνα και τραπέζια). Η αρχική χρήση του όρου είναι για τον υπολογισμό των όγκων, όπου η βάση είναι πάντα «ανυψωμένη» στο ύψος, αργότερα μεταφέρθηκε μεταφορικά και σε άλλους υπολογισμούς.

- *να επαναλάβω ή να επαναλάβω μέχρι n* (to repeat or to repeat until n), αυτή η πράξη δηλώνεται στα Βαβυλωνιακά κείμενα με τον Ακκαδικό όρο *esepum*/TAB. Η γενική έννοιά του είναι να διπλασιαστεί (π.χ. ένα ορθογώνιο τρίγωνο να μετατραπεί σε ορθογώνιο)/ να αναπαράγει. Η λειτουργία του είναι μια συγκεκριμένη επανάληψη που συχνά λέγεται να είναι μέχρι n (*ana n)* όπου το n είναι $(2 \leq n \leq 9)$ γι' αυτό και ο Høyrup το μεταφράζει ως για να επαναλάβω μέχρι n.

- *για να κρατήσει* (δύο τμήματα) (to make hold), αυτή η πράξη συμβολίζεται στα Βαβυλωνιακά κείμενα με τον Ακκαδικό όρο *sutakulum*/GU.GU. Αυτή η ομάδα δεν είναι γνήσιος πολλαπλασιασμός, γιατί δεν αντιπροσωπεύει τον πολλαπλασιασμό ενός αριθμού με έναν άλλο η μια μετρημένη ποσότητα με ένα αριθμό ή με άλλη ποσότητα. Ο κεντρικός όρος *sutakulum* έχει την έννοια να κάνει δυο τμήματα να κρατήσουν το ένα το άλλο, όπως για παράδειγμα οι πλευρές (*a και b*) ενός ορθογωνίου. Επίσης, όταν το πρόβλημα λέει «*a και b τα έχω κρατήσει*» η επόμενη φράση είναι «*έφτιαξα μια επιφάνεια*». Αυτή η ομάδα επομένως αναφέρεται στη γεωμετρική λειτουργία και συγκεκριμένα στην κατασκευή ενός ορθογωνίου.

Τετραγωνισμός:

Σε κάποιες πλάκες επαναλαμβάνεται ο ίδιος πολλαπλασιασμός, ωστόσο δεν υπάρχει κάποιος συγκεκριμένος όρος για τις δυνάμεις των αριθμών. Ο τετραγωνισμός (squaring) ως μια συγκεκριμένη διαδικασία είναι γεωμετρικός τετραγωνισμός, όπως αναφέρει ο Høyrup. Ο όρος για τη διαμόρφωση του τετραγώνου είναι *mithartum*. Πιο συγκεκριμένα, αυτός ο όρος αναφέρεται σε μία αντιπαράθεση (confrontation)

[267] ό.π., 21κ.ε.

των ίσων, δηλαδή ίσες πλευρές και η οποία όταν εκφράζεται σαν αριθμός συμπίπτει με την πλευρά του τετραγώνου. Για εμάς σύμφωνα με τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη ένα τετράγωνο είναι ένα σχήμα, δηλαδή κάτι που έχει όριο ή όρια. Κατά συνέπεια το τετράγωνο είναι μια επιφάνεια και έχει μια πλευρά (π.χ $4m^2$ με πλευρά $2m$). Από την άλλη πλευρά, ένα Βαβυλωνιακό *mithartum* κατανοείται ως αντιπαράθεση των ίσων πλευρών και άρα αναφέρεται στο τετραγωνικό πλαίσιο, είναι η πλευρά και έχει μια επιφάνεια ($2m$ και έχει επιφάνεια $4m^2$).[268]

Το *mithartum προέρχεται από το ρήμα maharum,* «για να αντιμετωπίσει», (to confront) με την έννοια να αντιμετωπίσει ένα ομότιμο, ένα ισοδύναμο ή ένα αντίστοιχο. Ένα αντίστοιχο ρήμα είναι το *sutamhurum,* που ο Høyrup το μεταφράζει *«για να κάνει το s αντιμέτωπο με τον εαυτό του»* και υποδεικνύει την κατασκευή ενός τετραγώνου με πλευρά s. Τέλος, συχνά ο όρος για την κατασκευή ενός ορθογωνίου χρησιμοποιείται και για την κατασκευή τετραγώνου. Για παράδειγμα, για την κατασκευή ενός τετραγώνου με πλευρά a το κείμενο λέει: *«να κάνουν τα* a και a *ένα κράτημα»*- (to make a and a hold), *«να κάνει το* a *κράτημα μαζί με τον εαυτό του»,* ή *«να κάνει το* a *ένα κράτημα».*[269]

Διαίρεση:

Ο Høyrup αναφέρει ότι ένας επανειλημμένα επαναλαμβανόμενος ισχυρισμός από τους ιστορικούς είναι ότι οι Βαβυλώνιοι δεν γνώριζαν τη διαίρεση. Αυτή η άποψη σύμφωνα με τον ίδιο είναι διφορούμενη και μόνο εν μέρει αληθής. Συγκεκριμένα αναφέρει:[270]

«Φυσικά και ήξεραν τη διαίρεση "Τι πρέπει να υψώσω στο B το οποίο να μου δίνει A" και πολλά μαθηματικά κείμενα διατυπώνουν αυτό το ερώτημα. Ωστόσο, η διαίρεση δεν ήταν πράξη για αυτούς».

Στη διαίρεση οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποίησαν τον πολλαπλασιασμό με τον αντίστροφο του διαιρέτη. Πιο συγκεκριμένα, από το IGI του, το αντίστροφο όπως αναφέρεται σε έναν πίνακα αντιστρόφων. Η εύρεση του IGI (πιθανώς από τον πίνακα που απομνημονεύτηκε στο σχολείο) αναφερόταν ως *«απόσπαση»* του, πιθανώς να το θεωρούσαν ως απόσπαση του 1 από ένα σύνολο των n μερών.[271]

Στην πράξη ήταν πάντα δυνατό να βρεθεί το IGI, καθώς οι σταθερές στα προβλήματα επιλέχθηκαν έτσι ώστε να είναι «κανονικοί αριθμοί», δηλαδή αριθμοί των οποίων ο αντίστροφος ήταν ένας πεπερασμένος εξηνταδικός αριθμός. Από την άλλη πλευρά, στα μαθηματικά σχολικά κείμενα η διαίρεση με ακανόνιστους αριθμούς εμφανίζεται ξανά και ξανά. Σε αυτή την περίπτωση το κείμενο θέτει ακριβώς την ερώτηση διαίρεσης *«Τι πρέπει να υψώσω στο B το οποίο να μου δίνει A»* και δηλώνει αμέσως την απάντηση.[272]

[268] ό.π., 25.
[269] ό.π.
[270] ό.π., 2010, 92.
[271] ό.π.
[272] ό.π.

Διχοτόμηση:

Τα μισά, όπως αναφέρθηκε, ήταν δύο. Το ένα είναι το «κανονικό» μισό, ένα κλάσμα που ανήκει στην ίδια οικογένεια με το $1/3$, το $1/4$, κ.λπ.[273] Υπάρχει ένας συγκεκριμένος όρος για το «κανονικό» $1/2$ και αυτός είναι το *mislum*/SU.RI.A. Αυτού του είδους το μισό χρησιμοποιείται για παράδειγμα όταν το πλάτος ενός ορθογωνίου είναι το μισό από το μήκος του ή να υποδείξει μια μέτρηση.[274]

Ωστόσο, εκτός από το «κανονικό» μισό στα κείμενα χρησιμοποιείται και ένα άλλο είδος διχοτόμησης (μισό) που ο Høyrup το μεταφράζει ως «φυσικό μισό», (natural half) ή «απαραίτητο μισό», (necessary half). Στα Βαβυλωνιακά κείμενα εμφανίζεται ως *bamtum* χωρίς κάποιο λογόγραμμα. Αυτού του είδους το μισό χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι κάτι είναι σπασμένο αναγκαστικά σε δύο ίσα μέρη για παράδειγμα, όταν η βάση ενός τριγώνου διχοτομείται για τον υπολογισμό του εμβαδού του. Το ίδιο συμβαίνει και με το άθροισμα των βάσεων του τραπεζίου ή όταν η ακτίνα υπολογίζεται από τη διάμετρο του κύκλου. Αυτό το φυσικό μισό ο Høyrup το ορίζει ως *moiety (bamtum)* και έχει την έννοια του να σπάσει (to break) σε δύο ίσα μέρη.[275]

2.4.2 Γεωμετρική ορολογία και τυποποιημένη αναπαράσταση

Οι μαθηματικές πράξεις που αναφέρονται παραπάνω χρησιμοποιούνται μέσα σε κείμενα και είναι οργανωμένες με μια συγκεκριμένη λογική δομή. Τα Βαβυλωνιακά κείμενα είναι λεκτικά και ταυτίζουν άγνωστες ποσότητες με λέξεις. Ένα κοινό χαρακτηριστικό που έχουν με το σύγχρονο αλγεβρικό υπολογισμό είναι ότι αυτές οι άγνωστες ποσότητες μπορεί να είναι οποιουδήποτε είδους, όπως για παράδειγμα βάρη ή αποστάσεις και αναπαρίστανται από μία συγκεκριμένη κατηγορία ποσοτήτων. Ο τρόπος με τον οποίο περιγράφονται οι άγνωστες ποσότητες μέσα στο κείμενο έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία σχέσεων που τις περιέχουν. Για παράδειγμα, στη σύγχρονη άλγεβρα αυτή η αναπαράσταση είναι αριθμητική και ο τρόπος σύνταξης του κειμένου αποσκοπεί στη δημιουργία αλγεβρικών σχέσεων.[276]

Η Παλαιά Βαβυλωνιακή «άλγεβρα» ασχολείται με τετράγωνα, ορθογώνια και τις πλευρές τους. Αυτά αρχικά ερμηνεύτηκαν από τους ιστορικούς ως απλοί αριθμητικοί άγνωστοι. Αυτό σύμφωνα με τον Høyrup ήταν λάθος, καθώς η αναπαράσταση των Βαβυλωνιακών κειμένων ήταν γεωμετρική. Συγκεκριμένα συγκροτήθηκε από τη γεωμετρία μετρήσιμων τμημάτων και επιφανειών. Σε κάθε περίπτωση, η βασική ορολογία είναι γεωμετρική και περιλαμβάνει τα εξής:[277]

[273] ό.π.
[274] ό.π., 2002, 31.
[275] ό.π., 31κ.ε.
[276] ό.π., 33κ.ε.
[277] Høyrup, 2002, 34κ.ε.

- Τα *ορθογώνια,* στα κείμενα γίνονται κατανοητά ως σχήματα τα οποία καθορίζονται από δυο διαστάσεις το μήκος με το λογόγραμμα US και το πλάτος με το λογόγραμμα SAG.

- Τα *τετράγωνα,* όπως αναφέρθηκε ο βασικός Ακκαδικός όρος είναι το *mithartum,* όπου ο Høyrup το μεταφράζει ως «αντιπαράθεση» (confrontation) και ορίζει το τετραγωνικό σχήμα των ίσων πλευρών (δηλαδή το πλαίσιο, όχι το περιεχόμενο) και παραμετροποιείται από το μήκος της πλευράς.

- Το *εμβαδό* του τετραγώνου όσο και του ορθογωνίου καθώς και άλλων σχημάτων εκφράζεται με το λογόγραμμα A.SA. ή με τον Ακκαδικό όρο *eqlum.* Η γενική έννοια αυτής της λέξης είναι χωράφι/πεδίο ή ανοιχτή περιοχή και ο Høyrup το μεταφράζει ως επιφάνεια (surface).

Παρατηρούμε ότι όντως όλη η ορολογία είναι γεωμετρική ο Høyrup συγκεκριμένα αναφέρει ότι:[278]

«Όπως προκύπτει ήδη από αυτόν τον κατάλογο των βασικών όρων, η εν λόγω γεωμετρία είναι ιδιαίτερου είδους πρόκειται για μια γεωμετρία μετρήσιμων τμημάτων και των περιοχών που περιέχουν.»

Για να γίνουν κατανοητοί οι παραπάνω συμβολισμοί του Høyrup θα παρουσιάσουμε κάποια προβλήματα όπου εφαρμόζονται οι βασικές τεχνικές και μέθοδοι της Παλαιάς Βαβυλωνιακής άλγεβρας δηλαδή η μέθοδος αποκοπής και επικόλλησης (cut and space) του Høyrup. Στον παρακάτω πίνακα δίνεται το πρώτο πρόβλημα από τα είκοσι-τέσσερα προβλήματα που αναγράφονται στη Βαβυλωνιακή πλάκα *BM 13901.* Στην αριστερή στήλη απεικονίζεται η Βαβυλωνιακή γραφή και την αντίστοιχη μετάφραση του Høyrup ενώ στη δεξιά στήλη απεικονίζεται η μετάφραση στα Ελληνικά.

[278] ό.π., 2010, 92.

Παράδειγμα 1:

Πίνακας 12[279]

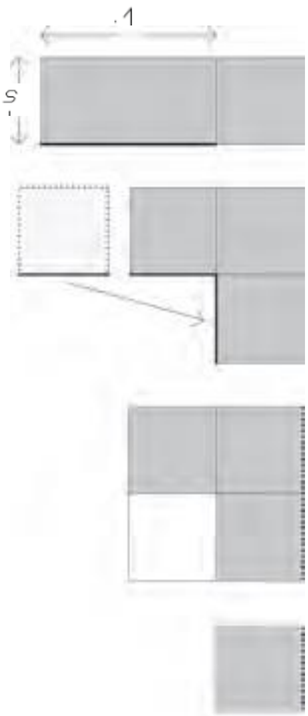
Η μετάφραση του Høyrup και η Βαβυλωνιακή γραφή	Ελληνική μετάφραση
1. The surfa[ce] and my confrontation I have accu[mulated]: 0;45 is it. 1, the projection, a.sa *u mi-it-har-ti ak-m[ur-m]a* 45.e 1 *wa-si-tam*	1. Το εμβαδό και η αντιπαράθεση που έχω συσσωρεύσει: 0;45 είναι. 1, η προβολή,
2. you posit. The moiety of 1 you break, 0;30 and 0;30 you make hold. *ıa-sa-ka-an ba-ma-at* 1 *te-ηe-pe* 30 *u* 30 *tu-us-ta-kal*	2. θέσε. Το moiety του 1 που σπάτε, 0;30 και 0;30 και κρατάτε. 3. 0;15 έως 0;45 προσαρτάτε: [από] 1, 1 είναι ίσο. 0;30 που έχετε κάνει κράτημα
3. 0;15 to 0;45 you append: [by] l, 1 is equalside. 0;30 which you have made hold *15 a-na* 45 *tu-sa-ab-ma* l-re] 1 ib.six 30 *sa tu-us-ta-ki-lu*	
4. in the inside of 1 you tear out: 0;30 the confrontation. *lib-ba* 1 *ta-na-sa-aη-ma* 30 *mi-it-hjar-tum*	4. στο εσωτερικό του 1 σκίζεις: 0;30 η αντιπαράθεση.

Στο πρώτο βήμα το πρόβλημα αναφέρει ότι «συσσωρεύει» το εμβαδό και την πλευρά του τετραγώνου («the surface» και «confrontation»), γεγονός που επιτρέπει στο συγγραφέα να προσθέσει τους αριθμούς μέτρησης για το εμβαδό και την πλευρά («αντιπαράθεση»). Για να επιτευχθεί μια τόσο συγκεκριμένη ερμηνεία, το κείμενο πρέπει να «θέσει», (posit), την «προβολή», (projection), 1 (που προεξέχει προς τα αριστερά στο σχήμα 3). Αυτό επιτρέπει να ερμηνευτεί το μέτρο s της πλευράς συγκεκριμένα ως ορθογώνια επιφάνεια ⊏⊐ (1,s), το οποίο μαζί με την επιφάνεια □ (s) του τετραγώνου γίνεται 0;45. Η προβολή «projection/*wasitum*» είναι ένα ουσιαστικό που προέρχεται από το *wasum*, όπου μεταφράζεται «για να βγει έξω», ορίζει μεταξύ άλλων κάτι που προεξέχει ή προβάλλεται, π.χ. από ένα κτίριο. Στα μαθηματικά κείμενα, η αξία του είναι πάντα 1.

Στη γραμμή 2, η εξωτερική «moiety» της προβολής (το απαραίτητο ή φυσικό μισό της όπως αναφέρθηκε στο συμβολισμό παραπάνω) σπάει και κάνει κράτημα, «make hold» δηλαδή τα δύο "moieties" γίνονται οι πλευρές ενός ορθογωνίου και συγκεκριμένα ενός τετραγώνου με επιφάνεια $0;30 \times 0;30 = 0;15$. Στην ίδια διαδικασία, το αρχικό ορθογώνιο □ (s) +⊏⊐ (1,s) μετατρέπεται στο σχήμα 3β (που μοιάζει με γνώμονα) με την ίδια επιφάνεια 0;45.

279 Høyrup, 2002, 50.

Στη γραμμή 3, το τετράγωνο με εμβαδό 0;15 είναι «προσαρτημένο» (όπως βλέπουμε στο σχήμα) στο γνώμονα που έχει εμβαδό 0;45, δημιουργώντας ένα νέο τετράγωνο με εμβαδό 0;45 + 0;15 = 1, 1 αντίστοιχα είναι η πλευρά. Από αυτό το τελευταίο 1 του οποίου το "moiety" 0;30 «που είχε κρατήσει» είναι «σχισμένο» αφήνοντάς μας με την αρχική (κάθετη) πλευρά του τετραγώνου, η οποία πρέπει ως εκ τούτου να είναι 1-0;30 = 0;3.

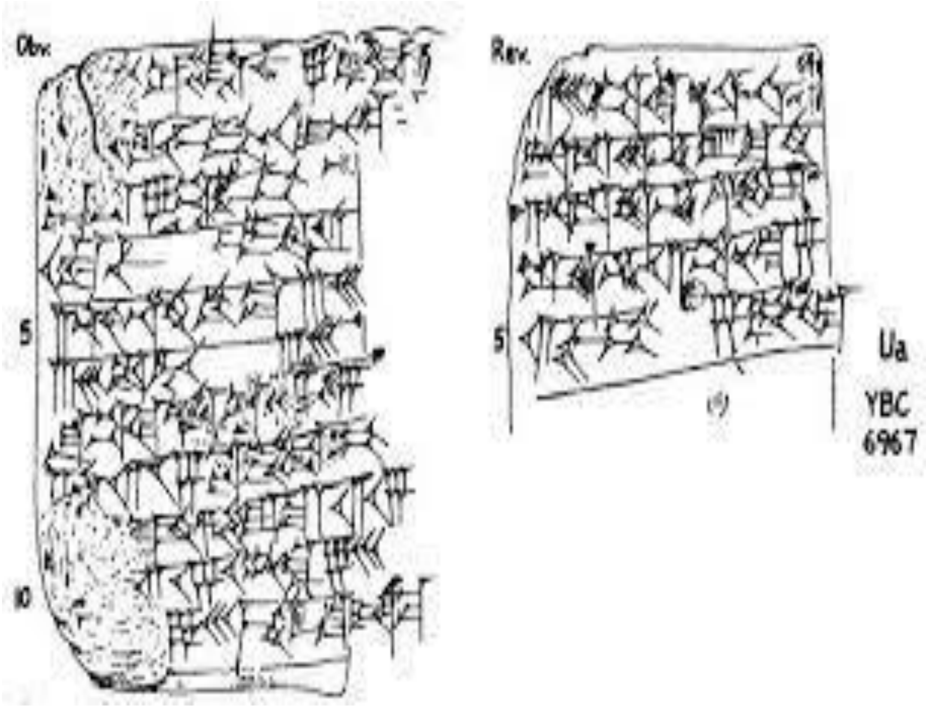


Σχήμα 3: Η διαδικασία επίλυσης της *BM 13901*[280]

Στα προβλήματα της Παλαιάς Βαβυλωνιακής περιόδου ήταν πιο συνηθισμένη η χρήση ορθογώνιων σχημάτων αντί τετραγώνων. Αυτά τα προβλήματα αφορούσαν τον υπολογισμό των πλευρών ενός ορθογωνίου του οποίου δίνεται το εμβαδό και το άθροισμα ή η διαφορά των δύο πλευρών του.

Το επόμενο παράδειγμα είναι από την πλάκα *YBC 6967* η οποία χρονολογείται στα τέλη του 19[ου] αιώνα π.Χ και ανήκει στη Βαβυλωνιακή συλλογή του Πανεπιστημίου του Yale. Η πλάκα είναι γραμμένη και στις δύο πλευρές (βλ. εικόνα 38) και περιέχει οδηγίες για την επίλυση ενός προβλήματος το οποίο αναφέρεται σε ένα ζεύγος αντιστρόφων.

[280] Høyrup, 2018, 67κ.ε.



Εικόνα 38: Η πλάκα *YBC 6967*[281]

Στον πίνακα 13 παρακάτω απεικονίζεται στην αριστερή στήλη η Βαβυλωνιακή γραφή και η αντίστοιχη μετάφραση του Høyrup ενώ στη δεξιά στήλη απεικονίζεται η μετάφραση στα Ελληνικά.

281 Robson, 2002, 116.

Παράδειγμα 2:

Πίνακας 13[282]

Η μετάφραση του Høyrup και η Βαβυλωνιακή γραφή	Ελληνική μετάφραση
Μπροστινή πλευρά	Μπροστινή πλευρά
1. [The *igib]um* over the *igum*, 7 it goes beyond *[igi.b]i e-li igi 7 i-ter*	1. Ένας αντίστροφος υπερβαίνει τον αντίστροφό του κατά 7.
2. [igum] and igibum what? *[igi] u igi.bi mi-nu-um*	2. Ποιος είναι ο αντίστροφος και ο αντίστροφός του?
3. Yo[u], 7 which the *igibum* *a[t-t]a 7 sa igi.bi*	3. Εσείς το 7 με το οποίο ο αντίστροφος
4. over the *igum* goes beyond *ugu igi i-te-ru*	4. υπερβαίνει τον αντίστροφό του
5. to two break: 3;30; *a-na si-na be-pe-ma 3.30*	5. σπάστε το: 3;30 (θα εμφανιστεί)
6. 3;30 together with 3;30 *3.30 it-ti 3.30*	6. 3;30 με το 3;30
7. make hold: 12;15. *su-ta-ki-il-ma 12.15*	7. κάντε το κράτημα: 12;15 (θα εμφανιστεί)
8. To 12;15 which comes up for you *a-na 12.15 sa i-li-kum*	8. το 12;15 το οποίο εμφανίζεται για εσάς
9. [1 the surf]ace append: 1, 12; 15. *[1 a.sa] si-ib-ma 1, 12;15*	9. προσαρτήστε το στην επιφάνεια 1: 1,12;15 (θα προκύψει)
10. [The equalside of 1]12;15' what? 8;30. *[lb.Sl 1]12.15 mi-nu-um 8.30*	10. ποια είναι η πλευρά του τετραγώνου με επιφάνεια 1,12;15? 8;30.
11. [8;30 and]8;30, its counterpart. lay down. *8.30 u] 8.30 me-he-er-su i-di-ma*	11. 8;30 και 8;30 το αντίστοιχό του αφήστε το κάτω
Πίσω πλευρά	Πίσω πλευρά
1. 3;30, the made-hold *3.30 ta-ki-il-tam*	1. το 3;30 που είχατε κάνει κράτημα
2. from one tear out, *i-na is-te-en u-su-ub*	2. σκίστε το από το ένα (8;30)
3. to one append. *a-na is-te-en si-ib*	3. προσαρτήστε το στο άλλο (8;30)
4. The first is 12, the second is 5. *is-te-en 12 sa-nu-um 5*	4. Το πρώτο είναι 12, το δεύτερο είναι 5
5. 12 is the *igibum*, 5 is the *igum*. *12 igi.bi 5 i-gu-um*	5. 12 είναι ο αντίστροφος 5 ο αντίστροφός του

[282] Høyrup, 2002, 55κ.ε.

Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο δύο αντιστρόφων είναι 1,00 ή οποιαδήποτε δύναμη του 60. Το πρόβλημα με σύγχρονό αλγεβρικό τρόπο μπορεί να λυθεί ως εξής: Αν θέσουμε τον αντίστροφο x και τον αντίστροφό του y, τότε από τις δύο πρώτες γραμμές του προβλήματος παίρνουμε το σύστημα:[283]

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x \cdot y = 60 \end{cases}$$

και η λύση του είναι η εξής:

$$x = w + \frac{7}{2}$$

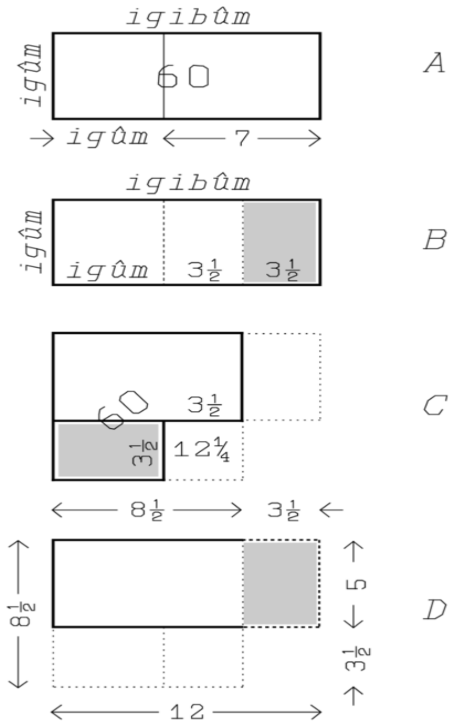
$$y = w - \frac{7}{2}$$

$$w = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 60}.$$

Από όπου παίρνουμε $\chi = 12 \; \kappa\alpha\iota \; y = 5$.

Ο Jens Høyrup υποστήριξε ότι μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα αυτό το πρόβλημα όχι ως αλγεβρικό, αλλά ως ένα συγκεκριμένο είδος γεωμετρίας «αποκοπής και επικόλλησης». Σύμφωνα με τον Høyrup θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το ζεύγος των αντιστρόφων του προβλήματος ως τις άγνωστες πλευρές ενός ορθογωνίου με εμβαδόν 1,00 (ή κάποια δύναμη του 60, βλ. σχήμα 4A). Η διαφορά των δύο αντιστρόφων όπως είδαμε είναι ίση με 7, μετριέται κατά μήκος της μεγαλύτερης πλευράς του παραλληλογράμμου και σπάει στη μέση. Επομένως, δημιουργούνται 2 ορθογώνια πλευράς 3;30 (σχήμα 4B). Το ένα από τα ορθογώνια επικολλάται από κάτω για να σχηματίσει ένα σχήμα σε μορφή L (γνώμονα) εμβαδού 60, όπως αρχικά και κάτω από το άλλο ορθογώνιο πλευράς 3;30 που έμεινε στη θέση του δημιουργείται ένα τετράγωνο πλευράς 3;30 και επομένως εμβαδού 12;15 (σχήμα 4C). Έτσι, δημιουργήθηκε ένα τετράγωνο εμβαδού 1,12;15 και πλευράς 8;30. Άρα, τα μήκη του αρχικού ορθογωνίου (δηλαδή το ζεύγος αντιστρόφων που ψάχνουμε) πρέπει να είναι $8;30 + 3;30 = 12$ και $8;30 - 3;30 = 5$ αντίστοιχα (σχήμα 4D)[284].

[283] Høyrup, 2002, 57.
[284] Robson, 2001, 184κ.ε.



Σχήμα 4: Η γεωμετρική ανάλυση της πλάκας *YBC 6967*[285]

Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι η μετάφραση του Høyrup είναι πιο δυσανάγνωστη από αυτή του Neugebauer, όπως το παραδέχεται άλλωστε και ο ίδιος ο Høyrup .[286] Τα τόσα διαφορετικά είδη πράξεων (2 προσθέσεις, 4 πολλαπλασιασμοί, 2 μισά) και η όλη ορολογία κάνουν τον αναγνώστη να δυσκολεύεται να την κατανοήσει, αλλά αν δουλέψει πάνω σε αυτή θα ανταμειφθεί ικανοποιητικά με τα αποτελέσματα.[287]

Για να γίνει αυτό αντιληπτό, συγκρίνουμε δύο μεταφράσεις ενός Παλαιού Βαβυλωνιακού προβλήματος από την πλάκα AO 8862. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται η μετάφραση του Neugebauer, όπως παρουσιάστηκε από τον van der Waerden στο βιβλίο του το 1954[288] καθώς και η μετάφραση του ίδιου κειμένου από τον Høyrup.

[285] Høyrup, 2002, 56.
[286] Βλέπε στην αρχή της ενότητας 2.4.1.
[287] Robson, 2008, 276.
[288] Την ερμηνεία του van der Waerden στο συγκεκριμένο κείμενο την είχαμε παρουσιάσει αναλυτικά στην ενότητα 2.3.1.

Παράδειγμα 3:

Πίνακας 14: Το πρόβλημα AO 8862 σε δυο μεταφράσεις[289]

van der Waerden	Høyrup
Μήκος, πλάτος. Πολλαπλασίασα το μήκος και το πλάτος κι έτσι βρήκα την επιφάνεια. Κατόπιν πρόσθεσα στην επιφάνεια την υπεροχή του μήκους από το πλάτος: 3,3. Έπειτα πρόσθεσα το μήκος και το πλάτος : 27. Ζητούνται το μήκος, το πλάτος, και η επιφάνεια. *(Δεδομένα:) 27 και 3,3 τα αθροίσματα.* *(απάντηση:) 15 το μήκος, 3,0 η επιφάνεια, 12 το πλάτος.* *Θα ακολουθήσεις τούτη τη μέθοδο:* $27 + 3{,}3 = 3{,}30$ $2 + 27 = 29$ *Πάρε το μισό του 29 (δηλαδή το 14; 30)* $14;30 \times 14;30 = 3{,}30;15$ $3{,}30;15 - 3{,}30 = 0;15$ *Η τετραγωνική ρίζα του 0;15 είναι 0;30* *Από το 14 αφαίρεσε το 2, που πρόσθεσες στο 27, το πλάτος. 12 είναι το πραγματικό πλάτος.* *Πολλαπλασίασα το 15, το μήκος, με το 12, το πλάτος* $15 \times 12 = 3{,}0$ *το εμβαδό* $15 - 12 = 3$ $3{,}0 + 3 = 3{,}3.$	Μήκος, πλάτος. Έχω κάνει το μήκος και το πλάτος να συγκρατήσουν το ένα το άλλο. Έχω χτίσει μια επιφάνεια. Πήγα γύρω από αυτό. Όσο το μήκος πήγε πέρα από το πλάτος, το έχω προσαρτηθεί μέσα στην επιφάνεια: 3,3. Γύρισα πίσω. Έχω συσσωρεύσει μήκος και πλάτος: 27. Ποιο είναι το μήκος, το πλάτος και η επιφάνεια; Εσείς, με τη διαδικασία σας, προσαρτήστε 27, τα πράγματα που συσσωρεύονται, μήκος και πλάτος, στο εσωτερικό 3,3: 3,30. Προσάρτηση 2 στο 27: 29. Σπάτε το moiety του, αυτό του 29:14;30 βήματα του 14;30 είναι 3,30;15. Από το εσωτερικό 3,30;15 σκίζεις 3,30: 0;15, το υπόλοιπο. Η ίση πλευρά (equal-side) του 0;15 είναι 0;30 Προσαρτάτε 0;30 σε ένα 14;30: 15, το μήκος. Σκίζεις 0;30 από το δεύτερο 14;30: 14 το πλάτος. Το 2 που το είχες προσαρτήσει στο 27 το σκίζεις από το 14 το πλάτος: 12 το πραγματικό πλάτος. 15 το μήκος και 12 το πλάτος τα κάνω κράτημα:: 15 βήματα του 12 είναι 3,00, το εμβαδό. Με τι 15, το μήκος, υπερβαίνει το 12, το πλάτος; Πηγαίνει πέρα από 3. Προσάρτησε 3 στο 3,00 το εμβαδό: 3,3.

Όπως είχαμε δει στην ερμηνεία του van der Waerden οι πρώτες γραμμές διαμορφώνουν το πρόβλημα: δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους, ο κάθε άγνωστος αντιπροσωπεύεται από ένα σύμβολο, ush και sag, μήκος και πλάτος αντίστοιχα. Αυτά τα σύμβολα αντιμετωπίζονται ως αλγεβρικά σύμβολα x και y και έχουν τα ίδια πλεονεκτήματα με τα δικά μας να παραμένουν αμετάβλητα ως προς την κλήση (είναι

[289] Robson, ό.π., 277.

άκλητα). Ως εκ τούτου, μπορούμε να θέσουμε με ασφάλεια το πρόβλημα με τη μορφή δυο αλγεβρικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} xy + x - y = 3,3 \\ x + y = 27 \end{cases} \quad (1)$$

Οι τελευταίες 4 γραμμές του κειμένου απλώς επαληθεύουν ότι οι αριθμοί x = 15 και y = 12 ικανοποιούν πράγματι την (1).[290] Αυτό που κάνουν οι Βαβυλώνιοι, βήμα προς βήμα, σε αριθμούς, ισοδυναμεί πράγματι με εφαρμογή των τύπων:

$$\begin{cases} xy' = P \\ x + y' = a \end{cases} \quad (2)$$

Όπου

$$x = \frac{1}{2}a + w \quad (3)$$

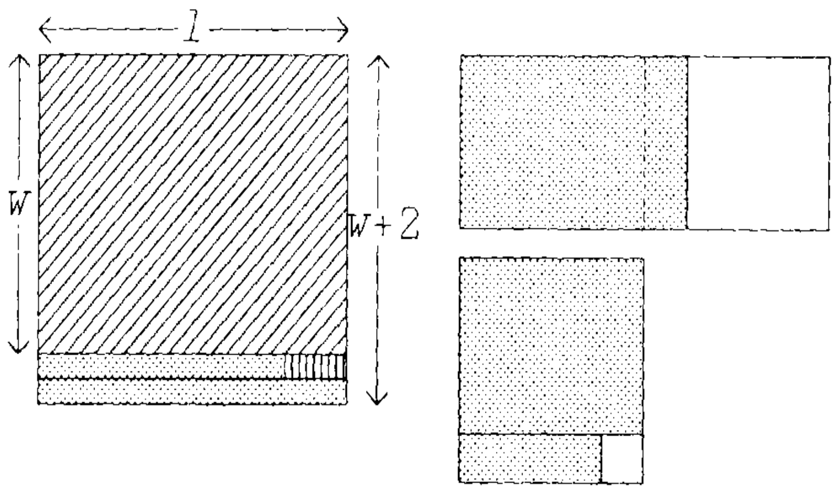
$$y' = \frac{1}{2}a - w \quad (4)$$

$$w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - P}. \quad (5)$$

Ωστόσο, δεν δίνουν αυτούς τους τύπους, απλώς δίνουν το ένα παράδειγμα μετά το άλλο, καθένα από τα οποία απεικονίζει την ίδια μέθοδο υπολογισμού.[291]

Στην ερμηνεία του van der Waerden «οι Βαβυλώνιοι» είναι ακριβώς όπως οι σύγχρονοι μαθηματικοί χρησιμοποιούν σύμβολα και εξισώσεις, πράγμα που σημαίνει ότι το πρόβλημα μπορεί «με ασφάλεια» να εκφραστεί ως σύγχρονη άλγεβρα. Ο Høyrup αντίθετα ξεκινάει την ερμηνεία του για το ίδιο πρόβλημα με ένα ερμηνευτικό διάγραμμα που δεν εμφανίζεται στην πλάκα (σχήμα 5).

[290] Για λεπτομέρειες στην ερμηνεία του van der Waerden βλ. ενότητα 2.3.1.
[291] Robson, ό.π., 276.



Σχήμα 5: Η γεωμετρική ανάλυση του Høyrup για την πλάκα AO 8862[292]

Το κείμενο αρχίζει δηλώνοντας ότι είναι χτισμένη μια ορθογώνια επιφάνεια. Αφού περπατήσει τις διαστάσεις του «προσαρτά» την υπέρβαση του μήκος από το πλάτος σε αυτό, το αποτέλεσμα είναι 3, 03. Στη συνέχεια, επιστρέφει πίσω και αναφέρει τη «συσσώρευση» του μήκους και του πλάτους να είναι 27. Η διαδικασία ξεκινάει με την «προσάρτηση» αυτών των τελευταίων «συσσωρευμένων πραγμάτων» (αυτά με τις κουκίδες στο σχήμα) στην επιφάνεια (μιλάμε για το αριστερό ορθογώνιο) από την οποία παίρνουμε ένα νέο ορθογώνιο με το ίδιο μήκος και πλάτος που έχει επαυξηθεί κατά 2. Η επιφάνεια είναι 3,03 + 27 = 3,30 και το άθροισμα του μήκους και του νέου πλάτους είναι προφανώς 27 + 2 = 29. Στη συνέχεια, το πρόβλημα λύνεται με την μέθοδο «περικοπής και επικόλλησης» όπως βλέπουμε στο σχήμα 5 δεξιά. Το μήκος υπολογίζεται 15 και το πλάτος 14 ως εκ τούτου, το αρχικό ή το «πραγματικό» πλάτος είναι 12.[293]

Όπως παρατηρούμε όλοι οι φαινομενικά αριθμοί του van der Waerden αποδεικνύονται ότι έχουν διάσταση και συγκεκριμένα είναι μήκη και επιφάνειες.[294]

Το επόμενο παράδειγμα που θα αναφέρουμε είναι ένα πρόβλημα που χρονολογείται την Ύστερη Βαβυλωνιακή περίοδο και συγκεκριμένα την περίοδο των Σελευκίδων (305- 65 π.Χ.). Το κείμενο είναι από την πλάκα BM 34568 και θα παρουσιάσουμε το πρόβλημα 9 από αυτήν με το σχολιασμό του Neugebauer και του Høyrup:[295]

[292] Høyrup, 2002, 169.
[293] ό.π., 169κ.ε.
[294] Robson, ό.π., 278.
[295] Η αγγλική μετάφραση του Neugebauer έγινε από την Eleanor Robson και εμείς το μεταφράσαμε στα Ελληνικά.

Παράδειγμα 4:

Πίνακας 15: Το πρόβλημα BM 34568 σε δυο μεταφράσεις[296]

Neugebauer	Høyrup
Μήκος και πλάτος μαζί κάνουν 14, η επιφάνεια είναι 48. Τα μεγέθη δεν είναι γνωστά. 14 φορές το 14, 3,16. 48 φορές το 4, 3,12. Αφαίρεσε το 3,12 από το 3,16, απομένει 4. Πόσες φορές πόσο κάνει 4; 2 φορές το 2, κάνει 4. Αφαίρεσε το 2 από το 14, το υπόλοιπο είναι 12. 12 φορές το 0,30, 6. 6 είναι το πλάτος. Στο 2 πρόσθεσε 6, γίνεται 8. 8 είναι το μήκος.	Έχω συσσωρεύσει το μήκος και το πλάτος: 14 και 48 η επιφάνεια. Αφού δεν ξέρεις, 14 βήματα από 14: 3,16. 48 βήματα από 4: 3,12. Αφαιρείται το 3,12 από 3,16: απομένουν 4. Τι βήματα από το τι μπορώ να κάνω έτσι ώστε να προκύψει 4; 2 βήματα από 2, 4 Σηκώνετε το 2 από το 14: 12 απομένει. 12 βήματα από 0;30, 6. Το πλάτος είναι 6. Ενώνεις το 2 με το 6: 8. Το μήκος είναι 8.

Η ερμηνεία του Neugebauer βασίζεται στη λύση του συστήματος:[297]

$$\begin{cases} l + w = 14 \\ lw = 48 \end{cases}$$

όπου το l και το w υπολογίζονται αντίστοιχα από του τύπους:

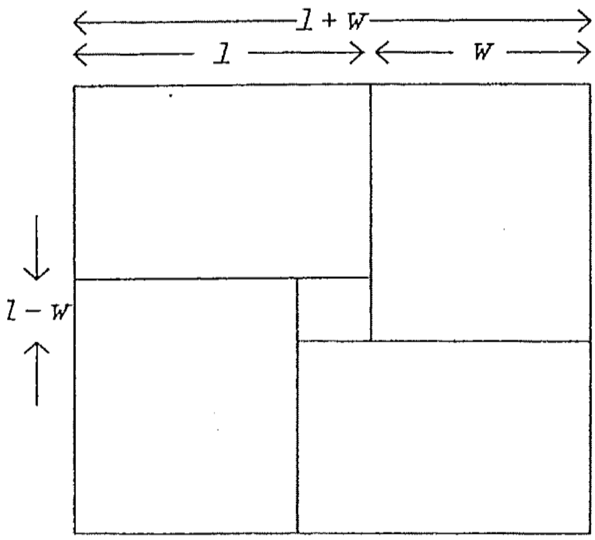
$$w = \frac{1}{2}\left(14 - \sqrt{14^2 - 4 \times 48}\right)$$

$$l = w + \sqrt{14^2 - 4 \times 48}$$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στο πρόβλημα από την περίοδο των Σελευκίδων του Neugebauer και σε αυτό από την Παλιά Βαβυλωνία του van der Waerden οι λύσεις τους δεν έχουν ιδιαίτερες διαφορές.[298]

Η ανάλυση του Høyrup όπως και πριν ξεκινάει με ένα επεξηγηματικό διάγραμμα που συμπυκνώνει τη μέθοδο της επίλυσης (σχήμα 6):

[296] Robson, ό.π., 279.
[297] ό.π., 278.
[298] ό.π., 279.



Σχήμα 6: Η γεωμετρική ανάλυση του Høyrup για την πλάκα ΒΜ 34568[299]

Η διαδικασία βασίζεται στην αρχή που παρουσιάζεται στο σχήμα 6. Η επιφάνεια του τετραγώνου ☐(1 + w) είναι 3,16, από το οποίο αφαιρείται 4 φορές η περιοχή [](l,w), δηλαδή, 3,12. αυτό αφήνει ☐ (l - w) = 4, με πλευρά l - w = 2. Η αφαίρεση αυτής της διαφοράς από l + w = 14 αφήνει διπλάσια το πλάτος, γι' αυτό το πλάτος είναι 6 ($\frac{14-2}{2}$) και η προσθήκη της διαφοράς στο 6 δίνει το μήκος 8.[300]

Κατά την ανάλυση του Høyrup η διαδικασία περικοπής και επικόλλησης δεν χρησιμοποιείται, τίποτα δεν συσσωρεύεται, τίποτα δεν σκίζεται ή συγκρατείται μεταξύ τους. Τα μαθηματικά αντικείμενα παραμένουν γεωμετρικές φιγούρες με συγκεκριμένα μήκη και περιοχές. Όλη η διαδικασία της επίλυσης εξηγείται στο πλαίσιο μιας στοιχειώδους γεωμετρίας, όπου ο αναγνώστης απλά τα παρατηρεί και τα συγκρίνει. Έτσι, η επίλυση του προβλήματος μπορεί να αντικατασταθεί μόνο με το σχήμα δηλαδή χωρίς λόγια.[301]

2.4.3 Τα χαρακτηριστικά της Βαβυλωνιακής άλγεβρας κατά τον Høyrup

Αρχικά, αυτό για το οποίο μπορούμε να είμαστε σίγουροι για τη Βαβυλωνιακή άλγεβρα είναι ότι ήταν μια τεχνική, χωρίς μαθηματική θεωρία. Οι θεωρητικές ιδέες μπορεί να ήταν απαραίτητες για τη λύση των προβλημάτων, αλλά δεν έχει βρεθεί κανένα γραπτό ίχνος και μπορούμε μόνο να μαντέψουμε τη φύση τους. Επίσης, από

[299] Høyrup, 2002, 395.
[300] ό.π., 396.
[301] Robson, ό.π, 280κ.ε.

τα κείμενά τους απουσιάζει οτιδήποτε που να έχει σχέση με συμπέρασμα ακόμα και από τα σχολικά τους κείμενα. Μάλιστα, τα κείμενά τους πολλές φορές εμφανίζουν έναν επαναλαμβανόμενο χαρακτήρα που αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την ουσία του συμπεράσματος. Αυτό επιτρέπει τους ιστορικούς να συμπεράνουν ότι οι Βαβυλωνιακοί γραφείς δεν είχαν εξοικειωθεί στην εξαγωγή ενός γενικού κανόνα.[302]

Η «θεμελιώδης αναπαράσταση» της Βαβυλωνιακής άλγεβρας ήταν μια γεωμετρία μετρήσιμων τμημάτων, τετραγώνων και ορθογωνίων σε ένα τετράγωνο πλέγμα. Ωστόσο, θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε οντότητες άλλων ειδών των οποίων οι σχέσεις μεταξύ τους ήταν ανάλογες με εκείνες της «θεμελιώδους εκπροσώπησης» όπως για παράδειγμα σε αριθμούς, σε εργαζόμενους και τις εργάσιμες ημέρες τους.[303]

Η Βαβυλωνιακή άλγεβρα διατυπώθηκε με λέξεις σε μια πολύ τυποποιημένη, αλλά όχι πάντα σαφή γλώσσα. Παρόλο που φαίνεται δικαιολογημένο να μιλάμε για τις προφορικές δηλώσεις ως «εξισώσεις», υπάρχει η θεμελιώδης διαφορά ότι οι Βαβυλώνιοι δεν λειτουργούσαν στις εξισώσεις τους, όπως έκανε η ρητορική άλγεβρα του al-Khwarizmi's ή όπως η σύγχρονη συμβολική άλγεβρα που οι πράξεις δηλώνονται με σύμβολα και τύπους. Τα Βαβυλωνιακά προβλήματα περιγράφουν τι γίνεται στη γεωμετρική αναπαράσταση, ακριβώς όπως μπορούμε να περιγράψουμε με λόγια τι κάνουμε στην εξίσωση. Έτσι, ως τελευταίο χαρακτηριστικό θα αναφέρουμε ότι ήταν αναλυτική, όπως και η σύγχρονη άλγεβρα εξίσωσης προϋποθέτει την ύπαρξη και τις ιδιότητες των αντικειμένων που έψαχνε.[304]

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο θα αναφέρουμε τα λόγια του Høyrup για το αν η Βαβυλωνιακή άλγεβρα ανήκει στην οικογένεια των αλγεβρών:[305]

> *«Το αν όλα αυτά είναι αρκετά για να συμπεριλάβουν την Παλαιά Βαβυλωνιακή τεχνική σε μια εκτεταμένη οικογένεια "άλγεβρών" είναι θέμα αίσθησης και επιστημολογικής ευκολίας. Ωστόσο, είτε τη συμπεριλάβουμε είτε την αποκλείσουμε, θα πρέπει να παραμείνουμε ενήμεροι για τα ακριβή κριτήρια που χρησιμοποιούνται για την οριοθέτηση αυτής της οικογένειας και ποια από αυτά η Παλιά Βαβυλωνιακή "άλγεβρα" πληροί ή δεν πληροί. Ο ισχυρισμός ότι ήταν άλγεβρα μόνο και μόνο επειδή οι διαδικασίες της μπορούν να περιγραφούν σε σύγχρονες εξισώσεις ή να δηλώσει ότι δεν ήταν επειδή δεν έγραψε η ίδια τέτοιες εξισώσεις, είναι ίσως λίγο επιφανειακό»*

302 Høyrup, 2010, 106κ.ε.
303 ό.π., 108κ.ε.
304 ό.π.
305 Høyrup, 2010, 109.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Η ΠΛΑΚΑ PLIMPTON 322

Η πινακίδα Plimpton 322 θεωρείται από πολλούς ιστορικούς των μαθηματικών ως ένα από τα αριστουργήματα των Βαβυλωνιακών μαθηματικών. Πρόκειται για μια πήλινη πλάκα σφηνοειδούς γραφής διαστάσεων περίπου 12,7 × 8,8 cm και περιέχει 4 στήλες. Η εκσκαφή της έγινε παράνομα κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1920, μαζί με πολλές πλάκες σφηνοειδούς γραφής, από έναν αρχαιολογικό χώρο που ονομάζεται Senkereh στην αρχαία πόλη Larsa (σημερινό Ιράκ). Συγκρίνοντας την τεχνοτροπία του κειμένου με άλλα Βαβυλωνιακά κείμενα της ίδιας περιοχή η Eleanor Robson χρονολογεί το κείμενο περίπου 60 χρόνια πριν από την κατάληψη της πόλης από τον Hammurabi, το 1762 π.Χ.[306]

Εικόνα 39: Η μπροστινή όψη της Plimpton 322[307]

3.1 Περιγραφή της πλάκας Plimpton 322

Το όνομα «Plimpton 322» υποδηλώνει ότι είναι το 322ο αντικείμενο στον κατάλογο πλακών σφηνοειδούς γραφής του Mendelsohn[308] που βρίσκονται στις βιβλιοθήκες του

[306] Robson, 2001, 171κ.ε.

[307] https://apodyoptes.com/2018/05/20/plimpton-322-i-pinakida-pou-ksanagrafei-istoria/

[308] Isaac Mendelsohn, καθηγητής Σημιτικών Γλωσσών. Δημοσίευσε τον κατάλογο των Βαβυλώνιων πλακών στις Βιβλιοθήκες του Πανεπιστημίου Κολούμπια με τίτλο: A list of Cuneiform Documents from the Sumerian, Old-Babylonian, Kassite, and Neo-Babylonian

Πανεπιστημίου της Κολούμπια της Νέας Υόρκης. Ολόκληρη η καταχώρηση του καταλόγου έχει ως εξής:[309]

322. Πήλινο δισκίο, αριστερή άκρη σπασμένη, το κάτω μέρος της δεξιάς γωνίας και ένα κομμάτι από τις στήλες 3 και 4 γδαρμένο, αρκετά καλά διατηρημένο, σκούρο-καφέ. 8,8 x 12,5 cm, μπροστά πλευρά 4 στήλες με 16 γραμμές, πίσω μέρος κενό. Περιεχόμενο: Εμπορικός λογαριασμός. Δεν έχει ημερομηνία.

Στην εικόνα 40 απεικονίζονται όλες οι πλευρές της πλάκας Plimpton 322, ενώ στην εικόνα 39 απεικονίζεται η εμπρόσθια όψη της πλάκας.

Εικόνα 40: Η πλάκα Plimpton 322[310]

Η πλάκα αρχικά αποκτήθηκε περίπου το 1922 από τον εκδότη της Νέας Υόρκης George Arthur Plimpton, προκειμένου να την συμπεριλάβει στην ιδιωτική συλλογή του από ιστορικά μαθηματικά αντικείμενα, η οποία κληροδοτήθηκε στο Πανεπιστήμιο της Κολούμπια λίγο πριν από το θάνατό του το 1936. Την είχε αγοράσει για δέκα δολάρια από τον γνωστό έμπορο της εποχής Edgar J. Banks, αλλά είναι πολύ πιθανό ότι κανένας από τους δύο άνδρες δεν κατάλαβε τη σημασία της για την ιστορία των μαθηματικών. Δεδομένης της εντυπωσιακής ομοιότητας στη μορφή και στο λεξιλόγιο μεταξύ της Plimpton 322 και των άλλων πινακίδων που βρέθηκαν στη Larsa δεν

Periods, with Photographic Reproductions of Selected Seals, and Clay Objects, (New York: Columbia University Libraries, 1943).

309 Robson, 2001, 172.

310 Mansfield, 2017, 397

προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι η πραγματική λειτουργία της Plimpton 322 πέρασε απαρατήρητη τόσο από τον έμπορο και τον ιδιοκτήτη όσο και από τον Mendelsohn.[311]

Ο μαθηματικός χαρακτήρας της πλάκας αναγνωρίστηκε από τον Neugebauer ο οποίος έδειξε ότι οι αριθμοί που περιέχονται στην Plimpton 322 ικανοποιούν την Πυθαγόρεια σχέση:

$$d^2 = b^2 + l^2$$

όπου d, b και l είναι αντίστοιχα η διαγώνιος (ή υποτείνουσα), το πλάτος (ή η μικρή κάθετη πλευρά) και το μήκος (ή η μεγάλη κάθετη πλευρά) ενός ορθογωνίου ή ορθογωνίου τριγώνου. Έκτοτε, η πλάκα Plimpton 322 έχει αποτελέσει αντικείμενο εκτενούς συζήτησης σχετικά με την κατασκευή και την ερμηνεία της.

Η αριστερή πλευρά της πλάκας είναι σπασμένη και αυτό φαίνεται από το κενό που υπάρχει κατά μήκος μιας από τις κάθετες γραμμές που χωρίζουν την επιφάνεια της πλάκας σε στήλες. Από τα υπολείμματα σύγχρονης κόλλας που υπάρχουν σε αυτό το κενό φαίνεται ότι το σπάσιμο έγινε στη σύγχρονη εποχή - ήταν σύνηθες φαινόμενο στις αρχές του 20ου αιώνα οι αδίστακτοι έμποροι αρχαιοτήτων να κατασκευάζουν ολόκληρες πλάκες από ανόμοια κομμάτια, προκειμένου να τις πουλήσουν σε υψηλότερη τιμή.[312]

Η μπροστινή όψη της πλάκας χωρίζεται από 3 κάθετες γραμμές σε 4 στήλες, η κάθε μία από τις οποίες έχει έναν τίτλο. Στην πρώτη στήλη η επικεφαλίδα έχει υποστεί κάποιες φθορές, αλλά οι υπόλοιπες τρεις επικεφαλίδες είναι ευανάγνωστες. Το κύριο σώμα του κειμένου της εμπρόσθιας όψης είναι διαγραμμισμένο από 15 οριζόντιες σειρές (16 σειρές μαζί με τη σειρά που περιέχει τους τίτλους των στηλών) ίσων αποστάσεων μεταξύ τους που περιέχουν εξηνταδικούς αριθμούς (βλ. εικόνα 39 παραπάνω και εικόνα 41 παρακάτω). Οι κάθετες γραμμές συνεχίζουν και στο πίσω μέρος το οποίο είναι κενό (βλ. εικόνα 40 παραπάνω).[313]

[311] Robson, ό.π.
[312] ό.π.
[313] Mansfield, ό.π., 397

Εικόνα 41: Η πλάκα Plimpton 322 ζωγραφισμένη από την E. Robson[314]

Η πλάκα έχει γραφτεί από τα αριστερά προς τα δεξιά, αλλά όπως δηλώνει η Robson είναι πιο εύκολο να εξηγηθεί από τα δεξιά προς τα αριστερά.

<u>Η στήλη IV</u>

Η τελευταία στήλη (IV) αριθμεί διαδοχικά τις γραμμές ως «*ki n*» που σημαίνει «νούμερο *n*» ξεκινώντας με n=1 για την πρώτη γραμμή (*ki 1*), n=2 για τη δεύτερη (*ki 2*) κτλ. Η στήλη έχει επικεφαλίδα *MU.BI.IM*, που σημαίνει το «όνομά του» και οι αριθμοί κάτω από αυτή είναι απλά η αρίθμηση των γραμμών από το 1 ως το 15, όπου ο κάθε αριθμός έχει μπροστά το ki που αναφέραμε παραπάνω. Η Robson παρατήρησε ότι οι αριθμοί σε αυτή τη στήλη γράφονται διαφορετικά από ότι στις προηγούμενες στήλες. Πιο συγκεκριμένα, το 4 είναι γραμμένο ως 2 σφήνες πάνω από άλλες 2 σφήνες, ενώ στις υπόλοιπες στήλες γράφεται με 3 σφήνες πάνω από μία σφήνα. Επίσης, ο αριθμός 7 είναι γραμμένος ως 4 σφήνες πάνω από 3 σφήνες, ενώ στις προηγούμενες στήλες είναι γραμμένος ως 3 σφήνες πάνω από άλλες 3 πάνω από 1 σφήνα. Η Robson αναφέρει ότι όταν οι μονάδες χρησιμοποιούνταν σε μαθηματικές πράξεις οι Βαβυλώνιοι τις έγραφαν σε 3 σειρές από κάθετες σφήνες, για παράδειγμα το 8 το γράφανε 3 + 3 + 2 σφήνες. Όταν όμως οι μονάδες δεν αναφέρονταν σε μαθηματικές πράξεις τις γράφανε σε 2 σειρές από κάθετες σφήνες, για παράδειγμα το 8 σε αυτή την περίπτωση το γράφανε ως 4 + 4 σφήνες (αυτή η διαφοροποίηση στο συμβολισμό εξαφανίζεται στην Ύστερη Βαβυλωνιακή και Σελευκιδική Περίοδο).

314 Robson, 2001, 171.

Επομένως, αυτή η στήλη δε χρησιμοποιείται στη μαθηματική λειτουργία της πλάκας.[315]

Οι στήλες II και III

Η δεύτερη από τα δεξιά στήλη (III) έχει τίτλο *IB.SI (= mitharti) siliptim* που σημαίνει το «τετράγωνο της διαγωνίου ή της υποτείνουσας». Η τρίτη από δεξιά στήλη (II) έχει τίτλο *IB.SI SAG (=mitharti putim)* που σημαίνει «το τετράγωνο της μικρής πλευράς». Αυτές οι δύο στήλες περιέχουν τα μήκη για την υποτείνουσα και το πλάτος αντίστοιχα 15 ορθογωνίων τριγώνων. Συμβολίζουμε με d τη διαγώνιο ή υποτείνουσα, με b τη μικρή πλευρά ή πλάτος και με l τη μεγάλη πλευρά ή μήκος.[316]

Προκύπτει το εξής ερώτημα για αυτές τις δύο στήλες:

«Γιατί οι επικεφαλίδες αναφέρονται σε τετράγωνα, εάν οι στήλες περιέχουν μήκη γραμμών;»[317]

Σύμφωνα με την Robson η απάντηση βρίσκεται στην Ακκαδική λέξη *mithartum*. Πρόκειται για ένα ουσιαστικό που προέρχεται από το ρήμα *maharum* που σημαίνει "να είναι ίσο ή / και αντίθετο" το οποίο στην κυριολεξία σημαίνει "κάτι το οποίο είναι ίσο και αντίθετο από τον εαυτό του". Στα Ακκαδικά, όπως και σε άλλες γλώσσες, η λέξη για το "τετράγωνο" μπορεί επίσης να αναφέρεται στην πλευρά του και ως εκ τούτου στην «τετραγωνική ρίζα». Έτσι, εδώ το *mithartum* πρέπει να σημαίνει «πλευρά τετραγώνου» ή μπορεί και «τετραγωνική ρίζα».

Η στήλη I

Στην αριστερή στήλη (I) όπως αναφέρθηκε και παραπάνω υπάρχει ένα κενό και έτσι η επικεφαλίδα της δεν είναι ευανάγνωστη. Οι 15 σειρές κάτω από την επικεφαλίδα περιέχουν είτε το λόγο του τετραγώνου της διαγωνίου προς το τετράγωνο της μεγάλης πλευράς (d^2/l^2) είτε το λόγο του τετραγώνου της μικρής πλευράς προς το τετράγωνο της μεγάλης πλευράς (b^2/l^2). Αυτή η ασάφεια στον τίτλο οφείλεται στον τρόπο που έσπασε η πλάκα και η διαφορά τους έγκειται στο αν υπάρχουν τα αρχικά 1 στις τιμές της στήλης ή όχι. Γι' αυτό και οι ιστορικοί τα αρχικά 1 στις τιμές της πρώτης στήλης τα βάζουν σε παρενθέσεις (βλ. πίνακα 16 παρακάτω). Υπάρχουν δύο εκδοχές:[318]

- Η πλάκα να ράγισε κατά μήκος του αριστερού άκρου της στήλης και τα σημάδια που υπάρχουν εκεί να είναι από τα σημεία που τέμνονται οι οριζόντιες και οι κάθετες γραμμές. Σε αυτή την περίπτωση δεν περιέχονται τα αρχικά 1 και η στήλη περιέχει το λόγο b^2/l^2. Για παράδειγμα, για την πρώτη γραμμή της πλάκας έχουμε $b = 1{,}59\,(= 119)$ και $d = 2{,}49\,(= 169)$, συνεπώς από την

[315] Robson, 2001, 173.
[316] ό.π.
[317] ό.π., 173κ.ε.
[318] ό.π., 174.

Πυθαγόρεια σχέση προκύπτει $l = 2{,}00\ (= 120)$ (βλ. πίνακα 16 και 17 παρακάτω). Επομένως $b^2/l^2 = 119^2/120^2 = 0{,}9834028$.

- Τα σημάδια που υπάρχουν να είναι ότι απέμεινε από τις κάθετες σφήνες που υπήρχαν εκεί και συμβόλιζαν τον αριθμό 1, με τον οποίο ξεκινάει κάθε αριθμός σε αυτή τη στήλη. Έτσι, σε αυτή την περίπτωση τα αρχικά 1 υπάρχουν στις τιμές της στήλης και η στήλη περιέχει το λόγο d^2/l^2. Για την πρώτη γραμμή της πλάκας σε αυτήν την περίπτωση θα έχουμε αντίστοιχα $d^2/l^2 = 169^2/120^2 = 1{,}9834028$.

Όποια και αν είναι η εκδοχή που ισχύει, αυτό που είναι σίγουρο είναι ότι η στήλη ταξινομείται με φθίνουσα σειρά (βλ. πίνακα 16).

Οι αριθμοί που περιέχονται στις 4 στήλες της Plimpton 322 είναι γραμμένοι στο εξηνταδικό θεσιακό σύστημα αρίθμησης.[319] Όπως έχει αναφερθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι Βαβυλώνιοι στο αριθμητικό τους σύστημα δεν είχαν κάποιο σημάδι για να ξεχωρίζουν το ακέραιο από το κλασματικό μέρος ενός αριθμού. Επίσης, δεν είχαν κάποιο σύμβολο για το μηδέν. Έτσι, αυτά τα δύο χαρακτηριστικά του Βαβυλωνιακού συμβολισμού καθιστούν τη δεκαδική μετάφραση της πλάκας ως κάποιο βαθμό αυθαίρετη.[320] Στον πίνακα 17 ακολουθήσαμε τη δεκαδική μετάφραση της E. Robson η οποία υποθέτει ότι οι τιμές στις στήλες II και III είναι ακέραιοι. Ο παρακάτω πίνακας (βλ. πίνακα 16) περιέχει τη μετάφραση της πλάκας στο εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης με διορθωμένα τα λάθη (βλ. πίνακα 18) που περιέχει το πρωτότυπο. Με κενά χωρίζουμε τις εξηνταδικές θέσεις και με «;» το ακέραιο από το κλασματικό μέρος του αριθμού. Στα σημεία που υπάρχουν οι αγκύλες είναι τα κατεστραμμένα μέρη της πλάκας.

Όπως προαναφέρθηκε, οι αριθμοί της πλάκας Plimpton 322 παράγουν Πυθαγόρειες τριάδες. Για παράδειγμα, στην πρώτη γραμμή του πίνακα 16 παρακάτω έχουμε τους αριθμούς $b = 1{,}59\ (1 \times 60 + 59 = 119)$ και $d = 2{,}49\ (2 \times 60 + 49 = 169)$. Από την Πυθαγόρεια σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την άλλη πλευρά του τριγώνου l η οποία θα είναι $l = \sqrt{169^2 - 119^2} = \sqrt{14400} = 120$. Επομένως η τριάδα $(119,120,169)$ αποτελεί Πυθαγόρεια τριάδα. Στην τρίτη γραμμή του πίνακα έχουμε: $b = 1{,}16{,}41\ (1 \times 60^2 + 16 \times 60 + 41 = 4601$ και $d = 1{,}50{,}49\ (1 \times 60^2 + 50 \times 60 + 49 = 6649$. Επομένως, $l = \sqrt{6649^2 - 4601^2} = \sqrt{23040000} = 4800$ και έτσι έχουμε την Πυθαγόρεια τριάδα $(4601,4800,6649)$.

[319] Βλ. ενότητα 2.2.
[320] Robson, 2001, 174.

Πίνακας 16: Μετάφραση της πλάκας Plimpton 322[321]

I. d^2/l^2 ή b^2/l^2	II. *IB.SI SAG* Το πλάτος, b	III. *IB.SI si-li-ip-tim* Η διαγώνιος, d	IV. *MU.BI.IM* Το όνομά του
[(1) 59] 00 15	1 59	2 49	*Ki.* 1
[(1) 56 56] 58 14 50 06 15	56 07	1 20 25	*Ki.* 2
[(1) 55 07] 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	*Ki.* 3
(1) 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	*Ki.* 4
(1) 48 54 01 40	1 05	1 37	*Ki.* [5]
(1) 47 06 41 40	5 19	8 01	[*Ki.* 6]
(1) 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	*Ki.* 7
(1) 41 33 45 14 3 45	13 19	20 49	*Ki.* 8
(1) 38 33 36 36	8 01	12 49	*Ki.* 9
(1) 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	*Ki.* 10
(1) 33 45	45	1 15	*Ki.* 11
(1) 29 21 54 2 15	27 59	48 49	*Ki.* 12
(1) 27 00 03 45	2 41	4 49	*Ki.* 13
(1) 25 48 51 35 6 40	29 31	53 49	*Ki.* 14
(1) 23 13 46 40	28	53	*Ki.* 15

Πίνακας 17: Η πλάκα Plimpton 322 στο δεκαδικό σύστημα[322]

I. d^2/l^2 ή b^2/l^2	II. Το πλάτους, b	III. Η διαγώνιος, d	IV. Το όνομά του
(1).9834028	119	169	1
(1).9491586	3367	4825	2
(1).9188021	4601	6649	3
(1).8862479	12,709	18,541	4
(1).8150077	65	97	5
(1).7851929	319	481	6
(1).7199837	2291	3541	7
(1).6845877	799	1249	8
(1).6426694	481	769	9
(1).5861226	4961	8161	10
(1).5625	45	75	11
(1).4894168	1679	2929	12
(1).4500174	161	289	13
(1).4302388	1771	3229	14
(1).3871605	28	53	15

321 ό.π., 173.
322 ό.π., 174.

Τα λάθη της πλάκας

Υπάρχουν επτά λάθη στην πλάκα Plimpton 322. Κάποια από αυτά είναι λάθη που έγιναν κατά την αντιγραφή της και άλλα οφείλονται σε λάθος υπολογισμούς. Πιο συγκεκριμένα στη θέση ΙΙ, 9 (στήλη 2 γραμμή 9) το πρωτότυπο κείμενο είχε τον εξηνταδικό αριθμό 9,01 (αντί του 8,01 που είναι το σωστό) το οποίο είναι λάθος αντιγραφής του γραφέα, καθώς για $b = 9{,}01\,(= 541)$ και $d = 12{,}49\,(= 769)$,δεν σχηματίζεται Πυθαγόρεια τριάδα, διότι το $l = \sqrt{769^2 - 541^2} = \sqrt{361680}$ δεν είναι ακέραιος αριθμός. Αντίθετα, για $b = 8{,}01\ (= 481)$ προκύπτει μια ακέραια τιμή για το l: $l = \sqrt{769^2 - 481^2} = \sqrt{360000} = 600$ και έτσι παίρνουμε την τριάδα $(481{,}600{,}769)$. Μάλλον ο γραφέας χάραξε εννέα σημάδια στο μαλακό πηλό αντί για οκτώ. Επίσης, στη θέση ΙΙ, 13 το πρωτότυπο κείμενο είχε τον εξηνταδικό αριθμό 7,12,01 (αντί του 2,41 που είναι το σωστό) το οποίο είναι ένα λάθος υπολογισμού του γραφέα, καθώς για $b = 7{,}12{,}01\,(= 25.921)$ και $d = 4{,}49\,(= 289)$ δεν σχηματίζεται Πυθαγόρεια τριάδα. Παρατηρούμε όμως ότι το 25.921 είναι το τετράγωνο του 161 και οι αριθμοί 161 και 289 σχηματίζουν την Πυθαγόρεια τριάδα $(161{,}240{,}289)$. Φαίνεται πως εδώ ο γραφέας απλώς ξέχασε να υπολογίσει την τετραγωνική ρίζα του 25.921. Τέλος, στη θέση ΙΙΙ, 15 το πρωτότυπο κείμενο είχε τον εξηνταδικό αριθμό 53 αντί του 1,46 (=106) που είναι το σωστό (δηλαδή το διπλάσιο του 53) και έτσι θα δημιουργούνταν η Πυθαγόρεια τριάδα $(56{,}90{,}106)$. Αντίστοιχα θα μπορούσε στη θέση ΙΙ, 15 αντί για 56 να έχει το 28 που είναι το μισό του 56 και έτσι θα δημιουργούνταν η Πυθαγόρεια τριάδα $(28{,}45{,}53)$. Στον πίνακα 18 παρακάτω καταγράφονται τα λάθη της πλάκας και οι διορθώσεις τους.[323]

Πίνακας 18: Τα λάθη στην Plimpton 322[324]

Στήλη	***Γραμμή***	***Λάθος / Σωστό***	***Σχόλια***
Ι	2	56 αντί του 50 06	Λάθος αντιγραφής
	8	59 αντί του 45 14	Αριθμητικό λάθος: εδώ ο γραφέας πρόσθεσε τις 2 εξηνταδικές θέσεις 45 + 14 = 59
	13	27 03 45 αντί του 27 00 03 45	Λάθος αντιγραφής
ΙΙ	9	9 01 αντί του 8 01	Λάθος αντιγραφής
ΙΙ	13	7 12 01 αντί του 2 41	Λάθος υπολογισμού: εδώ ο γραφέας έγραψε το τετράγωνο του 2 41 που είναι το 7 12 1 αντί για το ίδιο το 2 41
ΙΙ ή ΙΙΙ	15	56 αντί του 28 ή 53 αντί του 1 46	Λάθος υπολογισμού: το 56 είναι το διπλάσιο του 28 / το 1 46 είναι το διπλάσιο του 53
ΙΙΙ	2	3 12 01 αντί του 1 20 25	Λάθος υπολογισμού: ανεξήγητο λάθος υπολογισμού

323 Robson, 2001, 174.
324 ό.π., 175.

3.2 Οι ερμηνείες της πλάκας Plimpton 322

Η πλάκα Plimpton 322 είναι μια από τις πιο πολυσυζητημένες από τους ιστορικούς Βαβυλωνιακή πλάκα. Για πρώτη φορά δημοσιεύτηκε από τον Neugebauer στο *Mathematical Cuneiform Texts* (Neugebauer & Sachs 1945, Text A) και έπειτα έγιναν πολλές έρευνες από διάφορους ιστορικούς προσπαθώντας να απαντήσουν στο ερώτημα: «*Πώς ένας Βαβυλωνιακός γραφέας δημιούργησε την πλάκα Plimpton 322*;» Υπάρχουν τρεις βασικές ερμηνείες για τη λειτουργία της πλάκας Plimpton 322:[325]

1. Μερικοί ιστορικοί υποστηρίζουν ότι η Plimpton 322 αποτελεί έναν τριγωνομετρικό πίνακα. Εάν η 2η και 3η στήλη περιέχουν τη μικρότερη πλευρά και την υποτείνουσα ορθογωνίων τριγώνων αντίστοιχα, τότε οι τιμές που εμφανίζονται στην 1η στήλη είναι οι: tan^2 ή $1/cos^2$ και η πλάκα είναι κατασκευασμένη, έτσι ώστε οι οξείες γωνίες των ορθογωνίων τριγώνων να μειώνονται κατά περίπου 1ο από γραμμή σε γραμμή.

2. Ο Neugebauer και στη συνέχεια ο Aaboe παρουσίασαν μια αριθμοθεωρητική ερμηνεία στην οποία υποστήριξαν ότι κάθε γραμμή της πλάκας μπορεί να παραχθεί από ένα ζευγάρι ακέραιων αριθμών p και q με τις εξής ιδιότητες:

   i. $p > q > 0$,
   ii. οι αριθμοί p και q δεν έχουν κανέναν κοινό διαιρέτη εκτός από το 1 (είναι πρώτοι μεταξύ τους),
   iii. οι αριθμοί p και q δεν είναι και οι δύο πρώτοι.

   Τότε, οι σχέσεις:

   $$x = p^2 - q^2 \text{ [b]}$$
   $$y = 2pq \text{ [l]}$$
   $$z = p^2 + q^2 \text{ [d]}$$

   παράγουν Πυθαγόρειες τριάδες.

   Το ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί βέβαια για αυτή τη θεωρία είναι το πώς επιλέχθηκαν τα διάφορα p και q.

3. Τέλος, η θεωρία που παρουσιάστηκε αρχικά από τον Bruins υποστηρίζει ότι τα στοιχεία της πλάκας έχουν παραχθεί από ζεύγη αντιστρόφων x και $1/x$. Από αυτά τα ζεύγη αντιστρόφων μπορούν να παραχθούν Πυθαγόρειες τριάδες ως εξής:

   $$b' = b/l = (x - 1/x)/2,$$
   $$l' = l/l = 1,$$
   $$d' = d/l = (x + 1/x)/2.$$

[325] Robson, 2002, 107.

Οι Πυθαγόρειες τριάδες που προέκυπταν σύμφωνα με αυτή τη θεωρία πολλαπλασιάζονταν με πολλαπλάσια του 2, 3 και 5 μέχρι οι τιμές b' και d' να γίνουν πρώτοι μεταξύ τους

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι προτεινόμενες στήλες που λείπουν στην αρχή της Plimpton 322 (δηλαδή αριστερά από το σωζόμενο τμήμα της πλάκας) σύμφωνα με τις τρεις θεωρίες που αναφέραμε. Η πρώτη στήλη απαριθμεί τις γραμμές της πλάκας, η δεύτερη στήλη αναφέρεται στη θεωρία για τον τριγωνομετρικό πίνακα, η τρίτη και τέταρτη στήλη στους αριθμούς p, q για τη θεωρία του Neugebauer, η πέμπτη και έκτη στήλη περιέχει τα ζεύγη αντιστρόφων για την αντίστοιχη θεωρία.

Πίνακας 19: Οι προτεινόμενες αποκαταστάσεις στην αρχή της Plimpton 322 σύμφωνα με τις τρεις θεωρίες[326]

line	α	p	q	x	$1/x$
1	44.76°	12	5	2 24	25
2	44.25°	1 04	27	2 22 13 20	25 18 45
3	43.79°	1 15	32	2 20 37 30	25 36
4	43.27°	2 05	54	2 18 53 20	25 55 12
5	42.08°	9	4	2 15	26 40
6	41.54°	20	9	2 13 20	27
7	40.32°	54	25	2 09 36	27 46 40
8	39.77°	32	15	2 08	28 07 30
9	38.72°	25	12	2 05	28 48
10	37.44°	1 21	40	2 01 30	29 37 46 40
11	36.87°	2	1	2	30
12	34.98°	48	25	1 55 12	31 15
13	33.86°	15	8	1 52 30	32
14	33.26°	50	27	1 51 06 40	32 24
15	31.89°	9	5	1 48	33 20

Στη δεύτερη στήλη του πίνακα 19 παραπάνω παρατηρούμε τις τιμές για τις οξείες γωνίες των ορθογωνίων τριγώνων και όπως βλέπουμε από γραμμή σε γραμμή μειώνεται η τιμή τους κατά περίπου 1° όπως απαιτεί η τριγωνομετρική θεωρία. Στην τρίτη και τέταρτη στήλη καταγράφονται οι τιμές για τους ακέραιους αριθμούς p και q από τους οποίους παράγονται οι Πυθαγόρειες τριάδες σύμφωνα με τη θεωρία του Neugebauer. Παρατηρώντας τα ζευγάρια των p και q διαπιστώνουμε ότι ικανοποιούν

[326] Robson, 2002, 109.

τις τρεις ιδιότητες της αριθμοθεωρητικής ερμηνείας. Για παράδειγμα, στην πρώτη γραμμή βλέπουμε $p = 12$ και $q = 5$ για τους οποίους ισχύει: $12 > 5 > 0$ (πρώτη ιδιότητα), το 12 και το 5 δεν έχουν κανέναν κοινό διαιρέτη εκτός από το 1 (δεύτερη ιδιότητα) και δεν είναι και οι δύο πρώτοι αριθμοί (τρίτη ιδιότητα). Τέλος, η πέμπτη και έκτη στήλη παρουσιάζουν τα ζευγάρια αντιστρόφων $(x, 1/x)$ από τα οποία σύμφωνα με την αντίστοιχη ερμηνεία προκύπτουν οι Πυθαγόρειες τριάδες της πλάκας Plimpton 322. Για παράδειγμα, στη γραμμή 11 βλέπουμε $x = 2$ και τον αντίστροφό του που είναι ο $1/x = 0;30$. Η κάθε ερμηνεία από τις παραπάνω θα παρουσιαστεί αναλυτικά με όλους τους ενδιάμεσους υπολογισμούς που απαιτούνται για την παραγωγή των Πυθαγόρειων τριάδων στις ενότητες που ακολουθούν.

Οι τρεις ερμηνείες είναι μαθηματικά έγκυρες. Ποια όμως αντιπροσωπεύει την πλάκα Plimpton 322; Σύμφωνα με την Eleanor Robson για να καταλήξουμε ποια ερμηνεία είναι απόλυτα ορθή, όταν από μαθηματικής άποψης τα στοιχεία δεν είναι αρκετά, πρέπει να αναπτύξουμε κάποια κριτήρια για την αξιολόγηση της ιστορικής τους αξίας. Συγκεκριμένα, η Robson αναφέρει:[327]

«Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι η επιτυχημένη θεωρία δεν θα πρέπει μόνο να είναι μαθηματικά έγκυρη, αλλά και ιστορικά, αρχαιολογικά και γλωσσικά επίσης.»

3.2.1 Η αριθμοθεωρητική ερμηνεία

Όπως αναφέραμε, ο Neugebauer υποστήριζε ότι όλες οι Πυθαγόρειες τριάδες στην Plimpton 322 παράγονται από συγκεκριμένους θετικούς αριθμούς p και q (βλ. πίνακα 19 παραπάνω), υπό την προϋπόθεση να τηρούνται κάποιες ιδιότητες. Οι κατάλληλοι αριθμοί p και q που παράγουν τις Πυθαγόρειες τριάδες προέρχονται από τον πρότυπο πίνακα αντιστρόφων (βλ. ενότητα 2.2.2). Στον πίνακα 20 παρουσιάζεται η πλάκα Plimpton 322 σύμφωνα με την ερμηνεία του Neugebauer.

[327] ό.π., 108

Πίνακας 20: Plimpton 322 με βάση την ερμηνεία του Neugebauer[328]

p	q	p^2	q^2	$2pq$	$p^2 - q^2$ II	$p^2 + q^2$ III	IV
12	5	2 24	25	2 00	1 59	2 49	1
1 04	27	1 08 16	12 09	57 36	56 07	1 20 25	2
1 15	32	1 33 45	17 04	1 20 00	1 16 41	1 50 49	3
2 05	54	4 20 25	48 36	3 45 00	3 31 49	5 09 01	4
9	4	1 21	16	1 12	1 05	1 37	5
20	9	6 40	1 21	6 00	5 19	8 01	6
54	25	48 36	10 25	45 00	38 11	59 01	7
32	15	17 04	3 45	16 00	13 19	20 49	8
25	12	10 25	2 24	10 00	8 01	12 49	9
1 21	40	1 49 21	26 40	1 48 00	1 22 41	2 16 01	10
2	1	4	1	4	3	5	11
48	25	38 24	10 25	40 00	27 59	48 49	12
15	8	3 45	1 04	4 00	2 41	4 49	13
50	27	41 10	12 09	45 00	29 31	53 49	14
9	5	1 21	25	1 30	56	1 46	15

Ο Neugebauer υποστηρίζει ότι εάν τα p και q είναι ακέραιοι αριθμοί και έχουν τις εξής ιδιότητες

1. $p > q > 0$
2. οι αριθμοί p και q είναι πρώτοι μεταξύ τους (δεν έχουν κανέναν κοινό διαιρέτη)
3. οι αριθμοί p και q δεν είναι και οι δυο περιττοί αριθμοί

τότε η τριάδα $(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$ αποτελεί μια Πυθαγόρεια τριάδα. Για παράδειγμα, στην πρώτη σειρά του πίνακα 20 βλέπουμε τους αριθμούς $p = 12$ και $q = 5$ οι οποίοι ικανοποιούν τις 3 παραπάνω ιδιότητες. Στη συνέχεια, ο Βαβυλώνιος γραφέας υπολόγισε το $p^2 = 12^2 = 2{,}24\ (= 144)$ και το $q^2 = 5^2 = 25$. Έπειτα από τις σχέσεις:

- $p^2 - q^2 = 2{,}24 - 25 = 1{,}59\ (= 119)$
- $2pq = 2 \times 12 \times 5 = 2{,}00\ (= 120)$
- $p^2 + q^2 = 2{,}24 + 25 = 2{,}49\ (= 169)$

δημιουργήθηκε η Πυθαγόρεια τριάδα $(1{,}59, 2{,}00, 2{,}49)$ που στο δεκαδικό σύστημα είναι η (119, 120, 169).

[328] Robson, 2001, 177.

Άρα, βλέπουμε ότι όντως από 2 αριθμούς p και q οι οποίοι δεν είναι και οι δύο περιττοί και είναι πρώτοι μεταξύ τους δημιουργούνται Πυθαγόρειες τριάδες. Επίσης, το 12 και το 5 υπάρχουν στον πίνακα αντιστρόφων (βλ. εικόνα 23 ενότητα 2.2.2).

Σύμφωνα με την Robson όμως υπάρχουν αρκετά επιχειρήματα για να απορριφθεί η ερμηνεία του Neugebauer. Αρχικά, ο Neugebauer αναφέρει ότι οι τιμές των p και q που χρησιμοποιήθηκαν για τη δημιουργία της πλάκας ήταν όλες από τον πίνακα αντιστρόφων εκτός, από το 2, 05 στη σειρά 4:[329]

> *«[…] ανακαλύπτουμε κάτι το εκπληκτικό. Οι αριθμοί p και q είναι όχι μόνο κανονικοί, όπως θα το περιμέναμε, αλλά είναι και κανονικοί αριθμοί που περιέχονται στον πίνακα αντιστρόφων, που τον συναντούμε σε τόσους πίνακες της ίδιας εποχής. Εκ πρώτης όψεως, η μόνη εξαίρεση είναι το p = 2,05, αλλά πάλι ο αριθμός αυτός μας είναι πολύ γνωστός ως το κανονικό παράδειγμα για τον υπολογισμό των αντίστροφων αριθμών που δεν περιέχονται στον "πρότυπο" πίνακα αντιστρόφων.»*

Με 44 διαφορετικούς αριθμούς στον πίνακα αντιστρόφων ο γραφέας θα είχε $44 \times 43/2 = 946$ ζεύγη για να διαλέξει. Από τις ιδιότητες που έθεσε ο Neugebauer για τους αριθμούς p και q (ιδιότητα ii και iii παραπάνω) οι επιλογές του γραφέα περιορίζονται σε 159 διαφορετικά ζεύγη αριθμών. Πώς θα ήξερε όμως ο γραφέας της Plimpton 322 ποια ζευγάρια να διαλέξει, ώστε να τα τοποθετήσει στις 15 γραμμές της πλάκας; Δεν έχει βρεθεί μια απάντηση σε αυτό το ερώτημα μέχρι στιγμής.[330]

Δεύτερον και πιο σημαντικό σύμφωνα με την Robson αποτελεί το γεγονός ότι κάθε έγκυρη ερμηνεία για την Plimpton 322 πρέπει να λαμβάνει υπόψιν τη σειρά των στηλών της πλάκας:[331]

> *«Η θεωρία θα πρέπει να εξηγεί τη λογική σειρά των στηλών, από αριστερά προς τα δεξιά και των γραμμών, από πάνω προς τα κάτω, συμπεριλαμβανομένων τυχόν προτεινόμενων αποκαταστάσεων στα αριστερά του δισκίου ή στην πίσω πλευρά. Με άλλα λόγια, δεν πρέπει να παραβιάζει τη "γραμματική" των μαθηματικών πινάκων της Παλαιάς Βαβυλωνιακής περιόδου. Με αυτό εννοώ ότι όλοι οι αριθμητικοί πίνακες, είτε το περιεχόμενό τους είναι μαθηματικό, οικονομικό, αστρονομικό ή όχι, ταξινομούνται από πάνω προς τα κάτω και από αριστερά προς τα δεξιά και ταξινομούνται με αύξουσα ή φθίνουσα αριθμητική σειρά με βάση το περιεχόμενο της πρώτης, δηλαδή της πιο αριστερής στήλης. […] Εν ολίγοις, η στήλη I δεν θα πρέπει να εκληφθεί ως παράγωγο των στηλών II ή III, αλλά μάλλον ως ένα βήμα προς τον υπολογισμό της στήλης II και στη συνέχεια της III. Δεν πρέπει να θεωρείται ότι λείπει κάτι στα δεξιά του δισκίου (όπως τα μήκη των μακριών πλευρών). Ομοίως, η θεωρία θα πρέπει να κάνει αποκαταστάσεις στα αριστερά των στηλών που σώζονται και οι οποίες είναι με λογική σειρά από αριστερά προς τα δεξιά και τα περιεχόμενά της τέρμα αριστερής στήλης είναι σε αύξουσα ή φθίνουσα αριθμητική σειρά.»*

[329] Neugebauer, 1990, 74.
[330] Robson, ό.π., 177.
[331] ό.π., 176.

Η στήλη Ι που σώζεται στην Plimpton 322 σύμφωνα με τη θεωρία του Neugebauer περιέχει της τιμές $[(p^2+q^2)/2pq]^2$ που δεν συνάδουν με τον τρόπο κατασκευής των Βαβυλωνιακών πινάκων. Επειδή η στήλη Ι βρίσκεται στα αριστερά των στηλών II και III (p^2-q^2 και p^2+q^2 αντίστοιχα) θα πρέπει να θεωρηθεί ως ένα βήμα προς τον υπολογισμό των στηλών II και III σύμφωνα με τον τρόπο κατασκευής των Βαβυλωνιακών πινάκων, ενώ αντίθετα η στήλη Ι περιέχει τιμές από τη στήλη III και συγκεκριμένα τον όρο p^2+q^2. Επίσης, σύμφωνα με τα λεγόμενα της Robson η στήλη Ι θα πρέπει να προκύπτει ως συνέπεια της αριθμητικής σειράς των στηλών που προηγούνται, όμως καμία από τις στήλες p και q του πίνακα 5 (που υποτίθεται είναι οι στήλες που λείπουν από την πλάκα) δεν είναι ταξινομημένη με αριθμητική σειρά.[332]

Επίσης, ο Neugebauer όπως υποστηρίζει η Robson δεν κατάφερε να εξηγήσει πειστικά το λάθος στη δεύτερη γραμμή της στήλης III (p^2+q^2). Σύμφωνα με τον Neugebauer η τιμή που σώζεται στην πλάκα προέκυψε από μια σειρά λαθών στους υπολογισμούς που έκανα ο γραφέας. Αρχικά, για λόγους ανεξήγητους, όπως αναφέρει ο Neugebauer, ο γραφέας επέλεξε να υπολογίσει τον όρο p^2+q^2 όχι ως απλό άθροισμα δύο τετραγώνων ($1\ 04^2+27^2$), αλλά ως $(p+q)^2-2pq$. Ωστόσο, όταν υπολόγισε το δεύτερο όρο ($2pq$) δεν πολλαπλασίασε με το p, αλλά σταμάτησε στο $2q$ (ή εναλλακτικά θεώρησε $p=1$ 00 και όχι 1 04) και βρήκε 54. Στη συνέχεια, αντί να αφαιρέσει το 54 από το $(1\ 04+27)^2=2\ 18\ 01$, όπως θα έπρεπε, το πρόσθεσε και βρήκε 3 12 01. Δηλαδή, ο Neugebauer μας ζητάει να πιστέψουμε ότι ο γραφέας δεν χρησιμοποίησε τις τιμές p^2,q^2,$2pq$ που πρέπει ήδη να τις είχε βρει για τον προσδιορισμό των στηλών Ι και II, αλλά προτίμησε μια πιο περίπλοκη διαδικασία στην οποία κιόλας αντί να αφαιρέσει όπως θα έπρεπε πρόσθεσε και αυτό το έκανε μόνο σε αυτή τη γραμμή. Εν ολίγης, η Robson θεωρεί ότι αυτό το λάθος που υπάρχει στην πλάκα Plimpton 322 η θεωρία του Neugebauer δεν καταφέρνει να το εξηγήσει.[333]

Όλοι αυτοί οι λόγοι σύμφωνα με την Robson μας οδηγούν στο να απορρίψουμε την ερμηνεία του Neugebauer.

3.2.2 Η ερμηνεία του τριγωνομετρικού πίνακα

Μια από τις πιο δημοφιλείς θεωρίες είναι ότι η Plimpton 322 αντιπροσωπεύει έναν τριγωνομετρικό πίνακα. Η Robson θεωρεί ότι για αυτήν την ερμηνεία οι ιστορικοί βασίστηκαν σε μια παρατήρηση που έκανε ο Neugebauer:[334]

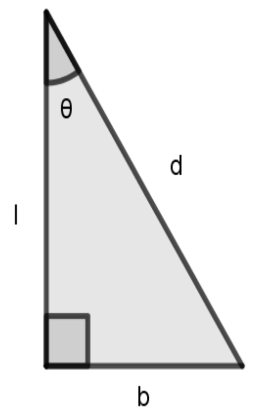
> *«Διαμορφώνοντας το πρόβλημα όσον αφορά τα τρίγωνα, μπορούμε να πούμε ότι ξεκινάμε με ένα σχεδόν μισό τετράγωνο (επειδή η τιμή του b/l που αντιστοιχεί στην πρώτη γραμμή είναι 0;59,30) και σταδιακά μειώνεται η γωνία*

[332] Robson, ό.π., 178.
[333] Robson, ό.π., 179.
[334] Robson, ό.π., 179.

μεταξύ των l και d βήμα προς βήμα, με τη χαμηλότερη τιμή να είναι περίπου 31^o.»

Ωστόσο, στην ερμηνεία του ο Neugebauer πουθενά δεν αναφέρει την τριγωνομετρία ή τη γωνία, αλλά όλα τα σχόλιά του έχουν αριθμοθεωρητικό χαρακτήρα.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω στην ερμηνεία για τον τριγωνομετρικό πίνακα, η πρώτη στήλη της πλάκας Plimpton 322 περιέχει τις τιμές tan^2 ή $1/cos^2$ οι οποίες προκύπτουν ως εξής:



- $\sin\theta = \frac{b}{d}$
- $\cos\theta = \frac{l}{d} \Longrightarrow \frac{1}{\cos\theta} = \frac{d}{l}$
- $\tan\theta = \frac{b}{l}$

Υψώνοντας στο τετράγωνο το $1/\cos\theta$ και το $\tan\theta$ προκύπτει:

$$\tan^2\theta = \frac{b^2}{l^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{d^2}{l^2}$$

Δηλαδή προκύπτουν οι λόγοι που βρίσκονται στην επικεφαλίδα της στήλης I (d^2/l^2), όπως αναφέραμε στην αρχή. Ας το επαληθεύσουμε για την πρώτη γραμμή του πίνακα 21 παρακάτω: $b = 1{,}59\ (= 119)$ και $d = 2{,}49\ (= 169)$ συνεπώς από την Πυθαγόρεια σχέση προκύπτει $l = 2{,}00\ (= 120)$. Οπότε $d^2/l^2 = 169^2/120^2 = 1{,}9834028$. Η αντίστοιχη ένδειξη στην στήλη I της Plimpton 322 είναι $1;59{,}00{,}15 = 1 + 59/60 + 0/60^2 + 15/60^3 \cong 1{,}9834028$. Επίσης, αν υπολογίσουμε την οξεία γωνία $\hat{\theta}$ του ορθογώνιου τριγώνου για κάθε σειρά της πλάκας θα διαπιστώσουμε ότι η γωνία μειώνεται περίπου μια 1° από γραμμή σε γραμμή. Για παράδειγμα, η γωνία $\hat{\theta}$ στην πρώτη γραμμή της πλάκας Plimpton 322 είναι:$\tan\theta = b/d \Longrightarrow \tan\theta = 119/169 = 0{,}70414$ και $0{,}70414 \approx \tan 45^o$ (βλ. πίνακα 21). Επομένως, η πλάκα είναι κατασκευασμένη έτσι ώστε οι οξείες γωνίες των ορθογωνίων τριγώνων να μειώνονται κατά περίπου 1° από γραμμή σε γραμμή.

Πίνακας 21: Η πλάκα Plimpton με την τριγωνομετρική ερμηνεία

Γωνία	I. d^2/l^2 ή b^2/l^2	II. *IB.SI SAG* Το πλάτος, b	III. *IB.SI si-li-ip-tim* Η διαγώνιος, d	IV. *MU.BI.IM* Το όνομά του
44,76°	[(1) 59] 00 15	1 59	2 49	*Ki.* 1
44,25°	[(1) 56 56] 58 14 50 06 15	56 07	1 20 25	*Ki.* 2
43,79°	[(1) 55 07] 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	*Ki.* 3
43,27°	(1) 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	*Ki.* 4
42,08°	(1) 48 54 01 40	1 05	1 37	*Ki.* [5]
41,54°	(1) 47 06 41 40	5 19	8 01	[*Ki.* 6]
40,32°	(1) 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	*Ki.* 7
39,77°	(1) 41 33 45 14 3 45	13 19	20 49	*Ki.* 8
38,72°	(1) 38 33 36 36	8 01	12 49	*Ki.* 9
37,44°	(1) 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	*Ki.* 10
36,87°	(1) 33 45	45	1 15	*Ki.* 11
34,98°	(1) 29 21 54 2 15	27 59	48 49	*Ki.* 12
33,86°	(1) 27 00 03 45	2 41	4 49	*Ki.* 13
33,26°	(1) 25 48 51 35 6 40	29 31	53 49	*Ki.* 14
31,89°	(1) 23 13 46 40	28	53	*Ki.* 15

Από μαθηματικής άποψης η ερμηνεία αυτή είναι έγκυρη όμως η Robson διατυπώνει την εξής σκέψη:[335]

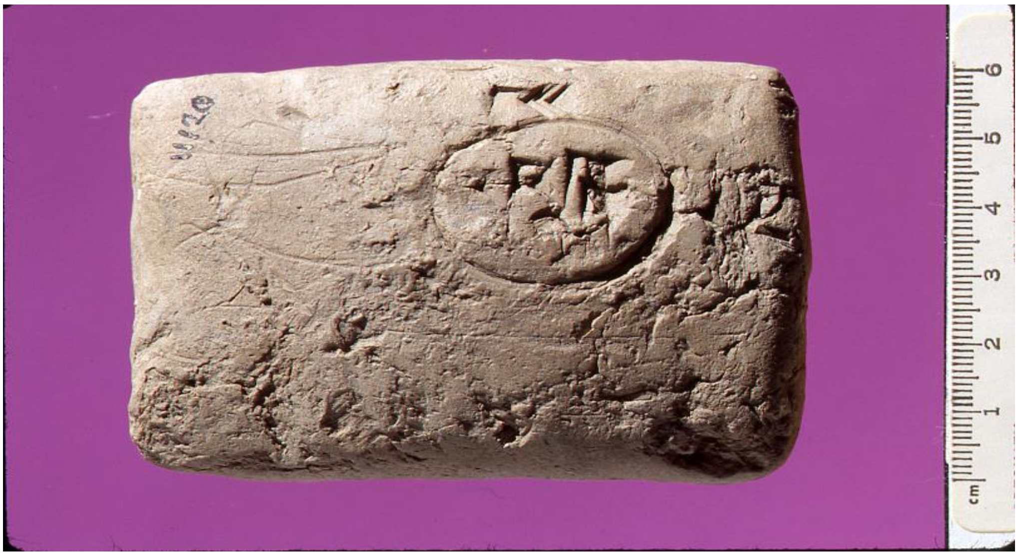
«Αν η Plimpton 322 είναι τριγωνομετρικός πίνακας θα πρέπει να υπάρχουν και άλλες πλάκες από τη Μεσοποταμία που να υπολογίζουν γωνίες.»

Σύμφωνα με την ίδια, η σωστή ερμηνεία θα πρέπει να είναι ιστορικά και πολιτισμικά έγκυρη. Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά την ιστορική συνέπεια, η θεωρία θα πρέπει να σέβεται το ιστορικό πλαίσιο της Plimpton 322 και να μην επιβάλει αναχρονιστικές ερμηνείες. Σε σχέση με την πολιτισμική εγκυρότητα, η θεωρία θα πρέπει να εξηγεί τη λειτουργία της πλάκας Plimpton 322 σύμφωνα με τα όσα είναι γνωστά για τα Βαβυλωνιακά μαθηματικά από πλάκες της ίδιας περιόδου και ιδανικά από την ίδια περιοχή (από τη Larsa και τα περίχωρά της).[336]

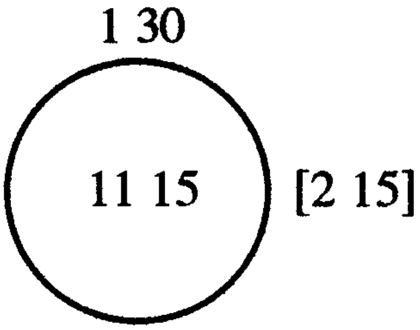
Για παράδειγμα, η πλάκα YBC 7302 που μελετήσαμε στην ενότητα 2.3.1 χρονολογείται την ίδια εποχή με την Plimpton 322 και βρέθηκε στην περιοχή της Larsa.[337] Από την ερμηνεία της πλάκας YBC 7302 καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι οι Βαβυλώνιοι θεωρούσαν τον κύκλο ως ένα σχήμα που περιβάλλεται από μία περιφέρεια, σε αντίθεση με τα σύγχρονα μαθηματικά που ο κύκλος θεωρείται ως το σχήμα που δημιουργείται από την ακτίνα που περιστρέφεται γύρω από το κέντρο. Υπάρχουν και άλλα παραδείγματα υπολογισμού του εμβαδού του κύκλου από πλάκες της ίδιας περιόδου και σε κανένα από αυτά δεν χρησιμοποιείται η ακτίνα. Για

[335] Robson, 2002, 109.
[336] Robson, 2001, 176.
[337] Βλ. ενότητα 2.3.1 παράδειγμα 3, λεπτομέρειες για την πλάκα YBC 7302.

παράδειγμα, η πλάκα YBC 11120 (εικόνα 42) που μοιάζει πολύ με την YBC 7302 έχει άλλα νούμερα.



Εικόνα 42: Η πλάκα YBC 11120[338]



Εικόνα 43: Η πλάκα YBC 11120 μεταφρασμένη από την E. Robson[339]

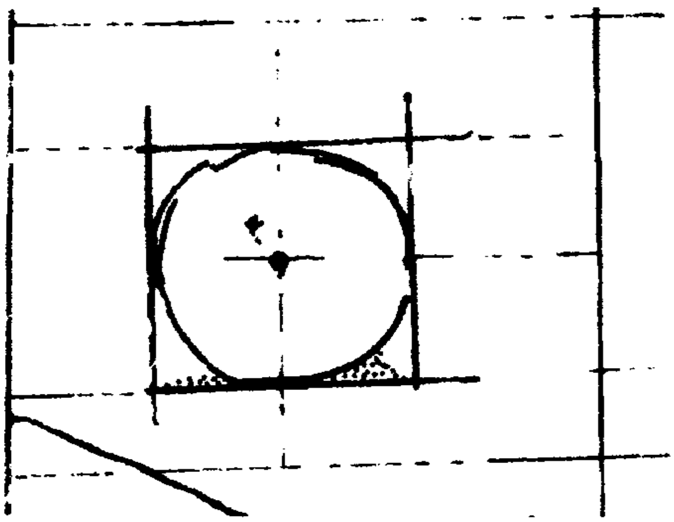
Επομένως, χωρίς ένα καλά ορισμένο κέντρο ή ακτίνα δεν θα μπορούσε να υπάρχει εκείνη την εποχή κάποια μέθοδο για τη μέτρηση γωνιών ή η έννοια της τριγωνομετρίας. Επομένως, η πλάκα Plimpton δεν θα μπορούσε να είναι τριγωνομετρικός πίνακας.[340]

Με το παραπάνω η Robson δεν εννοεί ότι οι Βαβυλώνιοι δεν γνώριζαν πως οι κύκλοι θα μπορούσαν να δημιουργηθούν από ακτίνες που περιστρέφονται, αλλά απλά ότι η ακτίνα δεν ήταν κεντρική μαθηματική έννοια στη Βαβυλώνα. Για παράδειγμα, στην

[338] https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-old-babylonian-area-calculation.
[339] Robson, 2001, 180.
[340] Robson, 2002, 112.

πλάκα BM 15285 (εικόνα 44) από την Larsa στο πάνω αριστερά μέρος απεικονίζονται κύκλοι χαραγμένοι μέσα σε τετράγωνα και τα σημάδια που έχουν στο κέντρο οι κύκλοι αποκαλύπτουν ότι θα μπορούσαν να σχεδιαστούν με περιστρεφόμενους διαβήτες (εικόνα 45).[341]

Εικόνα 44: Η πλάκα BM 15285[342]



Εικόνα 45: Τμήμα της πλάκας BM 15285 ζωγραφισμένο από την E. Robson[343]

341 ό.π., 113.
342 https://www.britishmuseum.org/collection/object/W_1896-0410-11.
343 Robson, 2001, 182.

3.2.3 Η ερμηνεία των ζευγών αντιστρόφων

Η ερμηνεία των ζευγών αντιστρόφων προτείνει ότι οι αριθμοί στην πλάκα Plimpton 322 παράγονται από ζευγάρια αντιστρόφων. Συγκεκριμένα ένας αριθμός χ και ο αντίστροφός του $\frac{1}{\chi}$ παράγουν τις ποσότητες $((\chi - 1/\chi)/2, 1, (\chi + 1/\chi)/2)$ που αποτελούν Πυθαγόρειες τριάδες. Στη συνέχεια, σύμφωνα με την Robson από αυτές τις τριάδες παράγονται οι σωζόμενες στήλες της πλάκας Plimpton 322 ως εξής:

- $((\chi + 1/\chi)/2)^2$, οι τιμές της στήλης I της Plimpton 322.
- $a \times (\chi - 1/\chi)/2$, οι τιμές της στήλης II, όπου α ένας κατάλληλος παράγοντας.
- $a \times (\chi + 1/\chi)/2$, οι τιμές της στήλης III.

Σύμφωνα με την Robson, οι τιμές για τις ποσότητες $\chi,\ 1/\chi, (\chi - 1/\chi)/2\ \kappa\alpha\iota\ (\chi + 1/\chi)/2$ υπήρχαν στο μη σωζόμενο τμήμα της Plimpton 322, αριστερά της στήλης I (πρώτη σωζόμενη στήλη της Plimpton 322). Οι τιμές της στήλης I είναι ταξινομημένες σε φθίνουσα σειρά και μπορούν να θεωρηθούν ως ένα ενδιάμεσο βήμα για τον υπολογισμό της στήλης III. Οι επόμενες δύο στήλες του σωζόμενου τμήματος της Plimpton 322 προκύπτουν από τη μικρή κάθετη πλευρά $((\chi - 1/\chi)/2)$ και την υποτείνουσα $((\chi + 1/\chi)/2)$ του ορθογωνίου τριγώνου πολλαπλασιασμένες με κατάλληλους παράγοντες που προκύπτουν από την εφαρμογή του αλγορίθμου *trailing part*. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο *trailing part*, οι δύο τιμές (υποτείνουσα και μικρή κάθετη πλευρά) πολλαπλασιάζονται διαδοχικά με τους αντίστροφους των κοινών παραγόντων των τελευταίων εξηνταδικών ψηφίων των δύο τιμών, μέχρι να μην έχουν κοινούς παράγοντες. Θα αναφέρουμε 2 παραδείγματα για να γίνει κατανοητή η μέθοδος των ζευγών αντιστρόφων.

Παράδειγμα 1 (Βλ. πρώτη γραμμή πίνακα 22 παρακάτω)

Έστω $\chi = 2;24$, από τον πίνακα αντιστρόφων παίρνουμε ότι ο αντίστροφος του $\chi = 2;24$ είναι ο $\frac{1}{\chi} = 0;25$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την ημιδιαφορά τους και το ημιάθροισμά τους:

$$(\chi - 1/\chi)/2 = 0;59{,}30$$

$$(\chi + 1/\chi)/2 = 1;24{,}30$$

Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο *trailing part* στις τιμές $0;59{,}30$ και $1;24{,}30$ οι οποίες έχουν κοινό παράγοντα στην τελευταία εξηνταδική θέση το $0;30$. Πολλαπλασιάζουμε αυτές τις τιμές με το 2 που είναι ο αντίστροφος του $0;30$ και έχουμε:

$$0;59{,}30 \times 2 = 1{,}59$$

$$1;24{,}30 \times 2 = 2{,}49$$

που είναι οι τιμές της στήλης II και της στήλης III αντίστοιχα στην πρώτη γραμμή της Plimpton 322.

Παράδειγμα 2 (Βλ. 13 γραμμή πίνακα 22 παρακάτω)

Έστω $\chi = 1;52{,}30$, από τον πίνακα αντιστρόφων παίρνουμε ότι ο αντίστροφος του $\chi = 1;52{,}30$ είναι ο $\frac{1}{\chi} = 0;32$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την ημιδιαφορά τους και το ημιάθροισμά τους:

$$(\chi - 1/\chi)/2 = 0;40{,}15$$

$$(\chi + 1/\chi)/2 = 1;12{,}15$$

Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο *trailing part* στις τιμές $0;40{,}15$ και $1;12{,}15$ οι οποίες έχουν κοινό παράγοντα στην τελευταία εξηνταδική θέση το $0;15$. Πολλαπλασιάζουμε αυτές τις τιμές με το 4 που είναι ο αντίστροφος του $0;15$ και έχουμε:

$$0;40{,}15 \times 4 = 2{,}41$$

$$1;12{,}15 \times 4 = 4{,}49$$

που είναι οι τιμές της στήλης ΙΙ και της στήλης ΙΙΙ αντίστοιχα στη γραμμή 13 της Plimpton 322.

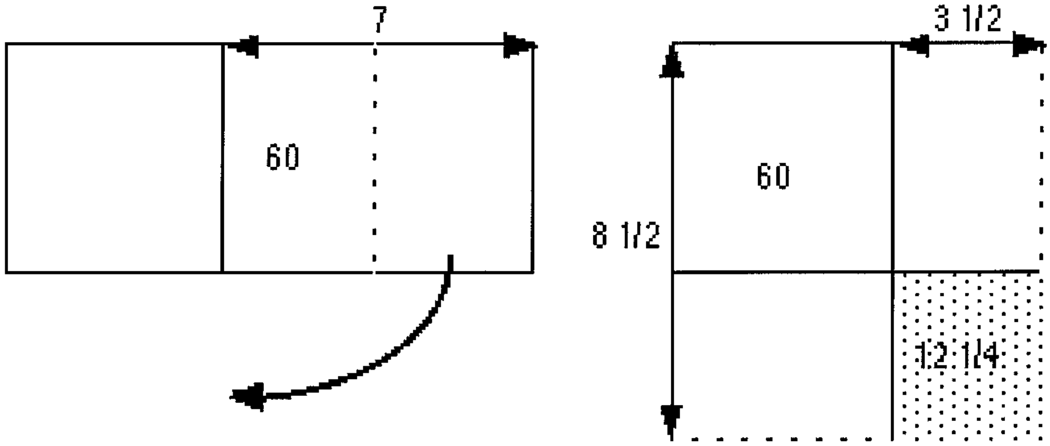
Επομένως, βλέπουμε ότι η ερμηνεία της Robson όντως μας δίνει τους αριθμούς που εμφανίζονται στην Plimpton 322. Σε τι όμως βασίζεται η Robson και προτείνει την ερμηνεία των ζευγών αντιστρόφων;

Αρχικά, αξίζει να αναφερθεί οι τα ζεύγη αντιστρόφων είχαν βασικό ρόλο στα Βαβυλωνιακά μαθηματικά, σε αντίθεση με τους τριγωνομετρικούς πίνακες ή την αριθμοθεωρητική ερμηνεία. Αυτό αποδεικνύεται από τις σχολές των γραφέων του 19ου και 18ου αιώνα, όπως το House F στη Nippur (που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο), όπου χιλιάδες αντίγραφα των μαθητευόμενων γραφέων έχουν σωθεί.[344] Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι εκπαιδευόμενοι γραφείς έπρεπε να μάθουν τους πίνακες πολλαπλασιασμού και αντιστρόφων, καθώς μέσω των αντιστρόφων εκτελούσαν τις διαιρέσεις.[345]

Υπάρχουν αρκετά σχολικά προβλήματα που σχετίζονται με τα ζεύγη αντιστρόφων και ειδικότερα ένα τέτοιο πρόβλημα περιέχεται στην πλάκα YBC 6967 που μελετήσαμε στην ενότητα 2.4.2. Η πλάκα YBC 6967 χρονολογείται στα τέλη του 19ου ως τις αρχές του 18ου αιώνα και είναι από την πόλη της Larsa, όπως και η Plimpton 322. Στην YBC 6967 περιέχονται οδηγίες για την επίλυση ενός σχολικού προβλήματος το οποίο σχετίζεται με τα ζεύγη αντιστρόφων.[346]

Τι σχέση έχει όμως η πλάκα YBC 6967 με την Plimpton 322; Η λύση του προβλήματος της YBC 6967 περιγράφει το σχηματισμό ενός μεγάλου τετραγώνου από την αντιπαράθεση ενός μικρού τετραγωνικού χώρου και ενός σχήματος εμβαδού 60 (βλ. σχήμα 7).

[344] Βλ. ενότητα 2.1.3 αναλυτικά για το House F.
[345] Robson, 2002, 113.
[346] Βλ. ενότητα 2.4.2. αναλυτικά η ερμηνεία της πλάκας YBC 6967.



Σχήμα 7: Η μέθοδος επίλυσης της πλάκας YBC 6967[347]

Αν επανασχεδιάσουμε αυτή την περιοχή 1, 00 ως μεσαίου μεγέθους τετράγωνα με πλευρά $\sqrt{1}$ έχουμε μια συγκεκριμένη περίπτωση της σχέσης $d^2 = b^2 + l^2$. Δηλαδή κατά τη διάρκεια επίλυσης ενός προβλήματος που σχετίζεται με την εύρεση ενός ζεύγους αντιστρόφων δεδομένης της ακέραιας διαφοράς τους δημιουργήθηκε μια Πυθαγόρεια τριάδα: 8;30, $\sqrt{60}$, 3;30. Ομολογουμένως είναι μια δύσκολη τριάδα για να αντιμετωπιστεί από τη Βαβυλωνιακή αρίθμηση λόγω του $\sqrt{60}$. Ωστόσο, σύμφωνα με τον ορισμό των αντιστρόφων με τον οποίο το γινόμενό τους είναι 1 αν ορίσουμε το εμβαδόν να είναι 1, τότε σύμφωνα με αυτή την μέθοδο προκύπτουν Πυθαγόρειες τριάδες, όπως φαίνεται παρακάτω.[348]

Εάν κάνουμε τις απαραίτητες προσαρμογές στο ζεύγος αντιστρόφων στην πλάκα YBC 6967 — δηλαδή ορίζοντας το γινόμενό τους ως 1, όχι ως 60 — παίρνουμε την διαφορά 12 - 0;05 = 11;55. Τα μισό από αυτό είναι 5;57,30 (η μικρότερη κάθετη πλευρά). Υψώνουμε στο τετράγωνο αυτόν τον αριθμό, προσθέτουμε το 1 και παίρνουμε 36;30,06,15. Υπολογίζουμε την τετραγωνική ρίζα: 6;02,30 (υποτείνουσα). Επομένως, έχουμε δημιουργήσει την τριάδα 6;02 - 5;57,30 - 1. Τώρα, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την τριάδα με πολλαπλάσια του 2, 3, και 5 για να πάρουμε μια τριάδα με τη μικρότερη ακολουθία αριθμών:[349]

$$(6;02 - 5;57{,}30 - 1) \times 2 \text{ (επειδή οι 2 πρώτοι αριθμοί τελειώνουν σε 30)} =$$

$$(12;05 - 11;55 - 2) \times 12 \text{ (επειδή οι 2 πρώτοι αριθμοί τελειώνουν σε 5)} =$$

$$(2{,}25 - 2{,}23 - 24).$$

Δηλαδή τα βήματα που έκανε ο γραφέας ήταν τα εξής:

Έστω, δύο αντίστροφοι $x \; και \; \frac{1}{x}$:

1. Υπολόγιζε την ημιδιαφορά τους $(\chi - 1/\chi)/2$

[347] Robson, 2001, 184.
[348] Robson, 2001, 184.
[349] ό.π., 185.

2. Υπολόγιζε το $((\chi - 1/\chi)/2)^2 + 1$
3. Υπολόγιζε την τετραγωνική ρίζα του αποτελέσματος από το βήμα 2.
4. Τέλος, πολλαπλασίαζε την τριάδα που είχε βρει με πολλαπλάσια του 2, 3 και του 5 έτσι ώστε να βρεθεί την όσο το δυνατόν μικρότερη ακολουθία αριθμών.

Ο Neugebauer είχε επισημάνει ότι ίσως οι αριθμοί που υπάρχουν στην Plimpton 322 να είχαν προκύψει από ζεύγη αντιστρόφων και απαρίθμησε τα πρώτα τέσσερα. Δεν πίστευε ωστόσο ότι αυτή είναι η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε και πιο συγκεκριμένα αναφέρει:[350]

> *«Κάποιος μπορεί επίσης να παραγάγει τους Πυθαγόρειους αριθμούς χρησιμοποιώντας μια παράμετρο a και τον αντίστροφό του a' όπου a = p/q. Μια σύγκριση των πρώτων τεσσάρων γραμμών των ζευγών δείχνει αμέσως ότι ούτε a ούτε a' θα μπορούσε να είναι το σημείο αναχώρησης, αλλά μόνο οι απλοί αριθμοί p και q.»*

Στον πίνακα 22 παρατίθεται το σύνολο των υπολογισμών για την Plimpton 322 σύμφωνα με τη μέθοδο των ζευγών αντιστρόφων. Οι δύο πρώτες στήλες περιέχουν τα ζεύγη αντιστρόφων, η τρίτη και η τέταρτη τις ημιδιαφορές και τα ημιαθροίσματά τους αντίστοιχα (που αντιστοιχούν στα 3 1/2 και 8 1/2 στην εικόνα 8). Η πέμπτη στήλη (Στήλη I στην Plimpton 322 που έχει σωθεί) περιέχει τα εμβαδά των μεγάλων τετραγώνων που υπολογίστηκαν (εάν, όπως στο YBC 6967, οι αντίστροφοι είναι άγνωστοι) προσθέτοντας 1 στο τετράγωνο της ημιδιαφοράς ή (εάν οι αντίστροφοι είναι γνωστοί) υπολογίζοντας το τετράγωνο του ημιαθροίσματος. Οι τιμές στις δύο επόμενες στήλες αποτελούν τα μήκη των δύο πλευρών του τετραγώνου (του μικρού και του μεγάλου) πολλαπλασιαζόμενες με τα πολλαπλάσια του 2,3 και 5 μέχρι να προκύψει η μικρότερη ακολουθία αριθμών (στήλες II και III στην Plimpton 322), ενώ η προτελευταία στήλη δείχνει το γινόμενο αυτών των παραγόντων. Η τελευταία στήλη του πίνακα, όπως και στο σωζόμενο τμήμα της Plimpton 322 (στήλη IV), απλά απαριθμεί τις γραμμές.[351]

Τι είναι όμως αυτό που κάνει τη θεωρία με τα ζευγάρια αντιστρόφων πιο έγκυρη από την αριθμοθεωρητική θεωρία του Neugebauer ή από τη θεωρία του τριγωνομετρικού πίνακα; Η Eleanor Robson απέδειξε ότι όλες οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή της Plimpton 322 – τα ζεύγη αντιστρόφων, η γεωμετρία αποκοπής και επικόλλησης αλλά και τα αριθμητικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται στην Plimpton 322 – πρόσθεση, αφαίρεση, μείωση κατά το ήμισυ, υπολογισμός των πλευρών των τετραγώνων είχαν όλα βασικό ρόλο στα Βαβυλωνιακά μαθηματικά. Είναι δηλαδή μια ιστορικά και πολιτισμικά έγκυρη μέθοδος.[352] Επίσης, ο τρόπος που υπολογίστηκε η Plimpton 322 ήταν με αριθμητικές τεχνικές, γνωστές στους Βαβυλωνίους εκείνη την περίοδο. Αυτά αποδεικνύονται από πλάκες που βρέθηκαν στη Larsa (όπως και η Plimpton 322), όπως για παράδειγμα η πλάκα YBC 6967 που αναφέραμε. Ακόμη, όπως αναφέρθηκε παραπάνω στη θεωρία του Neugebauer κάθε έγκυρη ερμηνεία για

[350] Robson, 2001, 193.
[351] Robson, 2001, 185.
[352] Για την πολιτισμική και ιστορική εγκυρότητα, βλ. πιο πάνω στην ερμηνεία του τριγωνομετρικού πίνακα ενότητα 3.2.2.

την Plimpton 322 θα πρέπει να λαμβάνει υπόψιν τη σειρά των στηλών της πλάκας. Πιο συγκεκριμένα, στη θεωρία των ζευγών αντιστρόφων οι τιμές της στήλης I (στο σωζόμενο τμήμα της Plimpton 322) είναι ένα απαραίτητο βήμα για τον υπολογισμό των τιμών της στήλης III. Επίσης, οι τιμές της στήλης I προέρχονται από μία ταξινομημένη σε φθίνουσα σειρά λίστα αριθμών (βλ. πίνακα 22 το τμήμα που δεν σώζεται στην Plimpton 322).[353]

Πίνακας 22: Η Plimpton 322 με ζεύγη αντιστρόφων[354]

x	$1/x$	$(x-1/x)/2$	$(x+1/x)/2$	$\{(x+1/x)/2\}^2$	Short side	Diagonal	Long side	Line
2;24	0;25	0;59 30	1;24 30	1;59 00 15	1 59	2 49	2 00	1
2;22 13 20	0;25 18 45	0;58 27 17 30	1;23 46 02 30	1;56 56 58 14 50 06 15	56 07	1 20 25	57 36	2
2;20 37 30	0;25 36	0;57 30 45	1;23 06 45	1;55 07 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	1 20 00	3
2;18 53 20	0;25 55 12	0;56 29 04	1;22 24 16	1;53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	3 45 00	4
2;15	0;26 40	0;54 10	1;20 50	1;48 54 01 40	1 05	1 37	1 12	5
2;13 20	0;27	0;53 10	1;20 10	1;47 06 41 40	5 19	8 01	6 00	6
2;09 36	0;27 46 40	0;50 54 40	1;18 41 20	1;43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	45 00	7
2;08	0;28 07 30	0;49 56 15	1;18 03 45	1;41 33 45 14 03 45	13 19	20 49	16 00	8
2;05	0;28 48	0;48 06	1;16 54	1;38 33 36 36	8 01	12 49	10 00	9
2;01 30	0;29 37 46 40	0;45 56 06 40	1;15 33 53 20	1;35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	1 48 00	10
2	0;30	0;45	1;15	1;33 45	45	1 15	1 00	11
1;55 12	0;31 15	0;41 58 30	1;13 13 30	1;29 21 54 02 15	27 59	48 49	40 00	12
1;52 30	0;32	0;40 15	1;12 15	1;27 00 03 45	2 41	4 49	4 00	13
1;51 06 40	0;32 24	0;39 21 20	1;11 45 20	1;25 48 51 35 06 40	29 31	53 49	45 00	14
1;48	0;33 20	0;33 20	1;10 40	1;23 13 46 40	28	53	45	15

Όπως αναφέρθηκε, για να είναι μια ερμηνεία που αφορά την Plimpton 322 πειστική θα πρέπει να είναι γλωσσικά έγκυρη πέρα από τη μαθηματική, ιστορική και πολιτισμική εγκυρότητά της. Συγκεκριμένα, η Robson αναφέρει:[355]

> *«Η θεωρία θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη, όχι μόνο το αριθμητικό περιεχόμενο του δισκίου, αλλά και τις τέσσερις επικεφαλίδες στηλών του, εξηγώντας πώς σχετίζονται με τους παρακάτω αριθμούς και παρέχοντας μια γλωσσικά και*

[353] Robson, 2001, 189.
[354] Robson, 2001, 186.
[355] ό.π., 176.

μαθηματικά αληθοφανή αναπαράσταση των κατεστραμμένων λέξεων στη στήλη Ι. Κάθε λέξη είναι σημαντική όσο κάθε αριθμός.»

Επομένως, προκύπτουν τα εξής ερωτήματα:

- *Ποια είναι η κατεστραμμένη επικεφαλίδα στην πρώτη στήλη, στήλη (Ι);*
- *Υπάρχουν ή όχι τα αμφιλεγόμενα 1 στη στήλη Ι;*

Γνωρίζουμε ότι οι 15 σειρές κάτω από την επικεφαλίδα περιέχουν είτε την αναλογία του τετραγώνου της μικρής πλευράς προς το τετράγωνο της μεγάλης πλευράς (b^2/l^2) είτε την αναλογία του τετραγώνου της διαγωνίου προς το τετράγωνο της μεγάλης πλευράς (d^2/l^2), ανάλογα αν υπάρχει το 1 στην αρχή της στήλης Ι ή όχι.[356] Σύμφωνα με τη θεωρία των ζευγών αντιστρόφων, αυτό ισοδυναμεί με την περιοχή του μικρού τετραγώνου (βλ. σχήμα 7 το τετράγωνο κάτω δεξιά με τις κουκίδες) ή την περιοχή του μεγάλου τετραγώνου που αποτελείται από 1 συν το μικρό τετράγωνο (βλ. σχήμα 7 το μεγάλο τετράγωνο δεξιά).

Ο Neugebauer μετέφρασε την επικεφαλίδα ως εξής (οι αγκύλες σηματοδοτούν σημεία που λείπουν και έχουν αποκατασταθεί):[357]

[ta]-ki-il-ti ş i-li-ip-tim
[sˇa in]-na-as-sà -hu-ú -ma SAG i -...-ú
Το takiltum της διαγωνίου που έχει αφαιρεθεί, έτσι ώστε το πλάτος....

Κανείς δεν μπόρεσε να βελτιώσει τη μετάφραση του Neugebauer αφότου δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά η πλάκα Plimpton 322. Ο Neugebauer δεν ήταν βέβαιος για την πρώτη λέξη *(talìltum)*, την τελευταία *(i-...-ú)*, καθώς και για το τι έλειπε στην αρχή της δεύτερης γραμμής. Στην πραγματικότητα η τελευταία λέξη είναι ευανάγνωστη, αν και είναι λίγο αλλοιωμένη. Επίσης, η Robson συγκρίνοντας την επικεφαλίδα με άλλα μαθηματικά κείμενα της ίδιας περιόδου που χρησιμοποιούσαν την ίδια ορολογία (όπως η YBC 6967), κατάφερε να συμπληρώσει τα κενά στις αρχές των δύο γραμμών και το σύνολο της επικεφαλίδας να γίνει κατανοητό. Έτσι, κατέληξε στο εξής:[358]

[ta]-ki-il-ti ş i-li-ip-tim
[sˇa 1 in]-na-as-sà -hu-u -ma SAG i -il -lu -u

Το takiltum - τετράγωνο της διαγωνίου από την οποία σχίζεται το 1, έτσι ώστε η μικρή πλευρά να εμφανιστεί.

Ο τίτλος περιγράφει το εμβαδό ενός μεγάλου τετραγώνου που αποτελείται από 1 συν το μικρό τετράγωνο – το ρήμα *ilum* (που δεν κατάφερε ο Neugebauer να αποκαταστήσει) η Robson το μετέφρασε ως «εμφανίζεται». Η αποκατάσταση του τίτλου μας δίνει απάντηση στη δεύτερη ερώτηση: τα 1 υπάρχουν στην αρχή κάθε

356 Βλ. λεπτομέρειες ενότητα 3.1 «Στήλη Ι».
357 Robson, 2001, 190.
358 Robson, 2002, 115.

σειράς της στήλης Ι.[359] Για το *takiltum* η Robson ακολουθεί τη μετάφραση του Høyrup που μεταφράζει αυτόν τον όρο ως «κράτημα -(τετραγώνου)».[360] Συνεπώς, τώρα έχουμε απαντήσει στο πρώτο ερώτημα μας, ο τίτλος της πρώτης στήλης είναι ο εξής:[361]

Το κράτημα -τετραγώνου της διαγωνίου από την οποία σχίζεται το 1, έτσι ώστε η μικρή πλευρά να εμφανιστεί.

Σύμφωνα με την Robson βρήκαμε την πιο ιστορικά, πολιτισμικά και γλωσσικά έγκυρη από τις τρεις ερμηνείες της Plimpton 322. Η Plimpton 322 είναι ένας πίνακας με ζεύγη αντιστρόφων που ταξινομήθηκαν με φθίνουσα σειρά στο τμήμα της πλάκας που λείπει. Τα ζεύγη αντιστρόφων χρησιμοποιήθηκαν για να βρεθούν οι μικρές πλευρές (b) και οι διαγώνιοι (d) ορθογωνίων τριγώνων με μεγάλη κάθετη πλευρά (l=1) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο «αποκοπής και επικόλλησης». Ένα από τα ενδιάμεσα αποτελέσματα καταγράφηκε στην πρώτη στήλη που σώζεται (I) στην Plimpton 322. Στη συνέχεια, οι κοινοί παράγοντες εξαλείφθηκαν από τις παραγόμενες τριάδες, ώστε οι τιμές των μικρών κάθετων πλευρών και των διαγωνίων να γίνουν μεταξύ τους πρώτοι αριθμοί και τα αποτελέσματα καταχωρήθηκαν στις στήλες II και III αντίστοιχα.[362]

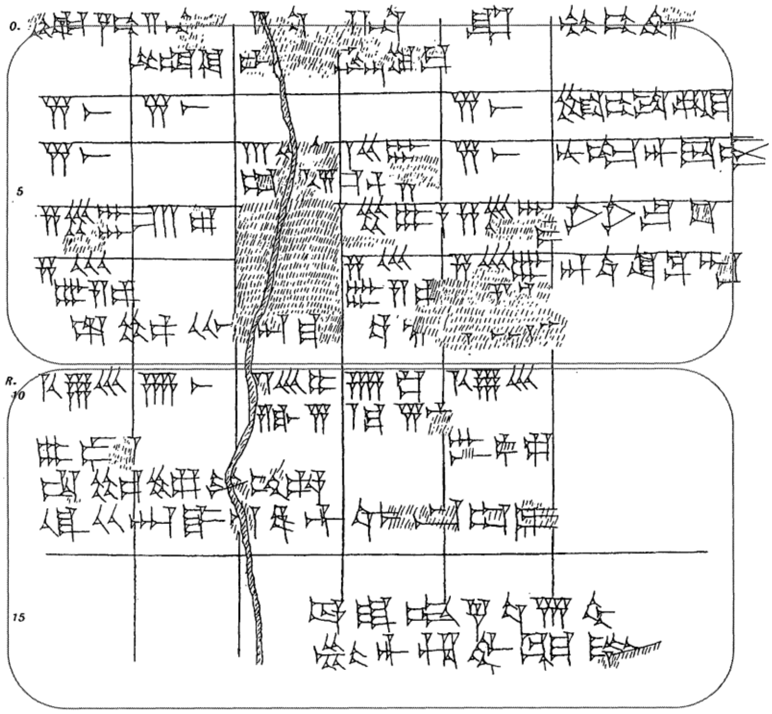
Το μόνο που πρέπει να ειπωθεί τώρα είναι *ποιος έγραψε την Plimpton 322 και για ποιο σκοπό;*

Είναι απίθανο να αναφερθεί το όνομα του συγγραφέα της Plimpton 322, καθώς δεν αναφέρεται πάνω στην πλάκα, πόσο μάλλον να διατυπωθεί κάτι για την προσωπικότητά του. Μπορούν όμως να ειπωθούν κάποιες γενικές πληροφορίες γι' αυτόν, όπως για παράδειγμα είναι σχεδόν βέβαιο ότι ο συγγραφέας ήταν άνδρας, καθώς όλες οι γυναίκες γραφείς από την αρχαία Μεσοποταμία ζούσαν και εργάζονταν πολύ πιο βόρεια, στο κεντρικό και βόρειο Ιράκ. Μπορούμε επίσης να αποκλείσουμε την πιθανότητα ότι ο συγγραφέας ήταν μαθηματικός με την έννοια του επαγγέλματος που έχει σήμερα. Η κατηγοριοποίηση των ακαδημαϊκών κλάδων σε επαγγέλματα είναι ένα φαινόμενο του πολύ πρόσφατου παρελθόντος. Είναι απίθανο να ήταν μαθηματικός, όπως αυτοί της Κλασικής Αρχαιότητας και του Μεσαίωνα, δηλαδή κάποιο μορφωμένο μέλος των εμπορικών τάξεων ή της κυρίαρχης τάξης όπου ο πλούτος, το υψηλό καθεστώς ή η βασιλική κηδεμονία του έδιναν τη δυνατότητα να έχει αρκετό ελεύθερο χρόνο για να ικανοποιήσει τις μαθηματικές του τάσεις Δεν υπάρχει ούτε ένα παράδειγμα αυτού του τύπου ατόμου σε ολόκληρη την ιστορία της Μεσοποταμίας. Οι γραφείς έπρεπε να δουλεύουν για να καλύψουν τα προς το ζην, οι περισσότεροι από αυτούς ως γραφειοκράτες και διαχειριστές των ναών και των παλατιών, ενώ άλλοι εξυπηρετούσαν τις γραφειοκρατικές ανάγκες των ιδιωτικών νοικοκυριών ή μεμονωμένων ατόμων. Ο συγγραφέας της Plimpton 322, πρέπει να ήταν κάποιος που γνώριζε γραφή, ανάγνωση, αριθμητική και είχε μαθηματικές ικανότητες που τις εφάρμοζε στη διάρκεια της επαγγελματικής του ζωής.[363]

359 ό.π., 116.
360 Βλ. λεπτομέρειες για την ορολογία του Høyrup στην ενότητα 2.4.1.
361 Robson, 2001, 190.
362 Robson, 2002, 116κ.ε.
363 ό.π., 117.

Όπως αναφέρθηκε, οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή της Plimpton 322 – ζεύγη αντιστρόφων, γεωμετρία αποκοπής και επικόλλησης πρόσθεση, αφαίρεση μείωση κατά το ήμισυ – ήταν όλες απλές τεχνικές που διδάσκονταν στις σχολές των γραφέων. Συνεπώς, ο συγγραφέας της Plimpton 322 θα μπορούσε να είναι εκπαιδευόμενος γραφέας ή εκπαιδευτής γραφέων (δάσκαλος). Επίσης, η Robson συγκρίνοντας την Plimpton 322 με άλλες πλάκες από την Larsa, όπως η πλάκα YBC 4721[364] (βλ. εικόνα 46), κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ο συγγραφέας της Plimpton 322 θα πρέπει να ήταν εξοικειωμένος με τη μορφή των εγγράφων που χρησιμοποιούσαν οι διαχειριστές του παλατιού της Larsa. Έτσι, αποκλείεται να ήταν εκπαιδευόμενος γραφέας αλλά φαίνεται να ήταν γραφειοκράτης γραφέας. Αν ο συγγραφέας της Plimpton 322 ήταν δάσκαλος, τότε ήταν σχεδόν σίγουρα και γραφειοκράτης. Πιο συγκεκριμένα, η Robson αναφέρει:[365]

> *«Γνωρίζουμε τα ονόματα και τα πρωτογενή επαγγέλματα περίπου μισής ντουζίνας αρχαίων δασκάλων από την Μεσοποταμία και όλοι τους είχαν καριέρες στη διοίκηση του παλατιού.»*



Εικόνα 46: Η πλάκα YBC 4721 ζωγραφισμένη από την E. Robson.[366]

Επίσης, είναι εξαιρετικά απίθανο η Plimpton 322 να γράφτηκε για να εξυπηρετήσει τους γραφειοκρατικούς σκοπούς του ναού ή του παλατιού. Η οργανωτική δομή της

364 Η πλάκα YBC 4721 είναι μία καταγραφή σιτηρών που προορίζονται για διάφορες πόλεις εντός του βασιλείου της Λάρσα. Γράφτηκε στην πόλη Ur που τότε βρίσκονταν υπό τον πολιτικό έλεγχο της Larsa, το 1822 π.Χ. και τώρα στεγάζεται στο Πανεπιστήμιο του Yale.
365 Robson, 2002, 118.
366 ό.π., 110.

μοιάζει περισσότερο με ένα είδος σχολικών μαθηματικών εγγράφων που η Robson τα ονομάζει «λίστες προβλημάτων των δασκάλων». Ένα καλό παράδειγμα είναι η πλάκα BM 80209 (βλ. εικόνα 47), που ανασκάφηκε από την αρχαία Sippar κοντά στη σύγχρονη Βαγδάτη και τώρα στεγάζεται στο Βρετανικό Μουσείο. Η εν λόγω επαναλαμβάνει μερικά προβλήματα σχολικών μαθηματικών ξανά και ξανά, δίνοντας κάθε φορά ένα διαφορετικό σύνολο αριθμητικών δεδομένων που θα δώσουν ως αποτέλεσμα έναν ακέραιο αριθμό. Η Plimpton 322 είναι επίσης μια επανάληψη της ίδιας μαθηματικής διαδικασίας η οποία επαναλαμβάνεται δεκαπέντε φορές και κάθε φορά ξεκινάει με ένα διαφορετικό ζευγάρι αντιστρόφων.[367]

Καταλήγοντας η Robson αναφέρει ότι η Plimpton 322 θα μπορούσε να είναι ένας εκπαιδευτικός κατάλογος, όπου θα επέτρεπε σε έναν δάσκαλο να θέσει στους μαθητές του επαναλαμβανόμενες ασκήσεις στο ίδιο μαθηματικό πρόβλημα και να ελέγξει τις ενδιάμεσες και τελικές απαντήσεις τους χωρίς να επαναλάβει ο ίδιος τους υπολογισμούς.[368]

Όσον αφορά το είδος του μαθηματικού προβλήματος αυτό θα μπορούσε να αφορά κάποιο είδος προβλημάτων με ορθογώνια τρίγωνα:[369]

> *«Το κράτημα του τετραγώνου στη μετάφραση του τίτλου της στήλης I υποδεικνύει ότι εμπλέκεται η γεωμετρία περικοπής και επικόλλησης. Ενώ η εμφάνιση της διαγωνίου στη στήλη III υποδηλώνει έντονα ότι έχουμε να κάνουμε με τρίγωνα ή τουλάχιστον με σχήματα μέσα στα οποία μπορεί να βρίσκεται μία διαγώνιος.»*

[Εάν κάθε] τετραγωνική πλευρά είναι [...], ποια είναι η περιοχή;
Εάν κάθε] τετραγωνική πλευρά είναι [...], ποια είναι η περιοχή;
[Εάν] κάθε τετραγωνική πλευρά είναι 20, ποια είναι η διαγώνιος;
[Εάν] κάθε τετραγωνική πλευρά είναι 10, ποια είναι η διαγώνιος;
Αν το εμβαδό είναι 8,20, ποια είναι η περιφέρεια;
Αν το εμβαδό είναι 2,13,20, ποια είναι η περιφέρεια;
Αν το εμβαδό είναι 3,28,20, ποια είναι η περιφέρεια;
Αν το εμβαδό είναι 5, ποια είναι η περιφέρεια;

Εικόνα 47: Η πλάκα BM 80209 ζωγραφισμένη από την E. Robson[370]

[367] Robson, 2002, 118.
[368] ό.π.
[369] Robson, 2001, 201κ.ε.
[370] Robson, 2002, 117.

3.3 Μια πρόσφατη ερμηνεία για την Plimpton 322

Το 2017 ο D. F. Mansfield και ο N. J. Wildberger στο άρθρο τους *«Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry»* που δημοσιεύτηκε στο *Historia Mathematica* αναφέρουν ότι η Plimpton 322 δεν είναι ένα σχολικό κείμενο, όπως ισχυρίζεται η E. Robson, αλλά ένα ασυνήθιστο είδος τριγωνομετρικής πλάκας. Πιο συγκεκριμένα, ο Mansfield πιστεύει ότι η Plimpton 322 περιγράφει τα ορθογώνια τρίγωνα χρησιμοποιώντας ένα είδος τριγωνομετρίας που βασίζεται στις αναλογίες των πλευρών και όχι σε γωνίες και κύκλους.

Ένας σύγχρονος τριγωνομετρικός πίνακας είναι μια λίστα από ορθογώνια τρίγωνα με υποτείνουσα 1 και προσεγγίσεις για το $\sin\theta$ και το $\cos\theta$ μαζί με το λόγο $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$. O Mansfield θεωρεί ότι η Plimpton 322 είναι ένα είδος τριγωνομετρικού πίνακα που απαριθμεί τα ορθογώνια τρίγωνα που έχουν τη μεγάλη κάθετη πλευρά l ίση με 1 τη μικρή κάθετη πλευρά ακριβώς β και τη διαγώνιο ακριβώς δ $(\beta, 1, \delta)$- αντί των προσεγγίσεων $\sin\theta$ και $\cos\theta$. Οι λόγοι β / δ ή δ/β (που ισοδυναμούν με το $\tan\theta$) δεν δίνονται, καθώς δεν μπορούν να υπολογιστούν με ακρίβεια λόγω των διαιρέσεων που εμπλέκονται. Αντί γι' αυτό η Plimpton 322 διαχωρίζει αυτή την πληροφορία σε 3 ακριβείς αριθμούς. Ο πρώτος αριθμός αφορά μια αναλογία υψωμένη στο τετράγωνο (η πρώτη σωζόμενη στήλη της Plimpton 322) που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ευρετήριο και απλουστεύει τις ποσότητες β και δ σε b και d αντίστοιχα που αποτελούν τους άλλους 2 αριθμούς (η δεύτερη και η τρίτη σωζόμενη στήλη).

Τις σωζόμενες στήλες της πλάκας ο Mansfield τις ονομάζει ως I', II', III', IV' (βλ. πίνακα 23) και αναφέρει ότι αυτή η αρίθμηση είναι μια πρόσφατη προσθήκη των ιστορικών και μπορεί να διαφέρει από το πρωτότυπο. Ο τίτλος της πρώτης στήλης έχει μεταφραστεί ως:[371]

«Το takiltum της διαγωνίου από την οποία έχει αφαιρεθεί 1 και από αυτό προκύπτει (το τετράγωνο) του πλάτος».

Ο Mansfield θεωρεί ότι η λέξη *takiltum* σημαίνει τετράγωνο, έτσι τις τιμές της στήλης I' τις δηλώνει ως δ_n^2 (όπου n ο αριθμός της σειράς στην Plimpton 322). Ο τίτλος όμως αναφέρει ότι αν αφαιρέσουμε τα αρχικά 1, τότε παίρνουμε ένα άλλο τετράγωνο συγκεκριμένα το $\delta_n^2 - 1 = \beta_n^2$. Ο Mansfield συμφωνεί με την Eleanor Robson η οποία απέδειξε ότι τα αρχικά 1 στις τιμές της πρώτης στήλης υπάρχουν (βλ. ενότητα 3.2.3), έτσι ορίζει τις τιμές β_n^2 να είναι αριθμοί μεταξύ του 0 και 1. Συνεπώς, τόσο το β_n^2 όσο και το δ_n^2 γίνονται σαφή από τον τίτλο.[372]

[371] Mansfield, 2017, 398.
[372] ό.π.

Πίνακας 23: Το σωζόμενο τμήμα της πλάκας Plimpton 322[373]

I’, δ_n^2 Το *takiltum* της διαγωνίου από την οποία έχει αφαιρεθεί 1 και από αυτό προκύπτει του πλάτους	II’, b_n *ib-si του πλάτους*	III’, d_n *ib-si* της διαγωνίου	IV’, n Η θέση της
[(1) 59] 00 15	1 59	2 49	*Ki*, 1
[(1) 56 56] 58 14 50 06 15	56 07	1 20 25	*Ki*, 2
[(1) 55 07] 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	*Ki*, 3
(1) 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	*Ki*, 4
(1) 48 54 01 40	1 05	1 37	*Ki*, [5]
(1) 47 06 41 40	5 19	8 01	[*Ki*, 6]
(1) 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	*Ki*, 7
(1) 41 33 45 14 3 45	13 19	20 49	*Ki*, 8
(1) 38 33 36 36	8 01	12 49	*Ki*, 9
(1) 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	*Ki*, 10
(1) 33 45	45	1 15	*Ki*, 11
(1) 29 21 54 2 15	27 59	48 49	*Ki*, 12
(1) 27 00 03 45	2 41	4 49	*Ki*, 13
(1) 25 48 51 35 6 40	29 31	53 49	*Ki*, 14
(1) 23 13 46 40	28	53	*Ki*, 15

Οι τίτλοι των στηλών II’ και III’ είναι περισσότερο απλοί. Αναφέρονται στο *ib-si* του πλάτους και στο *ib-si* της διαγωνίου αντίστοιχα, όπου η λέξη *ib-si* αναφέρεται στο αποτέλεσμα κάποιας πράξης. Ο Mansfield ονομάζει τις τιμές αυτών των στηλών ως b_n και d_n αντίστοιχα, που μαζί με τη μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου l_n (που δεν φαίνεται στην Plimpton 322) είναι επίσης πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, ικανοποιώντας τη σχέση $b^2 + l^2 = d^2$. Επιπλέον, αυτοί οι αριθμοί σχετίζονται με τις τιμές της στήλης I’ ως εξής:[374]

$$\delta_n^2 = \left(\frac{d_n}{l_n}\right)^2, \qquad \beta_n^2 = \left(\frac{b_n}{l_n}\right)^2$$

Κάθε μία από τις 15 τιμές του l_n (δεν εμφανίζονται στην πλάκα) έχει τη μορφή $2^a \times 3^b \times 5^c$ και οι αριθμοί αυτής της μορφής ονομάζονται «κανονικοί».[375] Αυτό εγγυάται ότι οι ποσότητες $\delta_n = d_n/l_n$ και τα τετράγωνα τους δ_n^2 μπορούν να γραφτούν ως πεπερασμένες ακολουθίες εξηνταδικών ψηφίων χωρίς προσέγγιση. Με άλλα λόγια, όλες οι τιμές στο P322 είναι ακριβείς και συνεπώς αυτό αποτελεί ένα σημαντικό

[373] Mansfield, 2017, 398.
[374] ό.π., 399.
[375] Βλ. λεπτομέρειες για τους κανονικούς αριθμούς στην ενότητα 2.2.2.

στοιχείο, αφού διακρίνει την πλάκα Plimpton 322 από όλους τους σύγχρονους τριγωνομετρικούς πίνακες (οι τιμές των οποίων είναι προσεγγίσεις).[376]

Παρόλο που οι τιμές b_n και d_n φαίνεται να μην είναι ταξινομημένες, όπως παρατηρούμε στις τιμές των αντίστοιχων στηλών, τα ορθογώνια τρίγωνα που αντιστοιχούν στις Πυθαγόρειες τριάδες αποδεικνύεται να έχουν μια σταθερά φθίνουσα κλίση, ή *ukullû*[377]

$$\beta_n = \frac{b_n}{l_n}$$

μεταξύ του 59,30 μέχρι 37,20 (βλ. πρώτη στήλη του πίνακα 24 παρακάτω). Όσον αφορά τις γωνίες, οι οποίες θα ήταν άγνωστες ως έννοια την Παλαιά Βαβυλωνιακή περίοδο, το εύρος της κλίσης κυμαίνεται από 45° ως 59°, με κάθε σειρά να διαφέρει κατά περίπου 1°. Αυτή η παρατήρηση από μόνη της υποδηλώνει μια τριγωνομετρική ερμηνεία για την Plimpton 322.[378]

Η τελευταία στήλη IV’ περιέχει απλώς τη λέξη *ki*, που σημαίνει «η θέση της» μαζί με τον αριθμό γραμμής *n*.

Σύμφωνα με τον Mansfield στη Βαβυλωνιακή ορολογία τόσο τα ορθογώνια τρίγωνα όσο και τα ορθογώνια έχουν μία «μικρή πλευρά» (*sag*) και μία «μεγάλη πλευρά» (*uš*). Η λέξη για την «υποτείνουσα» ενός ορθογωνίου τριγώνου ή τη «διαγώνιο» του ορθογωνίου είναι *siliptum*, οπότε είναι δύσκολο να προσδιοριστεί εάν το κείμενο αφορά ορθογώνια ή ορθογώνια τρίγωνα. Ως εκ τούτου, ο Mansfield χρησιμοποιεί το συμβολισμό (b, l, d) για μια Πυθαγόρεια τριάδα αριθμών που ικανοποιούν τη σχέση $b^2 + l^2 = d^2$ και μπορούν να ερμηνευθούν εξίσου ως μετρήσεις ορθογωνίου ή ορθογωνίου τριγώνου.[379]

Σύμφωνα με τη θεωρία του Mansfield το τμήμα που δεν σώζεται αριστερά της Plimpton 322 θα πρέπει να περιλαμβάνει δυο ακόμα στήλες που να περιέχουν τους λόγους $\beta_n = b_n/l_n$ και $\delta_n = d_n/l_n$ (όπου n ο αριθμός της σειράς που βρίσκεται η τιμή). Επίσης, προτείνει ότι το περιεχόμενο της πλάκας Plimpton 322 που σώζεται πρέπει να θεωρηθεί ως περιγραφή της τρίτης αναλογίας β_n/δ_n ή δ_n/β_n, όπως απαιτείται για έναν τριγωνομετρικό πίνακα. Αυτός ο λόγος, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, δεν μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια και έτσι αντικαταστάθηκε από τρεις στήλες (οι σωζόμενες στήλες της Plimpton 322) ώστε να μπορεί να παρουσιαστεί χωρίς προσέγγιση. Πιο συγκεκριμένα, η πρώτη σωζόμενη στήλη I’ της Plimpton 322 περιλαμβάνει το λόγο $\delta_n^2 = (d_n/l_n)^2$ ή $\beta_n^2 = (b_n/l_n)^2$ και χρησιμοποιείται ως ευρετήριο. Οι στήλες II’ και III’ περιέχουν τις τιμές b_n και d_n οι οποίες είναι οι απλοποιημένες τιμές των β_n και δ_n από τις οποίες απλοποιήθηκε ο κοινός παράγοντας $1/l_n$, βοηθώντας το γραφέα να κάνει τις εξής προσεγγίσεις $b_n/d_n = \beta_n/\delta_n$ και $d_n/b_n = \delta_n/\beta_n$.[380]

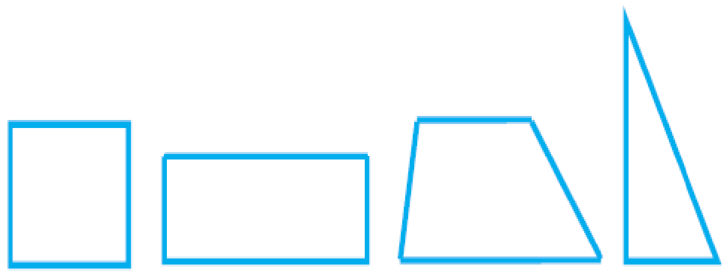
376 Mansfield, ό.π.
377 Βλ. ενότητα 3.3.1 λεπτομέρειες για τον όρο ukullu
378 Mansfield, ό.π.
379 ό.π.
380 ό.π., 399.

Με λίγα λόγια, η θεωρία του Mansfield για την Plimpton 322 αναφέρει ότι η πλάκα απαριθμεί τα κανονικοποιημένα ορθογώνια τρίγωνα (ή ορθογώνια) που έχουν τη μεγάλη κάθετη πλευρά l ίση με 1, τη μικρή κάθετη πλευρά ακριβώς β και την υποτείνουσα (ή τη διαγώνιο στην περίπτωση των ορθογωνίων) ακριβώς δ, $(\beta, 1, \delta)$. Αυτά τα ορθογώνια τρίγωνα μπορούν να τροποποιηθούν ώστε να δώσουν τις διαστάσεις όμοιων ορθογωνίων τριγώνων, πολλαπλασιάζοντας τα β και δ με (όπως θα το έθετε η Βαβυλωνιακή ορολογία) το πραγματικό (ή επιθυμητό) μήκος l_n, έτσι ώστε για ένα δεδομένο l_n:[381]

$$b_n = \beta_n \times l_n, \qquad d_n = \delta_n \times l_n$$

3.3.1 Τριγωνομετρία βασισμένη σε αναλογίες στη Βαβυλώνα

Η γεωμετρία στην αρχαία Βαβυλώνα προέκυψε από τις πρακτικές ανάγκες των διαχειριστών, των τοπογράφων και των οικοδόμων. Από τις μετρήσεις που έκαναν οι Βαβυλώνιοι για τα χωράφια, τους τοίχους, τα κτίρια, τα αρδευτικά κανάλια και τα ζιγκουράτ, διαμόρφωσαν μια αντίληψη για τη μέτρηση των βασικών τύπων σχημάτων, όπως τα τετράγωνα, τα ορθογώνια, τα τραπέζια και τα ορθογώνια τρίγωνα (βλ. εικόνα 48), η οποία βασίζεται στις αναλογίες των πλευρών. Ο Mansfield ονομάζει τη μέθοδο που βασίζεται στις αναλογίες των πλευρών των τριγώνων «*Βαβυλωνιακή Τριγωνομετρία*» για να την διακρίνει από τη σύγχρονη μέθοδο που βασίζεται σε γωνίες.[382]



Εικόνα 48: Τα βασικά σχήματα των Βαβυλωνίων[383]

Μετρήσεις που βασίζονται σε αναλογίες βρέθηκαν επίσης στην αρχαία Αίγυπτο και συγκεκριμένα στην Αιγυπτιακή αρχιτεκτονική, όπου ο όρος *seqed* ή *sqd* αναφέρεται στην κλίση μιας κεκλιμένης πλευράς. Αυτός ήταν ένας τρόπος μέτρησης που χρησιμοποιούνταν για την περιγραφή των πυραμίδων:[384]

381 Βλ. παραδείγματα στην ενότητα 3.3.2.
382 Mansfield, 2017, 399.
383 ό.π., 400.
384 ό.π.

«Γνωρίζουμε από τις ασκήσεις πυραμίδων στο μαθηματικό πάπυρο Rhind [...] ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι χρησιμοποίησαν μια απλή τριγωνομετρία για τον προσδιορισμό των αρχιτεκτονικών κλίσεων...»

Σύμφωνα με τον Mansfield, ένας παρόμοιος όρος με τον *seqed* υπάρχει και στην Παλαιά Βαβυλωνιακή περίοδο και είναι ο όρος *ukullu*. Χρησιμοποιείται σε αρκετά Βαβυλωνιακά προβλήματα ως το αντίστοιχο από αυτό που σήμερα θα λέγαμε κλίση, και συνήθως εμφανίζεται ως ένα συγκεκριμένο μήκος ανά cubit (1 cubit =0,5m). Μία παρόμοια έννοια που εφαρμόζεται σε τραπεζοειδή σχήματα εμφανίζεται στην πλάκα YBC 4666 στην οποία το εικοστό πρώτο και εικοστό δεύτερο πρόβλημα αντίστοιχα αναφέρουν:[385]

<u>Το πρόβλημα 21 και 22 της πλάκας YBC 4666:</u>[386]

21, Ένα μικρό κανάλι, 5 US είναι <το μήκος>, 3 kus (cubit) το ανώτερο πλάτος, 2 kus το χαμηλότερο πλάτος, 2 kus το βάθος του, 10 gín (όγκος), Ποια είναι η κλίση ανά βάθος 1 kus; 12 kus είναι η κλίση.

22, Ένα μικρό κανάλι, 5 US είναι <το μήκος>, 2 kus το χαμηλότερο πλάτος, 2 kus το βάθος του, [10] gín (όγκος), η κλίση ανά βάθος 1 kus είναι 12 kus, [Ποιο είναι] το επάνω πλάτος;

Στην περίπτωση ενός ορθογωνίου τριγώνου ο όρος *ukullu* επίσης χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της κλίσης των πλευρών. Έτσι, σύμφωνα με τον Mansfield αποδεικνύεται ότι μια από τις μεθόδους που χρησιμοποιούσαν οι Βαβυλώνιοι για υπολογισμούς βασίζονταν σε αναλογίες που είναι το αντίστοιχο με αυτό που ονομάζουμε σήμερα «κλίση».[387]

Επίσης, από τις σωζόμενες πλάκες αποδεικνύεται ότι οι Βαβυλώνιοι γραφείς γνώριζαν ότι οι πλευρές όμοιων τριγώνων έχουν την ίδια αναλογία. Για παράδειγμα, στην πλάκα YBC 8633 (βλ. εικόνα 49 παρακάτω) ένα τρίγωνο με πλευρές (3, 4, 5) μεγεθύνθηκε σε ένα τρίγωνο με πλευρές (1, 1,20, 1,40) μέσω του πολλαπλασιασμού με έναν παράγοντα που τον ονόμαζαν *maksarum*, το οποίο μεταφράζεται ως «για να δέσει» (to bind), Ο παράγοντας καθορίστηκε από τις αναλογίες των πλευρών $\frac{1{,}20}{4} = 20$. Έτσι, οι νέες μεγαλύτερες πλευρές υπολογίστηκαν ως εξής:

$$3 \times 20 = 1,$$
$$4 \times 20 = 1{,}20$$
$$5 \times 20 = 1{,}40.$$

Υπάρχουν αρκετές Βαβυλωνιακές πλάκες που αποδεικνύουν ότι οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν την Πυθαγόρεια σχέση για τα ορθογώνια τρίγωνα. Κάποιες από αυτές είναι η YBC 7289, η BM 85196 και η VAT 7848 που μελετήθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο (βλ. ενότητα 2.3). Αυτές οι πλάκες καταδεικνύουν τη σημαντική μετρική σχέση πως οι τρεις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου ή οι πλευρές και η διαγώνιος ενός ορθογωνίου (b, l, d) συνδέονται με τη σχέση

[385] ό.π.
[386] Mansfield, 2017, 400.
[387] ό.π., 401.

$$b^2 + l^2 = d^2.$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα και τα ορθογώνια με ύψος $l = 1$ είχαν σημαντικό ρόλο στη Παλαιά Βαβυλωνιακή περίοδο. Οι ιστορικοί ονομάζουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο (ή ένα ορθογώνιο) με πλευρές $(\beta, 1, \delta)$ κανονικοποιημένο (normalized), όταν τα β και δ είναι εξηνταδικοί αριθμοί. Οι ποσότητες αυτές αποτυπώνουν κυρίως τις αναλογίες που εμπλέκονται σε ένα αντίστοιχο μη κανονικοποιημένο όμοιο ορθογώνιο τρίγωνο. Αυτό σε ένα κανονικοποιημένο ορθογώνιο τρίγωνο συνδέεται με τον όρο *ukullu*.[388]

Εικόνα 49: Η πλάκα YBC 8633[389]

3.3.2 Πως θα έμοιαζε η Plimpton 322 σύμφωνα με τη θεωρία του Mansfield

Όπως αναφέρθηκε, ο Mansfield θεωρεί ότι η Plimpton περιέχει δύο ακόμα στήλες αριστερά του σωζόμενου κειμένου οι οποίες περιέχουν τις τιμές των β (στήλη I) και δ (στήλη II). Έτσι, η Plimpton 322 περιέχει συνολικά 6 στήλες οι οποίες είναι οι I, II (μη σωζόμενες στήλες) και οι I', II', III' και IV' (σωζόμενες στήλες). Η κάθε στήλη από αυτές περιέχει αντίστοιχα τις τιμές β_n (στήλη I), δ_n (στήλη II), δ_n^2 (στήλη I'), b_n(στήλη II'), d_n(στήλη III') και η τελευταία στήλη (IV') που περιέχει την αρίθμηση των

388 ό.π.,

389 http://httprover2.blogspot.com/2018/02/ybc-8633-babylonian-partitioned.html

γραμμών (n). Η τιμή της στήλης β_n είναι σημαντική για τον υπολογισμό της κλίσης (*ukullu)* ενός ορθογωνίου τριγώνου.[390]

Επίσης, ο Mansfield πιστεύει ότι στο πίσω μέρος της πλάκας προοριζόταν να γραφτούν άλλες 23 γραμμές, λόγω του γεγονότος ότι οι κάθετες γραμμές συνεχίζονται και στο πίσω μέρος της (βλ. εικόνα 50).[391] Ολόκληρη η πλάκα Plimpton 322 μαζί με τις 38 ανακατασκευασμένες σειρές (15 στο μπροστά μέρος και 23 στο πίσω μέρος) σύμφωνα με τη θεωρία του Mansfield φαίνεται στον πίνακα 24 παρακάτω.

Εικόνα 50: Η πίσω όψη της πλάκας Plimpton 322[392]

390 Mansfield, 2017, 407.
391 ό.π.

392https://www.google.com/search?q=plimpton+322+%CF%80%CE%B9%CF%83%CF%89+%CE%BC%CE%B5%CF%81%CE%BF%CF%82&rlz=1C1GCEA_enGR884GR884&sxsrf=AOaemvKEA2g5OVe9ASSJwldwmjW5yLmJiQ:1636568602031&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=2ahUKEwjbgrKRtY70AhVEhf0HHYfUAK0Q_AUoAXoECAEQAw&biw=1366&bih=657&dpr=1#imgrc=pElHCJf3286ueM

Πίνακας 24: Η πλήρης πλάκα Plimpton 322 σύμφωνα με τη θεωρία του Mansfield[393]

I: β	II: δ	I’: δ^2	II’’: b	III’: d	IV’
59,30	1,24,30	1,59,00,15	1,59	2,49	1
58,27,17,30	1,23,46,02,30	1,56,56,58,14,50,06,15	56,07	1,20,25	2
57,30,45	1,23,06,45	1,55,07,41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
56,29,04	1,22,24,16	1,53,10,29,32,52,16	3,31,49	5,09,01	4
54,10	1,22,50	1,48,54,01,40	1,05	1,37	5
53,10	1,20,10	1,47,06,41,40	5,19	8,01	6
50,54,40	1,18,41,20	1,43,11,56,28,26,40	38,11	59,01	7
49,56,15	1,18,03,45	1,41,33,45,14,03,45	13,19	20,49	8
48,06	1,16,54	1,38,33,36,36	8,01	12,49	9
45,56,06,40	1,15,33,53,20	1,35,10,02,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,01	10
45	1,15	1,33,45	45	1,15	11
41,58,30	1,13,13,30	1,29,21,54,02,15	27,59	48,49	12
40,15	1,12,15	1,27,00,03,45	2,41	4,49	13
39,21,20	1,11,45,20	1,25,48,51,35,06,40	29,31	53,49	14
37,20	1,10,40	1,23,13,46,40	28	53	15
36,27,30	1,10,12,30	1,22,09,12,36,15	2,55	5,37	16
32,50,50	1,08,24,10	1,17,58,56,24,01,40	7,53	16,25	17
32	1,08	1,17,04	8	17	18
30,04,53,20	1,07,07,06,40	1,15,04,53,43,54,04,26,40	1,07,41	2,31,01	19
29,15	1,06,45	1,14,15,33,45	39	1,29	20
27,40,30	1,06,04,30	1,12,45,54,20,15	6,09	14,41	21
25	1,05	1,10,25	5	13	22
24,11,40	1,04,41,40	1,09,45,22,16,06,40	14,31	38,49	23
22,22	1,04,02	1,08,20,16,04	11,11	32,01	24
21,34,22,30	1,03,45,37,30	1,07,45,23,26,38,26,15	34,31	1,42,01	25
20,51,15	1,03,31,15	1,07,14,53,46,33,45	16,41	50,49	26
20,04	1,03,16	1,06,42,40,16	5,01	15,49	27
18,16,40	1,02,43,20	1,05,34,04,37,46,40	5,29	18,49	28
17,30	1,02,30	1,05,06,15	7	25	29
14,57,45	1,01,50,15	1,03,43,52,35,03,45	6,39	27,29	30
13,30	1,01,30	1,03,02,15	9	41	31
11	1,01	1,02,01	11	1,01	32
10,14,35	1,00,52,05	1,01,44,55,12,40,25	4,55	29,13	33
7,05	1,00,25	1,00,50,10,25	17	2,25	34
6,20	1,00,20	1,00,40,06,40	19	3,01	35
4,37,20	1,00,10,40	1,00,21,21,53,46,40	52	11,17	36
3,52,30	1,00,07,30	1,00,15,00,56,15	31	8,01	37
2,27	1,00,03	1,00,06,00,09	49	20,01	38

Παρατηρώντας τον πίνακα 24 προκύπτει το εξής ερώτημα:

Πώς προέκυψαν αυτοί οι αριθμοί στην πλάκα Plimpton 322;

Σύμφωνα με τον Mansfield, η Plimpton 322 αφορά σύνολα Πυθαγόρειων τριάδων (β, 1, δ) για κανονικοποιημένα ορθογώνια τρίγωνα (ή ορθογώνια) με την μεγάλη κάθετη πλευρά $l = 1$, που υπολογίζονται από τις αναλογίες r/s κανονικών αριθμών ως εξής:

393 Mansfield, 2017, 408.

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{s} - \frac{s}{r}\right) \text{ και } \delta = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{s} + \frac{s}{r}\right)$$

(οι στήλες I και II του πίνακα 24).

Στη συνέχεια, υπολογίστηκε η στήλη I', δηλαδή η τιμή του δ^2 ή ισοδύναμα το $\beta^2 + 1$ για κάθε ζευγάρι (β, δ).

Στο τέλος για κάθε ζευγάρι (β, δ) υπολογίστηκαν οι στήλες II' (b) και III' (d) χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμό *trailing part*.[394]

Στον πίνακα 25 παρουσιάζονται οι τιμές r για κάθε τιμή s, έτσι ώστε τα r και s να μην έχουν κοινούς παράγοντες και να δημιουργούν μοναδικές αναλογίες με $r/s < 2{,}24$.

Πίνακας 25: Οι τιμές r για κάθε τιμή s

s	r				s	r				
1	2				18	25				
2	3				20	27				
3	4	5			24	25				
4	5	9			25	27	32	36	48	54
5	6	8	9	12	27	32	40	50	64	
8	9	15			32	45	75			
9	10	16	20		40	81				
12	25				45	64				
15	16	32			50	81				
16	25	27			54	125				

Ο Mansfield προτείνει μια διαδικασία για την κατασκευή της πλάκας Plimpton κατά την οποία ο γραφέας συμβουλεύεται τον τυποποιημένο πίνακα αντιστρόφων για τις τιμές του s και στη συνέχεια βρίσκει όλες τις πιθανές αντίστοιχες τιμές του r. Παρακάτω, παρουσιάζουμε αναλυτικά τα βήματα που σύμφωνα με τον Mansfield ακολούθησε ο Βαβυλώνιος γραφέας για να κατασκευάσει την πλάκα Plimpton 322 (πίνακας 24):[395]

1. Για το s παίρνουμε τιμές από τον τυποποιημένο πίνακα αντιστρόφων, ξεκινώντας με το πρώτο ζευγάρι $(s, 1/s) = (2, 30)$.
2. Για κάθε τιμή του s συμβουλευόμαστε τον πίνακα πολλαπλασιασμού του $1/s$ για να βρούμε το $r \times 1/s$, όπου το r ικανοποιεί τα εξής:

[394] Βλ. πληροφορίες για τον αλγόριθμο *trailing part* παρακάτω.
[395] Mansfield, 2017, 405κ.ε.

$$s < r \; \kappa\alpha\iota \; r \times \frac{1}{s} < 2{,}24.$$

3. Για κάθε τέτοιο r, ψάχνουμε το $1/r$ από τον τυπικό πίνακα αντιστρόφων και στη συνέχεια βρίσκουμε το $s \times 1/r$ από τον κατάλληλο πίνακα πολλαπλασιασμού.
4. Αφαιρούμε οποιαδήποτε επανάληψη από τα ζευγάρια $\left(r \times \frac{1}{s}, \frac{1}{r} \times s\right)$, οι τιμές των r και s φαίνονται στον πίνακα 25 παραπάνω.
5. Υπολογίζουμε τις τιμές:
$$\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{s} - \frac{s}{r}\right) \text{ και } \delta = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{s} + \frac{s}{r}\right).$$
6. Επαναλαμβάνουμε το βήμα 1 με το επόμενο ζευγάρι αντιστρόφων μέχρι να βρούμε $(\beta, \delta) = (45{,}1{,}15)$.
7. Ταξινομούμε τις τιμές (β, δ) σε φθίνουσα σειρά (οι στήλες I και II στον πίνακα 24).
8. Υπολογίζουμε το δ^2 ή ισοδύναμα το $\beta^2 + 1$ (στήλη I' στον πίνακα 24).
9. Για κάθε ζευγάρι (β, δ) εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο *trailing part* για να υπολογίσουμε τα b (στήλη II' στον πίνακα 24) και d (στήλη III' στον πίνακα 24).
10. Ελέγχουμε ότι ισχύει $b^2 + l^2 = d^2$.
11. Καταγράφουμε τις τιμές $\beta, \delta, \delta^2, b, d$ και τον αριθμό της γραμμής.

Στο βήμα 9 αναφέρθηκε ότι υπολογίζουμε τις τιμές των b και d εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο *trailing part* για κάθε ζευγάρι (β, δ). Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος είναι σημαντικός για την κατανόηση της πλάκας Plimpton 322, γι' αυτό θα πρέπει να τον περιγράψουμε πριν συνεχίσουμε:[396]

Ο αλγόριθμος *trailing part* είναι μια επαναληπτική διαδικασία που στοχεύει στον εντοπισμό κανονικών παραγόντων ενός αριθμού από τα λιγότερο σημαντικά ψηφία (τα τελευταία ψηφία του αριθμού) και στη συνέχεια στην αφαίρεση αυτών των παραγόντων μέσω του πολλαπλασιασμού με τους αντίστοιχους αντιστρόφους τους. Η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αφαίρεση των κοινών κανονικών παραγόντων από δύο αριθμούς. Για παράδειγμα, τα λιγότερο σημαντικά ψηφία των αριθμών $\beta_2 = 58{,}27{,}17{,}30$ και $\delta_2 = 1{,}23{,}46{,}02{,}30$ (πίνακας 24) μοιράζονται τον κοινό κανονικό συντελεστή 30 και αυτός ο συντελεστής μπορεί να αφαιρεθεί πολλαπλασιάζοντας και τους δύο αριθμούς με τον αντίστροφο του 30 που είναι το 2. Αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί μέχρι να μην υπάρχουν εναπομείναντες κοινοί τακτικοί παράγοντες, όπως φαίνεται στον πίνακα 26:

Πίνακας 26[397]

Πρώτος αριθμός	Δεύτερος αριθμός	Κοινός κανονικός παράγοντας	Πολλαπλασιασμός με το
58,27,17,30	1,23,45,02,30	30	2
1,56,54,35	2,47,32,05	5	12
23,22,55	33,30,25	5	12
4,40,35	6,42,05	5	12
56,07	1,20,25	κανένας	τέλος

[396] ό.π., 405.
[397] Mansfield, 2017, 405.

Στη συνέχεια, θα αναφέρουμε ένα παράδειγμα για να κατανοήσουμε τα βήματα του Mansfield που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Παράδειγμα

Για $s = 5$ από τον πίνακα 25 παίρνουμε το $r = 12$, Στη συνέχεια υπολογίζουμε το $\frac{r}{s} = 2{,}24$ και το $\frac{s}{r} = 0;25$. Έπειτα, υπολογίζουμε τα $\frac{1}{2}\left(\frac{r}{s} - \frac{s}{r}\right) = 59{,}30$ και $\frac{1}{2}\left(\frac{r}{s} + \frac{s}{r}\right) = 1{,}24{,}30$. Παρατηρώντας τον πίνακα 24 βλέπουμε ότι αυτές οι τιμές αντιστοιχούν στην πρώτη σειρά από τις 2 πρώτες στήλες του πίνακα. Άρα, $\beta_1 = 59{,}30$ και $\delta_1 = 1{,}24{,}30$, Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο *trailing part* για το ζεύγος (β_1, δ_1):

Πρώτος αριθμός	Δεύτερος αριθμός	Κοινός κανονικός παράγοντας	Πολλαπλασιασμός με το
59,30	1,24,30	30	2
1,59	2,49	Κανένας	τέλος

και προκύπτουν οι τιμές 1,59 και 2,49 που είναι οι τιμές για το b_1 και το d_1 αντίστοιχα. Παρατηρώντας τον πίνακα 24 βλέπουμε ότι πράγματι η πρώτη γραμμή έχει αυτές τις τιμές:

$\beta_1 = 59{,}30$ (στήλη I), $\delta_1 = 1{,}24{,}30$ (στήλη II), $b_1 = 1{,}59$ (στήλη II'), $d_1 = 2{,}49$ (στήλη III').

3.3.3 Ένα διαφορετικό είδος τριγωνομετρικού πίνακα

Μερικοί ιστορικοί έχουν υποστηρίξει την πιθανότητα ότι η Plimpton 322 είναι ένας τριγωνομετρικός πίνακας με τη σύγχρονη έννοια. Η E. Robson όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 3.2.2, απορρίπτει αυτή την ερμηνεία και πιο συγκεκριμένα επισημαίνει:[398]

> *«[...] δεν υπάρχει κανένα εννοιολογικό πλαίσιο για υπολογισμό γωνίας ή για τριγωνομετρία στην Παλαιά Βαβυλωνιακή περίοδο, Εν συντομία, η Plimpton 322 δεν θα μπορούσε να είναι ένας τριγωνομετρικός πίνακας.»*

Σύμφωνα όμως με τον Mansfield, η πλάκα Plimpton 322 είναι ένα είδος τριγωνομετρικού πίνακα που δεν βασίζεται στη μέτρηση γωνιών και κύκλων. Πιο συγκεκριμένα αναφέρει:[399]

«Η πιθανότητα ότι η Plimpton 322 είναι ένας τριγωνομετρικός πίνακας, χωρίς την υπόθεση ενός συστήματος μέτρησης που βασίζεται σε κύκλους και γωνίες, δεν έχει εξεταστεί μέχρι τώρα.»

[398] ό.π., 410
[399] ό.π.

Ο Mansfield προτείνει ότι κάθε μια από τις 5 στήλες (I, II, I', II', III') της Plimpton 322 έχει έναν καλά καθορισμένο ρόλο ως η αρχή ή/και το αποτέλεσμα (λεπτομέρειες αναφέρονται παρακάτω) για ένα τριγωνομετρικό πρόβλημα στο οποίο δίνεται μια αναλογία των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου και από αυτή υπολογίζονται οι άλλες δύο αναλογίες. Πιο συγκεκριμένα, μία από τις πρώτες τρεις στήλες (I, II, I') της Plimpton 322 χρησιμοποιούνται στην αρχή της λύσης του προβλήματος, με την έννοια ότι οποιαδήποτε αναλογία πλευρών δίνεται από το πρόβλημα μπορεί να συγκριθεί με τις τιμές αυτών των στηλών για να καθοριστεί σε ποια σειρά της Plimpton 322 «βρισκόμαστε». Αφού καθοριστεί η σειρά που βρισκόμαστε στη συνέχεια μπορεί να υπολογιστεί το κατά προσέγγιση σχήμα (οι πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου) από τις τιμές που έχουν οι υπόλοιπες 4 στήλες σε αυτή τη σειρά.[400]

Για να γίνει η παραπάνω διαδικασία κατανοητή θα αναφέρουμε δύο παραδείγματα:[401]

1) Έστω ότι δίνεται η μικρή κάθετη πλευρά b και η μεγάλη κάθετη πλευρά l.
   - Υπολογίζουμε το λόγο $\beta = b/l$ και το αποτέλεσμα το συγκρίνουμε με τις τιμές της στήλης I. Επιλέγουμε την πλησιέστερη τιμή στο λόγο β που υπολογίσαμε και έτσι καθορίσαμε τη γραμμή στον πίνακα.
   - Στη συνέχεια, οι λόγοι $\delta_n = d_n/l_n$ (στήλη II) και b_n/d_n (στήλες II' και III') περιγράφουν το σχήμα.
2) Έστω ότι μας δίνονται οι δυο κάθετες πλευρές b και d.
   - Υπολογίζουμε το λόγο b/d, στη συνέχεια υπολογίζουμε το $1/(1-(b/d)^2)$ και το αποτέλεσμα το συγκρίνουμε με τις τιμές του δ_n^2 (στήλη I') για να καθορίσουμε τη σειρά στον πίνακα.
   - Στη συνέχεια, οι λόγοι $\delta_n = d_n/l_n$ (στήλη II) και $\beta_n = b_n/l_n$ (στήλη I) περιγράφουν το σχήμα.

Όλες οι περιπτώσεις φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 27

Η αναλογία που μας δίνεται	Τι πρέπει να υπολογίσουμε	Με ποια αναλογία να την συγκρίνουμε	Από ποια στήλη της Plimpton 322	Ποιους λόγους βρίσκουμε
b/l ή l/b	b/l	β	I	δ_n, b_n/d_n ή d_n/b_n
d/l ή l/d	d/l	δ	II	β_n, b_n/d_n ή d_n/b_n
d/b	$1/((d/b)^2-1)$	β^2	I'	$\beta_n, \delta_n,$
b/d	$1/(1-(b/d)^2$	δ^2	I'	$\beta_n, \delta_n,$

<u>Ένα σημαντικό σχόλιο για την ερμηνεία</u>:

Στην αρχή της ενότητας 3.3.1 αναφέραμε ότι κάθε μια από τις 5 στήλες (I, II, I', II', III') της Plimpton 322 έχει έναν καλά καθορισμένο ρόλο ως η αρχή ή/και το

[400] Mansfield, 2017, 411
[401] ό.π.

αποτέλεσμα για ένα τριγωνομετρικό πρόβλημα. Οι ακριβείς αναλογίες $\beta_n = b_n/l_n$ (στήλη I) και $\delta_n = d_n/l_n$ (στήλη II) εξυπηρετούν διπλό σκοπό, καθώς χρησιμεύουν ως ευρετήριο (δηλαδή η αρχή για τη λύση του προβλήματος), αλλά δίνουν και πληροφορίες που περιγράφουν το σχήμα (δηλαδή το αποτέλεσμα του προβλήματος), Ωστόσο, όπως αναφέραμε στην αρχή της ερμηνείας του Mansfield (βλ. ενότητα 3.3) οι λόγοι b_n/d_n και d_n/b_n δεν μπορούν να καθοριστούν λόγω των παρανομαστών που είναι μη κανονικοί αριθμοί. Έτσι, το ευρετήριο και οι πληροφορίες εμφανίζονται χωριστά. Πιο συγκεκριμένα, οι τιμές της στήλης δ_n^2 (στήλη I') χρησιμοποιούνται ως ευρετήριο όταν είναι γνωστή η αναλογία b/d, ενώ οι τιμές της στήλης β_n^2 λειτουργούν ως ευρετήριο όταν είναι γνωστή η αναλογία d/b. Οι απλοποιημένες τιμές b_n και d_n είναι οι πληροφορίες που επιτρέπουν τον συγγραφέα να κάνει τις δικές του προσεγγίσεις για τους λόγους b_n/d_n ή d_n/b_n.[402]

Μόλις προσδιοριστούν οι αναλογίες των πλευρών, οποιοδήποτε πλευρικό μήκος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κλιμάκωση αυτών των αναλογιών και έτσι να βρεθεί μια προσέγγιση για το ορθογώνιο τρίγωνο (ή το ορθογώνιο).[403]

Τα παραδείγματα παρακάτω δείχνουν πως θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η πλάκα Plimpton από έναν Βαβυλώνιο για να λύσει ένα τριγωνομετρικό πρόβλημα.

<u>Παράδειγμα 1:</u>[404]

Υποθέστε ότι η μικρή πλευρά ενός ορθογωνίου είναι $b = 10$ και η μεγάλη είναι $l = 40$. Πόσο είναι η διαγώνιος;

Υπολογίστε την αναλογία $\beta = b/l = 0;15$ και στη συνέχεια ψάξτε στην Plimpton 322 για το κανονικοποιημένο ορθογώνιο το οποίο έχει την πιο κοντινή τιμή β_n. Παρατηρώντας την πρώτη στήλη του πίνακα 24 παραπάνω βρίσκουμε ότι η πιο κοντινή τιμή στο $0;15$ βρίσκεται στην γραμμή 30 και είναι η $\beta_{30} = 0;14{,}57{,}45$. Άρα, το κανονικοποιημένο ορθογώνιο που ψάχνουμε έχει πλευρές:

$$(\beta_{30}, 1, \delta_{30}) = (0;14{,}57{,}45, 1, 1;01{,}50{,}15)$$

Ανακατασκευάζουμε το κανονικοποιημένο ορθογώνιο με τον παράγοντα *maksarum* (ο λόγος των μεγάλων πλευρών των ορθογωνίων $\frac{40}{1} = 40$). Η ζητούμενη διαγώνιος θα έχει την προσέγγιση:

$$40 \times \delta_{30} = 41;13{,}30.$$

<u>Παράδειγμα 2:</u>[405]

Υποθέστε ότι η διαγώνιος του ορθογωνίου είναι $d = 41{,}15$ και η μεγάλη πλευρά του είναι $l = 40$. Πόσο είναι η μικρή πλευρά του ορθογωνίου;

402 Mansfield, 2017, 411.
403 Mansfield, 2017, 411.
404 Mansfield, 2017, 411.
405 ό.π.

Αρχικά, υπολογίστε την αναλογία $\delta = d/l = 1;01{,}52{,}30$ και στη συνέχεια ψάξτε στην Plimpton 322 για το κανονικοποιημένο ορθογώνιο το οποίο έχει την πιο κοντινή τιμή δ_n. Παρατηρώντας τη δεύτερη στήλη του πίνακα 24 παραπάνω βρίσκουμε ότι η πιο κοντινή τιμή στο 1;01,52,30 είναι στη γραμμή 30 και πάλι. Άρα, το κανονικοποιημένο ορθογώνιο που ψάχνουμε έχει πλευρές:

$$(\beta_{30}, 1, \delta_{30}) = (0;,14{,}57{,}45, 1, 1; 01{,}50{,}15)$$

Ανακατασκευάζουμε το κανονικοποιημένο ορθογώνιο με τον παράγοντα *maksarum* (ο λόγος των μεγάλων πλευρών των ορθογωνίων $\frac{40}{1} = 40$). Η μικρή πλευρά θα έχει την προσέγγιση:

$$40 \times \beta_{30} = 9; 58{,}30.$$

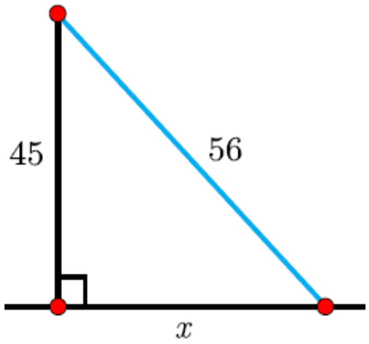
3.3.4 Η δεκαδική μορφή της πλάκας Plimpton 322

Στον πίνακα 28 παρακάτω παρουσιάζονται οι 38 σειρές τις πλάκας Plimpton 322 με τη μορφή δεκαδικών αριθμών. Ένα σύγχρονος αναγνώστης θα μπορούσε να ερμηνεύσει αυτή την πλάκα σήμερα ως εξής: οι στήλες β και δ αντιπροσωπεύουν τις αναλογίες b/l και d/l από ένα ορθογώνιο τρίγωνο (b, l, d) με τη σύμβαση ότι $b \leq l$. Η μεσαία στήλη I' δίνει τις τιμές για την αναλογία $(d/l)^2$ ή $(b/l)^2$ η οποία μπορεί να συγκριθεί με τους λόγους b/d ή d/b. Οι ποσότητες b (στήλη II') και d (στήλη III') μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε τις αναλογίες b/d ή d/b. Η πιο σημαντική στήλη είναι η πρώτη (οι τιμές του β) που είναι το αντίστοιχο της κλίσης της διαγώνιου (ή *ukullu*). Οι τιμές σε αυτή τη στήλη κυμαίνονται από (περίπου) 1 (που είναι η τιμή για ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο) μέχρι περίπου στο μηδέν που περιγράφει ένα τρίγωνο με πολύ μικρή βάση σε σχέση με το ύψος.[406]

<u>Παράδειγμα:</u>

Ας υποθέσουμε ότι μια ράμπα που οδηγεί στην κορυφή ενός τοίχου ζιγκουράτ έχει μήκος 56 cubits και το κατακόρυφο ύψος του ζιγκουράτ είναι 45 cubits. Ποια είναι η απόσταση από την εξωτερική βάση της ράμπας στο σημείο ακριβώς κάτω από την κορυφή;

[406] Mansfield, 2017, 412.



Σχήμα 8[407]

Χρησιμοποιώντας το Βαβυλωνιακό συμβολισμό για ένα ορθογώνιο τρίγωνο θέτουμε $l = 45$ και $d = 56$ και τότε $\delta = \frac{d}{l} = \frac{56}{45} \cong 1{,}244$. Η πιο κοντινή σειρά σε αυτή την τιμή από την πλάκα Plimpton 322 είναι η σειρά 11 με $\delta_{11} = 1{,}25$ (βλ. πίνακα 28). Από τις στήλες II' και III' προκύπτει ότι η αντίστοιχη αναλογία από ένα κανονικό ορθογώνιο τρίγωνο είναι $\frac{b_{11}}{d_{11}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$. Άρα,

$$\frac{\chi}{56} \cong 0{,}6 \Rightarrow \chi = 56 \times 0{,}6 = 33{,}6$$

[407] Mansfield, 2017, 414.

Πίνακας 28: Η δεκαδική μορφή της πλάκα Plimpton 322[408]

Βάση β (I)	Διαγώνιος δ (II)	Τετράγωνο της διαγωνίου δ^2 (I')	Βάση b (II')	Διαγώνιος d (III')	Σειρά
0,99166666	1,40833333	1,98340277	119	169	1
0,97424768	1,39612268	1,94915855	3367	4825	2
0,95854166	1,38520833	1,91880212	4601	6649	3
0,94140740	1,37340740	1,88624790	12709	18541	4
0,90277777	1,34722222	1,81500771	65	97	5
0,88611111	1,33611111	1,78519290	319	481	6
0,84851851	1,31148148	1,71998367	2291	3541	7
0,83229166	1,30104166	1,69270941	799	1249	8
0,80166666	1,28166666	1,64266944	481	769	9
0,76558641	1,25941358	1,58612256	4961	8161	10
0,75	1,25	1,5625	45	75	11
0,69958333	1,22041666	1,48941684	1679	2929	12
0,67083333	1,20416666	1,45001736	161	289	13
0,65592592	1,19592592	1,43023882	1771	3229	14
0,62222222	1,17777777	1,38716049	28	53	15
0,60763888	1,17013888	1,36922501	175	337	16
0,54745370	1,14004629	1,29970555	473	985	17
0,53333333	1,13333333	1,28444444	8	17	18
0,50135802	1,11864197	1,25135986	4061	9061	19
0,4875	1,1125	1,23765625	39	89	20
0,46125	1,10125	1,21275156	369	881	21
0,41666666	1,08333333	1,17361111	5	13	22
0,40324074	1,07824074	1,16260309	871	2329	23
0,37277777	1,06722222	1,13896327	671	1921	24
0,35954861	1,06267361	1,12927520	2071	6121	25
0,34756944	1,05868055	1,12080451	1001	3049	26
0,33444444	1,05444444	1,11185308	301	949	27
0,30462962	1,04537037	1,09279921	329	1129	28
0,29166666	1,04166666	1,08506944	7	25	29
0,249375	1,030625	1,06218789	399	1649	30
0,225	1,025	1,050625	9	41	31
0,18333333	1,01666666	1,03361111	11	61	32
0,17071759	1,01446759	1,02914449	295	1753	33
0,11805555	1,00694444	1,01393711	17	145	34
0,10555555	1,00555555	1,01114197	19	181	35
0,07703703	1,00296296	1,00593470	52	677	36
0,06458333	1,00208333	1,00417100	31	481	37
0,04083333	1,00083333	1,00166736	49	1201	38

[408] ό.π., 413.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια βιβλιογραφική έρευνα λαμβάνοντας υπόψιν όσα είναι μέχρι σήμερα γνωστά σχετικά με τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων και τις διάφορες ερμηνείες που έχουν δοθεί για την πλάκα Plimpton 322. Γίνεται μια προσπάθεια να προσδιοριστεί το εύρος των γνώσεων των Βαβυλωνίων για τα μαθηματικά μέσα από τις έρευνες των ιστορικών που έχουν πραγματοποιηθεί για το συγκεκριμένο θέμα.

Ωστόσο, υπάρχει ακόμα ένας πολύ μεγάλος αριθμός από πλάκες σφηνοειδούς γραφής που δεν έχουν μεταφραστεί ακόμα γεγονός που μπορεί να κρύβει εκπλήξεις για τα μαθηματικά και τον πολιτισμό της περιοχής. Τα ευρήματα από αρχαίους πολιτισμούς μας προσφέρουν πληροφορίες για τα κοινωνικά και επιστημονικά τους επιτεύγματα. Έτσι, είναι απαραίτητο να γίνουν περισσότερες ερευνητικές προσπάθειες για να γνωρίσουμε καλύτερα αυτόν τον αρχαίο πολιτισμό. Ίσως η βαθύτερη κατανόηση του τρόπου σκέψης των Βαβυλωνίων να μπορέσει να μας βοηθήσει στην έμπνευση νέων κατευθύνσεων στα σημερινά μαθηματικά, στην αρχιτεκτονική ή στη μαθηματική εκπαίδευση.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη των μαθηματικών στη Βαβυλωνία και η περίπτωση της Βαβυλωνιακής πλάκας Plimpton 322. Στο πρώτο μέρος της εργασίας πραγματοποιείται μια εκτενής βιβλιογραφική ανασκόπηση με στόχο τη διερεύνηση των μαθηματικών που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι. Το δεύτερο μέρος επικεντρώνεται στη Βαβυλωνιακή πλάκα Plimpton 322, όπου παρουσιάζεται το περιεχόμενό της και επιχειρείται η ανάδειξη των διαφορετικών ερμηνειών που της έχουν δοθεί ως σήμερα. Η συστηματική ανασκόπηση της βιβλιογραφίας περιλαμβάνει την αναζήτηση κυρίως ξένων άρθρων και βιβλίων.

Στο $1^{ο}$ Κεφάλαιο παρουσιάζεται ο πολιτισμός της Μεσοποταμίας ο οποίος ξεχωρίζει λόγω των επιτευγμάτων του σε διάφορους τομείς, καθώς και η ιστορία της. Οι κλάδοι της αστρονομίας και των μαθηματικών γνώρισαν ιδιαίτερη άνθηση με την ανάπτυξη του εξηνταδικού θεσιακού συστήματος αρίθμησης να διακρίνεται στη συγκεκριμένη περίοδο. Στα σημαντικά γνωρίσματα του πολιτισμού εκείνης της εποχής αποτελούν τα αρχιτεκτονικά και τεχνικά επιτεύγματα και μεταξύ των μεγαλύτερων πολιτιστικών κληροδοτημάτων περιλαμβάνονται η γραφή και η λογοτεχνία. Η χρήση ενός συστήματος αριθμητικής καταγραφής, γνωστό και ως σφηνοειδής γραφή, αποτέλεσε αντικείμενο έμπνευσης για την καθιέρωση της γραφής, καθώς και για τους αριθμητικούς και μετρολογικούς συμβολισμούς. Στον αρχαίο κόσμο η Μεσοποταμία ήταν γνωστή ως η χώρα της μάθησης, γι' αυτό τα σχολεία όπου αρχικά δίδασκαν οι ιερείς και αργότερα οι γραφείς ήταν τόσα πολλά όπως και οι ναοί.

Προκειμένου να κατανοηθεί περισσότερο η ιστορία και οι πολιτισμοί που αναπτύχθηκαν στην περιοχή αυτή είναι απαραίτητο να γίνει η διάκριση σε χρονολογικές περιόδους. Την Εποχή του Λίθου (10000 - 5800 π.Χ.) είχε ξεκινήσει η αγροτική επανάσταση και άρχισε η διαμονή των ανθρώπων σε οικισμούς. Κατά τη Χαλκολιθική Περίοδο (5800 - 3750 π.Χ.) συνεχίστηκαν οι αλλαγές στις ζωές των ανθρώπων και μετέπειτα οι κλιματικές μεταβολές περί τα μέσα της $4^{ης}$ χιλιετίας έφεραν τη μετανάστευση των ανθρώπων στην πόλη της Uruk (3.750 - 3150 π.Χ.), όπου οι κοινωνικές αλλαγές και εξελίξεις χαρακτηρίζουν την εποχή αυτή με πιο σημαντική την ανακάλυψη της γραφής η οποία ήταν σε σφηνοειδής μορφή.

Στις αρχές της $3^{ης}$ χιλιετίας οι κλιματικές αλλαγές επηρέασαν και το νότιο τμήμα της, δημιουργήθηκαν πολεμικές συρράξεις μεταξύ των πόλεων-κρατών και το 2334 π.Χ. ένας Σημιτικός λαός οι Ακκάδιοι κατέκτησε τους Σουμέριους με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί η πρώτη αυτοκρατορία της Μεσοποταμίας. Το 2193 π.Χ. έγινε η πτώση της Ακκαδικής αυτοκρατορίας και μια άγρια φυλή νομάδων επικράτησε στη Μεσοποταμία για περίπου έναν αιώνα. Τελικά, εκδιώχτηκε από τη συμμαχία που έγινε μεταξύ των Σουμέριων ηγετών της Ur και το 2004 π.Χ. επήλθε το τέλος του Σουμεριακού πολιτισμού με την πτώση της Ur.

Έναν αιώνα μετά την πτώση της Ur το 1900 π.Χ. ιδρύθηκε η Πρώτη Βαβυλωνιακή Δυναστεία από τους Αμορίτες, με κυριότερο εκπρόσωπο το Hammurabi (1792 - 1750 π.Χ.), αλλά έφτασε στο τέλος της ενάμιση αιώνα μετά το θάνατό του. Μέχρι την $1^{η}$ χιλιετία π.Χ. δεν υπήρξε κάποια εξέλιξη στο χώρο των επιστημών και του πολιτισμού

παρά μόνο το 911 π.Χ. που οι Ασσύριοι επικράτησαν στην περιοχή ιδρύοντας την Ασσυριακή αυτοκρατορία, αλλά το 612 π.Χ. ήρθε η πτώση της. Στη Βαβυλώνα μετέπειτα ήρθαν οι Χαλδαίοι, και με κυβερνήτη τον Nebuchadnezzar II (604 – 562 π.Χ.) δημιουργήθηκε η Νέα Βαβυλωνιακή Αυτοκρατορία. Η ανεπάρκεια όμως των διαδόχων του επέφερε το τέλος της το 539 π.Χ. και η περιοχή να τέθηκε υπό την περσική κυριαρχία. Ωστόσο, το 331 π.Χ., ο Μ. Αλέξανδρος νίκησε τον περσικό στρατό αναδεικνύοντας τη Βαβυλώνα πρωτεύουσα της νέας αυτοκρατορίας του που είχε ως στόχο τη γεωγραφική συνοχή και την ένωση των Ανατολικών και Δυτικών φυλών, αλλά το 323 π.Χ. μετά το θάνατό του η αυτοκρατορία του μοιράστηκε και το τέλος της αρχαίας Μεσοποταμίας ήρθε το 651 μ.Χ. με την Ισλαμική κατάκτηση.

Το 2ο Κεφάλαιο ξεκινά με την ιστορική εξέλιξη των Βαβυλωνιακών μαθηματικών. Η παλαιότερη μαθηματική τεχνική εμφανίζεται από τις αρχές τις 8ης χιλιετίας π.Χ. μέσω ενός λογιστικού συστήματος στο οποίο χρησιμοποιούνταν πήλινα κέρματα, γνωστά ως «tokens». Περιγράφονται τα διάφορα σχήματα και μεγέθη που λάμβαναν τα «tokens», καθώς και η εξέλιξή τους η οποία εξυπηρετούσε τις ανάγκες του οργανωμένου γραφειοκρατικού συστήματος. Παρατίθεται ο συμβολισμός τους ο οποίος ήταν τόσο ποιοτικός όσο και ποσοτικός και παρουσιάζεται ο τρόπος χρήσης τους. Ωστόσο, σύντομα προέκυψε η ανάγκη για περαιτέρω εξέλιξη αυτού του συστήματος με αποτέλεσμα οι πήλινες θήκες (bullae) που τοποθετούνταν τα «tokens» να αντικατασταθούν από πήλινες πλάκες και γύρω στο 3200 π.Χ. να εμφανιστεί μια επιπλέον εξέλιξη με την απεικόνιση πάνω στις πλάκες σχημάτων αντικειμένων κάθε είδους δίπλα από τις αποτυπώσεις αριθμών.

Με την εφεύρεση της γραφής μετά τα μέσα της 4ης χιλιετίας μπορεί να γίνει πλέον πραγματικότητα η αποτύπωση των μαθηματικών πράξεων και όλες αυτές οι εξελίξεις έχουν συνδεθεί με την ανάπτυξη μιας σύνθετης κοινωνίας, καθώς και με την ανάγκη του κράτους να ασκεί διοικητικό έλεγχο με ακρίβεια. Συστήματα μετρολογικών ακολουθιών και αριθμητικών συστημάτων έχουν βρεθεί σε αρχαίες πλάκες με διαφορετικές χρήσεις το καθένα και αξίζει να τονιστεί ότι η καταμέτρηση των συστημάτων αυτών συνεχίζει να γίνεται με αποτυπώσεις των tokens πάνω στον πηλό. Στα συστήματα μετρολογίας έχουν εντοπιστεί ορισμένες καινοτομίες, όπως το ημερολόγιο, όπου η δημιουργία ενός τέτοιου εργαλείου είχε ως προϋπόθεση τη χρήση αρκετών εξηνταδικών συστημάτων καταμέτρησης σε συνδυασμό με διαφορετικά μαθηματικά στοιχεία.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου παρουσιάζονται τα μαθηματικά της 3ης χιλιετίας. Η περίοδος αυτή διακρίνεται για το γεγονός πως ενώ τα μαθηματικά φαινόταν ότι μπορούσαν να βοηθήσουν στην εξάσκηση των γραφέων στην πραγματικότητα δεν είχαν άμεση εφαρμογή στην καθημερινή πρακτική. Κατά τη διάρκειά της διαπιστώνεται η διεύρυνση της χρήσης των μετρολογιών και εμφανίζεται μια νέα μετρολογία αυτή του συστήματος του βάρους η οποία ήταν σχεδόν πλήρως εξηνταδική. Παράλληλα, υπήρξαν αλλαγές προκειμένου να διευκολυνθούν οι διοικητικές διαδικασίες οι οποίες δεν έγιναν όλες σύμφωνα με την εξηνταδική αρχή. Ωστόσο, ο 21ος αιώνας π.Χ. κατά τη διάρκεια της « Τρίτης Δυναστείας της Ur » αποκτά ξεχωριστή σημασία, καθώς πλέον στις μετρολογικές πλάκες όλα τα παραδοσιακά μέτρα μετατρέπονται σε εξηνταδικούς αριθμούς και αυτοί οι αριθμοί αποτελούν πλέον ένα νέο θεσιακό σύστημα, το λεγόμενο «εξηνταδικό θεσιακό σύστημα».

Μετέπειτα κατά τη διάρκεια του κεφαλαίου παρουσιάζεται μια περίοδος ευημερίας και πολιτισμικής ανάπτυξης για τη Μεσοποταμία, η λεγόμενη Παλαιά Βαβυλωνιακή Περίοδος(2000-1600π.Χ), όπου δημιουργήθηκε η Πρώτη (Παλαιά) Βαβυλωνιακή Αυτοκρατορία, με κέντρο την πόλη της Βαβυλώνας. Τα Παλαιά Βαβυλωνιακά Μαθηματικά αποτελούσαν ένα σημείο καινοτομίας, αφού πλέον ήταν προσανατολισμένα στη διεύρυνση των δυνατοτήτων, των εννοιών και των τεχνικών τους. Συνολικά, τα επιτεύγματα των Βαβυλωνιακών μαθηματικών όπως επιβεβαιώνουν και τα αρχαιολογικά ευρήματα οφείλονται στα σχολεία, στους γραφείς και στην εκπαίδευση που παρέχονταν. Ειδικότερα, στο House F της Nippur το οποίο χρησιμοποιήθηκε ως σχολείο ανασκάφηκε ένας τεράστιος αριθμός πλακών, όπου περιγράφεται λεπτομερέστατα ο ρόλος των μαθηματικών στα προγράμματα σπουδών των σχολών των γραφέων. Οι πλάκες αυτές διακρίνονται σε δυο ομάδες, είχαν συγκεκριμένο σχήμα, μέγεθος και παρείχαν σημαντικές πληροφορίες για τη μαθηματική εκπαίδευση μέσα από ασκήσεις συγκεκριμένου είδους. Οι διαφορετικοί τύποι πλακών που περιέχουν αυτές τις ασκήσεις σχετίζονται με μια συγκεκριμένη παιδαγωγική λειτουργία. Το πρόγραμμα σπουδών του House F περιλάμβανε 4 φάσεις και η εκμάθησή του ήταν προσαρμοσμένη στις ανάγκες του κάθε μαθητή.

Ακολούθως, γίνεται αναφορά στα μαθηματικά της 1ης χιλιετίας π.Χ. όπου χαρακτηριστικό της περιόδου αυτής είναι η άνοδος στην εξουσία της φυλής των Κασιτών και ο τερματισμός οποιασδήποτε μαθηματικής και διοικητικής δραστηριότητας. Βέβαια, γύρω στα μέσα της συγκεκριμένης χιλιετίας τα μαθηματικά έκαναν την εμφάνισή τους μέσα από κάποια μαθηματικά κείμενα και η τελευταία ανάπτυξή τους επήλθε κατά την εποχή των Σελευκίδων, μετά το 311 π.Χ.

Στη συνέχεια, εισάγεται μια νέα ενότητα στο τρέχον κεφάλαιο η οποία πραγματεύεται το εξηνταδικό θεσιακό σύστημα αρίθμησης, παρέχοντας πληροφορίες για το συμβολισμό και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του συγκεκριμένου συστήματος. Αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο οι Βαβυλώνιοι εκτελούσαν τις βασικές πράξεις πάνω σε πλάκες σφηνοειδούς γραφής που έχουν διασωθεί και αναφέρονται ορισμένες μαθηματικές μέθοδοι. Όσα γνωρίζουν οι ιστορικοί για τα Βαβυλωνιακά μαθηματικά προέρχονται από τις πινακίδες σφηνοειδούς γραφής, όπου πάνω είναι γραμμένα κείμενα, αλλά όμως δεν βρίσκονται πάντα σε καλή κατάσταση με αποτέλεσμα η μελέτη τους να αποτελεί μια δύσκολη διαδικασία. Όλες σχεδόν οι πινακίδες διακρίνονται σε δυο χρονολογικές περιόδους και με τον τρόπο αυτό γίνεται η κατηγοριοποίησή τους. Τα μαθηματικά κείμενα διακρίνονται σε δυο μεγάλες κατηγορίες: τα «κείμενα πίνακες» και τα «κείμενα προβλήματα».

Εν συνεχεία, παρατίθεται η εννοιολογική αποσαφήνιση των όρων «Βαβυλωνιακή άλγεβρα» και «Βαβυλωνιακή γεωμετρία» και γίνεται χρήση παραδειγμάτων για την καλύτερη κατανόησή τους μέσα από τις Βαβυλωνιακές πλάκες που διασώθηκαν. Ωστόσο, ο όρος «γεωμετρική άλγεβρα» επέφερε τη δημιουργία διαμάχης μεταξύ των ιστορικών μεταξύ των διαφόρων χρονικών περιόδων, όπου παρατίθενται αναλυτικά τα επιχειρήματα των θέσεων τους.

Ακολούθως, παρουσιάζεται αναλυτικά η ερμηνεία του Jens Høyrup πάνω στο ζήτημα της Βαβυλωνιακής άλγεβρας. Ο Høyrup στην ακριβή ανάλυση των μαθηματικών κειμένων υποστηρίζει ότι η άποψη των ιστορικών για την ομοιότητα της Παλαιάς

Βαβυλωνιακής άλγεβρας με τη σημερινή φαίνεται να είναι λανθασμένη. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι μαθηματικές πράξεις που χρησιμοποιούνται μέσα στα Βαβυλωνιακά κείμενα σύμφωνα με τον Høyrup ο οποίος επισημαίνει ότι η αναπαράσταση των κειμένων είναι γεωμετρική και διαμορφώθηκε από τη γεωμετρία μετρήσιμων τμημάτων και επιφανειών. Για να γίνουν καλύτερα κατανοητές οι απόψεις του παρουσιάζονται παραδείγματα με πίνακες προβλημάτων, όπου αντιπαραβάλλεται η Βαβυλωνιακή γραφή και η αντίστοιχη μετάφραση του ίδιου με τη μετάφραση στα Ελληνικά. Μέσα από την παράθεση πινάκων γίνεται σύγκριση των μεταφράσεων το Neugebauer όπως παρουσιάστηκε από τον van der Waerden και του Høyrup πάνω σε μαθηματικά προβλήματα συγκεκριμένων πλακών. Κλείνοντας το παραπάνω θέμα αυτό το οποίο είναι σίγουρο κατά τον Høyrup είναι πως η Βαβυλωνιακή άλγεβρα ήταν μια τεχνική χωρίς μαθηματική θεωρία η οποία διατυπώθηκε με λέξεις σε μια πολύ απλοποιημένη, αλλά πάντα σαφή γλώσσα.

Το 3 κεφάλαιο της παρούσας εργασίας εστιάζει στην πλάκα Plimpton 322 η οποία θεωρείται από πολλούς ιστορικούς των μαθηματικών ως ένα αριστούργημα και ένα από τα πιο πολυσυζητημένα κείμενα των Βαβυλωνιακών μαθηματικών. Το κεφάλαιο αρχίζει με τα περιγραφικά χαρακτηριστικά της πλάκας, τα λάθη της και έπειτα παρατίθενται οι τρεις βασικές ερμηνείες για τη λειτουργία της. Ο Neugebauer ήταν ο πρώτος που έδειξε ότι οι αριθμοί που περιέχονται στην Plimpton 322 ικανοποιούν την Πυθαγόρεια σχέση $d^2 = b^2 + l^2$ για τις πλευρές ορθογωνίων τριγώνων. Η πλάκα αποτελείται από 4 στήλες οι οποίες παρουσιάζονται αναλυτικά και αναφέρονται τα λάθη που υπάρχουν στην πλάκα τα οποία οφείλονται είτε σε λάθος υπολογισμούς είτε σε λάθη που έγιναν κατά την αντιγραφή της.

Έπειτα, γίνεται η αναλυτική παρουσίαση των ερμηνειών αρχίζοντας με την αριθμοθεωρητική ερμηνεία της πλάκας η οποία αναπτύχθηκε από τον Neugebauer και στη συνέχεια από τον Aaboe για την οποία όμως υπάρχουν αρκετά επιχειρήματα απόρριψής της σύμφωνα την Robson.

Η δεύτερη ερμηνεία η οποία συνιστά μια από τις πιο δημοφιλείς θεωρίες που επικρατούν είναι ότι η πλάκα Plimpton 322 αντιπροσωπεύει έναν τριγωνομετρικό πίνακα και πάνω σε αυτό στηρίχτηκε η ερμηνεία του τριγωνομετρικού πίνακα. Η ερμηνεία αυτή από μαθηματικής άποψης παρουσιάζεται έγκυρη, αλλά η Robson διατυπώνοντας το επιχείρημα ότι μια σωστή ερμηνεία θα πρέπει να είναι ιστορικά και πολιτισμικά έγκυρη κατέληξε ότι η Plimpton 322 δεν είναι τριγωνομετρικός πίνακας.

Η τελευταία ερμηνεία γίνεται με βάση τα ζεύγη αντιστρόφων και παρατίθενται παραδείγματα για να γίνει κατανοητή η ερμηνεία της. Σύμφωνα με την Robson και στηριζόμενη σε συγκεκριμένα επιχειρήματα τα οποία παρουσιάζονται στο τρέχων κεφάλαιο της εργασίας η τελευταία αποτελεί την πιο έγκυρη ερμηνεία σε σχέση με τις άλλες δυο. Έπειτα παρουσιάζονται γενικές πληροφορίες σχετικά με το σκοπό και το συγγραφέα της πλάκας Plimpton 322.

Τέλος, το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παράθεση μιας πιο πρόσφατης ερμηνείας για την πλάκα Plimpton 322,όπως δημοσιεύτηκε από τους Mansfield και Wildberger, το 2017. Ο Mansfield ισχυρίζεται ότι η Plimpton 322 αποτελεί έναν τριγωνομετρικό πίνακα, αλλά όχι της μορφής που γνωρίζουμε σήμερα. Συγκεκριμένα θεωρεί την Plimpton 322 ως ένα είδος τριγωνομετρίας η οποία βασίζεται στις αναλογίες των πλευρών τριγώνων και όχι σε γωνίες και κύκλους. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται πίνακες παραδειγμάτων για το πώς θα έμοιαζε η πλάκα Plimpton 322 σύμφωνα με αυτή τη θεωρία του Mansfield, καθώς και τα βήματα που σύμφωνα με τον ίδιο φαίνεται να ακολούθησε ο γραφέας για την κατασκευή της πλάκας. Εν συντομία, παρουσιάζεται στο τέλος του κεφαλαίου η δεκαδική μορφή της πλάκας Plimpton 322, όπως και η ερμηνεία που θα μπορούσε να κάνει ένας σύγχρονος αναγνώστης κατά την ανάγνωσή της.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία

Θωμαΐδης, Γ., Καστάνης, Ν. (1993). *Ο Όρος «Γεωμετρική Άλγεβρα» στο Στόχαστρο μιας Σύγχρονης Επιστημολογικής Διαμάχης*. Στο: *Αναπολιτάνος, Καρασμάνης (Εκδ.),* Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά. Κείμενα Ιστορίας και Φιλοσοφίας, 25-52. Αθήνα: Εκδόσεις Τροχαλία.

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

Aaboe, A. (1997). *Episodes From the Early History of Mathematics*. Washington: The Mathematical Association of America.

Bertman, S. (2003). *Handbook to Life in Ancient Mesopotamia.* New York.

Friberg, J. (2007). *A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts.* New York: Springer.

Høyrup, J. (1991). *In Measure, Number and Weight: Studies in Mathematics and Culture*. New York: State University of New York Press.

Høyrup, J. (2002). *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin.* New York: Springer Verlag.

Høyrup, J. (2010). Old Babylonian Algebra and What It Teaches Us About Possible Kinds of Mathematics. *Ganita Bharati,* **32 (1-2),** 87-100.

Høyrup, J. (2012). A Hypothetical History of Old Babylonian Mathematics: Places, Passages, Development. *Ganita Bharati,* **34,** 1-23.

Høyrup, J. (2017). What is «Geometric Algebra» and What Has It Historiography? *AIMS Mathematics,* **2,** 128-160.

Høyrup, J. (2018). *Mesopotamian Mathematics*. Στο: *Jones, Taub (Εκδ.),* The Cambridge History of Science, **Τόμος 1,** 58-72. Cambridge: Cambridge University Press.

Ifrah, G. (2000). *The Universal History History of Numbers: From Prehistory to the Invention of the Computer*. David B., Harding E., Wood S., Monk I. (Μετάφραση). Canada: John Wiley & Sons.

Kuiper, K. (2011). *Mesopotamia The World's Earliest Civilization.* New York: Britannica Educational Publishing.

Mansfield, D, Wildberger, N. (2017). Plimpton 322 is Babylonian Exact Sexagesimal Trigonometry. *Historia Mathematica,* **44,** 395-419.

Mark, J. (2018). Mesopotamia. Σε *World History Encyclopedia online*. Ανακτήθηκε από https://www.worldhistory.org/Mesopotamia/ (τελευταία επίσκεψη 3/1/2022).

Neugebauer, O. (1935-1937). *Mathematics Keilschrifttexte*. 3 τόμοι, Berlin: Springer.

Neugebauer, O. (1990). *Οι Θετικές Επιστήμες στην Αρχαιότητα*. Ζερμπίνη Χ. Αρζόγλου Ι. (Μετάφραση). Αθήνα: Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης.

Proust, C., Steele, J. (2019). *Scholars and Scholarship in Late Babylonian Uruk*. Switzerland: Springer.

Robson, E. (2000). *Mesopotamian Mathematics: Some Historical Background*. Στο: *Katz V. (Εκδ.),* Using History to Teach Mathematics: An International Perspective. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Robson, E. (2001). Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322. *Historia Mathematics,* **28,** 167-206.

Robson, E. (2002). Words and Pictures: New Light on Plimpton 322. *The American Mathematical Monthly,* **109 (2),** 105-120.

Robson, E. (2008). *Mathematics in Ancient Iraq: A Social History*. Princeton & Oxford: Princeton University Press.

Sialaros, M., Christianidis, J. (2016). Situating the Debate on «Geometrical Algebra» within Framework of Premodern Algebra. *Science in Context,* **29,** 129-150.

Unguru, S. (1975). On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics. *Archive for History of Exact Sciences,* **15,** 67-114.

Warden, B. L. (2003). *Η Αφύπνιση της Επιστήμης: Αιγυπτιακά, Βαβυλωνιακά και Ελληνικά Μαθηματικά*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.