Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών
Π.Μ.Σ. «Σπουδές στα Μαθηματικά»

# Βασικές έννοιες από την κβαντική θεωρία πληροφορίας

Διπλωματική Εργασία

Γκόντας Νικόλαος

Σάμος 2021-2022

Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών
Π.Μ.Σ. «Σπουδές στα Μαθηματικά»

# Βασικές έννοιες από την κβαντική θεωρία πληροφορίας

**Γκόντας Νικόλαος**
**Α.Μ. 313 2020 005**

---

Μέλη Εξεταστικής Επιτροπής:

Ανούσης Μιχαήλ (Επιβλέπων Καθηγητής)

Παπασαλούρος Ανδρέας

Φελουζής Ευάγγελος

---

# Περιεχόμενα

# Περίληψη

Στην εργασία αυτή ασχολούμαστε με μαθηματικές έννοιες που αφορούν στις βασικές έννοιες της κβαντικής θεωρίας πληροφορίας.

Το πρώτο κεφάλαιο συγκεντρώνει έννοιες από τη Γραμμική Άλγεβρα και τη Θεωρία Τελεστών. Μας ενδιαφέρουν οι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και νόρμα, το ευθύ τους άθροισμα και το τανυστικό τους γινόμενο. Μελετάμε τους γραμμικούς τελεστές και το τανυστικό τους γινόμενο, που είναι βασική έννοια για την κβαντική θεωρία γενικότερα. Οι πιο σημαντικές έννοιες του κεφαλαίου είναι οι κλάσεις των τελεστών (π.χ. Κανονικοί, Θετικά ορισμένοι, Θετικά ημιορισμένοι), οι απεικονίσεις μεταξύ χώρων τελεστών και το φασματικό θεώρημα.

Το δεύτερο κεφάλαιο απαρτίζεται από έννοιες της Ανάλυσης. Ασχολούμαστε με τα κυρτά σύνολα και τους κώνους.

Στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας ξεκινάμε να ασχολούμαστε με κάποιες από τις βασικές έννοιες της κβαντικής θεωρίας πληροφορίας. Βλέπουμε τι είναι μια κβαντική κατάσταση και πως αυτό «μεταφράζεται» στο μαθηματικό φορμαλισμό. Ξεκινάμε το κεφάλαιο μελετώντας πως από ένα register κατασκευάζεται ο χώρος των κβαντικών καταστάσεων. Μαθαίνουμε τις βασικές κβαντικές καταστάσεις που θα χρησιμοποιήσουμε στην εργασία όπως, τις pure καταστάσεις και τις καταστάσεις γινόμενο.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, αναλωνόμαστε στη μελέτη άλλης μίας βασικής έννοιας, αυτής του κβαντικού καναλιού. Γενικά, θα λέγαμε ότι, ένα κβαντικό κανάλι είναι το κανάλι μέσω του οποίου μεταδίδεται η κβαντική πληροφορία. Από τη μαθηματική σκοπιά, ένα κβαντικό κανάλι είναι μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ δύο χώρων τετραγωνικών τελεστών, η οποία επιπλέον είναι πλήρως θετική απεικόνιση που διατηρεί το ίχνος των τελεστών. Έτσι, βλέπουμε μερικά θεωρήματα για τον χαρακτηρισμό των πλήρως θετικών απεικονίσεων που μας βοηθούν στην συνέχεια και στον χαρακτηρισμό των κβαντικών καναλιών. Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε με μερικές από τις αναπαραστάσεις των κβαντικών καναλιών όπως η Choi αναπαράσταση, η Krauss αναπαράσταση και άλλες. Το κεφάλαιο τελειώνει με παραδείγματα κβαντικών καναλιών.

Στο πέμπτο, και τελευταίο κεφάλαιο, μας απασχολεί η μέτρηση πάνω σε μία κβαντική κατάσταση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η μέτρηση πάνω στην EPR κατάσταση. Ερχόμαστε σε μία πρώτη γνωριμία με την Alice και τον Bob,

δύο φανταστικά πρόσωπα οι οποίοι παίζουν το ρόλο δυο ανεξάρτητων παρατηρητών του ίδιου κβαντικού φαινομένου. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, η εργασία επιστεγάζεται με το παράδειγμα της κβαντικής τηλεμεταφοράς.

# Abstract

In this thesis we deal with mathematical concepts concerning the basic concepts of quantum information theory.

The first chapter brings together concepts from Linear Algebra and Operator Theory. We are interested in complex Euclidean spaces with inner product and norm, their direct sum and their tensor product. We study linear operators and their tensor product, which is a basic concept for quantum theory in general. The most important parts of the chapter are the classes of operators (e.g. Normal, Positive Definite, Positive Semidefinite, Density), the maps between operator spaces, and the spectral theorem.

The second chapter consists of notions from Analysis. We deal with convex sets and cones.

In the third chapter of the thesis we start dealing with some of the basic concepts of quantum information theory. We see what a quantum state is and how is that formalized in mathematics. We begin the chapter by studying the construction of the space of quantum states, by a register. We learn the basic quantum states that we will use, such as pure states and product states.

In the fourth chapter, we are consumed in the study of another basic concept, that of a quantum channel. In general, we would say that a quantum channel is the channel through which quantum information is transmitted. From the mathematical point of view, a quantum channel is a linear map between two spaces of square operators, which moreover is a fully positive map that preserves the trace of operators. Thus, we see some theorems for the characterization of fully positive maps that help us with the characterization of quantum channels. Also, in this chapter, we will deal with some of the representations of quantum channels such as Choi representation, Krauss representation and others. The chapter ends with examples of quantum channels.

In the fifth, and final chapter, we are concerned with the measurement of a quantum state. A typical example is the measurement on the EPR state. We come to a first acquaintance with Alice and Bob, two imaginary persons who play the role of two independent observers of the same quantum phenomenon. Combining the above, this thesis reaches an end with the example of quantum teleportation.

# Κεφάλαιο 1

# Έννοιες από τη Γραμμική Άλγεβρα

## 1.1 Μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι

Για κάθε πεπερασμένο αλφάβητο $\Sigma$ θα συμβολίζουμε με $\mathbb{C}^{\Sigma}$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $\Sigma$ στο $\mathbb{C}$. Το σύνολο $\mathbb{C}^{\Sigma}$ αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο, πεπερασμένης διάστασης $|\Sigma|$, πάνω στους μιγαδικούς αριθμούς $\mathbb{C}$ με πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό:

> Για τα διανύσματα $u, v \in \mathbb{C}^{\Sigma}$, το διάνυσμα $u + v \in \mathbb{C}^{\Sigma}$ ορίζεται από τη σχέση $(u + v)(a) = u(a) + v(a), \forall u, v \in \mathbb{C}^{\Sigma}, \forall a \in \Sigma$.
>
> Για ένα διάνυσμα $u \in \mathbb{C}^{\Sigma}$ και έναν αριθμό $\alpha \in \mathbb{C}$, το διάνυσμα $\alpha u \in \mathbb{C}^{\Sigma}$ ορίζεται από τη σχέση $(\alpha u)(a) = \alpha u(a), \forall a \in \Sigma$.

### 1.1.1 Εσωτερικό γινόμενο

Για δύο διανύσματα $u, v \in \mathbb{C}^{\Sigma}$, το εσωτερικό γινόμενο $\langle u, v\rangle$ ορίζεται ως εξής:

$$\langle u, v\rangle = \sum_{a \in \Sigma} \overline{u(a)} v(a).$$

Για $u, v, w \in \mathbb{C}^{\Sigma}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1) $\langle u, \alpha v + \beta w\rangle = \alpha\langle u, v\rangle + \beta\langle u, w\rangle$

2) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$

3) $\langle u, u\rangle \geq 0$

4) $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

### 1.1.2 Ευκλείδεια νόρμα

Η Ευκλείδεια νόρμα ενός διανύσματος $u \in \mathbb{C}^{\Sigma}$ ορίζεται να είναι:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{\sum_{\alpha\in\Sigma} |u(a)|^2}.$$

Για $u, v \in \mathbb{C}^{\Sigma}$ και $\alpha \in \mathbb{C}$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1) $\|u\| \geq 0$

2) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

3) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$

4) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

5) $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$.

### 1.1.3 Μοναδιαία σφαίρα

Μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{C}^{\Sigma}$ καλείται η συλλογή όλων των μοναδιαίων διανυσμάτων του μιγαδικού Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{C}^{\Sigma}$.

$$\mathcal{S}(\mathbb{C}^{\Sigma}) = \{u \in \mathbb{C}^{\Sigma} : \|u\| = 1\}.$$

### 1.1.4 Καθετότητα και Ορθοκανονικότητα

Έστω δύο διανύσματα $u, v$ τα οποία ανήκουν στο χώρο με εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{X}$. Θα λέμε ότι τα $u, v$ είναι κάθετα μεταξύ τους αν $\langle u, v\rangle = 0$. Και θα συμβολίζουμε $u \perp v$.

Ένα σύνολο διανυσμάτων $\{u_1, u_2, ...u_n\}$ ενός χώρου $\mathcal{X}$ με εσωτερικό γινόμενο, θα λέγεται ορθογώνιο σύνολο αν τα διανύσματα $u_i$ είναι ανά δύο κάθετα μεταξύ τους.

Ένα ορθογώνιο σύνολο $\{u_1, u_2, ...u_n\}$ θα καλείται ορθοκανονικό αν, κάθε διάνυσμά του έχει μήκος 1. Δηλαδή $\|u_i\| = 1, \forall i \in \{1, ...n\}$

Έστω $\{u_1, u_2, ...u_n\}$ να είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο του χώρου $\mathbb{C}^{\Sigma}$. Τότε αυτό αποτελεί ορθοκανονική βάση του $\mathcal{X}$ αν και μόνο αν $n = dim(\mathcal{X})$.

### 1.1.5 Κανονική βάση

Η κανονική βάση του χώρου $\mathbb{C}^{\Sigma}$ δίνεται από το σύνολο $\{u_a : a \in \Sigma\}$ όπου

$$e_a(b) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad a = b \\ 0 & \text{αν} \quad a \neq b \end{cases}$$

για κάθε $a, b \in \Sigma$.

### 1.1.6 Γραμμική Απεικόνιση

Μια απεικόνιση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ καλείται γραμμική αν

1) $f(ku) = kf(u)$,

2) $f(u + v) = f(u) + f(v)$

Όπου $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ είναι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι και $\forall u, v \in \mathcal{X}, \forall k \in \mathbb{C}$.

### 1.1.7 Πλειογραμμική Απεικόνιση

Πλειογραμμική απεικόνιση ονομάζεται μια απεικόνιση

$$f : \mathcal{X}_1 \times ... \times \mathcal{X}_n \to \mathcal{Y}$$

όπου $\mathcal{X}_1, ...\mathcal{X}_n, \mathcal{Y}$ να είναι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι, με την ιδιότητα ότι για κάθε επιλογή $i$, αν όλες οι μεταβλητές εκτός της επιλεγμένης $u_i$ μείνουν σταθερές, τότε η $f(u_1, ...u_i, ...u_n)$ να είναι γραμμική συνάρτηση της $u_i$.
Δηλαδή η απεικόνιση $u_i \to f(u_1, ...u_n)$ είναι γραμμική για κάθε $i \in \{1, ...n\}$ και για κάθε επιλογή διανυσμάτων $u_1, ...u_{i-1}, u_{i+1}, ...u_n$.

### 1.1.8 Ευθύ άθροισμα

Έστω οι μιγαδικοί Ευκλείδειο χώροι $\mathcal{X}_1 = \mathbb{C}^{\Sigma_1}$, $\mathcal{X}_2 = \mathbb{C}^{\Sigma_2}$, ... $\mathcal{X}_n = \mathbb{C}^{\Sigma_n}$. Το ευθύ άθροισμα των χώρων αυτών θα είναι:

$$\mathcal{X}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{X}_n = \mathbb{C}^{\Sigma_1 \sqcup ... \sqcup \Sigma_n}.$$

Όπου $\Sigma_1 \sqcup ... \sqcup \Sigma_n = \cup_{k \in \{1,...n\}}\{(k, a) : a \in \Sigma_k\}$ να είναι η ξένη ένωση των συνόλων $\Sigma_1, ..., \Sigma_n$.
Για τα διανύσματα $u_1 \in \mathcal{X}_1, ...u_n \in \mathcal{X}_n$ θα έχουμε

$$u_1 \oplus ... \oplus u_n \in \mathcal{X}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{X}_n$$

που αναφέρεται στο διάνυσμα το οποίο ικανοποιεί τη σχέση

$$(u_1 \oplus ... \oplus u_n)(k, a) = u_k(a), k \in \{1, ...n\}.$$

Αν κάθε $u_k$ είναι στήλη διάστασης $|\Sigma_k|$, τότε το $u_1 \oplus ... \oplus u_n$ είναι στήλη διάστασης $|\Sigma_1| + ... + |\Sigma_n|$.

$$u_1 \oplus ... \oplus u_n = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Και επιπλέον:

1) $u_1 \oplus ... \oplus u_n + v_1 \oplus ... \oplus v_n = (u_1 + v_1) \oplus ... \oplus (u_n + v_n)$

2) $a(u_1 \oplus ... \oplus u_n) = (au_1) \oplus ... \oplus (au_n)$

3) $\langle u_1 \oplus ... \oplus u_n, v_1 \oplus ... \oplus v_n \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle + ... + \langle u_n, v_n \rangle$.

### 1.1.9 Τανυστικό γινόμενο

Έστω οι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι $\mathcal{X}_1 = \mathbb{C}^{\Sigma_1}$, $\mathcal{X}_2 = \mathbb{C}^{\Sigma_2}$, ... $\mathcal{X}_n = \mathbb{C}^{\Sigma_n}$. Το τανυστικό γινόμενο των χώρων αυτών θα είναι ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος

$$\mathcal{X}_1 \otimes \mathcal{X}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{X}_n$$

τέτοιος ώστε να υπάρχει μια πλειογραμμική απεικόνιση

$$T : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \cdots \times \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}_1 \otimes \mathcal{X}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{X}_n$$

ώστε για κάθε μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{Y}$ και για κάθε πλειογραμμική απεικόνιση $\phi : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \cdots \times \mathcal{X}_n \to \mathcal{Y}$ να υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\tilde{\phi} : \mathcal{X}_1 \otimes \mathcal{X}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{X}_n \to \mathcal{Y}$ έτσι ώστε $\tilde{\phi} \circ T = \phi$.

## 1.2 Γραμμικοί Τελεστές

### 1.2.1 Γραμμικός τελεστής

Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ δύο χώροι με νόρμα. Μια απεικόνιση $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ θα λέγεται γραμμικός τελεστής αν

$$T(ax_1 + bx_2) = aT(x_1) + bT(x_2)$$

για κάθε $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ και για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$. Συμβολισμός: $T(x) = Tx$.

### 1.2.2 Φραγμένος τελεστής

Ένας γραμμικός τελεστής $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ λέγεται φραγμένος αν υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε: $\|Tx\|_{\mathcal{Y}} \leq c\|x\|_{\mathcal{X}}, \forall x \in \mathcal{X}$.
Ισοδύναμα, ο φραγμένος τελεστής είναι ο τελεστής που είναι συνεχής απεικόνιση.

### 1.2.3 Ο χώρος $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι. Τότε με $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων από το $\mathcal{X}$ στο $\mathcal{Y}$.
Το σύνολο $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ εφοδιασμένο με πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό, όπως παρακάτω, γίνεται μιγαδικός διανυσματικός χώρος:

1) Πρόσθεση: $A, B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Τότε $A + B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$
$(A + B)u = Au + Bu, \forall u \in \mathcal{X}$.

2) Βαθμωτός πολλαπλασιασμός: $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \alpha \in \mathbb{C}$. Τότε $\alpha A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$
$(\alpha A)u = \alpha Au, \forall u \in \mathcal{X}$.

### 1.2.4 Αντιστοιχία μεταξύ πινάκων και τελεστών

Για κάθε επιλογή μιγαδικού Ευκλείδειου χώρου $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$, $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^{\Gamma}$ υπάρχει μια 1-1 και Επί γραμμική αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των τελεστών $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, και της συλλογής όλων των πινάκων $M : \Gamma \times \Sigma \to \mathbb{C}$. Σε κάθε τελεστή $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, αντιστοιχεί ένας πίνακας M που ορίζεται ως εξής:

$$M(a, b) = \langle e_a, Ae_b \rangle$$

όπου $a \in \Gamma, b \in \Sigma$. Ο τελεστής A ορίζεται μοναδικά από τον πίνακα M:

$$(Au)(a) = \sum_{b \in \Sigma} M(a, b)u(b)$$

όπου $a \in \Gamma$.

### 1.2.5 Κανονική βάση χώρων τελεστών

Έστω $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}, \mathcal{Y} = \mathbb{C}^{\Gamma}$ μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι και έστω $a \in \Gamma, b \in \Sigma$. Ορίζουμε τον τελεστή $E_{a,b} \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ως εξής:

$$E_{a,b}u = u(b)e_a$$

για κάθε $u \in \mathcal{X}$.
Ισοδύναμα ορίζεται και ως:

$$E_{a,b}(c, d) = \begin{cases} 1 & (c, d) = (a, b) \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για κάθε $c \in \Gamma, d \in \Sigma$.

Η συλλογή $\{E_{a,b} : a \in \Gamma, b \in \Sigma\}$ αποτελεί μια βάση του $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, και λέγεται κανονική βάση του χώρου.
Και ισχύει ότι $\dim(L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})) = \dim(\mathcal{X}) \dim(\mathcal{Y})$.

### 1.2.6 Συζυγής, Ανάστροφος και Αναστροφοσυζυγής

Για κάθε τελεστή $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ορίζουμε τρεις ακόμα τελεστές:

1) $\overline{A} \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Είναι ο συζυγής τελεστής του A για τον οποίο ισχύει ότι σε αναπαράσταση πίνακα για τα στοιχεία του έχουμε:

$$\overline{A}(a, b) = \overline{A(a, b)}.$$

2) $A^\top \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$. Είναι ο ανάστροφος τελεστής του A για τον οποίο ισχύει ότι σε αναπαράσταση πίνακα για τα στοιχεία του έχουμε:

$$A^\top(b, a) = A(a, b).$$

3) $A^* \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$. Είναι ο αναστροφοσυζυγής (adjoint) τελεστής του A για τον οποίο ισχύει ότι, σε αναπαράσταση πίνακα για τα στοιχεία του έχουμε:

$$\langle v, Au \rangle = \langle A^* v, u \rangle$$

για κάθε $u \in \mathcal{X}, v \in \mathcal{Y}$. Ή αλλιώς $A^* = \overline{A^\top}$.

**Ιδιότητες**

1) $\overline{\overline{A}} = A$
2) $(A^\top)^\top = A$
3) $(A^*)^* = A$
4) $\overline{(\alpha A + \beta B)} = \overline{\alpha}\, \overline{A} + \overline{\beta}\, \overline{B}$
5) $(\alpha A + \beta B)^\top = \alpha A^\top + \beta B^\top$
6) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$
7) $(AB)^* = B^* A^*$

για κάθε $A, B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ και για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

### 1.2.7 Πυρήνας, Εικόνα και Τάξη

Έστω $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ να είναι ένας τελεστής.
Ονομάζουμε πυρήνα του A το σύνολο $ker(A) = \{u \in \mathcal{X} : Au = 0\}$.
Ονομάζουμε εικόνα του A το σύνολο $im(A) = \{Au : u \in \mathcal{X}\}$.
Και τάξη του A τον αριθμό $rank(A) = dim(im(A))$.

Για κάθε τελεστή $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ισχύουν τα εξής:

1) $ker(A) = ker(A^*A)$

2) $im(A) = im(AA^*)$

3) $dim(ker(A)) + dim(im(A)) = dim(\mathcal{X})$

4) $rank(A) = rank(AA^*) = rank(A^*A)$.

Για κάθε επιλογή διανυσμάτων $u \in \mathcal{X}$ και $v \in \mathcal{Y}$ ο τελεστής $vu^* \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$(vu^*)w = v(u^*w) = \langle u, w \rangle v$$

για κάθε $w \in \mathcal{X}$. Για μη μηδενικά διανύσματα $u, v$ ισχύει ότι $rank(vu^*) = 1$.

### 1.2.8 Ευθύ άθροισμα τελεστών

Έστω $\mathcal{X}_1 = \mathbb{C}^{\Sigma_1}, ...\mathcal{X}_n = \mathbb{C}^{\Sigma_n}$ και $\mathcal{Y}_1 = \mathbb{C}^{\Gamma_1}, ...\mathcal{Y}_m = \mathbb{C}^{\Gamma_m}$ να είναι οι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι που αντιστοιχούν για τα αλφάβητα $\Sigma_1, ...\Sigma_n, \Gamma_1, ...\Gamma_m$. Τότε για έναν τελεστή

$$A \in L(\mathcal{X}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_1, \oplus ... \oplus \mathcal{Y}_m)$$

υπάρχει μια μοναδική συλλογή τελεστών

$$\{A_{j,k}(\mathcal{X}_k, \mathcal{Y}_j) : j \in \{1, ...m\}, k \in \{1, ...n\}\}$$

ώστε η σχέση

$$A_{j,k}(a, b) = A((j, a), (k, b))$$

να αληθεύει για κάθε $j \in \{1, ...m\}$, $k \in \{1, ...n\}$, $a \in \Gamma_j$ και $b \in \Sigma_k$. Συνεπώς, βλέπουμε ότι υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ των εκφράσεων των τελεστών, η οποία αποτυπώνεται σε μορφή πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}.$$

### 1.2.9 Τανυστικό γινόμενο τελεστών

Έστω $\mathcal{X}_1 = \mathbb{C}^{\Sigma_1}, ...\mathcal{X}_n = \mathbb{C}^{\Sigma_n}$ και $\mathcal{Y}_1 = \mathbb{C}^{\Gamma_1}, ...\mathcal{Y}_1 = \mathbb{C}^{\Gamma_n}$ να είναι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι για τα αλφάβητα $\Sigma_1, ...\Sigma_n$ και $\Gamma_1, ...\Gamma_n$ αντίστοιχα. Για κάθε επιλογή τελεστών

$$A_1 \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1), ...A_n \in L(\mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_n)$$

ορίζουμε το τανυστικό γινόμενο

$$A_1 \otimes ... \otimes A_n \in L(\mathcal{X}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{Y}_n)$$

των παραπάνω τελεστών να είναι ο μοναδικός τελεστής που ικανοποιεί την σχέση

$$(A_1 \otimes ... \otimes A_n)(u_1 \otimes ... \otimes u_n) = (A_1 u_1) \otimes ... \otimes (A_n u_n)$$

για κάθε $u_1 \in \mathcal{X}_1, ...u_n \in \mathcal{X}_n$. Αυτός ο τελεστής μπορεί ισοδύναμα να οριστεί σε σχέση με την αναπαράσταση του τελεστή σε πίνακα, ως εξής:

$$(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)((a_1, ...a_n), (b_1, ...b_n)) = A_1(a_1, b_1) \cdots A_n(a_n, b_n)$$

για κάθε $a_1 \in \Gamma_1, ...a_n \in \Gamma_n, b_1 \in \Sigma_1, ...b_n \in \Sigma_n$. Για κάθε επιλογή μιγαδικών Ευκλείδειων χώρων $\mathcal{X}_1, ...\mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_1, ...\mathcal{Y}_n$ και $\mathcal{Z}_1, ...\mathcal{Z}_n$ για τους τελεστές

$$A_1, B_1 \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1), ...A_n, B_n \in L(\mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_n)$$

$$C_1 \in L(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Z}_1), ...C_n \in L(\mathcal{Y}_n, \mathcal{Z}_n)$$

και τα βαθμωτά μεγέθη $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ισχύουν τα παρακάτω:

$$A_1 \otimes \cdots \otimes A_{k-1} \otimes (\alpha A_k + \beta B_k) \otimes A_{k+1} \otimes \cdots \otimes A_n =$$

$$= \alpha(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n) + \beta(A_1 \otimes \cdots A_{k-1} \otimes B_k \otimes A_{k+1} \otimes \cdots A_n),$$

$$(C_1 \otimes \cdots \otimes C_n)(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n) = (C_1 A_1) \otimes \cdots \otimes (C_n A_n),$$
$$(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)^{\top} = A_1^{\top} \otimes \cdots \otimes A_n^{\top},$$
$$\overline{A_1 \otimes \cdots \otimes A_n} = \overline{A_1} \otimes \cdots \otimes \overline{A_n},$$
$$(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)^* = A_1^* \otimes \cdots \otimes A_n^*.$$

### 1.2.10 Ο χώρος $L(\mathcal{X})$

Με $L(\mathcal{X})$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των τελεστών από το $\mathcal{X}$ στο $\mathcal{X}$. Οι τελεστές του συνόλου $L(\mathcal{X})$ καλούνται τετραγωνικοί τελεστές. Το σύνολο $L(\mathcal{X})$ αποτελεί μια προσεταιριστική άλγεβρα καθώς, είναι διανυσματικός χώρος και η σύνθεση των τελεστών του είναι προσεταιριστική και διγραμμική:

1) $(XY)Z = X(YZ)$

2) $Z(aX + bY) = aZX + bZY$

3) $(aX + bY)Z = aXZ + bYZ$

για κάθε $X, Y, Z \in L(\mathcal{X})$ και $\forall a, b \in \mathbb{C}$. Για παράδειγμα ο ταυτοτικός τελεστής $\mathbb{1} \in L(\mathcal{X})$ ορίζεται ως εξής:

$$\mathbb{1}u = u, \forall u \in \mathcal{X}.$$

Και σε μορφή πίνακα:

$$\mathbb{1}(a,b) = \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases}.$$

Λέμε ότι ένας τελεστής $X \in L(\mathcal{X})$ είναι αντιστρέψιμος αν υπάρχει τελεστής $Y \in L(\mathcal{X})$ τέτοιος ώστε $YX = XY = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$.

### 1.2.11 Ίχνος και Ορίζουσα

#### Ίχνος

Ίχνος ονομάζουμε το άθροισμα των διαγώνιων καταχωρήσεων ενός τελεστή $X \in L(\mathcal{X})$. Στον αντίστοιχο πίνακα του τελεστή, το ίχνος είναι το άθροισμα των καταχωρήσεων $X(a,a), a \in \Sigma$:

$$Tr(X) = \sum_{a \in \Sigma} X(a,a).$$

Το ίχνος είναι μια απεικόνιση $Tr : L(\mathcal{X}) \to \mathbb{C}$, έτσι ώστε για κάθε $u, v \in \mathcal{X}$ ισχύει ότι $Tr(uv^*) = \langle v, u \rangle$. Για $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ και $B \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ ισχύει ότι:

$$Tr(AB) = Tr(BA).$$

Μέσω του ίχνους ορίζουμε ένα εσωτερικό γινόμενο του χώρου $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ως εξής:

$$\langle A, B \rangle = Tr(A^* B).$$

#### Ιδιότητες

1) $\langle A, aB + bC \rangle = a\langle A, B \rangle + b\langle A, C \rangle$
2) $\langle A, B \rangle = \overline{\langle B, A \rangle}$
3) $\langle A, A \rangle \geq 0$
4) $\langle A, A \rangle = 0 \Leftrightarrow A = 0.$

#### Ορίζουσα

Η ορίζουσα είναι ένα μέγεθος που ορίζεται από τον τύπο:

$$Det(X) = \sum_{\sigma \in Sym(\Sigma)} sign(\sigma) \prod_{a \in \Sigma} X(a, \sigma(a))$$

όπου $Sym(\Sigma) = \{\sigma : \Sigma \to \Sigma, \text{μεταθέσεις}\}$ και $sign(\sigma) \in \{-1, 1\}$. Ισχύει ότι $Det(XY) = Det(X)Det(Y), \forall X, Y \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Επίσης, ένας τελεστής X έχει μη μηδενική ορίζουσα αν και μόνο είναι αντιστρέψιμος.

### 1.2.12 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Έστω ένα διάνυσμα $u \in X, u \neq 0$ με την ιδιότητα $Xu = \lambda u, \lambda \in \mathbb{C}$. Τότε το $u$ καλείται ιδιοδιάνυσμα του $X$ και ο αριθμός $\lambda$ ιδιοτιμή. Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $X$ λέγεται το μονικό πολυώνυμο

$$p_X(x) = Det(x\mathbb{1}_{\mathcal{X}} - X).$$

Φάσμα του $X$ είναι ένα πολυσύνολο που περιέχει τις ρίζες του $p_X$ και κάθε ρίζα εμφανίζεται όσες φορές είναι και η πολλαπλότητάς της. Το φάσμα του $X$ το συμβολίζουμε $spec(X)$. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$p_X(a) = \prod_{\lambda \in spec(X)} (a - \lambda).$$

Επίσης βλέπουμε ότι

$$Tr(X) = \sum_{\lambda \in spec(X)} \lambda \qquad \text{και} \qquad Det(X) = \prod_{\lambda \in spec(X)} \lambda.$$

### 1.2.14 Σημαντικές κλάσεις τελεστών

**Κανονικοί τελεστές**

$$XX^* = X^*X$$

**Ερμητιανοί τελεστές**

$$Herm(\mathcal{X}) = \{X = X^*\}$$

**Θετικά ημιορισμένοι Τελεστές**

$$Pos(\mathcal{X}) = \{X \in L(\mathcal{X}) : \exists Y \in L(\mathcal{X}) \text{ ώστε } X = Y^*Y\}$$

**Θετικά ορισμένοι τελεστές**

$$Pd(\mathcal{X}) = \{X \in Pos(\mathcal{X}) : Det(X) \neq 0\}$$

Δηλαδή, οι θετικά ημιορισμένοι που αντιστρέφονται.

**Τελεστές πυκνότητας**

$$D(\mathcal{X}) = \{X \in Pos(\mathcal{X}) : Tr(X) = 1\}$$

**Προβολές**

$$Proj(\mathcal{X}) = \{X \in Pos(\mathcal{X}) : X = X^2\}$$

**Ισομετρίες**

$$U(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \{X \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) : X^*X = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\}$$

**Μοναδιαίοι τελεστές**

$$U(\mathcal{X}) = \{X \in U(\mathcal{X}, \mathcal{X})\}$$

ή ισοδύναμα

$$U(\mathcal{X}) = \{XX^* = X^*X = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\}$$

**Διαγώνιοι τελεστές**

$$Diag(\mathcal{X}) = \{X \in L(\mathcal{X}) : X(a,b) = 0, \forall a, b \text{ με } a \neq b\}$$

δηλαδή

$$Diag(u)(a,b) = \begin{cases} u(a) & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases}.$$

Επιπλέον, οι ιδιοτιμές ενός ερμητιανού τελεστή είναι απαραίτητα πραγματικοί αριθμοί. Έτσι, μπορούμε να τους διατάξουμε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο. Δηλαδή για κάθε μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{X}$ και για κάθε ερμητιανό τελεστή $H \in Herm(\mathcal{X})$, ορίζεται το διάνυσμα

$$\lambda(H) := (\lambda_1(H), \lambda_2(H), ...\lambda_n(H)) \in \mathbb{R}^n$$

έτσι ώστε $\{\lambda_1(H), \lambda_2(H), ...\lambda_n(H)\} = spec(H)$ και $\lambda_1(H) \geq \lambda_2(H) \geq ...\lambda_n(H)$.

## 1.2.15 Ιδιότητες θετικά ημιορισμένων τελεστών

Έστω ένας τελεστής $P \in L(\mathcal{X})$. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:

1) $P$ είναι θετικά ημιορισμένος

2) $P = A^*A$ για κάποιον τελεστή $A \in L(\mathcal{X})$, για κάποια επιλογή ενός μιγαδικού Ευκλείδειου χώρου $\mathcal{Y}$

3) Ο $P$ είναι ερμητιανός και κάθε ιδιοτιμή του $P$ είναι μη αρνητική

4) Το $\langle u, Pu \rangle$ είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός για κάθε $u \in \mathcal{X}$

5) Το $\langle Q, P \rangle$ είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός για κάθε $Q \in Pos(\mathcal{X})$

6) Υπάρχει μια συλλογή διανυσμάτων $\{u_a : a \in \Sigma\} \subset \mathcal{X}$ για τα οποία ισχύει ότι $P(a,b) = \langle u_a, u_b \rangle$ για κάθε $a, b \in \Sigma$

7) Υπάρχει μια συλλογή διανυσμάτων $\{u_a : a \in \Sigma\} \subset \mathcal{Y}$, για κάποιο μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{Y}$, για τα οποία ισχύει ότι $P(a,b) = \langle u_a, u_b \rangle$ για κάθε $a, b \in \Sigma$.

## 1.2.16 Ιδιότητες θετικά ορισμένων τελεστών

Έστω ένας τελεστής $P \in L(\mathcal{X})$. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:

1) $P$ είναι θετικά ορισμένος

2) $P$ είναι ερμητιανός και κάθε ιδιοτιμή του $P$ είναι θετικός αριθμός

3) Το $\langle u, Pu \rangle$ είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός για κάθε μη μηδενικό $u \in \mathcal{X}$

4) Το $\langle Q, P \rangle$ είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός για κάθε μη μηδενικό $Q \in Pos(\mathcal{X})$

5) Υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός $\epsilon > 0$ τέτοιος ώστε $P - \epsilon \mathbb{1} \in Pos(\mathcal{X})$.

Συμβολίζουμε $P \geq 0$ για να δείξουμε ότι ο $P$ είναι θετικά ημιορισμένος και $P > 0$ αν ο $P$ είναι θετικά ορισμένος.

### 1.2.17 Ο χώρος $T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι. Τότε ορίζουμε το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ των τετραγωνικών τελεστών του $\mathcal{X}$ και του $\mathcal{Y}$ να είναι:

$$T(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \{\Phi : L(\mathcal{X}) \to L(\mathcal{Y})\}.$$

Το σύνολο $T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ εφοδιασμένο με πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό, όπως παρακάτω, γίνεται μιγαδικός διανυσματικός χώρος:

1) Πρόσθεση: $\forall \Phi, \Psi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ η απεικόνιση $\Phi + \Psi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ορίζεται ως εξής:

$$(\Phi + \Psi)(X) = \Phi(X) + \Psi(X)$$

για κάθε $X \in L(\mathcal{X})$.

2) Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός: $\forall \Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \forall a \in \mathbb{C}$ η απεικόνιση $a\Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ορίζεται ως εξής:

$$(a\Phi)(X) = a\Phi(X)$$

για κάθε $X \in L(\mathcal{X})$.

Για κάθε απεικόνιση $\Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, η αναστροφοσυζυγής της απεικόνιση $\Phi^* \in T(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ ορίζεται να είναι η μοναδική απεικόνιση που ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$\langle \Phi^*(Y), X \rangle = \langle Y, \Phi(X) \rangle$$

για κάθε $X \in L(\mathcal{X})$ και κάθε $Y \in L(\mathcal{Y})$.
Τα τανυστικά γινόμενα των απεικονίσεων $\Phi : L(\mathcal{X}) \to L(\mathcal{Y})$ ορίζονται με παρόμοιο τρόπο όπως τα τανυστικά γινόμενα τελεστών. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε επιλογή μιγαδικών Ευκλείδειων χώρων $\mathcal{X}_1, ...\mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_1, ...\mathcal{Y}_n$ και κάθε

επιλογή γραμμικών απεικονίσεων $\Phi_1 \in T(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1)$, ... $\Phi_n \in T(\mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_n)$ ορίζουμε το τανυστικό γινόμενο των απεικονίσεων

$$\Phi_1 \otimes \cdots \otimes \Phi_n \in T(\mathcal{X}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{Y}_n)$$

να είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$(\Phi_1 \otimes \cdots \otimes \Phi_n)(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n) = \Phi_1(X_1) \otimes \cdots \otimes \Phi_n(X_n)$$

για κάθε τελεστή $X_1 \in L(\mathcal{X}_1), ...X_n \in L(\mathcal{X}_n)$.

### 1.2.18 Ο χώρος $T(\mathcal{X})$

Με $T(\mathcal{X})$ θα συμβολίζουμε το σύνολο $T(\mathcal{X}, \mathcal{X})$. Η ταυτοτική απεικόνιση $\mathbb{1}_{L(\mathcal{X})} \in T(\mathcal{X})$ ορίζεται ως εξής:

$$\mathbb{1}_{L(\mathcal{X})}(X) = X$$

για κάθε $X \in L(\mathcal{X})$.

### 1.2.19 Μερικό ίχνος

Η συνάρτηση του ίχνους των τετραγωνικών τελεστών είναι μια γραμμική απεικόνιση $Tr : L(\mathcal{X}) \to \mathbb{C}$. Παρατηρώντας ότι $L(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, βλέπουμε ότι

$$Tr \in T(\mathcal{X}, \mathbb{C}).$$

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε έναν ακόμα μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{Y}$, τότε ορίζουμε την απεικόνιση του μερικού ίχνους

$$Tr_{\mathcal{X}} = Tr \otimes \mathbb{1}_{L(\mathcal{Y})} \in T(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}, \mathcal{Y}).$$

Έτσι, το παραπάνω τανυστικό γινόμενο απεικονίσεων είναι η μοναδική απεικόνιση που ικανοποιεί τη σχέση

$$(Tr \otimes \mathbb{1}_{L(\mathcal{Y})})(X \otimes Y) = Tr(X)Y$$

για κάθε τελεστή $X \in L(\mathcal{X})$ και $Y \in L(\mathcal{Y})$. Με όμοιο τρόπο ορίζεται και το μερικό ίχνος $Tr_{\mathcal{Y}}$

$$Tr_{\mathcal{Y}} = \mathbb{1}_{L(\mathcal{X})} \otimes Tr.$$

### 1.2.20 Κλάσεις απεικονίσεων $T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

1) Απεικονίσεις που διατηρούν τους ερμητιανούς τελεστές.
Μια απεικόνιση $\Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ διατηρεί τους ερμητιανούς τελεστές αν

$$\Phi(H) \in Herm(\mathcal{Y})$$

για κάθε ερμητιανό τελεστή $H \in (\mathcal{X})$. Τότε θα γράφουμε $\Phi \in HP(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

2) Θετικές απεικονίσεις.
Μια απεικόνιση $\Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ είναι θετική αν

$$\Phi(P) \in Pos(\mathcal{Y})$$

για κάθε θετικά ημιορισμένο τελεστή $P \in Pos(\mathcal{X})$. Τότε θα γράφουμε $\Phi \in P(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

3) Πλήρως θετικές απεικονίσεις.
Μια απεικόνιση $\Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ είναι πλήρως θετική αν

$$\Phi \otimes \mathbb{1}_{L(\mathcal{Z})}$$

είναι θετική απεικόνιση για κάθε επιλογή μιγαδικού Ευκλείδειου $\mathcal{Z}$.
Το σύνολο όλων πλήρως θετικών απεικονίσεων αυτής της μορφής θα το συμβολίζουμε $CP(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ και θα γράφουμε $\Phi \in CP(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

4) Απεικονίσεις που διατηρούν το ίχνος.
Μια απεικόνιση $\Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ διατηρεί το ίχνος των τελεστών αν

$$Tr(\Phi(X)) = Tr(X)$$

για κάθε $X \in L(\mathcal{X})$. Τότε θα γράφουμε $\Phi \in TP(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

5) Μοναδιαίες απεικονίσεις.
Μια απεικόνιση $\Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ είναι μοναδιαία αν

$$\Phi(\mathbb{1}_{\mathcal{X}}) = \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}.$$

Τότε θα γράφουμε $\Phi \in U(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

### 1.2.21 Η απεικόνιση vec

Για οποιαδήποτε επιλογή μιγαδικών Ευκλείδειων χώρων $\mathcal{X} = \mathbb{C}^\Sigma$ και $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^\Gamma$ υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ των χώρων $L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ και $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$. Αυτή η αντιστοιχία δίνεται από τη γραμμική απεικόνιση

$$vec : L(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) \to \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$$

και ορίζεται ως εξής:

$$vec(E_{a,b}) = e_a \otimes e_b, \quad \forall a \in \Sigma, b \in \Gamma.$$

Επειδή η vec είναι γραμμική απεικόνιση, ισχύει ότι $vec(uv^*) = u \otimes \overline{v}$ για $u \in \mathcal{X}$ και $v \in \mathcal{Y}$. Η απεικόνιση $vec$ είναι γραμμική, 1-1 και επί απεικόνιση, και αυτό σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα $u \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ ορίζει μοναδικά έναν τελεστή $A \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ όπου ικανοποιεί την σχέση $vec(A) = u$. Επίσης είναι μια ισομετρία, με την έννοια ότι ισχύει η εξής ισότητα

$$\langle A, B \rangle = \langle vec(A), vec(B) \rangle$$

για κάθε $A, B \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$.

#### Ιδιότητες

1) $(A_0 \otimes A_1)vec(B) = vec(A_0 B A_1^\top)$, για κάθε τελεστή $A_0 \in L(\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0)$, $A_1 \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1)$ και $B \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_0)$

2) $Tr_{\mathcal{Y}}(vec(A)vec(B)^*) = AB^*$, για κάθε τελεστή $A, B \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$

3) $Tr_{\mathcal{X}}(vec(A)vec(B)^*) = A^\top \overline{B}$, για κάθε τελεστή $A, B \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$.

Όπου $vec(A)vec(B)^*$ είναι τελεστής τάξης 1.

### 1.2.22 Φασματικό θεώρημα

Έστω $\mathcal{X}$ να είναι ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος και έστω $X \in L(\mathcal{X})$ να είναι ένας κανονικός τελεστής. Τότε, υπάρχει ένας θετικός ακέραιος αριθμός $m$, διακριτοί μιγαδικοί αριθμοί $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{C}$ και μη μηδενικές προβολές $\Pi_1, ..., \Pi_m \in Proj(\mathcal{X})$ που ικανοποιούν την σχέση $\Pi_1 + ... + \Pi_m = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$, έτσι ώστε

$$X = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \Pi_k.$$

Ο τελεστής $X$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στην παραπάνω μορφή, όπου $\lambda_i,\ i \in [1, ..., n]$ είναι ιδιοτιμή του $X$ και $\Pi_i,\ i \in [1, ..., n]$ είναι η προβολή του $\mathcal{X}$ επί του χώρου που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής $\lambda_i$.

### 1.2.23 Πόρισμα

Έστω $\mathcal{X}$ να είναι ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος διάστασης $n$. Έστω $X \in L(\mathcal{X})$ ένας κανονικός τελεστής και έστω

$$spec(X) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}.$$

Τότε υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{x_1, ..., x_n\}$ του $\mathcal{X}$ τέτοια ώστε

$$X = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k x_k^*.$$

Η παραπάνω έκφραση καλείται φασματική ανάλυση του τελεστή $X$.

### 1.2.24 Θεώρημα

Έστω $\mathcal{X}$ να είναι ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος με διάσταση $n$ και έστω $X, Y \in L(\mathcal{X})$ να είναι κανονικοί τελεστές με $XY = YX$. Τότε υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{x_1, ..., x_n\}$ του $\mathcal{X}$ έτσι ώστε

$$X = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k x_k^* \quad \text{και} \quad Y = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k x_k^*$$

για κάποια επιλογή μιγαδικών αριθμών $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n$ όπου $spec(X) = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ και $spec(Y) = \{\beta_1, ..., \beta_n\}$.

### 1.2.25 Ανάλυση Jordan - Hahn

Κάθε ερμητιανός τελεστής είναι κανονικός τελεστής και έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Άρα από το φασματικό θεώρημα έχουμε ότι για κάθε ερμητιανό τελεστή $H \in Herm(\mathcal{X})$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος αριθμός $m$, μη μηδενικές προβολές $\Pi_1, ..., \Pi_m$ που να ικανοποιούν τη σχέση

$$\Pi_1 + ... + \Pi_m = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$$

και πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, ..., \lambda_m$ έτσι ώστε

$$H = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \Pi_k.$$

Αν ορίσουμε τους τελεστές

$$P = \sum_{k=1}^{m} max\{\lambda_k, 0\} \Pi_k$$

και

$$Q = \sum_{k=1}^{m} max\{-\lambda_k, 0\}\Pi_k$$

τότε έχουμε ότι

$$H = P - Q$$

για $P, Q \in Pos(\mathcal{X})$ με $PQ = 0$. Για κάθε ερμητιανό τελεστή $H$ η έκφραση $H = P - Q$ είναι μοναδική και καλείται ανάλυση Jordan - Hahn του τελεστή $H$.

### 1.2.26 Νόρμες τελεστών

Μια νόρμα στο χώρο $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, για μιγαδικούς Ευκλείδειους χώρους $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, είναι μια συνάρτηση $\|\cdot\|$ που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1) $\|A\| \geq 0, \ \forall A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

2) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

3) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|, \ \forall A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \alpha \in \mathbb{C}$

4) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \ \forall A, B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Σε αυτήν την εργασία, και επειδή είναι χρήσιμο στο αντικείμενο της κβαντικής θεωρίας πληροφορίας, θα ασχοληθούμε με την 2-νόρμα και την $\infty$-νόρμα. Έστω ένας τελεστής $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Τότε ορίζουμε την 2-νόρμα του A να είναι

$$\|A\|_2 = \left(Tr\left(A^* A\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Η $\infty$-νόρμα ορίζεται να είναι

$$\|A\|_\infty = max\{\|Au\| : u \in \mathcal{X}, \|u\| \leq 1\}.$$

Κάποιες ιδιότητες για τις 2-νόρμα και $\infty$-νόρμα είναι οι εξής:

1) $\|A^*A\|_\infty = \|AA^*\|_\infty = \|A\|_\infty^2$

2) $\|A\|_2 = (Tr(A^*A))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle A, A\rangle}$

3) $\|A\|_2 = \|vec(A)\| = \sqrt{\sum_{a,b} |A(a,b)|^2}$

### 1.2.27 Ψευδοαντίστροφος των Moore - Penrose

Για έναν τελεστή $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ορίζουμε τον ψευδοαντίστροφο των Moore - Penrose του A, να είναι ο μοναδικός τελεστής $A^+ \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ για τον οποίο ισχύουν οι εξής ιδιότητες

1) $AA^+A = A$

2) $A^+AA^+ = A^+$

3) Οι τελεστές $AA^+$ και $A^+A$ είναι ερμητιανοί.

Το γεγονός ότι ο $A^+$ ορίζεται μοναδικά από τις παραπάνω εξισώσεις δείχνεται εύκολα. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο τέτοιοι τελεστές $B, C \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ με τις ιδιότητες

1) $ABA = A = ACA$

2) $BAB = B$ και $CAC = C$

3) Οι τελεστές $AB, BA, AC$ και $CA$ είναι ερμητιανοί.

Τότε θα έχουμε

$$B = BAB = (BA)^*B = A^*B^*B = (ACA)^*B^*B = A^*C^*A^*B^*B$$

$$= (CA)^*(BA)^*B = CABAB = CAB = CACAB = C(AC)^*(AB)^*$$

$$= CC^*A^*B^*A^* = CC^*(ABA)^* = CC^*A^* = C(AC)^* = CAC = C.$$

Συνεπώς $B = C$.

# Κεφάλαιο 2

# Έννοιες από την Ανάλυση

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μας απασχολήσουν πραγματικοί Ευκλείδειοι χώροι και μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι πεπερασμένης διάστασης. Συνήθως με $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ θα συμβολίζουμε τους πραγματικούς ή μιγαδικούς Ευκλείδειους χώρους πεπερασμένης διάστασης που είναι εφοδιασμένοι με νόρμα. Εκτός αν σημειώνεται διαφορετικά.

### 2.1.1 Ανοικτά και κλειστά σύνολα

Ένα σύνολο $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$ θα λέγεται ανοικτό αν

$$\forall u \in \mathcal{A},\ \exists \varepsilon > 0 : \{v \in \mathcal{V} : \|u - v\| < \varepsilon\} \subseteq \mathcal{A}.$$

Ένα σύνολο $\mathcal{A}$ θα λέγεται κλειστό αν το συμπλήρωμά του $\mathcal{A}^c = \mathcal{V} \setminus \mathcal{A}$ είναι ανοικτό.

### 2.1.2 Συνεχείς συναρτήσεις

Έστω $f : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ μια συνάρτηση και $u \in \mathcal{A}$ ένα διάνυσμα. Η $f$ είναι συνεχής στο $u$ αν

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ έτσι ώστε } \forall v \in \mathcal{A} : \|u - v\| < \delta \Rightarrow \|f(u) - f(v)\| < \varepsilon.$$

Αν η $f$ είναι συνεχής για κάθε διάνυσμα του $\mathcal{A}$ τότε λέγεται συνεχής στο $\mathcal{A}$. Έστω μια συνάρτηση $f : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{V} \to \mathcal{W}$. Προεικόνα ενός συνόλου $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$ είναι το σύνολο

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{u \in \mathcal{A} : f(u) \in \mathcal{B}\}.$$

Μια συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $\mathcal{A}$ αν και μόνο αν η προεικόνα ενός ανοικτού συνόλου στο $\mathcal{W}$ είναι ανοικτό σύνολο στο $\mathcal{A}$. Το ίδιο ισχύει αντίστοιχα και για τα κλειστά σύνολα.

### 2.1.3 Συμπαγή σύνολα

Ένα σύνολο $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$ καλείται συμπαγές αν κάθε ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{A}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε κάποιο $u \in \mathcal{A}$. Επειδή θεωρούμε το χώρο $\mathcal{V}$ πεπερασμένης διάστασης σημαίνει ότι, ένα σύνολο $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.

### 2.1.4 Κυρτά σύνολα, κώνοι

Έστω $\mathcal{V}$ ένας πραγματικός ή μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος. Ένα υποσύνολο $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ λέμε ότι είναι κυρτό σύνολο αν $\forall u, v \in \mathcal{C}$ και για $\lambda \in [0,1]$ ισχύει ότι

$$\lambda u + (1-\lambda)v \in \mathcal{C}.$$

Αν $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί διανυσματικοί χώροι και $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$ είναι κυρτά σύνολα, τότε και το $\{u \oplus v : u \in \mathcal{A}, v \in \mathcal{B}\} \subseteq \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ είναι επίσης κυρτό σύνολο. Επιπλέον, αν $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ είναι ένας τελεστής, τότε το σύνολο $\{Au : u \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{W}$ είναι επίσης κυρτό.

Ένα σύνολο $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{V}$ λέγεται κώνος αν για κάθε επιλογή $u \in \mathcal{K}$ και $\lambda \geq 0$ έχουμε ότι $\lambda u \in \mathcal{K}$. Ο κώνος που παράγεται από ένα σύνολο $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$ ορίζεται ως

$$cone(\mathcal{A}) = \{\lambda u : u \in \mathcal{A}, \lambda \geq 0\}.$$

Αν το $\mathcal{A}$ είναι ένα συμπαγές σύνολο που δεν περιέχει το 0, τότε το σύνολο $cone(\mathcal{A})$ είναι απαραίτητα ένα κλειστό σύνολο. Ένας κώνος $\mathcal{K}$ είναι κυρτό σύνολο αν και μόνο αν $\forall u, v \in \mathcal{K},\ u + v \in \mathcal{K}$.

### 2.1.5 Κυρτή θήκη

Για κάθε αλφάβητο $\Sigma$, ένα διάνυσμα $p \in \mathbb{R}^{\Sigma}$ λέγεται διάνυσμα πιθανότητας αν $p(a) \geq 0,\ \forall a \in \Sigma$ και $\sum_{a \in \Sigma} p(a) = 1$. Το σύνολο όλων αυτών των διανυσμάτων συμβολίζεται $\mathcal{P}(\Sigma)$. Για ένα διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$ και ένα σύνολο $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$, ο κυρτός συνδιασμός των διανυσμάτων του $\mathcal{A}$ είναι μια έκφραση της μορφής

$$\sum_{a \in \Sigma} p(a) u_a$$

για κάποια επιλογή αλφάβητου $\Sigma$, ενός διανύσματος πιθανότητας $p \in \mathcal{P}(\Sigma)$ και μιας συλλογής $\{u_a : a \in \Sigma\} \subseteq \mathcal{A}$. Η κυρτή θήκη ενός συνόλου $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$ είναι η τομή όλων των κυρτών συνόλων που περιέχουν το $\mathcal{A}$ και συμβολίζεται με $conv(\mathcal{A})$. Το σύνολο $conv(\mathcal{A})$ είναι ίσο με το σύνολο όλων των διανυσμάτων που γράφονται ως κυρτός συνδιασμός των στοιχείων του $\mathcal{A}$. Επίσης αν το $\mathcal{A}$ είναι συμπαγές τότε και το σύνολο $conv(\mathcal{A})$ είναι επίσης συμπαγές.

### 2.1.6 Θεώρημα (Καραθεοδωρή)

Έστω $\mathcal{V}$ να είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$. Υποθέτουμε επίσης ότι το $\mathcal{A}$ περιέχεται σε έναν αφινικό υπόχωρο του $\mathcal{V}$ με διάσταση $n$. Τότε για κάθε διάνυσμα $v \in conv(\mathcal{A})$ υπάρχουν $m$ διανύσματα $u_1, ..., u_m \in \mathcal{A}$ για $m \leq n+1$, τέτοια ώστε $v \in conv(\{u_1, ...u_m\})$.

### 2.1.7 Ακραία σημεία

Ένα σημείο $w \in \mathcal{C}$, όπου $\mathcal{C}$ είναι κυρτό σύνολο, λέμε ότι είναι ακραίο σημείο του $\mathcal{C}$ αν για κάθε έκφραση της μορφής

$$w = \lambda u + (1-\lambda)v$$

με $u, v \in \mathcal{C}$ και $\lambda \in (0,1)$, να ισχύει ότι $u = v = w$.

### 2.1.8 Θεώρημα (Minkowski)

Έστω $\mathcal{V}$ να είναι ένας πραγματικός ή μιγαδικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Έστω επίσης, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ να είναι ένα συμπαγές και κυρτό σύνολο και $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ να είναι το σύνολο των ακραίων σημείων του $\mathcal{C}$. Τότε $\mathcal{C} = conv(\mathcal{A})$.

# Κεφάλαιο 3

# Κβαντικές καταστάσεις

## 3.1 Κλασικές καταστάσεις ενός register

### 3.1.1 Register

Ένα register $X$ είναι κάποιο από τα παρακάτω αντικείμενα:

1) Ένα αλφάβητο Σ.

2) Μια n-άδα $X = (Y_1, ...Y_n)$, όπου $n$ θετικός ακέραιος και $Y_1, ...Y_n$ να είναι registers.

Τα registers της πρώτης μορφής καλούνται απλά registers και τα registers της δεύτερης μορφής καλούνται σύνθετα registers.

### 3.1.2 Κλασικές καταστάσεις

Το σύνολο κλασικών καταστάσεων για ένα register X ορίζεται να είναι:

1) Αν $X = \Sigma$ ένα απλό register, το σύνολο κλασικών καταστάσεων του X θα είναι το Σ.

2) Αν $X = (Y_1, ...Y_n)$ ένα σύνθετο register, το σύνολο των κλασικών καταστάσεων του $X$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο $\Sigma = \Gamma_1 \times ... \times \Gamma_n$ όπου $\Gamma_k$ είναι το σύνολο των κλασικών καταστάσεων για το register $Y_k$ για κάθε $k \in \{1, ..., n\}$.

Τα στοιχεία του συνόλου κλασικών καταστάσεων ονομάζονται κλασικές καταστάσεις.

## 3.2 Κβαντικές καταστάσεις ενός register

### 3.2.1 Πιθανοτικές καταστάσεις ενός register

Μια πιθανοτική κατάσταση ενός register $X$ θα αναφέρεται σε μία κατανομή πιθανότητας ή μία τυχαία επιλογή κλασικών καταστάσεων για ένα register. Αν υποθέσουμε ότι το σύνολο κλασικών καταστάσεων του $X$ είναι $\Sigma$, τότε μια πιθανοτική κατάσταση του $X$ ορίζεται σαν ένα διάνυσμα πιθανότητας $p \in \mathcal{P}(\Sigma)$. Η τιμή $p(a)$ παριστάνει την πιθανότητα που σχετίζεται με μια κλασική κατάσταση $a \in \Sigma$.

### 3.2.2 Ο μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος ενός register

Ο μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος που σχετίζεται με ένα register $X$ ορίζεται να είναι $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$, όπου $\Sigma$ να είναι το σύνολο κλασικών καταστάσεων του register $X$. Ο μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος που σχετίζεται με ένα σύνθετο register $X = (Y_1, ..., Y_n)$ ορίζεται να είναι το τανυστικό γινόμενο $\mathcal{X} = \mathcal{Y}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{Y}_n$. Αυτός ο ορισμός συνεπάγεται από τον ορισμό του συνόλου κλασικών καταστάσεων του register $X$ που δίνεται $\Sigma = \Gamma_1 \times ... \times \Gamma_n$, υποθέτοντας ότι τα σύνολα κλασικών καταστάσεων των registers $Y_1, ..., Y_n$ είναι $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ αντίστοιχα. Συνεπώς θα έχουμε για τον μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο του $X$ ότι

$$\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma} = \mathbb{C}^{\Gamma_1 \times ... \times \Gamma_n} = \mathcal{Y}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{Y}_n.$$

### 3.2.3 Κβαντικές καταστάσεις

Μια κβαντική κατάσταση είναι ένας τελεστής πυκνότητας της μορφής $\rho \in D(\mathcal{X})$ για κάποια επιλογή μιγαδικού Ευκλείδειου χώρου $\mathcal{X}$. Η βασική διαφορά μεταξύ των πιθανοτικών καταστάσεων και των κβαντικών καταστάσεων είναι ότι οι πιθανοτικές καταστάσεις αναπαριστώνται με διανύσματα πιθανότητας ενώ οι κβαντικές καταστάσεις αναπαριστώνται με τελεστές πυκνότητας.

### 3.2.4 Κυρτοί συνδυασμοί κβαντικών καταστάσεων

Για κάθε μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{X}$ το σύνολο $D(\mathcal{X})$ είναι κυρτό σύνολο. Αν $\Gamma$ είναι ένα αλφάβητο τότε, για κάθε συλλογή $\{\rho_a : a \in \Gamma\} \subseteq D(\mathcal{X})$ κβαντικών καταστάσεων, και για ένα διάνυσμα πιθανότητας $p \in \mathcal{P}(\Gamma)$ ισχύει ότι ο κυρτός συνδυασμός

$$\rho = \sum_{a \in \Gamma} p(a) \rho_a$$

είναι στοιχείο του $D(\mathcal{X})$. Η κβαντική κατάσταση $\rho$, όπως ορίζεται στην παραπάνω σχέση, λέμε ότι είναι μια μίξη των καταστάσεων $\{\rho_a : a \in \Gamma\}$ ως προς το διάνυσμα πιθανότητας $p$.

### 3.2.5 Pure καταστάσεις

Μια κβαντική κατάσταση $\rho \in D(\mathcal{X})$ λέγεται pure κατάσταση αν έχει τάξη ίση με 1. Ισοδύναμα, η $\rho$ είναι pure κατάσταση αν υπάρχει ένα μοναδιαίο διάνυσμα $u \in \mathcal{X}$ τέτοιο ώστε $\rho = uu^*$. Πολλές φορές μια pure κατάσταση συμβολίζεται $u$ αντί για $uu^*$. Είναι επίσης σημαντικό να πούμε ότι μια pure κατάσταση ορίζει μια κλάση ισοδυναμίας pure καταστάσεων. Αν έχουμε δύο μοναδιαία διανύσματα $u$ και $v = au$, όπου $a \in \mathbb{C}$ με $|a| = 1$, τότε

$$vv^* = |a|^2 uu^* = uu^*.$$

### 3.2.6 Flat καταστάσεις

Μια κβαντική κατάσταση $\rho \in D(\mathcal{X})$ λέγεται flat κατάσταση αν

$$\rho = \frac{\Pi}{Tr(\Pi)}$$

για κάποιο μη μηδενικό τελεστή προβολής $\Pi \in Proj(\mathcal{X})$. Συνήθως συμβολίζουμε με $\omega$ μια flat κατάσταση και γράφουμε

$$\omega_{\mathcal{V}} = \frac{\Pi_{\mathcal{V}}}{Tr(\Pi_{\mathcal{V}})}$$

για να συμβολίσουμε την flat κατάσταση που αναλογεί στην προβολή $\Pi_{\mathcal{V}}$ πάνω σε ένα μη μηδενικό υπόχωρο $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$.

### 3.2.7 Καταστάσεις γινόμενο

Έστω $X = (Y_1, ..., Y_n)$ ένα σύνθετο register. Μια κατάσταση $\rho \in D(\mathcal{X})$ λέγεται κατάσταση γινόμενο του $X$ αν μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\rho = \sigma_1 \otimes ... \otimes \sigma_n$$

για $\sigma_1 \in D(\mathcal{Y}_1), ..., \sigma_n \in D(\mathcal{Y}_n)$. Οι καταστάσεις γινόμενο δηλώνουν ανεξαρτησία μεταξύ των καταστάσεων των registers $Y_1, ..., Y_n$ και τότε λέμε ότι τα registers αυτά είναι ανεξάρτητα.

### Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε ένα σύνθετο register $X = (Y, Z)$, με $Y, Z$ να είναι registers με σύνολο κλασικών καταστάσεων το $\{0, 1\}$.
Η κατάσταση $\rho \in D(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$ που ορίζεται ως

$$\rho = \frac{1}{4}E_{0,0} \otimes E_{0,0} + \frac{1}{4}E_{0,0} \otimes E_{1,1} + \frac{1}{4}E_{1,1} \otimes E_{0,0} + \frac{1}{4}E_{1,1} \otimes E_{1,1}$$

είναι μια κατάσταση γινόμενο καθώς μπορεί να γραφτεί

$$\rho = \left(\frac{1}{2}E_{0,0} + \frac{1}{2}E_{1,1}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}E_{0,0} + \frac{1}{2}E_{1,1}\right).$$

Ισοδύναμα, σε μορφή πίνακα θα έχουμε

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Οι καταστάσεις $\sigma, \tau \in D(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$ που ορίζονται ως

$$\sigma = \frac{1}{2}E_{0,0} \otimes E_{0,0} + \frac{1}{2}E_{1,1} \otimes E_{1,1}$$

$$\tau = \frac{1}{2}E_{0,0} \otimes E_{0,0} + \frac{1}{2}E_{0,1} \otimes E_{0,1} + \frac{1}{2}E_{1,0} \otimes E_{1,0} + \frac{1}{2}E_{1,1} \otimes E_{1,1}$$

δεν είναι καταστάσεις γινόμενο. Μπορεί να δειχθεί ότι δεν μπορούν να γραφτούν σαν τανυστικό γινόμενο.

## 3.2.8 Βάση από τελεστές πυκνότητας

Γνωρίζουμε ότι για κάθε μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχουν σύνολα που παράγουν τον χώρο $L(\mathcal{X})$ και αποτελούνται μόνο από τελεστές πυκνότητας. Μια συνέπεια αυτού είναι ότι κάθε γραμμική απεικόνιση της μορφής

$$\phi : L(\mathcal{X}) \to \mathbb{C}$$

ορίζεται μοναδικά από τον τρόπο που δρα πάνω στα στοιχεία του $D(\mathcal{X})$. Αυτό σημαίνει, για παράδειγμα, ότι τα κανάλια και οι μετρήσεις ορίζονται μοναδικά από τη δράση τους πάνω στους τελεστές πυκνότητας.

**Παράδειγμα**

Έστω $\Sigma$ να είναι ένα αλφάβητο ολικά διατεταγμένο. Για κάθε ζεύγος $(a,b) \in \Sigma \times \Sigma$ ορίζουμε έναν τελεστή πυκνότητας $\rho_{a,b} \in D(\mathbb{C}^\Sigma)$ με τον εξής τρόπο

$$\rho_{a,b} = \begin{cases} E_{a,a} & ,a = b \\ \frac{1}{2}(e_a + e_b)(e_a + e_b)^* & ,a < b \\ \frac{1}{2}(e_a + ie_b)(e_a + ie_b)^* & ,a > b \end{cases}$$

Έτσι για κάθε ζεύγος $(a,b) \in \Sigma \times \Sigma$ με $a < b$ θα έχουμε

$$\left(\rho_{a,b} - \frac{1}{2}\rho_{a,a} - \frac{1}{2}\rho_{b,b}\right) - i\left(\rho_{b,a} - \frac{1}{2}\rho_{a,a} - \frac{1}{2}\rho_{b,b}\right) = E_{a,b},$$

$$\left(\rho_{a,b} - \frac{1}{2}\rho_{a,a} - \frac{1}{2}\rho_{b,b}\right) + i\left(\rho_{b,a} - \frac{1}{2}\rho_{a,a} - \frac{1}{2}\rho_{b,b}\right) = E_{b,a}$$

Οι τελεστές $E_{a,a}, E_{a,b}, E_{b,a}, E_{b,b}$ αποτελούν βάση του χώρου $L(\mathbb{C}^\Sigma)$.

## 3.3 Reductions και purifications κβαντικών καταστάσεων

### 3.3.1 Reductions κβαντικών καταστάσεων

Έστω $X = (Y_1, ..., Y_n)$ ένα σύνθετο register, για $n \geq 2$. Για κάθε επιλογή $k \in \{1, ..., n\}$ μπορούμε να σχηματίσουμε ένα νέο register

$$(Y_1, ..., Y_{k-1}, Y_{k+1}, ..., Y_n)$$

αφαιρώντας το register $Y_k$ και διατηρώντας τα υπόλοιπα ως έχουν. Για κάθε κβαντική κατάσταση $\rho \in D(\mathcal{X})$ του $X$ ορίζουμε μια κβαντική κατάσταση $\rho[Y_1, ..., Y_{k-1}, Y_{k+1}, ..., Y_n]$ η οποία θα είναι το reduction της $\rho$ στο register $(Y_1, ..., Y_{k-1}, Y_{k+1}, ..., Y_n)$. Αυτή η κατάσταση ορίζεται από τη σχέση

$$\rho[Y_1, ..., Y_{k-1}, Y_{k+1}, ..., Y_n] = Tr_{\mathcal{Y}_k}(\rho)$$

όπου $Tr_{\mathcal{Y}_k} \in T(\mathcal{Y}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{Y}_n, \mathcal{Y}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{Y}_{k-1} \otimes \mathcal{Y}_{k+1} \otimes ... \otimes \mathcal{Y}_n)$ συμβολίζει την απεικόνιση του μερικού ίχνους. Αυτή είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση που ικανοποιεί την εξίσωση

$$Tr_{\mathcal{Y}_k}(Y_1 \otimes ... \otimes Y_n) = Tr(Y_k) Y_1 \otimes ... \otimes Y_{k-1} \otimes Y_{k+1} \otimes ... \otimes Y_n$$

για όλους τους τελεστές $Y_1 \in \mathcal{Y}_1, ..., Y_n \in \mathcal{Y}_n$. Εναλλακτικά μπορούμε να ορίσουμε

$$Tr_{\mathcal{Y}_k} = \mathbb{1}_{L(\mathcal{Y}_1)} \otimes ... \otimes \mathbb{1}_{L(\mathcal{Y}_{k-1})} \otimes Tr \otimes \mathbb{1}_{L(\mathcal{Y}_{k+1})} \otimes ... \otimes \mathbb{1}_{L(\mathcal{Y}_n)}$$

όπου καταλαβαίνουμε ότι η απεικόνιση του ίχνους στο δεξί μέλος της σχέσης δρα πάνω στο χώρο $L(\mathcal{Y}_k)$.

**Παράδειγμα**

Έστω τα registers $Y, Z$ όπου και τα δύο έχουν σύνολο κλασικών καταστάσεων το $\Sigma$. Θεωρούμε $X = (Y, Z)$ και $u \in \mathcal{X} = \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z}$ το οποίο ορίζεται

$$u = \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}} \sum_{a \in \Sigma} e_a \otimes e_a$$

έτσι ώστε

$$uu^* = \frac{1}{|\Sigma|} \sum_{a,b \in \Sigma} E_{a,b} \otimes E_{a,b}$$

Τότε θα έχουμε ότι το reduction της κατάστασης $uu^*$ στο reister $Y$ θα είναι

$$(uu^*)[Y] = \frac{1}{|\Sigma|} \sum_{a,b \in \Sigma} Tr(E_{a,b}) E_{a,b} = \frac{1}{|\Sigma|} \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}$$

## 3.3.2 Extensions κβαντικών καταστάσεων

Σε πολλές περιπτώσεις είναι πιο χρήσιμο για ένα register $X$ να το σκεφτόμαστε σαν ένα subregister ενός σύνθετου register $(X, Y)$, και μία κατάσταση $\rho \in D(\mathcal{X})$ ως ένα reduction

$$\rho = \sigma[X] = Tr_{\mathcal{Y}}(\sigma)$$

μιας κατάστασης $\sigma$ του $(X, Y)$. Σε αυτήν την περίπτωση η $\sigma$ θα λέγεται extension της $\rho$.

## 3.3.3 Purifications κβαντικών καταστάσεων

Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ να είναι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι, $P \in Pos(\mathcal{X})$ ένας θετικά ημιορισμένος τελεστής και έστω $u \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ ένα διάνυσμα. Τότε το διάνυσμα $u$ θα λέμε ότι είναι purification του $P$ αν

$$Tr_{\mathcal{Y}}(uu^*) = P.$$

## 3.3.4 Συνθήκες για την ύπαρξη purification

Η απεικόνιση $vec$ είναι μια ένα προς ένα και επί γραμμική απεικόνιση από τον χώρο $L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ στον χώρο $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$. Έτσι, κάθε διάνυσμα $u \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ μπορεί να γραφεί ως $u = vec(A)$ για κάποιον τελεστή $A \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$. Οπότε, από τις ιδιότητες της απεικόνισης vec προκύπτει ότι

$$Tr_{\mathcal{Y}}(uu^*) = Tr_{\mathcal{Y}}(vec(A)vec(A)^*) = AA^*.$$

Συνεπώς, για κάποιον τελεστή $P \in Pos(\mathcal{X})$ τα εξής είναι ισοδύναμα:

1) Υπάρχει purification $u \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ του $P$.

2) Υπάρχει ένας τελεστής $A \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ τέτοιος ώστε $P = AA^*$.

### 3.3.5 Θεώρημα για την ύπαρξη purification

Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ να είναι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι και $P \in Pos(\mathcal{X})$ ένας θετικά ημιορισμένος τελεστής. Τότε υπάρχει ένα διάνυσμα $u \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ τέτοιο ώστε $Tr_{\mathcal{Y}}(uu^*) = P$ αν και μόνο αν $dim(\mathcal{Y}) \geq rank(P)$.

#### Απόδειξη

Όπως είδαμε παραπάνω, η ύπαρξη ενός διανύσματος $u \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ για το οποίο $Tr_{\mathcal{Y}}(uu^*) = P$, είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ενός τελεστή $A \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ με την ιδιότητα $P = AA^*$. Αν υποθέσουμε ότι ένας τέτοιος τελεστής $A \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ υπάρχει τότε πρέπει $rank(P) = rank(A)$ και συνεπώς $dim(\mathcal{Y}) \geq rank(P)$. Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι $dim(\mathcal{Y}) \geq rank(P)$ τότε, μπορούμε να δείξουμε την ύπαρξη ενός τελεστή $A \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ με $P = AA^*$, ως εξής. Έστω $r = rank(P)$ και από το φασματικό θεώρημα έχουμε ότι

$$P = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k(P) x_k x_k^*$$

για $\{x_1, ..., x_r\} \subset \mathcal{X}$ να είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο. Για μια τυχαία επιλογή ορθοκανονικού συνόλου $\{y_1, ..., y_r\} \subset \mathcal{Y}$, που θα υπάρχει γιατί $dim(\mathcal{Y}) \geq rank(P)$, ο τελεστής

$$A = \sum_{k=1}^{r} \sqrt{\lambda_k(P)} x_k y_k^*$$

ικανοποιεί τη σχέση $AA^* = P$.

### 3.3.6 Παρατήρηση

Αν έχουμε δύο μιγαδικούς Ευκλείδειους χώρος $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ με $dim(\mathcal{Y}) \geq dim(\mathcal{X})$. Τότε για κάθε θετικά ημιορισμένο τελεστή $P \in Pos(\mathcal{X})$ υπάρχει ένα διάνυσμα $u \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ τέτοιο ώστε $Tr_{\mathcal{Y}}(uu^*) = P$.

### 3.3.7 Θεώρημα για την ισοδυναμία των purifications

Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ να είναι δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι. Έστω $u, v \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ να είναι δύο διανύσματα και επιπλέον $Tr_{\mathcal{Y}}(uu^*) = Tr_{\mathcal{Y}}(vv^*)$. Τότε υπάρχει ένας μοναδιαίος τελεστής $U \in U(\mathcal{Y})$ τέτοιος ώστε $v = (\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \otimes U)u$.

**Απόδειξη**

Έστω $A, B \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ να είναι οι μοναδικοί τελεστές για τους οποίους ισχύει $u = vec(A)$ και $v = vec(B)$, και έστω επίσης $P \in Pos(\mathcal{X})$ ικανοποιώντας τη σχέση

$$Tr_{\mathcal{Y}}(uu^*) = P = Tr_{\mathcal{Y}}(vv^*).$$

Συνεπώς ισχύει ότι $AA^* = P = BB^*$. Θέτοντας $r = rank(P)$, έχουμε ότι $rank(A) = r = rank(B)$. Στη συνέχεια, θεωρούμε $x_1, ..., x_r \in \mathcal{X}$ να είναι μια ακολουθία ορθοκανονικών ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή $P$, με τις αντίστοιχες ιδιοτιμές να είναι $\lambda_1(P), ..., \lambda_r(P)$. Τότε, μπορούμε να γράψουμε τους τελεστές $A, B$ ως εξής

$$A = \sum_{k=1}^{r} \sqrt{\lambda_k(P)} x_k y_k^* \quad \text{και} \quad B = \sum_{k=1}^{r} \sqrt{\lambda_k(P)} x_k w_k^*$$

για κάποια επιλογή ορθοκανονικών συλλογών $\{y_1, ..., y_r\}$ και $\{w_1, ..., w_r\}$ διανυσμάτων του $\mathcal{Y}$. Τέλος, θεωρούμε $V \in U(\mathcal{Y})$ να είναι ένας μοναδιαίος τελεστής τέτοιος ώστε $Vw_k = y_k \ \forall k \in \{1, ..., r\}$. Συνεπώς, $AV = B$ και θέτοντας $U = V_T$ έχουμε ότι

$$(\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \otimes U)u = (\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \otimes V^{\top})vec(A) = vec(AV) = vec(B) = v$$

όπως και θέλαμε να δείξουμε.

# Κεφάλαιο 4

# Κβαντικά κανάλια

## 4.1 Κβαντικά κανάλια

### 4.1.1 Ορισμός των κβαντικών καναλιών

Στη θεωρία της κβαντικής πληροφορίας, ένα κβαντικό κανάλι είναι ένα κανάλι επικοινωνίας το οποίο μεταφέρει κβαντική πληροφορία. Με μαθηματικούς όρους, ένα κβαντικό κανάλι είναι μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ δύο χώρων τετραγωνικών τελεστών, η οποία επιπλέον θα είναι πλήρως θετική και θα διατηρεί το ίχνος των τελεστών.

### 4.1.2 Κβαντικό κανάλι

Ένα κβαντικό κανάλι, ή απλώς κανάλι, είναι μια γραμμική απεικόνιση

$$\Phi : L(\mathcal{X}) \to L(\mathcal{Y})$$

για κάποια επιλογή μιγαδικών Ευκλείδειων χώρων $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ η οποία ικανοποιεί τις εξής δύο ιδιότητες:

1) Η $\Phi$ είναι πλήρως θετική απεικόνιση

2) Η $\Phi$ είναι μια απεικόνιση που διατηρεί το ίχνος

Το σύνολο των κβαντικών καναλιών μεταξύ των χώρων $L(\mathcal{X})$ και $L(\mathcal{Y})$ συμβολίζεται ως $C(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, ενώ το σύνολο των κβαντικών καναλιών από τον χώρο $L(\mathcal{X})$ στον χώρο $L(\mathcal{X})$ θα συμβολίζεται $C(\mathcal{X})$.

### 4.1.3 Μοναδιαία κανάλια

Έστω $\mathcal{X}$ να είναι ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος και $U \in U(\mathcal{X})$ ένας μοναδιαίος τελεστής. Η απεικόνιση $\Phi \in C(\mathcal{X})$ με τύπο

$$\Phi(X) = UXU^*$$

για κάθε $X \in L(\mathcal{X})$ είναι κβαντικό κανάλι.

### 4.1.4 Κανάλια αντικατάστασης

Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ να είναι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι και $\sigma \in D(\mathcal{Y})$ να είναι ένας τελεστής πυκνότητας. Η απεικόνιση $\Phi \in C(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ με

$$\Phi(X) = Tr(X)\sigma$$

για κάθε $X \in L(\mathcal{X})$ είναι ένα κβαντικό κανάλι.

### 4.1.5 Κανάλια γινόμενο

Έστω $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n$ και $\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_1, ..., \mathcal{Y}_n$ οι αντίστοιχοι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι που αντιστοιχούν σε αυτά τα registers. Ένα κανάλι

$$\Phi \in C(\mathcal{X}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{Y}_n)$$

που μετατρέπει το σύνθετο register $(X_1, ..., X_n)$ στο $(Y_1, ..., Y_n)$ λέγεται κανάλι γινόμενο αν

$$\Phi = \Psi_1 \otimes ... \otimes \Psi_n$$

για κάποια επιλογή καναλιών $\Psi_1 \in C(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1), ..., \Psi_n \in C(\mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_n)$. Τα κανάλια γινόμενο παριστάνουν ανεξάρτητες μεταξύ τους εφαρμογές μιας ακολουθίας από κανάλια σε μια ακολουθία registers.

### 4.1.6 Πρόταση

Έστω $\mathcal{Y}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος και $P \in Pos(\mathcal{Y})$ να είναι ένας θετικά ημιορισμένος τελεστής. Η απεικόνιση $\Phi \in T(\mathbb{C}, \mathcal{Y})$ που ορίζεται ως $\Phi(\alpha) = \alpha P$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ είναι πλήρως θετική.

#### Απόδειξη

Έστω ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος Z. Η απεικόνιση $\Phi \otimes \mathbb{1}_{L(\mathcal{Z})}$ δρα πάνω σε έναν τελεστή $Z \in L(\mathcal{Z}) = L(\mathbb{C} \otimes \mathcal{Z})$ ως εξής:

$$\Phi \otimes \mathbb{1}_{L(\mathcal{Z})}(Z) = P \otimes Z$$

Αν Z είναι θετικά ημιορισμένος τελεστής, τότε και ο $P \otimes Z$ θα είναι θετικά ημιορισμένος τελεστής. Άρα η απεικόνιση $\Phi \otimes \mathbb{1}_{L(\mathcal{Z})}$ είναι θετική και συνεπώς η Φ είναι πλήρως θετική.

### 4.1.7 Πρόταση

Έστω $\Phi \in \mathcal{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ μια θετική απεικόνιση όπου $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ είναι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι. Τότε και η $\Phi^*$ είναι θετική απεικόνιση.

#### Απόδειξη

Επειδή Φ είναι θετική απεικόνιση, τότε για κάθε τελεστή $P \in Pos(\mathcal{X})$ θα έχουμε ότι $\Phi(P) \in Pos(\mathcal{Y})$. Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι

$$\langle Q, \Phi(P) \rangle \geq 0, \quad \forall P \in Pos(\mathcal{X}), \forall Q \in Pos(\mathcal{Y})$$

Συνεπώς

$$\langle \Phi^*(Q), P \rangle = \langle Q, \Phi(P) \rangle \geq 0$$

### 4.1.8 Πόρισμα

Η απεικόνιση του ίχνους $Tr \in T(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ για κάθε επιλογή μιγαδικού Ευκλείδειου χώρου $\mathcal{X}$ είναι πλήρως θετική απεικόνιση.

### Απόδειξη

Από την Πρόταση 4.1.6 θα έχουμε ότι η απεικόνιση

$$Tr^*(\alpha) = \alpha \mathbb{1}_{\mathcal{X}}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

είναι πλήρως θετική. Και συνεπώς, από την Πρόταση 4.1.7, η απεικόνιση $Tr$ θα είναι πλήρως θετική.

## 4.2 Αναπαραστάσεις των κβαντικών καναλιών

### 4.2.1 Η φυσική αναπαράσταση

Για κάθε επιλογή μιγαδικών Ευκλείδειων χώρων $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ και για κάθε γραμμική απεικόνιση $\Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ είναι προφανές ότι η απεικόνιση

$$vec(X) \mapsto vec(\Phi(X))$$

είναι επίσης γραμμική ως σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων.
Συνεπώς θα υπάρχει ένας γραμμικός τελεστής $K(\Phi) \in L(\mathcal{X}\otimes\mathcal{X}, \mathcal{Y}\otimes\mathcal{Y})$ τέτοιος ώστε

$$K(\Phi)vec(X) = vec(\Phi(X)), \ \forall X \in L(\mathcal{X})$$

Ο τελεστής $K : T(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \to L(\mathcal{X} \otimes \mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y})$ λέγεται φυσική αναπαράσταση, είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί. Επίσης η φυσική αναπαράσταση σέβεται την έννοια του αναστροφοσυζυγή, δηλαδή $K(\Phi^*) = (K(\Phi))^*$

### 4.2.2 Η αναπαράσταση Choi

Για τους μιγαδικούς Ευκλείδειους χώρους $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ ορίζουμε μια απεικόνιση $J : T(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \to L(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$ ως εξής

$$J(\Phi) = (\Phi \otimes \mathbb{1}_{L(\mathcal{X})})(vec(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})vec(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})^*)$$

για κάθε $\Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Αν θέσουμε $\mathcal{X} = \mathbb{C}^\Sigma$ τότε θα έχουμε

$$J(\Phi) = \sum_{a,b\in\Sigma} \Phi(E_{a,b}) \otimes E_{a,b}$$

Ο τελεστής $J(\Phi)$ καλείται αναπαράσταση Choi της απεικόνισης $\Phi$. Επειδή η απεικόνιση $J$ είναι ένα προς ένα και επί γραμμική απεικόνιση, μπορούμε να έχουμε την $\Phi$ μέσω της σχέσης

$$\Phi(X) = Tr_{\mathcal{X}}(J(\Phi)(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}} \otimes X^\top))$$

### 4.2.3 Η αναπαράσταση Kraus

Για κάθε επιλογή μιγαδικών Ευκλείδειων χώρων $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, ενός αλφάβητου $\Sigma$ και συλλογών $\{A_a : a \in \Sigma\}, \{B_a : a \in \Sigma\}$ τελεστών από τον χώρο $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ μπορούμε να ορίσουμε μια γραμμική απεικόνιση $\Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ως εξής

$$\Phi(X) = \sum_{a\in\Sigma} A_a X B_a^*, \ \forall X \in L(\mathcal{X})$$

Η παραπάνω έκφραση καλείται αναπαράσταση Kraus της απεικόνισης $\Phi$. Σε αντίθεση με τη φυσική αναπαράσταση και την αναπαράσταση Choi, η αναπαράσταση Kraus γενικά, δεν ορίζεται μοναδικά.
Επίσης, από την κυκλική ιδιότητα του ίχνους έχουμε ότι

$$\langle Y, \Phi(X)\rangle = \langle Y, \sum_{a\in\Sigma} A_a X B_a^*\rangle = \sum_{a\in\Sigma} Tr(Y^* A_a X B_a^*)$$

$$= \sum_{a\in\Sigma} Tr(B_a^* Y^* A_a X) = \langle \sum_{a\in\Sigma} A_a^* Y B_a, X\rangle = \langle \Phi^*(Y), X\rangle$$

για κάθε $X \in L(\mathcal{X})$ και $Y \in L(\mathcal{Y})$.

### 4.2.4 Η αναπαράσταση Stinespring

Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ να είναι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι και τελεστές $A, B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση $\Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ όπου

$$\Phi(X) = Tr_{\mathcal{Z}}(AXB^*)$$

για κάθε $X \in L(\mathcal{X})$. Μια τέτοια έκφραση ονομάζεται Stinespring αναπαράσταση της απεικόνισης $\Phi$. Όπως και μια αναπαράσταση Kraus έτσι και μια αναπαράσταση Stinestring δεν ορίζεται μοναδικά.
Αν μια απεικόνιση $\Phi$ έχει αναπαράσταση Stinespring την παραπάνω τότε για κάθε $X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}$ θα έχουμε

$$\langle Y, \Phi(X) \rangle = \langle Y, Tr_{\mathcal{Z}}(AXB^*) \rangle = \langle Y \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{Z}}, AXB^* \rangle$$

$$= Tr((Y \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{Z}})^* AXB^*) = Tr(B^*(Y \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{Z}})^* AX) = \rangle A^*(Y \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{Z}})B, X \langle$$

δηλαδή $\Phi^*(Y) = A^*(Y \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{Z}})B$.

### 4.2.5 Πρόταση

Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ μιγαδικοί Ευκλείδειο χώροι, $\Sigma$ ένα αλφάβητο, $\{A_a : a \in \Sigma\}, \{B_a : a \in \Sigma\} \subset L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ συλλογές τελεστών και $\Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:

1) Για τη φυσική αναπαράσταση ισχύει ότι

$$K(\Phi) = \sum_{a \in \Sigma} A_a \otimes \overline{B_a}$$

2) Για τη Choi αναπαράσταση ισχύει ότι

$$J(\Phi) = \sum_{a \in \Sigma} vec(A_a) vec(B_a)^*$$

3) Για τις Kraus αναπαραστάσεις ισχύει ότι

$$\Phi(X) = \sum_{a \in \Sigma} A_a X B_a^*, \ \forall X \in L(\mathcal{X})$$

4) Για τις Stinespring αναπαραστάσεις ισχύει ότι για $\mathcal{Z} = \mathbb{C}^\Sigma$ και $A, B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$ που ορίζονται ως

$$A = \sum_{a \in \Sigma} A_a \otimes e_a \quad B = \sum_{a \in \Sigma} B_a \otimes e_a$$

έχουμε ότι

$$\Phi(X) = Tr_{\mathcal{Z}}(AXB^*), \ \forall X \in L(\mathcal{X}).$$

**Απόδειξη**

Η ισοδυναμία μεταξύ των 3 και 4 δείχνεται μέσω ενός απλού υπολογισμού.
Η ισοδυναμία μεταξύ των 1 και 3 δείχνεται εύκολα με χρήση της ταυτότητας

$$vec(A_a X B_a^*) = (A_a \otimes \overline{B_a}) vec(X)$$

Η ισοδυναμία μεταξύ των 2 και 3 δείχνεται με χρήση των ταυτοτήτων

$$(A_a \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}}) vec(\mathbb{1}_{\mathcal{X}}) = vec(A_a), \quad \forall a \in \Sigma$$

$$vec(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})^* (B_a^* \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}}) = vec(B_a)^*, \ \forall a \in \Sigma$$

### 4.2.6 Πόρισμα

Έστω οι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, έστω $\Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ να είναι μια μη μηδενική απεικόνιση και $rank(J(\Phi))$ να είναι η τάξη της Choi της $\Phi$. Τότε ισχύουν τα εξής

1) Για ένα αλβάβητο $\Sigma$, με $|\Sigma| = rank(J(\Phi))$, υπάρχει μια Kraus αναπαράσταση της $\Phi$ που έχει τη μορφή

$$\Phi(X) = \sum_{a \in \Sigma} A_a X B_a^*$$

για κάποια επιλογή $\{A_a : a \in \Sigma\} \subset L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \{B_a : a \in \Sigma\} \subset L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

2) Αν $\mathcal{Z}$ είναι ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος με $dim(\mathcal{Z}) = rank(J(\Phi))$, τότε υπάρχει μια Stinespring αναπαράσταση της $\Phi$ που έχει τη μορφή

$$\Phi(X) = Tr_{\mathcal{Z}}(AXB^*)$$

για κάποια επιλογή τελεστών $A, B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$.

## 4.3 Χαρακτηρισμός των πλήρως θετικών απεικονίσεων

### 4.3.1 Θεώρημα

Έστω $\Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ να είναι μια μη μηδενική απεικόνιση για τους μιγαδικούς Ευκλείδειους χώρους $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα

1) Η $\Phi$ είναι πλήρως θετική απεικόνιση

2) Η $\Phi \otimes \mathbb{1}_{L(\mathcal{X})}$ είναι θετική

3) $J(\Phi) \in Pos(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$

4) Υπάρχει κάποια συλλογή $\{A_a : a \in \Sigma\} \subset L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, για ένα αλφάβητο $\Sigma$, τέτοια ώστε
$$\Phi(X) = \sum_{a \in \Sigma} A_a X A_a^*,\ \forall X \in L(\mathcal{X})$$

5) Η πρόταση 4 ισχύει για ένα αλφάβητο $\Sigma$ με $|\Sigma| = rank(J(\Phi))$

6) Υπάρχει ένας τελεστής $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$, για κάποιον μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{Z}$ έτσι ώστε
$$\Phi(X) = Tr_{\mathcal{Z}}(AXA^*),\ \forall X \in L(\mathcal{X})$$

7) Η πρόταση 6 ισχύει για έναν χώρο $\mathcal{Z}$ με $dim(\mathcal{Z}) = rank(J(\Phi))$

**Απόδειξη**

Η πρόταση 1 συνεπάγεται την πρόταση 2 εξ' ορισμού.
Η πρόταση 5 συνεπάγεται την πρόταση 4 τετριμμένα.
Η πρόταση 7 συνεπάγεται την πρόταση 6 τετριμμένα.
Η πρόταση 5 συνεπάγεται την πρόταση 7 από την Πρόταση 4.2.5.
Η πρόταση 2 συνεπάγεται την πρόταση 3:
Έστω $\Phi \otimes \mathbb{1}_{L(\mathcal{X})}$ να είναι θετική απεικόνιση. Επειδή
$$vec(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})vec(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})^* \in Pos(\mathcal{X} \otimes \mathcal{X})$$
και
$$J(\Phi) = (\Phi \otimes \mathbb{1}_{L(\mathcal{X})})(vec(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})vec(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})^*)$$
θα έχουμε ότι $J(\Phi) \in Pos(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$.
Η πρόταση 3 συνεπάγεται την πρόταση 5:
Έστω $J(\Phi) \in Pos(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$. Τότε, επειδή κάθε ιδιοτιμή ενός θετικά ημιορισμένου τελεστή είναι μη αρνητικός αριθμός, από το φασματικό θεώρημα, θα έχουμε
$$J(\Phi) = \sum_{a \in \Sigma} u_a u_a^*$$
για κάποιο αλφάβητο $\Sigma$ με $|\Sigma| = rank(J(\Phi))$ και μια συλλογή διανυσμάτων $\{u_a : a \in \Sigma\} \subset \mathcal{Y} \otimes \mathcal{X}$. Θεωρούμε $A_a \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ να είναι ο τελεστής που θα ορίζεται ως $vec(A_a) = u_a$, $\forall a \in \Sigma$. Έτσι θα έχουμε ότι
$$J(\Phi) = \sum_{a \in \Sigma} vec(A_a)vec(A_a)^*$$

Συνεπώς η εξίσωση $\Phi(X) = \sum_{a\in\Sigma} A_a X A_a^*$ θα ισχύει για κάθε $X \in L(\mathcal{X})$.
Η πρόταση 4 συνεπάγεται την πρόταση 1:
Έστω ότι

$$\Phi(X) = \sum_{a\in\Sigma} A_a X A_a^*, \quad \forall X \in L(\mathcal{X})$$

για κάποιο αλφάβητο $\Sigma$ και συλλογή τελεστών $\{A_a : a \in \Sigma\} \subset L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Τότε, για κάποιο μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{W}$ και τελεστή $P \in Pos(\mathcal{X} \otimes \mathcal{W})$ θα έχουμε

$$(A_a \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{W}})P(A_a \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{W}})^* \in Pos(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{W})$$

για κάθε $a \in \Sigma$, και συνεπώς

$$(\Phi \otimes \mathbb{1}_{L(\mathcal{W})})(P) \in Pos(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{W})$$

Έτσι έχουμε ότι η $\Phi$ είναι πληρως θετική.
Η πρόταση 6 συνεπάγεται την πρόταση 1:
Έστω $\Phi(X) = Tr_{\mathcal{Z}}(AXA^*), \quad \forall X \in L(\mathcal{X})$ όπου $\mathcal{Z}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος και $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$ ένας τελεστής. Τότε για μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{W}$ και τελεστή $P \in Pos(\mathcal{X} \otimes \mathcal{W})$ θα έχουμε

$$(A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{W}})P(A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{W}})^* \in Pos(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z} \otimes \mathcal{W})$$

Άρα

$$(\Phi \otimes \mathbb{1}_{L(\mathcal{W})})(P) = Tr_{\mathcal{Z}}((A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{W}})P(A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{W}})^*) \in Pos(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{W})$$

επειδή το ίχνος είναι πλήρως θετική απεικόνιση. Συνεπώς η $\Phi$ είναι πλήρως θετική απεικόνιση.

### 4.3.2 Θεώρημα

Έστω $\Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ να είναι μια απεικόνιση για τους μιγαδικούς Ευκλείδειους χώρους $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα

1) Η $\Phi$ είναι απεικόνιση που διατηρεί τους ερμητιανούς τελεστές

2) $(\Phi(X))^* = \Phi(X^*), \forall X \in L(\mathcal{X})$

3) $J(\Phi) \in Herm(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$

4) Υπάρχουν πλήρως θετικές απεικονίσεις $\Phi_0, \Phi_1 \in CP(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ τέτοιες ώστε $\Phi = \Phi_0 - \Phi_1$

5) Υπάρχουν θετικές απεικονίσεις $\Phi_0, \Phi_1 \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ τέτοιες ώστε $\Phi = \Phi_0 - \Phi_1$

**Απόδειξη**

Η πρόταση 1 συνεπάγεται την πρόταση 2:
Έστω $\Phi$ μια απεικόνιση που διατηρεί τους ερμητιανούς τελεστές. Τότε για κάποια επιλογή τελεστή $X \in L(\mathcal{X})$ μπορούμε να γράψουμε $X = H + iK$ όπου $H, K \in Herm(\mathcal{X})$ και ορίζονται ως εξής:

$$H = \frac{X + X^*}{2} \quad \text{και} \quad K = \frac{X - X^*}{2i}$$

Επειδή οι $\Phi(H), \Phi(K)$ είναι ερμητιανοί και η $\Phi$ είναι γραμμική θα έχουμε

$$(\Phi(X))^* = (\Phi(H) + i\Phi(K))^* = \Phi(H) - i\Phi(K) = \Phi(H - iK) = \Phi(X^*)$$

Η πρόταση 2 συνεπάγεται την πρόταση 3:
Έστω $\Sigma$ ένα αλφάβητο για το οποίο $\mathcal{X} = \mathbb{C}^\Sigma$. Τότε θα έχουμε

$$J(\Phi)^* = \sum_{a,b\in\Sigma} \Phi(E_{a,b})^* \otimes E^*_{a,b} =$$

$$\sum_{a,b\in\Sigma} \Phi(E^*_{a,b}) \otimes E^*_{a,b} = \sum_{a,b\in\Sigma} \Phi(E_{b,a}) \otimes E_{b,a} = J(\Phi)$$

Άρα ο $J(\Phi)$ είναι ερμητιανός.
Η πρόταση 3 συνεπάγεται την πρόταση 4:
Έστω $J(\Phi) = P_0 - P_1$ η ανάλυση Jordan - Hahn του $J(\Phi)$. Έστω επίσης $\Phi_0, \Phi_1 \in CP(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ να είναι απεικονίσεις για τις οποίες ισχύουν $J(\Phi_0) = P_0, J(\Phi_1) = P_1$ αντίστοιχα. Επειδή οι τελεστές $P_0, P_1$ είναι θετικοί, από το Θεώρημα 4.3.1 θα έχουμε ότι οι απεικονίσεις $\Phi_0$ και $\Phi_1$ είναι πλήρως θετικές. Από τη γραμμικότητα της απεικόνισης $J$ θα έχουμε $J(\Phi) = J(\Phi_0 - \Phi_1)$ και συνεπώς $\Phi = \Phi_0 - \Phi_1$.
Η πρόταση 4 συνεπάγεται την πρόταση 5 τετριμμένα.
Η πρόταση 5 συνεπάγεται την πρόταση 1:
Έστω $H \in Herm(\mathcal{X})$ να είναι ένας ερμητιανός τελεστής. Και έστω $H = P_0 - P_1$, για $P_0, P_1 \in Pos(\mathcal{X})$, να είναι η ανάλυση Jordan - Hahn του $H$. Οπότε, από τη θετικότητα των $\Phi_0, \Phi_1$, θα έχουμε

$$\Phi_a(P_b), \quad \forall a, b \in \{0, 1\}$$

Συνεπώς θα έχουμε

$$\Phi(H) = (\Phi_0(P_0) + \Phi_1(P_1)) - (\Phi_0(P_1) + \Phi_1(P_0))$$

που είναι διαφορά μεταξύ δύο θετικών τελεστών και άρα θα είναι ερμητιανός τελεστής.

### 4.3.3 Θεώρημα

Έστω $\Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ μια απεικόνιση για τους μιγαδικούς Ευκλείδειους χώρους $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα

1) Η $\Phi$ είναι απεικόνιση που διατηρεί το ίχνος των τελεστών

2) $\Phi^*(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}}) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$
   Δηλαδή η $\Phi^*$ είναι απεικόνιση που διατηρεί τον ταυτοτικό τελεστή

3) $Tr_{\mathcal{Y}}(J(\Phi)) = \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}$

4) Υπάρχουν συλλογές τελεστών $\{A_a : a \in \Sigma\}, \{B_a : a \in \Sigma\} \subset L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ τέτοιοι ώστε
$$\Phi(X) = \sum_{a \in \Sigma} A_a X B_a^*$$
   και
$$\sum_{a \in \Sigma} A_a^* B_a = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$$

5) Για κάθε συλλογή τελεστών $\{A_a : a \in \Sigma\}, \{B_a : a \in \Sigma\} \subset L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ αν $\Phi(X) = \sum_{a \in \Sigma} A_a X B_a^*$ τότε $\sum_{a \in \Sigma} A_a^* B_a = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$

6) Υπάρχουν τελεστές $A, B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$ για κάποιον μιγαδικό Ευκλείδειο χώρο $\mathcal{Z}$ τέτοιοι ώστε
$$\Phi(X) = Tr_{\mathcal{Z}}(AXB^*)$$
   και
$$A^* B = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$$

7) Για κάθε επιλογή τελεστών $A, B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$ αν $\Phi(X) = Tr_{\mathcal{Z}}(AXB^*)$ τότε $A^* B = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$

#### Απόδειξη

Οι προτάσεις 1 και 2 είναι ισοδύναμες:
Έστω ότι η $\Phi$ διατηρεί το ίχνος, τότε θα έχουμε ότι
$$\langle \mathbb{1}_{\mathcal{X}}, X \rangle = Tr(X) = Tr(\Phi(X)) = \langle \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}, \Phi(X) \rangle = \Phi^*(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}}), X$$
και συνεπώς
$$\langle \mathbb{1}_{\mathcal{X}} - \Phi^*(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}}), X \rangle = 0, \quad \forall X \in L(\mathcal{X})$$

Άρα $\Phi^*(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}}) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$. Από την άλλη, έστω ότι η $\Phi$ διατηρεί τον ταυτοτικό τελεστή, τότε θα έχουμε

$$Tr(\Phi(X)) = \langle \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}, \Phi(X) \rangle = \langle \Phi^*(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}}), X \rangle = \langle \mathbb{1}_{\mathcal{X}}, X \rangle = Tr(X)$$

για κάθε $X \in L(\mathcal{X})$ και άρα η $\Phi$ διατηρεί το ίχνος.
Η πρόταση 2 συνεπάγεται την πρόταση 5:
Έστω τώρα δύο συλλογές τελεστών $\{A_a : a \in \Sigma\}, \{B_a : a \in \Sigma\} \subset L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ έτσι ώστε

$$\Phi(X) = \sum_{a \in \Sigma} A_a X B_a^*, \quad \forall X \in L(\mathcal{X})$$

Τότε, θα έχουμε ότι

$$\Phi^*(Y) = \sum_{a \in \Sigma} A_a^* Y B_a, \quad \forall Y \in L(\mathcal{Y})$$

και πιο συγκεκριμένα θα έχουμε

$$\Phi^*(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}}) = \sum_{a \in \Sigma} A_a^* B_a$$

Έτσι, αν η $\Phi$ διατηρεί τον ταυτοτικό τελεστή, τότε

$$\sum_{a \in \Sigma} A_a^* B_a = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$$

Η πρόταση 4 συνεπάγεται την πρόταση 2:
Αν ισχύει ότι $\sum_{a \in \Sigma} A_a^* B_a = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$ τότε, $\Phi^*(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}}) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$. Η πρόταση 5 συνεπάγεται την πρόταση 4 επειδή οι αναπαραστάσεις Kraus υπάρχουν για κάθε απεικόνιση. Η ισοδυναμία μεταξύ των προτάσεων 2, 6 και 7 αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο όπως η ισοδυναμία των πορτάσεων 2, 4 και 5:
Έστω $A, B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$ έτσι ώστε $\Phi(X) = Tr_{\mathcal{Z}}(AXB^*)$ για κάθε $X \in L(\mathcal{X})$. Τότε θα έχουμε ότι

$$\Phi^*(Y) = A^*(Y \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{Z}})B, \quad \forall Y \in L(\mathcal{Y})$$

και πιο συγκεκριμένα $\Phi^*(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}}) = A^*B$. Τέλος, έστω $\Gamma$ να είναι ένα αλφάβητο για το οποίο $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Gamma}$ και έστω ο τελεστής

$$Tr_{\mathcal{Y}}(J(\Phi)) = \sum_{a,b \in \Gamma} Tr(\Phi(E_{a,b}))E_{a,b}$$

Αν η $\Phi$ διατηρεί το ίχνος τότε

$$Tr(\Phi(E_{a,b})) = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$$

και συνεπώς

$$Tr_{\mathcal{Y}}(J(\Phi)) = \sum_{a \in \Gamma} E_{a,a} = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$$

Αντιστρόφως, θεωρούμε ότι $Tr_{\mathcal{Y}}(J(\Phi)) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$ τότε αν ισχύει ότι $Tr_{\mathcal{Y}}(J(\Phi)) = \sum_{a,b \in \Gamma} Tr(\Phi(E_{a,a}))E_{a,b}$ συνεπάγεται πως θα ισχύει

$$Tr(\Phi(E_{a,b})) = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$$

Τέλος, επειδή το σύνολο $\{E_{a,b} : a, b \in \Gamma\}$ είναι μια βάση του $L(\mathcal{X})$ και επειδή η $\Phi$ είναι γραμμική θα έχουμε ότι η $\Phi$ διατηρεί το ίχνος.

## 4.4 Χαρακτηρισμός των κβαντικών καναλιών

### 4.4.1 Πόρισμα

Έστω $\Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ να είναι μια απεικόνιση, όπου $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ να είναι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι. Τα εξής είναι ισοδύναμα

1) Η απεικόνιση $\Phi$ είναι κβαντικό κανάλι

2) $J(\Phi) \in Pos(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$ και $Tr_{\mathcal{Y}}(J(\Phi)) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$

3) Υπάρχει ένα αλφάβητο $\Sigma$ και μια συλλογή τελεστών $\{A_a : a \in \Sigma\} \subset L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ οι οποίοι ικανοποιούν

$$\sum_{a \in \Sigma} A_a^* A_a = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$$

και

$$\Phi(X) = \sum_{a \in \Sigma} A_a X A_a^*, \ \forall X \in L(\mathcal{X}).$$

4) Η πρόταση 3 ισχύει για $|\Sigma| = rank(J(\Phi))$

5) Υπάρχει μια ισομετρία $A \in U(\mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$ για κάποια επιλογή μιγαδικού Ευκλείδειου χώρου $\mathcal{Z}$ έτσι ώστε

$$\Phi(X) = Tr_{\mathcal{Z}}(AXA^*), \ \forall X \in L(\mathcal{X})$$

6) Η πρόταση 5 ισχύει για $dim(\mathcal{Z}) = rank(J(\Phi))$

### 4.4.2 Πρόταση

Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ να είναι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι. Τότε το σύνολο των κβαντικών καναλιών $C(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ είναι συμπαγές και κυρτό.

## 4.5 Παραδείγματα κβαντικών καναλιών

### 4.5.1 Ισομετρικά και unitary κανάλια

Έστω οι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$. Έστω επίσης οι τελεστές $A, B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ και $\Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ μια απεικόνιση που ορίζεται ως εξής

$$\Phi(X) = AXB^*, \ \forall X \in L(\mathcal{X})$$

Αν $A = B$ και είναι μια ισομετρία από τον $\mathcal{X}$ στον $\mathcal{Y}$, τότε η απεικόνιση $\Phi$ είναι κανάλι. Ένα τέτοιο κανάλι λέγεται ισομετρικό κανάλι.
Αν $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, και $A = B$ είναι μια ισομετρία, τότε η $\Phi$ θα λέγεται unitary κανάλι. Η φυσική αναπαραστάση θα είναι

$$K(\Phi) = A \otimes \overline{B}$$

Η Choi αναπαράσταση θα είναι

$$J(\Phi) = vec(A)vec(B)^*$$

Ένα απλό παράδειγμα unitary καναλιού είναι η ταυτοτική απεικόνιση $\mathbb{1}_{L(\mathcal{X})}$. Η φυσική αναπαράσταση θα είναι

$$K(\Phi) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$$

και η Choi αναπαράσταση θα είναι

$$J(\Phi) = vec(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})vec(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})^*$$

### 4.5.2 Κανάλια αντικατάστασης

Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ να είναι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι, $A \in L(\mathcal{X}), B \in L(\mathcal{X})$ τελεστές και $\Phi \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ μια απεικόνιση που ορίζεται ως εξής

$$\Phi(X) = \langle A, X \rangle B, \ \forall X \in L(\mathcal{X}).$$

Η φυσική αναπαράσταση της $\Phi$ θα είναι

$$K(\Phi) = vec(B)vec(A)^*$$

και η Choi αναπαράσταση της Φ θα είναι

$$J(\Phi) = B \otimes \overline{A}$$

Αν οι τελεστές $A, B$ είναι θετικοί, τότε η αναπαράσταση $J(\Phi)$ είναι θετική και συνεπώς $\Phi \in CP(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.
Στην περίπτωση όπου $A = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$ και $B = \sigma$, για κάποιον τελεστή πυκνότητας $\sigma \in D(\mathcal{Y})$, η απεικόνιση Φ θα διατηρεί και το ίχνος, δηλαδή η Φ θα είναι κανάλι. Ένα τέτοιο κανάλι θα λέγεται κανάλι αντικατάστασης. Δηλαδή θα απορρίπτει εντελώς την όποια είσοδο και θα την αντικαθιστά με την κατάσταση $\sigma$.

### 4.5.3 Completely depolarizing κανάλια

Ένα completely depolarizing κανάλι $\Omega \in C(\mathcal{X})$ είναι ένα βασικό παράδειγμα καναλιού αντικατάστασης. Ένα τέτοιο κανάλι θα ορίζεται ως εξής

$$\Omega(X) = Tr(X)\omega, \ \forall X \in L(\mathcal{X})$$

όπου $\omega = \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{X}}}{dim(\mathcal{X})}$ θα εννοείται μια mixed κατάσταση. Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να πούμε ότι το κανάλι Ω είναι το μοναδικό κανάλι που μετασχηματίζει κάθε τελεστή πυκνότητας στην mixed κατάστασή του, δηλαδή $\Omega(\rho) = \omega, \ \forall \rho \in D(\mathcal{X})$.
Η φυσική αναπαράσταση του Ω θα είναι

$$K(\Omega) = \frac{vec(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})vec(\mathbb{1}_{\mathcal{X}})^*}{dim(\mathcal{X})}$$

ενώ η Choi αναπαράστασή του θα είναι

$$J(\Omega) = \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}}}{dim(\mathcal{X})}$$

### 4.5.4 Η ανάστροφη απεικόνιση

Για ένα αλφάβητο Σ ορίζουμε $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$ και έστω $T \in T(\mathcal{X})$ να είναι η ανάστροφη απεικόνιση $T(X) = X^{\top}, \ \forall X \in L(\mathcal{X})$
Η φυσική αναπαράσταση της απεικόνισης T θα πρέπει, εξ' ορισμού, να ικανοποιεί την

$$K(T)vec(X) = vec(X^{\top}), \ \forall X \in L(\mathcal{X})$$

Αν θεωρήσουμε τους τελεστές της μορφής $X = uv^{\top}$ για $u, v \in \mathcal{X}$, τότε θα έχουμε

$$K(T)(u \otimes v) = v \otimes u$$

Δηλαδή $K(T) = W$, όπου $W \in L(\mathcal{X} \otimes \mathcal{X})$ είναι ο τελεστής ανταλλαγής που ορίζεται

$$W(u \otimes v) = v \otimes u,\ \forall u, v \in \mathcal{X}$$

Η Choi αναπαράσταση της T θα είναι επίσης ο τελεστής ανταλλαγής

$$J(T) = \sum_{a,b \in \Sigma} E_{b,a} \otimes E_{a,b} = W$$

Μια Kraus αναπαράσταση της T είναι

$$T(X) = \sum_{a,b \in \Sigma} E_{a,b} X E_{b,a}^*,\ \forall X \in L(\mathcal{X})$$

Ενώ μια Stinespring αναπαράσταση της T είναι

$$T(X) = Tr_{\mathcal{Z}}(AXB^*)$$

οπου $\mathcal{Z} = \mathbb{C}^{\Sigma \times \Sigma}$, $A = \sum_{a,b \in \Sigma} E_{a,b} \otimes e_{(a,b)}$ και $B = \sum_{a,b \in \Sigma} E_{b,a} \otimes e_{(a,b)}$

### 4.5.5 Completely dephasing κανάλια

Έστω $\Sigma$ ένα αλφάβητο και $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$. Η απεικόνιση $\Delta \in T(\mathcal{X})$ που ορίζεται ως

$$\Delta(X) = \sum_{a \in \Sigma} X(a,a) E_{a,a},\ \forall X \in L(\mathcal{X})$$

είναι ένα παράδειγμα καναλιού completely dephasing. Αυτού του είδους τα κανάλια έχουν την ιδιότητα ότι, για κάθε τελεστή $X \in L(\mathcal{X})$ να αφήνουν αναλλοίωτα τα στοιχεία της διαγωνίου του και να αντικαθιστούν κάθε άλλο στοιχείο με το 0.

Για τη φυσική αναπαράσταση ενός τέτοιου καναλιού θα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση

$$K(\Delta) vec(E_{a,b}) = \begin{cases} vec(E_{a,b}), & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$$

δηλαδή

$$K(\Delta)(e_a \otimes e_b) = \begin{cases} e_a \otimes e_b, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$$

για κάθε $a, b \in \Sigma$. Συνεπώς θα έχουμε

$$K(\Delta) = \sum_{a \in \Sigma} E_{a,a} \otimes E_{a,a}$$

Η αναπαράσταση Choi του καναλιού θα είναι

$$J(\Delta) = \sum_{a,b\in\Sigma} \Delta(E_{a,b}) \otimes E_{a,b} = \sum_{a\in\Sigma} E_{a,a} \otimes E_{a,a}$$

Μία αναπαράσταση Kraus του $\Delta$ είναι η

$$\Delta(X) = \sum_{a\in\Sigma} E_{a,a} X E_{a,a}^*$$

Και αν υποθέσουμε ότι $\mathcal{Z} = \mathbb{C}^\Sigma$ τότε μια αναπαράσταση Stinestring του καναλιού $\Delta$ θα είναι

$$\Delta(X) = Tr_{\mathcal{Z}}(AXA^*)$$

όπου $A = \sum_{a\in\Sigma}(e_a \otimes e_a)e_a^*$.

## 4.5.6 Λήμμα

Έστω $A \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ να είναι ένας τελεστής, για κάποια επιλογή μιγαδικών Ευκλείδειων χώρων $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$. Τότε ισχύει ότι

$$\{P \in Pos(\mathcal{X}) : im(P) \subseteq im(A)\} = \{AQA^* : Q \in Pos(\mathcal{Y})\}.$$

**Απόδειξη**

Για κάθε τελεστή $Q \in Pos(\mathcal{Y})$ ο τελεστής $AQA^*$ είναι θετικά ημιορισμένος και $im(AQA^*) \subseteq im(A)$. Άρα

$$\{AQA^* : Q \in Pos(\mathcal{Y})\} \subseteq \{P \in Pos(\mathcal{X}) : im(P) \subseteq im(A)\}.$$

Αν $P \in Pos(\mathcal{X})$ είναι ένας τελεστής για τον οποίο ισχύει ότι $im(P) \subseteq im(A)$, τότε αν θέσουμε $Q = A^+P(A^+)^*$ θα έχουμε

$$AQA^* = (AA^+)P(AA^+)^* = \Pi_{im(A)} P \Pi_{im(A)} = P$$

και συνεπώς

$$\{P \in Pos(\mathcal{X}) : im(P) \subseteq im(A)\} \subseteq \{AQA^* : Q \in Pos(\mathcal{Y})\}.$$

## 4.5.7 Θεώρημα (Choi)

Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι, $\Phi \in C(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ένα κανάλι και $\{A_a : a \in \Sigma\} \subset L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ να είναι μια συλλογή γραμμικά ανεξάρτητων τελεστών τέτοιοι ώστε

$$\Phi(X) = \sum_{a\in\Sigma} A_a X A_a^*, \ \forall X \in L(\mathcal{X})$$

Τότε το κανάλι $\Phi$ είναι ακραίο σημείο του συνόλου $C(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ αν και μόνο αν η συλλογή των τελεστών

$$\{A_b^* A_a : (a, b) \in \Sigma \times \Sigma\} \subset L(\mathcal{X})$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

**Απόδειξη**

Έστω $\mathcal{Z} = \mathbb{C}^\Sigma$. Ορίζουμε έναν τελεστή $M \in L(\mathcal{Z}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$ ως εξής:

$$M = \sum_{a \in \Sigma} vec(A_a) e_a$$

και παρατηρούμε ότι

$$MM^* = \sum_{a \in \Sigma} vec(A_a) vec(A_a)^* = J(\Phi)$$

Επειδή $\{A_a : a \in \Sigma\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη συλλογή τελεστών, θα πρέπει $ker(M) = \{0\}$. Υποθέτουμε ότι το κανάλι $\Phi$ δεν είναι ακραίο σημείο του συνόλου $C(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Άρα θα πρέπει να υπάρχουν κανάλια $\Psi_0, \Psi_1 \in C(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ με $\Psi_0 \neq \Psi_1$ και ένας αριθμός $\lambda \in (0, 1)$ έτσι ώστε

$$\Phi = \lambda \Psi_0 + (1 - \lambda) \Psi_1$$

Έστω $P = J(\Phi), Q_0 = J(\Psi_0), Q_1 = J(\Psi_1)$ έτσι ώστε

$$P = \lambda Q_0 + (1 - \lambda) Q_1$$

Επειδή $\Phi, \Psi_0, \Psi_1$ είναι κανάλια, οι τελεστές $P, Q_0, Q_1 \in Pos(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$ είναι θετικά ημιορισμένοι και από το Πόρισμα 4.4.1 θα έχουμε

$$Tr_{\mathcal{Y}}(P) = Tr_{\mathcal{Y}}(Q_0) = Tr_{\mathcal{Y}}(Q_1) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$$

Επειδή ο αριθμός $\lambda$ είναι θετικός αριθμός και οι τελεστές $Q_0, Q_1$ είναι θετικά ημιορισμένοι, από την σχέση $P = \lambda Q_0 + (1 - \lambda) Q_1$ προκύπτει ότι $im(Q_0) \subseteq im(P) = im(M)$. Από το Λήμμα 4.5.6 θα υπάρχει θετικά ημιορισμένος τελεστής $R_0 \in Pos(\mathcal{Z})$ τέτοιος ώστε $Q_0 = M R_0 M^*$. Ομοίως θα υπάρχει $R_1 \in Pos(\mathcal{Z})$ τέτοιος ώστε $Q_1 = M R_1 M^*$. Θέτοντας $H = R_0 - R_1$, βλέπουμε ότι

$$0 = Tr_{\mathcal{Y}}(Q_0) - Tr_{\mathcal{Y}}(Q_1) = Tr_{\mathcal{Y}}(MHM^*) = \sum_{a, b \in \Sigma} H(a, b) (A_b^* A_a)^\top$$

και συνεπώς

$$\sum_{a,b\in\Sigma} H(a,b)(A_b^* A_a) = 0$$

Επειδή $\Psi_0 \neq \Psi_1$, θα έχουμε ότι $Q_0 \neq Q_1$, άρα $R_0 \neq R_1$ και άρα $H \neq 0$. Έτσι, έχουμε δείξει ότι η συλλογή $\{A_b^* A_a : (a,b) : \Sigma \times \Sigma\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένη. Έστω τώρα, ότι το $\{A_b^* A_a : (a,b) : \Sigma \times \Sigma\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο σύνολο. Τότε, για κάποιο μη μηδενικό τελεστή $Z \in L(\mathcal{Z})$ θα έχουμε

$$\sum_{a,b\in\Sigma} Z(a,b) A_b^* A_a = 0$$

και συνεπάγεται ότι

$$\sum_{a,b\in\Sigma} H(a,b) A_b^* A_a = 0$$

και για τους δύο ερμητιανούς τελεστές

$$H = \frac{Z+Z^*}{2} \quad \text{και} \quad H = \frac{Z-Z^*}{2i}$$

Τουλάχιστον ένας από τους δύο τελεστές θα πρέπει να είναι μη μηδενικός. Που σημαίνει ότι η εξίσωση

$$\sum_{a,b\in\Sigma} H(a,b) A_b^* A_a = 0$$

θα πρέπει να ισχύει για κάποια επιλογή μη μηδενικού ερμητιανού τελεστή $H$. Ας θεωρήσουμε έναν τέτοιο τελεστή $H$ με $\|H\| = 1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, η εξίσωση ισχύει και αν αντικαταστήσουμε τον $H$ με $\frac{H}{\|H\|}$. Έστω $\Psi_0, \Psi_1 \in T(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ να είναι οι απεικονίσεις που ορίζονται από τις εξισώσεις

$$J(\Psi_0) = M(\mathbb{1} + H)M^*$$

και

$$J(\Psi_1) = M(\mathbb{1} - H)M^*.$$

Επειδή ο $H$ είναι ερμητιανός και $\|H\| = 1$, έχουμε ότι οι τελεστές $\mathbb{1} + H$ και $\mathbb{1} - H$ θα είναι και οι δύο θετικά ημιορισμένοι. Συνεπώς, οι τελεστές $M(\mathbb{1}+H)M^*$ και $M(\mathbb{1}-H)M^*$ θα είναι θετικά ημιορισμένοι. Από το Θεώρημα 4.3.1 οι απεικονίσεις $\Psi_0, \Psi_1$ είναι πλήρως θετικές. Έτσι θα έχουμε

$$Tr_{\mathcal{Y}}(MHM^*) = \sum_{a,b\in\Sigma} H(a,b)(A_b^* A_a)^{\top} = \left( \sum_{a,b\in\Sigma} H(a,b)(A_b^* A_a) \right)^{\top} = 0$$

και συνεπώς θα ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις

$$Tr_{\mathcal{Y}}(J(\Psi_0)) = Tr_{\mathcal{Y}}(MM^*) + Tr_{\mathcal{Y}}(MHM^*)Tr_{\mathcal{Y}}(J(\Phi)) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$$

$$Tr_{\mathcal{Y}}(J(\Psi_1)) = Tr_{\mathcal{Y}}(MM^*) - Tr_{\mathcal{Y}}(MHM^*)Tr_{\mathcal{Y}}(J(\Phi)) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}.$$

Έτσι, από το Θεώρημα 4.3.3 οι $\Psi_0, \Psi_1$ θα διατηρούν το ίχνος και συνεπώς θα είναι κανάλια. Τέλος, δεδομένου ότι $H \neq 0$ και $ker(M) \neq \{0\}$ θα ισχύει $J(\Psi_0) \neq J(\Psi_1)$ και άρα $\Psi_0 \neq \Psi_1$. Επειδή

$$\frac{1}{2}J(\Psi_0) + \frac{1}{2}J(\Psi_1) = MM^* = J(\Phi)$$

θα έχουμε

$$\Phi = \frac{1}{2}\Psi_0 + \frac{1}{2}\Psi_1$$

Που σημαίνει ότι το $\Phi$ δεν είναι ακραίο σημείο του συνόλου $C(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

## 4.5.8 Παράδειγμα

Έστω το αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1\}$ και έστω $\mathcal{X} = \mathbb{C}^\Sigma, \mathcal{Y} = \mathbb{C}^{\Sigma \times \Sigma}$. Επίσης ορίζουμε τους τελεστές $A_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2E_{00,0} + E_{01,1} + E_{10,1}), A_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2E_{11,1} + E_{01,0} + E_{10,0})$. Οι τελεστές σε μορφή πίνακα θα είναι ως εξής

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Επιπλέον ορίζουμε το κανάλι $\Phi(X) = A_0 X A_0^* + A_1 X A_1^*,\ \forall X \in L(\mathcal{X})$. Τότε θα έχουμε

$$A_0^* A_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_0^* A_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1^* A_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1^* A_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Βλέπουμε ότι η συλλογή $\{A_0^* A_0, A_0^* A_1, A_1^* A_0, A_1^* A_1\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη. Συνεπώς το κανάλι $\Phi$ του παραδείγματος είναι ακραίο σημείο του συνόλου $C(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

### 4.5.9 Παράδειγμα

Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ να είναι μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι τέτοιοι ώστε $dim(\mathcal{X}) \leq dim(\mathcal{Y})$. Έστω $A \in U(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ να είναι μια ισομετρία και έστω $\Phi \in C(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ να είναι ένα ισομετρικό κανάλι που ορίζεται

$$\Phi(X) = AXA^*, \quad \forall X \in L(\mathcal{X})$$

Το σύνολο $\{A^*A\}$ περιέχει ένα μη μηδενικό τελεστή και συνεπώς είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Τότε, από το Θεώρημα 4.5.7, το κανάλι $\Phi$ είναι ένα ακραίο σημείο του συνόλου $C(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

# Κεφάλαιο 5

# Μετρήσεις

## 5.1 Μετρήσεις

### 5.1.1 Μετρήσεις με χρήση τελεστών

Μια μέτρηση είναι μια συνάρτηση

$$\mu : \Sigma \to Pos(\mathcal{X})$$

όπου $\Sigma$ είναι ένα αλφάβητο, $\mathcal{X}$ ένας μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος, και επιπλέον έχουμε τη συνθήκη $\sum_{a\in\Sigma} \mu(a) = \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$.
Το $\Sigma$ είναι το σύνολο των αποτελεσμάτων της μέτρησης. Κάθε τελεστής $\mu(a)$ είναι ο τελεστής μέτρησης που σχετίζεται με το αποτέλεσμα $a$. Όταν κάνουμε μια μέτρηση σε ένα register X, τότε θα υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\mu$ θα έχει την παραπάνω μορφή για κάποια επιλογή $\Sigma$ και $\mathcal{X}$ θα είναι ο μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος που σχετίζεται με το register X.
Πραγματοποιώντας μια μέτρηση συμβαίνουν δύο πράγματα, αν υποθέσουμε ότι το X είναι στην κατάσταση $\rho \in D(\mathcal{X})$ τη στιγμή ακριβώς πριν τη μέτρηση.

1) Ένα στοιχείο του $\Sigma$ επιλέγεται τυχαία. Η κατανομή πιθανότητας που προσδιορίζει την τυχαία επιλογή παριστάνεται με ένα διάνυσμα πιθανότητας $p \in P(\Sigma)$ που οριζεται

$$p(a) = \langle \mu(a), \rho \rangle, \ \forall a \in \Sigma$$

2) Το register X παύει πλέον να υφίσταται.

Βλέπουμε επίσης ότι

$$\sum_{a\in\Sigma} p(a) = \sum_{a\in\Sigma} \langle \mu(a), \rho \rangle = \langle \mathbb{1}_{\mathcal{X}}, \rho \rangle = Tr(\rho) = 1$$

Επίσης, όταν θα αναφερόμαστε σε μια μέτρηση ως μια συλλογή $\{P_a : a \in \Sigma\} \subset Pos(\mathcal{X})$ θα ενοούμε ότι η μέτρηση δίνεται ως εξής

$$\mu : \Sigma \to Pos(\mathcal{X}) \quad \text{όπου} \quad \mu(a) = P_a,\ \forall a \in \Sigma$$

### 5.1.2 Οι μετρήσεις ως κανάλια

Ο δεύτερος, ισοδύναμος ορισμός μιας μέτρησης περιγράφει τη μέτρηση ως ένα κβαντικό κανάλι. Αυτά τα κανάλια λέγονται quantum-to-classical κανάλια.

Έστω $\Phi \in C(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ να είναι ένα κανάλι, για τους μιγαδικούς Ευκλείδειους χώρους $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$. Το κανάλι $\Phi$ είναι quantum-to-classical κανάλι αν

$$\Phi = \Delta\Phi$$

όπου $\Delta \in C(\mathcal{Y})$ να είναι το completely dephasing κανάλι.

### 5.1.3 Μετρήσεις γινόμενο

Έστω $X = (Y_1, ..., Y_n)$ ένα σύνθετο register. Μπορούμε να θεωρήσουμε μια συλλογή μετρήσεων

$$\mu_1 : \Sigma_1 \to Pos(\mathcal{Y}_1)$$
$$\vdots$$
$$\mu_n : \Sigma_n \to Pos(\mathcal{Y}_n)$$

που πραγματοποιούνται ανεξάρτητα στα registers $Y_1, ..., Y_n$. Μια τέτοια διαδικασία μπορούμε να τη δούμε σαν μια μέτρηση στο X

$$\mu : \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n \to Pos(\mathcal{X})$$

που ορίζεται ως εξής

$$\mu(a_1, ..., a_n) = \mu_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \mu_n(a_n),\ \ \forall (a_1, ..., a_n) \in \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n$$

### 5.1.4 Projective μετρήσεις

Μια μέτρηση $\mu : \Sigma \to Pos(\mathcal{X})$ θα λέγεται projective μέτρηση αν κάθε ένας από τους τελεστές $\mu(a)$ είναι προβολή. Δηλαδή

$$\mu(a) \in Proj(\mathcal{X}),\ \forall a \in \Sigma.$$

Οι τελεστές $\mu(a)$ μιας projective μέτρησης είναι ανά δύο κάθετοι. Επιπλέον για μια projective μέτρηση $\mu : \Sigma \to Pos(\mathcal{X})$ υπάρχουν το πολύ $dim(\mathcal{X})$ διακριτές τιμές $a \in \Sigma$ για τις οποίες $\mu(a) \neq 0$.

### 5.1.5 Παράδειγμα

Έστω $\Sigma$ ένα αλφάβητο και $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{\Sigma}$. Η μέτρηση ως προς την κανονική βάση του χώρου $\mathcal{X}$ είναι η μέτρηση $\mu : \Sigma \to Pos(\mathcal{X})$. Αυτή ορίζεται

$$\mu(a) = E_{a,a},\ \forall a \in \Sigma.$$

Για κάθε κατάσταση $\rho \in D(\mathcal{X})$, η πιθανότητα που σχετίζεται με κάθε αποτέλεσμα μέτρησης $a \in \Sigma$ είναι ίση με την αντίστοιχη διαγώνια καταχώρηση $\rho(a, a)$. Παρατηρούμε ότι το quantum-to-classical κανάλι που σχετίζεται με αυτήν τη μέτρηση είναι το completely dephasing κανάλι $\Delta \in C(\mathcal{X})$.

## 5.2 Κβαντική διεμπλοκή και τηλεμεταφορά

Η κβαντική διεμπλοκή, ή κβαντικός εναγκαλισμός, είναι ένα υπαρκτό φαινόμενο το οποίο παρατηρείται όχι μόνο στον μικρόκοσμο αλλά και σε μεγαλύτερες κλίμακες. Κατά το φαινόμενο αυτό δύο, ή περισσότερα σωματίδια, που δημιουργούνται μαζί ή αλληλεπιδρούν με τη συνένωση των κυματοσυναρτήσεών τους, παραμένουν σε κατάσταση διεμπλοκής. Η κβαντική διεμπλοκή δεν επηρεάζεται από την απόσταση των σωματιδίων. Αν συμβεί κάτι σε ένα από τα δύο σωματίδια τότε, το άλλο θα αντιδράσει ακαριαία. Έτσι, παρουσιάζεται η εικόνα πως είτε η πληροφορία ταξιδεύει με άπειρη ταχύτητα, είτε πως τα σωματίδια βρίσκονται ακόμα σε κάποιου είδους «επαφή», δηλαδή συνδέονται μεταξύ τους. Επιχειρώντας να πραγματοποιήσουμε μια μέτρηση στο ένα σωματίδιο, τότε αυτομάτως θα έχουμε μια αλλαγή στις ιδιότητες του άλλου σωματιδίου. Σωματίδια, ή και καταστάσεις, που δεν βρίσκονται σε διεμπλοκή θα λέγονται διαχωρισμένα σωματίδια και διαχωρισμένες καταστάσεις, αντίστοιχα.

### 5.2.1 Διαχωρίσιμοι τελεστές

Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ να είναι δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι. Τότε ορίζουμε το σύνολο $Sep(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$ να είναι το σύνολο που θα περιέχει όλους τους θετικά ημιορισμένους τελεστές $R \in Pos(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$ για τους οποίους υπάρχει ένα αλφάβητο $\Sigma$ και δύο συλλογές θετικά ημιορισμένων τελεστών

$$\{P_a : a \in \Sigma\} \subset Pos(\mathcal{X}) \quad \text{και} \quad \{Q_a : a \in \Sigma\} \subset Pos(\mathcal{Y})$$

έτσι ώστε

$$R = \sum_{a \in \Sigma} P_a \otimes Q_a$$

Τα στοιχεία του συνόλου $Sep(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$ λέγονται διαχωρίσιμοι τελεστές.

### 5.2.2 Διαχωρίσιμες καταστάσεις

Για τους μιγαδικούς Ευκλείδειους χώρους $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ ορίζουμε το σύνολο

$$SepD(\mathcal{X} : \mathcal{Y}) = Sep(\mathcal{X} : \mathcal{Y}) \cap D(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$$

να είναι το σύνολο των διαχωρίσιμων καταστάσεων.

### 5.2.3 Πρόταση

Για κάθε επιλογή μιγαδικών Ευκλείδειων χώρων $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ το σύνολο $SepD(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$ είναι κυρτό και το σύνολο $Sep(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$ είναι κυρτός κώνος.

#### Απόδειξη

Για να δείξουμε ότι το $Sep(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$ είναι κυρτός κώνος αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστό υπό την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με ένα μη αρνητικό αριθμό. Υποθέτουμε λοιπόν ότι, $R_0, R_1 \in Sep(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$ είναι δύο διαχωρίσιμοι τελεστές και $\lambda \geq 0$ είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Τότε για δύο ξένα μεταξύ τους αλφάβητα $\Sigma_0, \Sigma_1$ και δύο συλλογές θετικά ημιορισμένων τελεστών $\{P_a : a \in \Sigma_0 \cup \Sigma_1\} \subset Pos(\mathcal{X})$, $\{Q_a : a \in \Sigma_0 \cup \Sigma_1\} \subset Pos(\mathcal{Y})$ μπορούμε να γράψουμε

$$R_0 = \sum_{a \in \Sigma_0} P_a \otimes Q_a \quad \text{και} \quad R_1 = \sum_{a \in \Sigma_1} P_a \otimes Q_a$$

Έχουμε ότι

$$R_0 + R_1 = \sum_{a \in \Sigma_0 \cup \Sigma_1} P_a \otimes Q_a$$

και συνεπώς $R_0 + R_1 \in Sep(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$. Επιπλέον θα έχουμε ότι

$$\lambda R_0 = \sum_{a \in \Sigma_0} (\lambda P_a) \otimes Q_a$$

Επειδή $\lambda P \in Pos(\mathcal{X})$ για κάθε θετικά ημιορισμένο τελεστή $P \in Pos(\mathcal{X})$, θα ισχύει ότι $\lambda R_0 \in Sep(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$.
Τέλος, το σύνολο $SepD(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$ είναι κυρτό. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι είναι τομή των δύο κυρτών συνόλων $Sep(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$ και $D(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$.

### 5.2.4 Πρόταση

Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ δύο μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι και $\xi \in D(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$ να είναι ένας τελεστής πυκνότητας. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα

1) $\xi \in SepD(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$

2) Υπάρχει ένα αλφάβητο $\Sigma$, συλλογές καταστάσεων $\{\rho_a : a \in \Sigma\} \subseteq D(\mathcal{X})$ και $\{\sigma_a : a \in \Sigma\} \subseteq D(\mathcal{Y})$ και ένα διάνυσμα πιθανότητας $p \in \mathcal{P}(\Sigma)$ έτσι ώστε
$$\xi = \sum_{a \in \Sigma} p(a) \rho_a \otimes \sigma_a$$

3) Υπάρχει ένα αλφάβητο $\Sigma$, συλλογές μοναδιαίων διανυσμάτων $\{x_a : a \in \Sigma\} \subset \mathcal{X}$ και $\{y_a : a \in \sigma\} \subset \mathcal{Y}$ και ένα διάνυσμα πιθανότητας $p \in \mathcal{P}(\Sigma)$ έτσι ώστε
$$\xi = \sum_{a \in \Sigma} p(a) x_a x_a^* \otimes y_a y_a^*$$

### Απόδειξη

Η πρόταση 3 συνεπάγεται την πρόταση 2 τετριμμένα.
Είναι άμεσο ότι η πρόταση 2 συνεπάγεται την πρόταση 1 καθώς το σύνολο $SepD(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$ είναι κυρτό και $\rho_a \otimes \sigma_a \in D(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$, $\forall a \in \Sigma$.
Η πρόταση 1 συνεπάγεται την πρόταση 3:
Έστω $\xi \in SepD(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$. Επειδή $\xi \in Sep(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$, τότε για κάποια επιλογή αλφαβήτου $\Gamma$ και συλλογών $\{P_b : b \in \Gamma\} \subset Pos(\mathcal{X})$, $\{Q_b : b \in \Gamma\} \subset Pos(\mathcal{Y})$ θετικά ημιορισμένων τελεστών μπορούμε να γράψουμε το $\xi$ ως
$$\xi = \sum_{b \in \Gamma} P_b \otimes Q_b$$

Υποθέτουμε ότι $n = dim(\mathcal{X})$, $m = dim(\mathcal{Y})$ και επίσης υποθέτουμε ότι η φασματική ανάλυση των παραπάνω τελεστών είναι
$$P_b = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(P_b) u_{b,j} u_{b,j}^*$$
και
$$Q_b = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(Q_b) v_{b,k} v_{b,k}^*$$
για κάθε $b \in \Gamma$. Ορίζουμε $\Sigma = \Gamma \times \{1, ..., n\} \times \{1, ..., m\}$ και
$$p((b, j, k)) = \lambda_j(P_b) \lambda_k(Q_b)$$
$$x_{(b,j,k)} = u_{b,j}$$
$$y_{(b,j,k)} = v_{b,k}$$

για καθε $(b,j,k) \in \Sigma$. Συνεπώς, μέσω υπολογισμού προκύπτει ότι

$$\sum_{a\in\Sigma} p(a) x_a x_a^* \otimes y_a y_a^* = \sum_{b\in\Gamma} P_b \otimes Q_b = \xi$$

Επιπλέον, κάθε τιμή $p(a)$ είναι μη αρνητική, και επειδή

$$\sum_{a\in\Sigma} p(a) = Tr(\xi) = 1$$

αυτό σημαίνει ότι το $p$ είναι ένα διάνυσμα πιθανότητας.

## 5.2.5 Πρόταση

Έστω $\xi \in SepD(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$ να είναι μια διαχωρίσιμη κατάσταση για τους μιγαδικούς Ευκλείδειους χώρους $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$. Υπάρχει ένα αλφάβητο $\Sigma$ με $|\Sigma| \leq rank(\xi)^2$, δύο συλλογές μοναδιαίων διανυσμάτων $\{x_a : a \in \Sigma\} \subset \mathcal{X}$ και $\{y_a : a \in \Sigma\} \subset \mathcal{Y}$, και ένα διάνυσμα πιθανότητας $p \in \mathcal{P}(\Sigma)$ έτσι ώστε

$$\xi = \sum_{a\in\Sigma} p(a) x_a x_a^* \otimes y_a y_a^*$$

### Απόδειξη

Από την προηγούμενη πρόταση θα έχουμε

$$SepD(\mathcal{X} : \mathcal{Y}) = conv\{xx^* \otimes yy^* : x \in \mathcal{S}(\mathcal{X}),\ y \in \mathcal{S}(\mathcal{Y})\}$$

και από αυτό συμπεραίνουμε ότι το $\xi$ θα ανήκει στο σύνολο

$$conv\{xx^* \otimes yy^* : x \in \mathcal{S}(\mathcal{X}),\ y \in \mathcal{S}(\mathcal{Y}),\ im(xx^* \otimes yy^*) \subseteq im(\xi)\}$$

Κάθε τελεστής πυκνότητας $\rho \in D(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$ με $im(\rho) \subseteq im(\xi)$ θα περιέχεται στον υπόχωρο

$$\{H \in Herm(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}) : im(H) \subseteq im(\xi),\ Tr(H) = 1\}$$

με διάσταση $rank(\xi)^2 - 1$. Και το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το θεώρημα Καραθεοδωρή.

## 5.2.6 Πόρισμα

Έστω $R \in Sep(\mathcal{X} : \mathcal{Y})$ να είναι ένας μη μηδενικός διαχωρίσιμος τελεστής για τους μιγαδικούς Ευκλείδειους χώρους $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$. Τότε υπάρχει ένα αλφάβητο $\Sigma$ με $|\Sigma| \leq rank(R)^2$ και δύο συλλογές διανυσμάτων $\{x_a : a \in \Sigma\} \subset \mathcal{X}$ και $\{y_a : a\Sigma\} \subset \mathcal{Y}$ έτσι ώστε

$$R = \sum_{a\in\Sigma} x_a x_a^* \otimes y_a y_a^*$$

### 5.2.7 Alice και Bob

Είναι σύνηθες στην κβαντική θεωρία πληροφορίας να μελετάμε παραδείγματα που αφορούν δύο φανταστικά πρόσωπα, την Alice και τον Bob. Φυσικά, αυτοί οι δύο, δεν είναι πραγματικά πρόσωπα αλλά παριστάνουν δύο ξεχωριστούς παρατηρητές ενός κβαντικού φαινομένου. Συνήθως, και ανάλογα το παράδειγμα, οι Alice και Bob επικοινωνούν μεταξύ τους ένα κβαντικό μήνυμα και σε άλλες περιπτώσεις πραγματοποιούν μετρήσεις πάνω σε ένα κβαντικό κανάλι. Θα λέμε ότι ο μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος $\mathcal{X}_A$ αντιστοιχεί στην Alice και οι μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος $\mathcal{X}_B$ αντιστοιχεί στον Bob. Κάποιες φορές ο μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος που αντιστοιχεί στην Alice μπορεί να είναι ο ίδιος με αυτόν που αντιστοιχεί στον Bob, ενώ άλλες φορές είναι διαφορετικός. Υποθέτουμε ότι η συλλογή τελεστών $\{X_a : a \in \Sigma\}$ είναι μια μέτρηση για την Alice και ότι η συλλογή τελεστών $\{Y_a : a \in \Sigma\}$ είναι μια μέτρηση για τον Bob. Έστω επίσης $\psi \in \mathcal{X}_A \otimes \mathcal{X}_B$ με $\|\psi\| = 1$ να είναι η αρχική κβαντική κατάσταση που θέλουμε να μετρήσουμε.

Αυτό που θα μας απασχολήσει είναι η πιθανότητα του κάθε παρατηρητή να μετρήσει κάποιο πιθανό αποτέλεσμα. Η πιθανότητα η Alice να μετρήσει το αποτέλεσμα $k$ ανεξάρτητα από τον Bob είναι

$$p_A(k) = p(A = k) = \|(X_k \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}_B})\psi\|^2.$$

Η αντίστοιχη πιθανότητα ο Bob να μετρήσει $l$ είναι

$$p_B(l) = p(B = l) = \|(\mathbb{1}_{\mathcal{X}_A} \otimes Y_l)\psi\|^2.$$

Όμως, η διαδικασία της μέτρησης θα επιφέρει κάποια αλλαγή στην κατάσταση που μετράμε. Συνεπώς, αυτή η κατάσταση θα αλλάξει. Αν υποθέσουμε ότι η Alice πρώτη μετρήσει $k$, τότε η αρχική κατάσταση θα αλλάξει και θα γίνει

$$\frac{(X_k \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}_B})\psi}{\|(X_k \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}_B})\psi\|}$$

ενώ αν ο Bob πρώτος μετρήσει $l$, τότε η κατάσταση θα γίνει

$$\frac{(\mathbb{1}_{\mathcal{X}_A} \otimes Y_l)\psi}{\|(\mathbb{1}_{\mathcal{X}_A} \otimes Y_l)\psi\|}.$$

Επιπλέον, η πιθανότητα η Alice να μετρήσει $k$ και ταυτόχρονα ο Bob να μετρήσει $l$ θα είναι

$$p_{A,B}(k, l) = p(A = k, B = l) = \|(X_k \otimes Y_l)\psi\|^2.$$

Χάριν του παραδείγματος, θεωρούμε ότι η Alice θα είναι εκείνη που πρώτη θα πραγματοποιήσει μια μέτρηση πάνω στην αρχική μας κατάσταση. Όπως επισημάνθηκε προηγουμένως, αυτό θα επιφέρει μια αλλαγή στην κατάσταση. Ας δούμε τώρα, αν αυτή η μέτρηση της Alice έχει αντίκτυπο πάνω σε κάποια επόμενη μέτρηση του Bob. Βλέπουμε δηλαδή, την περίπτωση όπου η Alice πραγματοποιεί μια μέτρηση και δεδομένου αυτού εξετάζουμε την πιθανότητα ο Bob να λάβει κάποιο αποτέλεσμα σε μια επόμενη μέτρηση. Θέλουμε δηλαδή τη δεσμευμένη πιθανότητα ο Bob να μετρήσει $l$ δεδομένου ότι η Alice έχει ήδη μετρήσει $k$. Αυτή η πιθανότητα δίνεται από τη σχέση

$$p(B = l|A = k) = \frac{\|(\mathbb{1}_{\mathcal{X}_A} \otimes Y_l)(X_k \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}_B})\psi\|^2}{\|(X_k \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{X}_B})\psi\|^2} = \frac{p(B = l, A = k)}{p(A = k)}$$

### 5.2.8 EPR κατάσταση

Η κατάσταση $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ ονομάζεται Einstein - Podolsky - Rosen (EPR) κατάσταση.

### 5.2.9 Κβαντική Τηλεμεταφορά

Έστω ο μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος για την Alice $\mathcal{X}_A = \mathbb{C}^2$ να είναι ο μιγαδικός Ευκλείδειος χώρος που αντιστοιχεί στο αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1\}$. Επίσης για τον Bob ο αντίστοιχος χώρος θα είναι επίσης $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B = \mathbb{C}^2$. Θεωρούμε επίσης τους διαγώνιους τελεστές $E_{00}, E_{11} \in L(\mathbb{C}^2)$. Τότε $E_{00}^* E_{00} + E_{11}^* E_{11} = E_{00}^2 + E_{11}^2 = \mathbb{1}_{\mathcal{X}_A}$ είναι μια μέτρηση.
Η πιθανότητα η Alice να παρατηρήσει 0 ανεξάρτητα από τον Bob είναι η εξής

$$p_A(0) = p_A(A = 0) = \|(E_{00} \otimes \mathbb{1})\psi\|^2$$

$$= \|(E_{00} \otimes \mathbb{1})(\frac{1}{\sqrt{2}})(e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1)\|^2$$

$$= \frac{1}{2}\|e_0 \otimes e_0\|^2 = \frac{1}{2}$$

Με παρόμοιο τρόπο, βλέπουμε ότι $p_A(1) = \frac{1}{2}$ και αντίστοιχα για τον Bob θα έχουμε $p_B(0) = \frac{1}{2}$, $p_B(1) = \frac{1}{2}$.
Αν η Alice παρατηρήσει το αποτέλεσμα 0, τότε η κατάσταση θα αλλάξει και θα γίνει

$$\frac{(E_{00} \otimes \mathbb{1})(\frac{1}{\sqrt{2}})(e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1)}{\|(E_{00} \otimes \mathbb{1})(\frac{1}{\sqrt{2}})(e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1)\|} = e_0 \otimes e_0$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι ο Bob πραγματοποιεί μια μέτρηση μετά τη μέτρηση της Alice. Οι τελεστές που αφορούν τη μέτρηση του Bob είναι $\mathbb{1} \otimes E_{00}$ και

$\mathbb{1} \otimes E_{11}$. Οι πιθανότητες που θα ισχύουν σε αυτήν τη μέτρηση θα είναι

$$p(B = 0|A = 0) = \|(\mathbb{1} \otimes E_{00})(e_0 \otimes e_0)\|^2 = \|e_0 \otimes e_0\|^2 = 1$$

ενώ προηγουμένως είχαμε δεί ότι $p_B(0) = \frac{1}{2}$. Επίσης, βλέπουμε πως

$$p(B = 1|A = 0) = \|(\mathbb{1} \otimes E_{11})(e_0 \otimes e_0)\|^2 = 0$$

ενώ πιο πριν είχαμε $p_B(1) = \frac{1}{2}$.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι, αν η Alice μετρήσει 0, τότε στη συνέχεια και ο Bob πρέπει να μετρήσει 0 σχεδόν βέβαια. Αυτό μας δείχνει ότι τα διεμπλεγμένα συστήματα συμπεριφέρονται, με κάποιον τρόπο, ως δεσμευμένα ενδεχόμενα.

# Βιβλιογραφία


[1] Watrous, J., *The theory of quantum information*, Cambridge University Press, 2018.

[2] Renes, J. M., *Quantum Information Theory*, De Gruyter, 2015.

[3] Harris, S. J., Pandey S. K., *Entanglement and non-locality*, Σημειώσεις Διαλέξεων: PMATH 990/QIC 890, University of Waterloo, 2016. `https://www.math.uwaterloo.ca/~vpaulsen/EntanglementAndNonlocality_LectureNotes_7.pdf`

[4] Βάρσος, Δ. Α., Δεριζιώτης, Δ. Ι., Εμμανουήλ, Ι. Π., Μαλιάκας, Μ. Π., Μελάς, Α. Δ., Ταλέλλη, Ο. Π., *Μια εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*, Εκδόσεις «σοφία», 2012.

[5] Χελιώτης, Δ., *Ένα δεύτερο μάθημα στις πιθανότητες*, Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, 2015.

[6] Γιαννόπουλος, Α., *Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης*, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών, 2013. `http://users.uoa.gr/~apgiannop/fa.pdf`

[7] Κατάβολος, Α., *Θεωρία Τελεστών Σημειώσεις*, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, 2014. `http://users.uoa.gr/~akatavol/telmasu.pdf`