

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Διπλωματική Εργασία
Ειρήνη Ψωμά

Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων σε προβλήματα Ουρών Αναμονής



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ, ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΑΜΟΣ 5/10/2021

Εισηγητής: Θεοδόσιος Δημητράκος

Επιτροπή:

Θεοδόσιος Δημητράκος (επιβλέπων)

Ανδρέας Παπασαλούρος

Νικόλαος Χαλιδιάς

Ευχαριστίες

Για την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω πρωτίστως τους γονείς μου και τους πολύ καλούς μου φίλους για την στήριξη και την βοήθεια τους καθώς και τον κύριο Θεοδόσιο Δημητράκο για την άψογη συνεργασία μας.

Περίληψη

Η αναμονή σε μία ή περισσότερες ουρές είναι ένα καθημερινό και συχνό φαινόμενο του κοινωνικού συγκείμενου. Στην παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιείται μία εισαγωγή στις στοχαστικές διαδικασίες, καθώς παρουσιάζονται οι στοχαστικές και οι μαρκοβιανές διαδικασίες, η ανέλιξη Poisson και η ανέλιξη Γεννήσεως- Θανάτου. Στη συνέχεια εισάγονται οι μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων με μία σύντομη ιστορική ανασκόπηση και οι μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων σε διακριτό χρόνο. Επιπρόσθετα, δίνεται έμφαση στην θεωρία ουρών, στα χαρακτηριστικά μίας ουράς αναμονής και στους διάφορους τύπους των συστημάτων των ουρών αναμονής με αρκετά παραδείγματα και εφαρμογές. Τέλος, υλοποιείται μία εφαρμογή στη γλώσσα προγραμματισμού R.

Λέξεις κλειδιά:

Στοχαστικές Διαδικασίες, Μαρκοβιανές Διαδικασίες, Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων, Θεωρία Ουρών, Συστήματα αναμονής, Γλώσσα Προγραμματισμού R.

Abstract

Waiting in one or more queues is a daily and frequent phenomenon of social context. In the present diploma thesis an introduction to the stochastic processes is made, as the Stochastic and Markovian Processes, the Poisson process and the Birth – Death process are presented. Then, the Markovian Decision Processes are introduced with brief historical overview and the Markovian Decision processes at a discrete time (MDPs). Moreover, emphasis is placed on the queueing theory, the characteristics of a queue and the various types of queueing systems with several examples and applications. Finally, an application is implemented in the programming language R.

Key Words:

Stochastic Processes, Markovian Processes, Markovian Decision Processes, Queueing Theory, Queueing Systems, Programming language R.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στις στοχαστικές διαδικασίες

- 1.1 Στοχαστικές Διαδικασίες
- 1.2 Μαρκοβιανές Διαδικασίες
- 1.3 Ανέλιξη Poisson
- 1.4 Απλή ανέλιξη Γεννήσεως-Θανάτου

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή στις Μαρκοβιανές διαδικασίες Αποφάσεων

- 2.1 Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων
 - 2.1.1 Ιστορική Αναδρομή
 - 2.1.2 Μαρκοβιανές αλυσίδες με αμοιβές
- 2.2 Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων σε διακριτό χρόνο
 - 2.2.1 Η έννοια των σχετικών τιμών
 - 2.2.2 Η πολιτική βελτίωσης ενός βήματος
- 2.3 Τα όρια Odoni για την επαναληπτική τιμή
- 2.4 Προσομοίωση

Κεφάλαιο 3

Εισαγωγή στη θεωρία ουρών

- 3.1 Θεωρία ουρών
- 3.2 Βασικά Χαρακτηριστικά μίας ουράς αναμονής
- 3.3 Κατάταξη Ουρών Αναμονής
- 3.4 Μέτρα λειτουργικότητας και νόμοι του Little
- 3.5 Εισαγωγή στη βελτιστοποίηση ελέγχου των συστημάτων αναμονής
- 3.6 Διαφορικοί λογισμοί Μαρκοβιανών Συστημάτων Γεννήσεων – Θανάτων
- 3.7 Τύποι συστημάτων ουρών αναμονής
- 3.8 Τιμές Συναρτήσεων των συστημάτων ουρών
 - 3.8.1 Η $M / Cox(r) / 1$ ουρά
 - 3.8.2 Ειδικές περιπτώσεις της ουράς $M / Cox(r) / 1$
 - 3.8.3 Κόστη αποκλεισμού σε μία ουρά
 - 3.8.4 Ουρές προτεραιότητας
- 3.9 Δίκτυα Συστημάτων Αναμονής

Κεφάλαιο 4

Παραδείγματα

- 4.1 Ανάλυση Συστημάτων Ουρών με Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων
 - 4.1.1 Το πρόβλημα Devil's penny
 - 4.1.2 Το παιχνίδι Chow- Robbins
- 4.2 Εφαρμογή: Δρομολόγηση σε παράλληλες ουρές
- 4.3 Εφαρμογή: Δυναμική δρομολόγηση σε κέντρα κλήσεων πολλαπλών δεξιοτήτων
- 4.4 Εφαρμογή σε ένα ελεγχόμενο σύστημα δημοσκόπησης
- 4.5 Παράδειγμα
- 4.6 Εστιατόριο Φαστ φουντ
- 4.7 Παράδειγμα
- 4.8 Παράδειγμα
- 4.9 Παράδειγμα

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογή στην R

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στις στοχαστικές διαδικασίες

1.1 Στοχαστικές Διαδικασίες

Γενικά τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται εδώ και πολλές χιλιάδες χρόνια για τη μελέτη, την περιγραφή αλλά και την αξιοποίηση φαινομένων του φυσικού κόσμου που μας περιβάλλει, καθώς και δημιουργημάτων της φαντασίας. Η μεγάλη χρησιμότητα των Μαθηματικών προκύπτει από τη δυνατότητα, μέσω της χρήσης τους, να κάνουμε προβλέψεις για φαινόμενα, με άλλα λόγια να δημιουργούμε μοντέλα που αναπαριστούν τα υπό μελέτη φαινόμενα. Αυτός ακριβώς είναι ο στόχος της μαθηματικής μοντελοποίησης. Τι εννοούμε όμως με τον όρο «Μαθηματική Μοντελοποίηση»; (Κομηνέας & Χαρμανδάρης, 2015)

Ορισμός

Μαθηματική Μοντελοποίηση(Mathematical Modeling): είναι η ανάπτυξη μαθηματικής περιγραφής ενός φαινομένου, ενός συστήματος ή μιας διαδικασίας και η μελέτη τους με τη χρήση μαθηματικών εργαλείων. Τα εργαλεία αυτά μπορεί να είναι ένα σύστημα εξισώσεων, ένα σύνολο αριθμών, ένας αλγόριθμος, μια στοχαστική διαδικασία κλπ. (Κομηνέας & Χαρμανδάρης, 2015).

Με άλλα λόγια θα λέγαμε ότι Μαθηματική Μοντελοποίηση είναι η διαδικασία ανάπτυξης και η μελέτη ενός Μαθηματικού Μοντέλου.

Τα μαθηματικά αντικείμενα που μοντελοποιούν τέτοια φαινόμενα είναι οι **στοχαστικές διαδικασίες** (stochastic processes) με την περιγραφή και την κατασκευή των οποίων θα ασχοληθούμε στο πρώτο κεφάλαιο (Κομηνέας & Χαρμανδάρης, 2015).

Ιστορική Αναδρομή

Στην πρώτη δεκαετία του αιώνα μας δημοσιεύθηκαν αρκετές εργασίες που μπορούν να θεωρηθούν από τον αναγνώστη σαν η αρχή της θεωρίας της στοχαστικής ανάλυσης.

- Η στοχαστική ανάλυση τέθηκε πάνω σε αυστηρές μαθηματικές βάσεις στη διάρκεια της δεκαετίας 1930-1940 από τον Kolmogorov. Συγκεκριμένα η αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας Πιθανοτήτων, η οποία ενέταξε τις στοχαστικές διαδικασίες στο φάσμα των μεθόδων που χρησιμοποιούν πλέον μαθηματικοί, φυσικοί, οικονομολόγοι, μηχανικοί, επιτρέποντας ένα πολύ μεγάλο εύρος εφαρμογών και σε ξένα μεταξύ τους πεδία.
- Ο Bachelier (1900) ανέλυσε ένα στοχαστικό μοντέλο για τις χρηματαγορές και την αγορά παραγώγων και οδηγήθηκε σε μια σημαντική κατηγορία των στοχαστικών διαδικασιών. Η ενδεδειγμένη μαθηματική μελέτη της κίνησης Brown έγινε από τον Γάλλο μαθηματικό Λουί Μπασελιέ (Louis Bachelier). Μια

από τις πρώτες Στοχαστικές Διαδικασίες που μελετήθηκαν υπήρξε η Κίνηση Brown, που αφορά την τυχαία κίνηση σωματιδίων στην επιφάνεια ενός υγρού ή εντός ενός αερίου.

- Το 1905 η ίδια στοχαστική ανέλιξη επαληθεύθηκε από τον Einstein στην πολύ γνωστή του εργασία για την κίνηση Brown. Η συμβολή του Αϊνστάιν (Einstein) στην ανάδειξη της σημασίας των στοχαστικών διαδικασιών είναι επίσης σημαντική, αφού έφερε την Κίνηση Brown υπόψη της ευρύτερης κοινότητας των Φυσικών με μια μελέτη του.
- Επίσης το 1905 η διαδικασία Poisson προτάθηκε από τον Elfrang, σε ένα πρόβλημα συνωστισμού σε τηλεφωνικές γραμμές.
- Όλες αυτές οι πρωτοπόρες εργασίες και άλλες πολλές ανέπτυξαν μια θαυμάσια ικανότητα για το διαισθητικό χειρισμό προβλημάτων, που έπρεπε να περιμένουν ως το 1930 για να τεθούν πάνω σε αυστηρές μαθηματικές βάσεις.

Από τότε μέχρι σήμερα, οι Στοχαστικές Διαδικασίες έχουν τύχει συνεχούς έρευνας και τα αποτελέσματα από τα διάφορα πεδία εφαρμογής τους είναι συχνά αλληλοσυμπληρούμενα. Έχουν γνωρίσει μια τεράστια ανάπτυξη και εφαρμογές που εμφανίζονται σε όλους σχεδόν τους κλάδους της επιστήμης (Χρυσοφίνου, 2012).

Υπάρχουν διάφοροι ισοδύναμοι τρόποι να ορίσει κανείς μια στοχαστική διαδικασία. Σε κάθε περίπτωση χρειαζόμαστε ένα σύνολο X , που ονομάζεται **χώρος καταστάσεων** (state space) και στον οποίο ανήκουν οι τιμές που παίρνει η στοχαστική διαδικασία και ένα σύνολο T που είναι συνήθως -χωρίς αυτό να είναι κανόνας- ένα σύνολο χρόνων, π.χ.

$$T = [0, +\infty) \text{ ή } T = N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Ένα σύνολο (set) είναι μία καλώς ορισμένη συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων που μπορούν να εμφανιστούν σε μία εκτέλεση ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **δειγματικός χώρος** (*sample space*) και συνήθως συμβολίζεται με Ω . Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός νομίσματος ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{K, \Gamma\}$ όπου με K συμβολίζουμε την ένδειξη «κεφαλή» και με Γ συμβολίζουμε την ένδειξη «γράμματα». Τα σημεία ενός δειγματικού χώρου καλούνται **δειγματικά σημεία** (*sample points*) (Λουλάκης, 2016).

Ο απλούστερος τρόπος να ορίσει κανείς μια στοχαστική διαδικασία, ορισμένη στο T και με τιμές στο X είναι ως μια συλλογή από τυχαίες μεταβλητές $\{X_t\}_{t \in T}$, ορισμένες σε έναν χώρο πιθανότητας (Ω, F, P) , με τιμές στο X .

Σ' αυτήν την περίπτωση, για κάθε $t \in T$, η τυχαία μεταβλητή $X_t : \Omega \ni \omega \rightarrow X_t(\omega) \in X$ περιγράφει την κατάσταση του συστήματος που μας ενδιαφέρει την χρονική στιγμή t και η συλλογή τους περιγράφει την κατάσταση του συστήματος κάθε χρονική στιγμή στο σύνολο T .

Ένας άλλος τρόπος να δει κανείς μια στοχαστική διαδικασία είναι να θεωρήσει για κάθε $\omega \in \Omega$ την τροχιά της στοχαστικής διαδικασίας, καθώς ο δείκτης t μεταβάλλεται στο T , να δει δηλαδή την $t \rightarrow X_t(\omega)$ ως μια συνάρτηση από το T στο X . Σ' αυτή την περίπτωση η στοχαστική διαδικασία είναι μια τυχαία συνάρτηση, δηλαδή μια τυχαία μεταβλητή ορισμένη στο Ω με τιμές στο σύνολο X των συναρτήσεων από το T στο X .

Αν το αποτέλεσμα ενός τυχαίου πειράματος είναι

- ένας αριθμός (R), τότε μπορεί να εκφραστεί με μία τ.μ. $X \in R$
- k αριθμοί (R^k) τότε μπορεί να εκφραστεί με ένα τ.δ. $X = (X_1, X_2, \dots, X_k) \in R^k$

Υπάρχουν πειράματα με ακόμη «συνθετότερο» σύνολο αποτελεσμάτων, για παράδειγμα:

- η παρακολούθηση μιας διαδικασίας αφίξεων πελατών σε ένα κατάστημα,
- η παρακολούθηση της εξέλιξης της τιμής μιας μετοχής κατά τη διάρκεια του χρόνου

Εδώ επιθυμούμε να γνωρίζουμε την τιμή μιας ή περισσότερων ποσοτήτων (π.χ. πλήθος αφίξεων ή τιμή μετοχής) κάθε χρονική στιγμή t . Εκφράζουμε ένα τέτοιο «σύνθετο» αποτέλεσμα μέσω μιας στοχαστικής ανέλιξης $\{X(t), t \geq 0\}$, όπου $X(t)$ = τιμή της ποσότητας που μελετούμε την χρονική στιγμή t (Boutsikas, 2011).

Ορισμός

Έστω X μία τυχαία μεταβλητή(τ.μ) Εάν το σύνολο τιμών της X είναι το πολύ αριθμήσιμο (δηλαδή πεπερασμένο ή απείρως αριθμήσιμο) τότε η X λέγεται διακριτή τ.μ.

Ορισμός

Για κάθε $A \in F$ ορίζουμε τη δείκτρια τ.μ. που συμβολίζεται

$$1_A \text{ ή } I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

Ορισμός

Οι τ.μ. X και Y λέγονται ανεξάρτητες εάν για οποιαδήποτε $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$ ισχύει

$$\Pr(X = x, Y = y) = \Pr(X = x) \Pr(Y = y)$$

Ορισμός

Μία **στοχαστική διαδικασία** είναι μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t) : t \in T\}$, όπου t είναι μία παράμετρος που παίρνει τιμές σε ένα κατάλληλα ορισμένο σύνολο T .

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια της στοχαστικής διαδικασίας και τη χρησιμότητά της θα δούμε τα παρακάτω παραδείγματα.

Παραδείγματα:

1. Προβλήματα Ανάπτυξης Πληθυσμών

Η ανάπτυξη ενός πληθυσμού εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, όπως η αλλαγή των καιρικών συνθηκών, ασθένειες, διατροφή, κτλ.

$X(t)$: Ο αριθμός των ατόμων ενός πληθυσμού στον χρόνο t .

$\{X(t) : t \geq 0\}$ είναι μία στοχαστική διαδικασία. Η τιμή της $X(t)$ εξαρτάται, προφανώς από το αρχικό μέγεθος του πληθυσμού τη χρονική στιγμή $t = 0$, όπως και από τον αριθμό των γεννήσεων και θανάτων στο χρονικό διάστημα $(0, t)$.

2. Προβλήματα Οικολογικών Αντιπαράθεσεων

Έχουμε δύο πληθυσμούς A και B . Ένα μέλος του A εξοντώνει ένα μέλος του B με πιθανότητα p . Ένα μέλος του B εξοντώνει ένα μέλος του A με πιθανότητα q .

X_n : Το πλήθος των επιζώντων μελών του πληθυσμού A μετά την n -οστή αντιπαράθεση.

$\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ είναι μία στοχαστική διαδικασία.

Y_n : Το πλήθος των επιζώντων μελών του πληθυσμού B μετά την n -οστή αντιπαράθεση.

$\{Y_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ είναι μία στοχαστική διαδικασία.

Επιπλέον, αν :

C_n : Το πλήθος των γεννήσεων ανάμεσα στην $n-1$ και n αντιπαράθεση.

D_n : Το πλήθος των θανάτων ανάμεσα στην $n-1$ και n αντιπαράθεση.

$$X_n = X_{n-1} + C_n - D_n + Z_n$$

$$Z_n = \begin{cases} 0, & \text{με πιθανότητα } p \\ -1, & \text{με πιθανότητα } q \text{ (Πετρόπουλος, χ.χ.)} \end{cases}$$

3. Προβλήματα Ελέγχου Αποθεμάτων

Μία βιομηχανία παράγει ένα προϊόν Α. X_n : Η ποσότητα του προϊόντος που μένει αποθηκευμένο στο τέλος της n-οστής χρονικής περιόδου(ημέρα, μήνα κ.ο.κ.)

$\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ είναι μία στοχαστική διαδικασία. Επιπλέον, αν:

P_n : Η παραγωγή του προϊόντος κατά την n-οστή περίοδο.

Z_n : Η ζήτηση του προϊόντος κατά την n-οστή περίοδο.

$$X_n = \max\{0, X_{n-1} + P_n - Z_n\}.$$

4. Προβλήματα Ελέγχου και Αντικατάστασης Εξαρτημάτων

Θεωρούμε ότι το εξάρτημα μιας μηχανής επιθεωρείται ανά τακτά χρονικά διαστήματα και του οποίου η κατάσταση χαρακτηρίζεται ως,

}	ικανοποιητική	→	1
	μη ικανοποιητική	→	2
	έπαψε να λειτουργεί	→	3

X_n : Η κατάσταση του εξαρτήματος κατά την n-οστή επιθεώρηση (1 ή 2 ή 3).

$\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ είναι μία στοχαστική διαδικασία.

Παρατήρηση

Για να είναι η στοχαστική διαδικασία πλήρως γνωστή, θα πρέπει να γνωρίζουμε τις πιθανότητες μετάβασης.

$$p_{ij} = P(X_n = j | X_{n-1} = i), i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3.$$

$$p_{21} = p_{31} = p_{32} = 0.$$

5. Προβλήματα Συστημάτων Εξυπηρέτησης

$X(t)$: ο αριθμός των αναχωρήσεων στο χρονικό διάστημα $(0, t)$.

$\{X(t), t \geq 0\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία.

Y_n : το πλήθος των πελατών μέσα στο σύστημα κατά τη στιγμή της n-οστής αναχώρησης.

$\{Y_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία (Πετρόπουλος, χ.χ.)

Κατάταξη Στοχαστικών Διαδικασιών

- Αν $t \in [0, a)$, έχουμε στοχαστική διαδικασία σε **συνεχή** χρόνο.
- Αν $t = 0, 1, 2, \dots$, έχουμε στοχαστική διαδικασία σε **διακριτό** χρόνο.

Έστω E το πεδίο τιμών της τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) $X(t)$ (ή X_n), τότε το E ονομάζεται χώρος καταστάσεων.

- Αν E είναι ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο, έχουμε στοχαστική διαδικασία με διακριτό χώρο καταστάσεων.
- Αν E είναι ένα διάστημα ή το \mathbb{R} , έχουμε στοχαστική διαδικασία με συνεχή χώρο καταστάσεων.

Η στοχαστική ανάλυση ως τυχαία συνάρτηση

Είναι γνωστό ότι

- τυχαία μεταβλητή $X : (\Omega, A, P) \rightarrow R$
 $\omega \rightarrow X(\omega)$ (αριθμός) $X_\omega(t) = X(t, \omega), t \geq 0$
- τυχαίο διάνυσμα $X : (\Omega, A, P) \rightarrow R^k$
 $\omega \rightarrow X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$ (διάνυσμα)

Αντίστοιχα τώρα, μία στοχαστική ανάλυση

$$\{X(t), t \geq 0\} : (\Omega, A, P) \rightarrow D = \{\text{συναρτήσεις} : R_+ \rightarrow R\}$$

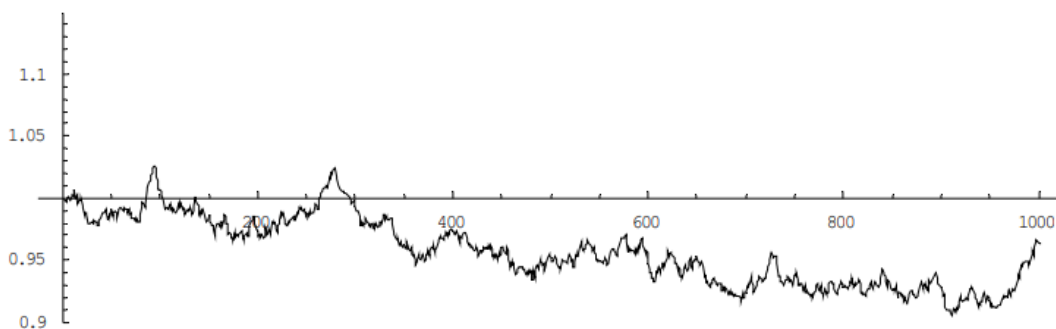
$$\omega \rightarrow \{X(t), t \geq 0\}(\omega) = \{X(t, \omega), t \geq 0\} \text{ (συνάρτηση του } t \text{)}$$

Για συγκεκριμένο ω , η συνάρτηση $X_\omega(t) = X(t, \omega), t \geq 0$ καλείται "διαδρομή" (path) (Boutsikas, 2011).

Παράδειγμα

Έστω ότι η $\{X(t), t \geq 0\}$ περιγράφει την εξέλιξη της τιμής μιας μετοχής στο χρόνο:

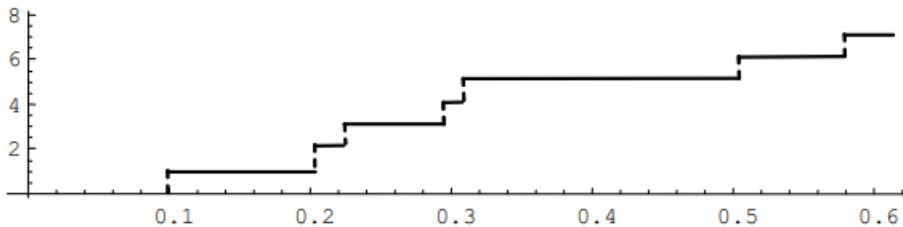
-μια πραγματοποίηση της $\{X(t, \omega), t \geq 0\}$ (για συγκεκριμένο ω) μπορεί να έχει τη μορφή



Η πραγματοποίηση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως μία απεικόνιση από το R_+ στον R . Εδώ πρόκειται για συνεχή συνάρτηση διότι θεωρούμε ότι η εξέλιξη της τιμής δεν παρουσιάζει άλματα (Boutsikas, 2011).

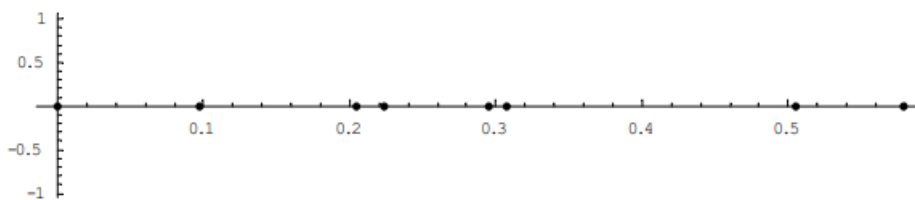
Παράδειγμα

Έστω ότι η $\{X(t), t \geq 0\}$ περιγράφει το πλήθος των πελατών που έχουν εισέλθει σε ένα κατάστημα στο χρονικό διάστημα $[0, t]$. Μία πραγματοποίηση της $\{X(t, \omega), t \geq 0\}$ (για συγκεκριμένο ω) μπορεί να έχει τη μορφή



Την χρονική στιγμή 0.096 εισήλθε ο 1^{ος} πελάτης, τη χρονική στιγμή 0.204 εισήλθε ο 2^{ος}, κ.ο.κ..

Η $\{X(t, \omega), t \geq 0\}$ μπορεί να θεωρηθεί ως μία απεικόνιση από το $R_+ \rightarrow N$. Εδώ αρκεί να γνωρίζουμε τις στιγμές αφίξεων (Boutsikas, 2011):



Κατηγορίες Στοχαστικών Διαδικασιών

- **Στάσιμες:** Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$ ονομάζεται στάσιμη όταν έχει στάσιμες ή χρονικά ομογενείς προσαυξήσεις. Όταν δηλαδή οι προσαυξήσεις $X(t) - X(s)$ και $X(t+h) - X(s+h)$, για κάθε $h > 0$ και $0 \leq s < t$ είναι ισόνομες. Στην ουσία μιλάμε για τυχαίες μεταβλητές οι οποίες σε ίσα χρονικά μη επικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα η οποίες έχουν την ίδια κατανομή.
- **Ανεξάρτητες προσαυξήσεις:** Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις αν για κάθε t_1, t_2, \dots, t_n με $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ οι $X(t_{n+1}) - X(t_n)$ είναι ανεξάρτητες. Ο απλός τυχαίος περίπατος αποτελεί ένα τέτοιο παράδειγμα.
- **Ανανεωτικές διαδικασίες:** Εάν για κάθε ακολουθία μπορούμε να ορίσουμε τα διαστήματα μεταξύ των γεγονότων τότε μπορούμε να ορίσουμε και μία ακολουθία των συμβάντων σε συνάρτηση με το χρόνο. Για παράδειγμα, έστω δύο ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $x_i, i=1, 2$ η καθεμία έχει κατανομή $F(x) = P(X \leq x)$ και είναι συνεχείς με $f(x) = F'(x)$. Ορίζουμε $Z_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ακολουθία μερικών αθροισμάτων των x τον χρόνο που διανύσαμε μέχρι να συμβεί το n γεγονός

(τυχαίος περίπατος) και Z τις απόλυτες χρονικές στιγμές των συμβάντων. Ο αριθμός των συμβάντων $N(t)$ που συμβαίνει στο χρονικό διάστημα $(0, t]$ ονομάζεται ανανεωτική διαδικασία και είναι μία ανέλιξη συνεχούς χρόνου και διακριτού χώρου καταστάσεων. Στις ανανεωτικές διαδικασίες το σύστημα ανανεώνεται σε κάθε συμβάν και δεν επηρεάζεται η εξέλιξη του από τις προηγούμενες καταστάσεις.

Οι ανανεωτικές διαδικασίες αποτελούν σημαντικό κομμάτι των ανελιξων στη προσπάθεια για μελέτη των δυναμικών συστημάτων. Εισάγουν την ανανέωση του συστήματος και την ανάλυσή του στο σημείο που βρισκόμαστε μία συγκεκριμένη στιγμή σε συνδυασμό μόνο τις μελλοντικές πιθανότητες μεταπήδησης σε επόμενες καταστάσεις. Η ανάλυση αυτή ονομάζεται ανάλυση ενός βήματος και χρησιμοποιείται σε μεγάλο βαθμό στις Μαρκοβιανές ανελιξεις. Εξίσου σημαντική είναι η χρήση της λεγόμενης ανανεωτικής συνάρτησης. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης είναι ουσιαστικά το άλλο μεγάλο κομμάτι της μελέτης των δυναμικών συστημάτων και αφορά τη συμπεριφορά φαινομένων σε μεγάλα χρονικά διαστήματα, δηλαδή της συχνότητας τους(Φακίνος, 2011).

1.2 Μαρκοβιανές Διαδικασίες

Ιστορική Αναδρομή

- Τον Ιούνιο του 1856 γεννιέται στο Ryazan της Ρωσίας ο Andrey Andreyevich Markov.
- Το 1886 ο Markov γίνεται καθηγητής στο πανεπιστήμιο του St. Petersburg State University πλαισιώνοντας μια μοναδική ομάδα λαμπερών για την εποχή μαθηματικών με μέντορα του Chebyshev. Ασχολήθηκε από την αρχή με την θεωρία των μεγάλων αριθμών και τη θεωρία πιθανοτήτων.
- Το 1887 ο δάσκαλος του Chebyshev δημοσιεύει τη πρώτη απόδειξη για το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Μελετώντας την εργασία του Chebyshev και συνδυάζοντας τη με τη θεωρία των μεγάλων αριθμών κατάφερε να εισάγει την έννοια των Μαρκοβιανών Αλυσίδων.
- Η αφορμή όμως στη πραγματικότητα για τη γέννηση αυτού του πεδίου στάθηκε κάτι ξένο από τη μαθηματική επιστήμη. Το πεδίο έρευνας του Markov ήταν η ποίηση και πιο συγκεκριμένα η νουβέλα του Alexander Pushkin με τίτλο "Eugene Onegin". Στην προσπάθειά του να εξηγήσει την εναλλαγή μεταξύ φωνηέντων και συμφώνων δημιούργησε τη πρώτη Μαρκοβιανή αλυσίδα.

Χαρακτηριστικό όλων των παραπάνω συστημάτων είναι ότι έχουν την ίδια Μαρκοβιανή ιδιότητα, η οποία με απλά λόγια λέει ότι η μελλοντική εξέλιξη του συστήματος εξαρτάται από την παρούσα του κατάσταση και δεν εξαρτάται από το παρελθόν του(Φακίνος, 2011).

Ορισμός

Μία ακολουθία τ.μ. X_n με τιμές στο E , είναι μια **Μαρκοβιανή Αλυσίδα(Μ.Α.)** αν για οποιοδήποτε $k > 0$ και για οποιαδήποτε ακολουθία $i, j, i_0, i_1, \dots, i_{n-1}$ στοιχείων του E , έχουμε:

$$Pr(X_{n+1} = j | X_0 = I, X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i) = Pr(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_n(i, j)$$

- $p_n(i, j)$ πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j την στιγμή n .
- Αν $p_n(i, j) = p(i, j)$ τότε Μ.Α. ομογενής.

Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες διακρίνονται στις παρακάτω κατηγορίες:

I. Μαρκοβιανές αλυσίδες σε διακριτό χρόνο

Μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, με χώρο καταστάσεων S , λέγεται Μαρκοβιανή αλυσίδα αν και μόνο αν αυτή έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα :

$$P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_n = i_1, X_0 = i_0\} = P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i\} = P_{ij}$$

για κάθε $i_0, i_1, \dots, i_{n+1} \in S$ (Ross, 1996).

Η δεσμευμένη πιθανότητα $P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i\} = P_{ij}$, $i, j \in S$, $\forall n \in \mathbb{N}$ είναι η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j στο $(n+1)$ -οστό βήμα. Οι πιθανότητες μετάβασης P_{ij} ονομάζονται πιθανότητες 1^{ης} τάξης ή ενός βήματος και ικανοποιούν τα εξής:

$$\text{I) } P_{ij} \geq 0, \quad i, j \in S \qquad \text{II) } \sum_{j \in S} P_{ij} = 1, \quad i \in S. \qquad (1.1)$$

Οι πιθανότητες μετάβασης 1^{ης} τάξης είναι με τη μορφή ενός πίνακα, που καλείται πίνακας μετάβασης 1^{ης} τάξης της αλυσίδας. Συμβολίζεται ως P και ικανοποιεί τις σχέσεις (1.1). Αυτός ο πίνακας ονομάζεται στοχαστικός πίνακας (stochastic matrix) και είναι:

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} & \dots & P_{0N}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} & \dots & P_{1N}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N0}^{(n)} & P_{N1}^{(n)} & \dots & P_{NN}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Ο τυχαίος περίπατος αποτελεί ένα παράδειγμα ανέλιξης διακριτού χρόνου και χώρου (Ross, 1996).

Ορισμός

Θεωρούμε ένα σωματίδιο το οποίο κινείται κατά μήκος του άξονα των πραγματικών αριθμών. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση X_0 και από κει και πέρα για κάθε ακέραια χρονική μονάδα κάνει ένα βήμα είτε προς τα αριστερά είτε προς τα δεξιά είτε παραμένει στη θέση του. Οπότε αν το σωματίδιο τη χρονική στιγμή $n - 1$, βρίσκεται στην κατάσταση X_{n-1} , τότε τη χρονική στιγμή n θα βρίσκεται στην κατάσταση $X_n = X_{n-1} + Z_n, n = 1, 2, 3, \dots$

Όπου Z_i είναι μία ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομές $F_i(x), i = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{Αν } f_i(x) = P(Z_i = x) = \begin{cases} p & , x = 1 \\ q & , x = -1 \\ 1 - p - q & , x = 0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \text{ τότε η διαδικασία ονομάζεται Απλός Τυχαίος Περίπατος.}$$

II. Μαρκοβιανές αλυσίδες σε συνεχή χρόνο

Ορισμός

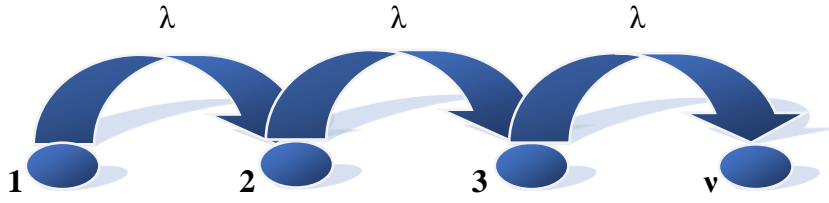
Μία στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο $\{X(t), t \geq 0\}$, με διακριτό χώρο καταστάσεων το πεπερασμένο ή απείρως αριθμήσιμο σύνολο S ονομάζεται Μαρκοβιανή αλυσίδα σε συνεχή χρόνο (Continuous – Time Markov Chains) αν:

$$\begin{aligned} P\{X(t_n) = i_n | X(t_0) = i_0, \dots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}\} \\ = P\{X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}\} \end{aligned}$$

Για οποιαδήποτε $0 \leq t_0 < \dots < t_{n-1} < t_n$ και $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n \in S$.

Η μετάβαση από μία κατάσταση της διαδικασίας σε μία άλλη είναι ικανή να πραγματοποιηθεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή, $t \geq 0$ (Χρυσ αφίνου, 2012).

1.3 Ανέλιξη Poisson



Θεωρούμε μία ανέλιξη σε συνεχή χρόνο $X(t), t \geq 0$, όπου η τυχαία μεταβλητή $X(t)$ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των αφίξεων (ή των γεγονότων) που συμβαίνουν κατά το χρονικό διάστημα $(0, t)$. Οι αφίξεις συμβαίνουν κατά τυχαίο τρόπο. Ο χώρος καταστάσεων είναι το σύνολο $I = \{0, 1, 2, \dots\}$. Υιοθετούμε τα ακόλουθα αξιώματα:

- i. Οι αριθμοί των αφίξεων που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια ξένων χρονικών διαστημάτων είναι ανεξάρτητα κατανομημένοι. (Ανεξάρτητες Προσαυξήσεις).
- ii. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $X(t+h) - X(t)$, δηλαδή ο αριθμός των αφίξεων που συμβαίνουν κατά το χρονικό διάστημα $(t, t+h)$ εξαρτάται μόνο από το h και όχι από το t . (Χρονική Στασιμότητα).
- iii. Ισχύει ότι $P\{X(t+h) - X(t) = 1\} = \lambda h + o(h)$, καθώς $h \rightarrow 0$, για κάποιο θετικό αριθμό λ . Με $o(h)$ αναπαριστούμε μία συνάρτηση του h τέτοια ώστε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.
- iv. Ισχύει ότι $P\{X(t+h) - X(t) \geq 2\} = o(h)$, καθώς $h \rightarrow 0$.

Η ανέλιξη $X(t), t \geq 0$, εφοδιασμένη με τα παραπάνω τέσσερα αξιώματα ονομάζεται ανέλιξη Poisson με ρυθμό $\lambda > 0$ (Poisson process with rate λ). Από τα αξιώματα iii) και iv), έχουμε ότι:

$$P\{X(t+h) - X(t) \geq 0\} = 1 - \lambda h + o(h), \text{ καθώς } h \rightarrow 0.$$

Έστω $p_n(t) = P\{X(t) = n\}, n \geq 0$. Μας ενδιαφέρει να βρούμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $X(t), t \geq 0$. Οι προδρομικές εξισώσεις λαμβάνονται ως εξής:

Καθώς $h \rightarrow 0$ για $n = 0$, ισχύει ότι: $p_0(t+h) = p_0(t)(1 - \lambda h + o(h))$ ή ισοδύναμα

$$\frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t) + \frac{o(h)}{h} \quad \text{ή} \quad \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t).$$

Καθώς $h \rightarrow 0$ για $n \geq 1$, ισχύει ότι: $p_n(t+h) = p_n(t)(1 - \lambda h + o(h)) + p_{n-1}(t)(\lambda h + o(h))$ ή ισοδύναμα:

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t). \quad (1)$$

Ορίζουμε την πιθανογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$, ως εξής:

$$\phi(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n, |z| < 1. \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις (2) με z^n και προσθέτοντας στην εξίσωση (1), έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{dp_n(t)}{dt} z^n = -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}(t) z^n, \text{ δηλαδή } \frac{d\phi(z, t)}{dt} = -\lambda(1-z)\phi(z, t).$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης βρίσκεται ως εξής: $\int \frac{d\phi}{\phi} = -\lambda(1-z) \int dt$. Ισοδύναμα, ισχύει ότι:

$\ln \phi = -\lambda(1-z)t + c$, όπου c σταθερά, δηλαδή $\phi(z, t) = f(z) \exp\{-\lambda(1-z)t\}$, για κάποια συνάρτηση $f(z)$, διότι η τιμή της σταθεράς μπορεί να εξαρτάται από την τιμή της μεταβλητής z . Η αρχική συνθήκη είναι $\phi(z, 0) = 1$ από την οποία έπεται ότι $\phi(z, t) = \exp\{-\lambda t(1-z)\}$. Η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$ ορίζεται ως:

$$M(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{zn} P\{X(t) = n\} = \phi(e^z, t).$$

Άρα, $M(z, t) = \exp\{\lambda t(e^z - 1)\}$. Παρατηρούμε ότι ο τύπος της ροπογεννήτριας $M(z, t)$ συμπίπτει με τον τύπο της ροπογεννήτριας της κατανομής Poisson με παράμετρο λt . Συνεπώς, η τυχαία μεταβλητή $X(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt .

Έστω T_1 ο χρόνος μέχρι την πρώτη άφιξη. Ισχύει ότι: $P\{T_1 > t\} = P\{X(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$. Άρα, η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής T_1 είναι $f_{T_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$. Δηλαδή, $T_1 \sim \text{Εκθετική}(\lambda)$. Για $n \geq 2$, έστω T_n ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ της $n-1$ -οστής και της n -οστής αφίξεως. Ισχύει ότι:

$$P\{T_{n+1} > t | T_1 = t_1, T_2 = t_2, \dots, T_n = t_n\} = P\{X(s+t) - X(s) = 0\} = P\{X(t) - X(0) = 0\} = P\{X(t) = 0\} = e^{-\lambda t},$$

όπου, $s = t_1 + t_2 + \dots + t_n$. Η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια του Αξιώματος (i) και η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια του Αξιώματος (ii). Συνεπώς, ο χρόνος T_{n+1} είναι ανεξάρτητος των T_1, \dots, T_n και ακολουθεί την Εκθετική (λ) . Συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $T_n, n \geq 1$, είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την Εκθετική κατανομή με παράμετρο ίση με $\lambda > 0$ (Δημητράκος, 2011).

Παράδειγμα

Έστω μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό $\lambda > 0$. Έστω S_n ο χρόνος μέχρι την πραγματοποίηση του n -οστού γεγονότος. Υπολογίστε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής S_n .

Λύση

Έστω T_1 ο χρόνος μέχρι την πραγματοποίηση του 1^{ου} γεγονότος και $T_i, i \geq 2$, ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα στο $(i-1)$ -όστο και στο i -όστο γεγονός. Προφανώς, $S_n = T_1 + \dots + T_n, n = 1, 2, \dots$. Γνωρίζουμε ότι $T_i \sim$

Εκθετική $(\lambda), i = 1, 2, \dots$ και είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Συνεπώς, $S_n = \sum_{i=1}^n T_i \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$,

δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής S_n είναι $f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, t \geq 0$ (Δημητράκος, 2011).

Παράδειγμα

Πελάτες φθάνουν σε μία τράπεζα σύμφωνα με μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό ίσο με λ . Υποθέτουμε ότι δύο πελάτες έφθασαν κατά τη διάρκεια της πρώτης ώρας. Ποια είναι η πιθανότητα

- Να έφθασαν και οι δύο πελάτες κατά τα πρώτα είκοσι λεπτά;
- Να έφθασε τουλάχιστον ένας από τους πελάτες κατά τη διάρκεια των πρώτων είκοσι λεπτών;

Λύση

Ισχύει ότι $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$.

- a) Είναι:

$$\begin{aligned} P\left\{N\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \mid N(1) = 2\right\} &= \frac{P\left\{N\left(\frac{1}{3}\right) = 2, N(1) = 2\right\}}{P\{N(1) = 2\}} = \frac{P\left\{N\left(\frac{1}{3}\right) = 2\right\} P\left\{N\left(\frac{2}{3}\right) = 0\right\}}{P\{N(1) = 2\}} \\ &= \frac{e^{-\frac{\lambda}{3}} \frac{\left(\frac{\lambda}{3}\right)^2}{2!} e^{-\frac{2}{3}\lambda} \frac{\left(\frac{2}{3}\lambda\right)^0}{0!}}{e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!}} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

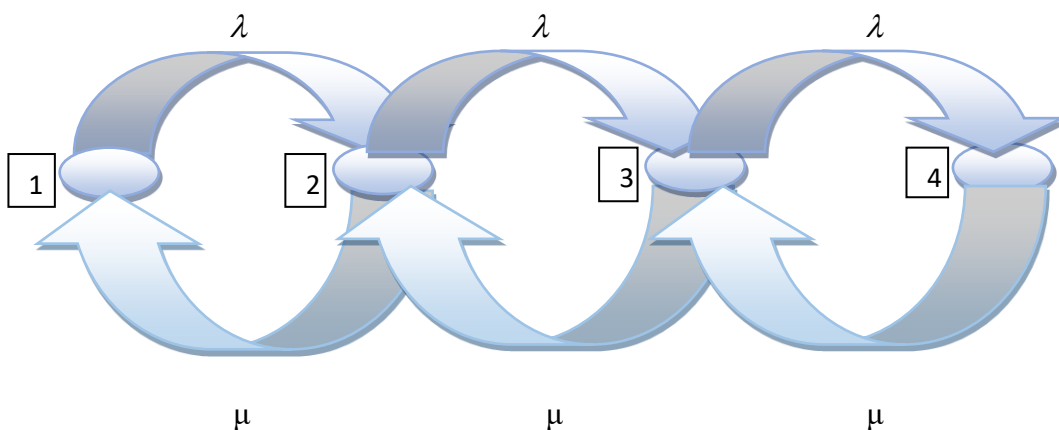
- b) Είναι $P\left\{N\left(\frac{1}{3}\right) \geq 1 \mid N(1) = 2\right\} = P\left\{N\left(\frac{1}{3}\right) = 1 \mid N(1) = 2\right\} + P\left\{N\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \mid N(1) = 2\right\}$.

$$\text{Όμως, } P\left\{N\left(\frac{1}{3}\right)=2 \mid N(1)=2\right\}=\frac{1}{9}.$$

$$\text{Ισχύει ότι } P\left\{N\left(\frac{1}{3}\right)=1 \mid N(1)=2\right\}=\frac{P\left\{N\left(\frac{1}{3}\right)=1, N(1)=2\right\}}{P\{N(1)=2\}}=\frac{P\left\{N\left(\frac{1}{3}\right)=1\right\}P\left\{N\left(\frac{2}{3}\right)=1\right\}}{P\{N(1)=2\}}$$

$$=\frac{e^{-\frac{\lambda}{3}} \frac{\lambda}{3} e^{-\frac{2\lambda}{3}} \frac{2\lambda}{3}}{e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!}}=\frac{5}{9} \text{ (Δημητράκος, 2011).}$$

1.4 Απλή ανέλιξη Γεννήσεως-Θανάτου



Μία άλλη διαδικασία σε μικρή παραλλαγή από τη Poisson είναι η ανέλιξη(διαδικασία) γεννήσεως-θανάτου. Παρατηρούμε την ίδια συμπεριφορά με την ανέλιξη Poisson με τη διαφορά ότι υπάρχει η δυνατότητα επιστροφής στην προηγούμενη κατάσταση. Ουσιαστικά η «γέννηση» ενός γεγονότος γίνεται με ρυθμό λ και ο «θάνατος» του συμβάντος με ρυθμό μ το επαναφέρει στην αμέσως προηγούμενη κατάσταση. Μπορεί να χαρακτηριστεί σαν ένα μοντέλο πληθυσμού που αυξάνεται ή μειώνεται κάθε φορά κατά μία οντότητα. Ουσιαστικά όπως παρατηρούμε η Poisson είναι μια απλή μορφή διαδικασίας γεννήσεων-θανάτου χωρίς το μ και ονομάζεται pure birth process. Αντίθετα όταν τα λ είναι όλα μηδέν ονομάζεται pure death process.

Έστω ότι σε ένα χρονικό διάστημα μήκους h , όπου $h \rightarrow 0$, ένα συγκεκριμένο άτομο ενός πληθυσμού γεννάει ένα νέο άτομο με πιθανότητα $\lambda h + o(h)$ ή πεθαίνει με πιθανότητα $\mu h + o(h)$, όπου λ και μ θετικοί αριθμοί.

Τα διαφορετικά άτομα συμπεριφέρονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και ανεξάρτητα από την προηγούμενη ιστορία της ανέλιξης. Αν τη χρονική στιγμή t υπάρχουν n άτομα στον πληθυσμό τότε η πιθανότητα να συμβεί ακριβώς μία γέννηση στο χρονικό διάστημα $(t, t+h)$, όπου $h \rightarrow 0$, είναι ίση με

$$\binom{n}{1}(\lambda h + o(h))(1 - \lambda h + o(h)) = n\lambda h + o(h).$$

Ομοίως, η πιθανότητα να συμβεί ακριβώς ένας θάνατος είναι ίση με $n\mu h + o(h)$. Η πιθανότητα να συμβούν περισσότερα από ένα γεγονότα στο χρονικό διάστημα $(t, t+h)$, όπου $h \rightarrow 0$, είναι ίση με $o(h)$. Η αντίστοιχη Μαρκοβιανή αλυσίδα σε συνεχή χρόνο $X(t), t \geq 0$, όπου η τυχαία μεταβλητή $X(t)$ αναπαριστά το μέγεθος του πληθυσμού τη χρονική στιγμή t , καλείται απλή ανέλιξη γεννήσεως-θανάτου με ρυθμούς γέννησης και θανάτου ανά άτομο λ και μ , αντίστοιχα. Ο χώρος των καταστάσεων της διαδικασίας είναι το σύνολο των μη-αρνητικών ακεραίων αριθμών.

Για $n \geq 1$ και $h \rightarrow 0$, έχουμε :

$$P\{X(t+h) - X(t) = 1 \mid X(t) = n\} = \lambda n h + o(h)$$

$$P\{X(t+h) - X(t) = -1 \mid X(t) = n\} = \mu n h + o(h)$$

$$P\{X(t+h) - X(t) = 0 \mid X(t) = n\} = 1 - n\lambda h - \mu n h + o(h)$$

$$P\{X(t+h) - X(t) = j \mid X(t) = n\} = o(h), \text{ για } j \notin \{0, 1, -1\}.$$

Η κατάσταση 0 είναι μία κατάσταση απορρόφησης. Αντιστοιχεί στην εξάλειψη του πληθυσμού. Ένας συνοπτικός πίνακας παρουσίασης των μεταβάσεων της ανέλιξης και των αντίστοιχων ρυθμών είναι ο εξής:

Μετάβαση	Ρυθμός
$x \rightarrow x+1$	$\lambda x, x \geq 1$
$x \rightarrow x-1$	$\mu x, x \geq 1$

Μας ενδιαφέρει η μελέτη της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$. Ορίζουμε τις πιθανότητες:

$p_n(t) = P\{X(t) = n \mid X(0) = \xi\}$. Οι προδρομικές εξισώσεις, για $n \geq 1$ και $h \rightarrow 0$, λαμβάνονται ως εξής:

$$p_n(t+h) = p_n(t)(1 - \lambda n h - \mu n h + o(h)) + p_{n-1}(t)(\lambda(n-1)h + o(h)) + p_{n+1}(t)(\mu(n+1)h + o(h)) + o(h).$$

Για $n=0$ και $h \rightarrow 0$,

$$p_0(t+h) = p_0(t) + p_1(t)(\mu h + o(h)) + o(h).$$

Προκύπτουν οι εξής διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)np_n(t) + \lambda(n-1)p_{n-1}(t) + \mu(n+1)p_{n+1}(t), \quad n \geq 1 \quad (\text{I})$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \mu p_1(t) \quad (\text{II})$$

Για τη λύση των Εξισώσεων (I) και (II) χρησιμοποιούμε την τεχνική της πιθανογεννήτριας. Θεωρούμε την πιθανογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$, δηλαδή τη συνάρτηση:

$$\phi(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)z^n, \quad |z| < 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις (I) επί z^n και προσθέτοντας στην Εξίσωση (II), έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{dp_n(t)}{dt} z^n = -(\lambda + \mu)z \sum_{n=1}^{\infty} np_n(t)z^{n-1} + \mu \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)p_{n+1}(t)z^n + \lambda z^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)p_{n-1}(t)z^{n-2},$$

Δηλαδή,

$$\frac{\partial \phi(z, t)}{\partial t} = -(\lambda + \mu)z \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} + \lambda z^2 \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} + \mu \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} \quad \text{ή ισοδύναμα,}$$

$$\frac{\partial \phi(z, t)}{\partial t} = (\lambda z - \mu)(z - 1) \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} \quad (\text{III})$$

Για τη λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης (III) χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Lagrange που παραθέτουμε παρενθετικά παρακάτω (Δημητράκος, 2011).

Μέθοδος Lagrange: Έστω ϕ μία συνάρτηση των μεταβλητών z και t που ικανοποιεί τη μερική διαφορική

εξίσωση: $A \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial t} + B \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} = C$, όπου A, B, C είναι συναρτήσεις των z, t, ϕ . Θεωρούμε τις βοηθητικές

εξισώσεις: $\frac{dt}{A} = \frac{dz}{B} = \frac{d\phi}{C}$. Βρίσκουμε δύο ανεξάρτητες λύσεις των βοηθητικών εξισώσεων. Αυτές έχουν τη

μορφή:

$$u(z, t, \phi) = \text{σταθερά}, \quad v(z, t, \phi) = \text{σταθερά}.$$

Μία γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης είναι $\psi(u, v) = 0$, όπου ψ είναι κάποια αυθαίρετη συνάρτηση. Ισοδύναμα, $u = f(v)$, όπου f είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση.

Για τη λύση της Εξίσωσης (III). Οι βοηθητικές εξισώσεις είναι:

$$\frac{dt}{1} = -\frac{dz}{(\lambda z - \mu)(z - 1)} = \frac{d\phi}{0}.$$

Πρέπει $d\phi = 0$, δηλαδή $\phi = \text{σταθερά}$. Αυτή είναι μία από τις δύο ανεξάρτητες λύσεις.

Για να βρούμε τη δεύτερη λύση πρέπει να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- 1^η Περίπτωση: Για $\lambda \neq \mu$. Έχουμε: $dt = \frac{dz}{\lambda - \mu} \left(\frac{\lambda}{\lambda z - \mu} - \frac{1}{z-1} \right)$.

Ολοκληρώνοντας έχουμε: $v \equiv \frac{z-1}{\lambda z - \mu} e^{(\lambda-\mu)t} = \text{σταθερά}$. Άρα η γενική λύση της εξίσωσης (III) είναι της

μορφής: $\phi(z, t) = f\left(\frac{z-1}{\lambda z - \mu} e^{(\lambda-\mu)t}\right)$. Η συνάρτηση f προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη για $t = 0$,

δηλαδή από τη συνθήκη:

$$\phi(z, 0) = z^\xi = f\left(\frac{z-1}{\lambda z - \mu}\right). \text{ Θέτουμε } u = \frac{z-1}{\lambda z - \mu} \text{ και έχουμε } z = \frac{\mu u - 1}{\lambda u - 1}.$$

$$\text{Άρα, } f(u) = \left(\frac{\mu u - 1}{\lambda u - 1}\right)^\xi. \text{ Συνεπώς, } \phi(z, t) = \left(\frac{\frac{\mu(z-1)}{\lambda z - \mu} e^{(\lambda-\mu)t} - 1}{\frac{\lambda(z-1)}{\lambda z - \mu} e^{(\lambda-\mu)t} - 1}\right)^\xi.$$

$$\text{Τελικά, } \phi(z, t) = \left(\frac{\mu(z-1)e^{(\lambda-\mu)t} + \mu - \lambda z}{\lambda(z-1)e^{(\lambda-\mu)t} + \mu - \lambda z}\right)^\xi.$$

- 2^η Περίπτωση: Για $\lambda = \mu$. Έχουμε: $dt = -\frac{dz}{(\lambda z - \mu)(z-1)} = -\frac{dz}{\mu(z-1)^2}$.

Με ολοκλήρωση παίρνουμε: $\mu \int dt = -\int \frac{dz}{(z-1)^2} \Rightarrow \mu t - \frac{1}{z-1} = \text{σταθερά}$.

Συνεπώς, η γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$\phi(z, t) = f\left(\mu t - \frac{1}{z-1}\right). \text{ Θέτοντας } t = 0 \text{ έχουμε: } z^\xi = \phi(z, 0) = f\left(\frac{1}{z-1}\right).$$

$$\text{Όταν } u = \frac{1}{z-1} \text{ τότε } z = \frac{u-1}{u}. \text{ Άρα, } f(u) = \left(1 - \frac{1}{u}\right)^\xi.$$

$$\text{Συνεπώς, } \phi(z, t) = \left(1 - \frac{1}{\mu t - \frac{1}{z-1}}\right)^\xi = \left(\frac{\mu t(z-1) - z}{\mu t(z-1) - 1}\right)^\xi.$$

Από τον ορισμό της $\phi(z, t)$ προκύπτει ότι οι πιθανότητες $p_n(t)$ εξάγονται από τον τύπο:

$$p_n(t) = \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n \phi(z, t)}{\partial z^n} \right]_{z=0}. \text{ Ορίζουμε } m(t) = E[X(t)], t \geq 0.$$

Παρατηρούμε ότι: $\left[\frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} \right]_{z=1} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) n = m(t)$. Παραγωγίζοντας την εξίσωση (III) ως προς z , έχουμε:

$$\frac{\partial^2 \phi(z, t)}{\partial t \partial z} = (\lambda z - \mu)(z-1) \frac{\partial^2 \phi(z, t)}{\partial z^2} + \lambda(z-1) \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} + (\lambda z - \mu) \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z}.$$

Θέτοντας $z=1$ προκύπτει $\frac{dm(t)}{dt} = (\lambda - \mu)m(t)$ με αρχική συνθήκη $m(0) = \xi$. Η λύση της τελευταίας

διαφορικής εξίσωσης είναι: $m(t) = \xi e^{(\lambda - \mu)t}$, $t \geq 0$. Για να μελετηθεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$ καθώς $t \rightarrow \infty$, αρκεί να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της ποσότητας $\phi(z, t)$, καθώς $t \rightarrow \infty$.

Παρατηρούμε ότι:

- Αν $\lambda = \mu$ τότε $\phi(z, t) \rightarrow 1$, καθώς $t \rightarrow \infty$.
- Αν $\lambda < \mu$ τότε $\phi(z, t) \rightarrow 1$, καθώς $t \rightarrow \infty$.
- Αν $\lambda > \mu$ τότε $\phi(z, t) \rightarrow \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^\xi$, καθώς $t \rightarrow \infty$. Δηλαδή,
 - Αν $\lambda \leq \mu$ $p_0(t) = \phi(0, t) \rightarrow 1$ καθώς $t \rightarrow \infty$,
 - Αν $\lambda > \mu$ $p_0(t) = \phi(0, t) \rightarrow \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^\xi$, καθώς $t \rightarrow \infty$.

Αυτό σημαίνει ότι, αν $\lambda \leq \mu$, ο πληθυσμός εξαλείφεται τελικά με πιθανότητα 1, ενώ αν $\lambda > \mu$, ο πληθυσμός εξαλείφεται με πιθανότητα $\left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^\xi$ (Δημητράκος, 2011).

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή στις Μαρκοβιανές διαδικασίες Αποφάσεων

2.1 Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων

Μία διαφορετική εκδοχή των Μαρκοβιανών διαδικασιών προκύπτει με την εισαγωγή ενεργειών μεταξύ των καταστάσεων και τότε οι διαδικασίες αυτές ονομάζονται Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων (Markov Decision Processes (MDPs)). Αυτές οι διαδικασίες προσανατολίζονται στην ανάπτυξη σεναρίων και τη λήψη αποφάσεων σχετικά με τις βέλτιστες τακτικές οι οποίες κατά την εφαρμογή τους μπορούν να προκαλέσουν την μετάβαση στην επιθυμητή κατάσταση (Χρυσαφίνου, 2012).

Οι Μ.Δ.Α αναφέρονται και ως στοχαστικά δυναμικά προγράμματα ή στοχαστικά προβλήματα ελέγχου και είναι μοντέλα λήψης διαδοχικών αποφάσεων όταν το αποτέλεσμα είναι αβέβαιο.

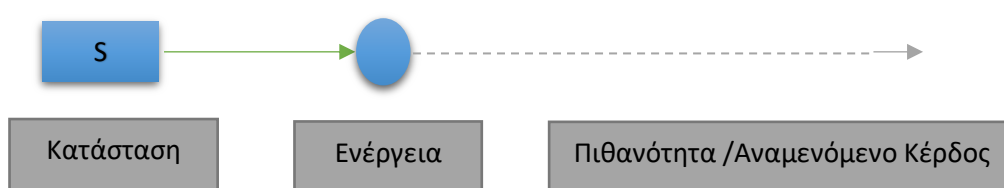
2.1.1 Ιστορική Αναδρομή

Οι Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων (Μ.Δ.Α) αποτελούν υποπερίπτωση των Μαρκοβιανών Ανελιξων με μεγάλη χρησιμότητα, από την οποία αντλούν διάφορα εργαλεία.

- Η αρχή τίθεται από την δεκαετία του 1950, όταν ο R. Bellman ανέπτυξε την θεωρία του δυναμικού προγραμματισμού.
- Στη συνέχεια στη δεκαετία του 1960, ο R. Howard, ο οποίος στηρίχθηκε στη θεωρία των Μαρκοβιανών αλυσίδων και τον δυναμικό προγραμματισμό και επινόησε τον αλγόριθμο βελτίωσης της πολιτικής.
- Από το συγκεκριμένο σημείο και έπειτα η ανάπτυξη των Μ.Δ.Α είναι ραγδαία.

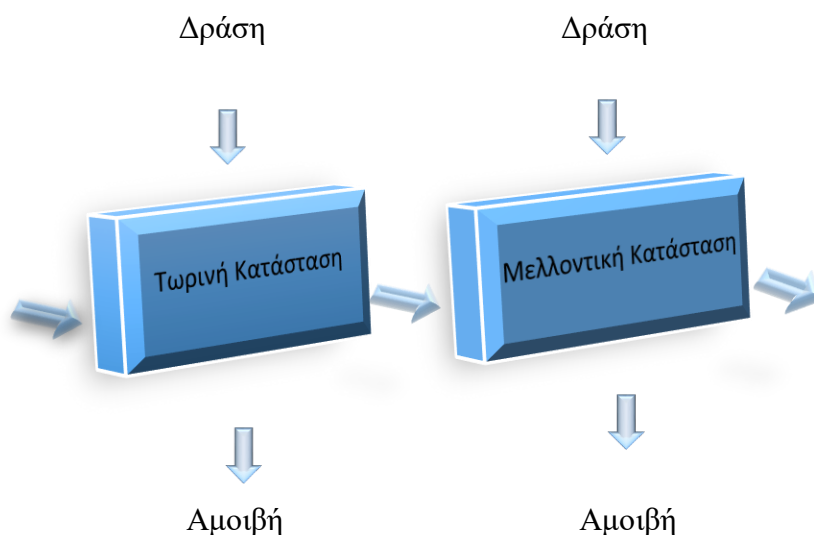
Ταυτόχρονα, η χρησιμότητά τους απλώνεται σε ένα μεγάλο εύρος τομέων όπως η ρομποτική, ο αυτοματισμός, η οικονομία, η παραγωγή, η αξιοπιστία, οι ουρές αναμονής και ο έλεγχος αποθεμάτων. Εν τέλει, η εισαγωγή στις εν λόγω στοχαστικές διαδικασίες και η ανασκόπηση κάποιων από τις εφαρμογές τους αποτελεί το αντικείμενο μελέτης.

Τα μοντέλα αυτά αποτελούνται από ένα σύνολο καταστάσεων, ενεργειών, πιθανοτήτων μετάβασης και τιμών αναμενόμενων κερδών ή αναμενόμενου κόστους. Καθώς μία ενέργεια εφαρμόζεται σε μία κατάσταση η διαδικασία μεταβαίνει στοχαστικά σε μία άλλη κατάσταση, ενώ παράγει μία τιμή (Δημητράκος, 2011).



Οι πιθανότητες μετάβασης σε μία στοχευμένη κατάσταση και οι αναμενόμενες τιμές προσδιορίζουν το μοντέλο.

2.1.2 Μαρκοβιανές αλυσίδες με αμοιβές



Για την ανάλυση ενός Μ.Δ.Α. μοντέλου απαιτούνται πληροφορίες για τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- χρονικοί ορίζοντες αποφάσεων
- σύνολο καταστάσεων
- σύνολο ενεργειών
- αμοιβές
- πιθανότητες μετάβασης.

Σε κάθε χρονική περίοδο αποφάσεων ή χρονική στιγμή λήψης αποφάσεων, το σύστημα μας παρέχει την απαραίτητη πληροφορία ώστε από την κατάσταση στην οποία βρισκόμαστε να επιλέγουμε την κατάλληλη ενέργεια μέσα από ένα σύνολο ενεργειών. Επιλέγοντας δηλαδή να πράξουμε μία ενέργεια σε μία κατάσταση, επισυνάπτουμε μία αμοιβή και καθορίζουμε συγχρόνως την κατάσταση στην οποία θα μεταβούμε την επόμενη χρονική περίοδο μέσω μια εξίσωσης μεταβάσεων (Φακίνος, 2011).

Τόσο οι αμοιβές όσο και οι πιθανότητες μετάβασης εξαρτώνται από την κατάσταση αλλά και από την επιλογή της ενέργειας. Έτσι σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή ακολουθώντας έναν κανόνα αποφάσεων που μπορεί να εξαρτάται είτε μόνο από την παρούσα κατάσταση είτε και από τις καταστάσεις του παρελθόντος είμαστε σε θέση να επιλέξουμε μία ενέργεια.

Για μελλοντικές καταστάσεις η πολιτική που θα ακολουθήσουμε είναι αυτή που θα μας δώσει τις απαραίτητες πληροφορίες για την επιλογή των ενεργειών μας. Η πολιτική δηλαδή είναι μία ακολουθία κανόνων αποφάσεων η οποία με την σειρά της δημιουργεί μία ακολουθία αμοιβών. Επιστρέφοντας έτσι στην αρχική κατάσταση, σκοπός του προβλήματος είναι την πρώτη χρονική περίοδο να διαλέξουμε την κατάλληλη πολιτική που θα ακολουθήσουμε, προσπαθώντας έτσι να ελέγξουμε τη συμπεριφορά του συστήματος και να πετύχουμε τη βελτιστοποίησή του, μέσα από την μεγιστοποίηση της εξίσωσης της ακολουθίας των αμοιβών.

Μερικά ενδιαφέροντα παραδείγματα βελτιστοποίησης προβλημάτων είναι τα εξής:

- **1^ο Πρόβλημα:** Ο τρόπος εκχώρησης της λήψης τυχαίων μηνυμάτων ή εργασιών σε μία από τις πολλές ομάδες εξυπηρέτησης με διαφορετικό ποσοστό εξυπηρέτησης. Ποιος κανόνας ανάθεσης ελαχιστοποιεί το μακροπρόθεσμο μέσο χρόνο αναμονής ανά μήνυμα ή εργασία; Αυτό το πρόβλημα μαρκοβιανής απόφασης εμφανίζεται σε μία ποικιλία πρακτικών περιοχών όπως στα δίκτυα τηλεπικοινωνιών, στα τηλεφωνικά κέντρα καθώς και στους τομείς της κατασκευής και της υγειονομικής περίθαλψης.
- **2^ο Πρόβλημα:** Το πρόβλημα διακοπής των Chow-Robbins. Ένα δίκαιο νόμισμα ρίχνεται επανειλημμένα χωρίς κάποιο περιορισμό στον αριθμό των ρίψεων. Η διαδικασία ρίψης μπορεί να σταματήσει οποιαδήποτε στιγμή και η απόδοση είναι το ποσοστό των κορόνων που αποκτήθηκαν τη στιγμή της διακοπής. Ο στόχος είναι να βρεθεί ένας κανόνας διακοπής που μεγιστοποιεί των αναμενόμενη αξία της απόδοσης.

Τι κοινό έχουν αυτά τα δύο προβλήματα?

Η απάντηση είναι ότι ο βέλτιστος κανόνας απόφασης είναι δύσκολο να επιτευχθεί και στα 2 προβλήματα, ενώ σε κάθε ένα από τα δύο προβλήματα ένας υπο-βέλτιστος κανόνας απόφασης επιτυγχάνεται πιο εύκολα με τη χρήση της ίδιας προσεγγιστικής αναζήτησης μόνο ένα βήμα προς τα εμπρός στη διαδικασία λήψης αποφάσεων για να δούμε αν υπάρχει βελτίωση.

Οι βασικές έννοιες βασίζονται στις υπολογιστικές προσεγγίσεις για τα Μαρκοβιανά προβλήματα αποφάσεων και τα βέλτιστα προβλήματα αποφάσεων. Αρχικά θα αναφερθούμε στις υπολογιστικές μεθόδους για το Μαρκοβιανό μοντέλο απόφασης με μακροπρόθεσμο μέσο κόστος ανά μονάδα του χρόνου ως το κριτήριο βελτιστοποίησης. Εισάγεται η βασική έννοια των σχετικών τιμών και ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτή η ιδέα για τη βελτίωση μιας δοθείσας πολιτικής.

Η ιδέα των βημάτων βέλτιστης πολιτικής είναι ευέλικτη και ισχυρή. Μας επιτρέπει να βάλουμε τα όρια στα κόστη των πολιτικών που δημιουργούνται στον αλγόριθμο επαναληπτικής τιμής και να σχεδιάσουμε έναν προσαρμοσμένο αλγόριθμο επαναληπτικής πολιτικής σε συγκεκριμένες εφαρμογές του Μαρκοβιανού

μοντέλου αποφάσεων. Στις πολυδιάστατες εφαρμογές των Μαρκοβιανών διαδικασιών αποφάσεων δεν είναι πρακτικά χρήσιμο να υπολογίσουμε τη βέλτιστη πολιτική, αλλά μία έξυπνη εφαρμογή μόνο του βήματος της βέλτιστης πολιτικής που οδηγεί σε έναν καλό και ευρετικό κανόνα (Boucherie & Van Dijk, 2017).

Ορισμός

Μαρκοβιανή Διαδικασία αποφάσεων είναι μία στοχαστική διαδικασία που χαρακτηρίζει την πορεία εξέλιξης ενός συστήματος σε μία αλληλουχία μετρήσιμων ή διακριτών καταστάσεων υπό τον έλεγχο ενός ανεξάρτητου και αμερόληπτου ελεγκτή. Έτσι η Μαρκοβιανή ανέλιξη με αμοιβές και αποφάσεις είναι ένα σύστημα που αποτελείται από τα εξής:

S : Σύνολο καταστάσεων διακριτών ή συνεχών $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$

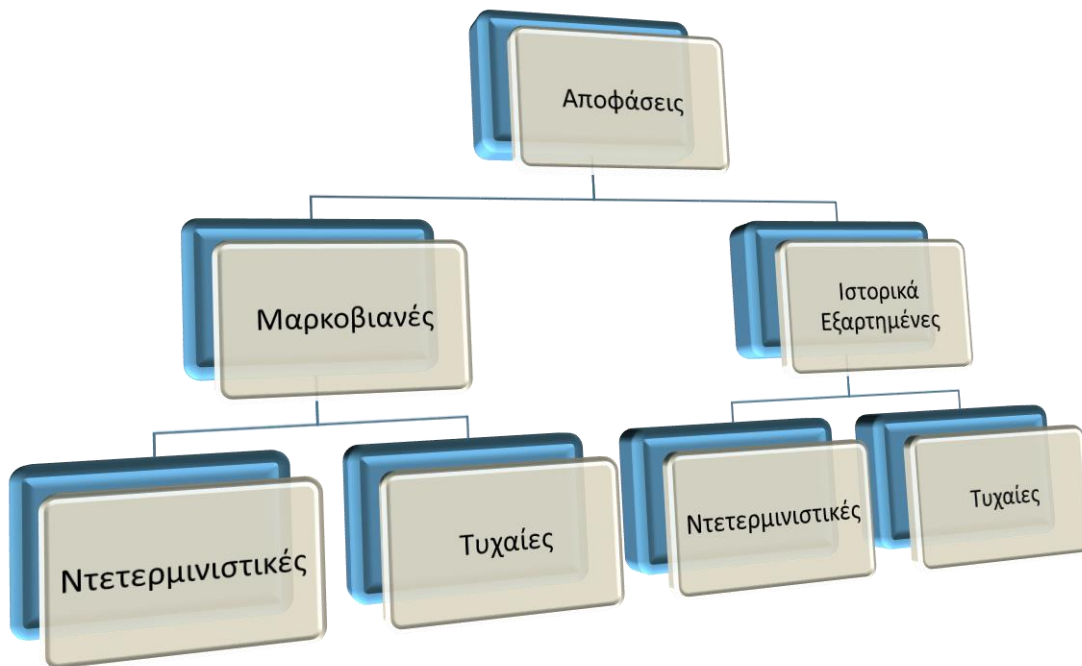
A : Σύνολο αποφάσεων του ελεγκτή $\{a_1, \dots, a_{N-1}\}$

R : Σύνολο αμοιβών για κάθε κατάσταση $\{r_1, \dots, r_N\}$

\mathbb{P} : Πίνακας πιθανοτήτων μεταβάσεων $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2N} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ P_{N1} & P_{N2} & \dots & P_{NN} \end{pmatrix}$ με στοιχεία πιθανότητες μετάβασης επόμενου βήματος από την i στην j .

γ : συντελεστής προεξόφλησης με $\gamma \in [0, 1]$

Η βέλτιστη πορεία ή συνδυασμός αποφάσεων σε ένα σύστημα σε μία αλληλουχία καταστάσεων ονομάζεται πολιτική. Η πολιτική που ακολουθείται στόχο έχει την επίτευξη μέγιστου κέρδους σε ανελίξεις με όρια, και μεγιστοποίηση των αναμενόμενων μέσων αμοιβών ανά περίοδο ή της παρούσας προ εξοφλημένης συνολικής αξίας σε συστήματα άπειρου χρονικού ορίζοντα.



Η λήψη αποφάσεων κατηγοριοποιείται από δύο συντελεστές:

- Τη διαχείριση της πληροφορίας του συστήματος στο παρελθόν
- Τον τρόπο επιλογής αποφάσεων.

Ανάλογα με την εξάρτηση από το παρελθόν του συστήματος θα έχουμε Μαρκοβιανό τρόπο λήψης αποφάσεων ή ιστορικά εξαρτημένο. Έτσι όταν η πληροφορία του συστήματος ενσωματώνεται μόνο στη κατάσταση στην οποία λαμβάνουμε την απόφαση και δε λαμβάνει υπόψη τις προηγούμενες καταστάσεις τότε έχουμε τη Μαρκοβιανή λήψη αποφάσεων. Η πληροφόρηση του συστήματος που έρχεται από μία ακολουθία καταστάσεων και αποφάσεων μέχρι τη στιγμή της απόφασης παριστάνεται από μία συνάρτηση και είναι η βάση η οποία λαμβάνεται από το σύνολο αποφάσεων. Από την άλλη πλευρά υπάρχει η δοθείσα απόφαση για κάθε κατάσταση και ο ελεγκτής λειτουργεί ντετερμινιστικά όταν φθάνει στην συγκεκριμένη κατάσταση. Αντίθετα η τυχαιότητα εισάγει μία κατανομή πιθανότητας στο σύνολο των αποφάσεων που θα λάβει ο ελεγκτής. Έτσι έχουμε ένα σύνολο αποφάσεων που λαμβάνονται κατά πιθανότητα από τη κατανομή σε κάθε κατάσταση.

Σαν εξέλιξη του μοντέλου των Μαρκοβιανών διαδικασιών με αμοιβές, εισάγεται τώρα η μεταβλητή της επιρροής του συστήματος από έναν αμερόληπτο ελεγκτή. Ο ελεγκτής εδώ επηρεάζει απόλυτα την εξέλιξη του συστήματος με τη λήψη της απόφασης. Ταυτόχρονα θεωρείται ότι γνωρίζει πλήρως και άμεσα τη κατάσταση στην οποία βρίσκεται το σύστημα από τη παρατήρηση του (αντίθετα με ορισμένο βαθμό παρατήρησης έχουμε τις λεγόμενες Μερικώς Παρατηρήσιμες Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων). Η απόφαση του ελεγκτή αφορά αποκλειστικά τη μετακίνηση του από μία κατάσταση στην επόμενη με όπλο τη πληροφορία για το κέρδος/κόστος αυτής της μετακίνησης. Το κέρδος της πορείας του ελεγκτή εξαρτάται από μία άμεση αμοιβή προερχόμενη από την θέση στην οποία βρίσκεται και την αναμενόμενη αμοιβή από τη μετάβαση στην επόμενη κατάσταση η οποία γίνεται είτε ντετερμινιστικά είτε με πιθανότητα (Χρυσοφίνου, 2012).

2.2 Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων σε διακριτό χρόνο

Έστω μία στοχαστική διαδικασία $X_n, n=0,1,2,\dots$ όπου η τυχαία μεταβλητή X_n αναπαριστά την κατάσταση ενός συστήματος τη χρονική στιγμή n . Το σύνολο των καταστάσεων του συστήματος είναι πεπερασμένο ή άπειρα αριθμήσιμο και θεωρείτε ότι περιγράφεται από ένα σύνολο μη-αρνητικών ακέραιων αριθμών.

Το μέσο κόστος του Μαρκοβιανού μοντέλου απόφασης εισέρχεται από το βιβλίο του Howard. Ένα δυναμικό σύστημα επανεξετάζεται σε ίσα χρονικά σημεία $t=0,1,\dots$. Σε κάθε επανεξέταση το σύστημα ταξινομείται σε μία από τις πιθανές καταστάσεις και στη συνέχεια πρέπει να ληφθεί μία απόφαση. Το σύνολο των πιθανών καταστάσεων συμβολίζεται με I . Για κάθε κατάσταση $i \in I$, δίνεται ένα σύνολο $A(i)$ αποφάσεων ή ενεργειών. Ο χώρος καταστάσεων I και τα σύνολα των ενεργειών $A(i)$ θεωρούνται πεπερασμένα. Οι οικονομικές επιπτώσεις των αποφάσεων που λήφθηκαν κατά τους χρόνους αναθεώρησης (χρονικοί περίοδοι αποφάσεων) αντικατοπτρίζονται στο κόστος. Αυτό το ελεγχόμενο δυναμικό σύστημα ονομάζεται **Μαρκοβιανό μοντέλο διακριτού χρόνου**, όταν ικανοποιείται η Μαρκοβιανή ιδιότητα. Εάν σε μια χρονική περίοδο απόφασης η ενέργεια a που επιλέχθηκε στην κατάσταση i , τότε ανεξάρτητα από το ιστορικό παρελθόν του συστήματος, προκύπτουν τα εξής:

- a) Προκύπτει ένα άμεσο κόστος $c_i(a)$,
- b) Στην επόμενη απόφαση περιόδου το σύστημα θα βρίσκεται στην κατάσταση j με πιθανότητα

$p_{ij}(a)$, η οποία εξαρτάται μόνο από την ενέργεια a και τις καταστάσεις i και j . Όπου

$$\sum_{j \in I} p_{ij}(a) = 1 \text{ για } i \in I.$$

Τα κόστη ενός βήματος $c_i(a)$ και οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος $p_{ij}(a)$ θεωρούνται να είναι σε ομογενή χρόνο. Σε συγκεκριμένα προβλήματα τα άμεσα κόστη $c_i(a)$ συχνά αντιπροσωπεύουν το αναμενόμενο κόστος που θα προκύψει μέχρι την επόμενη χρονική περίοδο όταν η ενέργεια a επιλέγεται στην

κατάσταση i . Η επιλογή του χώρου καταστάσεων και των συνόλων ενεργειών εξαρτώνται από τη δομή του κόστους του συγκεκριμένου προβλήματος που εξετάζεται (Δημητράκος, 2011).

Μία **πολιτική** για τον έλεγχο του συστήματος είναι ένας κανόνας για τη λήψη ενεργειών σε κάθε χρονική περίοδο απόφασης. Ένας κανόνας ελέγχου μπορεί να είναι αρκετά περίπλοκος, διότι οι προβλεπόμενες ενέργειες μπορεί να εξαρτώνται από ολόκληρο το ιστορικό του συστήματος. Υπάρχουν διάφορα είδη πολιτικών. Η ταξινόμησή τους εξαρτάται από το αν είναι ή όχι «τυχαιοποιημένες»¹ καθώς και από το αν εξαρτώνται από την «ιστορία» της διαδικασίας. Μία σημαντική κατηγορία πολιτικών είναι η υποκατηγορία των στάσιμων πολιτικών.

Μία **στάσιμη πολιτική** R είναι μία πολιτική που εκχωρεί σε κάθε κατάσταση i μία σταθερή ενέργεια $a = R_i$ και χρησιμοποιεί πάντα αυτή την ενέργεια οπότε το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση i (Δημητράκος, 2011).

Έστω X_n να είναι η κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή n λίγο πριν την απόφαση. Κάτω από την στάσιμη πολιτική R , η διαδικασία $\{X_n\}$ είναι η Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος:

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = p_{ij}(R_i).$$

Αυτή η Μαρκοβιανή αλυσίδα επιβαρύνεται με κόστος $c_i(R_i)$ κάθε χρονική στιγμή που το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i . Επομένως, από τη θεωρία της Μαρκοβιανής αλυσίδας καθορίζεται το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου σύμφωνα με μια δοθείσα στάσιμη πολιτική. Κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση.

Υπόθεση: Αυτή η υπόθεση καλείται υπόθεση Unichain. Για κάθε στάσιμη πολιτική R , η σχετική Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}$ έχει μία μοναδική μεμονωμένη επαναλαμβανόμενη κατηγορία καταστάσεων.

Στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές, η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}$ είναι μία αλυσίδα που πληροί την παραπάνω υπόθεση για κάθε στάσιμη πολιτική. Η παραπάνω υπόθεση επιτρέπει παροδικές καταστάσεις. Υπό την υπόθεση αυτή, η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}$ έχει μία μοναδική κατανομή ισορροπίας για κάθε στάσιμη πολιτική. Οι πιθανότητες ισορροπίας υπό την στάσιμη πολιτική R συμβολίζονται ως $\pi_j(R)$ για $j \in I$ και είναι η μοναδική λύση στις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\pi_j(R) = \sum_{k \in I} \pi_k(R) p_{kj}(R_k) \quad \text{για } j \in I$$

¹ Με τον όρο «τυχαιοποιημένη» θεωρούμε εκείνη την πολιτική βάσει της οποίας, όταν η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση i , μία ενέργεια a επιλέγεται με πιθανότητα $P_a, a \in A(i)$, σε κάποια χρονική στιγμή επιλογής των ενεργειών.

μαζί με την εξίσωση κανονικοποίησης: $\sum_{j \in I} \pi_j(R) = 1$.

Από το εργοδικό θεώρημα της θεωρίας των Μαρκοβιανών αλυσίδων, το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου κάτω από μία στάσιμη πολιτική R , η οποία δίνεται από:

$$g(R) = \sum_{j \in I} c_j(R_j) \pi_j(R),$$

ανεξάρτητα από την αρχική κατάσταση της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Μία στάσιμη πολιτική R^* είναι το **μέσο βέλτιστο κόστος** εάν $g(R^*) \leq g(R)$ για κάθε στάσιμη πολιτική R . Η πολιτική δεν είναι μόνο η βέλτιστη μεταξύ της κατηγορίας των σταθερών πολιτικών αλλά είναι επίσης βέλτιστη ανάμεσα στην κατηγορία όλων των πιθανών πολιτικών (Δημητράκος, 2011).

2.2.1 Η έννοια των σχετικών τιμών

Υπάρχει μία εναλλακτική προσέγγιση να υπολογίσουμε το μέσο κόστος $g(R)$ μιας δοθείσας πολιτικής R . Αυτή η προσέγγιση αποδίδει τη λεγόμενη συνάρτηση σχετικής τιμής, η οποία είναι η βάση για τη βελτίωση της πολιτικής R .

Θεώρημα 1

Έστω R είναι μία δεδομένη στάσιμη πολιτική και r μία επαναλαμβανόμενη κατάσταση της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_n\}$ που σχετίζεται με την πολιτική R . Ορίζουμε τη συνάρτηση σχετικής τιμής $w_i(R)$ από:

$$w_i(R) = K_i(R) - g(R)T_i(R) \text{ για } i \in I,$$

Όπου $T_i(R)$ είναι ο **αναμενόμενος χρόνος** έως την πρώτη μετάβαση στην κατάσταση r πέραν τη χρονική στιγμή μηδέν όταν η αρχική κατάσταση είναι η i και χρησιμοποιείται η πολιτική R , το $K_i(R)$ είναι το **αναμενόμενο κόστος** κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου με τη σύμβαση ότι το $K_i(R)$ περιλαμβάνει το κόστος που πραγματοποιήθηκε στην αρχική κατάσταση i τη στιγμή μηδέν αλλά αποκλείει το κόστος που πραγματοποιήθηκε κατά την περίοδο της πρώτης μετάβασης στην κατάσταση r . Τότε,

$$w_r(R) = 0.$$

Το μέσο κόστος $g(R)$ και η σχετική τιμή συνάρτησης $w_i(R)$ ικανοποιούν τις γραμμικές εξισώσεις

$$v_i = c_i(R_i) - g + \sum_{j \in I} p_{ij}(R_i) v_j \text{ για } i \in I.$$

Η λύση σε αυτή τη λεγόμενη αξία προσδιορισμού καθορίζεται μοναδικά έως μία πρόσθετη σταθερά για τη συνάρτηση $v_i, i \in I$.

Απόδειξη

Μία Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αναγεννητική στοχαστική διαδικασία και οποιαδήποτε επαναλαμβανόμενη κατάσταση είναι μία κατάσταση αναγέννησης. Αφήνοντας ένα κύκλο να περάσει ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών επισκέψεων στην κατάσταση αναγέννησης r , προκύπτει από τη θεωρία των διαδικασιών ανανέωσης-ανταμοιβής ότι το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου ισούται με το αναμενόμενο κόστος που προκύπτει σε ένα κύκλο διαιρούμενο με το αναμενόμενο μήκος ενός κύκλου και ούτω καθεξής

$$g(R) = \frac{K_r(R)}{T_r(R)}, \text{ υπονοώντας ότι } w_r(R) = 0.$$

Με ένα επιχείρημα προσαρμογής,

$$T_i(R) = 1 + \sum_{j \in I, j \neq r} T_j(R) p_{ij}(R_i) \text{ για } i \in I,$$

$$K_i(R) = c_i(R_i) + \sum_{j \in I, j \neq r} K_j(R) p_{ij}(R_i) \text{ για } i \in I.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές της πρώτης εξίσωσης με $g(R)$ και αφαιρώντας τις δύο εξισώσεις που προκύπτουν, έχουμε:

$$w_i(R) = c_i(R_i) - g(R) + \sum_{j \in I, j \neq r} w_j(R) p_{ij}(R_i) \text{ για } i \in I.$$

Παρατηρούμε ότι $w_r(R) = 0$, και έχουμε επιβεβαιώσει ότι $g(R)$ και $w_i(R), i \in I$ ικανοποιούν τις εξισώσεις προσδιορισμού αξίας. Έστω g και $v_i, i \in I$ με οποιαδήποτε λύση σε αυτές τις εξισώσεις. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη των εξισώσεων με $\pi_i(R)$, αθροίζοντας το i και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις ισορροπίας για το $\pi_i(R)$, ακολουθεί μετά από μια ανταλλαγή της σειράς αθροίσματος ότι $g = \sum_{i \in I} c_i(R_i) \pi_i(R)$, δείχνοντας ότι $g = g(R)$. Για να αποδείξουμε ότι η σχετική τιμή συνάρτησης καθορίζεται με μοναδικό τρόπο μέχρι μια πρόσθετη σταθερά, υποθέτουμε ότι οι $\{g, v_i\}$ και $\{g, w_i\}$ είναι οποιεσδήποτε δύο λύσεις στις εξισώσεις προσδιορισμού αξίας. Είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς με $v = (v_i), w = (w_i)$ και $P = (p_{ij}(R_i))$. Τότε $v - w = P(v - w)$. Με επανάληψη αυτής της εξίσωσης, παίρνουμε

$$v - w = P^n(v - w) \text{ για όλα τα } n \geq 1.$$

Αυτό μας δίνει $v-w = Q^n(v-w)$ για όλα $n \geq 1$, όπου $Q^n = (1/n) \sum_{k=1}^n P^k$. Είναι γνωστό από τη θεωρία της Μαρκοβιανής αλυσίδας ότι το (i, j) -ιστό στοιχείο του Q^n συγκλίνει στο $\pi_j(R)$ καθώς το $n \rightarrow \infty$ για όλα τα $i, j \in I$. Αυτό δείχνει ότι $v_i - w_i = \sum_{j \in I} (v_j - w_j) \pi_j(R)$ για όλα τα $i \in I$, αποδεικνύοντας ότι η σχετική τιμή συνάρτησης προσδιορίζεται με μοναδικό τρόπο έως μία πρόσθετη σταθερά (Boucherie & Van Dijk, 2017).

Θεώρημα 2

Για μία σταθερή στάσιμη πολιτική R ορίζουμε το $V_n(i, R)$ ως το συνολικό αναμενόμενο κόστος προέκυψε κατά την πρώτη περίοδο απόφασης n όταν η αρχική κατάσταση είναι η i . Τότε, υπό την υπόθεση ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}$ που σχετίζεται με την πολιτική R είναι απεριοδική, υπάρχει μία πεπερασμένη συνάρτηση $v_i(R)$ έτσι ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(i, R) - ng(R) = v_i(R) \text{ για } i \in I.$$

Επιπλέον, $g(R)$ και η $v_i(R)$ ικανοποιούν τις εξισώσεις προσδιορισμού αξίας από το **Θεώρημα 1**.

Απόδειξη

Ένα πλάνο της απόδειξης έχει ως εξής:

Συμβολίζοντας ως $p_{ij}^{(k)}(R)$ τις πιθανότητες μετάβασης k -βήματος της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_n\}$ που σχετίζεται με την πολιτική R , έχουμε:

$$V_n(i, R) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j \in I} p_{ij}^{(k)}(R) c_j(R_j), \text{ όπου } p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}.$$

Μαζί με την παράσταση $g(R) = \sum_{j \in I} c_j(R_j) \pi_j(R)$, αυτό μας οδηγεί μετά από εναλλαγή της σειράς και του αθροίσματος προς:

$$V_n(i, R) - ng(R) = \sum_{j \in I} c_j(R_j) \sum_{k=0}^{n-1} [p_{ij}^{(k)}(R) - \pi_j(R)].$$

Τώρα επικαλούμαστε την υπόθεση ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}$ που σχετίζεται με την πολιτική R είναι απεριοδική. Τότε, η πιθανότητα μετάβασης του k -βήματος $p_{ij}^{(k)}(R)$ συγκλίνει εκθετικά «γρήγορα» στο $\pi_j(R)$ καθώς το $k \rightarrow \infty$ για όλα τα $i, j \in I$. Δηλαδή υπάρχουν σταθερές $\alpha > 0$ και $0 < \beta < 1$ τέτοιες ώστε $|p_{ij}^{(k)}(R) - \pi_j(R)|$ συγκλίνει απόλυτα υπονοώντας ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} [p_{ij}^{(k)}(R) - \pi_j(R)]$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο για όλα τα $i \in I$, αποδεικνύοντας ότι το $V_n(i, R) - ng(R)$ έχει ένα πεπερασμένο όριο $v_i(R)$ καθώς

το $n \rightarrow \infty$. Για να το επιβεβαιώσουμε ότι το $v_i(R), i \in I$ είναι η σχετική τιμή συνάρτησης, χρησιμοποιούμε την παρακάτω αναδρομική εξίσωση:

$$V_n(i, R) = c_i(R_i) + \sum_{j \in I} p_{ij}(R_i) V_{n-1}(j, R),$$

Αφαιρούμε το $ng(R)$ και από τις δύο πλευρές και θέτουμε $n \rightarrow \infty$ ώστε να επιβεβαιώσουμε ότι το $v_i(R)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις προσδιορισμού αξίας για την πολιτική R .

Επομένως, μπορούμε να εξηγήσουμε τον όρο της σχετικής τιμής συνάρτησης. Από το **Θεώρημα 2** προκύπτει ότι :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(i, R) - V_n(j, R) = v_i(R) - v_j(R) \text{ για όλα τα } i, j \in I.$$

Με άλλα λόγια, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η σχετική τιμή συνάρτησης καθορίζεται μοναδικά ως μία πρόσθετη σταθερά, έχουμε για οποιαδήποτε σχετική τιμή συνάρτησης $v_i, i \in I$ για την πολιτική R ότι το $v_i - v_j$ αντιπροσωπεύει τη διαφορά στο συνολικό αναμενόμενο κόστος κατά την άπειρη περίοδο σχεδιασμού (προγραμματισμού) $t = 1, 2, \dots$ όταν η αρχική κατάσταση είναι η i και όχι η j υπό την προϋπόθεση ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}$ η οποία σχετίζεται με την πολιτική R είναι απεριοδική (Boucherie & Van Dijk, 2017).

2.2.2 Η πολιτική βελτίωσης ενός βήματος

Σε αυτή την ενότητα φτάνουμε στο πιο σημαντικό εργαλείο λύσης στον Μαρκοβιανό έλεγχο. Αυτό το εργαλείο είναι το βήμα βελτίωσης της πολιτικής και παρέχει μια ευέλικτη μέθοδο για τη βελτίωση της ενέργειας a δοθείσης μιας σταθερής πολιτικής R , για την απόκτηση μιας σταθερής πολιτικής με χαμηλότερο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου. Δίνουμε πρώτα ένα κίνητρο για τη βελτίωση της πολιτικής ενός βήματος και στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι πράγματι οδηγεί σε μια καλύτερη πολιτική. Η ευρετική ιδέα να βελτιωθεί μια δοθείσα σταθερή πολιτική R δίνεται από τα εξής.

Η μεταβολή στο συνολικό αναμενόμενο κόστος κατά την πρώτη περίοδο n αποφάσεων δίνεται από την έκφραση:

$$c_i(a) + \sum_{j \in I} p_{ij}(a) V_{n-1}(j, R) - V_n(i, R).$$

Ας υποθέσουμε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}$ δοθείσης της πολιτικής R είναι περιοδική. Στη συνέχεια, έχουμε ότι:

$$V_n(i, R) \approx ng(R) + v_i(R) \text{ για } n \text{ αρκετά μεγάλο.}$$

Εισάγοντας αυτό στην παραπάνω έκφραση, λαμβάνουμε ότι η αλλαγή στο αναμενόμενο κόστος δίνεται περίπου από:

$$c_i(a) + \sum_{j \in I} p_{ij}(a)v_j(R) - g(R) - v_i(R).$$

Αυτό μας συνιστά να αναζητήσουμε μια ενέργεια a στην κατάσταση i έτσι ώστε η λεγόμενη **ανισότητα βελτίωσης πολιτικής**

$$c_i(a) - g(R) + \sum_{j \in I} p_{ij}(a)v_j(R) \leq v_i(R)$$

να ισχύει. Έτσι οδηγούμαστε στο ακόλουθο θεώρημα (Boucherie & Van Dijk, 2017).

Θεώρημα 3 (Θεώρημα βελτιστοποίησης)

Έστω g και $v_i, i \in I$ να είναι αριθμοί. Υποθέτουμε ότι η στάσιμη πολιτική R έχει την ιδιότητα

$$c_i(\bar{R}_i) - g + \sum_{j \in I} p_{ij}(\bar{R}_i)v_j \leq v_i \text{ για όλα } i \in I.$$

Τότε το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος της πολιτικής R ικανοποιεί $g(\bar{R}) \leq g$ με αυστηρή ανισότητα εάν το αυστηρό σημείο ανισότητας ισχύει στη βελτίωση της πολιτικής ανισότητα για κάποια κατάσταση i που επαναλαμβάνεται σύμφωνα με την πολιτική \bar{R} .

Απόδειξη

Εφόσον η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}$ που σχετίζεται με την πολιτική \bar{R} ικανοποιεί την υπόθεση Unichain, αυτή η Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει μία μοναδική κατανομή ισορροπίας $\{\pi_i(\bar{R}), i \in I\}$. Η πιθανότητα ισορροπίας $\pi_i(\bar{R})$ είναι θετική μόνο εάν η κατάσταση i είναι επαναλαμβανόμενη υπό τον έλεγχο της πολιτικής \bar{R} . Πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές της ανισότητας βελτιστοποίησης πολιτικής με $\pi_i(\bar{R})$ και αθροίζοντας το i παρατηρούμε ότι $\sum_{i \in I} \pi_i(\bar{R}) = 1$, οπότε έχουμε:

$$\sum_{i \in I} \pi_i(\bar{R})c_i(\bar{R}_i) - g + \sum_{i \in I} \pi_i(\bar{R}) \sum_{j \in I} p_{ij}(\bar{R}_i)v_j \leq \sum_{i \in I} \pi_i(\bar{R})v_i,$$

όπου το αυστηρό σημείο ανισότητας ισχύει εάν υπάρχει αυστηρή ανισότητα στην πολιτική ανισότητα βελτίωσης για κάποια κατάσταση i με $\pi_i(\bar{R}) > 0$. Με την εναλλαγή της σειράς του αθροίσματος στο διπλό άθροισμα και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\pi_j(\bar{R}) = \sum_{i \in I} \pi_i(\bar{R}) p_{ij}(\bar{R}_i) \text{ μαζί με } g(\bar{R}) = \sum_{i \in I} \pi_i(\bar{R}) c_i(\bar{R}_i),$$

προκύπτει:

$$g(\bar{R}) - g + \sum_{j \in I} \pi_j(\bar{R}) v_j \leq \sum_{i \in I} \pi_i(\bar{R}) v_i,$$

όπου το αυστηρό σημείο ανισότητας ισχύει εάν υπάρχει αυστηρή ανισότητα στην πολιτική ανισότητα βελτίωσης για κάποια κατάσταση i η οποία είναι επαναλαμβανόμενη για την πολιτική \bar{R} .

Παρατήρηση 1

Η εξέταση της απόδειξης δείχνει ότι το **Θεώρημα 3** ισχύει όταν όλα τα σύμβολα ανισότητας αντιστρέφονται. Ως συνέπεια, μία στάσιμη πολιτική R με μέσο κόστος $g(R)$ και σχετικές τιμές $v_i(R), i \in I$ είναι το μέσο βέλτιστο κόστος, εάν

$$c_i(a) - g(R) + \sum_{j \in I} p_{ij}(a) v_j(R) \leq v_i(R) \quad \text{για όλα τα } i \in I \text{ και } a \in A(i).$$

Τότε οι $g(R)$ και $v_i(R), i \in I$ ικανοποιούν την λεγόμενη εξίσωση του βέλτιστου μέσου κόστους

$$v_i = \min_{a \in I} \left\{ c_i(a) - g + \sum_{j \in I} p_{ij}(a) v_j \right\} \quad \text{για όλα τα } i \in I.$$

Μια ενδιαφέρουσα ερμηνεία μπορεί να δοθεί στην ανισότητα βελτίωσης πολιτικής. Ας υποθέσουμε ότι προκύπτει κόστος ελέγχου $c_i(a) - g$ όταν επιλέγεται η ενέργεια $a = \bar{R}_i$ στην κατάσταση i , ενώ το τελικό κόστος v_j πραγματοποιείται κατά τον έλεγχο του συστήματος και το σύστημα έχει μείνει τελικά στην κατάσταση j . Στη συνέχεια, η ανισότητα βελτίωσης της πολιτικής δηλώνει ότι ελέγχοντας το σύστημα ενός βήματος σύμφωνα με τον κανόνα \bar{R} και σταματώντας στη συνέχεια, είναι προτιμότερο από το να σταματήσει άμεσα.

Η πολιτική βελτίωσης ενός βήματος είναι μια εξαιρετικά σημαντική ιδέα στο Μαρκοβιανό έλεγχο. Αυτή η ιδέα επιτρέπει μια ευέλικτη εφαρμογή. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή των λεγόμενων όριων Odoni για τον αλγόριθμο επαναληπτικής τιμής. Αυτός είναι ένας ισχυρός αλγόριθμος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε οποιαδήποτε εφαρμογή Μαρκοβιανού ελέγχου και αυτός ο αλγόριθμος παίρνει την

πρακτική του χρησιμότητα από τα όρια του Odoni. Στις εφαρμογές, κάποιες φορές θέλει να περιοριστεί σε κανόνες ελέγχου που έχουν συγκεκριμένη δομή και περιγράφονται από μερικές παραμέτρους. Για παράδειγμα, οι (s, S) πολιτικές παραγγελίας σε συστήματα ελεγχόμενων αποθεμάτων ή πολιτικές με ένα ή δύο επίπεδα εναλλαγής για τον έλεγχο του μεγέθους της ουράς στις ουρές συστημάτων για τα οποία μπορεί να ελεγχθεί το ποσοστό υπηρεσίας ή το ποσοστό άφιξης. Σχεδιάζοντας κατάλληλα την πολιτική βελτίωσης ενός βήματος, μπορεί να αναπτυχθεί ένας προσαρμοσμένος αλγόριθμος, δημιουργώντας μια ακολουθία βελτιωμένων πολιτικών με την επιθυμητή δομή.

Η διαδικασία βελτίωσης πολιτικής έχει το αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό ότι επιτυγχάνει τις μεγαλύτερες βελτιώσεις κόστους στις πρώτες λίγες επαναλήψεις όταν εφαρμόζεται επανειλημμένα για τη δημιουργία μιας ακολουθίας πολιτικών. Η εύρεση βασίζεται σε μια ευρετική προσέγγιση για τα Μαρκοβιανά προβλήματα αποφάσεων με έναν πολυδιάστατο χώρο καταστάσεων. Σε τέτοια προβλήματα αποφάσεων συνήθως δεν είναι εφικτό να επιλυθούν οι εξισώσεις προσδιορισμού αξίας. Ωστόσο, η πολιτική βελτίωσης ενός βήματος είναι χρήσιμη γενικά σε πολύ μεγάλο βαθμό και δεν περιέχει υπολογιστικές δυσκολίες. Αυτό υποδηλώνει μια ευρετική προσέγγιση που καθορίζει πρώτα μια καλή εκτίμηση για τις σχετικές τιμές μιας κατάλληλα επιλεγμένης πολιτικής και στη συνέχεια εφαρμόζεται η πολιτική αυτή. Αυτή η ευρετική προσέγγιση συχνά οδηγεί σε έναν πολύ καλό υπό-βέλτιστο κανόνα (Boucherie & Van Dijk, 2017).

Παρατήρηση 2

Το ημι-Μαρκοβιανό μοντέλο απόφασης διαφέρει από το Μαρκοβιανό μοντέλο απόφασης διακριτού χρόνου μόνο στο χαρακτηριστικό ότι οι περίοδοι αποφάσεων εμφανίζονται τυχαία στο χρόνο:

$\tau_i(a)$ = ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι την επόμενη απόφαση περιόδου εάν η ενέργεια a επιλέγεται στην τρέχουσα κατάσταση i .

Υποθέτουμε ότι $\tau_i(a) > 0$ για όλα τα i, a . Όπως προηγουμένως, η τυχαία μεταβλητή X_n ορίζεται ως η κατάσταση του συστήματος λίγο πριν την n -οστή διαδικασία απόφασης.

Η ενσωματωμένη διαδικασία $\{X_n\}$ είναι μια διακριτή Μαρκοβιανή αλυσίδα δοθείσας οποιασδήποτε στάσιμης πολιτικής R . Υποθέτοντας ότι αυτή η αλυσίδα ικανοποιεί την υπόθεση Unichain, το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου σύμφωνα με την πολιτική R δίνεται από την έκφραση:

$$g(R) = \sum_{j \in I} c_j(R_j) \pi_j(R) / \sum_{j \in I} \tau_j(R_j) \pi_j(R)$$

με $\{\pi_j(R)\}$ να υποδηλώνει ξανά την κατανομή ισορροπίας της ενσωματωμένης Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_n\}$.

Η εξέταση της απόδειξης του **Θεωρήματος 1** μας δείχνει ότι αυτό το θεώρημα συνεχίζει να ισχύει για το ημι-

Μαρκοβιανό μοντέλο απόφασης, υπό την προϋπόθεση ότι οι εξισώσεις προσδιορισμού αξίας προσαρμόζονται ως

$$v_i = c_i(R_i) - g\tau_i(R_i) + \sum_{j \in I} p_{ij}(R_i)v_j \text{ για όλα τα } i \in I.$$

Επίσης το **Θεώρημα 3** συνεχίζει να ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι η ανισότητα βέλτιστης πολιτικής είναι προσαρμοσμένη ως

$$c_i(\bar{R}_i) - g\tau_i(\bar{R}_i) + \sum_{j \in I} p_{ij}(\bar{R}_i)v_j \leq v_i \text{ για όλα τα } i \in I \text{ (Boucherie \& Van Dijk, 2017)}.$$

2.3 Τα όρια Odoni για την επαναληπτική τιμή

Ο αλγόριθμος επαναληπτικής τιμής υπολογίζει αναδρομικά μια ακολουθία συναρτήσεων αξίας κατά προσέγγιση το ελάχιστο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου. Οι συναρτήσεις τιμής μπορούν χρησιμοποιηθούν για να δώσουν χαμηλότερα και ανώτερα όρια στο ελάχιστο μέσο κόστος και το μέσο κόστος των πολιτικών που δημιουργήθηκαν. Αυτά τα όρια είναι τα λεγόμενα όρια Odoni. Τα όρια συγκλίνουν στο ελάχιστο μέσο κόστος υπό την συνθήκη απεριοδικότητας. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος με αυτά τα κάτω και άνω όρια είναι γενικά η καλύτερη υπολογιστική μέθοδος για την επίλυση των Μαρκοβιανών προβλημάτων αποφάσεων μεγάλης κλίμακας. Χρησιμοποιώντας το **Θεώρημα 3**, έχουμε μια απλή παραγωγή αυτών των ορίων. Πριν προχωρήσουμε σε αυτό, ας διατυπώσουμε πρώτα τον αλγόριθμο επαναληπτικής τιμής. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος υπολογίζεται αναδρομικά για $n = 1, 2, \dots$ με την τιμή της συνάρτησης $V_n(i)$ από την έκφραση:

$$V_n(i) = \min_{a \in A(i)} \left\{ c_i(a) + \sum_{j \in I} p_{ij}(a)V_{n-1}(j) \right\} \text{ για } i \in I.$$

Ξεκινώντας με μία αυθαίρετη επιλεγμένη συνάρτηση $V_0(i), i \in I$. Η ποσότητα $V_n(i)$ μπορεί να ερμηνευτεί ως το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος με n περιόδους οι οποίες απομένουν στον χρονικό ορίζοντα όταν η τρέχουσα κατάσταση είναι η i και το τελικό κόστος του $V_0(i)$ προκύπτει όταν το σύστημα βρίσκεται στη κατάσταση j . Διαισθητικά, μπορεί κανείς να αναμένει ότι η διαφορά ενός βήματος $V_n(i) - V_{n-1}(i)$ θα πλησιάζει το ελάχιστο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου και ότι η στάσιμη πολιτική της οποίας οι ενέργειες ελαχιστοποιούν τη δεξιά πλευρά της εξίσωσης για την $V_n(i)$ για όλα τα i θα είναι πολύ κοντά στο κόστος του ελάχιστου μέσου κόστους όταν το n είναι αρκετά μεγάλο.

Η αναδρομική εξίσωση για την $V_n(i)$ προτείνει να ερευνήσουμε τον τελεστή T που προσθέτει σε κάθε συνάρτηση $v = (v_i, i \in I)$ μία συνάρτηση Tv της οποίας το i -στό στοιχείο της $(Tv)_i$ ορίζεται ως:

$$(Tv)_i = \min_{a \in A(i)} \left\{ c_i(a) + \sum_{j \in I} p_{ij}(a)v_j \right\} \text{ για όλα τα } i \in I.$$

Παρατηρούμε ότι $(Tv)_i = V_n(i)$ αν $v_i = V_{n-1}(i), i \in I$. Το ακόλουθο θεώρημα είναι πολύ σημαντικό στον αλγόριθμο βελτίωσης των πολιτικών (Boucherie & Van Dijk, 2017).

Θεώρημα 4

Έστω $v = (v_i, i \in I)$ δοθείσα συνάρτηση. Ορίζουμε τη στάσιμη πολιτική $R(v)$ ως μία πολιτική η οποία προσθέτει σε κάθε κατάσταση $i \in I$ μία ενέργεια $a = R_i(v)$ που ελαχιστοποιεί το δεξί μέρος της συνάρτησης για την $(Tv)_i$. Τότε

$$\min_{i \in I} \{(Tv)_i - v_i\} \leq g^* \leq g(R(v)) \leq \max_{i \in I} \{(Tv)_i - v_i\}$$

όπου g^* το ελάχιστο μακροπρόθεσμο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου.

Απόδειξη

Για να επαληθεύσουμε τα όρια του g^* , ακολουθούμε οποιαδήποτε στάσιμη πολιτική R . Από τον ορισμό της $(Tv)_i$, έχουμε για οποιαδήποτε κατάσταση $i \in I$ ότι:

$$(Tv)_i \leq c_i(a) + \sum_{j \in I} p_{ij}(a)v_j \text{ για όλες τις } a \in A(i),$$

όπου η ισότητα ισχύει για $a = R_i(v)$. Επιλέγοντας $a = R_i$ προκύπτει:

$$(Tv)_i \leq c_i(R_i) + \sum_{j \in I} p_{ij}(R_i)v_j \text{ για } i \in I.$$

Έστω $m = \min_{i \in I} \{(Tv)_i - v_i\}$. Παρατηρώντας ότι $m \leq (Tv)_i - v_i$ για όλα τα i και χρησιμοποιώντας την παραπάνω ανισότητα, έχουμε

$$m + v_i \leq c_i(R_i) + \sum_{j \in I} p_{ij}(R_i)v_j \text{ για όλα τα } i \in I,$$

με αποτέλεσμα

$$c_i(R_i) - m + \sum_{j \in I} p_{ij}(R_i)v_j \geq v_i \text{ για } i \in I.$$

Μία εφαρμογή του **Θεωρήματος 3** μας δίνει την ανίσωση $g(R) \geq m$. Αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε πολιτική R και επομένως έχουμε $g^* = \min_R g(R) \geq m$. Η παραγωγή του άνω ορίου για το $g(R(v))$ είναι παρόμοια. Από τον ορισμό της πολιτικής $R(v)$,

$$(Tv)_i = c_i(R_i(v)) + \sum_{j \in I} p_{ij}(R_i(v))v_j \text{ για } i \in I.$$

Έστω $M = \max_{i \in I} \{(Tv)_i - v_i\}$. Εφόσον, $M \geq (Tv)_i - v_i$ για όλα τα $i \in I$, προκύπτει

$$c_i(R_i(v)) - M + \sum_{j \in I} p_{ij}(R_i(v))v_j \text{ για } i \in I.$$

Επομένως, από το **Θεώρημα 3**, $g(R(v)) \leq M$ για όλα τα $i \in I$. Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Πως λειτουργούν τα όρια του Θεωρήματος 4 για τον αλγόριθμο επαναληπτικής τιμής;

Έστω η $R^{(n)}$ μία οποιαδήποτε στάσιμη πολιτική έτσι ώστε η ενέργεια $a = R_i^{(n)}$ ελαχιστοποιεί το δεξί μέλος της αναδρομικής εξίσωσης για την $V_n(i)$ για όλα τα $i \in I$. Ορίζουμε τα όρια Odoni:

$$m_n = \min_{i \in I} \{V_n(i) - V_{n-1}(i)\}$$

και

$$M_n = \max_{i \in I} \{V_n(i) - V_{n-1}(i)\}.$$

Τότε, $m_n \leq g^* \leq g(R^{(n)}) \leq M_n$. Υποθέτουμε ότι $c_i(a) > 0$ για όλα τα i, a , διαφορετικά, προσθέτουμε μία ίδια μεγάλη σταθερά c σε κάθε $c_i(a)$. Προκύπτει ότι $m_n > 0$ έτσι ώστε τα όρια να υπονοούν

$$0 \leq \frac{g(R^{(n)}) - g^*}{g^*} \leq \frac{M_n - m_n}{m_n}.$$

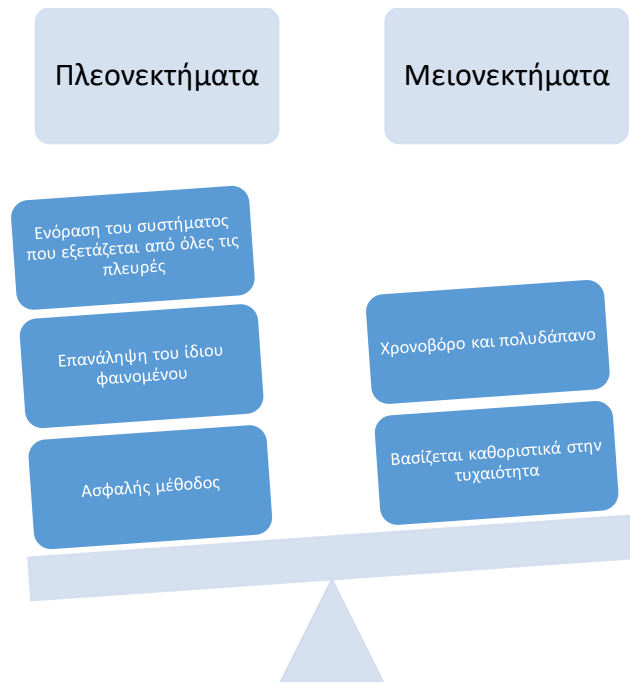
Ο αλγόριθμος επαναληπτικής τιμής τυπικά σταματάει όταν $0 \leq M_n - m_n \leq \varepsilon m_n$, όπου $\varepsilon > 0$ είναι ένας μικρός προκαθορισμένος αριθμός για παράδειγμα $\varepsilon = 10^{-3}$. Το ερώτημα είναι εάν τα όρια συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό, ούτως ώστε ο αλγόριθμος να σταματήσει μετά από πολλές επαναλήψεις. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι καταφατική μόνο αν ικανοποιείται η συνθήκη απεριοδικότητας για τις υποκείμενες Μαρκοβιανές αλυσίδες. Μία ικανή συνθήκη είναι ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι απεριοδική για κάθε στάσιμη πολιτική του βέλτιστου μέσου κόστους. Τότε οι μονότονες ακολουθίες έχουν το ίδιο όριο και η σύγκλιση σε αυτό το όριο είναι εκθετικά γρήγορη (Boucherie & Van Dijk, 2017).

2.4 Προσομοίωση



Προσομοίωση είναι η μίμηση της λειτουργίας των συστημάτων ή διαδικασιών κατά το χρονικό διάστημα με τη βοήθεια υπολογιστή. Διαδικασία ή σύστημα ονομάζεται ένα σύνολο στοιχείων που εξελίσσονται και αλληλεπιδρούν σύμφωνα με κάποιους κανόνες. Αυτοί οι κανόνες αποτελούν το μοντέλο του συστήματος και εκφράζονται με μαθηματικές σχέσεις. Μερικές εφαρμογές της είναι στην ανάλυση και σχεδίαση παραγωγής, στη μελέτη κυκλοφοριακών συστημάτων καθώς και σε συστήματα ουρών αναμονής.

Αναλυτικές μέθοδοι	Πραγματοποιείται κατάλληλη μαθηματική μοντελοποίηση του φαινομένου και η αναλυτική μελέτη του	Εφαρμογή σε απλά μοντέλα
		Η συμπεριφορά του μοντέλου γίνεται γνωστή για οποιεσδήποτε τιμές των παραμέτρων του
Αριθμητικές μέθοδοι	Χρησιμοποιούνται προσεγγιστικές μέθοδοι της αριθμητικής ανάλυσης	Εφαρμογή σε πιο σύνθετα μοντέλα
		Η συμπεριφορά του μοντέλου γίνεται γνωστή μόνο για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων του
Μέθοδοι προσομοίωσης	Το εκάστοτε φαινόμενο αναπαριστάται εικονικά σε Η/Υ & παρακολουθείτε η εξελιγή του	Εφαρμογή σε σύνθετα & ρεαλιστικά μοντέλα
		Η συμπεριφορά του μοντέλου γίνεται γνωστή μόνο για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων του

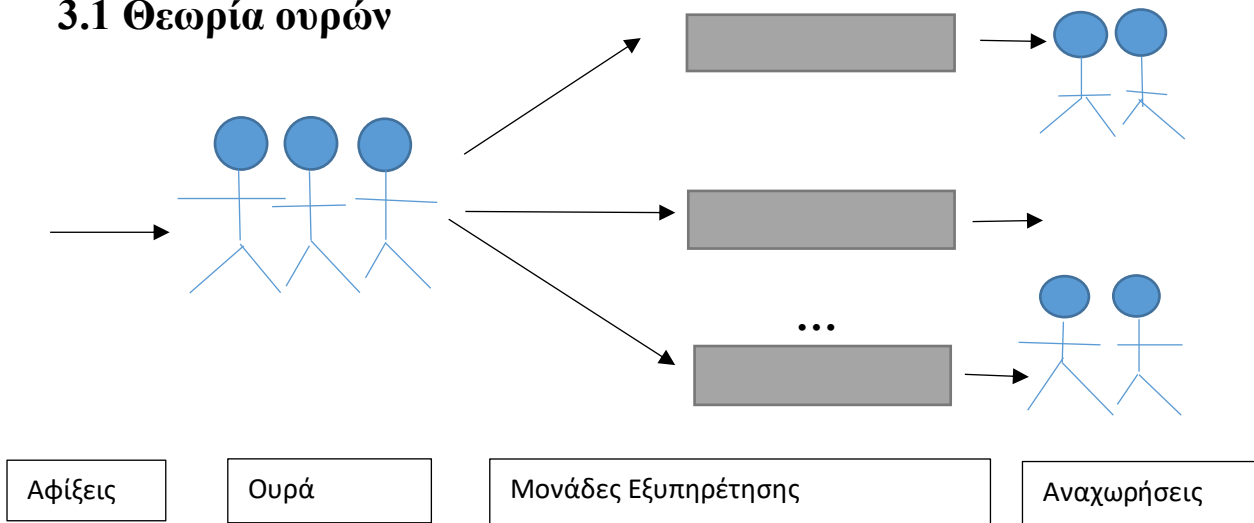


Σκοπός της δημιουργίας ενός μοντέλου προσομοίωσης είναι η μελέτη της συμπεριφοράς ενός συστήματος, ο έλεγχος υποθέσεων αναφορικά με την συμπεριφορά του καθώς και η πρόβλεψη ή εκτίμηση της μελλοντικής συμπεριφοράς του (Γεωργίου, Κωνσταντάρας & Καπάρης, 2015).

Κεφάλαιο 3

Εισαγωγή στη θεωρία ουρών

3.1 Θεωρία ουρών



Η θεωρία ουρών ξεκινά το 1909 από τον Agner Krarup Erlang, ο οποίος δημοσίευσε τη θεμελιώδη εργασία του με την οποία μελέτησε τη συμμόρφωση των κλήσεων στο τηλεφωνικό δίκτυο της Αμερικής. Ο A.K.Erlang έθεσε τις βάσεις της θεωρίας ουρών τόσο για τη φύση των υποθέσεων όσο και για τις τεχνικές ανάλυσης, τα οποία χρησιμοποιούνται έως σήμερα και σε διαφορετικούς τομείς εκτός της τηλεφωνίας. Στη συνέχεια, ο David George Kendall (1951, 1953) ήταν πρώτος που μελέτησε την θεωρία ουρών από τη σκοπιά των στοχαστικών διαδικασιών και το 1953 εισήγαγε τον συμβολισμό A/B/C των ουρών αναμονής.

Σε γενικές γραμμές η θεωρία ουρών περιγράφει την ροή εισόδου κάποιων μονάδων σε ένα σύστημα στο οποίο η εξυπηρέτηση δεν είναι αυτόματη, καθώς και την ροή εξόδου από αυτή. Με την έννοια μονάδα εννοούμε οτιδήποτε χρήζει εξυπηρέτησης. Για παράδειγμα ένας πελάτης που εισέρχεται σε μία τράπεζα, ή μία τηλεφωνική κλήση που φτάνει σε ένα τηλεφωνικό κέντρο θεωρούνται μονάδες. Η θεωρία ουρών βρίσκει πολλές εφαρμογές όπως στον έλεγχο ροών, π.χ. τηλεφωνημάτων, emails, πληροφοριών κλπ., στο σχεδιασμό συστημάτων, προγραμμάτων υπολογιστών κλπ.

Γενικά, δεν θέλουμε να είμαστε σε κατάσταση αναμονής:

- Η ελάττωση του χρόνου αναμονής συνήθως χρειάζεται επιπλέον επενδύσεις
- Για να συμπεράνουμε αν όντως αξίζει να επενδύσει κάποιος για να μειώσει τον χρόνο αναμονής, πρέπει να εξεταστεί το κατά πόσο μια επένδυση επηρεάζει τον χρόνο αναμονής

Για το σκοπό αυτό κρίνεται αναγκαία η δημιουργία μοντέλων και τεχνικών για την ανάλυση του προβλήματος. Το πλήθος των αντικειμένων που εισέρχονται στο σύστημα μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο. Για ένα συγκεκριμένο σύστημα ουρών αναμονής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα μαθηματικό μοντέλο ουρών για να περιγράψουμε χαρακτηριστικά όπως:

- ✓ Το μέσο αριθμό αντικειμένων που αναμένουν σε μια ουρά
- ✓ Το μέσο αριθμό αντικειμένων σε όλο το σύστημα (τόσο στην ουρά όσο και στις μονάδες εξυπηρέτησης)
- ✓ Το μέσο χρόνο αναμονής στην ουρά
- ✓ Το μέσο χρόνο αναμονής σε όλο το σύστημα
- ✓ Την πιθανότητα το σύστημά μας να είναι αδρανές (να μην εξυπηρετείται κανένα αντικείμενο)
- ✓ Την πιθανότητα το σύστημά μας να είναι απασχολημένο (να εξυπηρετείται έστω και ένα αντικείμενο)
- ✓ Την πιθανότητα να υπάρχει ένας συγκεκριμένος αριθμός αντικειμένων στο σύστημα
- ✓ Την πιθανότητα ένα αντικείμενο που εισάγεται στο σύστημα να μην μπει σε αναμονή διότι δεν υπάρχουν διαθέσιμες θέσεις αναμονής, κλπ. (

Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός

Ουρές ή Γραμμές Αναμονής: Φαινόμενο που δημιουργείται όταν η τρέχουσα ζήτηση για μία εξυπηρέτηση είναι μεγαλύτερη από την τρέχουσα ικανότητα εξυπηρέτησης του συστήματος (Φακινός, 2008).

Αντικειμενικός σκοπός του προβλήματος της ουράς: Να βρεθεί μια οικονομική ισορροπία μεταξύ του κόστους εξυπηρέτησης και του κόστους αναμονής στην ουρά (Κούτρας, 2011).

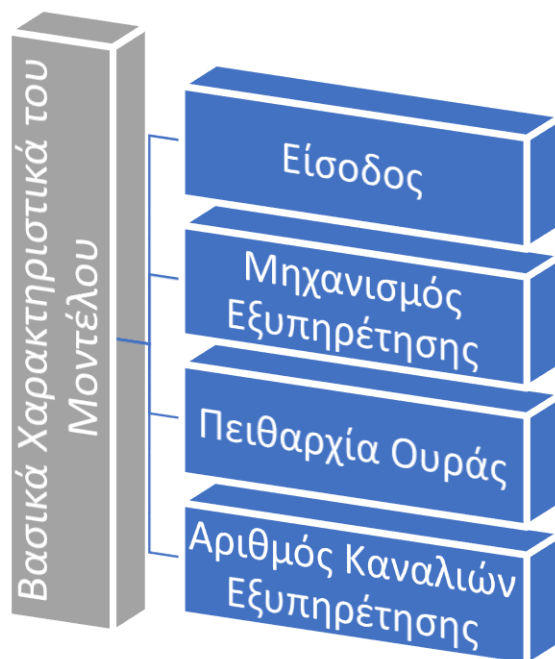
Η Θεωρία Ουρών

Δίνει την πληροφόρηση που χρειάζεται για μια τέτοια απόφαση με το να προσδιορίζει τα διάφορα χαρακτηριστικά του συστήματος

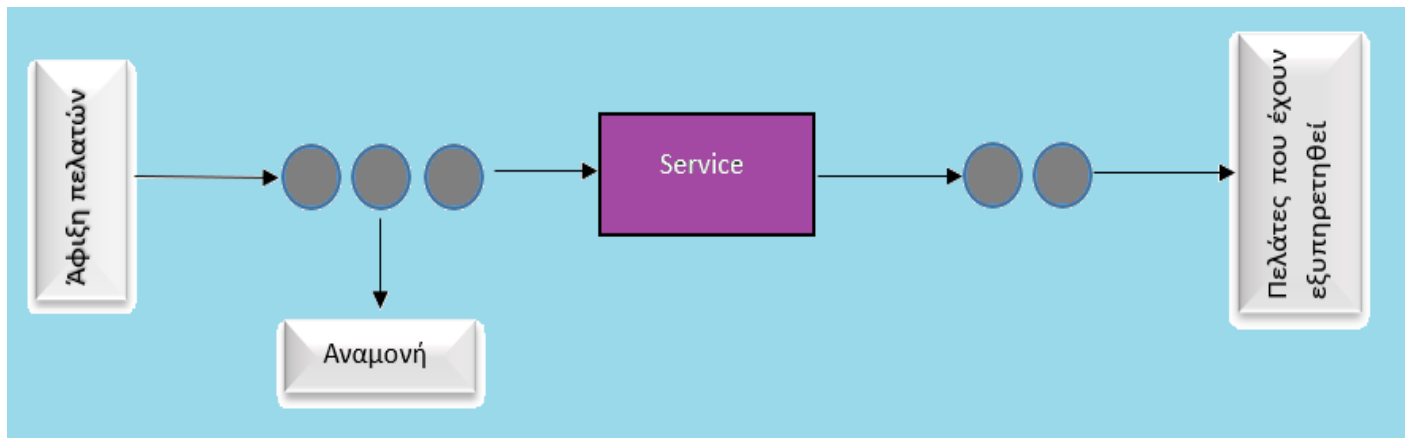
Παρέχει ένα μεγάλο αριθμό μαθηματικών προτύπων για την περιγραφή των καταστάσεων των γραμμών αναμονής

Ως Ουρά Αναμονής ορίζεται κάθε σύστημα το οποίο παρέχει εξυπηρέτηση κάποιου είδους σε πελάτες που προσέρχονται σε αυτό. Το σύστημα αποτελείται από τον χώρο εξυπηρέτησης και συνήθως από έναν χώρο αναμονής όπου περιμένουν οι πελάτες που δεν μπορούν να εξυπηρετηθούν αμέσως (Ross, 2014).

Οι χρόνοι άφιξης των πελατών καθώς και οι χρόνοι εξυπηρέτησης τους σε ένα τέτοιο σύστημα είναι τυχαίοι, πράγμα που σημαίνει ότι ο αριθμός των πελατών στο σύστημα ανά πάσα στιγμή (μήκος της ουράς) αυξομειώνεται ως συνάρτηση του χρόνου κατά τυχαίο τρόπο, είναι δηλαδή μια στοχαστική διαδικασία (Thomopoulos, 2012).



Μία θεωρία ουράς περιγράφεται γραφικά ως εξής:



3.2 Βασικά Χαρακτηριστικά μίας ουράς αναμονής

Περιγραφή μιας ουράς αναμονής

➤ Είσοδος

Η είσοδος περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο υπεισέρχονται οι μονάδες στο σύστημα. Η ουρά μπορεί να έχει πεπερασμένη ή άπειρη χωρητικότητα. Οι μονάδες μπορεί να εισέρχονται είτε μία-μία είτε κατά ομάδες. Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων μονάδων ή ομάδων μονάδων καλείται χρονικό μεσοδιάστημα (interarrival time).

➤ Ο μηχανισμός εξυπηρέτησης

Περιγράφει τον τρόπο εξυπηρέτησης των μονάδων. Μια μονάδα μπορεί να εξυπηρετηθεί είτε μόνη της είτε κατά ομάδες. Ο χρόνος που απαιτείται για την εξυπηρέτηση μιας μονάδας ή ομάδας μονάδων λέγεται χρόνος εξυπηρέτησης.

➤ Η πειθαρχία της ουράς

Περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο σχηματίζεται η ουρά και πως εξυπηρετούνται οι μονάδες. Οι συνηθέστεροι τρόποι εξυπηρέτησης είναι:

- i. **FIFO (First In First Out):** το πρώτο αντικείμενο που εισέρχεται στο σύστημα εξυπηρετείται πρώτο, δηλαδή ο πρώτος που μπαίνει είναι ο πρώτος που βγαίνει. Είναι ο πιο συνηθισμένος τρόπος. Για παράδειγμα το αριθμημένο χαρτάκι σε μια τράπεζα εξασφαλίζει την εξυπηρέτηση FIFO.

- ii. **LIFO (Last come First Out):** το τελευταίο αντικείμενο εξυπηρετείται πρώτο, δηλαδή ο τελευταίος που μπαίνει είναι ο πρώτος που βγαίνει. Για παράδειγμα στον αποθηκευτικό χώρο ενός λεωφορείου, πρώτο βγαίνει το αντικείμενο που μπήκε τελευταίο.
- iii. **Random Service (RS):** Αυτός που θα εξυπηρετηθεί επιλέγεται με τυχαίο τρόπο. Για παράδειγμα η επιλογή του αντικειμένου που θα εξυπηρετηθεί με κλήρωση.
- iv. **Priority:** Υπάρχει κάποιο κριτήριο προτεραιότητας. Για παράδειγμα HL (Hold on Line): όταν ένας σημαντικός πελάτης φτάνει, μπαίνει πρώτος στην ουρά ή στην εφορία, όπου δεν υπάρχει το σύστημα με το αριθμημένο χαρτάκι, εξυπηρετείται όποιος έχει μεγαλύτερο εκτόπισμα! Μια παραλλαγή του συστήματος αυτού είναι «όποιος έχει το μέσο εξυπηρετείται πρώτος».

➤ Αριθμός των καναλιών εξυπηρέτησης

Μπορεί να έχει 1 ή περισσότερα κανάλια εξυπηρέτησης θεωρητικά μπορεί να είναι άπειρα. Για παράδειγμα ο αριθμός των καναλιών εξυπηρέτησης σε μία τράπεζα είναι ο αριθμός των ταμείων που είναι ανοικτά.

- *Μέσος ρυθμός άφιξης (λ)* είναι ο μέσος αριθμός αφίξεων στη μονάδα του χρόνου. Ο αντίστροφος αριθμός $1/\lambda$ είναι ο μέσος χρόνος των μεσοδιαστημάτων.
- *Ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης (μ)* είναι ο μέσος αριθμός των μονάδων που εξυπηρετούνται στη μονάδα του χρόνου. Το αντίστροφο $1/\mu$ είναι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης (Φακινός, 2008).

3.3 Κατάταξη Ουρών Αναμονής

- A : Τύπος διαδικασίας εισόδου πελατών
- S : Τύπος τυχαίας μεταβλητής χρόνου εξυπηρέτησης
- N: Αριθμός εξυπηρετητών
- K : Χωρητικότητα συστήματος (μέγιστος αριθμός πελατών στην αναμονή + εξυπηρέτηση)

Παραδείγματα

- **M/M/1:** Αφίξεις Poisson (Markov, Memoryless), ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί (Markov), 1 εξυπηρετητής, άπειρη χωρητικότητα συστήματος (μηδενικές απώλειες ή αστάθεια)
- **M/D/1:** Αφίξεις Poisson (Markov, Memoryless), ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης σταθεροί (Deterministic), 1 εξυπηρετητής, άπειρη χωρητικότητα συστήματος

- **M/G/1/4:** Αφίξεις Poisson (Markov, Memoryless), ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης γενικής κατανομής (General), 1 εξυπηρετητής, χωρητικότητα συστήματος 4 πελάτες
- **M/M/4/8:** Αφίξεις Poisson (Markov, Memoryless), ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί (Markov), 4 εξυπηρετητές, χωρητικότητα συστήματος 8 πελάτες: Μοντέλο κέντρου κλήσεων (call center) με 4 χειριστές – τηλεφωνητές & μέχρι 4 κλήσεις στην αναμονή (Μάγκλαρης, 2016).

Επίσης αναφέρονται και ως αναμονητικά συστήματα, τα εξής:

Αναμονητικά Συστήματα

Συμβολισμός ενός αναμονητικού συστήματος είναι: A/B/Γ/Δ/Ε. Περιγράφεται με τη χρήση μίας σειράς αποτελούμενης από πέντε σύμβολα της μορφής A/B/Γ/Δ/Ε:

- A: Η διαδικασία αφίξεων.
- B: Η κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης.
- Γ: Ο αριθμός των παράλληλων σημείων εξυπηρέτησης.
- Δ: Η δυνατότητα του συστήματος της ουράς.
- Ε: Η πειθαρχία της ουράς.

Χαρακτηριστικό	Σύμβολο	Ερμηνεία Συμβόλου
A: Διαδικασία αφίξεων	M	Poisson
	D	Κανονικές αφίξεις
	E_k	Erlang με παράμετρο k
	GI	Γενική ανεξάρτητη
B: Κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης	M	Εκθετική
	D	Κανονική
	E_k	Erlang με παράμετρο k
	GI	Γενική ανεξάρτητη
Γ: Αριθμός παράλληλων σημείων εξυπηρέτησης	1,2,...,∞	
Δ: Δυνατότητα συστήματος ουράς	1,2,...,∞	
Ε: Πειθαρχία Ουράς	FIFO	First In First Out
	LIFO	Last In First Out
	SIRO	Service In Random Order
	PRI	Priority
	GD	General Distribytion

Παράδειγμα:

M/G/5/50/1000 είναι ένα αναμονητικό σύστημα όπου η είσοδος είναι Poisson, η έξοδος γενικής κατανομής, υπάρχουν 5 σταθμοί εξυπηρέτησης, η χωρητικότητα του συστήματος (ουρά + εξυπηρέτηση) είναι 50, και ο συνολικός αριθμός πελατών είναι 1000.

3.4 Μέτρα λειτουργικότητας και νόμοι του Little

Μέτρα λειτουργικότητας

- Μέσος χρόνος παραμονής(η κατανομή του εν λόγω χρόνου).
- Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα ή στην ουρά(η κατανομή του εν λόγω αριθμού).
- Μέση περίοδος απασχόλησης ενός εξυπηρετητή.

Τα μέτρα λειτουργικότητας ενός συστήματος ουράς συνδέονται με το θεώρημα του Little.

Γενικές σχέσεις στη θεωρία ουρών

Οι νόμοι του Little. Οι πιο σημαντικές σχέσεις είναι οι εξής:

$$L = E(N) = \lambda W \quad (1)$$

Ο μέσος αριθμός πελατών σε ένα σύστημα αναμονής είναι ίσος με το μέσο ρυθμό αφίξεων πελατών στο σύστημα επί το μέσο χρόνο που ξοδεύει ένας πελάτης σ' αυτό. Όπου W = ο μέσος χρόνος αναμονής των πελατών στο σύστημα (περιλαμβάνει και το χρόνο εξυπηρέτησης), λ = ο μέσος ρυθμός αφίξεων πελατών στο σύστημα, L = ο μέσος αριθμός ατόμων στο σύστημα:

$$L_q = \lambda W_q \quad (2)$$

Σύστημα αναμονής στην ουρά εκτός μονάδας εξυπηρέτησης, όπου:

L_q = μέσος αριθμός των πελατών στην ουρά, W_q = μέσος χρόνος αναμονής των πελατών στην ουρά. Οι σχέσεις αυτές είναι σημαντικές γιατί συνδέουν τον μέσο αριθμό μονάδων στο σύστημα ή την ουρά με τον μέσο χρόνο εξυπηρέτησης της μονάδας στο σύστημα ή την ουρά.

Διαισθητική απόδειξη: Ένας πελάτης που φθάνει στο σύστημα θα βρει μέσα κατά μέσο όρο τον ίδιο αριθμό πελατών L που θα υπάρχει όταν φύγει. Όμως κατά το διάστημα της παρουσίας του ήρθαν λW πελάτες κατά μέσο όρο. Η τελευταία ποσότητα είναι οι πελάτες που αφήνει πίσω φεύγοντας.

Το Θεώρημα του Little καθίσταται πολύ χρήσιμο διότι επιτρέπει την εύρεση του L μέσω του υπολογισμού του W και αντίστροφα. Επιπρόσθετα, ισχύει για κάθε σύστημα αναμονής που έχει φτάσει σε στατιστική ισορροπία.

3.5 Εισαγωγή στη βελτιστοποίηση ελέγχου των συστημάτων αναμονής

Έστω σε ένα σύστημα ορίζουμε τη μονάδα εξυπηρέτησης προκύπτει ότι $\rho = \lambda E(\mu)$, όπου ρ ο συντελεστής απασχόλησης(χρησιμοποίησης) ή ο μέσος αριθμός πελατών στον εξυπηρετητή και $E(\mu)$ η αναμενόμενη τιμή του χρόνου εξυπηρέτησης. Ένα σύστημα αναμονής περιγράφεται από τους πελάτες που φτάνουν ώστε να εξυπηρετηθούν, περιμένοντας την εξυπηρέτησή τους αν δεν ληφθεί άμεσα και φεύγοντας από το σύστημα αφού εξυπηρετηθούν. Ο όρος *πελάτης* χρησιμοποιείται με μία γενική έννοια και δεν αναφέρεται απαραίτητα σε ανθρώπινους πελάτες. Η απόδοση του συστήματος μετριέται με βάση τα ποσοστά απόδοσης ή το μέσο χρόνο των πελατών που παραμένουν στο σύστημα. Με αποτέλεσμα το κριτήριο του μέσου κόστους είναι το προτιμότερο κριτήριο στα συστήματα αναμονής. Παρατηρούμε πολλές καταστάσεις αναμονής και στην καθημερινή ζωή. Για αυτό το λόγο υπάρχει ανάγκη για τη βελτιστοποίηση ελέγχου των συστημάτων αναμονής. Γενικά ο έλεγχος των συστημάτων αναμονής δεν ταιριάζει στο πλαίσιο των προβλημάτων των μαρκοβιανών αποφάσεων διακριτού χρόνου, στα οποία ο χρόνος μεταξύ των μεταβάσεων είναι σταθερός.

Μία πρώτη προσεγγιστική μέθοδος προέρχεται από τον αλγόριθμο της επαναληπτικής πολιτικής. Υποθέτουμε ότι μία διορθωμένη πολιτική που ίσως δεν είναι η βέλτιστη, δεν είναι παράλογη. Αυτή η πολιτική αξιολογείται αναλυτικά μέσω της επίλυσης των εξισώσεων Poisson. Στη συνέχεια με τη χρήση αυτών των εξισώσεων, η πολιτική γίνεται βέλτιστη χρησιμοποιώντας την πολιτική βελτίωσης ενός βήματος. Γνωρίζουμε ότι αυτή η πολιτική είναι καλύτερη διότι έχει μικρότερο ή ίσο(αν είναι ήδη βέλτιστη) μέσο κόστος. Αναμένουμε ότι η βελτίωση της πολιτικής είναι περίπλοκη, που την καθιστά αδύνατη ως μία ακόμη αξιολόγηση πολιτικής.

Η ιδέα της εφαρμογής της πολιτικής βελτίωσης ενός βήματος αναφέρεται στο βιβλίο του J.M. Norman, *Heuristic Procedures in Dynamic Programming* (Manchester University Press, Manchester, 1972). Εφαρμόστηκε με επιτυχία από τους Ott και Krishnan για τη δημιουργία σχεδίων δρομολόγησης εξαρτημένων καταστάσεων για τηλεφωνικά δίκτυα υψηλής διάστασης με εναλλαγή κυκλώματος. Η αρχική πολιτική στο σύστημα επιλέχθηκε ώστε η επικοινωνιακές γραμμές να είναι ανεξάρτητες. Σε αυτή την περίπτωση, η τιμή της συνάρτησης του συστήματος είναι το άθροισμα των τιμών των συναρτήσεων για ανεξάρτητες γραμμές, που είναι ευκολότερο να αντληθούν. Σε πολλά άρθρα η αρχική πολιτική επιλέχθηκε έτσι ώστε οι ουρές να είναι ανεξάρτητες μειώνοντας την ανάλυση σε μονές ουρές (Boucherie & Van Dijk, 2017).

3.6 Διαφορικοί λογισμοί Μαρκοβιανών Συστημάτων Γεννήσεων – Θανάτων

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη σχετική τιμή της συνάρτησης για ένα μαρκοβιανό σύστημα ουρών γεννήσεων- θανάτων. Οι εξισώσεις Poisson αυξάνουν τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Λόγω της φύσης των εξισώσεων Poisson, οι διαφορικές εξισώσεις έχουν αρκετή δομή όταν η κατάσταση διανομής είναι σε μία διάσταση. Επομένως είναι σημαντικό να μελετήσουμε τις διαφορικές εξισώσεις αντί να αναλύσουμε το σύστημα ουρών γεννήσεων – θανάτων.

Θα περιορίσουμε την μελέτη μας στις $2^{\text{ης}}$ τάξης διαφορικές εξισώσεις.

Ας υποθέσουμε ότι $V(x)$ να είναι μία arbitrary συνάρτηση στο \mathbb{N}_0 . Ορίζουμε την backward διαφορική τελεστή Δ ως

$$\Delta V(x) = V(x) - V(x-1), \text{ για } x \in \mathbb{N}.$$

Επίσης η τιμή του $V(x)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$V(x) = V(k-1) + \sum_{i=k}^x \Delta V(i), \quad (3)$$

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $k \leq x$. Αυτή η παρατήρηση είναι το κλειδί για τη λύση της $1^{\text{ης}}$ τάξης διαφορικών εξισώσεων και της $2^{\text{ης}}$ τάξης διαφορικών εξισώσεων όταν μία λύση σε μία ομογενή εξίσωση είναι γνωστή (Boucherie & Van Dijk, 2017).

Αρχικά,

Λήμμα

Έστω μία συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη στον \mathbb{N} και ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$f(x+1) - \gamma(x)f(x) = r(x), \quad (4)$$

Όπου γ και r αυθαίρετες συναρτήσεις στο \mathbb{N} , έτσι ώστε $\gamma(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{N}$. Με τη σύμβαση ότι ένα κενό γινόμενο ισούται με ένα, έχουμε:

$$f(x) = f(1)Q(x) + Q(x) \sum_{i=1}^{x-1} \frac{r(i)}{Q(i+1)}, \text{ με } Q(x) = \prod_{i=1}^{x-1} \gamma(i).$$

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $Q(x)$ όπως αναφέρεται στο θεώρημα. Από την υπόθεση έχουμε ότι $Q(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{N}$. Διαιρώντας την εξίσωση (4) με $Q(x+1)$ αποδόσεις προκύπτει:

$$\Delta \left[\frac{f(x+1)}{Q(x+1)} \right] = \frac{f(x+1)}{Q(x+1)} - \frac{f(x)}{Q(x)} = \frac{r(x)}{Q(x+1)}.$$

Από την εξίσωση (3) για $k=2$ προκύπτει ότι:

$$f(x) = Q(x) \frac{f(1)}{Q(1)} + Q(x) \sum_{i=2}^x \frac{r(i-1)}{Q(i)} = f(1)Q(x) + Q(x) \sum_{i=1}^{x-1} \frac{r(i)}{Q(i+1)}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνθήκη $\gamma(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{N}$ δεν είναι αρκετά περιοριστική στην πράξη. Αν υπάρχει μία κατάσταση $y \in \mathbb{N}$ τότε η ανάλυση μπορεί να μειωθεί σε δύο άλλες $1^{\text{ης}}$ τάξης διαφορικές εξισώσεις. Συγκεκριμένα το μέρος για τις καταστάσεις $x < y$ και το μέρος για τις καταστάσεις $x > y$ για τις οποίες ισχύει η οριακή συνθήκη $\gamma(y) = 0$.

Η λύση για τις $1^{\text{ης}}$ τάξης διαφορικές εξισώσεις έχει σημαντικό ρόλο στη λύση της $2^{\text{ης}}$ τάξης διαφορικών εξισώσεων. Η εφαρμογή του παραπάνω λήμματος δίνει λύση στις $2^{\text{ης}}$ τάξης διαφορικές εξισώσεις. Το επόμενο θεώρημα είναι η γενίκευση του λήμματος.

Θεώρημα

Έστω $V(x)$ η συνάρτηση ορισμένη στον \mathbb{N}_0 ικανοποιώντας τη σχέση

$$V(x+1) + \alpha(x)V(x) + \beta(x)V(x-1) = q(x), \quad (5)$$

Με α, β και q αυθαίρετες συναρτήσεις ορισμένες στον \mathbb{N} έτσι ώστε $\beta(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι μία ομογενής λύση είναι γνωστή. Έστω $V_1^h(x)$, τέτοια ώστε $V_1^h(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{N}_0$. Τότε με τη σύμβαση ότι ένα κενό γινόμενο ισούται με ένα, έχουμε ότι το $V(x)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{V(x)}{V_1^h(x)} = \frac{V(0)}{V_1^h(0)} + \left[\Delta \left[\frac{V(1)}{V_1^h(1)} \right] \right] \sum_{i=1}^x Q(i) + \sum_{i=1}^x Q(i) \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q(j)}{V_1^h(j+1)Q(j+1)},$$

όπου $Q(x) = \prod_{i=1}^{x-1} \beta(i)V_1^h(i-1)/V_1^h(i+1)$.

Με τη χρήση του θεωρήματος ως εργαλείο, μπορούμε να μελετήσουμε τα συστήματα ουρών γεννήσεων θανάτων. Το όνομα γεννήσεων θανάτων προέρχεται από το γεγονός ότι οι αφίξεις (birth) και αναχωρήσεις (deaths) των πελατών συμβαίνουν μόνο σε μεγέθη του ενός, για παράδειγμα η παρτίδα αφίξεων και η παρτίδα υπηρεσιών δεν επιτρέπονται.

Έστω $x \in X = \mathbb{N}_0$ ο αριθμός των πελατών στο σύστημα. Όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση x , οι πελάτες φτάνουν σύμφωνα με τη διαδικασία Poisson με παράμετρο $\lambda(x)$. Στον ίδιο χρόνο οι πελάτες

λαμβάνουν service με την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\mu(x)$, έτσι ώστε $\mu(0) = 0$. Επιπλέον, το σύστημα υπόκειται κάποιο κόστος $c(x)$ στην κατάσταση x , όπου $c(x)$ είναι η πολυωνυμική συνάρτηση του x .

Για τη σταθερότητα του συστήματος υποθέτουμε ότι

$$0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda(x)}{\mu(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda(x)}{\mu(x)} < 1.$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι τιμές μετάβασης ικανοποιούν

$$0 < \inf_{x \in \mathbb{N}_0} (\lambda(x) + \mu(x)) \leq \sup_{x \in \mathbb{N}_0} (\lambda(x) + \mu(x)) < \infty.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sup_{x \in \mathbb{N}_0} (\lambda(x) + \mu(x)) < 1$.

Αυτό μπορεί να ληφθεί πάντα μετά από μια κατάλληλη κανονικοποίηση χωρίς να αλλάξει η μακροχρόνια συμπεριφορά του συστήματος. Μετά την ενοποίηση, η προκύπτουσα διαδικασία γέννησης-θανάτου έχει τον ακόλουθο πίνακα μεταβατικών τιμών.

$$P_{0,0} = 1 - \lambda(0), \quad P_{0,1} = \lambda(0), \\ P_{x,x-1} = \mu(x), P_{x,x} = 1 - \lambda(x) - \mu(x), \quad P_{x,x+1} = \lambda(x), x = 1, 2, \dots$$

Σύμφωνα με το μοντέλο, η μαρκοβιανή αλυσίδα έχει μία Unichain δομή. Ως εκ τούτου γνωρίζουμε ότι το μακροπρόθεσμο αναμενόμενο μέσο κόστος είναι σταθερό καθώς και ότι η συνάρτηση V είναι μοναδική ως μία σταθερά, με αποτέλεσμα να έχουμε τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον βαθμό ελευθερίας προκειμένου να ορίσουμε $V(0) = 0$. Στη συνέχεια, οι εξισώσεις Poisson για το συγκεκριμένο σύστημα δίνονται από:

$$g + (\lambda(x) + \mu(x))V(x) = \lambda(x)V(x+1) + \mu(x)V([x-1]^+) + c(x),$$

Για $x \in \mathbb{N}_0$, όπου $[x]^+ = \max\{0, x\}$. Όταν ο χώρος καταστάσεων X δεν είναι ορισμένος, όπως είναι στο μοντέλο μας, είναι γνωστό ότι υπάρχουν πολλά ζεύγη του μέσου κόστους g και του αντίστοιχης τιμής της συνάρτησης V που ικανοποιεί τις εξισώσεις Poisson. Υπάρχει μόνο ένα ζευγάρι που είναι η μοναδική λύση. Η εύρεση αυτού του ζευγαριού συνεπάγεται στην κατασκευή μιας σταθμισμένης νόρμας τέτοια ώστε η μαρκοβιανή αλυσίδα να είναι γεωμετρικά επαναλαμβανόμενη σε σχέση με τη νόρμα. Έπειτα αυτή η σταθμισμένη νόρμα θέτει επιπλέον συνθήκες στη λύση των εξισώσεων Poisson έτσι ώστε να μπορεί να βρεθεί η μοναδική λύση. Για την επίλυση των εξισώσεων Poisson χρειάζονται δύο βήματα:

⇒ 1^ο βήμα της ύπαρξης: να βρεθεί μία έκφραση που ικανοποιεί τις εξισώσεις Poisson

⇒ 2^ο βήμα της μοναδικότητας: να δείξει ότι η λύση είναι μοναδική

Για να δείξουμε την ύπαρξη των λύσεων χρησιμοποιούμε τη σχέση του διαφορικού λογισμού, ξαναγράφοντας τις εξισώσεις Poisson στη μορφή της εξίσωσης (3) με

$$\alpha(x) = -\frac{\lambda(x) + \mu(x)}{\lambda(x)}, \beta(x) = \frac{\mu(x)}{\lambda(x)}, q(x) = \frac{g - c(x)}{\lambda(x)}.$$

Παρατηρούμε ότι $\beta(x) \neq 0$ για $x \in \mathbb{N}$ λόγω της υπόθεσης σταθερότητας. Επίσης για οποιοδήποτε σύνολο εξισώσεων Poisson, η σταθερή συνάρτηση είναι πάντα μία λύση για τις ομογενείς εξισώσεις. Αυτό οδηγεί άμεσα στο γεγονός ότι ο P είναι ένας πίνακας πιθανοτήτων των μεταβάσεων (Boucherie & Van Dijk, 2017).

Έτσι εφαρμόζοντας το θεώρημα με $V_1^h(x) = 1$ για $x \in \mathbb{N}_0$, τότε η λύση δίνεται από:

$$V(x) = \frac{g}{\lambda(0)} \sum_{i=1}^x Q(i) + \sum_{j=1}^x Q(i) \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q(j)}{Q(j+1)}, \text{ με } Q(x) = \prod_{i=1}^{x-1} \frac{\mu(i)}{\lambda(i)}.$$

Γνωρίζουμε ότι αυτή η σχέση δεν είναι η μοναδική λύση των εξισώσεων μας. Οπότε πρέπει να κατασκευάσουμε μία σταθμισμένη νόρμα w τέτοια ώστε η μαρκοβιανή αλυσίδα να είναι w γεωμετρικά επαναλαμβανόμενη σε σχέση με το ορισμένο σύνολο $M \subset \mathbb{N}_0$ ώστε να δείξουμε τη μοναδικότητα. Δηλαδή θέλουμε να δειχθεί ότι πρέπει να $\exists \varepsilon > 0$ τέτοια ώστε:

$$\|{}_M P_{ij}\| = \begin{cases} P_{ij}, & j \notin M, \\ 0, & j \in M, \end{cases} \text{ και } \|A\|_w = \sup_{i \in X} \frac{1}{w(i)} \sum_{j \in X} |A_{ij}| w(j).$$

Λόγω της σταθερότητας της μαρκοβιανής αλυσίδας, υπάρχει μία σταθερά $K \in \mathbb{N}_0$ τ.ω. $\lambda(x)/\mu(x) < 1$ για όλα τα $x > K$. Έστω $M = \{0, \dots, K\}$, και υποθέτουμε ότι $w(x) = z^x$ για κάποιο $z > 1$. Έχουμε ότι:

$$\sum_{y \notin M} \frac{P_{xy} w(y)}{w(x)} = \begin{cases} \lambda(K)z, & x = K \\ \lambda(K+1)z + (1 - \lambda(K+1) - \mu(K+1)), & x = K+1 \\ \lambda(x)z + (1 - \lambda(x) - \mu(x)) + \frac{\mu(x)}{z}, & x > K+1. \end{cases}$$

Θα πρέπει να διαλέξουμε z έτσι ώστε όλες οι σχέσεις είναι αυστηρά μικρότερες του 1.

Η 1^η σχέση δίνει άμεσα ότι $z < 1/\lambda(K)$. Η 2^η σχέση δίνει ότι $z < 1 + \mu(K+1)/\lambda(K+1)$.

Λύνοντας την 3^η σχέση έχουμε $1 < z < \mu(x)/\lambda(x)$ για $x > K+1$.

Ορίζουμε $z^* = \min\{1/\lambda(K), \inf_{x \in \mathbb{N} \setminus M} \mu(x)/\lambda(x)\}$ και παρατηρούμε ότι η επιλογή του M μας εξασφαλίζει ότι

$$z^* > 1.$$

Επομένως, οι τρεις σχέσεις είναι αυστηρά μικρότερες του 1 για όλα τα $z \in (1, z^*)$. Άρα δείξαμε ότι για $w(x) = z^x$ με $1 < z < z^*$, τότε $\exists \varepsilon > 0$ τ.ω. $\|_M P\|_w \leq 1 - \varepsilon$. Επομένως, η μαρκοβιανή αλυσίδα είναι w γεωμετρικά επαναλαμβανόμενη σε σχέση με το ορισμένο σύνολο M .

Παρατηρούμε ότι c οριοθετείται σε σχέση με τη νόρμα του μεγίστου σταθμισμένη με το w , εφόσον $c(x)$ είναι ένα πολώνυμο του x από την υπόθεση. Γνωρίζουμε ότι η μοναδική τιμή της συνάρτησης V οριοθετείται σε σχέση με τη νόρμα w . Άρα η τιμή της συνάρτησης δεν περιέχει όρους του θ^x με $\theta > 1$, εφόσον η σταθμισμένη συνάρτηση μπορεί να επιλεγθεί τ.ω. $z \in (1, \min\{\theta, z^*\})$. Συνεπώς, $\|V\|_w = \infty$, οπότε και η τιμή της συνάρτησης δεν μπορεί να αυξηθεί εκθετικά με έναν αυξητικό παράγοντα μεγαλύτερο του 1. Έτσι, προκύπτει η παρακάτω συνέπεια (Boucherie & Van Dijk, 2017).

Συνέπεια

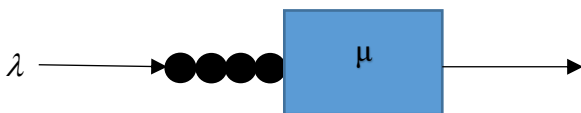
Η τιμή της συνάρτησης μιας σταθερής διαδικασίας ουράς γέννησης- θανάτου δεν μπορεί να αυξάνεται εκθετικά με αυξητικό παράγοντα μεγαλύτερο του 1.

3.7 Τύποι συστημάτων ουρών αναμονής

♦ Σύστημα M/M/1 (μία μονάδα εξυπηρέτησης)

Το απλούστερο σύστημα αναμονής είναι το M/M/1 στο οποίο υπάρχει ένας εξυπηρετητής με εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης μέσης τιμής $1/\mu$ και τροφοδοτείται από ένα σύστημα αφίξεων. Το διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων είναι εκθετικά κατανομημένα με μέση τιμή $1/\lambda$. Έτσι,

- ✚ μ είναι ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης
- ✚ λ είναι ο μέσος ρυθμός άφιξης πελατών από έξω



Η κατάσταση n του συστήματος ισούται με το πλήθος πελατών στο σύστημα (ουρά + εξυπηρέτηση). Από την κατάσταση n πηγαίνουμε στην $n+1$ με μία άφιξη, και στην $n-1$ με μία εξυπηρέτηση.

Στο μοντέλο αυτό ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

- Η σειρά εξυπηρέτησης είναι first-in, first-out (FIFO).
- Κάθε αντικείμενο στην άφιξη αναμένει να εξυπηρετηθεί (χωρίς να εγκαταλείψει την ουρά)

- Ο ρυθμός των αντικειμένων στην άφιξη ακολουθεί κατανομή Poisson και τα αντικείμενα προέρχονται από ένα άπειρο ή πολύ μεγάλο πλήθος.
- Ο ρυθμός εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή.
- Ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μεγαλύτερος από το μέσο ρυθμό άφιξης.

Παρατήρηση: οι παράμετροι λ και μ είναι ρυθμοί και εκφράζονται σε αντικείμενα ανά χρονική μονάδα, πχ πελάτες/ώρα αντικείμενα/λεπτό πακέτα δεδομένων/sec.

Όταν για παράδειγμα σε μια εφαρμογή έχουμε ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι κατά μέσο όρο 10 λεπτά, ο ρυθμός εξυπηρέτησης δεν είναι $\mu=10$, αλλά $\mu=6$ αντικείμενα / ώρα διότι σε μια ώρα εξυπηρετούνται 6 αντικείμενα.

Η πιθανότητα να μην υπάρχουν αντικείμενα στο σύστημα	$P_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$
Η πιθανότητα να υπάρχουν n αντικείμενα στο σύστημα	$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$
Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στο σύστημα (ουρά + εξυπηρέτηση)	$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$
Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στην ουρά	$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$
Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα	$W = \frac{1}{(\mu - \lambda)} = \frac{L}{\lambda}$
Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά	$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{L_q}{\lambda}$
Η πιθανότητα να είναι απασχολημένη η μονάδα εξυπηρέτησης	$U = \frac{\lambda}{\mu}$

Αποδείξεις

Αποδεικνύεται ότι η οριακή κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $N=$ "αριθμός πελατών στο σύστημα" είναι η εξής:

$$P(N = 0) = P_0 = 1 - \lambda/\mu$$

$$P(N = n) = P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right), n \geq 1.$$

Από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι $(P_i)_{i=0}^{\infty}$ συνάρτηση κατανομής

$$\text{είναι ότι } \frac{\lambda}{\mu} < 1. \text{ Έτσι, } \sum_{i=0}^{\infty} P_i = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i.$$

$$\text{Για το } L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \text{ όπου } \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

$$\text{Για το } W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} \text{ (Little).}$$

$$\text{Για το } W_Q = W - E(S) = W - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}.$$

$$\text{Για το } L_Q = \lambda W_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}.$$

♦ Το σύστημα M/M/1 με περιορισμένο μήκος ουράς

Σε μερικά συστήματα αναμονής το μήκος της ουράς δεν μπορεί να είναι απεριόριστο. Σε ένα τηλεφωνικό κέντρο για παράδειγμα οι τηλεφωνικές κλήσεις που μπορούν να περιμένουν στην ουρά είναι συγκεκριμένες, όσες είναι οι διαθέσιμες γραμμές αναμονής. Εάν λοιπόν υπάρχουν περιορισμένες θέσεις στην ουρά αναμονής είναι λογικό να επηρεάζονται παράγοντες όπως ο χρόνος εξυπηρέτησης, ο αριθμός αντικειμένων στην ουρά και γενικά τα αποτελέσματα του μοντέλου. Έστω ότι ο μέγιστος αριθμός αντικειμένων στο σύστημα είναι K . Οι υπόλοιπες προϋποθέσεις του μοντέλου παραμένουν ίδιες όπως του βασικού M/M/1.

Η πιθανότητα να μην υπάρχουν αντικείμενα στο σύστημα είναι:	$P_0 = \frac{1 - \lambda/\mu}{1 - (\lambda/\mu)^{K+1}}$
Η πιθανότητα να υπάρχουν n αντικείμενα στο σύστημα είναι:	$P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \text{ για } n \leq K$
Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στο σύστημα (ουρά & εξυπηρέτηση) είναι:	$L = \frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu} - \frac{(K+1) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}$

Η πιθανότητα ότι ένα αντικείμενο δε θα εισέλθει στο σύστημα εξαιτίας του περιορισμένου μήκους της ουράς είναι:	$P_K = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^K$
Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στην ουρά είναι:	$L_q = L - \frac{\lambda(1 - P_K)}{\mu}$
Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι:	$W = \frac{L}{\lambda(1 - P_K)}$
Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι:	$W_q = W - \frac{1}{\mu}$

♦ **Το μοντέλο M/M/1 με πεπερασμένο πλήθος αντικειμένων**

Σε ορισμένες περιπτώσεις τα πιθανά αντικείμενα που εισέρχονται στο σύστημα προέρχονται όχι από απεριόριστο πλήθος αλλά από έναν περιορισμένο αριθμό αντικειμένων. Έστω ότι ο συνολικός πληθυσμός των αντικειμένων που μπορεί να εισέλθουν στο σύστημα είναι N . Οι υπόλοιπες προϋποθέσεις του μοντέλου παραμένουν ίδιες όπως του βασικού M/M/1. Τότε

Η πιθανότητα να μην υπάρχουν αντικείμενα στο σύστημα είναι:	$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^N \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n}$
Η πιθανότητα να υπάρχουν n αντικείμενα στο σύστημα είναι:	$P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{N!}{(N-n)!}$ όπου $n = 1, 2, \dots, N$
Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στο σύστημα (ουρά & εξυπηρέτηση) είναι:	$L = N - \frac{\mu}{\lambda}(1 - P_0)$
Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στην ουρά είναι:	$L_q = L - (1 - P_0)$
Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι:	$W = \frac{L_q}{\lambda(N - L)} + \frac{1}{\mu}$
Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι:	$W_q = W - \frac{1}{\mu}$

♦ Το μοντέλο M/M/c (c μονάδες εξυπηρέτησης)

Σε όλα τα προηγούμενα μοντέλα είχαμε μόνο μια μονάδα εξυπηρέτησης. Ωστόσο, σε αρκετές εφαρμογές, όπως π.χ. σε μια τράπεζα, ενώ εξακολουθούμε να έχουμε μία ουρά αναμονής, τα αντικείμενα του συστήματος εξυπηρετούνται από περισσότερες μονάδες εξυπηρέτησης. Για το σκοπό αυτό εξετάζουμε το μοντέλο M/M/c. Στο μοντέλο αυτό ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

Υπάρχει μόνο μία ουρά εξυπηρέτησης.

Η σειρά εξυπηρέτησης είναι first-in, first-out (FIFO).

- ❖ Κάθε αντικείμενο εξυπηρετείται από την πρώτη διαθέσιμη μονάδα εξυπηρέτησης.
- ❖ Ο ρυθμός άφιξης των αντικειμένων ακολουθεί κατανομή Poisson
- ❖ Ο ρυθμός εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή.
- ❖ Τα αντικείμενα προέρχονται από ένα άπειρο ή πολύ μεγάλο πλήθος.

Έχουμε τις εξής παραμέτρους:

- λ = ρυθμός αφίξεων (ο μέσος αριθμός αφίξεων ανά χρονική μονάδα)
- μ = ρυθμός εξυπηρέτησης (ο μέσος αριθμός αντικειμένων που εξυπηρετούνται ανά χρονική μονάδα και ανά μονάδα εξυπηρέτησης)
- c = αριθμός μονάδων εξυπηρέτησης

Σημειώστε ότι ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης για όλο το σύστημα είναι $c \cdot \mu$ και πρέπει να είναι μεγαλύτερος από το ρυθμό άφιξης (Ross, 2014).

Η πιθανότητα να μην υπάρχουν αντικείμενα στο σύστημα είναι:	$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right] + \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \left(\frac{c\mu}{c\mu - \lambda} \right)}$
Η πιθανότητα να υπάρχουν n αντικείμενα στο σύστημα είναι:	$P_n = \begin{cases} \frac{1}{c! c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n, & n > c \\ \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0, & n \leq c \end{cases}$
Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στο σύστημα (ουρά & εξυπηρέτηση) είναι:	$L = \frac{\lambda \mu \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c}{(c-1)! (c\mu - \lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$
Η πιθανότητα να είναι απασχολημένες όλες οι μονάδες εξυπηρέτησης, δηλαδή ότι θα υπάρξει αναμονή για κάποιο αντικείμενο που φτάνει στην ουρά, είναι:	$P_w = \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \frac{c}{c\mu - \lambda} P_0$

Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στην ουρά είναι:	$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu}$
Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι:	$W = \frac{L}{\lambda}$
Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι:	$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$

♦ **Το μοντέλο M/M/∞**

Στο παρόν μοντέλο θεωρούμε ότι ο ρυθμός αυξάνεται ανάλογα με την εισροή πελατών στο σύστημα ή ότι υπάρχει κάποιος εξυπηρετητής κατά την εισδοχή του πελάτη στο σύστημα. Ο αριθμός των πελάτων ισούται με τον αριθμό των πελατών που εξυπηρετούνται, χωρίς αναμονή. Η σειρά εξυπηρέτησης είναι First In First Out (FIFO), η χωρητικότητα είναι άπειρη καθώς και οι εξυπηρετητές. Επίσης, οι αφίξεις και ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στο σύστημα είναι:	$L = \frac{\lambda}{\mu}$
Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι:	$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$
Η πιθανότητα να υπάρχουν n αντικείμενα στο σύστημα είναι:	$P_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n e^{-\frac{\lambda}{\mu}}, n \geq 0$
Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στο σύστημα (ουρά & εξυπηρέτηση) είναι:	$L = \frac{\lambda}{\mu}$
Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στην ουρά είναι:	$L_q = 0$
Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι:	$W = \frac{1}{\mu}$
Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι:	$W_q = 0$

♦ **Το μοντέλο M/G/1**

Στο συγκεκριμένο σύστημα η χωρητικότητα είναι άπειρη, ο εξυπηρετητής είναι ένας και η σειρά εξυπηρέτησης είναι First In First Out(FIFO). Επιπρόσθετα, οι αφίξεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή και ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί τη γενική κατανομή (Medhi, 2003).

Η πιθανότητα να μην υπάρχουν αντικείμενα στο σύστημα είναι:	$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$
Η πιθανότητα να υπάρχουν n αντικείμενα στο σύστημα είναι:	$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$
Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στο σύστημα (ουρά & εξυπηρέτηση) είναι:	$L = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)} + \frac{\lambda}{\mu}$
Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στην ουρά είναι:	$L_Q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}$
Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι:	$W = \frac{\frac{\lambda}{\mu^2} + \lambda \sigma^2}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)} + \frac{1}{\mu}$
Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι:	$W_Q = \frac{\frac{\lambda}{\mu^2} + \lambda \sigma^2}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}$

♦ **Το μοντέλο M/D/1**

Στο παρόν μοντέλο η χωρητικότητα είναι άπειρη, ο εξυπηρετητής καθίσταται ένας και η σειρά εξυπηρέτησης είναι η First In First Out(FIFO). Επιπρόσθετα, οι αφίξεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή και ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί τη βέβαιη κατανομή.

Η πιθανότητα να μην υπάρχουν αντικείμενα στο σύστημα είναι:	$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$
Η πιθανότητα να υπάρχουν n αντικείμενα στο σύστημα είναι:	$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$
Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στο σύστημα (ουρά & εξυπηρέτηση) είναι:	$L = \frac{\lambda(2\mu - \lambda)}{2\mu(\mu - \lambda)}$
Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στην ουρά είναι:	$L_Q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)}$
Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι:	$W = \frac{2\mu - \lambda}{2\mu(\mu - \lambda)}$
Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι:	$W_Q = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)}$

♦ **Το μοντέλο M/G/∞**

Στο συγκεκριμένο σύστημα η χωρητικότητα είναι άπειρη, οι εξυπηρετητές είναι άπειροι και η σειρά εξυπηρέτησης είναι First In First Out (FIFO). Επιπρόσθετα, οι αφίξεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή και ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί τη γενική κατανομή (Οικονόμου & Γεωργίου, 2011).

Η πιθανότητα να υπάρχουν n αντικείμενα στο σύστημα είναι:	$P_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\frac{\lambda}{\mu}}, n \geq 0$
Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στο σύστημα (ουρά & εξυπηρέτηση) είναι:	$L = \frac{\lambda}{\mu}$
Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στην ουρά είναι:	$L_Q = 0$
Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι:	$W = \frac{1}{\mu}$
Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι:	$W_Q = 0$

3.8 Τιμές Συναρτήσεων των συστημάτων ουρών

3.8.1 Η $M / Cox(r) / 1$ ουρά

Υποθέτουμε ένα εξυπηρετητή στο σύστημα ουράς στο οποίο φτάνουν οι πελάτες σύμφωνα με τη διαδικασία Poisson με παράμετρο λ . Οι τιμές εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητες τυχαία κατανομημένες και ακολουθούν την Coxian κατανομή με σειρά r . Άρα η εξυπηρέτηση ενός πελάτη μπορεί να διαρκέσει έως r εκθετικές φάσεις. Η μέση διάρκεια της φάσης i είναι μ_i , για $i = 1, \dots, r$. Η εξυπηρέτηση αρχίζει στη φάση 1. Μετά τη φάση i , η εξυπηρέτηση ή τελειώνει με πιθανότητα $1 - p_i$, ή εισέρχεται στη φάση $i+1$ με πιθανότητα p_i για $i = 1, \dots, r-1$. Η εξυπηρέτηση ολοκληρώνεται με σιγουριά μετά τη φάση r , εάν δεν ολοκληρωθεί σε πρώτη φάση. Υποθέτουμε ότι $p_i > 0$ για $i = 1, \dots, r-1$ ώστε να αποφύγουμε τετριμμένες καταστάσεις. Έστω $X = \{(0, 0)\} \cup \mathbb{N} \times \{0, \dots, r-1\}$ δηλώνει τον χώρο καταστάσεων, όπου για $(x, y) \in X$ το στοιχείο x αντιπροσωπεύει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα και y τον αριθμό των ολοκληρωμένων φάσεων της διαδικασίας εξυπηρέτησης (Boucherie & Van Dijk, 2017).

Υποθέτουμε ότι το σύστημα υπόκειται σε κόστος κράτησης ενός πελάτη στο σύστημα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι τα μοναδιαία κόστη προκύπτουν για τη διατήρηση του πελάτη ανά μονάδα χρόνου στο σύστημα. Έστω $u_i(x)$ ορίζουμε το συνολικό αναμενόμενο κόστος τη χρονική στιγμή t όταν

σύστημα ξεκινάει στην κατάσταση x . Έστω $\gamma(i) = \prod_{k=1}^i p_k$ για $i = 0, \dots, r-1$ με τη σύμβαση ότι $\gamma(0) = 1$.

Παρατηρούμε ότι η μαρκοβιανή αλυσίδα ικανοποιεί τη Unichain συνθήκη. Ας υποθέσουμε ότι η συνθήκη σταθερότητας $\sum_{k=1}^r \gamma(k-1) \frac{\lambda}{\mu_k} = \sum_{k=1}^r \prod_{l=1}^{k-1} p_l \frac{\lambda}{\mu_k} < 1$, ισχύει, έτσι ώστε το μέσο κόστος να είναι ανεξάρτητο από την αρχική κατάσταση x . Επομένως οι εξισώσεις βελτιστοποίησης του δυναμικού προγραμματισμού για την ουρά $M / Cox(r) / 1$ δίνονται:

$$\begin{aligned} g + \lambda V(0, 0) &= \lambda V(1, 0), \\ g + (\lambda + \mu_i) V(x, i-1) &= \lambda V(x+1, i-1) + p_i \mu_i V(x, i) + (1-p_i) \mu_i V(x-1, 0) + x, i = 1, \dots, r-1, \\ g + (\lambda + \mu_r) V(x, r-1) &= \lambda V(x+1, r-1) + \mu_r V(x-1, 0) + x. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τους Boucherie & Van Dijk(2017), η λύση σε αυτό το σύνολο εξισώσεων δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα*

Έστω $\gamma(i) = \prod_{k=1}^i p_k$ για $i = 0, \dots, r-1$ με τη σύμβαση ότι $\gamma(0) = 1$. Ορίζουμε

$$\alpha = \frac{\sum_{k=1}^r \frac{\gamma(k-1)}{\mu_k}}{1 - \sum_{k=1}^r \frac{\gamma(k-1)}{\mu_k} \lambda}, \text{ και } \alpha_0 = \sum_{k=1}^r \frac{1 - \gamma(k-1)}{\mu_k} \lambda \alpha - \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\gamma(l-1)}{\mu_k \mu_l} \lambda (1 + \lambda \alpha).$$

Η λύση στις εξισώσεις Poisson δίνεται από μέσο κόστος $g = \lambda(\alpha + \alpha_0)$ και η αντίστοιχη τιμή συνάρτησης

$$V(x, y) = \alpha \frac{x(x+1)}{2} + \left[\alpha_0 + \left[\frac{1}{\gamma(y)} - 1 \right] \alpha - \sum_{k=1}^y \frac{\gamma(k-1) 1 + \lambda \alpha}{\gamma(y) \mu_k} \right] x - \left[\alpha_0 + \sum_{k=y+1}^r \frac{\gamma(k-1)}{\gamma(y) \mu_k} \left(\sum_{l=1}^{k-1} \frac{\gamma(l-1) 1 + \lambda \alpha}{\gamma(k-1) \mu_l} - \left[\frac{1}{\gamma(k-1)} - 1 \right] \alpha \right) \right],$$

για $(x, y) \in X$ (Boucherie & Van Dijk, 2017).

3.8.2 Ειδικές περιπτώσεις της ουράς $M / Cox(r) / 1$

Βάσει των Boucherie & Van Dijk (2017), περιλαμβάνονται ουρές με χρόνο εξυπηρέτησης κατανομών που μοντελοποιούνται από την υπερ- εκθετική (H_r), υπο- εκθετική ($Hypr_r$), την Erlang (E_r) και την εκθετική κατανομή (M).

❖ Η ουρά $M / H_r / 1$

Η ουρά ενός εξυπηρετητή με υπερ- εκθετικά κατανεμημένους χρόνους εξυπηρέτησης της σειράς r επιτυγχάνεται αφήνοντας τους χρόνους εξυπηρέτησης να αποτελούνται μόνο από μία εκθετική φάση με παράμετρο μ_i με πιθανότητα q_i για $i = 1, \dots, r$. Παρατηρούμε ότι η υπερ- εκθετική κατανομή έχει την ιδιότητα ότι ο συντελεστής διακύμανσης είναι μεγαλύτερος ή ίσος του ένα. Δυστυχώς η υπερ-εκθετική κατανομή δεν αποκτάται άμεσα από την Coxian κατανομή μέσω της ερμηνείας, αλλά δείχνοντας ότι οι μετασχηματισμοί Laplace της συνάρτησης κατανομής είναι ίσοι για συγκεκριμένες επιλογές των παραμέτρων. Η γενίκευση αναφέρεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα

Κάτω από την υπόθεση ότι $\mu_1 > \dots > \mu_r$, η Coxian κατανομή με παραμέτρους $(p_1, \dots, p_{r-1}, \mu_1, \dots, \mu_r)$ είναι ισοδύναμη με την υπερ-εκθετική κατανομή με παραμέτρους $(q_1, \dots, q_r, \mu_1, \dots, \mu_r)$ όταν οι πιθανότητες p_i ορίζονται ως

$$p_i = \frac{\sum_{j=i+1}^r q_j \prod_{k=1}^i (\mu_k - \mu_j)}{\mu_i \sum_{j=1}^r q_j \prod_{k=1}^{i-1} (\mu_k - \mu_j)}, \text{ για } i = 1, \dots, r-1.$$

❖ Η ουρά $M / Hypo_r / 1$

Η ουρά ενός εξυπηρετητή με υπο- εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης της σειράς r επιτυγχάνεται αφήνοντας την εξυπηρέτηση να είναι το άθροισμα των r ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που κατανέμονται εκθετικά με παράμετρο μ_i στη φάση i για $i = 1, \dots, r$. Τότε μπορεί να ληφθεί από την ουρά $M / Cox(r) / 1$ αφήνοντας $p_1 = \dots = p_{r-1} = 1$. Οι εξισώσεις βελτιστοποίησης δίνονται από:

$$\begin{aligned} g + \lambda V(0, 0) &= \lambda V(1, 0) \\ g + (\lambda + \mu_i) V(x, i-1) &= \lambda V(x+1, i-1) + \mu_i V(x, i) + x, i = 1, \dots, r-1, \\ g + (\lambda + \mu_r) V(x, r-1) &= \lambda V(x+1, r-1) + \mu_r V(x-1, 0) + x. \end{aligned}$$

Ορίζουμε $\beta(i) = \sum_{k=1}^i (1/\mu_k)$, τότε το μέσο κόστος είναι:

$$g = \frac{\lambda \beta(r)}{1 - \lambda \beta(r)} - \frac{\lambda^2}{1 - \lambda \beta(r)} \sum_{k=1}^r \frac{\beta(k-1)}{\mu_k}, \text{ υπό την υπόθεση } \lambda \beta(r) < 1 \text{ η τιμή της συνάρτησης γίνεται:}$$

$$V(x, y) = \frac{\beta(r)x(x+1)}{2(1 - \lambda \beta(r))} - \frac{x}{1 - \lambda \beta(r)} \left[\lambda \sum_{k=1}^r \frac{\beta(k-1)}{\mu_k} + \beta(y) \right] + \frac{\lambda}{1 - \lambda \beta(r)} \sum_{k=1}^y \frac{\beta(k-1)}{\mu_k}.$$

❖ Η ουρά $M / E_r / 1$

Η ουρά ενός εξυπηρετητή με Erlang κατανομημένους χρόνους εξυπηρέτησης της σειράς r επιτυγχάνεται αφήνοντας την εξυπηρέτηση να είναι το άθροισμα των r ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών έχοντας μία κοινή εκθετική κατανομή. Τότε, μπορεί να ληφθεί από την ουρά $M / Cox(r) / 1$ αφήνοντας $p_1 = \dots = p_{r-1} = 1$ και $\mu = \mu_1 = \dots = \mu_r$. Παρατηρούμε ότι η κατανομή Erlang μπορεί να θεωρηθεί ως μία ειδική περίπτωση της υπο-

εκθετικής κατανομής και έχει ένα συντελεστή διακύμανσης ίσο με $1/r \leq 1$. Οι εξισώσεις βελτιστοποίησης είναι:

$$\begin{aligned} g + \lambda V(0,0) &= \lambda V(1,0), \\ g + (\lambda + \mu)V(x,i-1) &= \lambda V(x+1,i-1) + \mu V(x,i) + x, i=1, \dots, r-1, \\ g + (\lambda + \mu)V(x,r-1) &= \lambda V(x+1,r-1) + \mu V(x-1,0) + x. \end{aligned}$$

Το μέσο κόστος είναι $g = \frac{\lambda r}{\mu - \lambda r} - \frac{\lambda^2 r(r-1)}{2\mu(\mu - \lambda r)}$, και υπό την υπόθεση $\lambda r / \mu < 1$ η τιμή της συνάρτησης γίνεται:

$$V(x,y) = \frac{rx(x+1)}{2(\mu - \lambda r)} - \frac{x}{(\mu - \lambda r)} \left[\frac{\lambda r(r-1)}{2\mu} + y \right] + \frac{\lambda r(r-1)}{2\mu(\mu - \lambda r)} \text{ (Boucherie \& Van Dijk, 2017).}$$

❖ Η ουρά $M/M/1$

Η ουρά ενός τυπικού εξυπηρετητή με εκθετικά κατανεμημένους χρόνους εξυπηρέτησης γίνεται έχοντας μόνο μία φάση στην ουρά $M/Cox(r)/1$, δηλαδή $r=1$. Έστω $\mu = \mu_1$, τότε οι εξισώσεις βελτιστοποίησης είναι ισοδύναμες με

$$g + (\lambda + \mu)V(x) = \lambda V(x+1) + \mu V([x-1]^+) + x, \text{ όπου } [x]^+ = \max\{x, 0\}.$$

Το μέσο κόστος είναι $g = \lambda/(\mu - \lambda)$, και υπό την υπόθεση $\lambda / \mu < 1$,

Η τιμή της συνάρτησης γίνεται:

$$V(x) = \frac{x(x+1)}{2(\mu - \lambda)}.$$

❖ Η ουρά $M/M/s$

Θεωρούμε ότι ένα σύστημα ουρών με s ισόνομους ανεξάρτητους εξυπηρετητές. Οι αφίξεις καθορίζονται από μία διαδικασία Poisson με παράμετρο λ . Οι χρόνοι εξυπηρέτησης κατανέμονται εκθετικά με παράμετρο μ . Όταν φτάνει ένας πελάτης και δεν μπορεί να εξυπηρετηθεί, περιμένει σε ένα buffer άπειρου μεγέθους. Εστιάζουμε στο μέσο αριθμό των πελατών στο σύστημα που αντιπροσωπεύεται από την παραγωγή/δημιουργία ενός κόστους x νομισματικών μονάδων όταν x πελάτες είναι μέσα στο σύστημα. Οι εξισώσεις Poisson για αυτήν την ουρά $M/M/s$ είναι :

$$\begin{aligned}
g + \lambda V(0) &= \lambda V(1), \\
g + (\lambda + x\mu)V(x) &= x + \lambda V(x+1) + x\mu V(x-1), x = 1, \dots, s-1, \\
g + (\lambda + s\mu)V(x) &= x + \lambda V(x+1) + s\mu V(x-1), x = s, s+x, \dots,
\end{aligned}$$

Από την 1^η εξίσωση συμπεραίνουμε ότι $V(1) = g/\lambda$. Η 2^η εξίσωση μπορεί να γραφεί όπως η εξίσωση (3) με $\alpha(x) = -(\lambda + x\mu)/\lambda$, $\beta(x) = x\mu$ και $q(x) = g/\lambda$. Από το θεώρημα 2.1 έχουμε:

$$V(x) = \frac{g}{\lambda} \sum_{i=1}^x \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(i-1)!}{(i-k-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-k} - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^x (i-1) \sum_{k=0}^{i-2} \frac{(i-2)!}{(i-k-2)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-k}.$$

Έστω $\rho = \lambda/(s\mu)$. Για $x = s, s+1, \dots$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
V(x) &= V(s) - \frac{(x-s)\rho g}{1-\rho} \frac{1}{\lambda} + \left[\frac{(x-s)(x-s+1)\rho}{2(1-\rho)} + \frac{(x-s)(\rho + s(1-\rho))\rho}{(1-\rho)^2} \right] \frac{1}{\lambda} \\
&\quad + \frac{1}{1-\rho} \left[\frac{\rho}{1-\rho} \frac{g}{\lambda} + h(s) - h(s-1) - \frac{(\rho + s(1-\rho))\rho}{\lambda(1-\rho)^2} \right].
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με τους Boucherie & Van Dijk (2017), το μακροπρόθεσμο αναμενόμενο κόστος, που αντιπροσωπεύει το μέσο αριθμό των πελατών στο σύστημα, στην περίπτωση μας, είναι:

$$g = \frac{(s\rho)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^n}{n!} + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1} + s\rho.$$

3.8.3 Κόστη αποκλεισμού σε μία ουρά

Θεωρούμε το προηγούμενο σύστημα ουρών με s ισόνομους ανεξάρτητους εξυπηρετητές χωρίς buffers για την αναμονή των πελατών. Όταν φτάνει ένας πελάτης και δεν μπορεί να εξυπηρετηθεί, τότε μπλοκάρεται και παράγεται ένα κόστος μίας νομισματικής μονάδας. Έστω η κατάσταση x είναι ο αριθμός των πελατών στο σύστημα. Οι εξισώσεις Poisson για την ουρά $M/M/s/s$ είναι:

$$\begin{aligned}
g + \lambda V(0) &= \lambda V(1), \\
g + (\lambda + x\mu)V(x) &= \lambda V(x+1) + x\mu V(x-1), x = 1, \dots, s-1, \\
g + s\mu V(s) &= \lambda + s\mu V(s-1).
\end{aligned}$$

Για να βρούμε τη σχετική τιμή της συνάρτησης, επαναλαμβάνουμε τα ίδια βήματα όπως στην περίπτωση της ουράς $M/M/s$. Οπότε προκύπτει η ακόλουθη τιμή της συνάρτησης:

$$V(x) = \frac{g}{\lambda} \sum_{i=1}^x \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(i-1)!}{(i-k-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-k} = \frac{(\lambda/\mu)^s / s!}{\sum_{i=0}^s (\lambda/\mu)^i / i!} \sum_{i=1}^x \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(i-1)!}{(i-k-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-k}.$$

Σύμφωνα με τους Boucherie & Van Dijk (2017), το μέσο κόστος είναι:

$$g = \frac{(\lambda/\mu)^s / s!}{\sum_{i=0}^s (\lambda/\mu)^i / i!} \lambda.$$

3.8.4 Ουρές προτεραιότητας

Θεωρούμε ένα σύστημα αναμονής με δύο κλάσεις των πελατών σύμφωνα με τη διαδικασία Poisson. Υπάρχει μόνο ένας εξυπηρετητής διαθέσιμος που εξυπηρετεί είτε ένα πελάτη της 1^{ης} κλάσης είτε ένα πελάτη της 2^{ης} κλάσης με εκθετικά κατανομημένους χρόνους. Ο πελάτης της i -κλάσης έχει ρυθμό άφιξης λ_i και ρυθμό εξυπηρέτησης μ_i για $i=1,2$. Το σύστημα υπόκειται σε κόστη κράτησης και σε κόστη αλλαγής. Το κόστος της κράτησης ενός πελάτη της i -κλάσης στο σύστημα σε μία μονάδα του χρόνου είναι c_i για $i=1,2$. Το κόστος αλλαγής από τον πελάτη της 1^{ης} κλάσης στον πελάτη της 2^{ης} κλάσης (ή από τον πελάτη της 2^{ης} κλάσης στον πελάτη της 1^{ης} κλάσης) είναι s_1 (s_2 , αντίστοιχα).

Το σύστημα ακολουθεί μία σειρά προτεραιότητας που δείχνει ότι οι πελάτες της 1^{ης} κλάσης έχουν προτεραιότητα έναντι των πελατών της 2^{ης} κλάσης. Η προτεραιότητα είναι προνομιακή. Δηλαδή όταν εξυπηρετείται ένας πελάτης της 2^{ης} κλάσης, η εξυπηρέτηση αλλάζει αμέσως για να εξυπηρετήσει έναν πελάτη της 1^{ης} κλάσης, μόλις προσέλθει της 1^{ης} κλάσης. Μόλις αδειάσει η ουρά των πελατών της 1^{ης} κλάσης, η εξυπηρέτηση των πελατών της 2^{ης} κλάσης, εάν υπάρχει, επαναλαμβάνεται από το σημείο που είχε σταματήσει. Λόγω των εκθετικών χρόνων εξυπηρέτησης, αυτό ισοδυναμεί με την επανεκκίνηση της εξυπηρέτησης για αυτόν τον πελάτη.

Έστω η κατάσταση (x, y, z) για $x, y \in \mathbb{N}_0$, $z \in \{1, 2\}$ δηλώνουν ότι υπάρχουν x πελάτες της 1^{ης} κλάσης και y πελάτες της 2^{ης} κλάσης που βρίσκονται στο σύστημα, με τον εξυπηρετητή που εξυπηρετεί ένα πελάτη z -κλάσης, εάν υπάρχει (Boucherie & Van Dijk, 2017).

Έστω $\rho_i = \lambda_i / \mu_i$ για $i=1,2$ και υποθέτουμε ότι η συνθήκη σταθερότητας $\rho_1 + \rho_2 < 1$ διατηρείται. Τότε η μαρκοβιανή αλυσίδα είναι σταθερή και η σχέση $g < \infty$ διατηρείται. Επίσης η μαρκοβιανή αλυσίδα ικανοποιεί τη Unichain συνθήκη, ως εκ τούτου οι εξισώσεις Poisson είναι:

$$\begin{aligned} g + (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)V(x, y, 1) &= c_1x + c_2y + \lambda_1V(x+1, y, 1) + \lambda_2V(x, y+1, 1) + \mu_1V(x-1, y, 1), x > 0, y \geq 0, \\ V(0, y, 1) &= s_1 + V(0, y, 2), y > 0, \\ V(x, y, 2) &= s_2 + V(x, y, 1), x > 0, y \geq 0, \\ g + (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)V(0, y, 2) &= c_2y + \lambda_1V(1, y, 2) + \lambda_2V(0, y+1, 2) + \mu_2V(0, y-1, 2), y > 0, \\ g + (\lambda_1 + \lambda_2)V(0, 0, z) &= \lambda_1V(1, 0, z) + \lambda_2V(0, 1, z), z = 1, 2. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, έχοντας υπόψη τις τιμές της, οι τιμές της παρήχθησαν από τις διαφορικές εξισώσεις:

$$V(x, y, 2) = V(x, y, 1) + (\lambda_1 s_2 - \lambda_2 s_1) / (\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$\mathbb{1}(x=0, y=0) - s_1 \mathbb{1}(x=0, y>0) + s_2 \mathbb{1}(x>0, y \geq 0)$$

Θα δείξουμε την σχέση για τη $V(x, y, 1)$. Έστω η $V = V_g + V_{c_1} + V_{c_2} + V_{s_1} + V_{s_2}$ να είναι η αποσύνθεση της τιμής της συνάρτησης. Τότε γνωρίζουμε ότι οι V_g, V_{c_1} και V_{c_2} είναι ανεξάρτητες του z .

Η τιμή της συνάρτησης V_{c_1} ισούται με την τιμή της συνάρτησης της ουράς ενός εξυπηρετητή εξαιτίας της προληπτικής συμπεριφοράς του συστήματος. Οι άλλες τιμές των συναρτήσεων προκύπτουν θέτοντας $V(x, y) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3 y^2 + c_4 y + c_5 xy + c_6$ με σταθερές c_i για $i=1, \dots, 6$ που θα καθοριστούν. Αντικαθιστώντας αυτή την ισότητα στις εξισώσεις βελτιστοποίησης έχουμε ένα νέο σύνολο εξισώσεων που είναι ευκολότερο να λυθεί. Έστω θ , $\theta \in (0, 1)$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης:

$$\lambda_1 x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)x + \mu_1 = 0$$

Στη συνέχεια, βάσει των Boucherie & Van Dijk (2017), η επίλυση για τις σταθερές δίνει τη λύση στις εξισώσεις βελτιστοποίησης, η οποία είναι :

$$V_g(x, y, z) = -\frac{x}{\mu_1(1-\rho_1)} g,$$

$$V_{c_1}(x, y, z) = \frac{x(x+1)}{2\mu_1(1-\rho_1)} c_1 + \frac{\rho_1 x}{\mu_1(1-\rho_1)^2} c_1,$$

$$V_{c_2}(x, y, z) = \frac{\lambda_2 x(x+1)}{2\mu_1^2(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)} c_2 + \frac{\rho_2(\mu_1 - \lambda_1 + \mu_2 \rho_1)x}{\mu_1^2(1-\rho_1)^2(1-\rho_1-\rho_2)} c_2 + \frac{y(y+1)}{2\mu_2(1-\rho_1-\rho_2)} c_2 + \frac{xy}{\mu_1(1-\rho_1-\rho_2)} c_2,$$

$$V_{s_i}(x, y, 1) = \frac{\lambda_1 \theta}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\rho_1 \rho_2 x}{1-\rho_1} s_i + \frac{\lambda_1 \theta}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\lambda_1 y}{\mu_2} s_i + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} s_i \mathbb{1}_{(y>0)} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} (1-\theta^x) s_i \mathbb{1}_{(x>0, y=0)}, i=1, 2,$$

με

$$g = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} c_1 + \frac{\rho_2(\mu_1 - \mu_1 \rho_1 + \mu_2 \rho_1)}{\mu_1(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)} c_2 + (s_1 + s_2) \times$$

$$\left[\lambda_1 \left\{ \rho_1 \left(\frac{\lambda_1 \theta}{\lambda_1 + \lambda_2} - 1 \right) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} (1-\theta) \right\} + \lambda_2 \left\{ \frac{\lambda_1 \theta}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right\} \right].$$

3.9 Δίκτυα Συστημάτων Ουρών

Τα απλά συστήματα αναμονής έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν είτε ως μοντέλα μελέτης ενός πόρου κάποιου πληροφοριακού συστήματος είτε ως μοντέλα για μία μακροσκοπική μελέτη συστήματος θεωρώντας το ένα πόρο. Για το λόγο αυτό υλοποιήθηκαν τα δίκτυα συστημάτων αναμονής, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μοντέλα για πολύπλοκα πληροφορικά συστήματα, που περιέχουν περισσότερους από έναν πόρους και στα οποία οι «πελάτες» μετακινούνται από τον ένα πόρο στον άλλο.

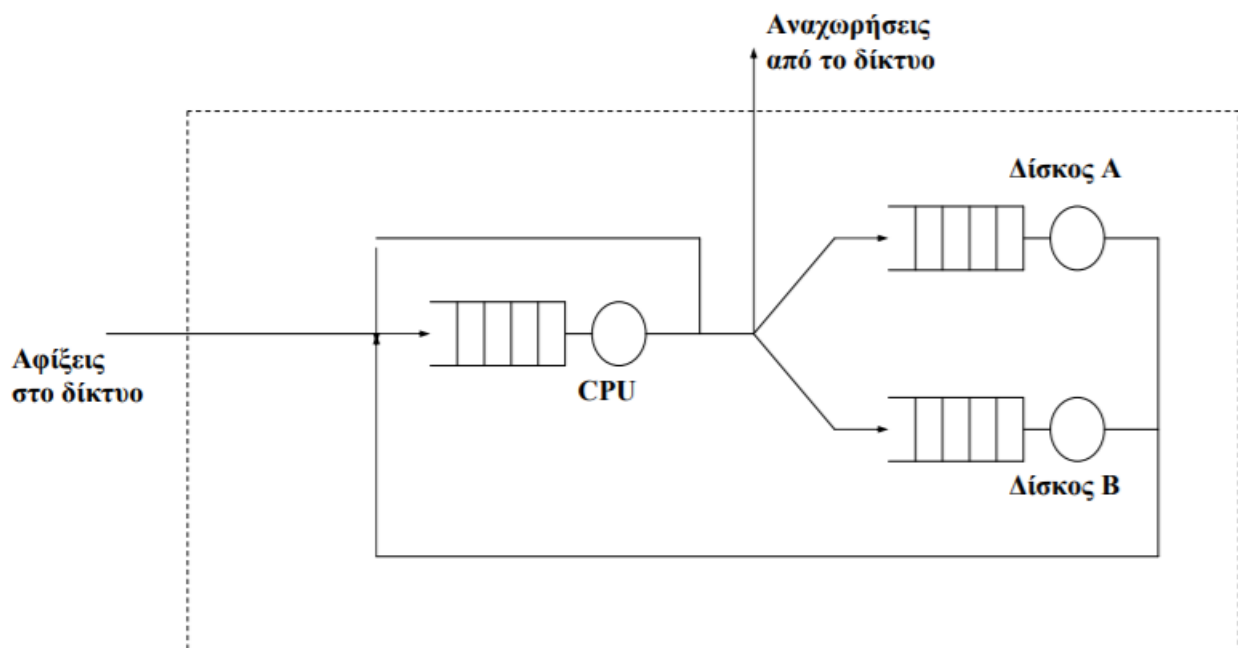
Ορισμοί

Δίκτυο συστημάτων αναμονής αποτελεί μία συλλογή απλών συστημάτων αναμονής, στην οποία κάθε «πελάτης», ο οποίος αναχωρεί από ένα απλό σύστημα, μετακινείται σε κάποιο άλλο (πιθανώς το ίδιο) ή αναχωρεί από το δίκτυο, αν αυτό επιτρέπεται.

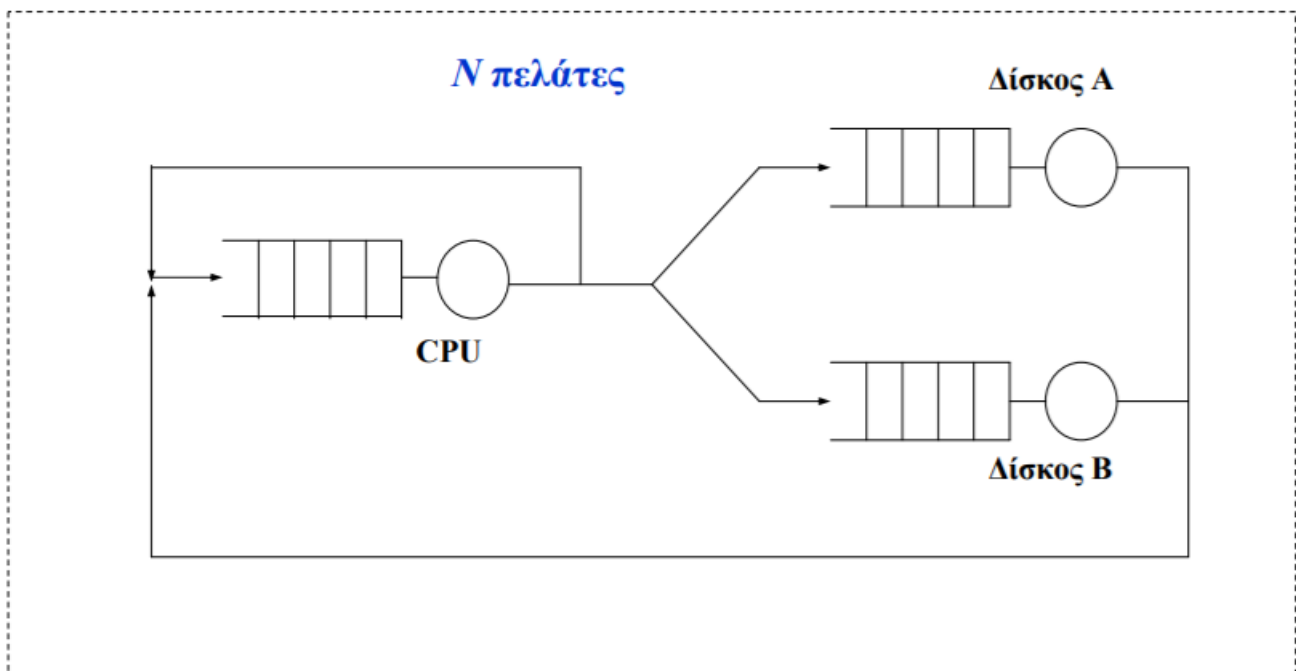
Ανοιχτό δίκτυο συστημάτων αναμονής είναι το δίκτυο στο οποίο επιτρέπονται αφίξεις από το περιβάλλον του και αναχωρήσεις προς το περιβάλλον.

Κλειστό δίκτυο συστημάτων αναμονής είναι το δίκτυο στο οποίο δεν επιτρέπονται αφίξεις και αναχωρήσεις, αλλά διατηρείται ένας σταθερός αριθμός N μετακινούμενων «πελατών» (Γαροφαλάκης, χ.χ.).

Παράδειγμα ανοιχτού δικτύου



Παράδειγμα κλειστού δικτύου



Central Server Model

Περιγραφή δικτύων συστημάτων αναμονής

- Ένα δίκτυο συστημάτων αναμονής, μπορεί να περιγραφεί από ένα σύνολο M σταθμών.
- Κάθε σταθμός αναπαριστά κάποια παροχή υπηρεσίας με τη βοήθεια c_i εξυπηρετητές στο σταθμό $i, i = 1, 2, 3, \dots, M$.
- Γενικά, οι πελάτες μπορούν να αφιχθούν από το περιβάλλον στο δίκτυο σε οποιοδήποτε σταθμό και να εγκαταλείψουν το σύστημα από οποιοδήποτε σταθμό.
- Μπορούν να διασχίσουν το σύστημα από διαφορετικά μονοπάτια κάθε φορά.
- Μπορούν να επιστρέψουν σε σταθμούς που έχουν προηγουμένως επισκεφτεί, να παραλείψουν εντελώς κάποιους από αυτούς ή ακόμα να επιλέξουν να παραμείνουν στο σύστημα για πάντα.

Δίκτυα Jackson

- ◆ Οι αφίξεις από το περιβάλλον στο σταθμό i (ουρές μήκους ∞) ακολουθούν μία διαδικασία Poisson με μέσο ρυθμό γ_i .
- ◆ Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ίδιοι στους εξυπηρετητές κάθε σταθμού, ανεξάρτητοι και εκθετικά κατανομημένοι με παράμετρο μ_i (θεωρούμε ένα εξυπηρετητή ανά σταθμό, εύκολα > 1).

- ◆ Η πιθανότητα ένας πελάτης που τελείωσε την εξυπηρέτησή του στο σταθμό i , να πάει στο σταθμό j (routing probability), είναι r_{ij} (ανεξάρτητη από την κατάσταση του συστήματος) με $i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, M$.
- ◆ Η πιθανότητα r_{i0} υποδεικνύει την πιθανότητα ο πελάτης να αναχωρήσει από το δίκτυο, από το σταθμό i (Γαροφαλάκης, χ.χ.).

- Εάν οι πελάτες φτάνουν στην ουρά i με ρυθμό λ_i και ένα μέρος τους $0 \leq p_{ij} \leq 1$ δρομολογείται στην ουρά j κατά την αναχώρηση, τότε ο ρυθμός άφιξης από την ουρά i στην ουρά j είναι : $\lambda_j = \lambda_i p_{ij}$ μακροπρόθεσμα.
- Ο ρυθμός αναχώρησης εκτός ουράς είναι ίσος με το ρυθμό άφιξης εντός της ουράς.
- Το συνολικό ποσοστό άφιξης στην ουρά j :

$$\lambda_j = a_j + \sum_{\text{all } i} \lambda_i p_{ij}$$

Arrival rate
from outside
the network

Sum of arrival rates
from other queues in
network

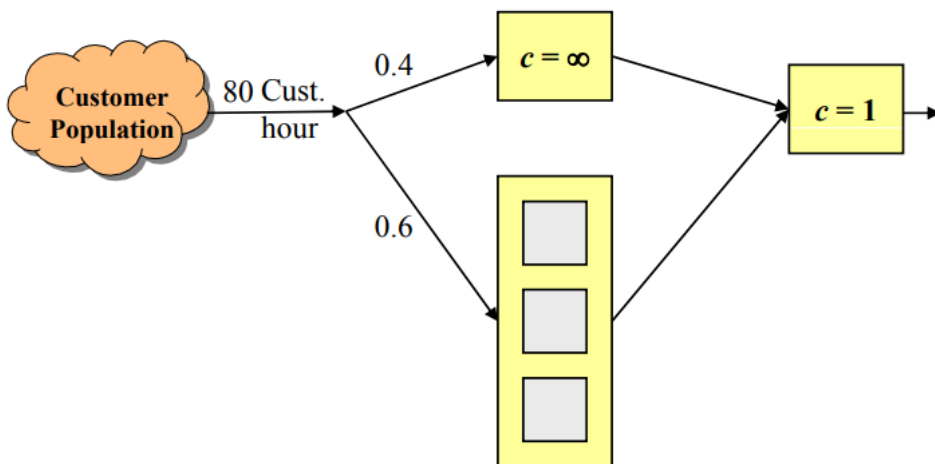
- Εάν η ουρά j έχει $c_j < \infty$ παράλληλοι εξυπηρετητές με ρυθμό μ_j τότε ο συντελεστής απασχόλησης για κάθε εξυπηρετητή είναι :

$$\rho_j = \frac{\lambda_j}{c_j \mu_j}$$

- Εάν οι αφίξεις εκτός του δικτύου έχουν ρυθμό a_j για κάθε ουρά j και αν υπάρχουν c_j όμοιοι εξυπηρετητές με εκθετικούς χρόνους με μέσο $1/\mu_j$ τότε η ουρά j συμπεριφέρεται ως μία ουρά M/M/c με ρυθμό

$$\lambda_j = a_j + \sum_{\text{all } i} \lambda_i p_{ij}$$

Παράδειγμα δικτύου ουρών



Οι πελάτες φτάνουν με ρυθμό 80 ανά ώρα και 40% επιλέγουν να αυτοεξυπηρετηθούν.

Ως εκ τούτου,

- Ο ρυθμός άφιξης του κέντρου εξυπηρέτησης 1 είναι $\lambda_1=80(0.4)=32$ ανά ώρα.
- Ο ρυθμός άφιξης του κέντρου εξυπηρέτησης 2 είναι $\lambda_2=80(0.6)=48$ ανά ώρα.
- $C_2=3$ υπάλληλοι και $\mu_2=20$ πελάτες ανά ώρα.
- Ο συντελεστής απασχόλησης των υπαλλήλων είναι $\rho_2=48/(3 \times 20)=0.8$
- Όλοι οι πελάτες βλέπουν τον ταμιά στο κέντρο εξυπηρέτησης 3, ο συνολικός ρυθμός εξυπηρέτησης του κέντρου 3 είναι $\lambda_3=\lambda_1+\lambda_2=80$ ανά ώρα.
- Εάν $\mu_3=90$ ανά ώρα, τότε ο συντελεστής απασχόλησης του ταμιά είναι $\rho_3=80/90=0.89$.

Παράδειγμα δικτύου ουρών

⇒ Οι οριακές πιθανότητες δίνονται από τον τύπο $P_{(n_1, \dots, n_k)} = \prod_{j=1}^k \left(\frac{\lambda_j}{\mu_j} \right)^{n_j} \left(1 - \frac{\lambda_j}{\mu_j} \right)$.

⇒ Ο μέσος αριθμός πελατών $L = \sum_{j=1}^k \frac{\lambda_j}{\mu_j - \lambda_j}$.

⇒ Ο μέσος χρόνος αναμονής πελατών στο σύστημα $W = \frac{\sum_{j=1}^k \frac{\lambda_j}{\mu_j - \lambda_j}}{\sum_{j=1}^k r_j}$.

Θεωρούμε ένα δίκτυο ουρών με δυο υπηρέτες. Οι πελάτες φθάνουν στον υπηρέτη 1 σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό 4 και στον υπηρέτη 2 σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό 5. Οι ρυθμοί εξυπηρέτησης των υπηρετών 1 και 2 είναι ίσοι με 8 και 10 αντίστοιχα. Ένας πελάτης μετά την συμπλήρωση της εξυπηρέτησης του από τον υπηρέτη 1 εγκαταλείπει το σύστημα ή πηγαίνει στον υπηρέτη 2 με ίσες πιθανότητες (δηλαδή $P_{11} = 0, P_{12} = \frac{1}{2}$). Ένας πελάτης μετά την εξυπηρέτησή του από τον υπηρέτη 2 πηγαίνει στον υπηρέτη 1 με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ ή εγκαταλείπει το σύστημα (δηλαδή $P_{21} = \frac{1}{4}, P_{22} = 0$). Βρείτε τις οριακές πιθανότητες και τις ποσότητες L και W .

Λύση

Εδώ οι συνολικοί ρυθμοί άφιξης λ_1 και λ_2 προς τους εξυπηρετητές 1 και 2 υπολογίζονται από το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda_1 = r_1 + \sum_{i=1}^2 \lambda_i P_{i1} = 4 + \frac{1}{4} \lambda_2 \\ \lambda_2 = r_2 + \sum_{i=1}^2 \lambda_i P_{i2} = 5 + \frac{1}{2} \lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = 6, \lambda_2 = 8$$

Άρα οι οριακές πιθανότητες είναι

$$P_{(n,m)} = \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda_1}{\mu_1}\right) \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1}{4} \left(\frac{4}{5}\right)^m \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^m$$

Επίσης, ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι

$$L = \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2 - \lambda_2} = \frac{6}{8-6} + \frac{8}{10-8} = 7$$

και ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{7}{9}.$$

Κεφάλαιο 4

4.1 Ανάλυση Συστημάτων Ουρών με Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων

4.1.1 Το πρόβλημα Devil's penny

Υποθέτουμε ότι τοποθετούνται $n+1$ κλειστά κουτιά σε τυχαία σειρά μπροστά από εμάς. Ένα από αυτά τα κουτιά περιέχει το devil's penny και τα υπόλοιπα n κουτιά αποφέρουν a_1, \dots, a_n ποσά δολαρίων. Μπορούμε να ανοίξουμε όσα κουτιά επιθυμούμε, αλλά πρέπει να ανοιχθούν ένα προς ένα. Επίσης, μπορούμε να κρατήσουμε τα χρήματα από τα κουτιά, που έχουμε ανοίξει, εφόσον δεν έχουμε ανοίξει το κουτί με το devil's penny. Μόλις ανοίξουμε το κουτί, το παιχνίδι σταματάει και χάνουμε όλα τα χρήματα που έχουμε κερδίσει μέχρι τώρα. Ποιος είναι ο βέλτιστος κανόνας διακοπής όταν θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την αναμενόμενη τιμή του κέρδους μας;

Το πρόβλημα αυτό τοποθετείται ως ένα βέλτιστο μοντέλο διακοπής. Ο χώρος καταστάσεων είναι ορισμένος και δίνεται από το σύνολο:

$$I = \{0\} \cup \{(k, b_1, \dots, b_k) : 1 \leq k \leq n-1\} \cup \{(1, 0)\}.$$

Κατάσταση 0: Η κατάσταση αυτή σημαίνει ότι έχει ανοιχτεί το κουτί με το devil's penny.

Κατάσταση (k, b_1, \dots, b_k) : Η παρούσα κατάσταση σημαίνει ότι υπάρχουν ακόμα $k+1$ μη ανοιχτά κουτιά, ανάμεσά τους και το κουτί με το devil's penny, όπου τα ποσά δολαρίων b_1, \dots, b_k εμπεριέχονται στα k κλειστά κουτιά που δεν περιλαμβάνουν το devil's penny (κάθε b_i είναι ένα από τα a_1, \dots, a_n).

Κατάσταση $(1, 0)$: Η συγκεκριμένη κατάσταση σημαίνει ότι το μόνο μη ανοιχτό κουτί αποτελεί το κουτί με το devil's penny.

Στην κατάσταση (k, b_1, \dots, b_k) έχει κερδηθεί μέχρι στιγμής το ποσό δολαρίων $A - \sum_{i=1}^k b_i$, όπου είναι το πραγματικό συνολικό ποσό δολαρίων των n κουτιών. Στην κατάσταση 0, η διαδικασία σταματάει και η μία τελική αμοιβή που λαμβάνεται είναι $R(0) = 0$. Στις υπόλοιπες καταστάσεις υπάρχουν δύο πιθανές ενέργειες $\alpha = 0$ και $\alpha = 1$. Η ενέργεια $\alpha = 1$ αναφέρει ότι μπορείτε να συνεχίσετε και να ανοίξετε ακόμα ένα κουτί. Δεν υπάρχει κάποιο κόστος σχετικά με τη συγκεκριμένη ενέργεια. Εάν επιλέξετε την ενέργεια διακοπής $\alpha = 0$ στην κατάσταση $s = (k, b_1, \dots, b_k)$, θα λάβετε μία τελική αμοιβή που είναι ίση με: $R(s) = A - \sum_{i=1}^k b_i$ (και $R(s) = A$ για $s = (1, 0)$). Έπειτα η διαδικασία συνεχίζει στην κατάσταση 0 με πιθανότητα ίση με $\frac{1}{k+1}$ και

στην κατάσταση $(k-1, b_1, \dots, b_{l-1}, b_{l+1}, \dots, b_k)$ με την ίδια πιθανότητα ίση με $\frac{1}{k+1}$ για $1 \leq l \leq k$. Για να αναλύσουμε τον κανόνα ενός σταδίου, θέτουμε για οποιαδήποτε κατάσταση $s = (k, b_1, \dots, b_k)$ την τυχαία μεταβλητή $D(s)$ που αναπαριστά το ποσό με το οποίο το τρέχον κέρδος $G = A - \sum_{j=1}^k b_j$ θα αλλάξει όταν θα αποφασίζατε να ανοίξετε ένα άλλο κουτί, όταν βρίσκεστε στην κατάσταση s . Τότε,

$$E(D(s)) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^k b_j - \frac{1}{k+1} G = \frac{1}{k+1} (A - G) - \frac{1}{k+1} G.$$

Προφανώς ισχύει ότι:

$$E(D(s)) \leq 0 \text{ αν και μόνο } G \geq \frac{1}{2} A.$$

Έστω το σύνολο: $B = \{0\} \cup \{s : E(D(s)) \leq 0\}$. Μπορούμε να δούμε ότι η ενέργεια $\alpha = 1$ στην κατάσταση $s \in B$ μπορεί μόνο να μας οδηγήσει σε καταστάσεις $t \in B$ (Boucherie & Van Dijk, 2017).

Θεώρημα: Υποθέτουμε ότι το σύνολο B είναι κλειστό, όπου $B = \left\{ i \in I : R(i) \geq -c(i) + \sum_{j \in I} p_{ij} R(j) \right\}$, έτσι ώστε

μόλις η διαδικασία εισέλθει στο σύνολο B παραμένει στο B . Δηλαδή ισχύει ότι: $p_{ij} = 0$ για $i \in B$ και $j \notin B$. Τότε ο one-stage-look-ahead κανόνας είναι ο βέλτιστος.

Επομένως, συμπεραίνουμε από το παραπάνω θεώρημα ότι ο συγκεκριμένος κανόνας είναι βέλτιστος ανάμεσα στην κατηγορία όλων των πιθανών κανόνων ελέγχου. Ο κανόνας αυτός ορίζει να σταματήσουμε στην κατάσταση $s = (k, b_1, \dots, b_k)$ μόνο εάν το ποσό των δολαρίων $G = A - \sum_{j=1}^k b_j$ που αποκτήθηκε είναι ίσο τουλάχιστον με το μισό του πραγματικού συνολικού ποσού A . Είναι αξιοσημείωτο ότι ο βέλτιστος κανόνας διακοπής εξαρτάται μόνο από το συνολικό ποσό δολαρίων των κουτιών και όχι από την κατανομή του συνολικού ποσού δολαρίων των κουτιών. Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχουν δύο κουτιά με το devil's penny, και μία εξέταση της ανάλυσης αποδεικνύει ότι είναι βέλτιστο να σταματήσουμε όσο νωρίτερα το ποσό των δολαρίων, που έχει κερδηθεί, είναι τουλάχιστον ίσο με το ένα τρίτο του συνολικού ποσού δολαρίων των κουτιών (Boucherie & Van Dijk, 2017).

4.1.2 Το παιχνίδι Chow- Robbins

Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα διακοπής είναι το παιχνίδι του Chow- Robbins. Ρίχνουμε επανειλημμένα ένα δίκαιο νόμισμα και μπορούμε οποιαδήποτε στιγμή επιθυμούμε, να το σταματήσουμε. Η αποπληρωμή σας θα είναι το ποσοστό εμφάνισης των κεφαλών που λαμβάνονται μέχρι τη στιγμή διακοπής. Δεν υπάρχει όριο αριθμού των ρίψεων. Ποιος είναι ο βέλτιστος κανόνας για να αποφασίσουμε να σταματήσουμε και ποια είναι η αναμενόμενη τιμή της αποπληρωμής υπό τον βέλτιστο κανόνα;

Αυτό το πρόβλημα είναι πολύ απλό στην περιγραφή αλλά πολύ δύσκολο να λυθεί. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο Νόμος των Μεγάλων αριθμών εξασφαλίζει 50% των κεφαλών μακροπρόθεσμα, το κάτω όριο ίσο με $\frac{3}{4}$ για τη μέγιστη αναμενόμενη τιμή της αποπληρωμής μπορεί να προκύψει εύκολα. Αυτό το κατώτερο όριο επιτυγχάνεται με τον κανόνα που ορίζει να σταματήσουμε εάν η πρώτη ρίψη οδηγήσει σε κεφαλές και αλλιώς να συνεχίσουμε μέχρι το ποσοστό των κεφαλών να γίνει ίσο με $\frac{1}{2}$. Σε κάποιες καταστάσεις η απόφαση είτε να σταματήσουμε είτε να συνεχίσουμε είναι εύκολη αλλά γενικά είναι ένα δύσκολο πρόβλημα ούτως ώστε να βρεθούν οι καλύτερες αποφάσεις.

Έχει αποδειχθεί ότι υπάρχει ένας βέλτιστος κανόνας διακοπής και χαρακτηρίζεται από τους ακέραιους β_1, β_2, \dots έτσι ώστε να σταματήσουμε μετά την n -ιστή ρίψη όταν ο αριθμός των κεφαλών μείον τον αριθμό των γραμμάτων είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το β_n . Είναι δύσκολο να υπολογίσουμε τις αριθμητικές τιμές του β_n και την ακριβή τιμή της μέγιστης αναμενόμενης αποπληρωμής. Η δυσκολία είναι ότι η αντίστροφη επαγωγή δεν θα λειτουργήσει για την εξίσωση βελτιστοποίησης στο παιχνίδι του Chow – Robbins. Σύμφωνα με τους Hägström και Wästlund, χρησιμοποιήθηκε η υπολογιστική ανάλυση για την εύρεση του β_n για μικρότερες τιμές του n και αποδείχθηκε ότι η μέγιστη αναμενόμενη αποπληρωμή είναι μεταξύ των ορίων 0.7929530 και 0.7929556. Παρ' όλα αυτά η απλή ιδέα του one-stage-look-ahead (σταδίου ενός βήματος εμπρός) οδηγεί σε έναν απλό υπολογισμό του οποίου η αναμενόμενη αποπληρωμή είναι πολύ κοντά στην μέγιστη αναμενόμενη αποπληρωμή. Η ανάλυση έχει ως εξής.

Υποθέτουμε ότι η τρέχουσα αναλογία των κεφαλών μετά από n ρίψεις είναι f_n . Εάν αποφασίσετε να προχωρήσετε σε μία ακόμα ρίψη, τότε η αναμενόμενη τιμή της αναλογίας των κεφαλών μετά τις $n+1$ ρίψεις είναι:

$$\frac{1}{2} \times \frac{nf_n + 1}{n+1} + \frac{1}{2} \times \frac{nf_n}{n+1}.$$

Η ανισότητα $\frac{nf_n + 1}{2(n+1)} + \frac{nf_n}{2(n+1)} \geq f_n$ είναι ισοδύναμη με την ανισότητα $f_n \leq \frac{1}{2}$. Αυτό μας κατευθύνει

στον απλό κανόνα διακοπής, ο οποίος ορίζει να σταματήσουμε μόλις ο αριθμός των κεφαλών υπερβεί τον

αριθμό των γραμμάτων. Η αναμενόμενη αποπληρωμή κάτω από αυτόν τον κανόνα είναι $\frac{\pi}{4} \approx 0.785398$,

που είναι πολύ κοντά στη μέγιστη θεωρητικά αναμενόμενη αποπληρωμή. Η παράγωγος της τιμής $\frac{\pi}{4}$ για την

αναμενόμενη αποπληρωμή του ευρετικού κανόνα δεν είναι δύσκολη. Δίνουμε μία περίληψη της παραγώγου.

Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X ως τον αριθμό των ρίψεων μέχρι ο αριθμός των κεφαλών υπερβεί τον αριθμό των γραμμάτων για πρώτη φορά και έστω $p_n = P(X = n)$. Τότε η αναμενόμενη αποπληρωμή υπό τον απλό κανόνα διακοπής είναι:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k-1} p_{2k-1}.$$

Το p_n μπορεί να ληφθεί από την αναγεννητική συνάρτηση προσέγγισης. Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες,

παίρνουμε ότι η $P(z) = E(z^X)$ δίνεται από την έκφραση: $P(z) = \frac{1 - \sqrt{1-z^2}}{z}$ για $|z| \leq 1$. Χρησιμοποιώντας

τη σειρά επέκτασης $(1+x)^a$ με $a=0.5$ και $x=-z^2$, βρίσκουμε ότι $P(z)$ μπορεί να αξιολογηθεί ως

$$P(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} z^{2k-1}.$$

Αυτό μας δίνει ότι: $p_{2k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}$ για $k \geq 1$ και έτσι η αναμενόμενη αξία της αποπληρωμής

είναι ίση με:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k-1} p_{2k-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2} \binom{2k-2}{k-1}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σειρά επέκτασης Taylor του $\arcsin(x)$, βρίσκουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα ότι η

αναμενόμενη αμοιβή είναι ίση με $\frac{1}{2} \arcsin(1) = \frac{\pi}{4}$.

4.2 Εφαρμογή: Δρομολόγηση σε παράλληλες ουρές

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση αξίας για την απόκτηση πολιτικών βελτιστοποίησης για δυναμικά προβλήματα δρομολόγησης σε ουρές με παράλληλους

μονούς εξυπηρετητές. Η γενική ιδέα είναι να ξεκινήσουμε μία πολιτική έτσι ώστε κάθε ουρά να συμπεριφέρεται ως ανεξάρτητη ουρά ενός μονού εξυπηρετητή.

Το πρόβλημα ελέγχου που θα μελετήσουμε μπορεί να διαμορφωθεί ως εξής. Σκεφτόμαστε δύο παράλληλες ουρές ενός εξυπηρετητή με άπειρη μνήμη. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης του εξυπηρετητή i κατανέμονται Coxian με σειρά r_i με παραμέτρους $(p_1^i, \dots, p_{r_i-1}^i, \mu_1^i, \dots, \mu_{r_i}^i)$ για $i=1,2$. Επιπλέον, η ουρά i έχει κόστη κράτησης h_i για $i=1,2$. Ένας εισερχόμενος πελάτης μπορεί να σταλθεί είτε στην ουρά 1 είτε στην ουρά 2. Ο στόχος είναι να ελαχιστοποιηθούν τα μέση κόστη.

Παρατηρούμε ότι η κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης δεν χρειάζεται απαραίτητα να είναι Coxian. Εφόσον η κλάση των Coxian κατανομών είναι πυκνή στο σύνολο των συναρτήσεων των μη αρνητικών κατανομών, μπορούμε να προσεγγίσουμε αυτές τις κατανομές με μία Coxian κατανομή, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο της αναμενόμενης μεγιστοποίησης (Expectation–Maximization(EM)). Ο EM αλγόριθμος αποτελεί ένα επαναληπτικό σχήμα που ελαχιστοποιεί την απόκλιση πληροφοριών που δίνονται από τις πληροφορίες Kullback-Leibler για μία σταθερή σειρά r . Για τις υποθέσεις θεωρούμε μία Coxian κατανομή της σειράς $r=5$ ήταν επαρκής για να περιγράψει την αρχική κατανομή.

Έστω x_i να είναι ο αριθμός των πελατών στην ουρά i και y_i ο αριθμός των ολοκληρωμένων φάσεων των πελατών στην εξυπηρέτηση, εάν υπάρχει μία σε κάθε ουρά i για $i=1,2$. Δοθέντος ότι η κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης περιγράφεται επαρκώς από την Coxian κατανομή, οι εξισώσεις βελτιστοποίησης για το σύστημα αυτό δίνονται από:

$$\begin{aligned} & \mathbf{g} + (\lambda + \mathbb{1}_{\{x_1>0\}} \mu_{y_1+1}^1 + \mathbb{1}_{\{x_2>0\}} \mu_{y_2+1}^2) V(x_1, y_1, x_2, y_2) = h_1 x_1 + h_2 x_2 + \\ & \lambda \min \{V(x_1 + 1, x_2, y_1, y_2), V(x_1, x_2 + 1, y_1, y_2)\} + \\ & \mathbb{1}_{\{x_1>0\}} \mu_{y_1+1}^1 \left[p_{y_1+1}^1 V(x_1, x_2, y_1 + 1, y_2) + \bar{p}_{y_1+1}^1 V(x_1 - 1, x_2, 0, y_2) \right] + \\ & \mathbb{1}_{\{x_2>0\}} \mu_{y_2+1}^2 \left[p_{y_2+1}^2 V(x_1, x_2, y_1, y_2 + 1) + \bar{p}_{y_2+1}^2 V(x_1, x_2 - 1, y_1, 0) \right], \end{aligned}$$

για $\mathbb{N} \times \{0, \dots, r_i - 1\}$ με $p_{r_i}^i = 0$ και $\bar{p}_y^i = 1 - p_y^i$ όταν $i=1,2$.

Λαμβάνουμε ως αρχική πολιτική ελέγχου την πολιτική Bernoulli με παράμετρο $\eta \in [0,1]$, δηλαδή την πολιτική που χωρίζει τις αφίξεις σε δύο ροές έτσι ώστε οι αφίξεις να πραγματοποιούνται με ρυθμό $\eta\lambda$ στην ουρά 1 και με ρυθμό $(1-\eta\lambda)$ στην ουρά 2.

Υπό την πολιτική Bernoulli, η εξίσωση βελτιστοποίησης επιτυγχάνεται αντικαθιστώντας τον όρο $\lambda \min\{V(x_1+1, x_2, y_1, y_2), V(x_1, x_2+1, y_1, y_2)\}$ με τον $\eta\lambda V(x_1+1, x_2, y_1, y_2) + (1-\eta)\lambda V(x_1, x_2+1, y_1, y_2)$. Συνεπώς, προκύπτει ότι οι δύο ουρές συμπεριφέρονται ως ανεξάρτητες ουρές μονών εξυπηρετητών για τις οποίες το μέσο κόστος g_i και η συνάρτησης αξίας V_i για $i=1,2$ μπορούν να προσδιοριστούν από το **Θεώρημα***. Το μέσο κόστος g' και η συνάρτηση αξίας V' για ολόκληρο το σύστημα προκύπτουν από το άθροισμα των ατομικών(μεμονωμένων) μέσων κοστών $g' = g_1 + g_2$ και το άθροισμα των ατομικών(μεμονωμένων) συναρτήσεων αξιών $V' = V_1 + V_2$, αντιστοίχως. Παρατηρούμε ότι για ένα καθορισμένο σύνολο παραμέτρων, η πολιτική βελτιστοποίησης Bernoulli που λαμβάνεται με την ελαχιστοποίηση σε σχέση με το η είναι απλή. Επομένως θα χρησιμοποιήσουμε την πολιτική βελτιστοποίησης Bernoulli στα αριθμητικά παραδείγματα. Η βέλτιστη πολιτική ενός βήματος ακολουθεί από την ελαχιστοποίηση της ενέργειας στην ποσότητα:

$$\min\{V'(x_1+1, x_2, y_1, y_2), V'(x_1, x_2+1, y_1, y_2)\}.$$

Η κατανομή Coxian επιτρέπει πολλά ενδιαφέροντα αριθμητικά πειράματα. Άρα περιοριζόμαστε σε κάποια αντιπροσωπευτικά παραδείγματα που εμφανίζουν τις κύριες ιδέες. Θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό g_B, g' και g^* για το μέσο δοθέν κόστος υπό τη βέλτιστη πολιτική Bernoulli, τη βέλτιστη πολιτική ενός βήματος και τη πολιτική βελτιστοποίησης, αντίστοιχα. Επιπλέον, θέτουμε $h_1 = h_2 = 1$ και $\lambda = \frac{2}{3}$ για το πρώτο παράδειγμα και $\lambda = 1$ για τα υπόλοιπα.

Αρχικά, θα ξεκινήσουμε με δύο ουρές με την Coxian $C(2)$ κατανομή. Η ουρά 1 έχει την κατανομή Erlang E_2 με παράμετρο $\mu = 2$, τέτοια ώστε ο μέσος και η διακύμανση του χρόνου εξυπηρέτησης είναι 1 και 2, αντίστοιχα. Οι παράμετροι στην ουρά 2 επιλέγονται έτσι ώστε ο μέσος να παραμένει 1, αλλά η διακύμανση να αυξάνεται σε 3,4 και 5, αντίστοιχα. Ο **Πίνακας 4.1** συνοψίζει τα αποτελέσματα και δείχνει ότι η βέλτιστη πολιτική ενός βήματος έχει την πλησιέστερη βέλτιστη αξία. Το αναλογικό επιπλέον κόστος $(g' - g^* / g^*)$ είναι πρακτικά μηδέν σε όλες τις περιπτώσεις.

Parameters for queue 2	g_B	g'	g^*
$p^2 = \frac{2}{3}, \mu^2 = (2, \frac{4}{3})$	5.147786	3.208688	3.208588
$p^2 = \frac{1}{2}, \mu^2 = (2, 1)$	5.405949	3.332179	3.332038
$p^2 = \frac{2}{5}, \mu^2 = (2, \frac{4}{5})$	5.652162	3.445815	3.445787

Πίνακας 4.1. Αριθμητικά αποτελέσματα για $r=2$ με $p^1 = 1, \mu^1 = (2,2)$

Στη συνέχεια, δείχνουμε ένα παρόμοιο πείραμα με $r=5$. Η κατανομή εξυπηρέτησης στην ουρά 1 είναι σταθερή σε μία υπο-εκθετική $Hyp_{0,5}$ κατανομή με παράμετρο $\mu=(2,3,2,3,4)$. Επίσης και στην περίπτωση αυτή, η βέλτιστη πολιτική ενός βήματος αποδίδει αρκετά καλά. Ο Πίνακας 4.2 δείχνει ότι το μεγαλύτερο αναλογικό επιπλέον κόστος δίνεται από 0.03 (το τρίτο πείραμα).

Parameters for queue 2	g_B	g'	g^*
$p^2 = (\frac{9}{10}, \frac{4}{5}, \frac{7}{10}, \frac{3}{5}), \mu^2 = (2, 3, 2, 3, 4)$	6.175842	3.787954	3.783727
$p^2 = (\frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}), \mu^2 = (2, 3, 2, 3, 4)$	3.729859	2.493349	2.480818
$p^2 = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}), \mu^2 = (3, 2, 4, 2, 3)$	1.399628	1.169286	1.132408

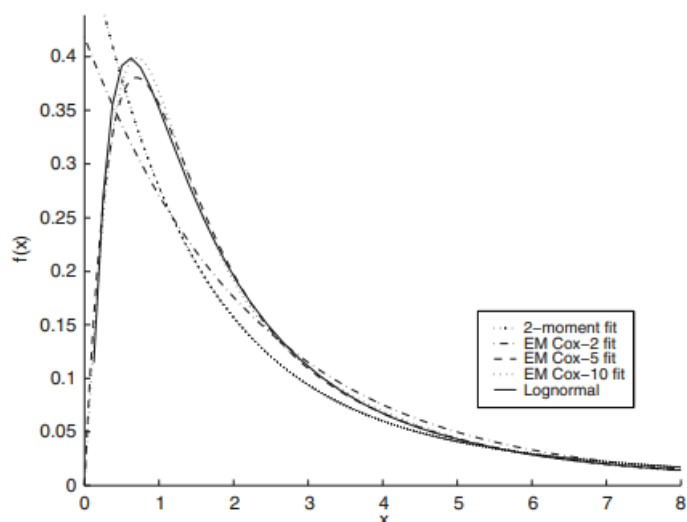
Πίνακας 4.2. Αριθμητικά αποτελέσματα για $r=5$ με $p^1 = (1,1,1,1), \mu^1 =$

Στο τρίτο παράδειγμα θεωρούμε δεδομένη την κατανομή Erlang E_2 με παράμετρο $\mu = 2$ στην ουρά 1 και την λογαριθμο -κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu = 0.5$ και $\sigma = 1$ στην ουρά 2. Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f της λογαριθμο – κανονικής κατανομής δίνεται από:

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}, \text{ για } x > 0.$$

Προσεγγίζουμε την λογαριθμο -κανονική κατανομή με την κατανομή Cox(r) με σειρά $r=2,5,10$ και 20 αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας τον EM- αλγόριθμο. Επιπρόσθετα, συγκρίνουμε αυτό με το μοντέλο 2 λεπτών της κατανομής Coxian. Έστω X να είναι η τυχαία μεταβλητή έχοντας ένα στοιχείο της διακύμανσης $c_x \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$, τότε προκύπτει ότι $\mu_1 = 2/EX$, $p_1 = 0.5/c_x^2$ και $\mu_2 = p_1\mu_1$.

Τα αποτελέσματα του EM-αλγορίθμου και του μοντέλου 2-λεπτών απεικονίζονται στο Σχήμα 4.1. Το μοντέλο με την Cox(20) κατανομή παραλείπεται, καθώς δεν μπορούσε να εξαφανιστεί από την λογαριθμο-κανονική πυκνότητα πιθανότητας. Επομένως, η βέλτιστη αξία όταν χρησιμοποιείται η Cox(20) κατανομή μπορεί να θεωρηθεί αντιπροσωπευτική για τη βέλτιστη αξία όταν χρησιμοποιείται η λογαριθμο-κανονική κατανομή. Παρατηρούμε ότι η EM-προσέγγιση με την Cox(2) κατανομή καταγράφει περισσότερα χαρακτηριστικά της λογαριθμο-κανονικής κατανομής από το μοντέλο των 2 λεπτών. Αυτό το αποτέλεσμα αντικατοπτρίζεται επίσης και στον Πίνακα 4.3, καθώς η αξία της βέλτιστης πολιτικής g^* για την Cox(2) κατανομή είναι πιο κοντά στην αξία της g^* όταν η Cox(20) κατανομή χρησιμοποιείται. Το μεγαλύτερο αναλογικό επιπλέον κόστος για τις EM-προσεγγίσεις δίνεται από 0.02 (EM-μοντέλο με $r=2$).



Σχήμα 4.1. Λογαριθμο-κανονική ($\mu = 0.5, \sigma = 1$) πυκνότητας πιθανότητας

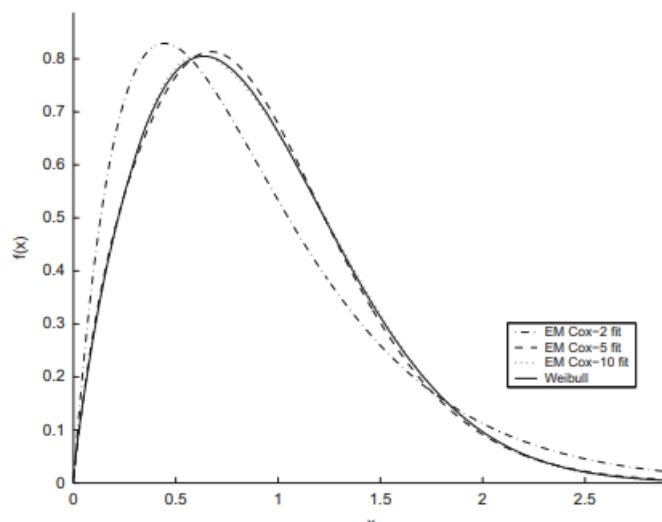
Approximation for queue 2	g_B	g'	g^*
2-moment fit	4.617707	3.021571	2.976950
EM algorithm with $r = 2$	4.554838	2.982955	2.933345
EM algorithm with $r = 5$	4.526013	2.965625	2.919847
EM algorithm with $r = 10$	4.527392	2.963318	2.917011
EM algorithm with $r = 20$	4.527040	2.963311	2.917169

Πίνακας 4.3. Λογαριθμο-κανονική κατανομή: αριθμητικά αποτελέσματα με $\rho^1 = 1, \mu^1 = (2, 2)$

Στο τελευταίο παράδειγμα παίρνουμε την κατανομή Erlang E_2 με παράμετρο $\mu = 2$ στην ουρά 1 και την κατανομή Weibull με παραμέτρους $a = 0.3$ και $b = 0.107985$. Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f της κατανομής Weibull δίνεται από:

$$f(x) = ax^{a-1} \frac{e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a}}{b^a}, \text{ για } x > 0.$$

Παρατηρούμε ότι οι παράμετροι a και b επιλέγονται έτσι ώστε η κατανομή Weibull να έχει μέσο 1. Προσεγγίζουμε την κατανομή Weibull από την κατανομή Cox(r) με σειρά $r=2,5,10$ και 20 αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας τον EM-αλγόριθμο. Τα αποτελέσματα του EM-αλγορίθμου απεικονίζονται στο **Σχήμα 4.2**. Το μοντέλο με την Cox(20) κατανομή παραλείπεται, καθώς δεν μπορούσε να εξαφανιστεί από την Weibull πυκνότητα πιθανότητας. Ακόμη, εφόσον το στοιχείο της διακύμανσης είναι λιγότερο από το $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, παραλείπουμε το μοντέλο των 2 λεπτών. Τα αποτελέσματα στον **Πίνακα 4.4** δείχνουν ότι η πολιτική βελτίωσης ενός βήματος προσεγγίζει περισσότερο τη βέλτιστη αξία, καθώς το αναλογικό επιπλέον κόστος είναι πρακτικά μηδέν (Boucherie & Van Dijk, 2017).



Σχήμα 4.2. Weibull ($a = 1.8, b = 1$) πυκνότητα πιθανότητας

Approximation for queue 2	g_B	g'	g^*
EM algorithm with $r = 2$	1.563547	1.167233	1.167232
EM algorithm with $r = 5$	1.524032	1.148638	1.148511
EM algorithm with $r = 10$	1.522566	1.148570	1.148100
EM algorithm with $r = 20$	1.522387	1.148826	1.148552

Πίνακας 4.4. Κατανομή Weibull: αριθμητικά αποτελέσματα με $p^1 = 1, \mu^1 = (2, 2)$

Τα προηγούμενα παραδείγματα δείχνουν ότι η μέθοδος της πολιτικής βελτιστοποίησης ενός βήματος αποδίδει σχεδόν βέλτιστες πολιτικές ακόμη και όταν οι μη-μαρκοβιανές κατανομές εξυπηρέτησης προσεγγίζονται από μία Coxian κατανομή. Για τη λογαριθμο-κανονική και την Weibull κατανομή που μελετήσαμε, μία κατανομή Coxian της σειράς (τάξης) $r = 5$ ήταν ήδη ικανή για μία επαρκής προσέγγιση. Παρατηρούμε ότι η βελτιωμένη πολιτική μπορεί εύκολα να ληφθεί για περισσότερες από δύο ουρές. Παρατηρούμε ότι η υπολογιστική πολυπλοκότητα είναι η εκθετική στον αριθμό των ουρών σε αντίθεση με την επαναληπτική πολιτική ενός μόνο βήματος που έχει γραμμική πολυπλοκότητα στον αριθμό των ουρών (Boucherie & Van Dijk, 2017).

4.3 Εφαρμογή: Δυναμική δρομολόγηση σε κέντρα κλήσεων πολλαπλών δεξιοτήτων

Θεωρούμε ένα κέντρο κλήσεων πολλαπλών δεξιοτήτων στο οποίο οι πράκτορες χειρίζονται κλήσεις που απαιτούν διαφορετικές δεξιότητες. Συμβολίζουμε το σύνολο των δεξιοτήτων S με $S = \{1, \dots, N\}$. Υποθέτουμε ότι οι κλήσεις που απαιτούν δεξιότητες $s \in S$ φτάνουν στο κέντρο κλήσεων σύμφωνα με τη διαδικασία Poisson με ρυθμό λ_s . Έστω $G = P(S)$ να συμβολίζουμε τις ομάδες με σύνολα διαφορετικών δεξιοτήτων που

ορίζονται από τη δύναμη του συνόλου όλων των δεξιότητων. Έστω $G'_s = \{ G \in G' \mid s \in G \}$ να συμβολίζουμε όλες τις δεξιότητες των ομάδων που περιλαμβάνουν τις δεξιότητες $s \in S$. Οι πράκτορες ομαδοποιούνται σύμφωνα με τις δεξιότητές τους και μπορούν να κατατάσσονται από τα στοιχεία του G' . Κάθε ομάδα $G \in G'$ αποτελείται από S_G πράκτορες και εξυπηρετεί μία κλήση που απαιτεί μία δεξιότητα εντός της ομάδας G με ανεξάρτητους εκθετικά κατανομημένους χρόνους με παράμετρο μ_G .

Σενάριο 1: Ένα κέντρο κλήσεων χωρίς χρόνο αναμονής

Υποθέτουμε ότι αντιμετωπίζουμε ένα σύστημα απώλειας, δηλαδή, δεν υπάρχει καθόλου μνήμη στο δικό μας μοντέλο. Επομένως, δεν υπάρχει κοινή ουρά για την αναμονή των κλήσεων. Έτσι κάθε κλήση που φτάνει έχει ήδη δρομολογηθεί σε μία από τις ομάδες πρακτόρων άμεσα ή πρέπει να έχει αποκλειστεί, οπότε χάθηκε. Επίσης, όταν μία κλήση δρομολογείται σε μία ομάδα που δεν διαθέτει εξυπηρετητές, η κλήση χάνεται. Ο στόχος σε αυτό το σύστημα είναι η ελαχιστοποίηση του μέσου αριθμού χαμένων κλήσεων.

Ας μορφοποιήσουμε το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα μαρκοβιανών αποφάσεων. Φτιάχνουμε μία σειρά των στοιχείων του G' , με $G' = (G_1, \dots, G_{2^N-1})$ και ορίζουμε τον χώρο καταστάσεων του προβλήματος μαρκοβιανών αποφάσεων με $X = \prod_{i=1}^{2^N-1} \{0, \dots, S_{G_i}\}$. Τότε το $|G'|$ -διαστατικό διάνυσμα $x \in X$ δηλώνει την κατάσταση του συστήματος σύμφωνα με τη σταθερή σειρά, δηλαδή, το x_G αποτελεί τον αριθμό των κλήσεων στην εξυπηρέτηση στην ομάδα $G \in G'$. Επίσης, αναπαριστούμε το $|G'|$ -διαστατικό μοναδιαίο διάνυσμα e_G το διάνυσμα με μηδέν σε κάθε είσοδο, εκτός από μία είσοδο στο αντίστοιχο G σύμφωνα με τη σταθερή σειρά. Όταν φτάνει μία κλήση, η οποία απαιτεί δεξιότητα $s \in S$, ο υπεύθυνος της λήψης αποφάσεων μπορεί να επιλέξει να αποκλείσει την κλήση ή να τη δρομολογήσει σε οποιαδήποτε ομάδα πρακτόρων $G \in G'_s$ για τις οποίες $x_G < S_G$. Συνεπώς, το σύνολο ενεργειών ορίζεται ως $A_s = \{G \in G'_s \mid x_G < S_G\} \cup \{b\}$, όπου η ενέργεια b σημαίνει αποκλεισμό της κλήσης. Άρα, για μία λαμβάνουσα κλήση, που απαιτείται δεξιότητα $s \in S$, οι ρυθμοί μετάβασης $p(x, a, y)$ από το $x \in X$ στο $y \in X$, μετά τη λήψη της απόφασης $a \in A_s$, δίνεται από $p(x, b, x) = \lambda_s$, $p(x, a, x + e_u) = \lambda_s$ όταν $a \neq b$ και μηδέν διαφορετικά. Οι ρυθμοί μετάβασης για την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης δίνονται από $p(x, a, x - e_G) = x_G \mu_G$ για $x \in X$, $G \in G'$ και οποιαδήποτε ενέργεια a . Ο στόχος είναι να μοντελοποιηθεί από τη συνάρτηση κόστους $c(x, a) = 1$ για οποιοδήποτε $x \in X$ και $a = b$.

Η πλειάδα $(X, (A_s)_{s \in S}, p, c)$ ορίζει το πρόβλημα μαρκοβιανών αποφάσεων. Η δυναμική εξίσωση προγραμματισμού για το σύστημα είναι:

$$g + \left[\sum_{s \in S} \lambda_s + \sum_{G \in \mathcal{G}} S_G \mu_G \right] V(\mathbf{x}) = \sum_{s \in S} \lambda_s \min\{1 + V(\mathbf{x}), V(\mathbf{x} + e_G) \mid G \in \mathcal{G}_s, x_G < S_G\} \\ + \sum_{G \in \mathcal{G}} x_G \mu_G V(\mathbf{x} - e_G) + \sum_{G \in \mathcal{G}} (S_G - x_G) \mu_G V(\mathbf{x}),$$

όπου g είναι το μακροπρόθεσμο αναμενόμενο μέσο κόστος και V είναι η συνάρτηση σχετικών τιμών.

Παρατηρούμε ότι οι ενέργειες στη δική μας περίπτωση εξαρτώνται από τον τύπο αφίξεων των κλήσεων. Για το πρόβλημα της δρομολόγησης βάσει δεξιοτήτων θα βασιστούμε στην προσεγγιστική συνάρτηση σχετικών τιμών σε μία στατική τυχαιοποιημένη πολιτική για την αρχική πολιτική δρομολόγησης. Έστω $G^{(n)} = \{G \in \mathcal{G} \mid |G| = n\}$ να είναι όλες οι ομάδες πρακτόρων που έχουν ακριβώς n δεξιότητες για $n = 1, \dots, N$.

Ορίζουμε ανάλογα, $G_s^{(n)} = \{G \in G^{(n)} \mid s \in G\}$ να είναι όλες οι ομάδες πρακτόρων που έχουν n δεξιότητες, συμπεριλαμβανομένου των δεξιοτήτων $s \in S$. Για μία δοθείσα δεξιότητα, αυτό δημιουργεί μία ιεραρχική δομή $G_s^{(1)}, \dots, G_s^{(N)}$ από εξειδικευμένους πράκτορες που έχουν μόνο μία δεξιότητα προς τους εκπαιδευμένους γενικούς που έχουν όλες τις δεξιότητες. Για τηλεφωνικό κέντρο με τρεις δεξιότητες, θα έχουμε τρία επίπεδα ιεραρχίας: τους εξειδικευμένους (ομάδες $\{1\}, \{2\}$ και $\{3\}$), τους πράκτορες με δύο δεξιότητες (ομάδες $\{1,2\}, \{1,3\}$ και $\{2,3\}$) και τους γενικούς (ομάδα $\{1,2,3\}$). Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τα βήματα του αλγορίθμου για την πολιτική βελτιστοποίησης ενός βήματος.

Αρχική πολιτική

Η αρχική πολιτική $\hat{\pi}$, στην οποία θα βασίσουμε την προσεγγιστική συνάρτηση σχετικών τιμών, προσπαθεί να δρομολογήσει μία κλήση απαιτώντας τη δεξιότητα s διαμέσου της ιεραρχίας. Δηλαδή, δοκιμάζει πρώτα τη $G_s^{(1)}$ και προχωράει στην $G_s^{(2)}$ εάν δεν υπάρχουν κενοί πράκτορες στην $G_s^{(1)}$. Στην $G_s^{(2)}$ μπορεί να υπάρχει πάνω από μία ομάδα που μπορεί κανείς να δρομολογήσει. Η αρχική πολιτική δρομολογεί την κλήση σύμφωνα με τις σταθερές πιθανότητες στις ομάδες της $G_s^{(2)}$, δηλαδή, χωρίζει τη ροή υπερχειλίσης από τη $G_s^{(1)}$ σε σταθερά φράγματα πάνω από τις ομάδες της $G_s^{(2)}$. Η κλήση προχωράει μέσω της ιεραρχίας οποτεδήποτε δρομολογείται σε μία ομάδα χωρίς κενούς πράκτορες έως ότου εξυπηρετηθούν από τις ομάδες ή αποκλειστούν τελικά στην $G_s^{(N)}$. Η λογική πίσω από την πολιτική που στέλνει τις κλήσεις στους πράκτορες με τον μικρότερο αριθμό δεξιοτήτων δικαιολογούνται. Για να το δείξουμε για τρεις δεξιότητες: την υπερχειλίση των κλήσεων από την ομάδα $\{1\}$ χωρίζονται από τα σταθερά φράγματα a και $\bar{a} = 1 - a$ για να

δρομολογηθούν στις ομάδες $\{1,2\}$ και $\{1,3\}$, αντίστοιχα. Η διαδικασία υπερχειλίσης από τις ομάδες $\{2\}$ και $\{3\}$ αντιμετωπίζεται ανάλογα με τα φράγματα β και γ , αντίστοιχα.

Δεν έχουμε ακόμη καθορίσει πως να επιλέξουμε τις πιθανότητες διαχωρισμού στην αρχική πολιτική δρομολόγησης. Για να τις προσδιορίσουμε, αγνοούμε το γεγονός ότι η διαδικασία υπερχειλίσης δεν είναι μία διαδικασία Poisson και θεωρούμε ότι όλες οι υπερχειλίσεις είναι ανεξάρτητες. Επομένως, προχωράμε όπως στην διαδικασία υπερχειλίσης στην ομάδα $G \in G_s^{(i)}$ να είναι μία διαδικασία Poisson με ρυθμό λ_G φορές την πιθανότητα αποκλεισμού. Μαζί με τις πιθανότητες διαχωρισμού, μπορεί κανείς να υπολογίσει το ρυθμό των αφίξεων Poisson σε κάθε σταθμό στη $G^{(i+1)}$ που αποτελείται από τις υποτιθέμενες ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson. Οι πιθανότητες διαχωρισμού είναι επιλεγμένες έτσι ώστε το φορτίο σε κάθε ομάδα στη $G^{(i+1)}$ είναι ισορροπημένο.

Για να το δείξουμε για το τηλεφωνικό κέντρο με τρεις δεξιότητες, υπενθυμίζουμε τον τύπο απώλειας του Erlang $B(\lambda, \mu, S)$ για μία ουρά M/M/S/S με ρυθμό αφίξεων λ και χρόνο εξυπηρέτησης μ ,

$$B(\lambda, \mu, S) = \frac{(\lambda/\mu)^S / S!}{\sum_{i=0}^S (\lambda/\mu)^i / i!}.$$

Ο ρυθμός υπερχειλίσης στην ομάδα $\{i\}$ για $i=1,2,3$ δίνεται από $\lambda_i B(\lambda_i, \mu_{\{i\}}, S_{\{i\}})$. Επομένως ο ρυθμός αφίξεων των ομάδων της $G^{(2)}$ δίνεται από:

$$\begin{aligned} \lambda_{\{1,2\}} &= \lambda_1 B(\lambda_1, \mu_{\{1\}}, S_{\{1\}}) \alpha + \lambda_2 B(\lambda_2, \mu_{\{2\}}, S_{\{2\}}) \beta, \\ \lambda_{\{1,3\}} &= \lambda_1 B(\lambda_1, \mu_{\{1\}}, S_{\{1\}}) (1 - \alpha) + \lambda_3 B(\lambda_3, \mu_{\{3\}}, S_{\{3\}}) \gamma, \\ \lambda_{\{2,3\}} &= \lambda_2 B(\lambda_2, \mu_{\{2\}}, S_{\{2\}}) (1 - \beta) + \lambda_3 B(\lambda_3, \mu_{\{3\}}, S_{\{3\}}) (1 - \gamma). \end{aligned}$$

Οι πιθανότητες διαχωρισμού μπορούν να καθοριστούν ελαχιστοποιώντας το μέσο κόστος του συστήματος. Εφόσον το μέσο κόστος υπό την πολιτική είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων αποκλεισμού της κάθε ουράς του συστήματος, η βέλτιστη πιθανότητα διαχωρισμού μπορεί να δημιουργήσει ασυμμετρία στο σύστημα, δηλαδή, μία ουρά έχει πολύ χαμηλή πιθανότητα αποκλεισμού, ενώ μία άλλη έχει υψηλή πιθανότητα αποκλεισμού. Αριθμητικά πειράματα δείχνουν ότι μία κατάσταση με πιο ισορροπημένη πιθανότητα αποκλεισμού σε όλες τις ουρές οδηγεί σε καλύτερες πολιτικές βελτιστοποίησης ενός βήματος. Άρα, επιλέγουμε τέτοιες πιθανότητες διαχωρισμού έτσι ώστε να ισχύει ότι:

$$\frac{\lambda_{\{1,2\}}}{S_{\{1,2\}} \mu_{\{1,2\}}} = \frac{\lambda_{\{1,3\}}}{S_{\{1,3\}} \mu_{\{1,3\}}} = \frac{\lambda_{\{2,3\}}}{S_{\{2,3\}} \mu_{\{2,3\}}}.$$

Σε περίπτωση που η εξίσωση αυτή δεν έχει εφικτή λύση επιλέγουμε τις πιθανότητες διαχωρισμού τέτοιες ώστε να ελαχιστοποιούν την ποσότητα:

$$\left| \frac{\lambda_{\{1,2\}}}{S_{\{1,2\}}\mu_{\{1,2\}}} - \frac{\lambda_{\{1,3\}}}{S_{\{1,3\}}\mu_{\{1,3\}}} \right| + \left| \frac{\lambda_{\{1,2\}}}{S_{\{1,2\}}\mu_{\{1,2\}}} - \frac{\lambda_{\{2,3\}}}{S_{\{2,3\}}\mu_{\{2,3\}}} \right| + \left| \frac{\lambda_{\{1,3\}}}{S_{\{1,3\}}\mu_{\{1,3\}}} - \frac{\lambda_{\{2,3\}}}{S_{\{2,3\}}\mu_{\{2,3\}}} \right|.$$

Τελικά, ο ρυθμός αφίξεων στην τελευταία ομάδα με όλες τις δεξιότητες είναι:

$$\lambda_{\{1,2,3\}} = \sum_{G \in \mathcal{G}^{(2)}} \lambda_G B(\lambda_G, \mu_G, S_G).$$

Πολιτική Αξιολόγησης

Στο βήμα της αξιολόγησης της πολιτικής, απαιτείται να επιλυθούν τα μακροπρόθεσμα αναμενόμενα μέση κόστη και η συνάρτηση σχετικών τιμών από τις εξισώσεις Poisson για την πολιτική $\hat{\pi}$. Παρατηρούμε ότι για το σκοπό μας να παραγωγίσουμε την πολιτική βελτιστοποίησης, αρκεί να έχουμε μόνο την συνάρτηση των σχετικών τιμών. Υπό την αρχική πολιτική αυτό οδηγεί στην επίλυση της συνάρτησης σχετικών τιμών μιας σειράς ουρών πολλαπλών εξυπηρετητών σε συνδυασμό. Αυτό είναι δύσκολο πρόβλημα που δεν έχει επιλυθεί ακόμη και για σειρές ουρών μεμονωμένων εξυπηρετητών. Άρα, επιλέγουμε να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση σχετικών τιμών με βάση τις υποθέσεις που πραγματοποιήσαμε στην αρχική πολιτική.

Για την προσέγγιση, υποθέτουμε ότι η διαδικασία υπερχειλίσης είναι πράγματι μία διαδικασία Poisson και ότι είναι ανεξάρτητη από όλες τις άλλες διαδικασίες υπερχειλίσης. Προσεγγίζουμε τη συνάρτηση σχετικών τιμών με το άθροισμα των συναρτήσεων των σχετικών τιμών για κάθε ομάδα πρακτόρων. Έστω $V_G(x_G, \lambda_G, \mu_G, S_G)$ να είναι η συνάρτηση σχετικών τιμών για ένα σύστημα M/M/S_G/S_G με ρυθμό αφίξεων λ_G και ρυθμό εξυπηρέτησης μ_G , που αξιολογείται όταν υπάρχουν x_G κλήσεις. Η συνάρτησης αξίας για ολόκληρο το σύστημα προσεγγίστηκε από:

$$\hat{V}(x) = \sum_{G \in \mathcal{G}} V_G(x_G, \lambda_G, \mu_G, S_G).$$

Πολιτική Βελτιστοποίησης

Με την αντικατάσταση της συνάρτησης των σχετικών τιμών που καθορίστηκε στην πολιτική αξιολόγησης μέσα στις εξισώσεις βελτιστοποίησης, μπορεί κανείς να αντλήσει μία καλύτερη πολιτική αξιολογώντας:

$$\min \{ 1 + \hat{V}(x), \hat{V}(x + e_G | G \in \mathcal{G}_s, x_G < S_G) \} =$$

$$\min \{ 1, V_G(x_G + 1, \lambda_G, \mu_G, S_G) - V_G(x_G, \lambda_G, \mu_G, S_G) \mid G \in G_s, x_G < S_G \}.$$

Ο τελευταίος όρος από την αφαίρεση της $V(x)$ από όλους τους όρους στην ελαχιστοποίηση και χρησιμοποιώντας τη γραμμική δομή της $V(x)$. Στον **Πίνακα 4.5**, βρίσκουμε τα αποτελέσματα του αλγορίθμου της πολιτικής βελτιστοποίησης ενός βήματος για το **Σενάριο 1**. Οι παράμετροι για λ_x , μ_x και S_x στον πίνακα είναι οργανωμένοι για τις ομάδες {1}, {2} και {3}. Οι παράμετροι για μ_{xy} και S_{xy} ταξινομούνται για τις ομάδες {1,2}, {1,3} και {2,3} αντίστοιχα. Το μεγαλύτερο αναλογικό επιπλέον κόστος $\Delta = (g' - g^*) / g^*$ σε όλα τα πειράματα στον **Πίνακα 4.5** είναι 12,9% (το τελευταίο πείραμα). Άλλα πειράματα δείχνουν ότι το αναλογικό επιπλέον κόστος βρίσκεται στο εύρος 0-13%. Επομένως, η πολιτική βελτιστοποίησης έχει ήδη καλή απόδοση ήδη μετά από την πολιτική βελτιστοποίησης ενός βήματος (Boucherie & Van Dijk, 2017).

λ_x	μ_x	μ_{xy}	S_x	S_{xy}	g	g'	g^*	Δ
6 6 6	1.0 1.0 1.0	1.0 1.0 1.0	2 2 2	2 2 2	0.361	0.349	0.344	1.505
6 5 4	2.0 1.5 1.0	1.5 1.0 1.0	2 2 2	2 2 2	0.170	0.147	0.143	2.781
7 6 5	2.0 1.5 1.0	1.5 1.5 1.0	3 3 3	2 2 2	0.119	0.099	0.096	3.264
7 6 5	1.5 1.0 1.0	1.5 1.0 1.0	3 3 3	3 3 2	0.130	0.107	0.103	3.930
6 5 4	2.0 1.5 1.0	1.5 1.0 1.0	3 3 3	2 2 2	0.072	0.057	0.054	5.672
6 5 4	2.0 1.5 1.0	1.5 1.5 1.0	3 3 3	2 2 2	0.061	0.046	0.042	8.011
10 4 4	1.5 1.0 1.0	1.5 1.5 1.0	2 2 2	2 2 2	0.281	0.274	0.252	8.816
10 6 3	1.5 1.0 1.0	1.5 1.0 1.0	3 3 3	3 3 2	0.160	0.148	0.131	12.851

Πίνακας 4.5. Αριθμητικά παραδείγματα για το Σενάριο 1 με $\mu_{\{1,2,3\}} = 1$ και $S_{\{1,2,3\}} = 2$

Σενάριο 2: Ένα κέντρο κλήσεων με εξειδικευμένους και γενικούς μόνο

Υποθέτουμε ότι έχουμε να κάνουμε με ένα τηλεφωνικό κέντρο, διαθέτει μόνο πράκτορες με μία μόνο εξειδίκευση (εξειδικευμένους) και τους πλήρως εκπαιδευμένους πράκτορες (γενικούς), δηλαδή,

$$G = (G_1, \dots, G_{|S|}, G_{|S|+1}) = (\{1\}, \dots, \{N\}, \{1, \dots, N\}).$$

Σε αυτό το σενάριο θεωρούμε ότι οι κλήσεις που απαιτούν δεξιότητες $s \in S$ συγκεντρώνονται σε μία κοινή ουρά άπειρης μνήμης μετά από τις οποίες ανατίθενται σε ένα εξειδικευμένο ή σε ένα γενικό σε μία σειρά πρώτος εισέρχεται πρώτος εξυπηρετείται. Ο στόχος σε αυτό το σύστημα είναι να ελαχιστοποιήσει τον μέσο αριθμό των κλήσεων στο σύστημα, το οποίο με τη σειρά του σχετίζεται με τον μέσο χρόνο αναμονής μίας κλήσης.

Εκτός από την κατάσταση των ομάδων των πρακτόρων, οφείλουμε να συμπεριλάβουμε την κατάσταση των ουρών στον χώρο καταστάσεων. Για το σκοπό αυτό, θέτουμε το $|S|$ -διαστατικό διάνυσμα q να δηλώνει την κατάσταση των ουρών, δηλαδή, q_s είναι ο αριθμός των κλήσεων στην ουρά s που απαιτεί τη δεξιότητα $s \in S$. Επιπρόσθετα, το σύστημα έχει να αντιμετωπίσει το πρόβλημα επιλογής πράκτορα και το πρόβλημα επιλογής κλήσεων. Το πρώτο πρόβλημα προκύπτει όταν κάποιος πρέπει να εκχωρήσει ένα πράκτορα σε μία

ληφθείσα κλήση. Το δεύτερο πρόβλημα παρουσιάζεται όταν ένας πράκτορας αδρανεί και μία πιθανή κλήση στην ουρά μπορεί να εκχωρηθεί. Ακολουθώντας την ίδια προσέγγιση όπως στο Σενάριο 1, λαμβάνουμε υπόψη την εξίσωση βελτιστοποίησης δυναμικού προγραμματισμού που δίνεται από την έκφραση:

$$g + \left[\sum_{s \in S} \lambda_s + \sum_{G \in \mathcal{G}} S_G \mu_G \right] V(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \sum_{s \in S} q_s + \sum_{G \in \mathcal{G}} x_G + \sum_{s \in S} \lambda_s \tilde{V}(\mathbf{q} + e_s, \mathbf{x}) + \sum_{G \in \mathcal{G}} x_G \mu_G \tilde{V}(\mathbf{q}, \mathbf{x} - e_G) + \sum_{G \in \mathcal{G}} (S_G - x_G) \mu_G V(\mathbf{q}, \mathbf{x}),$$

όπου $\tilde{V}(q, x) = \min \{V(q - e_s, x + e_G \mid s \in S, G \in \mathcal{G}_s, q_s > 0, x_G < S_G) \cup \{V(q, x)\}$.

Οι πρώτοι δύο όροι από τη δεξιά πλευρά αναπαριστούν τη δομή κόστους, δηλαδή, τον αριθμό των κλήσεων του συστήματος. Ο τρίτος και τέταρτος όρος αναπαριστούν την επιλογή του πράκτορα και την απόφαση επιλογής των κλήσεων, αντίστοιχα.

Αρχική πολιτική

Αρχικά θα μπορούσαμε να λάβουμε ως αρχική πολιτική $\hat{\pi}$ μία παρόμοια πολιτική όπως χρησιμοποιήθηκε στο Σενάριο 1: ένα φράγμα a_s των κλήσεων τύπου s που ανατίθενται στους αντίστοιχους εξειδικευμένους και ένα φράγμα $1 - a_s$ που ανατίθενται στους γενικούς. Αντί να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση των σχετικών τιμών για την ουρά M/M/S/S, μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση των σχετικών τιμών για την ουρά M/M/S.

Παρ' όλα αυτά, αυτή η προσέγγιση θα μπορούσε να θεωρηθεί μία αποκλειστική ουρά μπροστά από την ομάδα των γενικών. Συνεπώς, ένας πελάτης που αποστέλλεται στην ομάδα των γενικών, που είναι όλοι απασχολημένοι θα πρέπει να περιμένουν όταν ένας εξειδικευμένος αυτού του τύπου κλήσης είναι κενός. Άρα, αυτή η πολιτική Bernoulli δεν χρησιμοποιεί αποτελεσματικά τους πόρους στο σύστημα και οδηγεί σε μία αναποτελεσματική πολιτική βελτιστοποίησης ενός βήματος. Για να ξεπεραστεί η αναποτελεσματικότητα της πολιτικής Bernoulli, αντ' αυτού χρησιμοποιούμε μία πολιτική, η οποία στην αρχή χρησιμοποιεί τους ειδικούς και εκχωρεί μία κλήση σε ένα γενικό μόνο εάν ένας γενικός είναι διαθέσιμος, ενώ όλοι οι εξειδικευμένοι (ειδικοί) που μπορούν να διαχειριστούν αυτόν τον τύπο κλήσης είναι απασχολημένοι (Boucherie & Van Dijk, 2017).

Πολιτική αξιολόγησης

Η συνάρτηση των σχετικών τιμών για την πολιτική $\hat{\pi}$, που χρησιμοποιεί πρώτα τους ειδικούς και μετά τους γενικούς, είναι περίπλοκη. Η πολιτική $\hat{\pi}$ δημιουργεί μία εξάρτηση μεταξύ των διαφορετικών ομάδων πρακτόρων που απαγορεύουν την παραγωγή μίας έκφρασης κλειστής μορφής για την συνάρτηση σχετικών τιμών. Επομένως, προσεγγίζουμε τη συνάρτηση σχετικών τιμών με \hat{V} ως εξής. Έστω $V_W(x, \lambda, \mu, S)$ να είναι η συνάρτηση σχετικών τιμών του M/M/S συστήματος.

Η προσέγγιση \hat{V} για την πολιτική $\hat{\pi}$ δίνεται από την έκφραση:

$$\hat{V}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \sum_{s \in \mathcal{S}} V_W(q_s + x_s, \bar{\lambda}_s, \mu_{\{s\}}, S_{\{s\}}) + V_W((q_1 + x_1 - S_1)^+ + \dots + (q_N + x_N - S_N)^+ + x_{N+1}, \lambda_{G_{N+1}}, \mu_{G_{N+1}}, S_{G_{N+1}}),$$

με $\bar{\lambda}_s = \lambda_s (1 - B(\lambda_s, \mu_{\{s\}}, S_{\{s\}}))$ ο ρυθμός προσέγγισης των ειδικών για τις κλήσεις τύπου s και $\lambda_{G_{N+1}} = \sum_{s \in \mathcal{S}} \lambda_s B(\lambda_s, \mu_{\{s\}}, S_{\{s\}})$ ο ρυθμός προσέγγισης των γενικών. Παρατηρούμε ότι αυτή η προσέγγιση ακολουθεί την ιδέα της κινητήριας αρχικής πολιτικής που εξασφαλίζει ότι όλοι οι κενοί ειδικοί τύπου s , που δίνονται από $S_s - x_s$, χρησιμοποιούνται για όλες τις κλήσεις στην ουρά του ίδιου τύπου. Αυτό μας οδηγεί στην έκφραση: $(q_s - [S_s - x_s])^+ = \max\{q_s + x_s - S_s, 0\}$ που είναι οι κλήσεις που δεν μπορούν να εξυπηρετηθούν. Οι κλήσεις αυτές αναμένουν μέχρι να γίνει ένας γενικός, κενός. Η προσέγγιση λαμβάνει υπόψη το γεγονός ότι ένας ειδικός μπορεί να γίνει κενός πριν από ένα γενικό και αμέσως εκχωρεί την κλήση στον ειδικό.

Η ιδέα πίσω από την προσέγγιση είναι ότι εκτιμά προσεγγιστικά τις διαφορετικές ροές στις διάφορες ομάδες πρακτόρων και στη συνέχεια υπολογίζει τη συνάρτηση αξίας όπου οι κλήσεις αναμένουν ταυτόχρονα σε δύο ουρές όπου μπορούν να εξυπηρετηθούν (Boucherie & Van Dijk, 2017).

Πολιτική βελτιστοποίησης

Στο βήμα της πολιτικής βελτιστοποίησης, η αρχική πολιτική $\hat{\pi}$ βελτιώνεται από την αξιολόγηση:

$$\min \{ \hat{V}(q - e_s, x + e_G) \mid s \in \mathcal{S}, G \in \mathcal{G}_s, q_s > 0, x_G < S_G \} \cup \{ V(q, x) \}.$$

Στην περίπτωση αυτή η πολιτική πρέπει να καθοριστεί και για την εκχώρηση πράκτορα και τις αποφάσεις επιλογής κλήσεων. Τα αποτελέσματα για το **Σενάριο 2** με τρεις δεξιότητες παρουσιάζονται στον **Πίνακα 4.6**. Η πρώτη γραμμή υποδηλώνει ότι δεν μπορούν να επιτευχθούν σημαντικά οφέλη από τη στατική πολιτική όταν οι ρυθμοί εξυπηρέτησης των ειδικών και των γενικών είναι ίσες μεταξύ τους. Στους **Πίνακες 2.7, 2.8, 2.9** έχουμε διαφοροποιήσει τον ρυθμό εξυπηρέτησης των γενικών υπό διαφορετικά φορτία. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι καθώς το σύστημα προσφέρει υψηλότερα φορτία, τα κέρδη από τη χρήση της πολιτικής βελτιστοποίησης ενός βήματος είναι υψηλότερα σε σύγκριση με την πολιτική της στατικής δρομολόγησης.

λ_X	μ_X	S_X	$\mu_{\{1,2,3\}}$	$S_{\{1,2,3\}}$	g	g'	g^*	Δ
6 6 6	2.0 2.0 2.0	3 3 3	2.0	3	11.043	10.899	10.746	1.429
6 3 3	1.5 1.0 1.0	3 3 3	1.0	3	20.122	19.259	18.361	4.892
6 5 4	2.5 2.0 1.5	2 2 2	2.0	3	13.186	11.562	11.314	2.187
6 5 4	1.8 1.8 1.2	3 3 3	1.2	3	16.348	14.931	14.602	2.253
7 6 5	2.5 2.0 1.5	3 3 3	2.0	2	15.269	13.310	13.127	1.397
7 6 5	1.8 1.8 1.2	3 3 3	1.8	3	23.260	20.091	19.125	5.054
10 6 3	3.0 2.0 1.0	3 3 3	1.0	2	31.834	26.844	25.184	6.594
6 5 4	3.0 2.0 1.0	3 3 3	1.0	2	20.083	14.403	13.795	4.404

Πίνακας 4.6 Αριθμητικά αποτελέσματα για το Σενάριο 2

Στη συνέχεια, κλιμακώνουμε το σύστημα έτσι ώστε η αύξηση του του προσφερόμενου φορτίου να αντισταθμίζεται από πιο γρήγορη εξυπηρέτηση ή από την αύξηση του αριθμού των εξυπηρετητών. Ο **Πίνακας 4.10** δείχνει ότι όταν οι ρυθμοί εξυπηρέτησης κλιμακώνονται, τα κέρδη από την στατική πολιτική παραμένουν σχεδόν ανεπηρέαστα. Ωστόσο, όταν προστίθενται περισσότεροι εξυπηρετητές, αυτό μειώνεται ελαφρά. Από τις άλλες γραμμές στον **Πίνακα 4.6**, συμπεραίνουμε ότι το κέρδος από τη στατική πολιτική είναι μεγαλύτερο στα ασύμμετρα συστήματα. Συμπερασματικά, παρατηρούμε ότι η βέλτιστη πολιτική έχει καλή απόδοση και ότι η απόδοσή της είναι κοντά με την απόδοση της πολιτικής βελτιστοποίησης.

Λαμβάνουμε υπόψη ότι η προτεινόμενη μέθοδος επεκτείνεται και μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί για μεγαλύτερα κέντρα κλήσεων. Σε αυτήν την ενότητα, περιοριστήκαμε σε ένα τηλεφωνικό κέντρο με τρεις δεξιότητες, εφόσον ο υπολογισμός των πολιτικών βελτιστοποίησης γίνεται αριθμητικά δύσκολος για μεγαλύτερα τηλεφωνικά κέντρα. Η πολιτική βελτιστοποίησης αναπτύσσεται εκθετικά στον αριθμό των δεξιοτήτων, ενώ ένα μόνο βήμα της πολιτικής επανάληψης έχει γραμμική πολυπλοκότητα (Boucherie & Van Dijk, 2017).

$\mu_{\{1,2,3\}}$	g	g'	g^*	Δ
1.5	9.012	8.933	8.928	0.051
1.6	8.773	8.707	8.703	0.045
1.7	8.559	8.504	8.500	0.047
1.8	8.366	8.320	8.316	0.045
1.9	8.192	8.154	8.150	0.044
2.0	8.035	8.006	7.999	0.091
2.1	7.892	7.864	7.851	0.166
2.2	7.762	7.713	7.675	0.496
2.3	7.644	7.561	7.489	0.962
2.4	7.535	7.405	7.302	1.418
2.5	7.436	7.238	7.118	1.690

Πίνακας 4.7 Σενάριο $2 - \lambda_X = 5, \mu_X = 2, S_X = 3$ και $S_{\{1,2,3\}} = 3$

$\mu_{\{1,2,3\}}$	g	g'	g^*	Δ
1.5	13.674	13.142	12.877	2.055
1.6	12.995	12.595	12.344	2.035
1.7	12.405	12.106	11.872	1.969
1.8	11.891	11.665	11.453	1.848
1.9	11.440	11.265	11.080	1.671
2.0	11.043	10.899	10.746	1.429
2.1	10.692	10.449	10.445	0.046
2.2	10.379	10.179	10.160	0.189
2.3	10.101	9.934	9.881	0.532
2.4	9.851	9.712	9.610	1.062
2.5	9.626	9.494	9.347	1.568

Πίνακας 4.8 Σενάριο $2 - \lambda_X = 6, \mu_X = 2, S_X = 3$ και $S_{\{1,2,3\}} = 3$

$\mu_{\{1,2,3\}}$	g	g'	g^*	Δ
1.5	27.101	25.142	23.387	7.502
1.6	25.138	22.841	21.638	5.559
1.7	23.306	20.923	20.099	4.097
1.8	21.623	19.326	18.755	3.042
1.9	20.099	17.992	17.586	2.304
2.0	18.737	16.867	16.571	1.784
2.1	17.533	15.910	15.690	1.401
2.2	16.475	15.086	14.920	1.114
2.3	15.551	14.370	14.240	0.915
2.4	14.746	13.741	13.631	0.802
2.5	14.044	13.183	13.082	0.771

Πίνακας 4.9 Σενάριο $2 - \lambda_X = 7, \mu_X = 2, S_X = 3$ και $S_{\{1,2,3\}} = 3$

λ_X	μ_X	S_X	$\mu_{\{1,2,3\}}$	$S_{\{1,2,3\}}$	g	g'	g^*	Δ
6 5 4	2.5 2.0 1.5	2 2 2	2.0	3	13.186	11.562	11.314	2.187
12 10 8	5.0 4.0 3.0	2 2 2	4.0	3	13.187	11.564	11.313	2.215
24 20 16	10.0 8.0 6.0	2 2 2	8.0	3	13.190	11.567	11.310	2.273
12 10 8	2.5 2.0 1.5	4 4 4	2.0	6	18.625	17.789	17.562	1.290
24 20 16	5.0 4.0 3.0	4 4 4	4.0	6	18.628	17.792	17.559	1.326
24 20 16	2.5 2.0 1.5	8 8 8	2.0	12	31.925	31.380	30.991	1.253
30 20 10	2.5 2.0 1.5	15 15 15	2.0	15	28.924	27.996	27.256	2.714
30 20 20	2.5 2.0 1.5	20 20 20	2.0	20	35.290	34.829	32.015	8.788

Πίνακας 4.10 Σενάριο 2 – αποκλιμάκωση του συστήματος

4.4 Εφαρμογή σε ένα ελεγχόμενο σύστημα δημοσκόπησης

Η συνάρτηση των σχετικών τιμών της ουράς προτεραιότητας, όπως έχουμε αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο, μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πρόβλημα καθορισμού εξυπηρετητή στο οποίο χρησιμοποιείται μία πειθαρχία σταθερής προτεραιότητας, δηλαδή, η προληπτική πολιτική συνέχισης προτεραιότητας. Όταν ο εξυπηρετητής μπορεί να αλλάξει ανά πάσα στιγμή, εισάγεται περισσότερη ελευθερία οδηγώντας σε χαμηλότερο μέσο κόστος με βάση την πολιτική βελτιστοποίησης. Το ερώτημα τότε διαμορφώνεται ως εξής: Ποια είναι όμως η πολιτική βελτιστοποίησης.

Έστω $c_1 > 0$ και $c_2 > 0$. Στην περίπτωση που τα εναλλασσόμενα κόστη είναι τα ίδια με το μηδέν, η πολιτική βελτιστοποίησης είναι ίση με το γνωστό κανόνα μ_c . Αυτό σημαίνει ότι η προτεραιότητα δίνεται σε ένα πελάτη κατηγορίας (κλάσης) $-i$ με βάση την αξία του $\mu_i c_i$. Δίνεται προτεραιότητα σε ουρά με υψηλότερες αξίες του $\mu_i c_i$. Όταν τα εναλλασσόμενα κόστη είναι μεγαλύτερα του μηδενός, η πολιτική βελτιστοποίησης δεν είναι γνωστή και μία αριθμητική μέθοδος όπως η πολιτική ή επαναληπτική αξία πρέπει να χρησιμοποιηθεί. Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε τον τρόπο χρήσης μίας βέλτιστης πολιτικής ενός βήματος για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Κατ' αρχήν, θα μπορούσε κανείς να εφαρμόσει μία πολιτική Bernoulli στον εξυπηρετητή, δηλαδή, ο εξυπηρετητής λειτουργεί με ένα φράγμα a του χρόνου στην ουρά 1 και ένα φράγμα $1-a$ στην ουρά 2. Παρ' όλα αυτά, προκειμένου να ληφθούν υπόψη οι εξαρτήσεις μεταξύ των ουρών στην αρχική πολιτική, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πολιτική προτεραιότητας από την οποία δηλώνουμε τη συνάρτηση αξίας με V_p . Έστω $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \mu_1 = 6, \mu_2 = 3, c_1 = 2, c_2 = 1$ και $s_1 = s_2 = 2$.

Παρατηρούμε ότι με τις παραμέτρους αυτές, η πολιτική προτεραιότητας συμπίπτει με τον κανόνα μ_c . Ορίζουμε $\mu = \max\{\mu_1, \mu_2\}$. Τότε, ορίζουμε για κάποια σταθερά x και y ως το αναμενόμενο σφάλμα εάν ο εξυπηρετητής αλλάξει αμέσως θέση από την θέση k στη θέση l και χρησιμοποιήσει την προληπτικό κανόνα προτεραιότητας στη συνέχεια.

$$z_{k,l} = s_k \mathbb{1}_{\{k \neq l\}} + c_1 x + c_2 y + \lambda_1 V_p(x+1, y, l) + \lambda_2 V_p(x, y+1, l) + \mu_l V_p(((x, y) - e_l)^+, l) + (\mu - \mu_l) V_p(x, y, l)$$

Η βέλτιστη πολιτική ενός βήματος είναι απλά η πολιτική που ελαχιστοποιεί για κάθε (x, y, k) την έκφραση $\min_a \{z_{k,a}\}$. Ως εκ τούτου, οι ενέργειες ορίζονται ως $a_{x,y,k} = \arg \min \{z_{k,a}\}$. Ο Πίνακας 4.11 παρουσιάζει τα αποτελέσματα για τη βέλτιστη πολιτική ενός βήματος. Το μέσο κόστος που προκύπτει από τη χρήση της επαναληπτικής πολιτικής ενός μόνο βήματος είναι 3.09895. Πρόκειται για μία μείωση του κόστους κατά 14.6% σε σύγκριση με τη χρήση του κανόνα μ_c , όπου το μέσο κόστος είναι 3.62894. Χρησιμοποιώντας την επαναληπτική πολιτική για να βρούμε τη πολιτική βελτιστοποίησης, τα αποτελέσματα δύσκολα βελτιώνονται. Το μέσο κόστος είναι στη χαμηλότερη τιμή 3.09261. Απροσδόκητα, η πολιτική βελτιστοποίησης βρίσκεται σε δύο βήματα από την επαναληπτική πολιτική. Η γρήγορη σύγκλιση της επαναληπτικής πολιτικής δεν είναι τυχαία. Το μέσο κόστος των πολιτικών που δημιουργούνται από την επαναληπτική πολιτική συγκλίνει τουλάχιστον εκθετικά γρήγορα στο ελάχιστο κόστος, με τη μεγαλύτερη βελτίωση στα πρώτα βήματα (Boucherie & Van Dijk, 2017).

Iteration	Average cost	Comment
0	3.62894	μ_c rule
1	3.09895	One-step policy improvement
2	3.09261	Optimal policy

Πίνακας 4.11 Αποτελέσματα της επαναληπτικής πολιτικής

4.5 Παράδειγμα

Ένα εμπορικό πλοίο έχει δύο (2) πανομοιότυπες μηχανές diesel. Κάθε μηχανή παθαίνει βλάβες ανεξάρτητα από την άλλη, σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με μέσο ρυθμό 1 βλάβη ανά 1000 ώρες. Το πλοίο έχει δικό του συνεργείο επισκευών που μπορεί να επισκευάζει μια βλάβη κάθε φορά. Ο χρόνος επισκευής κάθε μηχανής ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή τ ώρες. Ένα πλοίο θεωρείται ακυβέρνητο όταν πάνω από οι μισές μηχανές του είναι χαλασμένες.

Ποια είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να έχει το τ , ούτως ώστε το πλοίο να μην μένει ακυβέρνητο περισσότερο από 0,1% του χρόνου;

Λύση

Δεδομένα:

Βασικό πρότυπο με περιορισμένο πληθυσμό $M = 2$

$$\lambda = 1/1000 \text{ βλάβες/ώρα} (= 0.001)$$

$$\mu = 1/r \text{ επισκευές/ώρα}$$

$$\rho = \lambda/\mu$$

Ποσοστό χρόνου που το πλοίο είναι ακυβέρνητο = P_3

$$\text{Απαίτηση: } P_3 \leq 0.001$$

Υπολογισμοί:

$$P_0 = 1/(1 + 2\rho + 2\rho^2)$$

$$P_3 = 2\rho^2 P_0 = 2\rho^2/(1 + 2\rho + 2\rho^2) \leq 0.001$$

$$\Rightarrow 2\rho^2 \leq 0.001 + 2 \cdot 0.001\rho + 2 \cdot 0.001\rho^2 \Rightarrow 2 \cdot 0.999\rho^2 - 2 \cdot 0.001\rho - 0.001 \leq 0$$

$$\Rightarrow 1.998\rho^2 - 0.002\rho - 0.001 \leq 0$$

Για να βρούμε το μέγιστο ρ που ικανοποιεί την ανισότητα, λύνουμε για την ισότητα (= 0)

$$\rho = (0.002 \pm \sqrt{(-0.002)^2 - (4)(1.998)(-0.001)}) / ((2)(1.998))$$

$$= (0.002 \pm 0.0894) / ((2)(1.998)) = 0.022878, -0.021877$$

Κρατούμε μόνο τη θετική λύση, δηλαδή, $\rho = 0.022878$

$$r = \rho/\lambda = 0.022878/0.001 = 22.878 \text{ ώρες (κάτι λιγότερο από μία ημέρα) (Λυμπερόπουλος, 2012).}$$

4.6 Εστιατόριο Φαστ φουντ

Οι πελάτες φτάνουν στο εστιατόριο με ρυθμό 100 ανά ώρα και 30 λεπτά είναι ο χρόνος ώστε να εξυπηρετηθούν.

- Πόσο χρόνο χρειάζονται οι πελάτες να παραμείνουν στο εστιατόριο;

$$\text{Ο ρυθμός εξυπηρέτησης} = \mu = 60 / 0.5 = 120 \text{ πελάτες ανά ώρα}$$

$$T = 1/\mu - \lambda = 1/(120 - 100) = 1/20 \text{ ώρες} = 3 \text{ λεπτά}$$

- Ποιος είναι ο χρόνος αναμονής στην ουρά;

$$W = T - 1/\mu = 2.5 \text{ λεπτά}$$

- Πόσοι πελάτες βρίσκονται στο εστιατόριο;

$$N = \lambda T = 5$$

- Ποιος είναι ο συντελεστής απασχόλησης;

$$\rho = \lambda / \mu = 5 / 6 \text{ (Modiano, χ.χ.)}$$

4.7 Παράδειγμα

Θεωρούμε την ακόλουθη ουρά μίας εξυπηρέτησης: ο χρόνος ενδιάμεσης άφιξης κατανέμεται εκθετικά με μέσο όρο 10 λεπτά και ο χρόνος εξυπηρέτησης κατανέμεται εκθετικά με μέσο όρο 8 λεπτά. Υπολογίστε:

- το μέσο όρο αναμονής στην ουρά
- το μέσο αριθμό στην ουρά
- το μέσο όρο αναμονής στο σύστημα
- το μέσο αριθμό στο σύστημα
- την αναλογία του χρόνου εξυπηρέτησης όταν ο εξυπηρετητής είναι κενός

Λύση.

Έχουμε ένα σύστημα M/M/1. Επίσης έχουμε $\lambda = 1/10$, $\mu = 1/8$. Οπότε $\rho = 8/10$. Τότε:

$$\text{Ο αριθμός στην ουρά} = L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.8^2}{1-0.8} = 3.2 .$$

$$\text{Ο μέσος όρος αναμονής στην ουρά} = W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 32 \text{ λεπτά.}$$

$$\text{Ο μέσος όρος αναμονής στο σύστημα} = W = W_q + \frac{1}{\mu} = 40 \text{ λεπτά.}$$

$$\text{Ο αριθμός στο σύστημα} = L = \lambda W = 4.$$

Η αναλογία του χρόνου χρησιμοποίησης εξυπηρετητή, που είναι κενός $= 1 - \rho = 0.2$ (Gosavi, χ.χ.).

4.8 Παράδειγμα

Ένα κέντρο εξυπηρέτησης έχει 2 θέσεις εξυπηρέτησης και χώρο αναμονής που χωράει 2 πελάτες. Οι πελάτες καταφτάνουν στο κέντρο τυχαία, σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson, με ρυθμό 12 πελάτες ανά ώρα. Όταν ο χώρος είναι γεμάτος, οι πελάτες που καταφτάνουν στο σταθμό δεν εισέρχονται σε αυτόν αλλά πάνε σε άλλο σταθμό. Ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέσο 5 λεπτά. Τα

έσοδα του σταθμού από κάθε πελάτη που εξυπηρετείται είναι 23 ευρώ. Το κόστος λειτουργίας κάθε θέσης εξυπηρέτησης, όταν αυτή εξυπηρετεί, είναι 92 ευρώ ανά ώρα, ενώ το κόστος του σταθμού από την αναμονή των πελατών είναι 460 ευρώ ανά ώρα αναμονής για κάθε πελάτη που περιμένει. Ποιο είναι το κέρδος του σταθμού ανά ώρα;

Λύση

Μοντέλο ουράς M/M/2/4 με $\lambda=12$ πελάτες ανά ώρα, $\mu=1$ πελάτης ανά 5 λεπτά = 12 πελάτες ανά ώρα

Υπολογισμός πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης

$$P_0 = 1 / \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{2^2\mu^3} + \frac{\lambda^4}{2^3\mu^4} \right) = 1 / \left(1 + 1 + \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{4} + \frac{1^4}{8} \right) = 8 / 23$$

$$P_1 = 1P_0 = 8 / 23$$

$$P_2 = (1/2)P_0 = 4 / 23$$

$$P_3 = (1/4)P_0 = 2 / 23$$

$$P_4 = (1/8)P_0 = 1 / 23$$

$$\text{Ωριαίο κόστος λειτουργίας: } 92(1P_1 + 2(P_2 + P_3 + P_4)) = 92 \left(1 \frac{8}{23} + 2 \frac{4+2+1}{23} \right) = 92 \frac{22}{23} = 88 \text{ ευρώ ανά ώρα}$$

$$\text{Ωριαίο κόστος αναμονής: } 460(1P_3 + 2P_4) = 460 \left(\frac{2}{23} + \frac{2}{23} \right) = 460 \frac{4}{23} = 80 \text{ ευρώ ανά ώρα}$$

$$\text{Ωριαία έσοδα του σταθμού: } 23\lambda(1 - P_M) = 23 \cdot 12 \left(1 - \frac{1}{23} \right) = 23 \cdot 12 \frac{22}{23} = 264 \text{ ευρώ ανά ώρα}$$

$$\text{Ωριαίο κέρδος του σταθμού} = 264 - 88 - 80 = 96 \text{ ευρώ ανά ώρα (Λυμπερόπουλος, 2012).}$$

4.9 Παράδειγμα

Η εγγραφή ενός μαθητή στο Universal Teacher Publications απαιτεί τρία βήματα για να ολοκληρωθεί. Ο χρόνος που απαιτείται για την εκτέλεση κάθε βήματος ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέσο όρο 30/3 λεπτά και είναι ανεξάρτητος από κάθε άλλο. Οι μαθητές φτάνουν στα κεντρικά γραφεία με κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό 25 ανά ώρα. Υποθέτοντας ότι υπάρχει μόνο ένα άτομο για εγγραφή. Με βάση αυτές τις πληροφορίες, να υπολογιστούν:

A) ο αναμενόμενος χρόνος αναμονής

B) ο αναμενόμενος αριθμός των μαθητών στην ουρά

Λύση.

Αυτό είναι ένα M/E_k/1 σύστημα. Έχουμε $k = 3, \lambda = 25$ ανά ώρα.

Ο χρόνος εξυπηρέτησης ανά φάση $= \frac{1}{3\mu} = \frac{30}{3}$. Άρα $\mu = 30$ ανά ώρα.

Ο αναμενόμενος αριθμός των μαθητών στην ουρά, $L_q = \frac{1+3}{2 \times 3} \times \frac{(25)^2}{30(30-25)} = 2.78 \approx 3$ μαθητές

Ο αναμενόμενος χρόνος αναμονής πριν εξυπηρετηθούν, $W_q = \frac{1+3}{2 \times 3} \times \frac{25}{30(30-25)} = 1/9$ ώρα ή 6.67 λεπτά

(X.X., γ.γ.).

Η κατανομή Erlang

Ορισμός : Η τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι ακολουθεί την **κατανομή Erlang** με παραμέτρους α και λ , $\alpha, \lambda > 0$ και γράφουμε $X \sim \text{Erlang}(\alpha, \lambda)$, αν η συνάρτηση πυκνότητας της f_X δίνεται από τον τύπο

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{(\alpha-1)!} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Η f_X είναι πράγματι μια συνάρτηση πυκνότητας, διότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \frac{\lambda^\alpha}{(\alpha-1)!} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy = \frac{1}{(\alpha-1)!} (\alpha-1)! = 1.$$

Η κατανομή Erlang έχει μέση τιμή $E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$ και διασπορά $Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογή στην R

➤ Το μοντέλο M/M/1

Έστω το μοντέλο M/M/1 με παραμέτρους $\lambda=3$: ο μέσος ρυθμός αφίξεων των πελατών ανά ώρα και $\mu=4$ ο μέσος ρυθμός πελατών που εξυπηρετούνται ανά ώρα.

Η πιθανότητα για $n=0$, $P_0=0.25$, όταν δεν είναι κανένας πελάτης στο σύστημα.

P_n	
n=0	0.25
n=1	0.1875
n=2	0.140625
n=3	0.1054688
n=4	0.07910156
n=5	0.05932617
n=6	0.04449463
n=7	0.03337097
n=8	0.02502823
n=9	0.01877117
n=10	0.01407838

Ο βαθμός απασχόλησης του συστήματος (μέσος χρόνος εξυπηρέτησης προς το μέσο χρόνο διαδοχικών αφίξεων) είναι ίσος με 0.75.

Ο συντελεστής απασχόλησης ρ είναι ίσος με 0.75

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι ίσος με 3

Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά είναι ίσος με 2.25 (L_q)

Ο μέσος αριθμός πελατών στην εξυπηρέτηση είναι ίσος με 0.75

Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι ίσος με 1

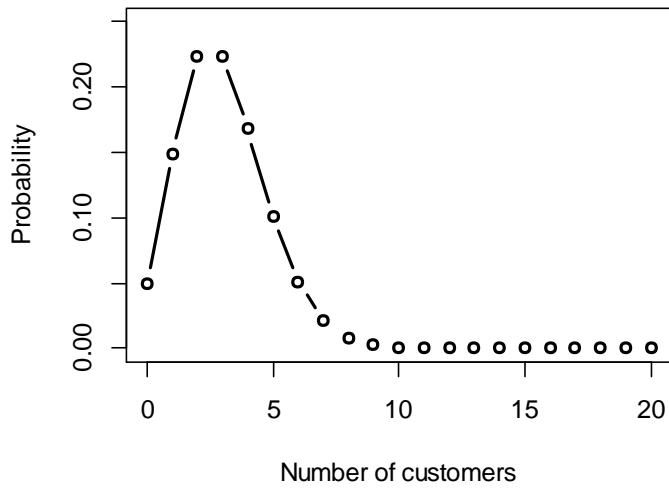
Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι ίσος με 0.75 (W_q)

Ο μέσος χρόνος αναμονής στην εξυπηρέτηση είναι ίσος με 0.25

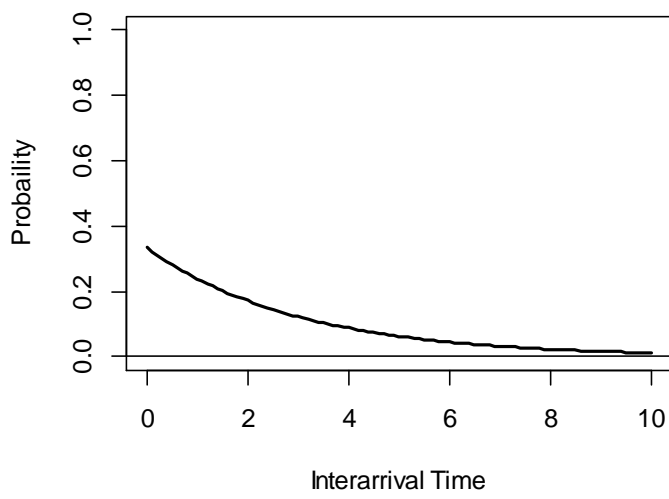
Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά όταν υπάρχει ουρά είναι ίσος με 1

$W_{qq}=1$, $L_{qq}=4$, $X=3$, $L=3$, $W=1$, $R_0=0.75$,

Poisson Distribution for Arrival Process



Exponential Distribution for Interarrival Time



Exponential Distribution for Service Process



➤ Το μοντέλο M/M/c

Έστω το μοντέλο M/M/c με παραμέτρους $c=2$ σταθμούς εξυπηρέτησης, $\lambda=3$ και $\mu=4$, οπότε προκύπτει:

Η πιθανότητα για $n=0$, $P_0=0.4545455$, όταν δεν είναι κανένας πελάτης στο σύστημα.

P _n	
n=0	0.4545455
n=1	0.3409091
n=2	0.1278409
n=3	0.04794034
n=4	0.01797763
n=5	0.00674161
n=6	0.002528104
n=7	0.000948039
n=8	0.0003555146
n=9	0.000133318
n=10	5,00E+01

Ο βαθμός απασχόλησης του συστήματος (μέσος χρόνος εξυπηρέτησης προς το μέσο χρόνο διαδοχικών αφίξεων) είναι ίσος με 0.75.

Ο συντελεστής απασχόλησης ρ είναι ίσος με 0.375.

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι ίσος με 0.872727272727273.

Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά είναι ίσος με 0.122727272727273 (L_q).

Ο μέσος αριθμός πελατών στην εξυπηρέτηση είναι ίσος με 0.75.

Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι ίσος με 0.290909090909091.

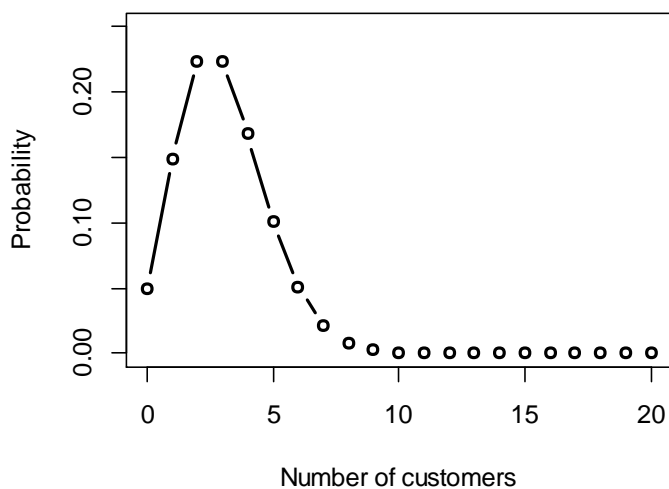
Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι ίσος με 0.0409090909090909 (W_q).

Ο μέσος χρόνος αναμονής στην εξυπηρέτηση είναι ίσος με 0.25.

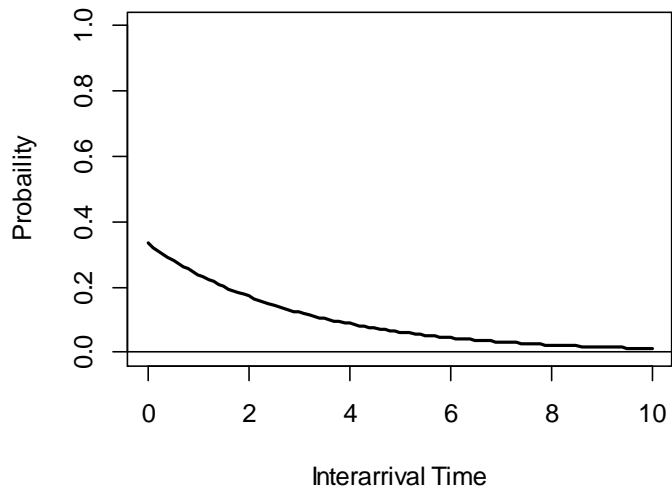
Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά όταν υπάρχει ουρά είναι ίσος με 0.2.

$W_{qq}=0.2$, $L_{qq}=1.6$, $X=3$, $L=0.8727273$, $W=0.2909091$, $R_0=0.375$.

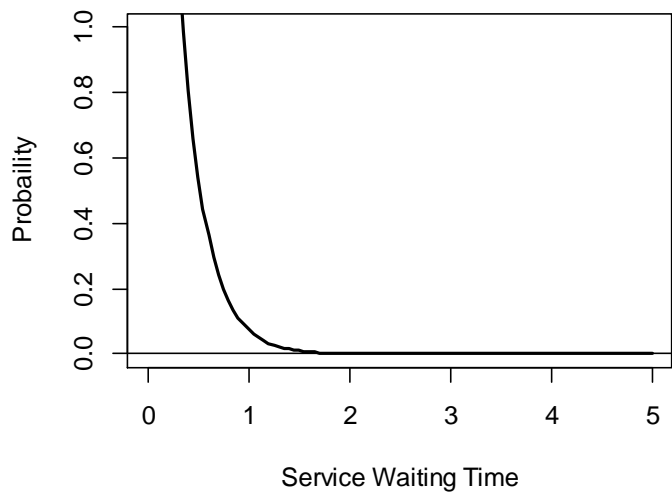
Poisson Distribution for Arrival Process



Exponential Distribution for Interarrival Time



Exponential Distribution for Service Process



➤ Το μοντέλο M/M/3

Έστω το μοντέλο M/M/3 με παραμέτρους $c=3$, $\lambda=3$ και $\mu=4$, οπότε προκύπτει:

Η πιθανότητα για $n=0$, $P_0= 0.4705882$, όταν δεν είναι κανένας πελάτης στο σύστημα.

P _n	
n=0	0.4705882
n=1	0.3529412
n=2	0.1323529
n=3	0.03308824
n=4	0.008272059
n=5	0.002068015
n=6	0.0005170037
n=7	0.0001292509
n=8	3,23E+01
n=9	8,08E+00
n=10	2,02E+00

Ο βαθμός απασχόλησης του συστήματος (μέσος χρόνος εξυπηρέτησης προς το μέσο χρόνο διαδοχικών αφίξεων) είναι ίσος με 0.75.

Ο συντελεστής απασχόλησης ρ είναι ίσος με 0.25.

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι ίσος με 0.764705882352941.

Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά είναι ίσος με 0.0147058823529412 (L_q).

Ο μέσος αριθμός πελατών στην εξυπηρέτηση είναι ίσος με 0.75.

Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι ίσος με 0.254901960784314.

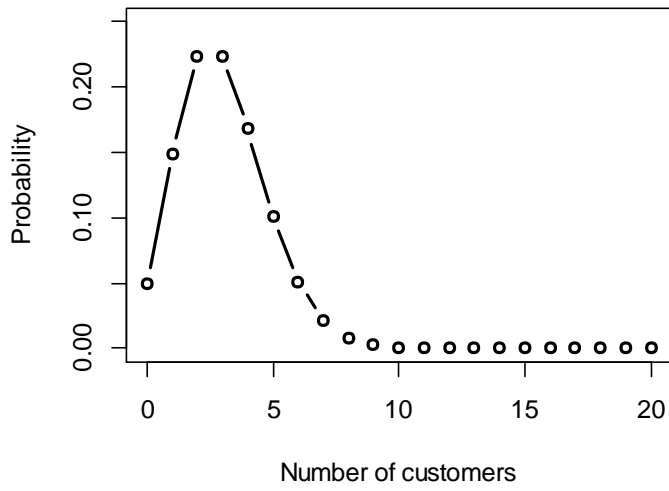
Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι ίσος με 0.00490196078431373 (W_q).

Ο μέσος χρόνος αναμονής στην εξυπηρέτηση είναι ίσος με 0.25.

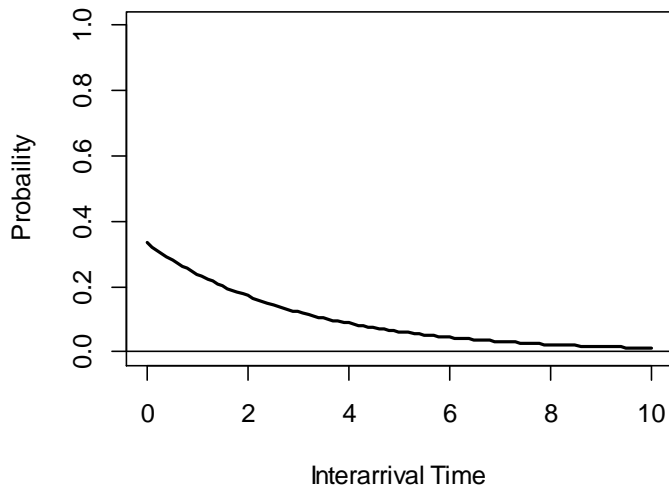
Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά όταν υπάρχει ουρά είναι ίσος με 0.111111111111111.

$W_{qq}=0.1111111$, $L_{qq}=1.333333$, $X=3$, $L=0.7647059$, $W=0.254902$, $R_0=0.25$

Poisson Distribution for Arrival Process



Exponential Distribution for Interarrival Time



Exponential Distribution for Service Process



➤ Το μοντέλο M/M/1/k

Έστω το μοντέλο M/M/1/ k με παραμέτρους $\lambda=3$, $\mu=4$ και $k=10$, οπότε προκύπτει:

Οι πιθανότητες των πελατών να βρίσκονται στο σύστημα είναι:

	P_k
k=0	0.2610244
k=1	0.1957683
k=2	0.1468262
k=3	0.1101197
k=4	0.08258975
k=5	0.06194231
k=6	0.04645674
k=7	0.03484255
k=8	0.02613191
k=9	0.01959894
k=10	0.0146992

Οι πιθανότητες όταν ένας πελάτης που εισέρχεται, συναντά η πελάτες στο σύστημα είναι:

q _k	
k=0	0.2649185
k=1	0.1986889
k=2	0.1490167
k=3	0.1117625
k=4	0.08382187
k=5	0.0628664
k=6	0.0471498
k=7	0.03536235
k=8	0.02652176
k=9	0.01989132

Ο βαθμός απασχόλησης του συστήματος (μέσος χρόνος εξυπηρέτησης προς το μέσο χρόνο διαδοχικών αφίξεων) είναι ίσος με 0.738975598912365.

Ο συντελεστής απασχόλησης ρ είναι ίσος με 0.738975598912365.

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι ίσος με 2.51492635214407.

Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά είναι ίσος με 1.7759507532317 (L_q).

Ο μέσος αριθμός πελατών στην εξυπηρέτηση είναι ίσος με 0.738975598912365.

Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι ίσος με 0.850815086399866.

Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι ίσος με 0.600815086399866 (W_q).

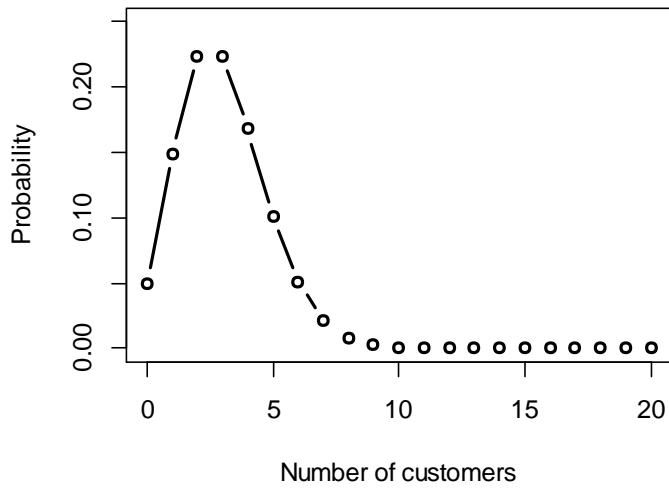
Ο μέσος χρόνος αναμονής στην εξυπηρέτηση είναι ίσος με 0.25.

Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά όταν υπάρχει ουρά είναι ίσος με 0.817344851336916.

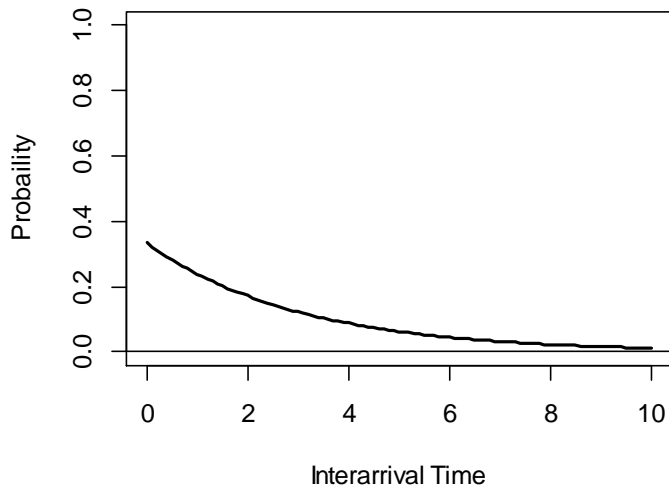
Η παραγωγικότητα είναι ίσος με 2.95590239564946.

$W_{qq} = 0.8173449$, $L_{qq} = 3.269379$, $X = 2.955902$, $L = 2.514926$, $W = 0.8508151$, $R_0 = 0.7389756$.

Poisson Distribution for Arrival Process



Exponential Distribution for Interarrival Time



Exponential Distribution for Service Process



➤ Σύγκριση των μοντέλων M/M/1, M/M/1/k, M/M/2, M/M/3

	lambda(λ)	mu(μ)	C	k	m	R0(ρ)	P0
MM1	3	4	1	NA	NA	0.7500000	0.2500000
MM1k	3	4	1	10	NA	0.7389756	0.2610244
MM2	3	4	2	NA	NA	0.3750000	0.4545455
MM3	3	4	3	NA	NA	0.2500000	0.4705882

	Lq	Wq	X	L	W	Wqg	Lqg
MM1	2.25	0.75	3	3	1	1	4
MM1k	1.776	0.600815086	2.96	2.51	0.8508151	0.8173449	3.27
MM2	0.12272727	0.040909091	3	0.8727273	0.2909091	0.2000000	1.60
MM3	0.01470588	0.004901961	3	0.7647059	0.2549020	0.1111111	1.33

Παρατηρούμε ότι με περισσότερους εξυπηρετητές ο χρόνος αναμονής και ο μέσος αριθμός των πελατών που εξυπηρετούνται στην ουρά και στο σύστημα μειώνεται καθώς όπως επίσης και ο συντελεστής απασχόλησης ρ .

Επιπρόσθετα, αν αυξηθεί ο μέσος όρος των εξυπηρετήσεων, για παράδειγμα $\mu=5$ στο μοντέλο M/M/1 (q_1), προκύπτει όμοια ότι μειώνονται αρκετά τόσο χρόνος αναμονής και ο μέσος αριθμός πελατών που εξυπηρετούνται όσο και ο συντελεστής απασχόλησης ρ .

	lambda(λ)	mu(μ)	c	k	m	R0(ρ)	P0
MM1	3	4	1	NA	NA	0.75	0.25
q1	3	5	1	NA	NA	0.60	0.40

	Lq	Wq	X	L	W	Wqq	Lqq
MM1	2.25	0.75	3	3	1	1	4
q1	0.90	0.30	3	1.5	0.5	0.5	2.5

Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε στην γλώσσα προγραμματισμού R είναι (Canadila, 2019):

```
> library(queueing)

#M/M/1

> i_mm1 <- NewInput.MM1(lambda=3,mu=4,n=10,method=0)
> output_mm1 <- QueueingModel(i_mm1)
> Report(output_mm1)
> summary(output_mm1)

#DIAGRAMMATA M/M/1

> curve(dpois(x, i_mm1$lambda),
+   from = 0,
+   to = 20,
+   type = "b",
+   lwd = 2,
+   xlab = "Number of customers",
+   ylab = "Probability",
+   main = "Poisson Distribution for Arrival Process",
+   ylim = c(0, 0.25),
+   n = 21)

> curve(dexp(x, rate = 1/i_mm1$lambda),
+   from = 0,
+   to = 10,
+   type = "l",
+   lwd = 2,
+   xlab = "Interarrival Time",
+   ylab = "Probability",
+   main = "Exponential Distribution for Interarrival Time",
+   ylim = c(0, 1))
> abline(h = 0)

> curve(dexp(x, rate = i_mm1$mu),
+   from = 0,
+   to = 5,
+   type = "l",
+   lwd = 2,
+   xlab = "Service Waiting Time",
+   ylab = "Probability",
+   main = "Exponential Distribution for Service Process",
```



```

+   ylim = c(0, 1))
> abline(h = 0)

#M/M/1/k

> i_mm1k <- NewInput.MM1K(lambda=3, mu=4, k=10)
> output_mm1k<-QueueingModel(i_mm1k)
> Report(output_mm1k)
> summary(output_mm1k)

#DIAGRAMMATA M/M/1/k

> curve(dpois(x, i_mm1k$lambda),
+   from = 0,
+   to = 20,
+   type = "b",
+   lwd = 2,
+   xlab = "Number of customers",
+   ylab = "Probability",
+   main = "Poisson Distribution for Arrival Process",
+   ylim = c(0, 0.25),
+   n = 21)

> curve(dexp(x, rate = 1/i_mm1k$lambda),
+   from = 0,
+   to = 10,
+   type = "l",
+   lwd = 2,
+   xlab = "Interarrival Time",
+   ylab = "Probability",
+   main = "Exponential Distribution for Interarrival Time",
+   ylim = c(0, 1))
> abline(h = 0)

> curve(dexp(x, rate = i_mm1k$mu),
+   from = 0,
+   to = 5,
+   type = "l",
+   lwd = 2,
+   xlab = "Service Waiting Time",
+   ylab = "Probability",
+   main = "Exponential Distribution for Service Process",
+   ylim = c(0, 1))
> abline(h = 0)

#M/M/2

> i_mm2 <- NewInput.MMC(lambda=3, mu=4, c=2, n=10, method=0)
> output_mm2 <- QueueingModel(i_mm2)
> Report(output_mm2)
> summary(output_mm2)

#DIAGRAMMATA M/M/2

```

```

> curve(dpois(x, i_mm2$lambda),
+   from = 0,
+   to = 20,
+   type = "b",
+   lwd = 2,
+   xlab = "Number of customers",
+   ylab = "Probability",
+   main = "Poisson Distribution for Arrival Process",
+   ylim = c(0, 0.25),
+   n = 21)

> curve(dexp(x, rate = 1/i_mm2$lambda),
+   from = 0,
+   to = 10,
+   type = "l",
+   lwd = 2,
+   xlab = "Interarrival Time",
+   ylab = "Probability",
+   main = "Exponential Distribution for Interarrival Time",
+   ylim = c(0, 1))
> abline(h = 0)

```

```

> curve(dexp(x, rate = i_mm2$mu),
+   from = 0,
+   to = 5,
+   type = "l",
+   lwd = 2,
+   xlab = "Service Waiting Time",
+   ylab = "Probability",
+   main = "Exponential Distribution for Service Process",
+   ylim = c(0, 1))
> abline(h = 0)

```

#M/M/3

```

> i_mm3 <- NewInput.MMC(lambda=3, mu=4, c=3, n=10, method=0)
> output_mm3 <- QueueingModel(i_mm3)
> Report(output_mm3)
> summary(output_mm3)

```

#DIAGRAMMATA M/M/3

```

> curve(dpois(x, i_mm3$lambda),
+   from = 0,
+   to = 20,
+   type = "b",
+   lwd = 2,
+   xlab = "Number of customers",
+   ylab = "Probability",
+   main = "Poisson Distribution for Arrival Process",
+   ylim = c(0, 0.25),
+   n = 21)

```

```

> curve(dexp(x, rate = 1/i_mm3$lambda),
+   from = 0,
+   to = 10,
+   type = "l",
+   lwd = 2,
+   xlab = "Interarrival Time",
+   ylab = "Probaility",
+   main = "Exponential Distribution for Interarrival Time",
+   ylim = c(0, 1))
> abline(h = 0)

> curve(dexp(x, rate = i_mm3$mu),
+   from = 0,
+   to = 5,
+   type = "l",
+   lwd = 2,
+   xlab = "Service Waiting Time",
+   ylab = "Probaility",
+   main = "Exponential Distribution for Service Process",
+   ylim = c(0, 1))
> abline(h = 0)

#sugkrishmontelwn M/M/1,M/M/1/k,M/M/2,M/M/3

> CompareQueueingModels2(list(output_mm1,output_mm1k,output_mm2, output_mm3))

#M/M/1 me mu( $\mu$ )=5

> q1 <- QueueingModel(NewInput.MM1(lambda=3, mu=5,n=10))
> Report(q1)
> summary(q1)

# sugkrishmontelwn M/M/1 me mu=4 kai M/M/1 me mu( $\mu$ )=5

> CompareQueueingModels2(list(output_mm1,q1))

```

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Ελληνική Βιβλιογραφία

- Μπούτσικας, Μ., (2011). Σύντομη εισαγωγή στις στοχαστικές ανελίξεις, Διδακτικές σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Γαροφαλάκης, Γ., (χ.χ.). Δίκτυα συστημάτων αναμονής, Τεχνικές εκτίμησης υπολογιστικών συστημάτων, Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.
- Γεωργίου, Α.Κ., Κωνσταντάρας, Ι. & Καπάρης, Κ., (2015). *Τεχνικές προσομοίωσης στη διοικητική επιστήμη*, Εκδόσεις Ελληνικά Ακαδημαϊκά Συγγράμματα και Βοηθήματα- Αποθετήριο «Κάλλιπος». Ανακτήθηκε στις 19/1/21 από: <https://docplayer.gr/29578648-Tehnikes-prosomoiosis-sti-dioikitiki-epistimi.html>
- Δημητράκος, Θ., (2011). Στοχαστική Μοντελοποίηση, Διδακτικές σημειώσεις, Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Αιγαίου.
- Κομηνέας, Σ. & Χαρμανδάρης, Ε., (2015), *Μαθηματική μοντελοποίηση*, Μία σπουδή στις φυσικές επιστήμες, Εκδόσεις Ελληνικά Ακαδημαϊκά Συγγράμματα και Βοηθήματα- Αποθετήριο «Κάλλιπος», 7-9.
- Κούτρας, Β., (2011). Θεωρία Ουρών, Διδακτικές σημειώσεις, Τμήμα Μηχανικών Οικονομίας και Διοίκησης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.
- Λουλάκης, Μ., (2016). *Στοχαστικές διαδικασίες*, 1^η έκδοση, Εκδόσεις Ελληνικά Ακαδημαϊκά Συγγράμματα και Βοηθήματα- Αποθετήριο «Κάλλιπος». Ανακτήθηκε στις 10/1/21 από: <https://repository.kallipos.gr/handle/11419/6003>
- Λυμπερόπουλος, Γ., (2012). Παραδείγματα θεμάτων ασκήσεων συστημάτων ουρών αναμονής, Τμήμα Μηχανολόγων μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας. Ανακτήθηκε 17/5 από: <https://docplayer.gr/2057809-Paradeigmata-thematon-askiseon-systimaton-oyron-anamonis.html>
- Μάγκλαρης, Β., (2016). Συστήματα αναμονής. Διδακτικές σημειώσεις, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Οικονόμου, Γ. Σ. & Γεωργίου, Α. Κ., (2011). Επιχειρησιακή έρευνα για τη λήψη διοικητικών αποφάσεων. Εκδόσεις Ε. Μπένου.
- Πετρόπουλος, Κ., (χ.χ.). Στοχαστικές διαδικασίες, Τμήμα Επιστήμης των Υλικών, Πανεπιστήμιο Πατρών. Ανακτήθηκε στις 12/1/21 από: https://thalis.math.upatras.gr/~costas/courses/prob_EYL/diafanies/diaf_stochastics_web_2013.pdf
- Φακίνος, Δ., (2008). *Ουρές αναμονής – θεωρία και ασκήσεις*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.
- Φακίνος, Δ., (2011). *Εισαγωγή στις πιθανότητες και στις στοχαστικές διαδικασίες*, 1^η έκδοση, Εκδόσεις Αθανασόπουλος και Σία ΙΚΕ.
- Χρυσ αφίνου, Ο., (2012). *Εισαγωγή στις στοχαστικές ανελίξεις*, Εκδόσεις Σοφία, 2^η έκδοση.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- Boucherie, R. & Van Dijk, N.M., (2017). Markov decision Processes in practice, *Springer International Publishing*, 248, 1-61, DOI: 10.1007/978-3-319-47766-4.
- Canadila, P., (2019). Analysis of queueing networks and models. Package queueing.
- Gosavi, A., (χ.χ.). Tutorial for use of basic queueing formulas. Department of Engineering Management and Systems Engineering, Missouri S & T., 5-6
- Medhi, J., (2003). Stochastic Models in Queueing Theory. *Academic Press*, Amsterdam, Second edition.
- Modiano, E., (χ.χ.). Introduction to queueing theory, Massachusetts Institute of Technology.
- Ross, S. M., (1996). Stochastic Processes, *Wiley and Sons*, New York.
- Ross. S. M., (2014). Introduction to Probability Models. *Academic Press*, San Diego, CA, USA, Eleventh edition.
- Thomopoulos, N. T., (2012). Fundamentals of queueing systems, *Springer*, New York.
- X., X., (χ.χ.). $M/E_k/1(\infty/FIFO)$ System: Queueing Theory, *Universal Teacher Publications*.