Δώνος Νικόλαος

Ομάδες Πινάκων: Άλγεβρα και Γεωμετρία

Πτυχιακή Εργασία

Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών

Σάμος 17 Ιουνίου 2022

Εισηγητής: Πρασίδης Ευστράτιος

Επιτροπή

Κοφίνας Κωνσταντίνος

Μεταφτσής Βασίλειος

Στον πατέρα μου Βασίλη!

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Από το Θεώρημα του Frobenius, υπάρχουν ακριβώς τρεις πραγματικές, προσεταιριστικές άλγεβρες, πεπερασμένης διάστασης, χωρίς διαιρέτες του μηδενός: οι πραγματικοί $\mathbb{R}$, οι μιγαδικοί $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ και τα τετρακτόνια $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$. Παρουσιάζουμε την δομή ομάδων πινάκων, μικρής διάστασης, με συντελεστές στους παραπάνω δακτυλίους και χρησιμοποιούμε αλγεβρικά και γεωμετρικά μέσα για να τις συγκρίνουμε και να βρούμε τις σχέσεις μεταξύ τους. Πιο συγκεκριμένα, το κεντρικό θέμα της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη των πινάκων με συνελεστές πάνω από σώματα ή δακτύλιους με διαίρεση. Θα μελετήσουμε κάποιες ομάδες αντιστρέψιμων πινάκων. Η προσέγγισή μας θα είναι διπλή. Από την μια μεριά θα μελετήσουμε τις αλγεβρικές τους ιδιότητες. Η δεύτερη προσέγγιση θα είναι γεωμετρική. Σ' αυτήν την προσέγγιση οι ομάδες πινάκων θα θεωρηθούν ως ομάδες συμμετρίας κάποιων αλγεβρικών ή γεωμετρικών δομών. Δηλαδή θα είναι απεικονίσεις (που αναπαρίστανται με πίνακες) που θα διατηρούν αποστάσεις, εσωτερικά γινόμενα και, κάποιες φορές, αλγεβρικές δομές. Το επόμενο βήμα είναι να συγκρίνουμε αυτές τις ομάδες κατασκευάζοντας ομομορφισμούς μεταξύ τους. Και πάλι οι ομομορφισμοί θα έχουν διπλό ορισμό. Από την μια αλγεβρικό και από την άλλη θα δώσουμε έναν γεωμετρικό ορισμό. Στην συνέχεια θα μελετήσουμε τους ομομορφισμούς αυτούς αλγεβρικά, χρησιμοποιώντας γεωμετρικά εργαλεία.

Στο τέλος θα παρουσιάσουμε τις άλγεβρες Clifford που είναι γενικεύσεις αυτών των αλγεβρών και θα μελετήσουμε τις αντίστοιχες ομάδες πινάκων.

2 Βασικοί ορισμοί

Ξεκινάμε με τους βασικούς αλγεβρικούς ορισμούς.

Ορισμός 2.1 (Ομάδα). *Μια ομάδα $(G, *)$ είναι ένα σύνολο G εφοδιασμένο με μια διμελή πράξη $* : G \times G \to G$ που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) *Προσεταιριστικότητα: $\forall x, y, z \in G$, ισχύει $(x * y) * z = x * (y * z)$.*

(ii) *Ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου: $\forall x \in G$, ισχύει $e * x = x * e = x, e \in G$.*

(iii) *Ύπαρξη αντιστρόφου στοιχείου: $\forall x \in G, \exists x^{-1} : x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.*

Μία ομάδα G ονομάζεται Αβελιανή αν και μόνο αν ισχύει και η αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή $\forall x, y \in G$ έχουμε $x * y = y * x$, επιπλέον των υπολοίπων ιδιοτήτων της ομάδας.

Παρατήρηση 2.2. *Μία ομάδα G έχει μοναδικό ουδέτερο και μοναδικό αντίστροφο στοιχείο.*

Παράδειγμα 2.3. *Οι προσθετικές ομάδες $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ είναι αβελιανές. Το ίδιο ισχύει και για τις πολλαπλασσιαστικές ομάδες $(\mathbb{Q}^*, *)$, $(\mathbb{R}^*, *)$, $(\mathbb{C}^*, *)$, όπου $F^* = F - \{0\}, F = \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.*

Παράδειγμα 2.4. *Η προσθετική ομάδα $(\mathbb{Z}_n, +)$ των ακεραίων $\mathrm{mod} n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$: Σε αυτήν την ομάδα ισχύει η προσαιτεριστική ιδιότητα, αφού η πρόσθεση είναι προσαιτεριστική πράξη. Το ρόλο του ουδέτερου στοιχείου έχει το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, το 0. Κάθε στοιχείο στην $\mathbb{Z}_n$ έχει αντίστροφο στοιχείο, εκείνο που όταν το προσθέσουμε το αποτέλεσμα που θα πάρουμε θα είναι το $0 \mathrm{mod} n$. Όμοια έχουμε την πολλαπλασιαστική ομάδα $(\mathbb{Z}_p^*, *)$, p πρώτος: Σε αυτήν την ομάδα ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, αφού ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστική πράξη. Το ρόλο του ουδέτερου στοιχείου έχει το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, το 1. Κάθε στοιχείο στην $\mathbb{Z}_p^*$ έχει αντίστροφο εκείνο το στοιχείο που όταν το πολλαπλασιάσουμε θα δώσει αποτέλεσμα $1 \mathrm{mod} p$, όπου το p είναι πρώτος αριθμός. Για παράδειγμα στκν $\mathbb{Z}_5^* = \{1, 2, 3, 4\}$, τα αντίστροφα στοιχεία των στοιχείων θα είναι τα εξής: $1^{-1} = 1$ αφού $1 \equiv 1 \mathrm{mod} 5$, $2^{-1} = 3$ γιατί $2 * 3 = 6 \equiv 1 \mathrm{mod} 5$, ακριβώς το ίδιο $3^{-1} = 2$ και τέλος $4^{-1} = 4$ γιατί $4 * 4 = 16 \equiv 1 \mathrm{mod} 5$.*

Ορισμός 2.5 (Υποομάδα). *Για G ομάδα, ένα υποσύνολο $H \subset G$ ονομάζεται υποομάδα της G αν η H είναι επίσης ομάδα με την πράξη της G και συμβολίζεται $H \leqslant G$.*

Παρατήρηση 2.6. *Για ένα μη-κενό υποσύνολο H του G, το H είναι υποομάδα της G, αν και μόνο αν:*

(i) *η πράξη της $(G, *)$ είναι κλειστή στο H, δηλαδή $x * y \in H, \forall x, y \in H$.*

(ii) *υπάρχει αντίστροφο στοιχείο του x μέσα στην H, δηλαδή $\exists x^{-1} \in H, \forall x \in H$.*

Παράδειγμα 2.7. (i) $(\mathbb{Z}, +) < (\mathbb{Q}, +) < (\mathbb{R}, +) < (\mathbb{C}, +)$.

(ii) $(\mathbb{Q}^*, *) < (\mathbb{R}^*, *) < (\mathbb{C}^*, *)$

Παράδειγμα 2.8. (i) *Το υποσύνολο $n\mathbb{Z} = \{ns : s \in \mathbb{Z}\}, n > 1$ είναι υποομάδα της $(\mathbb{Z}, +)$. Για $a, b \in \mathbb{Z}, na + (-n)b = n(a - b) \in \mathbb{Z}$.*

(ii) *Το $\mathbb{N}$, το οποίο είναι υποσύνολο της $\mathbb{Z}$, εφοδιασμένο με την πρόσθεση, δεν είναι υποομάδα της $(\mathbb{Z}, +)$, διότι δεν υπάρχουν οι αρνητικοί αριθμοί στο $\mathbb{N}$.*

Χρειαζόμαστε δομές με δυο πράξεις.

Ορισμός 2.9 (Δακτύλιος)**.** *Ένας δακτύλιος $(R, +, *)$ είναι ένα μη-κενό σύνολο R εφοδιασμένο με δύο διμελείς πράξεις, την πρόσθεση $+ : R \times R \to R$ και τον πολλαπλασιασμό $* : R \times R \to R$ που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) *Η δομή $(R, +)$ είναι αβελιανή.*

(ii) *Προσεταιριστικότητα πολλαπλασιασμού: $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in R$.*

(iii) *Αριστερός και Δεξιός Επιμερισμός: $x * (y + z) = x * y + x * z$ και $(x + y) * z = z * x + z * y$, όπου $x, y, z \in R$.*

Αν στο δακτύλιο ισχύει η μεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού $x * y = y * x$, ο δακτύλιος λέγεται αντιμεταθετικός.

Αν σε έναν δακτύλιο υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο ως προς τον πολλαπλασιασμό, το οποίο συμβολίζεται I_R και ισχύει $x * I_R = I_R * x = x, \forall x \in R$, τότε έχουμε δακτύλιο με μονάδα.

Παράδειγμα 2.10. *Οι δομές $(\mathbb{Z}, +, *)$, $(\mathbb{Q}, +, *)$, $(\mathbb{R}, +, *)$, $(\mathbb{C}, +, *)$ είναι αντιμεταθετικοί δακτύλιοι με μονάδα. Το ίδιο ισχύει για την δομή $(\mathbb{Z}_n, +, *))$ με την πρόσθεση $\mathrm{mod} n$ και τον πολλαπλασιασμό $\mathrm{mod} n$.*

Ορισμός 2.11. *(1) [Διαιρέτες του 0] Έστω $x \neq 0, x \in R$. Το x λέγεται αριστερός διαιρέτης του 0 αν υπάρχει $y \in R$, τέτοιο ώστε $x * y = 0$, με $y \neq 0$. Το y είναι δεξιός διαιρέτης του 0.*

(2) [Αντιστρέψιμα στοιχεία] Έστω R δακτύλιος με μονάδα και $x \in R$. Το x λέγεται αριστερά αντιστρέψιμο αν υπάρχει στοιχείο $y \in R$, τέτοιο ώστε $y*x = I_R$. Το x λέγεται δεξιά αντιστρέψιμο αν υπάρχει στοιχείο $z \in R$, τέτοιο ώστε $x*z = I_R$. Αν το x είναι αριστερά και δεξια αντιστρέψιμο, τότε λέγεται αντιστρέψιμο. Οι μονάδες ονομάζονται και αντιστρέψιμα στοιχεία.

Ορισμός 2.12. (i) *Αν R δακτύλιος με μονάδα και ένα στοιχείο $x \in R$ έχει αριστερό αντίστροφο $y \in R$ και δεξιό αντίστροφο $z \in R$, τότε $y = z$.*

(ii) *Ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα χωρίς διαιρέτες του μηδενός ονομάζεται ακέραια περιοχή.*

(iii) *Ένας δακτύλιος όπου κάθε μη-μηδενικό στοιχείο είναι μονάδα ονομάζεται δακτύλιος διαίρεσης.*

(iv) *Ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα όπου κάθε μη-μηδενικό στοιχείο είναι μονάδα ονομάζεται σώμα.*

Παρατήρηση 2.13. (i) *Σε έναν δακτύλιο διαίρεσης δεν υπάρχουν διαιρέτες του μηδενός.*

(ii) *Κάθε σώμα είναι ακέραια περιοχή.*

(iii) *Κάθε πεπερασμένη ακέραια περιοχή είναι σώμα.*

Παράδειγμα 2.14. (i) *Ο $\mathbb{Z}$ είναι ακέραια περιοχή που δεν είναι σώμα.*

(ii) *Ο $\mathbb{Z}_n$ είναι σώμα αν και μόνο αν είναι ακέραια περιοχή αν και μόνο αν ο n είναι πρώτος. Άρα αν ο n δεν είναι πρώτος, ο $\mathbb{Z}_n$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και με διαιρέτες του μηδενός.*

(iii) *Το σύνολο όλων των πολλαπλασίων του, το $2\mathbb{Z} = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$ με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ακεραίων είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος, χωρίς διαιρέτες του 0 αφού δεν υπάρχουν μη-μηδενικά στοιχεία που να δίνουν γινόμενο 0 και χωρίς μονάδα.*

Ως τώρα τα παραδείγματα που δώσαμε ήταν όλα στους αντιμεταθετικούς δακτύλιους. Για να κατασκευάσουμε μη-αντιμεταθετικά παραδείγματα χρειαζόμαστε τους δακτυλίους πινάκων. Για έναν δακτύλιο R to $M_n(R)$ συμβολίζει το σύνολο όλων των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία στο R. O $M_n(R)$ είναι μη-αντιμεταθετικός δακτύλιος με διαιρέτες του 0. Αρχικά

$$M_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & an,2 & ... & a_{n,n} \end{pmatrix}, a_{i,j} \in R, 1 \leqslant i, j \leqslant n \right\}.$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα τόσο στην πρόσθεση πινάκων $(A + B) + C = A + (B + C)$, όσο και στον πολλαπλασιασμό πινάκων $(A * B) * C = A * (B * C)$, όπου $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$. Ουδέτερο στοιχείο είναι ο μηδενικός πίνακας:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & an,2 & ... & a_{n,n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & an,2 & ... & a_{n,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & an,2 & ... & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Αντίστροφο στοιχείο του είναι ο $-A, \forall A \in {}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & an,2 & ... & a_{n,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{1,1} & -a_{1,2} & ... & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & -a_{2,2} & ... & -a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ -a_{n,1} & -an,2 & ... & -a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

Επίσης εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού πάνω στην πρόσθεση. Αν ο R έχει μοναδιαίο στοιχείο τότε η μονάδα του $M_n(R)$ θα είναι ο ταυτοτικός πίνακας

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία πινάκων η αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό ισχύει υπό ειδικές συνθήκες και όχι γενικά, γεγονός που μας υποδεικνύει ότι ο $M_n(R)$ δεν είναι μεταθετικός δακτύλιος. Επιπλέον σε αυτόν το δακτύλιο υπάρχουν διαιρέτες του 0. Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στον $M_2(\mathbb{R})$ και πάρουμε δύο πίνακες, τους και , όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και τους πολλαπλασιάσουμε, έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή το γινόμενο δύο μη-μηδενικών πινάκων είναι ο μηδενικός πίνακας. Σαφώς υπάρχουν πάρα πολλές παρόμοιες περιπτώσεις τέτοιων πινάκων μέσα στον $M_n(\mathbb{R})$.

Παράδειγμα 2.15. (i) *Οι δακτύλιοι $M_n(\mathbb{Z})$, $M_n(\mathbb{Q})$, $M_n(\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{C})$ είναι μη-αντιμεταθετικοί δακτύλιοι με μονάδα και με διαιρέτες του μηδενός.*

(ii) *Ο $M_n(2\mathbb{Z})$ είναι μη-αντιμεταθετικός δακτύλιος χωρίς μονάδα και με διαιρέτες του 0.*

2α′ Τετρακτόνια

Στην συνέχεια θα σώσουμε την κατασκευή ενός κλασικού δακτυλίου διαίρεσης που δεν είναι σώμα. Θα δώσουμε την κατασκευή του δακτύλιου των τετρακτονίων $\mathbb{H}$. Ξεκινάμε με τον δακτύλιο $M_2(\mathbb{C})$ των 2×2 πινάκων με στοιχεία στους μιγαδικούς. Έστω τώρα υποσύνολο

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) : a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Θα δείξουμε ότι το H είναι υποδακτύλιος του $M_2(\mathbb{C})$. Το μοναδιαίο στοιχείο θα είναι ο

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Έστω δύο στοιχεία του H, τα

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} c & d \\ -\overline{d} & \overline{c} \end{pmatrix}.$$

Έχουμε ότι

$$A - B = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ -\overline{d} & \overline{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c & b - d \\ -\overline{b} + \overline{d} & \overline{a} - \overline{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c & b - d \\ \overline{-b - d} & \overline{a - c} \end{pmatrix} \in H$$

Επίσης,

$$A * B = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c & d \\ -\overline{d} & \overline{c} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ac - b\overline{d} & ad + b\overline{c} \\ -c\overline{b} - \overline{a}\overline{d} & -d\overline{b} + \overline{a}\overline{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - b\overline{d} & ad + b\overline{c} \\ \overline{-ad + b\overline{c}} & \overline{ac - b\overline{d}} \end{pmatrix} \in H.$$

Δείξαμε ότι το H είναι υποδακτύλιος του $M_2(\mathbb{C})$, άρα είναι δακτύλιος που συμβολίζεται $\mathbb{H}$. Ο δακτύλιος $\mathbb{H}$ δεν είναι αντιμεταθετικός διότι:

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Μπορούμε να γράψουμε κάποιο στοιχείο q του $\mathbb{H}$ με την παράσταση $z = a + ib$ για κάθε μιγαδικό αριθμό z.

$$q = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 i & a_2 + a_3 i \\ -a_2 + a_3 i & a_0 - a_1 i \end{pmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας τους πίνακες του $\mathbb{H}$,

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

μπορούμε να γράψουμε το q σαν γραμμικό συνδυασμό των $\{I_2, I, J, K\}$ ως εξής:

$$q = a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = a_0 I_2 + a_1 i + a_2 J + a_3 K.$$

Σε αυτό το σημείο, θα δούμε πιο αναλυτικά την πράξη που θα έχουμε για τα τετρακτόνια. Θεωρούμε βάση $\{l, i, j, k\}$ στον $\mathbb{R}^4$ και ορίζουμε τον πολλαπλασιασμό:

	l	i	j	k
l	l	i	j	k
i	i	$-l$	k	$-j$
j	j	$-k$	$-l$	i
k	k	j	$-i$	$-l$

Σε αυτήν την πράξη το l έχει το ρόλο του ουδέτερου στοιχείου και βλέπουμε πως μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τετράδες πραγματικών αριθμών.

$$\begin{array}{l} (a + ib + jc + kd)(x + iy + jz + kw) = \\ (ax - by - cz - dw) + i(ay + bx + cw - dz) + j(az + cx + dy - bw) + k(aw + dx + bz - cy) \end{array}.$$

Ο $\mathbb{R}^4$ με αυτόν τον πολλαπλασιασμό λέγεται τετρακτόνιο. Τα τετρακτόνια συμβολίζονται $\mathbb{H}$. Για τα σύνολα $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$, ορίζεται μια σταθερή σχέση συζυγίας:

(i) Για $x \in \mathbb{R}, \overline{x} = x$.

(ii) Για $a \in \mathbb{C}, a = x + iy, \overline{a} = x - iy$.

(iii) Για $q \in \mathbb{H}, q \neq 0, q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|}, q\overline{q} = \overline{q}q = |q|^2, q = x + iy + jz + kw, \overline{q} = x - iy - jz - kw$.

Παράδειγμα 2.16. (i) *Ο $\mathbb{H}$ είναι δακτύλιος διαίρεσης που δεν είναι σώμα.*

(ii) *Ο $\mathbb{H}(\mathbb{Z}) = \{a_0 I_2 + a_1 i + a_2 J + a_3 K, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}\}$ είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{H}$ και είναι μη-αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα χωρίς διαιρέτες του 0.*

(iii) *Ο $\mathbb{H}(2\mathbb{Z}) = \{a_0 I_2 + a_1 i + a_2 J + a_3 K, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}\}$ είναι μη-αντιμεταθετικός δακτύλιος, χωρίς μονάδα και χωρίς διαιρέτες του 0.*

2β′ Ομάδες Πινάκων

Έστω R είναι ένας δακτύλιος με μονάδα. Τότε το σύνολο

$$GL_n(R) = \{A \in M_n(R) : \; A \text{ αντιστρέψιμος}\},$$

είναι μη-αβελιανή ομάδα (αν $n > 1$) με πράξη τον πολλαπλασιασμό. Θα εστιάσουμε στις ειδικές περιπτώσεις όταν $R = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ και θα μελετήσουμε κάποιες υποομάδες της ομάδας πινάκων.

Ορισμός 2.17 (Εσωτερικό Γινόμενο). *Έστω $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle$ στον k^n ως $\langle x, y\rangle = x_1 * \overline{y_1} + \ldots + x_n * \overline{y_n}$. Ιδιότητες:*

(i) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.

(ii) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

(iii) $a\langle x, y\rangle = \langle ax, y\rangle$ *και* $\langle x, ay\rangle = \langle x, y\rangle\overline{a}$.

(iv) $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$.

(v) $\langle x, x\rangle \geqslant 0, \langle x, x\rangle \in \mathbb{R}, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = (0, 0, \ldots, 0)$.

(vi) *Αν $e_1, e_2, \ldots, e_n$ η κανονική βάση στον k^n, τότε*

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

(vii) $\langle x, y\rangle = 0, \forall y \Rightarrow x = (0, 0, \ldots, 0)$ *και* $< x, y >= 0, \forall x \Rightarrow y = (0, 0, \ldots, 0)$.

Παρατήρηση 2.18.

- *Αν αντικαταστήσουμε σε έναν πίνακα A τα στοιχεία του a_{ij} με τα συζυγή $\overline{a_{ij}}$, παίρνουμε τον συζυγή πίνακα $\overline{A}$.*
- *Αν αντικαταστήσουμε σε έναν πίνακα A τα στοιχεία του a_{ij} με τα a_{ji}, παίρνουμε τον ανάστροφο πίνακα A^t.*
- *Ο πίνακας A^* είναι ο συζυγής, ανάστροφος του A.*
- *Για οποιαδήποτε $x, y \in k^n$ και $A \in M_n(k)$, έχουμε ότι $\langle xA, y\rangle = \langle x, yA^*\rangle$.*

Ορίζουμε $\mathcal{O}(n, k) = \{A \in M_n(k) : \langle xA, yA\rangle = \langle x, y\rangle\}$. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{O}(n, k)$ είναι ομάδα. Για $A, B \in \mathcal{O}(n, k)$, έχουμε

$$\langle xAB, yAB\rangle = \langle xA, yA\rangle \; (B \in \mathcal{O}(n, k)) \; = \langle x, y\rangle (A \in \mathcal{O}(n, k)).$$

Συνεπώς $AB \in \mathcal{O}(n, k)$. Το ουδέτερο στοιχείο της πράξης είναι ο μοναδιαίος πίνακας I_n, ο οποίος προφανώς ανήκει στο $\mathcal{O}(n, k)$. Έστω $A \in \mathcal{O}(n, k)$, έχουμε

$$\langle e_i A, e_j A\rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Το $e_i A$ είναι η i-οστή σειρά του πίνακα A και το εσωτερικό γινόμενο $\langle e_i A, e_j A\rangle$ είναι το στοιχείο ij στο γινόμενο πινάκων AA^*. Οπότε $AA^* = I_n$. Ωστόσο και το $A^*A = I_n$, διότι $(A^*A)^* = (\overline{A}A^t)^t = AA^* = I_n$. Άρα $A^{-1} = A^*$ ο δεξιός και αριστερός αντίστροφος του A. Ο $A^{-1} \in \mathcal{O}(n, k)$ γιατί

$$\langle xA^{-1}, yA^{-1}\rangle = \langle xA^{-1}A, yA^{-1}A\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Άρα $\mathcal{O}(n,k) < GL_n(k)$.

Συμβολίζουμε την $\mathcal{O}(n,k)$ για $k=\mathbb{R}$ με $O(n)$, η οποία ονομάζεται Ορθογώνια ομάδα και είναι η ομάδα ισομετριών του Ευκλείδειου χώρου διάστασης n. Για $k=\mathbb{C}$ έχουμε την $U(n)$, η οποία ονομάζεται Μοναδιαία ομάδα ή Υπερορθογώνια ομάδα. Για $k=\mathbb{H}$ έχουμε την $Sp(n)$, η οποία ονομάζεται Συμπλεκτική ομάδα. Η ομάδα των μονάδων, δηλαδή των στοιχείων που έχουν πολλαπλασιαστικό αντίστροφο, πάνω στην άλγεβρα $M_n(k)$, ονομάζεται Γενική Γραμμική Ομάδα (General Linear Group). Σε αυτές τις ομάδες έχουμε ως πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων και τον ρόλο του ουδετέρου στοιχείου παίζει ο ταυτοτικός πίνακας I_n.

Παρατήρηση 2.19. *Για $A \in M_n(k)$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

- $A \in \mathcal{O}(n,k)$.
- $\langle e_iA, e_jA\rangle = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$
- *Ο πίνακας A στέλνει ορθοκανονικές βάσεις σε ορθοκανονικές βάσεις.*
- *Οι σειρές και οι στείλες του A είναι ορθοκανονικές βάσεις.*
- $A^{-1} = A^*$.

Ορισμός 2.20 (Μήκος)**.** *Το μήκος ενός οποιουδήποτε x μέσα στον k^n, συμβολίζεται $\|x\|$ και ορίζεται ως $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.*

Πρόταση 2.21. *Έστω πίνακας $A \in M_n(k)$. Ο A ανήκει στην Ορθογώνια ομάδα αν και μόνο αν διατηρεί τα μήκη.*

Απόδειξη. Ο A διατηρεί τα μήκη σημαίνει ότι $\langle xA, xA\rangle = \langle x,x\rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n$, συνεπώς το ευθύ είναι προφανές. Για το αντίστροφο έχουμε

$$\langle (x+y)A, (x+y)A\rangle = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle.$$

Άρα, από εδώ προκύπτει ότι

$$\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle = \langle xA, yA\rangle + \langle yA, xA\rangle$$

και αφού το εσωτερικό γινόμενο είναι συμμετρικό πάνω στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι

$$\langle xA, yA\rangle = \langle x,y\rangle \Rightarrow A \in \mathcal{O}(n).$$

□

Πρόταση 2.22. *Η παραπάνω πρόταση ισχύει και στο $\mathbb{C}$ και στο $\mathbb{H}$.*

Απόδειξη. Ξεκινάμε με το εσωτερικό γινόμενο $\langle (e_i+e_j)A, (e_i+e_j)A\rangle$, όπως και στο $\mathbb{R}$ και την ορθοκανονική βάση και παίρνουμε

$$\langle e_iA, e_jA\rangle + \langle e_jA, e_iA\rangle = 0.$$

Αν $x = x_ie_i + x_je_j$ τότε

$$\langle xA, xA\rangle = x_i\overline{x_j}\langle e_iA, e_jA\rangle + x_j\overline{x_i}\langle e_jA, e_iA\rangle = 0 \Rightarrow \langle e_iA, e_jA\rangle(x_i\overline{x_j} - x_j\overline{x_i}) = 0.$$

Συνεπώς $\langle e_iA, e_jA\rangle = 0$. □

Παίρνοντας ξεχωριστά για τις τρείς ομάδες $\mathcal{O}(n), \mathcal{U}(n), Sp(n)$ για μικρό n, έχουμε ότι:

- $O(1)$ είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών μήκους 1, δηλαδή το $\{1, -1\}$.
- $U(1)$ είναι το σύνολο όλων των μιγαδικών αριθμών μήκους 1, δηλαδή η πολλαπλασιαστική ομάδα του κύκλου S^1.
- $Sp(1)$ είναι το σύνολο των τετρακτονίων μοναδιαίου μήκους 1.

Ορίζοντας $S^{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^k : \ \|x\| = 1\}$, να είναι η μοναδιαία $k-1$ σφαίρα βλέπουμε ότι $O(1) = S^0, U(1) = S^1, Sp(1) = S^3$. Αυτές είναι οι μόνες σφαίρες που μπορούν να είναι ομάδες.

Πρόταση 2.23. *Αν* $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *και* $A \in O(n,k)$, *τότε* $(\det A)(\overline{\det A}) = 1$.

Απόδειξη. Για $A \in \mathcal{O}(n,k)$, $\det A^* = \overline{\det A^t} = \overline{\det A}$. Το αποτέλεσμα είναι συνέπεια του ορισμού. □

Επομένως, αν $A \in O(n) = O(n, \mathbb{R})$, τότε $\det A \in \{-1, 1\}$. Ορίζουμε

$$SO(n) = \{A \in O(n) : \mathrm{det} A = 1\}$$

να είναι η Ειδική Ορθογώνια ομάδα (Special Orthogonal group) ή αλλιώς Προσανατολίσιμη ομάδα διότι στις δύο και τρεις διαστάσεις, τα στοιχεία είναι οι συνήθεις γραμμικοί μετασχηματισμοί που διατηρούν τον προσανατολισμό γύρω από το σημείο στις δύο διαστάσεις και από τη γραμμή στις τρεις. Όμοια ορίζουμε την Ειδική Μοναδιαία ομάδα (Special Utinary group)

$$SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}.$$

Ένα παράδειγμα για τον $O(2)$ είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

όπου το $e_1 = (1,0)$ πηγαίνει στο e_1 και το $e_2 = (0,1)$ πηγαίνει στο $-e_2$. Είναι η ανάκλαση ως προς τον άξονα του x με ορίζουσα -1.

Η ομάδα των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία στο k, διακρίνουσα $+1$ και πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων, ονομάζεται Ειδική Γραμμική Ομάδα (Special Linear Group) και συμβολίζεται $SL_n(k)$. Η $SL_n(k)$ είναι υποομάδα της $GL_n(k)$. Το ουδέτερο στοιχείο είναι κι εδώ ο ταυτοτικός πίνακας I_n.

Ορισμός 2.24. *Για δύο ομάδες* G, H *και μια απεικόνιση* $f : G \to H$ *έχουμε:*

- *Ομομορφισμό ομάδων αν* $f(ab) = f(a) * f(b), \forall a, b \in G$.
- *Μονομορφισμό ομάδων αν η* f *είναι "$1-1$".*
- *Επιμορφισμό ομάδων αν η* f *είναι "επί".*
- *Ισομορφισμό ομάδων αν η* f *είναι "$1-1$" και 'επί'.*

Πρόταση 2.25. *Αν* $\phi : G \to H$ *είναι ομομορφισμός ομάδων, τότε η* $\phi(G)$ *είναι υποομάδα της* H.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $\phi(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$, δηλαδή η ϕ πρειέχει το ουδέτερο στοιχείο της H. Αν $x, y \in \phi(G), \exists a, b \in G : \phi(a) = x, \phi(b) = y$. Τότε $xy = \phi(a)\phi(b) = \phi(ab) \in \phi(G)$. Έστω $x \in \phi(G)$, τότε $x = \phi(a) \Rightarrow x^{-1} = \phi(a^{-1}) \in \phi(G)$. Επομένως $\phi(G)$ είναι υποομάδα του H. □

Αν $\phi : G \to H$ είναι ένας μονομορφισμός ομάδων, τότε η ϕ είναι ισομορφισμός της G στην $\phi(G)$, η οποία είναι υποομάδα της H. Συνεπώς, η G θα είναι υποομάδα της H. Όπως και πριν, ορίζουμε έναν ομομορφισμό δακτυλίων

$$\phi : \mathbb{H} \to M_2(\mathbb{C}),\ \psi(x + iy + jz + kw) = \begin{pmatrix} x + iy & -z - iw \\ z - iw & x - iy \end{pmatrix}.$$

Κατασκευάζουμε έναν μονομορφισμό

$$\Phi : GL(n, \mathbb{H}) \to GL(2n, \mathbb{C}),\ \ (a_{i,j}) \mapsto (\phi(a_{i,j}))$$

Συνεπώς, για $A \in GL(n, \mathbb{H})$, ο πίνακας $\Phi(A)$ είναι ο $2n \times 2n$ πίνακας του οποίου τα 2×2 μπλοκ στη θέση (i,j) είναι οι $\phi(a_{i,j})$. Για $A \in GL(n, \mathbb{H})$ έχουμε ότι η ορίζουσα του A θα είναι η ορίζουσα του $\Phi(A)$.

Θα μελετήσουμε σε αυτό το σημείο τον ισομορφισμό μεταξύ των $Sp(1)$ και $SU(2)$. Η $Sp(1)$ είναι το σύνολο των τετρακτονίων μήκους 1 με πράξη τον πολλαπλασιασμό τετρακτονίων. Η $SU(2)$ είναι το σύνολο των 2×2 πινάκων A με στοιχεία στους μιγαδικούς, $A^{-1} = A^*$, $\det(A) = 1$ και πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Γνωρίζουμε ότι η ϕ επάγει μονομορφισμό από την $GL(n, \mathbb{H})$ στην $GL(2n, \mathbb{C})$. Συνεπώς, αν περιοριστούμε στην $Sp(1)$ που περιέχεται στην $GL(1, \mathbb{H})$ έχουμε και πάλι μονομορφισμό. Οπότε, πρέπει να δείξουμε ότι:

- Αν $A \in Sp(1)$, τότε $\phi(A) \in SU(2)$ και
- Κάθε $B \in SU(2)$ είναι κάποιο $\phi(A)$, όπου $A \in Sp(1)$.

Αν $A = a + ib + jc + kd$, τότε

$$\phi(A) = \begin{pmatrix} a + ib & -c - id \\ c - id & a - ib \end{pmatrix},$$

και

$$\phi(A)\phi(A)^* = \begin{pmatrix} a + ib & -c - id \\ c - id & a - ib \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - ib & c + id \\ -c + id & a + ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

αφού $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Επίσης $\det \phi(A) = 1$. Συνεπώς, $\phi(A) \in SU(2)$.

Τώρα έστω $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in SU(2)$. Γνωρίζοντας ότι η ορίζουσα του B είναι 1 και ότι οι γραμμές του πίνακα είναι ορθογώνια μοναδιαία διανύσματα, παίρνουμε ότι: $w = \bar{x}, z = -\bar{y}$. Συνεπώς, αν $x = a + ib, y = -c - id$, παίρνουμε ότι $A = a + bi + cj + dk$ και ότι $\phi(A) = B$.

2γ′ Ανακλάσεις στον $\mathbb{R}^n$

Έστω u το μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ και $u^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle = 0\}$ το ορθογώνιο συμπλήρωμά του. Η προβολή ενός διανύσματος v πάνω στο $u^\perp$ θα είναι το $v - ru$, όπου το $r \in \mathbb{R}$ επιλέγεται κατάλληλα ώστε το $v - ru$ να ανήκει στο

$u^\perp$. Συνεπώς, $0 = \langle v - ru, u\rangle = \langle v, u\rangle - r\langle u, u\rangle \Rightarrow r = \langle v, u\rangle$. Οπότε, η ανάκλαση του v στο $u^\perp$ θα είναι η $\phi(v) = v - 2ru = v - 2\langle v, u\rangle u$.

Έστω η ορθοκανονική βάση $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$, όπου $u_1 = u$. Χρησιμοποιώντας αυτή τη βάση, η ανάκλαση ϕ θα δωθεί από τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Έστω A η γραμμική απεικόνιση που στέλνει τα $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ στα $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$, η οποία είναι ορθογώνια. Επομένως, η ανάκλαση ϕ προκύπτει από την πράξη

$$A^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} A = A^t \begin{pmatrix} -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} A.$$

Αντίστροφα, βλέπουμε ότι ένας τέτοιος πίνακας αποτελεί ανάκλαση στο ορθογώνιο συμπλήρωμα του διανύσματος e_1A. Αν πάρουμε στον $\mathbb{R}^2$ το μοναδιαίο διάνυσμα u να είναι το $u = (\cos a, \sin a)$. Τότε το $(-\sin a, \cos a)$ θα είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στο $u^\perp$. Ο πίνακας A που αντιστοιχεί το e_1 στο u και το e_2 στο $(-\sin a, \cos a)$, πρέπει να ικανοποιεί τα

$$(1, 0)\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = (\cos a, \sin a)$$

και

$$(0, 1)\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = (-\sin a, \cos a),$$

ώστε

$$A = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

Άρα, η ανάκλαση που δίνει ο A στο $u^\perp$ είναι η

$$\phi = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos 2a & -\sin 2a \\ -\sin 2a & \cos 2a \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας A είναι η στροφή στο $\mathbb{R}^2$ με γωνία a.

3 Εκθέτης και Λογάριθμος πινάκων

Έστω G μια ομάδα πινάκων. Ορίζουμε έναν διανυσματικό χώρο T, τον εφαπτόμενο χώρο της G στην e. Θα βρούμε απεικονίσεις οι οποίες θα στέλνουν στοιχεία από το T στο G και από το G στο T και θα μελετήσουμε τις ιδιότητές τους. Σε αυτήν τη διαδικασία θα χρησιμοποιηθούν πίνακες με στοιχεία στο $\mathbb{R}$. Αντίστοιχη θα είναι η διαδικασία για πίνακες με στοιχεία στο $\mathbb{C}$ και στο $\mathbb{H}$.

Ορισμός 3.1 (Εκθέτης πίνακα). *Έστω ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ορίζουμε τον εκθέτη του ως:*

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots,$$

όπου $A^2 = AA, A^3 = AAA, \dots$.

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία συγκλίνει αν κάθε μία από τις επιμέρους n^2-πραγματικές ακολουθίες

$$(I)_{ij} + (A)_{ij} + (\frac{A^2}{2!})_{ij} + (\frac{A^3}{3!})_{ij} + \dots$$

συγκλίνουν.

Πρόταση 3.2. *Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$, η ακολουθία $I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω m το μεγαλύτερο στοιχείο $|a_{ij}|$ του πίνακα A. Τότε στον πίνακα I το μεγαλύτερο στοιχείο θα είναι το 1. Στον A θα είναι το m. Στον $\frac{A^2}{2!}$ το μεγαλύτερο στοιχείο θα είναι $\leqslant \frac{nm^2}{2!}$. Στον $\frac{A^3}{3!}$ το μεγαλύτερο στοιχείο θα είναι $\leqslant \frac{n^2m^3}{3!}$. Οπότε από τα παραπάνω, προκύπτει η ακολουθία

$$1, m, \frac{nm^2}{2!}, \frac{n^2m^3}{3!}, \dots, \frac{n^{k-2}m^{k-1}}{(k-1)!}, \dots$$

Από το κριτήριο σύγκλισης του λόγου παίρνουμε:

$$\frac{n^{k-1}m^k(k-1)!}{k!n^{k-2}m^{k-1}} = \frac{nm}{k},$$

το οποίο για $k \to \infty$ συγκλίνει απόλυτα στο 0. Αυτή ο εκθέτης είναι πανομοιώτυπος με το e^x, όπου για $x = 0$ παίρνουμε $e^0 = I$. □

Πρόταση 3.3. *Αν οι πίνακες A και B μετατίθενται, τότε $e^{A+B} = e^Ae^B$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη θα δουλέψουμε με τους πρώτους όρους των ακολουθιών.

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= I + A + B + \frac{A^2}{2} + AB + \frac{B^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \frac{A^2B}{2} + \frac{AB^2}{2} + \frac{B^3}{6} + \dots \\ e^Ae^B &= (I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \dots)(I + B + \frac{B^2}{2} + \frac{B^3}{6} + \dots) \\ &= I + A + B + \frac{A^2}{2} + AB + \frac{B^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \frac{A^2B}{2} + \frac{AB^2}{2} + \frac{B^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.4. *Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$, ο e^A είναι αντιστρέψιμος.*

Απόδειξη. Οι πίνακες A και $-A$ μετατίθενται, συνεπώς

$$I = e^0 = e^{A+(-A)} = e^A e^{-A}.$$

Οπότε $1 = \det e^A * \det e^{-A} \Rightarrow \det e^A \neq 0$. □

Πόρισμα 3.5. *Η εικόνα της απεικόνιση* $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}), \exp(A) = e^A$ *είναι μέσα στην* $GL(n, \mathbb{R})$.

Πρόταση 3.6. *Έστω πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$. Αν ο A είναι αντισυμμετρικός (δηλαδή $A^t = -A$), τότε ο e^A είναι ορθογώνιος.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι $I = e^0 = e^{A+(-A)} = e^A e^{-A} = e^A e^{A^t} = e^A (e^A)^t$, συνεπώς ο e^A είναι ορθογώνιος. □

Επομένως, αν $so(n) \subset M_n(\mathbb{R})$ είναι υπόχωρος των αντισυμμετρικών πινάκων, προκύπτει ότι $\exp : so(n) \to O(n)$. Αυτό δεν σημαίνει ότι κάθε ορθογώνιος πίνακας έχει μια εκθετική e^A μορφή, με A αντισυμμετρικό. Δεν έχουμε την $\exp : so(n) \to o(n)$ να είναι ”επί”.

Επίσης, δεν σημαίνει ότι αν e^A είναι ορθογώνιος, τότε ο A είναι αντισυμμετρικός. Θα εξεταστεί η περίπτωση για $n = 2$. Η γενική μορφή ενός 2×2, αντισυμμετρικού πίνακα είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

Για να υπολογίσουμε το e^A, πρώτα θα υπολογίσουμε τις δυνάμεις του πίνακα A.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -x^3 \\ x^3 & 0 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} x^4 & 0 \\ 0 & x^4 \end{pmatrix}, A^5 = \begin{pmatrix} 0 & x^5 \\ -x^5 & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} e^A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0 & -x^3 \\ x^3 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4!}\begin{pmatrix} x^4 & 0 \\ 0 & x^4 \end{pmatrix} + \\ &\quad \frac{1}{5!}\begin{pmatrix} 0 & x^5 \\ -x^5 & 0 \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ είναι η επέκταση σε σειρά του συνημιτόνου. Αντίστοιχα, $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ είναι η επέκταση σε σειρά του ημιτόνου. Από τις παραπάνω πράξεις για τον e^A, έχουμε ότι:

$$e^A = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας αυτός μας δίνει την περιστροφή στο επίπεδο για x ακτίνια. Επομένως, $\forall A \in M_2(\mathbb{R})$ αντισυμμετρικό, έχουμε ότι $\det e^A = 1 \Rightarrow A \in SO(2)$. Με αυτόν τον τρόπο για παράδειγμα η ανάκλαση

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(2),$$

δεν θα μπορούσε να βρεθεί ποτέ. Επίσης, $e^A = I$ δεν συνεπάγεται ότι ο A είναι ο μηδενικός πίνακας. Για παράδειγμα αν $A = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}$, τότε και πάλι $e^A = I$.

Πρόταση 3.7. *Αν οι* A, B *είναι* $n \times n$ *πίνακες πάνω στο* $k \in (\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$ *και* B *είναι αντιστρέψιμος τότε:* $e^{BAB^{-1}} = Be^{A}B^{-1}$.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε δύο ιδιότητες των πινάκων για να δείξουμε το ζητούμενο.

(i) $(BAB^{-1})^n = (BAB^{-1})(BAB^{-1})...(BAB^{-1}) = BA^nB^{-1}$

(ii) $B(C+D)B^{-1} = BCB^{-1} + BDB^{-1}$.

Οι ιδιότητες αυτές μαζί με τον ορισμό της εκθετικής μορφής ενός πίνακα θα μας δώσουν το ζητούμενο.

$$\begin{aligned} e^{BAB^{-1}} &= I + BAB^{-1} + \frac{(BAB^{-1})^2}{2!} + ... = BIB^{-1} + BAB^{-1} + \frac{BA^2B^{-1}}{2!} + \dots \\ &= B(I + A + \frac{A^2}{2!} + ...)B^{-1} = Be^{A}B^{-1} \end{aligned}$$

□

Ορισμός 3.8 (Λογάριθμος Πίνακα)**.** *Γνωρίζουμε ότι η* e^x *ορίζεται* $\forall x \in \mathbb{R}$ *και η* $\log x$ *για* $x > 0$. *Επομένως, ο λογάριθμος ενός πίνακα θα ορίζεται για πίνακές που βρίσκονται κοντά στον ταυτοτικό* I.

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$, *ορίζουμε σαν λογάριθμο του* A *την ποσότητα:*

$$\log A = (A - I) - \frac{(A-I)^2}{2} + \frac{(A-I)^3}{3} - \frac{(A-I)^4}{4} + ...$$

Πρόταση 3.9. *Για* A *κοντά στον* I, *η σειρά συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω πίνακας B για τον οποίο ισχύει ότι $B = A - I$ και $B = (b_{i,j})$. Θεωρούμε ότι κάθε $|b_{i,j}| < \epsilon$. Άρα

$$|B_{i,j}| < \epsilon, \frac{(B^2)_{i,j}}{2} < \frac{n\epsilon^2}{2}, \frac{(B^3)_{i,j}}{3} < \frac{n^2\epsilon^3}{3}, \cdots \frac{(B^k)_{i,j}}{k} < \frac{n^{k-1}\epsilon^k}{k}.$$

Από το κριτήριο σύγκλισης του λόγου παίρνουμε ότι

$$\frac{n^k\epsilon^{k+1}}{k+1}\frac{k}{n^{k-1}\epsilon^k} = \frac{k}{k+1}n\epsilon = (1 + \frac{-1}{k+1})n\epsilon,$$

το οποίο όταν το $k \to \infty$, συγκλίνει στο $n\epsilon$. Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει για κάθε πίνακα B, τέτοιον ώστε κάθε στοιχείο του πίνακα $(A - I)$ να είναι μικρότερο σε μέγεθος από την ποσότητα $\frac{1}{n}$. □

Πρόταση 3.10. *Στο* $M_n(\mathbb{R})$ *ορίζουμε μια περιοχή* U *γύρω από το* I, *στην οποία ορίζεται ο λογάριθμος. Έστω τώρα μια περιοχή* V *γύρω από το* 0, *τέτοια ώστε* $e^V \subset U$. *Τότε:*

(i) *Για* $X \in U$, $e^{\log X} = X$.

(ii) *Για* $A \in V$, $\log e^A = A$.

Απόδειξη. (i)

$$\begin{aligned}\log X &= (X-I) - \frac{(X-I)^2}{2} + \frac{(X-I)^3}{3} - \frac{(X-I)^4}{4} + \dots \\ e^{\log X} &= [I + (X-I) - \frac{(X-I)^2}{2} + \frac{(X-I)^3}{3} - \dots] \\ &+ \frac{1}{2!}[(X-I) - \frac{(X-I)^2}{2} + \frac{(X-I)^3}{3} - \dots] \\ &+ \frac{1}{3!}[(X-I) - \frac{(X-I)^2}{2} + \frac{(X-I)^3}{3} - \dots] + \dots \\ &= X - \frac{(X-I)^2}{2} + \frac{(X-I)^2}{2} + [\frac{(X-I)^3}{3} - \frac{(X-I)^3}{2} + \frac{(X-I)^3}{6}] + \dots = X\end{aligned}$$

.

(ii) Για $A \in V \Rightarrow e^A \in U$, άρα ο $\log e^A$ ορίζεται και

$$e^A - I = A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Οπότε

$$\begin{aligned}\log e^A &= (A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots) + \frac{1}{2}(A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots)^2 \\ &+ \frac{1}{3}(A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots)^3 + \dots \\ &= A + (\frac{A^2}{2!} - \frac{A^2}{2}) + (\frac{A^3}{3} - \frac{A^3}{2} + \frac{A^3}{6}) + \dots = A.\end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.11. *Αν* X *και* Y *είναι κοντά στο* I *και* $\log X, \log Y$ *μετατίθενται, τότε* $\log(XY) = \log X + \log Y$*. Συνεπώς, αν ο* X *είναι κοντά στο* I *και ορθογώνιος, ο* X *είναι αντισυμμετρικός.*

Απόδειξη. $e^{\log(XY)} = XY = e^{\log X} e^{\log Y} = e^{\log X + \log Y}$ με την e να είναι "$1-1$" κοντά στο 0. Έστω X ορθογώνιος πίνακας. Τότε, ο X και ο X^t μετατίθενται, άρα και $\log X$ και $\log X^t$ μετατίθενται. Επίσης, $XX^t = I$. Οπότε, έχουμε $0 = \log XX^t = \log X + \log X^t = \log X + (\log X)^t$, που μας δείχνει ότι ο $\log X$ είναι αντισυμμετρικός πίνακας. □

3α′ Άλγεβρες Lie

Παρατηρούμε ότι η $so(n)$, (και τα ανάλογά τους $su(n), sp(n)$) δεν είναι κλειστά ως προς τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$, τότε $A^2 = \begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{pmatrix}$, ο οποίος δεν είναι αντισυμμετρικός.

Πρόταση 3.12. *Για σώμα* $k = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ *και για δύο πίνακες* $A, B \in M_n(k)$*, ορίζουμε διγραμμική πράξη* $[,] : k \times k \to k$*, για την οποία ισχύει* $[A, B] = AB - BA$*. Τότε τα* $so(n), su(n), sp(n)$ *είναι κλειστά ως προς την πράξη* $[,]$*.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $(AB - BA) + (AB - BA)^* = 0$. Έχουμε $AB - BA + (AB)^* - (BA)^* = AB - BA + B^*A^* - A^*B^* = AB + (AB^* - AB^*) - BA + (-BA^* + BA^*) + B^*A^* - A^*B^* = A(B + B^*) - (A + A^*)B* - B(A + A^*) + (B + B^*)A^* = 0$. □

Με αυτήν την πράξη τα $so(n)$, $su(n)$, $sp(n)$ γίνονται άλγεβρες. Η παραπάνω πράξη έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $[A, B] = -[B, A]$.

(ii) $[A, A] = 0$.

(iii) Διγραμμικότητα:

$$[iA+jB, C] = i[A, C]+j[B, C], [A, iB+jC] = i[A, B]+j[A, C], \forall A, B, C \in M_n(k), \forall i, j \in k$$

.

(iv) Ταυτότητα Jacobi: $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$.

Απόδειξη. Ταυτότητα Jacobi:$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$ Για τους τρεις όρους του αθροίσματος έχουμε:

$$[[A, B], C] = [(AB-BA), C] = (AB-BA)C-C(AB-BA) = ABC-BAC-CAB+CBA$$

.

$$[[B, C], A] = [(BC-CB), A] = (BC-CB)A-A(BC-CB) = BCA-CBA-ABC+ACB$$

.

$$[[C, A], B] = [(CA-AC), B] = (CA-AC)B-B(CA-AC) = CAB-ACB-BCA+BAC$$

.

Αντικαθιστώντας στην αρχική ταυτότητα παίρνουμε:

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] =$$

$$ABC-BAC-CAB+CBA+BCA-CBA-ABC+ACB+CAB-ACB-BCA+BAC = 0$$

. □

Ορισμός 3.13 (Lie-Άλγεβρα). *Για σώμα* k, *μια Lie-άλγεβρα L πάνω από το* k *είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το* k, *εφοδιασμένος με την διγραμμική πράξη* $[,] : L \times L \to L$, *η οποία ονομάζεται Lie-μεταθέτης και ικανοποιεί τις τέσσερις παραπάνω ιδιότητες.*

Γενικότερα, για τις Lie-άλγεβρες των ομάδων πινάκων που μελετάμε, έχουμε:

(i) Για την $SO(n)$, την $so(n)$, όπου στους πραγματικούς αυτές οι Lie-άλγεβρες, για διαφορετικά n είναι συμπαγείς, πραγματικές μορφές των δύο από τις τέσσερις οικογένειες ημιαπλών Lie-αλγεβρών.

(ii) Για την $SU(n)$, την $su(n)$, όπου περιέχει τους $n \times n$ αντί-Ερμιτιανούς πίνακες ($a_{i,j} = -\overline{a_{i,j}}$) με ίχνος 0 και διάσταση $n^2 - 1$.

(iii) Για την $Sp(n)$, την $sp(n)$, όπου περιέχει τους $n \times n$ αντί-Ερμητιανούς πίνακες με πράξη των μεταθετών $[A, B] = AB - BA$.

Θα μελετήσουμε Lie-άλγεβρες μικρών διαστάσεων. Για διάσταση 1, διανυσματικός χώρος είναι το $\mathbb{R}$ και για $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε $[x, y] = x[1, y] = xy[1, 1] = 0$. Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι ικανοποιούνται και οι υπόλοιπες ιδιότητες. Για διάσταση 2, θεωρούμε μια βάση (e_1, e_2). Θα πρέπει τότε $[e_1, e_1] = 0, [e_2, e_2] = 0, [e_1, e_2] = -[e_2, e_1]$. Έστω ότι $[e_1, e_2] = ae_1 + be_2$. Θα δείξουμε ότι ισχύει η ταυτότητα Jacobi.

$$[e_1, [e_1, e_2]] + [e_1, [e_2, e_1]] + [e_2, [e_1, e_1]] =$$

$$= [e_1, (ae_1 + be_2)] + [e_1, -(ae_1 + be_2)] + [e_2, 0] = b(ae_1 + be_2) - b(ae_1 + e_2) = 0.$$

Η επιλογή των a, b είναι τυχαία και δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Αν, για παράδειγμα τα a, b ήταν 0, τότε θα πέρναμε ως αποτέλεσμα την τετριμμένη Lie-άλγεβρα. Για οποιαδήποτε άλλη επιλογή παίρνουμε μη-τετριμμένη Lie-άλγεβρα. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οποιεσδήποτε δισδιάστατες μη-τετριμμένες Lie-άλγεβρες είναι βασικά όμοιες ως προς τον τρόπο που συμπεριφέρονται. Για τις τρισδιάστατες, μη-τετριμμένες Lie-άλγεβρες, θα δώσουμε προσοχή στην

$$so(3) = \{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \},$$

για την οποία χρησιμοποιώντας τη βάση $\langle i, j, k \rangle$ με $[i, j] = k, [j, k] = i, [k, i] = j$, παίρνουμε ότι είναι τρισδιάστατη Lie-άλγεβρα.

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:

$$i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

$$[i, j] = ij - ji = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = k.$$

Όμοια, τα άλλα δύο:

$$[j, k] = jk - kj = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i.$$

$$[k, i] = ki - ik = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = j.$$

Ορισμός 3.14. *Αν* L_1, L_2 *είναι Lie-άλγεβρες πάνω στο* k*, η απεικόνιση* $f : L_1 \to L_2$ *είναι ομομορφισμός Lie-αλγεβρών αν και μόνο αν:*

a *Η* f *είναι γραμμική, δηλαδή,* $f(kx + ly) = kf(x) + lf(y)$.

b $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$.

Ορισμός 3.15. (i) *Αν* f *είναι ομομορφισμός Lie-αλγεβρών και "1-1", λέγεται μονομορφισμός Lie-αλγεβρών.*

(ii) *Αν* f *είναι ομομορφισμός Lie-αλγεβρών και "επί", λέγεται επιμορφισμός Lie-αλγεβρών.*

(iii) *Αν* f *είναι ομομορφισμός Lie-αλγεβρών και "1-1" και "επί", λέγεται ισομορφισμός Lie-αλγεβρών.*

4 SO(3) **και** SP(1)

4α′ **Ομομορφισμός** $p : S^3 \to SO(3)$

Στα προηγούμενα, έχουμε δει ότι ο $SP(1)$, ο οποίος είναι όλα τα τετρακτόνια μοναδιαίου μήκους, είναι η μοναδιαία τρισδιάστατη σφαίρα στον $\mathbb{R}^4$. Επίσης είδαμε ότι για τη διάσταση του $SO(3)$ ότι $\dim SO(3) = \frac{3*2}{2} = 3$. Συνεπώς, η διάσταση δεν διαχωρίζει τον S^3 από τον $SO(3)$ και ενδεχομένως να υπάρχει και ισομορφισμός μεταξύ τους. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τον ισομορφισμό αυτό.

Πρόταση 4.1. *Έστω $q \in S^3$, τότε η αριστερή μετατόπιση $L_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, με τύπο $L_q(q') = qq'$, είναι μία ορθογώνια απεικόνιση από το $\mathbb{R}^4$ στο $\mathbb{R}^4$.*

Απόδειξη. Σαν διανυσματικοί χώροι πάνω στο $\mathbb{R}$, οι $\mathbb{R}^4$ και $\mathbb{H}$ είναι όμοιοι. Οπότε η αριστερή μετατόπιση L_q είναι γραμμική απεικόνιση του $\mathbb{R}^4$, διότι για $a, b \in \mathbb{R}$ και για $x, y \in \mathbb{H}$, έχουμε $L_q(ax+by) = q(ax+by) = qax+qby = L_q(ax)+L_q(by)$. Για να είναι η L_q ορθογώνια, αρκεί να δείξουμε ότι διατηρεί την καθετότητα των τεσσάρων διανυσμάτων $1, i, j, k$. Χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^4$ και θεωρώντας ένα στοιχείο $q = a + ib + jc + kd$ του $\mathbb{H}$, έχουμε:

$$L_q(1) = a + ib + jc + kd,$$

$$L_q(i) = ai - b - kc + jd,$$

$$L_q(j) = aj + kb - c - id,$$

$$L_q(k) = ak - jb + ic - d.$$

$$\langle L_q(i), L_q(j)\rangle = \langle ai - b - kc + jd, aj + kb - c - id\rangle = -ad + bc - bc + ad = 0.$$

$$\langle L_q(1), L_q(i)\rangle = \langle a + ib + jc + kd, ai - b - kc + jd\rangle = -ab + ab + cd - cd = 0.$$

Όμοια και τα υπόλοιπα ζευγάρια των διανυσμάτων της βάσης θα δώσουν εσωτερικό γινόμενο ίσο με το 0. □

Ορισμός 4.2. *Για τα $q \in S^3$ και $a \in \mathbb{H}$ ορίζουμε απεικόνιση $p(q)(a) = qa\overline{q}$*

Με αυτόν τον τρόπο έχουμε μία αριστερή μετατόπιση από το q και μία δεξιά μετατόπιση από το $\overline{q}$. Επίσης, η p είναι ορθογώνια απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^4$ στον $\mathbb{R}^4$. Συνεπώς, $p(q) \in \mathcal{O}(4)$. Αφού τα πραγματικά τετρακτόνια μετατίθενται με όλα τα τετρακτόνια, αν x είναι πραγματικό τετρακτόνιο, τότε: $p(q)(x) = qx\overline{q} = q\overline{q}x = x$. Επίσης, το $p(\overline{q})$ είναι το αντίστροφο του $p(q)$ μέσα στον $\mathcal{O}(4)$, αφού $p(q)p(\overline{q})(x) = q(\overline{q}xq)\overline{q} = x$, όμοια για $p(\overline{q})p(q)$. Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι η $p(q)$ απεικονίζει τον τρισδιάστατο χώρο, παραγόμενο από τα διανύσματα i, j, k στον εαυτό του. Αν $q = a + ib + jc + kd$, έχουμε:

$$qi\overline{q} = (a + ib + jc + kd)(i)(a - ib - jc - kd) =$$

$$= i(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + j(2ad + 2bc) + k(2bd - 2ac) \in \langle i, j, k\rangle.$$

$$qj\overline{q} = (a + ib + jc + kd)(j)(a - ib - jc - kd) =$$

$$= i(2bc - 2ad) + j(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) + k(2ab - 2cd) \in \langle i, j, k\rangle.$$

$$qk\overline{q} = (a + ib + jc + kd)(k)(a - ib - jc - kd) =$$

$$= i(2ac + 2bd) + j(2cd - 2ab) + k(a^2 - b^2 - c^2 + d^2) \in \langle i, j, k \rangle.$$

Επιπλέον, η $p(q)$ είναι στοιχείο της $\mathcal{O}(3)$, διότι για $A \in \mathcal{O}(3)$, έχουμε:

$$p(q)(A) = qA\overline{q}, (p(q)(A))^t = qA^t\overline{q}.$$

$$p(q)(A)(p(q)(A))^t = qA\overline{q}qA^t\overline{q} = I.$$

$$(p(q)(A))^t(p(q)(A)) = qA^t\overline{q}qA\overline{q} = I.$$

Τέλος, η $p(q)$ είναι στοιχείο της $S\mathcal{O}(3)$.

Πρόταση 4.3. *Η* $p : S^3 \to S\mathcal{O}(3)$ *είναι επιμορφισμός και* $\ker(p) = \{-1, 1\} \subset S^3$.

Απόδειξη. Έστω $q_1, q_2 \in S^3$ και $a \in span\langle i, j, k \rangle$, τότε

$$p(q_1q_2)(a) = q_1q_2a\overline{q_1q_2} = q_1(q_2a\overline{q_2})\overline{q_1} = p(q_1)p(q_2)(a).$$

Επιπλέον p είναι ομομορφισμός. Προφανώς $p(-1)$ και $p(1)$ είναι το ουδέτερο στοιχείο στην $So(3)$, αφού τα 1 και -1 είναι τα στοιχεία του πυρήνα. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $p(q)$ είναι το ουδέτερο με $q = a + ib + jc + kd$. Τότε

$$p(q)(i) = i \Rightarrow (a+ib+jc+kd)(i)(a-ib-jc-kd) = i \Rightarrow a^2+b^2-c^2-d^2 = 1.$$

Αλλά, $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$. Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $c = d = 0$. Δουλεύοντας με το $p(q)(j) = j$, παίρνουμε $b = 0$. Τελικά, $a^2 = 1 \Rightarrow a \in \{-1, 1\}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η p είναι ”επί”. Θεωρούμε ένα $q \in S^3 : p(q) \in SO(3)$, το οποίο μας αφήνει ελεύθερο το k και στέλνει το i στο j και το j στο $-i$. Αν $q = a + ib + jc + kd$, θέλουμε

$$(a+ib+jc+kd)(k)(a-ib-jc-kd) = k \Rightarrow (a+ib+jc+kd)(ka-jb-ic+d) = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ad - bc + bc - ad = 0.$$

$$ac + bd + ac + bd = 0 \Rightarrow 2(ac + bd) = 0.$$

$$-ab + cd + cd - ab = 2(cd - ab) = 0.$$

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 1.$$

Όμως, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ και αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε $2(b^2 + c^2) = 0 \Rightarrow b = c = 0$. Συνεπώς, ο μοναδικός περιορισμός που έχουμε για το q, έτσι ώστε $p(q)(k) = k$ είναι ότι $q = a + dk$ με $a^2 + d^2 = 1$. Τώρα, θα δείξουμε ότι $p(q)(i) = j$.

$$(a + kd)(i)(a - kd) = j \Rightarrow (a + kd)(ia + jd) = j \Rightarrow a^2 - d^2 = 0 \Rightarrow a = \pm d,$$

με την τιμή $-d$ να απορρίπτεται διότι $2a^2 = 1$. Τέλος, έμεινε να δείξουμε ότι $p(q)(j) = -i$.

$$(a + ka)(j)(a - ka) = -i \Rightarrow (a + ka)(ja - ia) = -1 \Rightarrow -2a^2 = -i.$$

Τότε είτε $q = \frac{1}{\sqrt{2}} + k\frac{1}{\sqrt{2}}$, είτε $q = -\frac{1}{\sqrt{2}} - k\frac{1}{\sqrt{2}}$. Και τα δύο αποτελέσματα μας δίνουν στοιχείο του $SO(3)$. □

Από τα παραπάνω δεν μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι οι S^3 και $SO(3)$ δεν είναι ισομορφικοί. Η p μπορεί να μην είναι ισομορφισμός, αλλά θα υπάρχει κάποια άλλη απεικόνιση που θα είναι.

4β′ Κέντρα

Σε αυτήν την ενότητα θα δωθεί μια εύκολη απόδειξη για το ότι S^3 και $SO(3)$ δεν είναι ισομορφικές.

Ορισμός 4.4 (Κέντρο). *Το κέντρο* C *μίας ομάδας* G *ορίζεται ως* $Z(G) = \{x \in G : xy = yx, \forall y \in G\}$. *Είναι αβελιανή ομάδα και κανονική υπομάδα της* G.

Πρόταση 4.5. *Αν δύο ομάδες είναι ισομορφικές, τότε θα είναι ισομορφικά και τα κέντρα τους.*

Απόδειξη. Έστω G, K οι δύο ισομορφικές ομάδες και $\phi : G \to K$ ο μεταξύ τους ισομορφισμός. Έστω $x \in Z(G)$, τότε $\forall g \in G, xg = gx$. Παίρνουμε,

$$\phi(x)\phi(g) = \phi(xg) = \phi(gx) = \phi(g)\phi(x) \Rightarrow \phi(x) \in Z(K).$$

Συνεπώς, $Z(G) \cong Z(K)$. Για το αντίστροφο της απόδειξης ακολουθείται η ίδια διαδικασία. □

Θα αποδείξουμε ότι $S^3 \ncong SO(3)$, μέσω της μη-ύπαρξης ισομορφισμού μεταξύ των κέντρων τους.

Πρόταση 4.6. *Το κέντρο της* $S^3 = SP(1)$ *είναι το* $\{-1, 1\}$, *ενώ της* $SO(3)$ *είναι το* $\{I\}$.

Απόδειξη. Αφού τα πραγματικά τετρακτόνια μετατίθενται με όλα τα τετρακτόνια, προφανώς $\{-1, 1\} \subset S^3$. Αντίστροφα, θεωρούμε $q = a + ib + jc + kd \in S^3$ να είναι στο κέντρο. Από τον ορισμό του κέντρου έχουμε:

$$qi = iq \Rightarrow ai - b - ck + dj = ai - b + ck - dj \Rightarrow c = d = 0.$$

$$qj = jq \Rightarrow (a + ib)j = j(a + ib) \Rightarrow b = 0.$$

Τελικά, $q = a$ και $a^2 = 1$, συνεπώς $Z(S^3) = \{-1, 1\}$. Για το $SO(3)$ θεωρούμε $A \in SO(3)$ να είναι στοιχείο του κέντρου. Αφού το A μετατίθεται με όλα τα στοιχεία του $SO(3)$, θα μετατίθεται και με τα στοιχεία της μορφής

$$T = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

αφού $T \subset SO(3)$. Θεωρούμε την κανονική βάση στον $\mathbb{R}^3, e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$. Ο A ελέγχει το e_3. Επιλέγουμε $B \in T$ να στέλνει το e_1 στο e_2 και το e_2 στο $-e_1$ και ελέγχει το e_3. Επομένως, έχουμε $Ae_3 = ae_1 + be_2 + ce_3$. Τότε, $BAe_3 = ae_2 - be_1 + ce_3$, ενώ $Ae_3 = ABe_3$, από το οποίο έπεται ότι $a = b = 0$ και αφού ο A διατηρεί τα μήκη, $c = 1$ ή $c = -1$. Έτσι ο A επάγει ορθογώνια απεικόνιση πάνω στο πεδίο των $e_1 e_2$. Στην πραγματικότητα είναι περιστροφή λόγω του παρακάτω υπολήμματος.

Λήμμα 4.7. *Κάθε στοιχείο της* $\mathcal{O}(2)$ *που μετατίθεται με όλες τις περιστροφές, είναι περιστροφή.*

Απόδειξη. Έστω $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ να είναι ένα στοιχείο της $\mathcal{O}(2)$. Για κάθε περιστροφή

$$t = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ -\sin u & \cos u \end{pmatrix}$$

πρέπει $\phi t = t\phi$. Έστω $\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Παίρνουμε $a\cos u - b\sin u = a\cos u + c\sin u$, $a\sin u + b\cos u = b\cos u + d\sin u$. Προκύπτει ότι $c = -b$, $a = d$. Άρα $\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $\det\phi = a^2 + b^2$. Αφού η διακρίνουσα δεν γίνεται να είναι -1 και πρέπει να είναι μέσα στο $\{-1, 1\}$, το λήμμα αποδεικνύεται. □

Επίσης, αποδυκνύεται ότι $c = 1$ και όχι -1, άρα $A \in T$. Θεωρούμε

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in SO(3).$$

Αφού ο A μετατίθεται με όλους τους πίνακες, θα μετατεθεί και με τον R και παίρνουμε:

$$AR = \begin{pmatrix} 0 & \sin u & \cos u \\ 0 & \cos u & -\sin u \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ -\cos u & -\sin u & 0 \end{pmatrix} = RA.$$

Επομένως, $\cos u = 1$ και $\sin u = 0$. Συνεπώς, $A = I$. □

4γ′ Ομάδες πηλίκο

Ορισμός 4.8 (Σχέση Ισοδυναμίας). *Αν H είναι υποομάδα της G, ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στην G ως εξής: $x \sim y$ αν $xy^{-1} \in H$. Η σχέση αυτή έχει τρεις ιδιότητες:*

(i) *Ανακλαστική:* $x \sim x \Rightarrow xx^{-1} = e \in H$.

(ii) *Συμμετρική:* $x \sim y \Rightarrow y \sim x, xy^{-1} \in H \Rightarrow (xy^{-1})^{-1} = yx^{-1} \in H$.

(iii) *Μεταβατική: Αν $x \sim y$ και $y \sim z$, τότε $x \sim z$. Αφού* $xy^{-1} \in H, yz^{-1} \in H \Rightarrow (xy^{-1})(yz^{-1}) = xz^{-1} \in H \Rightarrow x \sim z$.

Με αυτόν τον τρόπο η $\sim$ χωρίζει την G σε κλάσεις ισοδυναμίας. Έστω $C(x)$ η κλάση ισοδυναμίας που αφορά το x. Τότε, $C(x) = Hx = \{hx : h \in H\}$. Επίσης, $Hx = Hy \iff xy^{-1} \in H \iff y \in C(x) \iff x \in C(y)$. Αυτές οι κλάσεις ισοδυναμίας λέγονται δεξιές πλευρικές κλάσεις της H.

Παράδειγμα 4.9. *Αν $G = S^3 = Sp(1)$ και $H = \{-1, 1\}$. Τότε $Hq = \{-q, q\} = H(-q)$, ώστε η κάθε κλάση ισοδυναμίας να περιέχει δύο στοιχεία της S^3.*

Παράδειγμα 4.10. *Αν $G = U(3)$, έστω $H = \{kI : k \in \mathbb{C}, |k| = 1\}$. Τότε η H είναι κυκλική υποομάδα της G και οι δεξιές πλευρικές κλάσεις θα είναι κύκλοι. Έτσι η $U(3)$ διαμερίζεται σε κύκλους. Όμοια, αν $G = S^3 = Sp(1)$ και $H = \{a + ib : a^2 + b^2 = 1\}$. Έτσι, η S^3 μπορεί να διαμεριστεί σε κύκλους. Με πανομοιότυπο τρόπο υπολογίζονται οι αριστερές πλευρικές κλάσεις $xH = \{xh : h \in H\}$.*

Ορισμός 4.11 (Κανονική υποομάδα). *Η* H *είναι κανονική υποομάδα της* G *αν* $xHx^{-1} = H, \forall x \in G$. *Επίσης, μια υποομάδα* H *της* G *είναι κανονική αν και μόνο αν* $xH = Hx, \forall x \in G$.

Παράδειγμα 4.12. *Η αβελιανή υποομάδα* $T = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *δεν είναι κανονική υποομάδα της* $SO(3)$. *Έστω* $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in SO(3)$.

$$AT = \begin{pmatrix} -a\sin u & a\cos u & b \\ -a\cos u & -a\sin u & c \\ c\sin u - b\cos u & -b\sin u - c\cos u & 0 \end{pmatrix} \neq$$

$$\neq \begin{pmatrix} -a\sin u & a\cos u & c + b\cos u \\ -a\cos u & -a\sin u & c - b\sin u \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = TA.$$

Παράδειγμα 4.13. *Η υποομάδα* $H = \{a + ib : a^2 + b^2 = 1\}$ *δεν είναι κανονική υποομάδα της* $S^3 = Sp(1)$. *Έστω* $i \in H$. *Παίρνουμε,*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(i{+}j)(i)\frac{1}{\sqrt{2}}(-i{-}j) = \frac{1}{2}(i{+}j)(i)(-i{-}j) = \frac{1}{2}[(-1{-}k)(-i{-}j)] = \frac{1}{2}(i{+}j{+}j{-}i) = j \notin H.$$

Άρα, η H *δεν είναι κανονική υποομάδα.*

Έστω G/H το σύνολο με στοιχεία τις δεξιές πλευρικές κλάσεις της H στην G.

Πρόταση 4.14. *Αν* H *είναι κανονική υποομάδα της* G, *τότε η πράξη στην* G/H, *που ορίζεται ως εξής:* $(Hx)(Hy) = H(xy)$, *κάνει την* G/H *ομάδα.*

Απόδειξη. Χρειαζόμαστε την κανονικότητα της H για να δείξουμε ότι η πράξη είναι καλά ορισμένη. Έστω $Hx = Hz$ και $Hy = Hw$, θα δείξουμε ότι $Hxy = Hzw$. Έχουμε, $xy(zw)^{-1} = xyw^{-1}z^{-1}$ και $yw^{-1} = h_1 \in H$ και $xz^{-1} = h_2 \in H$. Οπότε, $xy(zw)^{-1} = xh_1x^{-1}h_2$ και αφού η H είναι κανονική, $xh_1x^{-1} = h_3 \in H$. Επομένως, $xy(zw)^{-1} = h_2h_3 \in H$, άρα η πράξη είναι καλά ορισμένη. Το $H = He \in H$ είναι το ουδέτερο στοιχείο και $Hx^{-1} \in H$ είναι το αντίστροφο του Hx. □

Παράδειγμα 4.15. *Έστω* $G = Sp(1)$ *και* $H = \{-1, 1\}$. *Η* H *είναι το κέντρο της* $Sp(1)$ *και επιπλέον είναι κανονική υποομάδα. Έτσι, η* G/H *είναι ομάδα και μάλιστα είναι η* $SO(3)$. *Υπάρχει κανονική απεικόνιση* $\eta : G \to G/H$ *με τύπο* $\eta(x) = Hx$.

Ορισμός 4.16 (Μεταθέτης). *Έστω* G *ομάδα και* $x, y \in G$. *Το στοιχείο* $xyx^{-1}y^{-1}$ *λέγεται μεταθέτης των* x, y *διότι* $(xyx^{-1}y^{-1})(yx) = (xy)$.

Ορίζουμε $[G, G]$ το σύνολο των πεπερασμένων γινομένων των μεταθετών.

Πρόταση 4.17. *Η* $[G, G]$ *είναι κανονική υποομάδα της* G *και* $G/[G, G]$ *είναι αβελιανή ομάδα.*

Απόδειξη. Η κλειστότητα της πράξης και η ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου είναι προφανή και

$$(xyx^{-1}y^{-1})(yxy^{-1}x^{-1}) = e,$$

άρα η $[G, G]$ είναι υποομάδα. Έστω $z \in G$ και $xyx^{-1}y^{-1} \in [G, G]$. Τότε,

$$\begin{gathered} z(xyx^{-1}y^{-1})z^{-1} = \\ = zxy(z^{-1}(xy)^{-1}(xy)z)x^{-1}((yz)^{-1}(yz))y^{-1}z^{-1} = \\ = \{z(xy)z^{-1}(xy)^{-1}\}\{x(yz)x^{-1}(yz)^{-1}\}\{yzy^{-1}z^{-1}\} \in [G, G]. \end{gathered}$$

Αυτό επεκτείνεται στα γινόμενα των μεταθετών και η $[G, G]$ γίνεται κανονική υποομάδα. Τελικά,

$$[G, G]x[G, G]y = [G, G]xy = [G, G]yx = [G, G]y[G, G]x.$$

□

Πρόταση 4.18. *Για* $x \in G$ *ορίζουμε* $\psi(x) : G \to G$*, με τύπο* $\psi(x)(y) = xyx^{-1}y^{-1}$*. Τότε η* $G/Z(G)$ *έχει μη τετριμμένο κέντρο αν και μόνο αν* $\exists x \in G - Z(G) : \psi(x)(G) \subset Z(G)$*.*

Απόδειξη. Ξεκινώντας από το αντίστροφο, έχουμε: $x \notin Z(G) \Rightarrow Z(G)x \neq Z(G)$ δεν είναι το ουδέτερο στην $G/Z(G)$. Αλλά, $\forall y \in G$ έχουμε $xyx^{-1}y^{-1} \in Z(G)$ τέτοιο ώστε

$$Z(G)xZ(G)y = Z(G)xy = Z(G)yx = Z(G)yZ(G)x$$

και $Z(G)x \in Z(G/Z(G)), \forall y \in G$. Για το ευθύ, $Z(G)x \neq Z(G)$ με $Z(G)x$ στο κέντρο συνεπάγεται ότι

$$Z(G)xZ(G)y = Z(G)xy = Z(G)yx = Z(G)yZ(G)x$$

έτσι ώστε $xyx^{-1}y^{-1} \in Z(G), \forall y \in G$. □

5 Spin(k)

5α′ Άλγεβρες Clifford

Ορισμός 5.1 (Διγραμμική μορφή). *Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω από σώμα F. Η απεικόνιση $b : V \times V \to F$ είναι διγραμμική μορφή αν $\forall u, v, w \in V$ και $a \in F$:*

(i) $b(u+v, w) = b(u, w) + b(v, w)$ *και* $b(u, v+w) = b(u, v) + b(u, w)$.

(ii) $b(au, v) = ab(u, v)$ *και* $b(u, av) = ab(u, v)$.

Η διγραμμική μορφή b είναι συμμετρική αν $b(u, v) = b(v, u) \forall u, v \in V$. Επίσης, $b(0, v) = b(v, 0) = 0$.

Παράδειγμα 5.2. (i) *Η απεικόνιση $b(x, y) = \langle x, y \rangle$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι διγραμμική και συμμετρική για κάθε βαθμωτό γινόμενο.*

(ii) *Η απεικόνιση $b((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 3y_1y_2 + 4y_1y_2$ είναι διγραμμική, αλλά όχι συμμετρική. Επίσης, αυτή η απεικόνιση με την κανονική βάση έχει πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Δηλαδή γράφεται*

$$b((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = (x_1, y_1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 5.3 (Τετραγωνική μορφή). *Μια απεικόνιση $f : V \to F$ είναι τετραγωνική μορφή αν υπάρχει διγραμμική μορφή $b : V \times V \to F$ τέτοια ώστε $f(x) = b(x, x), \forall x \in V$.*

Παράδειγμα 5.4. *Η απεικόνιση $f((x, y)) = x^2 + 5xy + 4y^2$ είναι τετραγωνική μορφή, αφού $f((x, y)) = b((x, y)(x, y))$ από τη διγραμμική μορφή που είχαμε παραπάνω $b((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 3y_1x_2 + 4y_1y_2$. Επίσης, $f((x, y)) = b_1((x, y)(x, y))$ για τη συμμετρική, τετραγωνική μορφή*

$$b((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = x_1x_2 + \frac{5}{2}(x_1y_2 + y_1x_2) + 4y_1y_2.$$

Λήμμα 5.5. *Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω σε σώμα F που η χαρακτηριστική του δεν είναι 2. Για κάθε τετραγωνική μορφή f, υπάρχει μοναδική, συμμετρική, διγραμμική μορφή b, τέτοια ώστε $f(x) = b(x, x), \forall x \in V$.*

Ορισμός 5.6 (Άλγεβρα Clifford). *Η Clifford άλγεβρα είναι η άλγεβρα που παράγεται από διανυσματικό χώρο V, με μια τετραγωνική μορφή f και είναι μοναδιαία, προσεταιριστική άλγεβρα. Ως Κ-άλγεβρα, γενικεύει τους πραγματικούς, τους μιγαδικούς και τα τετρακτόνια.*

Θέλουμε να δημιουργήσουμε ομάδες, οι οποίες είναι υποσύνολα των $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε μια πραγματική άλγεβρα, πεπερασμένης διάστασης $\mathcal{G}$ και G την ομάδα των μονάδων της $\mathcal{G}$. Έτσι, παίρνουμε περισσότερες ομάδες σαν υποσύνολα της $\mathcal{G}$. Για παράδειγμα, αν έχουμε την άλγεβρα $M_n(\mathbb{R})$, η ομάδα των μονάδων είναι ο $GL(n, \mathbb{R})$ και υποομάδα την $SO(n)$. Οι ομάδες $Spin(k)$ είναι υποομάδες των ομάδων των μονάδων στην Clifford άλγεβρα C_k.

Για $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, ορίζουμε μια πραγματική άλγεβρα C_k με διάσταση 2^k. Αρχικά, ορίζουμε $C_0 = \mathbb{R}$. Εν συνεχεία, η C_1 θα είναι δισδιάστατη. Θεωρούμε βάση

$\langle 1, e\rangle$, με το 1 να είναι το ουδέτερο στοιχείο και ορίζουμε πράξη $e^2 = -1$. Αυτή η πράξη μας δείχνει ότι ο πολλαπλασιασμός $(a+be)(c+de) = (ac-bd)+(ad+bc)e$. Παρατηρούμε ότι $C_1 \cong \mathbb{C}$ ως δισδιάστατες άλγεβρες με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς. Στη συνέχεια, η C_2 θα έχει διάσταση 4. Έστω η βάση $\langle 1, e_1, e_2, e_1e_2\rangle$, όπου $e_1^2 = -1, e_2^2 = -1, e_2e_1 = -e_1e_2$. Έτσι, ο πολλαπλασιασμός είναι κλειστός. Αν ορίσουμε $1 \mapsto 1, e_1 \mapsto i, e_2 \mapsto j, e_1e_2 \mapsto k$, παρατηρούμε $C_2 \cong \mathbb{H}$.

Ορισμός 5.7. *Η C_k είναι η άλγεβρα που παράγεται σαν άλγεβρα από τα $e_1, e_2, \ldots, e_k$, για τα οποία ισχύει $e_i^2 = -1$ και $e_ie_j = -e_je_i, i \neq j$*

Για να εξηγήσουμε τη φράση "παράγεται σαν άλγεβρα", θα χρησιμοποιήσουμε την C_3. Θεωρούμε τη διανυσματική βάση $\langle 1, e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3, e_1e_2e_3\rangle$, η οποία έχει διάσταση 8. Από το ίδιο επιχείρημα παίρνουμε ότι $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_r} : i_1 < i_2 < \ldots < i_r, 0 \leqslant r \leqslant k\}$ είναι διανυσματική βάση για την C_k, όπου για $r = 0$ έχουμε το στοιχείο 1. Παρατηρούμε ότι στέλνοντας το e_i της C_{k-1} στο e_i της C_k, έχουμε εμβάπτυση της C_{k-1} ως υποάλγεβρας της C_k. Οπότε, $C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_k$. Έχουμε ότι C_0, C_1 είναι σώματα και C_2 είναι δακτύλιος με διαίρεση αλλά για $k > 2$ δεν μπορούμε να δεχτούμε τη αντιμεταθετικότητα.

Πρόταση 5.8. *Για όλα τα $k > 2$, η C_k έχει διαιρέτες του 0.*

Απόδειξη. Αρκεί να βρούμε διαιρέτη στην C_3. Έστω ότι υπάρχει $x \neq 0$ τέτοιο ώστε να υπάρχει $y \neq 0$ τέτοιο ώστε $xy = 0$. Έχουμε $(1 + e_1e_2e_3)(1 - e_1e_2e_3) = 1 - (e_1e_2e_3)^2 = 1 - 1 = 0$. Συνεπώς, η C_3 έχει διαιρέτες του 0 και κατ' επέκταση θα έχουν και οι C_k για $k > 2$. □

Ορισμός 5.9 (Ευθύ Άθροισμα). *Αν $\mathcal{G}, \mathcal{B}$ είναι πραγματικές άλγεβρες , τότε το ευθύ τους άθροισμα $\mathcal{G} \oplus \mathcal{B}$ είναι το σύνολο των ζευγών (x, y), όπου $x \in \mathcal{G}, y \in \mathcal{B}$ και ισχύουν οι πράξεις*

(i) $(x, y) + (z, w) = (x + y, z + w)$.

(ii) $r(x, y) = (rx, ry)$.

(iii) $(x, y)(z, w) = (xz, yw)$.

Πρόταση 5.10. *Το $\mathcal{G} \oplus \mathcal{B}$ έχει διαιρέτες του 0 και για κάθε σώμα F, η $M_n(F)$ έχει διαιρέτες του 0, αν $n \geqslant 2$.*

Απόδειξη. Έχουμε:

$$(1, 0)(0, 1) = (0, 0)$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Για το δικό μας σκοπό πρέπει να γνωρίζουμε τις άλγεβρες Clifford μέχρι την C_5. Υπάρχει συγκεκριμένος τρόπος για να βρούμε την C_4. Θεωρούμε

$$C \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \subset M_2(\mathbb{H}).$$

Παίρνουμε $a \in C$ να είναι της μορφής $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $q \in \mathbb{H}, q = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ και $(q_1, q_2) \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, (q_1, q_2) = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$. Τότε, η απεικόνιση έχει ως εξής:

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \to e_1, \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \to e_2, \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \to e_3, \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix} \to e_4$$

και δίνει τους ισομορφισμούς $\mathbb{C} \cong C_1, \mathbb{H} \cong C_2, \mathbb{H}\oplus\mathbb{H} \cong C_3, M_2(\mathbb{H}) \cong C_4$. Τελικά, η απεικόνιση

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \to e_1, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to e_2, \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \to e_3,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to e_4, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to e_5,$$

επάγει ισομορφισμό μεταξύ $M_4(C)$ και C_5. □

5β′ $\mathrm{Pin}(k)$ **και** $\mathrm{Spin}(k)$

Έστω $\mathbb{R}^k$ να είναι ο k-χώρος στην άλγεβρα Cliford C_k καλυπτώμενη από τα $e_1, e_2, ..., e_k$ και έστω S^{k-1} η μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^k$.

Πρόταση 5.11. *Αν C_k^* είναι η ομάδα μονάδων στην C_k, τότε $S^{k-1} \subset C_k^*$, δηλαδή κάθε $x \in S^{k-1}$ είναι μονάδα.*

Απόδειξη. Έστω $x = a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ke_k$ με $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2 = 1$. Τότε, $(a_1e_1+a_2e_2+...+a_ke_k)((-a_1)e_1+(-a_2)e_2+...+(-a_k)e_k = a_1^2+a_2^2+...+a_k^2 = 1$. □

Ορισμός 5.12 ($\mathrm{Pin}(k)$)**.** *Η $\mathrm{Pin}(k)$ είναι η υποομάδα της C_k^* που παράγεται από την S^{k-1}. Επομένως κάθε στοιχείο της $\mathrm{Pin}(k)$ είναι πεπερασμένο γινόμενο στοιχείων της S^{k-1}.*

Θα ορίσουμε την συζυγία στην C_k. Αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τα στοιχεία της βάσης για να το κάνουμε αυτό. Ορίζουμε $(e_{i1}...e_{ir})^* = (-e_{ir})...(-e_{i1}) = -1^r e_{ir}...e_{i1}$. Για παράδειγμα, ορίζουμε $1^* = 1, e_i{}^* = -e_i, (e_ie_j)^* = -e_ie_j, (e_ie_je_k)^* = e_ie_je_k, ...$. Προφανώς, $(x^*)^* = x$. Επίσης, έχουμε $(xy)^* = y^*x^*$ διότι

$$((e_{i1}...e_{ir})(e_{j1}...e_{js}))^* = (-e_{js})...(-e_{j1})(-e_{ir})...(-e_{i1}) = (e_{j1}...e_{js})^*(e_{i1}...e_{ir})^*.$$

Ορίζουμε, επίσης, τον αυτομορφισμό a της C_k με πράξη $a(e_i) = -e_i$. Η συζυγία δεν είναι αυτομορφισμός διότι $a(e_ie_j) = e_ie_j$.

Ορισμός 5.13. *Για $u \in \mathrm{Pin}(k)$ και $x \in \mathbb{R}^k$, ορίζουμε $p(u)(x) = a(u)xu^*$.*

Δεν είναι προφανές ότι $p(u)(x) \in \mathbb{R}^k$. Αυτό προκύπτει ως αποτέλεσμα των δύο παρακάτω προτάσεων:

Πρόταση 5.14. *Αν $u \in S^{k-1} \subset \mathrm{Pin}(k)$ και $u \neq \pm 1$, τότε το $p(u)$ είναι ανάκλαση στον $\mathbb{R}^k$ ως προς το κάθετο πεδίο στο u.*

Απόδειξη. Παίρνουμε μια ορθοκανονική βάση $\langle u_1, ..., u_k\rangle$ στον $\mathbb{R}^k$ με $u_1 = u$. Έχουμε $p(u_1)u_i = a(u_1)u_iu_1^* = (-u_1)u_i(-u_1) = u_1u_iu_1$. Αν $i = 1$, τότε παίρνουμε u_i. Αν $u = 1$, τότε παίρνουμε $-u_i$. □

Πρόταση 5.15. *Η p είναι ομομορφισμός της $\mathrm{Pin}(k)$ πάνω από την $\mathcal{O}(k)$ με $\ker p = \{-1, 1\}$.*

Απόδειξη. Κάθε στοιχείο του $\mathrm{Pin}(k)$ είναι πεπερασμένο γινόμενο στοιχείων της S^{k-1}. Για να δείξουμε ότι p είναι ομομορφισμός, αρκεί να δείξουμε ότι αν $u, v \in S^{k-1}$ και $x \in \mathbb{R}^k$, τότε $p(uv)(x) = a(uv)x(uv)^* = a(u)(a(v)xv^*)u^* = p(u)(p(v)x)$. Τώρα, έχουμε ότι $\forall u \in \mathrm{Pin}(k)$, η $p(u)$ στέλνει τον $\mathbb{R}^k$ στον εαυτό του και είναι ορθογώνια ως γινόμενο ανακλάσεων. Γνωρίζουμε ότι ο $\mathcal{O}(k)$ παράγεται από ανακλάσεις, συνεπώς η p είναι "επί". Είναι προφανές ότι τα $-1, 1$ είναι στοιχεία του πυρήνα της p. Αν έχουμε $e_{i1}...e_{ir}$ στον πυρήνα της p με $r > 1$, καταλήγουμε στην εξής αντίφαση: Αν $p(e_{i1}...e_{ir})$ είναι το ουδέτερο, $\forall x \in \mathbb{R}^k$ έχουμε ότι

$$a(e_{i1}...e_{ir}x(e_{i1}...e_{ir})^* = x \Rightarrow e_{i1}...e_{ir}x = xe_{i1}...e_{ir}.$$

Παίρνοντας $x = e_{ir}$ έχουμε $(-1)^{r-1}e_{i1}e_{i1}...e_{ir} = e_{i1}e_{i1}...e_{ir} \Rightarrow e_{i2}...e_{ir} = 0$, αφού το r είναι άρτιος αφού το γινόμενο περιττού αριθμού ανακλάσεων δεν μπορεί να είναι το ουδέτερο στοιχείο. □

Ορισμός 5.16. *Ορίζουμε* $\mathrm{Spin}(k) = p^{-1}(SO(k))$.

Θα υπολογίσουμε τα $\mathrm{Spin}(1), \mathrm{Spin}(2), \mathrm{Spin}(3)$. Έχουμε ότι $C_1 = \mathbb{C}$, έτσι $C_1^* = \mathbb{C} - \{0\}$ και $\mathrm{Pin}(1)$ είναι υποομάδα της C_1^* που παράγεται από την $S^0 = \{e_1, -e_1\}$. Από το παραπάνω παίρνουμε $\{e_1, {e_1}^2 = -1, {e_1}^3 = -e_1, {e_1}^4 = 1\} \cong \mathbb{Z}/4$. Τώρα, $p(e_1) = p(-e_1)$ είναι ανάκλαση και $\mathrm{Spin}(1) = \{-1, 1\} \cong \mathbb{Z}/2$. Η $C_2 = \mathbb{H}$, άρα ${C_2}^* = \mathbb{H} - \{0\}$ και $\mathrm{Pin}(2)$ παράγεται από την $S^1 = \{ae_1 + be_2 : a^2 + b^2 = 1\}$. Οπότε, $(ae_1+be_2)(ce_1+de_2) = -(ac+bd)+(ad-bc)e_1e_2$, έτσι ώστε η $\mathrm{Pin}(2)$ να περιέχει την $S = \{c + de_1e_2 : c^2 + d^2 = 1\}$. Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι $\mathrm{Pin}(2) = S \cup S^1$ και $\mathrm{Spin}(2) = S$. Με παρόμοιους υπολογισμούς προκύπτει εύκολα ότι $\mathrm{Spin}(3) = \{a + be_1e_2 + ce_1e_3 + de_2e_3 : a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$ και παρατηρούμε ότι $\mathrm{Spin}(3) \cong Sp(1)$. Ολοκληρώνοντας, θα υπολογίσουμε τα κέντρα των ομάδων περιστροφής. Πρώτα από όλα, έχουμε πάντα το $\{-1, 1\}$ στο κέντρο. Αυτό είναι όλο το κέντρο της $\mathrm{Spin}(1)$, αφού είναι όλη η $\mathrm{Spin}(1)$ και η $\mathrm{Spin}(2)$ είναι ίση με το κέντρο της. Θα δουλέψουμε για $k \geqslant 3$. Έστω ότι $e_{i1}...e_{ir}$ δεν περιέχει το e_j. Παίρνουμε

$$(e_{i1}...e_{ir})(e_{ir}e_j) = (-1)^{r-1}e_{ir}(e_{i1}...e_{ir})e_j =$$

$$= (-1)^{r-1}(-1)^r(e_{ir}e_{ij})(e_{i1}...e_{ir}) = -(e_{ir}e_{ij})(e_{i1}...e_{ir}).$$

Συνεπώς, παρατηρούμε ότι $e_{i1}...e_{ir}$ δεν είναι στο κέντρο. Έτσι, τα $e_1e_2...e_k$ και $-e_1e_2...e_k$ είναι τα μοναδικά υποψήφια στοιχεία, πέραν των $-1, 1$, για να βρίσκονται στο κέντρο. Για περιττό k, $e_1e_2...e_k$ δεν είναι μέσα στην $\mathrm{Spin}(k)$. Για άρτιο $k = 2n$, βλέπουμε ότι

$$(e_1e_2...e_{2n})(e_{i1}...e_{ir}) = (e_{i1}...e_{ir}(e_1e_2...e_{2n})(-1)^{(2n-1)r} = (e_{i1}...e_{ir})(e_1e_2...e_n),$$

άρα το $e_1...e_n$ είναι στο κέντρο.

Πρόταση 5.17. (i) *Αν* k *είναι περιττό, το κέντρο του* $\mathrm{Spin}(k)$ *είναι το* $\{-1, 1\}$.

(ii) *Το κέντρο του* $\mathrm{Spin}(2n)$ *είναι το* $\mathbb{Z}/4$ *αν* n *περιττό.*

(iii) *Το κέντρο του* $\mathrm{Spin}(2n)$ *είναι το* $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ *αν* n *είναι άρτιος.*

Απόδειξη. Έχουμε δείξει το πρώτο και έχουμε δει ότι το κέντρο του $\mathrm{Spin}(2n)$ είναι το $\{1, -1, e_1...e_{2n}, -e_1...e_{2n}\}$. Επίσης, $(e_1...e_{2n})(e_1...e_{2n}) = (-1)^{n(2n+1)}$ το οποίο είναι 1 να n είναι άρτιος και -1 αν n είναι περιττός. □

Έχουμε ήδη δει ότι αν $e_{i1}...e_{ir} \in \mathrm{Spin}(k)$ τότε ο r είναι άρτιος. Σε αυτήν την περίπτωση, έχουμε $(e_{i1}...e_{ir})(e_{i1}...e_{ir})^* = 1$. Έτσι, αν $x \in \mathrm{Spin}(k)$, το x είναι γραμμικός συνδυασμός μιας βάσης άρτιας τάξης και $xx^* = 1$.

Ορισμός 5.18. *Ορίζουμε* $\phi : C_{k-1} \to C_k$ *με τύπο* $\phi(e_i) = e_i e_k, i = 1, ..., k-1$.

Η ϕ επεκτείνεται σε ομομορφισμό αλγεβρών, αφού $(e_i e_k)^2 = -1$ και $(e_i e_k)(e_j e_k) = -(e_j e_k)(e_i e_k)$. Όντως, $e_i e_k e_j e_k = e_i e_j$ και παρατηρούμε ότι ϕ είναι ισομορφισμός της C_{k-1} προς την άρτιας τάξης C_k.

Πρόταση 5.19. *Οι ισομορφισμοί* $\psi : C \to C_1, \psi : \mathbb{H} \to C_2, \psi : \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \to C_3, \psi : M_2(\mathbb{H}) \to C_4, \phi$ *ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) $(\phi(x))^* = \phi(x^*)$.

(ii) $\psi(M^*) = (\psi(M))^*$.

Απόδειξη. $(\phi(e_i))^* = (e_i e_k)^* = (-e_k)(-e_i) = -e_i e_k = \phi(e_i{}^*)$. Για τις C_1, C_2, C_3, C_4, ελέγχουμε με τη μέθοδο των βασικών πινάκων, όπου:

$$M = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \to e_1, M^* = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \to -e_1 = (\psi(M^*)),$$

μέσω της ψ. Ο έλεγχος είναι προφανής και εύκολα αποδεικνύεται ότι $M_4(C) \to C_5$ μέσω της ψ. □

Θεώρημα 5.20. *Έχουμε* $Sp(2) \to M_2(\mathbb{H}) \to C_4 \to C_5$, *όπου* $M_2(\mathbb{H}) \cong C_4$ *μέσω της* ψ *και* $C_4 \to C_5$ *μέσω της* ϕ. $SU(4) \to M_4(\mathbb{C}) \to C_5 \to C_6$, *όπου* $M_4(C) \cong C_5$ *μέσω της* ψ *και* $C_5 \to C_6$ *μέσω της* ϕ. *Τα παραπάνω δίνουν ισομορφισμό της* $Sp(2)$ *με την* $\mathrm{Spin}(5)$ *και της* $SU(4)$ *με την* $\mathrm{Spin}(6)$.

Απόδειξη. Οι $Sp(2)$ και $SU(4)$ περιέχουν τους πίνακες για τους οποίους ισχύει $MM^* = I$.

Άρα, $\psi(MM^*) = \psi(M)\psi(M^*) = 1$ και $\phi(\psi(M))\phi(\psi(M)^*) = \phi(\psi(M))\phi(\psi(M))^*$. Έχουμε ότι όλες οι άρτιας τάξης μονάδες x με $xx^* = 1$. Συνεπώς, $\mathrm{Spin}(5) \subset \phi(\psi(Sp(2))$ και $\mathrm{Spin}(6) \subset \phi(\psi(SU(4))$ και $\phi(\psi(Sp(2))$ είναι κλειστή πολλαπλότητα διάστασης 10 και $\mathrm{Spin}(5)$ είναι επίσης κλεστή πολλαπλότητα διάστασης 10. Άρα, $\mathrm{Spin}(5) = \phi(\psi(Sp(2)))$. Όμοια, δύο πολλαπλότητες διάστασης 15, η $\mathrm{Spin}(6)$ και $\phi(\psi(SU(4))$ είναι ισόμορφες. □