ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ-ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

MARTINGALES ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Πτυχιακή Εργασία για το Προπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών

Η παρούσα Εργασία εκπονήθηκε
ως μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων για την απόκτηση
του αντιστοίχου τίτλου σπουδών στην
Στατιστική και Αναλογιστικά-Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά

ΧΑΡΙΚΛΕΙΑ ΑΔΑΜ

10 Οκτωβρίου 2022

ΣΑΜΟΣ

ΧΑΡΙΚΛΕΙΑ ΑΔΑΜ

MARTINGALES ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

10 Οκτωβρίου 2022

Πτυχιακή Εργασία για το Προπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών

Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών-Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Συγγραφέας: Χαρίκλεια Αδάμ

Επιβλέπων:
Σταύρος Βακερούδης

Μέλος Επιτροπής:
Στυλιανός Ξανθόπουλος

Μέλος Επιτροπής:
Ελευθέριος Ταχτσής

ΣΑΜΟΣ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Σταύρο Βακερούδη, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών, ο οποίος με βοήθησε σημαντικά με την υποστήριξη που μου παρείχε κατά την διάρκεια της συγγραφής της παρούσας Πτυχιακής εργασίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της επιτροπής κρίσης της εργασίας, τον κύριο Στυλιανό Ξανθόπουλο, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου και τον κύριο Ελευθέριο Ταχτσή, Καθηγητή του Τμήματος Στατιστική και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου που δέχθηκαν να αφιερώσουν κάποιο από τον πολύτιμο χρόνο τους για την αξιολόγηση της Πτυχιακής μου εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, που με στήριξαν καθ’ όλη την διάρκεια των σπουδών μου σε όλους τους τομείς, καθώς και τον αδερφό μου που πάντα ήταν πρόθυμος να μου παρέχει ό,τι χρειάζομαι.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος

Στην παρούσα Πτυχιακή εργασία έγινε μία έρευνα σχετικά με τα Martingales και τις εφαρμογές τους. Αρχικά, κάναμε μια επισκόπηση σε χρήσιμες έννοιες από την θεωρία Μέτρου και την θεωρία Πιθανοτήτων όπως, η σ-άλγεβρα, ο χώρος πιθανότητας και η δεσμευμένη μέση τιμή.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών και αναλύεται η θεωρία των Μαρκοβιανών αλυσίδων πραγματοποιώντας μια αναφορά στην ταξινόμηση καταστάσεων και στις αλυσίδες Markov σε συνεχή χρόνο.

Κατόπιν, μελετάμε τις στοχαστικές ανελίξεις συνεχούς χρόνου, δίνοντας τον γενικό ορισμό τους και δύο παραδείγματα όπως είναι η στοχαστική ανέλιξη Poisson και οι στοχαστικές ανελίξεις Γεννήσεως - Θανάτου. Παρουσιάζουμε την θεωρία της Κίνηση Brown και κάνουμε αναφορά σε κάποιες από τις παραλλαγές της.

Στα δύο τελευταία κεφάλαια, μελετάμε την θεωρία των Martingales και τον τρόπο που κατατάσσονται σε Martingales διακριτού και συνεχούς χρόνου. Καταλήγουμε αναφέροντας κάποιες εφαρμογές που επιλύονται με την βοήθεια των Martingales.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 σ-Άλγεβρα

<u>Ορισμός 1.1.1</u>
Έστω Ω ένα τυχαίο σύνολο, όπου $\Omega \neq \emptyset$. Μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω, έστω $\mathcal{A}$, καλείται σ-άλγεβρα στον Ω εάν

i) $\Omega \in \mathcal{A}$.

ii) Εάν $A \in \mathcal{A}$ τότε και $A^c \in \mathcal{A}$.

iii) Εάν $\{A_n, n \geq 1\}$ τυχαία ακολουθία στην $\mathcal{A}$ τότε και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

<u>Ορισμός 1.1.2</u>
Έστω ένα σύνολο X. Εάν $\{f_i : i \in I\}$ είναι μια οικογένεια συναρτήσεων στο X με τιμές στο $[-\infty, \infty]$, ονομάζουμε σ-άλγεβρα παραγόμενη από τις συναρτήσεις $\{f_i : i \in I\}$ το σύνολο $\sigma(\{f_i : i \in I\}) := \sigma(\cup_{i \in I} \sigma(f_i))$.

<u>Παράδειγμα 1.1.3</u>

Έστω $\Omega \neq \emptyset$. Η κλάση $P(\Omega)$ όλων των υποσυνόλων του Ω είναι σ-άλγεβρα. Επίσης, η κλάση υποσυνόλων $\{\emptyset, \Omega\}$ είναι σ-άλγεβρα.

<u>Παράδειγμα 1.1.4</u>

Έστω $A \subset \Omega$ με $A \neq \emptyset$. Τότε η κλάση $\{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ είναι σ-άλγεβρα.

1.2 Μετρήσιμος Χώρος

Έστω Ω ένα σύνολο και $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα αποτελούμενη από υποσύνολα του Ω. Το ζεύγος (Ω, $\mathcal{A}$) λέγεται μετρήσιμος χώρος.

1.3 Μέτρο Πιθανότητας

Έστω $\Omega \neq \varnothing$ και $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω. Η μη-αρνητική συνολοσυνάρτηση $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ λέγεται πιθανότητα ή μέτρο πιθανότητας εάν:

i) $P(\Omega) = 1$

ii) Για κάθε ακολουθία $\{ A_n, n \geq 1\}$ στην $\mathcal{A}$ με $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$: $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

1.4 Χώρος πιθανότητας

Τα στοιχεία της $\mathcal{A}$ λέγοντα ενδεχόμενα και η τριάδα $(\Omega,\ \mathcal{A}, P)$ λέγεται χώρος πιθανότητας.

1.5 Τυχαίες Μεταβλητές

Κάθε συνάρτηση η οποία απεικονίζει το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ονομάζεται τυχαία μεταβλητή.

<u>Ορισμός 1.5.1:</u>

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Μία πραγματική συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ λέγεται τυχαία μεταβλητή εάν για κάθε διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ το σύνολο $\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in I\}$ είναι ενδεχόμενο του Ω.

Μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$ αντιστοιχεί το δειγματικό χώρο Ω σε ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Το σύνολο αυτό είναι το $\{x \in \mathbb{R} : X(\omega) = x$ για κάποιο $\omega \in \Omega\}$ και ονομάζεται πεδίο τιμών ή σύνολο τιμών της τυχαίας μεταβλητής X.

Μια τυχαία μεταβλητή καλείται διακριτή εάν το πεδίο τιμών της είναι πεπερασμένο ή το πολύ απείρως αριθμήσιμο. Το σύνολο τιμών της έχει τότε την μορφή: $S_x = \mathbb{R}_x = \{x_1, x_2, \ldots\}$ ή $S_x = \mathbb{R}_x = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$.

Μια τυχαία μεταβλητή καλείται συνεχής, εάν υπάρχει μία μη-αρνητική συνάρτηση $f_x : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ τέτοια ώστε για κάθε υποσύνολο B του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, το οποίο μπορεί να γραφεί ως ένωση ενός πεπερασμένου ή απείρως αριθμήσιμου πλήθους διαστημάτων, ισχύει ότι $P(X \in B) = \int_B f_x(t)dt, t \in \mathbb{R}$. Όπου η συνάρτηση f_x καλείται συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X.

1.6 Μέση τιμή (Αναμενόμενη τιμή)

Ορισμός 1.6.1:

Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}_x$ μια διακριτή τυχαία μεταβλητή. Τότε, η Μέση τιμή της X που συμβολίζεται με μ ή $E(X)$ είναι ο αριθμός

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i f_X(x_i),$$

όπου $f(x_i)$ η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X.

Ορισμός 1.6.2:

Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ μια συνεχής τυχαία μεταβλητή. Τότε, η μέση τιμή ορίζεται από τη σχέση

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx,$$

όπου $f(x)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X.

Ιδιότητες:

Έστω $a \in \mathbb{R}$,

(i) $E(aX) = aE(X)$.

(ii) $E(X + a) = E(X) + a$.

(iii) Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίες μεταβλητές, είναι
$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$.

1.7 Δεσμευμένη Μέση Τιμή

<u>Ορισμός 1.7.1:</u>

Η δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δεδομένης της τ.μ. Y, η οποία συμβολίζεται ως $E(X\,|\,Y)$, ορίζεται από την σχέση:

$$E(X\,|\,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x\,|\,y)dx, \text{ εάν X,Y συνεχείς τ.μ.}$$

$$E(X\,|\,Y) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i f_{X|Y}(x_i\,|\,y_j), \text{ εάν X,Y διακριτές τ.μ.}$$

<u>Ορισμός 1.7.2:</u>

Δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ στον χώρο πιθανότητας $(\Omega,\ \mathcal{A}, P)$ με $E(X) < \infty$, ως προς τη σ-άλγεβρα $\mathcal{G}$, ονομάζεται οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Η Y είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη.
(ii) Ισχύει

$$\int_B XdP = \int_B YdP \ ,$$

για κάθε $B \in \mathcal{G}$.
Σύμφωνα με τον ορισμό παραπάνω, ο υπολογισμός ολοκληρωμάτων της τ.μ. X σε σύνολα της υποάλγεβρας $\mathcal{G}$ μπορεί να πραγματοποιηθεί από την Y. Η τ.μ. X μπορεί να είναι αρκετά περίπλοκη συνάρτηση, ενώ η Y είναι ένα απλούστερο αντικείμενο και κάνει την ίδια δουλειά.

<u>Πρόταση 1.7.3 (Ύπαρξη και μοναδικότητα)</u>

(i) Μια δεσμευμένη μέση τιμή Y της X ως προς την $\mathcal{G}$ υπάρχει.

(ii) Για οποιαδήποτε δεσμευμένη τιμή Y της X ως προς την $\mathcal{G}$ ισχύει $E(Y) \leq E(X) < \infty$.

(iii) Εάν Y, Y' είναι δύο δεσμευμένες μέσες τιμές της X ως προς την $\mathcal{G}$, τότε $P(Y = Y') = 1$.

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ</u>

Έστω $X \in L^1(\Omega,\ \mathcal{A}, P)$ και $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ σ-άλγεβρα. Ισχύουν τα εξής:

i) $E(E(X\,|\,\mathcal{G}) = E(X)$.

ii) Εάν η X είναι $\mathcal{G}$ - μετρήσιμη, τότε $E(X\,|\,\mathcal{G}) = X$.

iii) Εάν η X είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{G}$, τότε $E(X\,|\,\mathcal{G}) = E(X)$.

<u>Απόδειξη:</u>

i) Προκύπτει θέτοντας $B = \Omega$ στην (ii) του ορισμού 1.6.2.

ii) Η X ικανοποιεί τις δύο απαιτήσεις του ορισμού 1.6.2.

iii) Η σταθερή συνάρτηση $E(X)$ είναι $\mathcal{G}$ - μετρήσιμη και για $F \in \mathcal{G}$ έχουμε

$$\int_F XdP = E(\mathbf{1}_F X) = E(\mathbf{1_F})E(X) = P(F)E(X) = \int_F E(X)dP.$$

Παράδειγμα 1.7.4

Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας μιας διδιάστατης διακριτής διανυσματικής τυχαίας μεταβλητής (X, Y) δίνεται από τον τύπο $p(x, y) = \frac{1}{15}(x + y), \quad x = 0,1,2$ και $y = 1,2$. Να υπολογιστούν και να συγκριθούν:

1) $E(X \mid Y = 1)$.

2) $E(Y \mid X = 1)$.

Απάντηση

1) $E(X \mid Y = 1) = \sum_{x=0}^{2} x p_{X|Y}(x \mid 1)$. Όμως, $p_{X|Y}(x \mid y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}$

και $p_Y(y) = \sum_{x=0}^{2} p(x, y) = \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}$

Επομένως, $p_{X|Y}(x \mid y) = \frac{1}{3}\frac{(x + y)}{y + 1}$ και

$$p_{X|Y}(x \mid 1) = \frac{p(x,1)}{p_Y(1)} = \frac{x + 1}{6}$$

Άρα, $E(X \mid Y = 1) = \sum_{x=0}^{2} x(\frac{x + 1}{6}) = \frac{8}{6}$.

2). $E(X=1) = \sum y p_{Y|X}(y\,|\,1)$. Όμως, $p_{Y|X}(y\,|\,x) = \dfrac{p(x,y)}{p_X(x)}$

και $p_X(x) = \sum_{y=1}^{2} p(x,y) = \dfrac{1}{15}(2x+3)$.

Επομένως, $p_{Y|X}(y\,|\,x) = \dfrac{x+y}{2x+3}$ και $p_{Y|X}(y\,|\,1) = \dfrac{1+y}{5}$.

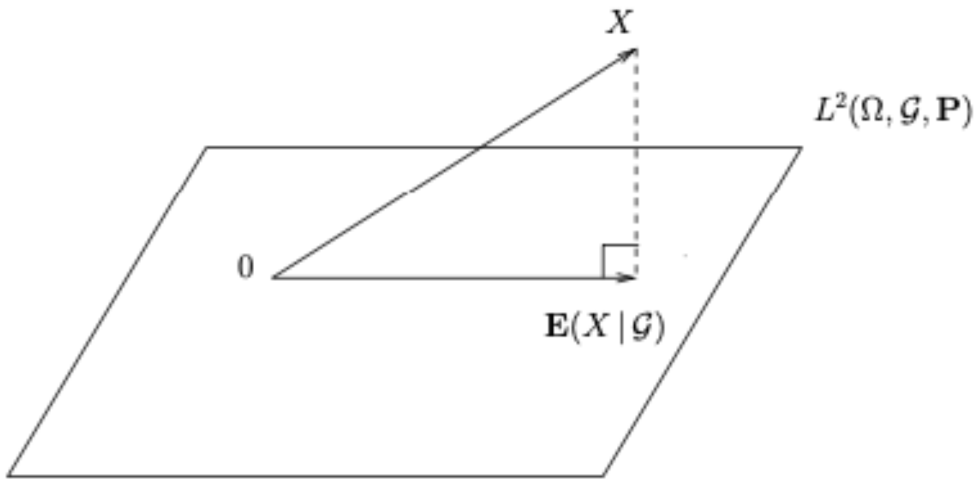
Άρα, $E(Y\,|\,X=1) = \sum_{y=1}^{2} y\dfrac{1+y}{5} = \dfrac{8}{5}$

Συνεπώς, $E(Y\,|\,X=1) > E(X\,|\,Y=1)$.

<u>Γεωμετρική ερμηνεία δεσμευμένης Μέσης Τιμής</u>

Θα παρουσιάσουμε, χωρίς απόδειξη, την γεωμετρική ερμηνεία που έχει η δεσμευμένη μέση τιμή. Ο αναγνώστης που επιθυμεί περισσότερη ανάλυση μπορεί να ανατρέξει στην σχετική βιβλιογραφία (Δ. Χελιώτης, Εισαγωγή στον Στοχαστικό Λογισμό, Εκδόσεις Κάλλιπος, 2020)

Η απεικόνιση $T : H \to H_0$ με $T(X) = E(X\,|\,G)$, όπου
$H := L^2(\Omega, A, P)$ εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο
$(X, Y) \to E(XY) = \int XYdP$ είναι χώρος Hilbert.
Ο $H_0 := L^2(\Omega, G, P)$ είναι υπόχωρος του H και μάλιστα κλειστός.
Η δεσμευμένη μέση τιμή, η $T(X)$, είναι η ορθογώνια προβολή στον υπόχωρο H_0.



Η δεσμευμένη μέση τιμή ως προβολή. Ο περιβάλλων χώρος είναι ο H και ο υπόχωρος H_0 παριστάνεται από ένα επίπεδο.

1.8 Διήθηση

Ορισμός 1.8.1

Έστω ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega,\ \mathcal{A}, P)$. Διήθηση σε αυτόν τον χώρο λέγεται μια αύξουσα ακολουθία $(\mathscr{A}_n)_{n\geq 0}$ σ-αλγεβρών, η καθεμία από τις οποίες είναι υποσύνολο της $\mathcal{A}$. Δηλαδή, έχουμε $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_2 \subset \cdots \subset \mathscr{A}_n \subset \mathcal{A}$ για κάθε $n \geq 0$.

Ορισμός 1.8.2

Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\geq 0}$ στον Ω λέγεται προσαρμοσμένη στη διήθηση $(\mathscr{A}_n)_{n\geq 0}$ εάν για κάθε $n \geq 0$ η X_n είναι A_n-μετρήσιμη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

2.1 Εισαγωγή

Η θεωρία των στοχαστικών ανελίξεων αναπτύχθηκε με τη μελέτη διαφόρων φυσικών φαινομένων, όπως η Κίνηση Brown που κάνει ένα σωματίδιο μέσα σε ένα υγρό ή αέριο κάτω από ορισμένες συνθήκες και πολλά άλλα. Βρίσκουν εφαρμογή και στην επιστήμη της Βιολογίας αλλά και σε εκείνη της Οικονομίας. Έχει διατυπωθεί η άποψη (Χρυσαφίνου, 2012) ότι οι στοχαστικές ανελίξεις έχουν εφαρμογές σε όλες τις επιστήμες επειδή περιγράφουν φαινόμενα που εξαρτώνται από τον χρόνο ή τον χώρο. Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται μια αναφορά στον ορισμό τους και στις κατηγορίες τους.

2.2 Στοχαστικές Διαδικασίες

Ορισμός 2.2.1:

Στοχαστική διαδικασία ή ανέλιξη ονομάζεται μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_t\}_{t \in T}$ πάνω σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Το t συνήθως καλείται χρόνος και η $X(t)$ αναφέρεται ως η κατάσταση της διαδικασίας στον χρόνο t. Το σύνολο τιμών της $\{X_t\}_{t \in T}$ συμβολίζεται με I και ονομάζεται χώρος καταστάσεων, ενώ το σύνολο T καλείται παραμετρικός χώρος.

Αναλόγως της μορφής της οποίας μπορεί να έχει ο παραμετρικός χώρος T, οι στοχαστικές διαδικασίες χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

- Εάν το σύνολο T είναι πεπερασμένο της μορφής $T = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ ή της μορφής $T = (0,1,2,...)$, τότε η συλλογή τ.μ. $\{X_t\}_{t \in T}$ καλείται στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου.
- Εάν το σύνολο T είναι ή (απείρως) αριθμήσιμο της μορφής $T = [0, +\infty)$, τότε η συλλογή τ.μ. $\{X_t\}_{t \in T}$ καλείται στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο.

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ</u>

- Μία στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις εάν για κάθε $\nu > 2$ και για όλα τα τυχαία $t_1 < t_2 < \cdots < t_\nu$, οι προσαυξήσεις $X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_\nu) - X(t_{\nu-1})$ είναι ανεξάρτητες.

- Μία στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ έχει στάσιμες ή χρονικά ομογενείς προσαυξήσεις εάν οι προσαυξήσεις $X(t) - X(s)$ και $X(t+h) - X(s+h)$ είναι ισόνομες, για κάθε $h > 0$ και $0 \leq s < t$.

2.3 Αλυσίδες Markov

Η αλυσίδα Μάρκοφ, ή μαρκοβιανή αλυσίδα, που πήρε το όνομα της από τον Ρώσο μαθηματικό Αντρέι Μάρκοφ, είναι ένα μαθηματικό σύστημα το οποίο μεταβάλλεται από μια κατάσταση σε μια άλλη, ανάμεσα σε ένα πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων. Είναι μια τυχαία διαδικασία που δεν διατηρεί μνήμη για τις μεταβολές που έχουν πραγματοποιηθεί. « Το μέλλον είναι ανεξάρτητο από το παρελθόν δεδομένου του παρόντος ».

<u>Ορισμός 2.3.1:</u>

Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ ονομάζεται Μαρκοβιανή εάν ισχύει η σχέση:
$P(X(t_\nu) \leq x_\nu \,|\, X(t_{\nu-1}) = x_{\nu-1}, \ldots, X(t_1) = x_1) = P(X(t_\nu) \leq x_\nu \,|\, X(t_{\nu-1}) = x_{\nu-1})$,
για κάθε επιλογή $t_1 < t_2 < \cdots < t_\nu \in T$ και κάθε $x_1, \ldots, x_\nu \in I$, $\nu > 2$

<u>Ορισμός 2.3.2:</u>

Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ που ικανοποιεί την Μαρκοβιανή ιδιότητα και έχει διακριτό χώρο καταστάσεων, ονομάζεται αλυσίδα Markov ή Μαρκοβιανή αλυσίδα.

Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ με Μαρκοβιανή ιδιότητα μπορεί να ταξινομηθεί με βάση το παραμετρικό χώρο T και το χώρο καταστάσεων I ως εξής:

Παραμετρικός χώρος T	Χώρος καταστάσεων I	
	Διακριτός	Συνεχής
Διακριτός	Αλυσίδες Markov σε Διακριτό χρόνο	Στοχαστική ανέλιξη Markov σε Διακριτό χρόνο
Συνεχής	Αλυσίδες Markov σε Συνεχή χρόνο	Στοχαστική ανέλιξη Markov σε Συνεχή χρόνο

2.4 Αλυσίδες Markov σε Διακριτό χρόνο

Έστω μια αλυσίδα Markov σε Διακριτό χρόνο. Δηλαδή, μια στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ η οποία ικανοποιεί την Μαρκοβιανή ιδιότητα, έχει διακριτό χώρο καταστάσεων I και διακριτό παραμετρικό χώρο T.

Για τις Μαρκοβιανές αλυσίδες σε Διακριτό χρόνο συνήθως θεωρούμε ως παραμετρικό χώρο το $T = \{0,1,2,...\}$ και χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $X_\nu = X(\nu), \nu = 0,1,\ldots$

Με $X_\nu = \kappa$ δηλώνεται ότι η στοχαστική ανέλιξη βρίσκεται στην κ-κατάσταση την χρονική στιγμή ν.

- Η πιθανότητα:

$$p_{ij}(\nu, \nu+1) = P(X_{\nu+1} = j \,|\, X_\nu = i),$$

καλείται πιθανότητα μετάβασης πρώτης τάξης από την i-κατάσταση στην j-κατάσταση. Δηλώνει, δηλαδή, την πιθανότητα η μελλοντική κατάσταση $X_{\nu+1}$ να είναι η j δοθέντος ότι η τωρινή κατάσταση X_ν είναι η i. Εάν ισχύει ότι

$$p_{ij}(\nu, \nu+1) = p_{ij} \quad \forall \nu = 0,1,2,\ldots,$$

τότε η αλυσίδα καλείται Ομογενής ή Μαρκοβιανή αλυσίδα με στάσιμες πιθανότητες μετάβασης.

Η συλλογή $P = \{p_{ij}(\nu, \nu+1)\}_{i,j\in I}$ ονομάζεται πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης πρώτης τάξης και είναι:

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0i} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1i} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ii} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Τα στοιχεία του πίνακα έχουν τις εξής ιδιότητες:

$$p_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j = 0,1,\ldots$$
$$\sum_{j \in I} p_{ij} = 1, \quad i = 0,1,\ldots$$

- Η πιθανότητα:

$$p_{ij}(m, m+\nu) = P(X_{m+\nu} = j \,|\, X_m = i), \quad \nu, m \geq 0,$$

καλείται πιθανότητα μετάβασης ν-οστής τάξης από την i-κατάσταση στην j-κατάσταση ύστερα από ν-μεταβάσεις.

Εάν η αλυσίδα είναι ομογενής, τότε γράφουμε:

$$p_{ij}(\nu) = P(X_{\nu+m} = j \,|\, X_m = i), \quad m = 0,1,\ldots, \nu \geq 1.$$

Συμβολίζουμε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ν-οστής τάξης με $P^{(\nu)}$, ο οποίος στην περίπτωση που ο χώρος καταστάσεων είναι $I = \{0,1,\ldots\}$ είναι

$$P^{(\nu)} = \begin{pmatrix} p_{00}(\nu) & p_{01}(\nu) & p_{02}(\nu) & \cdots & p_{0i}(\nu) & \cdots \\ p_{10}(\nu) & p_{11}(\nu) & p_{12}(\nu) & \cdots & p_{1i}(\nu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{i0}(\nu) & p_{i1}(\nu) & p_{i2}(\nu) & \cdots & p_{ii}(\nu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Και η πιθανότητα:

$$p_k(\nu) = P(X_\nu = k), \quad k \in I, \quad \nu \geq 1,$$

καλείται απόλυτη πιθανότητα [4].

Ο υπολογισμός των πιθανοτήτων $p_{ij}(\nu)$ γίνεται ευκολότερη κάνοντας χρήση των εξισώσεων Chapman-Kolmogorov. Πρόκειται για εξισώσεις οι οποίες μας επιτρέπουν να εκφράσουμε τις πιθανότητες μετάβασης ν-οστής τάξης συναρτήσει των πιθανοτήτων μετάβασης πρώτης τάξης.

Θεώρημα:

Για κάθε $m < r < \nu$ και κάθε ζεύγος καταστάσεων (i, j), ισχύει η σχέση:

$$p_{ij}(m, \nu) = \sum_{k \in I} p_{ik}(m, r) p_{kj}(r, \nu).$$

Απόδειξη:

Έστω τα ενδεχόμενα:

$$A : X_\nu = j, B : X_m = i, A_k : X_r = k.$$

Είναι

$$p_{ij}(m,\nu) = P(X_\nu = j \,|\, X_m = i) = P(A\,|\,B) = \frac{P(AB)}{P(B)} =$$

$$\frac{\sum_{k\in I} P(A_k\,|\,B)}{P(B)} = \sum_{k\in I} P(A_k)\,|\,B)P(A\,|\,A_k) =$$

$$\sum_{k\in I} p_{ik}(m,r)p_{kj}(r,\nu)$$

Για ομογενείς αλυσίδες:

$$p_{ij}(2) = \sum_{k\in I} p_{ik}p_{kj}$$

$$p_{ij}(\nu) = \sum_{k\in I} p_{ik}p_{kj}(\nu-1)$$

$$p_{ij}(m+\nu) = \sum_{k\in I} p_{ik}(m)p_{kj}(\nu).$$

Παρατηρούμε ότι, εάν $P^{(\nu)} = (p_{ij}(\nu))$ ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης ν-οστής τάξης, τότε:

$$P^{(2)} = P \cdot P,\ P^{(\nu)} = P \cdot P^{(\nu-1)},\ P^{(m+\nu)} = P^{(m)} \cdot P^{(\nu)}.$$

Ισχύει, δηλαδή, γενικά ότι ο πίνακας $P^{(\nu)}$ μπορεί να υπολογιστεί με τον πολλαπλασιασμό του πίνακα P ν-φορές με τον εαυτό του.

$$P^{(\nu)} = P^{\nu},\quad \nu = 1,2,\ldots$$

2.5 Ταξινόμηση καταστάσεων

<u>Ορισμός 2.5.1:</u>

Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_\nu, \nu = 0,1,2,\ldots\}$ με χώρο καταστάσεων I. Μια κατάσταση $j \in I$ καλείται προσιτή από την κατάσταση $i \in I$, εάν $p_{ij}(\nu) > 0$ για κάποιο $\nu \geq 0$ και συμβολίζεται $i \to j$. Εάν και η j κάνει προσιτή την i ($j \to i$) τότε οι καταστάσεις i, j επικοινωνούν και συμβολίζεται $i \leftrightarrow j$. Η επικοινωνία είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Το σύνολο των καταστάσεων μιας αλυσίδας I διαμερίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας.

$$I = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r \cup \cdots,$$

Όπου $C_iC_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Μια κατάσταση που ανήκει στην C_i είναι δυνατό να κάνει προσιτή μια κατάσταση η οποία ανήκει στην C_j, όμως όχι αντίστροφα, διότι αυτό θα σήμαινε πως οι δύο αυτές καταστάσεις ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας.

<u>Ορισμός 2.5.2:</u>

Μια αλυσίδα Markov καλείται απλή ή ανάγωγη εάν $i \leftrightarrow j$, $\forall i, j \in I$. Δηλαδή, εάν όλες οι καταστάσεις ανήκουν σε μια κλάση ισοδυναμίας.

<u>Ορισμός 2.5.3:</u>

Μια κλάση ισοδυναμίας K καλείται κλειστή ή κλειστό σύστημα καταστάσεων εάν

$$p_{ij}(\nu) = 0, \ \forall i \in K, j \notin K, \nu \geq 1.$$

Ορισμός 2.5.4:

Εάν $K = \{i\}$ και K κλειστό σύστημα καταστάσεων, τότε η κατάσταση i λέγεται κατάσταση απορρόφησης.

Επαναληπτικότητα αλυσίδας Markov

Έστω μια αλυσίδα Markov $\{X_\nu, \nu \geq 1\}$ με χώρο καταστάσεων I. Η πιθανότητα:

$$f_j(\nu) = P(X_\nu = j, X_r \neq j, r = 1,\ldots, n-1 \,|\, X_0 = j), j \in I,$$

καλείται πιθανότητα πρώτης επανόδου στην κατάσταση j μετά από ακριβώς n βήματα. Η πιθανότητα:

$$f_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_j(\nu).$$

καλείται πιθανότητα να γυρίσει κάποτε το σύστημα στην κατάσταση j.

Ορισμός 2.5.5:

α) Εάν $f_j = 1$, τότε η j καλείται έμμονη ή επαναληπτική.

β) Εάν $f_j < 1$, τότε η j καλείται μεταβατική.

Στην α) περίπτωση, έχουμε ότι με πιθανότητα 1 το σύστημα ξεκινώντας από την $j-$κατάσταση, επιστρέφει στην j τουλάχιστον μια φορά και οι $\{f_j(\nu), \nu = 1,2,\ldots\}$ ορίζουν την κατανομή του χρόνου πρώτης επανόδου.

Το μέγεθος $\mu_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu f_j(\nu)$ είναι ο μέσος χρόνος επανόδου στην $j-$κατάσταση.

Ορισμός 2.5.6:

α) Εάν $\mu_j < \infty$, τότε η j καλείται θετική.
β) Εάν $\mu_j = \infty$, τότε η j καλείται μηδενική.

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση μεταβατικής κατάστασης έχουμε $\mu_j = \infty$.

Ορισμός 2.5.7:

Περίοδος, έστω $d(j)$, μιας κατάστασης $j \in I$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των ακέραιων $\nu \geq 1$ για τους οποίους

$$p_{jj}(\nu) > 0.$$

Στην περίπτωση που $d(j) = 1$, η j καλείται απεριοδική.

Ορισμός 2.5.8:

Μια κατάσταση j η οποία είναι έμμονη, θετική και απεριοδική λέγεται εργοδική.

Ορισμός 2.5.9:

Μια συνάρτηση πιθανότητας $\{u_j, j = 0,1,\ldots\}$ καλείται στάσιμη για μια αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης πρώτης τάξης $P = (p_{ij})$ και $I = \{0,1,\ldots\}$ εάν ισχύει η σχέση

$$u_j = \sum_{i=0}^{\infty} u_i p_{ij}\,, \quad i, j \in I.$$

2.6 Αλυσίδες Markov σε συνεχή χρόνο

Αναφερόμαστε στην περίπτωση όπου ο παραμετρικός χώρος είναι της μορφής $T = [0,\infty)$ και ο χώρος καταστάσεων $I \subseteqq \mathbb{R}$. Είναι στοχαστικές διαδικασίες οι οποίες αλλάζουν κατάσταση σε τυχαίους χρόνους, όπως για παράδειγμα οι τηλεφωνικές κλήσεις στο κινητό τηλέφωνο ή οι φορείς που μεταδίδουν μια ασθένεια.

<u>Ορισμός 2.6.1:</u>

Μια στοχαστική ανέλιξη $\{(X(t), t \geq 0\}$ σε συνεχή χρόνο και χώρο καταστάσεων $I = \{0,1,2,\dots\}$ λέγεται Μαρκοβιανή ή στοχαστική ανέλιξη Markov εάν:

$$\forall\, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_\nu \text{ και } j_1, \dots j_\nu \in I,$$

$$P[X(t_\nu)) = j_\nu \,|\, X(t_{\nu-1}) = j_{\nu-1}, \dots, X(t_1) = j_1] = P[X(t_\nu) = j_\nu \,|\, X(t_{\nu-1} = j_{\nu-1}] \,.$$

Οι πιθανότητες $p_{ij}(s,t) = P[X(t) = j \,|\, X(s) = i],\ \ \forall 0 \leq s < t$ και $i, j \in I$ καλούνται πιθανότητες μετάβασης και ικανοποιούν τις εξισώσεις Chapman - Kolmogorov.

$$p_{ij}(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s,u) p_{kj}(u,t), \quad 0 \leq s < u < t.$$

Η απόδειξη είναι ίδια όπως και για τις αλυσίδες σε διακριτό χρόνο. Λόγω της Μαρκοβιανής ιδιότητας έχουμε:

$$p_{ij}(s,t) = P(X(t) = j \,|\, X(s) = i)$$

$$= \frac{P(X(t) = j, X(s) = i)}{P(X(s) = i)}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} P(X(t) = j, X(u) = k, X(s) = i)}{P(X(s) = i)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X(t) = j \,|\, X(u) = k, X(s) = i) P(X(u) = k \,|\, X(s) = i)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s, u) p_{kj}(u, t).$$

Ο πίνακας μετάβασης ορίζεται από τις πιθανότητες:

$$p_{ij}(s, t) = P(X(t) = j \,|\, X(s) = i), \quad \text{για } s \leq t$$

Η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$ καλείται ομογενής και συνήθως αναφέρουμε ότι έχει στάσιμες πιθανότητες μετάβασης εάν

$$p_{ij}(s, t) = P(X(t) = j \,|\, X(s) = i) = p_{ij}(0, t - s), \quad \forall t, \quad s \geq 0$$

Δηλαδή, η πιθανότητα μετάβασης εξαρτάται από το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί έως ότου γίνει η μετάβαση από μία κατάσταση σε μια άλλη και όχι πότε έγινε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

3.1 Γενικός Ορισμός

Έστω $(\mathcal{S},\mathcal{F})$ ένας μετρήσιμος χώρος. Δηλαδή το $\mathcal{S}$ είναι ένα σύνολο και $\mathcal{F}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο $\mathcal{S}$.

Στοχαστική ανέλιξη με τιμές στον $\mathcal{S}$ λέμε μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t), t \in I\}$ που ορίζονται σε κοινό χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και παίρνουν τιμές στο $\mathcal{S}$. Το I είναι ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών, αλλά συνήθως είναι το $[0,\infty)$ ή το (s, t) και τότε ερμηνεύουμε το t ως χρόνο και το X_t ως την τιμή ενός μεγέθους τη χρονική στιγμή t. Για σταθερό $\omega \in \Omega$, η συνάρτηση $t \to X_t(\omega)$ λέγεται μονοπάτι ή τροχιά της ανέλιξης.

<u>Παράδειγμα 3.1.1</u>

Έστω $I = [0,\infty)$. Υπάρχει χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $(X_t)_{t\geq 0}$ ορισμένες σε αυτόν ώστε $\forall t \geq 0$ η X_t να παίρνει τις τιμές -1 και 1, καθεμία με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Πρακτικά, κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα και θέτουμε $X_t = -1$ εάν έρθει Γράμματα, $X_t = 1$ εάν έρθει Κεφαλή. Με πιθανότητα 1, ο μονοπάτι της ανέλιξης είναι μια συνάρτηση που ταλαντώνεται συνεχώς (καθώς το *t* μεταβάλλεται) ανάμεσα στις τιμές -1 και 1.

Μια ανέλιξη μπορεί να εκφραστεί από την απεικόνιση:

$$X : I \times \Omega \rightarrow S,$$

με $X(t, \omega) = X_t(\omega)$ και ως απεικόνιση

$$\hat{X} : \Omega \rightarrow S^I,$$

με $\hat{X}(\omega)$ να είναι συνάρτηση με τιμές $\hat{X}(\omega)(t) = X(t, \omega)$. Ο S^I εφοδιάζεται με τη σ-άλγεβρα γινόμενο και ως προς αυτήν η $\hat{X}$ είναι τυχαία μεταβλητή.

Η σ-άλγεβρα γινόμενο είναι αυτή που παράγεται από κάθε σύνολο της μορφής $\Pi_{i \in I} A_i$ με $A_I \in \mathcal{A}$ για κάθε $i \in I$ και με $\{i \in I : A_i \neq S\}$.

<u>Ορισμός 3.1.2:</u>

Κατανομή της ανέλιξης X λέμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $\hat{X}$, δηλαδή το μέτρο πιθανότητας $P_X(A) = P(\hat{X} \in A)$ για κάθε $A \subset S^I$ στη σ-άλγεβρα γινόμενο.

3.2 Στοχαστική Ανέλιξη Poisson

Η στοχαστική ανέλιξη Poisson είναι ένα πολύ καλό πιθανοθεωρητικό μοντέλο για τυχαία φαινόμενα που συμβαίνουν σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα ή χωρίο και είναι η πιο απλή Μαρκοβιανή αλυσίδα. Εάν ο χρόνος ή ο χώρος είναι συγκεκριμένος, τότε η μελέτη έγκειται σε μια τυχαία μεταβλητή. Παρακολουθώντας τα φαινόμενα στο χρόνο και στο χώρο έχουμε να μελετήσουμε την ανέλιξή τους, μία διαδικασία η οποία παράγει ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Η στοχαστική ανέλιξη Poisson απαριθμεί γεγονότα που συμβαίνουν με κάποια τυχαιότητα στο χρόνο ή στο χώρο, για αυτό και είναι απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη. Χρησιμοποιώντας την στοχαστική ανέλιξη Poisson μελετώνται ενδεικτικά, δυστυχήματα, πελάτες που φθάνουν σε ένα κέντρο εξυπηρέτησης, τηλεφωνήματα που γίνονται σε ένα τηλεφωνικό κέντρο, σωματίδια που εκπέμπονται από ραδιενεργό πηγή.

<u>Ορισμός 3.2.1:</u>

Απαριθμήτριες στοχαστικές ανελίξεις $\{X_t, t \geq 0\}$, καλούνται οι ανελίξεις στις οποίες η X_t εκφράζει το πλήθος κάποιων γεγονότων που έχουν συμβεί μέχρι και το χρόνο t.

<u>Ορισμός 3.2.2:</u>

Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$ καλείται ανέλιξη Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$ εάν είναι απαριθμήτρια διαδικασία και επιπλέον ικανοποιεί:

I) $X(0) = 0$

II) Έχει ανεξάρτητες και χρονικά ομογενείς προσαυξήσεις.

III) Για κάθε $0 \leq s < t$ η τυχαία μεταβλητή $X(t) - X(s)$ είναι Poisson με παράμετρο $\lambda(t-s)$, $\lambda > 0$. Δηλαδή,

$$P(X(t) - X(s) = k) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}, \; k = 0,1,\ldots$$

Η τελευταία συνθήκη μπορεί να αντικατασταθεί από την (III΄):

$P(X(t+h) - X(t) = 1) = \lambda h + o(h)$, $h > 0$ πολύ μικρό

$P(X(t+h) - X(t) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$

Όπου $o(h)$: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{o(h)}{h}$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι:

$$P(C(t+h) - X(t) = k) = o(h), k = 2,3,\ldots$$

Οι δύο τελευταίες συνθήκες είναι ισοδύναμες.

Η στοχαστική ανέλιξη Poisson, όπως αναφέρθηκε, συνήθως απαριθμεί γεγονότα που συμβαίνουν σε χρόνο t. Για αυτό το λόγο καλείται και Απαριθμήτρια.

Σε μια στοχαστική ανέλιξη Poisson, πέρα από την κατανομή της $\{X(t), t \geq 0\}$, μας ενδιαφέρουν και οι εξής τυχαίες μεταβλητές οι οποίες σχετίζονται με αυτήν:

W_ν: Χρόνος αναμονής έως την πραγματοποίηση του ν-οστού γεγονότος, $\nu = 1,2,\ldots$

T_ν: Ο ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ του (ν-1)-οστού και ν-οστού γεγονότος, $\nu = 1,2,\ldots$

Οι παραπάνω μεταβλητές συνδέονται με τις εξής σχέσεις:

$$W_\nu = T_1 + T_2 + \ldots + T_\nu$$

$$T_\nu = W_\nu - W_{\nu-1}, \quad \nu = 1,2,\ldots$$

με $W_0 = 0$.

<u>Πρόταση 3.2.3:</u>

Οι ενδιάμεσοι χρόνοι $T_1, T_2, \ldots, T_\nu$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή κατανομή την εκθετική με παράμετρο λ (την παράμετρο της αντίστοιχης Poisson).

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $T_1 \geq t$ ο χρόνος του πρώτου γεγονότος με:

$$P(T_1 \geq t) = P(X(t)) = 0 = e^{-\lambda t}.$$

Η T_1 έχει μέση τιμή $\frac{1}{\lambda}$. Εάν πάρουμε την κατανομή της T_2 θα είναι:

$$P(X_2 \geq t \,|\, X_1 = s) = P(\text{δεν συμβαίνει κανένα γεγονός στο } (s, s+t) \,|\, T_1 = s))$$
$$= e^{-\lambda t} \,.$$

Επομένως, η T_2 είναι ανεξάρτητη της T_1 και η κάθε μία ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Ομοίως, για $\nu \geq 1$ και $t, s_1, \ldots, s_\nu \geq 0$ ισχύει:

$$P(T_\nu > t) \,|\, T_1 = s_1, \ldots, T_{\nu-1} = s_{\nu-1})$$
$$= P(X(t + s_1 + \cdots + s_\nu) - X(s_1 + \cdots + s_\nu))$$
$$= e^{-\lambda t}$$

Επομένως, η T_ν είναι ανεξάρτητη των $T_1, T_2, \ldots, T_{\nu-1}$ και ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.

3.3 Στοχαστικές Ανελίξεις Γεννήσεως-Θανάτου

Μια γενίκευση της διαδικασίας Poisson είναι οι Στοχαστικές Ανελίξεις Γεννήσεως-Θανάτου. Είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα σε συνεχή χρόνο $\{X(t), t \geq 0\}$ όπου η τυχαία μεταβλητή $X(t)$ αναπαριστά το μέγεθος ενός πληθυσμού τη χρονική στιγμή t. Χρησιμοποιούνται για την μελέτη βιολογικών πληθυσμών όπως και συστημάτων όπου υπάρχει χρόνος αναμονής πελατών.

Ορισμός 2.6.1:

Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$ σε συνεχή χρόνο και με χώρο καταστάσεων $I = \{0,1,2,\ldots\}$ καλείται Γεννήσεως-Θανάτου εάν έχει στάσιμες πιθανότητες μετάβασης

$$p_{ij} = P(X(t+s) = j \,|\, X(s) = i), \quad s \geq 0, \quad t > 0$$

και οι πιθανότητες $p_{ij}(t)$ ικανοποιούν τις συνθήκες:

1. $p_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h), \quad i \geq 0$

2. $p_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h), \quad \iota \geq 1$

3. $p_{i,i}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), \quad i \geq 0$ για $h \downarrow 0$

4. $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$

5. $\mu_0 = 0, \ \lambda_0 > 0, \ \mu_i, \lambda_i > 0 \ \ i = 1,2,\ldots$

Οι παράμετροι λ_i και μ_i ονομάζονται απειροστικοί ρυθμοί γέννησης και θανάτου και ο πίνακας $G = (g_{ij})$ είναι:

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

και καλείται γεννήτορας πίνακας ή απειροστική γεννήτρια της στοχαστικής ανέλιξης.

3.3 ΚΙΝΗΣΗ BROWN

Την Κίνηση Brown ως φυσικό φαινόμενο κατέγραψε πρώτος ο Robert Brown το 1828 παρατηρώντας την κίνηση κόκων γύρης μέσα σε νερό. Επειτα, το 1900, ο Louis Bachelier τη χρησιμοποίησε ως μοντέλο για τις τιμές μετοχών. Ο Albert Einstein το 1905 απέδειξε ότι μια κίνηση με κάποια «φυσιολογικά» επιθυμητά χαρακτηριστικά θα ικανοποιεί την ιδιότητα (2) του ορισμού που δίνεται παρακάτω και υπέδειξε εφαρμογές στον μικρόκοσμο (π.χ., προσδιορισμός του αριθμού του Avogadro). Παρ'ολα αυτά, η απόδειξη ότι η Κίνηση Brown υπάρχει, δηλαδή ότι υπάρχει ανέλιξη που να ικανοποιεί τις απαιτήσεις του Ορισμού 3.1.1, έγινε το 1923 από τον Nobert Wiener. Ακολούθησαν και άλλες αποδείξεις ύπαρξης.

<u>Ορισμός 3.3.1</u>

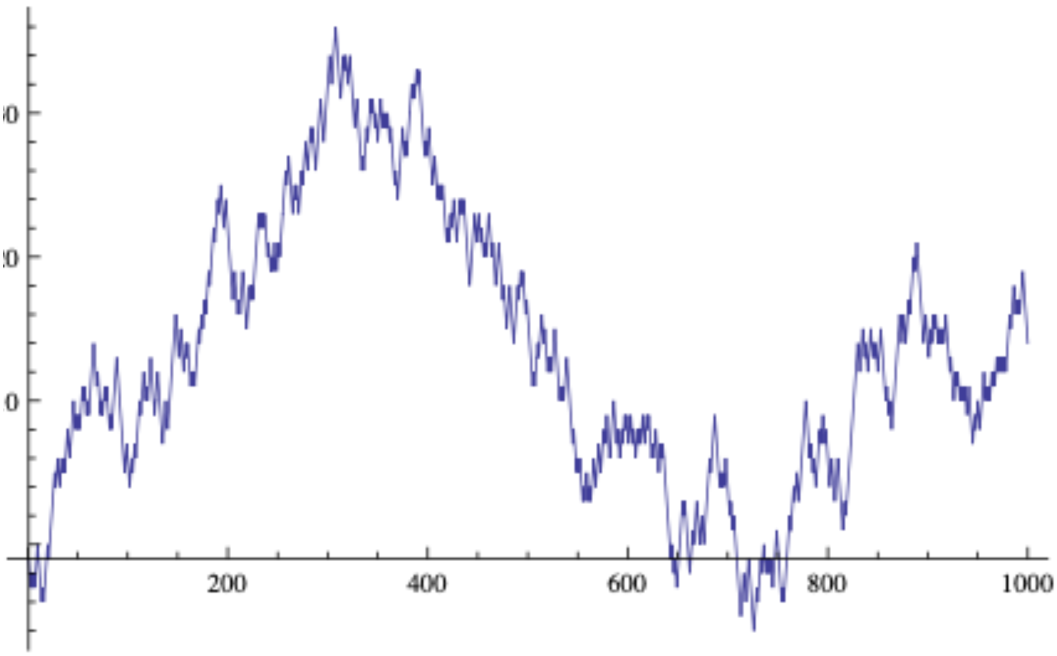
Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$ σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega,\ \mathcal{A}, P)$ ονομάζεται μονοδιάστατη Κίνηση Brown με σημείο εκκίνησης $x \in \mathbb{R}$, εάν ικανοποιούνται τα παρακάτω:

1. $X(0) = x$

2. Η Στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Δηλαδή, για $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_\nu$ οι προσαυξήσεις $X_{t_\nu} - X_{t_{\nu-1}}, X_{t_{\nu-1}} - X_{t_{\nu-2}}, \ldots X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_1} - X_0$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

3. $\forall\ t > 0$, η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση t.

4. Με πιθανότητα 1, η τροχιά $t \to X_t$ είναι συνεχής.



Σχήμα 3.1: Το γράφημα μιας πραγματοποίησης της Κίνησης Brown.

Στην περίπτωση όπου $x = 0$, η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$ ονομάζεται τυπική Κίνηση Brown.

Παρατήρηση 3.3.2

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός στην αρχική τιμή της κίνησης $X(0)$. Η κίνηση δύναται να ξεκινάει από ένα συγκεκριμένο $x \in \mathbb{R}$, ή γενικότερα, να ξεκινάει τυχαία επιλέγοντας το αρχικό της σημείο με βάση ένα μέτρο πιθανότητας μ στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή η $X(0)$ να είναι τυχαία μεταβλητή με κατανομή μ.

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ</u>

Κάθε Κίνηση Brown ορίζει στον χώρο πιθανότητας που ορίζεται μια φυσιολογική διήθηση. Την $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ με

$$\mathscr{F}_t := \sigma(\{X(s) : s \in [0,t]\}), \quad \forall t \in [0,\infty).$$

<u>Πρόταση 3.3.3</u>

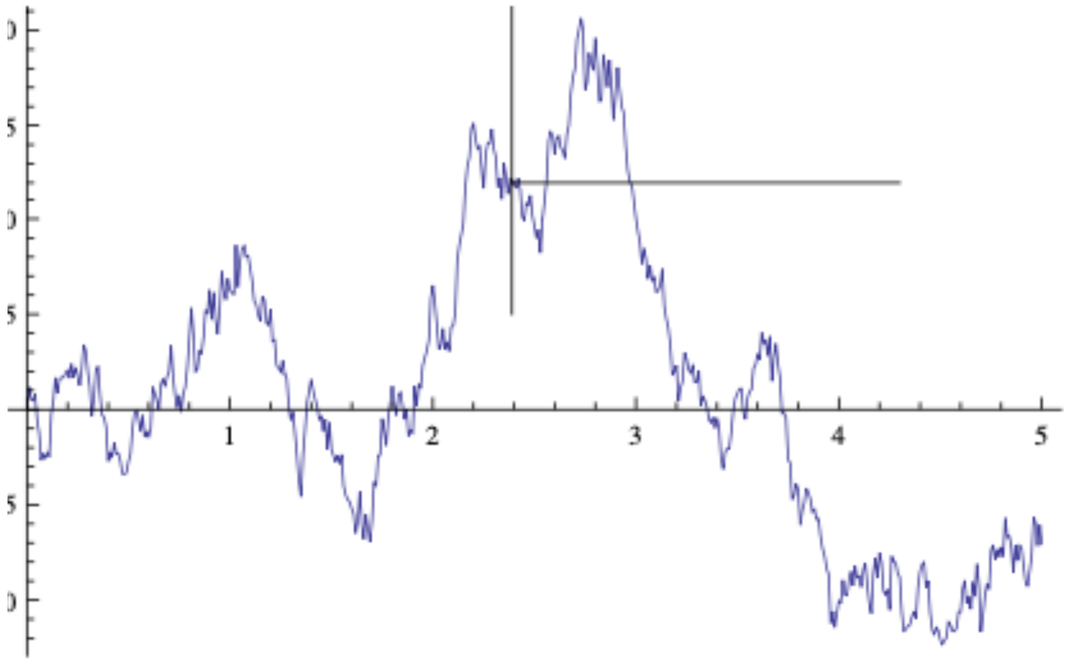
Έστω X Κίνηση Brown και $t_0 \geq 0$. Ορίζουμε την ανέλιξη B ως:

$$B(t) := X(t_0 + t) - X(t_0), \quad \forall t \in [0.\infty].$$

Τότε:

α. Η B είναι τυπική Κίνηση Brown.

β. Η B είναι ανεξάρτητη από την $\mathscr{F}_{t_0}$.



Σχήμα 3.2: Η τελευταία πρόταση λέει ότι τοποθετώντας νέους άξονες στο $(t_0, B(t_0))$, η ανέλιξη δεξιά του νέου συστήματος αξόνων είναι τυπική Κίνηση Brown και ανεξάρτητη από το παρελθόν.

<u>Πρόταση 3.3.4</u>

Έστω X μια τυπική κίνηση Brown. Ορίζουμε την ανέλιξη B ως

$$B(t) := \frac{1}{c}B(c^2t), \quad \forall t \in [0,\infty] \text{ και } c > 0.$$

Τότε η B είναι τυπική κίνηση Brown.

<u>Πρόταση 3.3.5</u>

Έστω X τυπική Κίνηση Brown. Ορίζουμε την ανέλιξη B ως

$$B(t) := \begin{cases} tB(1/t), & \forall t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

Η B είναι τυπική Κίνηση Brown.

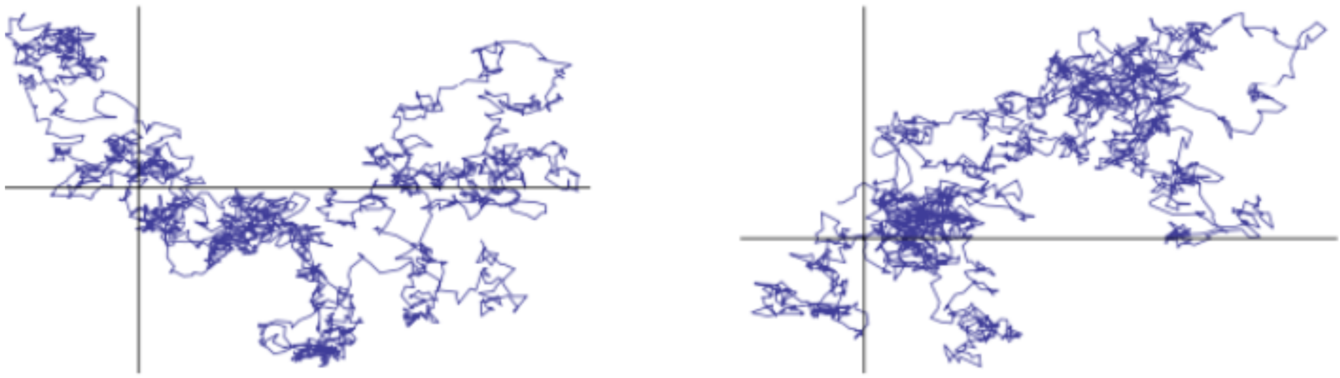
<u>Πολυδιάστατη Κίνηση Brown</u>

<u>Ορισμός 3.1.5</u>

Έστω $d \geq 1$ φυσικός αριθμός και $B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(d)}$ ανεξάρτητες μονοδιάστατες Κινήσεις Brown. Ως $d-$διάσταση Κίνηση Brown ορίζεται η ανέλιξη

$$B(t) = \begin{pmatrix} B^{(1)}(t) \\ B^{(2)}(t) \\ \vdots \\ B^{(d)}(t) \end{pmatrix}, t \in [0,\infty).$$

Στην περίπτωση όπου $B(0) = 0 \in \mathbb{R}^d$ για κάθε $\omega \in \Omega$, λέμε ότι η B είναι $d-$διάστατη τυπική Κίνηση Brown. Η τελευταία περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου στον $\mathbb{R}^d$. Σε κάθε συντεταγμένη η κίνηση του σωματιδίου είναι μια μονοδιάστατη Κίνηση Brown και οι Κινήσεις Brown που αντιστοιχούν στις d συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες.



Σχήμα 3.3: Δύο πραγματοποιήσεις της τυπικής διδιάστατης Κίνησης Brown για το χρονικό διάστημα $[0,1]$.

Σχετικά με το σημείο εκκίνησης της πολυδιάστατης Κίνησης Brown και τον χρησιμοποιούμενο συμβολισμό, ισχύουν αυτά που είπαμε στην Παρατήρηση 3.1.2 για τη μονοδιάστατη περίπτωση.

<u>Παράδειγμα 3.3.6</u>

Έστω $x \in \mathbb{R}$ και B μια Κίνηση Brown με $B(0) = x$. Τότε $Cov(B(s), B(t)) = s \wedge t$ για κάθε $s, t \geq 0$.

Πράγματι, έστω ότι $0 \leq s < t$. Τότε

$$
\begin{aligned}
Cov(B(s), B(t)) &= Cov(B(s), B(t) - B(s) + B(s)) \\
&= Cov(B(s), B(t) - B(s)) + Cov(B(s), B(s)) \\
&= 0 + Var(B(s)) = s
\end{aligned}
$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιείται η διγραμμικότητα της συνδιακύμανσης. Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιείται το γεγονός ότι οι $B(s), B(t) - B(s)$ είναι ανεξάρτητες και ότι $B(s) \sim N(x, s)$ (αφού $B(s) - B(0) \sim N(0,s)$).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
MARTINGALES

4.1 Martingales διακριτού χρόνου

<u>Ορισμός 4.1.1:</u>

Έστω ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \ \mathcal{A}, P)$ και μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Η ακολουθία X_n λέγεται Martingale ως προς τη διήθηση $(\mathscr{A}_n)_{n\geq 0}$ και το μέτρο P εάν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

(i) Η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathscr{A}_n)_{n\geq 0}$,

(ii) $E(|X_n|) < \infty$, για κάθε $n \geq 0$,

(iii) $E(X_{n+1} | \mathscr{A}_n) = X_n$, για κάθε $n \geq 0$.

Εάν αντί της ιδιότητας (iii) ισχύει η $E(X_{n+1} | \mathscr{A}_n) \geq X_n$, τότε η ακολουθία λέγεται submartingale. Αντιθέτως, εάν ισχύει η $E(X_{n+1} | \mathscr{A}_n) \leq X_n$, τότε η ακολουθία λέγεται supermartingale.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

α. Εάν η ακολουθία $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι submartingale, τότε η ακολουθία $(-X_n)_{n\geq 0}$ είναι supermartingale.

β. Η ακολουθία $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι $\mathscr{A}_n$-martingale εάν και μόνο εάν είναι ταυτοχρόνως submartingale και supermartingale.

γ. Παίρνοντας μέσες τιμές στα μέλη της ιδιότητας (iii) έχουμε ότι η ακολουθία $(E(X_n))_{n\geq 0}$ είναι σταθερή, αύξουσα ή φθίνουσα όταν αντίστοιχα η X είναι $\mathscr{A}_n$-martingale, submartingale, supermartingale.

Ας αναλογιστούμε ένα παίκτη ο οποίος συμμετέχει σε ένα παιχνίδι που γίνεται σε βήματα και X_n να δηλώνει την περιουσία του ύστερα από το βήμα n. Η $E(X_{n+1} \,|\, \mathscr{A}_n)$ μας δίνει την καλύτερη εκτίμηση που έχουμε για την περιουσία του μετά από ένα βήμα με δεδομένη όλη τη πληροφορία κατά τον χρόνο n. Επομένως, όταν η X είναι $\mathscr{A}_n$-Martingale, το παιχνίδι είναι δίκαιο. Όταν η X είναι submartingale, το παιχνίδι είναι υπέρ του παίκτη ενώ όταν είναι supermartingale, το παιχνίδι είναι κατά του παίκτη.

<u>Παράδειγμα 4.1.2 (Ο απλός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$)</u>

Έστω $(X_t)_{t\geq 0}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $E(X_n) = 0, \forall\, n \geq 1$ και $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \dfrac{1}{2}$. Θεωρούμε την στοχαστική ανέλιξη $(S_n)_{n\geq 0}$ με

$$S_n := 0$$

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n, \text{ για } n \geq 1.$$

Η ανέλιξη $(S_n)_{n\geq 0}$ ονομάζεται απλός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$.

Θεωρούμε, επίσης, την διήθηση $(\mathscr{A}_n)_{n\geq 0}$ με

$$\mathscr{A}_0 := \{\emptyset, \Omega\},$$

$$\mathscr{A}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) \text{ για } n \geq 1.$$

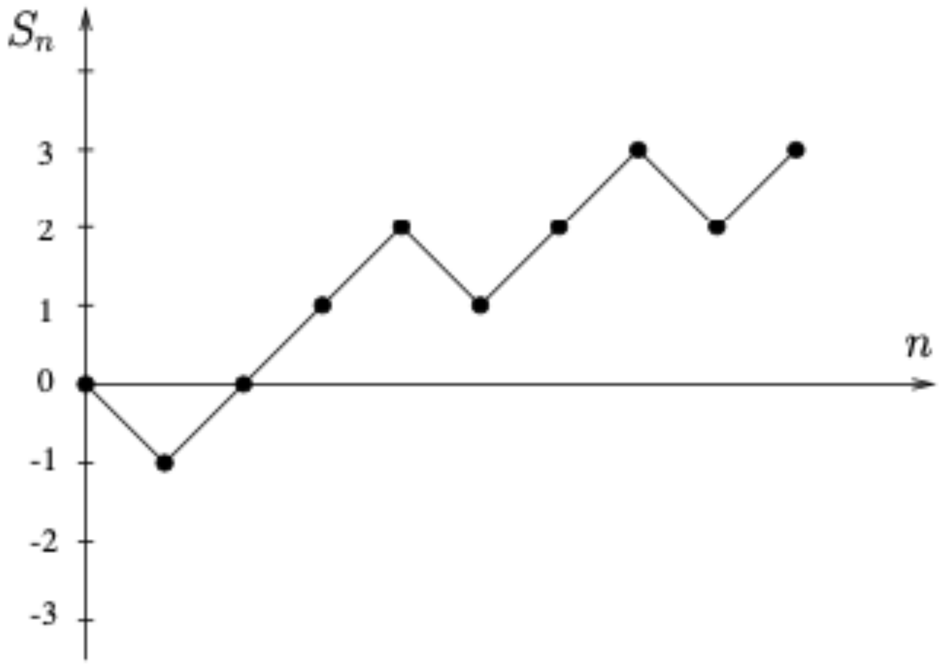
Η ανέλιξη $(S_n)_{n\geq 0}$ είναι $\mathscr{A}_n$-Martingale ως προς την $(\mathscr{A}_n)_{n\geq 0}$.

Απόδειξη:

Από τον ορισμό της $(\mathscr{A}_n)_{n\geq 0}$, προκύπτει ότι είναι προσαρμοσμένη. Η δεύτερη ιδιότητα του ορισμού 4.1.1 ικανοποιείται διότι $E(|S_n|) \leq n$ για κάθε $n \geq 0$. Για την τρίτη ιδιότητα έχουμε ότι:

$$E(S_{n+1}|\mathscr{A}_n) = E(S_n + X_{n+1}|\mathscr{A}_n) = S_n + E(X_{n+1}|\mathscr{A}_n) = S_n + E(x_{n+1}) = S_n\,.$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα της γραμμικότητας της δεσμευμένης μέσης τιμής και το γεγονός ότι η S_n είναι $\mathscr{A}_n$- μετρήσιμη. Η τρίτη ισότητα επαληθεύεται από το γεγονός ότι η X_{n+1} είναι ανεξάρτητη της $\mathscr{A}_n$.



Σχήμα 4.1: Το γράφημα μιας πραγματοποίησης των πρώτων 9 βημάτων του απλού τυχαίου περιπάτου στο $\mathbb{Z}$.

<u>Ιδιότητες</u>

Έστω $X = (X_n)_{n\geq 0}$ μια ανέλιξη και $m, n \in \mathbb{N}$ με $n > m$.

a. Εάν η X είναι supermartingale ως προς τη διήθεση $(\mathscr{A}_n)_{n\geq 0}$, τότε

$$E(X_n \mid \mathscr{A}_m) \leq X_m.$$

b. Εάν η X είναι submartingale ως προς τη διήθεση $(\mathscr{A}_n)_{n\geq 0}$, τότε

$$E(X_n \mid \mathscr{A}_m) \geq X_m.$$

c. Εάν η X είναι martingale ως προς τη διήθεση $(\mathscr{A}_n)_{n\geq 0}$, τότε

$$E(X_n \mid \mathscr{A}_m) = X_m.$$

4.2 Χρόνοι Διακοπής

<u>Ορισμός 4.2.1</u>

Μια συνάρτηση $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup (\infty)$ λέγεται χρόνος διακοπής ως προς τη διήθεση $(\mathscr{A}_n)_{n\geq 0}$ εάν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\{T \leq n\} \in \mathscr{A}_n.$$

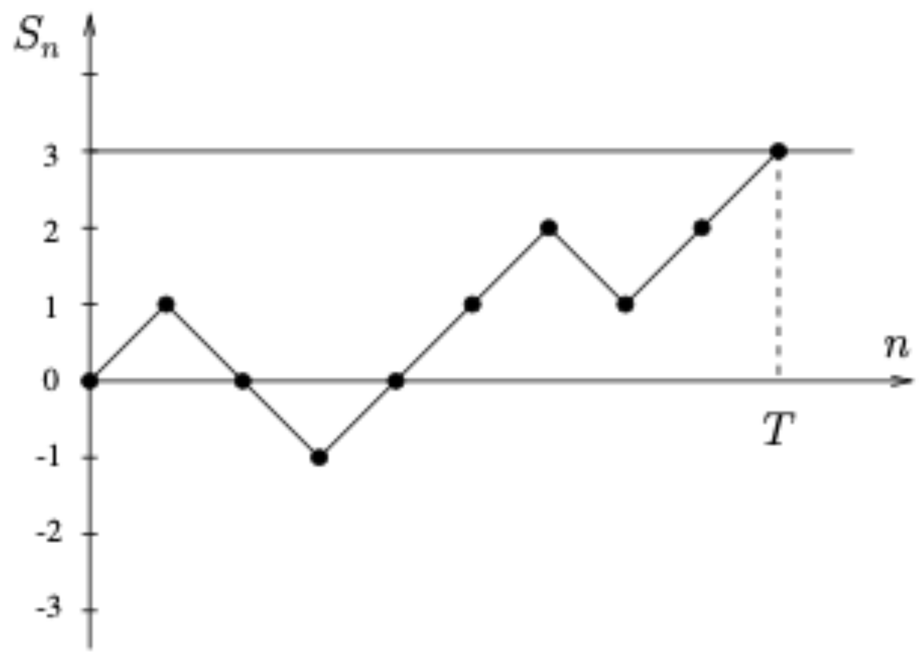
Με βάση την πληροφορία που έχουμε ως το χρόνο n μπορεί να καθοριστεί εάν ισχύει ότι $T \leq n$.

<u>Παράδειγμα 4.2.2</u>

Έστω $(S_n)_{n\geq 0}$ ο απλός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$ και $(\mathscr{A}_n)_{n\geq 0}$ η διήθεση όπως στο παράδειγμα 4.1.2.
Η τυχαία μεταβλητή $T := inf\{k \geq 0 : S_k = 3\}$ παίρνει τιμές στο $\mathbb{N} \cup \{\infty\}(inf\varnothing = \infty)$. Αποτελεί τον πρώτο χρόνο που ο απλός τυχαίος περίπατος «χτυπάει» το επίπεδο 3. Άρα ο T είναι χρόνος διακοπής. Εάν μας δωθεί η πληροφορία του $\mathscr{A}_n$, δηλαδή τις τιμές

που έλαβαν οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$, είμαστε σε θέση να αποφανθούμε εάν ισχύει $T \leq n$.

Γενικά, οι χρόνοι πρώτης εισόδου σε ένα σύνολο για την $(S_n)_{n\geq 0}$ είναι χρόνοι διακοπής ως προς τη διήθηση $(\mathscr{A}_n)_{n\geq 0}$.



Σχήμα 4.2: Ο χρόνος διακοπής Τ. Στην συγκεκριμένη πραγματοποίηση έχουμε Τ=9.

Παράδειγμα 4.2.3

Έστω $(S_n)_{n\geq 0}$ ο απλός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$ και $(\mathscr{A}_n)_{n\geq 0}$ η διήθηση όπως στο παράδειγμα 4.1.2. Η τυχαία μεταβλητή $\hat{T} := sup\{k \leq 7 : S_k = 0\}$ εκφράζει την τελευταία φορά όπου ο απλός τυχαίος περίπατος « μηδενίζει ».

Για $n \geq 0$ αναρωτιόμαστε εάν $\{T = n\} \in \mathscr{A}_n$. Το ερώτημα έχει ενδιαφέρον μόνο για $n \leq 7$ καθώς σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή εάν $n > 7$, το σύνολο $\{T = n\}$ είναι το κενό. Ας θεωρήσουμε $n = 2$. Έχοντας την πληροφορία για το τι συνέβη έως τον χρόνο 2, μπορούμε να πούμε αν συνέβη το γεγονός $T = 2$; Δεν μπορούμε, διότι και να ισχύει $S_2 = 0$, δεν γνωρίζουμε εάν αργότερα η S ξαναχτυπήσει το 0. Είναι δυνατόν, για παράδειγμα, να ισχύει $S_6 = 0$, οπότε $T = 6$ γιατί η $S_7 = 0$ δεν είναι δυνατόν να συμβεί ποτέ, ή να ισχύει $S_6 \neq 0$, οπότε $T = 2$ ή $T = 4$. Ας το δούμε τυπικά.

Εάν $\{T = 2\} \in \mathscr{A}_2$ τότε επειδή και το σύνολο $A := \{X_1 = 1, X_2 = -1\} \in \mathscr{A}_2$, θα ισχύει $B := \{T = 2\} \cap \mathscr{A} \in \mathscr{A}_2$. Τότε $\emptyset \neq B \subsetneq \mathscr{A}$ γιατί $\{X_1 = 1, X_2 = -1, X_3 = 1, X_4 = -1\} \subset \mathscr{A} \backslash B$ και $\{X_1 = 1, X_2 = -1, X_3 = 1, X_4 = 1, X_5 = 1\} \subset B$.

Όμως από την περιγραφή της σ-άλγεβρας $\mathscr{A}_2$, προκύπτει ότι το μόνο στοιχείο της που είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathcal{A}$ είναι το $\emptyset$.

4.2.3 Θεώρημα επιλεκτικής διακοπής

Έστω T χρόνος διακοπής και $X = (X_n)_{n\geq 0}$ μια προσαρμοσμένη στοχαστική ανέλιξη. Ορίζουμε τη σταματημένη ανέλιξη X^T ως $X_n^T = X_{n\wedge T}$, δηλαδή για $n \in \mathbb{N}$ η $X_n^T : \Omega \to [-\infty, \infty]$ έχει τιμές

$$X_n^T(\omega) = X_{n\wedge T(\omega)}(\omega) = \begin{cases} X_i(\omega), & T(\omega) = i < n \\ X_n(\omega), & T(\omega) \geq n \end{cases}$$

Για κάθε $\omega \in \Omega$, θέτοντας $r := T(\omega)$, η X^T ακολουθεί την X στις τιμές $X_0, X_1, \ldots, X_r$ και ύστερα σταθεροποιείται στην τιμή X_r. Εάν $T(\omega) = \infty$, τότε για αυτή τη τιμή του ω, η X^T έχει το ίδιο μονοπάτι με την X.

Πρόταση 4.2.4

Έστω T χρόνος διακοπής.

α) Εάν η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι (sub)supermartingale, τότε η X^T είναι αντιστοίχως (sub)supermartingale.

β) Εάν η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale, τότε η X^T είναι $\mathscr{A}_n$-martingale.

Έπεται, λοιπόν, ότι για χρόνο διακοπής T, supermartingale X και $n \geq 1$, ισχύει

$$E(X_{n\wedge T}) \leq E(X_0).$$

Ενώ για X martingale ισχύει

$$E(X_{n\wedge T}) = E(X_0).$$

Θεώρημα 4.2.5 (Επιλεκτικής Διακοπής)

Έστω $(X_n)_{n\geq 0}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στοιχείων του $L^1(P)$ και T τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} E(X_{n\wedge T}) = E(X_T),$$

εάν ικανοποιείται μία από τις παρακάτω προϋποθέσεις:

(i) Η T είναι φραγμένη τυχαία μεταβλητή.

(ii) $P(T < \infty) = 1$ και υπάρχει $M < \infty$ ώστε $|X_n(\omega)| \leq M$ για κάθε $n \geq 0$ και $\omega \in \Omega$.

(iii) $E(T), E(|X_0|) < \infty$ και υπάρχει $M < \infty$ ώστε $|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)| \leq M$ για κάθε $n \geq 1$ και $\omega \in \Omega$.

Εάν επιπλέον ο T είναι χρόνος διακοπής, τότε ισχύει:

$E(X_T) \leq E(X_0)$, για X supermartingale

$E(X_T) \geq E(X_0)$, για X submartingale

$E(X_T) = E(X_0)$, για X $\mathscr{A}_n$-martingale.

4.3 Martingales σε συνεχή χρόνο

Ορισμός 4.3.1:

Έστω ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega,\ \mathcal{A}, P)$. Διήθηση σε αυτόν τον χώρο λέγεται μια αύξουσα οικογένεια $(\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$ σ-αλγεβρών, καθεμία υποσύνολο της $\mathcal{A}$. Δηλαδή, ισχύει ότι $\mathscr{A}_s \subset \mathscr{A}_t \subset \mathcal{A}$ για κάθε $0 \leq s < t$.

Ορισμός 4.3.2:

Μια στοχαστική ανέλιξη $(X_t)_{t\geq 0}$ λέγεται $\mathscr{A}_n$-προσαρμοσμένη στην διήθηση $(\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$ εάν για κάθε $t \geq 0$ η X_t είναι $\mathscr{A}_t$-μετρήσιμη.

Ορισμός 4.3.3:

Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \geq 0\}$ λέγεται Martingale ως προς τη διήθηση $(\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$, ή $\mathscr{A}_t-$Martingale εάν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Η $(X_t)_{t\geq 0}$ είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$,
2. $E(|X_t|) < \infty$ για κάθε $t \geq 0$,
3. $E(X_t | \mathscr{A}_s) = X_s$ για κάθε $0 \leq s < t$.

Εάν αντί της ιδιότητας (iii) ισχύει η $E(X_t | \mathscr{A}_s) \geq X_s$, τότε η ακολουθία λέγεται submartingale. Αντιθέτως, εάν ισχύει η $E(X_t | \mathscr{A}_s) \leq X_s$, τότε η ακολουθία λέγεται supermartingale.

Παρατήρηση:

Εάν η $(X_t)_{t\geq 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$ και $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία στο $[0,\infty)$, τότε η ανέλιξη $(X_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $\mathscr{A}_n$-martingale ως προς τη διήθηση $(\mathscr{A}_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Με αυτό το τρόπο μεταφέρονται αποτελέσματα ανελίξεων που είναι σε διακριτό χρόνο σε συνεχή χρόνο.

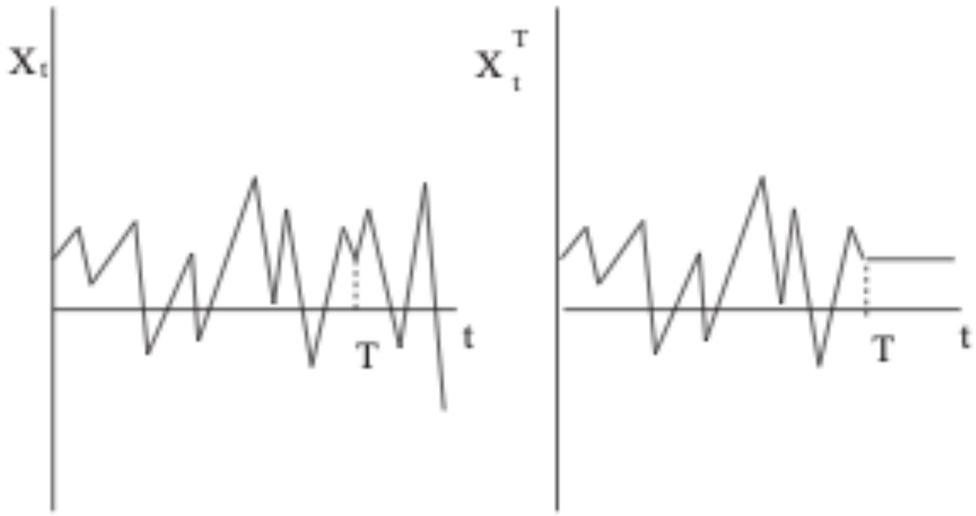
4.4 Χρόνοι διακοπής

<u>Ορισμός 4.4.1</u>

Μια συνάρτηση $T : \Omega \to [0,\infty)$ λέγεται χρόνος διακοπής ως προς την διήθηση $(\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$ εάν για κάθε $t \geq 0$ ισχύει:

$$\{T \leq t\} \in \mathscr{A}_t.$$

Αν η διήθηση θεωρηθεί σαν η φυσική διήθηση που παράγεται από κάποια στοχαστική διαδικασία X_t (ή πιο γενικά θεωρήσουμε ότι η $\mathscr{A}_t$ είναι μία διήθηση που κάνει την X_t μετρήσιμη), διαισθητικά μπορούμε να πούμε ότι η τυχαία μεταβλητή T είναι ένας χρόνος διακοπής αν η τιμή της μπορεί να καθοριστεί από την γνώση της στοχαστικής διαδικασίας μόνο κατά το παρελθόν και δεν χρειάζεται πληροφορία από το μέλλον. Στις περισσότερες περιπτώσεις ένας χρόνος διακοπής είναι η πρώτη φορά που θα συμβεί ένα γεγονός.



Σχήμα 4.3: Διακοπή της στοχαστικής ανέλιξης X_t στον χρόνο στάσης Τ. Αριστερά φαίνεται η αρχική στοχαστική ανέλιξη και δεξιά η σταματημένη ανέλιξη στον τυχαίο χρόνο Τ.

Έστω ανέλιξη $X = (X_t)_{t \geq 0}$ και $T : \Omega \to [0,\infty)$ χρόνος διακοπής. Συμβολίζουμε με X_t^T την ανέλιξη που ορίζεται ως $X_t^T = X_{t \wedge T}$ για κάθε $t \geq 0$ η οποία ονομάζεται σταματημένη ανέλιξη.

Είναι προφανές ότι η σταματημένη ανέλιξη X_t^T έχει ακριβώς τις ίδιες τροχιές με την X_t μέχρι τον χρόνο διακοπής T, ενώ μετά τον χρόνο διακοπής T είναι «σταματημένη» στην τιμή X_T.

$$X^T = \begin{cases} X_t(\omega), & t < T(\omega) \\ X_T(\omega), & t \geq T(\omega) \end{cases}$$

Θεώρημα 4.4.2

Έστω μια συνεχής Martingale ανέλιξη $X = (X_t)_{t \geq 0}$ και T χρόνος διακοπής. Τότε η ανέλιξη X^T είναι $\mathscr{A}_n$-Martingale.

Την απόδειξη την παραλείπουμε. Ο αναγνώστης μπορεί να την αναζητήσει στο κεφάλαιο ΙΙ παράγραφος 3 στο Revuz and Yor(1999) [2].

Επιλεκτική διακοπή

Η επιλεκτική διακοπή μας δίνει πληροφορία σχετικά με το τι μπορεί να συμβεί αν σταματήσουμε μία martingale ή μία (sub)supermartingale σε κάποιο χρόνο διακοπής T. Η επιλεκτική διακοπή αποτελεί μία ιδιαίτερα χρήσιμη τεχνική στην στοχαστική ανάλυση και την θεωρία των martingales και διευκολύνει στους υπολογισμούς μέσων τιμών και ποσοτήτων που σχετίζονται με χρόνους στάσης.

Θεώρημα 4.4.4: Έστω συνεχής $\mathscr{A}_n$-Martingale ανέλιξη $X = (X_t)_{t\geq 0}$ και T φραγμένος χρόνος διακοπής. Τότε

$$E(X_T) = E(X_0).$$

Απόδειξη:

Εάν M είναι ένα άνω φράγμα του χρόνου διακοπής T, τότε επειδή η X^T είναι $\mathscr{A}_n$-Martingale, θα έχουμε $E(X_M^T) = E(X_0^T)$ το οποίο είναι η ζητούμενη ισότητα αφού $T \wedge M = T$.

4.5 Εφαρμογές Martingale σε διακριτό χρόνο

<u>Εφαρμογή: (Κάλπη του Polya)</u>

Μια κάλπη περιέχει (α) άσπρες και (μ) μαύρες μπάλες. Επιλέγουμε στην τύχη μία από τις μπάλες που περιέχει η κάλπη, την επιστρέφουμε στην κάλπη, και προσθέτουμε ακόμα s του ίδιου χρώματος με αυτήν. Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία επ' άπειρον. Εστω A_n και B_n ο αριθμός των άσπρων και μαύρων μπαλών αντίστοιχα μετά τη n-οστή επανάληψη του πειράματος και $X_n := A_n/(A_n + B_n)$ το ποσοστό των άσπρων μπαλών στην κάλπη εκείνη τη στιγμή. Θέτουμε $\mathscr{F}_N := \sigma(\{A_i, B_i : i = 1,2,\ldots,n\})$. Η $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι Martingale ως προς την $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 1}$.

<u>Απόδειξη:</u>

Οι δύο πρώτες ιδιότητες του ορισμού του Martingale ικανοποιούνται. Αναφορικά με την τρίτη, η F_n παράγεται από διαμέριση κάθε μέλος της οποίας είναι της μορφής

$C(j_1, k_1, j_2, k_2, \ldots, j_n, k_n) := \{A_r = j_r, B_r = k_r,$ για κάθε $r = 1,2,\ldots,n\}$ όπου j_r, k_r θετικοί ακέραιοι. Αυτό συγκεκριμενοποιεί τα αποτελέσματα των n πρώτων πειραμάτων και για να έχει θετική πιθανότητα πρέπει οι j_r, k_r να ικανοποιούν κάποιες προφανείς σχέσεις. ΄Εστω λοιπόν C ένα σύνολο αυτής της μορφής με θετική πιθανότητα, και για ευκολία γράφουμε j, k αντί j_n, k_n. Για $\omega \in C$ υπολογίζουμε

$$E(X_{n+1}\,|\,F_n)(\omega) = \frac{E(X_{n+1}; C)}{P(C)}$$

$$= \frac{j+s}{j+k+s}\frac{P(|A_{n+1=j+s} \cap C)}{P(C)} + \frac{j}{j+k+s}\frac{P(\{A_{n+1} = j\} \cap C)}{P(C)}$$

$$= \frac{j+s}{j+k+s} P(A_{n+1} = j+s \,|\, C) + \frac{j}{j+k+s} P(A_{n+1} = j \,|\, C)$$
$$= \frac{j+s}{j+k+s} \frac{j}{j+k} + \frac{j}{j+k+s} \frac{k}{j+k} = \frac{j}{j+k} = X_n.$$

Άρα η $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι Martingale ως προς την $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 1}$.

Δόθηκε μια σχολαστική απόδειξη του ισχυρισμού. Ο τρόπος που συνήθως γράφεται είναι ο εξής. Στην $E(X_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)$ μας δίνεται ολόκληρη η ιστορία της διαδικασίας έως τη ν-οστή επανάληψη του πειράματος. Δηλαδή είναι στην διάθεση μας οι αριθμοί $j := A_n, k := B_n$. Οι ενδεχόμενες τιμές του X_{n+1} είναι $(j+s)/(j+k+s)$ και $j/(j+k+s)$ οι οποίες, δεδομένου του παρελθόντος, έχουν πιθανότητα $P(A_{n+1} = j+s \,|\, A_n = j, B_n = k), P(A_{n+1} = j \,|\, A_n = j, B_n = k)$ αντίστοιχα. Η δεσμευμένη πιθανότητα εδώ είναι η συνηθισμένη από τις στοιχειώδεις πιθανότητες. Καταλήγουμε γράφοντας την τελευταία γραμμή του παραπάνω υπολογισμού.

Ένα εύλογο ερώτημα είναι τι κάνει η X_n καθώς το $n \to \infty$. Συγκλίνει σε κάποιον σταθερό αριθμό; Για παράδειγμα στο 1/2 που θα σήμαινε ότι τελικά επέρχεται μια ισορροπία στον αριθμό των μπαλών στην κάλπη. Αυτό το οποίο συμβαίνει είναι ότι πράγματι η X_n συγκλίνει σε έναν αριθμό στο (0,1) αλλά αυτός είναι τυχαίος. Κάθε πραγματοποίηση της διαδικασίας δίνει διαφορετικό αριθμό. Μπορεί να αποδειχθεί ότι με πιθανότητα 1, η ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει σε μια τυχαία μεταβλητή X η οποία έχει κατανομή Beta με παραμέτρους α/s, μ/s. Στην ειδική περίπτωση όπου α=μ=s=1, η οριακή τυχαία μεταβλητή έχει κατανομή την ομοιόμορφη στο (0,1).

Εφαρμογή: (Απλός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$)

Θεωρούμε διαδοχικές ρίψεις ενός τίμιου νομίσματος, δηλαδή το νόμισμα έχει την ίδια πιθανότητα να φέρει κορώνα και ίδια να φέρει γράμματα. Για την ν-οστή ρίψη, ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$X_n = \begin{cases} 1 & K \\ -1 & \Gamma \end{cases}$$

καθώς και την τυχαία μεταβλητή $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Ας θεωρήσουμε κι ένα παιχνίδι στο οποίο κάποιος παίκτης ποντάρει 1€ στο αν θα έρθει κορώνα ή γράμματα, δηλαδή κερδίζει 1€ εάν έρθει η επιλογή του και χάνει 1€ στην αντίθετη περίπτωση. Τότε η τυχαία μεταβλητή S_n μας δίνει την περιουσία του παίκτη κατά την χρονική στιγμή n. Έστω ότι ο παίκτης ξεκινάει με περιουσία 0. Ας ορίσουμε σαν $\mathscr{A}_n$ την σ-άλγεβρα που παράγεται από τις τυχαίες μεταβλητές $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Είναι φανερό ότι η τυχαία μεταβλητή X_{n+1} είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρες $\mathscr{A}_n$ έτσι ώστε:

$$E(S_{n+1} \,|\, \mathscr{A}_n) = E(S_n + X_{n+1} \,|\, \mathscr{A}_n) = E(S_n \,|\, \mathscr{A}_n) + E(X_{n+1} \,|\, \mathscr{A}_n)$$

$$= S_n + E(X_{n+1}) = S_n$$

Στο αποτέλεσμα παραπάνω χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι η τυχαία μεταβλητή S_n είναι $\mathscr{A}_n$-μετρήσιμη. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $E(S_m \,|\, \mathscr{A}_n) = S_n$ για $m > n$. Εφόσον $E(\,|\,S_n\,|\,) < \infty$, η S_n είναι μία martingale ως προς τη διήθηση $\mathscr{A}_n$. Αυτό μας λέει ότι ο παίκτης αναμένει να έχει στην $n+1$ ρίψη την ίδια περιουσία που είχε στη n ρίψη, δεδομένης της ιστορίας του παιχνιδιού.

Ας υποθέσουμε ότι το νόμισμα έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να φέρει γράμματα παρά κορώνα, δηλαδή $P(X_n = 1) \leq \frac{1}{2}$. Τότε, επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι $E(S_{n+1} \,|\, \mathscr{A}_n) \leq S_n$ και σύμφωνα με τον ορισμό, η S_n είναι supermartingale.

Αντιστοίχως, ας υποθέσουμε ότι έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να φέρει κορώνα παρά γράμματα, δηλαδή $P(X_n = 1) \geq \frac{1}{2}$. Τότε, αποδεικνύεται ότι $E(S_{n+1} \mid \mathscr{A}_n) \geq S_n$ και σύμφωνα με τον ορισμό, η S_n είναι submartingale.

Στις τρεις περιπτώσεις της τελευταίας εφαρμογής διασαφηνίζεται η ερμηνεία μίας martingale ως ένα τίμιο παιχνίδι ενώ μία supermartingale ή submartingale ερμηνεύεται ως μη τίμιο παιχνίδι.

4.6 Εφαρμογές Martingale σε συνεχή χρόνο

Η εφαρμογή που ακολουθεί είναι Θεώρημα [8]. Θα αποδείξουμε ότι η Κίνηση Brown είναι martingale ως προς τη διήθηση $\mathscr{F}$, όπως και ακόμη δύο ανελίξεις. Όπου $\mathscr{F}$ θα χρησιμοποιηθεί η διήθηση που παράγει η ίδια η Κίνηση Brown, δηλαδή:

$$\mathscr{F}_t := \sigma(\{B(s) : s \in [0,t]\})$$

Έστω B τυπική Κίνηση Brown. Οι ακόλουθες ανελίξεις είναι martingales.

i) $\{B(t) : t \geq 0\}$
ii) $\{B(t)^2 - t : t \geq 0\}$
iii) $\{e^{\lambda B(t) - \frac{\lambda^2}{2}t} : t \geq 0\}$

Απόδειξη:
i) Είναι προφανές ότι είναι προσαρμοσμένη.
Για $t > 0$, η $B(t)$ έχει την κατανομή $N(0,t)$ της οποίας η απόλυτη τιμή έχει πεπερασμένο ολοκλήρωμα και τέλος, για $0 \leq s < t$
$E(B(t) \,|\, \mathscr{F}_s) = E(B(t) - B(s) \,|\, \mathscr{F}_s) + E(B(s) \,|\, \mathscr{F}_s) = E(B(t) - B(s)) + B(s) = B(s)$.

Η δεύτερη ισότητα έπεται από την πρόταση 3.3.3, ενώ η τελευταία από το γεγονός ότι η $B(t) - B(s)$ έχει μέση τιμή 0 και η $B(s)$ είναι $\mathscr{F}_s$-μετρήσιμη.

ii) Ελέγχουμε μόνο την τρίτη απαίτηση του ορισμού τον martingale. Για $0 \leq s < t$, έχουμε

$$B(t)^2 - t = \{B(t) - B(s) + B(s)\}^2 - t = \{B(t) - B(s)\}^2 + B(s)^2 + 2\{B(t) - B(s)\}B(s) - t,$$

και παίρνοντας δεσμευμένη μέση τιμή υπολογίζουμε

$$E(B(t)^2 - t \,|\, \mathscr{F}_s) = E(\{B(t) - B(s)\}^2 + B(s)^2) + 2B(s)E(B(t) - B(s) \,|\, \mathscr{F}_s) - t$$
$$= t - s + B(s)^2 + 0 - t - B(s)^2 - s$$

Χρησιμοποιήσαμε ότι η $B(t) - B(s)$ είναι ανεξάρτητη της $\mathscr{F}_s$, έχει μέση τιμή 0 και διασπορά $t - s$. Επίσης, χρησιμοποιήσαμε ότι η $B(s)$ είναι $\mathscr{F}_s$-μετρήσιμη.

iii) Όμοια, όπως και στο προηγούμενο, παρατηρούμε ότι για $0 \leq s < t$ ισχύει:

$$e^{\lambda B(t) - \frac{\lambda^2}{2}t} = e^{\{\lambda B(t) - B(s)\}} e^{\lambda B(s) - \frac{\lambda^2}{2}t}.$$

Η $e^{\lambda B(s)}$ είναι $\mathscr{F}_s$-μετρήσιμη, ενώ η $B(t) - B(s)$ είναι ανεξάρτητη της $\mathscr{F}_s$ και ακολουθεί την κατανομή $N(0,t-s)$. Άρα

$$E(e^{\lambda B(t) - \frac{\lambda^2}{2}t} | \mathscr{F}_s) = E(e^{\lambda\{B(t) - B(s)\}}) e^{\lambda B(s) - \frac{\lambda^2}{2}t} = e^{\frac{\lambda^2}{2}(t-s) + \lambda B(s) - \frac{\lambda^2}{2}t = e^{\lambda B(s) - \frac{\lambda^2}{2}s}}.$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Sidney C. Port, Brownian motion and classical Potential Theory, Elsevier, 2012.

[2] D. Revuz and M. Yor, Continuous Martingales and Brownian Motion, 3rd edition, Springer, Berlin, 2004.

[3] Μ. Ανούσης, Α. Τσολομύτης, Ε. Φελουζής, Πραγματική Ανάλυση, Σάμος, 2014.

[4] Ο. Χρυσαφίνου, Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις, Εκδόσεις Σοφία, Β’ Έκδοση, 2012.

[5] Θ. Κάκουλος, Στοχαστικές Ανελίξεις, Εκδόσεις Αθανασόπουλος και Σία, Α’ Έκδοση, 1995.

[6] Τ. Παπαϊωάννου, Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Εκδόσεις Σταμούλη, 2000.

[7] S. M. Ross, Stochastic Processes Wiley and Sons, New York, 1996.

[8] Δ. Χελιώτης, Εισαγωγή στον Στοχαστικό Λογισμό, Εκδόσεις Κάλλιπος, 2020.

[9] Le Gall, Jean-François, Brownian motion, Martingales, and Stochastic Calculus. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing Switzerland, 2016.

[10] Δ. Φακίνος, Εισαγωγή στις Πιθανότητες και στις Στοχαστικές Διαδικασίες, Εκδόσεις Αθανασόπουλος και μία ΙΚΕ, 2011.

[11] D. Stirzaker, Tower Problems and Martingales, The Mathematical Scientist, 19, No I, 1994.

[12] D. Williams, Probability with Martingales, Cambridge University Press 1991.

[13] S. M. Ross, Stochastic Processes Wiley and Sons, New York, 1996.

[14] D. Strirzaker, Stochastic Processes and Models, Oxford University Press Inc., New York, 2005.

[15] Τ. Δάρας, Π. Σύψας (2003) Στοχαστικές Διαδικασίες, Εκδόσεις Ζήτη, 1η Έκδοση.