

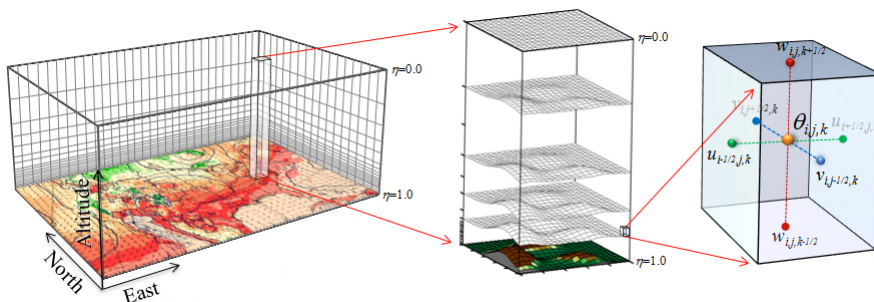


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
“ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ”

Διπλωματική εργασία

ΑΝΑΛΥΣΗ ΒΑΣΙΚΩΝ
ΜΕΤΕΩΡΟΛΟΓΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ



Ποντίκας Ηλίας

Επιβλέπων καθηγητής: Κουκουλογιάννης Βασίλειος

Σάμος
Οκτώβριος 2022

Στη σύζυγό μου

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής διπλωματικής μου εργασίας, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω όσους συνέβαλαν στην εκπόνηση της.

Κατ' αρχάς, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέπων καθηγητή Κουκουλογιάννη Βασίλειο για την εμπιστοσύνη και την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με τη συγκεκριμένη εργασία, για το αμείωτο ενδιαφέρον του και τις αμέτρητες ώρες συνεργασίας παρέχοντας μου τις γνώσεις του.

Επίσης, ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω στον υποψήφιο διδάκτορα Ιωάννη Σάμο για τις συμβουλευτικές υποδείξεις του και την υποστήριξη του σε θέματα εξισώσεων του μοντέλου και Matlab.

Κλείνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερος τον Φυσικό-Μετεωρολόγο κ. Λάμαρη Χρήστο για τη μύηση στην επιχειρησιακή και συνοπτική μετεωρολογία και τις αμέτρητες ώρες διδασκαλίας του, καθώς και τον κ. Καυκούλα Γιώργο για την παροχή αρχείων grib και τις υποδείξεις του στο software Metview του ECMWF.

Πρόλογος

Το πρώτο Κεφάλαιο είναι το εισαγωγικό. Περιγράφεται τι είναι η αριθμητική πρόγνωση, ποιες είναι οι πηγές αβεβαιοτήτων, γίνεται μια εισαγωγή στις καρτεσιανές και σφαιρικές συντεταγμένες, στα μοντέλα κατά Euler και κατά Lagrange, καθώς και αποδυναμώνεται μια χρήσιμη σχέση μεταξύ της παραγώγου d/dt και της μερικής παραγώγου $\partial/\partial t$.

Στο δεύτερο Κεφάλαιο αποδεικνύεται η εξίσωση κίνησης, η οποία είναι αποτέλεσμα του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα. Περιγράφονται οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω σε μια αέρια μάζα και επιπρόσθετα αποδεικνύονται οι αντίστοιχοι τύποι τους, που υπεισέρχονται στην εξίσωση κίνησης. Η εξίσωση κίνησης βρίσκεται στη διανυσματική της μορφή σε περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων και εν συνεχεία οι συνιστώσες της σε σφαιρικές συντεταγμένες, οι οποίες θα αποτελέσουν βάση για τις εξισώσεις του μοντέλου στο τέλος της εργασίας. Όλες οι αποδείξεις των εξισώσεων που υπεισέρχονται στο μοντέλο στο τέλος της εργασίας γίνονται κατά Euler, διότι το μοντέλο είναι Eulerian.

Το τρίτο Κεφάλαιο περιλαμβάνει την εξίσωση συνέχειας και την θερμοδυναμική εξίσωση, οι οποίες αποδεικνύονται. Επίσης, αναλύονται βασικά στοιχεία θερμοδυναμικής, όπως ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής, διαβατικές και αδιαβατικές διεργασίες, η καταστατική και υδροστατική εξίσωση καθώς και η δυναμική και η δυναμική εικονική θερμοκρασία.

Τέλος, στο τέταρτο Κεφάλαιο κατασκευάζεται αριθμητικό μοντέλο. Πρώτα, όμως, γίνεται μετατροπή των εξισώσεων που χρειαζόμαστε για το μοντέλο σε σφαιρικές-σπίση συντεταγμένες, κατασκευάζεται το κάθετο πλέγμα του μοντέλου, γίνεται η διακριτοποίηση των εξισώσεων με πεπερασμένες διαφορές και τέλος γράφεται ο κώδικας του μοντέλου σε Matlab. Ο κώδικας αποτελεί το βασικότερο κομμάτι αυτής της εργασίας, ενώ η θεωρία που προηγείται αυτού αποτελεί βιβλιογραφική ανασκόπηση κυρίως των (Holton, 2004) [1] και (Jacobson, 2005) [2].

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	9
1.1	Αριθμητική πρόγνωση καιρού	9
1.2	Καρτεσιανές και σφαιρικές συντεταγμένες	13
1.3	Μετεωρολογικά μοντέλα κατά Euler και κατά Lagrange	15
1.4	Ολική παραγωγή	16
2	Η Εξίσωση Κίνησης	19
2.1	Παραγωγή διανύσματος σε περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων	20
2.2	Η διανυσματική μορφή της εξίσωσης κίνησης σε περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων	22
2.2.1	Η δύναμη Coriolis	25
2.2.2	Η κεντρομόλος επιτάχυνση και η φυγόκεντρος δύναμη	29
2.2.3	Η δύναμη της βαρύτητας	31
2.2.4	Η δύναμη της βαροβαθμίδας	33
2.2.5	Η δύναμη ιζώδους	37
2.2.6	Τελική μορφή της εξίσωσης κίνησης	41
2.3	Οι συνιστώσες της εξίσωσης κίνησης σε σφαιρικές συντεταγμένες	42
3	Οι Εξισώσεις Συνέχειας και Θερμοδυναμικής	47
3.1	Η εξίσωση συνέχειας	47
3.2	Βασικά στοιχεία θερμοδυναμικής	49
3.2.1	Πρώτος Νόμος της Θερμοδυναμικής	49
3.2.2	Παράγοντες που επηρεάζουν τη θερμοκρασία	50
3.2.3	Η Καταστατική Εξίσωση	54
3.2.4	Η Υδροστατική Εξίσωση	56
3.2.5	Άλλες μορφές του πρώτου νόμου της θερμοδυναμικής	59
3.2.6	Δυναμική Θερμοκρασία	61
3.3	Η εξίσωση της θερμοδυναμικής ενέργειας	62
4	Κατασκευή Αριθμητικού Μοντέλου Καιρού	65
4.1	Μετατροπές κάθετης συντεταγμένης	65
4.1.1	Υδροστατικά και μη υδροστατικά μοντέλα	65
4.1.2	Σίγμα-πίεση ως κάθετη συντεταγμένη	67
4.1.3	Η εξίσωση συνέχειας σε σφαιρικές-σ-πίεση συντεταγμένες	68
4.1.4	Η θερμοδυναμική εξίσωση σε σφαιρικές-σ-πίεση συντεταγμένες	72
4.1.5	Η κάθετη συνιστώσα της εξίσωσης κίνησης σε σ-πίεση συντεταγμένες	72

4.1.6	Η εξίσωση κίνησης στο οριζόντιο επίπεδο σε σφαιρικές-σ-πίεση συντεταγμένες	73
4.2	Κατασκευή βασικού μετεωρολογικού μοντέλου	75
4.2.1	Κάθετο πλέγμα του μοντέλου	75
4.2.2	Οι Εξισώσεις σε Μορφή Πεπερασμένων Διαφορών	78
4.2.3	Ο Κώδικας του μοντέλου σε Matlab	87
Α' Διεθνής Τυπική Ατμόσφαιρα καθ' ύψος		109

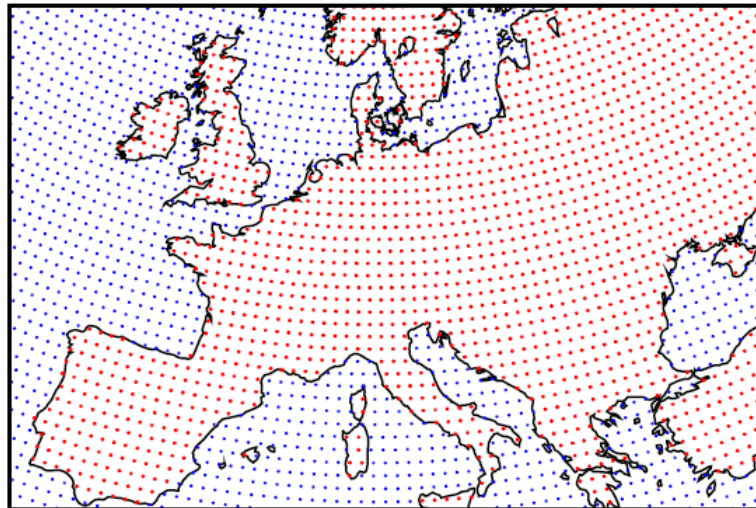
Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Αριθμητική πρόγνωση καιρού

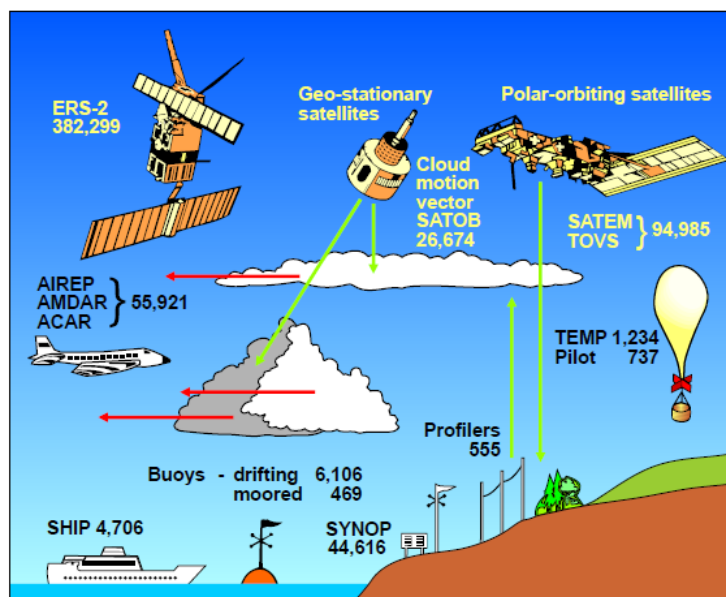
Η δυναμική μετεωρολογία είναι η μελέτη των ατμοσφαιρικών κινήσεων που σχετίζονται με τον καιρό και το κλίμα ενώ παρέχει τη θεωρητική βάση και μεθοδολογία για τον σύγχρονο τρόπο πρόβλεψης του καιρού [1]. Η ατμόσφαιρα της γης ουσιαστικά είναι ένα δυναμικό σύστημα και συνεπώς μπορούμε να προβλέψουμε μια μελλοντική της κατάσταση χρησιμοποιώντας αριθμητικές προσεγγίσεις στις εξισώσεις της δυναμικής έχοντας ως δεδομένο την αρχική της κατάσταση. Με άλλα λόγια, έχοντας τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες για τις μετεωρολογικές παραμέτρους, ένα σύνολο μερικών διαφορικών εξισώσεων πρόβλεψης καιρού και μια κατάλληλη μέθοδο ολοκλήρωσης ως προς το χρόνο, έχουμε τη δυνατότητα να λύσουμε το εν λόγω **πρόβλημα αρχικών τιμών** και να αποκτήσουμε τις μετεωρολογικές παραμέτρους σε μελλοντική χρονική στιγμή. Όσον αφορά στις αριθμητικές προσεγγίσεις, τα σύγχρονα αριθμητικά μοντέλα συνήθως διακριτοποιούν το χρόνο και τις μερικές παραγωγούς στην κάθετη διεύθυνση χρησιμοποιώντας τη **μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών** ενώ για να διακριτοποιήσουν τους όρους οριζόντιας μεταφοράς συνήθως χρησιμοποιούν, εκτός από τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, την ημιλαγκρατζιανή, τη spectral ή τη finite-element προσέγγιση [2]. Επίσης, η κατάσταση της ατμόσφαιρας περιγράφεται πάνω σε μια σειρά σημείων ενός πλέγματος και από ένα σύνολο μετεωρολογικών παραμέτρων όπως η θερμοκρασία, η ταχύτητα, η υγρασία και η πίεση, που "τοποθετούνται", υπολογίζονται στα σημεία αυτά.

Οι μετεωρολογικές παρατηρήσεις που πραγματοποιούνται παγκοσμίως (Σχήμα 1.2) χρησιμοποιούνται για να βρούμε την καλύτερη εκτίμηση των αρχικών συνθηκών του συστήματος. Μερικές από αυτές είναι οι ραδιοβολίσεις (μετεωρολογικά μπαλόνια) που πραγματοποιούνται σε συγκεκριμένα σημεία και συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Άλλα δεδομένα, όπως οι παρατηρήσεις από αεροσκάφη, πλοία ή δορυφόρους δεν προσδιορίζονται σε ένα συγκεκριμένο σημείο. Εν γένει, υπάρχει μεγάλη ποικιλία στο δίκτυο των παρατηρήσεων παρ' όλα αυτά στις ωκεάνιες περιοχές υπάρχει μικρότερη πυκνότητα στις παρατηρήσεις. Οι εν λόγω παρατηρήσεις δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατευθείαν για την αρχικοποίηση ενός μοντέλου αλλά τροποποιούνται με ένα δυναμικό και συνεχές τρόπο για την εξαγωγή ενός κατάλληλου συνόλου δεδομένων. Η διαδικασία αυτή



Σχήμα 1.1: Πλεγματικά σημεία πάνω από την Ευρώπη του μοντέλου ECMWF.[4]

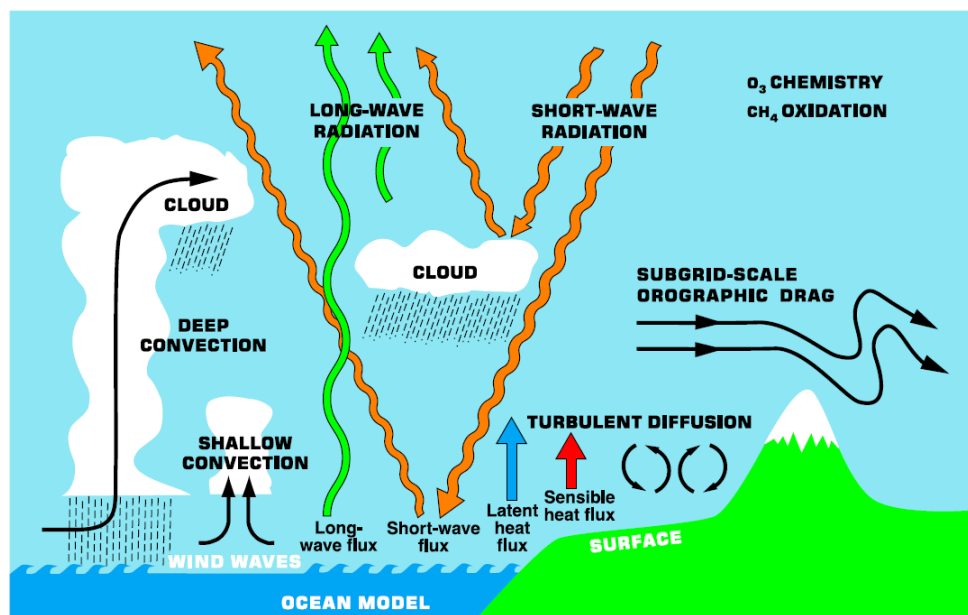
ονομάζεται **data assimilation**.



Σχήμα 1.2: Ο τύπος και ο αριθμός των παρατηρήσεων που χρησιμοποιούνται για να εκτιμήσουμε τις αρχικές συνθήκες της ατμόσφαιρας σε μια τυπική μέρα.[4]

Ο καιρός είναι ένα **χαοτικό σύστημα**. Μικρά σφάλματα στις αρχικές συνθήκες μεγαλώνουν ραγδαία επηρεάζοντας την προγνωσιμότητα. Επιπλέον, η προγνωσιμότητα επηρεάζεται και από τα σφάλματα του ίδιου του μοντέλου καθώς αποτελείται από προσεγγιστικές προσομοιώσεις των ατμοσφαιρικών διαδικασιών. Αυτές οι δύο πηγές αβεβαιότητας περιορίζουν την ικανότητα για ντετερμινιστικές προβλέψεις με απρόβλεπτο τρόπο, με μέρες υψηλής/χαμηλής ποιότητας πρόγνωσης να ακολουθούνται τυχαία από μέρες υψηλής/χαμηλής ποιότητας πρόγνωσης [4].

Ένας από τους πατέρες της θεωρίας του χάους είναι ο Edward Lorenz. Η λύση



Σχήμα 1.3: Σχηματική απεικόνιση των διάφορων φυσικών διεργασιών που προσομοιώνονται στο μοντέλο ECMWF.[4]

του 3-διαστάσεων συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων του Lorenz:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

απεικονίζει τη διασπορά των αρχικών συνθηκών μετά από κάποια πεπερασμένα μικρά χρονικά βήματα. Τα διαφορετικά αρχικά σημεία μπορούν να θεωρηθούν ως διαφορετικές εκτιμήσεις της πραγματικής κατάστασης του συστήματος (ή αλλιώς διαφορετικές αρχικές συνθήκες) και η χρονική εξέλιξη καθενός από αυτά ως πιθανές προγνώσεις. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω κώδικα MATLAB, ενώ την αρχική χρονική στιγμή τα δύο διαφορετικά σημεία (εκτιμήσεις της πραγματικής κατάστασης) είναι πολύ κοντά το ένα στο άλλο, με την πάροδο του χρόνου αποκλίνουν με διαφορετικούς ρυθμούς σχηματίζοντας **πεταλούδα**. Έτσι, ανάλογα με το σημείο που επιλέγεται να περιγράψει την χρονική εξέλιξη του συστήματος, θα έχουμε και διαφορετική πρόγνωση [4].

Listing 1.1: Matlab Script

```

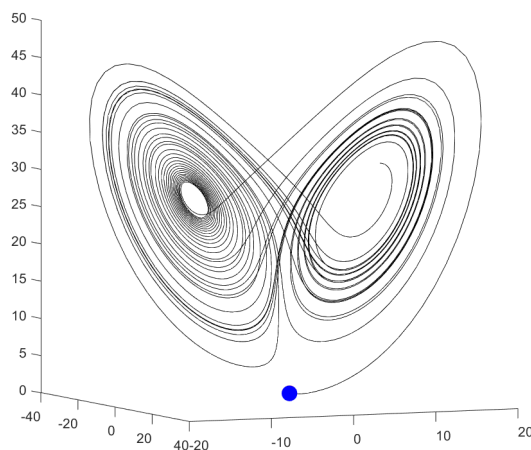
1 clear;
2 clc;
3 clf;
4
5 X01=[1;1;1];%1h troxia
6 X02=[1;1;1.01];%2h troxia
7 t0=0;tend=500;dt=0.01;
8 t=t0:dt:tend;
9 nt=length(t);

```

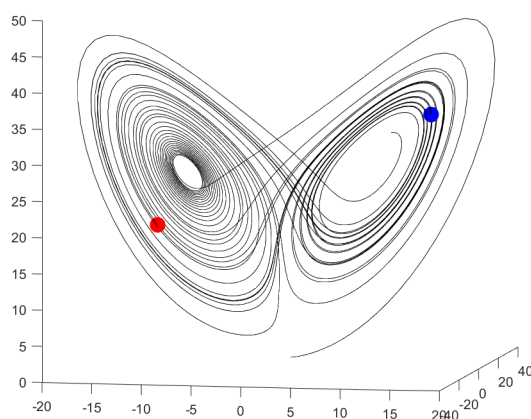
```

10
11 opt=[];
12 opt.RelTol=1e-10;opt.AbsTol=1e-10;
13 [~,X1]=ode45(@f,t,X01,opt);%1h troxia
14
15 [~,X2]=ode45(@f,t,X02,opt);%2h troxia
16
17 x1=X1(:,1);y1=X1(:,2);z1=X1(:,3);%1h troxia
18 x2=X2(:,1);y2=X2(:,2);z2=X2(:,3);%2h troxia
19 % x1=X1(:,1);y1=X1(:,2);z1=X1(:,3);%1h troxia
20 % x2=X2(:,1);y2=X2(:,2);z2=X2(:,3);%2h troxia
21
22 figure(1)
23 plot3(x1,y1,z1);
24 hold on;
25 plot3(x2,y2,z2,'r');
26 hold off;
27
28 figure(2)
29 for i=1:5:nt
30     figure(2)
31     plot3(x1(1:4000),y1(1:4000),z1(1:4000),'k');%
32         sxediasmos petaloudas
33     hold on;
34     plot3(x1(i),y1(i),z1(i),'.b','MarkerSize',40);%
35         sxediasmos shmeiou prwths troxias
36     %hold on;
37     plot3(x2(i),y2(i),z2(i),'.r','MarkerSize',40);%
38         sxediasmos shmeiou deuterhs troxias
39     hold off;
40     axis([-20 20 -40 40, 0, 50])%oria sxediou
41     %pause(0.1);
42     drawnow;
43 end
44
45 function dX=f(~,X)
46 x=X(1);
47 y=X(2);
48 z=X(3);
49 s=10;r=28;b=8/3;
50 dx=s*(y-x);
51 dy=x*(r-z)-y;
52 dz=x*y-b*z;
53 dX=[dx;dy;dz];
54 end

```



Σχήμα 1.4: Θέση των δύο διαφορετικών σημείων (πολύ μικρή η διαφορά τους) την αρχική χρονική στιγμή.



Σχήμα 1.5: Θέση των δύο διαφορετικών σημείων μετά από 2000 χρονικά βήματα $dt = 0.01$ s.

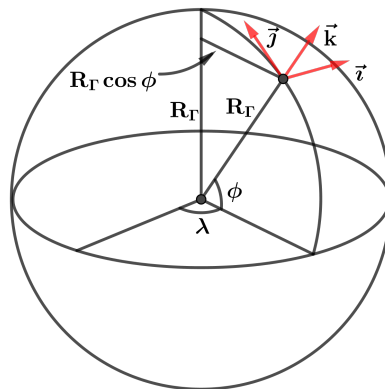
Στην παρούσα εργασία μελετάται μια αριθμητική λύση των εξισώσεων της δυναμικής στις τρεις χωρικές διαστάσεις χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες (με κάθετη ανεξάρτητη μεταβλητή τη σ-πίεση) και τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών. Έτσι, αναπτύσσουμε ένα βασικό περιοχικό αριθμητικό μοντέλο πρόβλεψης καιρού μέσω του MATLAB.

1.2 Καρτεσιανές και σφαιρικές συντεταγμένες

Στη μετεωρολογία πολλά ατμοσφαιρικά μοντέλα χρησιμοποιούν καρτεσιανές ή σφαιρικές συντεταγμένες. **Οι καρτεσιανές (ορθογώνιες) συντεταγμένες** χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση της ροής του αέρα, για παράδειγμα στις πόλεις, στα σύννεφα, στις καταιγίδες. Για μικρές αποστάσεις (< 500 km) η καμπυλότητα της γης είναι σχετικά μικρή και η επιφάνεια συχνά χωρίζεται σε ορθογώνια για μοντελοποίηση. Στις μεγάλες αποστάσεις η καμπυλότητα εμποδίζει τον ακριβή διαχωρισμό της επιφάνειας της γης σε ένα συνεχές σύνολο ορθογωνίων. Παρ' όλα αυτά, σε τέτοιες αποστάσεις είναι δυνατόν η γη να περιβάλλεται από ένα σύνολο ορθογωνίων πλεγμάτων,

κάθε ένα από τα οποία έχει διαφορετική αρχή, μήκος και πλάτος και όπου κάθε πλέγμα επικαλύπτει μερικώς άλλα πλέγματα. Αυτή είναι η ιδέα πίσω από το διεθνές εγκάρσιο σύστημα συντεταγμένων Mercator (UTM), το οποίο είναι ένα είδος καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Έτσι, στο σύστημα συντεταγμένων UTM ξεχωριστά αλληλεπικαλυπτόμενα πλέγματα ορθογωνίων τοποθετούνται πάνω από τον πλανήτη [2].

Για προσομοιώσεις μοντέλων σε μικρές και μεγάλες κλίμακες η χρήση σφαιρικών συντεταγμένων είναι πιο φυσική από τη χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων. **Το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων** διαιρεί τη γη σε μήκη (μεσημβρινούς), τα οποία εκτείνονται από το νότιο μέχρι το βόρειο πόλο και γεωγραφικά πλάτη (παράλληλοι) που είναι παράλληλα τόξα που εκτείνονται δυτικά και ανατολικά σε όλη την υδρόγειο. Ο πρώτος μεσημβρινός, ο οποίος διέρχεται από το Greenwich του Ηνωμένου Βασιλείου έχει οριστεί ότι έχει μήκος 0° . Οι μεσημβρινοί εκτείνονται προς τα δυτικά μέχρι το γεωγραφικό μήκος -180° ($180W$) και προς τα ανατολικά μέχρι το γεωγραφικό μήκος $+180^\circ$ ($180E$). Ο ισημερινός ορίζεται ότι έχει γεωγραφικό πλάτος 0° . Οι παράλληλοι εκτείνονται από γεωγραφικό πλάτος -90° ($90S$) έως γεωγραφικό πλάτος $+90^\circ$ ($90N$). Στο πλέγμα των σφαιρικών συντεταγμένων η απόσταση των μεσημβρινών κατά ζώνες είναι μέγιστη στον ισημερινό και συγχλίνει στο 0 στους δύο πόλους. Πιο συγκεκριμένα, όλοι οι μεσημβρινοί καταλήγουν σε ένα συγκεκριμένο σημείο στους πόλους. Έτσι οι πόλοι θεωρούνται σημειακοί. Η παρουσία αυτής της ιδιαιτερότητας δημιουργεί ένα πρόβλημα οριακής κατάστασης όταν το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων χρησιμοποιείται για παγκόσμια ατμοσφαιρική ή ωκεανική (στην περίπτωση του βόρειου πόλου εφόσον δεν υπάρχει ωκεανός στο νότιο πόλο) προσομοίωση. Το κύριο πλεονέκτημα του σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων είναι ότι λαμβάνει υπόψιν την καμπυλότητα της γης δεδομένου ότι η γη δεν απέχει πολύ από το σχήμα της σφαίρας [2].



Σχήμα 1.6: Σύμβολα σφαιρικών συντεταγμένων. R_Γ είναι η ακτίνα της γης, ϕ είναι το γεωγραφικό πλάτος, λ είναι το γεωγραφικό μήκος και \vec{i}_λ , \vec{j}_ϕ , \vec{k}_r είναι τα μοναδιαία διανύσματα στη διεύθυνση δύσης-ανατολής, στη διεύθυνση νότου-βορρά και στη κάθετη διεύθυνση, αντίστοιχα [2].

1.3 Μετεωρολογικά μοντέλα κατά Euler και κατά Lagrange

Οι ατμοσφαιρικές κινήσεις διέπονται από τρεις θεμελιώδεις φυσικές αρχές: τη διατήρηση της μάζας, τη διατήρηση της ορμής και τη διατήρηση της ενέργειας. Οι μαθηματικές σχέσεις που εκφράζουν αυτές τις φυσικές αρχές επεισέρχονται στα αριθμητικά μετεωρολογικά μοντέλα και μπορούν να παραχθούν θεωρώντας τις ποσότητες της μάζας, της ορμής και της ενέργειας σε δύο συστήματα αναφοράς, είτε στο σύστημα αναφοράς κατά Euler είτε στο σύστημα αναφοράς κατά Lagrange.

Στο **σύστημα αναφοράς κατά Lagrange** θεωρούμε ότι ένα σύνολο στοιχείων μάζας, των οποίων οι θέσεις μια αρχική στιγμή t_0 είναι γνωστές, απαρτίζουν την αέρια μάζα (ή τη μάζα οποιουδήποτε άλλου ρευστού). Είναι απαραίτητο να ακολουθήσουμε τη χρονική εξέλιξη της κίνησης κάθε στοιχείου μάζας. Τότε η κίνηση του στοιχείου μάζας περιγράφεται μέσω των συναρτήσεων $x(x_0, y_0, z_0, t)$, $y(x_0, y_0, z_0, t)$, $z(x_0, y_0, z_0, t)$ καθορίζουν τη θέση (x, y, z) του στοιχείου την χρονική στιγμή t όταν το στοιχείο τη χρονική στιγμή t_0 βρισκόταν στη (x_0, y_0, z_0) . Δηλαδή, οι ανεξάρτητες μεταβλητές x_0, y_0, z_0, t_0 προσδιορίζουν τη θέση του μετά από χρονικό διάστημα t . Στο σύστημα αναφοράς κατά Lagrange κάθε στοιχείο μάζας υπακούει στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα μέσω του οποίου καταλήγουμε σε μία διαφορική εξίσωση που μας δίνει την τροχιά του στοιχείου μάζας συναρτήσει του χρόνου και της αρχικής του θέσης, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως. Αυτό το σύστημα αναφοράς είναι χρήσιμο στην απλούστερη έκφραση των νόμων διατήρησης για ένα συγκεκριμένο στοιχείο μάζας του ρευστού.

Στο **σύστημα αναφοράς κατά Euler** ένα στοιχείο όγκου του ατμοσφαιρικού αέρα αποτελείται από ένα παραλληλεπίπεδο με πλευρές $\delta x, \delta y, \delta z$ των οποίων η θέση είναι καθορισμένη σύμφωνα με ένα σύστημα συντεταγμένων. Σε αυτό το σύστημα αναφοράς μελετάμε φυσικές ποσότητες όπως η μάζα, η ορμή, η ενέργεια, οι οποίες είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων του ατμοσφαιρικού αέρα στο χώρο και το χρόνου (αυτός ο τύπος στοιχείου όγκου χρησιμοποιήθηκε στην ενότητα (2.2.4)). Το σύστημα αναφοράς κατά Euler είναι πιο εύχρηστο στην επίλυση των περισσότερων προβλημάτων διότι σε αυτό το σύστημα οι μεταβλητές των φυσικών ποσοτήτων σχετίζονται μέσα από ένα σύνολο μερικών διαφορικών εξισώσεων στις οποίες οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι συντεταγμένες x, y, z και t . Στην παρούσα εργασία οι εξισώσεις αποδεικνύονται σε σύστημα αναφοράς κατά Euler, όπως και το μετεωρολογικό μοντέλο που κατασκευάζεται στο τέλος αυτής. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι αυτό που ακολουθεί, όπως το αναφέρει ο David G. Logan[6].

Παράδειγμα. *Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να μετρήσουμε τη θερμοκρασία του νερού σε ένα ποτάμι. Θα μπορούσε κανείς να σταθεί στην όχθη σε μια σταθερή θέση x (μετράμε την απόσταση από κάποιο σημείο αναφοράς $x = 0$), να βάλει στο νερό ένα θερμόμετρο και να μετρήσει με αυτό τον τρόπο τη θερμοκρασία του νερού $\theta(x, t)$ ως συνάρτηση του χρόνου και της θέσης x . Η συντεταγμένη x λέγεται συντεταγμένη Euler. Εναλλακτικά, θα μπορούσε κανείς να μετρήσει τη θερμοκρασία από μια βάρκα που παρασύρεται από το ρεύμα του ποταμού. Για αυτόν το σκοπό, κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$, μετράμε τη θέση h κάθε σωματιδίου του ρευστού. Ο αριθμός h αποτελεί την "ετικέτα" του, η οποία μένει σταθερή καθώς το σωματίδιο κινείται λόγω της ροής. Το αποτέλεσμα της μέτρησης της θερμοκρασίας του σωματιδίου h κατά τη στιγμή t δίνει μια συνάρτηση $\Theta(h, t)$ του χρόνου t και της συντεταγμένης Lagrange.*

Προκειμένου, λοιπόν, να εφαρμοστούν οι μαθηματικές σχέσεις σε ένα σύστημα αναφοράς κατά Euler, είναι απαραίτητο να εξαχθεί μία σχέση μεταξύ του ρυθμού μεταβολής μιας φυσικής ποσότητας που εκφράζει μία ιδιότητα του ατμοσφαιρικού αέρα, όπως αυτή καταγράφεται από έναν παρατηρητή που ακολουθεί την κίνηση και το ρυθμό μεταβολής σε ένα συγκεκριμένο σημείο. Δηλαδή, απαιτείται μία σχέση μεταξύ της ολικής (ή Λαγκραντζιανής) παραγώγου, που θα συμβολίζεται με d/dt , και της μερικής (ή Eulerian) παραγώγου $\partial/\partial t$ ως προς το χρόνο.

1.4 Ολική παραγωγή

Για να εξάγουμε μία σχέση μεταξύ της ολικής και της μερικής παραγώγου, είναι βολικό να αναφερθούμε σε μία συγκεκριμένη φυσική ποσότητα, όπως η θερμοκρασία T . Έστω ότι έχουμε ένα τμήμα αέρα στην τοποθεσία (x, y, z) , όπου $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ συναρτήσεις με ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο. Ακολουθώντας την κίνηση του τμήματος αέρα, μπορούμε να θεωρήσουμε την θερμοκρασία T ως συνάρτηση μόνο του χρόνου και τότε ο ρυθμός μεταβολής της θα είναι η ολική παράγωγος dT/dt . Έτσι, για να συσχετίσουμε την ολική παράγωγο με το ρυθμό μεταβολής σε ένα συγκεκριμένο σημείο θεωρούμε ότι η θερμοκρασία μετράται σε ένα μπαλόνι που κινείται με την βοήθεια του ανέμου. Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή t_0 στο σημείο (x_0, y_0, z_0) η θερμοκρασία είναι T_0 . Εάν το μπαλόνι κινηθεί από το σημείο (x_0, y_0, z_0) έως το σημείο $(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z)$ σε χρονικό διάστημα δt , τότε η καταγραφόμενη μεταβολή της θερμοκρασίας δT μπορεί να εκφραστεί ως σειρά Taylor ως εξής: [1]

$$\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) \delta t + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \delta x + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) \delta y + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) \delta z + \dots \quad (1.1)$$

Γνωρίζουμε, επίσης, ότι:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta T}{\delta t} = \frac{dT}{dt}$$

Οπότε, αν διαιρέσουμε κατά μέλη την εξίσωση (1.1) με δt , τότε για $\delta t \rightarrow 0$ η (1.1) θα δίνει το ρυθμό μεταβολής του T ως προς έναν παρατηρητή που ακολουθεί την κίνηση και θα γράφεται ως εξής:

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) \frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) \frac{dz}{dt} \quad (1.2)$$

Όμως, έχουμε ότι:

$$\frac{dx}{dt} \equiv u, \quad \frac{dy}{dt} \equiv v, \quad \frac{dz}{dt} \equiv w,$$

όπου u, v, w είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας στις x, y, z κατευθύνσεις αντίστοιχα. Και άρα η εξίσωση (1.2) ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) + \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}\right) \quad (1.3)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dt} - \vec{U} \cdot \vec{\nabla} T \quad (1.4)$$

όπου $\vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ το διάνυσμα της ταχύτητας και $\vec{\nabla}T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$ η βαθμίδα της θερμοκρασίας T . Ο όρος $-\vec{U} \cdot \vec{\nabla}T$ καλείται μεταφορά θερμότητας και εκφράζει την αλλαγή της τοπικής θερμοκρασίας λόγω της κίνησης του αέρα. Για παράδειγμα, εάν ο αέρας φυσάει από μία ψυχρότερη σε μία θερμότερη περιοχή, τότε η βαθμίδα της θερμοκρασίας είναι θετική και ο όρος $-\vec{U} \cdot \vec{\nabla}T$ είναι αρνητικός. Το αρνητικό πρόσημο (-) δηλώνει ότι έχουμε ψυχρή μεταφορά και μείωση της τοπικής θερμοκρασίας. Αντίθετα, εάν ο αέρας φυσάει από μία θερμότερη σε μία ψυχρότερη περιοχή, τότε η βαθμίδα της θερμοκρασίας είναι αρνητική και ο όρος $-\vec{U} \cdot \vec{\nabla}T$ είναι θετικός. Το θετικό πρόσημο (+) δηλώνει ότι έχουμε θερμή μεταφορά και αύξηση της τοπικής θερμοκρασίας. Η ερμηνεία της εξίσωσης (1.4) είναι ότι ο τοπικός ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας ως προς έναν παρατηρητή που ακολουθεί την κίνηση συν το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας λόγω μεταφοράς.

Σημειωτέον ότι η σχέση μεταξύ ολικής και μερικής παραγώγου χρησιμοποιώντας τη θερμοκρασία (εξίσωση 1.3) ευσταθεί και για οποιαδήποτε άλλη φυσική ποσότητα.

Παράδειγμα. [1] Έστω ότι ένα πλοίο πλέει ανατολικά στο Αιγαίο πέλαγος κατά την κατεύθυνση του x . Γνωρίζουμε ότι η πίεση επιφανείας στην κατεύθυνση του x μειώνεται 3 hpa ανά 180 km. Το πλοίο κινείται με ταχύτητα μέτρου $u = 10 \text{ km/h}$ και η ένδειξη του βαρομέτρου του δείχνει πτώση της πίεσης 1 hpa ανά 3 ώρες. Ποια είναι η μεταβολή της πίεσης σε ένα συγκεκριμένο νησί από το οποίο διέρχεται το πλοίο;

Από την εξίσωση (1.3) έχουμε ότι η μεταβολή της πίεσης σε ένα συγκεκριμένο νησί είναι:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{dP}{dt} - u \frac{\partial P}{\partial x} = \left(-\frac{1 \text{ hpa}}{3 \text{ h}} \right) - 10 \text{ km/h} \cdot \left(-\frac{3 \text{ hpa}}{180 \text{ km}} \right) = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) \text{ hpa/h}$$

$$\text{και άρα } \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{6} \text{ hpa/h}$$

Κεφάλαιο 2

Η Εξίσωση Κίνησης

Όλες οι ατμοσφαιρικές κινήσεις διέπονται από βασικούς νόμους της ρευστομηχανικής και θερμοδυναμικής, οι οποίοι είναι: οι νόμοι κίνησης του Νεύτωνα, οι νόμοι διατήρησης της μάζας, της ορμής, της στροφορμής και της ενέργειας. Από αυτούς τους νόμους έπονται και οι εξισώσεις που επεισέρχονται στα αριθμητικά μετεωρολογικά μοντέλα καθώς και στο μοντέλο στο τέλος της παρούσας εργασίας. Σε αυτό το κεφάλαιο σκοπός είναι να αναπτύξουμε την εξίσωση κίνησης του αέρα και να περιγράψουμε τους όρους της.

Η εξίσωση κίνησης παράγεται μέσω του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα και περιγράφει την κίνηση του ατμοσφαιρικού αέρα. Σε ένα μετεωρολογικό μοντέλο χρησιμοποιείται για την πρόβλεψη του διανύσματος της ταχύτητας του ανέμου (μέτρο ταχύτητας και κατεύθυνση) [2].

Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός σώματος είναι ανάλογος με το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν σε αυτό και αντιστρόφως ανάλογος με τη μάζα του σώματος ως προς έναν παρατηρητή που ακολουθεί την κίνηση σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Αν συμβολίσουμε με $\frac{d\vec{U}_\alpha}{dt}$ την παράγωγο ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς τότε η μαθηματική έκφραση που εφαρμόζεται στην ατμόσφαιρα είναι:

$$\vec{a}_i = \frac{d_\alpha \vec{U}_\alpha}{dt} = \frac{1}{m} \sum \vec{F} \quad (2.1)$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειώσουμε πότε ένα σύστημα αναφοράς λέγεται αδρανειακό και πότε μη αδρανειακό. Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, λοιπόν, όταν μία αέρια μάζα βρίσκεται σε ηρεμία ή κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, ως προς ένα σύστημα αναφοράς που βρίσκεται εκτός του συστήματος γης-ατμόσφαιρας, και δεν ασκούνται σε αυτή εξωτερικές δυνάμεις, τότε θα συνεχίσει να βρίσκεται σε ηρεμία ή να εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση αντίστοιχα. Αυτό το σύστημα αναφοράς ονομάζεται **αδρανειακό** και η αντίστοιχη κίνηση ονομάζεται αδρανειακή. Αντίθετα, ένα σύστημα αναφοράς το οποίο είτε επιταχύνεται είτε περιστρέφεται ονομάζεται **μη αδρανειακό**.

Εφαρμόζοντας, όμως, το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα (όπως και τους άλλους νόμους της δυναμικής της ατμόσφαιρας) είναι φυσικό να χρησιμοποιούμε ένα **γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς** το οποίο να είναι ακίνητο σχετικά με την περιστρεφόμενη γη (δηλαδή να περιστρέφεται μαζί της). Είναι φανερό, ωστόσο, ότι μία αέρια μάζα που

βρίσκεται σε ηρεμία ή εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ως προς ένα γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς, στην πραγματικότητα δεν βρίσκεται σε ηρεμία ή δεν εκτελεί ομαλή κίνηση αντίστοιχα αλλά επιταγχύνεται, σε σχέση με ένα σύστημα αναφοράς που βρίσκεται εκτός του συστήματος γης-ατμόσφαιρας. Συνεπώς, ένα γεωκεντρικό (περιστροφόμενο) σύστημα αναφοράς είναι μη αδρανειακό.

Η συνισταμένη των δυνάμεων στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης (2.1) αποτελείται από το άθροισμα της δύναμης βαροβαθμίδας \vec{F}_p , της δύναμης τριβής \vec{F}_T και της δύναμης βαρύτητας \vec{F}_g οι οποίες ονομάζονται **πραγματικές δυνάμεις**. Ωστόσο, τις κινήσεις των αέριων μαζών τις λαμβάνουμε υπόψιν ως προς ένα γεωκεντρικό (μη αδρανειακό) σύστημα αναφοράς ενώ ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα εφαρμόζεται σε αδρανειακά συστήματα. Για να εφαρμοστεί, λοιπόν, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα σε ένα γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς θα πρέπει οι επιδράσεις της επιτάχυνσης των συντεταγμένων να λαμβάνονται υπόψιν και ο πιο ικανοποιητικός τρόπος για να γίνει αυτό είναι να εισάγουμε τις λεγόμενες **φαινόμενες δυνάμεις**. Οι τελευταίες είναι όροι αδρανειακής αντίδρασης που εμφανίζονται λόγω της επιτάχυνσης των συντεταγμένων και για ένα σύστημα συντεταγμένων που περιστρέφεται ομαλά είναι η φυγόκεντρος δύναμη και η δύναμη Coriolis. Αυτό που μόλις περιγράψαμε θεωρητικά θα το αποδείξουμε παρακάτω μετατρέποντας την εξίσωση κίνησης σε ένα περιστροφόμενο σύστημα συντεταγμένων.

2.1 Παραγωγή διανύσματος σε περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων

Η μετατροπή της εξίσωσης κίνησης σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων, λοιπόν, απαιτεί μία σχέση μεταξύ της (ολικής) παραγώγου ενός διανύσματος ως προς ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων και της αντίστοιχης (ολικής) παραγώγου σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων[1].

Για να εξαχθεί αυτή η σχέση, θεωρούμε ένα αυθαίρετο διάνυσμα \vec{A} του οποίου οι καρτεσιανές συνιστώσες με κάθετη ανεξάρτητη μεταβλητή το ύψος σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι:

$$\vec{A} = \hat{e}_x A'_x + \hat{e}_y A'_y + \hat{e}_z A'_z$$

ενώ οι συνιστώσες του με κάθετη ανεξάρτητη μεταβλητή το ύψος σε περιστρεφόμενες συντεταγμένες με γωνιακή ταχύτητα $\Omega = 2\pi \text{ rad}/86164 \text{ s} = 7.292 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ (όπου Ω είναι η γωνιακή ταχύτητα της γης και 86164 s ο χρόνος σε δευτερόλεπτα που χρειάζεται η γη για να κάνει μια πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα της) είναι:

$$\vec{A} = \vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{k} A_z$$

Τότε, η αδρανειακή παράγωγος d_α/dt (ως προς έναν παρατηρήτη εκτός του συστήματος γης-ατμόσφαιρας) του \vec{A} στις καρτεσιανές συντεταγμένες θα είναι:

$$\frac{d_\alpha \vec{A}}{dt} = \hat{e}_x \frac{dA'_x}{dt} + \hat{e}_y \frac{dA'_y}{dt} + \hat{e}_z \frac{dA'_z}{dt} \quad (2.2)$$

ενώ στις περιστρεφόμενες συντεταγμένες θα είναι:

$$\frac{d_{\alpha}\vec{A}}{dt} = \vec{i} \frac{dA_x}{dt} + \vec{j} \frac{dA_y}{dt} + \vec{k} \frac{dA_z}{dt} + \frac{d_{\alpha}\vec{i}}{dt} A_x + \frac{d_{\alpha}\vec{j}}{dt} A_y + \frac{d_{\alpha}\vec{k}}{dt} A_z \quad (2.3)$$

όπου, $\frac{d\vec{A}}{dt} \equiv \vec{i} \frac{dA_x}{dt} + \vec{j} \frac{dA_y}{dt} + \vec{k} \frac{dA_z}{dt}$ η παράγωγος του \vec{A} ως προς έναν παρατηρητή που ακολουθεί την κίνηση εντός του περιστρεφόμενου συστήματος αναφοράς ενώ οι τρεις τελευταίοι όροι της εξίσωσης εμφανίζονται διότι οι διευθύνσεις των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ αλλάζουν συνεχώς κατεύθυνση καθώς η γη περιστρέφεται. Συνεπώς προκύπτει η σχέση:

$$\frac{d_{\alpha}\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d_{\alpha}\vec{i}}{dt} A_x + \frac{d_{\alpha}\vec{j}}{dt} A_y + \frac{d_{\alpha}\vec{k}}{dt} A_z \quad (2.4)$$

Για το μοναδιαίο διάνυσμα \vec{i} από ανάπτυγμα Taylor έχουμε:

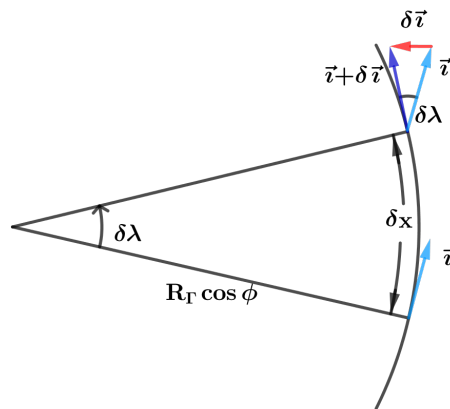
$$\delta\vec{i} = \frac{\partial\vec{i}}{\partial\lambda} \delta\lambda + \frac{\partial\vec{i}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\vec{i}}{\partial z} \delta z \quad (2.5)$$

Για την περιστροφή μιας μάζας ως προς κατακόρυφο άξονα, όμως, έχουμε ότι: $\delta\lambda = \Omega \cdot \delta t$, $\delta\phi = 0$, $\delta z = 0$ και άρα η εξίσωση (2.5) έπεται ότι:

$$\delta\vec{i} = \frac{\partial\vec{i}}{\partial\lambda} \delta\lambda \Rightarrow \frac{\delta\vec{i}}{\delta t} = \left(\frac{\partial\vec{i}}{\partial\lambda} \right) \left(\frac{\delta\lambda}{\delta t} \right) \quad \text{και για } \delta t \rightarrow 0 \text{ θα ισχύει } \frac{d_{\alpha}\vec{i}}{dt} = |\vec{\Omega}| \frac{\partial\vec{i}}{\partial\lambda} \quad (2.6)$$

Γνωρίζουμε ότι το μήκος τόξου ενός κύκλου ισούται με την ακτίνα επί την γωνία που βαίνει σε αυτό. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (2.1), η γωνία $\delta\lambda$ είναι αρκετά μικρή και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι βαίνει σε τόξο και άρα έχουμε ότι

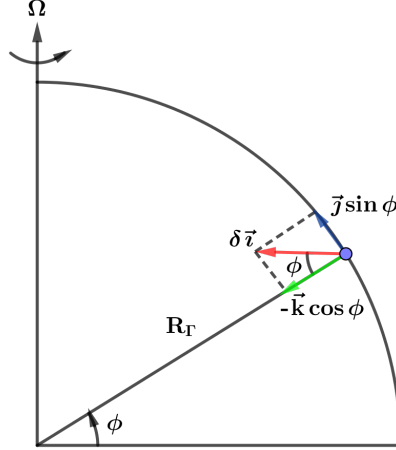
$$|\delta\vec{i}| = |\vec{i}| \cdot \delta\lambda \Rightarrow |\delta\vec{i}| = \delta\lambda \quad (2.7)$$



Σχήμα 2.1: Μερική παράγωγος του μοναδιαίου διανύσματος \vec{i} ως προς το λ (κατεύθυνση παραλλήλου)[1].

Επίσης, όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα (2.2), ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \delta \vec{r} &= \vec{j} |\delta \vec{r}| \sin \phi - \vec{k} |\delta \vec{r}| \cos \phi \stackrel{(2.7)}{\Rightarrow} \delta \vec{r} = \vec{j} \delta \lambda \sin \phi - \vec{k} \delta \lambda \cos \phi \\ &\stackrel{\cdot 1/\delta \lambda}{\Rightarrow} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \lambda} = \vec{j} \sin \phi - \vec{k} \cos \phi \end{aligned} \quad (2.8)$$



Σχήμα 2.2: Ανάλυση του διανύσματος $\delta \vec{r}$ του σχήματος (2.1) σε δύο συνιστώσες σε γεωγραφικό πλάτος ϕ : η μία έχει κατεύθυνση το βόρειο πόλο και η άλλη είναι κάθετη στην επιφάνεια της γης με φορά προς το κέντρο της [1].

Ωστόσο, από το παρακάτω σχήμα (2.3) είναι φανερό ότι

$$\vec{\Omega} = \vec{j} |\vec{\Omega}| \cos \phi + \vec{k} |\vec{\Omega}| \sin \phi$$

και άρα η (2.6) συνεπάγεται λόγω της (2.8) ότι:

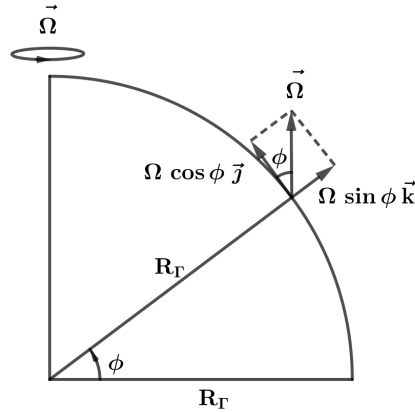
$$\frac{d_{\alpha} \vec{r}}{dt} = |\vec{\Omega}| (\vec{j} \sin \phi - \vec{k} \cos \phi) = \begin{vmatrix} \vec{r} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & |\vec{\Omega}| \cos \phi & |\vec{\Omega}| \sin \phi \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (2.9)$$

Με όμοιο τρόπο μπορεί ναδειχθεί ότι: $d_{\alpha} \vec{j} / dt = \vec{\Omega} \times \vec{j}$, $d_{\alpha} \vec{k} / dt = \vec{\Omega} \times \vec{k}$. Επομένως, η παράγωγος d_{α} / dt σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς και η παράγωγος d / dt σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς για ένα αυθαίρετο διάνυσμα \vec{A} συσχετίζονται με την έκφραση:

$$\frac{d_{\alpha} \vec{A}}{dt} = \frac{d \vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A} \quad (2.10)$$

2.2 Η διανυσματική μορφή της εξίσωσης κίνησης σε περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων

Για να μετατρέψουμε τη μαθηματική έκφραση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα (2.1) σε περιστρεφόμενες συντεταγμένες, θα πρέπει πρώτα να βρούμε μία σχέση μεταξύ της



Σχήμα 2.3: Συνιστώσες του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας της γης

απόλυτης ταχύτητας \vec{U}_α και της ταχύτητας \vec{U} ως προς ένα σύστημα περιστρεφόμενων συντεταγμένων. Τη σχέση αυτή θα την εξάγουμε εφαρμόζοντας τη (2.10) για το διάνυσμα θέσης \vec{r} ενός τμήματος αέρα στην περιστρεφόμενη γη:

$$\frac{d_\alpha \vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (2.11)$$

Όμως, $d_\alpha \vec{r}/dt \equiv \vec{U}_\alpha$ και $d\vec{r}/dt \equiv \vec{U}$ και άρα η (2.11) γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\vec{U}_\alpha = \vec{U} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (2.12)$$

που σημαίνει ότι η απόλυτη ταχύτητα ενός τμήματος αέρα στην περιστρεφόμενη γη ισούται με την ταχύτητα του σχετικά με τη γη συν την ταχύτητα λόγω περιστροφής της γης.

Τώρα, εφαρμόζοντας πάλι τη (2.10) για το διάνυσμα της απόλυτης ταχύτητας \vec{U}_α έχουμε:

$$\frac{d_\alpha \vec{U}_\alpha}{dt} = \frac{d\vec{U}_\alpha}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{U}_\alpha \quad (2.13)$$

Αντικαθιστώντας τη (2.12) στο δεξί μέλος της (2.13) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d_\alpha \vec{U}_\alpha}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{U} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) + \vec{\Omega} \times (\vec{U} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \frac{d\vec{U}}{dt} + \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{U} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \frac{d\vec{U}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{U} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

όπου το $\vec{\Omega}$ υποθέτουμε ότι είναι σταθερό. Επίσης, μπορούμε να αναλύσουμε το \vec{r} σε δύο συνιστώσες: μια κάθετη στον άξονα περιστροφής $\vec{r}_\perp = \vec{R}$ και μία παράλληλη \vec{r}_\parallel . Σε αντίθεση με την κάθετη, η παράλληλη συνιστώσα δεν συνεισφέρει στο εξωτερικό γινόμενο. Το \vec{R} είναι διάνυσμα κάθετο στον άξονα περιστροφής της γης με μέτρο ίσο με την απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Έτσι,

$$\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) = -\Omega^2 \vec{R} \quad (2.15)$$

Άρα, η (2.14) λόγω της (2.15) γράφεται ως εξής:

$$\frac{d_{\alpha}\vec{U}_{\alpha}}{dt} = \frac{d\vec{U}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{U} - \Omega^2 \vec{R} \quad (2.16)$$

Η παραπάνω εξίσωση εκφράζει ότι η επιτάχυνση όπως παρατηρείται η κίνηση σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς $\vec{a}_i = d_{\alpha}\vec{U}_{\alpha}/dt$ ισούται με το ρυθμό μεταβολής της σχετικής με τη γη ταχύτητας ως προς ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς $\vec{a}_L = d\vec{U}/dt$ συν την επιτάχυνση Coriolis $\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \times \vec{U}$ εξαιτίας της κίνησης σε περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς συν την κεντρομόλο επιτάχυνση $\vec{a}_\kappa = -\Omega^2 \vec{R}$ λόγω της περιστροφής των συντεταγμένων. Συνεπώς, αποδείξαμε την ανάγκη εισαγωγής των φαινόμενων δυνάμεων που περιγράψαμε παραπάνω θεωρητικά.

Πιο συγκεκριμένα, από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς οι επιδράσεις της κεντρομόλου και της Coriolis φαίνονται ως επιταχύνσεις, ενώ από ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς φαίνονται ως φαινόμενες δυνάμεις [2].

Παράδειγμα. Όταν ένα αυτοκίνητο διανύει μια καμπυλόγραμμη τροχιά, ένας επιβάτης μέσα σε αυτό είναι σε μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς και νιώθει να "σπρώχνεται" προς τα έξω από τη φαινόμενη φυγόκεντρο δύναμη η οποία είναι ίση και αντίθετη με την κεντρομόλο επιτάχυνση πολλαπλασιασμένη με τη μάζα. Από την άλλη μεριά ένας παρατηρητής σε ένα αδρανειακό περιβάλλον βλέπει τον επιβάτη και το αυτοκίνητο να επιταγχύνονται προς τα μέσα καθώς διανύουν την καμπυλόγραμμη τροχιά. Κατά αντιστοιχία, όταν η γη περιστρέφεται, ένας παρατηρητής σε ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς, όπως είναι η επιφάνεια της γης, βλέπει τη γη και την ατμόσφαιρα να εκτοπίζονται μακριά από τον άξονα περιστροφής της γης από τη φαινόμενη φυγόκεντρο δύναμη. Από την άλλη μεριά, ένας παρατηρητής σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, όπως είναι το διάστημα, βλέπει τη γη και την ατμόσφαιρα να επιταγχύνονται προς τα μέσα [2].

Έτσι, επειδή στα ατμοσφαιρικά μοντέλα συνήθως χρησιμοποιούμε ένα περιστρεφόμενο (μη αδρανειακό) σύστημα αναφοράς στην εξίσωση κίνησης θεωρούμε ως επιτάχυνση μόνο την επιτάχυνση ακολουθώντας την κίνηση στο περιστρεφόμενο σύστημα ενώ την επιτάχυνση Coriolis τη λαμβάνουμε ως δύναμη Coriolis ανά μονάδα μάζας ($\vec{a}_c = \vec{F}_c/m$) και την κεντρομόλο επιτάχυνση ως τη φυγόκεντρο δύναμη ανά μονάδα μάζας ($\vec{a}_\kappa = -\vec{F}_{\phi\nu\gamma}/m$) [2].

Εάν υποθέσουμε, επίσης, ότι οι μόνες πραγματικές δυνάμεις που ασκούνται στην ατμόσφαιρα είναι η δύναμη της βαροβαθμίδας \vec{F}_p , της βαρύτητας \vec{F}_{g^*} και της τριβής \vec{F}_T , όπως αναφέραμε και παραπάνω, μπορούμε να ξαναγράψουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα (2.1) με τη βοήθεια της (2.16) ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{d_{\alpha}\vec{U}_{\alpha}}{dt} &= \frac{1}{m} \sum \vec{F} \stackrel{(2.16)}{\Rightarrow} \frac{d\vec{U}}{dt} + \frac{\vec{F}_c}{m} - \frac{\vec{F}_{\phi\nu\gamma}}{m} = \frac{1}{m} (\vec{F}_p + \vec{F}_{g^*} + \vec{F}_T) \\ &\Rightarrow \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{1}{m} (\vec{F}_p + \vec{F}_{g^*} + \vec{F}_T - \vec{F}_c + \vec{F}_{\phi\nu\gamma}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Η εξίσωση (2.17) αποτελεί την εξίσωση κίνησης σχετικά με ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς και είναι βασική στη δυναμική μετεωρολογία. Η ερμηνεία της είναι ότι η

επιτάχυνση ακολουθώντας την κίνηση σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς ισούται με το άθροισμα της δύναμης βαροβαθμίδας, της βαρύτητας, της δύναμης της τριβής, της δύναμης Coriolis και της φυγόκεντρου δύναμης. Στη συνέχεια θα αναλύσουμε τις προαναφερόμενες δυνάμεις και θα αποδείξουμε τις μαθηματικές εκφράσεις τους.

2.2.1 Η δύναμη Coriolis

Όπως έχει αναφερθεί και προηγουμένως, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα εκφρασμένος σε ένα σύστημα συντεταγμένων που περιστρέφεται με τη γη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψουμε την ισορροπία των δυνάμεων για ένα σώμα που βρίσκεται σε ηρεμία στην επιφάνεια της γης δεδομένου ότι συμπεριλαμβάνεται και η φαινόμενη φυγόκεντρος δύναμη. Εάν, ωστόσο, το σώμα βρίσκεται σε κίνηση σχετικά με την επιφάνεια της γης, μια πρόσθετη φαινόμενη δύναμη απαιτείται στην έκφραση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, η **δύναμη Coriolis**. Σε ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς η δύναμη Coriolis φαίνεται να 'σπρώχνει' τα σώματα προς τα δεξιά στο βόρειο ημισφαίριο και προς τα αριστερά στο νότιο ημισφαίριο της γης. Δηλαδή, στο βόρειο ημισφαίριο ενεργεί σε διεύθυνση στραμμένη κατά 90° προς τα δεξιά της διεύθυνσης της κίνησης και στο νότιο ημισφαίριο ενεργεί σε διεύθυνση στραμμένη κατά 90° προς τα αριστερά της διεύθυνσης της κίνησης του σώματος. Η δύναμη Coriolis είναι μόνο φαινόμενη και στην πραγματικότητα καμία δύναμη δεν ασκείται στο σώμα. Αυτό που συμβαίνει ουσιαστικά είναι ότι η περιστροφή της γης κάνει ένα κινούμενο σώμα στην επιφάνεια της να επιταχύνεται προς τα δεξιά στο βόρειο ημισφαίριο και προς τα αριστερά στο νότιο ημισφαίριο όταν παρατηρείται από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, όπως είναι το διάστημα. Αυτή η επιτάχυνση είναι μηδέν στον ισημερινό, μέγιστη κοντά στους πόλους και μηδέν για σώματα που βρίσκονται σε ηρεμία στην επιφάνεια της γης. Τα κινούμενα σώματα μπορεί να είναι π.χ οι άνεμοι, τα ωκεάνια ρεύματα και τα αεροπλάνα [2].

Η στροφορμή είναι ένα διανυσματικό μέγεθος που δίνεται από τη σχέση $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ και μας παρέχει μία μέτρηση της περιστροφής γνωρίζοντας το διάνυσμα της ορμής \vec{p} σχετικά με ένα σύστημα συντεταγμένων, η αρχή του οποίου καθορίζει το διάνυσμα θέσης \vec{r} . Να σημειώσουμε ότι από άποψη δυναμικής η πιο σημαντική συνιστώσα της στροφορμής είναι αυτή που είναι παράλληλη στον άξονα περιστροφής της γης, $\vec{L} = \vec{L} \cos \phi$. Αν υποθέσουμε ότι ένα τμήμα αέρα (ή οποιουδήποτε ρευστού) κινείται στο βόρειο ημισφαίριο της γης με κατεύθυνση το βόρειο πόλο (ή στο νότιο ημισφαίριο με κατεύθυνση το νότιο πόλο), τότε η απόστασή του $\vec{R} = \vec{r} \cos \phi$ από τον άξονα περιστροφής της γης μειώνεται, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα 2.4. Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής, θα πρέπει η ορμή και άρα η ταχύτητα u στη διεύθυνση δύσης-ανατολής να αυξάνεται καθώς μειώνεται η απόσταση, δηλαδή το τμήμα αέρα θα πρέπει να περιστρέφεται γρηγορότερα. Σε αυτό το σημείο, θα κάνουμε την υπόθεση ότι το διάνυσμα της ορμής στην ανατολική κατεύθυνση είναι αποτέλεσμα της ανατολικής κίνησης του αέρα με ταχύτητα u και της πλανητικής περιστροφής (της γραμμικής ταχύτητας $\vec{\Omega} \times \vec{R}$). Άρα, αν δεν υπάρχει ροπή στη διεύθυνση δύσης-ανατολής (δηλαδή δεν υπάρχει δύναμη βαροβαθμίδας ή δύναμη ιζώδους) από αρχή διατήρησης της στροφορμής έχουμε[1]: $\frac{dL}{dt} = 0$.

Αν $m = 1$ τότε η στροφορμή δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{L} = \vec{R} \times (\vec{u} + \vec{\Omega} \times \vec{R}) = \vec{R} \times \vec{u} + \vec{R} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R})$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ έχουμε ότι:

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{u} + R^2 \vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \vec{R}) \vec{R}$$

αλλά $\vec{\Omega} \perp \vec{R} \Rightarrow \vec{\Omega} \cdot \vec{R} = 0$ και $\vec{R} \times \vec{u} = Ru \sin 90^\circ = Ru$, όπου τα μέτρα R, u δεν είναι σταθερά, οπότε

$$\vec{L} = Ru + R^2 \vec{\Omega}$$

Άρα,

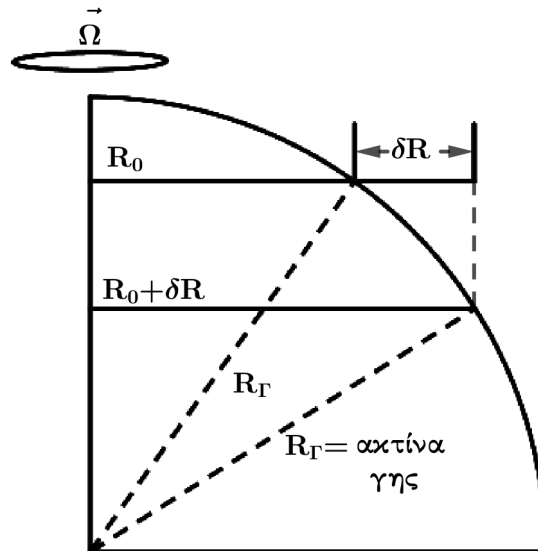
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{dR}{dt} u + R \frac{du}{dt} + 2R \frac{dR}{dt} \vec{\Omega} + R^2 \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$$

και αφού $\vec{\Omega} = \text{σταθερό}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{dR}{dt} u + R \frac{du}{dt} + 2R \frac{dR}{dt} \vec{\Omega} \quad (2.18)$$

και αφού $dL/dt = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} u + R \frac{du}{dt} + 2R \frac{dR}{dt} \vec{\Omega} &= 0 \\ \Rightarrow R \frac{du}{dt} + (u + 2R\vec{\Omega}) \frac{dR}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$



Σχήμα 2.4: Κατά την κίνηση ενός τμήματος αέρα στο βόρειο ημισφαίριο με κατεύθυνση το βόρειο πόλο της γης η απόστασή του από τον άξονα περιστροφής της μειώνεται κατά δR , γεγονός που συνεπάγεται αύξηση της ταχύτητας στη διεύθυνση της δύσης-ανατολής λόγω αρχής διατήρησης της στροφορμής.

Και άρα η (2.19) έπεται ότι:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{(u + 2\vec{\Omega}R)}{R} \frac{dR}{dt} \quad (2.20)$$

Επίσης, να σημειώσουμε ότι:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cos \phi) = \frac{dr}{dt} \cdot \cos \phi + r \cdot \frac{d \cos \phi}{dt} = w \cos \phi - v \sin \phi \quad (2.21)$$

όπου v και w είναι η βόρεια και η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας, αντίστοιχα.

Με αυτή τη σχέση η (2.20) γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{(2\Omega r \cos \phi + u)}{r \cos \phi} \cdot (w \cos \phi - v \sin \phi) = \left(-2\Omega - \frac{u}{r \cos \phi}\right) (w \cos \phi - v \sin \phi) \\ &= -(2\Omega \cos \phi)w + (2\Omega \sin \phi)v - \frac{uw}{r} + \frac{uv}{r} \tan \phi \end{aligned} \quad (2.22)$$

Οι δύο πρώτοι όροι στο δεξί μέλος της (2.22) αποτελούν τη συνιστώσα της δύναμης Coriolis στη διεύθυνση δύσης-ανατολής λόγω της κάθετης κίνησης και της κίνησης στη διεύθυνση βορρά-νότου, αντίστοιχα. Οι δύο τελευταίοι όροι εμφανίζονται λόγω της καμπυλότητας της γης. Επειδή, όμως, το r είναι πολύ μεγάλο αυτοί οι όροι είναι αρκετά μικροί ώστε να θεωρούνται αμελητέοι εκτός από την περίπτωση που το u παίρνει πολύ μεγάλες τιμές.

Υποθέτουμε τώρα ότι ένα σώμα τίθεται σε κίνηση από μία προωθητική δύναμη στην ανατολική κατεύθυνση. Σε αυτή την περίπτωση η στροφορμή δεν διατηρείται, αλλά η κεντρομόλος δύναμη που εμφανίζεται θα μας βοηθήσει να εξάγουμε τη συνιστώσα της δύναμης Coriolis στη διεύθυνση βορρά-νότου. Επειδή το σώμα περιστρέφεται γρηγορότερα από τη γη, η κεντρομόλος δύναμη θα είναι μεγαλύτερη από ότι θα ήταν σε ένα σώμα που βρισκόταν σε ηρεμία σχετικά με τη γη. Αυτή η αύξηση της κεντρομόλου δύναμης είναι:

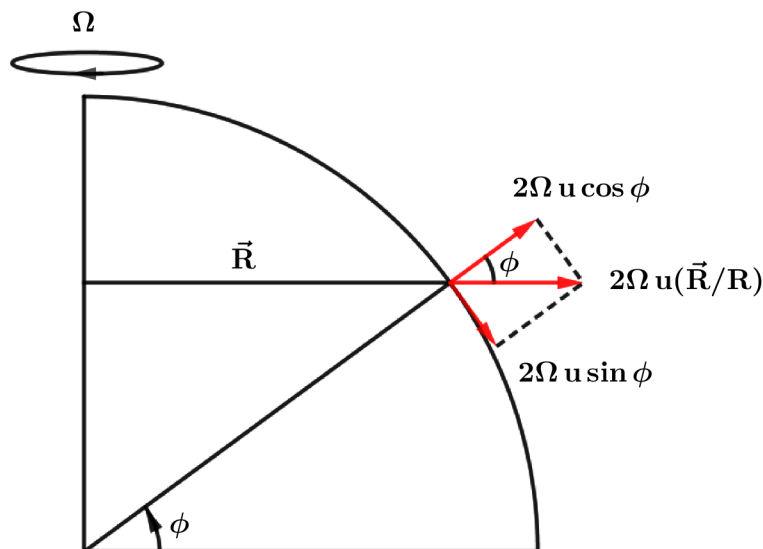
$$\left(\Omega + \frac{u}{R}\right)^2 \vec{R} - \Omega^2 \vec{R} = 2\Omega u \left(\frac{\vec{R}}{R}\right) + \frac{u^2}{R} \left(\frac{\vec{R}}{R}\right) \quad (2.23)$$

όπου $u/R = \omega$ η γωνιακή ταχύτητα του κινούμενου σώματος σχετικά με τη γη. Οι όροι στο δεξί μέλος αναπαριστούν απωθητικές δυνάμεις που ενεργούν προς τα έξω και κατά μήκος του διανύσματος \vec{R} (δηλαδή κάθετα στον άξονα περιστροφής). Οι συνιστώσες αυτών των δυνάμεων στη διεύθυνση βορρά-νότου και στη κάθετη διεύθυνση μπορούν να εξαχθούν αναλύοντας το διάνυσμα \vec{R} στις αντίστοιχες διευθύνσεις, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (2.5) και έτσι έχουμε[1]:

$$\frac{dv}{dt} = -2\Omega u \sin \phi - \frac{u^2}{R_{\Gamma} \cos \phi} \sin \phi = -2\Omega u \sin \phi - \frac{u^2}{R_{\Gamma}} \tan \phi \quad (2.24)$$

$$\frac{dw}{dt} = 2\Omega u \cos \phi + \frac{u^2}{R_{\Gamma} \cos \phi} \cos \phi = 2\Omega u \cos \phi + \frac{u^2}{R_{\Gamma}} \quad (2.25)$$

Οι δύο πρώτοι όροι στα δεξιά μέλη των παραπάνω εξισώσεων εκφράζουν τις συνιστώσες της δύναμης Coriolis στη διεύθυνση βορρά-νότου και στη κάθετη διεύθυνση



Σχήμα 2.5: Οι συνιστώσες της δύναμης Coriolis λόγω της κυκλικής κίνησης σε γεωγραφικό πλάτος ϕ .

αντίστοιχα για κίνηση στη διεύθυνση δύσης-ανατολής. Οι δεύτεροι όροι στα δεξιά μέλη εκφράζουν την επίδραση που έχει η καμπυλότητα της γης.

Για κινήσεις μεγαλύτερης κλίμακας οι όροι που εμφανίζονται λόγω καμπυλότητας προσεγγιστικά μπορούν να θεωρηθούν αμελητέοι. Ως εκ τούτου, από τις σχέσεις (2.22) και (2.24) έπεται ότι μία οριζόντια κίνηση (χωρίς κάθετη συνιστώσα) παράγει επιτάχυνση στην κάθετη διεύθυνση της κίνησης που δίνεται από τις σχέσεις:

$$\frac{du}{dt} = 2\Omega v \sin \phi = fv \quad (2.26)$$

$$\frac{dv}{dt} = -2\Omega u \sin \phi = -fu \quad (2.27)$$

όπου $f \equiv 2\Omega \sin \phi$ η παράμετρος Coriolis.

Έτσι, αποδείξαμε και μαθηματικά ότι η δύναμη Coriolis εκτρέπει τα κινούμενα σώματα προς τα δεξιά της διεύθυνσης της κίνησης στο βόρειο ημισφαίριο και προς τα αριστερά στο νότιο ημισφαίριο της γης. Η κάθετη συνιστώσα της δύναμης Coriolis στην (2.25) είναι πολύ μικρότερη από τη δύναμη της βαρύτητας και η μόνη επίδραση που έχει είναι μία ελάχιστη μεταβολή στο φαινόμενο βάρος που εξαρτάται από το αν το σώμα κινείται δυτικά ή ανατολικά.

Η δύναμη Coriolis θεωρείται αμελητέα για κινήσεις με κλίμακα χρόνου πολύ μικρότερη από την περίοδο περιστροφής της γης. Έτσι, η δύναμη Coriolis δεν είναι σημαντική για τη δυναμική, για παράδειγμα, των μεμονομένων συννέφων cumulus αλλά είναι απαραίτητη για να καταλάβουμε φαινόμενα μεγαλύτερης κλίμακας χρόνου, όπως είναι τα συνοπτικής κλίμακας συστήματα. Επίσης, η δύναμη Coriolis λαμβάνεται υπόψη και στον υπολογισμό των τροχιών βλημάτων μεγάλου βεληνεχούς[1].

Παράδειγμα. Υποθέτουμε ότι ένα βалиστικό βλήμα πυροδοτείται προς τα ανατολικά από περιοχή που έχει γεωγραφικό πλάτος $43^\circ N$ όπου η παράμετρος Coriolis είναι $f = 10^{-4} s^{-1}$. Αν το βλήμα ταξιδέψει $x = 1000 \text{ km}$ με οριζόντια ταχύτητα $u_0 = 1000 \text{ m} \cdot$

2.2. ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΣΕ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ 29

$s^{-1} = 1 \text{ km} \cdot s^{-1}$, κατά πόσο το βλήμα εκτρέπεται από την ανατολική του πορεία λόγω της δύναμης Coriolis;

Ολοκληρώνοντας την (2.27) (όπου $u = u_0$) ως προς το χρόνο έχουμε:

$$\int \frac{dv}{dt} dt = \int -f u_0 dt \Rightarrow v = -f u_0 t$$

όπου υποθέτουμε ότι η εκτροπή είναι ικανοποιητικά μικρή ώστε να θεωρήσουμε ότι τα f και u_0 είναι σταθερές. Για να βρούμε τη συνολική μετατόπιση ολοκληρώνουμε πάλι ως προς το χρόνο και έχουμε:

$$\int_0^t v dt = \int_{y_0}^{y_0+\delta y} dy = -f u_0 \int_0^t t dt \Rightarrow \delta y = -\frac{1}{2} f u_0 t^2$$

Όμως, αφού η κίνηση γίνεται με σταθερή ταχύτητα ο χρόνος κίνησης θα είναι:

$$t = \frac{x}{u_0} = \frac{1000 \text{ km}}{1 \text{ km} \cdot s^{-1}} = 10^3 \text{ s}$$

Άρα, η συνολική μετατόπιση είναι:

$$\delta y = -10^{-4} s^{-1} \cdot 1 \text{ km} \cdot s^{-1} \cdot \frac{(10^3)^2 s^2}{2} = -\frac{10^2}{2} \text{ km} \Rightarrow \delta y = -50 \text{ km}$$

Οπότε, δείξαμε ότι το βλήμα εκτρέπεται προς τα νότια κατά 50km λόγω της δύναμης Coriolis.

Οι x και y συνιστώσες που δίνονται από τις σχέσεις (2.26) και (2.27) σε διανυσματική μορφή γράφονται

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{C_0} = -f \vec{k} \times \vec{V} \quad (2.28)$$

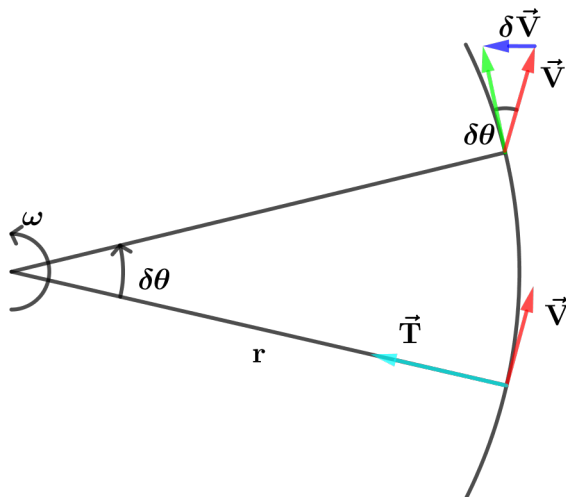
όπου $\vec{V} \equiv (u, v)$ είναι η οριζόντια ταχύτητα, \vec{k} είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα και ο δείκτης C_0 δείχνει ότι η επιτάχυνση οφείλεται αποκλειστικά στη δύναμη Coriolis. Αφού το $-\vec{k} \times \vec{V}$ είναι ένα διάνυσμα στραμμένο κατά 90° προς τα δεξιά του \vec{V} , η (2.28) δείχνει ξεκάθαρα το είδος της εκτροπής λόγω της δύναμης Coriolis. Να σημειώσουμε ότι η δύναμη Coriolis αλλάζει μόνο τη διεύθυνση της κίνησης και όχι το μέτρο της ταχύτητας και, όπως αποδείξαμε και στην ενότητα 2.2, $\vec{F}_c/m = 2\vec{\Omega} \times \vec{U}$.

2.2.2 Η κεντρομόλος επιτάχυνση και η φυγόκεντρος δύναμη

Για να παρουσιάσουμε τις ουσιαστικές πτυχές των μη αδρανειακών συστημάτων, θεωρούμε μια σφαίρα μάζας m προσκολλημένη στο ένα άκρο ενός τεντωμένου νήματος μήκους r , το άλλο άκρο του οποίου είναι σταθερό. Η μάζα διαγράφει κύκλο ακτίνας r με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. Ως προς ένα παρατηρητή σε ένα αδρανειακό περιβάλλον το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας είναι σταθερό, αλλά η διεύθυνση της

συνεχώς μεταβάλλεται με αποτέλεσμα το διάνυσμα της ταχύτητας της σφαίρας να μην είναι σταθερό.

Για να υπολογίσουμε την επιτάχυνση θεωρούμε $\delta\vec{V}$ τη μεταβολή της ταχύτητας στο χρονικό διάστημα δt κατά το οποίο η σφαίρα περιστρέφεται κατά γωνία $\delta\theta$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6: Η κεντρομόλος επιτάχυνση δίνεται από τον ρυθμό μεταβολής της διεύθυνσης του διανύσματος της ταχύτητας και έχει κατεύθυνση προς τον άξονα περιστροφής^[1].

Αφού $\delta\theta$ είναι και η γωνία ανάμεσα στα διανύσματα \vec{V} και $\vec{V} + \delta\vec{V}$, έχουμε ότι το μέτρο του διανύσματος $\delta\vec{V}$ είναι $\delta V = V\delta\theta$ ¹

Διαιρώντας με δt κατά μέλη και σημειώνοντας ότι όταν το $\delta t \rightarrow 0$ το $\delta\vec{V}$ έχει κατεύθυνση προς τον άξονα περιστροφής έχουμε:

$$\vec{a}_\kappa = \frac{d\vec{V}}{dt} = V \frac{d\theta}{dt} \left(-\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

Όμως, $V = \omega \cdot r$ και $\frac{d\theta}{dt} = \omega$, οπότε

$$\vec{a}_\kappa = \frac{d\vec{V}}{dt} = -\omega^2 \vec{r} \quad (2.29)$$

Είδαμε, λοιπόν, ότι ως προς ένα παρατηρητή σε αδρανειακό περιβάλλον η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη όπου η επιτάχυνση έχει κατεύθυνση προς τον άξονα περιστροφής και μέτρο ανάλογο του τετραγώνου της γωνιακής ταχύτητας επί την απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Αύτη η επιτάχυνση είναι η λεγόμενη **κεντρομόλος επιτάχυνση** και προκαλείται από την τάση του νήματος.

¹Επειδή θεωρούμε το δV αρκετά μικρό μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι μήκος τόξου και να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $s = \ell \cdot \delta\theta$, όπου s το μήκος τόξου, ℓ η ακτίνα και $\delta\theta$ η γωνία.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι παρατηρούμε την κίνηση σε ένα σύστημα συντεταγμένων που περιστρέφεται μαζί με τη σφαίρα. Σε αυτό το περιστρεφόμενο σύστημα η σφαίρα είναι στάσιμη, αλλά η τάση του νήματος εξακολουθεί να υφίσταται. Ωστόσο, για να εφαρμόσουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα που περιγράφει την κίνηση αναφορικά με το περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων, θα πρέπει να συμπεριλάβουμε και μια πρόσθετη φαινόμενη δύναμη, τη **φυγόκεντρο δύναμη**, η οποία εξισορροπεί την τάση του νήματος. Έτσι, η φυγόκεντρος δύναμη είναι η αδρανειακή αντίδραση της σφαίρας στην τάση του νήματος και είναι ίση και αντίθετη με την κεντρομόλο επιτάχυνση, δηλαδή

$$\frac{\vec{F}_{\text{φυγ}}}{m} = \omega^2 \vec{r}$$

Συνοψίζοντας, παρατηρώντας την κίνηση σε ένα σύστημα συντεταγμένων σε ένα αδρανειακό χώρο, η κινούμενη σφαίρα εμφανίζει ομαλή κεντρομόλο επιτάχυνση εξαιτίας της τάσης του νήματος. Συνεπώς, και τα κινούμενα αντικείμενα στην επιφάνεια της περιστρεφόμενης γης εμφανίζουν κεντρομόλο επιτάχυνση με κατεύθυνση τον άξονα περιστροφής της. Παρατηρώντας την κίνηση σε ένα σύστημα συντεταγμένων που κινείται μαζί με τη σφαίρα, η σφαίρα μένει στάσιμη ως προς αυτό και η τάση του νήματος εξισορροπείται από την φυγόκεντρο δύναμη. Οπότε και τα κινούμενα αντικείμενα στην επιφάνεια της περιστρεφόμενης γης "αισθάνονται", έχουν την τάση να τραβιούνται προς τα έξω λόγω της φαινόμενης φυγόκεντρος δύναμης.

Η φυγόκεντρος δύναμη που ασκείται στα σώματα που βρίσκονται στην περιστρεφόμενη γη δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\vec{F}_{\text{φυγ}}}{m} = \Omega^2 \vec{R} \quad (2.30)$$

όπου \vec{R} το διάνυσμα θέσης κάθετο στον άξονα περιστροφής με αρχή αυτόν και τέλος το σώμα στην ατμόσφαιρα της γης ενώ $\vec{\Omega} = \Omega \cos \phi \vec{j} + \Omega \sin \phi \vec{k}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της γης με μέτρο $\Omega = 2\pi/86164 \text{ sec} = 7,292 \text{ rad sec}^{-1}$. 86164 είναι ο αριθμός των δευτερολέπτων που χρειάζεται η γη να κάνει μια περιστροφή γύρω από τον εαυτό της (23 h 56 m 4 sec). Η φυγόκεντρος δύναμη είναι μέγιστη στον ισημερινό, όπου η συνιστώσα της γωνιακής ταχύτητας της γης που είναι κάθετη στον άξονα περιστροφής της είναι μέγιστη, και μηδενική στους πόλους, όπου η κάθετη συνιστώσα της γωνιακής ταχύτητας της γης είναι μηδενική. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η γη να διογκώνεται στον ισημερινό και να συμπιέζεται στους πόλους. Η ακτίνα της γης στον ισημερινό είναι αυτή τη στιγμή μεγαλύτερη κατά 21Km από ότι είναι στους πόλους, δίνοντας στη γη σχήμα ενός **πεπλατυσμένου σφαιροειδούς**[2].

2.2.3 Η δύναμη της βαρύτητας

Η ύπαρξη της ατμόσφαιρας οφείλεται στη δύναμη βαρύτητας, η οποία τη συγκρατεί κοντά στην επιφάνεια της γης και δεν επιτρέπει τη διαφυγή της προς το διάστημα. Η γη ασκεί σε κάθε συστατικό της ατμόσφαιρας ελκτική δύναμη που υπακούει στο νόμο της παγκόσμιας έλξης, ένα θεμελιώδη νόμο της φυσικής που ανακαλύφθηκε από τον Νεύτωνα.

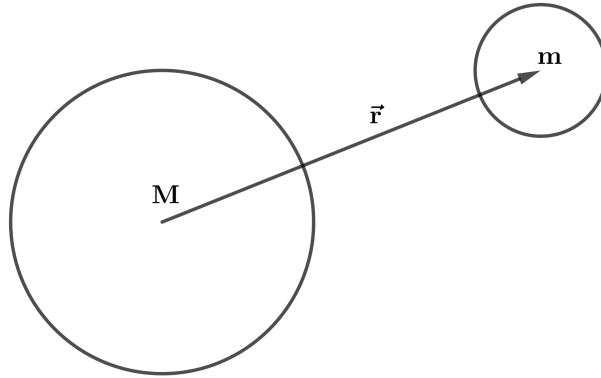
Ο Νόμος της Παγκόσμιας Έλξης. Δύο στοιχειώδεις μάζες στο σύμπαν έλκουν η μία την άλλη με δύναμη ανάλογη του γινομένου των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασής τους.

Έστω m, M οι στοιχειώδεις μάζες, r η μεταξύ τους απόσταση και ότι το διάνυσμα \vec{r} έχει κατεύθυνση προς το m όπως φαίνεται στο σχήμα 2.7. Τότε η δύναμη που ασκείται στη μάζα m από τη μάζα M δίνεται από τη μαθηματική έκφραση

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{e}_r \quad (2.31)$$

όπου $G = 6,67 \cdot 10^{-11} m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$ η παγκόσμια βαρυτική σταθερά.

Ο νόμος της παγκόσμιας έλξης, όπως εκφράζεται με την μαθηματική έκφραση (2.31), ισχύει για υποθετικές σημειακές μάζες. Επίσης, η σχέση (2.31) ισχύει και στην περίπτωση όπου έχουμε ομοιόμορφη κατανομή μάζας σε δύο σφαίρες των οποίων τα κέντρα μάζας τους απέχουν απόσταση r .



Σχήμα 2.7: Δύο σφαιρικές μάζες που τα κέντρα τους χωρίζονται από απόσταση $|\vec{r}|$ [1].

Έτσι, λοιπόν, αν θεωρήσουμε ότι η μάζα της γης είναι M_Γ , τότε η δύναμη της βαρυτικής έλξης ανά μονάδα μάζας στην ατμόσφαιρα της γης είναι:

$$\vec{g}^* = \frac{\vec{F}_{g^*}}{m} = -\frac{GM_\Gamma}{r^2}\hat{e}_r \quad (2.32)$$

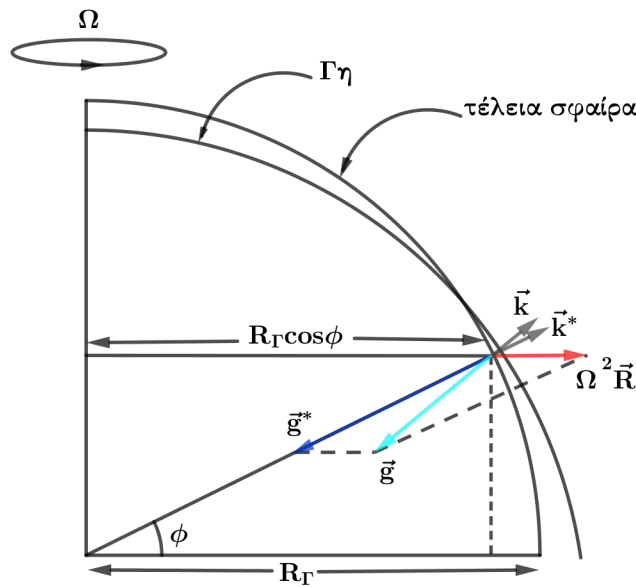
Η σχέση αυτή ορίζει το γήινο βαρυτικό πεδίο και ταυτίζεται με την επιτάχυνση της βαρύτητας.

Στη δυναμική μετεωρολογία είθισται να χρησιμοποιούμε το ύψος πάνω από την μέση στάθμη θάλασσας ως κατακόρυφη συντεταγμένη. Οπότε, εάν θεωρήσουμε ότι η μέση ακτίνα της γης είναι R_Γ , τότε, αγνοώντας την μικρή απόκλιση του σχήματος της γης από αυτό της σφαίρας, θα έχουμε ότι $|\vec{r}| = R_\Gamma + z$. Άρα η εξίσωση (2.32) ισοδύναμα γράφεται ως εξής[1]:

$$\vec{g}^* = -\frac{GM_\Gamma}{(R_\Gamma + z)^2}\hat{e}_r = -\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma^2 \left(1 + \frac{z}{R_\Gamma}\right)^2}\hat{e}_r \Rightarrow \frac{\vec{F}_{g^*}}{m} = \frac{\vec{g}_o^*}{\left(1 + \frac{z}{R_\Gamma}\right)^2}\hat{e}_r, \quad (2.33)$$

όπου $\vec{g}_o^* = -GM_\Gamma/R_\Gamma^2 \cdot \hat{e}_r$, η ένταση βαρυτικής έλξης στη μέση στάθμη θάλασσας. Για μετεωρολογικές εφαρμογές, $z \ll R_\Gamma$, έτσι ώστε με αμελητέο σφάλμα υποθέτουμε ότι $\vec{g}^* = \vec{g}_o$ και θεωρούμε τη δύναμη της βαρύτητας σταθερή.

Η δύναμη της βαρύτητας που περιγράψαμε μέχρι στιγμής ονομάζεται πραγματική δύναμη βαρύτητας. Η βαρύτητα που βιώνουμε, όμως, είναι ένας συνδυασμός της πραγματικής δύναμης της βαρύτητας και της φαινόμενης φυγόκεντρος δύναμης. Η **πραγματική δύναμη βαρύτητας** ενεργεί με κατεύθυνση προς το κέντρο της γης. Η **φαινόμενη φυγόκεντρος δύναμη**, η οποία ασκείται μακριά από τον άξονα περιστροφής της γης, μετατοπίζει ελαφρώς τη διεύθυνση και αλλάζει το μέτρο της πραγματικής δύναμης βαρύτητας. Το άθροισμα της πραγματικής δύναμης της βαρύτητας και της φαινόμενης φυγόκεντρος δύναμης μας δίνει **το διάνυσμα της ενεργούς βαρύτητας**, το οποίο ενεργεί κάθετα στην επιφάνεια της γης αλλά όχι προς το κέντρο της [2].



Σχήμα 2.8: Η ενεργός επιτάχυνση της βαρύτητας \vec{g} , η επιτάχυνση της πραγματικής βαρύτητας \vec{g}^* και η φυγόκεντρος δύναμη $\Omega^2 \vec{R}$ σε τόπο γεωγραφικού πλάτους ϕ . Τα \vec{k} και \vec{k}^* είναι τα κάθετα μοναδιαία διανύσματα στη γη (πεπλατυσμένο σφαιροειδές) και την τέλεια σφαίρα αντίστοιχα.

Η μαθηματική σχέση, λοιπόν, που συνδέει την ενεργό βαρύτητα με την πραγματική βαρύτητα και τη φυγόκεντρο δύναμη είναι η εξής:

$$\frac{\vec{F}_g}{m} = \frac{\vec{F}_{g^*}}{m} + \frac{\vec{F}_{\phi\psi\gamma}}{m} \Rightarrow \vec{g} = -g\vec{k} = \vec{g}^* + \Omega^2 \vec{R} \quad (2.34)$$

όπου \vec{k} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη κάθετη όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.8. Η ενεργός βαρύτητα ορισμένες φορές αναφέρεται και ως 'φαινόμενη βαρύτητα' και την θεωρούμε σταθερή ($g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$).

2.2.4 Η δύναμη της βαροβαθμίδας

Ορισμός 1. Πίεση είναι η δύναμη που εφαρμόζεται κάθετα σε μία επιφάνεια ανά μονάδα εμβαδού της επιφάνειας αυτής. Η μαθηματική έκφραση είναι:

$$p = \frac{F}{A}$$

Έτσι, η πίεση που ασκείται σε μία επιφάνεια στην ατμόσφαιρα είναι το μέτρο της κάθετης συνιστώσας των δυνάμεων που οφείλονται στις κρούσεις των μορίων του περιβάλλοντος πάνω στην επιφάνεια δια το εμβαδόν της επιφάνειας αυτής. Σε ένα μίγμα αερίων, όπως είναι η ατμόσφαιρα, η πίεση σε ένα σημείο ασκείται προς όλες τις κατευθύνσεις λόγω της τυχαίας μοριακής κίνησης. Στους μετεωρολογικούς χάρτες οι περιοχές της γης που έχουν την ίδια ατμοσφαιρική πίεση ενώνονται με καμπύλες γραμμών οι οποίες ονομάζονται **ισοβαρείς**. Όταν, όμως, δύο περιοχές της γης έχουν διαφορετική ατμοσφαιρική πίεση, τότε εμφανίζεται βαροβαθμίδα.

Ορισμός 2. Βαροβαθμίδα ονομάζεται η μεταβολή της ατμοσφαιρικής πίεσης σε διεύθυνση κάθετη επί των ισοβαρών στη μονάδα της γεωγραφικής απόστασης.

Η δύναμη, λοιπόν, που οφείλεται στη μεταβολή της πίεσης στο χώρο ονομάζεται **δύναμη βαροβαθμίδας**. Στην ατμόσφαιρα η δύναμη αυτή είναι υπεύθυνη για την έναρξη της κίνησης μίας αέριας μάζας. Επίσης, η δύναμη βαροβαθμίδας επιδρά στις αέριες μάζες για να τις μετακινήσει από περιοχές υψηλών σε περιοχές χαμηλών πιέσεων. Συνεπώς, η δύναμη βαροβαθμίδας έχει διεύθυνση κάθετη στις ισοβαρείς, φορά από τις υψηλότερες στις χαμηλότερες πιέσεις και μέτρο ανάλογο της απόστασης των ισοβαρών (Σχήμα 2.9).

Παράδειγμα. Εάν σε ένα αέριο τοποθετήσουμε ένα τοίχο με την πίεση στη μία πλευρά του να είναι διαφορετική από την πίεση στην άλλη, τότε θα εμφανιστεί μία δύναμη που θα επιταγχύνει τον τοίχο προς την πλευρά με την χαμηλότερη πίεση. Αυτή η δύναμη που σχετίζεται με τη διαφορά πιέσεων είναι η ουσία της δύναμης βαροβαθμίδας.

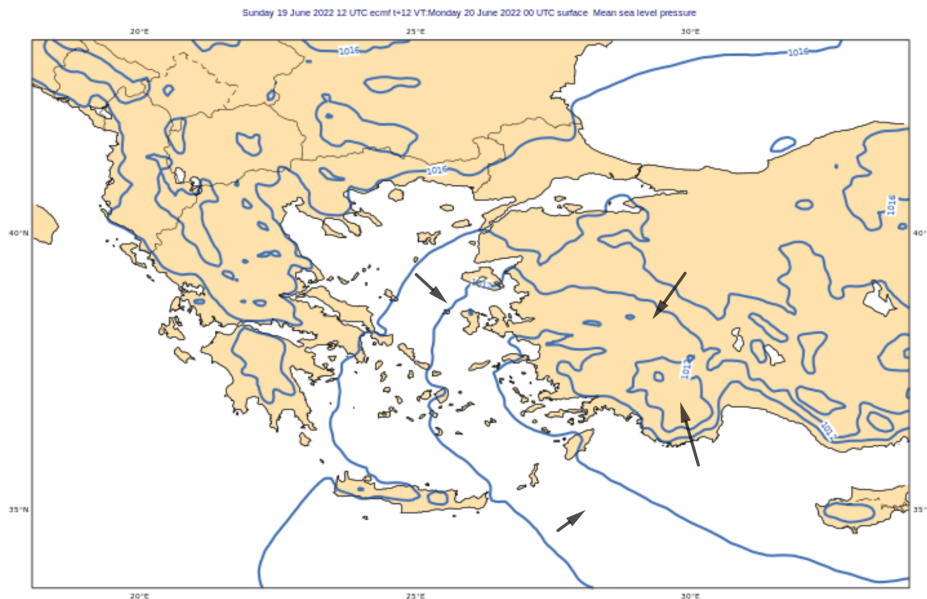
Αμέσως παρακάτω θα αποδειχθεί η μαθηματική έκφραση για την δύναμη βαροβαθμίδας σύμφωνα με τη μέθοδο του Holton.

Θεωρούμε ένα στοιχείο όγκου αέρα $dV = \delta x \delta y \delta z$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0, z_0)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 2.10.

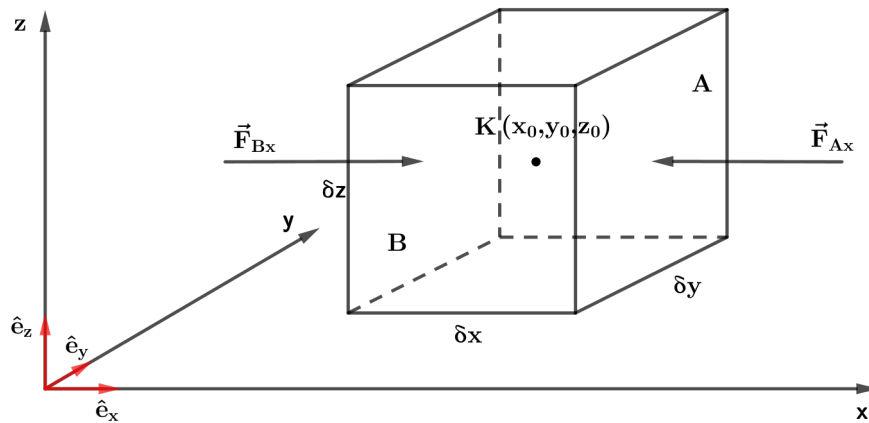
Το μέτρο της πίεσης που ασκείται κατά τη διεύθυνση του άξονα x μπορεί να γραφεί σαν συνάρτηση μιας μεταβλητής, $p = p(x)$. Έτσι, αν το μέτρο της πίεσης κατά τη διεύθυνση του άξονα x στο κέντρο K είναι $p_0 = p(x_0)$, τότε το μέτρο της πίεσης που ασκείται στον τοίχο A κατά τη διεύθυνση του άξονα x θα είναι $p(x_0 + \delta x/2)$ και θα μπορεί να εκφραστεί με ανάπτυγμα Taylor ως εξής:

$$\begin{aligned} p\left(x_0 + \frac{\delta x}{2}\right) &= p(x_0) + \frac{1}{1!} \left(x_0 + \frac{\delta x}{2} - x_0\right) \frac{\partial p}{\partial x}(x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(x_0 + \frac{\delta x}{2} - x_0\right)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_0) + \dots \\ \Rightarrow p\left(x_0 + \frac{\delta x}{2}\right) &= p(x_0) + \frac{1}{1!} \frac{\delta x}{2} \frac{\partial p}{\partial x}(x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\delta x}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_0) + \dots \quad (2.35) \end{aligned}$$

2.2. ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΣΕ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ 35



Σχήμα 2.9: Μετεωρολογικός χάρτης που απεικονίζει τις ισοβαρείς στη μέση στάθμη θάλασσας και τις δυνάμεις βαροβαθμίδας σχεδιασμένες με μαύρα βέλη. Δημιουργήθηκε με το software Metview του ECMWF.



Σχήμα 2.10: Η δύναμη βαροβαθμίδας που ασκείται σε ένα στοιχειώδη όγκο αέρα στην κατεύθυνση του x .

Αγνοώντας τους όρους μεγαλύτερης τάξης του δύο, από τον ορισμό 1 η δύναμη λόγω πίεσης που ασκείται στον τοίχο A κατά τη διεύθυνση του άξονα x είναι:

$$\vec{F}_{Ax} = -p \left(x_0 + \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z \hat{e}_x = - \left(p_0 + \frac{\delta x}{2} \frac{\partial p}{\partial x}(x_0) \right) \delta y \delta z \hat{e}_x$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{Ax} = - \left(p_0 + \frac{\delta x}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \delta y \delta z \hat{e}_x$$

Με όμοιο συλλογισμό βρίσκουμε ότι η δύναμη λόγω πίεσης που ασκείται στο τοίχο B

είναι:

$$\vec{F}_{Bx} = + \left(p_0 - \frac{\delta x}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \delta y \delta z \hat{e}_x$$

Συνεπώς, η συνισταμένη δύναμη που επιδρά πάνω στο στοιχειώδες όγκο αέρα κατά τη διεύθυνση του άξονα x είναι:

$$\begin{aligned} \vec{F}_x &= \vec{F}_{Ax} + \vec{F}_{Bx} = - \left(p_0 + \frac{\delta x}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \delta y \delta z \hat{e}_x + \left(p_0 - \frac{\delta x}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \delta y \delta z \hat{e}_x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{F}_x = - \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \hat{e}_x \end{aligned}$$

Όμως, από τον τύπο της πυκνότητας έχουμε ότι:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} \Rightarrow \delta x \delta y \delta z = \frac{m}{\rho}$$

Άρα, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\frac{\vec{F}_x}{m} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \hat{e}_x$$

Κάνοντας την αντίστοιχη εργασία για την δύναμη βαροβαθμίδας στους άξονες y και z εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{\vec{F}_y}{m} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \hat{e}_y \quad \text{και} \quad \frac{\vec{F}_z}{m} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \hat{e}_z$$

Οπότε η συνολική δύναμη βαροβαθμίδας που ασκείται ανά μονάδα μάζας δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\vec{F}_p}{m} = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{e}_z \right) = - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (2.36)$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, από την παραπάνω σχέση ότι:

- Η δύναμη βαροβαθμίδας είναι αντίθετη με το διάνυσμα της βαθμίδας της πίεσης, δηλαδή κατευθύνεται από τις υψηλότερες στις χαμηλότερες πιέσεις.
- Όσο ισχυρότερη είναι η βαθμίδα πίεσης τόσο ισχυρότερη είναι και η δύναμη βαροβαθμίδας.
- Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ισχύει ότι:

$$\vec{a}_p = \frac{\vec{F}_p}{m}$$

2.2.5 Η δύναμη ιξώδους

Κάθε πραγματικό ρευστό υπόκειται σε εσωτερική τριβή, που ονομάζεται **ιξώδες**, η οποία προβάλλει αντίσταση κατά τη ροή του και εμφανίζεται όταν η ταχύτητα του ρευστού μεταβάλλεται χωρικά. Όσον αφορά στον ατμοσφαιρικό αέρα, οι τυχαίες μοριακές κρούσεις επιτυγχάνουν μεταφορά ορμής από μόρια που βρίσκονται σε ταχύτερα κινούμενα στοιχεία όγκου αέρα σε μόρια που βρίσκονται σε κοντινά και βραδύτερα κινούμενα στοιχεία όγκου αέρα. Αυτή η ανταλλαγή ορμής μπορεί να εκφραστεί και ως **δύναμη ιξώδους** \vec{F}_T . Επίσης, η αύξηση της θερμοκρασίας έπεται την αύξηση του ιξώδους του αέρα καθώς οι υψηλές θερμοκρασίες αυξάνουν την κινητική ενέργεια των μορίων και άρα αυξάνεται η πιθανότητα κρούσης και μεταφορά ορμής από ένα μόριο του αέρα σε ένα άλλο.

Στη περίπτωση που τα μόρια του αέρα συγκρούονται με μία στάσιμη επιφάνεια μεταδίδουν ορμή σε αυτή με αποτέλεσμα την συνολική απώλεια ενέργειας των μορίων αυτών. Με αυτό τον τρόπο έχουμε διάχυση της κινητικής ενέργειας των μορίων του αέρα στο έδαφος λόγω του ιξώδους, η οποία συνεπάγεται μηδενική ταχύτητα ανέμου στο έδαφος. Πάνω από αυτό έχουμε λογαριθμική αύξηση της ταχύτητας του ανέμου. Στη περίπτωση απουσίας του ιξώδους η ταχύτητα του ανέμου αμέσως πάνω από το έδαφος θα ήταν μεγάλη [2].

Το ιξώδες του αέρα μπορεί να ποσοτικοποιηθεί από το **συντελεστή δυναμικού ιξώδους** μ . Πιο συγκεκριμένα, το 1893 ο Αυστραλός φυσικός, Sutherland, εξήγαγε μια σχέση μεταξύ του δυναμικού ιξώδους μ και της απόλυτης θερμοκρασίας T ενός ιδανικού αερίου. Αυτή η σχέση, που συχνά αναφέρεται και ως νόμος του Sutherland, βασίζεται στην κινητική θεωρία των ιδανικών αερίων και δίνει ακριβή αποτελέσματα με αμελητέο σφάλμα για μεγάλο εύρος θερμοκρασιών. Η μαθηματική έκφραση είναι η εξής:

$$\mu = \mu_{ref} \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_{ref} + S}{T + S}, \quad (2.37)$$

όπου T_{ref} είναι μια θερμοκρασία αναφοράς, μ_{ref} είναι το ιξώδες για την θερμοκρασία T_{ref} και S είναι η θερμοκρασία Sutherland.

Συχνά χρησιμοποιούμε, επίσης, και μια άλλη σχετική παράμετρο, το **κινηματικό ιξώδες** του αέρα, ν , το οποίο είναι ο λόγος του ιξώδους του αέρα μ προς την πυκνότητα του ρ .

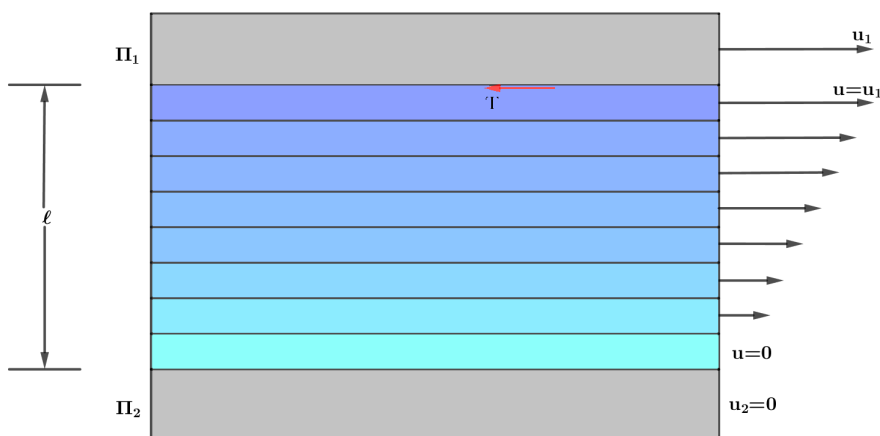
$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.38)$$

Η **δύναμη ιξώδους** \vec{F}_T σε αντίθεση με τη δύναμη βαροβαθμίδας που ενεργεί κάθετα, ενεργεί κατά μήκος της επιφάνειας του τμήματος αέρα. Η μεταβολή της ταχύτητας του ανέμου με το ύψος ονομάζεται διάτμηση του ανέμου (wind shear). Καθώς τα στρώματα αέρα που 'γλιστρούν' το ένα πάνω στο άλλο με διαφορετικές ταχύτητες λόγω της διάτμησης του ανέμου, το κάθε στρώμα θα ασκεί στο άλλο μια διατμητική τάση, παράλληλη στη διεύθυνση της κίνησης. **Διατμητική τάση** $\vec{\tau}$ είναι η δύναμη ιξώδους ανά μονάδα επιφάνειας, δηλαδή

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{F}_T}{A} \quad (2.39)$$

Ισοδύναμα έχουμε ότι η δύναμη ιξώδους δίνεται από τη σχέση $\vec{F}_T = \vec{\tau}A$.

Παράδειγμα. Έστω ότι έχουμε ένα ρευστό που περιορίζεται ανάμεσα σε δύο πλάκες, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η κάτω πλάκα Π_2 , που μπορεί να αντιπροσωπεύει το έδαφος, είναι ακίνητη ενώ η πάνω πλάκα Π_1 , που μπορεί να αντιπροσωπεύει μια αέρια μάζα, κινείται με ταχύτητα u_1 παράλληλα με την κάτω πλάκα. Η μεταξύ τους απόσταση είναι ℓ . Τα μόρια του αέρα που βρίσκονται σε επαφή με την κινούμενη πλάκα Π_1 θα κινούνται με την ταχύτητα της πλάκας, δηλαδή σε ύψος $z = \ell$ ο αέρας θα κινείται με ταχύτητα $u(\ell) = u_1$. Ενώ τα μόρια του αέρα που βρίσκονται σε επαφή με την κάτω πλάκα θα έχουν μηδενική ταχύτητα, δηλαδή σε ύψος $z = 0$ ο αέρας θα κινείται με ταχύτητα $u(0) = 0$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η μεταβολή της ταχύτητας με το ύψος θέτει σε ισχύ



μία διατμητική τάση που ενεργεί στην επιφάνεια της άνω πλάκας ώστε να δημιουργεί μια δύναμη τριβής που αντιστέκεται στην κίνησή της.

Στα Νευτώνια ρευστά υποθέτουμε ότι η διατμητική τάση εξαρτάται γραμμικά από την ταχύτητα του ρευστού (δηλ. $\partial u / \partial z$), το οποίο είναι μια καλή προσέγγιση για τον ατμοσφαιρικό αέρα. Εάν, η διάτμηση του ανέμου, για παράδειγμα, στον κάθετο άξονα z θέτει σε ισχύ μια δύναμη F_T στη διεύθυνση του άξονα x ανά μονάδα επιφάνειας του xy επιπέδου, τότε θα έχουμε διατμητική τάση

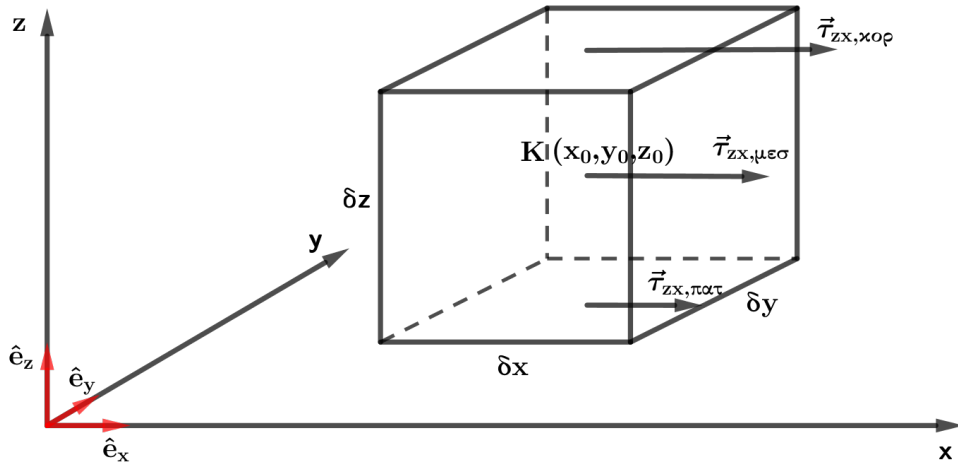
$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.40)$$

όπου μ είναι ο συντελεστής δυναμικού ιξώδους του αέρα 2.37.

Έστω ότι έχουμε ένα κυβικό στοιχειώδες τμήμα αέρα στο οποίο ασκείται διατμητική τάση στη κορυφή του και στο πάτο του, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 2.11

Εάν $\tau_{zx, \mu\epsilon\sigma} = \tau_{zx}(x_0, y_0, z_0)$ είναι η διατμητική τάση στο μέσο του κυβικού στοιχειώδους τμήματος αέρα, τότε η διατμητική τάση $\tau_{zx, \kappa\omicron\rho} = \tau_{zx}(x_0, y_0, z_0 + \delta z / 2)$ στην κορυφή του τμήματος μπορεί να εκφραστεί με ανάπτυγμα Taylor ως εξής:

$$\begin{aligned} \tau_{zx, \kappa\omicron\rho} = \tau_{zx}(x_0, y_0, z_0 + \frac{\delta z}{2}) &= \tau_{zx}(x_0, y_0, z_0) + \frac{(z_0 + \frac{\delta z}{2} - z_0)}{1!} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + \\ &+ \frac{(z_0 + \frac{\delta z}{2} - z_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) + \dots \Rightarrow \end{aligned}$$



Σχήμα 2.11: Παράδειγμα διατμητικής τάσης κατά τη διεύθυνση του άξονα x σε κυβικό στοιχειώδες τμήμα αέρα.

$$\Rightarrow \tau_{zx}(x_0, y_0, z_0 + \frac{\delta z}{2}) = \tau_{zx}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\delta z}{2} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + \frac{(\frac{\delta z}{2})^2}{2!} \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) + \dots$$

Αγνοώντας τους όρους μεγαλύτερης τάξης του δύο, η διατμητική τάση στη κορυφή του κυβικού στοιχειώδους τμήματος είναι:

$$\vec{\tau}_{zx,κορ} = \vec{\tau}_{zx}(x_0, y_0, z_0 + \frac{\delta z}{2}) = \left(\tau_{zx}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\delta z}{2} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right) \hat{e}_x \Rightarrow$$

$$\vec{\tau}_{zx,κορ} = + \left(\tau_{zx,μεσ} + \frac{\delta z}{2} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \hat{e}_x$$

Με όμοιο συλλογισμό βρίσκουμε ότι η διατμητική τάση στο πάτο του κυβικού στοιχειώδους τμήματος είναι:

$$\vec{\tau}_{zx,πατ} = + \left(\tau_{zx,μεσ} - \frac{\delta z}{2} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \hat{e}_x$$

Συνεπώς, η συνολική δύναμη ιξώδους $\vec{F}_{T,zx}$ που ασκείται στο κυβικό στοιχειώδες τμήμα αέρα ισούται με τη διαφορά της διατμητικής τάσης στην κορυφή από τη διατμητική τάση στο πάτο πολλαπλασιαζόμενη με την επιφάνεια στην οποία ασκείται η διατμητική τάση. Δηλαδή από την (2.39) είναι

$$\vec{F}_{T,zx} = (\tau_{zx,κορ} - \tau_{zx,πατ}) \delta x \delta y \hat{e}_x \quad (1)$$

Η μάζα του κυβικού στοιχειώδους τμήματος αέρα είναι:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \delta x \delta y \delta z$$

Διαιρώντας κατά μέλη την (1) με m έχουμε ότι η συνολική δύναμη ιξώδους ανά μονάδα μάζας είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{F}_{T,zx}}{m} &= \frac{1}{\rho} \frac{(\tau_{zx,\kappa\omicron\rho} - \tau_{zx,\pi\alpha\tau}) \delta x \delta y}{\delta x \delta y \delta z} \hat{e}_x = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta z \right) \frac{\delta x \delta y}{\delta x \delta y \delta z} \hat{e}_x \\ &\Rightarrow \frac{\vec{F}_{T,zx}}{m} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \hat{e}_x \end{aligned} \quad (2.41)$$

Υποθέτοντας ότι ο συντελεστής δυναμικού ιξώδους μ είναι σταθερός με το ύψος, η παραπάνω σχέση (2.41) από τη (2.40) συνεπάγεται ότι:

$$\frac{\vec{F}_{T,zx}}{m} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \hat{e}_x = \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \hat{e}_x \Rightarrow \frac{\vec{F}_{T,zx}}{m} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \hat{e}_x \quad (2.42)$$

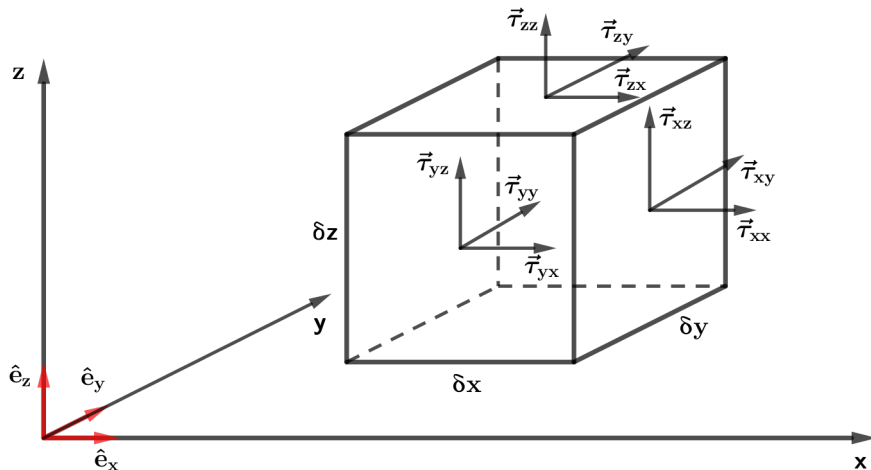
αφού $\nu = \mu/\rho$ το κινηματικό ιξώδες του στοιχειώδους όγκου.

Η ερμηνεία της εξίσωσης (2.42) είναι ότι αν η ταχύτητα του ανέμου δεν μεταβάλλεται ή μεταβάλλεται γραμμικά με το ύψος και το ν είναι σταθερό, τότε η δύναμη ιξώδους ανά μονάδα μάζας στη διεύθυνση του άξονα x λόγω διάτμησης ανέμου στη διεύθυνση του άξονα z είναι μηδενική. Στην αντίθετη περίπτωση όπου η ταχύτητα του ανέμου μεταβάλλεται μη γραμμικά, η διατμητική τάση στην κορυφή του κυβικού στοιχειώδους τμήματος αέρα διαφέρει από αυτή στο πάτο του και άρα η συνολική δύναμη ιξώδους είναι μη μηδενική. Να σημειωθεί ότι η (2.42) αναπαριστά την δύναμη ιξώδους ανά μονάδα μάζας στη διεύθυνση του x λόγω διάτμησης του ανέμου στη κάθετη διεύθυνση z και ότι η συνολική δύναμη ιξώδους στην διεύθυνση του x περιλαμβάνει και τη συμβολή από τη διάτμηση του ανέμου στις x και y διευθύνσεις, τ_{xx} και τ_{yx} αντίστοιχα. Άρα, οι συνιστώσες της συνολικής δύναμης ιξώδους ανά μονάδα μάζας στις τρεις διευθύνσεις του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων είναι:

$$\begin{aligned} F_{Tx} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ F_{Ty} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ F_{Tz} &= \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Επεκτείνοντας την (2.42) και στις άλλες διαστάσεις έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{F}_T}{m} &= F_{Tx} \hat{e}_x + F_{Ty} \hat{e}_y + F_{Tz} \hat{e}_z \\ &= \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \hat{e}_x + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \hat{e}_y \\ &\quad + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \hat{e}_z \\ &= \nu \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{U} \\ &= \nu \vec{\nabla}^2 \vec{U} \end{aligned} \quad (2.44)$$



Σχήμα 2.12: Η διατμητική τάση και στις τρεις διαστάσεις. Αντίθετες από τις ει-
κονιζόμενες διατμητικές τάσεις ασκούνται στις αντίθετες πλευρές του στοιχειώδους
κυβικού τμήματος.

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ισχύει ότι:

$$\vec{\alpha}_T = \frac{\vec{F}_T}{m} \Rightarrow \vec{\alpha}_T = \nu \vec{\nabla}^2 \vec{U} \quad (2.45)$$

2.2.6 Τελική μορφή της εξίσωσης κίνησης

Συνοψίζοντας οι μαθηματικές εκφράσεις των δυνάμεων που επιδρούν σε μία αέρια
μάζα είναι:

- Η δύναμη Coriolis ανά μονάδα μάζας είναι

$$\frac{\vec{F}_c}{m} = 2\vec{\Omega} \times \vec{U}$$

Στο επίπεδο είναι της τάξεως των $10^{-3} m/s^2$ ενώ η κάθετη συνιστώσα είναι της
τάξεως των $0 m/s^2$.

- Η ενεργός βαρύτητα ανά μονάδα μάζας από τη σχέση (2.34) είναι

$$\frac{\vec{F}_g}{m} = \frac{\vec{F}_{g^*}}{m} + \frac{\vec{F}_{\phi\psi\gamma}}{m} \Rightarrow \vec{g} = -g\vec{k} = \vec{g}^* + \Omega^2 \vec{R}$$

Στο επίπεδο είναι της τάξεως των $0 m/s^2$ ενώ η κάθετη συνιστώσα είναι της
τάξεως των $10 m/s^2$

- Η δύναμη βαροβαθμίδας ανά μονάδα μάζας από τη σχέση (2.36) είναι

$$\frac{\vec{F}_p}{m} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$$

Στο επίπεδο είναι της τάξεως των $10^{-3} m/s^2$ ενώ η κάθετη συνιστώσα είναι της
τάξεως των $10 m/s^2$

- Η δύναμη ιξώδους ανά μονάδα μάζας από τη σχέση (2.45) είναι

$$\frac{\vec{F}_T}{m} = \nu \vec{\nabla}^2 \vec{U}$$

Στο επίπεδο είναι της τάξεως των $10^{-12} m/s^2$ στην ελεύθερη ατμόσφαιρα και $-10^{-3} m/s^2$ στον προσκείμενο στην επιφάνεια της γης αέρα ενώ η κάθετη συνιστώσα είναι της τάξεως των $10^{-15} m/s^2$ στην ελεύθερη ατμόσφαιρα και $-10^{-15} m/s^2$ στον προσκείμενο στην επιφάνεια της γης αέρα

Έτσι, η τελική μορφή της εξίσωσης κίνησης σε περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς ακίνητο ως προς τη γη δίνεται με τη βοήθεια της σχέσης (2.17) και είναι

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{U}}{dt} &= \frac{1}{m} (\vec{F}_p + \vec{F}_{g^*} + \vec{F}_T - \vec{F}_c + \vec{F}_{\phi\nu\gamma}) \\ \Rightarrow \frac{d\vec{U}}{dt} &= -2\vec{\Omega} \times \vec{U} - g\vec{k} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{U} \end{aligned} \quad (2.46)$$

2.3 Οι συνιστώσες της εξίσωσης κίνησης σε σφαιρικές συντεταγμένες

Για σκοπούς θεωρητικής ανάλυσης και αριθμητικής πρόγνωσης, είναι απαραίτητο να αναλύσουμε τη διανυσματική μορφή της εξίσωσης κίνησης (2.46) στις συνιστώσες της. Καθώς η απόκλιση του σχήματος της γης από αυτό της σφαίρας είναι αμελητέο, είναι εύλογο, επίσης, να μορφοποιήσουμε την (2.46) σε σφαιρικές συντεταγμένες, έτσι ώστε το επίπεδο της επιφάνειας της γης να αντιστοιχεί σε μία επιφάνεια συντεταγμένων. Οι άξονες θα είναι τότε οι λ , ϕ , z , όπου λ είναι το μήκος, ϕ είναι το πλάτος και z είναι η κάθετη απόσταση από την επιφάνεια της γης (βλ ενότητα 1.2). Τα μοναδιαία διανύσματα \vec{i}_λ , \vec{j}_ϕ και \vec{k}_r με κατεύθυνση την ανατολή, με κατεύθυνση το βορρά και με κατεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια της γης, αντίστοιχα (Σχήμα 1.6). Τότε η ταχύτητα γράφεται:

$$\vec{U} = u\vec{i}_\lambda + v\vec{j}_\phi + w\vec{k}_r$$

όπου οι συνιστώσες u , v και w προσδιορίζονται από τις σχέσεις (οι οποίες προκύπτουν από την εξίσωση μήκους τόξου σε κύκλο (Σχήμα 1.6)):

$$u = r \cos \phi \frac{d\lambda}{dt}, \quad v = r \frac{d\phi}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt} \quad (2.47)$$

Εδώ r είναι η απόσταση από το κέντρο της γης που σχετίζεται με το z από τη σχέση: $r = R_\Gamma + z$, όπου R_Γ είναι η ακτίνα της γης. Είθισται η μεταβλητή r στην (2.47) να αντικαθιστάται από τη σταθερά R_Γ . Αυτό είναι μία πολύ καλή προσέγγιση αφού $z \ll R_\Gamma$ για περιοχές της γης που απασχολούν τους μετεωρολόγους.

Προς απλότητα των συμβολισμών, συμβολίζουμε με x και y την ανατολική και βόρεια απόσταση αντίστοιχα έτσι ώστε $dx = R_\Gamma \cos \phi d\lambda$ και $dy = R_\Gamma d\phi$. Έτσι, οι συνιστώσες της οριζόντιας ταχύτητας είναι $u = dx/dt$ και $v = dy/dt$ στην ανατολική και βόρεια διεύθυνση αντίστοιχα. Να σημειωθεί, ωστόσο, ότι το (x, y, z) σύστημα

συντεταγμένων που δημιουργείται με αυτό τον τρόπο δεν είναι ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων επειδή οι διευθύνσεις των μοναδιαίων διανυσμάτων \vec{i}_λ , \vec{j}_ϕ και \vec{k}_r δεν είναι σταθερές αλλά συναρτήσεις της θέσης πάνω στη σφαιρική γη. Αυτή η εξάρτηση των μοναδιαίων διανυσμάτων από τη θέση θα πρέπει να ληφθεί υπόψη στην ανάλυση του διανύσματος της επιτάχυνσης σε συνιστώσες πάνω στη σφαίρα. Έτσι, έχουμε:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{i}_\lambda \frac{du}{dt} + \vec{j}_\phi \frac{dv}{dt} + \vec{k}_r \frac{dw}{dt} + u \frac{d\vec{i}_\lambda}{dt} + v \frac{d\vec{j}_\phi}{dt} + w \frac{d\vec{k}_r}{dt} \quad (2.48)$$

Επομένως, είναι φανερό ότι για να υπολογίσουμε τις συνιστώσες του διανύσματος της επιτάχυνσης πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τους ρυθμούς μεταβολής των μοναδιαίων διανυσμάτων που ακολουθούν την κίνηση. Ας θεωρήσουμε, αρχικά, το $d\vec{i}_\lambda/dt$. Αφού το \vec{i}_λ είναι συνάρτηση μόνο του x (ένα διάνυσμα με ανατολική κατεύθυνση δεν μεταβάλλεται ως προς τον προσανατολισμό του αν η κίνηση έχει βόρεια, νότια ή κάθετη διεύθυνση), τότε από τη σχέση (1.3) έχουμε:

$$\frac{d\vec{i}_\lambda}{dt} = u \frac{\partial \vec{i}_\lambda}{\partial x}$$

Από το παραπάνω σχήμα (2.1) βλέπουμε ότι από την ομοιότητα των τριγώνων έχουμε:

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{|\delta \vec{i}_\lambda|}{\delta x} = \left| \frac{\partial \vec{i}_\lambda}{\partial x} \right| = \frac{1}{R_\Gamma \cos \phi}$$

με το διάνυσμα $\partial \vec{i}_\lambda / \partial x$ να έχει κατεύθυνση προς τον άξονα περιστροφής. Επίσης, όπως απεικονίζεται στο σχήμα (2.2):

$$\frac{\partial \vec{i}_\lambda}{\partial x} = \frac{1}{R_\Gamma \cos \phi} (\vec{j}_\phi \sin \phi - \vec{k}_r \cos \phi)$$

Άρα,

$$\frac{d\vec{i}_\lambda}{dt} = \frac{u}{R_\Gamma \cos \phi} (\vec{j}_\phi \sin \phi - \vec{k}_r \cos \phi) \quad (2.49)$$

Θεωρούμε τώρα το $d\vec{j}_\phi/dt$. Το διάνυσμα \vec{j}_ϕ είναι συνάρτηση μόνο του x και του y . Έτσι, με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος (2.13) βλέπουμε ότι για μία ανατολική κίνηση ισχύει ότι $|\delta \vec{j}_\phi| = \delta x / (R_\Gamma / \tan \phi)$. Επειδή το διάνυσμα $\frac{\partial \vec{j}_\phi}{\partial x}$ έχει κατεύθυνση προς τα αρνητικά x έχουμε:

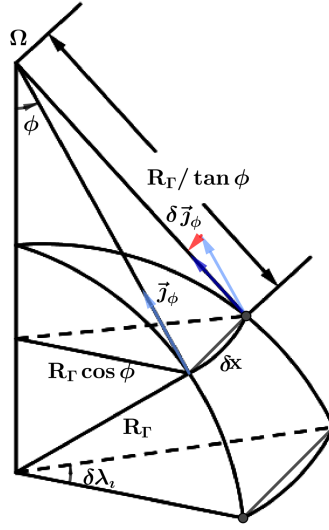
$$\frac{\partial \vec{j}_\phi}{\partial x} = -\frac{\tan \phi}{R_\Gamma} \vec{i}_\lambda$$

Από το παρακάτω σχήμα (2.14) είναι φανερό ότι για μία κίνηση προς το βορρά ισχύει $|\delta \vec{j}_\phi| = \delta \phi$, αλλά $\delta y = R_\Gamma \delta \phi$ και το $\delta \vec{j}_\phi$ κατευθύνεται προς τα κάτω έτσι ώστε:

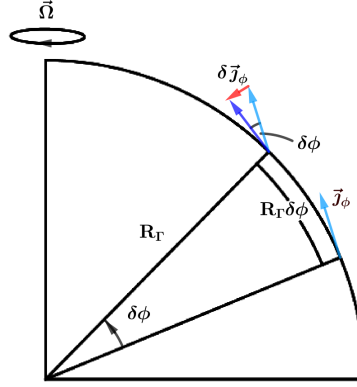
$$\frac{\partial \vec{j}_\phi}{\partial y} = -\frac{\vec{k}_r}{R_\Gamma}$$

Έτσι,

$$\frac{d\vec{j}_\phi}{dt} = -\frac{u \tan \phi}{R_\Gamma} \vec{i}_\lambda - \frac{v}{R_\Gamma} \vec{k}_r \quad (2.50)$$



Σχήμα 2.13: Το διάνυσμα \vec{j}_ϕ εξαρτάται από το μήκος.



Σχήμα 2.14: Το διάνυσμα \vec{j}_ϕ εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος

Τελικά, με όμοια επιχειρήματα μπορεί ναδειχθεί ότι:

$$\frac{d\vec{k}_r}{dt} = \vec{i}_\lambda \frac{u}{R_\Gamma} + \vec{j}_\phi \frac{u}{R_\Gamma} \quad (2.51)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.49), (2.50), (2.51) στην εξίσωση (2.48) παίρνουμε την επιτάχυνση (ακολουθώντας την κίνηση) σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{U}}{dt} &= \vec{i}_\lambda \cdot \frac{du}{dt} + \vec{j}_\phi \cdot \frac{dv}{dt} + \vec{k}_r \cdot \frac{dw}{dt} + u \cdot \left(\frac{u}{R_\Gamma \cos \phi} (\vec{j}_\phi \sin \phi - \vec{k}_r \cos \phi) \right) \\ &+ v \cdot \left(-\frac{u \tan \phi}{R_\Gamma} \vec{i}_\lambda - \frac{v}{R_\Gamma} \vec{k}_r \right) + w \cdot \left(\vec{i}_\lambda \frac{u}{R_\Gamma} + \vec{j}_\phi \frac{u}{R_\Gamma} \right) \\ \Rightarrow \frac{d\vec{U}}{dt} &= \left(\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \phi}{R_\Gamma} + \frac{uw}{R_\Gamma} \right) \vec{i}_\lambda + \left(\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{R_\Gamma} + \frac{uw}{R_\Gamma} \right) \vec{j}_\phi \\ &+ \left(\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{R_\Gamma} \right) \vec{k}_r \end{aligned} \quad (2.52)$$

Ωστόσο, από τη σχέση (1.3) που αποδείξαμε στην ενότητα (1.4) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{R_{\Gamma} \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{R_{\Gamma}} \frac{\partial u}{\partial \phi} + w \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\quad (2.53)$$

Όμοια προκύπτουν και οι αντίστοιχες σχέσεις για τις συνιστώσες v και w . Συνεπώς, η

$$\begin{aligned}(2.52) \Rightarrow \frac{d\vec{U}}{dt} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{R_{\Gamma} \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{R_{\Gamma}} \frac{\partial u}{\partial \phi} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{uv \tan \phi}{R_{\Gamma}} + \frac{uw}{R_{\Gamma}} \right) \vec{i}_{\lambda} \\ &+ \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{R_{\Gamma} \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{R_{\Gamma}} \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u^2 \tan \phi}{R_{\Gamma}} + \frac{uv}{R_{\Gamma}} \right) \vec{j}_{\phi} \\ &+ \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{u}{R_{\Gamma} \cos \phi} \frac{\partial w}{\partial \lambda} + \frac{v}{R_{\Gamma}} \frac{\partial w}{\partial \phi} + w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{u^2 + v^2}{R_{\Gamma}} \right) \vec{k}_r\end{aligned}\quad (2.54)$$

Σε αυτό το σημείο θα αναλύσουμε τις συνιστώσες σε σφαιρικές συντεταγμένες των δυνάμεων που εκφράζονται με τους όρους στο δεξί μέλος της εξίσωσης (2.46). Θα αναλύσουμε τη δύναμη Coriolis αφού πρώτα σημειώσουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα της γης $\vec{\Omega}$ δεν έχει συνιστώσα παράλληλη στο \vec{i}_{λ} και οι συνιστώσες που είναι παράλληλες στο \vec{j}_{ϕ} και στο \vec{k}_r είναι $2\vec{\Omega} \cos \phi$ και $2\vec{\Omega} \sin \phi$, αντίστοιχα.

Η δύναμη Coriolis, τότε, ανά μονάδα μάζας σε σφαιρικές συντεταγμένες, από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου διανυσμάτων, είναι:

$$\begin{aligned}-2\vec{\Omega} \times \vec{U} &= -2\Omega \begin{vmatrix} \vec{i}_{\lambda} & \vec{j}_{\phi} & \vec{k}_r \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}_{\lambda} (-2\Omega w \cos \phi + 2\Omega v \sin \phi) - \vec{j}_{\phi} 2\Omega u \sin \phi + \vec{k}_r 2\Omega u \cos \phi \\ &= \vec{i}_{\lambda} (-2\Omega w \cos \phi + f v) - \vec{j}_{\phi} f u + \vec{k}_r 2\Omega u \cos \phi\end{aligned}\quad (2.55)$$

Η δύναμη βαροβαθμίδας μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i}_{\lambda} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j}_{\phi} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}_r \right) \stackrel{(2.47)}{=} \\ &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{R_{\Gamma} \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \vec{i}_{\lambda} + \frac{1}{R_{\Gamma}} \frac{\partial p}{\partial \phi} \vec{j}_{\phi} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}_r \right)\end{aligned}\quad (2.56)$$

Η δύναμη (ενεργούς) βαρύτητας μπορεί, προφανώς, να εκφραστεί από την:

$$\vec{g} = -g \vec{k}_r \quad (2.57)$$

όπου g είναι το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας ($g \cong 9,8 \text{ ms}^{-2}$ στην επιφάνεια της γης)

Η δύναμη ιξώδους με τη βοήθεια των εξισώσεων (2.44) της ενότητας της δύναμης τριβής (2.2.5) γράφεται:

$$\vec{F}_T = F_{Tx} \vec{i}_{\lambda} + F_{Ty} \vec{j}_{\phi} + F_{Tz} \vec{k}_r \quad (2.58)$$

Από τις εξισώσεις (2.52), (2.58) και την εξίσωση κίνησης (2.17) εξισώνοντας όλους τους όρους στις διευθύνσεις των \vec{i}_λ , \vec{j}_ϕ , \vec{k}_r αντίστοιχα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{R_\Gamma \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{R_\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \phi} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{uv \tan \phi}{R_\Gamma} - \frac{uw}{R_\Gamma} + fv - 2\Omega w \cos \phi \\ &- \frac{1}{\rho R_\Gamma \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + F_{Tx} \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{R_\Gamma \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{R_\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{u^2 \tan \phi}{R_\Gamma} - \frac{vw}{R_\Gamma} - fu - \frac{1}{\rho R_\Gamma} \frac{\partial p}{\partial \phi} + F_{Ty} \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{u}{R_\Gamma \cos \phi} \frac{\partial w}{\partial \lambda} + \frac{v}{R_\Gamma} \frac{\partial w}{\partial \phi} + w \frac{\partial w}{\partial z} = +\frac{u^2 + v^2}{R_\Gamma} - g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega u \cos \phi + F_{Tz} \quad (2.61)$$

όπου η (2.59) είναι η ανατολική, η (2.60) είναι η βόρεια και η (2.61) είναι η κάθετη συνιστώσα της εξίσωσης κίνησης.

Ωστόσο, οι όροι uw/R_Γ , vw/R_Γ , που εμφανίζονται λόγω καμπυλότητας της γης, είναι πολύ μικροί για μεγάλης κλίμακας κινήσεις και άρα μπορούν να παραληφθούν από την ανατολική και τη βόρεια συνιστώσα αντίστοιχα. Αν τώρα παραληφθούν αυτοί οι όροι θα πρέπει να παραληφθεί και ο όρος $(u^2 + v^2)/R_\Gamma$ από την κάθετη συνιστώσα της εξίσωσης κίνησης για να αποφυγούμε λανθασμένη προσθήκη ενέργειας στο σύστημα [2].

Επίσης, επειδή η κάθετη συνιστώσα των ταχυτήτων είναι πολύ μικρότερη από τη συνιστώσα στο οριζόντιο επίπεδο, ο όρος $\vec{i}_\lambda 2\Omega w \cos \phi$ στην εξίσωση της δύναμης Coriolis (2.55) μπορεί να παραληφθεί. Επειδή η κάθετη συνιστώσα της δύναμης Coriolis είναι πολύ μικρότερη από τις άλλες κάθετες συνιστώσες (όπως για παράδειγμα της δύναμης βαροβαθμίδας και της βαρύτητας), ο όρος $\vec{k}_r 2\Omega u \cos \phi$ μπορεί, επίσης, να παραληφθεί² [2]. Με την ανάλυση κλίμακας που μόλις κάναμε, λοιπόν, η δύναμη Coriolis ανά μονάδα μάζας στις σφαιρικές συντεταγμένες γράφεται στην απλούστερη μορφή:

$$(2.55) \Rightarrow -2\Omega \times \vec{U} \approx \vec{i}_\lambda fv - \vec{j}_\phi fu$$

και οι συνιστώσες της εξίσωσης κίνησης στις σφαιρικές συντεταγμένες απλοποιούνται ως εξής:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{R_\Gamma \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{R_\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \phi} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{uv \tan \phi}{R_\Gamma} + fv - \frac{1}{\rho R_\Gamma \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + F_{Tx} \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{R_\Gamma \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{R_\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{u^2 \tan \phi}{R_\Gamma} - fu - \frac{1}{\rho R_\Gamma} \frac{\partial p}{\partial \phi} + F_{Ty} \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{u}{R_\Gamma \cos \phi} \frac{\partial w}{\partial \lambda} + \frac{v}{R_\Gamma} \frac{\partial w}{\partial \phi} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega u \cos \phi + F_{Tz} \quad (2.64)$$

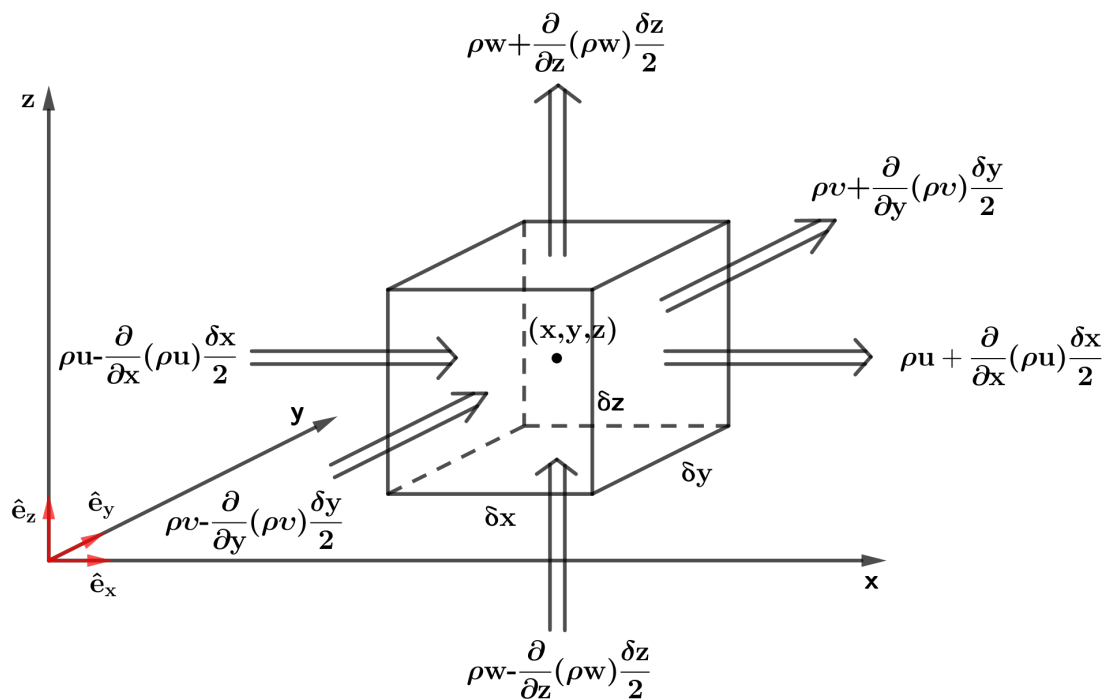
²Για τις τάξεις μεγέθους των όρων βλ. υποενότητα (2.2.6).

Κεφάλαιο 3

Οι Εξισώσεις Συνέχειας και Θερμοδυναμικής

3.1 Η εξίσωση συνέχειας

Σε αυτό το σημείο θα αναλύσουμε τη δεύτερη από τις τρεις θεμελιώδεις αρχές διατήρησης: την **διάτηρηση της μάζας**. Η μαθηματική σχέση που εκφράζει τη διατήρηση της μάζας για τον ατμοσφαιρικό αέρα (ή για ένα οποιοδήποτε ρευστό) καλείται **εξίσωση συνέχειας**. Η απόδειξη της θα γίνει με την προσέγγιση Euler, όπως έγινε και η εξίσωση κίνησης προηγουμένως καθώς το μετεωρολογικό μοντέλο που θα κατασκευάσουμε στο τέλος της εργασίας είναι Eulerian.



Σχήμα 3.1: Η ροή της μάζας σε ένα στοιχειώδη όγκο ελέγχου κατά Euler κατά την κίνηση αέριας μάζας και στις τρεις διαστάσεις.

Θεωρούμε ένα στοιχειώδη κλειστό όγκο αέρα τοποθετημένο σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1. Όταν ο αέρας κυκλοφορεί μέσα σε αυτόν και δεν επηρεάζεται από χημικές ή φυσικές διεργασίες η συνολική μάζα αέρα διατηρείται. Σε ένα μετεωρολογικό μοντέλο, λοιπόν, το οποίο συγκροτείται από πολλά κελιά πλέγματος, ο ρυθμός εισροής μείον το ρυθμό εκροής μάζας διαμέσου των πλευρών σε καθένα από αυτά ισούται με το ρυθμό συσσώρευσης της μάζας μέσα στον όγκο ελέγχου.

Ο ρυθμός εισροής της μάζας στον όγκο διαμέσου της αριστερής, της μπροστινής και της κάτω πλευράς στην κατεύθυνση του x , y και z αντιστοίχως ανά μονάδα επιφάνειας είναι:

$$\left[\rho u - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \frac{\delta x}{2} \right] + \left[\rho v - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \frac{\delta y}{2} \right] + \left[\rho w - \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \frac{\delta z}{2} \right] \quad (3.1)$$

αντίστοιχα. Ο ρυθμός εκροής της μάζας από τον όγκο ελέγχου διαμέσου των της δεξιάς, της πίσω και της πάνω πλευράς στην κατεύθυνση του x , y και z αντίστοιχα ανά μονάδα επιφάνειας είναι:

$$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \frac{\delta x}{2} \right] + \left[\rho v + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \frac{\delta y}{2} \right] + \left[\rho w + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \frac{\delta z}{2} \right] \quad (3.2)$$

Και αφού οι πλευρές στην κατεύθυνση του x , y και z είναι $\delta y \delta z$, $\delta x \delta z$ και $\delta x \delta y$ αντίστοιχα, αφαιρώντας την έκφραση (3.1) από την (3.2) έχουμε ότι ο ρυθμός καθαρής εισροής της μάζας στον όγκο ελέγχου είναι:

$$\begin{aligned} & + \left(-\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \frac{\delta x}{2} - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z + \left(-\frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \frac{\delta y}{2} - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \frac{\delta y}{2} \right) \delta x \delta z \\ & + \left(-\frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \frac{\delta z}{2} - \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \frac{\delta z}{2} \right) \delta x \delta y \\ & = - \left(\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \right) \delta x \delta y \delta z - \left(\frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \right) \delta x \delta y \delta z - \left(\frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \right) \delta x \delta y \delta z \\ & = - \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \right) \right] \delta x \delta y \delta z \end{aligned} \quad (3.3)$$

και άρα η καθαρή εισροή μάζας ανά μονάδα όγκου είναι $-\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U})$, η οποία πρέπει να ισούται με το ρυθμό αύξησης της μάζας ανά μονάδα όγκου. Όμως, ο ρυθμός αύξησης της μάζας ανά μονάδα όγκου είναι η μερική παράγωγος της πυκνότητας $\partial \rho / \partial t$. Οπότε, προκύπτει η εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (3.4)$$

Η εξίσωση (3.4) αποτελεί τη μορφή της εξίσωσης συνέχειας της διανυσματικής απόκλισης της μάζας. Μία άλλη μορφή της εξίσωσης της συνέχειας λαμβάνουμε εάν χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα των διανυσμάτων:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = \rho \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho \quad (3.5)$$

έτσι ώστε από (3.4) και (3.5) να προκύπτει ότι

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) - (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\rho \quad (3.6)$$

την οποία εξίσωση θα χρησιμοποιήσουμε για το Eulerian μετεωρολογικό μοντέλο που θα κατασκευάσουμε παρακάτω.

Ωστόσο, από την παρακάτω σχέση

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \quad (3.7)$$

παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho \stackrel{(3.4)}{\Rightarrow} \frac{d\rho}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho \\ \stackrel{(3.5)}{\Rightarrow} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{U} - \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho \\ \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Αυτή η μορφή της εξίσωσης της συνέχειας εκφράζει ότι η μεταβολή της πυκνότητας όπως ένας παρατηρητής αντιλαμβάνεται όταν ακολουθεί την κίνηση ενός τμήματος αέρα ισούται με μείον την διανυσματική απόκλιση της ταχύτητας. Αυτό διακρίνεται προφανώς και από την (3.4) όπου εκφράζει ότι ο τοπικός ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας ισούται με μείον την απόκλιση της μάζας.

3.2 Βασικά στοιχεία θερμοδυναμικής

Πρωτού αναλύσουμε την εξίσωση της θερμοδυναμικής θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε κάποια βασικά στοιχεία της θερμοδυναμικής. Θα ξεκινήσουμε με τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής και θα αναλύσουμε τον τρόπο με τον οποίο έχουμε μεταβολή της θερμοκρασίας σε ένα στοιχειώδες τμήμα αέρα (ή σε ένα κελί του πλέγματος που χρησιμοποιείται σε ένα μετεωρολογικό μοντέλο). Στην παρούσα εργασία μας ενδιαφέρει κυρίως η τροπόσφαιρα η οποία χωρίζεται στο **οριακό στρώμα**, το οποίο είναι η περιοχή από την επιφάνεια έως και το ύψος των 500-3000 m περίπου που επηρεάζεται από την επιφάνεια της γης, και την ελεύθερη τροπόσφαιρα, η οποία είναι η υπόλοιπη τροπόσφαιρα.

3.2.1 Πρώτος Νόμος της Θερμοδυναμικής

Ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής, όπως αυτός εφαρμόζεται στην ατμόσφαιρα, συσχετίζει τη μεταβολή της θερμοκρασίας σε ένα στοιχειώδες τμήμα αέρα (ή σε ένα κελί του πλέγματος που χρησιμοποιείται σε ένα μετεωρολογικό μοντέλο) με την ενέργεια που μεταφέρεται μεταξύ του τμήματος αέρα και του περιβάλλοντος γύρω από αυτό και το έργο που από ή στο τμήμα αέρα. Ο πρώτος νόμος χρησιμοποιείται για να παραχθεί η θερμοδυναμική εξίσωση, καθώς και για να παραχθούν εκφράσεις για την ευστάθεια

της ατμόσφαιρας. Ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής, λοιπόν, όπως αυτός εφαρμόζεται στην ατμόσφαιρα ανά μονάδα μάζας $m = m_d + m_v$ (η μάζα του τμήματος αέρα αποτελείται από ξηρή αέρια μάζα και υδρατμούς), είναι ο

$$dQ = dU + dW \quad (3.9)$$

όπου dQ καλείται όρος **διαβατικής θέρμανσης**, ο οποίος είναι η **ενέργεια** ανά μονάδα μάζας (J/kg) που μεταφέρεται μεταξύ του τμήματος αέρα και του περιβάλλοντός του, dU είναι η μεταβολή **στην εσωτερική ενέργεια** ανά μονάδα μάζας (J/kg) του τμήματος αέρα και dW είναι το έργο ανά μονάδα μάζας (J/kg) από ή στο τμήμα αέρα.

- Όταν $dQ < 0$, ενέργεια μεταφέρεται από το τμήμα αέρα στο περιβάλλον του, και η διεργασία ονομάζεται **εξώθερμη**. Όταν $dQ > 0$, ενέργεια μεταφέρεται από το περιβάλλον στο τμήμα αέρα, και η διεργασία ονομάζεται **ενδόθερμη**.
- Όταν $dW < 0$, το έργο παράγεται στο τμήμα αέρα. Όταν $dW > 0$ το έργο παράγεται από το τμήμα αέρα.

Η εξίσωση (3.9) εκφράζει ότι η ενέργεια που προστίθεται στο τμήμα αέρα, κάποιος μέρος της χρησιμοποιείται για να μεταβάλλει την εσωτερική του ενέργεια (και τη θερμοκρασία του επομένως) και το υπόλοιπο μέρος χρησιμοποιείται από το τμήμα αέρα για να παράξει έργο. Επίσης, εκφράζει ότι η μεταβολή στην εσωτερική ενέργεια (ή στη θερμοκρασία) του τμήματος αέρα είναι αποτέλεσμα της μεταφοράς ενέργειας, όπου η μεταβολή στην εσωτερική ενέργεια (θερμοκρασία) ονομάζεται **διαβατική** ($dQ \neq 0$), ή του έργου, όπου η μεταβολή στην εσωτερική ενέργεια (θερμοκρασία) ονομάζεται **αδιαβατική** ($dQ = 0$).

3.2.2 Παράγοντες που επηρεάζουν τη θερμοκρασία

Η θερμοκρασία του αέρα μεταβάλλεται σημαντικά στο οριακό στρώμα ενώ στην ελεύθερη τροπόσφαιρα οι μεταβολές είναι μικρότερες. Η θερμοκρασία, λοιπόν, στο οριακό στρώμα, σύμφωνα και με τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής, μεταβάλλεται είτε διαβατικά είτε αδιαβατικά. Το κατά πόσο, τώρα, μεταβάλλεται η θερμοκρασία επηρεάζεται και από άλλους παράγοντες που θα αναφέρουμε παρακάτω.

Αγωγή

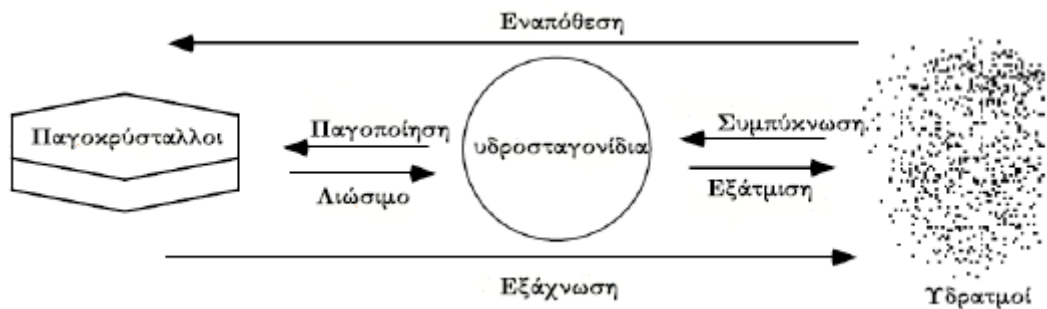
Η αγωγή είναι η μεταβίβαση ενέργειας από το ένα μόριο στο άλλο σε ένα μέσο το οποίο ονομάζεται **αγωγός**. Αγωγή εμφανίζεται μεταξύ του εδάφους, του αέρα και σωματιδίων. Πιο συγκεκριμένα, μέσω της αγωγής επηρεάζεται η θερμοκρασία της επιφάνειας του εδάφους λόγω μεταφοράς ενέργειας μεταξύ της επιφάνειας του εδάφους και των προσκείμενων μορίων της κατώτερης ατμόσφαιρας καθώς επίσης και λόγω μεταφοράς μεταξύ της επιφάνειας του εδάφους και των μορίων του εδάφους κάτω από την επιφάνεια. Επίσης, η ποσοτικοποίηση της ροής της θερμικής ενέργειας σε ένα υλικό παρουσία θερμοβαθμίδας ονομάζεται **θερμική αγωγιμότητα** του υλικού.

Ακτινοβολία

Η ακτινοβολία είναι η μεταφορά ενέργειας που επιτυγχάνεται από τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα τα οποία δεν χρειάζονται κάποιο μέσο, όπως είναι ο αέρας, για να διαδοθούν. Η **ηλιακή ακτινοβολία** είναι σχετικά μικρού κύματος ακτινοβολία που εκπέμπεται από τον ήλιο και είναι μεγαλύτερη αυτή που φτάνει στη γη όταν ο ήλιος είναι πιο κάθετος στην επιφάνεια του εδάφους. Για αυτό και η θερμοκρασία στα τροπικά πλάτη παραμένει σε υψηλά επίπεδα σε όλη τη διάρκεια του χρόνου. Αφού τώρα η γη, η ατμόσφαιρα και τα σύννεφα απορροφήσουν την ηλιακή ακτινοβολία κατά τη διάρκεια της ημέρας μόνο, αποκτούν μια θερμοκρασία και επανεκπέμπουν μεγάλου κύματος **θερμική υπέρυθη ακτινοβολία** κατά τη διάρκεια της ημέρας αλλά και της νύχτας.

Λανθάνουσα Θερμότητα

Κατά τη διάρκεια της συμπύκνωσης των υδρατμών, της παγοποίησης των υδροσταγονιδίων και της εναπόθεσης των υδρατμών εκλύεται ενέργεια. Κατά τη διάρκεια που λιώνουν οι παγοκρυστάλλοι, της εξάτμισης των υδροσταγονιδίων και της εξάχνωσης των παγοκρυστάλλων απορροφάται ενέργεια. Η ενέργεια που εκλύεται ή απορροφάται καλείται λανθάνουσα θερμότητα.



Σχήμα 3.2: Αλλαγές φάσης του νερού [2].

Η λανθάνουσα θερμότητα που απορροφάται ή εκλύεται κατά τη διάρκεια της εξάτμισης ή της συμπύκνωσης αντίστοιχα λέγεται λανθάνουσα θερμότητα της εξάτμισης και μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία ως εξής:

$$\frac{dL_e}{dT} = c_{p,v} - c_w \quad (3.10)$$

όπου $c_{p,v}$ η ειδική θερμότητα των υδρατμών υπό σταθερή πίεση και c_w η ειδική θερμότητα του νερού σε υγρή φάση. Ένας εμπειρικός κανόνας για τον υπολογισμό της λανθάνουσας θερμότητας της εξάτμισης (JKg^{-1}) είναι:

$$L_e \approx 2.501 \cdot 10^6 - 2370 T \quad (3.11)$$

όπου T η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου.

Η λανθάνουσα θερμότητα που απορροφάται ή εκλύεται κατά τη διάρκεια του λιώσιματος ή της παγοποίησης αντίστοιχα λέγεται λανθάνουσα θερμότητα του λιώσιματος και μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία ως εξής:

$$\frac{dL_m}{dT} = c_w - c_I \quad (3.12)$$

όπου c_I η ειδική θερμότητα του πάγου. Ένας εμπειρικός κανόνας για τον υπολογισμό της λανθάνουσας θερμότητας του λιωσίματος (JKg^{-1}) είναι:

$$L_m \approx 3.3358 \cdot 10^5 + T(2030 - 10.46 T) \quad (3.13)$$

όπου T η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου.

Η λανθάνουσα θερμότητα που απορροφάται ή εκλύεται κατά τη διάρκεια της εξάχνωσης ή της εναπόθεσης αντίστοιχα λέγεται λανθάνουσα θερμότητα της εξάχνωσης και μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία ως εξής:

$$\frac{dL_s}{dT} = c_{p,V} - c_I \quad (3.14)$$

Ένας εμπειρικός κανόνας για τον υπολογισμό της λανθάνουσας θερμότητας του λιωσίματος (JKg^{-1}) είναι:

$$L_s = L_e + L_m \approx 2.83458 \cdot 10^6 - T(340 + 10.46 T) \quad (3.15)$$

όπου T η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου.

Οριζόντια μεταφορά (Advection)

Η οριζόντια μεταφορά είναι η οριζόντια διάδοση του μέσου ανέμου. Οι οριζόντιοι άνεμοι μεταφέρουν θερμική ενέργεια χωρικά σε μικρές και μεγάλες κλίμακες όπως μεταφέρουν και αέρια σωματίδια. Επίσης, όταν δημιουργηθεί κατακόρυφη ανύψωση μιας αέριας μάζας με έναν από τους τρόπους που προαναφέραμε μια άλλη αέρια μάζα μεταφέρεται οριζόντια μεταφέροντας μαζί της θερμική ενέργεια έτσι ώστε να καλύψει το κενό. Η μαθηματική σχέση που εκφράζει εν γένει τη μεταφορά θερμοκρασίας είναι:

$$T_{adv} = -\vec{U} \cdot \vec{\nabla} T \quad (3.16)$$

(βλ. και ενότητα 1.4).

Μηχανική τύρβη και εξαναγκασμένη ανύψωση (forced convection)

Η ανύψωση του ατμοσφαιρικού αέρα είναι κυρίως μια κατακόρυφη κίνηση που έχει ως αποτέλεσμα τη κατακόρυφη μεταφορά θερμότητας και εν γένει την ανάμιξη ατμοσφαιρικών ιδιοτήτων. Η εξαναγκασμένη ανύψωση του αέρα είναι μια κάθετη κίνηση του που παράγεται από μηχανικά μέσα, όπως η μηχανική τύρβη που θα περιγράψουμε αμέσως παρακάτω, αλλά και όταν ο αέρας συναντά τοπογραφικό εμπόδιο, όταν έχουμε μέτωπο ή όταν ο αέρας στο οριζόντιο επίπεδο συγκλίνει και ανυψώνεται στο οριακό στρώμα. Το οριακό στρώμα είναι σε κατάσταση εξαναγκασμένης ανύψωσης όταν η κυρίαρχη διαδικασία κάθετης κίνησης είναι η μηχανική τύρβη. Η μηχανική τύρβη εμφανίζεται όταν ο άνεμος ταξιδεύει πάνω από αντικείμενα που προεξέχουν από την επιφάνεια της γης δημιουργώντας στροβιλώδεις κινήσεις του αέρα ή μικροδίνες. Η τύρβη είναι το αποτέλεσμα ενός συνόλου από μικροδίνες διαφορετικών μεγεθών και χαρακτηριστικό της είναι ότι μεταφέρει ενέργεια, θερμότητα και άλλες ιδιότητες οριζόντια και κατακόρυφα.

Υπό αδιαβατικές συνθήκες, δεν έχουμε μεταφορά ενέργειας που να επηρεάζει το τμήμα αέρα ($dQ = 0$). Αντίθετα, η θερμοκρασία του τμήματος αέρα μεταβάλλεται μόνο όταν αυτό εκτονώνεται ή συμπιέζεται καθώς ανέρχεται ή κατέρχεται, αντίστοιχα. Όταν ανέρχεται, συναντά χαμηλότερες πιέσεις και εκτονώνεται, ψύχεται και η κινητική ενέργεια των μορίων του μέσα στο τμήμα αέρα μετατρέπεται σε έργο που χρησιμοποιείται για την εκτόνωση του αέρα. Η εκτόνωση του τμήματος αέρα απουσία διαβατικών διεργασιών ονομάζεται **αδιαβατική εκτόνωση**. Όταν, τώρα, το τμήμα αέρα κατέρχεται, αυτό συμπιέζεται και θερμαίνεται και αν δεν έχουμε μεταφορά ενέργειας τότε ονομάζεται **αδιαβατική συμπίεση**.

Θερμική τύρβη και ελεύθερη ανύψωση (free convection)

Η ελεύθερη ανύψωση του αέρα είναι κυρίως μια κατακόρυφη κίνηση του, η οποία μεταφέρει θερμότητα. Το οριακό στρώμα λέμε ότι είναι σε κατάσταση ελεύθερης ανύψωσης όταν η κυρίαρχη διαδικασία κάθετης κίνησης είναι η θερμική τύρβη. Θερμική τύρβη έχουμε όταν ο ήλιος θερμαίνει το έδαφος διαφορετικά λόγω της διαφορετικής νεφοκάλυψης, των διαφορετικών επιφανειών του εδάφους, της διαφορετικής γωνίας του ηλίου σε κάποιες περιοχές. Έτσι, δημιουργούνται θερμικά χαμηλά όπου τμήματα του αέρα ανυψώνονται κυρίως στα ηπειρωτικά κατά τη διάρκεια της ημέρας. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι όταν ο ήλιος θερμαίνει το έδαφος, μέσω της αγωγής μεταφέρεται ενέργεια από το έδαφος στα μόρια του αέρα που είναι προσκείμενα σε αυτό. Συνεπώς, ο θερμαινόμενος αέρας πάνω από το έδαφος διαστέλλεται, γίνεται λιγότερος πυκνός από το περιβάλλον του με αποτέλεσμα να ανυψώνεται ελεύθερα (αδιαβατικά) μεταφέροντας θερμική ενέργεια σε ανώτερα ύψη της ατμόσφαιρας.

Άλλοι Παράγοντες

Ειδική Θερμοχωρητικότητα

Εν γένει ειδική θερμοχωρητικότητα είναι η ενέργεια που απαιτείται για την αύξηση της θερμοκρασίας ενός γραμμαρίου μιας ουσίας κατά ένα βαθμό Celsius. Μια εδαφική επιφάνεια έχει μικρότερη θερμοχωρητικότητα από μια υδάτινη επιφάνεια. Συνεπώς, κατά τη διάρκεια της ημέρας η προσθήκη συγκεκριμένης ποσότητας ηλιακής ακτινοβολίας θα αυξήσει περισσότερο τη θερμοκρασία του εδάφους από ότι θα αυξήσει αυτή της υδάτινης επιφάνειας ενώ κατά τη διάρκεια της νύχτας με την εκπομπή της ίδιας ακτινοβολίας από την εδαφική και την υδάτινη επιφάνεια θα έχουμε μεγαλύτερη μείωση της θερμοκρασίας στην εδαφική από ότι στην υδάτινη επιφάνεια. Εν ολίγοις, η θερμοκρασία της επιφάνειας του εδάφους μεταβάλλεται περισσότερο συγκριτικά με τη θερμοκρασία της υδάτινης επιφάνειας κατά τη διάρκεια της ημέρας και της νύχτας.

Ικανότητα Εκπομπής

Η ικανότητα εκπομπής ενός αντικειμένου ποσοτικοποιείται από την αναλογία της ακτινοβολίας που εκπέμπει προς την ακτινοβολία ενός τέλει εκπομπού. Η άμμος, για παράδειγμα, έχει αναλογία 0.9-0.98. Η ανακλαστικότητα είναι η αναλογία της ακτινοβολίας που ανακλάται προς την εισερχόμενη ακτινοβολία.

Βαρομετρικά Συστήματα

Επίσης, στα μεγάλης κλίμακας βαρομετρικά συστήματα επηρεάζονται οι θερμοκρασίες στο οριακό στρώμα. Για παράδειγμα, στα υψηλά βαρομετρικά συστήματα ο αέρας κατέρχεται, θερμαίνεται, συχνά πάνω από ένα ψυχρότερο στρώμα αέρα με αποτέλεσμα να δημιουργείται αναστροφή της θερμοκρασίας (αύξηση της θερμοκρασίας με την αύξηση του ύψους). Έτσι, καθώς ο αέρας βυθίζεται σε ένα περιβάλλον με αναστροφή θερμοκρασίας, διαλύει τα νέφη, αυξάνει την ηλιακή ακτινοβολία που φτάνει στο έδαφος και τελικά οδηγεί στην αύξηση της θερμοκρασίας τους εδάφους. Εν τούτοις, σε ένα χαμηλό βαρομετρικό σύστημα ο αέρας ανυψώνεται, ψύχεται, συχνά δημιουργούνται νέφη και μειώνεται η ηλιακή ακτινοβολία που φτάνει στο έδαφος.

Διάρκεια της ημέρας

Τέλος, η διάρκεια της ημέρας επηρεάζει τις θερμοκρασίες, καθώς στις μεγαλύτερες έχουμε μεγαλύτερα διαστήματα ηλιοφάνειας και θέρμανσης ενώ στις μικρότερες μέρες (μεγαλύτερες νύχτες) έχουμε μεγαλύτερα διαστήματα ψύξης εξαιτίας της μικρότερης ηλιοφάνειας και της περισσότερης εκπομπής υπέρυθρης ακτινοβολίας από το έδαφος.

3.2.3 Η Καταστατική Εξίσωση

Η θερμοδυναμική κατάσταση της ατμόσφαιρας σε κάθε σημείο καθορίζεται εκτός από τις τιμές της θερμοκρασίας T , τις τιμές της πίεσης p και της πυκνότητας ρ (ή του ειδικού όγκου α που ισούται με $1/\rho$) σε αυτό το σημείο. Αυτές οι φυσικές ποσότητες σχετίζονται μεταξύ τους με την **καταστατική εξίσωση** για ένα πραγματικό αέριο και με **το νόμο των ιδανικών αερίων** για ένα ιδανικό αέριο. Ιδανικό αέριο είναι το αέριο για το οποίο το γινόμενο της πίεση και του όγκου είναι ανάλογο της απόλυτης θερμοκρασίας. Ένα πραγματικό αέριο είναι ιδανικό όταν οι μοριακές δυνάμεις σε αυτό είναι μικρές, το οποίο συμβαίνει όταν οι πιέσεις είναι αρκετά χαμηλές ή οι θερμοκρασίες αρκετά υψηλές έτσι ώστε το αέριο να είναι ικανοποιητικά αραιωμένο. Υπό τυπικές συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας, ο νόμος των ιδανικών αερίων δίνει ένα σφάλμα μικρότερο του 2 τοις εκατό για το ξηρό αέρα και τους υδρατμούς σε σχέση με την καταστατική εξίσωση. Έτσι, ο νόμος των ιδανικών αερίων μπορεί να προσεγγίσει την καταστατική εξίσωση. Αν συμβολίσουμε με p , T , V και n την πίεση, τη θερμοκρασία, τον όγκο και τον αριθμό των moles του αερίου αντίστοιχα μπορούμε να εκφράσουμε το νόμο των ιδανικών αερίων ή την απλοποιημένη καταστατική εξίσωση ως εξής:

$$p = \frac{nR^*T}{V} \quad (3.17)$$

όπου $R^* = 8.31451 \cdot 10^4 \text{ cm}^3 \text{ hPa mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ η διεθνής σταθερά των αερίων. Η παραπάνω σχέση προκύπτει από το νόμο του Boyle ($p \propto 1/V$ υπό σταθερή θερμοκρασία), από το νόμο του Charles ($V \propto T$ υπό σταθερή πίεση) και από το νόμο του Avogadro ($V \propto n$ υπό σταθερή πίεση και θερμοκρασία).

Όσον αφορά στο **ξηρό αέρα (dry air)**, η **καταστατική εξίσωση** είναι η εξής:

$$p_d = \frac{n_d R^* T}{V} = \frac{n_d m_d}{V} \left(\frac{R^*}{m_d} \right) T = \rho_d R' T \quad (3.18)$$

όπου p_d η μερική πίεση του ξηρού αέρα, n_d ο αριθμός των moles του ξηρού αέρα, m_d το μοριακό βάρος του ξηρού αέρα, $\rho_d = (n_d m_d)/V$ η πυκνότητα του ξηρού αέρα ($Kg m^{-3}$ ή $g cm^{-3}$) και $R' = R^*/m_d = 2870.3 cm^3 hPa g^{-1} K^{-1}$ η σταθερά των αερίων για το ξηρό αέρα.

Όσον αφορά στους υδρατμούς (water vapor), η καταστατική εξίσωση είναι η εξής:

$$p_\nu = \frac{n_\nu R^* T}{V} = \frac{n_\nu m_\nu}{V} \left(\frac{R^*}{m_\nu} \right) T = \rho_\nu R_\nu T \quad (3.19)$$

όπου p_ν η μερική πίεση των υδρατμών, n_ν ο αριθμός των moles των υδρατμών, m_ν το μοριακό βάρος των υδρατμών, $\rho_\nu = (n_\nu m_\nu)/V$ η πυκνότητα των υδρατμών ($Kg m^{-3}$ ή $g cm^{-3}$) και $R_\nu = R^*/m_\nu = 4614.0 cm^3 hPa g^{-1} K^{-1}$ η σταθερά των αερίων για τους υδρατμούς.

Χρήσιμο σε αυτό το σημείο είναι να αναφέρουμε κάποιες αναλογίες που θα χρησιμοποιήσουμε και παρακάτω. Η αναλογία μάζας των υδρατμών ως προς τη μάζα του ξηρού αέρα είναι

$$\epsilon = \frac{R'}{R_\nu} = \frac{R^* m_\nu}{m_d R^*} = \frac{m_\nu}{m_d} = 0.622 \quad (3.20)$$

Η αναλογία πυκνότητας των υδρατμών ως προς τη πυκνότητα του ξηρού αέρα είναι

$$\omega_\nu = \frac{\rho_\nu}{\rho_d} = \frac{m_\nu p_\nu}{m_d p_d} = \epsilon \frac{p_\nu}{p_d} \quad (3.21)$$

Επίσης, η αναλογία πυκνότητας υδρατμών ως προς την πυκνότητα του αέρα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$q_\nu = \frac{\rho_\nu}{\rho} = \frac{\rho_\nu}{\rho_d + \rho_\nu} = \frac{\frac{p_\nu}{R_\nu T}}{\frac{p_d}{R' T} + \frac{p_\nu}{R_\nu T}} = \frac{\frac{R'}{R_\nu} p_\nu}{p_d + \frac{R'}{R_\nu} p_\nu} = \frac{\epsilon p_\nu}{p_d + \epsilon p_\nu} \quad (3.22)$$

$$\text{ή αλλιώς } q_\nu \stackrel{1/p_d}{=} \frac{\epsilon \frac{p_\nu}{p_d}}{1 + \epsilon \frac{p_\nu}{p_d}} = \frac{\omega_\nu}{1 + \omega_\nu} \quad (3.23)$$

Επίσης, η καταστατική εξίσωση του υγρού αέρα (περιέχει ξηρό αέρα και υδρατμούς) είναι:

$$\begin{aligned} p &= p_d + p_\nu = \rho_d R' T + \rho_\nu R_\nu T = \rho_d R' T + \rho_\nu R' \left(\frac{R_\nu}{R'} \right) T = R' T \left(\rho_d + \rho_\nu \frac{R_\nu}{R'} \right) \\ &\stackrel{\epsilon=R'/R_\nu}{=} \rho R' T \left(\frac{\rho_d + \rho_\nu/\epsilon}{\rho_d + \rho_\nu} \right) = \rho R' T \left(\frac{1 + \rho_\nu/(\rho_d \epsilon)}{1 + \rho_\nu/\rho_d} \right) \stackrel{\omega_\nu=\rho_\nu/\rho_d}{=} \rho R' \left(\frac{1 + \omega_\nu/\epsilon}{1 + \omega_\nu} \right) T \\ &= \rho R' \left(1 + \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} q_\nu \right) T \stackrel{\epsilon=0.622}{=} \rho R' (1 + 0.608 q_\nu) T \Rightarrow p = \rho R_m T = \rho R' T_\nu \end{aligned} \quad (3.24)$$

όπου $R_m = R' (1 + 0.608 q_\nu)$ η σταθερά των αερίων για τον υγρό αέρα και $T_\nu = T (1 + 0.608 q_\nu)$ η εικονική θερμοκρασία.

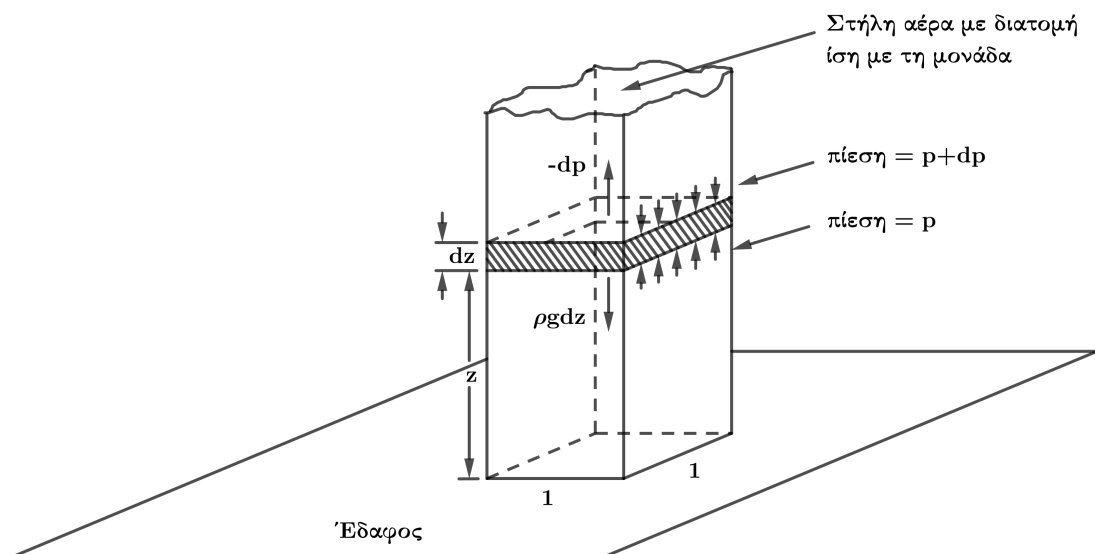
Ορισμός 3. Η εικονική θερμοκρασία (*virtual temperature*) είναι η θερμοκρασία ενός δείγματος ξηρού αέρα στην ίδια πυκνότητα και πίεση με τον υγρό αέρα.

Επειδή η σταθερά των αερίων για τον υγρό αέρα είναι μεγαλύτερη από τη σταθερά των αερίων για το ξηρό αέρα, από τις καταστατικές εξισώσεις για ίδια θερμοκρασία και πίεση έπεται ότι μια υγρή αέρια μάζα έχει μικρότερη πυκνότητα από μια ξηρή αέρια μάζα. Έτσι, για να έχει μια ξηρή αέρια μάζα την ίδια πυκνότητα με μια υγρή στην ίδια πίεση θα πρέπει η θερμοκρασία της ξηρής αέριας μάζας να είναι μεγαλύτερη από αυτή της υγρής κατά R_m/R' , δηλαδή να έχει την εικονική θερμοκρασία η οποία είναι μεγαλύτερη από την πραγματική της θερμοκρασία.

3.2.4 Η Υδροστατική Εξίσωση

Υπό την απουσία ατμοσφαιρικών κινήσεων κάθε μόριο αέρα έλκεται από τη γη με αποτέλεσμα την κίνηση τους προς τα κάτω η οποία, όμως, εμποδίζεται λόγω των κρούσεων με τα μόρια του αέρα που βρίσκονται σε κατώτερα ύψη. Με άλλα λόγια, η δύναμη βαρύτητας πρέπει να εξισορροπείται από την κάθετη συνιστώσα της δύναμης βαροβαθμίδας.

Όπως έχουμε ήδη ορίσει, πίεση είναι η δύναμη που εφαρμόζεται κάθετα σε μία επιφάνεια ανά μονάδα εμβαδού της επιφάνειας αυτής. Στο παρακάτω σχήμα 3.3 τα μικρά βέλη με φορά προς τα πάνω και προς τα κάτω συμβολίζουν τις δυνάμεις που ασκούνται από την πίεση του αέρα στην αέρια μάζα του γραμμοσκιασμένου χωρίου. Η δύναμη που ακείται προς τα κάτω λόγω βαρύτητας στο γραμμοσκιασμένο χωρίο είναι $dm \cdot g = (dm/dV) \cdot g dV = \rho g dz$, αφού το εμβαδό της βάσης είναι $dxdy = 1$ και άρα ο όγκος είναι $dV = dxdydz \Rightarrow dV = dz$. Η συνολική δύναμη πίεσης δίνεται από τη διαφορά μεταξύ των δυνάμεων με φορά προς τα πάνω που ασκούνται κατά μήκος της κάτω επιφάνειας του χωρίου και των δυνάμεων με φορά προς τα κάτω που ασκούνται κατά μήκος της άνω επιφάνειας του χωρίου, και ισούται με $-dp$. Να σημειώσουμε ότι το πρόσημο (-) εκφράζει ότι η πίεση μειώνεται με το ύψος.



Σχήμα 3.3: Ισορροπία δυνάμεων στην υδροστατική ισορροπία [1].

Έτσι, είναι φανερό ότι:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (3.25)$$

Αυτή η συνθήκη υδροστατικής ισορροπίας αποτελεί μία πολύ καλή προσέγγιση για την κάθετη συνιστώσα της πίεσης στην πραγματική ατμόσφαιρα. Μόνο για έντονα φαινόμενα μικρής κλίμακας, όπως γραμμές καταιγίδας και ανεμοστρόβιλους, είναι απαραίτητο να θεωρήσουμε αποκλίσεις από την υδροστατική ισορροπία. Έτσι, μέσω της υδροστατικής εξίσωσης μπορούμε να υπολογίσουμε την πίεση σε ένα δεδομένο ύψος με την

$$p_k \approx p_{k+1} - \rho_{k+1} g_{k+1} (z_k - z_{k+1}) \quad (3.26)$$

όπου p_k είναι η πίεση σε ένα οποιοδήποτε μεγαλύτερο ύψος z_k στην ατμόσφαιρα και $p_{k+1}, \rho_{k+1}, g_{k+1}$ είναι η πίεση, η πυκνότητα και η βαρύτητα σε ένα οποιοδήποτε χαμηλότερο ύψος στην ατμόσφαιρα. Αυτήν την εξίσωση θα χρησιμοποιήσουμε και στο μετεωρολογικό μοντέλο που θα κατασκευάσουμε στο τέλος της εργασίας για να υπολογίσουμε την πίεση σε κάποια σημεία του πλέγματος.

Ολοκληρώνοντας, ωστόσο, την (3.25) από ένα ύψος z έως την κορυφή της ατμόσφαιρας έχουμε:

$$p(z) = \int_z^\infty \rho g d\tilde{z} \quad (3.27)$$

και άρα προκύπτει ότι η πίεση σε οποιοδήποτε σημείο ισούται με το βάρος της στήλης του αέρα με διατομή ίση με τη μονάδα που βρίσκεται πάνω από το σημείο αυτό. Έτσι, η πίεση της μέσης στάθμης θάλασσας $p(0) = 1013.25 \text{ hpa}$ (Διεθνής Τυπική Ατμόσφαιρα βλ. Παράρτημα Α') είναι απλά το μέσο βάρος ανά τετραγωνικό μέτρο της στήλης ολόκληρης της ατμόσφαιρας. Ωστόσο, για ευκολία των υπολογισμών συχνά υποθέτουμε ότι η πίεση μέσης στάθμης θάλασσας ισούται με 1000 hpa .

Επίσης, συχνά εκφράζουμε την υδροστατική εξίσωση σε όρους γεωδυναμικού αντί να χρησιμοποιούμε το γεωμετρικό ύψος.

Ορισμός 4. Γεωδυναμικό $\Phi(z)$ σε ένα ύψος z της ατμόσφαιρας είναι το έργο ανά μονάδα μάζας που παράγεται ενάντια στη δύναμη της βαρύτητας όταν μάζα υψώνεται από την επιφάνεια της γης στο ύψος z .

Από τον ορισμό του έργου $dW = \vec{F} \cdot dz \hat{e}_z$ έπεται ότι το γεωδυναμικό είναι:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{|W|}{m} = \frac{1}{m} \int_0^z m \vec{g} \cdot d\vec{z} = \frac{1}{m} \int_0^z |mg(-\hat{e}_z) \cdot \hat{e}_z| dz \\ &\Rightarrow \Phi(z) = \int_0^z g dz \end{aligned} \quad (3.28)$$

με το γεωδυναμικό $\Phi(0)$ στην επιφάνεια της γης να είναι μηδέν. Από την παραπάνω σχέση (3.28) συνεπάγεται ότι $d\Phi(z) = g dz$ και από την καταστατική εξίσωση για τον υγρό αέρα (3.24) έχουμε ότι: $1/\rho = R_m T/p$. Οπότε, μπορούμε να εκφράσουμε την υδροστατική εξίσωση στη μορφή:

$$d\Phi = g dz = -\frac{dp}{\rho} = -\frac{R_m T}{p} dp = -R_m T \cdot d(\ln p)$$

$$\Rightarrow d\Phi = -R_m T \cdot d(\ln p) \quad (3.29)$$

Έτσι, παρατηρούμε ότι η μεταβολή του γεωδυναμικού ως προς την πίεση εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία. Ολοκληρώνοντας την (3.29) ως προς την κάθετο παίρνουμε μία μορφή της υψομετρικής εξίσωσης:

$$\int_{z_1}^{z_2} d\Phi = - \int_{p_1}^{p_2} R_m T d(\ln p) \Rightarrow \Phi(z_2) - \Phi(z_1) = g_0 (Z_2 - Z_1) = R_m \int_{p_2}^{p_1} T d(\ln p) \quad (3.30)$$

Εδώ το $Z \equiv \Phi(z)/g_0$, όπου $g_0 = 9.80665 \text{ ms}^{-2}$ η παγκόσμια μέση επιτάχυνση της βαρύτητας στη μέση στάθμη θάλασσας, είναι το **γεωδυναμικό ύψος**. Έτσι, στην τροπόσφαιρα και στη κατώτερη στρατόσφαιρα το γεωδυναμικό ύψος Z είναι αριθμητικά σχεδόν ίδιο με το γεωμετρικό ύψος z .

Οπότε, σε όρους γεωδυναμικού ύψους Z η υψομετρική εξίσωση γράφεται:

$$Z_T \equiv Z_2 - Z_1 = \frac{R_m}{g_0} \int_{p_2}^{p_1} T d(\ln p) \quad (3.31)$$

όπου Z_T είναι το πάχος του ατμοσφαιρικού στρώματος ανάμεσα στις επιφάνειες πίεσης p_2 και p_1 . Ορίζοντας τη μέση θερμοκρασία ενός στρώματος ατμοσφαιρικού αέρα ως:

$$\bar{T} = \frac{\int_{p_2}^{p_1} T d(\ln p)}{\int_{p_2}^{p_1} d(\ln p)} \quad (3.32)$$

και τη μέση κλίμακα ύψους ενός στρώματος ατμοσφαιρικού αέρα ως $H \equiv R_m \bar{T}/g_0$ από την εξίσωση (3.31) έχουμε:

$$Z_T = H \ln(p_1/p_2) \quad (3.33)$$

Άρα, το πάχος ενός στρώματος αέρα που οριοθετείται από ισοβαρικές επιφάνειες είναι ανάλογο της μέσης θερμοκρασίας του στρώματος. Από την (3.33) έπεται ότι η πίεση μειώνεται με το ύψος πιο γρήγορα σε ένα ψυχρό στρώμα από ότι σε ένα θερμό στρώμα διότι για σταθερό Z_T τα H και $\ln(p_1/p_2)$ είναι αντιστρόφως ανάλογα και άρα για μικρότερες θερμοκρασίες, και άρα μικρότερα H , θα έχουμε μεγαλύτερο $\ln(p_1/p_2)$, και άρα $p_1 > p_2$. Αυτό που προκύπτει, επίσης, από την (3.33) είναι ότι σε μία ισόθερμη ατμόσφαιρα θερμοκρασίας T το γεωδυναμικό ύψος είναι ανάλογο του φυσικού λογαρίθμου της πίεσης κανονικοποιημένος από την πίεση επιφανείας, δηλαδή

$$Z = H \ln(p_0/p) \quad (3.34)$$

όπου p_0 είναι η πίεση για $Z = 0$. Άρα, σε μία ισόθερμη ατμόσφαιρα η πίεση μειώνεται εκθετικά με το γεωδυναμικό ύψος:

$$e^{Z/H} = e^{\ln(p_0/p)} \Rightarrow p(Z) = p(0)e^{-Z/H} \quad (3.35)$$

3.2.5 Άλλες μορφές του πρώτου νόμου της θερμοδυναμικής

Όπως περιγράψαμε και στην υποενότητα (3.2.1), ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής όπως αυτός εφαρμόζεται στην ατμόσφαιρα ανά μονάδα μάζας είναι ο

$$dQ = dU + dW \quad (3.36)$$

όπου dQ καλείται όρος διαβατικής θέρμανσης, ο οποίος είναι η ενέργεια ανά μονάδα μάζας (J/kg) που μεταφέρεται μεταξύ του τμήματος αέρα και του περιβάλλοντός του, dU είναι η μεταβολή στην εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας (J/kg) του τμήματος αέρα και dW είναι το έργο ανά μονάδα μάζας (J/kg) από ή στο τμήμα αέρα.

Όταν ο αέρας εκτονώνεται, το έργο που παράγεται από τον αέρα ανά μονάδα μάζας είναι

$$dW = \frac{p dV}{m} = p d\alpha \quad (3.37)$$

όπου $\alpha = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{m}$ ο ειδικός όγκος του αέρα με $d\alpha = d\left(\frac{V}{m}\right) = \frac{dV}{m}$

Όταν ο αέρας ανέρχεται σε χαμηλότερες πιέσεις, εκτονώνεται, το έργο παράγεται από το τμήμα αέρα και έχουμε $dV > 0$. Ωστόσο, όταν ο αέρας κατέρχεται σε υψηλότερες πιέσεις, συμπιέζεται, το έργο παράγεται στο τμήμα αέρα και έχουμε $dV < 0$.

Όσον αφορά στη μεταβολή της εσωτερικής μεταβολής της ενέργειας του αέρα, αυτή ισούται με τη μεταβολή της θερμοκρασίας επί την ενέργεια που απαιτείται για να μεταβληθεί κατά ένα βαθμό Celsius (ή 1 Kelvin) η θερμοκρασία του αέρα χωρίς να επηρεάζεται ο όγκος ή το έργο. Δηλαδή,

$$dU = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_\alpha dT = c_{v,m} dT \quad (3.38)$$

όπου $c_{v,m} = (\partial Q/\partial T)_\alpha$ η ειδική θερμότητα του υγρού αέρα υπό σταθερό όγκο και είναι η ενέργεια που απαιτείται για να αυξηθεί η θερμοκρασία ενός γραμμαρίου αέρα κατά 1 Kelvin υπό σταθερό όγκο και διαφέρει ανάλογα με την αναλογία των υδρατμών στον αέρα. Αντικαθιστώντας, λοιπόν, τις εκφράσεις (3.37) και (3.38) στον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής παίρνουμε μια άλλη μορφή του ως εξής:

$$dQ = c_{v,m} dT + p d\alpha \quad (3.39)$$

Επίσης, μια έκφραση για το $c_{v,m}$ μπορούμε να έχουμε αν σημειώσουμε ότι

$$(m_d + m_v)dQ = (m_d c_{v,d} + m_v c_{v,V})dT \quad (3.40)$$

όπου $c_{v,d} = 717.63 J kg^{-1} K^{-1}$ στους $298 K$ η ειδική θερμότητα του ξηρού αέρα υπό σταθερό όγκο και $c_{v,V} = 1403.2 J kg^{-1} K^{-1}$ η ειδική θερμότητα των υδρατμών υπό

σταθερό όγκο. Διαιρώντας με $(m_d + m_\nu)dT$ έχουμε

$$c_{v,m} = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_\alpha = \frac{m_d c_{v,d} + m_\nu c_{v,V}}{m_d + m_\nu} \stackrel{\cdot 1/m_d}{=} \frac{c_{v,d} + \frac{m_\nu}{m_d} c_{v,V}}{1 + \frac{m_\nu}{m_d}} = \frac{c_{v,d} + \omega_\nu c_{v,V}}{1 + \omega_\nu}$$

$$\Rightarrow c_{v,m} = c_{v,d} \frac{1 + \omega_\nu \frac{c_{v,V}}{c_{v,d}}}{1 + \omega_\nu} = c_{v,d} \frac{1 + \omega_\nu - \omega_\nu + \omega_\nu \frac{c_{v,V}}{c_{v,d}}}{1 + \omega_\nu} = c_{v,d} \left(1 + \frac{\omega_\nu}{1 + \omega_\nu} \left(\frac{c_{v,V}}{c_{v,d}} - 1 \right) \right)$$

$$\Rightarrow c_{v,m} = c_{v,d} (1 + 0.955 q_\nu) \quad (3.41)$$

αφού $q_\nu = \omega_\nu / (1 + \omega_\nu)$ και $c_{v,V} / c_{v,d} - 1 = 0.955$.

Εν τούτοις, **μια άλλη μορφή του πρώτου νόμου της θερμοδυναμικής** μπορεί να προκύψει αν θεωρήσουμε την καταστατική εξίσωση

$$p = \rho R_m T \stackrel{\alpha=1/\rho}{\Rightarrow} p\alpha = R_m T \Rightarrow p d\alpha + \alpha dp = R_m dT \Rightarrow p d\alpha = R_m dT - \alpha dp \quad (3.42)$$

Έτσι, η εξίσωση (3.39) έπεται ότι

$$dQ = c_{v,m} dT + R_m dT - \alpha dp \Rightarrow dQ = (c_{v,m} + R_m) dT - \alpha dp$$

$$\Rightarrow dQ = c_{p,m} dT - \alpha dp \quad (3.43)$$

όπου $c_{p,m} = c_{v,m} + R_m$, το οποίο θα αποδείξουμε παρακάτω, είναι η ειδική θερμότητα του υγρού αέρα υπό σταθερή πίεση.

Όπως και στην απόδειξη του $c_{v,m}$ έχουμε:

$$c_{p,m} = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p = \frac{m_d c_{p,d} + m_\nu c_{p,V}}{m_d} = \frac{c_{p,d} + c_{p,V} \omega_\nu}{1 + \omega_\nu}$$

$$= c_{p,d} (1 + 0.856 q_\nu) \approx c_{p,d} (1 + 0.859 \omega_\nu) \quad (3.44)$$

όπου και εδώ αντίστοιχα χρησιμοποιήσαμε ότι $c_{p,V} / c_{p,d} - 1 = 0.856$ με το $c_{p,d} = 1004.67 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ στους 298 K να είναι η ειδική θερμότητα του ξηρού αέρα υπό σταθερή πίεση, και το $c_{p,V} = 1865.1 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ να είναι η ειδική θερμότητα των υδρατμών υπό σταθερή πίεση. Όπως και τα $c_{v,d}$, $c_{p,d}$ έτσι και το $c_{p,d}$ μεταβάλλονται πολύ λίγο με τη θερμοκρασία.

Παίρνοντας την παράγωγο με σταθερή την πίεση στην εξίσωση (3.39) για το $c_{p,m}$ έχουμε:

$$c_{p,m} = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p = c_{v,m} + p \left(\frac{d\alpha}{dT} \right)_p = c_{v,m} + p \left(\frac{d}{dT} \frac{R_m T}{p} \right)_p = c_{v,m} + R_m \quad (3.45)$$

Τέλος, μπορούμε να εκφράσουμε τον **πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής σε όρους εικονικής θερμοκρασίας αντί θερμοκρασίας**. Αν αντικαταστήσουμε τη σχέση $c_{p,m} = c_{p,d} (1 + 0.856 q_\nu)$ (3.44) και τη σχέση $T = T_\nu / (1 + 0.608 q_\nu)$ (βλ. υποενότητα 3.2.3) στην εξίσωση (3.43) παραπάνω, έχουμε

$$dQ = \frac{1 + 0.856 q_\nu}{1 + 0.608 q_\nu} c_{p,d} dT_\nu - \alpha dp \approx c_{p,d} dT_\nu - \alpha dp \quad (3.46)$$

Ένα πλεονέκτημα της εξίσωσης αυτής είναι ότι η ειδική θερμότητα αναφέρεται στο ξηρό αέρα αντί του υγρού και αυτή είναι η εξίσωση που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω για να αποδείξουμε την εξίσωση της θερμοδυναμικής.

3.2.6 Δυναμική Θερμοκρασία

Μια παράμετρος που χρησιμοποιείται συχνά για την ανάλυση της ατμόσφαιρας και στα μετεωρολογικά μοντέλα είναι η δυναμική θερμοκρασία.

Ορισμός 5. Δυναμική θερμοκρασία είναι η θερμοκρασία που θα έχει μια μη κορεσμένη αέρια μάζα αν μεταβεί προς τα κάτω και αδιαβατικά από το ύψος που βρίσκεται στα 1000 hPa.

Όπως περιγράψαμε και στις προηγούμενες υποενότητες, αδιαβατικά σημαίνει ότι δεν έχουμε μεταφορά ενέργειας και άρα $dQ = 0$. Έτσι, από το πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής στη μορφή της σχέσης (3.46) για $dQ = 0$ έχουμε ότι υπό αδιαβατικές συνθήκες ισχύει ότι

$$c_{p,m} dT = \alpha dp \quad (3.47)$$

Από καταστατική εξίσωση, όμως, έχουμε ότι $\alpha = R_m T / p$ και συνεπώς

$$\frac{dT}{T} = \left(\frac{R_m}{c_{p,m}} \right) \frac{dp}{p} \quad (3.48)$$

Ολοκληρώνοντας από T_0 έως T και από p_0 έως p προκύπτει **εξίσωση Poisson**

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T} = \left(\frac{R_m}{c_{p,m}} \right) \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} \Rightarrow \ln \frac{T}{T_0} = \left(\frac{R_m}{c_{p,m}} \right) \ln \frac{p}{p_0}$$

$$\stackrel{e_0}{\Rightarrow} T = T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R_m}{c_{p,m}}} = T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R' (1 + 0.608q_v)}{c_{p,d}(1 + 0.856q_v)}} \approx T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\kappa(1 - 0.251q_v)} \quad (3.49)$$

όπου

$$\kappa = \frac{R'}{c_{p,d}} = \frac{c_{p,d} - c_{v,d}}{c_{p,d}} \Rightarrow \boxed{\kappa = 0.286} \quad (3.50)$$

Όταν $p_0 = 1000 \text{ hPa}$, το T_0 καλείται **δυναμική θερμοκρασία του υγρού αέρα** ($\theta_{p,m}$) και έχουμε ότι

$$\theta_{p,m} = T \left(\frac{1000 \text{ hPa}}{p} \right)^{\kappa(1 - 0.251q_v)} \quad (3.51)$$

Υπό την απουσία υδρατμών, $q_v = 0$ και $p = p_d$ και τότε προκύπτει η **δυναμική θερμοκρασία του ξηρού αέρα**

$$\boxed{\theta_p = T \left(\frac{1000 \text{ hPa}}{p} \right)^{\kappa}} \quad (3.52)$$

Επειδή, συνήθως, το q_v είναι μικρότερο του 0.03 kg kg^{-1} , αν παραβλέψουμε το q_v στην εξίσωση (3.54) προκαλεί ένα σφάλμα στο κ μικρότερο του 0.75%. Οπότε, για λόγους απλότητας μπορούμε να χρησιμοποιούμε τη σχέση (3.52) για να προσδιορίσουμε τη δυναμική θερμοκρασία ακόμα και όταν υπάρχουν υδρατμοί. Επίσης, να σημειώσουμε ότι η **δυναμική θερμοκρασία διατηρείται αν ένα μη κορεσμένο τμήμα αέρα μετατοπίζεται αδιαβατικά.**

Μια άλλη παράμετρος που σχετίζεται με τη δυναμική θερμοκρασία και θα χρησιμοποιηθεί στην κατασκευή του μετεωρολογικού μοντέλου του τελευταίου κεφαλαίου είναι η δυναμική εικονική θερμοκρασία.

Ορισμός 6. Η δυναμική εικονική θερμοκρασία θ_ν υπολογίζεται αν μετατρέψουμε την υγρασία σε ξηρό αέρα εντός ενός τμήματος αέρα και έπειτα φέρουμε το τμήμα αέρα στο επίπεδο των 1000 hPa και υπολογίσουμε τη θερμοκρασία του. Διαφορετικά είναι η θερμοκρασία ενός δείγματος υγρού αέρα σαν να ήταν ξηρός αέρας στην ίδια πυκνότητα και πίεση του υγρού αέρα.

Θα αποδείξουμε την αντίστοιχη εξίσωση. Από καταστατική εξίσωση ισχύει ότι $\alpha = R'T_\nu/p$. Έτσι, η (3.47) έπεται ότι

$$c_{p,m}dT = \frac{R'T_\nu}{p} dp \Rightarrow \frac{dT}{T} = (1 + 0.608q_\nu) \frac{R'}{c_{p,m}} \frac{dp}{p} \quad (3.53)$$

και ολοκληρώνοντας από $T_0 = \theta_\nu$ εως T_ν και από $p_0 = 1000 \text{ hPa}$ εως p παίρνουμε μια εξίσωση Poisson και ομοίως με παραπάνω θα έχουμε

$$\int_{\theta_\nu}^{T_\nu} \frac{dT}{T} = (1+0.608q_\nu) \left(\frac{R'}{c_{p,m}} \right) \int_{1000 \text{ hPa}}^p \frac{dp}{p} \Rightarrow \ln \frac{T_\nu}{\theta_\nu} = (1+0.608q_\nu) \left(\frac{R'}{c_{p,m}} \right) \ln \frac{p}{1000 \text{ hPa}}$$

$$\stackrel{e^0}{\Rightarrow} \frac{T_\nu}{\theta_\nu} = \left(\frac{p}{1000 \text{ hPa}} \right)^{\frac{R'(1+0.608q_\nu)}{c_{p,m}}} \stackrel{(3.44)}{\Rightarrow} \theta_\nu = T_\nu \left(\frac{1000 \text{ hPa}}{p} \right)^{\frac{R'(1+0.608q_\nu)}{c_{p,d}(1+0.856q_\nu)}}$$

$$\theta_\nu = T(1 + 0.608 q_\nu) \left(\frac{1000 \text{ hPa}}{p} \right)^\kappa = T_\nu \left(\frac{1000 \text{ hPa}}{p} \right)^\kappa \quad (3.54)$$

Η μεταβολή στην εντροπία ενός τμήματος αέρα ανά μονάδα μάζας ($J \text{ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$) εξαιτίας της μεταφερόμενης ενέργειας μεταξύ του τμήματος αέρα και του περιβάλλοντός του είναι $dS = dQ/T$. Κατά την αδιαβατική εκτόνωση ή συμπίεση του αέρα ισχύει $dQ = 0$ και άρα δεν υπάρχει μεταβολή στην εντροπία. Έτσι, επειδή στις επιφάνειες σταθερής δυναμικής θερμοκρασία ισχύει $dQ = 0$ (εξ' ορισμού υπάρχουν αδιαβατικές συνθήκες) και άρα $dS = 0$ με αποτέλεσμα οι επιφάνειες αυτές να ονομάζονται **ισεντροπικές**. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω Σχήμα 3.4 η δυναμική εικονική θερμοκρασία αυξάνεται γραμμικά με το ύψος στην τροπόσφαιρα του βορείου ημισφαιρίου. Επίσης, η θερμοκρασία στην επιφάνεια της θάλασσας, όπως και η δυναμική εικονική θερμοκρασία, μειώνεται από τον ισημερινό προς το βόρειο πόλο κάνοντας τις ισεντροπικές επιφάνειες να γέρνουν προς το βόρειο πόλο.

Τέλος, κάτι που θα χρησιμοποιήσουμε στο μετεωρολογικό μοντέλο του τελευταίου κεφαλαίου είναι η συνάρτηση Exner η οποία προσδιορίζεται από την παράσταση $c_{p,d} P$, όπου

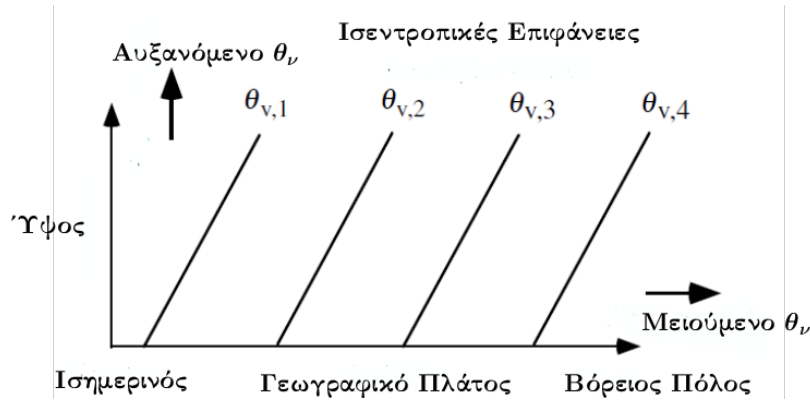
$$P = \left(\frac{p}{1000 \text{ hPa}} \right)^\kappa \quad (3.55)$$

Οπότε,

$$(3.54) \stackrel{(3.55)}{\Rightarrow} T_\nu = \theta_\nu P \quad (3.56)$$

3.3 Η εξίσωση της θερμοδυναμικής ενέργειας

Σε αυτό το σημείο θα αναλύσουμε την τρίτη θεμελιώδη αρχή διατήρησης: **την αρχή διατήρησης της ενέργειας** σύμφωνα με την οποία η ενέργεια ενός απομονωμένου συστήματος ούτε καταστρέφεται ούτε παράγεται εκ του μηδενός, αλλά



Σχήμα 3.4: Ισεντροπικές επιφάνειες ανάμεσα στον ισημερινό και το βόρειο πόλο (Jacobson).

μετατρέπεται από τη μία μορφή στην άλλη. Για την απόδειξη της θερμοδυναμικής εξίσωσης θα χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής στη μορφή της σχέσης $dQ \approx c_{p,d} dT_\nu - \alpha dp$ (3.46) και την εξίσωση συνέχειας για τον αέρα.

$$\begin{aligned}
 (3.46) \stackrel{\alpha=1/\rho}{\Rightarrow} dQ &\approx c_{p,d} dT_\nu - \frac{1}{\rho} dp \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{dQ}{dt} \approx c_{p,d} \frac{dT_\nu}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \\
 &\Rightarrow \frac{dT_\nu}{dt} \approx \frac{1}{c_{p,d}} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{c_{p,d} \rho} \frac{dp}{dt}
 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Επίσης, από την εξίσωση (3.54) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \theta_\nu = T_\nu \left(\frac{1000}{p} \right)^\kappa &\stackrel{d/dt}{\Rightarrow} \frac{d\theta_\nu}{dt} = \frac{dT_\nu}{dt} \left(\frac{1000}{p} \right)^\kappa + T_\nu \kappa \left(\frac{1000}{p} \right)^{\kappa-1} \left(-\frac{1000}{p^2} \right) \frac{dp}{dt} \\
 \Rightarrow \frac{d\theta_\nu}{dt} = \frac{\theta_\nu}{T_\nu} \frac{dT_\nu}{dt} - \kappa \theta_\nu \left(\frac{1000}{p} \right)^{-1} \left(\frac{1000}{p^2} \right) \frac{dp}{dt} &\Rightarrow \frac{d\theta_\nu}{dt} = \frac{\theta_\nu}{T_\nu} \frac{dT_\nu}{dt} - \frac{\kappa \theta_\nu}{p} \frac{dp}{dt} \\
 &\Rightarrow \frac{dT_\nu}{dt} = \frac{T_\nu}{\theta_\nu} \frac{d\theta_\nu}{dt} + \frac{\kappa T_\nu}{p} \frac{dp}{dt}
 \end{aligned} \quad (3.58)$$

και αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στην (3.57) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 \frac{T_\nu}{\theta_\nu} \frac{d\theta_\nu}{dt} + \frac{\kappa T_\nu}{p} \frac{dp}{dt} &\approx \frac{1}{c_{p,d}} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{c_{p,d} \rho} \frac{dp}{dt} \Rightarrow \frac{T_\nu}{\theta_\nu} \frac{d\theta_\nu}{dt} \approx \frac{1}{c_{p,d}} \frac{dQ}{dt} - \frac{\kappa T_\nu}{p} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{c_{p,d} \rho} \frac{dp}{dt} \\
 \stackrel{\kappa=R'/c_{p,d}}{\Rightarrow} \frac{d\theta_\nu}{dt} &\approx \frac{\theta_\nu}{c_{p,d} T_\nu} \frac{dQ}{dt} - \frac{R' T_\nu}{c_{p,d} p} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{c_{p,d} \rho} \frac{dp}{dt} \stackrel{p=\rho R' T_\nu}{=} \frac{\theta_\nu}{c_{p,d} T_\nu} \frac{dQ}{dt} - \frac{R' T_\nu}{c_{p,d} \rho R' T_\nu} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{c_{p,d} \rho} \frac{dp}{dt} \\
 \frac{d\theta_\nu}{dt} &\approx \frac{\theta_\nu}{c_{p,d} T_\nu} \frac{dQ}{dt}
 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Επίσης, αν αντικαταστήσουμε την παράγωγο $d\theta_\nu/dt$ με το ανάπτυγμα της (βλ. ενότητα 1.4)

$$\frac{d\theta_\nu}{dt} = \frac{\partial \theta_\nu}{\partial t} + u \frac{\partial \theta_\nu}{\partial x} + v \frac{\partial \theta_\nu}{\partial y} + w \frac{\partial \theta_\nu}{\partial z}$$

παίρνουμε μια ισοδύναμη εξίσωση εφαρμόσιμη σε ένα Eulerian μετεωρολογικό μοντέλο:

$$\frac{\partial \theta_\nu}{\partial t} + u \frac{\partial \theta_\nu}{\partial x} + v \frac{\partial \theta_\nu}{\partial y} + w \frac{\partial \theta_\nu}{\partial z} \approx \frac{\theta_\nu}{c_{p,d} T_\nu} \frac{dQ}{dt} \quad (3.60)$$

Τέλος, ο όρος του ρυθμού διαβατικής θέρμανσης αποτελείται από τους όρους

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_{n=1}^N \frac{dQ_n}{dt} = \frac{dQ_{c/e}}{dt} + \frac{dQ_{f/m}}{dt} + \frac{dQ_{dp/s}}{dt} + \frac{dQ_{solar}}{dt} + \frac{dQ_{ir}}{dt} \quad (3.61)$$

όπου

- N ο αριθμός των διαβατικών πηγών ή καταβόθρων ενέργειας
- $dQ_{c/e}/dt$ είναι ο ρυθμός εκπομπής(απορρόφησης) λόγω της συμπύκνωσης(εξάτμισης)
- $dQ_{f/m}/dt$ είναι ο ρυθμός εκπομπής(απορρόφησης) λόγω της παγοποίησης(λιωσίματος)
- $dQ_{dp/s}/dt$ είναι ο ρυθμός εκπομπής(απορρόφησης) λόγω της εναπόθεσης(εξάχνωσης)
- dQ_{solar}/dt είναι ο ρυθμός της ηλιακής θέρμανσης
- dQ_{ir}/dt είναι ο ρυθμός της θέρμανσης ή ψύξης δια ακτινοβολίας

Συνεπώς, η (3.60) γράφεται ως εξής

$$\frac{\partial \theta_\nu}{\partial t} + u \frac{\partial \theta_\nu}{\partial x} + v \frac{\partial \theta_\nu}{\partial y} + w \frac{\partial \theta_\nu}{\partial z} \approx \frac{\theta_\nu}{c_{p,d} T_\nu} \sum_{n=1}^N \frac{dQ_n}{dt} \quad (3.62)$$

Κεφάλαιο 4

Κατασκευή Αριθμητικού Μοντέλου Καιρού

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναπτύξουμε ένα βασικό υδροστατικό μετεωρολογικό μοντέλο οι εξισώσεις του οποίου θα είναι σε σφαιρικές συντεταγμένες με κάθετη συντεταγμένη τη σ-πίεση που θα προβλέπει το διάνυσμα της ταχύτητας του ανέμου. Πρώτα, όμως, θα μιλήσουμε για μετατροπές κάθετης συντεταγμένης, θα διακριτοποιήσουμε τις εξισώσεις των παραπάνω κεφαλαίων που θα συνθέσουν το μοντέλο αφού πρώτα τις μετατρέψουμε σε σφαιρικές -σ-πίεση συντεταγμένες και τέλος θα αναπτύξουμε τον κώδικα του μοντέλου σε Matlab.

4.1 Μετατροπές κάθετης συντεταγμένης

Μέχρι στιγμής στα προηγούμενα κεφάλαια χρησιμοποιήσαμε στις εξισώσεις ως κάθετη ανεξάρτητη μεταβλητή το ύψος. Πέρα από το ύψος, ως κάθετη ανεξάρτητη μεταβλητή δύναται να χρησιμοποιηθούν η πίεση, η σ-πίεση, το σ-ύψος και η ισηντροπική συντεταγμένη. Ένα πλεονέκτημα που έχει η σ-πίεση, έναντι της πίεσης και του ύψους, είναι ότι τα οριζόντια επίπεδα του μοντέλου δεν τέμνουν στο έδαφος. Ωστόσο, ένα μειονέκτημα που έχει η σ-πίεση, καθώς και η πίεση, είναι ότι υποθέτουμε ότι η ατμόσφαιρα είναι σε υδροστατική ισορροπία. Μια τέτοια υπόθεση είναι εύλογη για ένα παγκόσμιο μοντέλο αλλά για μέσης κλίμακας μοντέλα προκαλεί ανακρίβειες για πολύ μικρή οριζόντια ανάλυση όπου και η ατμόσφαιρα συνήθως είναι μη υδροστατική.

4.1.1 Υδροστατικά και μη υδροστατικά μοντέλα

Τα αριθμητικά σχήματα στα μετεωρολογικά μοντέλα απαιτούν χρονικό βήμα dt μικρότερο από το ελάχιστο χωρικό βήμα στο πλέγμα του μοντέλου διά την ταχύτητα της γρηγορότερης κίνησης στο χωροχρόνο του μοντέλου [2]. Η γρηγορότερη κίνηση είναι συνήθως ατμοσφαιρικά κύματα, τα οποία είναι ταλαντώσεις στην πίεση και/ή στην ταχύτητα που διαδίδονται στο χώρο και στο χρόνο και προκαλούν διαταραχές τα τμήματα αέρα δηλαδή χωρικές και προσωρινές μεταβολές στην ορμή, τη συγκέντρωση και τη θερμοκρασία. Τέτοια κύματα είναι τα ηχητικά, η βαρύτητα, τα κύματα Rossby (πλανητικά). Όταν, για παράδειγμα, υπάρχουν ακουστικά κύματα τότε το χρονικό βήμα στο μοντέλο θα πρέπει να

είναι μικρότερο από το χωρικό βήμα στην κάθετη διεύθυνση (το οποίο είναι συνήθως μικρότερο από το βήμα στο οριζόντιο επίπεδο) διά την ταχύτητα του ήχου και άρα θα πρέπει να είναι πολύ μικρό, πράγμα το οποίο απαιτεί μεγάλη υπολογιστική ισχύ. Οπότε, τα ηχητικά κύματα θα πρέπει να φιλτραριστούν ή να διαχειριστούν με ειδικές αριθμητικές μεθόδους στις εξισώσεις της δυναμικής.

Για να αποφύγουμε, λοιπόν, την ανάγκη χρήσης πολύ μικρού χρονικού βήματος, τα κάθετα διαδιδόμενα ακουστικά κύματα μπορούν να εξαλειφθούν ως λύση των βασικών εξισώσεων. Αυτό μπορεί να γίνει αν απαλείψουμε το dw/dt από την εξίσωση κίνησης στην κάθετη διεύθυνση (**υδροστατική προσέγγιση**) ή το $\partial\rho/\partial t$ από την εξίσωση κίνησης για τον αέρα (**ανελαστική προσέγγιση**).

Ένα μοντέλο που χρησιμοποιεί την υδροστατική εξίσωση αντί της εξίσωσης κίνησης στην κάθετη διεύθυνση ονομάζεται **υδροστατικό μοντέλο**. Ένα μοντέλο που διατηρεί την εξίσωση κίνησης στην κάθετη διεύθυνση ονομάζεται **μη υδροστατικό**. Τώρα ένα μη υδροστατικό μοντέλο που λύνει την ανελαστική εξίσωση συνέχειας για τον αέρα λέγεται **ανελαστικό** ενώ ένα μη υδροστατικό μοντέλο που λύνει την ολόκληρη εξίσωση συνέχειας λέγεται **ελαστικό**.

Εξισώσεις υδροστατικού μοντέλου

- $dw/dt = 0$
- Η δυναμική εικονική θερμοκρασία βρίσκεται από τη θερμοδυναμική εξίσωση (3.62):

$$\frac{\partial\theta_\nu}{\partial t} + u\frac{\partial\theta_\nu}{\partial x} + v\frac{\partial\theta_\nu}{\partial y} + w\frac{\partial\theta_\nu}{\partial z} \approx \frac{\theta_\nu}{c_{p,d}T_\nu} \sum_{n=1}^N \frac{dQ_n}{dt}$$

- Η ειδική υγρασία των υδρατμών από την εξίσωση συνέχειας
- Οι ταχύτητες στο οριζόντιο επίπεδο από τις εξισώσεις κίνησης (2.62), (2.63) στο οριζόντιο επίπεδο (σφαιρικές συντεταγμένες)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{R_\Gamma \cos\phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{R_\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \phi} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{uv \tan\phi}{R_\Gamma} + fv - \frac{1}{\rho R_\Gamma \cos\phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + F_{Tx}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{R_\Gamma \cos\phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{R_\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{u^2 \tan\phi}{R_\Gamma} - fu - \frac{1}{\rho R_\Gamma} \frac{\partial p}{\partial \phi} + F_{Ty}$$

- Η πίεση του αέρα υπολογίζεται διαγνωστικά από την υδροστατική εξίσωση (3.25)

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

- Η θερμοκρασία του αέρα υπολογίζεται, επίσης, διαγνωστικά από τη δυναμική εικονική θερμοκρασία μέσω της (3.54)

$$\theta_\nu = T(1 + 0.608 q_\nu) \left(\frac{1000 \text{ hPa}}{p} \right)^\kappa = T_\nu \left(\frac{1000 \text{ hPa}}{p} \right)^\kappa$$

- Η πυκνότητα βρίσκεται ως συνάρτηση της πίεσης και της θερμοκρασίας από την καταστατική εξίσωση (3.24)

$$p = \rho R_m T = \rho R' T_\nu$$

- Αφού βρεθεί η πυκνότητα, το w υπολογίζεται διαγνωστικά από την εξίσωση συνέχειας (3.4):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0$$

Ένα πλεονέκτημα των υδροστατικών μοντέλων είναι ότι εξαλείφουν τα κάθετα διαδιδόμενα ακουστικά κύματα ως πιθανή λύση των εξισώσεων της δυναμικής ενώ ένα μειονέκτημα είναι ότι δεν επιλύουν την κάθετη επιτάχυνση καλά.

Εξισώσεις ελαστικού μη υδροστατικού μοντέλου

Οι εξισώσεις που επιλύονται είναι οι ίδιες με το υδροστατικό μοντέλο με τη διαφορά ότι:

- η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας βρίσκεται από την εξίσωση κίνησης στην κάθετη διεύθυνση (2.64) (σφαιρικές συντεταγμένες):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{u}{R_\Gamma \cos \phi} \frac{\partial w}{\partial \lambda} + \frac{v}{R_\Gamma} \frac{\partial w}{\partial \phi} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega u \cos \phi + F_{Tz}$$

- η πυκνότητα του αέρα βρίσκεται από την εξίσωση συνέχειας του αέρα
- και η πίεση του αέρα βρίσκεται από την καταστατική εξίσωση.

4.1.2 Σίγμα-πίεση ως κάθετη συντεταγμένη

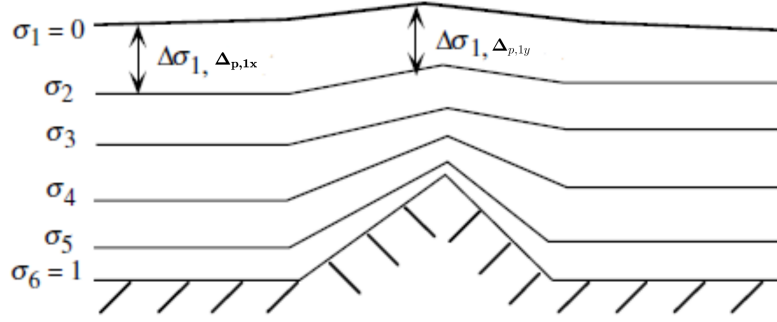
Μια κάθετη συντεταγμένη όπου οι επιφάνειες της μεταβλητής της συντεταγμένης δεν τέμνουν την τοπογραφία είναι η **σίγμα-πίεση συντεταγμένη**. Σε αυτή την συντεταγμένη, οι κορυφές και τα πατώματα των στρωμάτων της ατμόσφαιρας προσδιορίζονται ως επιφάνειες σταθερού σ , όπου το σ ισούται με τη διαφορά των πιέσεων του πατώματος ενός στρώματος και της κορυφής του μοντέλου διά τη διαφορά των πιέσεων του πατώματος και της κορυφής του μοντέλου. Δηλαδή,

$$\sigma = \frac{p - p_{top}}{p_{surf} - p_{top}} \quad \pi \equiv p_{surf} - p_{top} \quad \frac{p - p_{top}}{\pi} \quad (4.1)$$

όπου p είναι η πίεση σε ένα ύψος που μας ενδιαφέρει, p_{surf} είναι η πίεση στην επιφάνεια του πατώματος του μοντέλου και p_{top} είναι η πίεση στην επιφάνεια της κορυφής του μοντέλου. Στην σ-πίεση συντεταγμένη χρησιμοποιείται η υδροστατική προσέγγιση για να παραχθούν οι εξισώσεις. Τα μη υδροστατικά μοντέλα δεν χρησιμοποιούν αυτή την συντεταγμένη.

Επίσης, η πίεση σε ένα σ-επίπεδο από την παραπάνω εξίσωση είναι:

$$p = p_{top} + \sigma \pi \quad (4.2)$$



Σχήμα 4.1: Ύψη επιφανειών σ-πίεσης συντεταγμένης. Κάθε στρώμα έχει το ίδιο σ-πάχος αλλά διαφορετικό ‘πάχος’ πιέσεων. Οι δείκτες x και y υποδηλώνουν δύο διαφορετικές θέσεις στο οριζόντιο επίπεδο. Η πίεση στην επιφάνεια μεταβάλλεται οριζόντια.[2]

Το σ είναι ένα κλάσμα μικρότερο ή ίσο του 1. Στο πάτωμα του μοντέλου έχουμε $\sigma = 1$, τα όρια των ενδιάμεσων στρωμάτων έχουν σ τιμές που είναι σταθερές με το χρόνο και στην κορυφή του μοντέλου θεωρούμε την πίεση p_{top} σταθερή στο χώρο και στο χρόνο και το $\sigma = 0$. Η πίεση στο πάτωμα του μοντέλου p_{surf} μεταβάλλεται και άρα τα p , π μεταβάλλονται επίσης στο χώρο και στο χρόνο.

4.1.3 Η εξίσωση συνέχειας σε σφαιρικές-σ-πίεση συντεταγμένες

Για να αποδείξουμε την εξίσωση συνέχειας σε σφαιρικές-σ-πίεση συντεταγμένες θα πρέπει πρώτα να την αποδείξουμε σε καρτεσιανές-πίεση συντεταγμένες και να χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια την υδροστατική εξίσωση και την παράγωγο στη σ-πίεση συντεταγμένη.

Αρχικά, η εξίσωση συνέχειας σε καρτεσιανές-ύψος συντεταγμένες έχουμε αποδείξει (σχέση 3.6) ότι είναι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) - (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\rho$$

και χωρίζοντας την οριζόντια και την κάθετη συνιστώσα έχουμε:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_z = -\rho \left(\vec{\nabla}_z \cdot \vec{U}_h + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - (\vec{U}_h \cdot \vec{\nabla}_z)\rho - w \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (4.3)$$

όπου ο δείκτης z υποδεικνύει ότι η τιμή λαμβάνεται κατά μήκος μιας επιφάνειας σταθερού ύψους και $\vec{U}_h = (u, v)$.

Επίσης, ο τύπος μετατροπής της οριζόντιας βαθμίδας από καρτεσιανές-ύψος σε καρτεσιανές-πίεση συντεταγμένες είναι [2]

$$\vec{\nabla}_z = \vec{\nabla}_p + \vec{\nabla}_z(p) \frac{\partial}{\partial p} \quad (4.4)$$

και άρα προκύπτει ότι

$$\vec{\nabla}_z \cdot \vec{U}_h = \vec{\nabla}_p \cdot \vec{U}_h + \vec{\nabla}_z(p) \frac{\partial \vec{U}_h}{\partial p} \quad (4.5)$$

Συνεπώς, η

$$(4.3) \stackrel{(4.5)}{\Rightarrow} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_z = -\rho \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{U}_h + \vec{\nabla}_z(p) \frac{\partial \vec{U}_h}{\partial p} \right) - (\vec{U}_h \cdot \vec{\nabla}_z) \rho - \rho \frac{\partial w}{\partial z} - w \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_z = -\rho \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{U}_h + \vec{\nabla}_z(p) \frac{\partial \vec{U}_h}{\partial p} \right) - (\vec{U}_h \cdot \vec{\nabla}_z) \rho - \frac{\partial(w\rho)}{\partial z}$$

και από υδροστατική εξίσωση ισχύει ότι $1/dz = -\rho g/dp$ και άρα

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_z = -\rho \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{U}_h + \vec{\nabla}_z(p) \frac{\partial \vec{U}_h}{\partial p} \right) - (\vec{U}_h \cdot \vec{\nabla}_z) \rho + \rho g \frac{\partial(w\rho)}{\partial p} \quad (4.6)$$

Ωστόσο, η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στην πίεση συντεταγμένη είναι

$$w_p = \frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_z + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) p = \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_z + (\vec{U}_h \cdot \vec{\nabla}_z) p + w \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.7)$$

και από την υδροστατική εξίσωση $\partial p/\partial z = -\rho g$ έχουμε:

$$w_p = - \left(\rho g \frac{\partial z}{\partial t} \right)_z + (\vec{U}_h \cdot \vec{\nabla}_z) p - w \rho g \quad (4.8)$$

Εαν αγνοήσουμε τις οριζόντιες και προσωρινές μεταβολές στην πίεση, τότε η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στη πίεση συντεταγμένη απλοποιείται στη σχέση $w_p = -w\rho g$. Έτσι, μια θετική κάθετη ταχύτητα στην πίεση συντεταγμένη αντιστοιχί σε κίνηση προς τα κάτω και μια αρνητική σε κίνηση προς τα πάνω (αφού η πίεση μειώνεται καθ' ύψος). Όμως, αυτοί οι όροι δεν μπορούν να παραλειφθούν στην απόδειξη της εξίσωσης συνέχειας.

$$\text{Η (4.8) } \stackrel{\partial/\partial z}{\Rightarrow} \frac{\partial w_p}{\partial z} = -g \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_z + \vec{\nabla}_z(p) \cdot \frac{\vec{U}_h}{\partial z} + (\vec{U}_h \cdot \vec{\nabla}_z) \frac{\partial p}{\partial z} - g \frac{\partial(w\rho)}{\partial z} \quad (4.9)$$

Αντικαθιστώντας την υδροστατική εξίσωση έπεται ότι

$$\rho \frac{\partial w_p}{\partial p} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_z + \rho \vec{\nabla}_z(p) \cdot \frac{\vec{U}_h}{\partial p} + (\vec{U}_h \cdot \vec{\nabla}_z) \rho - \rho g \frac{\partial(w\rho)}{\partial p} \quad (4.10)$$

Προσθέτοντας την (4.6) στην (4.10) εύκολα προκύπτει η **εξίσωση συνέχειας για τον αέρα σε καρτεσιανές-πίεση συντεταγμένες**:

$$\vec{\nabla}_p \cdot \vec{U}_h + \frac{\partial w_p}{\partial p} = 0 \quad (4.11)$$

Ο τύπος μετατροπής της βαθμίδας από καρτεσιανές-πίεση σε καρτεσιανές-σ-πίεση είναι (Jacobson):

$$\vec{\nabla}_p = \vec{\nabla}_\sigma - \frac{\sigma}{\pi} \vec{\nabla}_\sigma(\pi) \frac{\partial}{\partial \sigma} \quad (4.12)$$

και άρα η

$$(4.11) \Rightarrow \vec{\nabla}_\sigma \cdot \vec{U}_h - \frac{\sigma}{\pi} \vec{\nabla}_\sigma(\pi) \frac{\partial \vec{U}_h}{\partial \sigma} + \frac{\partial w_p}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial p} \stackrel{\partial p / \partial \sigma = \pi}{\Rightarrow} \vec{\nabla}_\sigma \cdot \vec{U}_h - \frac{\sigma}{\pi} \vec{\nabla}_\sigma(\pi) \frac{\partial \vec{U}_h}{\partial \sigma} + \frac{1}{\pi} \frac{\partial w_p}{\partial \sigma} \quad (4.13)$$

Χρειαζόμαστε, λοιπόν, μια έκφραση για το $\partial w_p / \partial \sigma$.

Η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στη σ -πίεση συντεταγμένη (σs^{-1}) δίνεται από τη

$$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} \quad (4.14)$$

και όπως αναφέραμε και παραπάνω $p = p_{top} + \pi \sigma$ δεδομένου του οποίου έχουμε ότι

$$w_p = \frac{dp}{dt} = \sigma \frac{d\pi}{dt} + \pi \frac{d\sigma}{dt} = \sigma \frac{d\pi}{dt} + \dot{\sigma} \pi \quad (4.15)$$

Επίσης, η παράγωγος σε καρτεσιανές- σ -πίεση συντεταγμένες είναι (Jacobson):

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_\sigma + \vec{U}_h \cdot \vec{\nabla}_\sigma + \dot{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \quad (4.16)$$

και συνεπώς,

$$w_p = \frac{dp}{dt} = \sigma \left[\left(\frac{\partial \pi}{\partial t} \right)_\sigma + (\vec{U}_h \cdot \vec{\nabla}_\sigma) \pi \right] + \dot{\sigma} \pi \quad (4.17)$$

όπου $\partial \pi / \partial \sigma = 0$. Παίρνοντας τη μερική παράγωγο ως προς σ στην παραπάνω εξίσωση έχουμε:

$$\frac{\partial w_p}{\partial \sigma} = \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} \right)_\sigma + (\vec{U}_h \cdot \vec{\nabla}_\sigma) \pi + \sigma \vec{\nabla}_\sigma(\pi) \cdot \frac{\partial \vec{U}_h}{\partial \sigma} + \pi \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} \quad (4.18)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στη (4.13) εύκολα προκύπτει η εξίσωση συνέχειας για τον αέρα σε καρτεσιανές- σ -πίεση συντεταγμένες:

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial t} \right)_\sigma + \vec{\nabla}_\sigma \cdot (\vec{U}_h \pi) + \pi \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0 \quad (4.19)$$

Αρκεί, λοιπόν, να κάνουμε μετατροπή σε σφαιρικές συντεταγμένες: Ο τελεστής ανάδελτα σε καρτεσιανές συντεταγμένες $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ σε σφαιρικές συντεταγμένες, όπου $\delta x = R_\Gamma \cos \phi \delta \lambda$ και $\delta y = R_\Gamma \delta \phi$, είναι:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{1}{R_\Gamma \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{1}{R_\Gamma} \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \Rightarrow \vec{\nabla}_\sigma \cdot (\vec{U}_h \pi) = \frac{1}{R_\Gamma \cos \phi} \frac{\partial (u\pi)}{\partial \lambda} + \frac{1}{R_\Gamma} \frac{\partial (v\pi)}{\partial \phi} \quad (4.20)$$

και άρα η εξίσωση συνέχειας για τον αέρα σε σφαιρικές- σ -πίεση συντεταγμένες είναι:

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial t} \right)_\sigma + \left[\frac{1}{R_\Gamma \cos \phi} \frac{\partial (u\pi)}{\partial \lambda} + \frac{1}{R_\Gamma} \frac{\partial (v\pi)}{\partial \phi} \right]_\sigma + \pi \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0$$

$$\stackrel{\cdot R_\Gamma^2 \cos \phi}{\Rightarrow} R_\Gamma^2 \cos \phi \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} \right)_\sigma + \left[\frac{\partial (u\pi R_\Gamma)}{\partial \lambda} + \frac{\partial (v\pi R_\Gamma \cos \phi)}{\partial \phi} \right]_\sigma + \pi R_\Gamma^2 \cos \phi \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0 \quad (4.21)$$

Εύρεση πίεσης στήλης και κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας από την εξίσωση συνέχειας για τον αέρα

Παίρνουμε το ολοκλήρωμα πάνω σε όλα τα σ-στρώματα της (4.19) και έχουμε

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} \right)_\sigma d\sigma = -\vec{\nabla}_\sigma \cdot \int_0^1 (\vec{U}_h \pi) d\sigma - \pi \int_0^1 d\dot{\sigma} \quad (4.22)$$

Τα όρια του ολοκληρώματος είναι $\sigma = 0$, $\dot{\sigma} = 0$ στην κορυφή του μοντέλου (στην πραγματικότητα η κάθετη συνιστώσα των ταχυτήτων στην κορυφή του μοντέλου δεν είναι μηδέν αλλά στη σ-πίεση συντεταγμένη υποθέτουμε ότι είναι για να κλείσουμε συνοριακή συνθήκη) και $\sigma = 1$, $\dot{\sigma} = 0$ στο πάτωμα του μοντέλου αφού στην επιφάνεια του εδάφους οι κάθετες ταχύτητες είναι πάντα μηδέν.

Η παραπάνω εξίσωση συνεπάγεται

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial t} \right)_\sigma = -\vec{\nabla}_\sigma \cdot \int_0^1 (\vec{U}_h \pi) d\sigma \quad (4.23)$$

η οποία είναι σε καρτεσιανές-σ-πίεση συντεταγμένες ενώ κάνοντας την μετατροπή σε σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε μια προγνωστική εξίσωση για την πίεση στήλης π σε σφαιρικές-σ-πίεση συντεταγμένες που θα χρησιμοποιήσουμε στην κατασκευή βασικού μετεωρολογικού μοντέλου παρακάτω

$$\boxed{R_\Gamma^2 \cos \phi \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} \right)_\sigma = - \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (u \pi R_\Gamma) + \frac{\partial}{\partial \phi} (v \pi R_\Gamma \cos \phi) \right] d\sigma} \quad (4.24)$$

Τώρα μπορούμε να βρούμε μια εξίσωση για την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας σε οποιοδήποτε ύψος. Αν πάρουμε το ολοκλήρωμα της (4.19) ως προς το σ από την κορυφή του μοντέλου ως ένα οποιοδήποτε σ-επίπεδο έχουμε

$$\int_0^\sigma \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} \right)_\sigma d\sigma = -\vec{\nabla}_\sigma \cdot \int_0^\sigma (\vec{U}_h \pi) d\sigma - \pi \int_0^{\dot{\sigma}} d\dot{\sigma} \quad (4.25)$$

$$\Rightarrow \pi \int_0^{\dot{\sigma}} d\dot{\sigma} = -\vec{\nabla}_\sigma \cdot \int_0^\sigma (\vec{U}_h \pi) d\sigma - \int_0^\sigma \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} \right)_\sigma d\sigma \quad (4.26)$$

$$\Rightarrow \dot{\sigma} \pi = -\vec{\nabla}_\sigma \cdot \int_0^\sigma (\vec{U}_h \pi) d\sigma - \sigma \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} \right)_\sigma \quad (4.27)$$

η οποία εξίσωση δίνει την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας σε οποιοδήποτε σ-επίπεδο. Κάνοντας μετατροπή σε σφαιρικές συντεταγμένες και πολλαπλασιάζοντας με $R_\Gamma^2 \cos \phi$, όπως και σε προηγούμενες περιπτώσεις, προκύπτει η διαγνωστική εξίσωση για την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας σε οποιοδήποτε σ-επίπεδο σε σφαιρικές-σ-πίεση συντεταγμένες στη μορφή

$$\boxed{\dot{\sigma} \pi R_\Gamma^2 \cos \phi = - \int_0^\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (u \pi R_\Gamma) + \frac{\partial}{\partial \phi} (v \pi R_\Gamma \cos \phi) \right] d\sigma - \sigma R_\Gamma^2 \cos \phi \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} \right)_\sigma} \quad (4.28)$$

4.1.4 Η θερμοδυναμική εξίσωση σε σφαιρικές-σ-πίεση συντεταγμένες

Υπενθυμίζουμε ότι η θερμοδυναμική εξίσωση σε καρτεσιανές-ύψος συντεταγμένες (3.62) είναι:

$$\frac{d\theta_\nu}{dt} = \frac{\partial\theta_\nu}{\partial t} + u\frac{\partial\theta_\nu}{\partial x} + v\frac{\partial\theta_\nu}{\partial y} + w\frac{\partial\theta_\nu}{\partial z} \approx \frac{\theta_\nu}{c_{p,d}T_\nu} \sum_{n=1}^N \frac{dQ_n}{dt} \quad (4.29)$$

και εφαρμόζοντας την παράγωγο σε καρτεσιανές-σ-πίεση συντεταγμένες της σχέσης (4.16) έχουμε

$$\left(\frac{\partial\theta_\nu}{\partial t}\right)_\sigma + (\vec{U}_h \cdot \vec{\nabla}_\sigma)\theta_\nu + \dot{\sigma}\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\sigma} \approx \frac{\theta_\nu}{c_{p,d}T_\nu} \sum_{n=1}^N \frac{dQ_n}{dt} \quad (4.30)$$

$$\stackrel{\cdot\pi}{\Rightarrow} \pi \left(\frac{\partial\theta_\nu}{\partial t}\right)_\sigma + \pi (\vec{U}_h \cdot \vec{\nabla}_\sigma)\theta_\nu + \dot{\sigma}\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\sigma} \approx \frac{\pi\theta_\nu}{c_{p,d}T_\nu} \sum_{n=1}^N \frac{dQ_n}{dt} \quad (4.31)$$

Επίσης, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση συνέχειας για τον αέρα σε καρτεσιανές-σ-πίεση συντεταγμένες (4.19) με θ_ν παίρνουμε

$$\theta_\nu \left(\frac{\partial\pi}{\partial t}\right)_\sigma + \theta_\nu \vec{\nabla}_\sigma \cdot (\vec{U}_h\pi) + \theta_\nu \pi \frac{\partial\dot{\sigma}}{\partial\sigma} = 0 \quad (4.32)$$

Προσθέτοντας τις (4.31), (4.32) έπεται ότι

$$\left[\frac{\partial(\pi\theta_\nu)}{\partial t}\right]_\sigma + \vec{\nabla}_\sigma \cdot (\vec{U}_h\pi\theta_\nu) + \pi\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\sigma} \approx \frac{\pi\theta_\nu}{c_{p,d}T_\nu} \sum_{n=1}^N \frac{dQ_n}{dt} \quad (4.33)$$

Κάνοντας τη μετατροπή του τελεστή ανάδελτα σε σφαιρικές συντεταγμένες και πολλαπλασιάζοντας με $R_\Gamma^2 \cos\phi$, όπως κάναμε και στην εξίσωση συνέχειας παραπάνω, παίρνουμε τη **θερμοδυναμική εξίσωση σε σφαιρικές-σ-πίεση συντεταγμένες** στη μορφή

$$\begin{aligned} R_\Gamma^2 \cos\phi \left[\frac{\partial(\pi\theta_\nu)}{\partial t}\right]_\sigma + \left[\frac{\partial}{\partial\lambda}(u\pi\theta_\nu R_\Gamma) + \frac{\partial}{\partial\phi}(v\pi\theta_\nu R_\Gamma \cos\phi)\right] + \pi R_\Gamma^2 \cos\phi \frac{\partial\theta_\nu}{\partial\sigma} &\approx \\ &\approx \pi R_\Gamma^2 \cos\phi \frac{\theta_\nu}{c_{p,d}T_\nu} \sum_{n=1}^N \frac{dQ_n}{dt} \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.1.5 Η κάθετη συνιστώσα της εξίσωσης κίνησης σε σ-πίεση συντεταγμένες

Η κάθετη συνιστώσα της εξίσωσης κίνησης σε συντεταγμένες πίεσης είναι η **υδροστατική εξίσωση**, διότι η μετατροπή από συντεταγμένες ύψους σε συντεταγμένες πίεσης απαιτεί την υδροστατική προσέγγιση. Για μεγάλες οριζόντιες κλίμακες (πάνω από 3 km βήμα), η υδροστατική προσέγγιση είναι εύλογη. Σε μικρότερες οριζόντιες

κλίμακες, όμως, η παρουσία μεγάλης κλίμακας νεφών κατακόρυφης ανάπτυξης με σημαντικές ανοδικές κινήσεις, η υδροστατική προσέγγιση δεν είναι καλή. Σε αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιείται το ύψος ή το σ-ύψος και η κάθετη συνιστώσα της εξίσωσης κίνησης περιλαμβάνει τη μερική παράγωγο της ταχύτητας ως προς την οποία λύνεται.

Όταν χρησιμοποιείται η υδροστατική προσέγγιση, η κάθετη συνιστώσα της εξίσωσης κίνησης σε συντεταγμένες ύψους είναι η υδροστατική εξίσωση

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho}$$

και από την καταστατική εξίσωση

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{R' T_v}{p} = -\frac{R' \theta_v P}{p} = -\frac{R' \theta_v}{p} \left(\frac{p}{1000 \text{ hPa}} \right)^\kappa \quad (4.35)$$

και αφού $\kappa = R'/c_{p,d}$

$$\boxed{d\Phi = -c_{p,d} \theta_v d \left[\left(\frac{p}{1000 \text{ hPa}} \right)^\kappa \right]} = -c_{p,d} \theta_v dP \quad (4.36)$$

Τώρα αν αντικαταστήσουμε την καταστατική εξίσωση $p = \rho R' T_v$ και τη σχέση $\partial p / \partial \sigma = \pi$ στην παραπάνω εξίσωση (4.35) θα πάρουμε την υδροστατική εξίσωση σε σ-πίεση συντεταγμένη:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{\partial \pi R' T_v}{\partial \sigma p} = -\frac{\pi R' T_v}{p} = -\frac{\pi}{\rho} = -\alpha \pi \quad (4.37)$$

4.1.6 Η εξίσωση κίνησης στο οριζόντιο επίπεδο σε σφαιρικές-σ-πίεση συντεταγμένες

Η εξίσωση κίνησης στο οριζόντιο επίπεδο σε καρτεσιανές-ύψος συντεταγμένες είναι

$$\frac{d\vec{U}_h}{dt} = -f\vec{k} \times \vec{U}_h - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_z p \quad (4.38)$$

αφού η δύναμη ενεργούς βαρύτητας και η δύναμη ιξώδους στο οριζόντιο επίπεδο, σύμφωνα και με την ανάλυση κλίμακας που κάναμε στο Κεφάλαιο της εξίσωσης κίνησης, είναι πολύ μικρές. Εφαρμόζοντας την παράγωγο σε καρτεσιανές-σ-πίεση συντεταγμένες της σχέσης (4.16) έχουμε

$$\left(\frac{\partial \vec{U}_h}{\partial t} \right)_\sigma + (\vec{U}_h \cdot \vec{\nabla}_\sigma) \vec{U}_h + \dot{\sigma} \frac{\partial \vec{U}_h}{\partial \sigma} + f\vec{k} \times \vec{U}_h = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_z p \quad (4.39)$$

Ωστόσο, υπενθυμίζουμε ότι ο τύπος μετατροπής της οριζόντιας βαθμίδας από καρτεσιανές-ύψος σε καρτεσιανές-πίεση συντεταγμένες (4.4) είναι

$$\vec{\nabla}_z = \vec{\nabla}_p + \vec{\nabla}_z(p) \frac{\partial}{\partial p} \Rightarrow \vec{\nabla}_z \Phi = \vec{\nabla}_p \Phi + \vec{\nabla}_z(p) \frac{\partial \Phi}{\partial p} \quad (4.40)$$

Στην υποενότητα 3.2.4 αναφέραμε τον ορισμό του γεωδυναμικού απόπου προκύπτει ότι $\Phi = gz$ και ότι κατά μήκος επιφανειών σταθερού ύψους z ισχύει ότι $\vec{\nabla}_z \Phi = 0$. Συνεπώς, η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\vec{\nabla}_z(p) = -\frac{\partial p}{\partial \Phi} \vec{\nabla}_p \Phi = -\frac{\partial p}{g \partial z} \vec{\nabla}_p \Phi = \rho \vec{\nabla}_p \Phi \quad (4.41)$$

Επίσης, όπως αναφέραμε και σε προηγούμενη υποενότητα, ο τύπος μετατροπής της οριζόντιας βαθμίδας από καρτεσιανές-πίεση σε καρτεσιανές-σ-πίεση συντεταγμένες (4.12) είναι

$$\vec{\nabla}_p = \vec{\nabla}_\sigma - \frac{\sigma}{\pi} \vec{\nabla}_\sigma(\pi) \frac{\partial}{\partial \sigma} \quad (4.42)$$

Άρα,

$$(4.41) \Rightarrow \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_z(p) = \vec{\nabla}_p \Phi \stackrel{(4.42)}{=} \vec{\nabla}_\sigma \Phi - \frac{\sigma}{\pi} \vec{\nabla}_\sigma(\pi) \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \quad (4.43)$$

Αντικαθιστώντας τη (4.43) στη (4.39) παίρνουμε την εξίσωση κίνησης στο οριζόντιο επίπεδο σε καρτεσιανές-σ-πίεση συντεταγμένες στη μορφή:

$$\left(\frac{\partial \vec{U}_h}{\partial t} \right)_\sigma + (\vec{U}_h \cdot \vec{\nabla}_\sigma) \vec{U}_h + \dot{\sigma} \frac{\partial \vec{U}_h}{\partial \sigma} + f \vec{k} \times \vec{U}_h = -\vec{\nabla}_\sigma \Phi + \frac{\sigma}{\pi} \vec{\nabla}_\sigma(\pi) \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \quad (4.44)$$

Αν αντικαταστήσουμε τη (4.37) στη (4.44) παίρνουμε μια άλλη μορφή της εξίσωσης κίνησης στο οριζόντιο επίπεδο

$$\left(\frac{\partial \vec{U}_h}{\partial t} \right)_\sigma + (\vec{U}_h \cdot \vec{\nabla}_\sigma) \vec{U}_h + \dot{\sigma} \frac{\partial \vec{U}_h}{\partial \sigma} = -f \vec{k} \times \vec{U}_h - \vec{\nabla}_\sigma \Phi - \sigma \alpha \vec{\nabla}_\sigma(\pi) \quad (4.45)$$

Όμως, από καταστατική εξίσωση

$$\alpha = \frac{R' T_\nu}{p} = \frac{(\kappa c_{p,d})(\theta_\nu p)}{p} = c_{p,d} \theta_\nu \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{c_{p,d} \theta_\nu}{p} \frac{\partial P}{\partial \sigma} \quad (4.46)$$

αφού $\partial p / \partial \sigma = \pi$ και $\partial P / \partial p = kP / \pi$. Οπότε, η (4.45) λόγω της (4.46) συνεπάγεται

$$\left(\frac{\partial \vec{U}_h}{\partial t} \right)_\sigma + (\vec{U}_h \cdot \vec{\nabla}_\sigma) \vec{U}_h + \dot{\sigma} \frac{\partial \vec{U}_h}{\partial \sigma} = -f \vec{k} \times \vec{U}_h - \vec{\nabla}_\sigma \Phi - \sigma \frac{c_{p,d} \theta_\nu}{p} \frac{\partial P}{\partial \sigma} \vec{\nabla}_\sigma(\pi) \quad (4.47)$$

$$\stackrel{\pi}{\Rightarrow} \pi \left(\frac{\partial \vec{U}_h}{\partial t} \right)_\sigma + \pi (\vec{U}_h \cdot \vec{\nabla}_\sigma) \vec{U}_h + \pi \dot{\sigma} \frac{\partial \vec{U}_h}{\partial \sigma} = -\pi f \vec{k} \times \vec{U}_h - \pi \vec{\nabla}_\sigma \Phi - \pi \sigma \frac{c_{p,d} \theta_\nu}{p} \frac{\partial P}{\partial \sigma} \vec{\nabla}_\sigma(\pi) \quad (4.48)$$

Επίσης, αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωσης συνέχειας για τον αέρα σε καρτεσιανές-σ-πίεση συντεταγμένες (4.19) με \vec{U}_h παίρνουμε:

$$\vec{U}_h \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} \right)_\sigma + \vec{U}_h \vec{\nabla}_\sigma \cdot (\vec{U}_h \pi) + \vec{U}_h \pi \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0 \quad (4.49)$$

την οποία αν προσθέσουμε στη (4.48) θα έχουμε την εξίσωση κίνησης στο οριζόντιο επίπεδο σε καρτεσιανές-σ-πίεση συντεταγμένες στη μορφή:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial(\vec{U}_h \pi)}{\partial t} \right]_{\sigma} + \vec{U}_h \vec{\nabla}_{\sigma} \cdot (\vec{U}_h \pi) + \pi (\vec{U}_h \cdot \vec{\nabla}_{\sigma}) \vec{U}_h + \pi \frac{\partial}{\partial \sigma} (\dot{\sigma} \vec{U}_h) \\ & = -\pi f \vec{k} \times \vec{U}_h - \pi \vec{\nabla}_{\sigma} \Phi - \sigma c_{p,d} \theta_{\nu} \frac{\partial P}{\partial \sigma} \vec{\nabla}_{\sigma}(\pi) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Κάνοντας μετατροπή σε σφαιρικές συντεταγμένες προκύπτει ότι η εξίσωση κίνησης στο οριζόντιο επίπεδο σε σφαιρικές-σ-πίεση συντεταγμένες είναι

$$\begin{aligned} & R_{\Gamma}^2 \cos \phi \left[\frac{\partial}{\partial t} (\pi u) \right]_{\sigma} + \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (\pi u^2 R_{\Gamma}) + \frac{\partial}{\partial \phi} (\pi u v R_{\Gamma} \cos \phi) \right]_{\sigma} + \pi R_{\Gamma}^2 \cos \phi \frac{\partial}{\partial \sigma} (\dot{\sigma} u) \\ & = \pi u v R_{\Gamma} \sin \phi + \pi f v R_{\Gamma}^2 \cos \phi - R_{\Gamma} \left(\pi \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \sigma c_{p,d} \theta_{\nu} \frac{\partial P}{\partial \sigma} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right)_{\sigma} \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} & R_{\Gamma}^2 \cos \phi \left[\frac{\partial}{\partial t} (\pi v) \right]_{\sigma} + \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (\pi u v R_{\Gamma}) + \frac{\partial}{\partial \phi} (v^2 \pi R_{\Gamma} \cos \phi) \right]_{\sigma} + \pi R_{\Gamma}^2 \cos \phi \frac{\partial}{\partial \sigma} (\dot{\sigma} v) \\ & = -\pi u^2 R_{\Gamma} \sin \phi - \pi f u R_{\Gamma}^2 \cos \phi - R_{\Gamma} \cos \phi \left(\pi \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \sigma c_{p,d} \theta_{\nu} \frac{\partial P}{\partial \sigma} \frac{\partial \pi}{\partial \phi} \right)_{\sigma} \end{aligned} \quad (4.52)$$

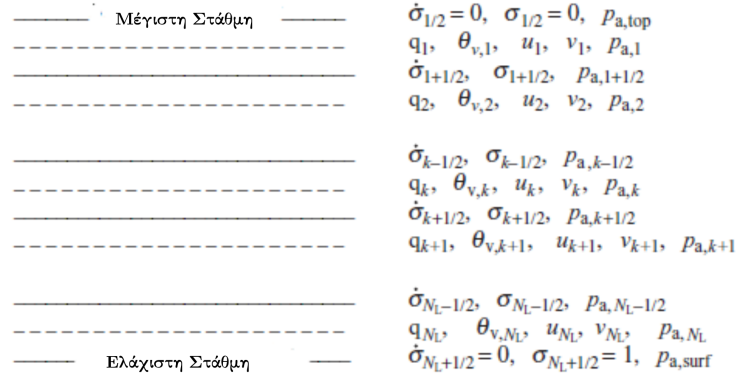
4.2 Κατασκευή βασικού μετεωρολογικού μοντέλου

Ένα ολοκληρωμένο μοντέλο πρόβλεψης καιρού περιλαμβάνει διαδικασίες των αερίων, των νεφών, διαδικασίες ακτινοβολίας, μεταφοράς, της επιφάνειας καθώς και μετεωρολογικές διαδικασίες. Στην παρούσα ενότητα θα κατασκευάσουμε ένα μοντέλο που περιλαμβάνει τη μετεωρολογική συνιστώσα και θα περιγράψουμε μια αριθμητική επίλυση για να προβλέψουμε την ταχύτητα του ανέμου, την πίεση του αέρα και την ενέργεια.

4.2.1 Κάθετο πλέγμα του μοντέλου

Το πρώτο βήμα για την ανάπτυξη του μοντέλου είναι να καθορίσουμε το κάθετο σύστημα συντεταγμένων, το οποίο θα είναι η σ-πίεση συντεταγμένη, και τη θέση των μεταβλητών σε αυτό το σύστημα. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω Σχήμα 4.2, η κάθετη συνιστώσα των ταχυτήτων θα είναι τοποθετημένη στην κορυφή και το πάτωμα κάθε στρώματος και οι οριζόντιες συνιστώσες των ταχυτήτων, η πίεση, η δυναμική εικονική θερμοκρασία στο μέσο του στρώματος στην κάθετη διεύθυνση. Αυτός ο τύπος πλέγματος ονομάζεται πλέγμα Lorenz.

Υποθέτουμε ότι στην κορυφή του μοντέλου η κάθετη συνιστώσα των ταχυτήτων είναι μηδέν. Αυτή η υπόθεση είναι μη ρεαλιστική, εκτός και αν η κορυφή του μοντέλου είναι η κορυφή της ατμόσφαιρας. Πάντως σε όσα μεγαλύτερα ύψη θέσουμε την κορυφή του μοντέλου τόσο πιο λίγα θα είναι και τα σφάλματα αλλά έτσι αυξάνουμε τις υπολογιστικές απαιτήσεις. Επίσης, αντί να θέσουμε την κάθετη συνιστώσα των ταχυτήτων



Σχήμα 4.2: Πλέγμα Lorenz[2]. Οι ακέραιοι δείκτες αντιστοιχούν στα κέντρα των στρωμάτων ενώ οι δείκτες που είναι κλάσματα αντιστοιχούν στα όρια των στρωμάτων. Η αρίθμηση για τα κέντρα των στρωμάτων ξεκινά από το ένα, στην κορυφή του μοντέλου, και φτάνει στο N_L στο πάτωμα του μοντέλου, ενώ για τα όρια ξεκινά από το $1/2$ στην κορυφή και φτάνει στο $N_{L+1/2}$.

στην κορυφή του μοντέλου να είναι μηδέν, μπορούμε εναλλακτικά να την υπολογίσουμε πράγμα το οποίο είναι μια διαδικασία επιρρεπής σε λάθη.

Στη σ-πίεση συντεταγμένη, το σ-πάχος ενός στρώματος είναι η διαφορά των σ-τιμών της κορυφής και του πατώματος του στρώματος. Δηλαδή,

$$\Delta\sigma_k = \sigma_{k+1/2} - \sigma_{k-1/2} \quad \text{για } k = 1, 2, \dots, N_L \quad (4.53)$$

όπου η αρίθμηση ξεκινάει από το πρώτο πάτωμα μέχρι το πάτωμα του μοντέλου (δηλαδή από πάνω προς τα κάτω) και η σ-τιμή για την κορυφή και το πάτωμα κάθε στρώματος είναι προκαθορισμένη και σταθερή.

Καθορισμός των σ-τιμών

Στην κορυφή του μοντέλου συνήθως θέτουμε τη σ-τιμή να ισούται με μηδέν, $\sigma_{1/2} = \sigma_{top} = 0$, και στην επιφάνεια του εδάφους να ισούται με ένα, $\sigma_{N_L+1/2} = \sigma_{surf} = 1$. Ένας τρόπος να επιλέξουμε τις σ-τιμές είναι να θεωρήσουμε μία στήλη (ας την ονομάσουμε test) και να υποθέσουμε ότι το πάχος (ύψος) όλων των στρωμάτων είναι το ίδιο. Θέτουμε την πίεση στην κορυφή του μοντέλου $p_{top} = 250 \text{ hPa}$, η οποία παραμένει σταθερή στο χρόνο. Αυτή η πίεση στην κορυφή του μοντέλου είναι η τυπική για ένα περιοχικό μοντέλο, ενώ για ένα παγκόσμιο η τυπική πίεση στην κορυφή θα ήταν 0.5 hPa . Επίσης, θέτουμε το μέσο επιφανειακό ύψος ως το μέσο όρο του τοπογραφικού ύψους πάνω από τη μέση στάθμη θάλασσας, το οποίο μπορούμε να το θέσουμε $z_{surf,test} = 0 \text{ m}$.

Από την υδροστατική εξίσωση (3.26) προκύπτει ότι

$$z_{top,test} = z_{below} + \frac{p_{below} - p_{top}}{\rho_{below} g_{below}} \quad (4.54)$$

όπου p_{below} η πίεση του αέρα (Pa), ρ_{below} η πυκνότητα του αέρα ($kg \text{ m}^{-3}$) και g_{below} η βαρύτητα ($m \text{ s}^{-2}$) που αντιστοιχούν σε πίεση (Παράρτημα Α') μεγαλύτερη του $p_{top} = 25000 \text{ Pa}$ (δηλαδή σε μικρότερο ύψος αφού η πίεση ελατώνεται καθ' ύψος).

Έτσι, επειδή το πάχος κάθε στρώματος της στήλης test είναι ίδιο, μπορούμε να βρούμε το ύψος του πατώματος κάθε στρώματος από την παρακάτω εξίσωση

$$z_{k+1/2,test} = z_{surf,test} + (z_{top,test} - z_{surf,test}) \left(1 - \frac{k}{N_L}\right) \quad \text{για } k = 0, 1, \dots, N_L \quad (4.55)$$

Κάνοντας interpolation μπορούμε να βρούμε τις πιέσεις $p_{k+1/2,test}$ στα ύψη $z_{k+1/2,test}$ μέσω του Παραρτήματος Α΄.

Τότε, οι σ-τιμές στο πάτωμα κάθε στρώματος του μοντέλου υπολογίζεται από την

$$(4.1) \Rightarrow \sigma_{k+1/2} = \frac{p_{k+1/2,test} - p_{top}}{p_{N_L+1/2,test} - p_{top}} \quad \text{για } k = 1, 2, \dots, N_L \quad (4.56)$$

Στην κορυφή του μοντέλου ($k = 0$) είναι $p_{1/2,test} = p_{top}$.

Τέλος, θέτουμε οι σ-τιμές στα όρια κάθε στρώματος του πραγματικού μοντέλου να είναι ίσες με αυτές της στήλης test.

Καθορισμός της πίεσης στο πάτωμα κάθε στρώματος του μοντέλου

Αρκεί να υπολογίσουμε την πίεση επιφανείας (Pa) σε κάθε στήλη του μοντέλου. Κανονικά θα πρέπει να αρχικοποιήσουμε την πίεση επιφανείας με interpolated μετρήσεις. Για ιδανικευμένες προσομοιώσεις μπορούμε να αρχικοποιήσουμε την πίεση επιφανείας παντού με την πίεση της Διεθνούς Τυπικής Ατμόσφαιρας ($1013.25 hPa$).

Αφού γνωρίζουμε και την πίεση επιφανείας μπορούμε να υπολογίσουμε τη διαφορά πίεσης επιφανείας-κορυφής μοντέλου:

$$\boxed{\pi = p_{surf} - p_{top}} \quad (4.57)$$

Τότε από την (4.56) η πίεση στο πάτωμα κάθε στρώματος του μοντέλου είναι

$$\boxed{p_{k+1/2} = p_{top} + \sigma_{k+1/2}\pi} \quad (4.58)$$

Ενώ η πίεση στην κορυφή του μοντέλου p_{top} παραμένει σταθερή, η πίεση επιφανείας p_{surf} διαφέρει από στήλη σε στήλη, άρα διαφέρει και το π και συνεπώς διαφέρει και η πίεση $p_{k+1/2}$ για κάθε κελί του πλέγματος.

Εύρεση της πίεσης στο μέσο ενός στρώματος στην κάθετη διεύθυνση

Το κάθετο μέσο ενός στρώματος μπορεί να προσδιοριστεί ως το κέντρο του ύψους, ή της μάζας ή της πίεσης και είναι ο μέσος όρος της αντίστοιχης μεταβλητής. Στο μοντέλο που κατασκευάζουμε το κάθετο μέσο είναι η πίεση στην οποία βρίσκεται ο μέσος όρος του P (3.55), ο οποίος σε ένα στρώμα k είναι

$$\boxed{P_k = \frac{1}{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}} \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} P dp = \frac{1}{1 + \kappa} \left(\frac{P_{k+1/2} p_{k+1/2} - P_{k-1/2} p_{k-1/2}}{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}} \right)} \quad (4.59)$$

όπου στα όρια των στρωμάτων με πίεση $p_{k+1/2}$ ισχύει

$$\boxed{P_{k+1/2} = \left(\frac{p_{k+1/2}}{1000 hPa} \right)^\kappa} \quad (4.60)$$

και $\kappa = 0.286$ (3.50).

Αφού, λοιπόν, βρούμε το P_k , τότε η πίεση που αντιστοιχεί στο P_k και στο κάθετο μέσο του στρώματος είναι

$$p_k = (1000 \text{ hPa}) P_k^{1/\kappa} \quad (4.61)$$

4.2.2 Οι Εξισώσεις σε Μορφή Πεπερασμένων Διαφορών

Κάνοντας μία σύνοψη των εξισώσεων σε σφαιρικές-σ-πίεση συντεταγμένες που θα συνθέσουν το μοντέλο που κατασκευάζουμε, έχουμε τις εξής:

Εξίσωση εύρεσης ύψους κορυφής δοκιμαστικής στήλης

$$z_{top,test} = z_{below} + \frac{p_{below} - p_{top}}{\rho_{below} g_{below}} \quad (4.54)$$

Εξίσωση υπολογισμού του σ-πάχους των στρωμάτων

$$\Delta\sigma_k = \sigma_{k+1/2} - \sigma_{k-1/2} \quad \text{για } k = 1, 2, \dots, N_L \quad (4.53)$$

Εξίσωση διαφοράς πίεσης στήλης

$$\pi = p_{surf} - p_{top} \quad (4.57)$$

Εξίσωση εύρεσης πίεσης στο πάτωμα κάθε στρώματος

$$p_{k+1/2} = p_{top} + \sigma_{k+1/2}\pi \quad (4.58)$$

Μέσος όρος του P σε ένα στρώμα με δείκτη k

$$P_k = \frac{1}{1 + \kappa} \left(\frac{P_{k+1/2} p_{k+1/2} - P_{k-1/2} p_{k-1/2}}{p_{k+1/2} - p_{k-1/2}} \right) \quad (4.59)$$

Τιμή του P στα όρια των στρωμάτων

$$P_{k+1/2} = \left(\frac{p_{k+1/2}}{1000 \text{ hPa}} \right)^\kappa \quad (4.60)$$

Εξίσωση πίεσης στο κάθετο μεσό ενός στρώματος

$$p_k = (1000 \text{ hPa}) P_k^{1/\kappa} \quad (4.61)$$

Εξίσωση δυναμικής εικονικής θερμοκρασίας στο κάθετο μέσο των στρωμάτων

$$\theta_\nu = T_\nu \left(\frac{1000 \text{ hPa}}{p} \right)^\kappa \quad (3.54)$$

Εξίσωση δυναμικής εικονικής θερμοκρασίας στα όρια των στρωμάτων

Ενώ η δυναμική εικονική θερμοκρασία υπολογίζεται στο κάθετο μέσο κάθε στρώματος, είναι ανάγκη να την υπολογίσουμε και στα όρια των στρωμάτων έτσι ώστε να μπορούμε να υπολογίσουμε τις κάθετες ροές ενέργειας. Ο αντίστοιχος τύπος είναι ο εξής:

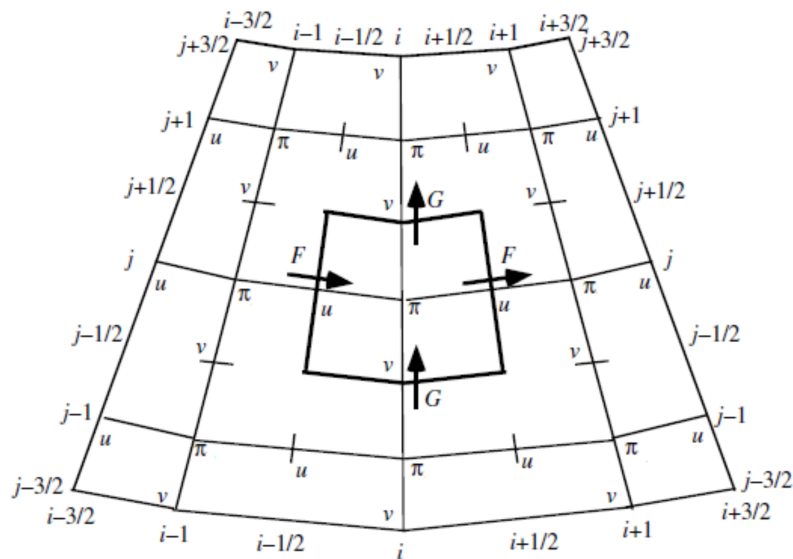
$$\theta_{\nu,k+1/2} = \frac{(P_{k+1/2} - P_k)\theta_{\nu,k} + (P_{k+1} - P_{k+1/2})\theta_{\nu,k+1}}{P_{k+1} - P_k} \quad (4.62)$$

Εξίσωση συνέχειας για τον αέρα

Από την εξίσωση συνέχειας για τον αέρα προκύπτει η προγνωστική εξίσωση (4.24)

$$R_{\Gamma}^2 \cos\phi \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} \right)_{\sigma} = - \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (u \pi R_{\Gamma}) + \frac{\partial}{\partial \phi} (v \pi R_{\Gamma} \cos\phi) \right] d\sigma$$

με την οποία υπολογίζουμε μεταβολές στην πίεση π των στηλών του μοντέλου. Αντικαθιστώντας τα $d, dt, d\lambda, d\phi, d\sigma$ με $\Delta, h, \Delta\lambda, \Delta\phi, \Delta\sigma$ αντίστοιχα και πολλαπλασιάζοντας με $\Delta\lambda\Delta\phi$, παίρνουμε μια πρώτης τάξης ως προς το χρόνο και δεύτερης τάξης ως προς το χώρο προσέγγιση για την πίεση στήλης:



Σχήμα 4.3: Arakawa C-Οριζόντιο πλέγμα [2]

$$(R_{\Gamma}^2 \cos\phi \Delta\lambda \Delta\phi)_{i,j} \left(\frac{\pi_t - \pi_{t-h}}{h} \right)_{i,j} =$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{k=1}^{N_L} \left[\frac{(u\pi R_\Gamma \Delta\lambda \Delta\phi \Delta\sigma)_{i+1/2,j} - (u\pi R_\Gamma \Delta\lambda \Delta\phi \Delta\sigma)_{i-1/2,j}}{\Delta\lambda} \right]_{k,t-h} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{N_L} \left[\frac{(v\pi R_\Gamma \cos\phi \Delta\lambda \Delta\phi \Delta\sigma)_{i,j+1/2} - (v\pi R_\Gamma \cos\phi \Delta\lambda \Delta\phi \Delta\sigma)_{i,j-1/2}}{\Delta\phi} \right]_{k,t-h}
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Το οριζόντιο πλέγμα του Σχήματος 4.3 επιλέχθηκε για να διακριτοποιήσουμε την εξίσωση συνέχειας και είναι ένα περιοχικό πλέγμα για το οποίο χρειαζόμαστε συνοριακές συνθήκες. Σε αυτό το πλέγμα οι πιέσεις στήλης π υπολογίζονται στα κεντρικά σημεία π , όπως φαίνεται και στο σχήμα, τα οποία γειτονεύουν στα δυτικά και ανατολικά με σημεία όπου υπολογίζεται η συνιστώσα δύσης-ανατολής u της ταχύτητας, ενώ βόρεια και νότια γειτονεύουν με σημεία όπου υπολογίζεται η συνιστώσα βορρά-νότου v της ταχύτητας. Στο δεύτερο μέλος της διακριτοποιημένης εξίσωσης (4.63) οι πρώτοι όροι των αριθμητών είναι ροές που εισέρχονται στο κελί, ενώ οι δεύτεροι όροι ροές που εξέρχονται από αυτό.

Έτσι, λύνοντας την (4.63) έχουμε ότι

$$\pi_t = \pi_{t-h} - \frac{h}{(R_\Gamma^2 \cos\phi \Delta\lambda \Delta\phi)_{i,j}} \times \sum_{k=1}^{N_L} [(F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j} + G_{i,j+1/2} - G_{i,j-1/2})_{k,t-h} \Delta\sigma_k] \tag{4.64}$$

όπου F, G είναι οι ροές στα σημεία u, v αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύει

$$F_{i+1/2,j,k,t-h} = \left[\frac{\pi_{i,j} + \pi_{i+1,j}}{2} (u R_\Gamma \Delta\phi)_{i+1/2,j,k} \right]_{t-h} \tag{4.65}$$

$$G_{i,j+1/2,k,t-h} = \left[\frac{\pi_{i,j} + \pi_{i,j+1}}{2} (v R_\Gamma \cos\phi \Delta\lambda)_{i,j+1/2,k} \right]_{t-h} \tag{4.66}$$

Στα ανατολά και βόρεια όρια ισχύει ότι

$$F_{I+1/2,j,k,t-h} = [\pi_{I,j} (u R_\Gamma \Delta\phi)_{I+1/2,j,k}]_{t-h} \tag{4.67}$$

$$G_{i,J+1/2,k,t-h} = [\pi_{i,J+1/2} (v R_\Gamma \cos\phi \Delta\lambda)_{i,J+1/2,k}]_{t-h} \tag{4.68}$$

Παρόμοιες είναι εξισώσεις και για τα νότια και δυτικά όρια.

Επιπρόσθετα, αφού προσδιοριστούν οι νέες πιέσεις στηλών π , από την εξίσωση συνέχειας για τον αέρα, όπως αναλύσαμε και σε προηγούμενη υποενότητα, προκύπτει η **διαγνωστική εξίσωση (4.28) με την οποία θα υπολογίσουμε την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας σε οποιοδήποτε σ-επίπεδο σε σφαιρικές-σ-πίεση συντεταγμένες** στη μορφή

$$\dot{\sigma} \pi R_\Gamma^2 \cos\phi = - \int_0^\sigma \left[\frac{\partial}{\partial\lambda} (u\pi R_\Gamma) + \frac{\partial}{\partial\phi} (v\pi R_\Gamma \cos\phi) \right]_\sigma d\sigma - \sigma R_\Gamma^2 \cos\phi \left(\frac{\partial\pi}{\partial t} \right)_\sigma$$

Αντικαθιστώντας του τελεστές παραγωγίσης και ολοκλήρωσης με ανάλογα πεπερασμένων διαφορών και πολλαπλασιάζοντας με $\Delta\lambda\Delta\phi$, παίρνουμε την αντίστοιχη διακριτοποιημένη εξίσωση

$$(\dot{\sigma} \pi R_\Gamma^2 \cos\phi \Delta\lambda \Delta\phi)_{i,j,k+1/2,t} =$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{l=1}^k \left[\frac{(u\pi R_\Gamma \Delta\lambda \Delta\phi \Delta\sigma)_{i-1/2,j} - (u\pi R_\Gamma \Delta\lambda \Delta\phi \Delta\sigma)_{i+1/2,j}}{\Delta\lambda} \right]_{l,t-h} \\
&\quad - \sum_{l=1}^k \left[\frac{(v\pi R_\Gamma \cos\phi \Delta\lambda \Delta\phi \Delta\sigma)_{i,j-1/2} - (v\pi R_\Gamma \cos\phi \Delta\lambda \Delta\phi \Delta\sigma)_{i,j+1/2}}{\Delta\phi} \right]_{l,t-h} \\
&\quad - \sigma_{k+1/2} (R_\Gamma^2 \cos\phi \Delta\lambda \Delta\phi)_{i,j} \left(\frac{\pi_t - \pi_{t-h}}{h} \right)_{i,j} \quad (4.69)
\end{aligned}$$

Και αν αντικαταστήσουμε τις ροές F, G η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας υπολογίζεται με την

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{i,j,k+1/2,t} &= - \frac{1}{(\pi R_\Gamma^2 \cos\phi \Delta\lambda \Delta\phi)_{i,j,t}} \\
&\quad \times \sum_{l=1}^k [(F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j} + G_{i,j+1/2} - G_{i,j-1/2})_{l,t-h} \Delta\sigma_l] \\
&\quad - \sigma_{k+1/2} \left(\frac{\pi_t - \pi_{t-h}}{h\pi_t} \right)_{i,j} \quad (4.70)
\end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση λύνεται με τη σειρά $k = 1, 2, \dots, N_L - 1$. Για $k = 0$, είναι $\dot{\sigma}_{1/2} = \dot{\sigma}_{top} = 0$ εξόρισμού και για $k = N_L$, είναι $\dot{\sigma}_{N_L+1/2} = 0$

Η θερμοδυναμική εξίσωση

Η θερμοδυναμική εξίσωση σε σφαιρικές-σ-πίεση συντεταγμένες της εξίσωσης (4.34) αποδείξαμε ότι είναι η

$$\begin{aligned}
R_\Gamma^2 \cos\phi \left[\frac{\partial(\pi\theta_\nu)}{\partial t} \right]_\sigma + \left[\frac{\partial}{\partial\lambda}(u\pi\theta_\nu R_\Gamma) + \frac{\partial}{\partial\phi}(v\pi\theta_\nu R_\Gamma \cos\phi) \right] + \pi R_\Gamma^2 \cos\phi \frac{\dot{\sigma}\theta_\nu}{\partial\sigma} &\approx \\
&\approx \pi R_\Gamma^2 \cos\phi \frac{\theta_\nu}{c_{p,d} T_\nu} \sum_{n=1}^N \frac{dQ_n}{dt} \quad (4.71)
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας του τελεστές παραγωγής και ολοκλήρωσης με ανάλογα πεπερασμένων διαφορών, πολλαπλασιάζοντας με $\Delta\lambda\Delta\phi$, παίρνοντας πεπερασμένες διαφορές για κάθε όρο και αντικαθιστώντας τις ροές F, G , παίρνουμε την αντίστοιχη διακριτοποιημένη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
\theta_{\nu,i,j,k,t} &= \frac{(\pi\theta_\nu)_{i,j,k,t-h}}{\pi_{i,j,t}} + \frac{h}{(\pi R_\Gamma^2 \cos\phi \Delta\lambda \Delta\phi)_{i,j}} \\
&\quad \times \left\{ \left(F_{i-1/2,j} \frac{\theta_{\nu,i-1,j} + \theta_{\nu,i,j}}{2} - F_{i+1/2,j} \frac{\theta_{\nu,i,j} + \theta_{\nu,i+1,j}}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + G_{i,j-1/2} \frac{\theta_{\nu,i,j-1} + \theta_{\nu,i,j}}{2} - G_{i,j+1/2} \frac{\theta_{\nu,i,j} + \theta_{\nu,i,j+1}}{2} \right)_{k,t-h} \right. \\
&\quad \left. + \left[\pi_t R_\Gamma^2 \cos\phi \Delta\lambda \Delta\phi \frac{(\dot{\sigma}_t \theta_{\nu,t-h})_{k-1/2} - (\dot{\sigma}_t \theta_{\nu,t-h})_{k+1/2}}{\Delta\sigma_k} \right]_{i,j} \right. \\
&\quad \left. + \left(\pi R_\Gamma^2 \cos\phi \Delta\lambda \Delta\phi \frac{\theta_\nu}{c_{p,d} T_\nu} \sum_{n=1}^N \frac{dQ_n}{dt} \right)_{i,j,k,t-h} \right\} \quad (4.72)
\end{aligned}$$

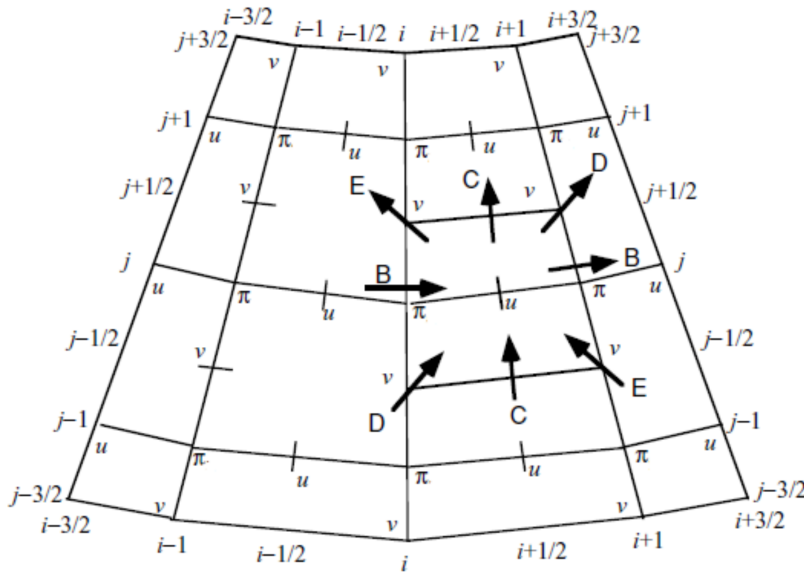
Οι παράμετροι $\theta_{\nu,i,j,k-1/2}$ και $\theta_{\nu,i,j,k+1/2}$ είναι οι δυναμικές εικονικές θερμοκρασίες στην κορυφή και το πάτωμα ενός στρώματος και υπολογίζονται από την (4.62). Οι τιμές του θ_ν στην επιφάνεια και στην κορυφή του μοντέλου δεν χρειάζονται αφού $\dot{\sigma} = 0$ σε αυτές τις θέσεις.

Η εξίσωση κίνησης στη u-διεύθυνση

Η εξίσωση κίνησης στο οριζόντιο επίπεδο σε σφαιρικές-σ-πίεση συντεταγμένες στη u-διεύθυνση είχαμε αποδείξει (σχέση 4.51) ότι είναι

$$\begin{aligned} R_\Gamma^2 \cos\phi \left[\frac{\partial}{\partial t}(\pi u) \right]_\sigma + \left[\frac{\partial}{\partial \lambda}(\pi u^2 R_\Gamma) + \frac{\partial}{\partial \phi}(\pi u v R_\Gamma \cos\phi) \right]_\sigma + \pi R_\Gamma^2 \cos\phi \frac{\partial}{\partial \sigma}(\dot{\sigma} u) \\ = \pi u v R_\Gamma \sin\phi + \pi f v R_\Gamma^2 \cos\phi - R_\Gamma \left(\pi \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \sigma c_{p,a} \theta_\nu \frac{\partial P}{\partial \sigma} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right)_\sigma \end{aligned} \quad (4.73)$$

Θα μπορέσουμε να βρούμε την μορφή πεπερασμένων διαφορών της εξίσωσης αν υποθέσουμε ότι οι ροές που εισέρχονται και εξέρχονται ένα κελί είναι αυτές που φαίνονται στα 8 σημεία του Σχήματος 4.4.



Σχήμα 4.4: Οι ροές στο πλέγμα για τη μετατροπή σε πεπερασμένες διαφορές της εξίσωσης κίνησης στη διεύθυνση-u. [2]

Έτσι, η εξίσωση κίνησης στη διεύθυνση-u σε σφαιρικές-σ-πίεση συντεταγμένες στην μορφή πεπερασμένων διαφορών είναι:

$$u_{i+1/2,j,k,t} = \underbrace{\frac{(\pi_{t-h}\Delta A)_{i+1/2,j}}{(\pi_t\Delta A)_{i+1/2,j}} u_{i+1/2,j,k,t-h}}_{\text{Όρος Χρονικού Βήματος}} + \frac{h}{(\pi_t\Delta A)_{i+1/2,j}} \times \{ \quad \quad \quad \} \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned}
& \left(B_{i,j} \frac{u_{i-1/2,j} + u_{i+1/2,j}}{2} - B_{i+1,j} \frac{u_{i+1/2,j} + u_{i+3/2,j}}{2} \right. \\
& + C_{i+1/2,j-1/2} \frac{u_{i+1/2,j-1} + u_{i+1/2,j}}{2} - C_{i+1/2,j+1/2} \frac{u_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j+1}}{2} \\
& + D_{i,j-1/2} \frac{u_{i-1/2,j-1} + u_{i+1/2,j}}{2} - D_{i+1,j+1/2} \frac{u_{i+1/2,j} + u_{i+3/2,j+1}}{2} \\
& \left. + E_{i+1,j-1/2} \frac{u_{i+3/2,j-1} + u_{i+1/2,j}}{2} - E_{i,j+1/2} \frac{u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j+1}}{2} \right)_{k,t-h} \quad (4.75)
\end{aligned}$$

Όροι Οριζόντιας Μεταφοράς

$$+ \frac{1}{\Delta\sigma_k} (\pi_t \Delta A \dot{\sigma}_{k-1/2,t} u_{k-1/2,t-h} - \pi_t \Delta A \dot{\sigma}_{k+1/2,t} u_{k+1/2,t-h})_{i+1/2,j} \quad (4.76)$$

Κάθετη Μεταφορά της Οριζόντιας Ορμής

$$\begin{aligned}
& + \frac{R_\Gamma (\Delta\lambda\Delta\phi)_{i+1/2,j}}{2} \times \left[\pi_{i,j} \frac{v_{i,j-1/2} + v_{i,j+1/2}}{2} \left(f_j R_\Gamma \cos\phi_j + \frac{u_{i-1/2,j} + u_{i+1/2,j}}{2} \sin\phi_j \right) \right. \\
& \left. + \pi_{i+1,j} \frac{v_{i+1,j-1/2} + v_{i+1,j+1/2}}{2} \left(f_j R_\Gamma \cos\phi_j + \frac{u_{i+1/2,j} + u_{i+3/2,j}}{2} \sin\phi_j \right) \right]_{k,t-h} \quad (4.77)
\end{aligned}$$

Όροι Coriolis και μεταρροπής σε σφαιρικό πλέγμα

$$\begin{aligned}
& - R_\Gamma \Delta\phi_{i+1/2,j} \times \left[(\Phi_{i+1,j,k} - \Phi_{i,j,k}) \frac{\pi_{i,j} + \pi_{i+1,j}}{2} + (\pi_{i+1,j} - \pi_{i,j}) \right. \\
& \times \frac{c_{p,d}}{2} \left(\left[\theta_{\nu,k} \frac{\sigma_{k+1/2}(P_{k+1/2} - P_k) + \sigma_{k-1/2}(P_k - P_{k-1/2})}{\Delta\sigma_k} \right]_{i,j} \right. \\
& \left. \left. + \left[\theta_{\nu,k} \frac{\sigma_{k+1/2}(P_{k+1/2} - P_k) + \sigma_{k-1/2}(P_k - P_{k-1/2})}{\Delta\sigma_k} \right]_{i+1,j} \right) \right] \quad (4.78)
\end{aligned}$$

Όροι Βαροβαθμίδας

Οι όροι παρακάτω χρειάζονται επιπρόσθετο interpolation ως εξής:

- η πίεση στήλης π πολλαπλασιασμένη με το εμβαδό ενός κελιού του πλέγματος στα σημεία u στο οριζόντιο επίπεδο $\Delta A = R_\Gamma^2 \cos\phi \Delta\lambda\Delta\phi$:

$$\begin{aligned}
(\pi\Delta A)_{i+1/2,j} &= \frac{1}{8} \{ (\pi\Delta A)_{i,j+1} + (\pi\Delta A)_{i+1,j+1} \\
& + 2 [(\pi\Delta A)_{i,j} + (\pi\Delta A)_{i+1,j}] + (\pi\Delta A)_{i,j-1} + (\pi\Delta A)_{i+1,j-1} \} \quad (4.79)
\end{aligned}$$

- για τον όρο

$$\begin{aligned}
(\pi \Delta A \dot{\sigma}_{k-1/2,t})_{i+1/2,j} &= \frac{1}{8} [(\pi \Delta A \dot{\sigma}_{k-1/2,t})_{i,j+1} + (\pi \Delta A \dot{\sigma}_{k-1/2,t})_{i+1,j+1} \\
&+ 2 \{(\pi \Delta A \dot{\sigma}_{k-1/2,t})_{i,j} + (\pi \Delta A \dot{\sigma}_{k-1/2,t})_{i+1,j}\} + (\pi \Delta A \dot{\sigma}_{k-1/2,t})_{i,j-1} \\
&+ (\pi \Delta A \dot{\sigma}_{k-1/2,t})_{i+1,j-1}] \quad (4.80)
\end{aligned}$$

- καθώς επίσης και για τις ροές:

$$\begin{aligned}
B_{i,j} &= \frac{1}{12} [F_{i-1/2,j-1} + F_{i+1/2,j-1} + 2(F_{i-1/2,j} + F_{i+1/2,j}) \\
&+ F_{i-1/2,j+1} + F_{i+1/2,j+1}] \quad (4.81)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{i+1/2,j-1/2} &= \frac{1}{12} [G_{i,j-3/2} + G_{i+1,j-3/2} + 2(G_{i,j-1/2} + G_{i+1,j-1/2}) \\
&+ G_{i,j+1/2} + G_{i+1,j+1/2}] \quad (4.82)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{i,j+1/2} &= \frac{1}{24} (G_{i,j-1/2} + 2G_{i,j+1/2} + G_{i,j+3/2} + F_{i-1/2,j} \\
&+ F_{i-1/2,j+1} + F_{i+1/2,j} + F_{i+1/2,j+1}) \quad (4.83)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{i,j+1/2} &= \frac{1}{24} (G_{i,j-1/2} + 2G_{i,j+1/2} + G_{i,j+3/2} - F_{i-1/2,j} \\
&- F_{i-1/2,j+1} - F_{i+1/2,j} - F_{i+1/2,j+1}) \quad (4.84)
\end{aligned}$$

Τέλος, οι τιμές του u για το πάτωμα κάθε στρώματος που χρειαζόμαστε στην (4.76) υπολογίζονται από την

$$u_{i+1/2,j,k+1/2,t-h} = \frac{\Delta \sigma_{k+1} u_{i+1/2,j,k,t-h} + \Delta \sigma_k u_{i+1/2,j,k+1,t-h}}{\Delta \sigma_k + \Delta \sigma_{k+1}} \quad (4.85)$$

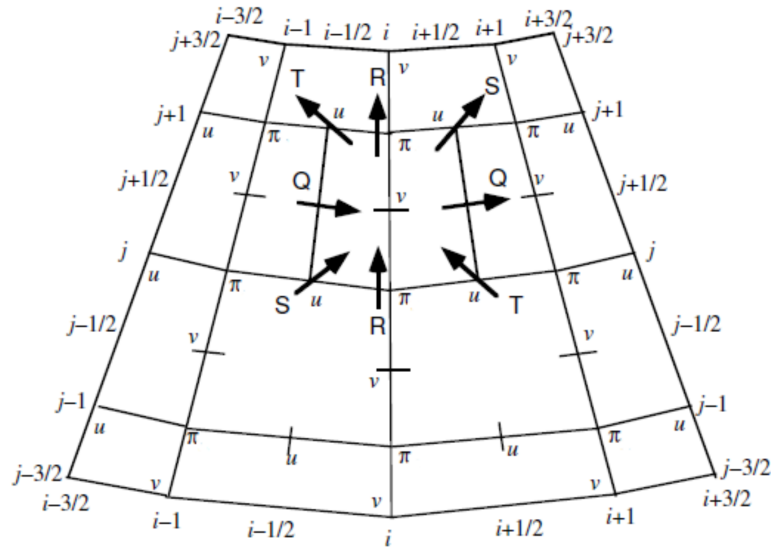
Όσον αφορά τώρα στις συνοριακές συνθήκες για την εξίσωση κίνησης στη διεύθυνση- u προσθέτουμε μια εικονική σειρά μετά τα όρια του πλέγματος στο οριζόντιο επίπεδο για κάθε μεταβλητή.

Η εξίσωση κίνησης στη v -διεύθυνση

Η εξίσωση κίνησης στο οριζόντιο επίπεδο σε σφαιρικές- σ -πίεση συντεταγμένες στη v -διεύθυνση είχαμε αποδείξει (σχέση 4.52) ότι είναι

$$\begin{aligned}
R_\Gamma^2 \cos \phi \left[\frac{\partial}{\partial t} (\pi v) \right]_\sigma + \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (\pi u v R_\Gamma) + \frac{\partial}{\partial \phi} (v^2 \pi R_\Gamma \cos \phi) \right]_\sigma + \pi R_\Gamma^2 \cos \phi \frac{\partial}{\partial \sigma} (\dot{\sigma} v) \\
= -\pi u^2 R_\Gamma \sin \phi - \pi f u R_\Gamma^2 \cos \phi - R_\Gamma \cos \phi \left(\pi \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \sigma c_{p,d} \theta_v \frac{\partial P}{\partial \sigma} \frac{\partial \pi}{\partial \phi} \right)_\sigma \quad (4.86)
\end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο με την εξίσωση στην διεύθυνση- u , θα μπορέσουμε να βρούμε την μορφή πεπερασμένων διαφορών της εξίσωσης στη διεύθυνση- v αν υποθέσουμε ότι



Σχήμα 4.5: Οι ροές στο πλέγμα για τη μετατροπή σε πεπερασμένες διαφορές της εξίσωσης κίνησης στη διεύθυνση -v. [2]

οι ροές που εισέρχονται και εξέρχονται ένα κελί είναι αυτές που φαίνονται στα 8 σημεία του Σχήματος 4.5.

Έτσι, η εξίσωση κίνησης στη διεύθυνση-v σε σφαιρικές-σ-πίεση συντεταγμένες στην μορφή πεπερασμένων διαφορών είναι:

$$v_{i,j+1/2,k,t} = \underbrace{\frac{(\pi_{t-h}\Delta A)_{i,j+1/2}}{(\pi_t\Delta A)_{i,j+1/2}}v_{i,j+1/2,k,t-h} + \frac{h}{(\pi_t\Delta A)_{i,j+1/2}} \times \left\{ \right.}_{\text{Όρος Χρονικού Βήματος}} \quad (4.87)$$

$$\left(\begin{aligned} &Q_{i-1/2,j+1/2} \frac{v_{i-1,j+1/2} + v_{i,j+1/2}}{2} - Q_{i+1/2,j+1/2} \frac{v_{i,j+1/2} + v_{i+1,j+1/2}}{2} \\ &+ R_{i,j} \frac{v_{i,j-1/2} + v_{i,j+1/2}}{2} - R_{i,j+1} \frac{v_{i,j+1/2} + v_{i,j+3/2}}{2} \\ &+ S_{i-1/2,j} \frac{v_{i-1,j-1/2} + v_{i,j+1/2}}{2} - S_{i+1/2,j+1} \frac{v_{i,j+1/2} + v_{i+1,j+3/2}}{2} \\ &+ T_{i+1/2,j} \frac{v_{i+1,j-1/2} + v_{i,j+1/2}}{2} - T_{i-1/2,j+1} \frac{v_{i,j+1/2} + v_{i-1,j+3/2}}{2} \end{aligned} \right)_{k,t-h} \quad (4.88)$$

Όροι Οριζόντιας Μεταφοράς

$$+ \frac{1}{\Delta\sigma_k} (\pi_t\Delta A\dot{\sigma}_{k-1/2,t}v_{k-1/2,t-h} - \pi_t\Delta A\dot{\sigma}_{k+1/2,t}v_{k+1/2,t-h})_{i,j+1/2} \quad (4.89)$$

Κάθετη Μεταφορά της Οριζόντιας Ορμής

$$- \frac{R_\Gamma(\Delta\lambda\Delta\phi)_{i,j+1/2}}{2} \times \left[\pi_{i,j} \frac{u_{i-1/2,j} + u_{i+1/2,j}}{2} \left(f_j R_\Gamma \cos\phi_j + \frac{u_{i-1/2,j} + u_{i+1/2,j}}{2} \sin\phi_j \right) \right]$$

$$+\pi_{i,j+1} \frac{u_{i-1/2,j+1} + u_{i+1/2,j+1}}{2} \left(f_{j+1} R_{\Gamma} \cos \phi_{j+1} + \frac{u_{i-1/2,j+1} + u_{i+1/2,j+1}}{2} \sin \phi_{j+1} \right) \Big]_{k,t-h} \quad (4.90)$$

Οροι Coriolis και μεταροπής σε σφαιρικό πλέγμα

$$\begin{aligned} & -R_{\Gamma} (\cos \phi \Delta \lambda)_{i,j+1/2} \times \left[(\Phi_{i,j+1,k} - \Phi_{i,j,k}) \frac{\pi_{i,j} + \pi_{i,j+1}}{2} + (\pi_{i,j+1} - \pi_{i,j}) \right. \\ & \quad \times \frac{c_{p,d}}{2} \left(\left[\theta_{\nu,k} \frac{\sigma_{k+1/2}(P_{k+1/2} - P_k) + \sigma_{k-1/2}(P_k - P_{k-1/2})}{\Delta \sigma_k} \right]_{i,j} \right. \\ & \quad \left. \left. + \left[\theta_{\nu,k} \frac{\sigma_{k+1/2}(P_{k+1/2} - P_k) + \sigma_{k-1/2}(P_k - P_{k-1/2})}{\Delta \sigma_k} \right]_{i,j+1} \right) \right] \Big\} \quad (4.91) \end{aligned}$$

Οροι Βαροβαθμίδας

Οι όροι παρακάτω χρειάζονται επιπρόσθετο interpolation, παρομοίως με την εξίσωση κίνησης στη διεύθυνση -u, ως εξής:

- η πίεση στήλης π πολλαπλασιασμένη με το εμβαδό ενός κελιού του πλέγματος στα σημεία ν στο οριζόντιο επίπεδο:

$$\begin{aligned} (\pi \Delta A)_{i,j+1/2} &= \frac{1}{8} \{ (\pi \Delta A)_{i+1,j} + (\pi \Delta A)_{i+1,j+1} \\ &+ 2 [(\pi \Delta A)_{i,j} + (\pi \Delta A)_{i,j+1}] + (\pi \Delta A)_{i-1,j} + (\pi \Delta A)_{i-1,j+1} \} \quad (4.92) \end{aligned}$$

- για τον όρο

$$\begin{aligned} (\pi \Delta A \dot{\sigma}_{k-1/2,t})_{i,j+1/2} &= \frac{1}{8} [(\pi \Delta A \dot{\sigma}_{k-1/2,t})_{i+1,j} + (\pi \Delta A \dot{\sigma}_{k-1/2,t})_{i+1,j+1} \\ &+ 2 \{ (\pi \Delta A \dot{\sigma}_{k-1/2,t})_{i,j} + (\pi \Delta A \dot{\sigma}_{k-1/2,t})_{i,j+1} \} + (\pi \Delta A \dot{\sigma}_{k-1/2,t})_{i-1,j} \\ &+ (\pi \Delta A \dot{\sigma}_{k-1/2,t})_{i-1,j+1}] \quad (4.93) \end{aligned}$$

- καθώς επίσης και για τις ροές:

$$\begin{aligned} Q_{i-1/2,j+1/2} &= \frac{1}{12} [F_{i-3/2,j} + F_{i-3/2,j+1} + 2(F_{i-1/2,j} + F_{i-1/2,j+1}) \\ &+ F_{i+1/2,j} + F_{i+1/2,j+1}] \quad (4.94) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{i,j} &= \frac{1}{12} [G_{i-1,j-1/2} + G_{i-1,j+1/2} + 2(G_{i,j-1/2} + G_{i,j+1/2}) \\ &+ G_{i+1,j-1/2} + G_{i+1,j+1/2}] \quad (4.95) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{i+1/2,j} &= \frac{1}{24} (G_{i,j-1/2} + G_{i,j+1/2} + G_{i+1,j-1/2} + G_{i+1,j+1/2} \\ &+ F_{i-1/2,j} + 2F_{i+1/2,j} + F_{i+3/2,j}) \quad (4.96) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{i+1/2,j} &= \frac{1}{24} (G_{i,j-1/2} + G_{i,j+1/2} + G_{i+1,j-1/2} + G_{i+1,j+1/2} \\ &- F_{i-1/2,j} - 2F_{i+1/2,j} - F_{i+3/2,j}) \quad (4.97) \end{aligned}$$

Τέλος, οι τιμές του v για το πάτωμα κάθε στρώματος που χρειαζόμαστε στην (4.89) υπολογίζονται από την

$$v_{i,j+1/2,k+1/2,t-h} = \frac{\Delta\sigma_{k+1}v_{i,j+1/2,k,t-h} + \Delta\sigma_k v_{i,j+1/2,k+1,t-h}}{\Delta\sigma_k + \Delta\sigma_{k+1}} \quad (4.98)$$

Όσον αφορά τώρα στις συνοριακές συνθήκες για την εξίσωση κίνησης στη διεύθυνση- v προσθέτουμε μια εικονική σειρά μετά τα όρια του πλέγματος στο οριζόντιο επίπεδο για κάθε μεταβλητή.

Η υδροστατική εξίσωση

Όταν η διάσταση του κελιού είναι μεγαλύτερη της τάξεως των 3 km, η ατμόσφαιρα του μοντέλου είναι εν γένει σε υδροστατική ισορροπία, και το γεωδυναμικό που χρησιμοποιείται στις εξισώσεις κίνησης στο οριζόντιο επίπεδο μπορεί να υπολογιστεί διαγνωστικά με την υδροστατική εξίσωση. Η υδροστατική εξίσωση της (4.36) $d\Phi = -c_{p,d}\theta_\nu dP$. Μία μορφή πεπερασμένων διαφορών δίνει το γεωδυναμικό στο κάθετο μέσο του στρώματος που πρόσκεινται στην επιφάνεια του εδάφους την $t - h$:

$$\Phi_{i,j,N_L,t-h} = \Phi_{i,j,N_L+1/2} - c_{p,d}[\theta_{\nu,N_L}(P_{N_L} - P_{N_L+1/2})]_{i,j,t-h} \quad (4.99)$$

Επίσης, το γεωδυναμικό στο πάτωμα και στο κάθετο μέσο κάθε στρώματος πάνω από την επιφάνεια του εδάφους υπολογίζονται από τις

$$\Phi_{i,j,k+1/2,t-h} = \Phi_{i,j,k+1,t-h} - c_{p,d}[\theta_{\nu,k+1}(P_{k+1/2} - P_{k+1})]_{i,j,t-h} \quad (4.100)$$

$$\Phi_{i,j,k,t-h} = \Phi_{i,j,k+1/2,t-h} - c_{p,d}[\theta_{\nu,k}(P_k - P_{k+1/2})]_{i,j,t-h} \quad (4.101)$$

αντίστοιχα.

4.2.3 Ο Κώδικας του μοντέλου σε Matlab

Listing 4.1: Matlab Script

```

1
2 clear ;
3 clc ;
4 clf ;
5
6 format long ;
7
8 NLAT=40 ; NLONG=50 ; NVERT=15 ; p_top=250 ;
9 Re=6371000 ; % m
10 Re1=0.6371 ;
11 Omega=7.292*10^-5 ; % s^-1
12
13 dl_d=0.05 ; dphi_d=0.05 ;
14 dl=dl_d*pi/180 ; dphi=dphi_d*pi/180 ;

```

```

15 | long0=21.2*pi/180;lat0=38.61*pi/180;
16 | longend=long0+(NLONG-1)*dl;latend=lat0+(NLAT-1)*dphi;
17 | l=long0:dl:longend;
18 | phi=lat0:dphi:latend;
19 |
20 |
21 | z_below_test=10000;           % m
22 | p_below_test=265;           % hPa
23 | p_top_test=250;           % hPa
24 | rho_below_test=0.414;       % kg/m^3
25 | g_below_test=9.7764;       % m/s^2
26 |
27 | z_top_test=z_below_test+100*(p_below_test-p_top_test)/
    |     rho_below_test*g_below_test); % hydrostatic equation
28 |
29 | z_surf_test=0;
30 | z_test=linspace(z_top_test,z_surf_test,NVERT+1)';
31 |
32 |
33 | A=readmatrix('Standard_Amospheric_Variables_data.txt');
34 | z_standard=A(:,1);           % km
35 | g_standard=A(:,2);           % m/s^2
36 | p_standard=A(:,3);           % hPa
37 | temp_standard=A(:,4);       % K
38 | rho_standard=A(:,5);        % Kg/m^3
39 |
40 | z_standard=z_standard(end:-1:1)*1000; % m
41 | g_standard=g_standard(end:-1:1); % m/s^2
42 | p_standard=p_standard(end:-1:1); % hPa
43 | temp_standard=temp_standard(end:-1:1); % K
44 | rho_standard=rho_standard(end:-1:1); % Kg/m^3
45 |
46 | g_test=spline(z_standard,g_standard,z_test); % m
    | /s^2
47 | rho_test=spline(z_standard,rho_standard,z_test); %
    | Kg/m^3
48 | p_test=spline(z_standard,p_standard,z_test); %
    | hPa
49 | p_test(1)=250; %!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
50 |
51 |
52 | s=(p_test-p_test(1))./(p_test(end)-p_test(1));
53 | ds=s(2:end)-s(1:end-1);
54 |
55 |
56 | phic=(phi(1)+phi(end))/2;

```



```

57 lc=(l(1)+l(end))/2;
58
59 [L,PHI]=meshgrid(l,phi);
60 p_base=1010; % hpa
61 Dp_peak=15; % hpa
62
63 term1=-1.*(Re*(cos((PHI+phic)./2).*0.1.*(L-lc)).^2)./2;
64 term2=-0.5.*(Re*(0.1.*(PHI-phic)).^2)./2;
65 p0_surf=p_base-Dp_peak.*exp(term1+term2);
66
67
68 % p0_surf=p0_surf';
69 % p_column0=p0_surf-p_top;
70
71 if 1
72 figure(1)
73 [cs,h]=contour(l,phi,p0_surf,1000:1:1010,'k');
74 axis([long0 longend lat0 latend ])
75 clabel(cs,h);
76 % grid on
77 xlabel('Longitude (radians)');
78 ylabel('Latitude (radians)');
79 title('Initialization of Surface Pressure (hPa)');
80 %colorbar
81 end
82
83 if 1
84
85 figure(2)
86 sc=surfc(l,phi,p0_surf);
87 axis([long0 longend lat0 latend ])
88 xlabel('Longitude (radians)');
89 ylabel('Latitude (radians)');
90 title('Initialization of Surface Pressure (hPa)');
91
92 end
93
94
95 p0_surf=p0_surf';
96 p_column0=p0_surf-p_top;
97
98 pb0=zeros(NLONG,NLAT,NVERT+1);
99
100 for k=1:NVERT+1
101     pb0(:,:,k)=p_top+s(k).*p_column0;
102 end

```

```

103
104 k_greek=0.286;
105 Pkb0=(pb0/1000).^k_greek; % (7.9)
106
107
108 Pkm0=((Pkb0(:,: ,2:end).*pb0(:,: ,2:end)-Pkb0(:,: ,1:end-1)
    .*pb0(:,: ,1:end-1))...
109     ./(pb0(:,: ,2:end)-pb0(:,: ,1:end-1))./(1+k_greek);
    % (7.8)
110
111 pm0=1000.*(Pkm0.^(1/k_greek)); % (7.10)
112
113 temp0=zeros(NLONG,NLAT,NVERT);
114 temp00=spline(p_standard,temp_standard,pm0(1,1,:));
115 for i=1:NLONG
116     for j=1:NLAT
117         temp0(i,j,:)=temp00;
118     end
119 end
120
121 pvtempm0=zeros(NLONG,NLAT,NVERT);
122 for k=1:NVERT
123     pvtempm0(:,: ,k)=temp0(:,: ,k).*(1000./pm0(:,: ,k)).^
        k_greek; % (2.96)
124 end
125
126 pvtempb0=((Pkb0(:,: ,2:end-1)-Pkm0(:,: ,1:end-1)).*pvtempm0
    (:,: ,1:end-1)+(Pkm0(:,: ,2:end)-Pkb0(:,: ,2:end-1)).*
    pvtempm0(:,: ,2:end))...
127     ./(Pkm0(:,: ,2:end)-Pkm0(:,: ,1:end-1));
128
129 Rd=2.8704; % m^3 hPa Kg^-1 K^-1
130 rho_0=pm0./(Rd.*temp0);
131
132
133 t0=0;tend=30;dt=0.1;
134 t=t0:dt:tend;
135 Nt=length(t);
136
137 p_column=zeros(NLONG,NLAT,Nt);
138 p_column(:,: ,1)=p_column0;
139 p_columnn=zeros(NLONG+2,NLAT+2,Nt);
140
141 p_columnn3d=zeros(NLONG,NLAT,NVERT);
142 p_columnn3d=zeros(NLONG+2,NLAT+2,NVERT+1,Nt);
143

```

```

144 %F=zeros(NLONG+1,NLAT,NVERT,Nt);
145 FF=zeros(NLONG+3,NLAT+2,NVERT);
146
147 %G=zeros(NLONG,NLAT+1,NVERT,Nt);
148 GG=zeros(NLONG+2,NLAT+3,NVERT);
149
150 dsigma=zeros(NLONG,NLAT,NVERT+1,Nt);
151 dsigmaa=zeros(NLONG+2,NLAT+2,NVERT+1,Nt);
152 dsigmayy=zeros(NLONG,NLAT+2,NVERT+1,Nt);
153
154
155 pvtempm=zeros(NLONG,NLAT,NVERT,Nt);
156 pvtempm(:,:,,1)=pvtempm0;
157
158 pvtempb=zeros(NLONG,NLAT,NVERT+1,Nt);
159 pvtempb(:,:,2:NVERT,1)=pvtempb0;
160 pvtempxx=zeros(NLONG+2,NLAT,NVERT,Nt);
161 pvtempyy=zeros(NLONG,NLAT+2,NVERT,Nt);
162
163 Pk=zeros(NLONG,NLAT,NVERT+1,Nt);
164 Pk(:,:,,1)=Pkb0;
165 Pkm=zeros(NLONG,NLAT,NVERT,Nt);
166 Pkm(:,:,,1)=Pkm0;
167 Pkmyy=zeros(NLONG,NLAT+2,NVERT,Nt);
168 Pkbyy=zeros(NLONG,NLAT+2,NVERT+1,Nt);
169
170 p=zeros(NLONG,NLAT,NVERT+1,Nt);
171 p(:,:,,1)=pb0;
172 pm=zeros(NLONG,NLAT,NVERT,Nt);
173 pm(:,:,,1)=pm0;
174
175 gdb=zeros(NLONG,NLAT,NVERT+1,Nt);
176 gdm=zeros(NLONG,NLAT,NVERT,Nt);
177 gdmxx=zeros(NLONG+2,NLAT,NVERT,Nt);
178 gdmyy=zeros(NLONG,NLAT+2,NVERT,Nt);
179
180 u=zeros(NLONG+1,NLAT,NVERT,Nt);
181 v=zeros(NLONG,NLAT+1,NVERT,Nt);
182 uu=zeros(NLONG+3,NLAT+2,NVERT,Nt);
183 uuy=zeros(NLONG+1,NLAT+2,NVERT,Nt);
184 uuz=zeros(NLONG+1,NLAT,NVERT+2,Nt);
185 vvx=zeros(NLONG+2,NLAT+1,NVERT,Nt);
186 vvz=zeros(NLONG,NLAT+1,NVERT+2,Nt);
187 vb=zeros(NLONG,NLAT+1,NVERT+1,Nt);
188
189 ds11=zeros(1,1,NVERT+2);

```

```

190
191
192 vv=zeros(NLONG+2,NLAT+3,NVERT,Nt);
193
194 pcdAb=zeros(NLONG+1,NLAT,Nt);
195 pcdAb_3d=zeros(NLONG+1,NLAT,NVERT,Nt);
196
197 phi2dy=zeros(NLONG,NLAT+2);
198
199 dAA=zeros(NLONG+2,NLAT+2);
200 dAA3d=zeros(NLONG+2,NLAT+2,NVERT+1);
201
202 bphi2d=zeros(NLONG,NLAT+1);
203
204 p_column3d(:,:,:,1)=repmat(p_column(:,:,:,1),[1 1 NVERT]);
205
206 p_columnn(2:end-1,2:end-1,1)=p_column(:,:,:,1);
207 p_columnn(1,:,:,1)=[p_column(1,1,1) p_column(1,:,:,1)
    p_column(1,end,1)];
208 p_columnn(end,:,:,1)=[p_column(end,1,1) p_column(end,:,:,1)
    p_column(end,end,1)];
209 p_columnn(2:end-1,1,1)=p_column(:,1,1);p_columnn(2:end-1,
    end,1)=p_column(:,end,1);
210
211 for i=1:Nt
212
213
214 Fc=0.5*(p_column3d(1:end-1,:,:,i)+p_column3d(2:end,:,:,i)
    ).*(u(2:end-1,:,:,i).*Re.*dphi);
215 Fe=(p_column3d(end,:,:,i)).*(u(end,:,:,i).*Re.*dphi);
216 Fw=(p_column3d(1,:,:,i)).*(u(1,:,:,i).*Re.*dphi);
217 F=[Fw;Fc;Fe];
218
219
220 mphi=0.5*(phi(2:end)+phi(1:end-1));
221 Gc=0.5*(p_column3d(:,1:end-1,:,:,i)+p_column3d(:,2:end,:,:,i)
    ).*(v(:,2:end-1,:,:,i).*Re.*dl.*cos(mphi));
222 Gs=(p_column3d(:,1,:,:,i)).*(v(:,1,:,:,i).*Re.*dl.*cos(mphi
    (1)-dphi));
223 Gn=(p_column3d(:,end,:,:,i)).*(v(:,end,:,:,i).*Re.*dl.*cos(
    mphi(end)+dphi));
224 G=[Gs,Gc,Gn];
225
226 FG=F(2:end,:,:) - F(1:end-1,:,:) + G(:,2:end,:) - G(:,1:end
    -1,:);
227 ds1(1,1,1:NVERT)=ds;

```

```

228 FGds=FG.*ds1;
229 FGdssum=sum(FGds,3);
230 phi2d= repmat(phi,NLONG,1);
231 aa=dt./(Re^2.*cos(phi2d).*dl.*dphi);
232 dp_column=aa.*FGdssum;
233 p_column(:,:,i+1)=p_column(:,:,i)-dp_column;
234
235 p_column3d(:,:,:,i+1)=repmat(p_column(:,:,i+1),[1,1,NVERT
    ]);
236
237 for k=1:NVERT+1
238     p(:,:,k,i+1)=p_top+s(k).*p_column(:,:,i+1);
239 end
240
241 Pk(:,:,:,i+1)=real((p(:,:,:,i+1)/1000).^k_greek); % (7.9)
242
243 Pkm(:,:,:,i+1)=((Pk(:,:,2:end,i+1).*p(:,:,2:end,i+1)-Pk
    (:,:,1:end-1,i+1).*p(:,:,1:end-1,i+1))...
244     ./(p(:,:,2:end,i+1)-p(:,:,1:end-1,i+1)))./(1+k_greek)
    ; % (7.8)
245
246 pm(:,:,:,i+1)=1000.*(real(Pkm(:,:,:,i+1).^(1/k_greek)));
    % (7.10)
247
248
249 bb=-1./(p_column(:,:,i+1).*Re^2.*cos(phi2d).*dl.*dphi);
250 cc=(p_column(:,:,i+1)-p_column(:,:,i))./(dt.*p_column
    (:,:,i+1));
251
252 FGdsksum=FG(:,:,1).*ds(1);
253 for k=2:NVERT
254
255     FGk=FG(:,:,k).*ds(k);
256     FGdsksum=FGdsksum+FGk;
257     dsigma(:,:,k,i+1)=bb.*FGdsksum-s(k).*cc;
258
259 end
260
261
262 term1=p_column3d(:,:,:,i).*pvtempm(:,:,:,i)./p_column3d
    (:,:,i+1);
263 term2=dt./(p_column3d(:,:,:,i+1).*Re^2.*cos(phi2d).*dl.*
    dphi);
264
265 pvtbxc=0.5.*(pvtempm(1:end-1,(:,:,i))+pvtempm(2:end,(:,:,i)))
    ;

```

```

266 pvtc=pvtempm(end, :, :, i);
267 pvtw=pvtempm(1, :, :, i);
268 pvtbx=[pvtw;pvtbxc;pvtc];
269 Fpvt=F(1:end-1, :, :).*pvtbx(1:end-1, :, :)-F(2:end, :, :).*
    pvtbx(2:end, :, :);
270
271 pvtbyc=0.5.*(pvtempm(:, 1:end-1, :, i)+pvtempm(:, 2:end, :, i))
    ;
272 pvtb=pvtempm(:, end, :, i);
273 pvtb=pvtempm(:, 1, :, i);
274 pvtby=[pvtb, pvtbyc, pvtb];
275 Gpvt=G(:, 1:end-1, :).*pvtby(:, 1:end-1, :)-G(:, 2:end, :).*
    pvtby(:, 2:end, :);
276
277 term3=Fpvt+Gpvt;
278
279 term4=p_column3d(:, :, :, i+1).*Re.^2.*cos(phi2d).*dl.*dphi
    .* ...
280 (dsigma(:, :, 1:end-1, i+1).*pvtempb(:, :, 1:end-1, i)-
    dsigma(:, :, 2:end, i+1).*pvtempb(:, :, 2:end, i))./ds1;
281
282 pvtempm(:, :, :, i+1)=term1+term2.*(term3+term4);
283
284 pvtempb(:, :, 2:NVERT, i+1)=((Pkm(:, :, 2:end-1, i+1)-Pkm(:, :, 1:
    end-1, i+1)).*pvtempm(:, :, 1:end-1, i+1)...
285 +(Pkm(:, :, 2:end, i+1)-Pkm(:, :, 2:end-1, i+1)).*pvtempm
    (:, :, 2:end, i+1))...
286 ./((Pkm(:, :, 2:end, i+1)-Pkm(:, :, 1:end-1, i+1)));
287
288
289 Cpd=1004.67; % J*Kg^-1*K^-1
290 gdm(:, :, end, i)=gdb(:, :, end, i)-Cpd.*pvtempm(:, :, end, i).*(
    Pkm(:, :, end, i)-Pk(:, :, end, i));
291 for k=NVERT:-1:2
292     gdb(:, :, k, i)=gdm(:, :, k, i)-Cpd.*pvtempm(:, :, k, i).*(Pk
        (:, :, k, i)-Pkm(:, :, k, i));
293     gdm(:, :, k-1, i)=gdb(:, :, k, i)-Cpd.*pvtempm(:, :, k-1, i)
        .*(Pkm(:, :, k-1, i)-Pk(:, :, k, i));
294 end
295 k=1; gdb(:, :, k, i)=gdm(:, :, k, i)-Cpd.*pvtempm(:, :, k, i).*(Pk
    (:, :, k, i)-Pkm(:, :, k, i));
296
297 dA=Re.^2.*cos(phi2d).*dl.*dphi;
298
299 dAA(2:end-1, 2:end-1)=dA(:, :);
300 dAA(1, :)=[dA(1, 1) dA(1, :) dA(1, end)];

```

```

301 dAA(end,:)=[dA(end,1) dA(end,:) dA(end,end)];
302 dAA(2:end-1,1)=dA(:,1);dAA(2:end-1,end)=dA(:,end);
303
304 p_columnn(2:end-1,2:end-1,i+1)=p_column(:, :, i+1);
305 p_columnn(1, :, i+1)=[p_column(1,1,i+1) p_column(1, :, i+1)
    p_column(1,end,i+1)];
306 p_columnn(end, :, i+1)=[p_column(end,1,i+1) p_column(end, :,
    i+1) p_column(end,end,i+1)];
307 p_columnn(2:end-1,1,i+1)=p_column(:,1,i+1);p_columnn(2:
    end-1,end,i+1)=p_column(:,end,i+1);
308
309 if i==1
310 pcdAb(:, :, i)=(p_columnn(1:end-1,3:end,i).*dAA(1:end-1,3:
    end)+p_columnn(2:end,3:end,i).*dAA(2:end,3:end)...
311     +2.*(p_columnn(1:end-1,2:end-1,i).*dAA(1:end-1,2:end
    -1)+p_columnn(2:end,2:end-1,i).*dAA(2:end,2:end-1)
    )...
312     +p_columnn(1:end-1,1:end-2,i).*dAA(1:end-1,1:end-2)+
    p_columnn(2:end,1:end-2,i).*dAA(2:end,1:end-2))
    ./8;
313
314 pcdAb_3d(:, :, :, i)=repmat(pcdAb(:, :, i),[1 1 NVERT]);
315 end
316
317 pcdAb(:, :, i+1)=(p_columnn(1:end-1,3:end,i+1).*dAA(1:end
    -1,3:end)+p_columnn(2:end,3:end,i+1).*dAA(2:end,3:end)
    ...
318     +2.*(p_columnn(1:end-1,2:end-1,i+1).*dAA(1:end-1,2:
    end-1)+p_columnn(2:end,2:end-1,i+1).*dAA(2:end,2:
    end-1))...
319     +p_columnn(1:end-1,1:end-2,i+1).*dAA(1:end-1,1:end-2)
    +p_columnn(2:end,1:end-2,i+1).*dAA(2:end,1:end-2))
    ./8;
320
321 pcdAb_3d(:, :, :, i+1)=repmat(pcdAb(:, :, i+1),[1 1 NVERT]);
322
323
324 tdterm1=pcdAb_3d(:, :, :, i).*u(:, :, :, i)./pcdAb_3d(:, :, :, i
    +1);
325 tdterm2=dt./pcdAb_3d(:, :, :, i+1);
326
327
328 uu(2:end-1,2:end-1, :, i)=u(:, :, :, i);
329 uu(1, :, :, i)=[u(1,1, :, i) u(1, :, :, i) u(1,end, :, i)];
330 uu(end, :, :, i)=[u(end,1, :, i) u(end, :, :, i) u(end,end, :, i)];

```

```

331 uu(2:end-1,1,:,i)=u(:,1,:,i);uu(2:end-1,end,:,i)=u(:,end
    ,:,i);
332
333 FF(2:end-1,2:end-1,:)=F(:, :, :);
334 FF(1, :, :)= [F(1,1,:) F(1, :, :) F(1,end,:)];
335 FF(end, :, :)= [F(end,1,:) F(end, :, :) F(end,end,:)];
336 FF(2:end-1,1,:)=F(:,1,:);FF(2:end-1,end,:)=F(:,end,:);
337
338 B=(FF(1:end-1,1:end-2,:)+FF(2:end,1:end-2,:)+2.*(FF(1:end
    -1,2:end-1,:)+FF(2:end,2:end-1,:))...
339     +FF(1:end-1,3:end,:)+FF(2:end,3:end,:))./12;
340
341 haterm1=B(1:end-1, :, :).*(uu(1:end-2,2:end-1,:,i)+uu(2:end
    -1,2:end-1,:,i))./2 ...
342     -B(2:end, :, :).*(uu(2:end-1,2:end-1,:,i)+uu(3:end
    ,2:end-1,:,i))./2;
343
344 GG(2:end-1,2:end-1,:)=G(:, :, :);
345 GG(1, :, :)= [G(1,1,:) G(1, :, :) G(1,end,:)];
346 GG(end, :, :)= [G(end,1,:) G(end, :, :) G(end,end,:)];
347 GG(2:end-1,1,:)=G(:,1,:);GG(2:end-1,end,:)=G(:,end,:);
348
349 C=(GG(1:end-1,1:end-2,:)+GG(2:end,1:end-2,:)+2.*(GG(1:end
    -1,2:end-1,:)+GG(2:end,2:end-1,:))...
350     +GG(1:end-1,3:end,:)+GG(2:end,3:end,:))./12;
351
352 haterm2=C(:,1:end-1,:).*(uu(2:end-1,1:end-2,:,i)+uu(2:end
    -1,2:end-1,:,i))./2 ...
353     -C(:,2:end,:).*(uu(2:end-1,2:end-1,:,i)+uu(2:end
    -1,3:end,:,i))./2;
354
355 D=(GG(:,1:end-2,:)+2.*GG(:,2:end-1,:)+GG(:,3:end,:))...
356     +FF(1:end-1,1:end-1,:)+FF(1:end-1,2:end,:)+FF(2:end,1:
    end-1,:)+FF(2:end,2:end,:))./24;
357
358 haterm3=D(1:end-1,1:end-1,:).*(uu(1:end-2,1:end-2,:,i)+uu
    (2:end-1,2:end-1,:,i))./2 ...
359     -D(2:end,2:end,:).*(uu(2:end-1,2:end-1,:,i)+uu(3:
    end,3:end,:,i))./2 ;
360
361 E=(GG(:,1:end-2,:)+2.*GG(:,2:end-1,:)+GG(:,3:end,:))...
362     -FF(1:end-1,1:end-1,:)-FF(1:end-1,2:end,:)-FF(2:end,1:
    end-1,:)-FF(2:end,2:end,:))./24;
363
364 haterm4=E(2:end,1:end-1,:).*(uu(3:end,1:end-2,:,i)+uu(2:
    end-1,2:end-1,:,i))./2 ...

```



```

365     -E(1:end-1,2:end,:).*(uu(2:end-1,2:end-1, :, i)+uu
      (1:end-2,3:end, :, i))./2;
366
367
368 dsigmaa(2:end-1,2:end-1, :, i)=dsigma(:, :, :, i);
369 dsigmaa(1, :, :, i)=[dsigma(1,1, :, i) dsigma(1, :, :, i) dsigma
      (1,end, :, i)];
370 dsigmaa(end, :, :, i)=[dsigma(end,1, :, i) dsigma(end, :, :, i)
      dsigma(end,end, :, i)];
371 dsigmaa(2:end-1,1, :, i)=dsigma(:,1, :, i); dsigmaa(2:end-1,
      end, :, i)=dsigma(:,end, :, i);
372
373 dsigmaa(2:end-1,2:end-1, :, i+1)=dsigma(:, :, :, i+1);
374 dsigmaa(1, :, :, i+1)=[dsigma(1,1, :, i+1) dsigma(1, :, :, i+1)
      dsigma(1,end, :, i+1)];
375 dsigmaa(end, :, :, i+1)=[dsigma(end,1, :, i+1) dsigma(end, :, :,
      i+1) dsigma(end,end, :, i+1)];
376 dsigmaa(2:end-1,1, :, i+1)=dsigma(:,1, :, i+1); dsigmaa(2:end
      -1,end, :, i+1)=dsigma(:,end, :, i+1);
377
378
379 for k=1:NVERT+1
380     p_columnn3d(:, :, k, i)=p_columnn(:, :, i);
381     p_columnn3d(:, :, k, i+1)=p_columnn(:, :, i+1);
382     dAA3d(:, :, k)=dAA;
383 end
384
385 pcdAdsB(:, :, :, i+1)=(p_columnn3d(1:end-1,3:end, :, i+1).*
      dAA3d(1:end-1,3:end, :)).*dsigmaa(1:end-1,3:end, :, i+1)...
386     +p_columnn3d(2:end,3:end, :, i+1).*dAA3d(2:end,3:end, :))
      .*dsigmaa(2:end,3:end, :, i+1)...
387     +2.*(p_columnn3d(1:end-1,2:end-1, :, i+1).*dAA3d(1:end
      -1,2:end-1, :)).*dsigmaa(1:end-1,2:end-1, :, i+1)...
388     +p_columnn3d(2:end,2:end-1, :, i+1).*dAA3d(2:end,2:end
      -1, :)).*dsigmaa(2:end,2:end-1, :, i+1))...
389     +p_columnn3d(1:end-1,1:end-2, :, i+1).*dAA3d(1:end-1,1:
      end-2, :)).*dsigmaa(1:end-1,1:end-2, :, i+1)...
390     +p_columnn3d(2:end,1:end-2, :, i+1).*dAA3d(2:end,1:end
      -2, :)).*dsigmaa(2:end,1:end-2, :, i+1))./8;
391
392 uuz(:, :, 2:end-1, i)=u(:, :, :, i);
393 uuz(:, :, 1, i)=u(:, :, 1, i);
394 uuz(:, :, end, i)=u(:, :, end, i);
395 ds11(1,1,2:end-1)=ds1;
396 ds11(1,1,1)=ds1(1,1,1);
397 ds11(1,1,end)=ds1(1,1,end);

```

```

398   ub(:,:,:,i)=(ds11(1,1,2:end).*uuz(:,:,1:end-1,i)+ds11
      (1,1,1:end-1).*uuz(:,:,2:end,i))...
399       ./(ds11(1,1,1:end-1)+ds11(1,1,2:end));
400
401   vtterm=(pcdAdsb(:,:,1:end-1,i).*ub(:,:,1:end-1,i)-
      pcdAdsb(:,:,2:end,i).*ub(:,:,2:end,i))./ds1;
402
403   vvx(2:end-1,:,:,i)=v(:,:,:,i);
404   vvx(1,:,:,i)=v(1,:,:,i);
405   vvx(end,:,:,i)=v(end,:,:,i);
406
407   cterm1=Re.*dl.*dphi./2; %!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
408   cterm1=repmat(cterm1,[NLONG+1,NLAT,NVERT]);
409
410   phi2dx=[phi2d(1,:);phi2d;phi2d(end,:)];
411   fj=2.*Omega.*sin(phi2dx);
412   cterm2=repmat(p_columnn(1:end-1,2:end-1,i),[1 1 NVERT])
      .*(vvx(1:end-1,1:end-1,:,:,i)+vvx(1:end-1,2:end,:,:,i))./2
      ...
413   .*(repmat(fj(1:end-1,:).*Re.*cos(phi2dx(1:end-1,:)),[1
      1 NVERT])...
414   +(uu(1:end-2,2:end-1,:,:,i)+uu(2:end-1,2:end-1,:,:,i))
      ./2.*sin(phi2dx(1:end-1,:)));
415
416   cterm3=repmat(p_columnn(2:end,2:end-1,i),[1 1 NVERT]).*(
      vvx(2:end,1:end-1,:,:,i)+vvx(2:end,2:end,:,:,i))./2 ...
417   .*(repmat(fj(2:end,:).*Re.*cos(phi2dx(2:end,:)),[1 1
      NVERT])...
418   +(uu(2:end-1,2:end-1,:,:,i)+uu(3:end,2:end-1,:,:,i))./2.*
      sin(phi2dx(2:end,:)));
419
420
421
422   pterm1=-Re.*dphi;
423
424   gdmxx(:,:,:,i)=[gdm(1,:,:,i);gdm(:,:,:,i);gdm(end,:,:,i)
      ];
425   pterm2=(gdmxx(2:end,:,:,i)-gdmxx(1:end-1,:,:,i)).*(
      p_columnn(1:end-1,2:end-1,i)+p_columnn(2:end,2:end-1,i)
      )./2;
426   pterm3=(p_columnn(2:end,2:end-1,i)-p_columnn(1:end-1,2:
      end-1,i)).*Cpd./2;
427
428   pvtempxx(:,:,:,i)=[pvtempm(1,:,:,i);pvtempm(:,:,:,i);
      pvtempm(end,:,:,i)];

```

```

429 dsigmaxx=[dsigma(1, :, :, i); dsigma(:, :, :, i); dsigma(end, :, :,
      i)];
430 Pkmxx=[Pkm(1, :, :, i); Pkm(:, :, :, i); Pkm(end, :, :, i)];
431 Pkbxx=[Pk(1, :, :, i); Pk(:, :, :, i); Pk(end, :, :, i)];
432 pterm4=pvtempxx(1:end-1, :, :, i)...
433     .*(dsigmaxx(1:end-1, :, 2:end).*(Pkbxx(1:end-1, :, 2:end)
      -Pkmxx(1:end-1, :, :)))...
434     +dsigmaxx(1:end-1, :, 1:end-1).*(Pkmxx(1:end-1, :, :)
      -Pkbxx(1:end-1, :, 1:end-1)))./ds1;
435
436 pterm5=pvtempxx(2:end, :, :, i)...
437     .*(dsigmaxx(2:end, :, 2:end).*(Pkbxx(2:end, :, 2:end)-
      Pkmxx(2:end, :, :)))...
438     +dsigmaxx(2:end, :, 1:end-1).*(Pkmxx(2:end, :, :)
      -Pkbxx(2:end, :, 1:end-1)))./ds1;
439
440
441
442 u(:, :, :, i+1)=tdterm1+tdterm2.*(haterm1+haterm2+haterm3+
      haterm4+vtterm+cterm1.*(cterm2+cterm3)...
443     +pterm1.*(pterm2+pterm3.*(pterm4+pterm5)));
444
445
446 %%%%%%%%%%% v %%%%%%%%%%%
447
448
449 if i==1
450 pcdAb2(:, :, i)=(p_columnn(3:end, 1:end-1, i).*dAA(3:end, 1:
      end-1)+p_columnn(3:end, 2:end, i).*dAA(3:end, 2:end)...
451     +2.*(p_columnn(2:end-1, 1:end-1, i).*dAA(2:end-1, 1:
      end-1)+p_columnn(2:end-1, 2:end, i).*dAA(2:end-1, 2:end)
      )...
452     +p_columnn(1:end-2, 1:end-1, i).*dAA(1:end-2, 1:end-1)+
      p_columnn(1:end-2, 2:end, i).*dAA(1:end-2, 2:end))
      ./8;
453
454 pcdAb_3d2(:, :, i)=repmat(pcdAb2(:, :, i), [1 1 NVERT]);
455 end
456
457 pcdAb2(:, :, i+1)=(p_columnn(3:end, 1:end-1, i+1).*dAA(3:end
      , 1:end-1)+p_columnn(3:end, 2:end, i+1).*dAA(3:end, 2:end)
      ...
458     +2.*(p_columnn(2:end-1, 1:end-1, i+1).*dAA(2:end-1, 1:
      end-1)+p_columnn(2:end-1, 2:end, i+1).*dAA(2:end
      -1, 2:end))...

```

```

459     +p_columnn(1:end-2,1:end-1,i+1).*dAA(1:end-2,1:end-1)
        +p_columnn(1:end-2,2:end,i+1).*dAA(1:end-2,2:end))
        ./8;
460
461 pcdAb_3d2(:,:,i+1)=repmat(pcdAb2(:,:,i+1),[1 1 NVERT]);
462
463 td2term1=pcdAb_3d2(:,:,i).*v(:,:,i)./pcdAb_3d2(:,:,i+1);
464 td2term2=dt./pcdAb_3d2(:,:,i+1);
465
466 vv(2:end-1,2:end-1,:,i)=v(:,:,i);
467 vv(1,:,i)=[v(1,1,:,i) v(1,:,i) v(1,end,:,i)];
468 vv(end,:,i)=[v(end,1,:,i) v(end,:,i) v(end,end,:,i)];
469 vv(2:end-1,1,:,i)=v(:,1,:,i);vv(2:end-1,end,:,i)=v(:,end
    ,:,i);
470
471 Q=(FF(1:end-2,1:end-1,:)+FF(1:end-2,2:end,:)+2.*(FF(2:end
    -1,1:end-1,:)+FF(2:end-1,2:end,:))...
472     +FF(3:end,1:end-1,:)+FF(3:end,2:end,:))./12;
473
474 ha2term1=Q(1:end-1,:,i).*(vv(1:end-2,2:end-1,:,i)+vv(2:
    end-1,2:end-1,:,i))./2 ...
475     -Q(2:end,:,i).*(vv(2:end-1,2:end-1,:,i)+vv(3:end
    ,2:end-1,:,i))./2;
476
477
478 R=(GG(1:end-2,1:end-1,:)+GG(1:end-2,2:end,:)+2.*(GG(2:end
    -1,1:end-1,:)+GG(2:end-1,2:end,:))...
479     +GG(3:end,1:end-1,:)+GG(3:end,2:end,:))./12;
480
481 ha2term2=R(:,1:end-1,i).*(vv(2:end-1,1:end-2,:,i)+vv(2:
    end-1,2:end-1,:,i))./2 ...
482     -R(:,2:end,i).*(vv(2:end-1,2:end-1,:,i)+vv(2:end
    -1,3:end,:,i))./2;
483
484 S=(GG(1:end-1,1:end-1,:)+GG(1:end-1,2:end,:)+GG(2:end,1:
    end-1,:)+GG(2:end,2:end,:))...
485     +FF(1:end-2,:,i)+2.*FF(2:end-1,:,i)+FF(3:end,:,i))./24;
486
487 ha2term3=S(1:end-1,1:end-1,i).*(vv(1:end-2,1:end-2,:,i)+
    vv(2:end-1,2:end-1,:,i))./2 ...
488     -S(2:end,2:end,i).*(vv(2:end-1,2:end-1,:,i)+vv(3:
    end,3:end,:,i))./2 ;
489
490 T=(GG(1:end-1,1:end-1,:)+GG(1:end-1,2:end,:)+GG(2:end,1:
    end-1,:)+GG(2:end,2:end,:))...

```

```

491     -FF(1:end-2, :, :) - 2.*FF(2:end-1, :, :) - FF(3:end, :, :)) ./24;
492
493     ha2term4=T(2:end, 1:end-1, :).*(vv(3:end, 1:end-2, :, i)+vv
494         (2:end-1, 2:end-1, :, i))./2 ...
495         -T(1:end-1, 2:end, :).*(vv(2:end-1, 2:end-1, :, i)+vv
496         (1:end-2, 3:end, :, i))./2 ;
497
498     pcdAadsb2(:, :, :, i+1)=(p_columnn3d(1:end-2, 1:end-1, :, i+1)
499         .*dAA3d(1:end-2, 1:end-1, :).*dsigmaa(1:end-2, 1:end
500         -1, :, i+1))...
501         +p_columnn3d(1:end-2, 2:end, :, i+1).*dAA3d(1:end-2, 2:
502         end, :).*dsigmaa(1:end-2, 2:end, :, i+1))...
503         +2.*(p_columnn3d(2:end-1, 1:end-1, :, i+1).*dAA3d(2:end
504         -1, 1:end-1, :).*dsigmaa(2:end-1, 1:end-1, :, i+1))...
505         +p_columnn3d(2:end-1, 2:end, :, i+1).*dAA3d(2:end-1, 2:
506         end, :).*dsigmaa(2:end-1, 2:end, :, i+1))...
507         +p_columnn3d(3:end, 1:end-1, :, i+1).*dAA3d(3:end, 1:end
508         -1, :).*dsigmaa(3:end, 1:end-1, :, i+1))...
509         +p_columnn3d(3:end, 2:end, :, i+1).*dAA3d(3:end, 2:end, :)
510         .*dsigmaa(3:end, 2:end, :, i+1))./8;
511
512
513     vvz(:, :, 2:end-1, i)=v(:, :, :, i);
514     vvz(:, :, 1, i)=v(:, :, 1, i);
515     vvz(:, :, end, i)=v(:, :, end, i);
516     vb(:, :, :, i)=(ds11(1, 1, 2:end).*vvz(:, :, 1:end-1, i)+ds11
517         (1, 1, 1:end-1).*vvz(:, :, 2:end, i))...
518         ./(ds11(1, 1, 1:end-1)+ds11(1, 1, 2:end));
519
520     vt2term=(pcdAadsb2(:, :, 1:end-1, i).*vb(:, :, 1:end-1, i)-
521         pcdAadsb2(:, :, 2:end, i).*vb(:, :, 2:end, i))./ds1;
522
523
524     uuy(:, 2:end-1, :, i)=u(:, :, :, i);
525     uuy(:, 1, :, i)=u(:, 1, :, i);
526     uuy(:, end, :, i)=u(:, end, :, i);
527
528     c2term11=-Re.*dl.*dphi./2; %!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
529     c2term1=repmat(c2term11, [NLONG, NLAT+1, NVERT]);
530
531     phi2dy(:, 2:end-1)=phi2d;
532     phi2dy(:, 1)=phi2d(:, 1)-dphi;
533     phi2dy(:, end)=phi2d(:, end)+dphi;
534     f jy=2.*Omega.*sin(phi2dy);

```

```

525 c2term2=repmat(p_columnn(2:end-1,1:end-1,i),[1 1 NVERT])
      *(uuy(1:end-1,1:end-1,:,i)+uuy(2:end,1:end-1,:,i))
      ./2 ...
526 *(repmat(fjy(:,1:end-1).*Re.*cos(phi2dy(:,1:end-1))
      ,[1 1 NVERT]))...
527 +(uu(2:end-2,1:end-1,:,i)+uu(3:end-1,1:end-1,:,i))
      ./2.*sin(phi2dy(:,1:end-1)));
528
529 c2term3=repmat(p_columnn(2:end-1,2:end,i),[1 1 NVERT])
      *(uuy(1:end-1,2:end,:,i)+uuy(2:end,2:end,:,i))./2 ...
530 *(repmat(fjy(:,2:end).*Re.*cos(phi2dy(:,2:end))],[1
      1 NVERT]))...
531 +(uuy(1:end-1,2:end,:,i)+uuy(2:end,2:end,:,i))./2.*
      sin(phi2dy(:,2:end)));
532
533
534 mphi2d=repmat(mphi,[NLONG 1 1]);
535 bphi2d(:,2:end-1)=mphi2d;
536 bphi2d(:,1)=mphi2d(:,1)-dphi;
537 bphi2d(:,end)=mphi2d(:,end)+dphi;
538 p2term1=repmat(-Re.*cos(bphi2d).*dl,[1 1 NVERT]);
539
540 gdmyy(:,2:end-1,:,i)=gdm(:,:,:,i);
541 gdmyy(:,1,:,i)=gdm(:,1,:,i);
542 gdmyy(:,end,:,i)=gdm(:,end,:,i);
543
544 p2term2=(gdmyy(:,2:end,:,i)-gdmyy(:,1:end-1,:,i))...
545 *(repmat(p_columnn(2:end-1,1:end-1,i),[1 1 NVERT])+
      repmat(p_columnn(2:end-1,2:end,i),[1 1 NVERT]))./2;
546
547
548 p2term3=(repmat(p_columnn(2:end-1,2:end,i),[1 1 NVERT]))
      ...
549 -repmat(p_columnn(2:end-1,1:end-1,i),[1 1 NVERT]).*
      Cpd./2;
550
551 pvtempyy(:,2:end-1,:,i)=pvtempm(:,:,:,i);
552 pvtempyy(:,1,:,i)=pvtempm(:,1,:,i);
553 pvtempyy(:,end,:,i)=pvtempm(:,end,:,i);
554
555 dsigmayy(:,2:end-1,:,i)=dsigma(:,:,:,i);
556 dsigmayy(:,1,:,i)=dsigma(:,1,:,i);
557 dsigmayy(:,end,:,i)=dsigma(:,end,:,i);
558
559 Pkmyy(:,2:end-1,:,i)=Pkm(:,:,:,i);
560 Pkmyy(:,1,:,i)=Pkm(:,1,:,i);

```

```

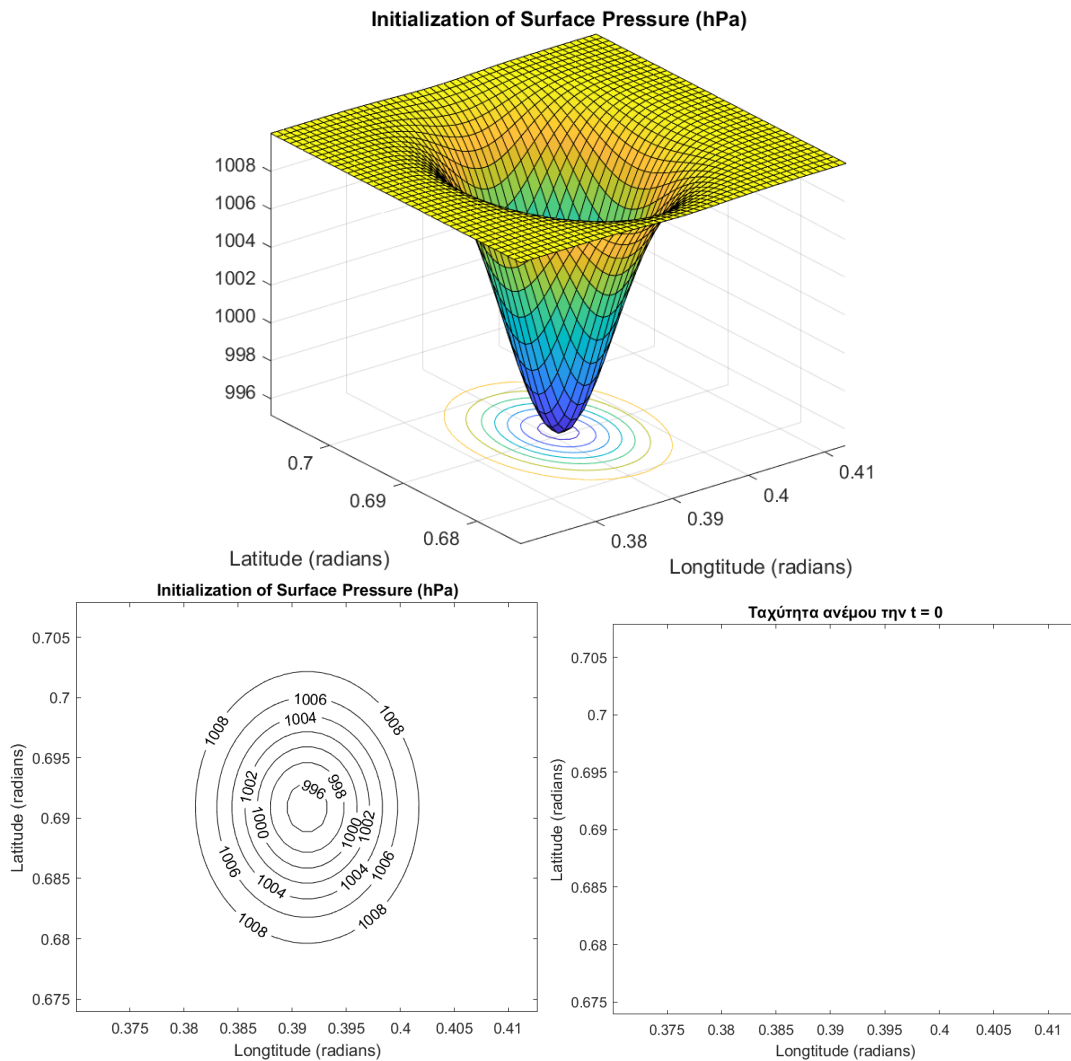
561 Pkmyy(:,end,:,i)=Pkm(:,end,:,i);
562
563 Pkbyy(:,2:end-1,:,i)=Pk(:, :, :, i);
564 Pkbyy(:,1,:,i)=Pk(:,1,:,i);
565 Pkbyy(:,end,:,i)=Pk(:,end,:,i);
566
567 p2term4=pvtempyy(:,1:end-1,:,i)...
568     *(dsigmayy(:,1:end-1,2:end,i).*(Pkbyy(:,1:end-1,2:
569     end,i)-Pkmyy(:,1:end-1,:,i))...
570     +dsigmayy(:,1:end-1,1:end-1,i).*(Pkmyy(:,1:end-1,:,i)
571     )-Pkbyy(:,1:end-1,1:end-1,i)))./ds1;
572
573 p2term5=pvtempyy(:,2:end,:,i)...
574     *(dsigmayy(:,2:end,2:end,i).*(Pkbyy(:,2:end,2:end,i)
575     -Pkmyy(:,2:end,:,i))...
576     +dsigmayy(:,2:end,1:end-1,i).*(Pkmyy(:,2:end,:,i)-
577     Pkbyy(:,2:end,1:end-1,i)))./ds1;
578
579
580
581
582 end
583
584
585
586 if 1
587     figure(3)
588     %[PPHI,LL]=meshgrid(phi,l);
589 for i=1:10:Nt
590     U=(u(1:end-1,:,end,i)+u(2:end,:,end,i))./2;
591     V=(v(:,1:end-1,end,i)+v(:,2:end,end,i))./2;
592 %     ll=180/pi*L';pp=180/pi*PHI';
593     quiver(L',PHI',0.3.*V,-0.3.*U,0);
594     axis([long0 longend lat0 latend ])
595     xlabel('Longitude (radians)');
596     ylabel('Latitude (radians)');
597     title(['t = ',num2str(t(i))]);
598     drawnow
599     pause(1.0)
600 end

```

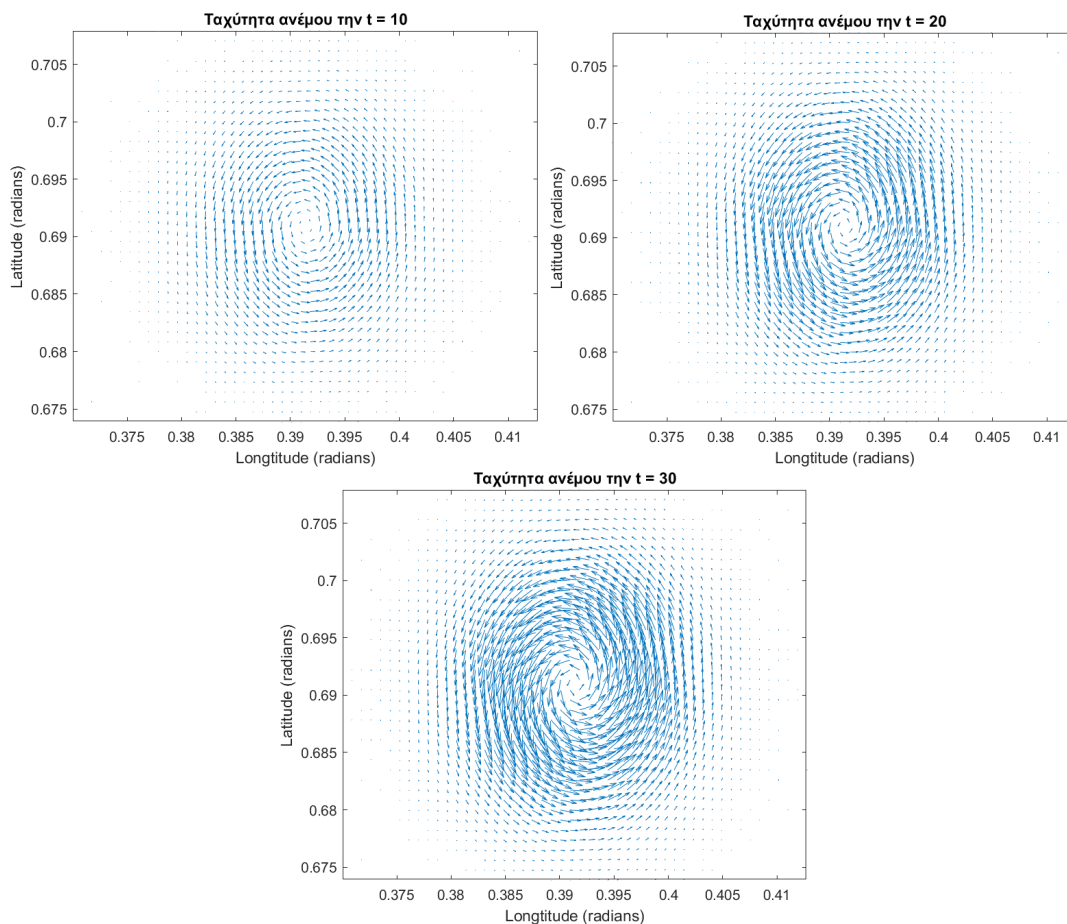
601 | end

Αρχικοποιώντας την πίεση επιφανείας με μία αντεστραμμένη κατανομή Gauss (γραμμές 56-65), χρησιμοποιώντας υποθετικά δεδομένα, σχηματίζεται ένα βαρομετρικό χαμηλό στο κέντρο της περιοχής που τρέχει το μοντέλο, με πίεση 996 hPa στο κέντρο του χαμηλού. Επίσης, το πεδίο της ταχύτητας του ανέμου είναι μηδενικό την $t = 0 \text{ sec}$.

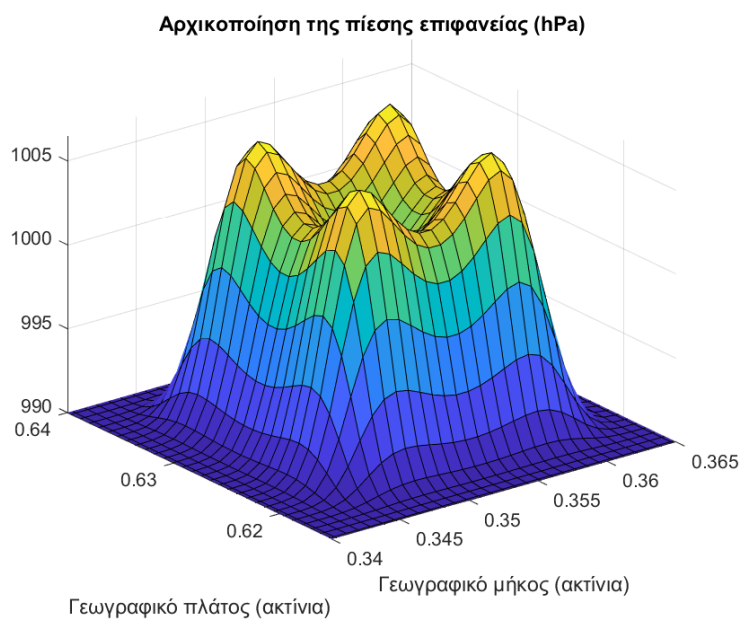
Συνεπώς, τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ sec}$ ισχύει ότι:

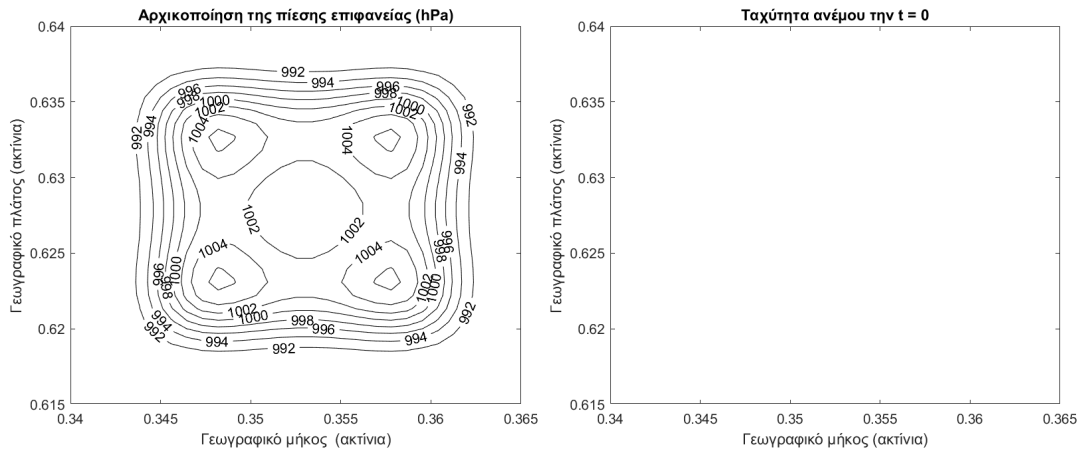


Τρέχοντας το μοντέλο με την ισχύουσα βαροβαθμίδα παρατηρούμε ότι ο άνεμος αρχίζει να πνέει αντίστροφα με τους δείκτες του ρολογιού, να συγχλίνει και να ενισχύεται με την πάροδο του χρόνου. Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται τρία χρονικά βήματα (σε sec) του μοντέλου όπου απεικονίζεται το πεδίο της ταχύτητας του ανέμου στην επιφάνεια.

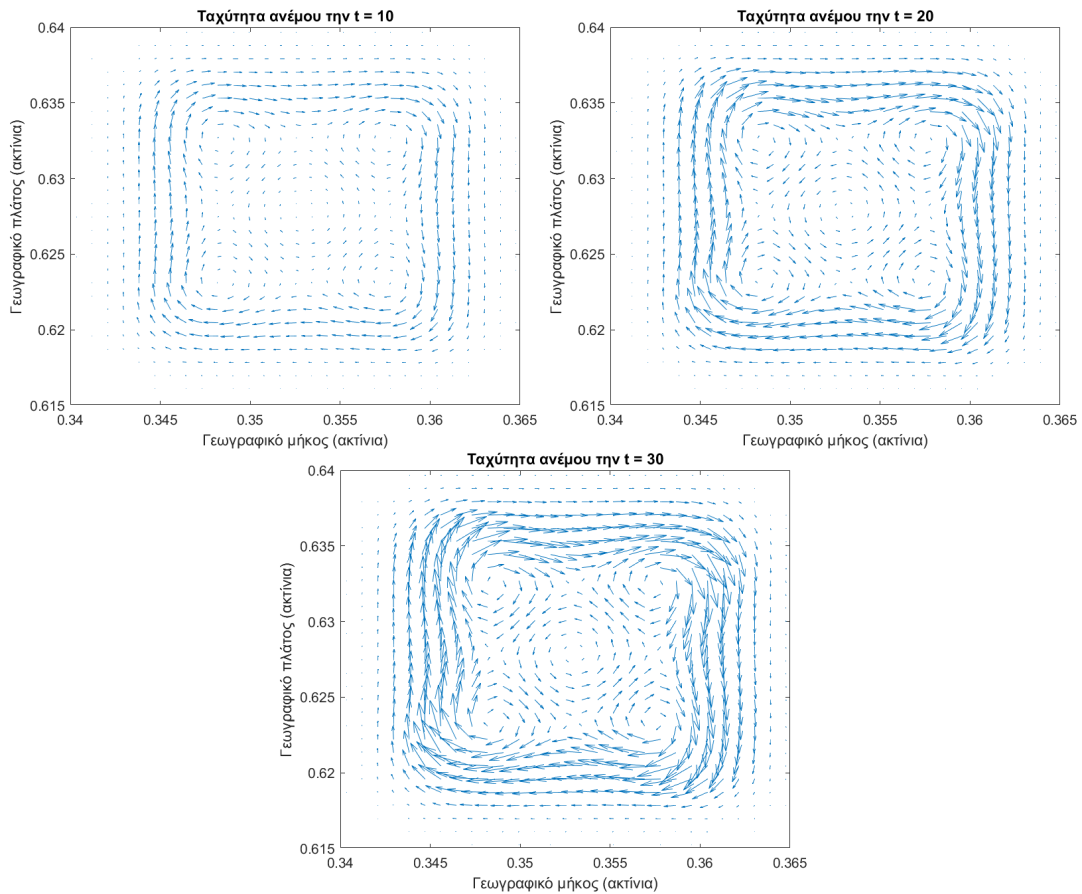


Τέλος, θα χρησιμοποιήσουμε ακόμα μία κατανομή πίεσης σε μια ευρύτερη χωρικά περιοχή για να αρχικοποιήσουμε το μοντέλο με υποθετικά δεδομένα, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:





Τρέχοντας, λοιπόν, το μοντέλο οι άνεμοι πνέουν και πάλι σύμφωνα με τη θεωρία. Παρακάτω παραθέτουμε κάποια χρονικά βήματα του μοντέλου (σε *sec*) που δείχνουν την εξέλιξη της ταχύτητας του ανέμου:



Παρατηρούμε και εδώ ότι ο άνεμος πνέει παράλληλα στις ισοβαρείς, δεξιόστροφα στα κέντρα υψηλών πιέσεων και αριστερόστροφα στο κέντρο χαμηλών πιέσεων, καθώς και ότι εκεί όπου έχουμε πύκνωση των ισοβαρών εμφανίζονται μεγαλύτερες εντάσεις του ανέμου.

Κλείνοντας να σημειώσουμε ότι οι αρχικοποιήσεις με τα υποθετικά δεδομένα (κατανομές) είναι εξιδανικευμένες περιπτώσεις που δεν συνταντώνται στην πραγματικότητα

στην επιχειρησιακή πρόγνωση (π.χ οι ολοστρόγγυλες ισοβαρείς) αλλά χρησιμοποιήθηκαν για να πιστοποιηθεί ότι το μοντέλο βγάζει τα αναμενόμενα σύμφωνα με τη θεωρία αποτελέσματα.

Παράρτημα Α'

Διεθνής Τυπική Ατμόσφαιρα καθ' ύψος

Ύψος (m)	Βαρύτητα ($m s^{-2}$)	Πίεση (hPa)	Θερμοκρασία (K)	Πυκνότητα ($Kg m^{-3}$)	Ύψος (m)	Βαρύτητα ($m s^{-2}$)	Πίεση (hPa)	Θερμοκρασία (K)	Πυκνότητα ($Kg m^{-3}$)
0.0	9.8072	1013.25	288.15	1.225	22	9.7396	40.5	218.57	0.0645
0.1	9.8069	1001.20	287.50	1.213	23	9.7365	34.7	219.57	0.0550
0.2	9.8066	989.45	286.85	1.202	24	9.7334	29.7	220.56	0.0469
0.3	9.8062	977.72	286.20	1.190	25	9.7304	25.5	221.55	0.0401
0.4	9.8059	966.11	285.55	1.179	26	9.7273	21.9	222.54	0.0343
0.5	9.8056	954.61	284.90	1.167	27	9.7243	18.8	223.54	0.0293
0.6	9.8053	943.22	284.25	1.156	28	9.7212	16.2	224.53	0.0251
0.7	9.8050	931.94	283.60	1.145	29	9.7182	13.9	225.52	0.0215
0.8	9.8047	920.77	282.95	1.134	30	9.7151	12.0	226.51	0.0184
0.9	9.8044	909.71	282.30	1.123	31	9.7121	10.3	227.50	0.0158
1	9.8041	898.80	281.65	1.112	32	9.7091	8.89	228.49	0.0136
1.5	9.8025	845.59	278.40	1.058	33	9.7060	7.67	230.97	0.0116
2	9.8010	795.0	275.15	1.007	34	9.7030	6.63	233.74	0.00989
2.5	9.7995	746.9	271.91	0.957	35	9.6999	5.75	236.51	0.00846
3	9.7979	701.2	268.66	0.909	36	9.6969	4.99	239.28	0.00726
3.5	9.7964	657.8	265.41	0.863	37	9.6939	4.33	242.05	0.00624
4	9.7948	616.6	262.17	0.819	38	9.6908	3.77	244.82	0.00537
4.5	9.7933	577.5	258.92	0.777	39	9.6878	3.29	247.58	0.00463
5	9.7917	540.5	255.68	0.736	40	9.6848	2.87	250.35	0.00400
5.5	9.7902	505.4	252.43	0.697	41	9.6817	2.51	253.11	0.00346
6	9.7887	472.2	249.19	0.660	42	9.6787	2.20	255.88	0.00299
6.5	9.7871	440.7	245.94	0.624	43	9.6757	1.93	258.64	0.00260
7	9.7856	411.1	242.70	0.590	44	9.6726	1.69	261.40	0.00226
7.5	9.7840	383.0	239.46	0.557	45	9.6696	1.49	264.16	0.00197
8	9.7825	356.5	236.22	0.526	46	9.6666	1.31	266.93	0.00171
8.5	9.7810	331.5	232.97	0.496	47	9.6636	1.16	269.68	0.0015
9	9.7794	308.0	229.73	0.467	48	9.6605	1.02	270.65	0.00132
9.5	9.7779	285.8	226.49	0.440	49	9.6575	0.903	270.65	0.00116
10	9.7764	265.0	223.25	0.414	50	9.6545	0.798	270.65	0.00103
11	9.7733	227.0	216.78	0.365	55	9.6394	0.425	260.77	5.7×10^{-4}
12	9.7702	194.0	216.65	0.312	60	9.6244	0.220	247.02	3.1×10^{-4}
13	9.7671	165.8	216.65	0.267	65	9.6094	0.109	233.29	1.6×10^{-4}
14	9.7641	141.7	216.65	0.228	70	9.5944	0.0522	219.59	8.3×10^{-5}
15	9.7610	121.1	216.65	0.195	75	9.5795	0.0239	208.40	4.0×10^{-5}
16	9.7579	103.5	216.65	0.166	80	9.5646	0.0105	198.64	1.8×10^{-5}
17	9.7549	88.5	216.65	0.142	85	9.5497	0.0045	188.89	8.2×10^{-6}
18	9.7518	75.7	216.65	0.122	90	9.5349	0.0018	186.87	3.4×10^{-6}
19	9.7487	64.7	216.65	0.104	95	9.5201	0.00076	188.42	7.5×10^{-7}
20	9.7457	55.3	216.65	0.0889	100	9.5054	0.00032	195.08	5.6×10^{-7}
21	9.7426	47.3	217.58	0.0757					

Βιβλιογραφία

- [1] James R. Holton *An Introduction to Dynamic Meteorology*, Fourth Edition, (2004).
- [2] Mark Z. Jacobson, *Fundamentals of Atmospheric Modeling*, Second Edition, Cambridge University Press, (2005).
- [3] Eugenia Kalnay, *Atmospheric modeling, data assimilation and predictability*, Cambridge University Press, (2003).
- [4] Roberto Buizza, *Chaos and weather prediction*, European Centre for Medium-Range Weather , (2000).
- [5] David G. Logan, *Applied Mathematics*, Second Edition, (1997).
- [6] Jerold E. Marsden-Antony J. Tromba, *Vector Calculus*, Third Edition, (1976-1988).
- [7] Κώστας Δ. Κόκκοτας, *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση με Εφαρμογές στη Φυσική*, Σημειώσεις για τους φοιτητές, (2008).