



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Λύσεις οδεύοντος κύματος και εφαρμογές στην μαθηματική Βιολογία

Αθανάσιος Χαραλαμπίδης

Επιβλέπων: Χρήστος Νικολόπουλος

Πανεπιστήμιο Αιγαίου Τμήμα Μαθηματικών

Σάμος 2022

Περιεχόμενα

1	Κύμα	5
1.1	Γραμμικά κύματα	8
1.1.1	Η ομογενής εξίσωση μεταφοράς	8
1.1.2	Η μη ομογενής εξίσωση μεταφοράς	8
1.2	Μη γραμμικά κύματα	10
1.2.1	Η εξίσωση $u_t + c(u)u_x = 0$	10
1.2.2	Η εξίσωση <i>Burgers</i>	11
1.2.3	Η κυματική εξίσωση στην πραγματική ευθεία	13
1.2.4	Ο τύπος του d' Alembert	14
2	Ευστάθεια κυματικών λύσεων	17
2.1	Η μη γραμμική εξίσωση αντίδρασης - διάχυσης	17
2.2	Γραμμικοποίηση της μη γραμμικής ΜΔΕ αντίδρασης - διάχυσης	17
2.3	Ένα παράδειγμα	18
2.4	Φασματική ευστάθεια	20
2.5	Η συνάρτηση <i>Evans</i>	20
2.5.1	Η συνάρτηση <i>Evans</i> : ένα παράδειγμα	20
3	Μοντελοποίηση βιολογικών φαινομένων	25
3.0.1	Απλές εξελικτικές εξισώσεις	27
4	Ανάλυση Ευστάθειας και απόδειξη ότι έχουμε λύσεις οδεύοντος κύματος	29
4.1	Περίπτωση $0 < c < 2$	30
4.2	Περίπτωση $c \geq 2$	31

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία είναι το αποτέλεσμα μιας σειράς αλληλεπιδράσεων διαφόρων ατόμων, καθένα από τα οποία έπαιξε σημαντικό ρόλο στην εξέλιξή της. Αξίζει, λοιπόν να αφιερώσω την παρούσα σελίδα για να ευχαριστήσω τα άτομα αυτά για τη βοήθεια που μου προσέφεραν. Θα ήθενα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου Κ. Χρήστο Νικολόπουλο, που μου εμπιστεύτηκε την παρούσα διπλωματική εργασία και μου προσέφερε βοήθεια όποτε τη χρειαζόμουν όπως και τα μέλη της τριμελούς επιτροπής. Ένα μεγάλο ευχαριστώ στα αγαπημένα μου πρόσωπα, στους γονείς μου που μου παρείχαν στήριξη όλο αυτό το διάστημα, χωρίς την οποία τίποτα από όσα έχω καταφέρει μέχρι σήμερα δε θα ήταν πραγματικότητα.

Εισαγωγή

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται λύσεις οδεύοντος κύματος και εφαρμογές στην μαθηματική Βιολογία. Το κύριο κομμάτι βασίστηκε στις λύσεις οδεύοντος κύματος και την ευστάθεια των κυματικών λύσεων μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων, μια από αυτές που μας έχει ιδιαίτερα απασχολήσει είναι η μη γραμμική εξίσωση αντίδρασης - διάχυσης.

Στο πρώτο κεφάλαιο εισάγουμε τα γραμμικά και μη γραμμικά κύματα καθώς και την κυματική εξίσωση στην πραγματική ευθεία. Επίσης εισάγουμε την έννοια του οδεύοντος κύματος και το κατατάσσουμε σε επιμέρους κατηγορίες ανάλογα με τις σχέσεις που ικανοποιεί. Έννοιες που είναι απαραίτητες για τη συνέχεια της παρούσας εργασίας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάμε την ευστάθεια μη γραμμικών κυμάτων. Χρησιμοποιούμε ως τη λύση οδεύοντος κύματος για τη μη γραμμική ΜΔΕ αντίδρασης-διάχυσης. Οι βασικές πληροφορίες για την ευστάθεια των λύσεων περιέχονται στη γραμμικοποίηση της ΜΔΕ για το οδεύον κύμα. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη θεωρία Sturm-Liouville στις γραμμικοποιημένες εξισώσεις και η θέση του φάσματος είναι αυτή που καθορίζει την ευστάθεια. Τέλος κατασκευάζουμε τη συνάρτηση Evans για τη μη γραμμική ΜΔΕ αντίδρασης-διάχυσης που είναι εργαλείο χρήσιμο για τις έρευνες ευστάθειας μη γραμμικών κυμάτων.

Στο τρίτο κεφάλαιο κάνουμε μια σύνδεση των μερικών διαφορικών εξισώσεων που έχουμε μελετήσει με τα βιολογικά μοντέλα. Τέλος αναλύουμε την ευστάθεια των οδεύοντων κυμάτων και αποδεικνύουμε την ύπαρξη των λύσεων.

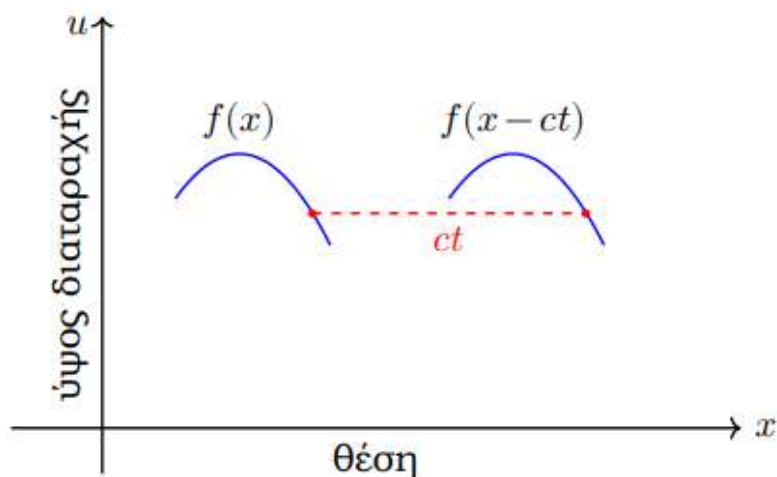
Κεφάλαιο 1

Κύμα

Με τον όρο κύμα εννοούμε ένα αναγνωρίσιμο σήμα ή διαταραχή, που διαδίδεται με την πάροδο του χρόνου σε ένα μέσο, μεταφέροντας ενέργεια. Μερικά γνωστά παραδείγματα είναι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, τα κύματα επιφάνειας στο νερό, τα ηχητικά κύματα, καθώς και τα ελαστικά κύματα στα στερεά, π.χ. σε ένα σεισμό. Ένα κύμα δεν μεταφέρει αναγκαστικά ύλη αυτό που διαδίδεται είναι η διαταραχή, η οποία μεταφέρει ενέργεια. Ορισμένα απλά μοντέλα – εξισώσεις που περιγράφουν κυματικά φαινόμενα θα μελετηθούν παρακάτω και θα επισημάνουμε ορισμένα βασικά χαρακτηριστικά που συναντάμε κατά τη μελέτη της διάδοσης των κυμάτων. Ένα απλό μαθηματικό μοντέλο κύματος είναι η παρακάτω συνάρτηση

$$(1.1) \quad u(x, t) = f(x - ct),$$

η οποία παριστάνει ένα τρέχον κύμα που κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα c , διατηρώντας το σχήμα του. Η μεταβλητή x παριστάνει τη θέση στην ευθεία, η t το χρόνο και η u την ένταση της διαταραχής. Είναι πολύ σημαντικό το γεγονός ότι το κύμα, που περιγράφει η σχέση (1.1), κινείται χωρίς να παραμορφώνεται, δηλαδή διατηρεί το σχήμα του. Την ιδιότητα αυτή δεν την έχουν όλα τα κύματα. Είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα των γραμμικών κυμάτων, δηλαδή των μορφών κυμάτων που είναι λύσεις γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων. Αντίθετα κύματα που, π.χ., αλλάζουν σχήμα και 'σπάζουν', χαρακτηρίζουν μη γραμμικά φαινόμενα.



Σχήμα 1.1: Οδεύον κύμα που κινείται προς τα δεξιά

Για να βρούμε μια Μ.Δ.Ε. της οποίας η λύση δίνεται από κάποια συνάρτηση της μορφής (1.1), υπολογίζουμε

τις παραγώγους u_t και u_x και έχουμε:

$$u_t = -cf'(x - ct), \quad u_x = f'(x - ct).$$

Άρα

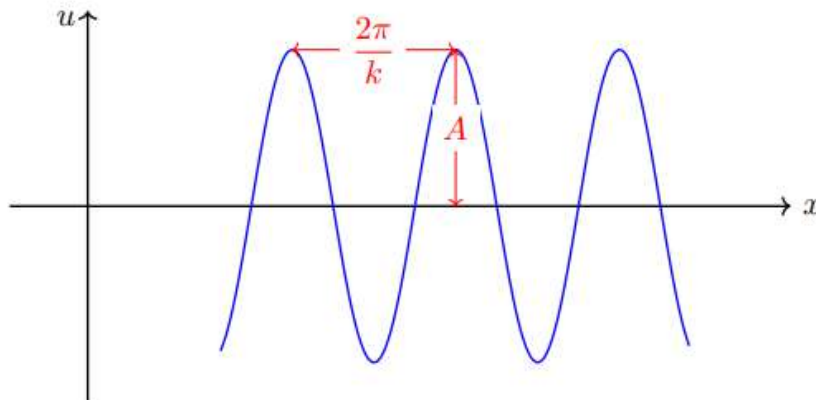
$$(1.2) \quad u_t + cu_x = 0.$$

Η εξίσωση (1.2) είναι μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση (Μ.Δ.Ε.) πρώτης τάξης, η οποία, με την έννοια που μόλις περιγράψαμε αποτελεί την απλούστερη κυματική εξίσωση. Λέγεται εξίσωση μεταφοράς, και η γενική λύση της είναι η (1.1), όπου η f είναι αυθαίρετη συνάρτηση. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η (1.1) περιγράφει, π.χ. τι θα συμβεί αν μια υγρή χρωστική ουσία εισαχθεί σε ένα ρεύμα νερού που ρέει με ταχύτητα c : Το χρωματισμένο υλικό θα μεταφερθεί κατά την κατεύθυνση της ροής χωρίς να παραμορφωθεί. Αντίστοιχα, ένα τρέχον κύμα της μορφής $u = f(x + ct)$ κινείται προς τα αριστερά και αποτελεί λύση της Μ.Δ.Ε. $u_t - cu_x = 0$.

Άλλα κύματα που παρουσιάζουν ενδιαφέρον με πολλές εφαρμογές είναι τα περιοδικά ή ημιτονοειδή κύματα. Είναι τρέχοντα κύματα και παριστάνονται από συναρτήσεις της ακόλουθης μορφής

$$(1.3) \quad u = A \cos(kx - \omega t),$$

όπου A είναι θετικός αριθμός και είναι το πλάτος του κύματος, k είναι ο κυματαριθμός (δηλαδή το πλήθος των ταλαντώσεων που παρατηρούμε ανά 2π μονάδες μήκους, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t) και ω είναι η κυκλική συχνότητα (το πλήθος των ταλαντώσεων που παρατηρούμε ανά 2π μονάδες χρόνου σε κάποια θέση x). Ο αριθμός $\lambda = 2\pi/k$ είναι το μήκος κύματος, και ο $P = 2\pi/\omega$ είναι η (χρονική) περίοδος.



Σχήμα 1.2: Περιοδικό Κύμα

Το μήκος κύματος μετρά την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών του κύματος, ενώ η περίοδος είναι το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να παρατηρήσουμε, σε κάποια σταθερή θέση x , να επαναλαμβάνεται η ίδια τιμή της u . Αν γράψουμε την (1.3) ως

$$u = A \cos k(x - \frac{\omega}{k}t),$$

παρατηρούμε ότι η (1.3) παριστάνει ένα τρέχον κύμα που κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα $c = \omega/k$. Ο αριθμός αυτός λέγεται ταχύτητα φάσης και παριστάνει την ταχύτητα με την οποία θα πρέπει να κινείται ένας παρατηρητής για να παραμένει πάντα στο ίδιο σημείο σχετικά με το κύμα. Στους υπολογισμούς πολλές φορές χρησιμοποιούμε την ακόλουθη μιγαδική εκθετική μορφή

$$(1.4) \quad u = \exp(i(kx - \omega t)).$$

Κύματα των παραπάνω μορφών (1.3) ή (1.4) είναι και πάλι χαρακτηριστικά γραμμικών φαινομένων και γραμμικών εξισώσεων.

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

και παίρνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη μπορούμε να βρούμε πραγματικές λύσεις.

Στη συνέχεια χωρίζουμε τα οδεύοντα κύματα σε επιμέρους κατηγορίες. Αν το οδεύον κύμα

$$u(x, t) = f(x - ct) = f(\xi), \text{ όπου } \xi = x - ct$$

ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις

$$u(x, t) \rightarrow \alpha_1, \text{ καθώς } x \rightarrow -\infty \text{ και } u(x, t) \rightarrow \alpha_2, \text{ καθώς } x \rightarrow +\infty$$

για κάθε συγκεκριμένο $t > 0$ και $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ σταθερές, τότε έχουμε τις παρακάτω κατηγορίες:

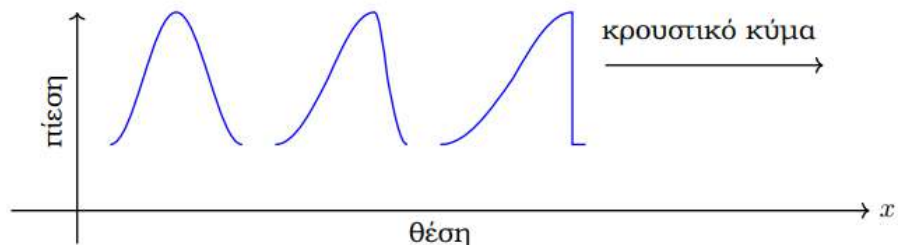
- Κυματικά Μέτωπα (Wave Fronts), όταν $\alpha_1 \neq \alpha_2$
- Παλμοί (*Pulses*), όταν $\alpha_1 = \alpha_2$
- Κυματικοί Συρμοί (Wave Trains), όταν το οδεύον κύμα γράφεται στην ακόλουθη μορφή

$$u(x, t) = A \cos[k(x \pm \frac{\omega}{k}t)]$$

- Μοναχικό κύμα (Solitary wave), όταν το οδεύον κύμα είναι παλμός και $f, f', f'', \dots \rightarrow 0$, καθώς $\xi \rightarrow \pm\infty$.

Δεν είναι βέβαια αληθές ότι όλα τα κύματα διαδίδονται έτσι ώστε η μορφή τους να παραμένει αναλλοίωτη: τα κύματα στην επιφάνεια της θάλασσας είναι το προφανές αντιπαράδειγμα. Λιγότερο επίσης γνωστά, αλλά εξίσου κοινά στη φύση είναι τα κύματα τάσης ή τα κύματα πίεσης που διαδίδονται στα στερεά ή τα αέρια, αντίστοιχα.

Μέχρι στιγμής έχουμε αναφέρει δύο τύπων κύματα, εκείνα τα οποία διαδίδονται χωρίς αλλαγή σχήματος, με σταθερή ταχύτητα, και εκείνα που παραμορφώνονται λόγω του ότι η ταχύτητα διάδοσής τους εξαρτάται από το πλάτος του κύματος. Υπάρχει και ένα τρίτο κυματικό φαινόμενο, σημαντικό για ορισμένα φυσικά προβλήματα, συγκεκριμένα το φαινόμενο της διασπορά (ή διασκεδασμού). Σε αυτόν τον τύπο κύματος η ταχύτητα διάδοσης εξαρτάται από το μήκος κύματος της διαδιδόμενης διαταραχής. Έτσι, π.χ., κύματα μεγάλου μήκους διαδίδονται γρηγορότερα από κύματα με μικρότερο μήκος. Ένας παρατηρητής, λοιπόν, σε μια θέση x_0 , θα δει ένα διαφορετικό κυματικό φαινόμενο να εξελίσσεται στο χρόνο από ό,τι ένας παρατηρητής σε μια διαφορετική θέση x_1 . Η διάδοση κυμάτων με διασπορά περιγράφεται από γραμμικές και από μη γραμμικές εξισώσεις.



Σχήμα 1.3: Κρουστικό Κύμα

1.1 Γραμμικά κύματα

1.1.1 Η ομογενής εξίσωση μεταφοράς

Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(1.5) \quad \begin{cases} u_t + cu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

όπου $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και c μια θετική σταθερά. Έστω η χαρακτηριστική καμπύλη $(x(s), t(s))$ με παράμετρο s , $(x(0), t(0)) = (x_0, t_0)$. Οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι οι λύσεις του συστήματος των ΣΔΕ

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = c \\ \frac{dt}{ds} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(s) = cs + x_0 \\ t(s) = s + t_0 \end{cases}$$

Απαλείφοντας το s παίρνουμε την εξίσωση των χαρακτηριστικών

$$x - ct = x_0 - ct_0.$$

Δηλαδή οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι ευθείες στο (x, t) - επίπεδο με συντελεστή διεύθυνσης $\frac{1}{c}$, ως προς x . Για να προσδιορίσουμε το σημείο τομής με τον άξονα των x , λύνουμε την εξίσωση

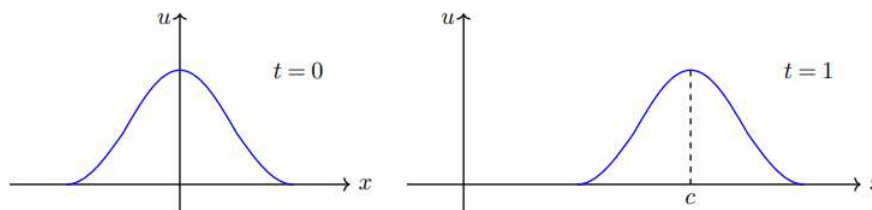
$$t(\bar{s}) = 0 \Leftrightarrow \bar{s} = -t_0.$$

Αντικαθιστώντας στην $x(s)$ παίρνουμε

$$x(\bar{s}) = -ct_0 + x_0.$$

Άρα $u(x_0, t_0) = \phi(x_0 - ct_0)$, οπότε η λύση του ΠΑΤ (1.5) είναι

$$u(x, t) = \phi(x - ct), x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

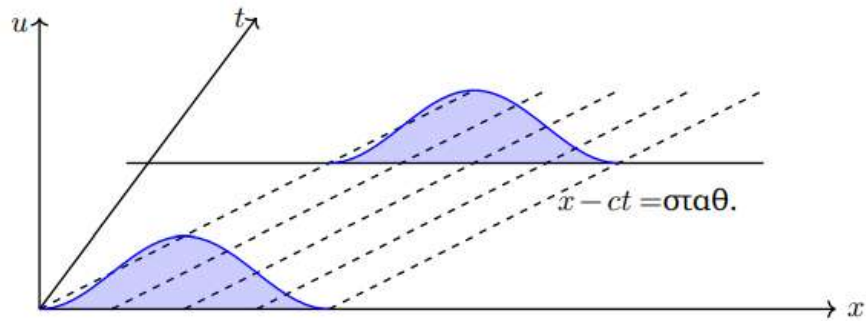


Σχήμα 1.4: Στιγμιότυπα της λύσης u του ΠΑΤ (1.5) τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 1$

1.1.2 Η μη ομογενής εξίσωση μεταφοράς

Θεωρούμε την εξίσωση

$$(1.6) \quad u_t + cu_x = f(x, t)$$

Σχήμα 1.5: Γραφική παράσταση της λύσης u του ΠΑΤ (1.5)

όπου $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια δεδομένη συνεχής συνάρτηση και c μια θετική σταθερά. Παρατηρούμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης μεταφοράς ((1.2)) είναι οδεύοντα κύματα, ενώ λύση της (1.6) μπορεί να είναι οποιαδήποτε συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $u = u(x, t)$, για κατάλληλο μη ομογενή όρο f . Ορίζουμε το μετασχηματισμό

$$\begin{aligned}\eta(x, t) &= t \\ \xi(x, t) &= x - ct\end{aligned}$$

Είναι $U(\xi, \eta) = u(x, t)$, οπότε

$$u_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x = U_\xi$$

και

$$u_t = U_\xi \xi_t + U_\eta \eta_t = -cU_\xi + U_\eta.$$

Οπότε η (1.6) στις νέες μεταβλητές γίνεται

$$U_\eta(\xi, \eta) = f(\xi + c\eta, \eta)$$

Ολοκληρώνοντας από 0 έως η παίρνουμε

$$U(\xi, \eta) = \int_0^\eta f(\xi + c\tau, \tau) d\tau + h(\xi)$$

όπου h μια αυθαίρετη συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Συνεπώς

$$u(x, t) = \int_0^t f(x - c(t - \tau), \tau) d\tau + h(x - ct).$$

Για $t = 0$ η τελευταία σχέση δίνει $u(x, 0) = h(x)$, οπότε γράφεται στη μορφή

$$u(x, t) = \int_0^t f(x - c(t - \tau), \tau) d\tau + u(x - ct, 0).$$

Έστω τώρα το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(1.8\alpha') \quad u_t + cu_x = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$(1.8\beta') \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Από τα παραπάνω αμέσως έπεται ότι η λύση του ΠΑΤ (1.8α') είναι

$$(1.9) \quad u(x, t) = \int_0^t f(x - c(t - \tau), \tau) d\tau + \phi(x - ct).$$

1.2 Μη γραμμικά κύματα

Σε διαδόσεις κυμάτων όπου ο αρχικός παλμός δέχεται παραμορφώσεις κατά την διάδοσή του περιγράφονται από μη γραμμικές ΜΔΕ. Οι μη γραμμικοί όροι επηρεάζουν την μορφή του αρχικού κύματος καθώς αυτό διαδίδεται στο χώρο και στο χρόνο. Εκτός από το φαινόμενο της διασποράς, που όπως ήδη έχουμε αναφέρει, εμφανίζεται σε κυματικές λύσεις γραμμικών και μη γραμμικών ΜΔΕ, υπάρχουν άλλες δύο κυματικές λύσεις που περιγράφονται από μη γραμμικές ΜΔΕ. Είναι τα χροστικά κύματα και τα κύματα αραίωσης.

1.2.1 Η εξίσωση $u_t + c(u)u_x = 0$

Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(1.10\alpha') \quad u_t + c(u)u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$(1.10\beta') \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $c'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$(1.11) \quad \frac{dx}{dt} = c(u).$$

Κατά μήκος μιας χαρακτηριστικής καμπύλης ισχύει

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{dt} = u_x c(u) + u_t = 0.$$

Οπότε η u είναι σταθερή πάνω σε κάθε χαρακτηριστική καμπύλη και

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} c(u) = c'(u) \frac{du}{dt} = c'(u) \cdot 0 = 0.$$

Άρα οι χαρακτηριστικές καμπύλες του ΠΑΤ (1.10α') είναι ευθείες με κλίση που εξαρτάται από την τιμή της u . Για να βρούμε την εξίσωση της χαρακτηριστικής που διέρχεται από το σημείο (x, t) βρίσκουμε την κλίση της στο σημείο $(\xi, 0)$. Είναι

$$(1.12) \quad \frac{dx}{dt} = c(u(\xi, 0)) = c(\phi(\xi)) \Rightarrow x = c(\phi(\xi))t + \xi.$$

Συνεπώς η λύση του ΠΑΤ (1.10α') δίνεται από τη σχέση

$$(1.13) \quad u(x, t) = \phi(\xi)$$

όπου η συνάρτηση $\xi = \xi(x, t)$ ορίζεται από την (1.12). Επειδή η κλίση της χαρακτηριστικής καμπύλης που διέρχεται από το σημείο $(\xi, 0)$ είναι $\frac{dx}{dt} = c(\phi(\xi))$, οι χαρακτηριστικές δεν είναι παράλληλες μεταξύ τους. Το ΠΑΤ (1.10α') μπορεί να έχει λύση μέχρι κάποια χρονική στιγμή $t = t_0$ που λέγεται χρόνος θραύσης, δηλαδή μέχρι την ελάχιστη χρονική στιγμή που οι χαρακτηριστικές τέμνονται.

Παραγωγίζοντας την (1.12) ως προς x παίρνουμε:

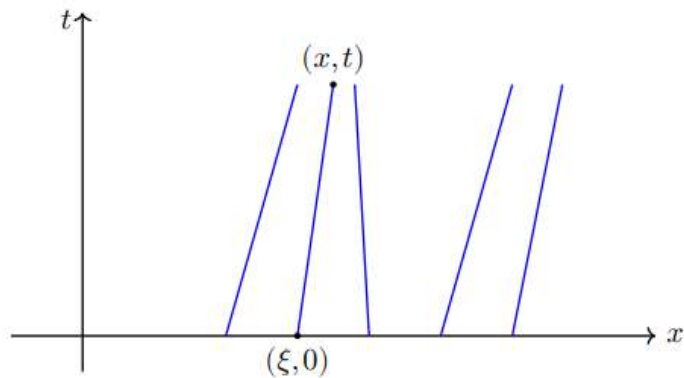
$$\xi_x = \frac{1}{1 + c'(\phi(\xi))\phi'(\xi)t}.$$

Στη συνέχεια από την (1.13) παίρνουμε:

$$(1.14) \quad u_x = \phi'(\xi)\xi_x = \frac{\phi'(\xi)}{1 + c'(\phi(\xi))\phi'(\xi)t}.$$

Στην περίπτωση που η ϕ' λαμβάνει αρνητικές τιμές, αν υπάρχει χρονική στιγμή t_θ τέτοια ώστε ο παρονομαστής της (1.14) να μηδενιστεί, τότε η u_x απειρίζεται και η u δεν είναι κλασική λύση της ΜΔΕ. Η μικρότερη χρονική στιγμή κατά την οποία μηδενίζεται ο παρονομαστής είναι

$$t_\theta = \min_{\xi} \frac{-1}{c'(\phi(\xi))\phi'(\xi)}, \quad t_\theta \geq 0.$$



Σχήμα 1.6: Χαρακτηριστικές καμπύλες της εξίσωσης $u_t + c(u)u_x = 0$

Αν η αρχική ταχύτητα είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ϕ τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$\phi(x_1) > \phi(x_2)$$

Άρα σε κάθε χρονική στιγμή $t > 0$ θα ισχύει

$$u(x_1, t) > u(x_2, t).$$

Συνεπώς τα προπορευόμενα σημεία θα κινούνται αργά σε σχέση με αυτά που έπονται, με αποτέλεσμα κάποια χρονική στιγμή να συγκρουστούν. Έτσι δημιουργείται ένα κρουστικό κύμα το οποίο διαδίδεται στο χώρο και στο χρόνο. Το κρουστικό κύμα δεν είναι μια κλασική λύση του προβλήματος, αλλά αποτελεί μια ασθενή του λύση. Αν η αρχική ταχύτητα είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση ϕ τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$\phi(x_1) < \phi(x_2)$$

Άρα σε κάθε χρονική στιγμή $t > 0$ θα ισχύει

$$u(x_1, t) < u(x_2, t)$$

. Έτσι όμως δημιουργείται ένα χάσμα μεταξύ των γρήγορων προπορευόμενων σημείων και των αργών έποντων. Το παραπάνω πρόβλημα αντιμετωπίζεται με τις λεγόμενες «ασθενείς λύσεις αραίωσης», που βρίσκονται μεταξύ των δύο κλασικών λύσεων, στην περιοχή των γρήγορων και των αργών σημείων αντίστοιχα.

1.2.2 Η εξίσωση Burgers

Σ αντίθεση με την εξίσωση μεταφοράς (1.2) η μη γραμμική εξίσωση Burgers

$$u_t + uu_x = 0$$

μεταδίδει κύματα παραμορφώνοντας το αρχικό τους σχήμα. Ο μη γραμμικός όρος μεταφοράς uu_x είναι αυτός που ευθύνεται για τη δημιουργία είτε κρουστικού κύματος είτε κύματος αραίωσης. Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

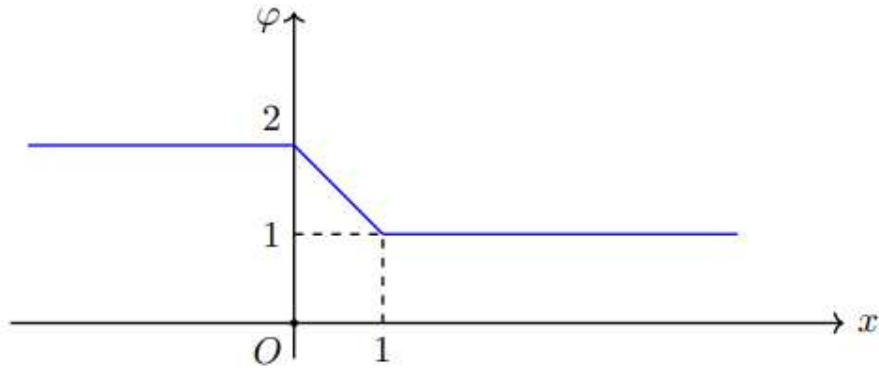
$$(1.15\alpha') \quad u_t + uu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$(1.15\beta') \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

με αρχική συνθήκη

$$\phi(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 2 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Η αρχική συνθήκη είναι συνεχής, φθίνουσα και τμηματικά παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η γραφική παράσταση της αρχικής συνθήκης φαίνεται στο Σχήμα 1.7.



Σχήμα 1.7: Γραφική παράσταση της αρχικής συνθήκης

Οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι

$$(1.16) \quad \frac{dx}{dt} = u \Rightarrow x = ut + \xi$$

όπου ξ το σημείο τομής κάθε χαρακτηριστικής καμπύλης με τον άξονα των x . Από την αρχική συνθήκη παίρνουμε ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι

$$x = \begin{cases} 2t + \xi & \xi < 0 \\ (2 - \xi)t + \xi, & 0 \leq \xi \leq 1 \\ t + \xi, & \xi > 1. \end{cases}$$

Οι χαρακτηριστικές καμπύλες φαίνονται στο Σχήμα 1.8. Για $0 \leq \xi \leq 1$ όλες οι χαρακτηριστικές καμπύλες διέρχονται από το σημείο $(x, t) = (2, 1)$, το οποίο είναι το σημείο θραύσης. Ο χρόνος θραύσης είναι $t_\theta = 1$. Συνεπώς δεν μπορεί να υπάρχει λύση για $t > 1$. Για $0 < t < 1$ έχουμε

$$u(x, t) = 2, \quad \text{για } x < 2t \quad \text{και} \quad u(x, t) = 1, \quad \text{για } x > t + 1$$

Για $2t \leq x \leq t + 1$ η (1.16) γίνεται

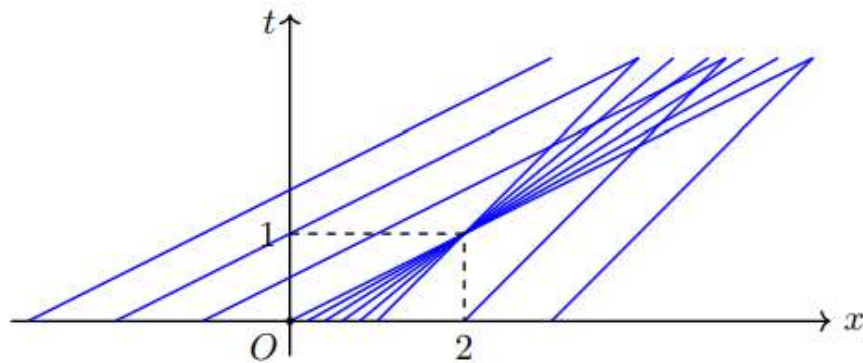
$$x = (2 - \xi)t + \xi \iff \xi = \frac{x - 2t}{1 - t}$$

Άρα από την (1.13) παίρνουμε

$$u(x, t) = 2 - \frac{x - 2t}{1 - t} = \frac{2 - x}{1 - t}.$$

Άρα τελικά έχουμε ότι

$$(1.17) \quad u(x, t) = \begin{cases} 2, & x < 2t \\ \frac{2-x}{1-t}, & 2t \leq x \leq t + 1 \\ 1, & x > t + 1. \end{cases}$$

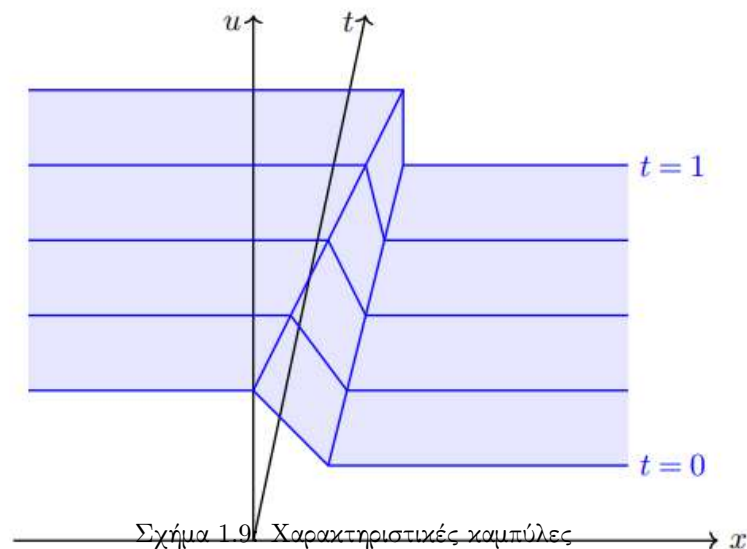


Σχήμα 1.8: Χαρακτηριστικές καμπύλες

Παρατηρούμε ότι για όλα τα σημεία (x, t) , με $0 \leq t < 1$ η (1.17) καθορίζει με μοναδικό τρόπο τη λύση του ΠΑΤ (1.15α'), ενώ σε κάθε σημείο (x, t) , με $t \geq 1$ αντιστοιχούν περισσότερες από μια τιμές στη λύση του ΠΑΤ (1.15α') και έτσι η u δεν είναι κλασική συνάρτηση. Στο χρόνο θραύσης $t_\theta = 1$ η χωρική παράγωγος u_x της λύσης (1.17) απειρίζεται και η (1.17) δεν είναι κλασική λύση του ΠΑΤ (1.15α'). Καθώς $t \rightarrow 1$ η (1.17) γίνεται

$$u(x, 1) = \begin{cases} 2, & x < 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

και φυσικά δεν ορίζεται για $x = 2$. Η παραπάνω ασυνεχής συνάρτηση αποτελεί το κρουστικό κύμα. Στο Σχήμα 1.9 φαίνονται στιγμιότυπα της λύσης του ΠΑΤ (1.15α').



Σχήμα 1.9: Χαρακτηριστικές καμπύλες

1.2.3 Η κυματική εξίσωση στην πραγματική ευθεία

Η κυματική εξίσωση

$$(1.18) \quad u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

συναντάται σε τομείς όπως η ακουστική, η ρευστοδυναμική, ο ηλεκτρομαγνητισμός. Περιγράφει κυματικά φαινόμενα - διαταραχές οι οποίες διαδίδονται στο χώρο και εξελίσσονται στο χρόνο. Η μελλοντική ή παρελθο-

ντική μορφή αυτών των διαταραχών μπορεί να προβλεφθεί από τα δεδομένα του παρόντος. Έτσι τα φαινόμενα που περιγράφονται από την (1.18) θεωρείται ότι εξελίσσονται σε δύο χρονικές κατευθύνσεις.

Θα βρούμε τη λύση της (1.18) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των χαρακτηριστικών. Οι χαρακτηριστικές καμπύλες της (1.18) είναι οι λύσεις της ΣΔΕ

$$(1.19) \quad \frac{dx}{dt} = \pm c$$

Ολοκληρώνοντας, από την (1.19) παίρνουμε

$$x + ct = c_1 \quad \text{και} \quad x - ct = c_2.$$

Ορίζουμε το μετασχηματισμό

$$\xi(x, t) = x + ct \quad \text{και} \quad \eta(x, t) = x - ct.$$

Είναι $U(\xi, \eta) = u(x, t)$, οπότε

$$u_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} \quad \text{και} \quad u_{tt} = c^2(U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}).$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1.18) παίρνουμε

$$-4c^2 U_{\xi\eta} = 0$$

Εφόσον $c \neq 0$ έχουμε ότι $U_{\xi\eta} = 0$, οπότε

$$U(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

όπου f και g είναι αυθαίρετες ομαλές συναρτήσεις. Συνεπώς η λύση της (1.18) είναι

$$(1.20) \quad u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct).$$

Οι λύσεις είναι άθροισμα δύο οδεύοντων κυμάτων, που κινούνται με ταχύτητα c , το ένα προς τα δεξιά και το άλλο προς τα αριστερά. Οι συναρτήσεις f και g προσδιορίζονται από αρχικά και συνοριακά δεδομένα.

1.2.4 Ο τύπος του d' Alembert

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(1.21\alpha') \quad u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$(1.21\beta') \quad u(x, 0) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(1.21\gamma') \quad u_t(x, 0) = G(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου $F \in C^2(\mathbb{R})$ και $G \in C^1(\mathbb{R})$. Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες στην σχέση (1.20) έχουμε

$$(1.22) \quad u(x, 0) = f(x) + g(x) = F(x)$$

$$(1.23) \quad u_t(x, 0) = cf'(x) - cg'(x) = G(x)$$

Αν παραγωγίσουμε την (1.24) ως προς x και στη συνέχεια την πολλαπλασιάσουμε με c παίρνουμε

$$(1.24) \quad cf'(x) + cg'(x) = cF'(x).$$

Απο τις σχέσεις (1.23) και (1.24) παίρνουμε ότι

$$f'(x) = \frac{1}{2}(F'(x) + \frac{G(x)}{c}) \quad \text{και} \quad g'(x) = \frac{1}{2}(F'(x) - \frac{G(x)}{c}).$$

Όποτε προκύπτει ότι

$$f(x) = \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x G(\tau) d\tau + k_1$$

$$g(x) = \frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x G(\tau) d\tau - k_1$$

Συνεπώς η λύση του ΠΑΤ (1.21α') είναι

$$(1.25) \quad u(x, t) = \frac{1}{2}[F(x+ct) + F(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(\tau) d\tau$$

Η (1.25) είναι ο τύπος του *d'Alembert*. Η λύση του ΠΑΤ (1.21α') εξαρτάται μονοσήμαντα από τα αρχικά δεδομένα. Αυτή είναι η αρχή της αιτιότητας που ισχύει για τις λύσεις της κυματικής εξίσωσης και έχει ως συνέπεια τη μοναδικότητα της λύσης του ΠΑΤ, με την προϋπόθεση ότι η λύση αυτή υπάρχει. Η ύπαρξη της λύσης εξαρτάται από την ομαλότητα των συναρτήσεων $F \in C^2(\mathbb{R})$ και $G \in C^1(\mathbb{R})$. Αν υπάρχουν ασυνέχειες στις αρχικές τιμές τότε αυτές θα επηρεάσουν τη λύση επί των χαρακτηριστικών προβολών της ΜΔΕ του ΠΑΤ.

Η ευστάθεια της λύσης του ΠΑΤ (1.21α') έχει να κάνει με τη συνεχή εξάρτηση της λύσης από τα αρχικά δεδομένα. Αν u_1 και u_2 είναι οι λύσεις των ΠΑΤ (1.26α') και (1.27α')

$$(1.26\alpha') \quad \begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) &= F_1(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) &= G_1(x), & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$(1.27\alpha') \quad \begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) &= F_2(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) &= G_2(x), & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

αντίστοιχα, τότε καθένα από αυτά θα έχει ευσταθή λύση αν

$$|u_1 - u_2| \leq f(|F_1 - F_2|, |G_1 - G_2|) < \infty.$$

Κεφάλαιο 2

Ευστάθεια κυματικών λύσεων

Τα τελευταία χρόνια έχει γίνει μια σημαντική πρόοδος στην ανάπτυξη τεχνικών ευστάθειας για μη γραμμικά κύματα, όπως τα μέτωπα (*fronts*), οι παλμοί (*pulses*) και τα περιοδικά κύματα (*wave trains*). Ένα παράδειγμα που θα μπορούσε να λειτουργήσει ως κανόνας είναι η λύση οδεύοντος κύματος για την ΜΔΕ αντίδραση διάχυσης. Αν U είναι ένα οδεύον κύμα, τότε τι συμβαίνει με τις λύσεις των οποίων οι αρχικές συνθήκες είναι μικρές διαταραχές του U . Αν οποιαδήποτε τέτοια λύση παραμένει κοντά στο U , τότε θα λέμε ότι το οδεύον κύμα είναι ευσταθές. Οι βασικές πληροφορίες για την ευστάθεια των λύσεων περιέχονται στη γραμμικοποίηση της ΜΔΕ για το οδεύον κύμα. Η θεωρία *Sturm – Liouville* εφαρμόζεται στις γραμμικοποιημένες εξισώσεις για το τρέχον κύμα και αποδίδει μια σχέση μεταξύ της δομής του κύματος και των ιδιοτήτων της ευστάθειάς του. Σε πολλές περιπτώσεις η θέση του φάσματος είναι αυτή που καθορίζει την ευστάθεια. Ένα φάσμα στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο αντιστοιχεί σε σταθερές κατευθύνσεις, ενώ ένα φάσμα στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο αντιστοιχεί σε ασταθείς κατευθύνσεις. Το εργαλείο που έχει ξεχωρίσει στις έρευνες ευστάθειας μη γραμμικών κυμάτων είναι η συνάρτηση Evans. Η συνάρτηση Evans είναι μια αναλυτική συνάρτηση, οι ρίζες της οποίας δίνουν τις ιδιοτιμές του γραμμικού τελεστή. Η συνάρτηση Evans είναι μια γενίκευση του συντελεστή μετάδοσης από την κβαντική μηχανική σε συστήματα ΜΔΕ. Πρώτη φορά δημιουργήθηκε από τον *John W. Evans*, ο οποίος ενδιαφερόταν για τη ευστάθεια των νευρικών παλμών.

2.1 Η μη γραμμική εξίσωση αντίδρασης - διάχυσης

Θεωρούμε τη συνάρτηση $u = u(x, t) \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}, t > 0$ και υποθέτουμε ότι αυτή παριστάνει την πυκνότητα μιας ποσότητας και τη συνάρτηση ροής $\phi(x, t) \in \mathbb{R}^n$ της u στο σημείο x τη χρονική στιγμή t . Θεωρούμε την εξίσωση

$$(2.1) \quad u_t + \phi_x = f(u).$$

Η εξίσωση (2.1) είναι μια ΜΔΕ που συνδέει την πυκνότητα u με τη ροή ϕ . Οι συναρτήσεις u, ϕ θεωρούνται άγνωστες, ενώ η συνάρτηση f θεωρείται γνωστή. Αν $f \neq 0$ τότε η (2.1) είναι ένας νόμος διατήρησης με πηγές. Η ϕ_x λέγεται όρος ροής ή διάχυσης και η συνάρτηση πηγής f λέγεται όρος αντίδρασης. Αν η (2.1) συνδυαστεί με το νόμο του *Fick*

$$\phi = -Du_x$$

όπου $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ διαγώνιος πίνακας με θετικές τιμές, τους συντελεστές διάχυσης, προκύπτει η μη γραμμική ΜΔΕ

$$(2.2) \quad u_t = Du_{xx} + f(u)$$

που ονομάζεται εξίσωση αντίδρασης- διάχυσης.

2.2 Γραμμικοποίηση της μη γραμμικής ΜΔΕ αντίδρασης - διάχυσης

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ περιγράφει το μη γραμμικό όρο της εξίσωσης (2.2) και θεωρούμε ότι είναι επαρκώς ομαλή. Η εξίσωση (2.2) έχει λύση οδεύοντος κύματος της μορφής $u(x, t) = U(x - ct)$ τα οποία κινούνται με

σταθερή ταχύτητα $c > 0$ διατηρώντας το σχήμα τους. Εισάγουμε το μετασχηματισμό $\xi = x - ct$. Υποθέτουμε ότι μια λύση οδεύοντος κύματος U είναι γνωστή για την εξίσωση (2.2) και σταθερή καθώς $\xi \rightarrow \pm\infty$, δηλαδή τα όρια $U_{\pm} = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} U(\xi)$ υπάρχουν. Ένα κύμα αυτής της μορφής λέγεται παλμός (*pulse*) αν $U_+ = U_-$. Στη παρούσα εργασία θα εστιάσουμε στην περίπτωση στην οποία ισχύει ότι $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} U(\xi) = 0$.

Αναζητάμε συναρτήσεις $u(\xi, t)$ που ικανοποιούν την εξίσωση (2.2). Στο (ξ, t) -επίπεδο η εξίσωση (2.2) γίνεται

$$(2.3) \quad u_t = Du_{\xi\xi} + cu_{\xi} + f(u)$$

και το οδεύον κύμα είναι μια στάσιμη λύση ($u_t = 0$) $U(\xi)$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$(2.4) \quad Du_{\xi\xi} + cu_{\xi} + f(u) = 0$$

Για να μελετήσουμε την ευστάθεια των οδεύοντων κυμάτων γραμμικοποιούμε την εξίσωση (2.3). Η γραμμικοποίηση της για τη στάσιμη λύση U δίνεται από την σχέση

$$(2.5) \quad u_t = Du_{\xi\xi} + cu_{\xi} + \frac{\partial}{\partial u} f(U)u$$

Το δεξί μέλος της (2.5) ορίζει τον τελεστή

$$\mathcal{L} := D \frac{d^2}{dx^2} + c \frac{d}{dx} + \frac{\partial}{\partial u} f(U).$$

Το φάσμα του τελεστή \mathcal{L} καθορίζει αν η (2.5) έχει λύσεις της μορφής

$$(2.6) \quad u(\xi, t) = e^{\lambda t} u(\xi)$$

Αντικαθιστώντας την (2.6) στην (2.5) παίρνουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$(2.7) \quad Du_{\xi\xi} + cu_{\xi} + \frac{\partial}{\partial u} f(U)u = \lambda u \Leftrightarrow \mathcal{L}u = \lambda u$$

Αν θέσουμε $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u_{\xi} \end{pmatrix}$ τότε το πρόβλημα ιδιοτιμών (2.7) μπορεί να γραφεί ως γραμμικό σύστημα ΣΔΕ πρώτης τάξης

$$(2.8) \quad Y' = A(\xi; \lambda)Y$$

όπου $A(\xi; \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ D^{-1}(\lambda I - \partial_u f(U(\xi))) & -cD^{-1} \end{pmatrix}$.

Σαυτό το σημείο πρέπει να σημειώσουμε ότι υποθέτουμε ότι υπάρχει μια περιοχή $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τέτοια ώστε για κάθε $\lambda \in \Omega$ να ισχύουν:

- οι πίνακες $A^{\pm}(\lambda) = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} A(\xi; \lambda)$ υπάρχουν και είναι υπερβολικοί
- ο πίνακας $A^{-}(\lambda)$ έχει k ασταθείς ιδιοτιμές $\mu_1^{-}, \mu_2^{-}, \dots, \mu_k^{-}$
- ο πίνακας $A^{+}(\lambda)$ έχει $n - k$ ευσταθείς ιδιοτιμές $\mu_{k+1}^{+}, \mu_{k+2}^{+}, \dots, \mu_n^{+}$.

2.3 Ένα παράδειγμα

Θεωρούμε την εξίσωση αντίδρασης-διάχυσης

$$(2.9) \quad u_t = u_{xx} - u + u^3$$

όπου $u = u(x, t) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, η οποία είναι η θεμελιώδης περίπτωση ($n = 1$) της σχέσης (2.2) και $f(u) = u^3 - u$.

Η εξίσωση (2.9) έχει λύση οδεύοντος κύματος

$$u(x, t) = U(\xi), \xi = x - ct$$

το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα $c > 0$ διατηρώντας το σχήμα του. Για τη στάσιμη λύση έχουμε ότι $u_t = 0$, οπότε παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση

$$(2.10) \quad U'' - U + U^3 = 0,$$

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση (2.10) με $2U'$ προκύπτει ότι

$$2U'U''' - 2UU'' + 2U^3U' = 0 \Rightarrow ((U')^2 - U^2 + \frac{1}{2}U^4)' = 0 \Rightarrow (U')^2 = U^2 - \frac{1}{2}U^4 + C_1$$

όπου $C_1 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης. Επιβάλλοντας συνοριακές συνθήκες $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} U(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} U'(\xi) = 0$, παίρνουμε ότι $C_1 = 0$. Άρα έχουμε

$$(U')^2 = U^2 - \frac{1}{2}U^4 \Rightarrow (U')^2 = U^2(1 - \frac{1}{2}U^2).$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει όταν:

$$1 - \frac{1}{2}U^2 > 0 \Rightarrow |U| < \sqrt{2}.$$

Οπότε έχουμε

$$U' = \pm U \sqrt{1 - \frac{1}{2}U^2} \Rightarrow \frac{dU}{d\xi} = \pm U \sqrt{1 - \frac{1}{2}U^2} \Rightarrow \int \frac{dU}{U \sqrt{1 - \frac{1}{2}U^2}} = \pm \int \xi$$

Θέτουμε $U = \sqrt{2} \sec h(y)$, $y \in \mathbb{R}$, όπου $dU = -\sqrt{2} \tanh(y) \sec h(y) dy$ και

$$\int \frac{dU}{U \sqrt{1 - \frac{1}{2}U^2}} = \int \frac{-\sqrt{2} \tanh(y) \sec h(y)}{\sqrt{2} \sec h(y) \sqrt{1 - \frac{1}{2}(\sqrt{2} \sec h(y))^2}} dy = \int -dy$$

άρα $y = \pm \xi + C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$ σταθερά ολοκλήρωσης. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $C_2 = 0$, οπότε

$$(2.11) \quad U(\xi) = \sqrt{2} \sec h(\xi)$$

Επομένως η (2.11) είναι η στάσιμη λύση της εξίσωσης (2.9) και η γραμμικοποίηση της, για αυτή μας δίνει τη γραμμική ΜΔΕ

$$(2.12) \quad u_t = u_{\xi\xi} + (3U^2(\xi) - 1)u \Rightarrow u_t = u_{\xi\xi} + (6 \sec^2 h^2(\xi) - 1)u$$

Το αντίστοιχο πρόβλημα ιδιοτιμών της (2.12) είναι το

$$(2.13\alpha') \quad u'' + (6 \sec^2 h^2(\xi) - 1)u = \lambda u, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

$$u(\pm\infty) = 0,$$

Εφόσον η (2.13α') είναι ΣΔΕ δεύτερης τάξης, γνωρίζουμε ότι έχει δύο ανεξάρτητες λύσεις για κάθε τιμή του λ . Αν θέσουμε $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u_\xi \end{pmatrix}$ τότε το πρόβλημα (2.13α') γράφεται ως γραμμικό σύστημα ΣΔΕ πρώτης τάξης

$$(2.14) \quad Y' = (A(\xi; \lambda))Y \quad \text{ή} \quad Y' = (A(\xi) + B(\lambda))Y$$

όπου $A(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 \sec^2 h^2(\xi) & 0 \end{pmatrix}$, $B(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda + 1 & 0 \end{pmatrix}$. Αξίζει να σημειωθεί ότι $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} |A(\xi)| = 0$.

2.4 Φασματική ευστάθεια

Ορισμός 1. Έστω X, Y χώροι Banach και $\mathcal{L} : X \rightarrow Y$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ένας μιγαδικός αριθμός λ λέγεται κανονικό σημείο του τελεστή \mathcal{L} αν και μόνο αν ο αντίστροφος τελεστής $(\mathcal{L} - \lambda I)^{-1} : Y \rightarrow X$ υπάρχει και είναι φραγμένος. Αν το λ δεν είναι κανονικό σημείο τότε θα λέγεται φασματικό σημείο.

Ορισμός 2. Έστω X και Y χώροι Banach και $\mathcal{L} : X \rightarrow Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Ο \mathcal{L} θα λέγεται τελεστής Fredholm αν:

- ο \mathcal{L} είναι κλειστός
- το πεδίο ορισμού $D(\mathcal{L})$ του \mathcal{L} είναι πεπερασμένη
- $\alpha(\mathcal{L})$, η διάσταση του πυρήνα του \mathcal{L} είναι πεπερασμένη
- $R(\mathcal{L})$, το εύρος του \mathcal{L} είναι κλειστό του Y
- $\beta(\mathcal{L})$, η συνδιάσταση του $R(\mathcal{L})$ στον Y είναι πεπερασμένη

Ορισμός 3. Ο δείκτης (index) ενός τελεστή Fredholm \mathcal{L} συμβολίζεται με $\text{ind}(\mathcal{L})$ και ορίζεται ως ο αριθμός

$$\text{ind}(\mathcal{L}) = \alpha(\mathcal{L}) - \beta(\mathcal{L})$$

Ορισμός 4. Θα λέμε ότι ένας μιγαδικός αριθμός λ ανήκει στο φάσμα σ του τελεστή \mathcal{L} αν ο $\mathcal{L}(\lambda)$ δεν είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή αν ο αντίστροφος τελεστής δεν υπάρχει ή δεν είναι συνεχής. Θα λέμε ότι το $\lambda \in \sigma$ ανήκει στο σημειακό φάσμα σ_{pt} του \mathcal{L} ή διαφορετικά, ότι το λ είναι ιδιοτιμή του \mathcal{L} αν ο $\mathcal{L}(\lambda)$ είναι ένας τελεστής Fredholm με δείκτη $\text{ind}(\mathcal{L}(\lambda)) = 0$. Το συμπλήρωμα $\sigma - \sigma_{pt} = \sigma_{ess}$ ονομάζεται κύριο φάσμα του τελεστή \mathcal{L} . Το συμπλήρωμα του σ στο \mathbb{C} είναι το επιύον σύνολο του τελεστή \mathcal{L} .

Το σημειακό φάσμα σ_{pt} αποτελείται από τις ιδιοτιμές λ , για τις οποίες το πρόβλημα (2.7) έχει λύση. Προφανώς $0 \in \sigma_{pt}$. Το κύριο φάσμα σ_{ess} περιέχει ανοικτά σύνολα και βρίσκεται ασυμπτωτικά, καθώς το $\lambda \rightarrow \infty$, στο εσωτερικό της παραβολικής περιοχής $\{\lambda \in \mathbb{C} : (Im\lambda)^2 \leq -CRe\lambda\}$, όπου $C \in \mathbb{R}$ σταθερά (Σχήμα 2.1).

Αν ο τελεστής \mathcal{L} έχει ιδιοτιμή λ με $Re\lambda \geq 0$, τότε το κύμα είναι ασταθές. Αν το φάσμα του τελεστή \mathcal{L} βρίσκεται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο και μακριά από τον φανταστικό άξονα εκτός από την μηδενική ιδιοτιμή τότε το οδεύον κύμα είναι ευσταθές. Αν το φάσμα εφάπτεται στον φανταστικό άξονα στην αρχή των αξόνων τότε πρέπει να εισάγουμε σταθμισμένους κανόνες για να αποδείξουμε την ευστάθεια. Επειδή για πολλές εξισώσεις το κύριο φάσμα μπορεί να υπολογιστεί, υποθέτουμε ότι αυτό βρίσκεται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο και επικεντρωνόμαστε στο σημειακό φάσμα.

Για τον τελεστή

$$\mathcal{L} := D \frac{d^2}{dx^2} + c \frac{d}{dx} + \frac{\partial}{\partial u} f(U)$$

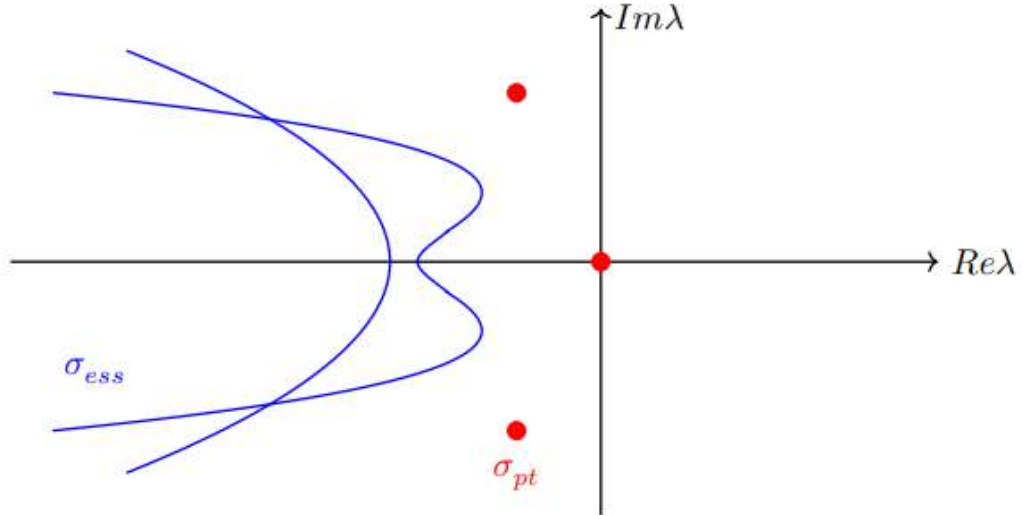
της εξίσωσης (2.5) υποθέτουμε ότι το κύριο του φάσμα $\sigma_{ess}(\mathcal{L})$ βρίσκεται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι η φασματική ευστάθεια καθορίζεται από τη θέση των ιδιοτιμών $\lambda \in \sigma_{pt}$. Όσο το $\lambda \in \mathbb{C}$ δεν βρίσκεται στο κύριο φάσμα του \mathcal{L} , οι πίνακες $A_0(\lambda)$ θα είναι υπερβολικοί, δηλαδή δεν θα έχουν ιδιοτιμές με πραγματικό μέρος μηδέν και οι μη τετριμμένες, φραγμένες λύσεις του συστήματος (2.8) θα φθίνουν εκθετικά καθώς το $\xi \rightarrow \pm\infty$.

2.5 Η συνάρτηση Evans

2.5.1 Η συνάρτηση Evans: ένα παράδειγμα

Η ευστάθεια της στάσιμης λύσης $U(\xi) = \sqrt{2} \text{sech}(\xi)$ της (2.9) ανάγεται στη μελέτη της $\Sigma\Delta E$ 2ης τάξης (2.13α). Έτσι η ευστάθεια του στάσιμου κύματος ανάγεται στη λύση ενός συγκεκριμένου φραγμένου προβλήματος ιδιοτιμών στην πραγματική ευθεία. Συνεχίζοντας το παράδειγμα προηγούμενης ενότητας, έχουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $B(\lambda)$ είναι

$$\phi(\mu) = \mu - \text{tr}B(\lambda) + \det B(\lambda) = \mu^2\lambda - 1$$

Σχήμα 2.1: Φάσμα του τελεστή \mathcal{L}

Το κύριο φάσμα του τελεστή \mathcal{L} δίνεται από την παραβολική καμπύλη

$$\sigma_{ess} = \lambda \in \mathbb{C} : \lambda = -k^2 - 1, k \in \mathbb{R}.$$

Υποθέτουμε ότι $Re\lambda > -1$. Συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα $B(\lambda)$ είναι

$$\mu^+(\lambda) = +\sqrt{\lambda+1} \quad \text{και} \quad \mu^-(\lambda) = -\sqrt{\lambda+1}$$

και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι

$$\delta^+(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu^+(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ +\sqrt{\lambda+1} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \delta^-(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu^-(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\lambda+1} \end{pmatrix}$$

Για $Re\lambda > -1$ μπορούμε να κατασκευάσουμε τις λύσεις $Y^-(\xi; \lambda)$ και $Y^+(\xi; \lambda)$ του συστήματος (2.14) οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y^-(\xi; \lambda) e^{-\mu^+(\lambda)\xi} = \delta^+(\lambda) \quad \text{και} \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y^+(\xi; \lambda) e^{-\mu^-(\lambda)\xi} = \delta^-(\lambda)$$

με την προϋπόθεση ότι

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} |Y^-(\xi; \lambda)| = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} |Y^+(\xi; \lambda)| = 0$$

Η συνάρτηση Evans ορίζεται ως η ορίζουσα Wronski

$$(2.15) \quad E(\lambda) = \det(Y^-, Y^+)(\xi; \lambda) = \begin{vmatrix} Y_1^- & Y_1^+ \\ Y_2^- & Y_2^+ \end{vmatrix}(\xi; \lambda)$$

και απο την ταυτότητα του *Abel* είναι ανεξάρτηση του $\xi \in \mathbb{R}$, αφού για δύο λύσεις

$$\mathcal{L}u = \lambda u \quad \text{και} \quad \mathcal{L}v = \lambda v$$

για την ίδια τιμή του λ η ορίζουσα *Wronski* $W(u, v)$ είναι σταθερή.

Πρόταση 1. Έστω το σύνολο $\Omega = \lambda \in \mathbb{C} : \text{Re} \lambda > -1$. Η συνάρτηση *Evans* είναι αναλυτική στο Ω και ισχύει ότι $E(\lambda) = 0$ αν και μόνο αν το λ είναι μια ιδιοτιμή και η τάξη του λ ως ρίζα της συνάρτησης *Evans* $E(\lambda)$ είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα του λ ως ιδιοτιμής της εξίσωσης (2.13α').

Θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση *Evans* για να μελετήσουμε την ευστάθεια του οδεύοντα κύματος $U(\xi)$. Για $\lambda \in \Omega$, με $|\lambda| \gg 1$ η επίδραση του πίνακα $A(\xi)$ στις λύσεις του συστήματος (2.14) είναι ουσιαστικά αμελητέα. Τώρα συσχετίζοντας τη συνάρτηση *Evans* με τον συντελεστή μετάδοσης $\alpha(\lambda)$ από την θεωρία αντίστροφης σκέδασης, προκύπτει ότι

$$\alpha(\lambda) = -\frac{E(\lambda)}{2\sqrt{\lambda+1}}$$

Για μεγάλες τιμές του λ έχουμε ότι ο συντελεστής μετάδοσης $\alpha(\lambda)$ ισούται με τη μονάδα. Οπότε

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \frac{E(\lambda)}{2\sqrt{\lambda+1}} = \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} (-2\alpha(\lambda)) = -2$$

και αφού το $\lambda = 0$ είναι μια ιδιοτιμή, έχουμε ότι $E(0) = 0$. Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι για μεγάλες τιμές του λ η συνάρτηση *Evans* είναι αρνητική. Αν δείξουμε ότι $E'(0) > 0$, τότε το οδεύον κύμα θα είναι ασταθές. Από την κατασκευή των λύσεων έχουμε ότι $Y^-(\xi; 0) = Y^+(\xi; 0) = \begin{pmatrix} U'(\xi) \\ U''(\xi) \end{pmatrix}$. Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση *Evans* ως προς λ παίρνουμε ότι

$$(2.16) \quad E'(0) = \det(\partial_\lambda(Y^- - Y^+), Y^+)(\xi; 0)$$

Από το σύστημα (2.14) για $\lambda = 0$ παίρνουμε ότι

$$(2.17) \quad (\partial_\lambda Y^-)' = (A(\xi) + B(0))\partial_\lambda Y^- + B'(0)Y^-$$

$$(2.18) \quad (\partial_\lambda Y^+)' = (A(\xi) + B(0))\partial_\lambda Y^+ + B'(0)Y^+$$

όπου $B'(0)Y^- = B'(0)Y^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ U'(\xi) \end{pmatrix}$. Αφαιρώντας τις σχέσεις (2.17) και (2.18) προκύπτει ότι

$$(2.19) \quad \partial_\lambda(Y^- - Y^+)' = (A(\xi) + B(0))\partial_\lambda(Y^- - Y^+)$$

Επιλύοντας την εξίσωση (2.19) έχουμε ότι

$$(2.20) \quad \partial_\lambda(Y^- - Y^+)(\xi; 0) = \left(-\int_{-\infty}^{+\infty} (U')^2 d\xi\right) u_2(\xi) + C_1 u_1(\xi)$$

όπου $C_1 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετη σταθερά. Είναι $u_1(\xi) = Y^-(\xi; 0)$ και $u_2(\xi)$ είναι μια άλλη λύση του συστήματος (2.14) για $\lambda = 0$, έτσι ώστε $\det(u_1, u_2)(\xi) = 1$. Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα της εξίσωσης (2.20) στην εξίσωση (2.16) παίρνουμε ότι

$$(2.21) \quad E'(0) = \left(-\int_{-\infty}^{+\infty} (U')^2 d\xi\right) \det(u_1, u_2)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (U')^2 d\xi > 0$$

δηλαδή το οδεύον κύμα είναι ασταθές. Παρακάτω παρουσιάζουμε έναν πιο αναλυτικό τρόπο έρευνας της συνάρτησης *Evans* για την εξίσωση (2.9). Εφόσον η εξίσωση του (2.13α') είναι $\Sigma\Delta E$ 2ης τάξης, για κάθε τιμή του λ υπάρχουν δύο ανεξάρτητες λύσεις οι οποίες τείνουν στο 0 καθώς το $\xi \rightarrow \pm\infty$, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας υπεργεωμετρικές σειρές βρίσκουμε ότι οι λύσεις του προβλήματος (2.13α') είναι

$$(2.22) \quad u_-(\xi; \lambda) = e^{\sqrt{\lambda+1}\xi} \left[1 + \frac{\lambda}{3} - \sqrt{\lambda+1} \tanh(\xi) - \sec h^2(\xi)\right]$$

με $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} u_-(\xi; \lambda) = 0$, για $\operatorname{Re} \lambda > -1$

$$(2.23) \quad u_+(\xi; \lambda) = e^{-\sqrt{\lambda+1}\xi} \left[1 + \frac{\lambda}{3} - \sqrt{\lambda+1} \tanh(\xi) - \sec h^2(\xi) \right]$$

με $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} u_+(\xi; \lambda) = 0$, για $\operatorname{Re} \lambda > -1$. Παραγωγίζοντας τις (2.22) και (2.23) ως προς ξ παίρνουμε

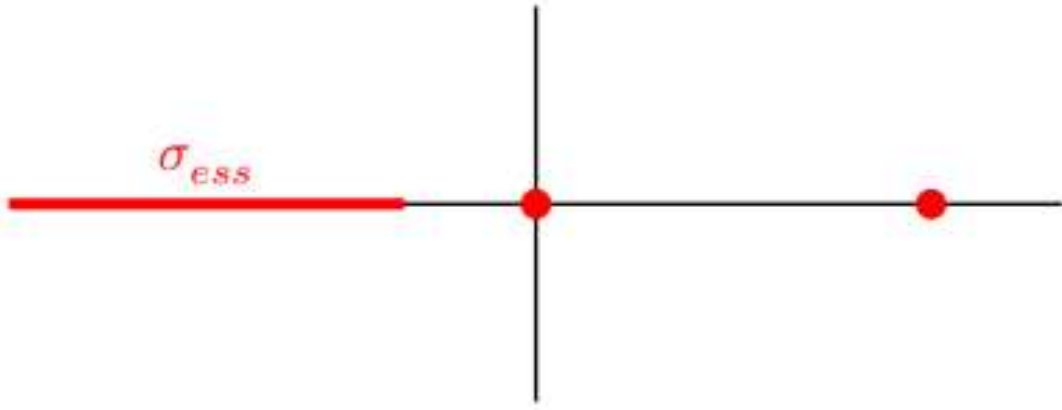
$$(2.24) \quad u'_-(\xi; \lambda) = e^{\sqrt{\lambda+1}\xi} \left[\sqrt{\lambda+1} \left(1 + \frac{\lambda}{3} \right) - (\lambda+1) \tanh(\xi) - 2 \sec h^2(\xi) (\sqrt{\lambda+1} - \tanh(\xi)) \right]$$

$$(2.25) \quad u'_+(\xi; \lambda) = e^{-\sqrt{\lambda+1}\xi} \left[-\sqrt{\lambda+1} \left(1 + \frac{\lambda}{3} \right) - (\lambda+1) \tanh(\xi) + 2 \sec h^2(\xi) (\sqrt{\lambda+1} + \tanh(\xi)) \right]$$

Η συνάρτηση *Evans* ορίζεται ως η ορίζουσα *Wronski*

$$(2.26) \quad E(\lambda) = \begin{vmatrix} u_-(0; \lambda) & u_+(0; \lambda) \\ u'_-(0; \lambda) & u'_+(0; \lambda) \end{vmatrix} = -\frac{2}{9} \sqrt{\lambda+1} \lambda (\lambda - 3).$$

Οι ρίζες της σχέσης (2.26) είναι πο $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 3$ και για $\lambda > 3$ είναι $E(\lambda) < 0$.



Σχήμα 2.2: Φάσμα του τελεστή $\mathcal{L} := \frac{d^2}{d\xi^2} + 6 \sec h^2(\xi) - 1$

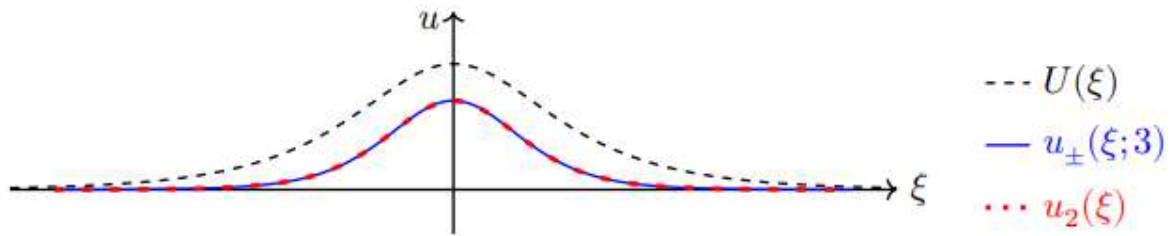
Επίσης οι $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 3$ είναι οι μόνες ιδιοτιμές του προβλήματος (2.13α') με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$$u_1(\xi) = U'(\xi) = -\sqrt{2} \tanh(\xi) \sec h(\xi) \quad \text{και} \quad u_2(\xi) = \frac{1}{2} U^2(\xi) = \sec h^2(\xi)$$

([3], Άσκηση 9.18) Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση *Evans* ως προς λ παίρνουμε

$$(2.27) \quad E'(\lambda) = \frac{5\lambda^2 - 5\lambda - 6}{9\sqrt{\lambda + 1}}.$$

Για $\lambda = 0$ είναι $E'(0) = \frac{2}{3} > 0$, συνεπώς το κύμα είναι ασταθές (Σχήμα 2.3).



Σχήμα 2.3: Γραφική παράσταση των $U(\xi)$, $u(\xi; 3)$ και $u_2(\xi)$

Κεφάλαιο 3

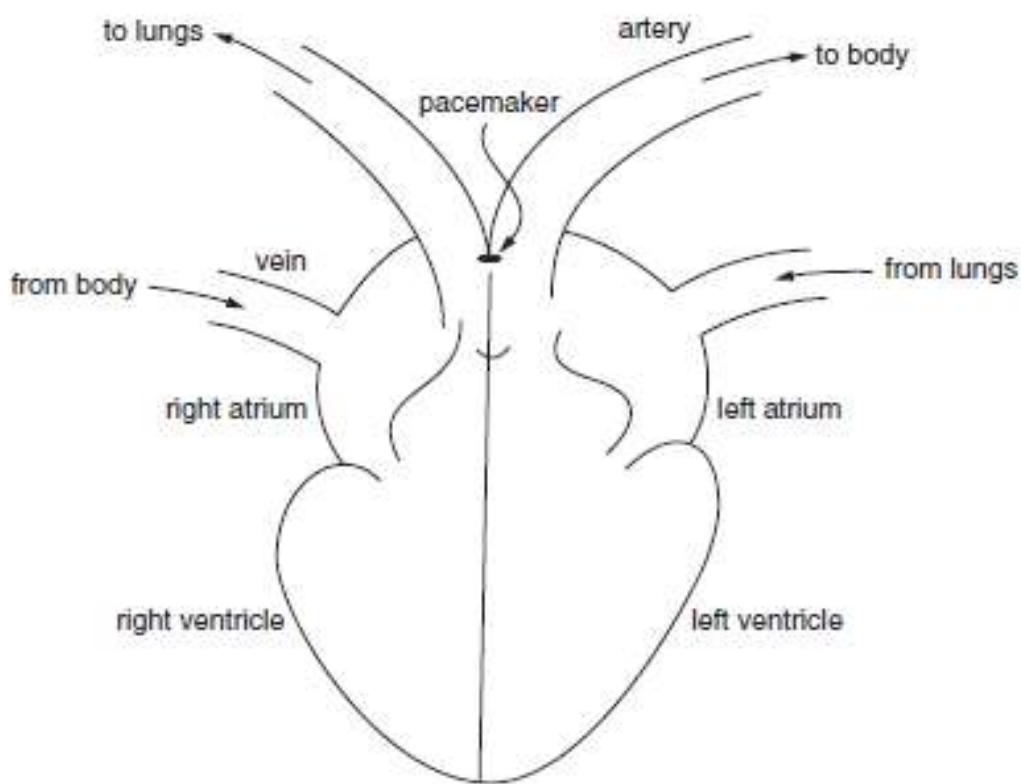
Μοντελοποίηση βιολογικών φαινομένων

Θα μπορούσαμε εύκολα να συσχετίσουμε το μοντέλο μας με μοντέλα βιολογικών φαινομένων όπως αυτό της καρδιάς. Η καρδιά είναι μια πολύπλοκη αλλά στιβαρή αντλία (δείτε την απλοποιημένη εικόνα 3.1). Αποτελείται από τέσσερις θαλάμους και τέσσερις βαλβίδες. Υπάρχουν ουσιαστικά δύο κύκλωμα για το αίμα, το ένα που εξαπλώνεται μέσω των πνευμόνων για να πάρει οξυγόνο και το άλλο που εξαπλώνεται μέσω του σώματος για να παραδώσει το οξυγονωμένο αίμα. Το πρώτο κύκλωμα είναι ένα κύκλωμα χαμηλής πίεσης για να μην βλάψει την ευαίσθητη μεμβράνη στους πνεύμονες, ενώ το δεύτερο είναι ένα κύκλωμα υψηλής πίεσης για να κατέβει το αίμα στα πόδια και ξανά προς τα πάνω. Από το σχήμα της εικόνας (3.1), είναι προφανές ότι η δεξιά πλευρά της καρδιάς είναι η αντλία χαμηλής πίεσης προς τους πνεύμονες ενώ η αριστερή είναι η αντλία υψηλής πίεσης προς το σώμα.

Κάθε αντλία έχει έναν κύριο θάλαμο άντλησης που ονομάζεται κοιλία με μια βαλβίδα εισόδου και εξόδου. Ο σκοπός της βαλβίδας εισόδου είναι να εμποδίζει την επιστροφή της ροής προς τις φλέβες κατά την άντληση, και η βαλβίδα εξόδου είναι να εμποδίζει την επιστροφή από τις αρτηρίες κατά την πλήρωση. Δεδομένου ότι η καρδιά είναι φτιαγμένη από μη άκαμπτο ιστό, έχει μόνο τη δύναμη να σπρώχνει προς τα έξω και καμία δύναμη να απορροφά. Επομένως, για να έχουμε μια καλή αντλία αίματος είναι απαραίτητο να γεμίσουμε πλήρως την κοιλία, και για να το βοηθήσουμε αυτό υπάρχει ένας μικρός θάλαμος που ονομάζεται κόλπος του οποίου η δουλειά είναι να αντλεί απαλά, αρκεί να γεμίσει την κοιλία αλλά όχι αρκετά για να προκαλέσει οποιαδήποτε επιστροφή. Κατά τη διάρκεια του κύκλου του καρδιακού παλμού υπάρχουν δύο ακραίες καταστάσεις ισορροπίας, δηλαδή η διαστολή που είναι η κατάσταση χαλάρωσης και η συστολή που είναι η κατάσταση συστολής. Αυτό που κάνει την καρδιά να χτυπά είναι η παρουσία ενός βηματοδότη που βρίσκεται στην κορυφή του κόλπου. Ο βηματοδότης κάνει την καρδιά να συστέλλεται σε συστολή.

Δηλαδή, πυροδοτεί ένα ηλεκτροχημικό κύμα το οποίο εξαπλώνεται αργά στους κόλπους προκαλώντας τις μυϊκές ίνες να συστέλλονται και να σπρώχνουν το αίμα στις κοιλίες και στη συνέχεια εξαπλώνεται γρήγορα στις κοιλίες προκαλώντας συστολή ολόκληρης της κοιλίας σε συστολή και παροχή μιας μεγάλης αντλίας αίματος προς τα κάτω τις αρτηρίες. Οι μυϊκές ίνες στη συνέχεια χαλαρώνουν γρήγορα και επιστρέφουν την καρδιά στη διαστολή. Η διαδικασία στη συνέχεια επαναλαμβάνεται. Προκειμένου να αναπτύξουμε ένα μαθηματικό μοντέλο που να αντικατοπτρίζει τη συμπεριφορά της δράσης του καρδιακού παλμού που περιγράφεται παραπάνω, επιλέγουμε να ξεχωρίσουμε τα ακόλουθα χαρακτηριστικά. Πρώτα απ' όλα, το μοντέλο θα πρέπει να παρουσιάζει μια κατάσταση ισορροπίας που αντιστοιχεί στη διαστολή. Δεύτερον, πρέπει να υπάρχει ένα κατώφλι για την ενεργοποίηση του ηλεκτροχημικού κύματος που εκπέμπεται από τον βηματοδότη και προκαλεί τη συστολή της καρδιάς σε συστολή. Τρίτον, το μοντέλο πρέπει να αντικατοπτρίζει την ταχεία επιστροφή στην κατάσταση ισορροπίας.

Ξεκινάμε κάνοντας έναν μικρό μαθηματικό πειραματισμό. Ας υποθέσουμε ότι αφήνουμε το x να υποδηλώνει το μήκος μυϊκής ίνας που αναφέρεται σε κάποια βολική προέλευση, ας πούμε $x = 0$, που αντιστοιχεί στην κατάσταση ισορροπίας. Έστω b μια μεταβλητή ηλεκτρικού ελέγχου που διέπει το ηλεκτροχημικό κύμα. Όσον αφορά τις μυϊκές ίνες, αναζητούμε μια διαφορική εξίσωση που έχει $x = 0$ ως κατάσταση ισορροπίας και τουλάχιστον για μικρούς χρόνους έχει μια ταχέως φθίνουσα λύση. Μια κατάλληλη εξίσωση που παρουσιάζει αυτά τα χαρακτηριστικά είναι



Σχήμα 3.1: Εικόνα καρδιάς

$$(3.1) \quad \epsilon \frac{dx}{dt} = -x,$$

όπου το ϵ είναι μια μικρή θετική παράμετρος. Όταν $\frac{dx}{dt}$, η ταχύτητα της ίνας, είναι μηδέν έχουμε την κατάσταση ισορροπίας $x = 0$. Επιπλέον η σχέση (3.1) έχει τη γενική λύση

$$(3.2) \quad x = A \exp\left(-\frac{t}{\epsilon}\right)$$

η οποία μειώνεται ραγδαία στο χρόνο. Έτσι (3.1) φαίνεται να είναι ένα καλό μοντέλο για να αναπαραστήσει τη αρχική συμπεριφορά των μυϊκών ινών που προκαλούν συστολή στη συστολή.

Περνώντας τώρα στο ηλεκτροχημικό κύμα, χρειαζόμαστε τον όρο b για να αντιπροσωπεύει αρχικά τη σχετικά αργή εξάπλωση αυτού του κύματος στους κόλπους. Ένα απλό μοντέλο που το κάνει αυτό είναι η εξίσωση

$$(3.3) \quad \frac{db}{dt} = -b.$$

Εδώ $b = 0$ είναι μια κατάσταση ισορροπίας και η (3.3) έχει την ακόλουθη λύση

$$(3.4) \quad b = B \exp(-t),$$

το οποίο έρχεται σε σύγκριση με τη σχέση (3.2), αντιπροσωπεύει ένα σχετικά αργό χρόνο αποσύνθεσης. Τα χαρακτηριστικά που δεν καλύπτονται από αυτό το απλό μοντέλο που προκύπτει από τις (3.1) και (3.3) είναι (i) το κατώφλι ή το έναυσμα και (ii) η ταχεία επιστροφή στην ισορροπία. Το μοντέλο που ενσωματώνει τα επιθυμητά χαρακτηριστικά είναι το συζευγμένο μη γραμμικό σύστημα πρώτης τάξης

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{dx}{dt} &= -(x^3 + \alpha x + b), \\ (3.5-1) \quad \frac{db}{dt} &= x - x_\alpha. \end{aligned}$$

Εδώ το x αντιπροσωπεύει το μήκος της μυϊκής ίνας, το $-\alpha$ αντιπροσωπεύει την τάση, το b αντιπροσωπεύει τον χημικό έλεγχο και το x_α αντιπροσωπεύει ένα τυπικό μήκος ίνας όταν η καρδιά βρίσκεται σε διαστολή. Το μοντέλο (3.3) οφείλεται στον *E.C.Zeeman*. Το ότι ο *Zeeman* επέλεξε να ξεχωρίσει τις παραπάνω τρεις ιδιότητες του κύκλου του καρδιακού παλμού και να προσπαθήσει να τις μοντελοποιήσει μέσω του συστήματος των εξισώσεων (3.3) δεν θα πρέπει να κάνει τον αναγνώστη να υποθέσει ότι μια τέτοια περιγραφή είναι η μόνη. Πράγματι, το μοντέλο μπορεί να θεωρηθεί λογικό μόνο εάν αντικατοπτρίζει καλά τα βασικά χαρακτηριστικά του κύκλου του καρδιακού παλμού. Είναι σκόπιμο, ωστόσο, να σημειωθεί ότι το μοντέλο (3.3) ήταν αρκετά επιτυχημένο στη διάκριση μεταξύ ορισμένων ακραίων μορφών συμπεριφοράς καρδιακού παλμού, για παράδειγμα, των επιπτώσεων της υψηλής αρτηριακής πίεσης ή της περίσσειας αδρεναλίνης στην κυκλοφορία του αίματος λόγω οργής ή έντονη άσκηση. Ομοίως, υπάρχει η κατάσταση όταν η καρδιά χτυπά με αδύναμο τρόπο και δεν συστέλλεται σε συστολή.

3.0.1 Απλές εξελικτικές εξισώσεις

Μια εξελικτική εξίσωση είναι μια εξίσωση της μορφής

$$(3.6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u + f(x, t, u),$$

όπου η συνάρτηση f μπορεί να είναι μια αρκετά περίπλοκη συνάρτηση των ορισμάτων της και θα μπορούσε ακόμη και να εξαρτάται από τις χωρικές παραγώγους του u . Εξισώσεις της μορφής (3.6) έχουν ήδη προκύψει πολλές φορές στο πλαίσιο της βιολογικής μοντελοποίησης. Η έκφραση «απλές εξελικτικές εξισώσεις» δεν σημαίνει ότι τα προβλήματα που θα εξετάσουμε είναι ιδιαίτερα απλά ή εύκολα, αλλά αναφέρεται σε εξισώσεις στις οποίες η συνάρτηση f εξαρτάται μόνο από την εξαρτημένη μεταβλητή u και έχει απλή μορφή π.χ. πολυώνυμο. Έτσι οι εξισώσεις που θα εξετάσουμε θα είναι του τύπου

$$(3.7) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u + f(u).$$

Ανάλογα με το πλαίσιο, αυτός ο τύπος εξίσωσης μερικές φορές αναφέρεται και ως εξίσωση αντίδρασης-διάχυσης. Αν η $f(u)$ είναι γραμμική, δηλαδή

$$f(u) = Au + B,$$

όπου τα A και B είναι σταθερές, τότε σε πολλές περιπτώσεις η εξίσωση (3.7) μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο διαχωρισμού μεταβλητών. Ωστόσο, εάν, όπως σε πολλές από τις εφαρμογές που εξετάζονται σε αυτό το βιβλίο, η $f(u)$ είναι μη γραμμική, δηλαδή

$$(3.8) \quad f(u) = u(1-u)(u-\alpha), \quad 0 < u < 1,$$

τότε το πρόβλημα είναι πολύ πιο δυσεπίλυτο. Πράγματι, δεν είναι συνήθως δυνατό να ληφθούν «γενικές» αναλυτικές λύσεις και πρέπει να λύσουμε τέτοια προβλήματα αριθμητικά (*bl. Mitchell και Griffiths, 1980*). Παρόλα αυτά, ωστόσο, πολλές εξελικτικές εξισώσεις έχουν «ειδικές» ή «ιδιαιτέρως» λύσεις, οι οποίες είναι θεμελιώδους σημασίας για την κατανόησή μας των βιολογικών φαινομένων που μοντελοποιούνται από εξελικτικές εξισώσεις. Σε αυτήν την ενότητα θα διερευνήσουμε μερικές από αυτές τις συγκεκριμένες λύσεις και θα δείξουμε τη χρήση τους στην ενότητα που ακολουθεί. Ας υποθέσουμε ότι η $f(u)$ είναι πολυώνυμο στο u και ότι η $f(u)$ έχει πραγματικές ρίζες στο $u = \alpha, u = \beta, u = \gamma$. Τότε είναι προφανές ότι στην περίπτωση αυτή

$u = \alpha, u = \beta, u = \gamma$ κ.λ.π., είναι όλες σταθερές λύσεις της (3.7). Τέτοιες λύσεις είναι σημαντικές για την αντιμετώπιση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$(3.9-1) \quad u(x, 0) = \phi(x).$$

Εδώ, για παράδειγμα, η λύση $u(x, t)$ εξελίσσεται για $t \rightarrow \infty$ σε μία από τις ασυμπτωτικές καταστάσεις $u = \alpha, u = \beta, u = \gamma$. Το σε ποια κατάσταση επιτυγχάνεται αυτό εξαρτάται καθοριστικά από τη μορφή των αρχικών δεδομένων ϕ και αυτής της f . Μάλιστα κάποιои από αυτές τις σταθερές ασυμπτωτικές καταστάσεις είναι σταθερές σε μικρές διαταραχές του ϕ ενώ άλλοι όχι. Ως παράδειγμα αυτού, θεωρούμε το πρόβλημα (3.9) με $f(u)$ που δίνεται από την εξίσωση (3.8). Τότε εάν

$$\sup_{x \in (-\infty, \infty)} \phi(x) < \alpha$$

τότε $u(x, t) < \alpha$ για όλα τα $x \in (-\infty, \infty)$, $t > 0$. Απο αυτό αποδεικνύει ότι $u(x, t) \rightarrow 0$ (εκθετικά) καθώς το $t \rightarrow \infty$. Με παρόμοιο επιχείρημα αυτό δείχνει ότι εάν

$$\inf_{x \in (-\infty, \infty)} \phi(x) > \alpha,$$

τότε $u(x, t) > \alpha$ για όλα τα $x \in (-\infty, \infty)$, $t > 0$ και $u(x, t) \rightarrow 1$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Με άλλα λόγια, το πρόβλημα (3.9) έχει για $u = 0$ ή για $u = 1$ ως ασυμπτωτικές καταστάσεις ανάλογα με το μέγεθος των αρχικών δεδομένων. Ο αριθμός α ονομάζεται παράμετρος «κατώφλι». Ένα άλλο θεμελιωδώς σημαντικό σύνολο λύσεων στην εξίσωση (3.9) είναι η κατηγορία των λύσεων «οδεύοντος κυμάτων». Εδώ αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$u(x, t) = V(x + ct),$$

όπου c είναι μια σταθερά, θετική ή αρνητική, που ονομάζεται «ταχύτητα κύματος». Αν κάνουμε τον μετασχηματισμό $\xi = x + ct$ στην (3.9) τότε βλέπουμε ότι το $V(\xi)$ ικανοποιεί τη μη γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση

$$(3.10) \quad V'' + cV' + f(V) = 0,$$

όπου οι τόνοι αντιπροσωπεύουν την παράγωγο ως προς το ξ . Έχουν επίσης θεμελιώδη σημασία στη μελέτη των ασυμπτωτικών καταστάσεων του προβλήματος (3.10). Πράγματι, μπορούμε να θέσουμε το ερώτημα: Πότε η λύση $u(x, t)$ «εξελίσσεται» στο κινούμενο κύμα $V(x + ct)$. Μαθηματικά μπορούμε να εκφράσουμε το πρόβλημα ως εξής: προσδιορίστε τις συνθήκες στα αρχικά δεδομένα $\phi(x)$ έτσι ώστε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(x, t) - V(x + ct)| = 0.$$

Στην πράξη, μπορεί να υπάρχουν πολλά τέτοια κινούμενα κύματα, άλλα σταθερά και άλλα ασταθή, και ο προσδιορισμός του κατάλληλου σταθερού οδεύοντος κύματος είναι συχνά μια πρόκληση. Τα κινούμενα κύματα μπορούν να ταξινομηθούν ως εξής:

1. συστοιχίες κυμάτων — $V(\xi)$ περιοδικές
2. μέτωπα κυμάτων — $V(-\infty)$ και $V(\infty)$ υπάρχουν και είναι άνισα.
3. παλμοί — Τα $V(-\infty)$ και $V(\infty)$ υπάρχουν και είναι ίσοι και το $V(\xi)$ δεν είναι σταθερό.

Κεφάλαιο 4

Ανάλυση Ευστάθειας και απόδειξη οτι έχουμε λύσεις οδεύοντος κύματος

Θα προσδιορίσουμε εάν η εξίσωση *Fisher – KPP* έχει λύσεις οδεύοντος κυμάτων που σχετίζονται με τη δυναμική του πληθυσμού. Η εξίσωση *Fisher – KPP* είναι η ακόλουθη:

$$(4.1) \quad u_t = u_{xx} + u(1 - u)$$

όπου u είναι συνάρτηση $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ για $x \in \mathbb{R}$ και $t \geq 0$. Αυτή η μορφή της εξίσωσης Φισερ-ΚΠΠ είναι η αδιάστατη μορφή της εξίσωσης. Έχει προκύψει με την κατάλληλη κανονικοποίηση ως προς το χρόνο στο παράγοντα ανάπτυξης, απόσταση από το μήκος διάχυσης και μέγεθος πληθυσμού στο μέγιστο του πληθυσμού. Επομένως, μόνο οι τιμές του u μεταξύ μηδέν και ένα είναι σχετικές. Μια λύση οδεύοντος κύματος είναι μια λύση που ικανοποιεί η $u(x, t) = \phi(x - ct)$ για μια συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση ϕ είναι το προφίλ κύματος και c η ταχύτητα κύματος. Εισάγουμε το συν-κινούμενο πλαίσιο γράφουμε $\xi = x - ct$. Όταν αντικαταστήσουμε το $\phi(x - ct)$ με το u , στην εξίσωση *Fisher – KPP* (4.1), τότε το αριστερό μέλος της εξίσωσης (4.1) θα γίνει:

$$u_t(\xi) = \frac{d\phi}{d\xi}(\xi) \frac{d\xi}{dt}(\xi) = -c\phi'(\xi)$$

και το δεξί μέλος γίνεται:

$$u_{xx} + u(1 - u) = \phi''(\xi) + \phi(\xi)(1 - \phi(\xi)).$$

Αυτό μας δίνει μια συνήθης διαφορική εξίσωση (ΣΔΕ):

$$(4.2) \quad \phi''(\xi) + c\phi'(\xi) + \phi(\xi)(1 - \phi(\xi)) = 0$$

ή

$$\phi'' + c\phi' + \phi(1 - \phi) = 0.$$

Ωστόσο, παρόλο που μπορούν να βρεθούν σαφείς λύσεις για $c = \pm \frac{5}{6}\sqrt{6}$ (Ablowitz και Zeppetella, 1979), για άλλες τιμές του c οι ακριβείς λύσεις αυτής της εξίσωσης δεν προσδιορίζονται εύκολα, αφού η εξίσωση είναι μη γραμμική. Επομένως, για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των λύσεων, γράφουμε αυτή την εξίσωση ως ένα διδιάστατο σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης. Μπορούμε να το κάνουμε αυτό ορίζοντας $\psi = \phi'$, όπως στην παράγραφο 3.1 του (Braun και Golubitsky):

$$(4.30) \quad \phi' = \psi$$

$$\psi' = -c\psi - \phi(1 - \phi).$$

Το *nullcline* για $\phi' = 0$ είναι η ευθεία $\psi = 0$ και το *nullcline* για το $\psi' = 0$ είναι η γραμμή $\psi = \frac{1}{c}(\phi^2 - \phi)$. Το σύστημα έχει δύο σταθερά σημεία $(\phi, \psi) = (0, 0)$ και $(\phi, \psi) = (1, 0)$. Για να προσδιορίσουμε το είδος του σταθερού σημείου, υπολογίζουμε τον Ιακωβιανό πίνακα J αυτού του συστήματος:

$$J(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi'}{\partial \phi} & \frac{\partial \phi'}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \psi'}{\partial \phi} & \frac{\partial \psi'}{\partial \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\phi - 1 & -c \end{pmatrix}.$$

Επίσης έχουμε

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad J(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}.$$

Για το σημείο $(0, 0)$, η χαρακτηριστική εξίσωση του Ιακωβιανού πίνακα είναι

$$\lambda^2 + c\lambda + 1.$$

Επομένως οι ιδιοτιμές είναι :

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4}}{2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - 1}.$$

Αντίστοιχα στο σημείο $(0, 1)$, η χαρακτηριστική εξίσωση του Ιακωβιανού πίνακα είναι

$$\lambda^2 + c\lambda - 1.$$

Επομένως οι ιδιοτιμές είναι :

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4}}{2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + 1}.$$

Σημειώνετε ότι η τιμή $u = 1$ αντιστοιχεί στη μέγιστη φέρουσα ικανότητα του οικοσυστήματος. Επιπλέον, δεν θα εξετάσουμε αρνητικά μεγέθη πληθυσμού. Έτσι, το πεδίο ορισμού του u είναι $[0, 1]$ και μια λύση του προβλήματος (4.2) είναι σχετική μόνο αν έχουμε $u(x, t) = \phi(x - ct) = f(\xi) \in [0, 1]$ για όλα τα t και x . Θα εξετάσουμε τώρα δύο περιπτώσεις για το c ξεχωριστά: την περίπτωση $0 < c < 2$ και την περίπτωση $c > 2$.

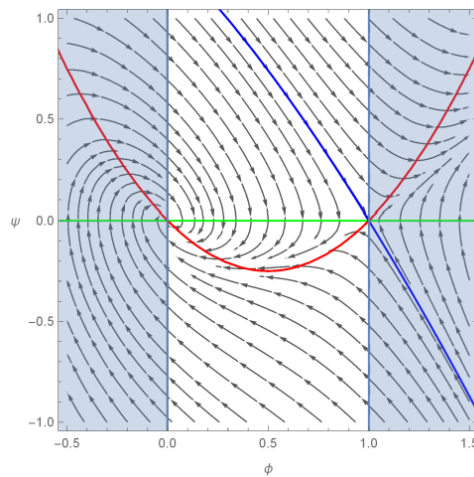
4.1 Περίπτωση $0 < c < 2$

Οι ιδιοτιμές του γραμμικοποιημένου συστήματος στο σταθερό σημείο $(0, 0)$ είναι $\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - 1}$. Για $0 < c < 2$ οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές με αρνητικό πραγματικό μέρος. Επομένως, το $(0, 0)$ είναι μια σταθερή εστία. Για να επεξηγήσουμε το επιχείρημα που πρόκειται να κάνουμε, εμφανίζεται ένα διάγραμμα φάσης για $c = 1$ στο Σχήμα 4.1. Σε αυτό το σχήμα, η μηδενική κλίση για την οποία $\phi' = 0$ είναι με κόκκινο χρώμα και για $\psi' = 0$ είναι πράσινο. Η περιοχή που σκιάζεται με μπλε αποτελείται από σημεία όπου το ϕ είναι έξω από το πεδίο ορισμού $[0, 1]$, δηλαδή καμπύλες φάσης που διέρχονται από την περιοχή που είναι σκιασμένη, το μπλε δεν είναι σχετικό στο πλαίσιο μας. Θα ισχυριστούμε ότι για $0 < c < 2$ όλες οι καμπύλες φάσης περνούν έξω από το πεδίο του ϕ σε κάποιο σημείο. Σε αυτή την ενότητα το επιχείρημά μας θα βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στο διάγραμμα φάσης 2. Δίνουμε πρώτα τον ορισμό του σταθερού συνόλου

Ορισμός 5. Έστω $u_t = f(u)$ με $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ σε ένα C^1 χάρτη και $u \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα σύστημα συνηθών διαφορικών εξισώσεων. Το σταθερό σύνολο ενός σταθερού σημείου p ως προς το $u_t = f(u)$ είναι το σύνολο των σημείων x έτσι ώστε η λύση $u(t; x)$ που ξεκινά στο x για $t = 0$ ικανοποιεί $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t; x) = p$. Εάν ένα σταθερό σύνολο είναι πολλαπλό, ονομάζεται σταθερή πολλαπλότητα, βλέπε (Meiss).

Σκεφόμαστε, για παράδειγμα, το γραμμικό σύστημα $\dot{x} = Ax$ με $x \in \mathbb{R}^n$ και A $n \times n$ πίνακας με πραγματικούς συντελεστές. Ας υποθέσουμε ότι ο A έχει n διακριτές ιδιοτιμές από τις οποίες το k έχει αρνητικό πραγματικό μέρος. Τότε το σταθερό σύνολο είναι μια πολλαπλότητα k διαστάσεων και είναι ίσο με το γινόμενο των ιδιοχώρων που σχετίζονται με τις αρνητικές ιδιοτιμές. Στην γραφική παράσταση του επιπέδου φάσης (Σχήμα 4.1), μπορεί κανείς να δει τη σταθερή πολλαπλότητα του $(1, 0)$ που αντιπροσωπεύεται από μπλε γραμμή. Το

Σχήμα 4.1 δείχνει ξεκάθαρα ότι η σταθερή πολλαπλότητα του $(1,0)$ είναι ένα διαχωριστικό. Το *separatrix* είναι ένα όριο μεταξύ δύο περιοχών του χώρου φάσης τέτοια ώστε καμία τροχιά να μην διέρχεται και από τις δύο περιοχές, βλέπε (Meiss, p168). Συγκεκριμένα, μπορεί κανείς να δει ότι οι καμπύλες φάσης αριστερά από τη σταθερή πολλαπλότητα του σταθερού σημείου $(1,0)$ τείνουν προς το σταθερό σημείο στην αρχή. Αυτές οι τροχιές κινούνται σπειροειδώς προς την αρχή και επομένως η τιμή του ϕ πρέπει κάποια στιγμή να είναι αρνητική. Έτσι, αυτές οι τροχιές δεν είναι σχετικές με εφαρμογές στη δυναμική του πληθυσμού. Οι τροχιές στα δεξιά της σταθερής πολλαπλής του σταθερού σημείου $(1,0)$ έχουν όλες θετικές $\phi' = 0$, το οποίο συμβολίζει την απεριόριστη ανάπτυξη του ϕ . Ως εκ τούτου, αυτές οι τροχιές δεν είναι σχετικές ούτε στο πλαίσιο μας. Υπάρχουν ακόμη δύο τροχιές στη σταθερή πολλαπλότητα του $(1,0)$ που πρέπει να ληφθούν υπόψη το ίδιο το *separatrix*. Αριστερά, έχουμε μια τροχιά της οποίας η ϕ -συντεταγμένη γίνεται αρνητική για το χρόνο προς τα πίσω. Στα δεξιά, υπάρχει μια τροχιά της οποίας η ϕ -συντεταγμένη είναι πάντα μεγαλύτερη από μία. Δεδομένου ότι οι συντεταγμένες ϕ είναι σε κάποιο σημείο μικρότερες από το μηδέν ή μεγαλύτερες από το ένα, αυτές οι τροχιές δεν είναι σχετικές ούτε στο πλαίσιο μας. Συμπερασματικά, για $0 < c < 2$ δεν υπάρχουν τροχιές $(\phi(\xi), \psi(\xi))$ στο σύστημα (4.2), έτσι ώστε το $\phi(x - ct)$ να είναι ένα κινούμενο κύμα που σχετίζεται με το πλαίσιο του πληθυσμού δυναμική.

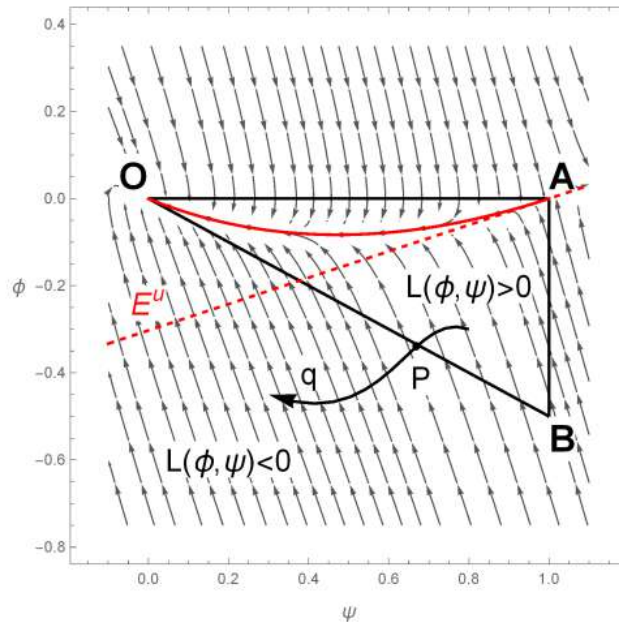


Σχήμα 4.1: Διάγραμμα φάσης του διανυσματικού πεδίου για $c = 1$

4.2 Περίπτωση $c \geq 2$

Παραπάνω καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχουν λύσεις σχετικές στο πλαίσιο της δυναμικής του πληθυσμού για $0 < c < 2$, θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν σχετικές λύσεις όταν $c \geq 2$. Η γραφική παράσταση του επιπέδου φάσης στο Σχήμα 4.2 υποδηλώνει ότι υπάρχει είναι μια ετεροκλιτική τροχιά από το σταθερό σημείο στο $(1,0)$ στο σταθερό σημείο στο $(0,0)$. Θα αποδείξουμε τώρα την ύπαρξή του για όλα τα $c \geq 2$. Να συμβολίσете την αρχή με O , το σημείο $(1,0)$ με A και το σημείο $(1, -\beta)$ με B . Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει τροχιά που φεύγει από το $(1,0)$ και εισέρχεται στο OAB και ότι καμία τροχιά δεν μπορεί Αφήστε το

τρίγωνο OAB προς τα εμπρός, βλέπε Σχήμα 4.2. Για να γίνει αυτό, δίνουμε πρώτα τον ορισμό του ασταθούς συνόλου ενός σταθερού σημείου. Αυτός ο ορισμός είναι ανάλογος με τον Ορισμό 5 του σταθερού συνόλου ενός σταθερού σημείου. Η μόνη διαφορά είναι ότι τώρα κοιτάμε σημεία που τείνουν σε ένα σταθερό σημείο για $t \rightarrow -\infty$, αντί για $t \rightarrow \infty$.



Σχήμα 4.2: Διάγραμμα φάσης του συστήματος για $c = 3$ με σκίτσο του τριγώνου OAB, την ετεροκλιτική λύση με κόκκινο χρώμα και τη γραμμική ασταθή πολλαπλότητα του σταθερού σημείου $(1,0)$ διακεκομμένη στο κόκκινο.

Ορισμός 6. Έστω $u_t = f(u)$ με $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ σε ένα C^1 χάρτη και $u \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα σύστημα συνηθων διαφορικών εξισώσεων. Το ασταθές σύνολο ενός σταθερού σημείου p ως προς το $u_t = f(u)$ είναι το σύνολο των σημείων x έτσι ώστε η λύση $u(t; x)$ που ξεκινά στο x για $t = 0$ ικανοποιεί $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t; x) = p$. Εάν ένα ασταθές σύνολο είναι πολλαπλό, ονομάζεται ασταθή πολλαπλότητα, βλέπε (Meiss).

Ορισμός 7. Έστω $u_t = f(u)$ με $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ σε ένα C^1 χάρτη και $u \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα σύστημα συνηθων διαφορικών εξισώσεων. Έστω p είναι . Έστω p να σταθερό σημείο αυτού του συστήματος. Έστω $u_t = g(u)$ είναι η γραμμικοποίηση του $u_t = f(u)$ στο p . Η γραμμική ασταθής πολλαπλότητα του p είναι η ασταθής πολλαπλότητα του p στο $u_t = g(u)$.

Μια ετεροκλιτική τροχιά από $(1,0)$ έως $(0,0)$ πρέπει να βρίσκεται στην ασταθή πολλαπλότητα του $(1,0)$. Η ασταθής πολλαπλότητα εφάπτεται στη γραμμική ασταθή πολλαπλότητα. Η αντίστοιχη θετική ιδιοτιμή του $J(1,0)$ είναι $-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + 1}$ και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος που εκτείνεται από το ιδιοδιάνυσμα είναι $\left(\frac{c}{2} + \sqrt{c^2 + 4}, 1\right)^T$. Επομένως, η γραμμική ασταθής πολλαπλότητα είναι

$$E^u = \left\{ (1,0) + t\left(\frac{c}{2} + \sqrt{c^2 + 4}, 1\right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Σημειώνουμε ότι το $\psi_e < 0$ σημαίνει $\phi_e < 1$ για σημεία $(\phi_e, \psi_e) \in E^u$. Ως εκ τούτου, υπάρχει ένα σημείο σε σταθερή πολλαπλή μέσα στο OAB. Τώρα πρέπει να αποδείξουμε ότι το μέρος της ασταθούς πολλαπλότητας του

σημείου $(1,0)$ που βρίσκεται στα αριστερά του $(1,0)$ συνδέεται με το αρχικό σημείο. Στην ευθεία OA έχουμε $\phi \in [0, 1]$ και $\psi = 0$. Επομένως, έχουμε $\psi' = -c \cdot 0 + \phi(\phi - 1) = \phi(\phi - 1)$. Λόγω ότι το $\psi'(\phi, 0) = \phi(\phi - 1)$ δεν έχει μηδενικά στο διάστημα $(0, 1)$ με έναν απλό έλεγχο σημαίνει ότι έχουμε $\psi' < 0$ στη γραμμή OA . Επομένως, οποιαδήποτε λύση πρέπει να περάσει αυτή τη γραμμή με κατεύθυνση προς τα κάτω, πράγμα που σημαίνει ότι μια λύση δεν μπορεί μείνει το τρίγωνο OAB μέσα από την ευθεία OA . Στην ευθεία AB έχουμε $\psi \in [-b, 0]$. Επομένως, έχουμε $\phi' = \psi \leq 0$. Έτσι, η κατεύθυνση της ροής δείχνει πάλι προς το εσωτερικό του τριγώνου, υποδεικνύοντας ότι μια λύση δεν μπορεί να φύγει από το τρίγωνο OAB μέσω της ευθείας AB . Τέλος, πρέπει να δείξουμε ότι μια τροχιά δεν μπορεί να φύγει από το τρίγωνο OAB μέσω του γραμμή OB . Για να το δείξουμε αυτό ορίζουμε τη συνάρτηση L των ϕ και ψ ως $L : (\phi, \psi) \mapsto b\phi + \psi$. Για όλα τα σημεία (ϕ, ψ) αριστερά της ευθείας OB ισχύει ότι $L(\phi, \psi) < 0$ και για όλα τα σημεία (ϕ, ψ) στα δεξιά της ευθείας OB έχουμε $L(\phi, \psi) > 0$ (βλ. Σχήμα 4.2). Επομένως, προκειμένου μια τροχιά $q : (\phi(t), \psi(t))$ να εξέλθει από το τρίγωνο OAB μέσω τη γραμμή OB , πρέπει να έχουμε $\frac{d}{dt}L(\phi(t), \psi(t)) < 0$ σε ένα σημείο Π από όπου διέρχεται q OB , βλέπε Σχήμα 4.2. Θα δείξουμε ότι για κάθε c υπάρχει μια τιμή του b (και επομένως το σημείο B) για το οποίο αυτό δεν μπορεί να συμβεί:

$$\frac{d}{dt}L(\phi(t), \psi(t)) = b\phi'(t) + \psi'(t) = b\psi - c\psi + \phi(\phi - 1) = (b - c)\psi + \phi(\phi - 1).$$

Εφόσον το Π βρίσκεται στο OB έχουμε $\psi = -b\phi$ και επομένως:

$$\frac{d}{dt}L(\phi(t), \psi(t)) = (b - c)(-b\phi) + \phi(\phi - 1) = -b^2\phi + bc\phi + \phi^2 - \phi = \phi(b(c - b) + \phi - 1).$$

Επιλέγουμε $b = c/2$ και προκύπτει το ακόλουθο

$$= \phi \left(\frac{c}{2} \left(c - \frac{c}{2} \right) + \phi - 1 \right) = \phi \left(\frac{c^2}{4} + \phi - 1 \right).$$

Σημειώνουμε ότι αφού εξετάζουμε την περίπτωση $c \geq 2$, έχουμε $c^2/4 - 1 \geq 0$. Αυτό συνεπάγεται $\frac{c^2}{4} + \phi - 1 > 0$, αφού $\phi > 0$. Επομένως, έχουμε $\frac{d}{dt}L(\phi(t), \psi(t)) = \phi \left(\frac{c^2}{4} + \phi - 1 \right)$, και καμία τροχιά δεν μπορεί να εξέλθει από το τρίγωνο OAB μέσω OB . Έστω ω το ω -οριακό σύνολο της τροχιάς στην ασταθή πολλαπλότητα του $(1, 0)$. (Βλ. *Meiss* (2007) Παράγραφος 4.9 για τον ορισμό ενός συνόλου ορίων ω). Η τροχιά από την πλευρά της ασταθούς πολλαπλότητας αριστερά του $(1,0)$ δεν μπορεί να εξέλθει από το OAB . Επομένως, το ω περιέχεται στο οριοθετημένο σύνολο OAB και, επομένως, δεν είναι κενό, συμπαγές και συνδεδεμένο. Επομένως, ισχύει το θεώρημα *Poincare – Bendixson* (*Teschl*(2012)*Thm*7.16). Το θεώρημα *Poincare – Bendixson* υπονοεί ότι το ω πρέπει είτε να είναι ένα σταθερό σημείο, περιοδική τροχιά ή ένα σύνολο ετεροκλιτικών τροχιών, ομοκλιτικών τροχιών και σταθερών σημείων. Αφήνω (ϕ^*, ψ^*) είναι μια λύση που βρίσκεται στο μέρος της ασταθούς πολλαπλότητας του $(1, 0)$ που βρίσκεται ακριβώς αριστερά του $(1, 0)$. Εφόσον έχουμε $\phi' > 0$ μέσα στο OAB , ϕ^* είναι μονότονη. Η πρώτη συντεταγμένη της λύσης ϕ^* φράσσεται επίσης από το OAB , επομένως, ως συνέπεια του θεωρήματος της μονοτονικής σύγκλισης, έχει ένα όριο. Σύμφωνα με το θεώρημα *Poincare – Bendixson* αυτό το όριο πρέπει να είναι η πρώτη συντεταγμένη ενός σταθερού σημείου. Το όριο δεν είναι ίσο με ένα, και, εφόσον υπάρχουν μόνο δύο σταθερά σημεία, ισούται με μηδέν. Σημειώνετε ότι $\lim_{t \rightarrow -\infty} (\phi(t), \psi(t)) = (1, 0)$ και $\lim_{t \rightarrow \infty} (\phi(t), \psi(t)) = (0, 0)$. Επομένως, η συνάρτηση κυματοπροφίλ ϕ^* το κινούμενο κύμα ικανοποιεί το $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \phi^*(\xi) = 0$ και $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \phi^*(\xi) = 1$.

34 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΟΤΙ ΕΧΟΥΜΕ ΛΥΣΕΙΣ ΟΔΕ ΤΟΝΤΟΣ ΚΥΜΑΤΟΣ

Βιβλιογραφία

- [1] *Logan, J. D.(2002). Εφαρμοσμένα Μαθηματικά (Β. Δουγαλής, Δ. Μητσούδη και Ι.Στρατής, Μεταφ.).*
Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- [2] *Ακριβής, Δ. και Αλικάκος,Ν. (2012). Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις. Αθήνα: Σύγχρονη Εκδοτική.*
- [3] *Αλικάκος, Ν. και Καλογερόπουλος, Γ. (2003). Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις. Αθήνα*
- [4] *D.S. JONES, M.J. PLANK AND B.D.SLEEMAN, Differential Equations and Mathematical Biology,*
Second Edition
- [5] *Ιωάννης Ντάλλας, Διπλωματική Εργασία : Ευστάθεια κυματικών λύσεων, θεωρία και εφαρμογές*