ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΕΥΦΥΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ανάπτυξη υπερκειμένου για μαθησιακά αντικείμενα σε «Θεωρία Παιγνίων»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

Δερβεντζή Βασιλικής

Α.Μ.: 16041

Επιβλέπων: Καπόρης Αλέξιος

Μέλη εξεταστικής επιτροπής: Καβαλλιεράτου Εργίνα, Σταματάτος Ευστάθιος

Σάμος, Αύγουστος 2020

Πίνακας Περιεχομένων

2η Διάλεξη

3η Διάλεξη

4η Διάλεξη

5η Διάλεξη

6η Διάλεξη

7η Διάλεξη

8η Διάλεξη

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Εικόνων

Πρόλογος

Στην παρούσα εργασία γίνεται αναφορά στην Θεωρία παιγνίων και στην μελέτη οικονομικών αλληλεπιδράσεων και συμπεριφορών που προκύπτουν όταν ο κάθε άνθρωπος με γνώμονα το ατομικό του συμφέρον αποσκοπεί στην μεγιστοποίηση του προσωπικού του οφέλους, τα αποτελέσματα που επιφέρει αυτό στην κοινωνία και εφαρμογές με στόχο την αντιμετώπιση των προβλημάτων με τη βοήθεια μαθηματικών μοντέλων. Αναζητείται η βέλτιστη λύση ενός προβλήματος, η καλύτερη δυνατή λύση για τον κάθε παίκτη που επιθυμεί την μεγιστοποίηση του κέρδους ή την ελαχιστοποίηση της ζημιάς.

Αναλύονται οι έννοιες της Θεωρίας Παιγνίων, η οποία αποτελεί το πεδίο εφαρμογών της ανάπτυξης της ορθολογικής θεωρίας και παρέχει ένα σύνολο εργαλείων για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης και της Αλγοριθμικής θεωρίας παιγνίων η οποία συνδυάζει την μελέτη προβλημάτων απόφασης σε ανταγωνιστικά περιβάλλοντα και την εύρεση λύσης με την χρήση των αλγορίθμων. Η εγωιστική συμπεριφορά των παικτών επηρεάζει την στρατηγική που θα εφαρμόσουν στα παίγνια και την λήψη αποφάσεων και επιλογών. Οι αμοιβές που αντιστοιχούν σε κάθε παίκτη απεικονίζονται σε έναν πίνακα.

Η Θεωρία παιγνίων παρουσιάστηκε και αποτυπώθηκε μέσα από τις μελέτες και την συγγραφή των ιδεών και αποτελεσμάτων αντίστοιχα στο βιβλίο *Theory of Games and Economic Behavior* το 1944 [72, Introduction] από τον μαθηματικό *John von Neumann* [53, Article] και τον οικονομολόγο *Oskar Morgenstern* [81]. Ο *John von Neumann* απέδειξε το 1928 [24, Part II] το θεώρημα ελαχιστοποίησης του μεγίστου *(Θεώρημα Minimax)* [2, Introduction] μέσα από ένα παράδειγμα βασισμένο σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος. Η έννοια της ισορροπίας που εφαρμόζεται σε διάφορους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας όπως στην Πληροφορική, την Τεχνητή Νοημοσύνη, στις οικονομικές επιστήμες, την πολιτική αλλά και στην Βιολογία δημιουργήθηκε και εφαρμόστηκε από τον Αμερικανό μαθηματικό *John Forbes Nash* [68, Article] για παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος, για μη συνεργατικά παίγνια στα οποία συμμετέχουν δύο ή περισσότεροι παίκτες. Η ισορροπία *Nash* [54, Κεφάλαιο 1] όπως ονομάστηκε είναι ένα προφίλ κινήσεων με την ιδιότητα ότι κανένας παίκτης δε μπορεί να αυξήσει τη συνάρτηση οφέλους του μετακινούμενος σε άλλη κατάσταση, δηλαδή ισχύει η ισορροπία Nash [64, Κεφάλαιο 2.3.2] αν κανένας παίκτης δεν δύναται να βελτιώσει την απόδοσή του δεδομένου ότι και οι υπόλοιποι παίκτες ακολουθούν την ίδια στρατηγική.

Το βέλτιστο για το άτομο που σχετίζεται με το ατομικό του συμφέρον και το βέλτιστο για την κοινωνία που είναι η ευημερία του γενικού συνόλου, όπως αναφέρεται και στο βίντεο που έχουν επιμεληθεί οι Christian και Griffins [6], πολλές φορές δεν συμβαδίζουν και παρατηρείται το φαινόμενο της εγωιστικής συμπεριφοράς από τους συμμετέχοντες στα παίγνια. Μέσα από τα παίγνια και από τον τρόπο αναζήτησης και επίλυσής τους σκιαγραφούνται ανθρώπινα χαρακτηριστικά που επιδρούν στις σχέσεις και στις αποφάσεις των ανθρώπων όπως ο εγωισμός και η συνεργασία.

Λέξεις κλειδιά: *Θεωρία παιγνίων, John von Neumann, Ισορροπία Nash (Nash Equilibrium),Το δίλημμα του φυλακισμένου, John Forbes Nash,Παίγνιο μηδενικού αθροίσματος*

Abstract

As of his wake in history the human being has been being challenged to choose among different options. At every step in his life the human is asked about what to leave and what to follow, what to take and what to refuse, where to join and when to turn away and so on and so forth.

The Maths, throughout the History, accompanies the humans' efforts to cope with problems so the search for solutions to dilemmas reasonably turns to the science. The Games Theory is a part of the Mathematic Science that has been being developed since the mid 20th century and has ever since been applied in various tasks, such as Economics, Artificial Intelligence, Biology and more.

In 1944 the mathematician *John Von Neumann* [53, Article] along with the economist Oscar Morgenstern published their book *Theory of Games and Economic Behavior* [72, Introduction] triggering the discussion about the issue and challenging the scientific community to deal with this approach. Moreover, *John Forbes Nash* [68, Article] contributed to the Games Theory highly functional notions as *Nash* Equilibrium [54, Chapter 1] as well as the Strategy Profile [66, Definition Strategy] (or Strategy Combination), Zero Sum Games [39, Ενότητα 4: Παίγνια Μηδενικού Αθροίσματος] and more.

While the selfish behavior of the individual is considered, more or less, innate for the stipulation of the personal stance it may take both the players of a bilateral game to the worst choice that is catholic failure. On the other hand, players are motivated by their individual interest yet their coordination frequently holds the optimum selection. Algorithms, Combinatorics, Linear Algebra and more Mathematic Instruments constitute the mechanisms that process data, accelerate the pace of process and produce Optimum Answers. Nowadays, the concepts of individualism and individual action prevail, as a choice, in various topics of research. On the contrary, in the Games Theory the collaboration of participants often arises as the reciprocally most beneficial solution for them.

Keywords: *Games Theory, John Von Neumann, Nash Equilibrium, John Forbes Nash, Prisoner's dilemma, Zero sum game*

1

1η Διάλεξη 16/10/2019

1.1 Θεωρία παιγνίων

Η Θεωρία παιγνίων *(Games Theory)* είναι η θεωρία που εφαρμόζεται για την μελέτη και κατανόηση καταστάσεων ανταγωνιστικής αλληλεξάρτησης κατά τη διάρκεια λήψης αποφάσεων μεταξύ διαφορετικών μερών στο πλαίσιο ανταγωνισμού ή συνεργασίας [23, Ορισμός Θεωρία Παιγνίων]. Είναι ένα μαθηματικό μοντέλο που μελετά πως αλληλεπιδρούν οι διακριτές, συμμετέχουσες στο παίγνιο οντότητες όπως περιγράφεται και στις σημειώσεις που αναλύονται έννοιες που σχετίζονται με την Θεωρία παιγνίων [66, Ορισμός Θεωρία Παιγνίων]. Είναι η μελέτη στοιχείων που δίνουν λύσεις σε αλληλοεξαρτώμενα προβλήματα ανταγωνισμού και συνεργασίας. Μοντελοποιεί την εγωιστική συμπεριφορά καταγράφοντας τα δυνατά αποτελέσματα σε έναν πίνακα. Ένα μοντέλο είναι μια αφαιρετική έννοια που χρησιμοποιείται για την καλύτερη κατανόηση πραγματικών καταστάσεων.

Η Θεωρία παιγνίων διαμορφώνει μια άποψη της οικονομικής συμπεριφοράς, αποτελεί ένα τυπικό δείγμα μελέτης ορθολογικών αποφάσεων [77, Κεφάλαιο 1.1] μεταξύ των παικτών και θεωρείται το κατάλληλο εργαλείο ανάλυσης και ανάπτυξης της θεωρίας της οικονομικής συμπεριφοράς. Παρέχει γενικές μαθηματικές τεχνικές που βοηθούν στην κατανόηση καταστάσεων όπου εμπλέκονται δύο ή περισσότεροι παίχτες, εστιάζει στην αλληλεξάρτηση των αποφάσεων, ομάδων ή ανθρώπων όπου οι αποφάσεις του ενός θα επηρεάσουν την ευημερία του άλλου [61, Chapter IV, Chapter V]. Μια παρουσίαση – εισαγωγή στην Θεωρία παιγνίων μέσω μιας οικονομικής προσέγγισης στην στρατηγική αλληλεπίδραση παρουσιάζεται και στην διάλεξη του Evans [22] όπου στην εισαγωγή του βίντεο περιγράφει λέξεις κλειδιά που σχετίζονται με την *Θεωρία παιγνίων* και κάνει αναφορά στο παίγνιο *Το Δίλημμα του φυλακισμένου*, .

Ένα κλασσικό παίγνιο της Θεωρίας παιγνίων είναι το παίγνιο *«Η Μάχη των Φύλων»* ή αλλιώς *"Battle of Sexes"* [51, Κεφάλαιο 2.3] όπου εμφανίζονται ως στρατηγικές οι αποφάσεις ενός ζευγαριού. Είναι ένα συνεργατικό παίγνιο της μορφής 2x2 ταυτόχρονων κινήσεων όπου ο ένας παίκτης ξέρει τις κινήσεις του άλλου παίκτη. Το ζευγάρι πρέπει να αποφασίσει τι θα κάνει το απόγευμα δεδομένης της κατάστασης ότι θα ήθελαν να περάσουν χρόνο μαζί και όχι ο καθένας μόνος του.

1.1.1 Παράδειγμα «Η Μάχη των Φύλων» -"Battle of Sexes"

Στο παράδειγμα που δίνεται παρακάτω οι επιλογές που έχει το ζευγάρι είναι να δουν ένα ποδοσφαιρικό αγώνα ή να πάνε θέατρο. Το ζευγάρι πρέπει να συνεργαστεί εφόσον θέλουν να περάσουν χρόνο μαζί, αν και έχουν διαφορετικές προτιμήσεις αποφασίζουν να συνεργαστούν από κοινού γνωρίζοντας ο ένας την στρατηγική του άλλου προκειμένου να μεγιστοποιήσουν το όφελός τους που είναι η από κοινού επίτευξη του στόχου τους, να είναι μαζί. Συνήθως σε τέτοιου είδους παίγνια σημαντικό ρόλο παίζει ποιος θα κάνει την πρώτη κίνηση για το τι θα κάνουν και πότε θα το ανακοινώσει και η αποδοχή από τον άλλο, μιας και είναι συνεργατικής μορφής. Δεν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική για κανέναν από τους δύο παίκτες, υπάρχει όμως *ισορροπία Nash* όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα *[Πίνακας 1]* στα σημεία (Α1,Γ1)=(2,1) δηλαδή 1η σειρά με 1η στήλη και (Γ2,Α2) =(1,2) δηλαδή 2η στήλη με 2η σειρά, ένα ζευγάρι τυχαίων στρατηγικών τέτοιο ώστε η στρατηγική του παίκτη γραμμών να είναι η καλύτερη επιθυμητή λύση στην στρατηγική του άλλου παίκτη και αντιστρόφως Κανένας από τους δύο δεν έχει κίνητρο να επιλέξει κάτι άλλο και συνήθως σε τέτοιου είδους παραδείγματα η λογική υποδεικνύει ότι θα έχει προηγηθεί συζήτηση και θα γνωρίζει ο ένας τις επιθυμίες του άλλου.

	Γυναίκα	
Άντρας		
	Ποδοσφαιρικός Αγώνας (Γ1)	*Θέατρο (Γ2)*
Ποδοσφαιρικός Αγώνας (Α1)	*2,1*	*0,0*
Θέατρο (Α2)	*0,0*	*1,2*

Πίνακας 1

Πίνακας όπου εμφανίζεται το σημείο ισορροπίας Nash στο παίγνιο «Μάχη των Φύλων

1.2 Αλγοριθμική θεωρία παιγνίων

Η Αλγοριθμική Θεωρία παιγνίων είναι η θεωρία μελέτης και ανάλυσης παιγνίων που έχουν εφαρμογές σε πολλούς τομείς της καθημερινής ζωής μέσα από το πρίσμα της επιστήμης της Πληροφορικής. Ο συνδυασμός της θεωρίας παιγνίων που προσεγγίζει την συστηματική μελέτη ενός προβλήματος με όφελος το μέγιστο κέρδος και οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται για υπολογιστικές ισορροπίες οδηγούν στην επίλυση προβλημάτων σε σύντομο χρονικό διάστημα και σε καλύτερες δυνατές, πιο συμφέρουσες λύσεις, διαμορφώνουν την Αλγοριθμική Θεωρία παιγνίων [48, Foreword].

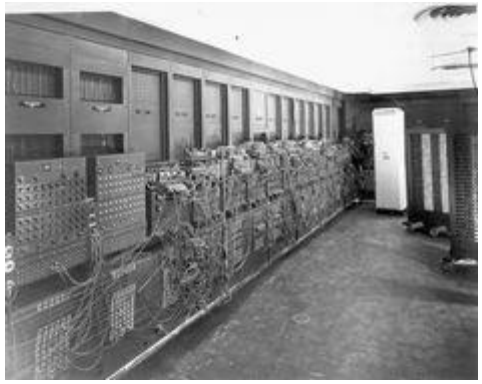
1.3 John Von Neumann

Μαθηματικός του 20ου αιώνα [53, Article] ο οποίος απέδειξε το 1928 [42, Κεφάλαιο 4.1] το θεώρημα ελαχιστοποίησης του μεγίστου *(Θεώρημα Minimax)* [2, Introduction] μέσα από ένα παράδειγμα βασισμένο σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με τέλεια πληροφόρηση. Στα παίγνια αυτού του τύπου ο κάθε παίκτης γνωρίζει τις κινήσεις στις οποίες έχουν προβεί οι άλλοι παίκτες προτού αποφασίσει για τις δικές του κινήσεις, μέχρι και την ώρα που θα αποφασίσει να ακολουθήσει την δική του στρατηγική. Υπάρχει ένα σύνολο κινήσεων που μπορούν να επιλέξουν οι παίκτες το οποίο τους δίνει την δυνατότητα να ελαχιστοποιούν τις μέγιστες απώλειές τους. Το *Θεώρημα Minimax* αποδεικνύει ότι και οι δυο παίκτες μπορούν να επιλέξουν στρατηγικές που εγγυώνται τις τιμές του παιχνιδιού βάσει πιθανοτήτων, δηλαδή μιας μικτής στρατηγικής όπου περιλαμβάνει ένα συνδυασμό επιλογών και από τον συνδυασμό αυτό επιλέγεται μια τουλάχιστον στρατηγική η οποία αποτελείται από μη ακέραιες τιμές.

Ο *John Von Neumann* [53, Article] ανέπτυξε μαθηματικές τεχνικές προσαρμοσμένες στα «Φαινόμενα των Κβάντα» , εισήγαγε την « Θεωρία των Κύκλων των χειριστών » (1929-1940). Στο διάστημα 1935 έως 1937 εργάστηκε στην «Θεωρία Πλέγματος» *(lattice theory)* ενώ το 1932 με την διάλεξή του *"On Certain Equations of Economics and a Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem"*, η οποία εκδόθηκε το 1937, επηρέασε τον γραμμικό και μη γραμμικό προγραμματισμό.

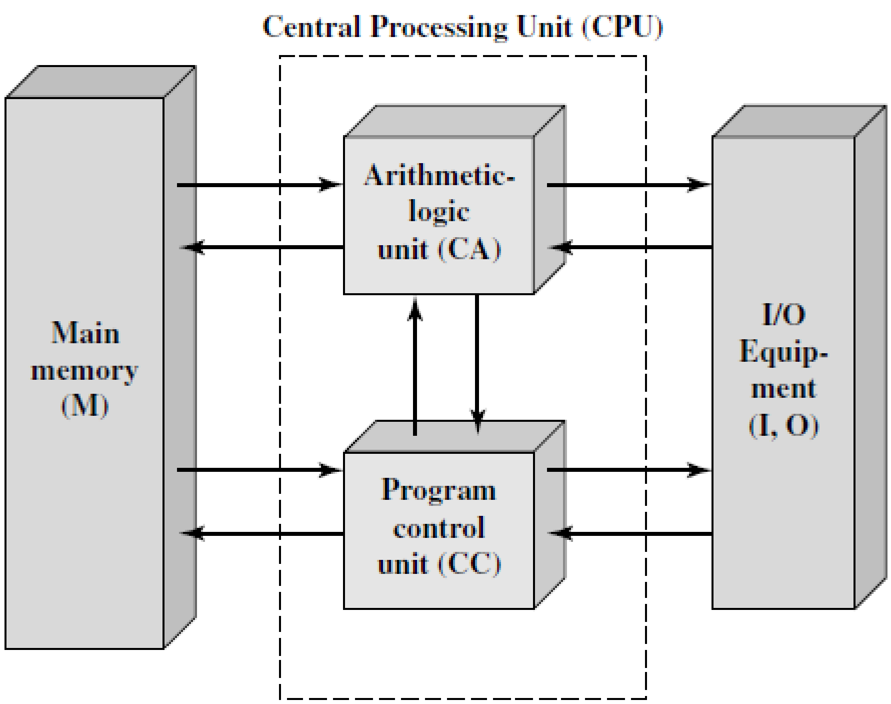
Ως ειδήμων στην Γραμμική Φυσική της υδροδυναμικής και της κυματικής δόνησης (wave shock) ανέπτυξε για λογαριασμό των Βρετανών χημικά εκρηκτικά για τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο, ενώ συνέβαλε στο Manhattan Project [79], ένα πρόγραμμα έρευνας γα την δημιουργία της Ατομικής βόμβας, υπό την επίβλεψη των Ηνωμένων Πολιτειών και την υποστήριξη του Ηνωμένου Βασιλείου και του Καναδά, ύστερα από πρόσκληση του Robert Oppenheimer [80], του Αμερικανού θεωρητικού φυσικού και καθηγητή φυσικής στο University of California, Berkeley .

Μεταπολεμικά ο *John Von Neumann* προσέφερε τις γνώσεις του σε εφαρμογές του στρατού των Ηνωμένων Πολιτειών και συνεισφέροντας με τις ιδέες του στον ήδη σχεδιασμένο υπολογιστή *ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer - Ηλεκτρονικός αριθμητικός ολοκληρωτής και υπολογιστής)* [26, Article] - ο πρώτος ηλεκτρονικός υπολογιστής γενικής χρήσης που εγκαινιάστηκε επίσημα 15 Φλεβάρη 1946 στο Πανεπιστήμιο Πενσυλβανία στη Φιλαδέλφεια των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής- τον τροποποίησε σε μηχανή για αποθήκευση προγράμματος *(Εικόνα 1)*.



Εικόνα 1: *ENIAC*

Χρησιμοποίησε δυαδικό σύστημα αρίθμησης (Binary Arithmetic) στον υπολογιστή *IAS (Institute for Advanced Study)*– ο υπολογιστής *IAS* *(Εικόνα 2)* αποτελεί το πρωτότυπο των επόμενων υπολογιστών γενικής χρήσης που ακολούθησαν και γίνεται αναφορά στις *Σημειώσεις του Μαθήματος*: *Αρχιτεκτονική Υπολογιστών Ι* [36, Κεφάλαιο 3.1] - και κοινή μνήμη για κώδικα και στοιχεία.



Εικόνα 2: *Δομή του υπολογιστή IAS*

1.4 Εγωιστική Συμπεριφορά

Στην Θεωρία παιγνίων παρατηρείται το φαινόμενο της εγωιστικής συμπεριφοράς από τους συμμετέχοντες στα παίγνια καθώς το βέλτιστο για το άτομο που συνεπάγεται την ατομική του ευημερία και το βέλτιστο για την κοινωνία που αποσκοπεί στο γενικό καλό, πολλές φορές δεν συμβαδίζουν όπως φαίνεται και μέσα από το παράδειγμα στο βίντεο που ακολουθεί με το παίγνιο το Δίλημμα του Φυλακισμένου [6]. Η Θεωρία παιγνίων ασχολείται με την μελέτη και την κατανόηση καταστάσεων ανταγωνιστικής και εγωιστικής αλληλεξάρτησης κατά τη διάρκεια λήψης αποφάσεων μεταξύ διαφορετικών μερών στο πλαίσιο ανταγωνισμού ή συνεργασίας. Οι παίκτες αποφασίζουν ποιες κινήσεις θα ακολουθήσουν, ποια στρατηγική θα εφαρμόσουν σκεπτόμενοι το ατομικό τους συμφέρον και όχι το συνολικό καλό και παρατηρώντας τις κινήσεις στις οποίες θα προβούν οι άλλοι παίκτες. Πολύ συχνά σε πολύ απλά παίγνια όπως το Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί [60, Chapter 8, Example 8.2] παρατηρείται ότι δεν έχουν *Αγνή Nash Ισορροπία* και δεν μπορούμε να μελετήσουμε την εγωιστική συμπεριφορά.

1.5 Παίγνιο

Ένα παίγνιο ορίζεται ως η διαδικασία ανταγωνισμού και αλληλεπίδρασης που διεξάγεται βάσει ενός προκαθορισμένου συνόλου κανόνων [23, Ορισμός Παίγνιο]. Είναι το περιβάλλον λήψης αποφάσεων, όταν δηλαδή υπάρχουν δύο ή περισσότεροι άνθρωποι που παίρνουν αποφάσεις δημιουργώντας καταστάσεις ανταγωνιστικών αλληλεξαρτήσεων που αποσκοπούν στην μεγιστοποίηση των προσωπικών τους στόχων, περιγράφεται μια κατάσταση όπου οι έξυπνες αποφάσεις είναι αναγκαστικά αλληλεξαρτώμενες.

Είναι μια κατάσταση όπου:
N (>1) άτομα προβαίνουν σε κάποιες επιλογές με απώτερο στόχο ο καθένας να ικανοποιήσει το συμφέρον του και το αποτέλεσμα για κάθε παίχτη δεν εξαρτάται μόνο από τις κινήσεις, από τις αποφάσεις που παίρνει μόνο αυτός για την μεγιστοποίηση του κέρδους του αλλά και από τις αποφάσεις στις οποίες καταλήγουν και οι υπόλοιποι *N-1* παίκτες. Αποτελείται από ένα σύνολο παιχτών, ένα σύνολο κινήσεων ή στρατηγικών που είναι διαθέσιμες στους παίχτες και μια προδιαγραφή κέρδους , απόδοσης για κάθε συνδυασμό στρατηγικών. Κάθε άτομο επηρεάζει με

την συμπεριφορά του και την στρατηγική του και αντίστοιχα δέχεται επιρροές και από τον άλλο παίκτη. Δυο βασικές προϋποθέσεις είναι ότι οι παίχτες βασίζονται στην λογική και την νόηση με στόχο να αυξήσουν το δικό τους όφελος [44, Κεφάλαιο 1.1]. Οι παίκτες καλούνται να αποφασίσουν σε συνθήκες συναγωνισμού/ανταγωνισμού έχοντας υπόψη τις πιθανές κινήσεις των αντιπάλων [23, Κεφάλαιο Θεωρία Παιγνίων].

Ένα παίγνιο μπορεί να περιγραφεί ως *κανονική (normal)* [42, Ενότητα Παίγνιο σε κανονική μορφή] ή *στρατηγική (strategic)* μορφή [64, Κεφάλαιο 4.2.4] όπου μέσω ενός πίνακα αποτυπώνεται ο συσχετισμός των στρατηγικών που εφαρμόζουν οι παίκτες και οι αποδόσεις που θα προκύψουν.

Ένα στρατηγικό παίγνιο είναι ένα μαθηματικό μοντέλο όπου αποτελείται από ένα σύνολο παικτών, έστω N παίκτες, καθένας από τους οποίους διαλέγει μόνο μία στρατηγική, η οποία δεν αλλάζει.

Σε ένα στρατηγικό παιχνίδι υπάρχουν διάφορες συμπεριφορές παικτών όπως:

Α) Το παιχνίδι παίζεται μόνο μία φορά

Β) Ο κάθε παίκτης γνωρίζει όλες τις κινήσεις και τις αποδόσεις του παιχνιδιού

Γ) Οι παίκτες είναι ορθολογικοί. Ένας ορθολογικός παίκτης είναι ένας παίκτης που παίζει εγωιστικά, θέλοντας να μμεγιστοποιήσει το κέρδος του στο παιχνίδι, ενώ ταυτόχρονα γνωρίζει πως και οι αντίπαλοι του είναι ορθολογιστές

Δ) Όλοι οι παίκτες επιλέγουν τις κινήσεις τους την ίδια στιγμή χωρίς όμως να γνωρίζουν τις επιλογές των άλλων παικτών.

Τα παίγνια με κανονική μορφή απεικονίζονται με την μορφή πίνακα που δείχνει τους παίκτες, τις στρατηγικές που ακολουθούν και τις απολαβές που προκύπτουν, στις γραμμές απεικονίζονται οι στρατηγικές που παίζει ο παίκτης γραμμών και στις στήλες εμφανίζονται οι στρατηγικές που παίζει ο παίκτης στηλών. Ένα παίγνιο κανονικής μορφής [40, Ορισμός Παιγνίου σε κανονική μορφή], αποτελείται από ένα σύνολο παικτών έστω $S=\{1,2,\ldots,n\}$ όπου για κάθε παίκτη υπάρχει ένα σύνολο διαθέσιμων στρατηγικών και μια συνάρτηση ωφέλειας όπως περιγράφεται και στην *διάλεξη* που αναφέρεται στις *Έννοιες λύσεων και απλοποιήσεις παιγνίων*. Στα κελιά του πίνακα εμφανίζονται οι συνδυασμοί των αμοιβών των παικτών, τα ζεύγη των αμοιβών των παικτών ανάλογα με το προφίλ των στρατηγικών τους. Η πρώτη τιμή αντιστοιχεί στον παίκτη γραμμών και η δεύτερη στον παίκτη στηλών. Σε κάθε γραμμή υπάρχει η στρατηγική του Παίκτη Ι και σε κάθε στήλη η στρατηγική του Παίκτη ΙΙ. Γενικά μπορούμε να πούμε ότι έχει την μορφή μιας συνάρτησης που συνδέει τις απολαβές που προκύπτουν για κάθε παίκτη με κάθε δυνατό συνδυασμό κινήσεων που πραγματοποιεί.

1.6 Παίγνιο 2 παικτών - «Πέτρα –Ψαλίδι – Χαρτί»

1.6.1 Παίγνιο 2 παικτών

Όταν έχουμε παίγνια όπου συμμετέχουν δύο παίκτες, ονομάζονται «παίγνια δύο παικτών», δηλαδή *n=2* [66, Ορισμός Παίκτης], όπως αναφέρεται και στις *σημειώσεις* *Θεωρία Παιγνίων*. Η αναπαράσταση των παιγνίων γίνεται με την μορφή πίνακα, όπου σε κάθε γραμμή του πίνακα απεικονίζεται η στρατηγική του πρώτου παίκτη και σε κάθε στήλη η στρατηγική του δεύτερου παίκτη και ο κάθε παίκτης μπορεί να επιλέξει μεταξύ δυο στρατηγικών.

1.6.2 Παράδειγμα παιγνίου 2 παικτών

Στον παρακάτω πίνακα *[Πίνακας 2]* απεικονίζονται οι στρατηγικές για τον παίκτη *Α* οι οποίες είναι οι *Ζ* και *Ε* και για τον παίκτη *Β* είναι οι *Γ* και *Δ*. Έστω ότι ο παίκτης *Α* επιλέγει να παίξει την στρατηγική *Ζ* και ο παίκτης *Β* την στρατηγική *Γ* τότε το αποτέλεσμα για τον *Α* είναι 2 και για τον *Β* είναι 1, δηλαδή δημιουργείται το ζεύγος (*Ζ,Γ*) όπου το πρώτο στοιχείο είναι η στρατηγική του παίκτη Α και το δεύτερο στοιχείο είναι η στρατηγική του παίκτη *Β* [37, Διάλεξη 7].

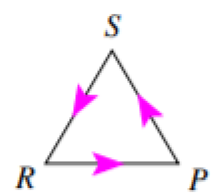
		Παίκτης Β	
Παίκτης Α		*Γ*	*Δ*
	Ε	(1,2)	(0,1)
	Ζ	(2,1)	(1,0)

Πίνακας 2

Πίνακας με τις στρατηγικές των παικτών σε ένα παίγνιο 2 παικτών

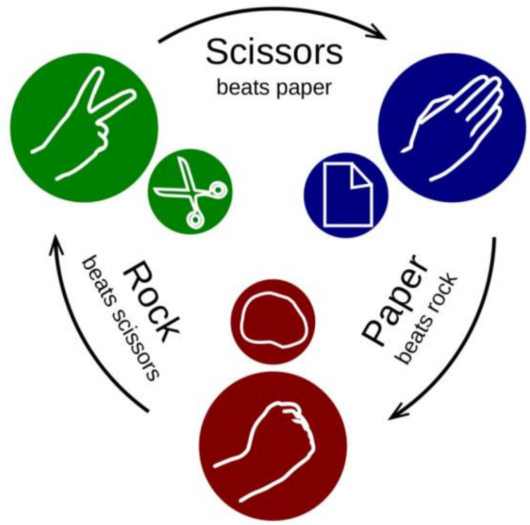
1.6.3 Παίγνιο Πέτρα –Ψαλίδι – Χαρτί

Το παίγνιο Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί είναι ένα παίγνιο που συγκαταλέγεται στα παίγνια της μορφής μηδενικού αθροίσματος όπως αναφέρεται και στο βίντεο [75] και στα οποία οι συμμετέχοντες (παίχτες) μπορούν να επιλέξουν την ίδια στιγμή ποια στρατηγική θα ακολουθήσουν από τις εξής τρεις : πέτρα, ψαλίδι ή χαρτί. Θεωρείται ότι έχει τις ρίζες του στην Κίνα και βασίζεται στην λογική των Κινέζων, στην μελέτη των στοιχείων του σύμπαντος και στην σχέση που έχουν με την δημιουργία του κόσμου και του σύμπαντος αντίστοιχα. Είναι ένα παιχνίδι κυκλικής κυριαρχίας που δεν είναι προσφιλές μόνο στα παιδιά αλλά έχει θεμελιώδη σημασία σαν πρότυπο μελέτης ενός παραδείγματος μιας μη συνεργατικής στρατηγικής αλληλεπίδρασης (*Εικόνα 3*).



Εικόνα 3*: Paper -Scissors – Rock*

Οι αποφάσεις των παικτών αποτυπώνονται σε έναν πίνακα πληρωμών. Οι παίκτες έχουν την δυνατότητα να επιλέξουν μια από τις εξής στρατηγικές: πέτρα (rock), ψαλίδι (scissor) ή χαρτί (paper) όπου η πέτρα συνθλίβει το ψαλίδι, το ψαλίδι έχει την ιδιότητα να κόβει το χαρτί και το χαρτί με την σειρά του να τυλίγει την πέτρα. Παρατηρείται μια διαδικασία κινήσεων μέσα από τις επιλεγμένες στρατηγικές του κάθε παίκτη ο οποίος έχει στην διάθεσή του το ίδιο σύνολο από δυνατές κινήσεις*)*. Είναι ένα παίγνιο όπου έχει εφαρμογές σε παιχνίδια στρατηγικής, στην βιολογία όπου χρησιμοποιείται στην περιγραφή ενός οικοσυστήματος και την συνύπαρξη των ειδών *(Εικόνα 4)*.



Εικόνα 4: *Η κυκλική αλληλεξάρτηση του παιγνίου Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί παρομοιάζεται με την αλληλεξάρτηση των ειδών σε οικοσύστημα*

Στον παρακάτω πίνακα *[Πίνακας 3]* στην μια στήλη είναι οι τρεις στρατηγικές του ενός παίκτη και στην γραμμή οι τρεις δυνατές κινήσεις που κάνει ο άλλος παίκτη. Έχουμε την περίπτωση όπου παρατηρείται ισορροπία, δηλαδή και οι δύο παίκτες έχουν κάνει την ίδια κίνηση και υπάρχει και η περίπτωση ένας από τους δύο να είναι ο είναι νικητής. Με την βοήθεια του πίνακα αποτυπώνεται η μαθηματική μοντελοποίηση των αμοιβών που προκύπτουν όταν ο κάθε παίκτης παίζει μια από τις τρεις στρατηγικές.

Στο παίγνιο Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί, δεν έχει αγνή *Nash* ισορροπία [58, Lecture 1], παρατηρείται μια μεικτή *Nash* ισορροπία, δηλαδή οι παίκτες παίζουν με μικρές πιθανότητες ένα μέρος ή όλες τις δυνατές στρατηγικές που έχουν, παίζουν ισοπίθανα και τις τρείς στρατηγικές και αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα αναμενόμενα κέρδη τους να είναι ίδια και να μην τους συμφέρει να αλλάξουν. Η προσαρμογή των παικτών στην προβλεπόμενη επιλογή στρατηγικής αποτελεί μια βασική συνισταμένη στην αλληλεπίδραση που υπάρχει μεταξύ των παικτών. Υπάρχουν όμως και φορές όπου οι συμμετέχοντες έχουν την τάση να επιλέγουν ενστικτωδώς μια προβλεπόμενη στρατηγική και οι αντίπαλοι προσέχουν μελετώντας τις πιθανότητες να επαναλάβει ο παίκτης μια ίδια κίνηση σύμφωνα με την οποία οι παίκτες επιδιώκουν την βελτιστοποίηση μέσα από την άμεση αλληλεπίδραση με το περιβάλλον στο οποίο βρίσκονται. Το παίγνιο Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί δεν έχει *Nash* ισορροπία.

			
	**0,0**	**-1,1**	**1-1**
	**1,-1**	**0,0**	**-1,1**
	**-1,1**	**1,-1**	**0,0**

Πίνακας 3

Πίνακας με τις στρατηγικές των παικτών στο παίγνιο Πέτρα - Ψαλίδι - Χαρτί

1.7 Αμοιβές

Η ποσοτική έκβαση της ωφέλειας που αντιστοιχεί στον παίκτη που προκύπτει από το παίγνιο. Θεωρείται η βέλτιστη στρατηγική όλων των παικτών [60, Chapter 8]. Ως παραδείγματα λύσης ή τιμή ενός παιγνίου θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν η χρηματική αξία ή τα έτη φυλάκισης που αναλογούν στο παίγνιο στρατηγικής μορφής και εξηγείται και στο παράδειγμα στο βίντεο *Το Δίλημμα του φυλακισμένου* [6]. Σε έναν πίνακα αμοιβών μπορούν να απεικονιστούν οι αμοιβές, το όφελος που αντιστοιχεί σε κάθε παίκτη ανάλογα με τις κινήσεις που έχει επιλέξει να παίξει. Οι συναρτήσεις πληρωμών αντιπροσωπεύουν τις προτιμήσεις του κάθε παίκτη ανάλογα με το προφίλ στρατηγικών που παίζει ο κάθε ένας.

1.8 Πίνακας – Διπίνακας (Bimatrix)

Με την βοήθεια ενός πίνακα [66, Ορισμός Πίνακας] απεικονίζονται τα αποτελέσματα του παιγνίου για κάθε συνδυασμό στρατηγικών. Στη Θεωρία παιγνίων ένα διπίνακας είναι ένα παίγνιο συμμετρικής μορφής που αποτελείται από δύο εμβαπτισμένους παίκτες όπου ο κάθε παίκτης έχει έναν πεπερασμένο αριθμό πιθανών κινήσεων που μπορεί να ακολουθήσει. Στην ουσία είναι δύο πίνακες όπου εμφανίζονται σε έναν, δηλαδή σε κάθε κελί εμφανίζονται δύο τιμές όπου η πρώτη τιμή, σε κάθε κελί είναι για τον παίκτη τιμών και η δεύτερη τιμή για τον παίκτη στηλών, οι τιμές αμοιβών αντίστοιχα για τους δύο παίκτες [48, Κεφάλαιο 3.2]. Ένα παίγνιο δύο ατόμων μπορεί να απεικονισθεί σαν έναν πίνακα καθορισμένων συνόλων. Το πρώτο στοιχείο από κάθε ζεύγος δείχνει τις απολαβές του 1ου παίκτη και αντίστοιχα το δεύτερο στοιχείο τις απολαβές του 2ου παίκτη. Ο κάθε πίνακας αποτελείται από τόσες σειρές όσες και οι αγνές στρατηγικές του 1^{ου} παίκτη και τόσες στήλες όσες οι αγνές στρατηγικές του 2^{ου} παίκτη.

1.9 Στρατηγική

Στρατηγική *(strategy)* ενός παίκτη είναι το σύνολο των κανόνων οι οποίοι καθορίζουν ποιες από τις επιλογές που θα αποφασίσει ο παίκτης να ακολουθήσει [66, Ορισμός Στρατηγική], είναι αυτές που θα τον οδηγήσουν στο τέλος έχοντας συνυπολογίσει και τις κινήσεις του εκάστοτε παίκτη. Ο κάθε παίκτης επιλέγει ένα σύνολο πιθανών στρατηγικών το οποίο καθορίζεται από το σύνολο των παικτών, την συχνότητα της συνολικής στρατηγικής του κάθε παίχτη και την συχνότητα της πραγματικής αξίας της απόδοσης των συναρτήσεων των παιχτών.

Μια στρατηγική ονομάζεται *κυρίαρχη (Dominant)* [59] όταν η τιμή του αποτελέσματος για τον συγκεκριμένο παίκτη είναι μεγαλύτερη (βέλτιστη) από όλες τις τιμές στην ίδια γραμμή και την ίδια στήλη του πίνακα των συνδυασμένων επιλογών. Η καλύτερη δυνατή στρατηγική ενός παίκτη δεν εξαρτάται από τις στρατηγικές των άλλων παικτών, θεωρείται κυρίαρχη όταν για όλους τους συνδυασμούς στρατηγικών των άλλων παικτών έχει το μεγαλύτερο όφελος σε σχέση με τις υπόλοιπες. Ενώ μια στρατηγική θεωρείται *κυριαρχούμενη (Dominated Strategy)* [59] όταν πάντα υπάρχει μια στρατηγική που είναι καλύτερη ανεξάρτητα από τις αποφάσεις και επιλογές που θα κάνει ο άλλος παίκτης, συνεπώς ο παίκτης δε θα επιλέξει την κυριαρχούμενη στρατηγική.

1.10 Προφίλ στρατηγικών

Με τον όρο προφίλ στρατηγικών ορίζεται ο συνδυασμός στρατηγικών που επιλέγει να παίξει ο κάθε παίκτης [41, Ενότητα: Σημεία ισορροπίας σε μεικτές στρατηγικές], ένα διάνυσμα που δηλώνει την στρατηγική του κάθε παίκτη και καθορίζει την έκβαση του παιγνίου και την ωφέλεια που προκύπτει για τον παίκτη που συμμετέχει στο παίγνιο και έχει κίνητρο να αλλάξει τον τρόπο που παίζει με στόχο την μεγιστοποίηση του κέρδους ή την ελαχιστοποίηση της ζημιάς που προκύπτει. Το σύνολο των κινήσεων, οι πιθανοί συνδυασμοί που επιλέγει ο κάθε παίκτης να εφαρμόσει με στόχο την μεγιστοποίηση της προσωπικής του ωφέλειας ή την ελαχιστοποίηση της ζημιάς χαρακτηρίζεται ως προφίλ στρατηγικών.

1.11 Βέλτιστη Απόκριση

Ως Βέλτιστη Απόκριση *(Best Response)* στην Θεωρία Παιγνίων, ορίζεται η στρατηγική ενός παίκτη που του αποδίδει το ευνοϊκότερο αποτέλεσμα ενώ θεωρεί δεδομένες τις στρατηγικές των άλλων παικτών. Ο παίκτης που ακολουθεί στρατηγική Βέλτιστης Απόκρισης έχει συμφέρον αυτή η στρατηγική του να αποτελεί Αγνή Nash Ισορροπία ώστε οι υπόλοιποι παίκτες να μην έχουν λόγο να αλλάξουν επιλογή [58, Chapter 4].

1.12 Αναμενόμενο κέρδος

Το αναμενόμενο κέρδος είναι το εκτιμώμενο κέρδος ή η εκτιμώμενη χασούρα που προκύπτει σε ένα παίγνιο όταν έχουν παίξει οι παίκτες το προφίλ μικτών στρατηγικών τους και αναλύεται μέσα από το βίντεο [70] όπου αναφέρεται σε ένα παράδειγμα που έχει σχέση με τα τυχερά παιχνίδια, έχοντας ως στόχο την μεγιστοποίηση του κέρδους [17, Ορισμός Αναμενόμενο κέρδος].

1.13 Αγνή Στρατηγική

Με τον όρο Αγνή στρατηγική ορίζεται η στρατηγική εκείνη, στην οποία κάθε παίκτης επιλέγει μια μόνο από τις δυνατές στρατηγικές του στο ακέραιο, δηλαδή με πιθανότητα ίση με την μονάδα, ενώ δεν επιλέγει καμιά από της υπόλοιπες, δηλαδή αν έχει δύο στρατηγικές θα επιλέξει να ακολουθήσει την μία ή την άλλη στρατηγική [41, Ενότητα: Αμιγείς και μεικτές στρατηγικές]. Στην αγνή στρατηγική ο παίκτης επιλέγει να παίζει κάθε φορά την ίδια στρατηγική [3, Ορισμός: Αμιγής Ισορροπία Nash].

1.14 Μεικτή Στρατηγική

Περιλαμβάνει συνδυασμό στρατηγικών οι οποίες επιλέγονται με πιθανότητα μικρότερη της μονάδας, δηλαδή αν ένας παίκτης έχει δυο στρατηγικές μπορεί να εφαρμόσει την μια στρατηγική κατά 60% και την άλλη κατά 40%. Οι μικτές στρατηγικές καθορίζουν ότι η στρατηγική που θα επιλέξει να εφαρμόσει ο παίκτης θα επιλεγεί τυχαία από το σύνολο των αγνών στρατηγικών που έχει, με κάποια πιθανότητα [40 Ορισμός Μεικτές στρατηγικές], δηλαδή στρατηγικές όπου ο κάθε παίκτης παίζει με πιθανότητες κάθε μια γραμμή ή στήλη να έχει άθροισμα (1) ένα, δηλαδή ονομάζεται η στρατηγική ενός παίκτη που χρησιμοποιεί κάθε επιλογή του βάσει ενός ποσοστού πιθανότητας με στόχο να πετύχει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος, με στόχο να μην είναι προβλέψιμος [76, Abstract]. Στην μεικτή στρατηγική κανένας από τους συμμετέχοντες δεν επιθυμεί μονομερώς να αλλάξει την μεικτή στρατηγική του γιατί αν μονομερώς αλλάξει θα έχει μικρότερο αναμενόμενο κέρδος. 49

Με την μεικτή στρατηγική πετυχαίνει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος. Όταν οι παίκτες αποφασίζουν να παίξουν με μεικτές στρατηγικές [49, Chapter 8 Mixed Strategies] δηλαδή με κάποιες πιθανότητες τότε ισορροπείται η κατάσταση σε διάφορα παίγνια όπως στο Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί , δηλαδή παίζουν ισοπίθανα, κανένας από τους δύο παίκτες δεν μπορεί να προβλέψει, να καταλάβει τι θα παίξει ο συμπαίκτης του, προκύπτει ένας συμμετρικός πίνακας, υπάρχει ίδιο πλήθος ισοβαρών αποτελεσμάτων, δηλαδή ένα παράδειγμα μεικτής στρατηγικής με την μορφή ενός παιγνίου σε διπίνακα *(Α,Β)* που αποτελείται από:

ένα διάνυσμα *x m-διαστάσεων*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

, όπου $\sum_{i=1}^{m} xi = 1$, $x_i \geq 0 \ \forall_i = 1\ldots,m$

Εικόνα 5: *Διάνυσμα x m-διαστάσεων* και ένα διάνυσμα *y n-διαστάσεων*

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

, όπου $\sum_{j=1}^{n} yi = 1$, $y_i \geq 0$ $\forall_y = 1,\ldots,n$

Εικόνα 6: *Διάνυσμα y n-διαστάσεων*

Επομένως μια μεικτή στρατηγική είναι μια ομαδοποίηση καθαρών στρατηγικών κατανεμημένες σε πιθανότητες, μια κατανομή πιθανότητας στο σύνολο των διαθέσιμων στρατηγικών που έχει ο παίκτης, αναφέρεται και στην *διάλεξη* που γίνεται αναφορά στις *Μεικτές Στρατηγικές* [41, Ορισμός Μεικτές Στρατηγικές].

1.15 Μεικτή Ισορροπία Nash

Στην μεικτή ισορροπία κατά Nash υπάρχει τουλάχιστον ένας παίκτης που επιλέγει να παίξει μια τυχαία επιλογή και κανένας άλλος παίκτης δεν έχει την δυνατότητα να αυξήσει το αναμενόμενο κέρδος του επιλέγοντας να παίξει κάποια άλλη, εναλλακτική στρατηγική. Μέσα από το παρακάτω βίντεο [38] όπου αναφέρεται στο παίγνιο *Η Μάχη των Φύλων* παρουσιάζεται πως υπολογίζεται η Μεικτή Ισορροπία *Nash*. Οι παίκτες δηλαδή παίζουν με πιθανότητες , θέλουν να βρουν ένα προφίλ στρατηγικών, δηλαδή παίζουν μεικτές στρατηγικές και κανένας από τους δύο παίκτες δεν θέλει να αλλάξει μονομερώς την στρατηγική του. Σε παίγνια όπου ο κάθε παίκτης έχει πεπερασμένο αριθμό κινήσεων και υπάρχει μεικτή ισορροπία κατά Nash, παρατηρείται η συνθήκη της καμπύλης αδιαφορίας [49, Chapter 3 Definition Indifference Curve] δηλαδή υπάρχει ένα σύνολο συνδυασμών-γεωμετρικός τόπος σημείων (ποσοστά μοιρασμένα μεταξύ των επιλογών «καταναλωτή» - εδώ παίκτη) για το οποίο ο παίκτης λαμβάνει την ίδια συνολική ικανοποίηση από κάθε συνδυασμό (άθροισμα δυο τιμών, π.χ. μεταβλητών Χ και Ψ) - σημείο της καμπύλης, ώστε να είναι αδιάφορος για αλλαγή επιλογής συνδυασμού επί της καμπύλης παρατηρείται μια συμμετρική ισορροπία και ένα παράδειγμα τέτοιου παιγνίου είναι το παίγνιο *Matching Pennies* όπου επιλέγεται μια τυχαία στρατηγική [49, Chapter 8 Mixed

Strategies] ή και μεικτή ώστε να αποφευχθεί το φαινόμενο της εκμετάλλευσης των παικτών [62, Chapter Mixed Strategies]. Στο συμμετρικό παίγνιο *Matching Pennies* *(Εικόνα 7)* ένας εκ των δύο παικτών παίζει την επιλογή *"heads"* με πιθανότητα 60% και την έταιρη επιλογή *"tails"* με ποσοστό 40%.Το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των επιλογών του ίδιου παίκτη, σε αυτό το παίγνιο, ισούται με 1.

		Player 2	
		Heads	Tails
Player 1	Heads	1,-1	-1,1
	Tails	-1,1	1,-1

***Εικόνα** 7*: Πίνακας όπου εμφανίζονται οι στρατηγικές των παικτών στο παίγνιο *matching pennies*

Η τυχαία αυτή επιλογή απαιτεί ίση κατανομή του αναμενόμενου κέρδους έτσι ώστε ο παίκτης τυχαία να παίξει μια από τις δύο στρατηγικές *Α ή Β* που θα του αποφέρουν το ίδιο επιθυμητό κέρδος, διαφορετικά ο παίκτης θα καταλήξει να παίξει μια μόνο από τις δύο στρατηγικές.

1.16 Παίγνιο μηδενικού Αθροίσματος

Ένα παιχνίδι ορίζεται ως μηδενικού αθροίσματος (zero-sum) όταν το άθροισμα της απόδοσης (pay-off) σε συνάρτηση με τους παίχτες είναι μηδέν ανεξάρτητα από τις ενέργειες που επιλέγονται από τους παίκτες. Μια ιδιότητα των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος είναι ότι οι αντίστοιχες τιμές των κελιών είναι αντίθετες και το αποτέλεσμα που θα προκύψει από την πρόσθεση των δύο πινάκων θα είναι ίσο με το μηδέν. Στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος η ωφέλεια που έχει ο ένας παίκτη είναι ίση με την απώλεια του άλλου [24, Part II] ή αλλιώς τα κέρδη του ενός παίκτη αποτελούν ζημίες για τον άλλο παίκτη, είναι τα παίγνια όπου ο ένας παίκτης κερδίζει και ο άλλος χάνει.

Στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος :

Α) Οι δύο παίκτες σκέφτονται ορθολογικά [66, Ορισμός Παίκτης] όπως αναφέρεται και στην *σημειώσεις* όπου αναλύονται έννοιες που σχετίζονται με την Θεωρία παιγνίων και επιλέγουν τις στρατηγικές τους με αποκλειστικό στόχο τη δική τους ευημερία βάσει των στοιχείων του πίνακα, δεν αντιδρούν συναισθηματικά

Β) Οι παίκτες γνωρίζουν την κατανομή, την μορφή του πίνακα πληρωμών και ξέρουν ότι και οι αντίπαλοί τους γνωρίζουν τη δομή αυτή. Οι παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα το προφίλ κινήσεων που θα εφαρμόσουν, χωρίς να επικοινωνούν μεταξύ τους και χωρίς να έχουν ενημερωθεί εκ των προτέρων για την επιλογή του αντιπάλου τους.

1.16.1 Παράδειγμα Παιγνίου 2 παικτών Μηδενικού Αθροίσματος

Σε ένα παίγνιο 2 παικτών μηδενικού αθροίσματος ο κάθε παίκτης έχει δύο στρατηγικές, όπως παρουσιάζονται και στον *Πίνακα 4* [28, Θεωρία Παιγνίων Μέρος Α'] και στο βίντεο, ο πρώτος παίκτης ο Α έχει τις A_1 και A_2 και ο δεύτερος παίκτης ο Β τις B_1 και B_2. Οι τιμές του πίνακα αντιπροσωπεύουν το κέρδος του παίκτη Α και αντίστοιχα την ζημιά του παίκτη Β, δηλαδή όταν ο παίκτης Α έχει κέρδος που ισούται με 8 ο παίκτης Β έχει απώλεια ίση με -8 δηλαδή 8-8=0 άρα προκύπτει το παίγνιο μηδενικού αθροίσματος, δηλαδή η αμοιβή, το κέρδος του ενός παίκτη ισούται με την ζημιά του άλλου παίκτη. Όπως και αν επιλέξει ο παίκτης Β την τιμή -4 , έχει κέρδος 4 και ο παίκτης Α ζημία 4, άρα 4-4=0.

	Στρατηγικές Β	
Στρατηγικές Α	B_1	B_2
A_1	8	-4
A_2	6	5

Πίνακας 4

Πίνακας παιγνίου 2 παικτών μηδενικού αθροίσματος

Γενικά τα παίγνια *2* παικτών απαρτίζονται από τον παίκτη σειράς-γραμμής *(Row player)* που ακολουθεί *m* στρατηγική και τον παίκτη στήλης *(Column player)* που ακολουθεί *n* στρατηγική, δηλαδή μια στρατηγική που ισούται με το διάνυσμα της πιθανότητας των αγνών στρατηγικών. Ένα παίγνιο *2 παικτών* είναι ένα σύνολο αριθμητικών τιμών (R,C) που απεικονίζονται σε πίνακες $m \times n$ και για να θεωρείται μηδενικού αθροίσματος θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη $R=-C$.

Στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος μπορούμε εύκολα και γρήγορα να βρούμε την *μεικτή Nash ισορροπία* με την επίλυση δυο διαδοχικών γραμμικών προγραμμάτων για τους δύο παίκτες.

Όταν έχουμε αγνή ισορροπία *Nash* ο παίκτης δεν μπορεί μονομερώς να αυξήσει το κέρδος παρά μόνο αν αλλάξει και ο άλλος παίκτης την στρατηγική του. Σε αγνή *Nash* ισορροπία καταλήγουν επίσης οι παίκτες όταν επιλέγουν να εφαρμόσουν στρατηγικές που δεν προκύπτουν βάσει εγωιστικών κριτηρίων με αποτέλεσμα να μην αυξάνεται το κοινωνικό κόστος. Η συνεργασία και ο αλτρουισμός είναι χαρακτηριστικά μια ευνοϊκής στρατηγικής. Ο παίκτης παίζει μόνιμα μια συγκεκριμένη στρατηγική. Παραδείγματα που βοηθούν στην κατανόηση αυτής της λογικής είναι παίγνια στα οποία εμπλέκονται δυο παίκτες, ο καθένας εκ των οποίων έχει δυο διαθέσιμες κινήσεις τις οποίους χαρακτηρίζουμε *A* και *B.* Αν οι παίκτες διαλέξουν διαφορετικές κινήσεις , ο κάθε ένας θα έχει κέρδος μηδέν, αν επιλέξουν και οι δυο την κίνηση *A* παίρνουν κέρδος δυο ενώ αν επιλέξουν την κίνηση *B* θα έχουν όφελος ένα όπως απεικονίζεται και στον *Πίνακα 5*.

	A	*B*
A	(2,2)	(0,0)
B	(0,0)	(1,1)

Πίνακας 5

Παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με τις στρατηγικές των παικτών A και B

Το προφίλ κινήσεων *(B,B)* αποτελεί μια συνθήκη ισορροπίας δεδομένου ότι μια μονομερής απόκλιση στο A από τον κάθε παίκτη θα είχε ως αποτέλεσμα μικρότερη απολαβή για τον παίκτη που αποκλίνει. Το ίδιο ισχύει για το προφίλ κινήσεων *(A,A)* το οποίο είναι επίσης ισορροπία [16, Nash Equilibrium].

1.17 Παίκτης

Σε κάθε παίγνιο υπάρχουν περισσότεροι από έναν παίκτες που λαμβάνουν αποφάσεις ***(decision makers)*** [51, Chapter 1.1]. Οι ομάδες ή οι μονάδες που παίρνουν τις αποφάσεις ονομάζονται παίκτες *(players)*. Οι παίκτες θεωρείται ότι έχουν λογική συμπεριφορά *(rational behavior)*. Οι ***Rational Decision Makers*** [23, Ορισμός Ορθολογική Επιλογή] είναι οντότητες-παίκτες (άνθρωποι ή οτιδήποτε άλλο) που συμμετέχουν στο παίγνιο και επιδιώκουν να λάβουν την βέλτιστη (δηλαδή την πλέον συμφέρουσα για αυτούς) απόφαση σύμφωνα με τις προτιμήσεις που εξαρχής έχουν διαμορφώσει.

2

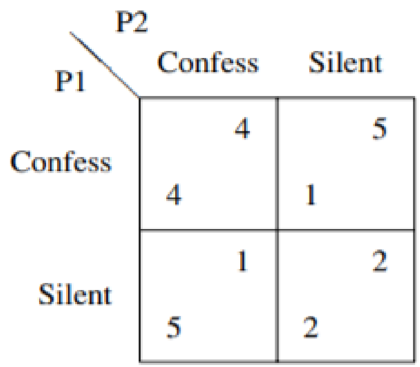
2η Διάλεξη 23/10/2019

2.1 Το Δίλημμα του φυλακισμένου Prisoners' Dilemma

Το δίλημμα του φυλακισμένου θεωρείται ένα από τα πιο γνωστά παίγνια στρατηγικής μορφής. Το όνομά του προέρχεται από μια ιστορία που εμπλέκει [54, Chapter 2.1] υπόπτους σε ένα έγκλημα όπως γίνεται αναφορά και στο σύγγραμμα *Theory Of Games: An Introduction*. Μπορούν να επιλέξουν να ομολογήσουν ή να παραμείνουν σιωπηλοί. Υπάρχουν αρκετά στοιχεία για να καταδικαστεί ο κάθε ένας από τους δύο ενόχους για το μικρότερο παράπτωμα, αδίκημα που έχει διαπράξει αλλά όχι τόσα πολλά για να καταδικαστεί ο οποιοσδήποτε από τους δυο για μεγαλύτερη παράβαση στην οποία έχει υποπέσει αν ο ένας δεν παίξει το ρόλο του πληροφοριοδότη εναντίον του άλλου. Αν και οι δύο παραμείνουν σιωπηλοί, τότε ο καθένας θα καταδικαστεί με την μικρότερη ποινή και θα περάσει ένα χρόνο στη φυλακή. Υπάρχει όμως και η πιθανότητα ο ένας μόνο να καρφώσει τον άλλο με αποτέλεσμα να κερδίσει την ελευθερία του, να χρησιμοποιηθεί σαν μάρτυρας εναντίον του άλλου ο οποίος θα περάσει τέσσερα (4) χρόνια στην φυλακή. Εάν τώρα και οι δύο ομολογήσουν ο κάθε ένας θα περάσει τρία (3) στην φυλακή. Αυτή η κατάσταση μπορεί να μοντελοποιηθεί με την μορφή ενός παιγνίου στρατηγικής. *Το δίλημμα του φυλακισμένου* δεν θεωρείται παίγνιο μηδενικού αθροίσματος. Οι παίκτες όπου εδώ είναι οι φυλακισμένοι, μπορούν να έχουν και οι δύο κέρδος ταυτόχρονα όταν δεν ομολογήσουν.

Το δίλημμα του φυλακισμένου μπορεί να αναπαρασταθεί με την μορφή πίνακα, ο οποίος ονομάζεται *κανονική μορφή* του παιγνίου. Δύο φυλακισμένοι προσέρχονται σε δίκη για ένα έγκλημα και κάθε ένας έρχεται αντιμέτωπος με την επιλογή να ομολογήσει την ενοχή του ή να παραμείνει σιωπηλός όπως αναφέρεται και στο βίντεο των Christian και Griffins *Η Αλγοριθμική* *τέχνη των αποφάσεων* [6]. Εάν και οι δυο παραμείνουν σιωπηλοί [65, Archive Prisoner’s Dilemma], οι αρχές δεν θα μπορούν να προβούν σε κατηγορίες σε κανέναν από τους δύο και το ελάχιστο της ποινής που θα εκτίσουν θα είναι δύο χρόνια για ασήμαντα παραπτώματα. Εάν τώρα μόνο ο ένας από τους δυο αποφασίσει να ομολογήσει η ποινή του θα μειωθεί στον ένα χρόνο και θα χρησιμοποιηθεί και σαν μάρτυρας εναντίον του άλλου κατηγορούμενου ο οποίος θα φυλακιστεί για πέντε (5) χρόνια. Σαν τελευταία λύση είναι να ομολογήσουν και οι δύο (2), θα συνεργαστούν με τις αρχές και θα εκτίσουν τέσσερα (4) χρόνια στην φυλακή, όπως αναφέρεται και περιγράφεται στο αρχείο *Prisoner’s Dilemma* με τους *Tanya* και *Cinque* που λήστεψαν την *Hibernia Savings Bank*.

Υπάρχουν τέσσερις (4) δυνατές εκβάσεις αυτής της υπόθεσης οι οποίες βασίζονται στην επιλογή που θα κάνει ο καθένας από τους δύο (2) φυλακισμένους και τα αποτελέσματα μπορούν να αποτυπωθούν σε έναν δύο επί δύο (2x2) πίνακα *(Εικόνα 8)*.



`

Εικόνα 8: *Οι δυνατές εκβάσεις που προκύπτουν από το παίγνιο το δίλημμα του φυλακισμένου*

Άρα

• Δύο φυλακισμένοι, P1 και P2, κρατούνται ως ύποπτοι για ένα έγκλημα σε χωριστά κελιά.

• Ο ανακριτής μιλάει και στους δύο ξεχωριστά και προσπαθεί να τους πείσει να ομολογήσουν [55, Διάλεξη Θεωρία Παιγνίων], όπως φαίνεται και στην διάλεξη που περιγράφει το παίγνιο *Το Δίλημμα του Φυλακισμένου*.

• Υπάρχουν τα παρακάτω ενδεχόμενα:

- Να ομολογήσουν και οι δύο
- Να μην ομολογήσει κανένας
- Να ομολογήσει μόνο ο παίκτης P1
- Να ομολογήσει μόνο ο παίκτης P2

Αυτό που συμφέρει και τους 2 είναι να μην ομολογήσουν. Ωστόσο, αν για παράδειγμα ο P2 πιστεύει ότι ο P1 δεν θα ομολογήσει, τότε τον P2 τον συμφέρει να ομολογήσει. Το ίδιο αντίστοιχα ισχύει και για τον P1. Γενικότερα, για κάθε επιλογή του P1, τον P2 τον συμφέρει να ομολογήσει. Τελικά ομολογούν και οι δύο.

Ο κάθε ένας από τους δύο (2) φυλακισμένους έχει δύο (2) πιθανές στρατηγικές που είναι να ομολογήσει ή να παραμείνει σιωπηλός. Όπως βλέπουμε και από τον πίνακα οι αποφάσεις του φυλακισμένου P1 απορρέουν από τις σειρές του πίνακα και του φυλακισμένου P2 από τις στήλες του πίνακα. Αυτός ο πίνακας είναι ένας πίνακας κόστους γιατί το αποτέλεσμα, το κόστος που προκύπτει καθορίζεται από την επιλογή στρατηγικής που θα εφαρμόσουν οι φυλακισμένοι.

Μέσα από το *Δίλημμα του Φυλακισμένου* σκιαγραφούνται ανθρώπινα χαρακτηριστικά που επιδρούν στις σχέσεις και στις αποφάσεις των ανθρώπων όπως ο εγωισμός, η συνεργασία μέσω της οποίας μπορούν να έρθουν σε καλύτερη δυνατή συμφωνία, η ηθική ευαισθησία και η υποχρέωση που έχει ο κάθε άνθρωπος ως προς τον συνάνθρωπό του. Περιγραφή του παιγνίου του *Διλήμματος του Φυλακισμένου* παρουσιάζουν και ο Brian Christian και ο Tom Griffins σε βίντεο συνεργασία με τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης [6] όπου « *δείχνουν πώς οι αλγόριθμοι που έχουν αναπτυχθεί για τους υπολογιστές μπορούν να ξεδιαλύνουν και κάποια χαρακτηριστικά ανθρώπινα ερωτήματα*».

2.2 Maple

Το *Maple*, για το οποίο μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες από το διδακτικό υλικό που παρουσιάζεται στο βίντεο [4] είναι ένα συμβολικό και αριθμητικό υπολογιστικό πρόγραμμα και μια γλώσσα προγραμματισμού που έχει εφαρμογές στην εκπαίδευση, στην μηχανική και στην έρευνα, αναλύει, μελετά και δίνει λύσεις σε μαθηματικά προβλήματα καθώς σε έργα μηχανικού σχεδιασμού. Είναι ένα διαδραστικό αλγεβρικό σύστημα υπολογιστή [32, Preface] το οποίο μπορεί να πραγματοποιήσει ακριβείς υπολογισμούς ακέραιων αριθμών, συμβολικούς υπολογισμούς, που αποτελείται από μια βιβλιοθήκη με ευρεία επιλογή ενσωματωμένων μαθηματικών εργαλείων και συναρτήσεων.

Η βιβλιοθήκη του προγράμματος *Maple* χωρίζεται σε τέσσερις (4) βασικές κατηγορίες στις οποίες γίνεται αναφορά στις προεγκατεστημένες εσωτερικές λειτουργίες στο σύστημα του *Maple*, τις λειτουργίες που αφορούν τις κατά απαίτηση φορτωμένες βιβλιοθήκες, βιβλιοθήκες που αποτελούνται από διάφορες λειτουργίες που δεν έχουν φορτωθεί αυτομάτως και από ένα σύνολο λειτουργιών τα λεγόμενα πακέτα *(package)*τα οποία έχουν φορτωθεί κανονικά με την χρήση εντολής [5, Κεφάλαιο 1.2].

2.3 Πολυπλοκότητα

Το λιγότερο δυνατό σύνολο βοηθημάτων που απαιτείται για την επεξεργασία ενός προβλήματος ή εκτέλεσης ενός αλγορίθμου όπως για παράδειγμα η μνήμη ή ο χρόνος που απαιτείται, ορίζουν την έννοια της πολυπλοκότητας. Ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να μετρηθεί η επίδοση ενός αλγόριθμου είναι εμπειρικά (*a posteriori*), δηλαδή υπολογίζεται και εφαρμόζεται σε ένα σύνολο δεδομένων μετρώντας τον απαιτούμενο χρόνο εκτέλεσης του αλγόριθμου σε συγκεκριμένη υπολογιστική μηχανή ή θεωρητικά (*a priori*), ή αλλιώς εκ των προτέρων γνώση, δηλαδή υπολογίζεται ο χρόνος και ο χώρος που χρειάζεται ο αλγόριθμος σε συνάρτηση με το μέγεθος του συνόλου των δεδομένων του [48, Chapter 2].

Σε παίγνια όπου γίνεται έλεγχος εύρεσης *Nash Ισορροπίας* η πολυπλοκότητα ορίζεται ως η μεγαλύτερη διάσταση του πίνακα υψωμένη εις την *n* δύναμη, που εκφράζει το μέγεθος του προβλήματος ώστε η μέτρηση της αποδοτικότητας του αλγόριθμου να ισχύει για κάθε σύνολο δεδομένων. Υπάρχει ένας αριθμός παιγνίων ο οποίος δεν λύνεται το ίδιο εύκολα με παίγνια πιο μικρά. Όταν υπάρχουν προβλήματα με βαθμό δυσκολίας, δηλαδή υπάρχει μια κλάση προβλημάτων η *PPAD* *(Polynomial Parity Arguments on Directed graphs)* η οποία μπορεί λόγω έλλειψης χρόνου να μην δίνει άμεσα και γρήγορα λύση σε παίγνια δύο παικτών όπου απαιτείται η εύρεση της μεικτής Nash ισορροπίας [48, Κεφάλαιο 2] εφαρμόζεται η Θεωρία της πολυπλοκότητας με την βοήθεια αλγορίθμων.

2.4 Αλγόριθμος

Αλγόριθμος είναι μια πεπερασμένη ακολουθία εντολών, που έχουν οριστεί με σαφήνεια και ακρίβεια με στόχο την επίλυση ενός προβλήματος, ένα σύνολο οδηγιών (μια ρητή και μηχανικά εκτελέσιμη ακολουθία στοιχειωδών οδηγιών) [35, Ορισμός Αλγόριθμου] που λύνουν ένα πρόβλημα. Είναι η μαθηματική έννοια που χρησιμοποιείται σε μια υπολογιστική διαδικασία για την εκτέλεση μιας εργασίας [78, Ενότητα 1: Ανάλυση Αλγορίθμων], μια υπολογιστική διαδικασία που παίρνει μία ή περισσότερες τιμές σαν είσοδο, εκτελεί μια σειρά καθορισμένων βημάτων και παράγει μία ή περισσότερες τιμές σαν έξοδο. Δηλαδή ένας αλγόριθμος είναι μία ακολουθία υπολογιστικών βημάτων που σκοπό έχει να μετασχηματίζει την είσοδο σε έξοδο, μια διαδικασία του υπολογιστή που επιλύει ένα πρόβλημα.

Αλγόριθμος μπορεί να θεωρηθεί μια συνταγή μαγειρικής, όπου για να την εκτελέσει κάποιος θα πρέπει να ακολουθήσει κάποια βήματα μέχρι να φθάσει στην παρασκευή και ολοκλήρωση της συνταγής ή μια περιγραφή στην λύση ενός μαθηματικού προβλήματος ακολουθώντας μια λογική σειρά συλλογισμών που θα οδηγήσουν στην λύση του προβλήματος

2.4.1 Ιδιότητες Αλγορίθμων

Ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τους αλγόριθμους είναι οι εξής [35, Ιδιότητες Αλγορίθμων]:

Είσοδος (*Input*) : Δεδομένα που δίνονται ως είσοδοι στον αλγόριθμο.

Έξοδος (*Output*): Πρέπει να προκύπτει σαν αποτέλεσμα τουλάχιστον μία τιμή δεδομένων ως αποτέλεσμα σε συνάρτηση με τον χρήστη ή προς ένα άλλο αλγόριθμο.

Καθοριστικότητα (Defineteness) : κάθε εντολή πρέπει να αποδίδεται με σαφήνεια και ακρίβεια για να μπορεί να καθοριστεί ως προς τον τρόπο εκτέλεσής της, θα πρέπει να ορίζει όλες τις δυνατές λύσεις ως ενδεικτικές τιμές όπως και στην περίπτωση της διαίρεσης όπου ο διαιρέτης λαμβάνει την τιμή μηδέν.

Περατότητα (*Finiteness*) : ο αλγόριθμος θα πρέπει να τελειώνει μετά την ολοκλήρωση πεπερασμένων βημάτων εκτέλεσης μιας εντολής αλλιώς θεωρείται μια υπολογιστική διαδικασία.

Αποτελεσματικότητα (*Effectiveness)* : ο αλγόριθμος αποτελείται από μεμονωμένες απλές εντολές, δηλαδή μια εντολή που θα έχει ορισθεί θα πρέπει να μπορεί να εκτελεστεί, να έχει αποτέλεσμα, θα πρέπει ο αλγόριθμος να είναι αποδοτικός.

Δύο σημαντικοί παράμετροι που καθορίζουν την αποδοτικότητα ενός αλγόριθμου είναι η χωρική και η χρονική πολυπλοκότητα [78, Ενότητα 1: Ανάλυση Αλγορίθμων]. Κατά συνέπεια η μελέτη και η κατανόηση αλγόριθμων και μεθόδων που βοηθούν στην εύρυθμη λειτουργία μιας υπολογιστικής μηχανής συνθέτουν την μηχανική μάθηση όπου πραγματοποιούνται εργασίες βάσει ανάλυσης δεδομένων, ομαδοποίησης, ταξινόμησης, εξαγωγής χαρακτηριστικών, αναγνώρισης προτύπων, εικόνων και ανάλυσης δεδομένων.

3

3η Διάλεξη 06/11/2019

3.1 John Nash

Ο *John Forbes Nash* (13 Ιουνίου 1928-23 Μαΐου 2015) [68, Article] αμερικανός μαθηματικός, δημοσίευσε με τον πατέρα του το πρώτο του σύγγραμμα "The Bargaining Problem"σε ηλικία δεκαεπτά ετών, το οποίο δημοσιεύτηκε στην εφημερίδα *"Econometrica"*. Λίγο καιρό μετά ανέπτυξε την μελέτη και την εφαρμογή αυτού του μαθηματικού μοντέλου μέσω της διατριβής του που παρουσιάστηκε τον Σεπτέμβρη του 1951 στην εφημερίδα *Annals of Mathematics*. Στα εικοσιένα του χρόνια η διπλωματική διατριβή του παρουσίασε μαθηματικές ιδέες που αποτέλεσαν την αρχή για μια επανάσταση σε πεδία εξίσου διαφορετικά όπως είναι οι πολιτικές επιστήμες, τα οικονομικά, τα μαθηματικά και η εξελικτική βιολογία [45, Abstract].

Καθιέρωσε μαθηματικές θεμελιώδεις αρχές της Θεωρίας Παιγνίων η οποία εφαρμόζεται για την μελέτη και κατανόηση καταστάσεων ανταγωνιστικής αλληλεξάρτησης κατά την διάρκεια λήψης αποφάσεων διαφορετικών μερών στο πλαίσιο ανταγωνισμού ή συνεργασίας και διατύπωσε το *Θεώρημα της Ισορροπίας Nash (Nash Equilibrium)*, μια κατάσταση όπου κανένας από τους παίκτες που συμμετέχουν στο παίγνιο δεν μπορεί να αυξήσει το όφελός του αν αλλάξει μονομερώς την στρατηγική του. Σε παίγνια αλληλεπίδρασης αποφάσεων με πεπερασμένο πλήθος παικτών και στρατηγικών υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας όπου οι παίκτες προσπαθούν να προβλέψουν την κίνηση που θα επιλέξουν οι άλλοι συμμετέχοντες στο παίγνιο, προσπαθούν αν καταλάβουν την συμπεριφορά τους και να επιλέξουν την δική τους στρατηγική η οποία εξαρτάται από τις αποφάσεις των υπολοίπων. Κατά την *ισορροπία Nash (Nash Equilibrium)* ένα προφίλ στρατηγικών αποτελεί σημείο ισορροπίας εφόσον κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο (θεωρεί συμφέρον) να αλλάξει ο ίδιος στρατηγική ενώ βλέπει την στρατηγική του άλλου παίκτη [43, Chapter 2]. Το 1951 έγινε μέλος της σχολής *Massachusetts Institute of Technology (MIT)* από όπου και παραιτήθηκε στα τέλη της δεκαετίας του 1950 μετά από διάγνωση σχιζοφρένειας.

Για το έργο του στην Θεωρία παιγνίων του απονεμήθηκε το 1994 το βραβείο Νόμπελ Οικονομίας.

3.2 Ιδιότητες Πινάκων

Ως ιδιότητες πινάκων μπορούμε να ορίσουμε ορθογώνιες παρατάξεις αριθμών ή στοιχείων. Ως ιδιότητες πινάκων θεωρούνται η αντιμεταθετική, η προσεταιριστική και η επιμεριστική. Πίνακας ονομάζεται μια ορθογώνια διάταξη στοιχείων της μορφής *m x n,* έχει διαστάσεις *m x n* όπου *m* το πλήθος των γραμμών και *n* το πλήθος των στηλών *(Εικόνα 9)* .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Εικόνα 9: *Ορθογώνια διάταξη στοιχείων ενός πίνακα m x n*

Το στοιχείο που ανήκει στην *i-γραμμή* και *j-στήλη* συμβολίζεται με a_{ij} όπου $1 \le i \le m$ και $1 \le j \le$ και είναι το γενικό στοιχείο του πίνακα.

3.3 Πιθανότητες

Η πιθανότητα ενός γεγονότος να συμβεί εκφράζει την βεβαιότητα να πραγματοποιηθεί αυτό το γεγονός. Είναι ένας αριθμός που έχει αφετηρία το μηδέν που υποδηλώνει ότι το γεγονός δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί και φθάνει στο ένα που συμβολίζει την βεβαιότητα ότι το συμβάν θα πραγματοποιηθεί. Οι Πιθανότητες σύμφωνα με τον Γάλλο μαθηματικό Laplace *«είναι η μετατροπή της κοινής λογικής σε μαθηματικές εκφράσεις»*, το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου να συμβεί ως προς το συνολικό πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων που προκύπτουν. Είναι ο κλάδος της μαθηματικής επιστήμης που έχει στόχο την μελέτη τυχαίων ή στοχαστικών γεγονότων που συμβαίνουν σε συνθήκες αβεβαιότητας όπως αναφέρεται και στις σημειώσεις όπου γίνεται αναφορά στις *Πιθανότητες* [19, Εισαγωγή]. Με την βοήθεια των πιθανοτήτων εξάγονται συμπεράσματα για την αναμενόμενη συχνότητα των γεγονότων.

Τρόποι με τους οποίους μπορούμε να προσδιορίσουμε τις πιθανότητες είναι οι:

- **Κλασσική προσέγγιση (A priori Classical Probability)**
  Η πιθανότητα επιτυχίας βασίζεται σε προγενέστερη γνώση της διαδικασίας (γνώση εκ των προτέρων) και εμφανίζεται σε παίγνια όπως είναι τα χαρτιά, η ρίψη νομισμάτων, ζαριών όπου η πιθανότητα αποτελέσματος είναι γνωστή εκ των προτέρων.
- **Εμπειρική κλασσική πιθανότητα (Empirical Classical Probability)**
  Η προσέγγιση γίνεται βασισμένη στην εμπειρία από προγενέστερες μελέτες και παρατηρήσεις.
- **Υποκειμενική πιθανότητα (Subjective Probability)**
  Ο υπολογισμός της πιθανότητας στην υποκειμενική πιθανότητα βασίζεται στην προσωπική εκτίμηση ενός ατόμου, σε προηγούμενη εμπειρία και στην μελέτη συγκεκριμένης κατάστασης για την οποία καλούμαστε να βρούμε την πιθανότητα [52, Κεφάλαιο Πιθανότητες, Ορισμοί και Ιδιότητες].

3.4 Διάνυσμα Πιθανοτήτων

Ένα διάνυσμα πιθανοτήτων θωρείται ένα διάνυσμα, ένα στοιχείο ενός διανυσματικού χώρου του οποίου τα στοιχεία [85, Ορισμός Κατανομή Πιθανόνητας] είναι μη αρνητικά και έχουν άθροισμα ένα και αποτυπώνονται σε μια μήτρα πιθανοτήτων μετάβασης.

3.5 Payoff Function – Συνάρτηση Αναμενόμενου Κέρδους

Η συνάρτηση κέρδους είναι μια μαθηματική συνάρτηση που περιγράφει την αμοιβή ενός παίκτη που προκύπτει σαν έξοδος, σαν αποτέλεσμα σε ένα παίγνιο, που αντιπροσωπεύει ένα παίγνιο για οποιοδήποτε προφίλ στρατηγικών [17, Κεφάλαιο 1.2]. Οι διαφορετικές συναρτήσεις κέρδους χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν διαφορετικές συμπεριφορές που παρατηρούνται στα παίγνια μεταξύ των παικτών. Οι συναρτήσεις κέρδους παρουσιάζουν τις προτιμήσεις κάθε παίκτη σε συνάρτηση με την χρήση των προφίλ στρατηγικών που παρατηρούνται, όπου προφίλ θεωρείται η λίστα ενεργειών στις οποίες προβαίνει ο κάθε παίκτης [16, Nash Equilibrium].

3.6 Γραμμικός Προγραμματισμός

Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι η διαδικασία ελαχιστοποίησης μια γραμμικής αντικειμενικής εξίσωσης που εξαρτάται από πεπερασμένο αριθμό περιορισμών γραμμικής ισότητας και ανισότητας [34, Chapter 1.1]. Έχει εφαρμογή στην επιστήμη υπολογιστών. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιλύσει πολλά συνδυαστικά προβλήματα που φαινομενικά δεν σχετίζονται με τον γραμμικό προβληματισμό

3.7 Simplex

Ένας αλγόριθμος ή μια μέθοδος επίλυσης που περιγράφει την ελαχιστοποίηση των *n* μεταβλητών και βασίζεται στην συνάρτηση κόστους, επιδιώκοντας μια βέλτιστη λύση από μια κορυφή (λύση) [46, Abstract] σε μια καλύτερη γειτονική κορυφή έτσι ώστε κάθε φορά να βελτιώνεται η τιμή της συνάρτησης . Όταν βρεθεί μια λύση από την οποία δεν μπορεί να μεταβεί σε άλλη γειτονική κορυφή με καλύτερη τιμή αυτή θεωρείται η βέλτιστη λύση [30, Κεφάλαιο 3]. Η *Simplex* είναι η μέθοδος που χρησιμοποιείται στην μεγιστοποίηση γραμμικής εξίσωσης με μεταβλητές που υπόκεινται σε γραμμικές ανισότητες, χρησιμοποιεί ακραία σημεία πάντα αυξάνοντας το κέρδος, χρησιμοποιείται για την εύρεση λύσεων σε προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού , είναι μια μέθοδος αποτελεσματική και υπολογιστικά συμπαγής [46, Abstract] και εκτελείται γρήγορα κατά μέσο όρο με απλές λογικές ακολουθίες. Χρησιμοποιείται η ελάχιστη δυνατή πληροφορία σε κάθε βήμα.

4

4η Διάλεξη 20/11/2019

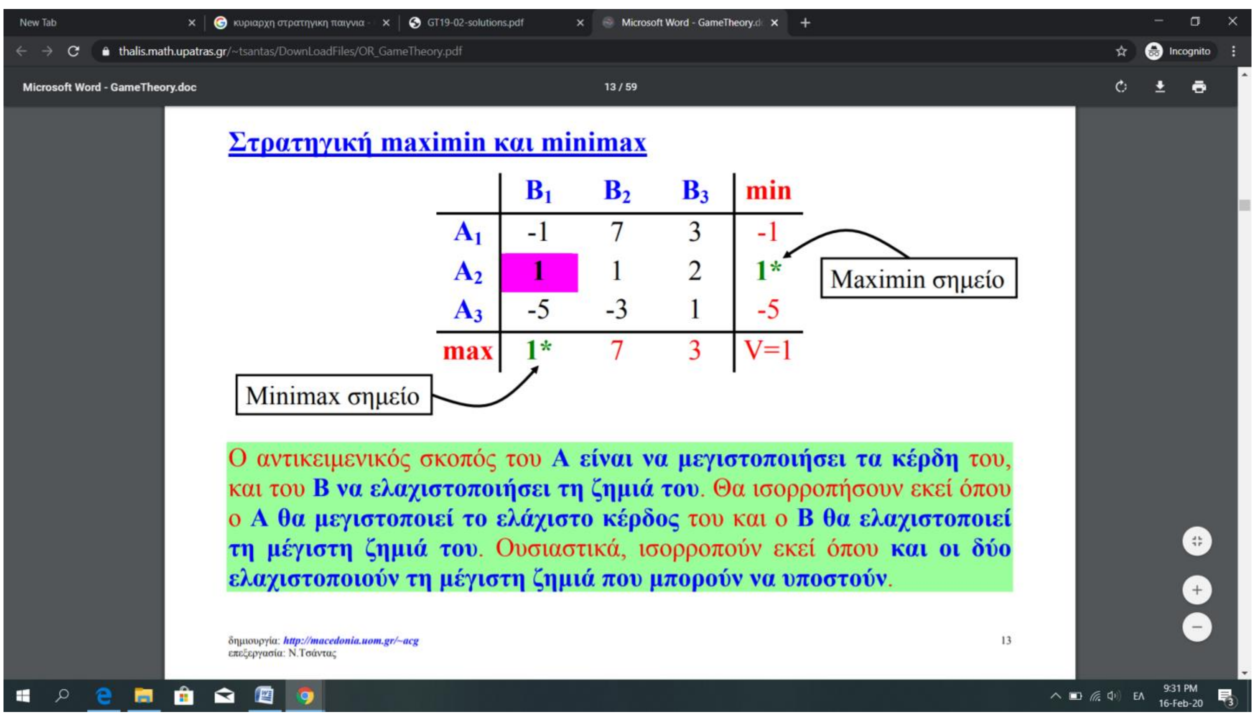
4.1 Θεώρημα Minimax (Λύση Ελαχιστοποίησης της Μέγιστης Ζημίας)

Όταν υπάρχουν μόνο δύο παίχτες το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας παιγνίων ή αλλιώς το Θεώρημα *minimax* που αποδείχτηκε [2, Introduction] από τον *Von Neuman* το 1928, αποδεικνύει ότι και οι δυο παίκτες μπορούν να επιλέξουν στρατηγικές που εγγυώνται τις τιμές του παιχνιδιού βάσει πιθανοτήτων, δηλαδή μιας μικτής στρατηγικής η οποία περιλαμβάνει συνδυασμό επιλογών, από τις οποίες τουλάχιστον μία επιλέγεται με μη ακέραιες τιμές. Υπάρχει μια μικτή στρατηγική που θεωρείται η βέλτιστη [24, Part II] για τον κάθε παίκτη όπου η μεγιστοποίηση του ελάχιστου κέρδους ισούται με την ελαχιστοποίηση της πιθανότητας να χάσουν. Στις μικτές στρατηγικές υπάρχει το φαινόμενο της αβεβαιότητας στο παίγνιο. Το θεώρημα *minimax* διατυπώθηκε στην προσπάθεια μελέτης σε παίγνια δύο παικτών μηδενικού (ή σταθερού) αθροίσματος όπου αποδεικνύεται ότι υπάρχει λύση [2, Introduction].

Η ***maximin*** απόδοση κάθε παίχτη είναι αυτή που αντιστοιχεί σε αυτήν την στρατηγική που οδηγεί στην μεγιστοποίηση της ελάχιστης ωφέλειας του παίχτη [74, Ορισμός Maximin/Minimax] ή αλλιώς μεγιστοποιεί το ελάχιστο κέρδος που μπορεί να έχει έχοντας λάβει υπόψη το χειρότερο σενάριο, όπως παρουσιάζεται και στην διάλεξη που αναφέρεται στις Μεικτές Στρατηγικές.

Η ***minimax*** απόδοση κάθε παίχτη είναι αυτή που αντιστοιχεί σε αυτήν την στρατηγική που ελαχιστοποιεί την μέγιστη απώλεια του ιδίου παίκτη, ο κάθε παίκτης αποτρέπει τον άλλο παίκτη να έχει καλύτερη απόδοση και ωφέλεια από τον ίδιο.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο παίχτες και παίζουν ο ένας εναντίον του άλλου. Θα παρατηρήσουμε ότι η κάθε κίνηση, το κάθε βήμα που κάνει ο ένας παίκτης έχει σαν στόχο να μεγιστοποιήσει το κέρδος , να νικήσει την στιγμή που ο άλλος παίκτης επιλέγει κινήσεις που θα ελαχιστοποιήσουν την χασούρα του. Τελικά και οι δύο παίχτες εξ ορισμού θέλουν να έχουν την μέγιστη απόδοση με την μικρότερη απώλεια, ο ένας παίκτης θα συνεχίσει να μεγιστοποιεί το υπάρχον κέρδος ενώ ο άλλος να ελαχιστοποιεί την απώλεια. Η κυρίαρχη ιδέα είναι ο παίκτης να προβεί στην καλύτερη κίνηση γνωρίζοντας πως το ίδιο θα κάνει και ο αντίπαλος του. Στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος ο παίκτης γνωρίζει τις δικές του στρατηγικές καθώς και τη στρατηγική που θα εφαρμόσει ο αντίπαλός του. Όταν ένα στοιχείο στον πίνακα απολαβών της στρατηγικής *maximin* είναι κοινό, ίσο με το στοιχείο στρατηγικής *minimax*, τότε προκύπτει το σημείο ισορροπίας [29, Lecture Zero-Sum Games Example] , όπως παρουσιάζεται και στο βίντεο, όπου ισούται με την αξία *V (Value of the game)* [66, Παράδειγμα 1] του παιγνίου που αναφέρεται και στο παράδειγμα της διάλεξης και είναι το ελάχιστο στοιχείο της γραμμής του πίνακα και το μέγιστο της στήλης του αντίστοιχου πίνακα.



Εικόνα 10: *Πίνακας τιμών Στρατηγικής maximin και minimax*

Δηλαδή σύμφωνα με το κριτήριο *minimax*, σε έναν πίνακα πληρωμών για τον παίκτη A *(Εικόνα 10)* [66, Στρατηγική maximin και minimax] γίνεται αναφορά στην διάλεξη Θεωρία Παιγνίων, ο παίκτης A επιλέγει εκείνη την στρατηγική που θα του δώσει μεγαλύτερο από τα ελάχιστα των σειρών *(maximin τιμή)* και ο παίκτης B επιλέγει την στρατηγική εκείνη που θα του δώσει το ελάχιστο από τα μέγιστα των στηλών *(minimax τιμή)*. Τα παίγνιο λέμε ότι έχει λύση με αμιγείς στρατηγικές όταν οι δύο τιμές ταυτίζονται και υπάρχει ένα μοναδικό σημείο ισορροπίας που δίνει την τιμή του παιγνίου, *V (Value of the game)*, δηλαδή όταν έχουμε ένα σταθερό αποτέλεσμα, όταν η τιμή του παιγνίου ισούται με την τιμή του πίνακα απολαβών στο σημείο ισορροπίας του παιγνίου.

Εκτός από τις εφαρμογές στην καθημερινή ζωή, εφαρμογές της θεωρίας παιγνίων σε μυθιστορήματα, μικρές ιστορίες, σε libretto όπερας, σε αφηγηματικά ποιήματα ερευνώνται από ιστορικής και κριτικής άποψης καθώς παρατηρείται και αναλύεται ο ρόλος των συναισθημάτων και των ορθολογικών αποφάσεων που διαφαίνεται σε κάθε χαρακτήρα παρά το γεγονός ότι ενδέχεται να υπάρχουν ελλιπείς πληροφορίες σχετικά με τα πρόσωπα ή αντίστοιχα από τους παίκτες που ενσαρκώνουν ρόλους ή εφαρμόζουν τακτικές με στόχο την προσωπική ωφέλεια.

Ο *Von Neumann (Εικόνα 11)* απέδειξε το 1928 ότι σε παίγνια δύο (2) παικτών μηδενικού αθροίσματος υπάρχει ένα ζεύγος στρατηγικών για κάθε παίκτη που ελαχιστοποιεί την μέγιστη απώλειά του.

Minimax theorem

From Wikipedia, the free encyclopedia

A **minimax theorem** is a theorem providing conditions that guarantee that the max–min inequality is also an equality. The first theorem in this sense is von Neumann's minimax theorem from 1928, which was considered the starting point of game theory. Since then, several generalizations and alternative versions of von Neumann's original theorem have appeared in the literature.[1][2]

Zero-sum Games [edit]

The minimax theorem was first proven and published in 1928 by John von Neumann,[3] who is quoted as saying "*As far as I can see, there could be no theory of games … without that theorem … I thought there was nothing worth publishing until the Minimax Theorem was proved*".[4]

Formally, von Neumann's minimax theorem states:

Let $X \subset \mathbb{R}^n$ and $Y \subset \mathbb{R}^m$ be compact convex sets. If $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ is a continuous function that is concave-convex, i.e.

$f(\cdot, y) : X \to \mathbb{R}$ is concave for fixed y, and
$f(x, \cdot) : Y \to \mathbb{R}$ is convex for fixed x.

Then we have that

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

Εικόνα 11: *Εικόνα απόδειξης Θεωρήματος Minimax (Wikipedia)*

4.2 Χρήση άνω φράγματος για την αποφυγή της χειρότερης αναμενόμενης απώλειας

Για κάθε μια συνάρτηση κόστους υπάρχει ένα αυστηρό άνω φράγμα που οριοθετεί την ελαχιστοποίηση του χειρότερου κέρδους, δίνει ένα μέτρο που δεν δύναται να το ξεπεράσει προς τα επάνω [46, Abstract], όπως εξηγείται και στο σύγγραμμα. Ο κάθε παίκτης ανάλογα αν παίζει γραμμή ή στήλη, επιδιώκει να περιορίσει όσο γίνεται την αναμενόμενη χασούρα ανά γραμμή ή στήλη αντίστοιχα, χωρίς να ξεπεράσει το όριο, το μέτρο, ελαχιστοποιώντας την ζημιά του με την επίλυση ενός γραμμικού προβλήματος για την εύρεση μικτής στρατηγικής [18, Lecture 22: PPAD] και αναφέρεται στο σύγγραμμα που αναφέρεται στην *PPAD*. Ο παίκτης που παίζει στήλες επιθυμεί την ελαχιστοποίηση του αναμενόμενου κέρδους του και αποφασίζει να φράξει άνω από μια άγνωστη ποσότητα V γιατί ο αντίπαλός του επιδιώκει να μειώσει το κέρδος που του αντιστοιχεί, παίζοντας την χειρότερη στρατηγική με πιθανότητα το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου να συμβεί ως προς το συνολικό πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων που προκύπτουν. Αντίστοιχα σκέφτεται και παίζει και ο παίκτης γραμμών με την χρήση άνω φράγματος και περιμένει ότι ο αντίπαλός του θα κάνει τις χειρότερες κινήσεις στο παίγνιο, θα επιλέξει εκείνη την στρατηγική που θα οδηγήσει τον παίκτη γραμμών σε χασούρα, την ελάχιστη απώλεια κέρδους, τον περιορισμό της αναμενόμενης χασούρας ανά γραμμή.

5

5η Διάλεξη 04/12/2019

5.1 Το τίμημα της αναρχίας (Price of Anarchy POA)

Η μελέτη του τιμήματος της αναρχίας βοηθάει στην αξιολόγηση της ποιότητας των σημείων ισορροπίας. Το τίμημα της αναρχίας είναι ο λόγος της τιμής της συνάρτησης κόστους στο (χειρότερο) λιγότερο αποδοτικό σημείο ισορροπίας προς την τιμή της συνάρτησης κόστους σε περίπτωση συνεργασίας μεταξύ των παικτών. Είναι η ποιότητα του σημείου ισορροπίας σε σχέση με την βέλτιστη λύση συνεργασίας, ο λόγος του μεγαλύτερου κοινωνικού κόστους σε κατάσταση ισορροπίας *Nash* προς το ελάχιστο δυνατό κοινωνικό κόστος (ο λόγος του κοινωνικού κόστους της χειρότερης ισορροπίας του παιγνίου προς το κοινωνικό κόστος της βέλτιστης λύσης) [3, Κεφάλαιο 1.1.5]. Το τίμημα της αναρχίας είναι μια ιδέα πάνω στην οποία βασίζεται η εύρεση πολλαπλών ισορροπιών, συγκρίνει και καταγράφει την έλλειψη συνεργασίας μεταξύ των παικτών και της εγωιστικής συμπεριφοράς τους [8, Introduction], όπως αναφέρεται και στο σύγγραμμα. Η βέλτιστη τιμή για το τίμημα της αναρχίας είναι το ένα και όσο αυτή μεγαλώνει η ανάγκη για συνεργασία μεταξύ των παικτών φαντάζει ιδανική, είναι η αναλογία του χειρότερου κοινωνικού κόστους μιας ισορροπίας προς το κοινωνικό όφελος ενός βέλτιστου αποτελέσματος.

Όταν οι παίκτες παίζουν ορθολογικά διευρύνεται η έννοια της ισορροπίας και είναι αναμενόμενο το τίμημα της αναρχίας να γίνεται χειρότερο [7, Introduction], όπου γίνεται αναφορά και στο σύγγραμμα . Αρχικά το τίμημα της αναρχίας συνέκρινε και όριζε τις αρνητικές αποδόσεις ενός συστήματος, παρουσίαζε την έλλειψη συνεργασίας. Θεωρείται η χειρότερη εκδοχή του λόγου του κοινωνικού κόστος προς την βέλτιστη τιμή όπως φαίνεται και στο σύγγραμμα *The price of anarchy for polynomial social cost* [31, Chapter 1.1].

5.2 Κοινωνικό κόστος

Είναι το κόστος που καταβάλλει η κοινωνία ή μια κοινότητα για να πραγματοποιηθεί μια δραστηριότητα (για παράδειγμα μια εργασία). Ορίζεται ως το άθροισμα που προκύπτει από όλα τα κόστη που μετακυλούνται στα μέλη του κοινωνικού συνόλου ανεξάρτητα από το εάν τα κόστη αυτά βαρύνουν το πρόσωπο εκείνο που αποφάσισε ότι τα κόστη αυτά θα δημιουργηθούν. Είναι το άθροισμα του εξωτερικού, ενός γενικού - μη ατομικού κόστους στην οικονομία και του ιδιωτικού κόστους [1, Ορισμός Κοινωνικά κόστη και οφέλη]. Σαν μονάδα μέτρησης χρησιμοποιείται για να εκφράσει μια χρηματική αξία που απορρέει αλλά και τις επιπτώσεις που έχει στο κοινωνικό σύνολο και την απόδοση δικαιοσύνης *(Εικόνα 12)*.

	Εξωτερικό	***Ιδιωτικό***	***Κοινωνικό***
Κόστος	Αυτός που επιβαρύνεται δεν αποζημιώνεται	Αυτός που επιβαρύνεται αποζημιώνεται	Εξωτερικό + Ιδιωτικό

Εικόνα 12*: Αναφορά σε εξωτερικό, ιδιωτικό και κοινωνικό κόστος*

Το κοινωνικό κόστος [1, Ορισμός Κοινωνικά κόστη και οφέλη], όπως εξηγείται και στις σημειώσεις *Εξωτερικές Αλληλεπιδράσεις,* είναι το αναμενόμενο άθροισμα όλων των κοστών, το άθροισμα του κόστους της αδράνειας, δηλαδή το σταθερό κόστος που εμφανίζει μια εταιρεία για παράδειγμα ακόμη και αν δεν λειτουργεί. Στα παίγνια το αναμενόμενο ατομικό κόστος του κάθε παίκτη είναι η αναμενόμενη αδράνεια που θα προκύψει από την στρατηγική που θα ακολουθήσει. Σε μια *Nash ισορροπία* κανένας παίκτης δε μπορεί να αυξήσει τη συνάρτηση οφέλους του μετακινούμενος σε άλλη κατάσταση, προσπαθεί να έχει την λιγότερη χασούρα, ισχύει η *ισορροπία Nash* αν κανένας παίκτης δεν δύναται να βελτιώσει την απόδοσή του δεδομένου ότι και οι υπόλοιποι παίκτες ακολουθούν την ίδια στρατηγική. Το βέλτιστο είναι η λιγότερο δυνατή μέγιστη αδράνεια [31, Chapter 1.1].

6

6η Διάλεξη 04/12/2019

6.1 Αλγόριθμος Lemke-Howson

Ο Αλγόριθμος Lemke-Howson είναι ένας αλγόριθμος ο οποίος χρησιμοποιείται για την εύρεση *Nash ισορροπίας* σε ένα παίγνιο 2 παικτών κανονικής μορφής όπου οι πίνακες με τις απολαβές των παικτών είναι της μορφής A_{mxn} και B_{mxn}. Αναφορά στον αλγόριθμο γίνεται πρώτη φορά σε ένα σύγγραμμα του Lemke και Howson το 1964 όπου παρατηρείται ομοιότητα με τον τρόπο λειτουργίας και εφαρμογής ενός αλγόριθμου simplex που εφαρμόζεται σε ένα γραμμικό πρόγραμμα όπου χρησιμοποιείται για την εύρεση *Nash ισορροπίας* σε παίγνια που έχουν την μορφή διπίνακα. Πληροφορίες για τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά του αλγόριθμου αντλούμε και από την διάλεξη του *Δασκαλάκη* [14, Lecture 12] στο *MIT (Massachussets Institute of Technology)*. Η *Nash ισορροπία* που προκύπτει σε ένα παίγνιο διπίνακα *(A,B)* είναι ένα σύνολο μεικτών στρατηγικών της μορφής *(x,y)* ώστε να εφαρμόζεται η αγνή στρατηγική με θετική πιθανότητα, μια μόνο από τις δυνατές στρατηγικές στο ακέραιο που παίζει ο ένας εκ των δύο παικτών, δηλαδή με πιθανότητα ίση με την μονάδα μόνο όταν θεωρείται ότι θα έχει το καλύτερο αποτέλεσμα, το μεγαλύτερο κέρδος σε σχέση με τον δεύτερο παίκτη που παίζει συνδυασμό στρατηγικών που επιλέγονται με πιθανότητα μικρότερη της μονάδας, όπως αναφέρεται και στο σύγγραμμα *An Experimental Analysis of Lemke-Howson Algorithm* [11, Chapter 2].

Ο τρόπος που θα κινηθεί ο κάθε παίκτης εξαρτάται και από τον τρόπο που παίζει ο αντίπαλός του γιατί ο κάθε ένας προσπαθεί να αυξήσει το αναμενόμενο κέρδος του. Ο αλγόριθμος Lemke Howson είναι ο πιο γνωστός αλγόριθμος υπολογισμού της *Nash ισορροπίας* σε θεωρητικές και εφαρμοσμένες περιοχές που αναφέρονται σε διάφορους τομείς όπως είναι οι κοινωνικές επιστήμες, η βιολογία και η οικονομία, όπου γίνεται αναφορά στην εισαγωγή του συγγράμματος *An Experimental Analysis of Lemke-Howson Algorithm* [11, Introduction]. Η ισορροπία *Nash* αποτελεί σημαντική έκφραση λύσης στην θεωρία παιγνίων, είναι ένας συνδυασμός στρατηγικών μεταξύ δυο αντίπαλων παικτών, του ενός από τους οποίους η στρατηγική αποτελεί την καλύτερη απόκριση στη στρατηγική του άλλου. Κάθε παίγνιο με πεπερασμένο πλήθος παικτών και στρατηγικών έχει ένα τουλάχιστον σημείο ισορροπίας σύμφωνα με το οποίο ο κάθε παίκτης επιλέγει την πιο συμφέρουσα για αυτόν κίνηση ξέροντας τι επιλογές έχει ο άλλος παίκτης και προσπαθώντας να καταλάβει τι στρατηγική θα ακολουθήσει.

Τα πολύτοπα βέλτιστης απόκρισης μας βοηθούν να έχουμε μια γενική εικόνα, να κατανοήσουμε κα να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο Lemke-Howson ο οποίος εκφράζει το σύνολο των κινήσεων μιας μικτής στρατηγικής που εφαρμόζει ο παίκτης σε συνδυασμό με το αναμενόμενο κέρδος που έχει ο άλλος παίκτης [17, Κεφάλαιο 2.7.2]. Ο ένας από τους δύο παίκτες, αυτός που θα ξεκινήσει πρώτος μόνο επιλέγει τυχαία την στρατηγική που θα εφαρμόσει και ενημερώνει τον δεύτερο παίκτη πως θα παίξει. Ο δεύτερος παίκτης επιλέγει εκείνη την στρατηγική που θα του επιστρέψει το βέλτιστο αναμενόμενο κέρδος και αντίστοιχα ενημερώνει για το σύνολο των κινήσεων που θα ακολουθήσει και παίζουν μέχρι να έρθουν σε σημείο *ισορροπίας Nash,* στο σημείο εκείνο όπου η ανάλυση του προφίλ στρατηγικών ενός παίκτη είναι η βέλτιστη απόκριση στην στρατηγική του άλλου παίκτη.

Κατά την *ισορροπία Nash* ένα προφίλ (συνδυασμός *mn*) στρατηγικών αποτελεί σημείο ισορροπίας εφόσον κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο μονομερώς (θεωρεί συμφέρον) να αλλάξει ο ίδιος στρατηγική ενώ βλέπει την στρατηγική του άλλου παίκτη, όπως αναφέρεται και στην *διάλεξη Θεωρία Παιγνίων και Αποφάσεων* όπου αναφέρεται στο *Σημείο ισορροπίας κατά Nash* [40, Ενότητα 2].

Για να εντοπιστεί σημείο *ισορροπίας Nash* στον πίνακα των προφίλ των στρατηγικών η επιλογή του παίκτη γραμμών πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση (ποιοτικά: καλύτερη ή όμοια) από κάθε άλλη επιλογή του ίδιου παίκτη στην στήλη *m* και ταυτόχρονα η επιλογή του παίκτη στηλών θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση (ποιοτικά: καλύτερη ή όμοια) από κάθε άλλη επιλογή του ίδιου παίκτη στην γραμμή *n*.

7

7η Διάλεξη 15/01/2020

7.1 Παίγνια σταθερού αθροίσματος

Ένα παίγνιο σταθερού αθροίσματος είναι ένα παίγνιο ανταγωνισμού όπου δύο παίκτες ορθολογικά σκεπτόμενοι με πεπερασμένο αριθμό στρατηγικών και διαφορετικά συμφέροντα προσπαθούν ο κάθε ένας να επιλέξουν την στρατηγική που επιθυμούν, ένα παίγνιο δύο παικτών όπου για οποιαδήποτε συνδυασμό αγνών στρατηγικών που εφαρμόζουν οι παίκτες το άθροισμα των ανταμοιβών τους ισούται με μια σταθερά c αρνητική ή θετική όπως αναφέρεται και στο βίντεο [28, Θεωρία Παιγνίων Μέρος Α']. Με άλλα λόγια είναι το άθροισμα, το σύνολο όλων των ανταμοιβών των παικτών όπου είναι το ίδιο ανεξάρτητα από την στρατηγική που έχει επιλέξει ο κάθε παίκτης [83, Definition].

'Ένα παίγνιο σταθερού αθροίσματος όπου το σύνολο αναμενόμενου κέρδους και ζημιάς είναι μηδέν, δηλαδή το κέρδος του ενός παίκτη που προκύπτει από το προφίλ στρατηγικής που θα εφαρμόσει είναι ίσο με την ζημιά του άλλου παίκτη είναι η πιο συνηθισμένη μορφή παιγνίων μηδενικού αθροίσματος. Στα παίγνια σταθερού αθροίσματος το σύνολο που προκύπτει από τις ανταμοιβές των δύο παικτών (ένα σταθερό ποσό που μοιράζονται οι δύο παίκτες) ισούται με την σταθερά c όπου όταν είναι θετική έχουν συμφέρον και ωφελούνται και οι δύο παίκτες ενώ όταν είναι αρνητική οι παίκτες θα πρέπει να μοιραστούν την ζημιά [66, Παίγνιο δύο παικτών σταθερού αθροίσματος].

Τα παίγνια σταθερού αθροίσματος είναι μη συνεργατικά παίγνια όπου ο κάθε παίκτης επιλέγει την στρατηγική που επιθυμεί μόνος του με στόχο την μεγιστοποίηση του προσωπικού του κέρδους και την απώλεια, την ζημιά του άλλου παίκτη, οι παίκτες δεν συνεργάζονται μεταξύ τους, δεν επικοινωνούν.

Μια πρώτη συστηματική μελέτη στην Θεωρία των Παιγνίων παρουσιάστηκε από τον Cournot, Γάλλος οικονομολόγος και μαθηματικός [67, Article], όπου το 1838 έκανε αναφορά στο τρόπο λειτουργίας δύο επιχειρήσεων σε μια οικονομική αγορά, όπου η κάθε εταιρεία συναγωνίζεται η μια την άλλη για το ποσοστό κέρδους που θα εισπράξει. Το 1921 ο Borel , Γάλλος μαθηματικός και πολιτικός [81], συνέχισε την ανάλυση σε γενικά παίγνια μηδενικού αθροίσματος, παρουσίασε παίγνια με την μορφή πινάκων όπου κατέγραφε τα αποτελέσματα των παικτών από το συνδυασμό στρατηγικών που είχε εφαρμόσει ο κάθε ένας. Παρουσιάσθηκε και αποτυπώθηκε στην συνέχεια μέσα από τις μελέτες και την συγγραφή των ιδεών [64, Κεφάλαιο 1.2] και αποτελεσμάτων αντίστοιχα στο βιβλίο *''Theory of Games and Economic Behavior''* (1944) από τον *John von Neumann* και τον *Oskar Morgenstern* [81]. Ο *John von Neumann* προχωράει στην απόδειξη της ύπαρξης ορθολογικής λύσης σε προβλήματα μηδενικού (ή σταθερού) αθροίσματος με δύο παίκτες. Ο τρόπος επίλυσης των παιγνίων ενός σταθερού αθροίσματος είναι ο ίδιος που χρησιμοποιείται και στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος. Μέσα από τη Θεωρία παιγνίων προσεγγίζεται η συστηματική μελέτη ενός πεδίου που πηγάζει από τις ανάγκες των ανθρώπων να προσδιορίσουν και να προσεγγίσουν τα προβλήματα που επιζητούσαν λύση με στόχο τις καλύτερες συνθήκες διαβίωσης, το μεγαλύτερο όφελος που θα είχαν επιλέγοντας ορθολογικά τις κινήσεις εκείνες που μαθηματικά θα τους επέφερε το μέγιστο κέρδος [64, Κεφάλαιο 1.2.1].

Η βασική μορφή αναπαράστασης ενός μη συνεργατικού παιγνίου είναι η εκτεταμένη μορφή [48, Κεφάλαιο 3.1] και η κανονική. Τα παίγνια με κανονική μορφή απεικονίζονται με την μορφή πίνακα που δείχνει τους παίκτες, τις στρατηγικές που ακολουθούν και τις απολαβές που προκύπτουν. Γενικά μπορούμε να πούμε ότι έχει την μορφή μιας συνάρτησης που συνδέει τις απολαβές που προκύπτουν για κάθε παίκτη με κάθε δυνατό συνδυασμό κινήσεων που πραγματοποιεί. Στην εκτεταμένη μορφή η απόδοση των παιγνίων γίνεται με την μορφή δέντρου όπου κάθε κόμβος συμβολίζει την απόφαση του κάθε παίκτη και το όνομα του παίκτη φαίνεται συνήθως δίπλα στον κόμβο [54, Chapter 7.2], όπως περιγράφεται και στο σύγγραμμα *Theory of Games: An Introduction*.

8

8η Διάλεξη 22 JAN 2020

8.1 Συνδυαστική Βελτιστοποίηση (Combinatorial Optimization)

Από την άποψη της Επιστήμης Υπολογιστών η Συνδυαστική Βελτιστοποίηση επιδιώκει, με μαθηματικές μεθόδους, να βελτιώσει έναν αλγόριθμο είτε μειώνοντας την ομάδα δεδομένων (από όπου αντλεί στοιχεία ο αλγόριθμος) είτε επιταχύνοντας τον Ρυθμό Επεξεργασίας Δεδομένων [13, Preface].

Για να φτάσουμε στον παραπάνω ορισμό λαμβάνουμε υπ’ όψιν ότι:

Α) Η χρήση της Συνδυαστικής (Combinatorics),για την βελτίωση αλγορίθμου [69, Lecture 1.1] με Συνδυαστική Βελτιστοποίηση, αφορά σύνθετα ερωτήματα προς συγκεκριμένη ομάδα δεδομένων για το ποια ταιριάσματα διαφορετικών ειδών δεδομένων (γραφήματα, ομαδοποιήσεις στοιχείων, πολύτοπα, matroids) -ομαδοποιήσεις δεδομένων γραμμικού προγραμματισμού-, είναι ήδη γνωστά.

Β) Τα Προβλήματα Διακριτής Βελτιστοποίησης (Discrete Optimization Problem) επιδιώκουν να προσδιορίσουν την καλύτερη ενδεχόμενη λύση μέσα από πεπερασμένα σύνολα πιθανοτήτων (ενδεχόμενων λύσεων).

8.2 Τεχνικές Μοντελοποίησης

Οι τεχνικές μοντελοποίησης στα παίγνια είναι οι αποφάσεις, ο τρόπος που αποφασίζουν να παίξουν οι παίκτες με απώτερο σκοπό την βελτίωση της τεχνικής και στρατηγικής που θα ακολουθήσουν για να κερδίσουν [50, Κεφάλαιο 6.5]. Με τον όρο μοντελοποίηση εννοούμε μια διαδικασία ανάπτυξης και μελέτης της στρατηγικής που αποφασίζει να παίξει ο κάθε παίκτης που στόχο έχει την αύξηση του αναμενόμενου κέρδους του εφαρμόζοντας κάποιες τεχνικές [50, Κεφάλαιο 6.1]. Ο παίκτης εκπαιδεύεται μέσα από τις τεχνικές μοντελοποίησης με στόχο την εφαρμογή της βέλτιστης στρατηγικής ώστε να μπορεί να μελετά τις κινήσεις και την συμπεριφορά των άλλων παικτών, να αλλάζει την στρατηγική του και να προσπαθεί να μειώσει τα λάθη εκείνων των κινήσεων που τον οδηγούν στην μεγιστοποίηση της ζημιάς [50, Κεφάλαιο 6.4].

8.3 Συμμετρικό παίγνιο (Symmetric game)

Ένα παίγνιο δύο παικτών στρατηγικής μορφής καλείται συμμετρικό όταν οι δύο παίκτες έφαρμόζουν τις ίδιες στρατηγικές και οι στρατηγικές τους αναπαρίστανται από τις συναρτήσεις αμοιβών U_A και U_B όπου ισχύει $U_A\ (S_1,S_2)= U_B\ (S_2,S_1)$ για κάθε πιθανό προφίλ στρατηγικών (S_1,S_2) [51, Chapter 2.10].

Ένα παιχνίδι είναι συμμετρικό όταν οι κανόνες δεν διαχωρίζουν τους παίκτες και οι δύο παίκτες έχουν τις ίδιες επιλογές, έχουν τις ίδιες διαθέσιμες στρατηγικές [23, Ορισμός Συμμετρικό Παίγνιο]. Ένα παίγνιο καλείται συμμετρικό όταν το αποτέλεσμα που προκύπτει από μια συγκεκριμένη στρατηγική εξαρτάται από τις στρατηγικές που παίζει ο κάθε παίκτης, το αναμενόμενο κέρδος που προκύπτει βασίζεται στην στρατηγική που ακολουθείται ανεξάρτητα από τον παίκτη που την επιλέγει. Όταν η ταυτότητα του παίκτη μπορεί να αλλάξει χωρίς να επιφέρει αλλαγή στα κέρδος τότε το παίγνιο θεωρείται συμμετρικό.

Κάθε παίκτης έχει ίδιο σύνολο στρατηγικών και το αναμενόμενο κέρδος που προκύπτει εξαρτάται από την στρατηγική που εφαρμόζεται και όχι ποιος παίκτης έχει χρησιμοποιήσει την στρατηγική. Η συμμετρία βοηθάει στην απόδοση της λύσης του προβλήματος που στηρίζεται σε αναλυτικές και αλγοριθμικές μεθόδους. Ένα παίγνιο θεωρείται συμμετρικό όταν οι παίκτες μπορούν να παίξουν τις στρατηγικές [56, Ενότητα 5: Συμμετρικά Παίγνια] όπως περιγράφεται και στην *διάλεξη* που γίνεται αναφορά στα *Συμμετρικά παίγνια και στις συμμετρικές ισορροπίες*, μπορούν να παίξουν ίδιες κινήσεις και για τους ίδιους συνδυασμούς κινήσεων έχουν τις ίδιες απολαβές. Ένα παράδειγμα συμμετρικού παιγνίου είναι *Το Δίλημμα του Φυλακισμένου*, είναι ένα συμμετρικό παίγνιο [51, Chapter 2.10] όπου και οι δύο φυλακισμένοι έχουν τις ίδιες επιλογές, όταν θα ομολογήσουν και οι δύο θα έχουν την ίδια ποινή και οι δύο καθώς και αν δεν ομολογήσουν, όταν ομολογήσει ο ένας εκ των δύο έχει συγκεκριμένο κέρδος ανεξάρτητα από το ποιός ομολογεί.

Σε ένα συμμετρικό παιχνίδι μπορεί να βασισθεί και ο ορισμός της συμμετρικής ισορροπίας όπου παρατηρείται σε παίγνια δύο (2) παικτών που εφαρμόζουν αγνή στρατηγική, επιλέγουν την ίδια στρατηγική. Η συμμετρία που υπάρχει στα παίγνια μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην επίλυση παιγνίων με την χρήση άλλων αλγόριθμων, για την εύρεση ισορροπίας, όπως ο Lemke-Howson σε παίγνια 2 παικτών (διπίνακα – bimatrix) [10, Chapter 4].

8.4 Γενικό παίγνιο μη μηδενικού αθροίσματος

Τα παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος είναι παίγνια όπου και οι δύο παίκτες μπορούν να κερδίσουν ή να χάσουν την ίδια στιγμή ανάλογα την στρατηγική που θα ακολουθήσουν όπως αναφέρεται και στον ορισμό που δίνεται για ένα παίγνιο μη-μηδενικου αθροίσματος [86, Ορισμός Παίγνιο Μη-Μηδενικού αθροίσματος]. Στα παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος η κατάσταση είναι πιο αόριστη γιατί σε τέτοιας μορφής παίγνια δεν προκύπτει χρηματική αξία, δεν προκύπτει κέρδος, το συνολικό όφελος για όλους τους παίχτες που συμμετέχουν είναι μηδενικό και οι παίχτες δεν έχουν βέλτιστη στρατηγική, δεν έχουν κάποιο συγκεκριμένο σταθερό εισόδημα και εκφράζεται με την μορφή δύο πινάκων.

Εφαρμογές παιγνίων μη μηδενικού αθροίσματος παρατηρούνται στον τομέα της οικονομίας όπως για παράδειγμα μεταξύ εταιρειών και της τιμολογιακής πολιτικής που θα εφαρμόσουν ώστε να προκύψουν έσοδα, αύξηση των εσόδων και για τις δύο εταιρείες. Ο παίχτης διακατέχεται από μια απαισιόδοξη λογική ότι ο άλλος παίχτης θα προβεί στην επιλογή στρατηγικής που μεγιστοποιεί την δική του ωφέλεια.

Συμπεράσματα

Η θεωρία παιγνίων αποτελεί ένα πεδίο μελέτης που έχει εφαρμογές σε πολλούς τομείς της καθημερινής ζωής, σε ένα ευρύ πλαίσιο οικονομικών, πολιτικών και ιατρικών εφαρμογών. Παίγνια ψυχολογικής διερεύνησης όπου ο ανθρώπινος παράγοντας είναι αυτός που αποφασίζει ορθολογικά για την στρατηγική που θα ακολουθήσει μέσα από ένα πλαίσιο κανόνων με στόχο την μεγιστοποίηση του κέρδους του.

Μέσα από τη Θεωρία παιγνίων προσεγγίζεται η συστηματική μελέτη ενός πεδίου που πηγάζει από τις ανάγκες των ανθρώπων να προσδιορίσουν και να προσεγγίσουν τα προβλήματα που επιζητούν λύση. Έννοιες όπως παίκτες, αμοιβές, στρατηγικές, μεικτή ισορροπία *Nash* συνθέτουν την Θεωρία παιγνίων και βοηθούν στην κατανόησή της μέσα από παραδείγματα που βασίζονται στις ανθρώπινες σχέσεις, σε ανταγωνιστικές συμπεριφορές καθώς και σε σχέσεις συνεργασίας που βασίζονται στο αμοιβαίο συμφέρον όπως παρατηρείται στο *Δίλημμα του φυλακισμένου*.

Μελετώντας τις εφαρμογές της Θεωρίας παιγνίων μπορούμε να καταλήξουμε σε συμπεράσματα που προέρχονται από προβλήματα που εμπλέκονται περισσότεροι του ενός λήπτες αποφάσεων όπου παίρνουν αποφάσεις ταυτόχρονα και σε αλληλεξάρτηση επιδιώκοντας να επιλέξουν την βέλτιστη λύση. Η Θεωρία παιγνίων είναι η μαθηματική μελέτη που οξύνει το πνεύμα, δημιουργεί τις κατάλληλες προϋποθέσεις μελέτης θεμάτων της καθημερινότητας που έχουν πρακτική εφαρμογή στις διεθνείς σχέσεις, στην φιλοσοφία, στην μηχανική, στην μελέτη οικονομικών συμπεριφορών και στην τρόπο που σκέπτονται και αποφασίζουν να ενεργήσουν οι συμμετέχοντες.

Βιβλιογραφία

1. Αντωνίου Κ, Σημειώσεις Εξωτερικές Αλληλεπιδράσεις, η αποτυχία των νόμων της αγοράς [internet], Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ, Σχολή Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών ΕΜΠ, 2018, σελ.11-12. Διαθέσιμο στον διαδικτυακό τόπο: https://ocw.aoc.ntua.gr/modules/document/file.php/SURVEY117/chapter%206.pdf

2. Ben-El-Mechaiekh H, Dimand,RW, A Simpler Proof of the Von Neumann Minimax Theorem, Am Math Mon.2011.Aug 4(8):638-641

3. Γεωργιάδης Ι, Διπλωματική εργασία «Μηχανισμοί Βελτίωσης του Τμήματος της Αναρχίας στα Παίγνια Συμφόρησης», Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

4. Causley M, Maple Tutorial 1, [internet]. 2014,October, Διαθέσιμο στον διαδικτυακό τόπο: https://www.youtube.com/watch?v=_owk8XLx0tw

5. Char Bruce W., K, Geddes, O, Gonnet, GH, Benton LL, Monagan MB, Watt S, Maple V, Library Reference Manual, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg GmbH, 2011

6. Christian B, Griffins T, Η Αλγοριθμική τέχνη των αποφάσεων [internet]. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης , Διαθέσιμο στον διαδικτυακό τόπο: https://www.youtube.com/watch?v=17o8CIeXV2Y&list=RDCMUCQXxfC5_Wvlx-eywB9EmaMw&index=1

7. Christodoulou G, Koutsoupias E, Spirakis PG, On the performance of approximate equilibria in congestion games [internet]. Cornell University, Submitted on 21 Apr 2008 v1, last revised May 10, 2008 v2. Διαθέσιμο στον διαδικτυακό τόπο: https://arxiv.org/pdf/0804.3160.pdf

8. Christodoulou G, Koutsoupias E, The price of anarchy of finite congestion game [internet], Conference Paper in Proceeding of the Annual ACM Symposium o Theory of Computing, 2005: 67-68. Διαθέσιμο στον διαδικτυακό τόπο: https://www.math.uwaterloo.ca/~cswamy/courses/co759/agt-material/christodoulouk-atcongstoc.pdf

9. Chvatal V, Linear Programming, New York: W. H. Freeman & Co, 2005

10. Cheng C, Reeves DR, Vorobeychik Y, Wellman MP, *Notes on Equilibria in Symmetric Games"*, University of Michigan Artificial Intelligence Lab, 2004

11. Codenotti B, De Rossi S, Pagan M, An Experimental Analysis of Lemke-Howson Algorithm [internet], 2008, Διαθέσιμο στον διαδικτυακό τόπο: https://arxiv.org/pdf/0811.3247.pdf

12. Cook W, Rohe A. Computing Minimum-Weight Perfect Matchings, INFORMS *J on Comp*, 1999, Sept 11 (2)

13. Cook W, Cunningham WH, Pulleyblank WR, Schrijver A, Combinatorial Optimization, W Ser in Disc Math and Optimization, Sept 18, 1997.

14. Daskalakis C, Topics in Algorithmic Game Theory, Lecture 12. [internet] Διαθέσιμο στον διαδικτυακό τόπο: http://people.csail.mit.edu/costis/6896sp10/Lecture12.pdf

15. Διαμαντάρας Κ, Σημειώσεις «Μηχανική Μάθηση Βαθιά Μάθηση και Εφαρμογές» [internet] ΑΤΕΙ Θεσσαλονίκης, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής, 2017.Διαθέσιμο στον διαδικτυακότόπο:http://cie.teiemt.gr/cie/wpcontent/uploads/2015/05/%CE%9A%CE%B1%CE%B2%CE%AC%CE%BB%CE%B1-5-2-2017.pdf

16. Darity W A Jr, ‘‘Nash Equilibrium”, International Encyclopedia of the social sciences, 2nd edition, 2007, 2: 374

17. Δελιγκας Α, Παίγνια δύο παικτών Υπολογιστικά Θέματα και Αλγόριθμοι , Διπλωματική Εργασία, Πάτρα, 2011

18. Demaine E, Algorithmic Lower Bounds, Fun with Hardness [internet]. MIT University. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-890-algorithmic-lower-bounds-fun-with-hardness-proofs-fall-2014/lecture-videos/lecture-22-ppad/

19. Δημητράκος Θ, Σημειώσεις για το μάθημα «ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ» [internet], Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Μαθηματικών, Σάμος. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: http://www.samos.aegean.gr/math/dimitheo/PITHANOTITES1.pdf

20. Dyer M, Meriddo N, Welz E, Linear Programming [internet], 1997. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.298.2751&rep=rep1&type=pdf

21. Erickson J, Algorithms, University of Illinois , 2018

22. Evans A, An Introduction to Game Theory, [internet].The economic approach to strategic interaction, Associate Professor of Economics”, ESCP Euro, 2015. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: https://www.youtube.com/watch?v=YndXmFGaRmU

23. Εφραιμίδης Π, *Βασικές Έννοιες Θεωρίας Παιγνίων*, Αθήνα: ΕΚΠΑ, 2014

24. Ferguson T, GAME THEORY: Two-Person Zero-Sum Games [internet]. Mathematics Department, UCLA, Second Edition, Part II pp.2-6 . Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: https://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/mat.pdf

25. Ferguson T, GAME THEORY: Two-Person Zero-Sum Games [internet]. Mathematics Department, UCLA, Second Edition, Part III p.16 . Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: https://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/bimat.pdf

26. Freiberger PA, Swaine MR, ENIAC Computer, Article [internet]. Encyclopedia Brittanica, Διαθέσιμο στον διαδικτυακό τόπο: https://www.britannica.com/technology/ENIAC

27. Ζησιμόπουλος Β, Συνδυαστική Βελτιστοποίηση ,Σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, 2017

28. Ζώτος Χ, Μικροοικονομία: Θεωρία παιγνίων Μέρος Α', [internet]. 2016. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: https://www.youtube.com/watch?v=FZcAn0GYnZU

29. Hammoud N, Game Theory: Minimax, Maximin Iterated Removal [internet]. University of Oxford, 2017. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: https://www.youtube.com./watch?v=FZcAn0GYnZU

30. Ιωαννίδης Ε, Γραμμικός Προγραμματισμός [internet]. Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 2013. Διαθέσιμο στον διαδικτυακό τόπο: http://myria.math.aegean.gr/epeaek/pdfs/linear-programming.pdf

31. Gairing M, Lückinga T, Mavronicolas M, Moniena B, The price of anarchy for polynomial social cost, Journal and Books, 2005, 117. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2006.07.055

32. Garvan F, *The Maple Book*, Chapman&Hall/CRC, 1995

33. Κατσιάπης Ε, Γιάλβαρη Μ, Θεωρία Παιγνίων και η Ελληνική Χρεωστική Κρίση, Διπλωματική Εργασία , ΤΕΙ Πειραιά, 2014

34. Karloff H, Linear Programming, Modern Birkhäuser Classics, 2001

35. Κουκόπουλος Δ, Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Ιστορίας –Αρχαιολογίας, Διάλεξη «*Σχεδίαση και Ανάλυση Αλγορίθμων*», 2019-2020 [internet]. Διαθέσιμο στον διαδκτυακό τόπο: : https://eclass.upatras.gr/modules/document/file.php/CULTURE109/SxALG1%202019.pdf

36. Λαμπρινουδάκης Κ, Σημειώσεις Μαθήματος «Αρχιτεκτονική Υπολογιστών Ι» [internet]. Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μηχανικών και Πληροφοριακών Συστημάτων, Διαθέσιμο διαδικτυακά στο: http://www.icsd.aegean.gr/lecturers/nkonofao/Notes-Arxitektonikh-I%20Labrinoudakis.pdf

37. Λαπατίνας Α. Διάλεξη 7: «Θεωρία παιγνίων» VA 28, 29 [internet]. Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διαθέσιμο στον διαδικτυακό τόπο: http://users.uoi.gr/alapatin/files/Lec%207_Game%20Theory.pdf

38. Leyton BK, Shoham Y, Computing Mixed-Strategy Nash Equilibrium (I) [internet]. Game Theory Course, The University of British Columbia, Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: https://www.youtube.com/watch?v=7jBf5fzGBlk

39. Μαρκάκης Ε, Διαλέξεις «Θεωρία Παιγνίων και Αποφάσεων - Εύρεση σημείων ισορροπίας σε παίγνια μηδενικού αθροίσματος», [internet]. Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών,2020. Διαθέσιμο στην πλατφόρμα του Open eclass: https://eclass.aueb.gr/modules/document/file.php/INF220/%CE%94%CE%B9%CE%B1%

CE%BB%CE%AD%CE%BE%CE%B5%CE%B9%CF%82%20%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%CF%82%20%CE%A0%CE%B1%CE%B9%CE%B3%CE%BD%CE%AF%CF%89%CE%BD/GT20-04-zero-sum.pdf

40. Μαρκάκης Ε, Διάλεξη «Θεωρία Παιγνίων και Αποφάσεων, Έννοιες λύσεων σε παίγνια , κυρίαρχες στρατηγικές και σημεία ισορροπίας» [internet]. Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2019. Διαθέσιμο στην πλατφόρμα του Open eclass : https://eclass.aueb.gr/modules/document/file.php/INF220/%CE%94%CE%B9%CE%B1%CE%BB%CE%AD%CE%BE%CE%B5%CE%B9%CF%82%20%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%CF%82%20%CE%A0%CE%B1%CE%B9%CE%B3%CE%BD%CE%AF%CF%89%CE%BD/GT20-02-solutions.pdf

41. Μαρκάκης Ε, Διαλέξεις «Θεωρία Παιγνίων και Αποφάσεων - Μεικτές Στρατηγικές», [internet]..Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2020. Διαθέσιμο στην πλατφόρμα του Open eclass: https://eclass.aueb.gr/modules/document/file.php/INF220/%CE%94%CE%B9%CE%B1%CE%BB%CE%AD%CE%BE%CE%B5%CE%B9%CF%82%20%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%CF%82%20%CE%A0%CE%B1%CE%B9%CE%B3%CE%BD%CE%AF%CF%89%CE%BD/GT20-03-mixed-strategies.pdf

42. Μηλολιδάκης ΚΑ, «Θεωρία Παιγνίων, Μαθηματικά Μοντέλα Σύγκρουσης και Συνεργασίας», Αθήνα: εκδόσεις Σοφία,2009,σελ.56-57

43. Myerson RB, Nash Equilibrium and the History of Economic Theory, J of Eco Lit, 1999, 37(3)3: 1067-1082. doi: 10.1257/jel.37.3.1067

44. Myerson RB, *Game Theory Analysis of conflict*, Boston: Harvard University Press, 1991

45. Nash J, Milnor, J A Beautiful Mind, 45(10) Notices of AMS (American Mathematical Society), November, 1998

46. Nelder J.A. and Mead R., A simplex method for function minimization [internet], 1965, Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: http://people.duke.edu/~hpgavin/cee201/Nelder+Mead-ComputerJournal-1965.pdf

47. Νικολόπουλος ΔΣ, «Σχεδίαση και Ανάλυση Αλγορίθμων», Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής , Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 2017

48. Nisan N, Roughgarden T, Tardos E, Vazirani VV, Algorithmic Game Theory, 1st edition, Cambridge: Cambridge University Press, 2007

49. Nicholson W, Snyder C, «Microeconomic Theory, Basic Principles and Extensions», United States of America, Publications Thomson South-Western, 2005

50. Ντούτση Ε, Διπλωματική Εργασία, «Μοντελοποίηση και βελτίωση της ανθρώπινης ικανότητας σε παιχνίδια στρατηγικής», Πάτρα, 2011

51. Osborne MJ, *"*An Introduction to Game Theory", Oxford: Oxford University Press, Ch. 2:16-17, 1995

52. Παπαθανασίου Ε, *«Πιθανότητες, Ορισμοί και Ιδιότητες»* , Καθηγητής Επιχειρηματικής Πληροφορικής, Πάτρα: ΕΑΠ, 2013

53. Poundstone W, John Von Neuman, Article [internet], Encyclopedia Britannica, 2020. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: https://www.britannica.com/biography/John-von-Neumann

54. Raoof O, Al-Raweshidy Brunel H, Theory of Games: An Introduction [internet]. University-West, London, 2015, Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο : https://www.researchgate.net/publication/221909363_Theory_of_Games_an_Introduction

55. Ρεφανίδης Ι, Διάλεξη «Θεωρία παιγνίων - Εισαγωγή», [internet]. Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, Διαθέσιμο στην πλατφόρμα OpenCourses: http://opencourses.uom.gr/assets/site/public/163/123-Theoria-Paignion-01-Refanidis.pdf

56. Ρεφανίδης Ι, Διάλεξη «Θεωρία Παιγνίων, Συμμετρικά παίγνια και συμμετρικές ισορροπίες» [internet]. Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας. Διαθέσιμο στην πλατφόρμα OpenCourses: http://opencourses.uom.gr/assets/site/public/177/135-Theoria-Paignion-05-Refanidis.pdf

57. Rigollet P, Mathematics of Machine Learning, Lecture 22, November, Scribe: Aden Forrow, 2012

58. Rougarden T, Lectures Notes on Algorithmic Game Theory, Stanford, July 28,2014

59. Roussu M, Dominant and Dominated Strategies" [internet]. Διαθέσιμο στο διαδίκτυο: https://www.youtube.com/watch?v=txB5GZY_WUE

60. Σαμαράς Ν, *«Εφαρμογές Μοντελοποίησης Γραμμικών Προβλημάτων»,* [internet]. Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: http://opencourses.uom.gr/assets/site/public/583/459-Gramikos-Diktyakos-Programmatismos-02-Samaras.pdf

61. Sen A, The Formulation of Rational Choice, The Am Eco Re, 1994 84 (2): pp.2-5

62. Sonmez T, Mixed Strategies, [internet]. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: http://www.tayfunsonmez.net/wp-content/uploads/2013/10/E308SL7.pdf

63. Spirakis P, Introduction to Computanional Game Theory, Biomatrix Games, Department of Computer Science, University of Liverpool, 2015

64. Σταματόπουλος Γ, Θεωρία Παιγνίων, Αθήνα: Εκδόσεις Κάλλιπος, 2015

65. Stanford encyclopedia of Philosophy, *Prisoner's Dilemma*, Archive, [internet], 1997. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο:*http://plato.stanford.edu/entries/prisoner-dilemma*

66. Τσάντας Ν, «Θεωρία Παιγνίων», [internet]. Πανεπιστήμιο Πάτρας , Διαθέσιμο στον διαδικτυακό τόπο: *https://thalis.math.upatras.gr/~tsantas/DownLoadFiles/OR_GameTheory.pdf*

67. The Editors of Encyclopedia Britannica, Antoine-Augustin Cournot, Article [internet], Encyclopedia Brittanica, 2020. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο:https://www.britannica.com/biography/Antoine-Augustin-Cournot

68. The Editors of Encyclopedia Britannica, John Nash, American Mathematician, Article [internet], Encyclopedia Britannica, 2020. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: https://www.britannica.com/biography/John-Nash

69. Trevisan L, Combinatorial Optimization: Exact and Approximate Algorithms, Stanford: Stanford University, 2011

70. The Skeptic Theory [internet] July, 8, 2018. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: https://www.youtube.com./watch?v=jQzjNyLZQYU

71. Vanderbei RJ, “Linear Programming: Foundations and Extensions”, DEPARTMENT OF OPERATIONS RESEARCH AND FINANCIAL ENGINEERING, PRINCETON UNIVERSITY, 1996

72. Von Neumann J, Morgenstern O, Theory of Game and Economic Behavior, Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 1944

73. Verbeek B, Morris C, *Game Theory and Ethics*, Stanford Encyclopedia of Philosophy [internet]. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: https://plato.stanford.edu/entries/game-ethics/

74. Walker M. Mixed Strategies: Minimax/Maximin and Nash Equilibrium [internet]. The University of Arizona, 2014. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: http://www.u.arizona.edu/~mwalker/MixedStrategy3.pdf

75. Wang Y, Game Theory “Rock, Paper, Scissors and Mixed Strategy, [internet]. Binghamton University, Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: https://www.youtube.com/watch?v=I_vBhNf5x9Y

76. Walker M, Wooders J, Paper “Mixed Strategy Equilibrium”, The New Palgrave Dictionary of Economics, 2nd Edition, Eds. Steven N. Durlauf and Lawrence E. Blume, Palgrave Macmillan, 2008. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: http://www.johnwooders.com/papers/MixedStrategyEquilibrium.pdf

77. Συργκάνης Β, «Καταστάσεις Ισορροπίας σε Μοντέλα Παιγνίων Συμφόρησης:Ύπαρξη, Πολυπλοκότητα και Απόδοση», Αθήνα: Ε.Μ.Π, 2009

78. Ψούνης Δ, Σημειώσεις «Ανάλυση Αλγορίθμων» [internet]. 2020, Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: https://www.slideshare.net/DimitrisPsounis/30-11-50926747

79. Manhattan Project [internet], 2013. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: https://en.wikipedia.org/wiki/Manhattan_Project

80. J. Robert Oppenheimer [internet]. 2020.Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: https://en.wikipedia.org/wiki/J._Robert_Oppenheimer

81. Oscar Mongerstern, [internet].2020. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: https://en.wikipedia.org/wiki/Oskar_Morgenstern

82. Émile Borel, [internet]. 2020. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: https://en.wikipedia.org/wiki/%C3%89mile_Borel

83. Zero-Sum Game, [internet]. 2020. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: https://www.investopedia.com/terms/z/zero-sumgame.asp

84. Best Response, [internet], 2020. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: https://en.wikipedia.org/wiki/Best_response

85. Κατανομή Πιθανότητας, [internet], 2020. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9A%CE%B1%CF%84%CE%B1%CE%BD%CE%BF%CE%BC%CE%AE_%CF%80%CE%B9%CE%B8%CE%B1%CE%BD%CF%8C%CF%84%CE%B7%CF%84%CE%B1%CF%82

86. Παίγνιο Μη Μηδενικού Αθροίσματος [internet] ,2020. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1_%CF%80%CE%B1%CE%B9%CE%B3%CE%BD%CE%AF%CF%89%CE%BD