



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

*«Μαρκοβιανά μοντέλα για την ανάλυση επιβίωσης από την
Covid-19 στην Ελλάδα»*

Κωνσταντίνα Γκίκα
ΑΜ: 2312015020

Επιβλέπων καθηγητής: Δρ. Βασίλειος Κούτρας, Επίκουρος Καθηγητής

Χίος, Ιούνιος 2022

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα της Διπλωματικής Εργασίας, κύριο Βασίλειο Κούτρα για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε με την ανάθεση του συγκεκριμένου θέματος, την προθυμία και τη σημαντική καθοδήγηση που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας. Ακόμη, επιθυμώ να ευχαριστήσω το διδακτικό προσωπικό του ΤΜΟΔ που συνέβαλε στην ακαδημαϊκή μου εκπαίδευση. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που με στήριξαν ηθικά και οικονομικά από την αρχή των σπουδών μου, ιδίως την οικογένειά μου, καθώς χωρίς αυτούς δεν θα ήταν τίποτα εφικτό.

Περίληψη

Η τρέχουσα πανδημία COVID-19 έχει προκαλέσει σύγχυση και ανυπολόγιστες ζημιές όσο κανένα άλλο γεγονός της σύγχρονης ιστορίας, κατ' επέκταση κρίνεται αναγκαία η περαιτέρω πληροφόρηση της πορείας της. Η παρούσα Διπλωματική Εργασία υλοποιήθηκε με απώτερο σκοπό την ανάλυση επιβίωσης από την νόσο COVID-19 στην Ελλάδα, καθώς και μία προσεγγιστική ποσοτικοποίηση των συνεπειών που απορρέονται από μία τόσο κρίσιμη κατάσταση. Βασικά εφόδια αποτελούν η θεωρία Πιθανοτήτων και η θεωρία Μαρκοβιανών διαδικασιών. Ως εκ τούτου, έχουν δημιουργηθεί Μαρκοβιανά μοντέλα διακριτού χρόνου συναρτήσει της συμπεριφοράς των πληθυσμιακών ομάδων αναφορικά με τον εμβολιασμό κατά του νέου κορωνοϊού SARS-CoV-2. Πρωταρχικό μέλημα είναι η συγκομιδή δεδομένων σε συνδυασμό με τη σωστή ανάλυση και ενσωμάτωσή τους στα προτεινόμενα μοντέλα. Ακολούθως, υπολογίζονται σημαντικά μέτρα απόδοσης που σχετίζονται με το ρυθμό διασποράς του ιού και την ανάλυση επιβίωσης από αυτόν, ενώ στη συνέχεια πραγματοποιούνται συγκρίσεις μεταξύ των προκύπτοντων αποτελεσμάτων του εκάστοτε μοντέλου. Σκοπός της Διπλωματικής Εργασίας είναι μέσω των συγκρίσεων που υλοποιούνται να προβούμε σε συμπεράσματα για την ανάλυση επιβίωσης των πληθυσμών, βασιζόμενοι στην πιθανότητα επιβίωσης και στα υπόλοιπα μέτρα απόδοσης. Η έρευνα μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως ο εμβολιασμός με ενισχυτική δόση αποτελεί μείζον ζήτημα τόσο για την επιβίωση από την πανδημία όσο και για την ελαχιστοποίηση των συνεπειών της.

Λέξεις κλειδιά: Πανδημία COVID-19, στοχαστική μοντελοποίηση, Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου, επιδημιολογικό μοντέλο, ανάλυση επιβίωσης

Abstract

The current COVID-19 pandemic has caused as much confusion and incalculable damages as no other event in modern history, so further information on its course is needed. The present Thesis was implemented with the ultimate goal to model the survival of COVID-19 disease in Greece, as well as an approximate quantification of the consequences resulting from such a critical situation. The basic methods used are based on Probability Theory as well as on the theory of Markov processes. Therefore, discrete-time Markov models based on the behavior of population groups regarding vaccination against the new coronavirus SARS-CoV-2 are developed. The primary concern is the collection of data in combination with the correct analysis and their integration in the proposed models. Subsequently, significant performance measures are being calculated related to the rate of virus spread and its survival analysis, that lead to comparisons between the resulting results of each model. The Thesis's purpose is to draw conclusions for the analysis of survival of populations, based on the probability of survival and other performance measures through the comparisons that are implemented. The research leads us to the conclusion that booster vaccination is a major issue both for pandemic survival as well as for minimizing its consequences.

Key words: Pandemic COVID-19, stochastic modeling, discrete-time Markov chains (DTMC), epidemiological model, survival analysis

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	3
Abstract	4
Κατάλογος Εικόνων	8
Κατάλογος Γραφημάτων.....	9
Κατάλογος Πινάκων.....	20
1 Εισαγωγή.....	22
1.1 Τί είναι η πανδημία	22
1.1.1 Βασικές έννοιες.....	22
1.1.2 Σε ποιες φάσεις επιμερίζεται μία πανδημία.....	24
1.1.3 Ιστορική αναδρομή πανδημιών	26
1.2 Η πανδημία του νέου κορωνοϊού COVID-19	26
1.3 Η εξέλιξη της πανδημίας στην Ελλάδα και οι συνέπειές της.....	29
1.4 Σκοπός της Διπλωματικής Εργασίας.....	32
1.5 Διάρθρωση Διπλωματικής Εργασίας	33
2 Μαρκοβιανές Αλυσίδες.....	34
2.1 Στοχαστικές Διαδικασίες.....	34
2.2 Μαρκοβιανές Αλυσίδες Διακριτού χρόνου (DTMC).....	35
2.2.1 Κατηγοριοποίηση των καταστάσεων των Μαρκοβιανών Αλυσίδων.....	37
2.2.2 Πιθανότητες μετάβασης n βημάτων	39
2.2.3 Πιθανότητα απορρόφησης.....	40
2.2.4 Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης.....	42
2.2.5 Πιθανότητα παραμονής σε κάθε κατάσταση.....	43
2.2.6 Μέσος χρόνος παραμονής σε κάθε κατάσταση.....	44
2.2.7 Διακύμανση του μέσου χρόνου παραμονής σε κάθε κατάσταση.....	44
2.3 Χρήση Μαρκοβιανών Αλυσίδων Διακριτού Χρόνου για την Ανάλυση Επιβίωσης.....	44
3 Μοντελοποίηση και Ανάλυση Επιβίωσης Συναρτήσεϊ του Εμβολιασμού του Πληθυσμού	46

3.1	Εισαγωγικές έννοιες	46
3.2	Συλλογή και προσαρμογή δεδομένων	48
3.3	Μοντέλο Πληθυσμού που δεν έχει χορηγηθεί καμία δόση εμβολίου (UN).....	64
3.3.1	Υπολογισμός πιθανότητας μετάβασης ενός βήματος για το μοντέλο UN	64
3.3.2	Υπολογισμός πιθανότητας μετάβασης n βημάτων για το μοντέλο UN	65
3.3.3	Υπολογισμός πιθανότητας επιβίωσης n βημάτων για το μοντέλο UN	89
3.3.4	Υπολογισμός πιθανότητας απορρόφησης για το μοντέλο UN	92
3.3.5	Υπολογισμός αναμενόμενου χρόνου θανάτου για το μοντέλο UN	92
3.3.6	Υπολογισμός πιθανότητα παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο UN.....	96
3.3.7	Υπολογισμός μέσου χρόνου παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο UN	101
3.3.8	Υπολογισμός διακύμανσης του μέσου χρόνου παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο UN.....	102
3.4	Μοντέλο Πληθυσμού που έχει χορηγηθεί μία δόση εμβολίου (PV).....	102
3.4.1	Υπολογισμός πιθανότητας μετάβασης ενός βήματος για το μοντέλο PV.....	102
3.4.2	Υπολογισμός πιθανότητας μετάβασης n βημάτων για το μοντέλο PV.....	103
3.4.3	Υπολογισμός πιθανότητα επιβίωσης n βημάτων για το μοντέλο PV	126
3.4.4	Υπολογισμός πιθανότητα απορρόφησης για το μοντέλο PV	129
3.4.5	Υπολογισμός αναμενόμενου χρόνου θανάτου για το μοντέλο PV.....	129
3.4.6	Υπολογισμός πιθανότητα παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο PV	131
3.4.7	Υπολογισμός μέσου χρόνου παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο PV	137
3.4.8	Υπολογισμός διακύμανσης του μέσου χρόνου παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο PV.....	138
3.5	Μοντέλο πληθυσμού που έχει εμβολιαστεί πλήρως(FV).....	138
3.5.1	Υπολογισμός πιθανότητας μετάβασης ενός βήματος για το μοντέλο FV.....	139
3.5.2	Υπολογισμός πιθανότητας μετάβασης n βημάτων για το μοντέλο FV.....	140
3.5.3	Υπολογισμός πιθανότητα επιβίωσης n βημάτων για το μοντέλο FV	163
3.5.4	Υπολογισμός πιθανότητα απορρόφησης για το μοντέλο FV	166
3.5.5	Υπολογισμός αναμενόμενου χρόνου θανάτου για το μοντέλο FV.....	166

3.5.6	Υπολογισμός πιθανότητα παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο FV	168
3.5.7	Υπολογισμός μέσου χρόνου παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο FV	173
3.5.8	Υπολογισμός διακύμανσης του μέσου χρόνου παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο FV.....	174
3.6	Μοντέλο πληθυσμού που έχει χορηγηθεί την αναμνηστική δόση (BO).....	175
3.6.1	Υπολογισμός πιθανότητας μετάβασης ενός βήματος για το μοντέλο BO	175
3.6.2	Υπολογισμός πιθανότητας μετάβασης n βημάτων για το μοντέλο BO	176
3.6.3	Υπολογισμός πιθανότητα επιβίωσης n βημάτων για το μοντέλο BO	199
3.6.4	Υπολογισμός πιθανότητα απορρόφησης για το μοντέλο BO.....	202
3.6.5	Υπολογισμός αναμενόμενου χρόνου θανάτου για το μοντέλο BO	202
3.6.6	Υπολογισμός πιθανότητα παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο BO.....	205
3.6.7	Υπολογισμός μέσου χρόνου παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο BO.....	209
3.6.8	Υπολογισμός διακύμανσης του μέσου χρόνου παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο BO	211
3.7	Συγκρίσεις και αποτελέσματα για την ανάλυση επιβίωσης του πληθυσμού.....	211
4	Συμπεράσματα και Μελλοντική Έρευνα.....	255
	Βιβλιογραφία.....	258

Κατάλογος Εικόνων

Εικόνα 1- Περιοχές του ΠΟΥ [6]	25
Εικόνα 2- Διάγραμμα καταστάσεων παραδείγματος "Ο περίπατος του μεθυσμένου" [44].....	39
Εικόνα 3-Διάγραμμα καταστάσεων επιδημιολογικών μοντέλων.....	47
Εικόνα 4-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Υγιής πληθυσμός" μοντέλου FV.....	49
Εικόνα 5-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάσταση "Μολυσμένος σε απομόνωση" μοντέλου FV	50
Εικόνα 6-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19" μοντέλου FV.....	51
Εικόνα 7-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ" μοντέλου FV	52
Εικόνα 8-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Υγιής πληθυσμός" μοντέλου BO	54
Εικόνα 9-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Μολυσμένος σε απομόνωση" μοντέλου BO.....	54
Εικόνα 10-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19" μοντέλου BO	55
Εικόνα 11-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ" μοντέλου BO.....	56
Εικόνα 12-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Υγιής πληθυσμός" μοντέλου UN.....	57
Εικόνα 13-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Μολυσμένος σε απομόνωση" μοντέλου UN	58
Εικόνα 14-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19" μοντέλου UN.....	59
Εικόνα 15-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ" μοντέλου UN	59
Εικόνα 16-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Υγιής πληθυσμός" μοντέλου PV	61
Εικόνα 17-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Μολυσμένος σε απομόνωση" μοντέλου PV	61
Εικόνα 18-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19" μοντέλου PV.....	62
Εικόνα 19-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ" μοντέλου PV	63

Κατάλογος Γραφημάτων

Διάγραμμα 1-Πιθανότητα μετάβασης ενός βήματος μοντέλου UN.....	65
Διάγραμμα 2-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=5$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου UN.	66
Διάγραμμα 3-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=5$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου UN.	67
Διάγραμμα 4-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=5$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου UN.	67
Διάγραμμα 5-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=5$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου UN.	68
Διάγραμμα 6-Πιθανότητες μετάβασης μετά από $n=5$ βήματα μοντέλου UN	69
Διάγραμμα 7- Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=10$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου UN	70
Διάγραμμα 8-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=10$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου UN	70
Διάγραμμα 9-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=10$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου UN	71
Διάγραμμα 10-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=10$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου UN	71
Διάγραμμα 11-Πιθανότητες μετάβασης καταστάσεων μετά από $n=10$ βήματα μοντέλου UN.....	72
Διάγραμμα 12-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=15$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου UN	73
Διάγραμμα 13-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=15$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου UN	74
Διάγραμμα 14-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=15$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου UN	74
Διάγραμμα 15-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=15$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου UN	75
Διάγραμμα 16-Πιθανότητες μετάβασης καταστάσεων μετά από $n=15$ βήματα μοντέλου UN.....	75
Διάγραμμα 17-Πιθανότητες κατάστασης μετά από $n=5,10,15$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου UN.....	76
Διάγραμμα 18-Πιθανότητες κατάστασης μετά από $n=5,10,15$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου UN	77
Διάγραμμα 19-Πιθανότητες κατάστασης μετά από $n=5,10,15$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου UN.....	77
Διάγραμμα 20-Πιθανότητες κατάστασης μετά από $n=5,10,15$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου UN	78
Διάγραμμα 21-Μεταβολή πιθανότητας “Υγιής πληθυσμός” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου UN	79
Διάγραμμα 22-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου UN	79
Διάγραμμα 23-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου UN.....	80

Διάγραμμα 24-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύόμενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου UN	80
Διάγραμμα 25-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου UN	81
Διάγραμμα 26-Μεταβολή πιθανότητας “Υγιής πληθυσμός” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου UN	81
Διάγραμμα 27-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου UN.....	82
Διάγραμμα 28-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύόμενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου UN.....	82
Διάγραμμα 29-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύόμενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου UN	83
Διάγραμμα 30-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου UN	83
Διάγραμμα 31-Μεταβολή πιθανότητας “Υγιής πληθυσμός” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου UN	84
Διάγραμμα 32-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου UN.....	84
Διάγραμμα 33-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύόμενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου UN.....	85
Διάγραμμα 34-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύόμενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου UN	85
Διάγραμμα 35-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου UN	86
Διάγραμμα 36-Μεταβολή πιθανότητας “Υγιής πληθυσμός” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου UN	86
Διάγραμμα 37-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου UN.....	87
Διάγραμμα 38-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύόμενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου UN.....	87
Διάγραμμα 39-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύόμενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου UN	88
Διάγραμμα 40-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου UN	88
Διάγραμμα 41-Πιθανότητες θανάτου από κάθε κατάσταση για $n=5,10,15,50,100$ ημέρες μοντέλου UN	90
Διάγραμμα 42-Πιθανότητες επιβίωσης για $n=5,10,15,50,100,200,1000$ μοντέλου UN	91
Διάγραμμα 43-Αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων των παροδικών καταστάσεων μοντέλου UN	94
Διάγραμμα 44-Αναμενόμενος χρόνος θανάτου μοντέλου UN.....	95
Διάγραμμα 45-Πιθανότητα παραμονής των καταστάσεων μετά από $n=5$ ημέρες μοντέλου UN	96
Διάγραμμα 46-Πιθανότητα παραμονής των καταστάσεων μετά από $n=10$ ημέρες μοντέλου UN	97
Διάγραμμα 47-Πιθανότητα παραμονής των καταστάσεων μετά από $n=15$ ημέρες μοντέλου UN	98
Διάγραμμα 48-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής “Υγιής πληθυσμός” μοντέλου UN.....	99
Διάγραμμα 49-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής “Μολυσμένος σε απομόνωση” μοντέλου UN	99
Διάγραμμα 50-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής “Νοσηλεύόμενος σε κλινική COVID-19” μοντέλου UN ..	100
Διάγραμμα 51-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής “Νοσηλεύόμενος σε ΜΕΘ” μοντέλου UN	100
Διάγραμμα 52-Μέσος χρόνος παραμονής κάθε κατάστασης μοντέλου UN.....	101

Διάγραμμα 53-Πιθανότητα μετάβασης ενός βήματος μοντέλου PV	103
Διάγραμμα 54-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV	104
Διάγραμμα 55-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV	105
Διάγραμμα 56-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου PV	105
Διάγραμμα 57- Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου PV	106
Διάγραμμα 58-Πιθανότητες μετάβασης καταστάσεων μετά από n=5 βήματα μοντέλου PV	107
Διάγραμμα 59-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV	108
Διάγραμμα 60-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV	108
Διάγραμμα 61-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου PV	109
Διάγραμμα 62-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου PV	109
Διάγραμμα 63-Πιθανότητες μετάβασης καταστάσεων μετά από n=10 βήματα μοντέλου PV	110
Διάγραμμα 64-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV	111
Διάγραμμα 65- Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV	112
Διάγραμμα 66- Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου PV	112
Διάγραμμα 67- Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου PV	113
Διάγραμμα 68- Πιθανότητες μετάβασης καταστάσεων μετά από n=15 βήματα μοντέλου PV	114
Διάγραμμα 69-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV.....	114
Διάγραμμα 70-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV.....	115
Διάγραμμα 71-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου PV.....	115
Διάγραμμα 72-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου PV.....	116
Διάγραμμα 73-Μεταβολή πιθανότητας “Υγιής πληθυσμός” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV	116
Διάγραμμα 74-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV.....	117

Διάγραμμα 75-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύόμενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV.....	117
Διάγραμμα 76- Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύόμενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV	118
Διάγραμμα 77- Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV	118
Διάγραμμα 78-Μεταβολή πιθανότητας “Υγιής πληθυσμός” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV	119
Διάγραμμα 79-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV.....	119
Διάγραμμα 80-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύόμενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV.....	120
Διάγραμμα 81-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύόμενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV	120
Διάγραμμα 82-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV	121
Διάγραμμα 83-Μεταβολή πιθανότητας “Υγιής πληθυσμός” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου PV	121
Διάγραμμα 84-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου PV.....	122
Διάγραμμα 85-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύόμενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου PV.....	122
Διάγραμμα 86-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύόμενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου PV	123
Διάγραμμα 87-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου PV	123
Διάγραμμα 88-Μεταβολή πιθανότητας “Υγιής πληθυσμός” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου PV	124
Διάγραμμα 89-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου PV.....	124
Διάγραμμα 90-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύόμενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου PV.....	125
Διάγραμμα 91-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύόμενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου PV	125
Διάγραμμα 92-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου PV	126
Διάγραμμα 93-Πιθανότητες θανάτου από κάθε κατάσταση για $n=5,10,15,50,100$ ημέρες μοντέλου PV	127
Διάγραμμα 94-Πιθανότητες επιβίωσης από κάθε κατάσταση για $n=5,10,15,50,100,200,1000$ ημέρες μοντέλου PV	128
Διάγραμμα 95-Αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων των παροδικών καταστάσεων μοντέλου PV.....	130
Διάγραμμα 96-Αναμενόμενος χρόνος θανάτου μοντέλου PV	131
Διάγραμμα 97-Πιθανότητα παραμονής των καταστάσεων μετά από $n=5$ ημέρες μοντέλου PV	132
Διάγραμμα 98-Πιθανότητα παραμονής των καταστάσεων μετά από $n=10$ ημέρες μοντέλου PV	133
Διάγραμμα 99-Πιθανότητα παραμονής των καταστάσεων μετά από $n=15$ ημέρες μοντέλου PV	134
Διάγραμμα 100-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής “Υγιής πληθυσμός” μοντέλου PV	135
Διάγραμμα 101-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής “Μολυσμένος σε απομόνωση” μοντέλου PV	135

Διάγραμμα 102-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής “Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19” μοντέλου PV .	136
Διάγραμμα 103 Μεταβολή πιθανότητας παραμονής “Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ” μοντέλου PV	136
Διάγραμμα 104-Μέσος χρόνος παραμονής κάθε κατάστασης μοντέλου PV.....	137
Διάγραμμα 105-Πιθανότητα μετάβασης ενός βήματος μοντέλου FV	139
Διάγραμμα 106-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV	141
Διάγραμμα 107-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV	141
Διάγραμμα 108-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου FV	142
Διάγραμμα 109-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου FV	142
Διάγραμμα 110-Πιθανότητες μετάβασης μετά από n=5 βήματα μοντέλου FV	143
Διάγραμμα 111-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV	144
Διάγραμμα 112-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV	145
Διάγραμμα 113-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου FV	145
Διάγραμμα 114-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου FV	146
Διάγραμμα 115-Πιθανότητες μετάβασης μετά από n=10 βήματα μοντέλου FV	147
Διάγραμμα 116-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV	148
Διάγραμμα 117-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV	148
Διάγραμμα 118-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου FV	149
Διάγραμμα 119-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου FV	150
Διάγραμμα 120-Πιθανότητες μετάβασης μετά από n=15 βήματα μοντέλου FV	151
Διάγραμμα 121-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV	151
Διάγραμμα 122-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV	152
Διάγραμμα 123-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου FV	152
Διάγραμμα 124-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου FV	153

Διάγραμμα 125-Μεταβολή πιθανότητας “Υγιής πληθυσμός” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV	153
Διάγραμμα 126-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV.....	154
Διάγραμμα 127-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV.....	154
Διάγραμμα 128-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV	155
Διάγραμμα 129-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV	155
Διάγραμμα 130-Μεταβολή πιθανότητας “Υγιής πληθυσμός” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV	156
Διάγραμμα 131-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV.....	156
Διάγραμμα 132-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV.....	157
Διάγραμμα 133-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV	157
Διάγραμμα 134-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV	158
Διάγραμμα 135-Μεταβολή πιθανότητας “Υγιής πληθυσμός” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου FV	158
Διάγραμμα 136-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου FV.....	159
Διάγραμμα 137-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου FV.....	159
Διάγραμμα 138-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου FV	160
Διάγραμμα 139-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου FV	160
Διάγραμμα 140-Μεταβολή πιθανότητας “Υγιής πληθυσμός” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου FV	161
Διάγραμμα 141-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου FV.....	161
Διάγραμμα 142-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου FV.....	162
Διάγραμμα 143-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου FV	162
Διάγραμμα 144-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου FV	163
Διάγραμμα 145-Πιθανότητες θανάτου από κάθε κατάσταση για $n=5,10,15,100$ ημέρες μοντέλου FV	164
Διάγραμμα 146-Πιθανότητες επιβίωσης από κάθε κατάσταση για $n=5,10,15,100,200,1000$ ημέρες μοντέλου FV	165
Διάγραμμα 147-Αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων των παροδικών καταστάσεων μοντέλου FV	167
Διάγραμμα 148-Αναμενόμενος χρόνος θανάτου μοντέλου FV	168
Διάγραμμα 149-Πιθανότητες παραμονής των καταστάσεων μετά από $n=5$ ημέρες μοντέλου FV.....	169
Διάγραμμα 150-Πιθανότητες παραμονής των καταστάσεων μετά από $n=10$ ημέρες μοντέλου FV.....	170

Διάγραμμα 151-Πιθανότητες παραμονής των καταστάσεων μετά από n=15 ημέρες μοντέλου FV.....	171
Διάγραμμα 152-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής “Υγιής πληθυσμός” μοντέλου FV	171
Διάγραμμα 153-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής “Μολυσμένος σε απομόνωση” μοντέλου FV	172
Διάγραμμα 154-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής “Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19” μοντέλου FV .	172
Διάγραμμα 155-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής “Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ” μοντέλου FV	173
Διάγραμμα 156-Μέσος χρόνος παραμονής κάθε κατάστασης μοντέλου FV.....	174
Διάγραμμα 157-Πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος μοντέλου BO.....	176
Διάγραμμα 158-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO	177
Διάγραμμα 159-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO	178
Διάγραμμα 160-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου BO	178
Διάγραμμα 161-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου BO	179
Διάγραμμα 162-Πιθανότητες μετάβασης των καταστάσεων μετά από n=5 βήματα μοντέλου BO.....	180
Διάγραμμα 163-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO	181
Διάγραμμα 164-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO	181
Διάγραμμα 165-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου BO	182
Διάγραμμα 166-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου BO	182
Διάγραμμα 167-Πιθανότητες μετάβασης των καταστάσεων μετά από n=10 βήματα μοντέλου BO.....	183
Διάγραμμα 168-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO	184
Διάγραμμα 169-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO	185
Διάγραμμα 170-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου BO	185
Διάγραμμα 171-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου BO	186
Διάγραμμα 172-Πιθανότητες μετάβασης μετά από n=15 βήματα μοντέλου BO.....	187
Διάγραμμα 173-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO	187
Διάγραμμα 174-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO	188

Διάγραμμα 175-Πιθανότητες κατάστασης μετά από $n=5,10,15$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου BO	188
Διάγραμμα 176-Πιθανότητες κατάστασης μετά από $n=5,10,15$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου BO	189
Διάγραμμα 177-Μεταβολή πιθανότητας “Υγιής πληθυσμός” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO....	189
Διάγραμμα 178-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO	190
Διάγραμμα 179-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO.....	190
Διάγραμμα 180-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO	191
Διάγραμμα 181-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO.....	191
Διάγραμμα 182-Μεταβολή πιθανότητας “Υγιής πληθυσμός” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO....	192
Διάγραμμα 183-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO	192
Διάγραμμα 184-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO.....	193
Διάγραμμα 185-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO	193
Διάγραμμα 186-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO.....	194
Διάγραμμα 187-Μεταβολή πιθανότητας “Υγιής πληθυσμός” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου BO....	194
Διάγραμμα 188-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου BO	195
Διάγραμμα 189-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου BO.....	195
Διάγραμμα 190-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου BO	196
Διάγραμμα 191-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου BO.....	196
Διάγραμμα 192-Μεταβολή πιθανότητας “Υγιής πληθυσμός” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου BO....	197
Διάγραμμα 193-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου BO	197
Διάγραμμα 194-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου BO	198
Διάγραμμα 195-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου BO	198
Διάγραμμα 196-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου BO.....	199
Διάγραμμα 197-Πιθανότητες θανάτου από κάθε κατάσταση για $n=5,10,15,50,100$ ημέρες μοντέλου BO.....	200
Διάγραμμα 198-Πιθανότητες επιβίωσης από κάθε κατάσταση για $n=5,10,15,50,100,200,1000$ ημέρες μοντέλου BO	201

Διάγραμμα 199-Αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων των παροδικών καταστάσεων μοντέλου BO	203
Διάγραμμα 200-Αναμενόμενος χρόνος θανάτου μοντέλου BO.....	204
Διάγραμμα 201-Πιθανότητα παραμονής των καταστάσεων μετά από n=5 ημέρες μοντέλου BO	205
Διάγραμμα 202-Πιθανότητα παραμονής των καταστάσεων μετά από n=10 ημέρες μοντέλου BO	206
Διάγραμμα 203-Πιθανότητα παραμονής των καταστάσεων μετά από n=15 ημέρες μοντέλου BO	207
Διάγραμμα 204-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής “Υγιής πληθυσμός” μοντέλου BO.....	208
Διάγραμμα 205 Μεταβολή πιθανότητας παραμονής “Μολυσμένος σε απομόνωση” μοντέλου BO.....	208
Διάγραμμα 206 Μεταβολή πιθανότητας παραμονής “Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19” μοντέλου BO .	209
Διάγραμμα 207 Μεταβολή πιθανότητας παραμονής “Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ” μοντέλου BO	209
Διάγραμμα 208-Μέσος χρόνος παραμονής κάθε κατάστασης μοντέλου BO	210
Διάγραμμα 209-Πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός» μοντέλων UN, PV, FV, BO	213
Διάγραμμα 210-Πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος στην κατάσταση «Μολυσμένος σε απομόνωση» μοντέλων UN, PV, FV, BO	213
Διάγραμμα 211-Πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος στην κατάσταση «Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19» μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	214
Διάγραμμα 212-Πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος στην κατάσταση «Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ» μοντέλων UN, PV, FV, BO	214
Διάγραμμα 213-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	217
Διάγραμμα 214-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	217
Διάγραμμα 215-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	218
Διάγραμμα 216-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	218
Διάγραμμα 217-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	220
Διάγραμμα 218-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	220
Διάγραμμα 219-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	221
Διάγραμμα 220-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	221
Διάγραμμα 221-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	223
Διάγραμμα 222-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	223

Διάγραμμα 223-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO	224
Διάγραμμα 224-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO	224
Διάγραμμα 225-Μεταβολή πιθανότητας «Υγιής πληθυσμός» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	225
Διάγραμμα 226-Μεταβολή πιθανότητας «Μολυσμένος σε απομόνωση» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	226
Διάγραμμα 227-Μεταβολή πιθανότητας «Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	226
Διάγραμμα 228-Μεταβολή πιθανότητας «Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO	227
Διάγραμμα 229-Μεταβολή πιθανότητας «Θάνατος» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	227
Διάγραμμα 230-Μεταβολή πιθανότητας «Υγιής πληθυσμός» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	228
Διάγραμμα 231-Μεταβολή πιθανότητας «Μολυσμένος σε απομόνωση» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	228
Διάγραμμα 232-Μεταβολή πιθανότητας «Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	229
Διάγραμμα 233-Μεταβολή πιθανότητας «Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO	229
Διάγραμμα 234-Μεταβολή πιθανότητας «Θάνατος» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	230
Διάγραμμα 235-Μεταβολή πιθανότητας «Υγιής πληθυσμός» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	230
Διάγραμμα 236-Μεταβολή πιθανότητας «Μολυσμένος σε απομόνωση» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	231
Διάγραμμα 237-Μεταβολή πιθανότητας «Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	231
Διάγραμμα 238-Μεταβολή πιθανότητας «Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO	232
Διάγραμμα 239-Μεταβολή πιθανότητας «Θάνατος» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	232
Διάγραμμα 240-Μεταβολή πιθανότητας «Υγιής πληθυσμός» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	233
Διάγραμμα 241-Μεταβολή πιθανότητας «Μολυσμένος σε απομόνωση» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	233

Διάγραμμα 242-Μεταβολή πιθανότητας «Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	234
Διάγραμμα 243-Μεταβολή πιθανότητας «Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO	234
Διάγραμμα 244-Μεταβολή πιθανότητας «Θάνατος» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	235
Διάγραμμα 245-Μεταβολή πιθανοτήτων επιβίωσης μετά από n=5,100,200,1000 ημέρες μοντέλων UN.....	236
Διάγραμμα 246-Μεταβολή πιθανοτήτων επιβίωσης μετά από n=5,100,200,1000 ημέρες μοντέλων PV.....	236
Διάγραμμα 247-Μεταβολή πιθανοτήτων επιβίωσης μετά από n=5,100,200,1000 ημέρες μοντέλων FV.....	237
Διάγραμμα 248-Μεταβολή πιθανοτήτων επιβίωσης μετά από n=5,100,200,1000 ημέρες μοντέλων BO	237
Διάγραμμα 249-Πιθανότητες επιβίωσης μετά από n=5 βήματα μοντέλων UN, PV, FV, BO	238
Διάγραμμα 250-Πιθανότητες επιβίωσης μετά από n=10 βήματα μοντέλων UN, PV, FV, BO	238
Διάγραμμα 251-Πιθανότητες επιβίωσης μετά από n=15 βήματα μοντέλων UN, PV, FV, BO	239
Διάγραμμα 252-Πιθανότητες επιβίωσης μετά από n=50 βήματα μοντέλων UN, PV, FV, BO	239
Διάγραμμα 253-Πιθανότητες επιβίωσης μετά από n=100 βήματα μοντέλων UN, PV, FV, BO	240
Διάγραμμα 254-Πιθανότητες επιβίωσης μετά από n=200 βήματα μοντέλων UN, PV, FV, BO	240
Διάγραμμα 255-Πιθανότητες επιβίωσης μετά από n=1000 βήματα μοντέλων UN, PV, FV, BO	241
Διάγραμμα 256-Αναμενόμενος χρόνος θανάτου δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO..	243
Διάγραμμα 257-Αναμενόμενος χρόνος θανάτου δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO..	244
Διάγραμμα 258-Αναμενόμενος χρόνος θανάτου δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO..	244
Διάγραμμα 259-Αναμενόμενος χρόνος θανάτου δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO..	245
Διάγραμμα 263-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής «Υγιής πληθυσμός» μετά από n=5,10,15 βήματα μοντέλων UN, PV, FV, BO	247
Διάγραμμα 264-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής «Μολυσμένος σε απομόνωση» μετά από n=5,10,15 βήματα μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	248
Διάγραμμα 265-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής «Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19» μετά από n=5,10,15 βήματα μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	248
Διάγραμμα 266-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής «Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ» μετά από n=5,10,15 βήματα μοντέλων UN, PV, FV,	249
Διάγραμμα 267-Μέση τιμή χρόνου παραμονής στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός» μοντέλων UN, PV, FV, BO	251
Διάγραμμα 268-Μέση τιμή χρόνου παραμονής στην κατάσταση «Μολυσμένος σε απομόνωση» μοντέλων UN, PV, FV, BO	252
Διάγραμμα 269-Μέση τιμή χρόνου παραμονής στην κατάσταση «Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19» μοντέλων UN, PV, FV, BO.....	252
Διάγραμμα 270-Μέση τιμή χρόνου παραμονής στην κατάσταση «Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ» μοντέλων UN, PV, FV, BO	253
Διάγραμμα 271-Πίνακας μέση τιμή του χρόνου παραμονής στις μεταβατικές καταστάσεις ανά επίσκεψη μοντέλων UN, BO	253

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1-Πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης P επιδημιολογικών μοντέλων.....	47
Πίνακας 2-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων μοντέλου FV	53
Πίνακας 3-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων μοντέλου BO.....	56
Πίνακας 4-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων μοντέλου UN.....	60
Πίνακας 5-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων μοντέλου PV	63
Πίνακας 6-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων n=5 βημάτων μοντέλου UN	65
Πίνακας 7-Πίνακας μετάβασης καταστάσεων μετά από n=10 βήματα μοντέλου UN.....	69
Πίνακας 8-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων μετά από n=15 βήματα μοντέλου UN.....	72
Πίνακας 9-Πιθανότητες θανάτου από κάθε κατάσταση για n=5,10,15,50,100,200,1000 ημέρες μοντέλου UN..	89
Πίνακας 10-Πιθανότητες επιβίωσης από κάθε κατάσταση για n=5,10,15,50,100,200,1000 ημέρες μοντέλου UN	91
Πίνακας 11-Πίνακας πιθανοτήτων απορρόφησης μοντέλου UN.....	92
Πίνακας 12-Πρωταρχικός πίνακας μοντέλου UN.....	93
Πίνακας 13-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων n=5 βημάτων μοντέλου PV.....	104
Πίνακας 14- Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων n=10 βημάτων μοντέλου PV.....	107
Πίνακας 15-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων n=15 βημάτων μοντέλου PV.....	110
Πίνακας 16-Πιθανότητες θανάτου από κάθε κατάσταση για n=5,10,15,50,100,200,1000 ημέρες μοντέλου PV	127
Πίνακας 17- Πιθανότητες επιβίωσης από κάθε κατάσταση για n=5,10,15,50,100,200,1000 ημέρες μοντέλου PV	128
Πίνακας 18-Πρωταρχικός πίνακας μοντέλου PV	129
Πίνακας 19-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων n=5 βημάτων μοντέλου FV.....	140
Πίνακας 20-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων n=10 βημάτων μοντέλου FV.....	143
Πίνακας 21-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων n=15 βημάτων μοντέλου FV.....	147
Πίνακας 22-Πιθανότητες θανάτου από κάθε κατάσταση για n=5,10,15,100,200,1000 ημέρες μοντέλου FV....	164
Πίνακας 23-Πιθανότητες επιβίωσης από κάθε κατάσταση για n=5,10,15,100,200,1000 ημέρες μοντέλου FV .	165
Πίνακας 24-Πρωταρχικός πίνακας μοντέλου FV	166
Πίνακας 25-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων n=5 βημάτων μοντέλου BO	176
Πίνακας 26-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων μετά από n=10 βήματα μοντέλου BO	180
Πίνακας 27-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων n=15 βημάτων μοντέλου BO	183
Πίνακας 28-Πιθανότητες θανάτου από κάθε κατάσταση για n=5,10,15,50,100,200,1000 ημέρες μοντέλου BO	200
Πίνακας 29-Πιθανότητες επιβίωσης από κάθε κατάσταση για n=5,10,15,50,100,200,1000 ημέρες μοντέλου BO	201
Πίνακας 30-Πρωταρχικός πίνακας μοντέλου BO	202
Πίνακας 31-Πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος μοντέλων UN, PV, FV, BO	212
Πίνακας 32-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων n=5 βημάτων μοντέλων UN, PV, FV, BO	216

Πίνακας 33-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων n=10 βημάτων μοντέλων UN, PV, FV, BO	219
Πίνακας 34-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων n=15 βημάτων μοντέλων UN, PV, FV, BO	222
Πίνακας 35-Αναμενόμενος χρόνος θανάτου των καταστάσεων μοντέλων UN, PV, FV, BO	242
Πίνακας 36-Πίνακας πιθανοτήτων παραμονής μεταβατικών καταστάσεων n=5,10,15 βημάτων μοντέλων UN,PV,FV,BO	246
Πίνακας 37-Αναμενόμενος αριθμός βημάτων σε κάθε κατάσταση ανά επίσκεψη μοντέλων UN, PV, FV, BO	250

1 Εισαγωγή

1.1 Τί είναι η πανδημία

1.1.1 Βασικές έννοιες

Ο όρος «επιδημιολογία» προκύπτει από τη σύνθεση των ελληνικών λέξεων «επί», «δήμος» και «λόγος» και η ετυμολογική του ανάλυση είναι η μελέτη γεγονότων που εκδηλώνονται σε έναν πληθυσμό [1]. Η επιδημιολογία είναι ο επιστημονικός κλάδος που ερευνά το συνδυασμό κατανομής και παραγόντων που σχετίζονται με την υγεία ή τα γεγονότα (πχ. εξάπλωση διάφορων νοσημάτων, παροχή/χρήση υγειονομικού εξοπλισμού) σε συγκεκριμένες πληθυσμιακές ομάδες, αλλά και την χρήση των προκύπτων αποτελεσμάτων στον έλεγχο των εξεταζόμενων προβλημάτων. Η μελέτη εμπεριέχει παρατήρηση των γεγονότων, αναλυτικές έρευνες και πειράματα, τόσο στις περιοχές όσο και στους ανθρώπους που ασθένησαν, αλλά και στη χρονική στιγμή που λάβαν χώρα τα γεγονότα. Ακόμη, λαμβάνονται υπόψη όλοι οι καθοριστικοί παράγοντες (φυσικοί, βιολογικοί, κοινωνικοί, πολιτιστικοί) που άμεσα ή έμμεσα ασκούν επιρροή στην υγεία των ομάδων. Ο πρωταρχικός στόχος της επιδημιολογίας είναι η προστασία και στη συνέχεια η αποκατάσταση της υγείας [2].

Οι συχνότερες λέξεις που χρησιμοποιούνται για τη λεπτομερειακή απόδοση των λοιμωδών ασθενειών είναι οι: ενδημία, έξαρση, επιδημία και πανδημία [3]. Ωστόσο, η ένταξη μίας νόσου στις παραπάνω κατηγορίες, δεν καθορίζεται από μέγιστα και ελάχιστα αριθμητικά όρια κρουσμάτων [4]. Οι όροι αυτοί έχουν πολύ ουσιαστικές διαφορές και οι προϋποθέσεις για τη χρήση τους που βασίζονται κυρίως στην απόκλιση του πραγματικού και του αναμενόμενου αριθμού επιβεβαιωμένων περιστατικών μιας ασθένειας, σε μία δεδομένη χρονική περίοδο, αλλά και στη ταχύτητα της γεωγραφικής διασποράς του ιού [3]. Αναλυτικότερα, οι κατηγορίες είναι οι εξής:

Ενδημία: Ως ενδημία ορίζεται η παρατεταμένη διάρκεια μίας ασθένειας σε μία δεδομένη γεωγραφική περιοχή ή πληθυσμιακή ομάδα [2]. Μία λοιμώδης ενδημική νόσος προϋποθέτει ένα σταθερό ποσοστό μεταξύ των επιβεβαιωμένων και των εκτιμώμενων περιστατικών. Οι πληθυσμιακές ομάδες που μπορεί να παρουσιαστεί μία ενδημία κυμαίνονται από μία πόλη έως μία ήπειρο και ανάλογα με το ποσοστό κρουσμάτων μπορεί να χαρακτηριστεί ως υψηλή ή

χαμηλή. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η ηπατίτιδα Β που έχει εξαπλωθεί παγκοσμίως, με την Ευρώπη και την Βόρεια Αμερική να έχουν μικρό ποσοστό κρουσμάτων (χαμηλή ενδημικότητα), ενώ στην Ασία και την Αφρική υψηλότερο (υψηλή ενδημικότητα) [3].

Έξαρση: Όταν ο αριθμός κρουσμάτων μιας ενδημικής ασθένειας υπερτερεί των αναμενόμενων περιστατικών, ωστόσο όμως περιορίζεται σε σχετικά μικρές περιοχές (πχ. μία πόλη, ένα κλειστό ίδρυμα) ονομάζεται έξαρση [2]. Μια πιθανή έξαρση μπορεί να συντελεστεί με δύο τρόπους, είτε με μία απρόσμενη αύξηση κρουσμάτων, είτε με την ύπαρξη κρουσμάτων σε περιοχές που δεν υπήρχαν πριν. Συνεπώς, αυτό σημαίνει ότι ένα μεμονωμένο κρούσμα, αν βρεθεί σε περιοχές που δεν προϋπήρχε η συγκεκριμένη ασθένεια, μπορεί να αποτελέσει ενδημική έξαρση (πχ. πολλαπλές εξάρσεις του ιού Έμπολα σε διάφορες αφρικάνικες χώρες, 1976) [3].

Επιδημία: Επιδημία είναι μία ασθένεια με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά (πχ. πανομοιότυπα συμπτώματα στους ασθενείς), η οποία εμφανίζει κρούσματα, φανερά περισσότερα από το προσδόκιμο όριο μετάδοσης. Οι μολυσματικές εστίες μπορεί να δημιουργηθούν στον ανθρώπινο, φυτικό ή ζωικό πληθυσμό μίας ευρύτερης γεωγραφικής περιοχής ή να επεκταθεί σε πολλές χώρες [2]. Μία επιδημία μπορεί να αποτελέσει πρόβλημα σε μία κοινωνία για μερικές ώρες αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις διαρκεί αρκετά χρόνια, με χαρακτηριστικό παράδειγμα το ξέσπασμα του ιού Έμπολα στη Δυτική Αφρική το 2014-2016 [3, 4].

Πανδημία: Ως πανδημία ορίζεται η μετάδοση μίας επιδημικής ασθένειας με εξαιρετικά γρήγορους ρυθμούς, σε διεθνή κλίμακα ή σε μία πολύ ευρεία περιοχή. Οι πληθυσμιακές ομάδες που πλήττει συνήθως είναι μεγάλες, χωρίς όμως αυτό να είναι απαραίτητο [2]. Η ύπαρξη ενός νέου ιού είναι ο βασικότερος λόγος που παρουσιάζεται μία πανδημία, ο οποίος έχει βασικά γνωρίσματα την παρατεταμένη διάρκεια και την ικανότητα προσβάλει μαζικά τον ανθρώπινο πληθυσμό, κατ' επέκταση μεταδίδεται με ταχύτατους ρυθμούς [5]. Η κοινωνική κινητικότητα σε συνδυασμό με την ευκολία διάδοσης του εκάστοτε ιού, αποτελούν τους κυριότερους παράγοντες που επηρεάζουν το μέγεθος αλλά και τον ρυθμό εξάπλωσής του. Στη σύγχρονη εποχή, οι αεροπορικές μετακινήσεις και το διεθνές εμπόριο είναι συντελεστές που δυσχεραίνουν κατά πολύ μία ανάλογη κατάσταση, καθώς ο ιός μπορεί να ξεπεράσει τα σύνορα μιας χώρας σε λίγες ώρες. Χαρακτηριστική περίπτωση πανδημίας αποτελεί ο ιός HIV που προκαλεί AIDS, όπου για δεκαετίες αποτέλεσε επιδημική ασθένεια στην Αφρική και στα τέλη του 20^{ου} αιώνα μετονομάστηκε σε πανδημία [3].

1.1.2 Σε ποιες φάσεις επιμερίζεται μία πανδημία

Ο Παγκόσμιος Οργανισμός Υγείας (ΠΟΥ) το 1999 ανέπτυξε ένα πρότυπο έξι διαδοχικών φάσεων που απαρτίζουν μία πανδημία και καταστάλαξε στην τελική του μορφή το 2005. Η κατάταξη αυτή περιγράφει την κινητικότητα μίας νέας μολυσματικής ασθένειας, από τα αρχικά της στάδια έως ότου προσβάλει τον ανθρώπινο οργανισμό και εξαπλωθεί παγκοσμίως. Είναι μία ενέργεια που σκοπεύει στην έγκαιρη κινητοποίηση των δημόσιων αρχών σε ανάλογες περιπτώσεις για στην ελαχιστοποίηση των επιπτώσεων που απορρέει μία τέτοια κατάσταση, αλλά και στην εύρεση δράσεων ανάκαμψης της μεταπανδημικής περιόδου. Για τον λόγο αυτό, δίνεται έμφαση στις περιόδους που μεσολαβούν μετά το πέρας της έκτης φάσης, δηλαδή αφότου ολοκληρωθεί το πρώτο κύμα πανδημίας. Αναλυτικότερα:

Φάση 1: Κανένας ιός που μεταδίδεται ανάμεσα στην πανίδα (ιδίως στα πτηνά), δεν έχει προξενήσει λοιμώξεις στον ανθρώπινο οργανισμό.

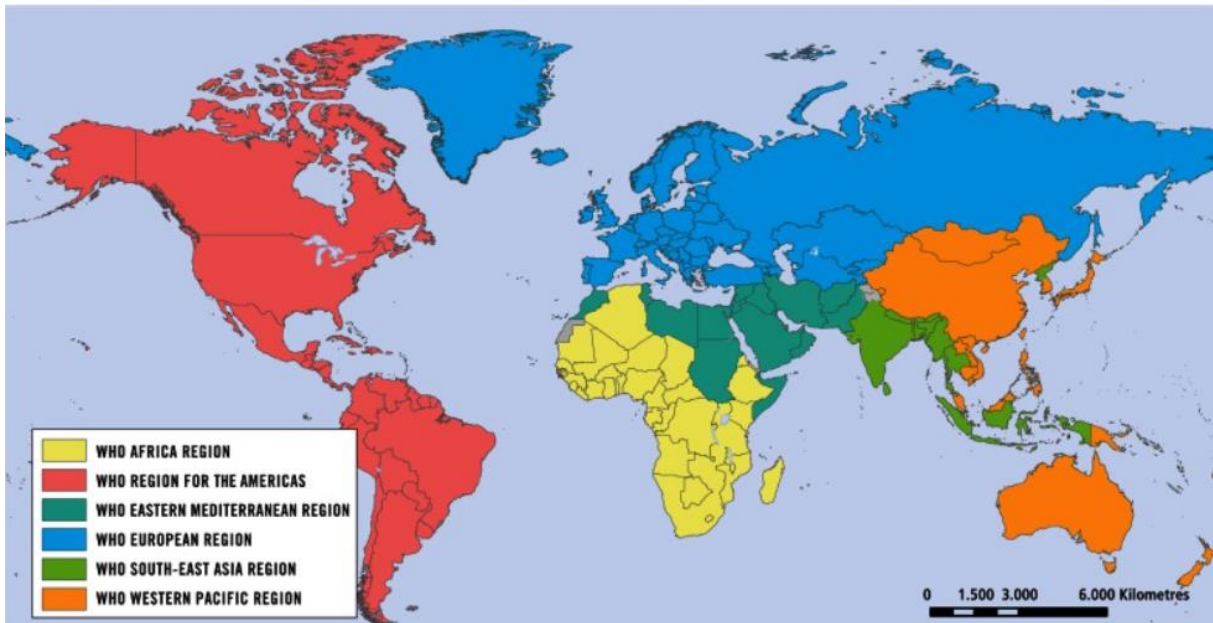
Φάση 2: Στη φάση 2 δημιουργείτε ενδεχόμενο μελλοντικής πανδημίας, καθώς έχει επιβεβαιωθεί κρούσμα ιού ζωικής γρίπης στον άνθρωπο (κυρίως από την επαφή του με οικόσιτα και άγρια ζώα).

Φάση 3: Σε αυτή τη φάση έχουν εντοπισθεί διάσπαρτα κρούσματα σε ανθρώπους, που η πλειοψηφία τους εξακολουθεί να προέρχεται από την επαφή με τα ζώα. Η μετάδοση από άνθρωπο σε άνθρωπο είναι πολύ περιορισμένη και δεν καθίσταται δυνατή η διατήρηση εστιών μόλυνσης στα κοινωνικά επίπεδα. Μέχρι αυτή τη φάση το σενάριο μίας πιθανής πανδημίας είναι ακόμη αβέβαιο.

Φάση 4: Σε αυτό το σημείο, έχουν πληθύνει τα κρούσματα και η μετάδοση του ιού από άνθρωπο σε άνθρωπο είναι εξακριβωμένη και ικανή να προκαλέσει εστίες μόλυνσης στις κοινότητες. Η πιθανότητα ύπαρξης μίας μετέπειτα πανδημίας είναι από μεσαία έως υψηλή, όχι όμως δεδομένη. Αν μία χώρα επιβεβαιώσει ένα ανάλογο συμβάν, καλείται να συμβουλευτεί άμεσα τον ΠΟΥ, ούτως ώστε να αξιολογηθεί η κατάσταση και να ληφθούν περαιτέρω μέτρα προστασίας, καθώς ο κίνδυνος είναι αυξημένος.

Φάση 5: Για την καλύτερη κατανόηση της φάσης 5, ο ΠΟΥ έχει οριοθετήσει τη γη σε 6 μέρη, όπως φαίνεται στην **Εικόνα 1**. Η φάση 5 αποτελεί ένα ισχυρό προειδοποιητικό μήνυμα, καθώς χαρακτηρίζεται από την διασπορά του ιού από άνθρωπο σε άνθρωπο σε τουλάχιστον δύο

χώρες, μίας περιοχής όπως τις έχει ορίσει ο ΠΟΥ. Σε αυτό το στάδιο η πιθανότητα ύπαρξης μίας πανδημίας είναι από υψηλή έως σίγουρη.



Εικόνα 1- Περιοχές του ΠΟΥ (Πηγή: [6])

Φάση 6: Συμπεριλαμβανομένου των κριτηρίων της φάσης 5, η ασθένεια έχει εντοπισθεί σε τουλάχιστον μία ακόμη χώρα εκτός των συνόρων που έχει οριοθετήσει ο ΠΟΥ και η πανδημία βρίσκεται σε εξέλιξη.

Όταν τα επιβεβαιωμένα κρούσματα στην πλειοψηφία των χωρών πέσουν κάτω από το αναμενόμενο όριο, τότε τελειώνει η περίοδος αιχμής της πανδημίας. Ωστόσο, το γεγονός αυτό δεν αναιρεί μία πιθανή νέα έκρηξη κρουσμάτων (κύμα). Κατά συνέπεια, οι μήνες που μεσολαβούν μετά την αιχμή, αποτελούν μία περίοδο επαγρύπνησης και προετοιμασίας για όλα τα έθνη. Η μεταπανδημική περίοδος, είναι αυτή όπου στις χώρες με επαρκή επιτήρηση οι απόρροιες της πανδημίας θα ισοδυναμούν με εκείνες μίας συνηθισμένης εποχικής γρίπης. Δεδομένου ότι, πολλές χώρες θα επηρεαστούν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, είναι επίσης ένα στάδιο που απαιτεί επιτήρηση και συνεχόμενη παρακολούθηση της εξάπλωσης του ιού.

Με την εξέλιξη της τεχνολογίας και της τεχνογνωσίας πάνω στα κομμάτια που απαρτίζουν μία λοιμώδη ασθένεια, είναι πιθανό να υπάρξουν βέλτιστα συστήματα επιτήρησης. Κατ' επέκταση, ένας ιός γρίπης που δυνητικά θα μπορεί να προκαλέσει πανδημία, μπορεί να αποφευχθεί ή να επιβραδυνθεί η διασπορά του και από τη φάση 4 να επιστρέψει στη φάση 3. Αντιθέτως, ένας

ιός με πολύ ήπια ή διαφορετικά συμπτώματα, υπάρχει περίπτωση να μεταπηδήσει από την φάση 3 στη φάση 5 ή 6, λόγω της δυσκολίας του να εντοπιστεί [6].

1.1.3 Ιστορική αναδρομή πανδημιών

Καθ' όλη την ιστορία της ανθρωπότητας, καταγράφηκαν αρκετές πανδημίες που κόστισαν εκατομμύρια ζωές. Πρόκειται για ασθένειες ιδιαίτερα μολυσματικές που σε σύντομο χρονικό διάστημα είχαν καταστροφικές απόρροιες σε διάφορους τομείς. Ορισμένες πανδημίες με το μεγαλύτερο ποσοστό θνησιμότητας είναι οι εξής:

- Ο λοιμός των Αθηνών στην αρχαία Ελλάδα κατά τη διάρκεια του δεύτερου Πελοποννησιακού πολέμου, όπου εντοπίστηκε το 430 π.Χ. Ευθύνεται για το θάνατο 30.000 πολιτών, ποσό που ισοδυναμεί με το ένα τέταρτο έως το ένα τρίτο του αθηναϊκού πληθυσμού [7].
- Η πανώλη του Ιουστινιανού (Βυζαντινή αυτοκρατορία, 542 μ.Χ.), όπου σύγχρονες μελέτες δείχνουν πως θανάτωσε περίπου 100 εκατομμύρια ανθρώπους, αριθμός που ισοδυναμεί στο μισό πληθυσμό της Ευρώπης έως τη δεκαετία του 700 μ.Χ. [8].
- Ο Μαύρος Θάνατος έπληξε την Ασία και την Ευρώπη μεταξύ 14^{ου} και 17^{ου} αιώνα. Ήταν μία από τις πιο θανατηφόρες πανδημίες που έχουν καταγραφεί στην ανθρώπινη ιστορία, καθώς εκτιμάται ότι σκότωσε 200 εκατομμύρια ανθρώπους [9].
- Η Ισπανική γρίπη (1918-1919) σε μικρό χρονικό διάστημα εξαπλώθηκε σε όλο τον κόσμο, μολύνοντας το ένα τρίτο του παγκόσμιου πληθυσμού. Οι εκτιμήσεις για τον αριθμό θανάτων ποικίλλουν από 20 έως 100 εκατομμύρια [10].
- Η πανδημία γρίπης 2009 (η γρίπη των χοίρων) αποτέλεσε την πρώτη πανδημία του 21^{ου} αιώνα. Κατά τη διάρκεια του πρώτου έτους διασποράς του ιού, εκτιμάται ότι πέθαναν 151.700-575.400 άνθρωποι παγκοσμίως [11].
- Η τρέχουσα πανδημία COVID-19, η οποία κηρύχθηκε παγκόσμια πανδημία στις 11 Μαρτίου 2020 από τον ΠΟΥ [12].

1.2 Η πανδημία του νέου κορωνοϊού COVID-19

Ως κορωνοϊός ονομάζεται οποιοδήποτε ιός ανήκει στην οικογένεια των Coronaviridae. Πρόκειται για μία ομάδα RNA ιών, που προσβάλουν θηλαστικά και πτηνά (συμπεριλαμβανομένων των ανθρώπων), και προκαλούν λοιμώξεις του αναπνευστικού συστήματος [13, 14]. Το όνομα προήλθε από τα χαρακτηριστικά αυτών των ιών, όπου όταν μελετήθηκαν σε ηλεκτρονικά μικροσκόπια, στην εξωτερική τους επιφάνεια παρατηρήθηκαν βολβοειδείς αιχμές που παραπέμπουν στο σχήμα του στέμματος [14]. Ως εκ τούτου, η ονομασία προήλθε από την ελληνική λέξη «κορώννα» (αγγλ. Coronavirus) [15]. Τις τελευταίες δύο δεκαετίες τρεις είναι οι περιπτώσεις ζωονοσογόνων κοροναϊών που μπορούν να προκαλέσουν δυνητικά σοβαρά προβλήματα έως και να αποδειχθούν θανατηφόρες. Η πρώτη περίπτωση κορονοϊού είναι ο κορονοϊός σοβαρού οξέος αναπνευστικού συνδρόμου, παγκοσμίως γνωστό ως SARS-CoV, όπου αρχικά εντοπίστηκε στην Κίνα το 2002 και είχε διάρκεια περίπου ενός έτους. Λίγα χρόνια αργότερα, το 2012 παρουσιάστηκε στη Μέση Ανατολή μία ακόμη μολυσματική ασθένεια, η οποία προκλήθηκε από τον κορωνοϊό αναπνευστικού συνδρόμου της Μέσης Ανατολής, γνωστό ως MERS-CoV [13]. Τέλος, το νέο στέλεχος κορονοϊού σοβαρού οξέος αναπνευστικού συνδρόμου τύπου 2, γνωστό ως SARS-CoV-2 ή 2019-nCoV, που ευθύνεται για τη τρέχουσα πανδημία COVID-19 [16].

Ο νέος κορωνοϊός SARS-CoV-2 εντοπίστηκε πρώτη φορά στην πόλη Ουχάν (Wuhan) της Κίνας, στα τέλη της δεκαετίας του 2010, και έχει χαρακτηριστεί ως ο πιο μεταδοτικός από όλους τους ιούς της οικογένειας Coronaviridae [17]. Ο τρόπος μετάδοσης του στον ανθρώπινο οργανισμό δεν έχει διευκρινιστεί ακόμη, ωστόσο τα περισσότερα πιθανά σενάρια συνδέουν τη μόλυνση με την αγορά θαλασσινών Huanan, όπως επίσης και με την κατανάλωση νυχτερίδων, λόγω της μεγάλης ομοιότητας του ιού με τον κορονοϊό νυχτερίδων [13]. Τον Φεβρουάριο του 2020 σημειώθηκε έξαρση της νόσου COVID-19, όταν ξεπέρασε τα διεθνή σύνορα της Κίνας, με συνεχόμενους εντοπισμούς περιστατικών σε πολλά κράτη μέλη, ιδίως όμως στην Βόρεια Ιταλία η οποία επισήμανε τρομακτική αύξηση περιστατικών [18]. Σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα, έπληξε 114 χώρες με περισσότερα από 118.000 επιβεβαιωμένα κρούσματα και 4.291 θανάτους, κατά συνέπεια κηρύχθηκε πανδημία από τον ΠΟΥ στις 11 Μαρτίου της ίδιας χρονιάς [19]. Επί του παρόντος, αποτελεί παγκόσμιο πρόβλημα, εφόσον η διασπορά του αφορά τη διεθνή κλίματα.

Όπως επισημάνθηκε, πρόκειται για έναν ιδιαίτερα μολυσματικό ιό. Ο κύριος τρόπος διάδοσης της νόσου COVID-19 γίνεται από σταγονίδια ή πολύ μικρά σωματίδια που περιέχουν υκό φορτίο ενός μολυσμένου ατόμου. Αν ένα άτομο, αρχικά υγιή, εισπνεύσει τα σταγονίδια ή τα

μικρά σωματίδιο, τότε πραγματοποιείται η μετάδοση του ιού. Επιπρόσθετα, πύλες εισόδου του κορονοϊού στον ανθρώπινο οργανισμό αποτελούν τα μάτια, η μύτη και το στόμα, όπου σε αυτά μπορούν να προσκολληθούν τα μολυσμένα σωματίδια. Σε ορισμένες περιπτώσεις μολύνονται και οι επιφάνειες που θα ακουμπήσει ο ασθενής [20].

Όταν προσβληθεί ο ανθρώπινος οργανισμός με τη συγκεκριμένη ασθένεια, η νόσηση μπορεί να είναι από ήπια έως πολύ σοβαρή, καθώς περικλείει ένα ευρύ φάσμα συμπτωμάτων, το οποίο διαφέρει ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του ασθενή. Οι περισσότεροι ξεπερνάνε την ασθένεια χωρίς να χρειαστεί κάποια ειδική αγωγή. Ωστόσο, ένα σημαντικό ποσοστό των ασθενών χρειάζεται εισαγωγή σε νοσοκομείο/ΜΕΘ, με μεγαλύτερο κίνδυνο να διατρέχουν τα περιστατικά όπου ανήκουν στις μεγαλύτερες ηλικιακές ομάδες, όπως επίσης και τα άτομα με σοβαρά υποκείμενα νοσήματα όπως καρδιακές ή πνευμονικές παθήσεις, διαβήτη κλπ. Τα συνήθη συμπτώματα της νόσου είναι πυρετός, βήχας, πονοκέφαλος, μυϊκοί πόνοι, κόπωση, δύσπνοια, απώλεια γεύσης και όσφρησης [21].

Δεδομένης της μεγάλης ανησυχίας που προκάλεσε αυτή η πρωτόγνωρη κατάσταση για τη σύγχρονη ιστορία, είναι φανερό πως η υποβολή μέτρων προστασίας από την πανδημία αποτέλεσε επιτακτική ανάγκη διεθνώς. Σε πρώτη φάση, ο ΠΟΥ έχει ανακοινώσει σαφείς οδηγίες και μέτρα πρόληψης που βασίζονται κυρίως στην ατομική ευθύνη και στοχεύουν στην ελαχιστοποίηση της διασποράς του ιού. Τα μέτρα περιλαμβάνουν την κοινωνική αποστασιοποίηση, την υποχρεωτική χρήση ιατρικής μάσκας σε δημόσιους και κλειστούς χώρους, την αποφυγή πολυσύχναστων χώρων, τη διατήρηση καλής υγιεινής (σχολαστικό πλύσιμο χεριών, αντικειμένων και επιφανειών). Επιπρόσθετα, στη περίπτωση που υπάρξουν τα συνήθη συμπτώματα της νόσου, συνίσταται άμεση απομόνωση του ατόμου και επικοινωνία με τις υγειονομικές αρχές της εκάστοτε χώρας για περαιτέρω οδηγίες [22].

Στη δεύτερη φάση, το κυριότερο μέτρο πρόληψης είναι ο εμβολιασμός κατά του κορονοϊού SARS-CoV-2. Όταν το εμβόλιο εισέρχεται στον ανθρώπινο οργανισμό, δημιουργείται μία επίκτητη ανοσία. Αυτό συμβαίνει, διότι η βασική λειτουργία των εμβολίων είναι να ενεργοποιεί τις φυσικές άμυνες του οργανισμού, ούτως ώστε να είναι προετοιμασμένος σε μία μελλοντική πιθανή έκθεση στον ιό, αντιμετωπίζοντάς τον πιο ανώδυνα [23]. Επί του παρόντος, έχουν εγκριθεί από τον ΠΟΥ και έχουν αξιολογηθεί ως προς την ικανότητα να πετύχουν τα αναμενόμενα αποτελέσματα, τα ακόλουθα εμβόλια [24]:

- AstraZeneca/Oxford vaccine

- Johnson and Johnson
- Moderna
- Pfizer/BionTech
- Sinopharm
- Sinovac
- COVAXIN
- Covovax
- Novakovic

1.3 Η εξέλιξη της πανδημίας στην Ελλάδα και οι συνέπειές της

Αναμφισβήτητα η εμφάνιση της παγκόσμιας πανδημίας COVID-19, σε συνδυασμό με την παρατεταμένη διάρκεια της, έχουν προξενήσει σύγχυση και ανυπολόγιστες ζημιές σε όλο το κόσμο. Η Ελλάδα είναι επίσης μία χώρα που πλήγηκε από την πανδημία, καταγράφοντας δεκάδες χιλιάδες θύματα. Το ξέσπασμα του κορωνοϊού βρήκε τη χώρα ευάλωτη από ποικίλους παράγοντες (προσπάθεια ανάκαμψης προγενέστερης οικονομικής κρίσης, προσφυγική/μεταναστευτική έξαρση), κατ' επέκταση κρίνεται αναγκαία η περαιτέρω ενημέρωση ως προς την εγχώρια πορεία της [25].

Η Ελλάδα βρέθηκε εκτεθειμένη στο νέο κορωνοϊό SARS-CoV-2 για πρώτη φορά στις 26 Φεβρουαρίου 2020 με τον αριθμό κρουσμάτων να αυξάνεται συνεχώς, ενώ δύο εβδομάδες αργότερα επιβεβαιώθηκε ο πρώτος θάνατος. Λόγω της κρίσιμης αυτής κατάστασης, η ελληνική κυβέρνηση θέσπισε κατεπείγουσες ρυθμίσεις με σκοπό την επιβράδυνση της εξάπλωσης του ιού. Τα μέτρα που πάρθηκαν αρχικά είχαν τοπικό χαρακτήρα, καθώς αφορούσαν κυρίως το νότιο τμήμα της χώρας, όπου στις πληγείσες περιοχές αναστάλη η λειτουργία κάθε εκπαιδευτικής και πολιτιστικής δραστηριότητας. Στη συνέχεια, λόγω της συνεχόμενης μεγάλης έκρηξης περιστατικών (697 επιβεβαιωμένα κρούσματα, 17 θάνατοι), επιβλήθηκε εθνικό lockdown, στις 23 Μαρτίου 2020 [26]. Κατά τη διάρκεια της καραντίνας οι πολίτες δεν είχαν το δικαίωμα να μετακινηθούν άσκοπα, χωρίς να φέρουν πάνω τους βεβαίωση μετακίνησης και προσωπικά έγγραφα (αστυνομική ταυτότητα, διαβατήριό κλπ.). Η κυκλοφορία σε εξωτερικούς χώρους περιορίστηκε σημαντικά, εφόσον επιτρεπόταν μόνο για τους εξής λόγους:

- μετακίνηση από και προς τον εργασιακό χώρο, μόνο κατά τις ώρες εργασίας,
- προγραμματισμένο ραντεβού σε χώρους υγείας ή φαρμακείο,
- μετάβαση σε κατάσταση με είδη πρώτης ανάγκης, εφόσον δεν υφίσταται κατ' οίκον παράδοση,
- μετάβαση σε τράπεζα, εφόσον δεν υφίσταται διαδικτυακή συναλλαγή,
- μετάβαση από και προς σε άτομα που έχουν ανάγκη με απώτερο σκοπό την παροχή βοήθειας,
- μετακίνηση σε κοινωνικές εκδηλώσεις στενού οικογενειακού κύκλου (γάμος, βάπτιση, κηδεία κλπ.) και
- άσκηση σε εξωτερικό χώρο ή φροντίδα κατοικίδιου ζώου (έως 2 άτομα).

Αν η έξοδος ενός πολίτη δεν πληρούσε τις παραπάνω προδιαγραφές, τότε ήταν υποχρεωμένος να πληρώσει πρόστιμο αξίας 150 ευρώ [27]. Επιπρόσθετα μέτρα πρόληψης κατά του κορωνοϊού τέθηκαν σε εφαρμογή από τον Εθνικό Οργανισμό Δημόσιας Υγείας (ΕΟΔΥ) για τον αποτελεσματικότερο εντοπισμό κρουσμάτων στις πύλες εισόδου της χώρας, αλλά και τις εγχώριες μετακινήσεις (αεροδρόμια, λιμάνια, σιδηροδρομικοί σταθμοί κλπ.) [28]. Την 1^η Ιουλίου της ίδιας χρονιάς η κυβέρνηση ανακοίνωσε άρση της καραντίνας, επαναφέροντας σταδιακά την ομαλή λειτουργία των κοινωνικών και οικονομικών δραστηριοτήτων, εξαιρουμένων των μεγάλων κοσμικών εκδηλώσεων. Εντούτοις, ένα απρόσμενο κύμα κρουσμάτων υποχρέωσε την πολιτεία να θέσει ξανά τη χώρα σε εθνικό lockdown στις 7 Νοεμβρίου 2020, το οποίο παρατάθηκε έως τις 14 Μαΐου 2021 [29].

Οι αλληπάλληλες καραντίνες σε συνδυασμό με την παρατεταμένη διάρκειά τους, είχαν ως απόρροια άμεσες οικονομικές επιπτώσεις σε δημόσιους και ιδιωτικούς κλάδους, όπως επίσης και ελλείψεις ειδών πρώτης ανάγκης [30]. Συνεπώς, η ελληνική κυβέρνηση στην προσπάθειά της να στηρίξει την εγχώρια οικονομία, υλοποίησε ένα πακέτο μέτρων, όπου η αποτίμησή του ανέρχεται στα 23,4 δισεκατομμυρίων ευρώ, ποσό που ισοδυναμεί με το 13,7% του ΑΕΠ της χώρας. Το ποσό αυτό επιμερίστηκε σε δαπάνες υγείας (πρόσληψη ιατρικού προσωπικού, αγορά υγειονομικού εξοπλισμού κλπ.), σε επιδόματα ευάλωτων κοινωνικών ομάδων (παράταση επιδόματος ανεργίας, δυνατότητα βραχυπρόθεσμης εργασίας κλπ.), χρηματοδότηση επιχειρήσεων που πλήγηκαν σοβαρά από την πανδημία (μείωση ενοικίων, επιδότηση πληρωμών δανείων/τόκων κλπ.) και υποτίμηση του συντελεστή ΦΠΑ σε προϊόντα που σχετίζονται με την προφύλαξη από την COVID-19, ερευνητικές δαπάνες και διανομές [29].

Η συμμετοχή της Ελλάδας στην Ευρωπαϊκή Ένωση (ΕΕ), της δίνει το νόμιμο δικαίωμα να διασφαλίσει επαρκή αριθμό δόσεων εμβολίου, αναλογικά με τον πληθυσμό της, τόσο για άμεση όσο και για μελλοντική χρήση. Ο αριθμός που κρίνεται επαρκής για τις εγχώριες ανάγκες του συνολικού πληθυσμού, ισοδυναμεί με το 2,36%-2,39% των εμβολίων που θα εξασφαλίσει η ΕΕ. Λόγω της σταδιακής διαθεσιμότητας εμβολίων, κρίνεται απαραίτητο ο εμβολιασμός να πραγματοποιηθεί σύμφωνα με το επίσημο Σχέδιο ομάδων προτεραιότητας. Αναλυτικότερα, η 1η φάση του σχεδίου έχει θέσει ως προτεραιότητα τους εργαζόμενους των υγειονομικών κλάδων, των μονάδων φροντίδας ηλικιωμένων, χρόνιων πασχόντων και κέντρων αποκατάστασης, καθώς επίσης και το κυβερνητικό προσωπικό. Το ακόλουθο στάδιο του σχεδίου, αφορά τους ενήλικους πολίτες, ξεκινώντας από τους 85 ετών και άνω με φθίνουσα σειρά, λαμβάνοντας σοβαρά υπόψη το ιστορικό νοσημάτων. Η τελική φάση απευθύνεται σε πολίτες άνω των 18 ετών χωρίς υποκείμενα νοσήματα [31]. Στη συνέχεια, ξεκίνησε η διάθεση του εμβολίου και στον ανήλικο πληθυσμό της χώρας, από 5 ετών και άνω [32].

Στις 27 Δεκεμβρίου 2020, τέθηκε σε εφαρμογή ο πρώτος εμβολιασμός κατά της νόσου COVID-19 στην Ελλάδα [33]. Τα εμβόλια που διατίθενται στη χώρα και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά κάθε τύπου είναι:

- BioNTech/Pfizer: Είναι mRNA εμβόλιο, απαιτεί 2 δόσεις με μεσοδιάστημα μεταξύ των δόσεων 3-8 εβδομάδων. Τα ανοσοκατεσταλμένα άτομα, λόγω της μειωμένης ικανότητάς τους να καταπολεμήσουν τον ιό, θα πρέπει να χορηγηθούν μία επιπλέον δόση σε διάστημα 4 εβδομάδων από την ολοκλήρωση της δεύτερης. Για ηλικίες 12 ετών και άνω, απαιτείται μία ενισχυτική δόση (booster) [34]. Στις 21 Δεκεμβρίου 2020, το εμβόλιο των BioNTech/Pfizer εγκρίθηκε και στη συνέχεια ξεκίνησε η διάθεσή του στον κόσμο [35].
- Moderna: Επίσης ένα mRNA εμβόλιο 2 δόσεων, με μεσοδιάστημα μεταξύ των δόσεων 4-8 εβδομάδων. Ενήλικες με ανοσοκαταστολή θα πρέπει να προγραμματίσουν μία τρίτη δόση σε τουλάχιστον 4 εβδομάδες από τη λήψη της τελευταίας δόσης. Ο ενήλικος πληθυσμός, θα πρέπει να λάβει μία ακόμη αναμνηστική δόση, για περαιτέρω προστασία κατά του κορονοϊού [36]. Η επίσημη έγκριση του εμβολίου δόθηκε στις 6 Ιανουαρίου 2021 [35].
- AstraZeneca: Εμβόλιο ιικού φορέα, προϋποθέτει 2 δόσεις που λαμβάνονται σε διάστημα 12 εβδομάδων. Τρεις μήνες μετά την ολοκλήρωση των 2 δόσεων, πρέπει να

λάβουν ενισχυτική δόση mRNA εμβολίου [37, 38]. Εγκρίθηκε στις 29 Ιανουαρίου 2021 [35].

- Janssen (Johnson & Johnson): Μονοδοσικό εμβόλιο ιικού φορέα. Άτομα άνω των 18 ετών με ανοσολογική ανεπάρκεια, χρήζουν για επιπλέον ενίσχυση της ανοσίας, επομένως απαιτείται να λάβουν μία ακόμη δόση από ένα mRNA εμβόλιο (BioNTech/Pfizer ή Moderna). Επίσης, αναφορικά με τα ενήλικα άτομα κρίνεται απαραίτητη η χορήγηση μίας ενισχυτικής δόσης [39]. Η έγκριση του εμβολίου της Janssen (Johnson & Johnson) πραγματοποιήθηκε στις 11 Μαρτίου 2021 [35].

Σε κάθε μία από την παραπάνω περιπτώσεις, ένα άτομο θεωρείται πλήρως εμβολιασμένο μετά το πέρας δύο εβδομάδων από τη χορήγηση της τελικής απαιτούμενης δόσης [32].

1.4 Σκοπός της Διπλωματικής Εργασίας

Η ανάλυση επιβίωσης από τη νόσο COVID-19 στην Ελλάδα μελετάται εκτενώς στην παρούσα Διπλωματική Εργασία, η οποία αποσκοπεί σε μία προσεγγιστική ποσοτικοποίησή της. Εξετάζεται εκτενώς η πανδημία, με σκοπό τη δυνατότητα αποτίμησης των κινδύνων που απορρέει μία τέτοια κατάσταση. Επιπρόσθετα, στοχεύει στην ανάδειξη της αποτελεσματικότητας των ήδη υπαρχόντων εμβολίων κατά του κορωνοϊού SARS-CoV-2, μέσω της ανάπτυξης διαφορετικών μοντέλων που εξετάζονται. Για το λόγο αυτό, δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στην προσέγγιση των μοντέλων, καθώς είναι διαμορφωμένα ανάλογα με τα χαρακτηριστικά των πληθυσμών ως προς την επιλογή τους αναφορικά με τον εμβολιασμό (μοντέλο πληθυσμού που δεν έχει χορηγηθεί καμία δόση εμβολίου, μοντέλο μερικώς εμβολιασμένου πληθυσμού, μοντέλο πλήρως εμβολιασμένου πληθυσμού, μοντέλο πληθυσμού που έχει χορηγηθεί αναμνηστική δόση).

Βασικός πυλώνας της έρευνας είναι η σωστή συγκομιδή στοιχείων, ούτως ώστε τα προκύπτοντα αποτελέσματα να ανταποκρίνονται όσο το δυνατόν περισσότερο στην πραγματικότητα. Κύριες πηγές συλλογής των δεδομένων αποτελούν αναγνωρισμένες έρευνες, αλλά και στοιχεία που δημοσιοποιούνται από τους επίσημους φορείς σχετικά με την τρέχουσα κατάσταση της πανδημίας. Η απόθεση των δεδομένων αυτών στα κατάλληλα διαμορφωμένα

μοντέλα, σε συνδυασμό με την ορθή ανάλυσή τους, βοηθά στην παρακολούθηση της διασποράς του ιού και στην οπτικοποίηση των συνεπειών.

Λόγω του ότι διανύεται ακόμη η πανδημική περίοδος, είναι σαφές ότι δεν υπάρχουν αρκετά στοιχεία στη δημοσιότητα για την εξέλιξη της, κατ' επέκταση είναι πιθανό να υπάρχουν αριθμητικές αποκλίσεις στα αποτελέσματα. Ωστόσο, το είδος των στοιχείων που πρέπει να συλλεχθούν καθορίζεται από τα προτεινόμενα μοντέλα, για την ορθή αποτίμηση των μέτρων απόδοσης, και κατά συνέπεια για βέλτιστες εκτιμήσεις για τη διάδοση του ιού. Η σύνθεση των μοντέλων πραγματοποιήθηκε με τέτοιο τρόπο, ούτως ώστε η χρήση τους να είναι εφικτή από ειδικούς και μη, με απώτερο σκοπό τη μοντελοποίηση της εκάστοτε πανδημίας και την ανάλυση επιβίωσης από αυτήν.

1.5 Διάρθρωση Διπλωματικής Εργασίας

Η διάρθρωση της Διπλωματικής Εργασίας είναι η ακόλουθη: Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται εισαγωγή στις βασικές επιδημιολογικές έννοιες και ιστορική αναδρομή προγενέστερων πανδημιών που έπληξαν την ανθρωπότητα. Παρουσιάζεται λεπτομερώς η τρέχουσα πανδημία COVID-19 με έμφαση στην εξέλιξη της στην Ελλάδα. Μεταξύ άλλων, ορίζονται τα προβλήματα και ο κύριος σκοπός της μελέτης. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύεται το μαθηματικό υπόβαθρο της έρευνας, που βασίζεται στη Μαρκοβιανή μοντελοποίηση, δίνοντας ιδιαίτερη βαρύτητα στα μέτρα απόδοσης που χρησιμοποιούνται στο ερευνητικό μέρος της εργασίας. Ακολούθως, στο τρίτο κεφάλαιο συντελούνται αναλυτικά οι υπολογισμοί των μέτρων απόδοσης για κάθε μοντέλο ξεχωριστά και πραγματοποιούνται συγκρίσεις των προκύπτων αποτελεσμάτων. Εν κατακλείδι, στο τέταρτο κεφάλαιο παρατίθενται τα συμπεράσματα της μελέτης, καθώς και υποδείξεις για μελλοντική έρευνα και βελτιστοποίηση των αποτελεσμάτων.

2 Μαρκοβιανές Αλυσίδες

2.1 Στοχαστικές Διαδικασίες

Οι στοχαστικές διαδικασίες ή στοχαστικές ανελίξεις (stochastic processes) είναι ένας τομέας των μαθηματικών που έχει τη βάση του στη θεωρία πιθανοτήτων. Η χρησιμότητά τους περιλαμβάνει ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών στους επιστημονικούς κλάδους που έχουν προσφέρει προηγμένα θεωρήματα και αποδείξεις, όπως την ύπαρξη της κίνησης Brown και το μοντέλο Black-Scholes [40]. Ο βασικός σκοπός των στοχαστικών διαδικασιών είναι η μοντελοποίηση φαινομένων που εκτελούνται με την πάροδο του χρόνου και εμφανίζουν μία εξάρτηση (μικρή ή μεγάλη) με την τυχαιότητα. Τέτοια φαινόμενα αποτελούν τα πειράματα τύχης, όπου η επαναληπτική εκτέλεση ενός πειράματος υπό τις ίδιες συνθήκες μπορεί να δώσει διαφορετικά αποτελέσματα λόγω της τυχαιότητας, γεγονός που τα καθιστά διάφορα του χρόνου [41]. Από τον προηγούμενο αιώνα έχουν διεξαχθεί επιστημονικές έρευνες, που οδήγησαν στο συμπέρασμα ότι σε αρκετές περιπτώσεις τα στοχαστικά μοντέλα ανταποκρίνονται περισσότερο στην πραγματικότητα σε σύγκριση με τα ντετερμινιστικά [42].

Για τον ορισμό χρειάζεται ένας χώρος καταστάσεων S , όπου εκεί ανήκουν οι πιθανές τιμές που λαμβάνουν οι τυχαίες μεταβλητές X_t μίας στοχαστικής διαδικασίας, καθώς και ένα σύνολο χρόνων T όπου οι τιμές που μπορεί να πάρει είναι:

$$T = [0, +\infty) \text{ ή } T = N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Ορισμός 2.1.1 Έστω (Ω, F, P) ο χώρος πιθανότητας μίας στοχαστικής διαδικασίας ορισμένης στο T και με τιμές στο S . Τότε η στοχαστική διαδικασία είναι μία συλλογή τυχαίων μεταβλητών $\{X_t\}_{t \in T}$, ορισμένες στον (Ω, F, P) . Επομένως, η τυχαία μεταβλητή $X_t: \Omega \ni \omega \rightarrow X_t(\omega) \in S$ για κάθε $t \in T$, παρουσιάζει την κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή t , ενώ το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών περιγράφουν την κατάσταση του συστήματος στο σύνολο T , δηλαδή κάθε χρονικής στιγμής [41, 42].

Οι στοχαστικές ανελίξεις διακρίνονται στις ακόλουθες τέσσερις κατηγορίες:

- i. Διακριτού χρόνου και διακριτού χώρου καταστάσεων

- ii. Διακριτού χρόνου και συνεχούς χώρου καταστάσεων
- iii. Συνεχούς χρόνου και διακριτού χώρου καταστάσεων
- iv. Συνεχούς χρόνου και συνεχούς χώρου καταστάσεων.

Ο χώρος καταστάσεων ονομάζεται διακριτός εάν το σύνολο του αριθμού καταστάσεων είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο. Διαφορετικά, εάν η στοχαστική διαδικασία αποτελείται από άπειρο αριθμό καταστάσεων, καλείται συνεχούς χώρου καταστάσεων. Επιπρόσθετα, ο όρος «χρόνος» χρησιμοποιείται με την ευρεία έννοια και καθορίζεται από τη μη αρνητική παράμετρο t του X_t . Στην περίπτωση που T είναι ένα πεπερασμένο σύνολο ακέραιων αριθμών $T = \{X_0, X_1, X_2 \dots X_n\}$, τότε η διαδικασία θα λέγεται διακριτού χρόνου. Διαφορετικά, αν $T = [0, +\infty)$ το σύστημα θα ανήκει στην οικογένεια στοχαστικών διαδικασιών συνεχούς χρόνου [42, 43].

Μία από τις πιο βασικές κατηγορίες των στοχαστικών διαδικασιών είναι οι *Μαρκοβιανές διαδικασίες* (Markov processes), όπου υπό συγκεκριμένες συνθήκες είναι γνωστές ως *Μαρκοβιανές αλυσίδες* (Markov Chains), με τις οποίες θα ασχοληθούμε εκτενώς στην παρούσα Διπλωματική εργασία [42].

2.2 Μαρκοβιανές Αλυσίδες Διακριτού χρόνου (DTMC)

Οι Μαρκοβιανές διαδικασίες αποτελούν στοχαστικά μοντέλα όπου έχουν ως βασικό γνώρισμα ότι η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα κατάσταση, γεγονός που την καθιστά διάφορη από τον τρόπο με το οποίο έφτασε σε αυτήν. Στην περίπτωση που ο χώρος καταστάσεων που καλούμαστε να διαχειριστούμε είναι διακριτός (πεπερασμένος ή αριθμήσιμα άπειρος) τότε η διαδικασία ανήκει στην κατηγορία Μαρκοβιανών αλυσίδων. Αν επιπλέον υποθέσουμε πως και ο χρόνος είναι διακριτός τότε έχουμε *Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου* (discrete time Markov Chain-DTMC) [42, 43]. Αυτή η πολύ σημαντική κατηγορία των στοχαστικών διαδικασιών, έχει ως επίκεντρο πως το αποτέλεσμα που μπορεί να αποδώσει ένα μελλοντικό πείραμα, έχει άμεση συσχέτιση με το αποτέλεσμα του αμέσως προηγούμενου δεδομένου πειράματος. Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες πήραν το όνομά τους από

τον μαθηματικό Andrei A. Markov, ο οποίος ξεκίνησε τη μελέτη τους το 1907 λόγω της ανάγκης μοντελοποίησης πραγματικών συστημάτων. [41, 44].

Ορισμός 2.2.1 Ως Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου θεωρείται κάθε στοχαστική διαδικασία $X_n, n \geq 0$ που πληροί την παρακάτω ιδιότητα:

$$\begin{aligned} P\{X_n=i_n|X_0=i_0, \dots, X_{n-1}=i_{n-1}\} \\ = P\{X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1}\} \end{aligned} \quad (1)$$

Έστω ότι θέλουμε να περιγράψουμε την διαδικασία μίας Μαρκοβιανής Αλυσίδας. Ο χώρος καταστάσεων είναι $S = \{1, 2, \dots, n\}$ και έχουμε ως δεδομένο ότι η διαδικασία ξεκινάει και ολοκληρώνεται σε καταστάσεις που ανήκουν στο S . Συγκεκριμένα, η διαδικασία μπορεί να μεταβεί επιτυχώς από μία κατάσταση $i \in S$ σε μία άλλη κατάσταση $j \in S$. Η παραπάνω διαδικασία καλείται *πιθανότητα μετάβασης* (transition probability) από την κατάσταση i στην κατάσταση j και εκτελείται με πιθανότητα $p_{ij}(n)$. Αξίζει να σημειωθεί πως ο όρος «μετάβαση» χρησιμοποιείται με την ευρεία έννοια, κατ' επέκταση μία μετάβαση μπορεί να σημαίνει παραμονή στην ίδια κατάσταση i και πραγματοποιείται με πιθανότητα $p_{ii}(n)$ [44].

Ορισμός 2.2.2 Οι πιθανότητες $p_{ij}(n)$ καλούνται *πιθανότητες 1^{ns} μετάβασης* ή *πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος* (one-step transition probability) και δηλώνουν την πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση $i \in S$ στην κατάσταση $j \in S$ σε ένα χρονικό βήμα. Υπολογίζονται ως εξής:

$$p_{ij}(n) = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} \quad (2)$$

Η πλειοψηφία των Μαρκοβιανών αλυσίδων παρουσιάζει ανεξαρτησία από τη χρονική παράμετρο n και η ιδιότητα αυτή τις καθιστά *χρονικά ομογενής* (time homogenous). Συνεπώς, η μεταβλητή p_{ij} αντικαθιστά τη $p_{ij}(n)$ [41].

Η σύνθεση των πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος p_{ij} με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \dots, n\}$ και διαστάσεις $n \times n$, κατασκευάζουν τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης (transition matrix) μίας Μαρκοβιανής αλυσίδας, όπου συμβολίζεται με \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας \mathbf{P} καλείται *στοχαστικός πίνακας* (stochastic matrix) μόνο εάν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες [41, 45]:

1. $0 \leq p_{ij} \leq 1, 1 \leq i, j \leq n$
2. $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, 1 \leq i \leq n$

2.2.1 Κατηγοριοποίηση των καταστάσεων των Μαρκοβιανών Αλυσίδων

Για την πλήρη κατανόηση του μαθηματικού υπόβαθρου της Διπλωματικής εργασίας, είναι πολύ σημαντική η κατηγοριοποίηση των καταστάσεων μίας Μαρκοβιανής αλυσίδας. Ας θεωρήσουμε μία Μαρκοβιανή αλυσίδα m καταστάσεων ορισμένες στο χώρο καταστάσεων S .

Μία κατάσταση $j \in S$ καλείται *προσβάσιμη* (accessible) από μία κατάσταση $i \in S$ αν για κάποιο $n \geq 0$ ισχύει ότι $P_{ij}^n > 0$. Αν οι καταστάσεις i, j είναι αμφίδρομα προσβάσιμες, τότε *επικοινωνούν* (communicate) και συμβολίζονται ως εξής: $i \leftrightarrow j$. Οι επικοινωνούσες καταστάσεις επιμερίζονται στις ακόλουθες τρεις κατηγορίες, ανάλογα με τις ιδιότητές του [46, 47, 41]:

- i. Ανακλαστικότητα: $i \leftrightarrow i$
- ii. Συμμετρικότητα: $i \leftrightarrow j$ τότε $j \leftrightarrow i$
- iii. Μεταβατικότητα: ($i \leftrightarrow j$ και $j \leftrightarrow k$) τότε $i \leftrightarrow k$, με $k \in S$.

Οι παραπάνω σχέσεις ισοδυναμίας δημιουργούν ένα διαμερισμό του συνόλου των καταστάσεων, παράγοντας έτσι μικρότερες *κλάσεις επικοινωνουσών καταστάσεων* (ή *κλάσεις*) (C_1, C_2, C_3, \dots), όπου μόνο μεταξύ των ίδιων κλάσεων υπάρχει αμφίδρομη επικοινωνία. Στην

περίπτωση που δεν καθίσταται δυνατή η μετάβαση των καταστάσεων μίας κλάσης C ως προς τις καταστάσεις που δεν ανήκουν σε αυτή, τότε χαρακτηρίζεται ως *κλειστή*, διαφορετικά *ανοιχτή*. Αν μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διαθέτει μόνο μία κλάση επικοινωνουσών καταστάσεων, τότε καλείται *αμείωτη* (irreducible), ισχύει δηλαδή ότι για κάθε $i, j \in S$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος αριθμός $n \geq 1$ όπου $p_{ij}^{(n)} > 0$ [46, 43].

Αν η μεταβλητή f_{ij} δηλώνει την πιθανότητα να επιστρέψει κάποια στιγμή η διαδικασία στην κατάσταση $j \in S$, δεδομένου ότι ξεκίνησε από την κατάσταση $i \in S$, τότε έχουμε:

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \quad (3)$$

όπου με $f_{ij}^{(n)}$ συμβολίζεται η πρώτη επιστροφή της διαδικασίας στην κατάσταση j κατά το n -οστό βήμα, δεδομένου ότι η διαδικασία ξεκίνησε από την κατάσταση i . Τότε ο *μέσος χρόνος επανάληψης* (mean recurrence time) στην κατάσταση i , προκύπτει από τη σχέση:

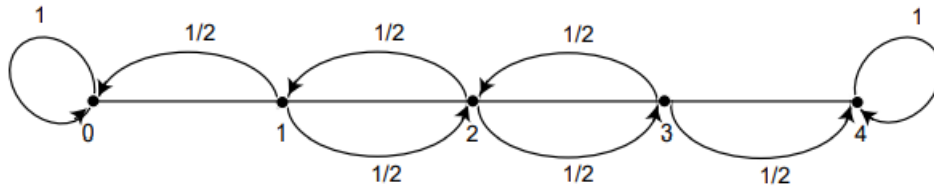
$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} \quad (4)$$

Έστω ότι η διαδικασία ξεκινάει από μία κατάσταση i . Αν η πιθανότητα να επιστρέψουμε στην συγκεκριμένη κατάσταση είναι δεδομένη, τότε η κατάσταση καλείται *επαναληπτική* (recurrent), ισχύει δηλαδή ότι $f_{ii} = 1$. Στην περίπτωση που ο μέσος χρόνος επανάληψης είναι πεπερασμένος τότε η κατάσταση καλείται *μηδενική επαναληπτική* (null recurrent), διαφορετικά αν $\mu_i = \infty$ χαρακτηρίζεται ως *θετική επαναληπτική* (positive recurrent) [43].

Έστω ότι η μεταβλητή d_i συμβολίζει την περίοδο της κατάσταση $i \in S$, και δηλώνει το Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη των θετικών ακεραίων n , ούτως ώστε $p_{ii}^n > 0$. Μία επαναληπτική κατάσταση ονομάζεται *απεριοδική* (aperiodic) εάν $d_i = 1$, αντιθέτως αν $d_i > 1$ τότε ονομάζεται *περιοδική* (periodic) [46, 43, 47].

Μία κατάσταση $i \in S$ καλείται *απορροφητική* (absorbing) αν δεν υπάρχει έξοδος διαφυγής από αυτήν, δηλαδή ισχύει ότι $p_{ii} = 1$. Η μετάβαση της διαδικασίας στην απορροφητική κατάσταση μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ένα ή περισσότερα βήματα. Μία Μαρκοβιανή αλυσίδα που

εμπεριέχει τουλάχιστον μία κατάσταση απορρόφησης, ονομάζεται απορροφητική. Σε μία απορροφητική Μαρκοβιανή αλυσίδα, όλες οι καταστάσεις εκτός της απορροφητικής καλούνται *μεταβατικές* ή *παροδικές* (transient), διότι υπάρχει θετική πιθανότητα να μην επιστρέψει η διαδικασία σε αυτές ($f_{ii} < 1$).



Εικόνα 2- Διάγραμμα καταστάσεων παραδείγματος "Ο περίπατος του μεθυσμένου" (Πηγή: [44])

Με τη συγκεκριμένη κατηγορία αλυσίδων θα ασχοληθούμε εκτενώς στο ερευνητικό μέρος της εργασίας, επομένως παρατίθεται το παραπάνω παράδειγμα για καλύτερη κατανόηση και ανάλυση της συμπεριφοράς της. Στο παράδειγμα της **εικόνας 2**, οι καταστάσεις s_0 και s_4 είναι απορροφητικές (συνεπώς η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι απορροφητική), διότι όταν άμεσα ή έμμεσα η διαδικασία φτάσει σε αυτές δεν καθίσταται δυνατή η έξοδος, ισχύει δηλαδή ότι $p_{00} = 1$ και $p_{44} = 1$ αντιστοίχως. Κατά συνέπεια οι καταστάσεις s_1, s_2 και s_3 είναι μεταβατικές [44, 43].

2.2.2 Πιθανότητες μετάβασης n βημάτων

Έστω μία Μαρκοβιανή αλυσίδα m καταστάσεων με πίνακα μετάβασης πιθανοτήτων \mathbf{P} , για την οποία μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τις *μεταβάσεις πιθανοτήτων n -οστού βήματος* (n-step transition probabilities). Για την πιθανότητα ξεκινώντας από μία κατάσταση i η αλυσίδα να βρεθεί σε μία κατάσταση j σε $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ βήματα, για κάθε $i, j \in S$ και $n \geq 0$ ισχύει ότι:

$$p_{ij}(n) = P(X_{z+n} = j | X_z = i) \quad (5)$$

Οι παραπάνω πιθανότητες αποτελούν στοιχεία του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης n βημάτων $\mathbf{P}^{(n)}$, ο οποίος πληροί τις προϋποθέσεις ενός στοχαστικού πίνακα (ενότητα **2.2**). Αναλυτικότερα, ισχύει ότι:

$$p_{ij}(n) = P_{ij}(n) \quad (6)$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας ή το γεγονός ότι κατά το βήμα z η αλυσίδα βρίσκεται σε μία κατάσταση του συστήματος, οι πιθανότητες μετάβασης n -οστού βήματος υπολογίζονται από:

$$p_{ij}(z+n) = \sum_{k \in S} p_{ik}(z) p_{kj}(n) \quad (7)$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται *εξίσωση Chapman–Kolmogorov*. Υποδηλώνει ότι η πιθανότητα μετάβασης στην κατάσταση k κατά το βήμα z , δεδομένου ότι η αρχική θέση του συστήματος είναι η κατάσταση i , ισούται με $p_{ik}(z)$, και η πιθανότητα με την οποία καταλήγει η διαδικασία στην κατάσταση j , κατά το βήμα n , δεδομένης της αρχικής κατάστασης k , είναι $p_{kj}(n)$. Αντίστοιχα, αν θεωρήσουμε ότι $z = 1$ και $n = n - 1$, η ίδια εξίσωση με την μορφή πινάκων διαμορφώνεται ως εξής:

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}(n-1) = \mathbf{P}^n \quad (8)$$

Η πιθανότητα κάθε κατάστασης i τη χρονική στιγμή n ισούται με $p_i(n)$. Το αντίστοιχο διάνυσμα πιθανοτήτων κατάστασης τη χρονική στιγμή n είναι: $\mathbf{p}(n) = [p_i(n)]$ και προκύπτει από την εξίσωση:

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^n \quad (9)$$

όπου $\mathbf{p}(0)$ με στοιχεία $p_i(0)$, είναι η αρχική κατανομή πιθανότητας, δηλαδή η πιθανότητα τη χρονική στιγμή $n = 0$ η αλυσίδα να βρίσκεται στην κατάσταση i . Σε μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου οι πιθανότητες κατάστασης τη χρονική στιγμή n υπολογίζονται πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα $\mathbf{p}(0)$ με τον πίνακα \mathbf{P}^n [43, 46, 45].

2.2.3 Πιθανότητα απορρόφησης

Η πιθανότητα απορρόφησης μίας Μαρκοβιανής αλυσίδας αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο μέτρο απόδοσης, καθώς υπολογίζει την πιθανότητα με την οποία η διαδικασία καταλήγει στην απορροφητική κατάσταση. Για την πλήρη κατανόηση του συγκεκριμένου μέτρου, αλλά και

εκείνου που θα ακολουθήσει στην επόμενη ενότητα, είναι σημαντικό να αναπτύξουμε την έννοια της *κανονικής μορφής* (canonical form).

Η κανονική μορφή ενός πίνακα δημιουργείται αναδιατάσσοντας τις γραμμές και τις στήλες του με συγκεκριμένη μεθοδολογία. Έστω ότι έχουμε μία Μαρκοβιανή αλυσίδα m καταστάσεων με πίνακα μετάβασης πιθανοτήτων \mathbf{P} , που διαθέτει τόσο μεταβατικές καταστάσεις (t) όσο και απορροφητικές (v). Η κανονική μορφή του πίνακα \mathbf{P} μετατρέπεται ως εξής:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{V} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

όπου:

\mathbf{Q} :πίνακας που διαθέτει μόνο τις μεταβατικές καταστάσεις $t \times t$ διαστάσεων

\mathbf{V} :πίνακας που διαθέτει τις πιθανότητες απορρόφησης των παροδικών καταστάσεων $t \times v$ διαστάσεων

$\mathbf{0}$:μηδενικός πίνακας $v \times t$ διαστάσεων

\mathbf{I} :μοναδιαίος πίνακας $v \times v$ διαστάσεων

Επομένως, με την αναδιάταξη του πίνακα \mathbf{P} , έχει παραχθεί ένας πίνακας όπου στην αρχή έχουν τοποθετηθεί οι μεταβατικές καταστάσεις και ακολουθούν οι απορροφητικές.

Σε αντίστοιχη περίπτωση, όταν θέλουμε να δημιουργήσουμε την κανονική μορφή ενός πίνακα \mathbf{P}^n , τα βήματα είναι ακριβώς ίδια.

Θεώρημα 2.2.1 ([44]): Μία απορροφητική Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει πιθανότητα απορρόφησης 1, δηλαδή όσο $n \rightarrow \infty$ τόσο $\mathbf{Q}^n \rightarrow \mathbf{0}$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία Μαρκοβιανή αλυσίδα m καταστάσεων με απορροφητικές και μεταβατικές καταστάσεις, όπου είτε άμεσα είτε έμμεσα επικοινωνούν. Σε κάθε επανάληψη της διαδικασίας υπάρχει θετική πιθανότητα απορρόφησης στις απορροφητικές καταστάσεις όπου το Μαρκοβιανό σύστημα θα παραμείνει επ' άπειρον σε αυτές. Συνεπώς, οι πιθανότητες των μεταβατικών καταστάσεων θα μειώνονται συνεχώς, ενώ οι πιθανότητες των απορροφητικών καταστάσεων θα αυξάνονται. Κατ' επέκταση, μακροπρόθεσμα για ένα μεγάλο αριθμό

χρονικών βημάτων ($n \rightarrow \infty$), ο πίνακας \mathbf{Q} της κανονικής μορφής θα αποτελείται μόνο από μηδενικά ($\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Q}^n = \mathbf{0}$), καθώς το σύνολο των πιθανοτήτων μετάβασης (100%) θα ανήκει στις απορροφητικές καταστάσεις, από τις οποίες είναι αδύνατο να διαφύγει [46, 44].

2.2.4 Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης

Έστω μία Μαρκοβιανή αλυσίδα m καταστάσεων με απορροφητικές και μεταβατικές καταστάσεις. Δεδομένου ότι η διαδικασία ξεκινάει από την κατάσταση $i \in S$, ως αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης ορίζεται ο αναμενόμενος αριθμός χρονικών βημάτων που θα ξοδέψει η αλυσίδα στις καταστάσεις του συστήματος πριν εισέλθει στην κατάσταση απορρόφησης. Για την εύρεση του συγκεκριμένου μέτρου απόδοσης, θα αναπτύξουμε την έννοια του πίνακα κανονικής μορφής της προηγούμενης ενότητας.

Ένας τρόπος για να υπολογίσουμε τον αναμενόμενο χρόνο απορρόφησης είναι με τη βοήθεια του *πρωταρχικού πίνακα* (fundamental matrix), ο οποίος συμβολίζεται με \mathbf{R} και ισχύει ότι:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \quad (10)$$

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο πίνακας \mathbf{Q} είναι ένας πίνακας ο οποίος διαθέτει μόνο της μεταβατικές καταστάσεις της αλυσίδας. Ο πρωταρχικός πίνακας κατασκευάζεται αφαιρώντας τον πίνακα \mathbf{Q} από έναν μοναδιαίο πίνακα ίδιων διαστάσεων (\mathbf{I}_m) και στη συνέχεια αντιστρέφοντάς τον. Οι καταχωρήσεις r_{ij} του πίνακα \mathbf{R} δηλώνουν τον αναμενόμενο αριθμό φορών που η διαδικασία θα βρεθεί στη μεταβατική κατάσταση $j \in S$, υπό την προϋπόθεση ότι ξεκίνησε από τη μεταβατική κατάσταση $i \in S$.

Έστω ότι η μεταβλητή T_i δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό χρονικών βημάτων πριν η αλυσίδα εισέλθει στην κατάσταση απορρόφησης, δεδομένου ότι ξεκίνησε από την κατάσταση $i \in S$. Έστω επίσης, \mathbf{T} ένα διάνυσμα στήλης με τις καταχωρήσεις T_i , που προκύπτει από:

$$\mathbf{T} = \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{c} \quad (11)$$

όπου \mathbf{c} ένα διάνυσμα στήλης με όλες τις καταχωρήσεις να ισούνται με 1. Κατά συνέπεια, το άθροισμα κάθε γραμμής του πρωταρχικού πίνακα προσδίδει τον αναμενόμενο χρόνο εισόδου της διαδικασίας στην κατάσταση απορρόφησης.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων πριν η αλυσίδα εισέλθει στην κατάσταση απορρόφησης, εξαρτάται από την αρχική κατάσταση της αλυσίδας [46, 44, 48].

2.2.5 Πιθανότητα παραμονής σε κάθε κατάσταση

Έστω ότι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα m καταστάσεων μπήκε σε μία παροδική κατάσταση i τη χρονική στιγμή n , $X_n = i$. Έστω επίσης, ότι η τυχαία μεταβλητή t_i δηλώνει το χρόνο που ξοδεύει η Μαρκοβιανή αλυσίδα στην κατάσταση $i \in S$, κάθε φορά που την επισκέπτεται. Μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε την πιθανότητα παραμονής της διαδικασίας σε αυτή την κατάσταση τη χρονική στιγμή $n + 1$, $X_{n+1} = i$. Δύο είναι τα πιθανά σενάρια που μπορεί να συμβούν:

1. Να παραμείνει στην ίδια παροδική κατάσταση i και στο επόμενο βήμα $n + 1$, με πιθανότητα p_{ii} ή
2. Να μεταβεί σε μία άλλη κατάσταση της Μαρκοβιανής αλυσίδας που επικοινωνεί (οποιασδήποτε κατηγορίας), με πιθανότητα $1 - p_{ii}$.

Στην περίπτωση που συμβεί το πρώτο ενδεχόμενο, παραμείνει δηλαδή στην ίδια κατάσταση i , σύμφωνα με τον ορισμό της Μαρκοβιανής ιδιότητας, τα επόμενα βήματα της διαδικασίας θα εκτελεστούν με τα ίδια δεδομένα ανεξάρτητα κάθε φορά. Επιπρόσθετα, όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 2.2, η πιθανότητα κατάστασης της διαδικασίας κατά τη χρονική στιγμή $n + 1$, εξαρτάται αποκλειστικά από την παρούσα θέση του συστήματος (δηλαδή την πιθανότητα κατάστασης τη χρονική στιγμή n) και όχι από τον τρόπο με το οποίο έφτασε σε αυτήν. Κατά συνέπεια, η πιθανότητα παραμονής της διαδικασίας στην κατάσταση i , υπό την προϋπόθεση ότι μόλις μπήκε σε αυτήν θα ισούται με:

$$P(t_i = n) = (1 - p_{ii})p_{ii}^{(n)} \quad (12)$$

Επομένως, ο χρόνος που μία διαδικασία θα ξοδέψει σε κάθε κατάσταση ακολουθεί γεωμετρική κατανομή [43].

2.2.6 Μέσος χρόνος παραμονής σε κάθε κατάσταση

Έστω μία Μαρκοβιανή αλυσίδα m καταστάσεων. Ως μέσος χρόνος παραμονής ορίζεται ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων που θα ξοδέψει η Μαρκοβιανή αλυσίδα σε μία κατάσταση. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της γεωμετρικής κατανομής, ο μέσος χρόνος παραμονής στην κατάσταση i ανά επίσκεψη, υπολογίζεται από τον τύπο [43]:

$$E[t_i] = \frac{1}{1 - p_{ii}}, \quad i \in S \quad (13)$$

2.2.7 Διακύμανση του μέσου χρόνου παραμονής σε κάθε κατάσταση

Σε συνέχεια της προηγούμενης ενότητας, ένα ακόμη πολύ σημαντικό μέτρο απόδοσης που θα μας απασχολήσει είναι η διακύμανση του μέσου χρόνου παραμονής των καταστάσεων. Ως διακύμανση ορίζεται η τετραγωνική απόκλιση της αναμενόμενης τιμής μίας τυχαίας μεταβλητής από τη μέση τιμή του δείγματος, στη προκειμένη περίπτωση από το μέσο χρόνο παραμονής. Ουσιαστικά, είναι η τιμή που υπολογίζει τη μεταβλητότητα των υποθέσεων που διεξάγονται και λειτουργεί σαν ένας επιπλέον έλεγχος. Η διακύμανση του μέσου χρόνου παραμονής σε κάθε κατάσταση, προκύπτει από τον τύπο [43, 49]:

$$Var[t_i] = \frac{p_{ii}}{(1 - p_{ii})^2}, \quad i \in S. \quad (14)$$

2.3 Χρήση Μαρκοβιανών Αλυσίδων Διακριτού Χρόνου για την Ανάλυση Επιβίωσης

Είναι σαφές πως η μακροπρόθεσμη αποτίμηση των απορροιών της πανδημίας, είναι ιδιαίτερα δύσκολη και αβέβαιη. Για το λόγο αυτό, στρεφόμαστε σε μαθηματικές λύσεις που βασίζονται στη θεωρία Πιθανοτήτων και στη θεωρία Μαρκοβιανών διαδικασιών, τομείς δηλαδή που εμπεριέχουν μία εξάρτηση με την τυχαιότητα. Οι μαθηματικές σχέσεις που αναλύθηκαν, αποτελούν χρήσιμα μέτρα απόδοσης, αλλά και ελέγχου υποθέσεων των αποτελεσμάτων, που μπορούν να αποδώσουν χρήσιμες πληροφορίες αναφορικά με την εξέλιξη της πανδημίας. Στις

πληροφορίες συγκαταλέγονται η πιθανότητα νόσησης/νοσηλείας/θανάτου σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα, η πιθανότητα θανάτου και κατ' επέκταση η πιθανότητα επιβίωσης μετά την πάροδο n ημερών, ο αναμενόμενος χρόνος θανάτου δεδομένης της αρχικής κατάστασης του πληθυσμού, η πιθανότητα και ο μέσος χρόνος παραμονής στις εκάστοτε καταστάσεις. Στην παρούσα Διπλωματική εργασία θα εξετάσουμε την ανάλυση επιβίωσης από την COVID-19 στην Ελλάδα με τη χρήση DTMC, καθώς αποδεικνύονται κατάλληλα εργαλεία εκτίμησης της διασποράς του ιού και των συνέπειών που απορρέονται.

3 Μοντελοποίηση και Ανάλυση Επιβίωσης Συναρτήσεως του Εμβολιασμού του Πληθυσμού

3.1 Εισαγωγικές έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε τη θεωρία των Μαρκοβιανών αλυσίδων για τη μοντελοποίηση της πανδημίας COVID-19 στην Ελλάδα και την ανάλυση επιβίωσης από αυτήν. Αρχικά, πραγματοποιείται ο υπολογισμός των πιθανοτήτων μετάβασης, όπου προέρχονται τόσο από παρατήρηση των ελληνικών στοιχείων [50, 51] όσο και από επίσημες έρευνες [52, 53, 54, 55, 56, 57]. Στη συνέχεια κι έχοντας ως δεδομένο τους πίνακες μετάβασης πιθανοτήτων που προκύπτουν, συντελούνται αναλυτικά οι υπολογισμοί των μέτρων απόδοσης για το εκάστοτε μοντέλο, βασιζόμενοι στο μαθηματικό υπόβαθρο του κεφαλαίου 2. Για το λόγο αυτό, έχουν δημιουργηθεί επιδημιολογικά μοντέλα συναρτήσεως της συμπεριφοράς του πληθυσμού αναφορικά με τον εμβολιασμό. Ανάλογα με τα χαρακτηριστικά των πληθυσμιακών ομάδων η ταξινόμηση γίνεται σε ένα από τα παρακάτω μοντέλα:

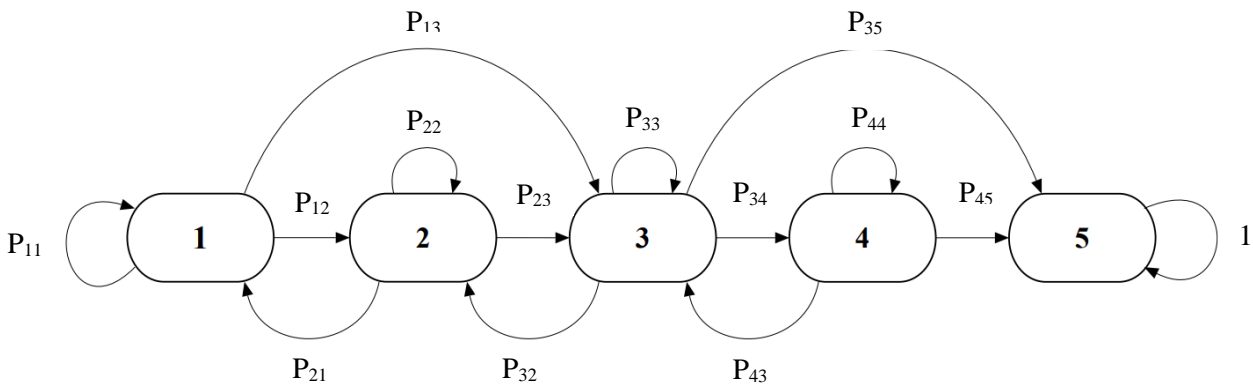
- Μοντέλο πληθυσμού που δεν έχει χορηγηθεί καμία δόση εμβολίου (UN)
- Μοντέλο μερικώς εμβολιασμένου πληθυσμού (PV)
- Μοντέλο πλήρως εμβολιασμένου πληθυσμού (FV)
- Μοντέλο πληθυσμού που έχει χορηγηθεί ενισχυτική δόση (BO)

Παρατίθενται ο πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων \mathbf{P} και το διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων, τα οποία θα είναι ίδια για όλα τα μοντέλα, με ειδοποιό διαφορά τις πιθανότητες με τις οποίες πραγματοποιούνται οι μεταβάσεις:

- (1) Υγιής Πληθυσμός
- (2) Μολυσμένος σε απομόνωση (επιβεβαιωμένο κρούσμα)
- (3) Νοσηλεύόμενος σε κλινική COVID-19
- (4) Νοσηλεύόμενος σε ΜΕΘ
- (5) Θάνατος

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \hline \mathbf{1} & P_{11} & P_{12} & P_{13} & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{2} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{3} & 0 & P_{32} & P_{33} & P_{34} & P_{35} \\ \hline \mathbf{4} & 0 & 0 & P_{43} & P_{44} & P_{45} \\ \hline \mathbf{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Πίνακας 1-Πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης P επιδημιολογικών μοντέλων



Εικόνα 3-Διάγραμμα καταστάσεων επιδημιολογικών μοντέλων

Οι μεταβάσεις που μπορούν να πραγματοποιηθούν μεταξύ των καταστάσεων παρουσιάζονται στον πίνακα P όπως και στο διάγραμμα καταστάσεων. Πιο συγκεκριμένα, από την κατάσταση «Υγιής πληθυσμός» οι μόνες δυνατές μεταβάσεις που μπορούν να πραγματοποιηθούν σε ένα χρονικό βήμα (μία ημέρα) είναι είτε να παραμείνει στην ίδια κατάσταση με πιθανότητα P_{11} , είτε να μεταβεί στην κατάσταση «Μολυσμένος σε απομόνωση» με πιθανότητα P_{12} , είτε να μεταβεί στην κατάσταση «Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19» με πιθανότητα P_{13} . Καμία άλλη μετάβαση δεν καθίσταται δυνατή, καθώς αντιστοιχούν σε 0. Στην περίπτωση που κάποιος βρίσκεται στην κατάσταση «Μολυσμένος σε απομόνωση» μπορεί είτε να επιστρέψει στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός» με πιθανότητα P_{21} , είτε να παραμείνει στην ίδια κατάσταση με πιθανότητα P_{22} , είτε να μεταβεί στην κατάσταση «Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19» με πιθανότητα P_{23} . Στη συνέχεια, αν θεωρήσουμε πως ένα άτομο του πληθυσμού βρίσκεται

στην κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19» υπάρχει το ενδεχόμενο να επιστρέψει στην κατάσταση «Μολυσμένος σε απομόνωση», όπου αυτό θα συντελεστεί με πιθανότητα P_{32} , ή να παραμείνει στην ίδια κατάσταση με πιθανότητα P_{33} , ή να μεταβεί στην κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ» με πιθανότητα P_{34} ή να μεταβεί στην κατάσταση «Θάνατος» με πιθανότητα P_{35} . Ακολούθως, θεωρούμε πως ένα άτομο βρίσκεται στην κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ». Οι δυνατές μεταβάσεις που μπορούν να πραγματοποιηθούν είναι είτε να επιστρέψει στην κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19» με πιθανότητα P_{43} , είτε να παραμείνει στην ίδια κατάσταση με πιθανότητα P_{44} , είτε να μεταβεί στην κατάσταση «Θάνατος» με πιθανότητα P_{45} . Τέλος, η κατάσταση «Θάνατος» αποτελεί απορροφητική κατάσταση, επομένως η πιθανότητα παραμονής σε αυτήν ισοδυναμεί με 1.

3.2 Συλλογή και προσαρμογή δεδομένων

Η συλλογή δεδομένων και η απόθεση αυτών στα κατάλληλα διαμορφωμένα μοντέλα, αποτελεί βασικό πυλώνα της παρούσας έρευνας. Αρχικά έγινε προσπάθεια εύρεσης πραγματικών δεδομένων σε πραγματικό χρόνο ούτως ώστε τα προκύπτοντα αποτελέσματα να ανταποκρίνονται όσο το δυνατόν περισσότερο στην πραγματικότητα, ωστόσο το σενάριο αυτό δεν επετεύχθη. Επομένως, η συγκομιδή ιατρικών στοιχείων για τα περιστατικά (επιβεβαιωμένα και τρέχοντα κρούσματα, αναρρώσαντες, νοσηλείες/εξιτήρια σε κλινικές COVID-19/ΜΕΘ, συνολικοί και ημερήσιοι θάνατοι), πραγματοποιήθηκε από το συνδυασμό των καθημερινών εκθέσεων επιδημιολογικής επιτήρησης και των αποτελεσμάτων αναγνωρισμένων ερευνών από τις επιστημονικές κοινότητες. Αξίζει να σημειωθεί πως το γεγονός ότι η πλειοψηφία των στοιχείων που συλλέχθηκαν αποτελεί πειραματικά δεδομένα, καθιστά πιθανή την ύπαρξη αριθμητικών αποκλίσεων στα αποτελέσματα.

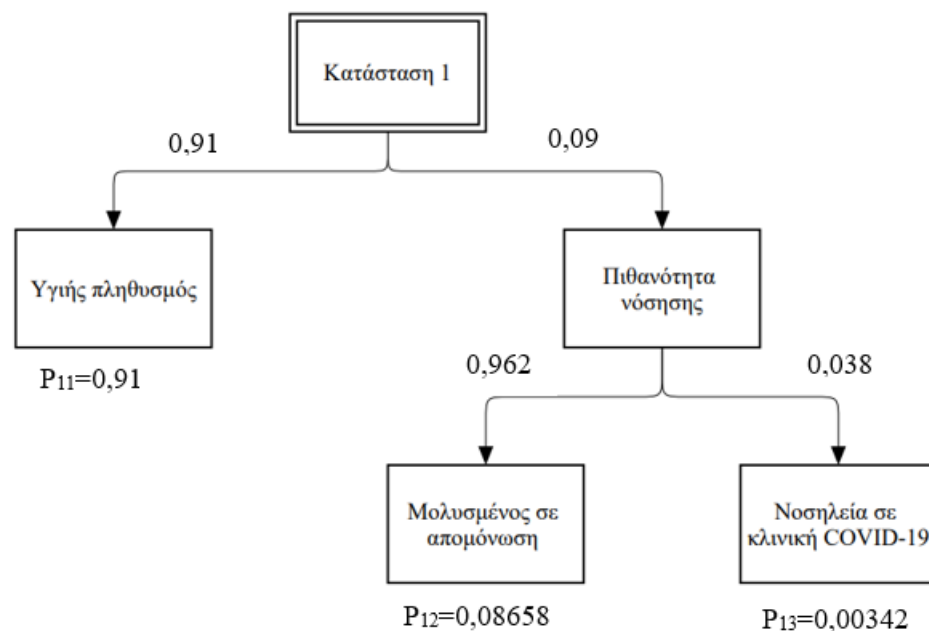
Αναλυτικότερα η συλλογή δεδομένων για το εκάστοτε μοντέλο έγινε ως εξής και με την ακόλουθη σειρά:

- Μοντέλο πλήρως εμβολιασμένου πληθυσμού (**FV**)

Έχοντας ως δείγμα 21 εκατομμύρια πλήρως εμβολιασμένους ανθρώπους στις ΗΠΑ, παρατηρήθηκαν τα ιατρικά τους στοιχεία ως προς την ευαισθησία τους στον ιό SARS-CoV-2.

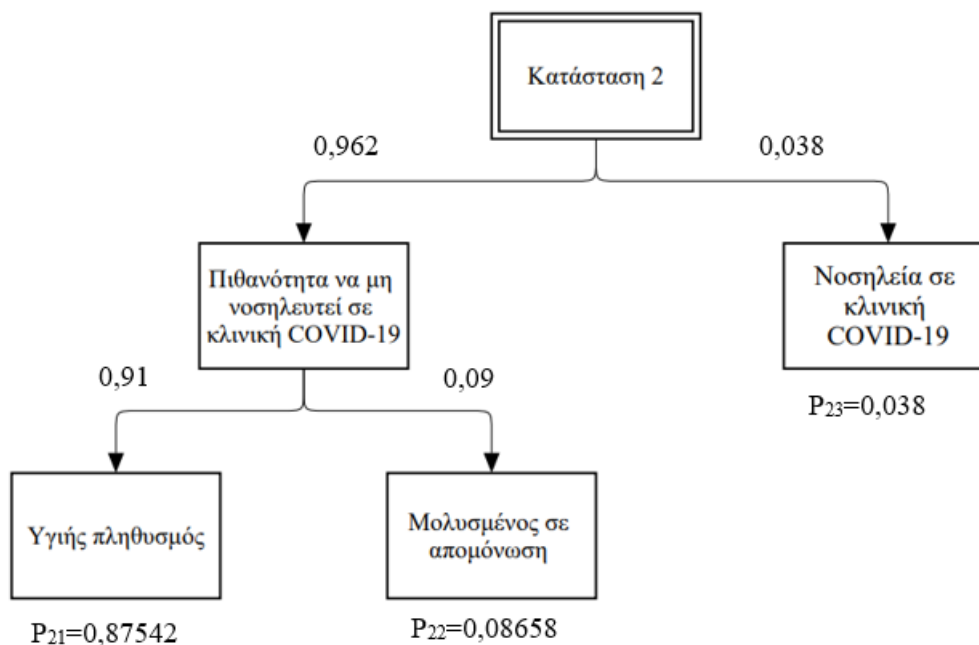
Τα αποτελέσματα που προέκυψαν ανέδειξαν **1,89 εκατομμύρια επιβεβαιωμένα κρούσματα, 72.000 νοσηλείες σε κλινική COVID-19 και 20.000 θανάτους** [52]. Σχετικά με τα ελληνικά δεδομένα, παρατηρήθηκε πως το 85%-90% των εισαγωγών σε ΜΕΘ αφορά άτομα που δεν έχουν εμβολιαστεί, άρα θα θεωρήσουμε πως το 10% αφορά το μοντέλο FV, δεδομένης και της ενισχυτικής δόσης. Οι συνολικές εισαγωγές σε ΜΕΘ για τη χρονιά 2021 ανέρχονται στις 8.693 περιπτώσεις, κατ' επέκταση αναφορικά με τα πλήρως εμβολιασμένα άτομα έχουμε $(8.693 \times 10\% \approx) 870$ εισαγωγές σε ΜΕΘ. Ο συνολικός αριθμός πλήρως εμβολιασμένων ατόμων με δύο δόσεις για τις ίδιες ημερομηνίες είναι 6.570.879, όπου πολλαπλασιάζοντας με την πιθανότητα νόσησης (0,09), έχουμε 591.380 άτομα ως δείγμα [53, 50]. Συνεπώς, καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:

- i. Πιθανότητα νόσησης: $1,89\text{εκ.} \div 21\text{εκ.} = 0,09$
- ii. Πιθανότητα νοσηλείας σε κλινική COVID-19: $72.000 \div 1.890.000 = 0,038$
- iii. Πιθανότητα νοσηλείας σε ΜΕΘ: $870 \div 591.380 = 0,0014$
- iv. Πιθανότητα θανάτου: $20.000 \div 1.890.000 = 0,0105$



Εικόνα 4-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Υγιής πληθυσμός" μοντέλου FV

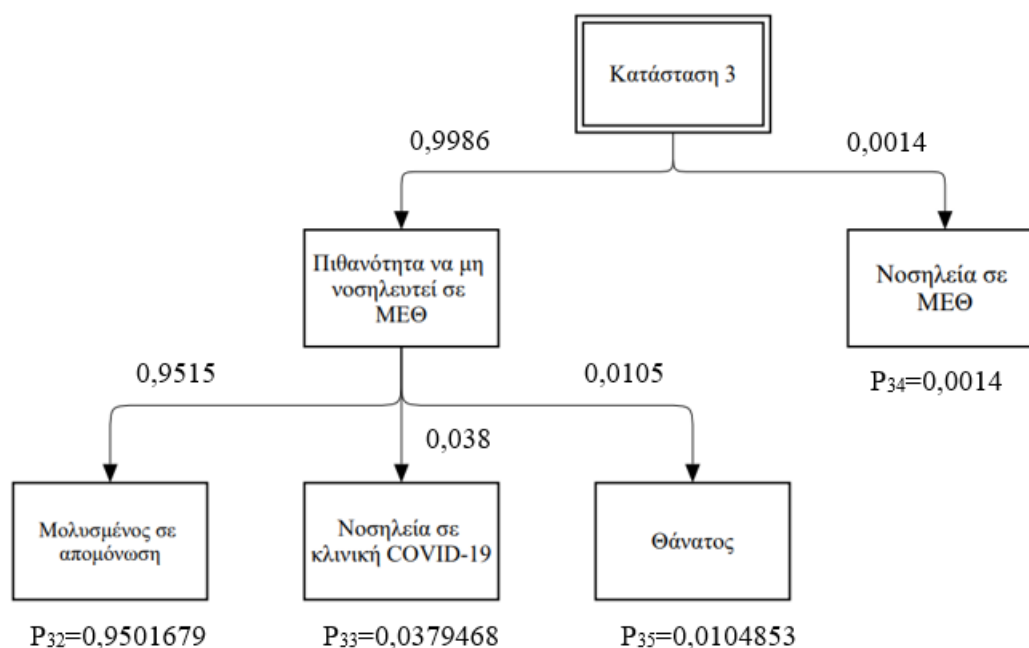
Έστω ότι κάποιος ανήκει στο μοντέλο FV και βρίσκεται στην κατάσταση 1 (εικόνα 4). Υπάρχει η πιθανότητα να νοσήσει που αντιστοιχεί σε 0,09 και η πιθανότητα να παραμείνει στην ίδια κατάσταση που αντιστοιχεί σε $P_{11}=1-0,09=0,91$. Από τη στιγμή που νοσεί δύο είναι τα πιθανά ενδεχόμενα που μπορεί να συμβούν, είτε να νοσηλευτεί σε κλινική COVID-19 με πιθανότητα 0,038 είτε να μη νοσηλευτεί και να μείνει σε απομόνωση με πιθανότητα $1-0,038=0,962$. Επομένως η πιθανότητα να μεταβεί στην κατάσταση «Μολυσμένος σε απομόνωση» ισούται με $P_{12}=0,09 \times 0,962=0,08658$ και αντίστοιχα η πιθανότητα να μεταβεί στην κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19» θα είναι $P_{13}=0,09 \times 0,038=0,00342$.



Εικόνα 5-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάσταση "Μολυσμένος σε απομόνωση" μοντέλου FV

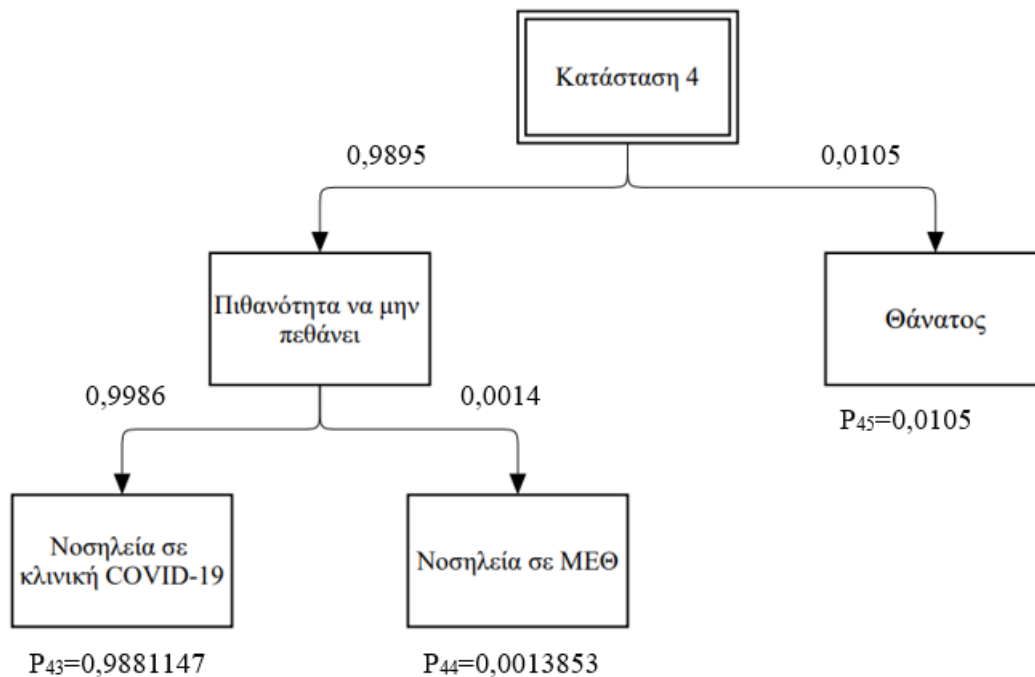
Έστω τώρα πως η διαδικασία ξεκινάει από την κατάσταση 2 (εικόνα 5), από την οποία υπάρχει η πιθανότητα νοσηλείας σε κλινική COVID-19 που αντιστοιχεί σε $P_{23} = 0,038$ και η πιθανότητα να μη νοσηλευτεί ίση με $1-0,038=0,962$. Από τη στιγμή που κάποιος δε νοσηλεύεται, είναι πιθανό είτε να παραμείνει στην ίδια κατάσταση με πιθανότητα 0,09 είτε να επιστρέψει στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός» με πιθανότητα $1-0,09=0,91$. Επομένως, η πιθανότητα να μεταβεί κάποιος στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός» θα είναι

$P_{21}=0,962 \times 0,91=0,87542$ και η πιθανότητα παραμονής στην κατάσταση «Μολυσμένος σε απομόνωση» θα ισοδυναμεί με $P_{22}=0,962 \times 0,09=0,08658$.



Εικόνα 6-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19" μοντέλου FV

Ακολούθως, θεωρούμε πως η διαδικασία ξεκινάει από την κατάσταση 3 (εικόνα 6). Ένα πιθανό ενδεχόμενο είναι η νοσηλεία σε ΜΕΘ, όπου ισοδυναμεί με $P_{34}=0,0014$. Στην περίπτωση που κάποιος δε νοσηλευτεί σε ΜΕΘ, όπου αυτό θα συντελεστεί με πιθανότητα $1-0,0014=0,9986$, υπάρχουν τρία πιθανά σενάρια. Είτε να νοσηλευτεί σε κλινική COVID-19 με πιθανότητα 0,038, είτε να πεθάνει με πιθανότητα 0,0105, είτε να επιστρέψει σε απομόνωση με πιθανότητα $(1-0,038-0,0105)=0,9515$. Συνεπώς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η μετάβαση στην κατάσταση «Μολυσμένος σε απομόνωση» πραγματοποιείται με πιθανότητα $P_{32}=0,9986 \times 0,9515=0,9501679$, στην κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19» με πιθανότητα $P_{33}=0,9986 \times 0,038=0,0379468$, και τέλος στην κατάσταση «Θάνατος» με πιθανότητα $P_{35}=0,9986 \times 0,0105=0,0104853$.



Εικόνα 7-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ" μοντέλου FV

Τέλος θεωρούμε δεδομένο πως η διαδικασία ξεκινάει από την κατάσταση 4 (εικόνα 7). Η πιθανότητα θανάτου ισοδυναμεί με $P_{45}=0,0105$, ενώ η πιθανότητα ο ασθενής να μην πεθάνει αντιστοιχεί σε $1-0,0105=0,9895$. Στην περίπτωση που δεν πεθάνει τα πιθανά ενδεχόμενα είναι είτε να παραμείνει νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ με πιθανότητα 0,0014 είτε να επιστρέψει σε κλινική COVID-19 με πιθανότητα $1-0,0014=0,9986$. Κατά συνέπεια, συμπεραίνουμε πως η πιθανότητα μετάβασης στην κατάσταση «Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19» θα είναι $P_{43}=0,9895 \times 0,9986=0,9881147$ και η πιθανότητα παραμονής σε ΜΕΘ θα είναι $P_{44}=0,9895 \times 0,0014=0,0013853$.

Επομένως, ο πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων του μοντέλου που αφορά τον πλήρως εμβολιασμένο πληθυσμό, διαμορφώνεται ως εξής:

	1	2	3	4	5
1	0,91	0,08658	0,00342	0	0
2	0,87542	0,08658	0,038	0	0
3	0	0,9501679	0,0379468	0,0014	0,0104853
4	0	0	0,9881147	0,0013853	0,0105
5	0	0	0	0	1

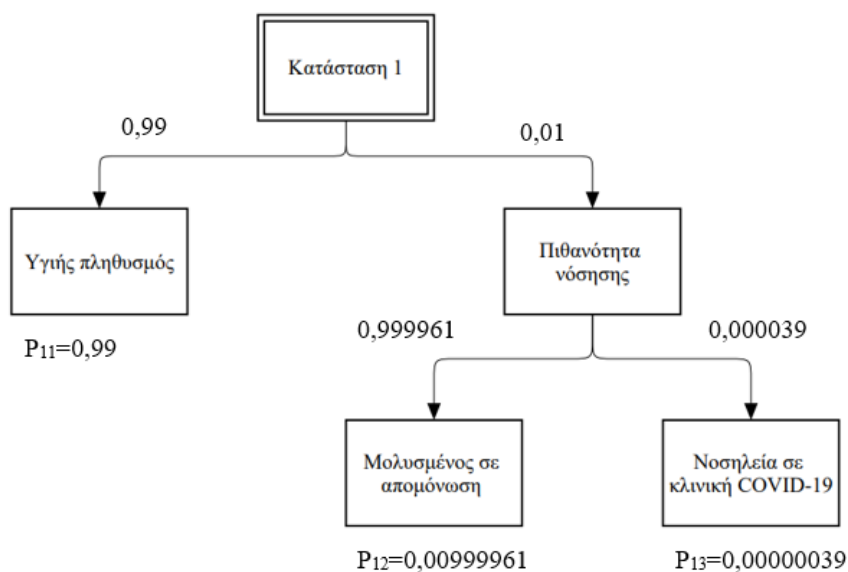
Πίνακας 2-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων μοντέλου FV

Έχοντας ως βάση τις πιθανότητες που προέκυψαν στο μοντέλο του πλήρως εμβολιασμένου πληθυσμού και κατά τον ίδιο τρόπο, θα συμπληρωθούν τα υπόλοιπα μοντέλα.

- Μοντέλο πληθυσμού που έχει χορηγηθεί ενισχυτική δόση (**BO**)

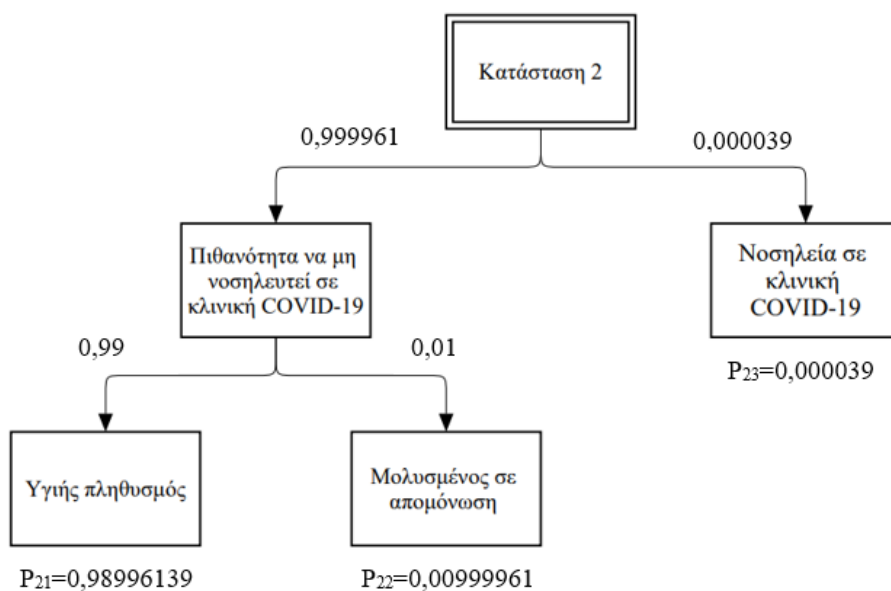
Από έρευνες προέκυψε πως τα άτομα που έχουν λάβει ενισχυτική δόση έχουν από 8 έως 10 φορές λιγότερες πιθανότητες να νοσήσουν, σε σύγκριση με εκείνους που έχουν λάβει δύο δόσεις. Ως μέση τιμή θεωρούμε το **9 φορές λιγότερες πιθανότητες νόσησης σε σχέση με τους πλήρως εμβολιασμένους** [54]. Σε επόμενη έρευνα, και έχοντας ως δείγμα 728.321 άτομα, προέκυψαν **29 εισαγωγές σε κλινική COVID-19, 17 εισαγωγές σε ΜΕΘ και 7 θάνατοι** [55]. Άρα συμπεραίνουμε τα εξής:

- Πιθανότητα νόσησης: Πιθανότητα νόσησης εμβολιασμένου πληθυσμού $\div 9 = 0,09 \div 9 = 0,01$
- Πιθανότητα νοσηλείας σε κλινική COVID-19: $29 \div 728.321 = 0,000039$
- Πιθανότητα νοσηλείας σε ΜΕΘ: $17 \div 728.321 = 0,000023$
- Πιθανότητα θανάτου: $7 \div 728.321 = 0,000009$



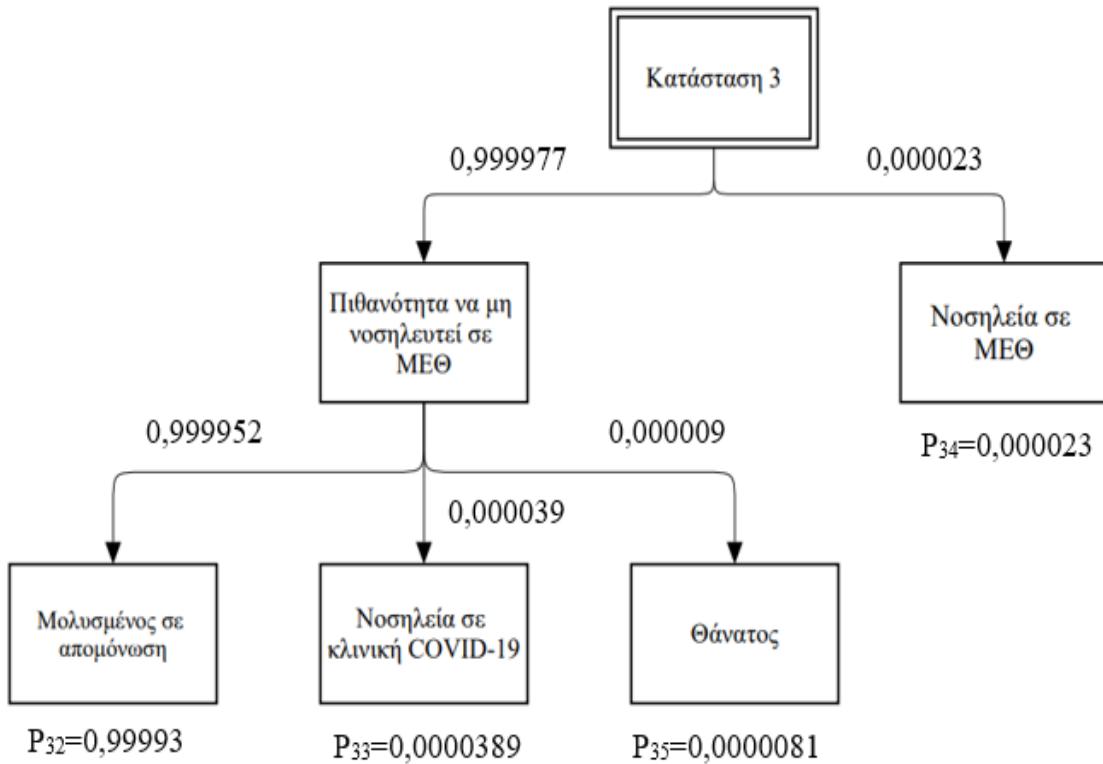
Εικόνα 8-Έυρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Υγιής πληθυσμός" μοντέλου BO

Στην **Εικόνα 8**, φαίνεται διαγραμματικά ο τρόπος με τον οποίο υπολογίστηκαν οι πιθανότητες μετάβασης των καταστάσεων, στην περίπτωση που η διαδικασία ξεκινάει από την κατάσταση «Υγιής πληθυσμός».



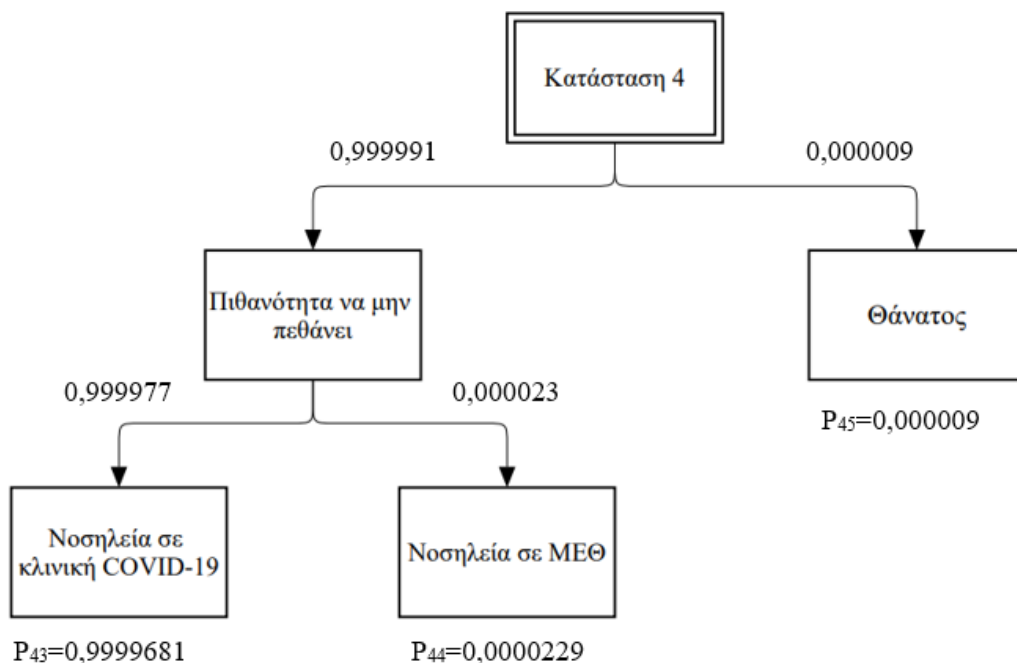
Εικόνα 9-Έυρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Μολυσμένος σε απομόνωση" μοντέλου BO

Η **Εικόνα 9**, αφορά τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων, δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι η κατάσταση «Μολυσμένος σε απομόνωση».



Εικόνα 10-Ευρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19" μοντέλου BO

Στη συνέχεια, στην περίπτωση που η αρχική θέση του συστήματος είναι η κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19», οι πιθανότητες μετάβασης των καταστάσεων, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζονται παρουσιάζονται στην **Εικόνα 10**.



Εικόνα 11-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ" μοντέλου ΒΟ

Τέλος, αν υποθέσουμε πως η διαδικασία ξεκινάει από την κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ», τότε οι δυνατές μεταβάσεις που μπορούν να πραγματοποιηθούν μεταξύ των καταστάσεων, παρουσιάζονται στην **Εικόνα 11**.

Με τους παραπάνω υπολογισμούς, προκύπτουν οι εξής πιθανότητες μετάβασης των καταστάσεων για το μοντέλο του πληθυσμού που έχει χορηγηθεί αναμνηστική δόση:

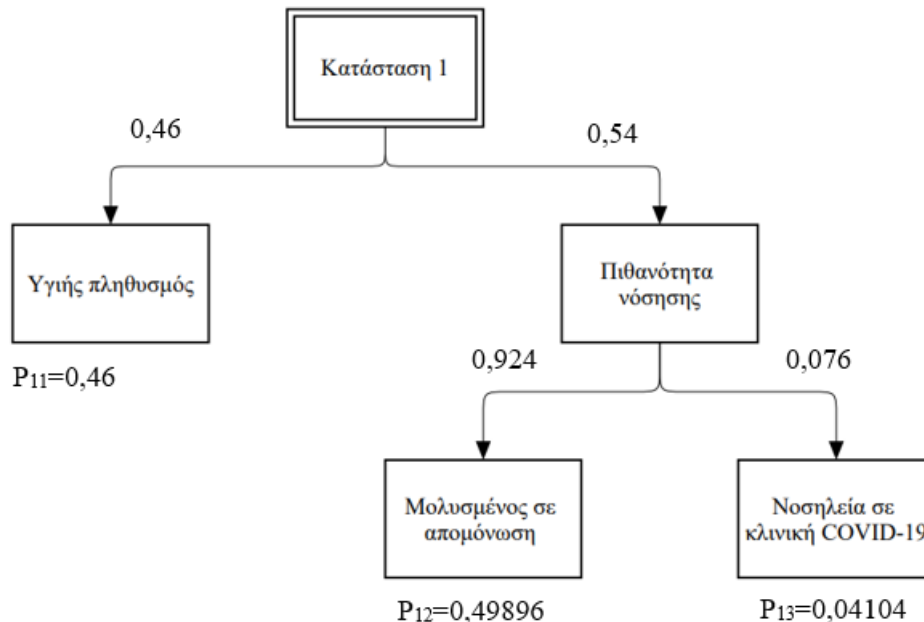
	1	2	3	4	5
1	0,99	0,00999961	0,00000039	0	0
2	0,98996139	0,00999961	0,000039	0	0
3	0	0,99993	0,0000389	0,000023	0,0000081
4	0	0	0,9999681	0,0000229	0,000009
5	0	0	0	0	1

Πίνακας 3-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων μοντέλου ΒΟ

- Μοντέλο πληθυσμού που δεν έχει χορηγηθεί καμία δόση εμβολίου (UN)

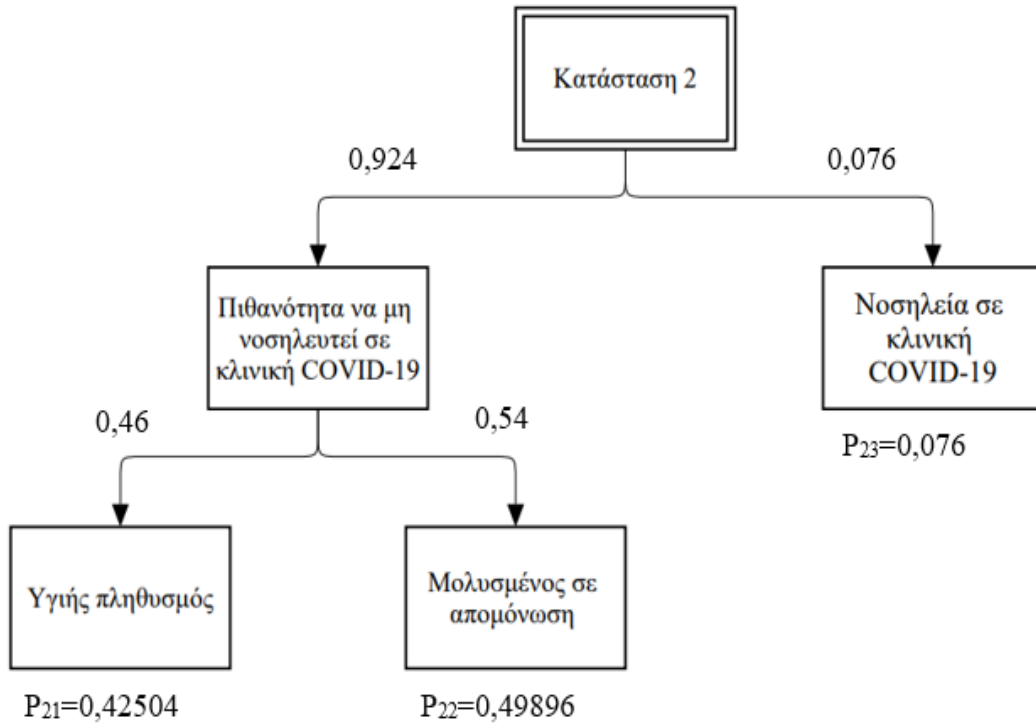
Δεδομένα που δημοσιοποίησε το Αμερικάνικο Κέντρο Ελέγχου και Πρόληψης Νοσημάτων (CDC), αναφέρουν πως ο εμβολιασμός παρέχει **6 φορές λιγότερες πιθανότητες νόσησης** και **11 φορές λιγότερες πιθανότητες θανάτου** [56]. Καθώς επίσης αναφέρεται πως η **πιθανότητα νοσηλείας σε κλινική COVID-19 αντιστοιχεί σε 7,6%** και η **πιθανότητα νοσηλείας σε ΜΕΘ σε 2%** [58]. Κατά συνέπεια, εικάζουμε τα εξής:

- Πιθανότητα νόσησης: Πιθανότητα νόσησης εμβολιασμένου πληθυσμού $\times 6 = 0,09 \times 6 = 0,54$
- Πιθανότητα νοσηλείας σε κλινική COVID-19: 0,076
- Πιθανότητα νοσηλείας σε ΜΕΘ: 0,02
- Πιθανότητα θανάτου: Πιθανότητα θανάτου εμβολιασμένου πληθυσμού $\times 11 = 0,0105 \times 11 = 0,1155$



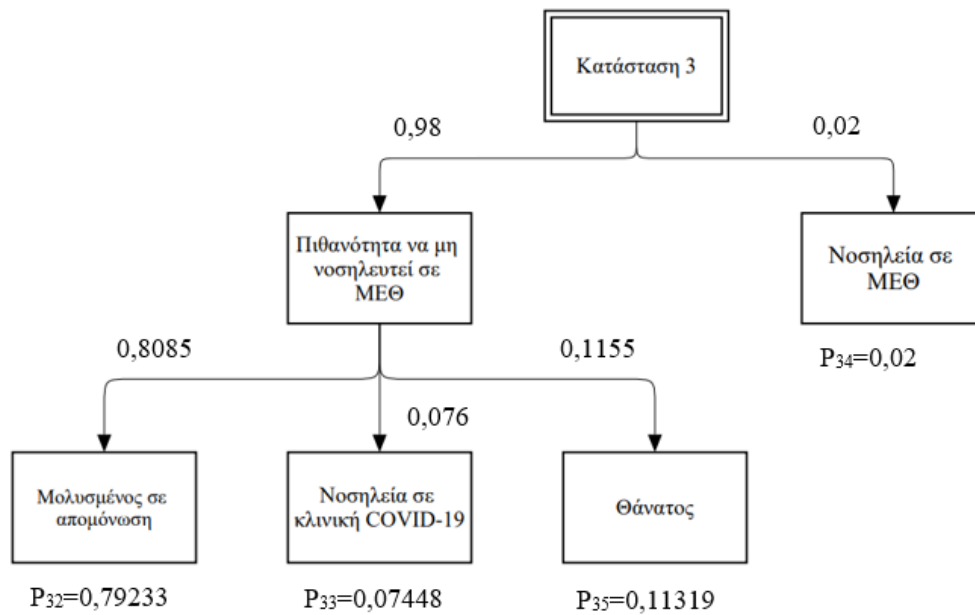
Εικόνα 12-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Υγιής πληθυσμός" μοντέλου UN

Στην **Εικόνα 12**, αναγράφονται οι πιθανότητες μετάβασης της διαδικασίας, όπως επίσης και ο τρόπος που υπολογίστηκαν, με δεδομένο ότι η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι η κατάσταση «Υγιής πληθυσμός».



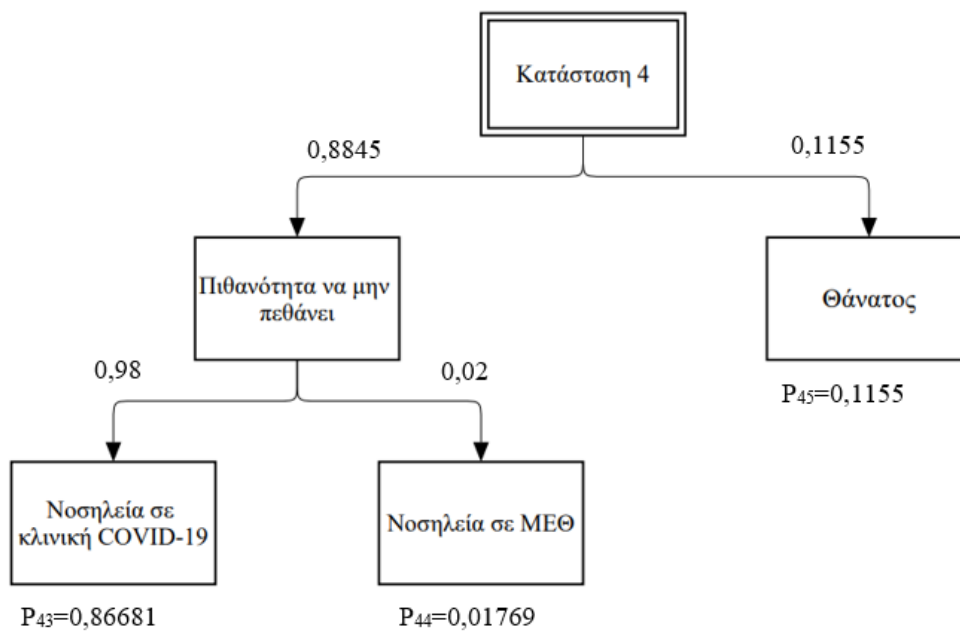
Εικόνα 13-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Μολυσμένος σε απομόνωση" μοντέλου UN

Η **Εικόνα 13**, αφορά τον υπολογισμό των πιθανοτήτων μετάβασης στην περίπτωση που η αρχική θέση του συστήματος είναι η κατάσταση «Μολυσμένος σε απομόνωση».



Εικόνα 14-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19" μοντέλου UN

Στην περίπτωση που η αρχική κατάσταση είναι η «Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19», οι πιθανότητες με τις οποίες μεταβαίνει η διαδικασία αναγράφονται στην **Εικόνα 14**.



Εικόνα 15-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ" μοντέλου UN

Τέλος, δεδομένου πως η διαδικασία ξεκινάει από την κατάσταση «Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ», οι πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων, παρουσιάζονται στην **Εικόνα 15**.

Συμπερασματικά, η σύνθεση των παραπάνω υπολογισμών αποτελεί τον πίνακα μετάβασης πιθανοτήτων του μοντέλου για τον πληθυσμό που δεν έχει χορηγηθεί καμία δόση εμβολίου:

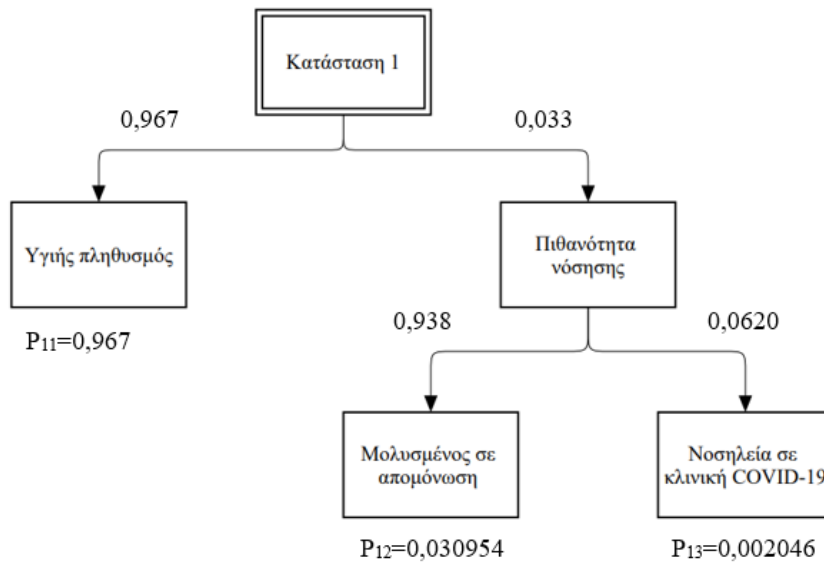
	1	2	3	4	5
1	0,46	0,49896	0,04104	0	0
2	0,42504	0,49896	0,076	0	0
3	0	0,79233	0,07448	0,02	0,11319
4	0	0	0,86681	0,01769	0,1155
5	0	0	0	0	1

Πίνακας 4-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων μοντέλου UN

- Μοντέλο μερικώς εμβολιασμένου πληθυσμού (**PV**)

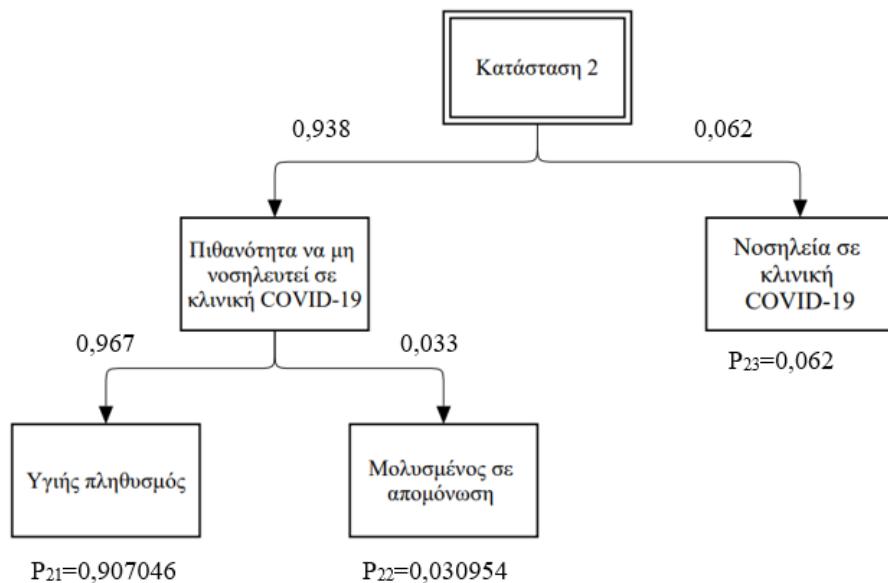
Επίσημη έρευνα, έχοντας ως δείγμα 43.127 περιστατικά, κατέληξε στο συμπέρασμα πως τα μερικώς εμβολιασμένα άτομα έχουν **3,3% πιθανότητα νόσησης** από κορωνοϊό, **6,2% πιθανότητα νοσηλείας σε κλινική COVID-19** και **1,3% πιθανότητα νοσηλείας σε ΜΕΘ** [55]. Σε άλλη έρευνα με δείγμα πληθυσμού 1.159 περιστατικά, παρατηρήθηκαν **16 θάνατοι** [57]. Συμπερασματικά, καταλήγουμε στις εξής πιθανότητες:

- i. Πιθανότητα νόσησης: 0,033
- ii. Πιθανότητα νοσηλείας σε κλινική COVID-19: 0,062
- iii. Πιθανότητα νοσηλείας σε ΜΕΘ: 0,013
- iv. Πιθανότητα θανάτου: $16 \div 1.159 = 0,013$



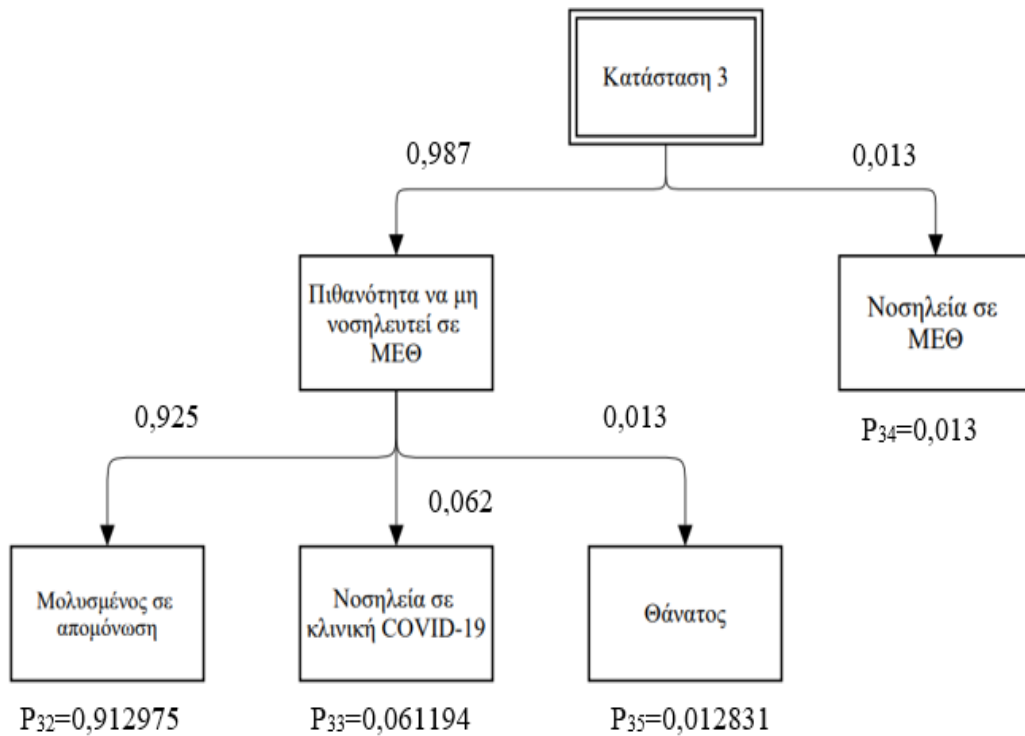
Εικόνα 16-Ευρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Υγιής πληθυσμός" μοντέλου PV

Στην **Εικόνα 16** αναγράφονται οι πιθανότητες με τις οποίες ξεκινώντας από την κατάσταση «Υγιής πληθυσμός», η διαδικασία μπορεί να μεταβεί στις καταστάσεις «Μολυσμένος σε απομόνωση», «Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19» ή να παραμείνει στην ίδια.



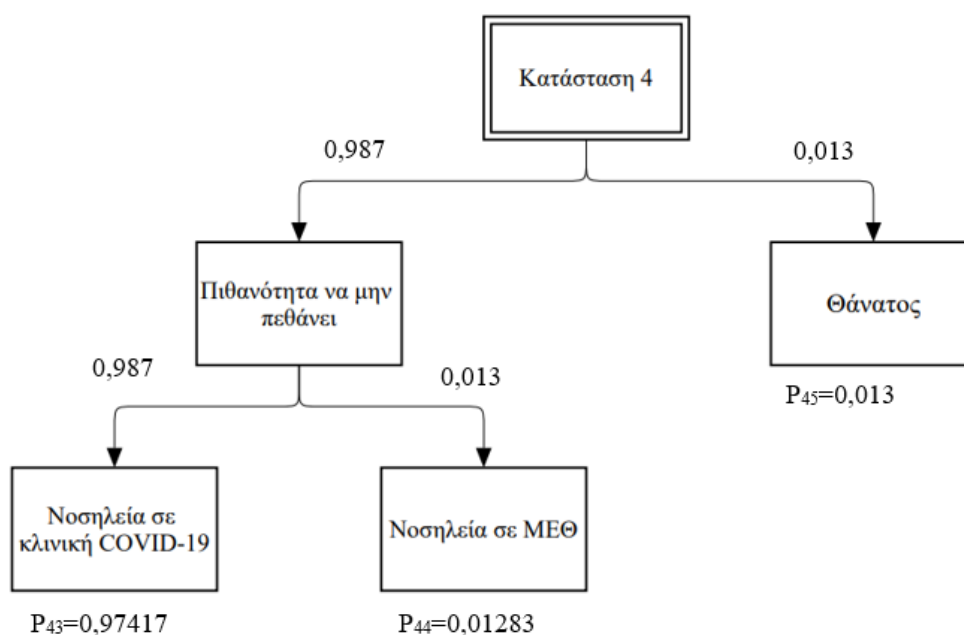
Εικόνα 17-Ευρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Μολυσμένος σε απομόνωση" μοντέλου PV

Η **Εικόνα 17** παρουσιάζει τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων, δεδομένου ότι η αρχική θέση του συστήματος είναι η κατάσταση «Μολυσμένος σε απομόνωση».



Εικόνα 18-Ευρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19" μοντέλου PV

Έχοντας ως δεδομένο πως η διαδικασία ξεκινάει από την κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19», στην **Εικόνα 18** αναγράφονται οι πιθανότητες με οποίες πραγματοποιούνται οι μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων.



Εικόνα 19-Εύρεση πιθανοτήτων μετάβασης της κατάστασης "Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ" μοντέλου PV

Έστω ότι κάποιος βρίσκεται στην κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ». Οι πιθανότητες να καταλήξει στις υπόλοιπες καταστάσεις που επικοινωνεί ή να παραμείνει στην ίδια, εμφανίζονται στην **Εικόνα 19**.

Συνεπώς, ο πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων του μοντέλου μερικώς εμβολιασμένου πληθυσμού μετατρέπεται ως εξής:

	1	2	3	4	5
1	0,967	0,030954	0,002046	0	0
2	0,907046	0,030954	0,062	0	0
P^{PV} = 3	0	0,912975	0,061194	0,013	0,012831
4	0	0	0,97417	0,01283	0,013
5	0	0	0	0	1

Πίνακας 5-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων μοντέλου PV

3.3 Μοντέλο Πληθυσμού που δεν έχει χορηγηθεί καμία δόση εμβολίου (UN)

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου που περιγράφει την κατάσταση ενός ατόμου που ανήκει στο μοντέλο UN, τη χρονική στιγμή n . Υπενθυμίζουμε πως οι μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων πραγματοποιούνται με τις παρακάτω πιθανότητες:

	1	2	3	4	5
1	0,46	0,49896	0,04104	0	0
2	0,42504	0,49896	0,076	0	0
3	0	0,79233	0,07448	0,02	0,11319
4	0	0	0,86681	0,01769	0,1155
5	0	0	0	0	1

3.3.1 Υπολογισμός πιθανότητας μετάβασης ενός βήματος για το μοντέλο UN

Οι πιθανότητες αυτές υπολογίζονται από τον πίνακα μετάβασης P . Αναλυτικότερα, ξεκινώντας από κάθε κατάσταση, η πιθανότητα μετάβασης στην κατάσταση j , για $j = 1,2,3,4,5$ σε ένα βήμα, όπως προκύπτει από τη σχέση (2), είναι:

$$p_{1j}=[0,46 \quad 0,49896 \quad 0,04104 \quad 0 \quad 0]$$

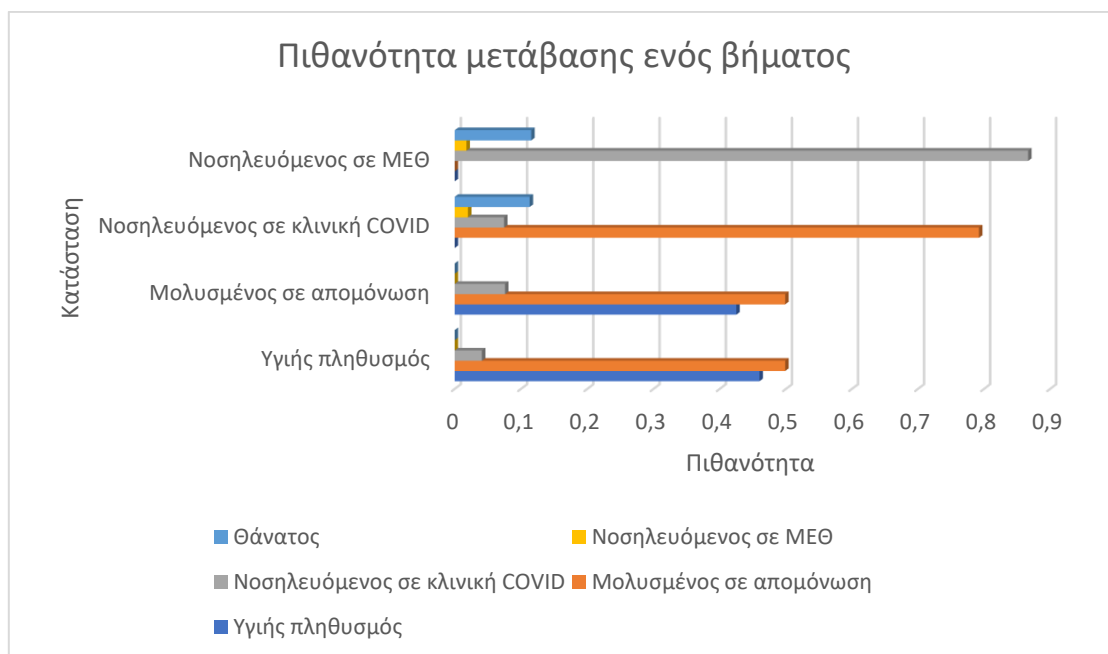
$$p_{2j}=[0,42504 \quad 0,49896 \quad 0,076 \quad 0 \quad 0]$$

$$p_{3j}=[0 \quad 0,79233 \quad 0,07448 \quad 0,02 \quad 0,11319]$$

$$p_{4j}=[0 \quad 0 \quad 0,86681 \quad 0,01769 \quad 0,1155]$$

$$p_{5j}=[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

Οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος παρουσιάζονται στο **διάγραμμα 1**:



Διάγραμμα 1-Πιθανότητα μετάβασης ενός βήματος μοντέλου UN

3.3.2 Υπολογισμός πιθανότητας μετάβασης n βημάτων για το μοντέλο UN

Η πιθανότητα ξεκινώντας από μία κατάσταση $i \in \{1,2,3,4,5\}$ η αλυσίδα να βρεθεί σε μία κατάσταση $j \in \{1,2,3,4,5\}$ σε $n \in \{5,10,15\}$ βήματα, εμφανίζεται στους πίνακες μετάβασης P^n και προκύπτουν από τη σχέση (8). Ο πίνακας P^5 δηλώνει τις πιθανότητες μετάβασης των καταστάσεων μετά από 5 χρονικά βήματα:

	1	2	3	4	5
1	0,40468	0,50712	0,061218	0,001253	0,02571
2	0,40286	0,50492	0,060986	0,001250	0,02996
3	0,35409	0,44459	0,053739	0,001119	0,14645
4	0,31389	0,39547	0,048504	0,001025	0,24110
5	0	0	0	0	1

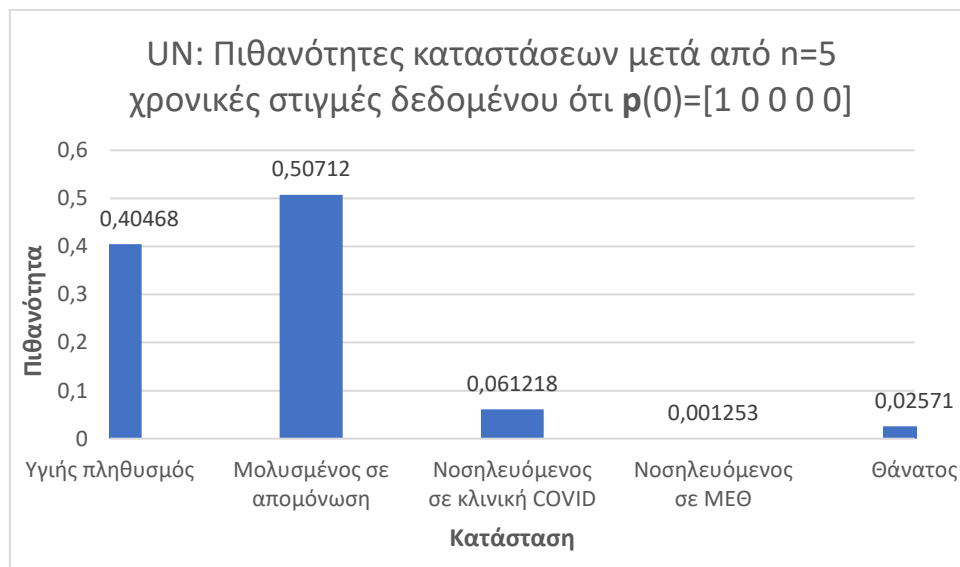
Πίνακας 6-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων $n=5$ βημάτων μοντέλου UN

Αναλυτικότερα, από την εξίσωση (9) και για $j = 1,2,3,4,5$ ισχύει ότι:

- Υπό την προϋπόθεση ότι κάποιος έχει ξεκινήσει από την κατάσταση 1, δηλαδή ανήκει στον υγιή πληθυσμό, οι πιθανότητες κάθε κατάστασης μετά από 5 βήματα είναι:

$$p(5)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot P^5 = [0,40468 \ 0,50712 \ 0,061218 \ 0,001253 \ 0,02571]$$

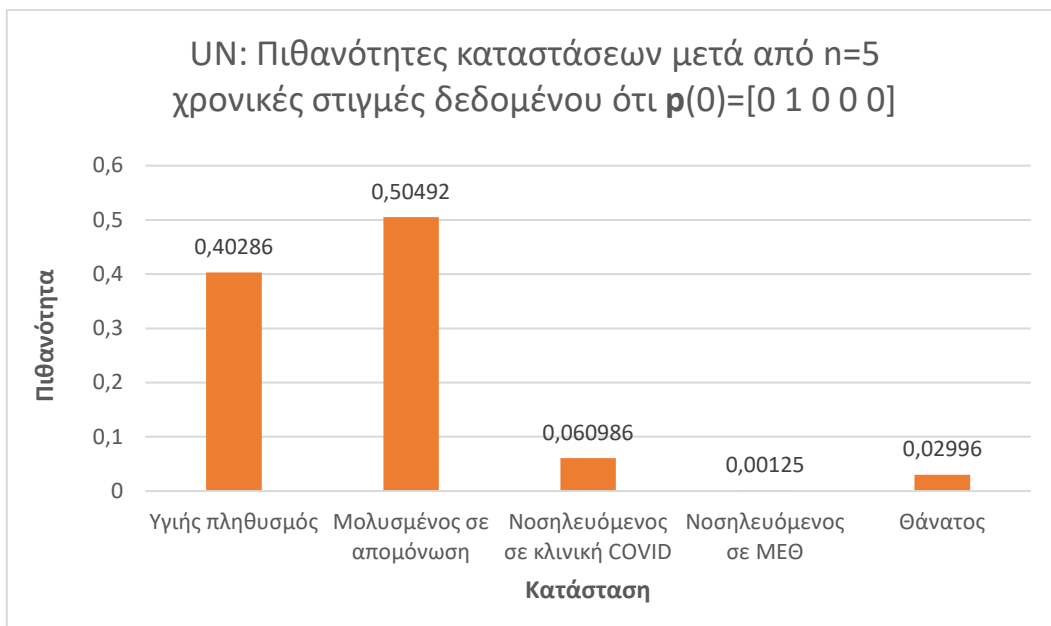
Στο παρακάτω γράφημα απεικονίζεται η κατανομή πιθανότητας κάθε κατάστασης μετά από $n = 5$ χρονικές στιγμές, δεδομένου ότι αρχικά βρισκόμαστε στην κατάσταση «Υγιής Πληθυσμός»:



Διάγραμμα 2-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN

- Στην περίπτωση που αρχικά βρισκόμαστε στην κατάσταση 2 («Μολυσμένος σε απομόνωση»), οι πιθανότητες κατάστασης μετά από 5 βήματα και το αντίστοιχο γράφημα της κατανομής πιθανότητας είναι:

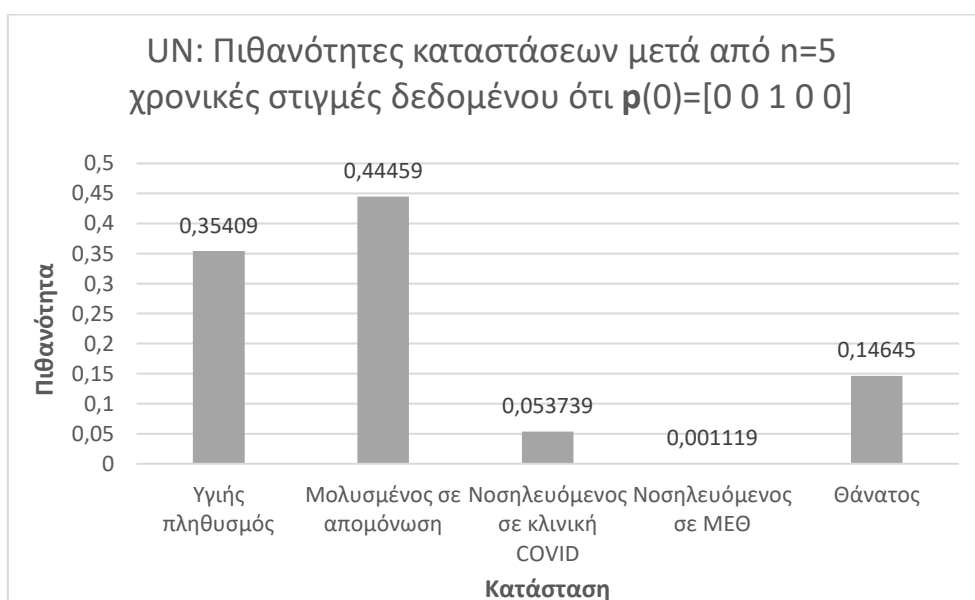
$$p(5)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot P^5 = [0,40286 \ 0,50492 \ 0,060986 \ 0,001250 \ 0,02996]$$



Διάγραμμα 3-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN

- Οι πιθανότητες κατάστασης μετά από 5 βήματα, αν κάποιος έχει ξεκινήσει από την κατάσταση 3 είναι οι ακόλουθες, οι οποίες παρουσιάζονται και διαγραμματικά στο **διάγραμμα 4**:

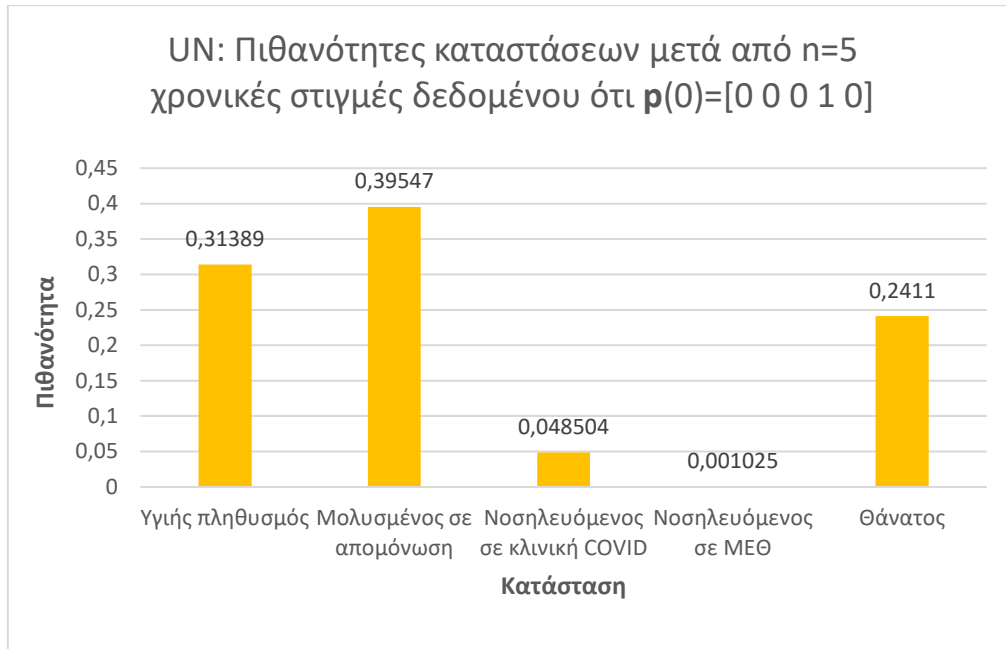
$$p(5)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \cdot P^5 = [0,35409 \ 0,44459 \ 0,053739 \ 0,001119 \ 0,14645]$$



Διάγραμμα 4-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN

- Δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση 4, οι πιθανότητες καταστάσεων μετά από 5 χρονικές στιγμές και το γράφημα κατανομής των πιθανοτήτων είναι:

$$p(5)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot P^5= [0,31389 \ 0,39547 \ 0,048504 \ 0,001025 \ 0,24110]$$

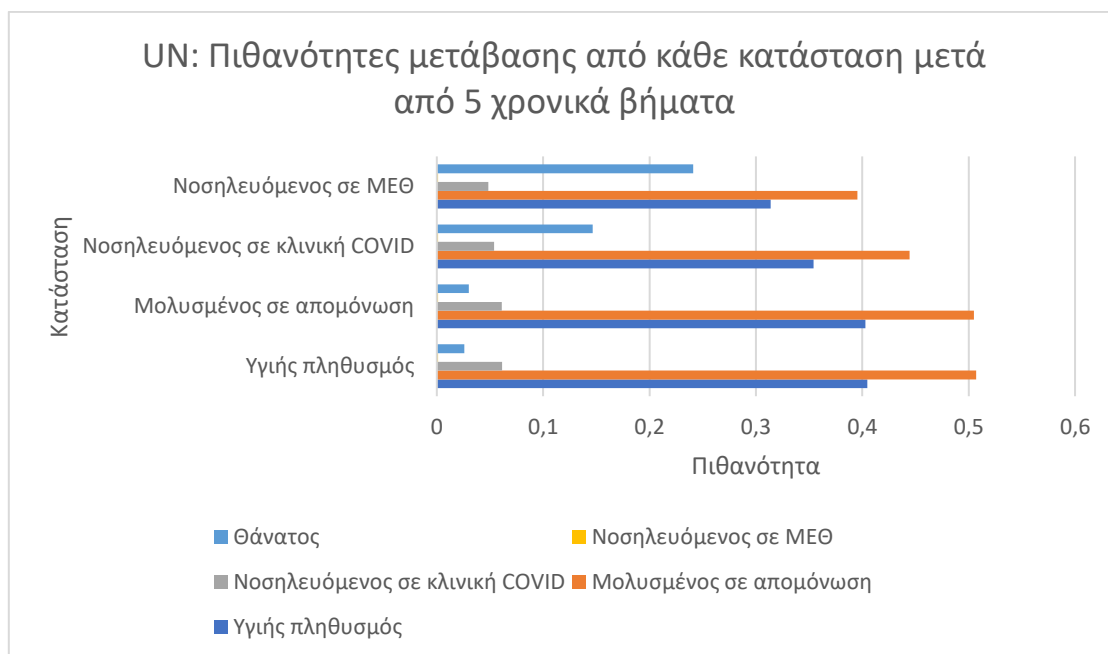


Διάγραμμα 5-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλου UN

- Τέλος, η κατάσταση 5 είναι απορροφητική, επομένως είναι αδύνατη η διαφυγή από αυτήν. Οπότε, σε αυτήν την περίπτωση:

$$p(5)=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot P^5= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Το **διάγραμμα 6** παρουσιάζει συγκεντρωτικά τις πιθανότητες μετάβασης από κάθε κατάσταση σε κάθε άλλη, μετά την πάροδο $n = 5$ χρονικών βημάτων:



Διάγραμμα 6-Πιθανότητες μετάβασης μετά από n=5 βήματα μοντέλου UN

Ο πίνακας P^{10} αναφέρεται στις πιθανότητες μετάβασης μετά από 10 βήματα:

	1	2	3	4	5
1	0,39014	0,48899	0,059052	0,001211	0,06059
2	0,38844	0,48686	0,058794	0,001205	0,06469
3	0,34179	0,42839	0,051733	0,001061	0,17702
4	0,30384	0,38083	0,045991	0,000943	0,26837
5	0	0	0	0	1

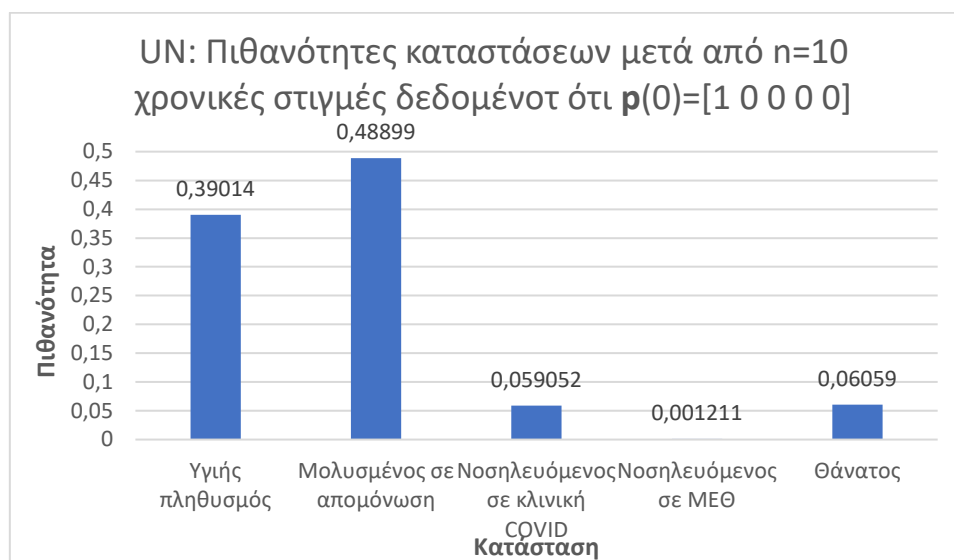
Πίνακας 7-Πίνακας μετάβασης καταστάσεων μετά από n=10 βήματα μοντέλου UN

Από τη σχέση (9) ισχύουν τα ακόλουθα:

- Δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση 1, οι πιθανότητες καταστάσεων μετά από 10 βήματα είναι:

$$p(10)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot P^{10}= [0,39014 \ 0,48899 \ 0,059052 \ 0,001211 \ 0,06059]$$

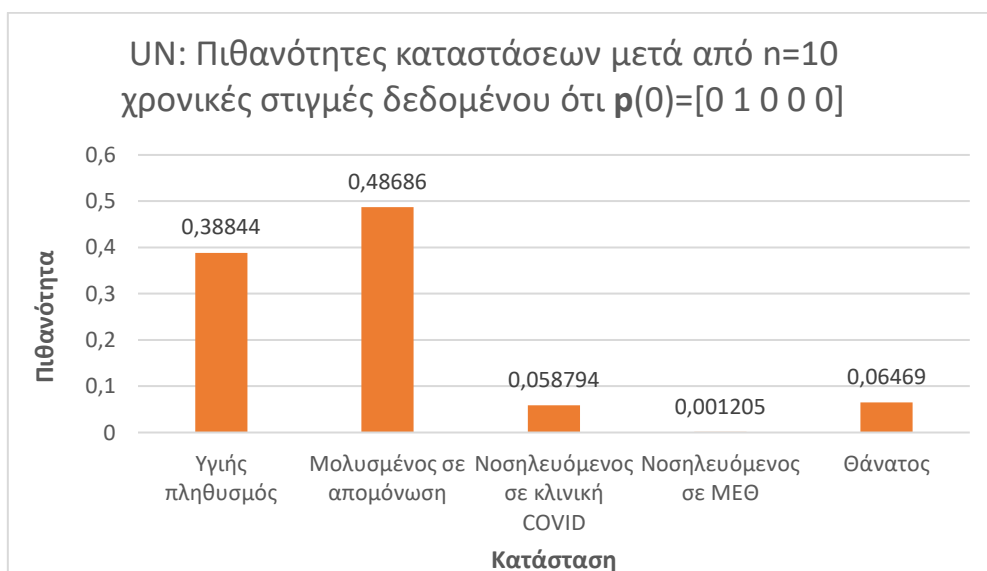
Το αντίστοιχο γράφημα κατανομής πιθανότητας κάθε κατάστασης μετά από $n = 10$ χρονικές στιγμές είναι:



Διάγραμμα 7- Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=10$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN

- Δεδομένου ότι η αρχική θέση του συστήματος είναι η κατάσταση 2, οι πιθανότητες κάθε κατάστασης μετά από 10 χρονικά βήματα και το αντίστοιχο διάγραμμα είναι:

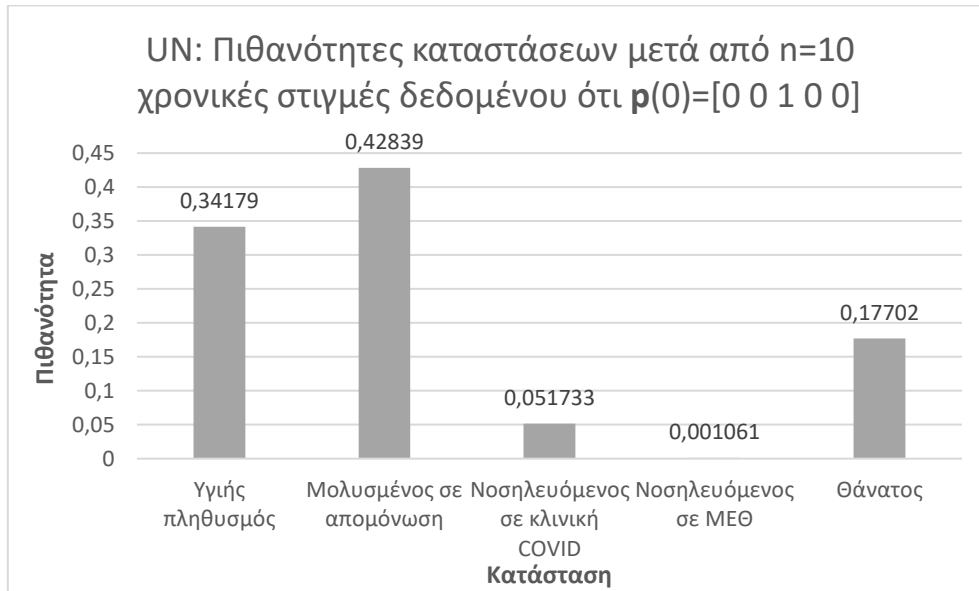
$$p(10)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot P^{10} = [0,38844 \ 0,48686 \ 0,058794 \ 0,001205 \ 0,06469]$$



Διάγραμμα 8-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=10$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN

- Αντίστοιχα, δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση 3:

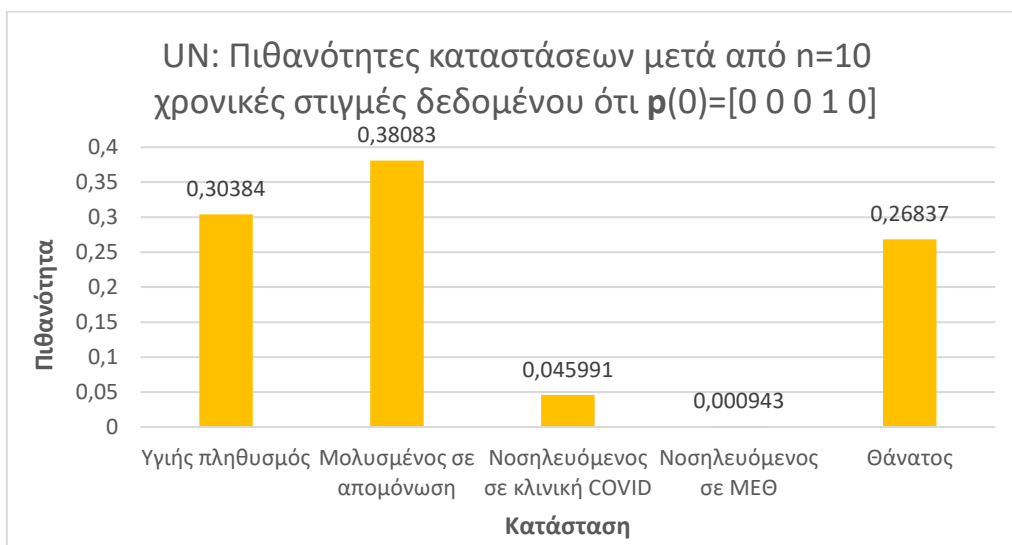
$$p(10)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \cdot P^{10}=[0,34179 \ 0,42839 \ 0,051733 \ 0,001061 \ 0,17702]$$



Διάγραμμα 9-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN

- Οι πιθανότητες μετάβασης των καταστάσεων στην περίπτωση που η διαδικασία ξεκινάει από την κατάσταση 4 είναι:

$$p(10)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot P^{10}=[0,30384 \ 0,38083 \ 0,045991 \ 0,000943 \ 0,26837]$$

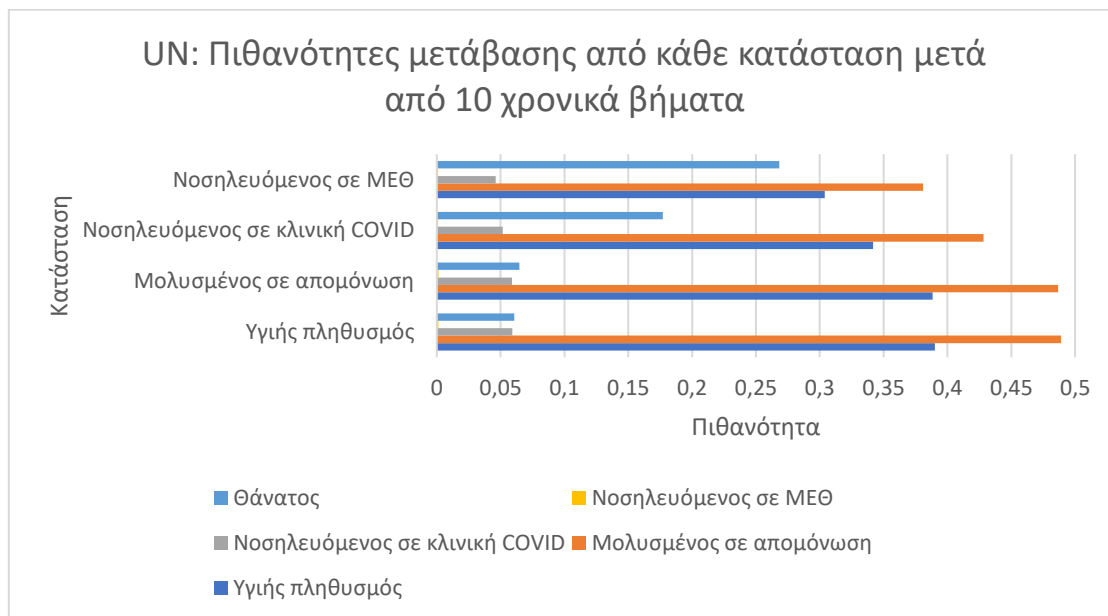


Διάγραμμα 10-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλου UN

- Τέλος, ξεκινώντας από την κατάσταση 5:

$$p(5)=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot P^{10} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Οι πιθανότητες μετάβασης από κάθε κατάσταση σε κάθε άλλη, κατά το 10^ο χρονικό βήμα, παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στο **διάγραμμα 11**:



Διάγραμμα 11-Πιθανότητες μετάβασης καταστάσεων μετά από n=10 βήματα μοντέλου UN

Οι πιθανότητες μετάβασης 15^{ου} βήματος, αναγράφονται στον πίνακα P^{15} :

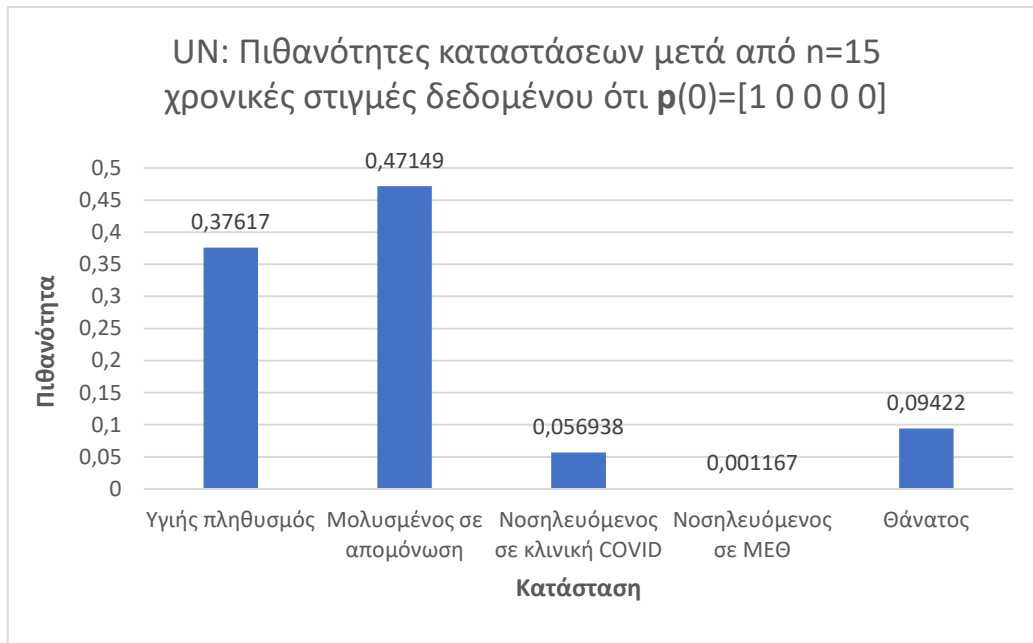
	1	2	3	4	5
1	0,37617	0,47149	0,056938	0,001167	0,09422
2	0,37453	0,46943	0,056690	0,001162	0,09817
3	0,32955	0,41305	0,049881	0,001023	0,20648
4	0,29297	0,36720	0,044344	0,000909	0,29456
5	0	0	0	0	1

Πίνακας 8-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων μετά από n=15 βήματα μοντέλου UN

Αναλυτικότερα, παρατίθενται οι πιθανότητες κατάστασης 15^{ου} βήματος στην κατάσταση $j \in \{1,2,3,4,5\}$ οι οποίες προκύπτουν από τη σχέση (9) και τα αντίστοιχα γραφήματα κατανομής πιθανοτήτων, υπό την προϋπόθεση ότι η αρχική κατάσταση είναι:

- η κατάσταση 1:

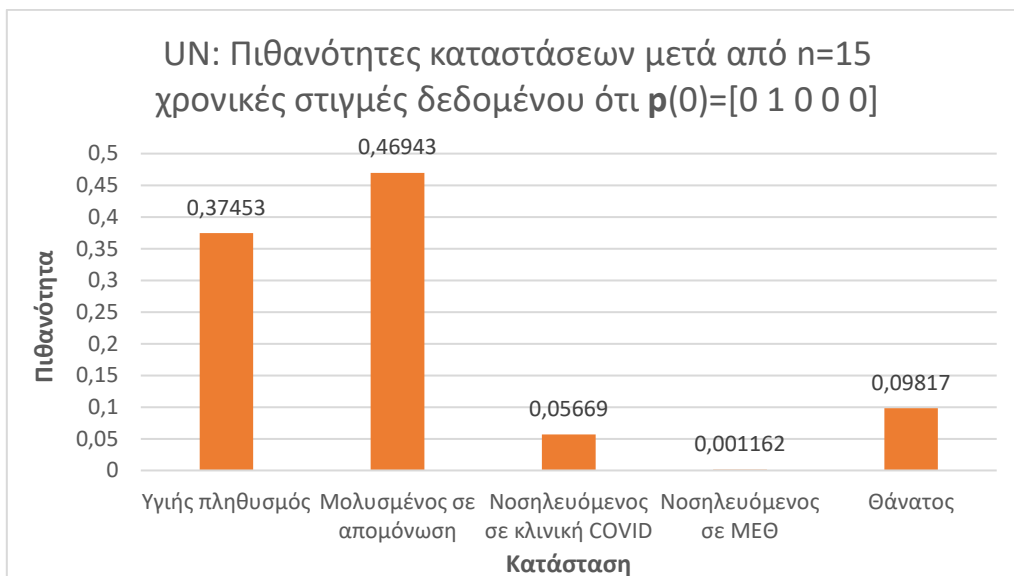
$$p(15)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot P^{15}=[0,37617 \ 0,47149 \ 0,056938 \ 0,001167 \ 0,09422]$$



Διάγραμμα 12-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN

- η κατάσταση 2:

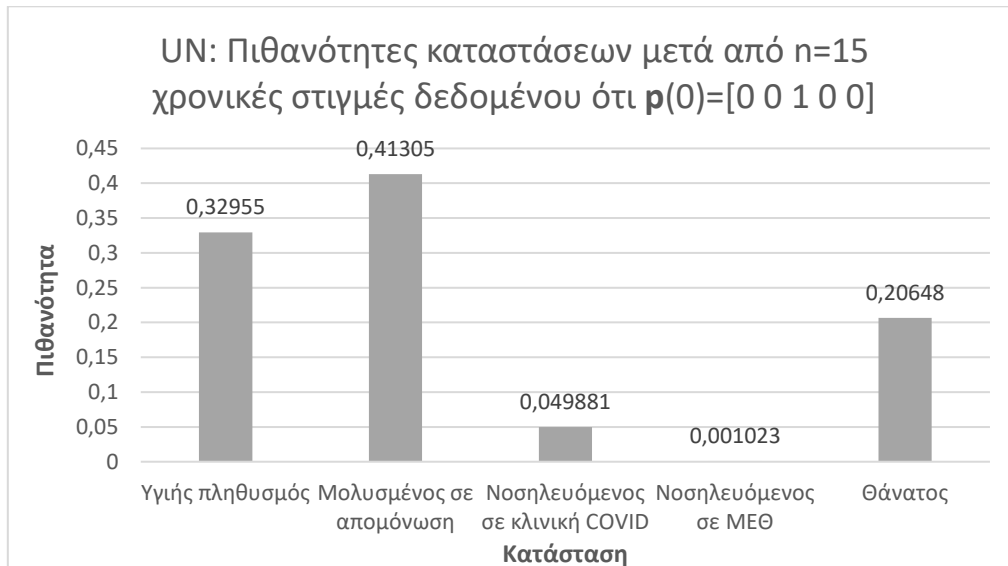
$$p(15)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot P^{15}=[0,37453 \ 0,46943 \ 0,056690 \ 0,001162 \ 0,09817]$$



Διάγραμμα 13-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN

- η κατάσταση 3:

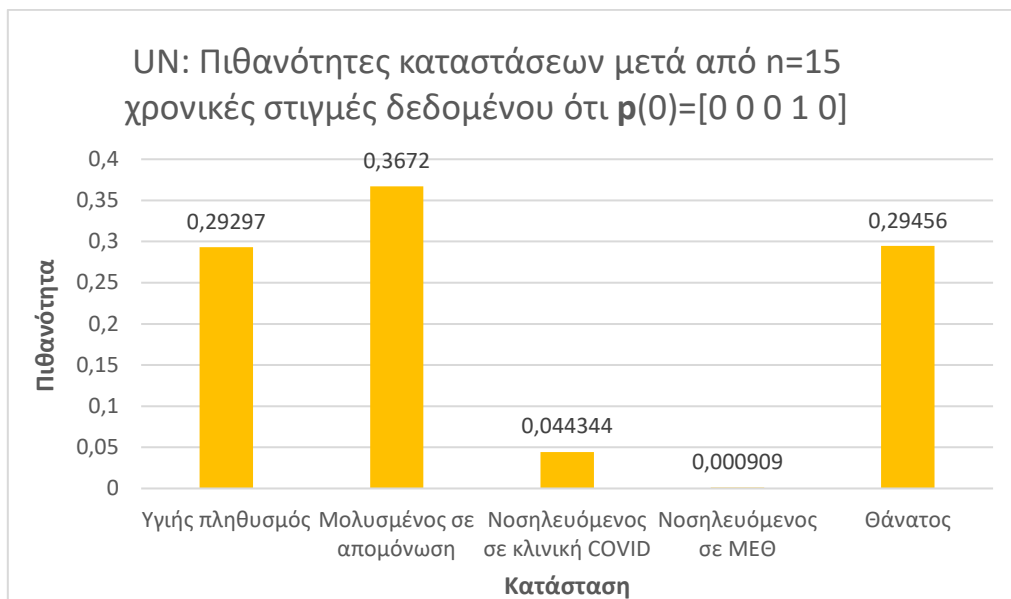
$$p(15)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \cdot P^{15} = [0,32955 \ 0,41305 \ 0,049881 \ 0,001023 \ 0,20648]$$



Διάγραμμα 14-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN

- η κατάσταση 4:

$$p(15)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot P^{15} = [0,29297 \ 0,36720 \ 0,044344 \ 0,000909 \ 0,29456]$$

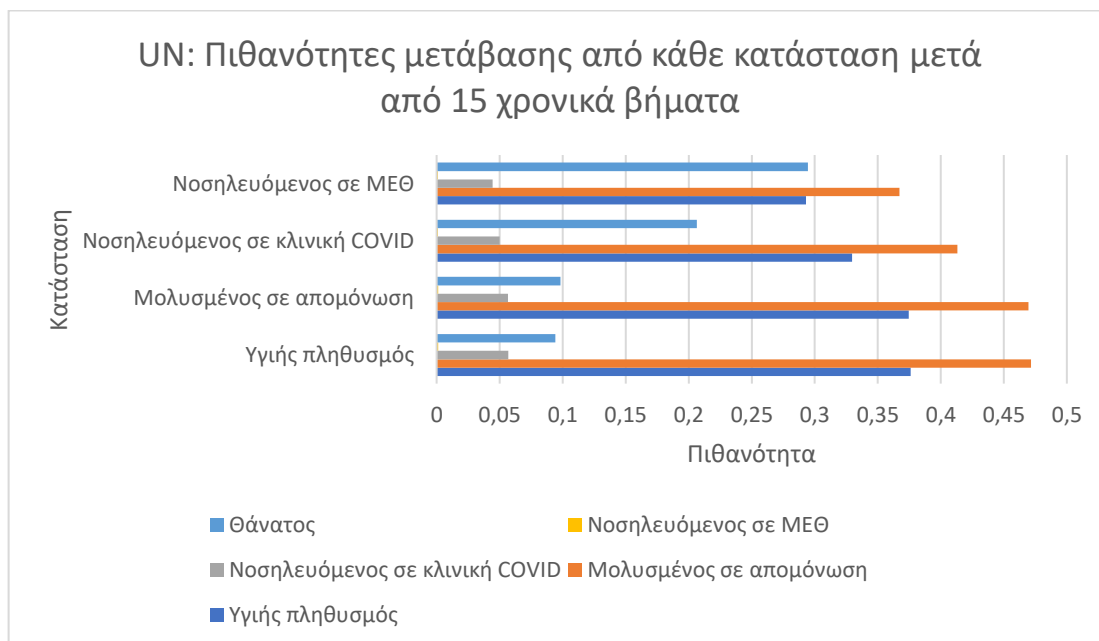


Διάγραμμα 15-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλου UN

- η κατάσταση 5:

$$p(15)=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot P^{15} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

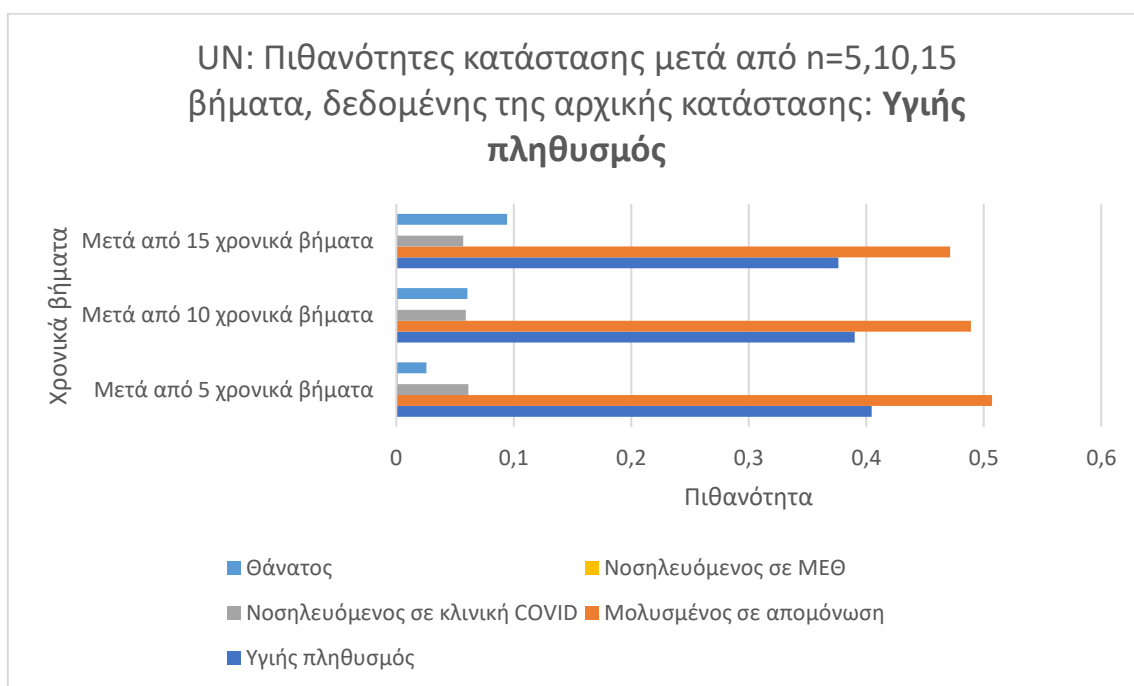
Διαγραμματικά οι πιθανότητες μετάβασης του πίνακα P^{15} παρουσιάζονται στο παρακάτω γράφημα:



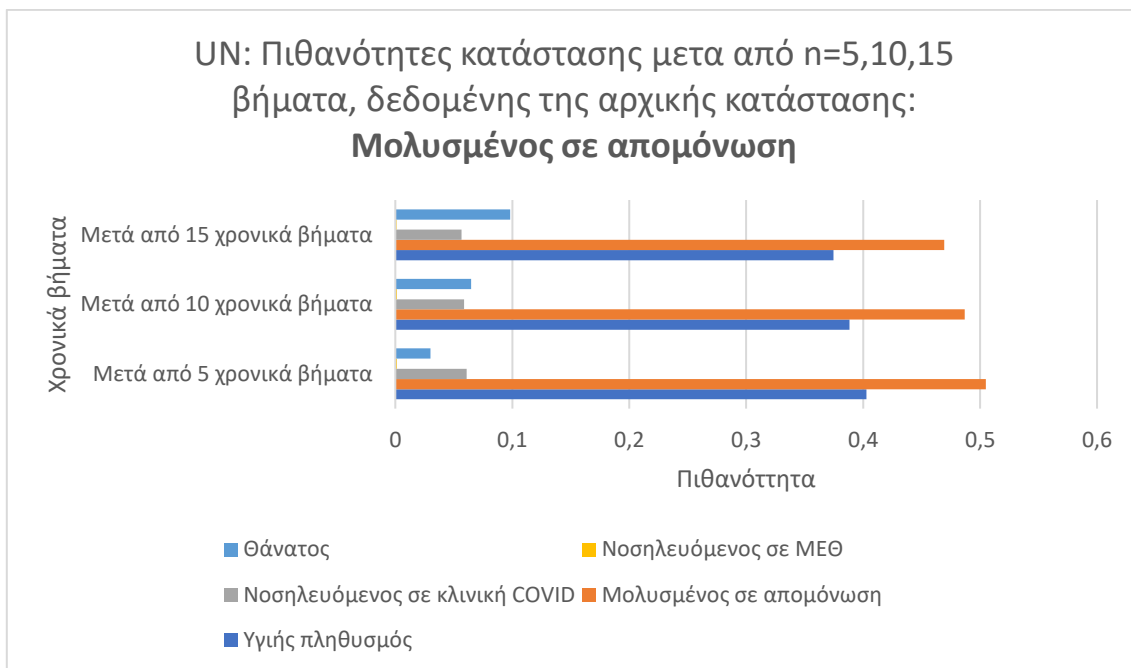
Διάγραμμα 16-Πιθανότητες μετάβασης καταστάσεων μετά από n=15 βήματα μοντέλου UN

Στους πίνακες μετάβασης πιθανοτήτων P^5 , P^{10} και P^{15} παρατηρούμε πως η πιθανότητα μετάβασης στην κατάσταση «Θάνατος» είναι μεγαλύτερη από ότι στην κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ». Δεδομένων των πιθανοτήτων που προέκυψαν στην ενότητα 3.2, είναι λογικό να συμβαίνει, καθώς $p_{44} = 0,02$ ενώ $p_{55} = 0,1155$. Επιπρόσθετα, η κατάσταση «Θάνατος» αποτελεί απορροφητική κατάσταση, ενώ η «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ» μεταβατική. Αυτό σημαίνει πως όσο μεγαλύτερο αριθμό ημερών εξετάζουμε τόσο θα αυξάνεται η πιθανότητα θανάτου και θα μειώνεται σταδιακά η πιθανότητα μετάβασης σε όλες τις μεταβατικές καταστάσεις.

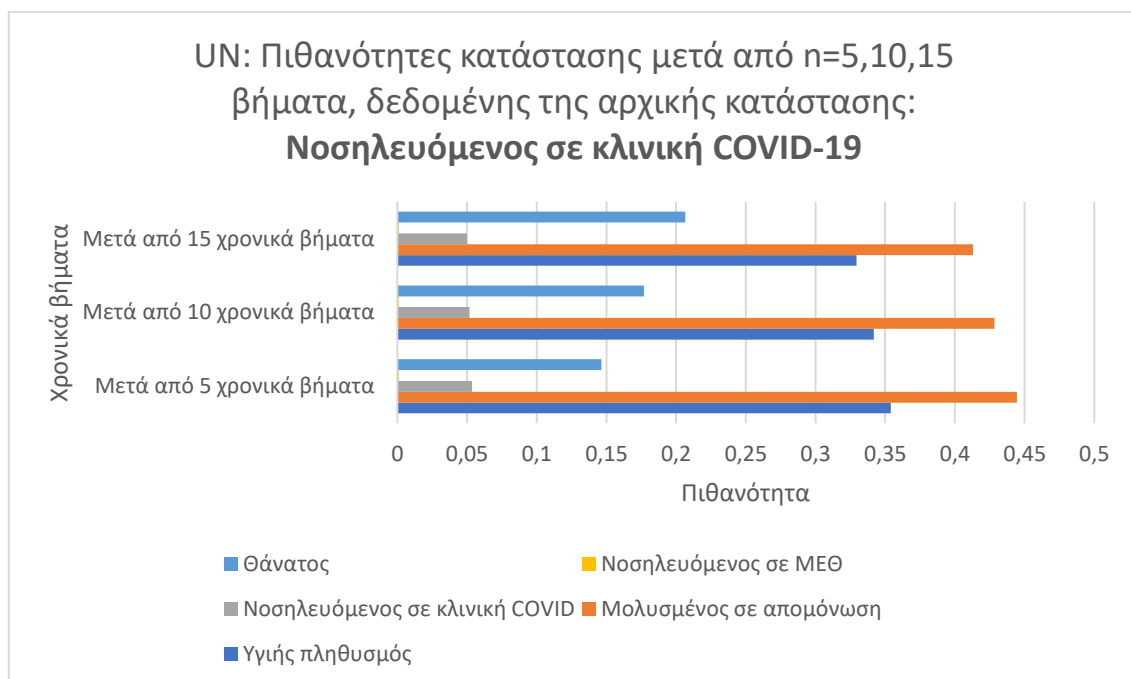
Στα παρακάτω διαγράμματα, φαίνεται η πιθανότητα να βρεθεί κάποιος στην κατάσταση $j = 1,2,3,4,5$, δεδομένου ότι έχει ξεκινήσει από την κατάσταση $i = 1,2,3,4$, σε 5, 10 και 15 χρονικά βήματα:



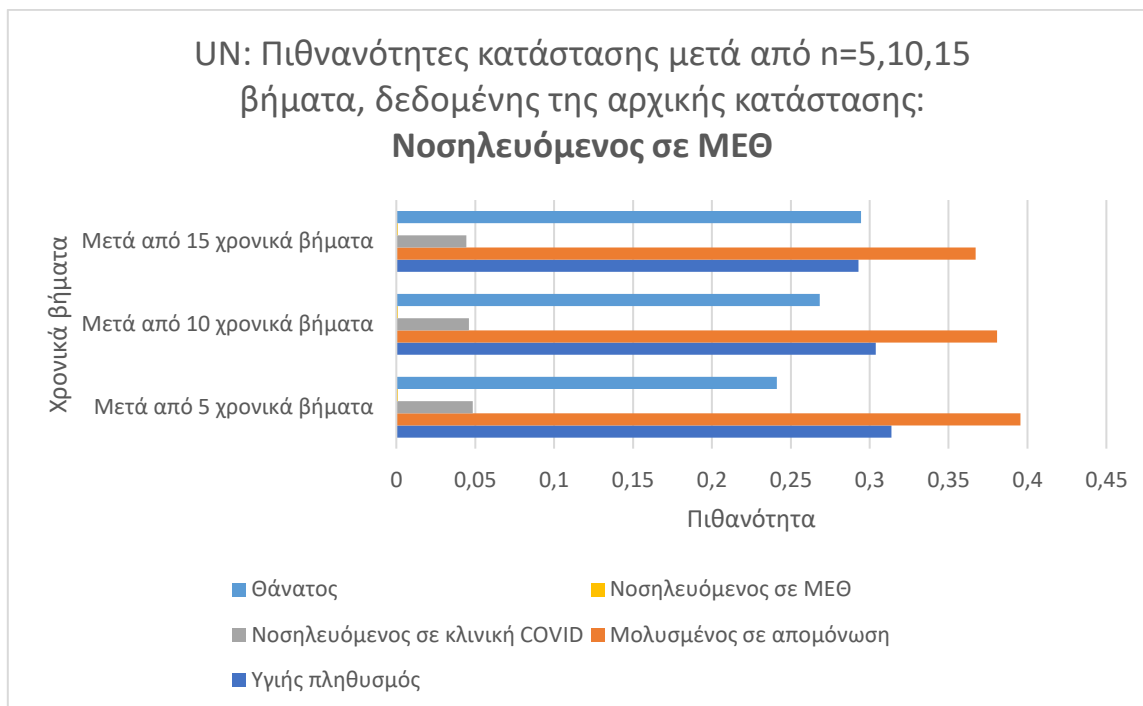
Διάγραμμα 17-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου UN



Διάγραμμα 18-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN



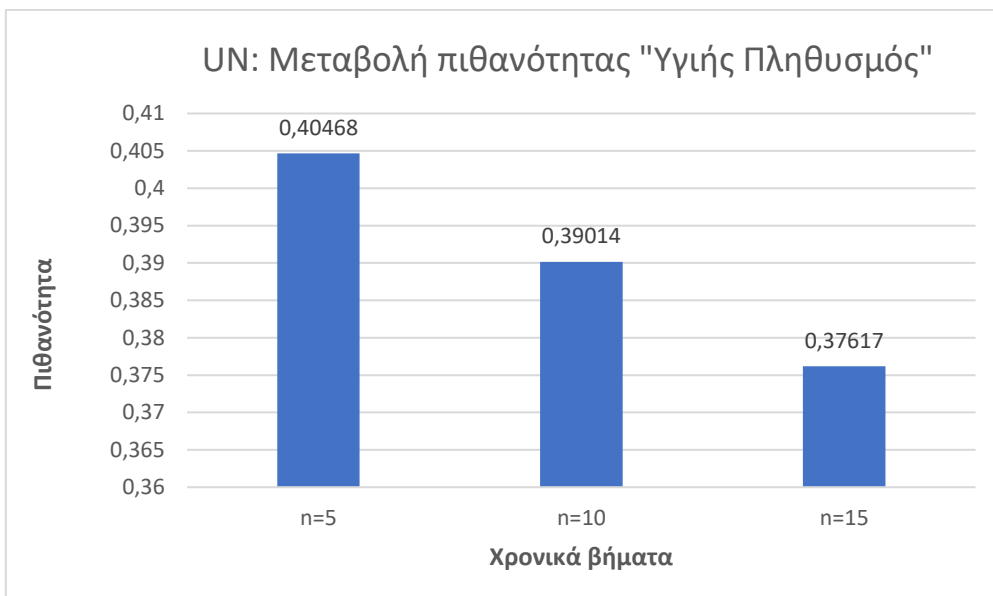
Διάγραμμα 19-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN



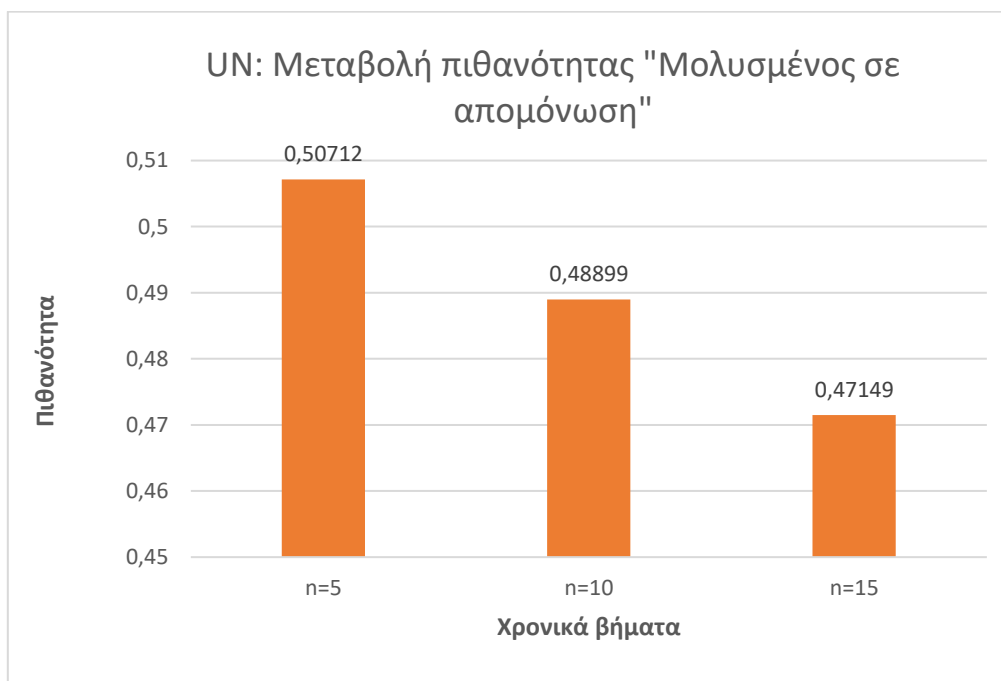
Διάγραμμα 20-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου UN

Στα **διαγράμματα 17, 18, 19 και 20** τα οποία εξετάζουν μεμονωμένα την κάθε μεταβατική κατάσταση, παρατηρούμε πως όσο αυξάνεται ο αριθμός των ημερών που εξετάζεται μειώνεται σταδιακά η πιθανότητα να βρεθεί ένα άτομο του πληθυσμού στις μεταβατικές καταστάσεις, ενώ αυξάνεται η πιθανότητα να βρεθεί στην απορροφητική κατάσταση. Δεδομένης της ύπαρξης της απορροφητικής κατάστασης, είναι βέβαιο πως μετά την πάροδο αρκετών χρονικών βημάτων η διαδικασία θα καταλήξει σε αυτήν με πιθανότητα τη μονάδα. Επομένως, σε όσο μεγαλύτερο αριθμό ημερών εκτελείται η διαδικασία, τόσο ένα μέρος του πληθυσμού θα μεταβαίνει από τις μεταβατικές καταστάσεις στην κατάσταση «Θάνατος» από την οποία δεν μπορεί να διαφύγει.

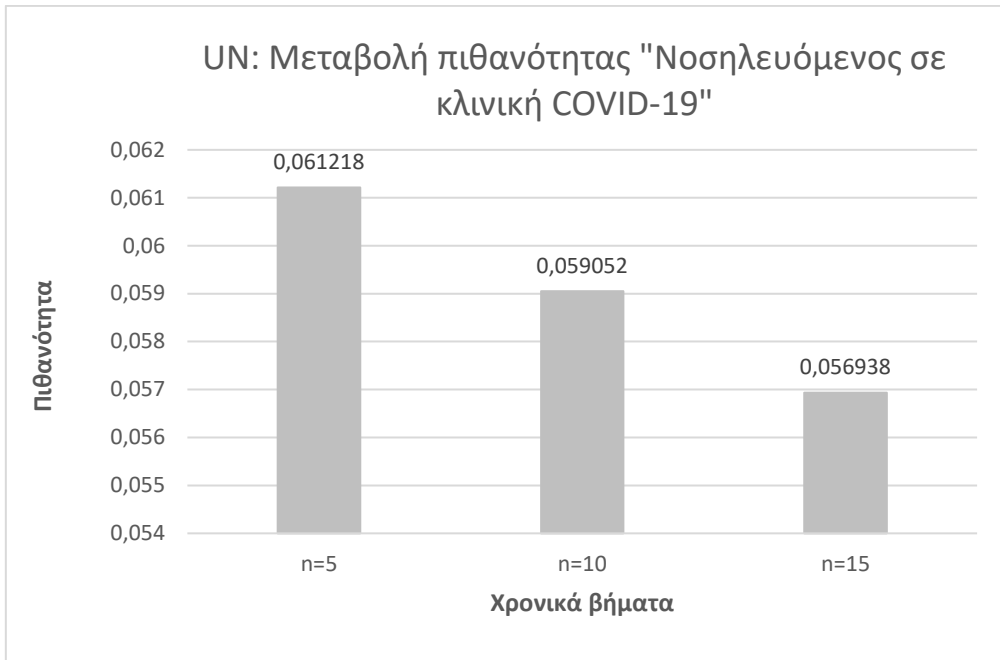
Η μεταβολή της πιθανότητας κάθε κατάστασης με την πάροδο $n = 5,10,15$ χρονικών στιγμών, δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση της διαδικασίας είναι η κατάσταση «Υγιής πληθυσμός», φαίνεται στα **διαγράμματα 21, 22, 23, 24 και 25**:



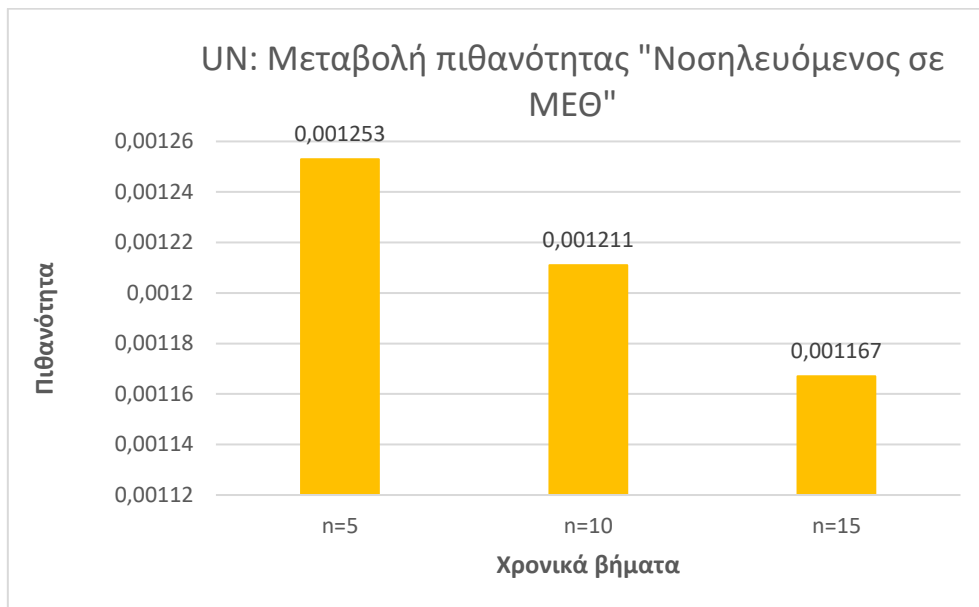
Διάγραμμα 21-Μεταβολή πιθανότητας "Υγιής πληθυσμός" δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN



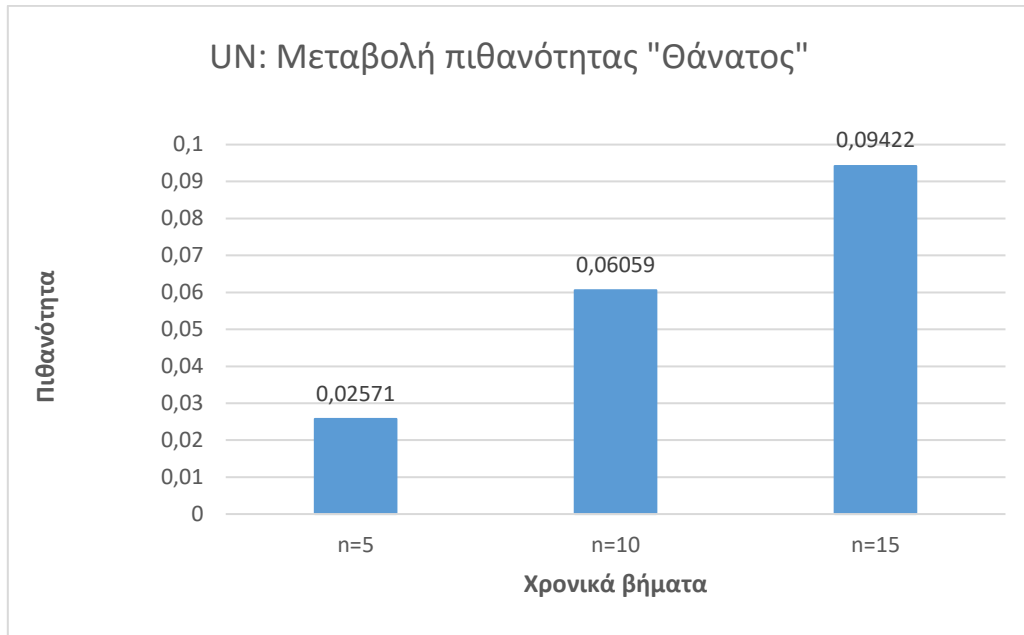
Διάγραμμα 22-Μεταβολή πιθανότητας "Μολυσμένος σε απομόνωση" δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN



Διάγραμμα 23-Μεταβολή πιθανότητας "Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19" δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN

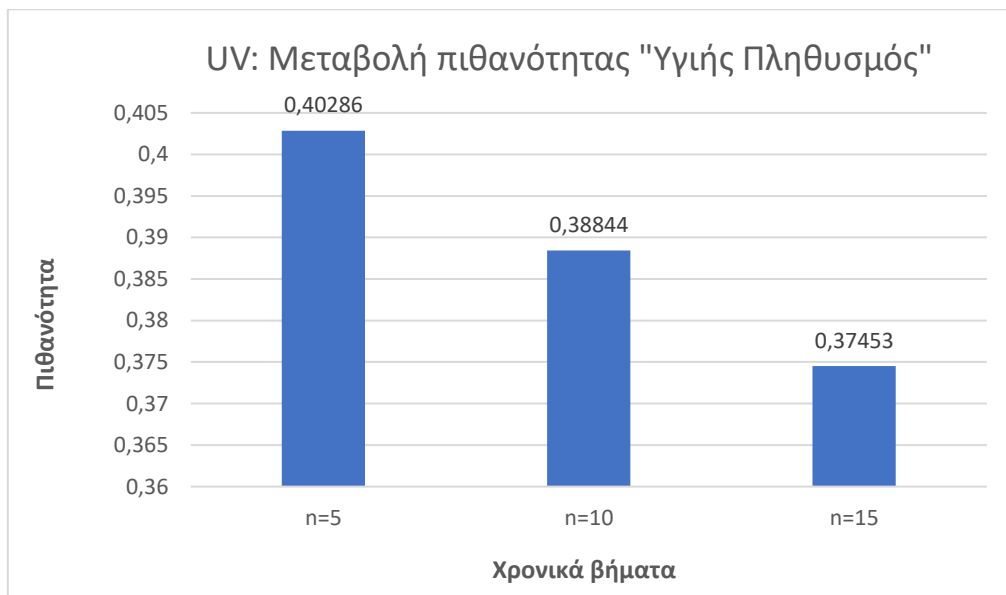


Διάγραμμα 24-Μεταβολή πιθανότητας "Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ" δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN

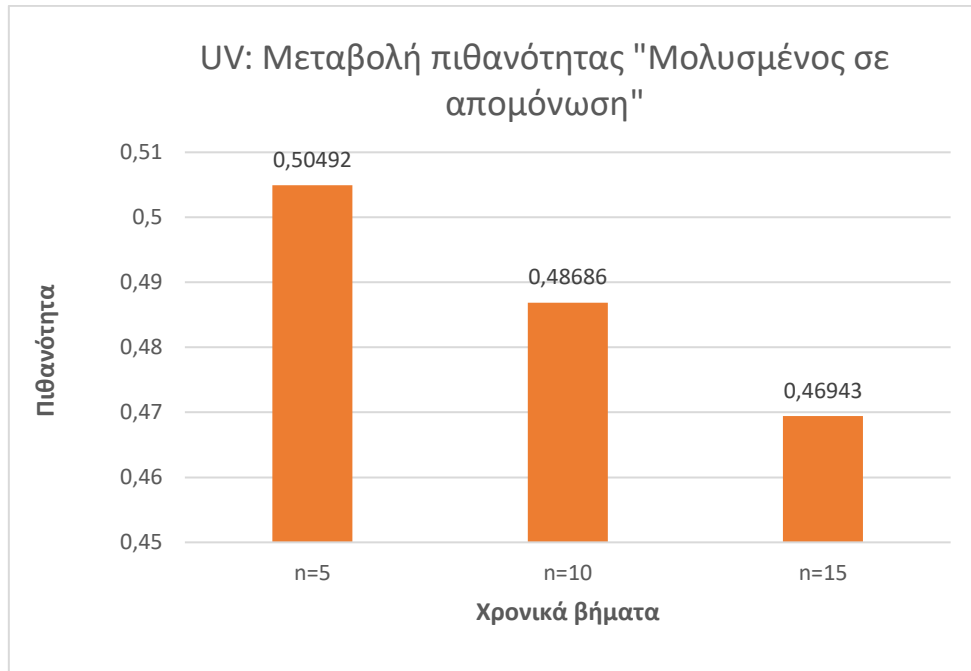


Διάγραμμα 25-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου UN

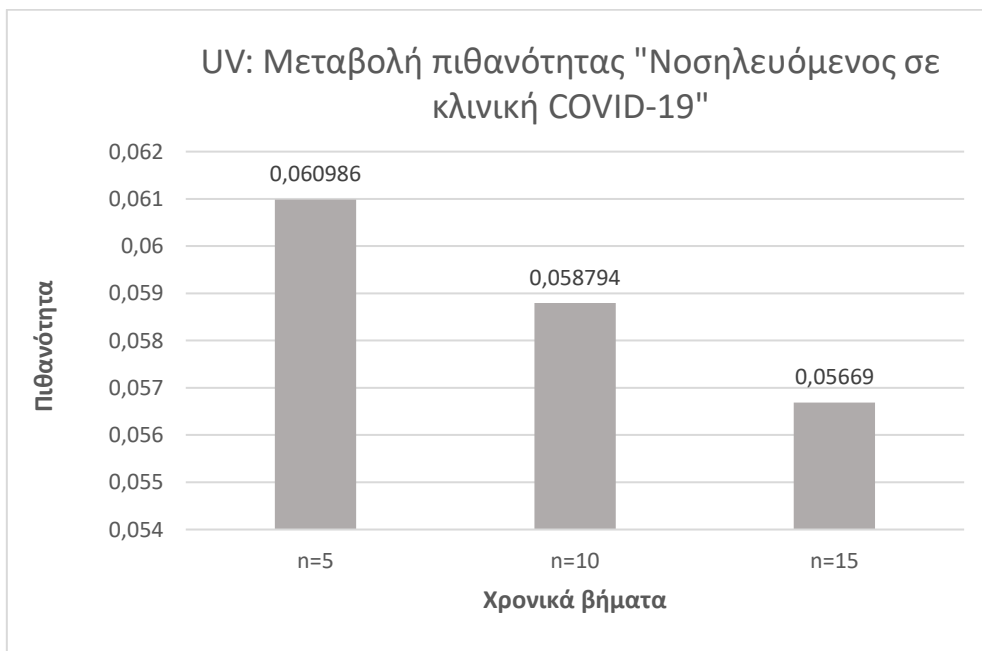
Έστω ότι αρχικά βρισκόμαστε στην κατάσταση «**Μολυσμένος σε απομόνωση**». Στα **διαγράμματα 26, 27, 28, 29 και 30** απεικονίζεται η μεταβολή πιθανότητας κάθε κατάστασης μετά από $n = 5, 10, 15$ χρονικές στιγμές:



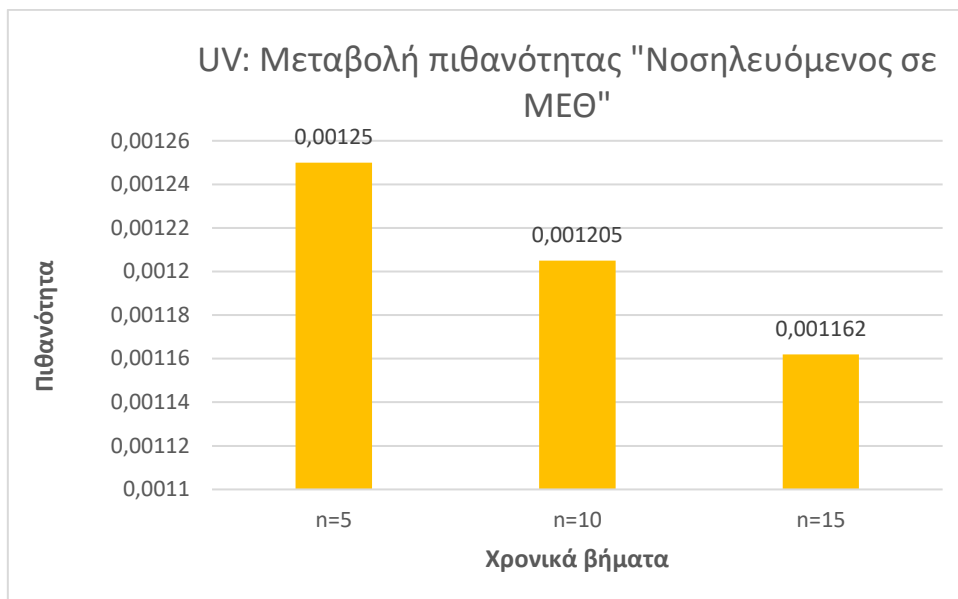
Διάγραμμα 26-Μεταβολή πιθανότητας “Υγιής πληθυσμός” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου UN



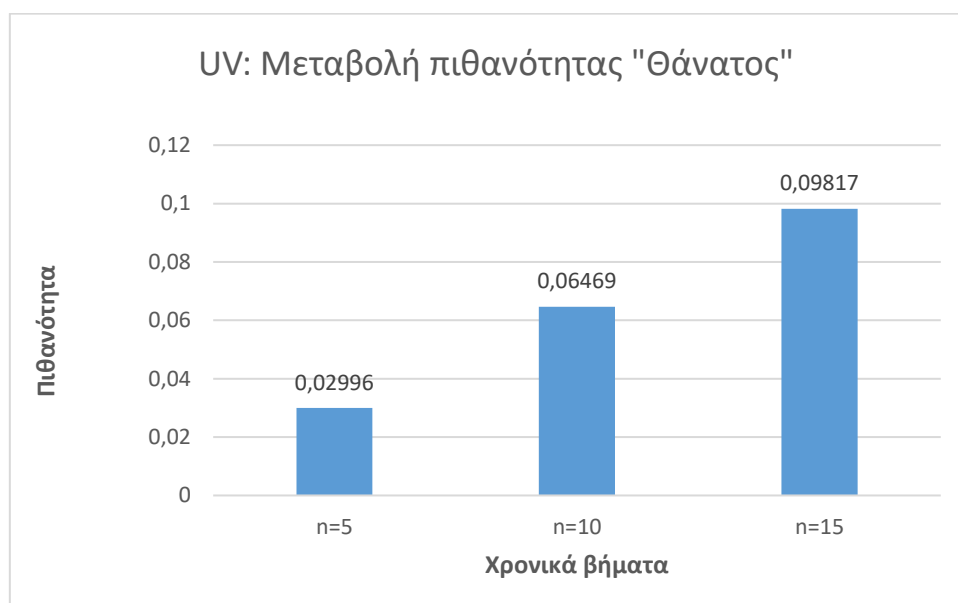
Διάγραμμα 27-Μεταβολή πιθανότητας "Μολυσμένος σε απομόνωση" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN



Διάγραμμα 28-Μεταβολή πιθανότητας "Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN

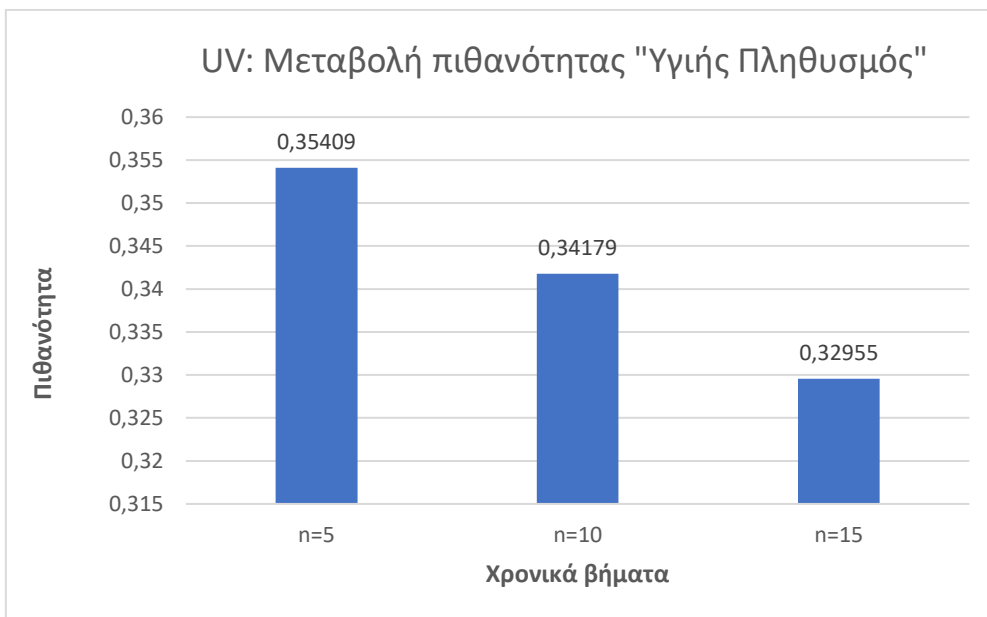


Διάγραμμα 29-Μεταβολή πιθανότητας "Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN

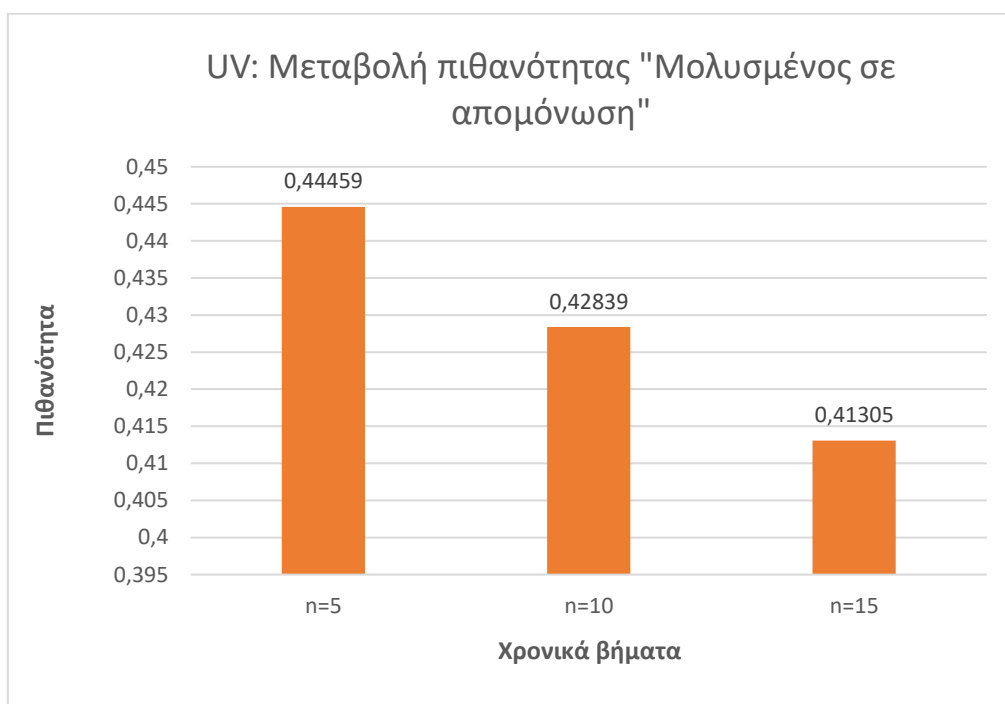


Διάγραμμα 30-Μεταβολή πιθανότητας "Θάνατος" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN

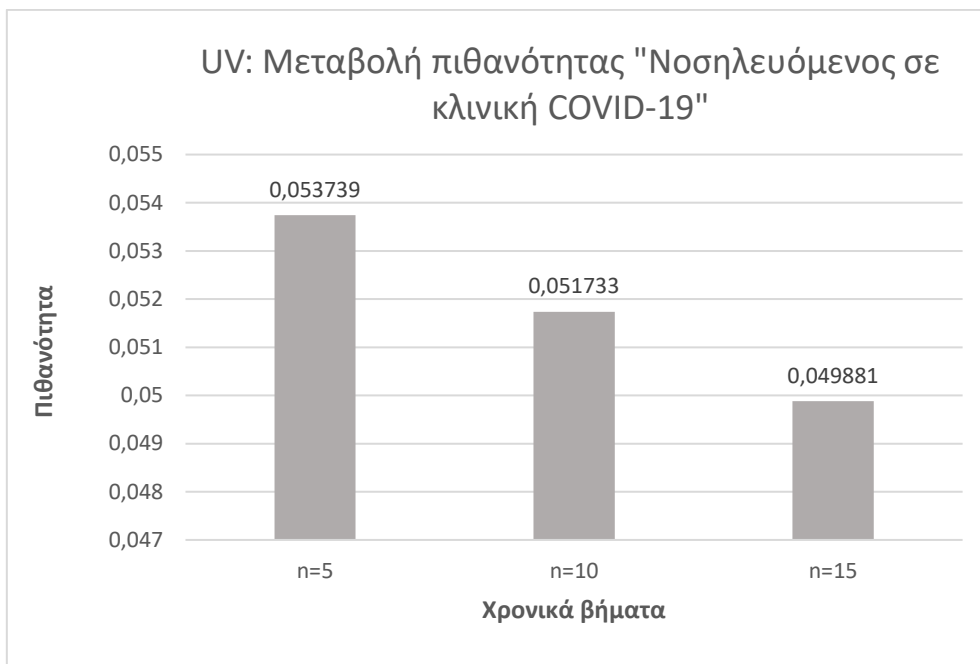
Στα **διαγράμματα 31, 32, 33, 34 και 35** απεικονίζεται η μεταβολή της πιθανότητας κάθε κατάστασης μετά από $n = 5, 10, 15$ χρονικές στιγμές, δεδομένου ότι αρχικά βρισκόμαστε στην κατάσταση «**Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19**»:



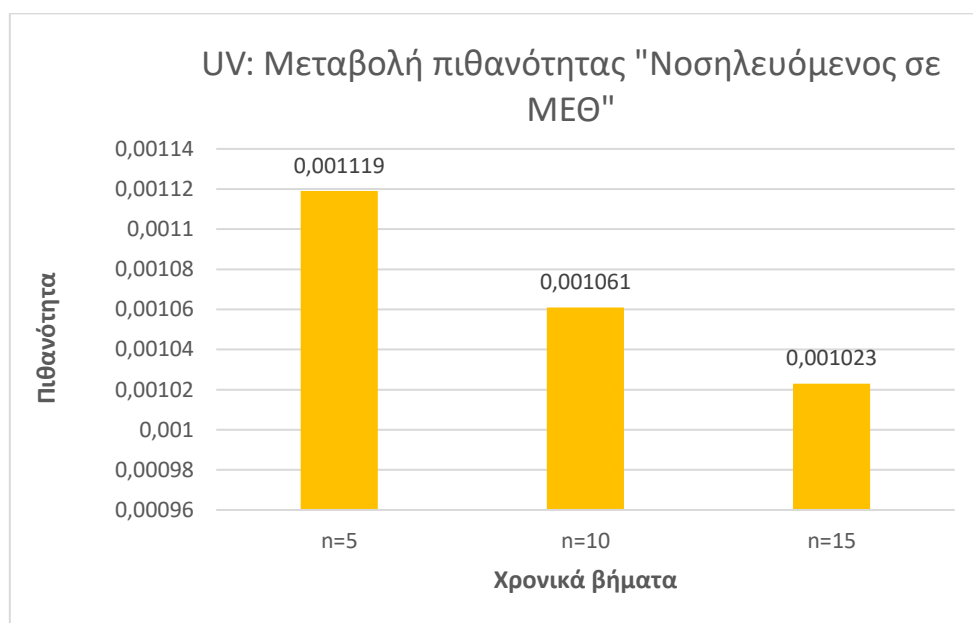
Διάγραμμα 31-Μεταβολή πιθανότητας "Υγιής πληθυσμός" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN



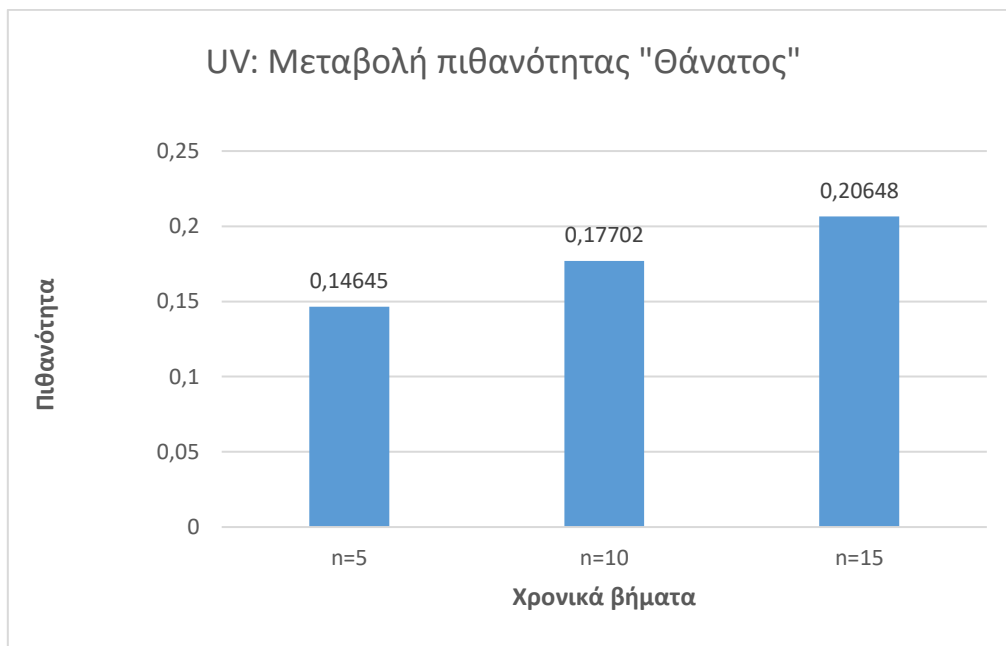
Διάγραμμα 32- Μεταβολή πιθανότητας "Μολυσμένος σε απομόνωση" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN



Διάγραμμα 33-Μεταβολή πιθανότητας "Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN

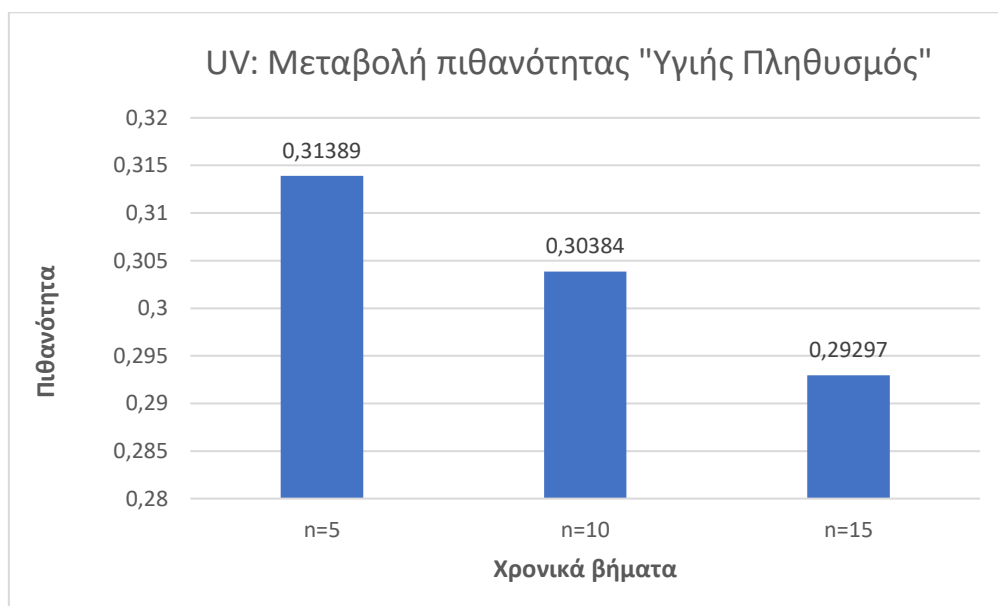


Διάγραμμα 34-Μεταβολή πιθανότητας "Νοσηλευόμενος σε MEΘ" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου UN

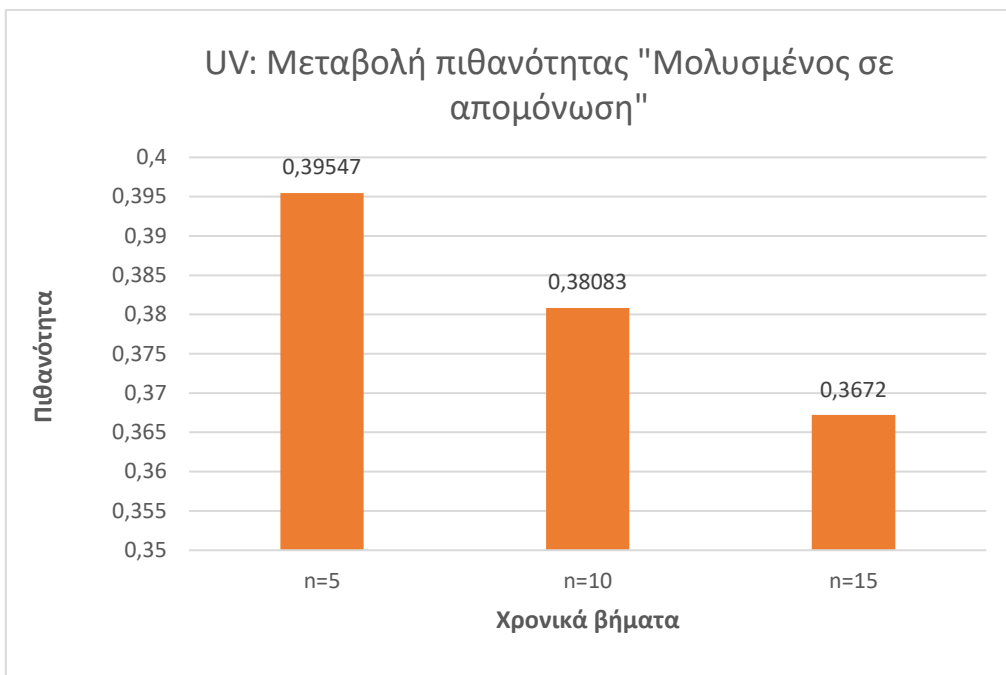


Διάγραμμα 35-Μεταβολή πιθανότητας "Θάνατος" δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου UN

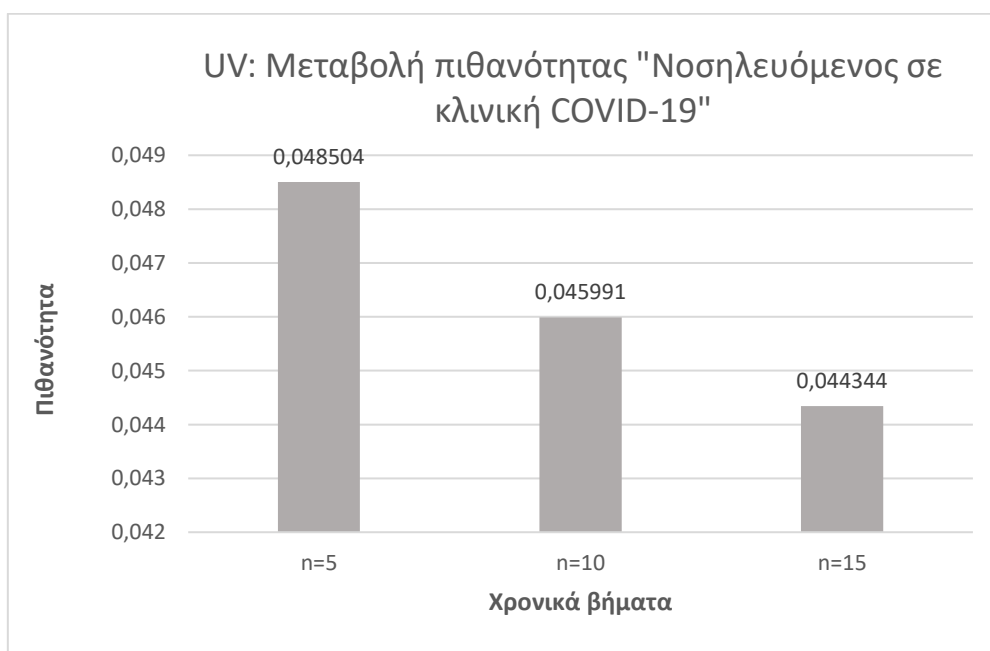
Τέλος, δεδομένου ότι αρχικά βρισκόμαστε στην κατάσταση «**Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ**», στα **διαγράμματα 36, 37, 38, 39 και 40** απεικονίζεται η μεταβολή της πιθανότητας κάθε κατάστασης μετά από $n = 5, 10, 15$ χρονικά βήματα:



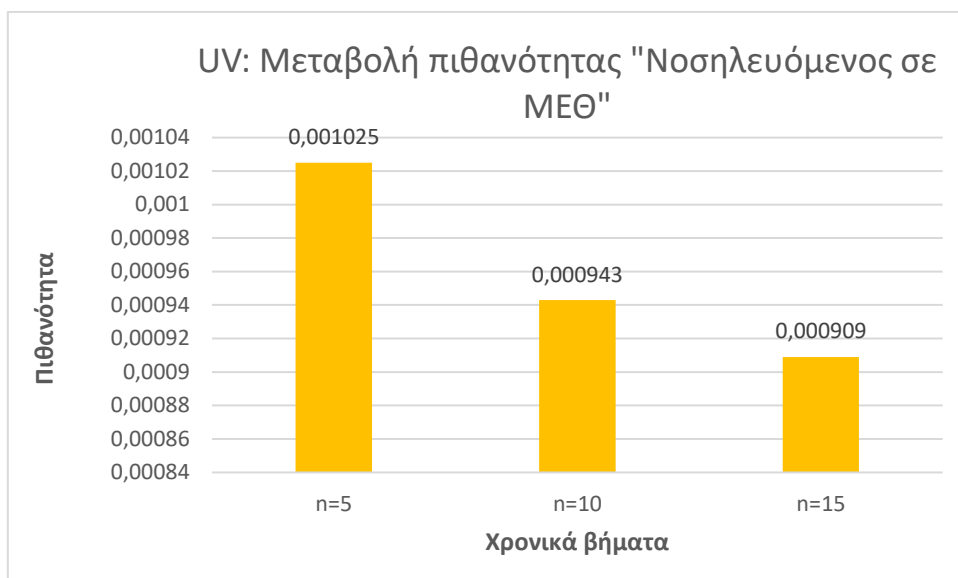
Διάγραμμα 36-Μεταβολή πιθανότητας "Υγιής πληθυσμός" δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου UN



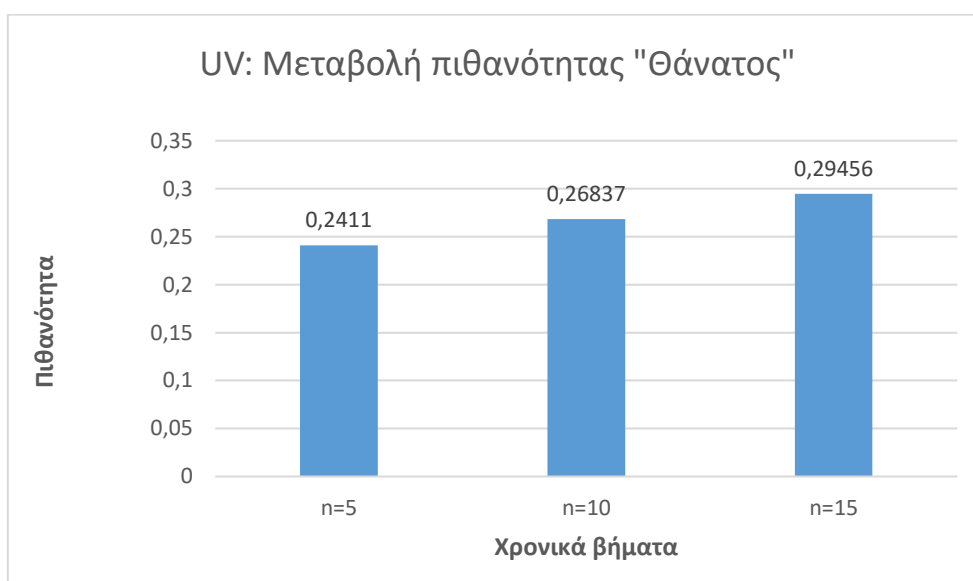
Διάγραμμα 37-Μεταβολή πιθανότητας "Μολυσμένος σε απομόνωση" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλου UN



Διάγραμμα 38-Μεταβολή πιθανότητας "Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλου UN



Διάγραμμα 39-Μεταβολή πιθανότητας "Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ" δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου UN



Διάγραμμα 40-Μεταβολή πιθανότητας "Θάνατος" δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου UN

Σε όλα τα διαγράμματα που αφορούν τη μεταβολή της πιθανότητας κάθε κατάστασης με την πάροδο $n = 5, 10, 15$ χρονικών στιγμών (διάγραμμα 21-διάγραμμα 40), παρατηρούμε πως ανεξάρτητα από την αρχική κατάσταση της διαδικασίας, όσο αυξάνεται ο αριθμός ημερών που εξετάζουμε τόσο μειώνεται και η πιθανότητα να βρεθεί κάποιος στις μεταβατικές καταστάσεις. Αυτό συμβαίνει διότι σε κάθε επαναληπτική εκτέλεση της διαδικασίας υπάρχει θετική πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση «Θάνατος» και ο πληθυσμός παραμένει σε αυτήν

επ' άπειρον, κατά συνέπεια ο πληθυσμός των μεταβατικών καταστάσεων σταδιακά θα ελαττώνεται. Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ότι η αρχική θέση της διαδικασίας είναι καθοριστικός παράγοντας για τις πιθανότητες με τις οποίες συντελούνται οι μεταβάσεις. Πιο συγκεκριμένα, αν εξετάσουμε μεμονωμένα τις περιπτώσεις όπου η διαδικασία ξεκινάει από την κατάσταση «Υγιής πληθυσμός» (διάγραμμα 21-διάγραμμα 25) και «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ» (διάγραμμα 36-διάγραμμα 40), θα διαπιστώσουμε ότι έχει δημιουργηθεί μεγάλο χάσμα ανάμεσά τους, καθώς όσο η διαδικασία πλησιάζει στην απορροφητική κατάσταση αυξάνονται οι πιθανότητες να καταλήξει σε αυτήν.

3.3.3 Υπολογισμός πιθανότητας επιβίωσης n βημάτων για το μοντέλο UN

Δεδομένου ότι κάποιος βρίσκεται στην κατάσταση $i \in \{1,2,3,4\}$, ένα πολύ ενδιαφέρον ερώτημα που τίθεται είναι το ποια είναι η πιθανότητα επιβίωσης μετά από n βήματα.

Γνωρίζουμε ότι:

$$P^n = P \cdot P \cdot \dots \cdot P$$

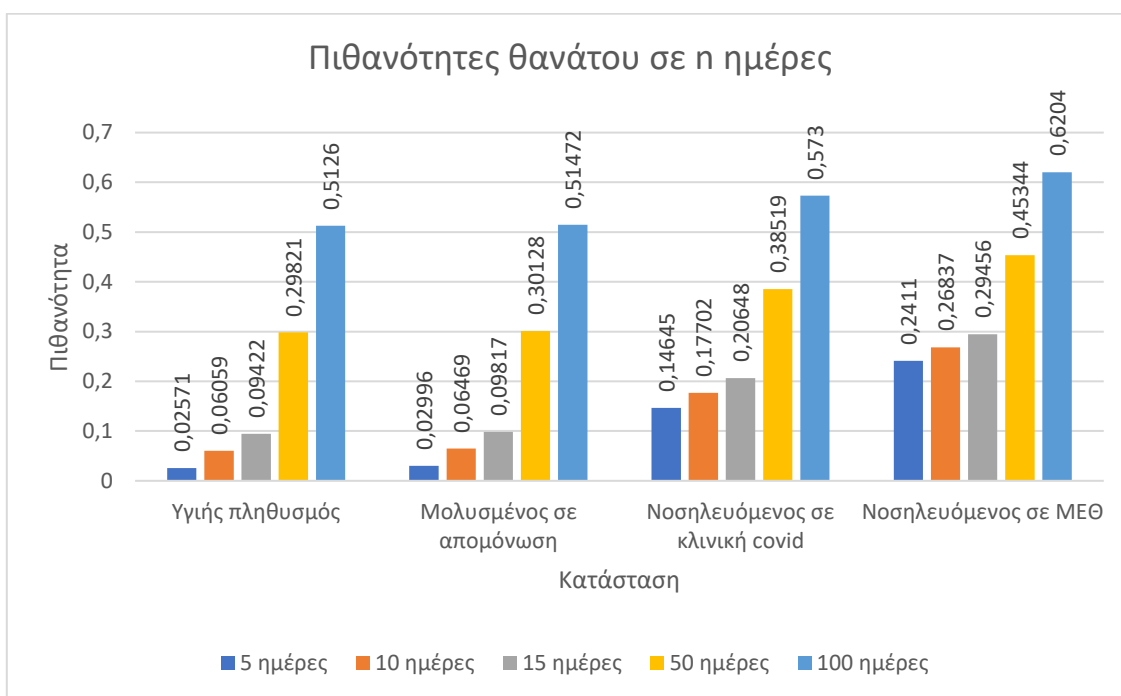
όπου το n εκφράζει τον αριθμό των ημερών που εξετάζεται. Επομένως, μας ενδιαφέρει η πιθανότητα $[p(n)]_{i,5}$, δηλαδή η **πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση 5** σε $n = 5, 10, 15, 50, 100, 200, 1000$ ημέρες, δεδομένου ότι η διαδικασία έχει ξεκινήσει από την κατάσταση $i = 1,2,3,4$. Άρα, αν κάποιος ξεκινήσει από την κατάσταση i , η πιθανότητα θανάτου σε n ημέρες θα είναι:

	5 ημέρες	10 ημέρες	15 ημέρες	50 ημέρες	100 ημέρες	200 ημέρες	1000 ημέρες
1	0,02571	0,06059	0,09422	0,29821	0,51260	0,76490	0,999311
2	0,02996	0,06469	0,09817	0,30128	0,51472	0,76592	0,999314
3	0,14645	0,17702	0,20648	0,38519	0,57300	0,79403	0,999396
4	0,24110	0,26837	0,29456	0,45344	0,62040	0,81690	0,999463

Πίνακας 9-Πιθανότητες θανάτου από κάθε κατάσταση για $n=5,10,15,50,100,200,1000$ ημέρες μοντέλου UN

όπου για τον αριθμό ημερών n και την κατάσταση i , το αντίστοιχο στοιχείο του παραπάνω πίνακα είναι το στοιχείο του διανύσματος $\mathbf{p}(n) = [p_i(n)]$ δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση i .

Οι παραπάνω πιθανότητες παρουσιάζονται διαγραμματικά στο **διάγραμμα 41**:



Διάγραμμα 41-Πιθανότητες θανάτου από κάθε κατάσταση για $n=5,10,15,50,100$ ημέρες μοντέλου UN

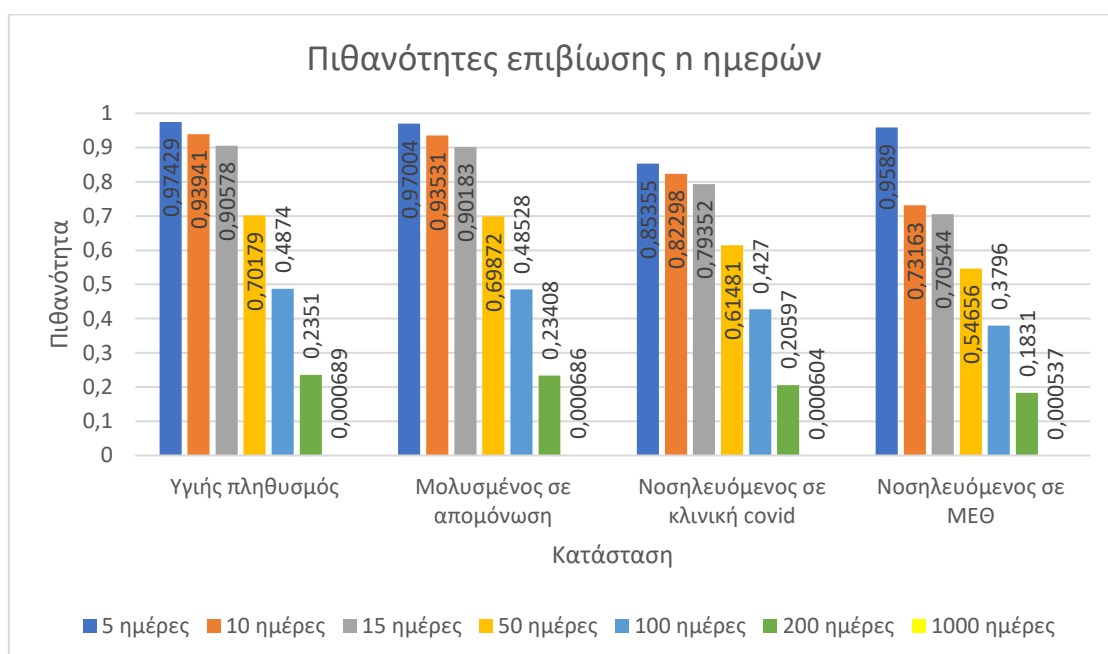
Επομένως, οι **πιθανότητες επιβίωσης** των παροδικών καταστάσεων προκύπτουν από:

$$P = 1 - [\mathbf{p}(n)]_{i,5}$$

όπου $[\mathbf{p}(n)]_{i,5}$ εκφράζει την πιθανότητα να βρεθεί κάποιος στην κατάσταση 5 μετά από n χρονικές στιγμές, δεδομένου ότι έχει ξεκινήσει από την κατάσταση i . Άρα οι ζητούμενες πιθανότητες επιβίωσης κάθε παροδικής κατάστασης, μετά από $n = 5,10,15,50,100,200,1000$ χρονικές στιγμές είναι οι ακόλουθες με το αντίστοιχο γράφημα:

	5 ημέρες	10 ημέρες	15 ημέρες	50 ημέρες	100 ημέρες	200 ημέρες	1000 ημέρες
1	0,97429	0,93941	0,90578	0,70179	0,48740	0,23510	0,000689
2	0,97004	0,93531	0,90183	0,69872	0,48528	0,23408	0,000686
3	0,85355	0,82298	0,79352	0,61481	0,42700	0,20597	0,000604
4	0,95890	0,73163	0,70544	0,54656	0,3796	0,18310	0,000537

Πίνακας 10-Πιθανότητες επιβίωσης από κάθε κατάσταση για n=5,10,15,50,100,200,1000 ημέρες μοντέλου UN



Διάγραμμα 42-Πιθανότητες επιβίωσης για n=5,10,15,50,100,200,1000 μοντέλου UN

Δεδομένου ότι αυτό το μέτρο απόδοσης βασίζεται στη θεωρία n -οστού βήματος, παρατηρούμε πάλι πως όσο αυξάνεται ο αριθμός των ημερών που εξετάζεται, τόσο μειώνονται οι πιθανότητες μετάβασης στις παροδικές καταστάσεις. Όπως έχει ήδη επισημανθεί, η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός πως λόγω της απορροφητικής κατάστασης, είναι βέβαιο πως η διαδικασία θα καταλήξει μακροπρόθεσμα σε αυτήν. Πιο αναλυτικά στο **διάγραμμα 42** διακρίνουμε ότι οι πιθανότητες επιβίωσης μετά την πάροδο $n = 5$ ημερών είναι αρκετά

υψηλές, ανεξάρτητα της αρχικής θέσης της διαδικασίας, καθώς κυμαίνονται από 0,85355 έως 0,97429. Αντιθέτως, στην περίπτωση που εξετάζεται η πιθανότητα επιβίωσης ύστερα από $n = 1000$ ημέρες, παρατηρούμε πως η πιθανότητα επιβίωσης είναι πολύ μικρή και κυμαίνεται από 0,000537 έως 0,000689 (πάλι ανεξάρτητα της αρχικής θέσης της διαδικασίας). Κατ' επέκταση, για ένα μεγαλύτερο αριθμό χρονικών βημάτων η πιθανότητα επιβίωσης θα ισοδυναμεί με μηδέν.

3.3.4 Υπολογισμός πιθανότητας απορρόφησης για το μοντέλο UN

Έστω b_{ij} η πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση j , υπό την προϋπόθεση ότι η διαδικασία έχει ξεκινήσει από την κατάσταση $i \in \{1,2,3,4\}$. Ορίζουμε \mathbf{B} ένα διάνυσμα γραμμής με τις καταχωρήσεις b_{ij} . Η πιθανότητα απορρόφησης προκύπτει αν υψώσουμε τον πίνακα \mathbf{P} σε ένα μεγάλο αριθμό n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n = \begin{array}{c|ccccc} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \hline \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \mathbf{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \mathbf{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Πίνακας 11-Πίνακας πιθανοτήτων απορρόφησης μοντέλου UN

Αυτό θεωρητικά σημαίνει ότι μακροπρόθεσμα όλος ο πληθυσμός θα καταλήξει στην κατάσταση απορρόφησης εφόσον $b_{15} = 1$, $b_{25} = 1$, $b_{35} = 1$, $b_{45} = 1$. Επομένως, οι πιθανότητες απορρόφησης στην κατάσταση 5 είναι:

$$\mathbf{B} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

3.3.5 Υπολογισμός αναμενόμενου χρόνου θανάτου για το μοντέλο UN

Ως μέσο υπολογισμού του αναμενόμενου χρόνου θανάτου, χρησιμοποιούμε τον πρωταρχικό πίνακα \mathbf{R} ο οποίος προκύπτει από τη σχέση (10):

	1	2	3	4
1	58,4054	71,8496	8,6548	0,1762
2	57,1059	72,5513	8,6548	0,1762
3	49,8382	63,3179	8,6548	0,1762
4	43,9783	55,8730	7,6372	1,1735

Πίνακας 12-Πρωταρχικός πίνακας μοντέλου UN

Η καταχώριση R_{ij} του πίνακα R δίνει τον αναμενόμενο αριθμό φορών όπου η διαδικασία βρίσκεται στην παροδική κατάσταση $j \in \{1,2,3,4\}$, αν ξεκινήσει από την παροδική κατάσταση $i \in \{1,2,3,4\}$.

Συγκεκριμένα, στην περίπτωση που αρχικά κάποιος βρίσκεται στην κατάσταση 1 (Υγιής πληθυσμός), ο αναμενόμενος αριθμός φορών που θα βρεθεί στις καταστάσεις 1,2,3 και 4 είναι:

$$R_{11}=58,4054, R_{12}=71,8496, R_{13}=8,6548, R_{14}=0,1762$$

Αντίστοιχα, ξεκινώντας από την κατάσταση 2 (Μολυσμένος σε απομόνωση-επιβεβαιωμένο κρούσμα) ο αναμενόμενος αριθμός φορών που θα βρεθεί στις καταστάσεις 1,2,3 και 4 είναι:

$$R_{21}=57,1059, R_{22}=72,5513, R_{23}=8,6548, R_{24}=0,1762$$

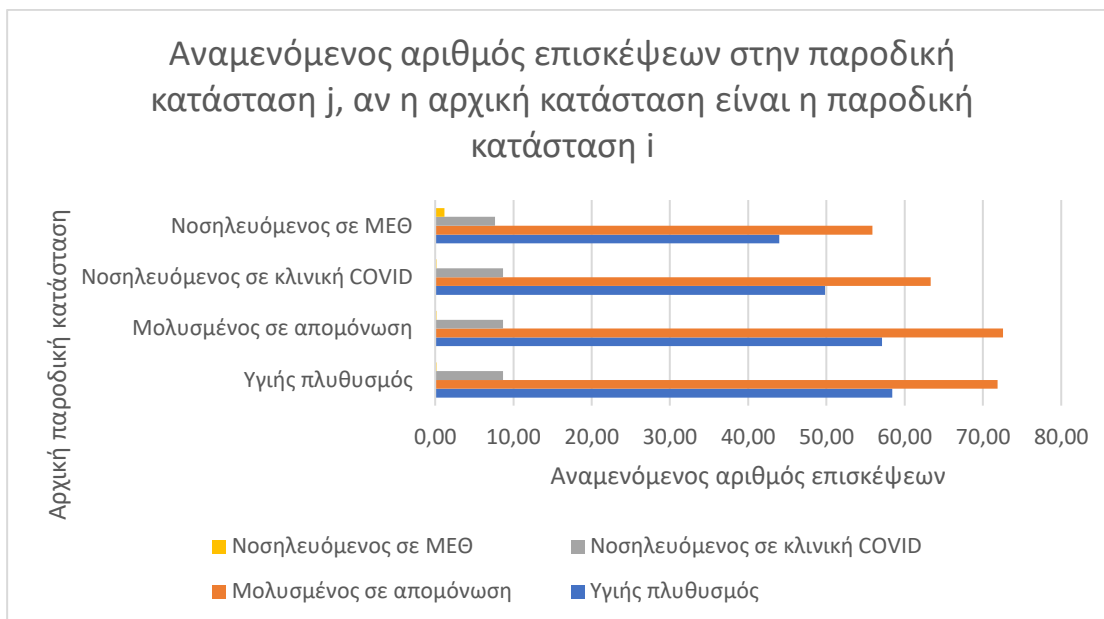
Ξεκινώντας από την κατάσταση 3 (Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19) ο αναμενόμενος αριθμός φορών που θα βρεθεί στις καταστάσεις 1,2,3 και 4 είναι:

$$R_{31}=49,8382, R_{32}=63,3179, R_{33}=8,6548, R_{34}=0,1762$$

Τέλος, ξεκινώντας από την κατάσταση 4 (Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ) ο αναμενόμενος αριθμός φορών που θα βρεθεί στις καταστάσεις 1,2,3 και 4 είναι:

$$R_{41}=43,9783, R_{42}=55,8730, R_{43}=7,6372, R_{44}=1,1735$$

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται διαγραμματικά οι καταχωρήσεις του πίνακα R :



Διάγραμμα 43-Αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων των παροδικών καταστάσεων μοντέλου UN

Στο **διάγραμμα 43** παρατηρούμε ότι ο αναμενόμενος αριθμός φορών που η διαδικασία θα βρεθεί στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός» σταδιακά μειώνεται όσο η αρχική θέση της διαδικασίας πλησιάζει την απορροφητική κατάσταση, σε αντίθεση με τον αναμενόμενο αριθμό φορών που η διαδικασία θα βρεθεί στην κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ», μία συμπεριφορά που ήταν προσδοκώμενη.

Ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων πριν η αλυσίδα εισέλθει στην κατάσταση απορρόφησης, όπου προκύπτει από τη σχέση (11), εξαρτάται από την αρχική κατάσταση της αλυσίδας. Αυτό σημαίνει ότι ο αναμενόμενος χρόνος θανάτου T_i (σε ημέρες) για ένα άτομο του πληθυσμού, εξαρτάται από την αρχική του κατάσταση, όπου $i = 1,2,3,4$.

Έτσι ο αναμενόμενος αριθμός ημερών πριν το θάνατο, δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση 1 (Υγιής Πληθυσμός) είναι:

$$T_1 = R_{11} + R_{12} + R_{13} + R_{14} = 139,0861 \text{ ημέρες}$$

Αντίστοιχα, ο αναμενόμενος αριθμός ημερών πριν το θάνατο, δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση 2 (Μολυσμένος πληθυσμός σε απομόνωση) είναι:

$$T_2 = R_{22} + R_{23} + R_{24} = 81,3824 \text{ ημέρες}$$

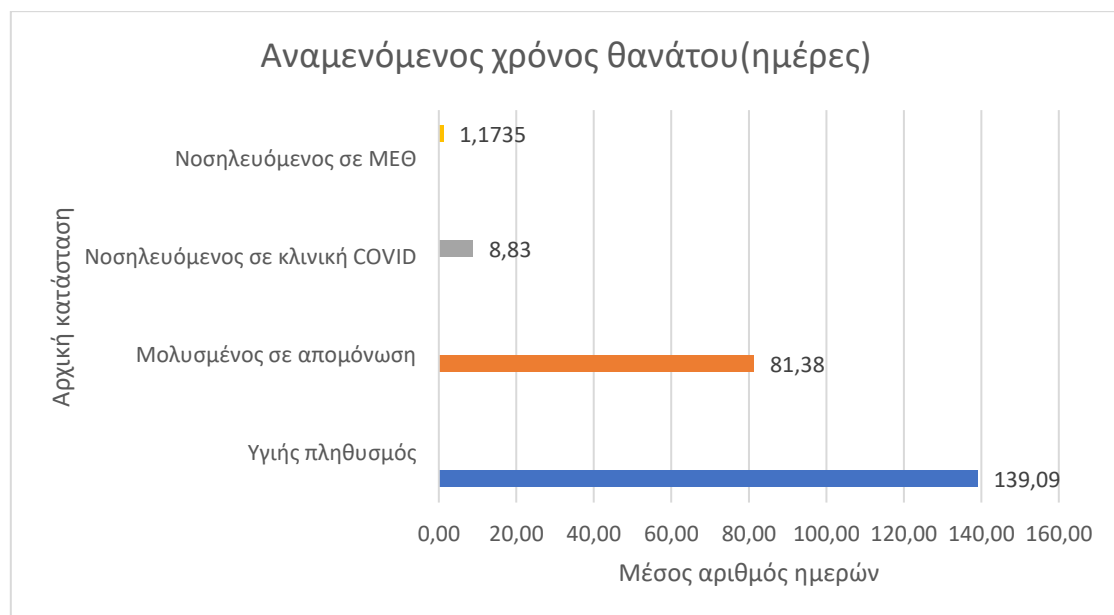
Ενώ ο αναμενόμενος αριθμός ημερών πριν το θάνατο, δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση 3 (Νοσηλεία σε κλινική COVID-19), είναι:

$$T_3 = R_{33} + R_{34} = 8,8311 \text{ ημέρες}$$

Τέλος, ο αναμενόμενος αριθμός ημερών πριν το θάνατο, δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση 4 (Νοσηλεία σε ΜΕΘ), είναι:

$$T_4 = R_{44} = 1,1735 \text{ ημέρες}$$

Ο αναμενόμενος χρόνος θανάτου κάθε κατάστασης (σε ημέρες), παρουσιάζεται στο **διάγραμμα 44**:



Διάγραμμα 44-Αναμενόμενος χρόνος θανάτου μοντέλου UN

Στο **διάγραμμα 44** παρατηρούμε ότι όσο η διαδικασία πλησιάζει στην απορροφητική κατάσταση μειώνεται ο αναμενόμενος αριθμός ημερών που απαιτείται για να μεταβεί η διαδικασία στην κατάσταση «Θάνατος», κάτι που ήταν αναμενόμενο καθώς όπως έχει ήδη αναφερθεί ο αναμενόμενος χρόνος θανάτου εξαρτάται άμεσα από την αρχική θέση της διαδικασίας. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση που ένα άτομο του πληθυσμού ανήκει στην

κατάσταση «Υγιής πληθυσμός» ο αναμενόμενος χρόνος θανάτου αντιστοιχεί σε 139,09 ημέρες, ενώ στην περίπτωση που ανήκει στην κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ» αντιστοιχεί μόλις σε 1,1735 ημέρα.

3.3.6 Υπολογισμός πιθανότητα παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο UN

Έστω ότι το σύστημα μόλις μπήκε στην κατάσταση i . Η πιθανότητα να παραμείνει σε αυτήν για ακριβώς $n=5,10,15$ βήματα, προκύπτει από την εξίσωση (12):

- Για $n=5$:

$$P_1^{(5)} = 1,112200070400000e-02$$

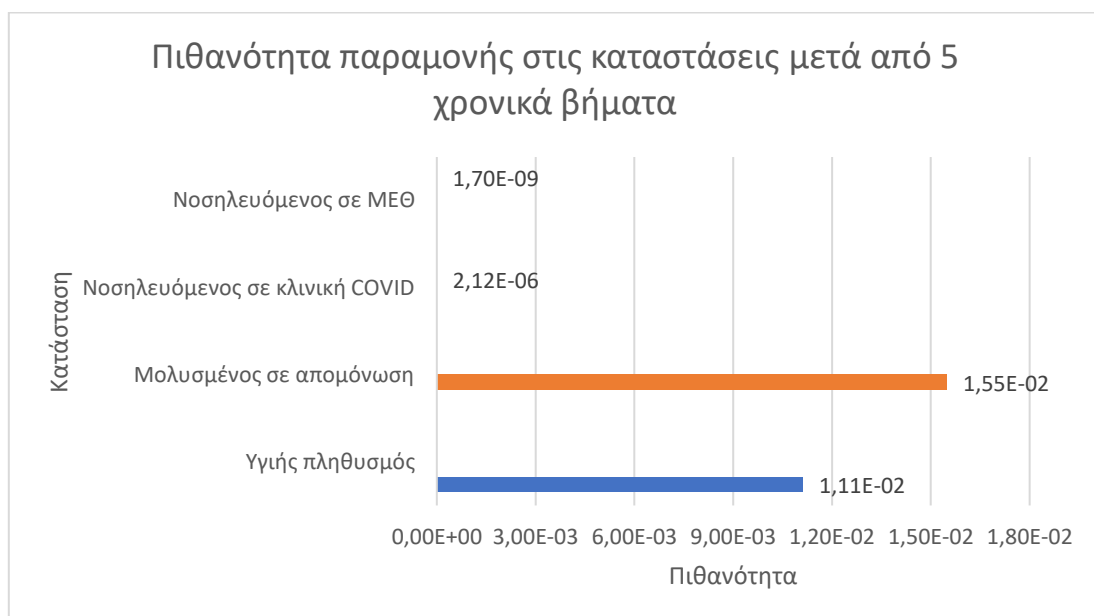
$$P_2^{(5)} = 1,549533799854011e-02$$

$$P_3^{(5)} = 2,121212354658454e-06$$

$$P_4^{(5)} = 1,701718537289412e-09$$

$$P_5^{(5)} = 1$$

Στο **διάγραμμα 45** παρουσιάζονται οι πιθανότητες παραμονής των καταστάσεων μετά από 5 χρονικά βήματα:



Διάγραμμα 45-Πιθανότητα παραμονής των καταστάσεων μετά από $n=5$ ημέρες μοντέλου UN

- Για $n=10$:

$$P_1^{(10)} = 2,290720364069936e-04$$

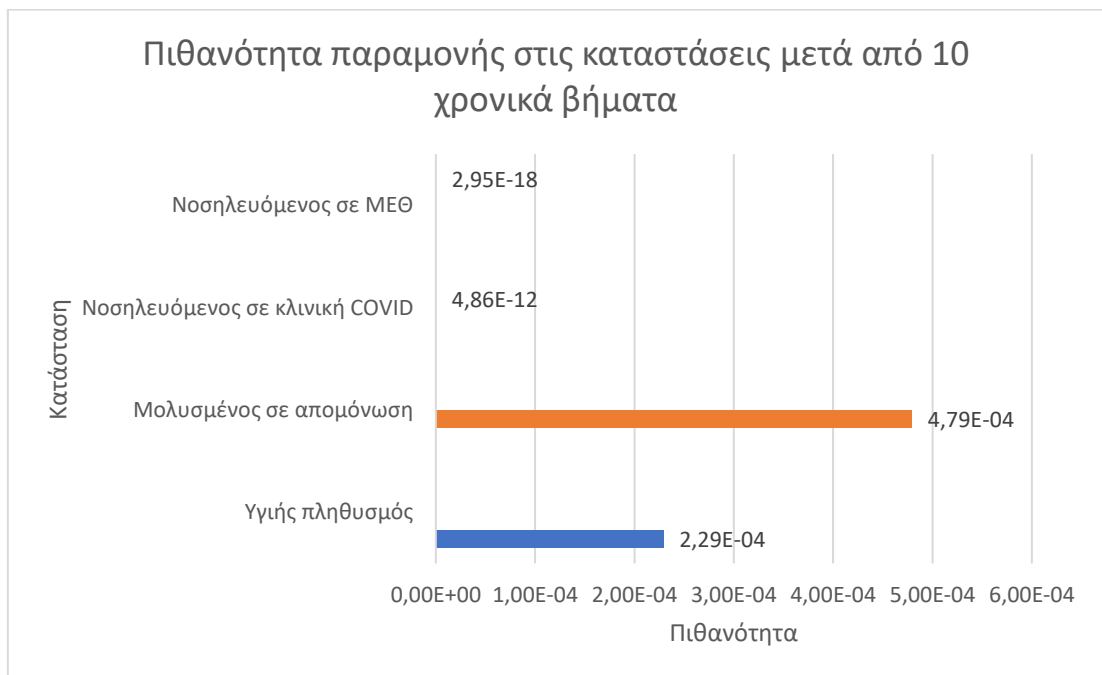
$$P_2^{(10)} = 4,792142337717568e-04$$

$$P_3^{(10)} = 4,861636543300698e-12$$

$$P_4^{(10)} = 2,947996029923767e-18$$

$$P_5^{(10)} = 1$$

Οι πιθανότητες παραμονής των καταστάσεων μετά από 10 χρονικά βήματα παρουσιάζονται διαγραμματικά στο **διάγραμμα 46**:



Διάγραμμα 46-Πιθανότητα παραμονής των καταστάσεων μετά από $n=10$ ημέρες μοντέλου UN

- Για $n=15$:

$$P_1^{(15)} = 4,718035833676475e-06$$

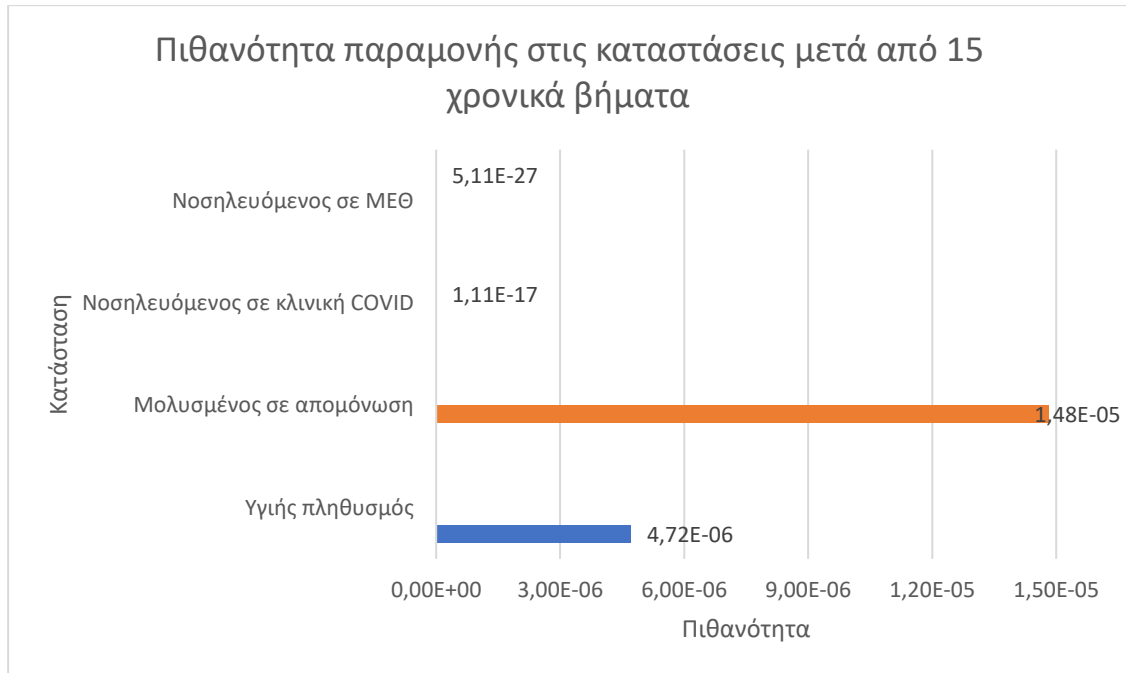
$$P_2^{(15)} = 1,482034673080949e-05$$

$$P_3^{(15)} = 1,114245343105331e-17$$

$$P_4^{(15)} = 5,107002363792353e-27$$

$$P_5^{(15)} = 1$$

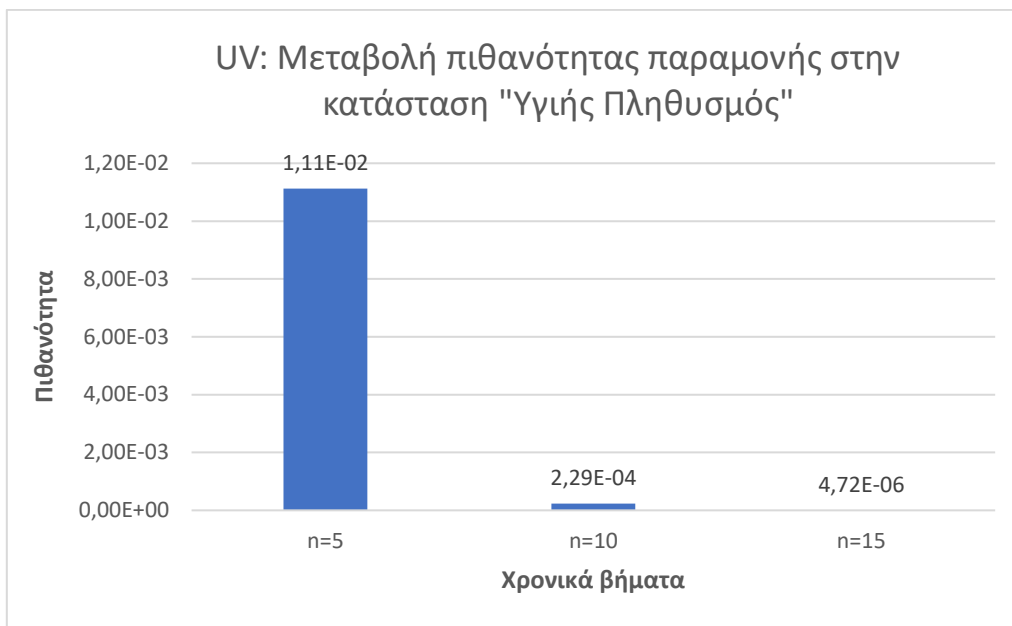
Οι παραπάνω πιθανότητες παρουσιάζονται με τη μορφή διαγράμματος ως εξής:



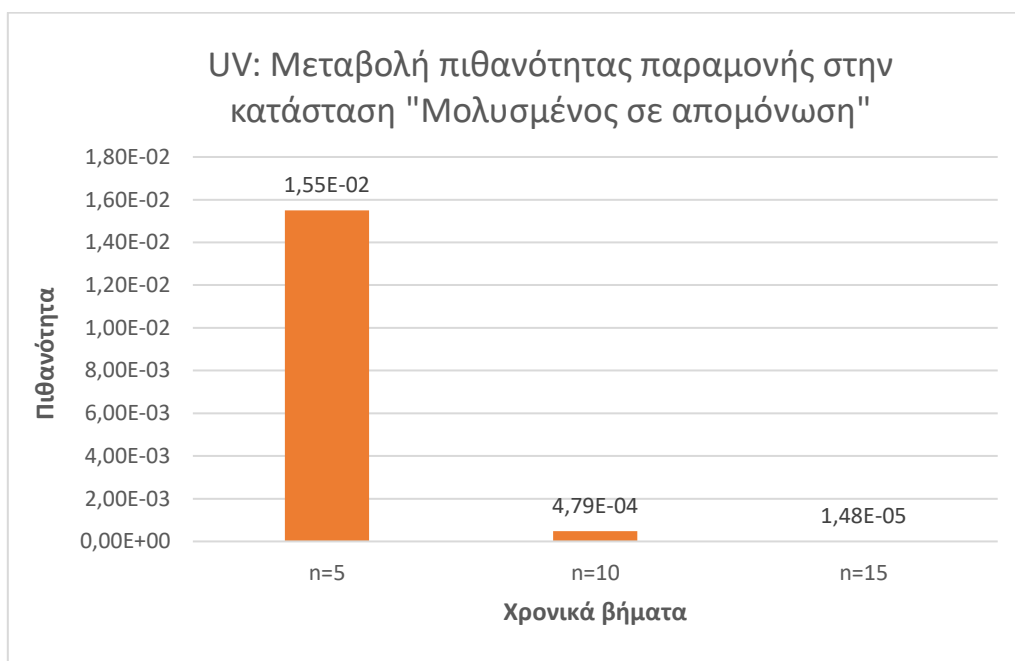
Διάγραμμα 47-Πιθανότητα παραμονής των καταστάσεων μετά από n=15 ημέρες μοντέλου UN

Στα **διαγράμματα 45, 46 και 47** διακρίνουμε ότι η πιθανότητα παραμονής στις μεταβατικές καταστάσεις μειώνεται όσο αυξάνεται ο αριθμός των ημερών που εξετάζουμε. Η συμπεριφορά αυτή ήταν αναμενόμενη, καθώς ένα μέρος του πληθυσμού θα μεταβαίνει στην απορροφητική κατάσταση «Θάνατος», επομένως μικραίνουν οι πληθυσμιακές ομάδες των μεταβατικών καταστάσεων και κατ' επέκταση η πιθανότητα παραμονής σε αυτές. Ακόμη, παρατηρούμε ότι η κατάσταση «Μολυσμένος σε απομόνωση» έχει μεγαλύτερη πιθανότητα παραμονής συγκριτικά με τις υπόλοιπες καταστάσεις, κάτι που είναι λογικό δεδομένης της μεγάλης πιθανότητας νόσησης των πληθυσμών που ανήκουν στο μοντέλο UN ($p_{12} = 0,49896$).

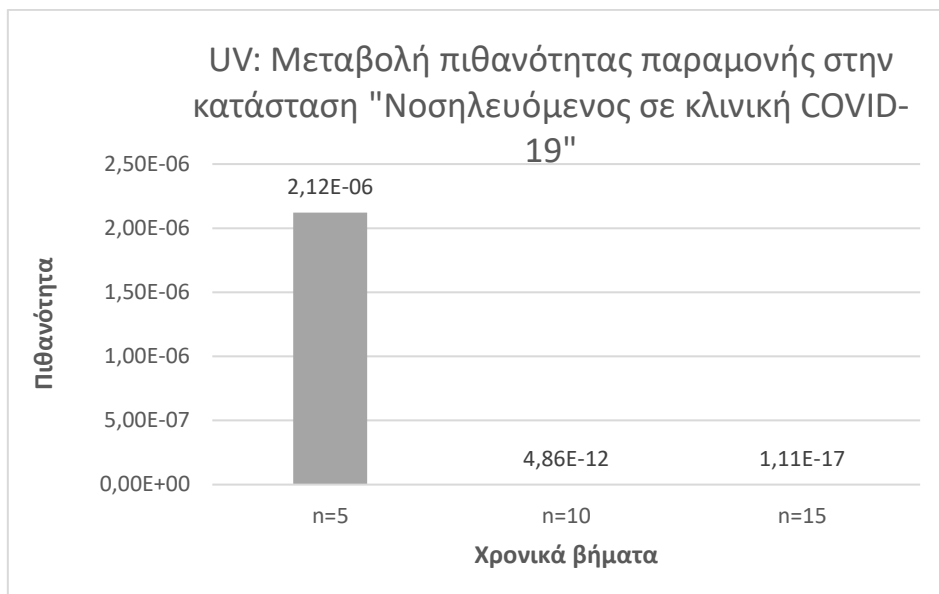
Στα **διαγράμματα 48, 49, 50 και 51** παρουσιάζεται η μεταβολή των πιθανοτήτων παραμονής για κάθε κατάσταση μεμονωμένα, μετά από $n = 5, 10, 15$ χρονικά βήματα:



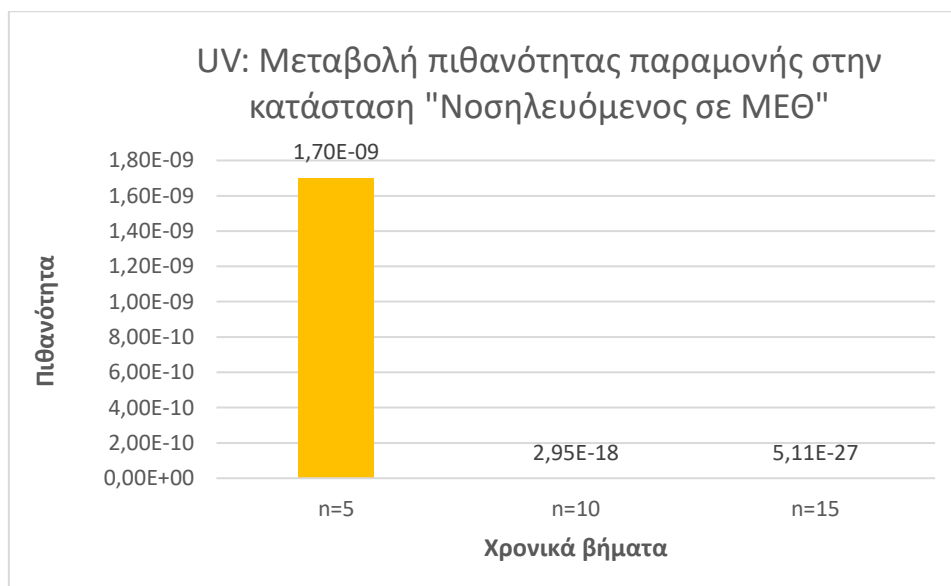
Διάγραμμα 48-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής "Υγιής πληθυσμός" μοντέλου UN



Διάγραμμα 49- Μεταβολή πιθανότητας παραμονής "Μολυσμένος σε απομόνωση" μοντέλου UN



Διάγραμμα 50- Μεταβολή πιθανότητας παραμονής "Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19" μοντέλου UN



Διάγραμμα 51-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής "Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ" μοντέλου UN

Όπως ήταν αναμενόμενο, όσο αυξάνεται ο αριθμός ημερών που εξετάζουμε τόσο μειώνεται και η πιθανότητα παραμονής στις μεταβατικές καταστάσεις, καθώς ένα ποσοστό που πληθυσμού θα έχει μεταβεί στην απορροφητική κατάσταση «Θάνατος».

3.3.7 Υπολογισμός μέσου χρόνου παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο UN

Ο αναμενόμενος αριθμός χρονικών στιγμών που η αλυσίδα θα παραμείνει σε κάθε κατάσταση ξεχωριστά, κάθε φορά που την επισκέπτεται (εκτός της απορροφητικής), προκύπτει από την εξίσωση (13):

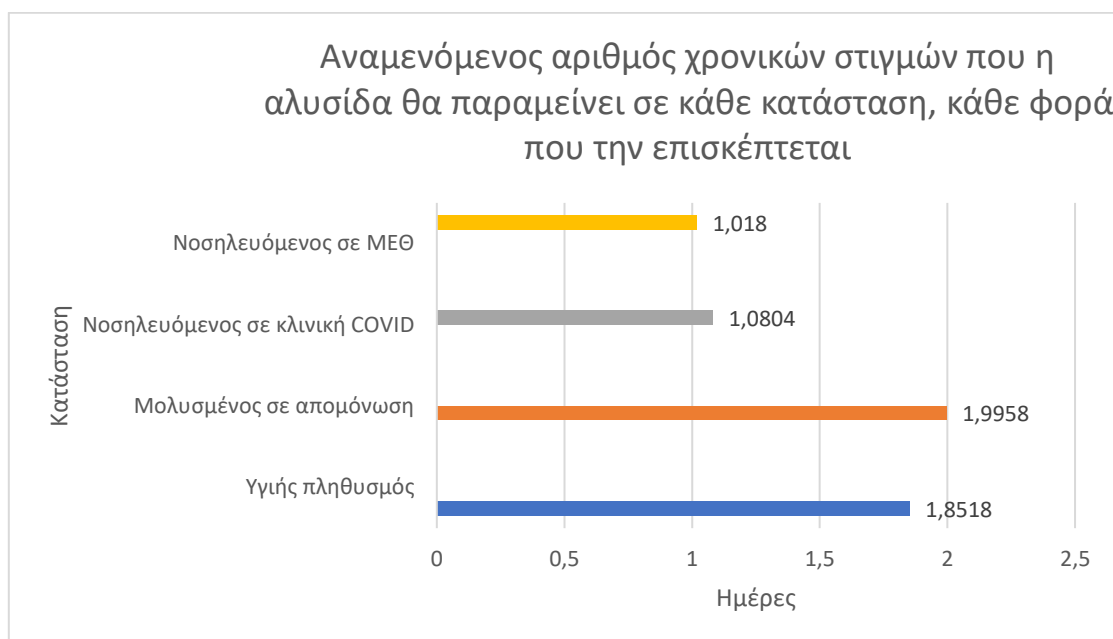
$$E(T_1) = 1,8518$$

$$E(T_2) = 1,9958$$

$$E(T_3) = 1,0804$$

$$E(T_4) = 1,0180$$

Διαγραμματικά το παραπάνω μέτρο απόδοσης, παρουσιάζεται στο ακόλουθο γράφημα:



Διάγραμμα 52-Μέσος χρόνος παραμονής κάθε κατάστασης μοντέλου UN

Στο **διάγραμμα 52** παρατηρούμε ότι ο μέσος χρόνος παραμονής είναι μεγαλύτερος στην κατάσταση «Μολυσμένος σε απομόνωση» σε σύγκριση με τις υπόλοιπες μεταβατικές καταστάσεις. Το αποτέλεσμα αυτό είναι λογικό, δεδομένης της μεγάλης πιθανότητας νόσησης του μοντέλου UN ($p_{12} = 0,49896$).

3.3.8 Υπολογισμός διακύμανσης του μέσου χρόνου παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο UN

Η διασπορά του αριθμού χρονικών στιγμών που η αλυσίδα (M.A.) θα παραμείνει σε κάθε κατάσταση, κάθε φορά που την επισκέπτεται (εκτός της απορροφητικής), προκύπτει από την εξίσωση (14):

$$\text{Var}(T_1) = 1,5775$$

$$\text{Var}(T_2) = 1,9875$$

$$\text{Var}(T_3) = 0,0869$$

$$\text{Var}(T_4) = 0,0183$$

3.4 Μοντέλο Πληθυσμού που έχει χορηγηθεί μία δόση εμβολίου (PV)

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου που περιγράφει την κατάσταση ενός ατόμου που είναι μερικώς εμβολιασμένο, τη χρονική στιγμή n . Ανακεφαλαιώνοντας, οι μεταβάσεις των καταστάσεων πραγματοποιούνται με τις ακόλουθες πιθανότητες:

	1	2	3	4	5
1	0,967	0,030954	0,002046	0	0
2	0,907046	0,030954	0,062	0	0
3	0	0,912975	0,061194	0,013	0,012831
4	0	0	0,97417	0,01283	0,013
5	0	0	0	0	1

3.4.1 Υπολογισμός πιθανότητας μετάβασης ενός βήματος για το μοντέλο PV

Η πιθανότητα μετάβασης ενός βήματος p_{ij} από κάθε κατάσταση σε κάθε άλλη για $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$, οι οποίες προκύπτουν από τη σχέση (2), είναι οι εξής και το αντίστοιχο γράφημα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος:

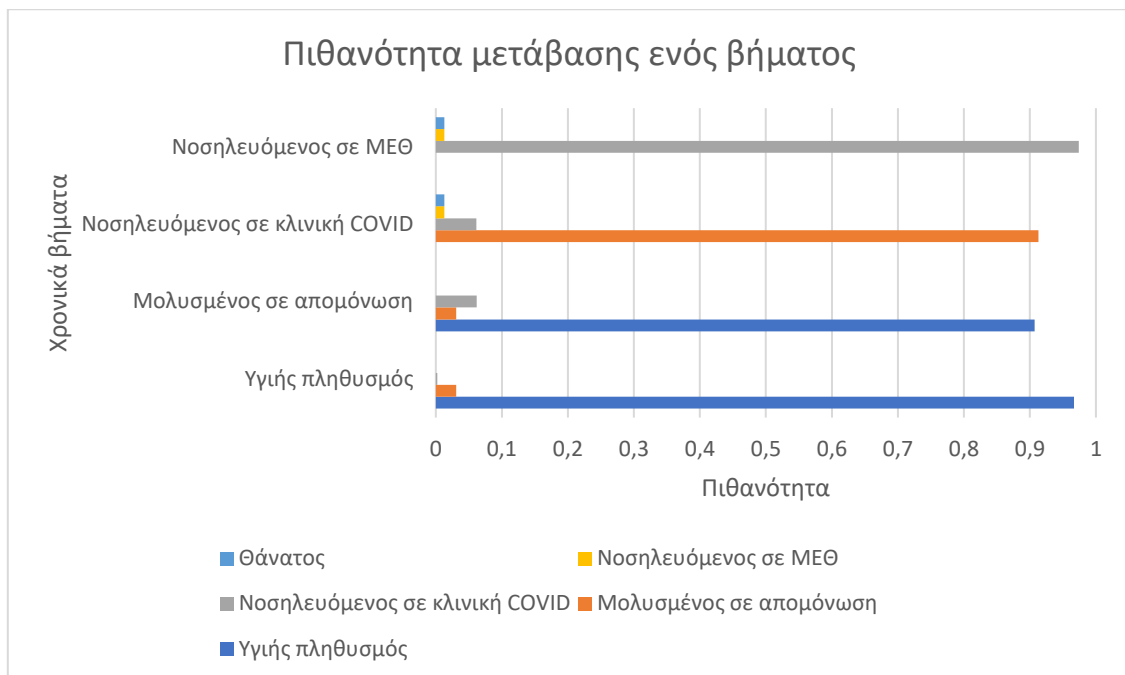
$$p_{1j}=[0,967 \quad 0,030954 \quad 0,002046 \quad 0 \quad 0]$$

$$p_{2j}=[0,907046 \quad 0,030954 \quad 0,062 \quad 0 \quad 0]$$

$$p_{3j}=[0 \quad 0,912975 \quad 0,061194 \quad 0,013 \quad 0,012831]$$

$$p_{4j}=[0 \quad 0 \quad 0,97417 \quad 0,01283 \quad 0,013]$$

$$p_{5j}=[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$



Διάγραμμα 53-Πιθανότητα μετάβασης ενός βήματος μοντέλου PV

3.4.2 Υπολογισμός πιθανότητας μετάβασης n βημάτων για το μοντέλο PV

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι πίνακες P^n , για $n = 5,10,15$. Στους πίνακες αυτούς υπολογίζονται οι πιθανότητες της αλυσίδας να βρεθεί σε μία κατάσταση $j \in \{1,2,3,4,5\}$, δεδομένου ότι έχει ξεκινήσει από μία κατάσταση $i \in \{1,2,3,4,5\}$, σε n βήματα, όπου προκύπτουν από τη σχέση (8):

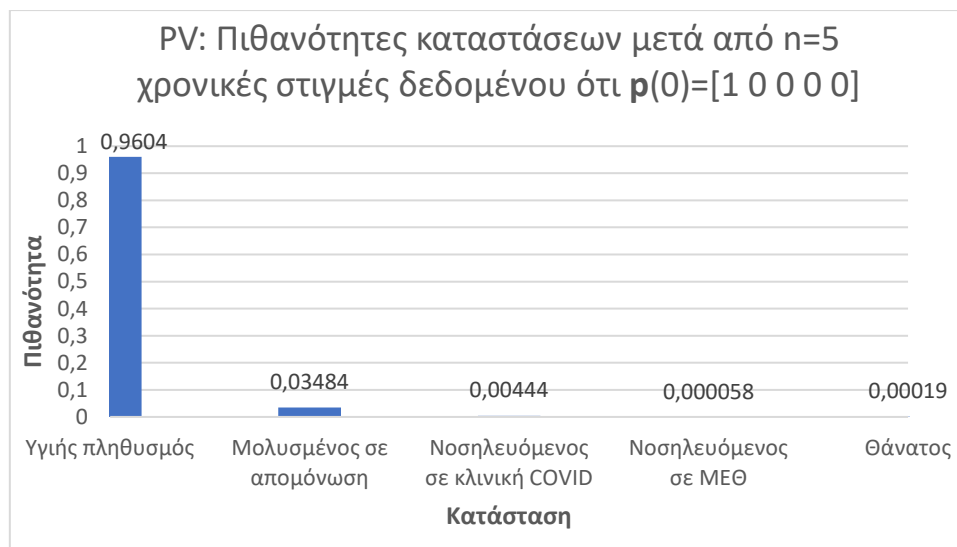
	1	2	3	4	5
1	0,9604	0,03484	0,00444	0,000058	0,00019
2	0,9588	0,03524	0,00474	0,000065	0,00107
3	0,9408	0,03875	0,00521	0,000124	0,01502
4	0,9211	0,04146	0,00929	0,000180	0,02787
5	0	0	0	0	1

Πίνακας 13-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων n=5 βημάτων μοντέλου PV

Αναλυτικότερα, από τη σχέση (9) η κάθε κατάσταση του **πίνακα 13** αναλύεται ως εξής:

- Δεδομένου ότι κάποιος έχει ξεκινήσει από την κατάσταση 1, οι πιθανότητες κατάστασης μετά από 5 βήματα και το αντίστοιχο διάγραμμα κατανομής πιθανότητας είναι:

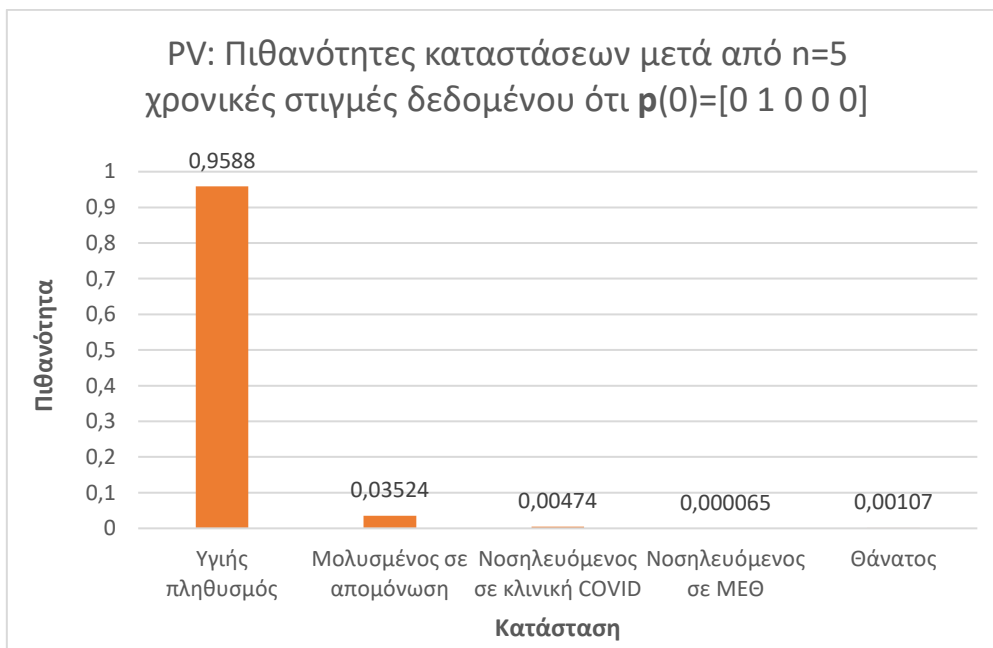
$$p(5)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot P^5= [0,9604 \ 0,03484 \ 0,00444 \ 0,000058 \ 0,00019]$$



Διάγραμμα 54-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV

- Δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση της διαδικασίας είναι η κατάσταση 2, ισχύουν οι εξής πιθανότητες με το αντίστοιχο διάγραμμα:

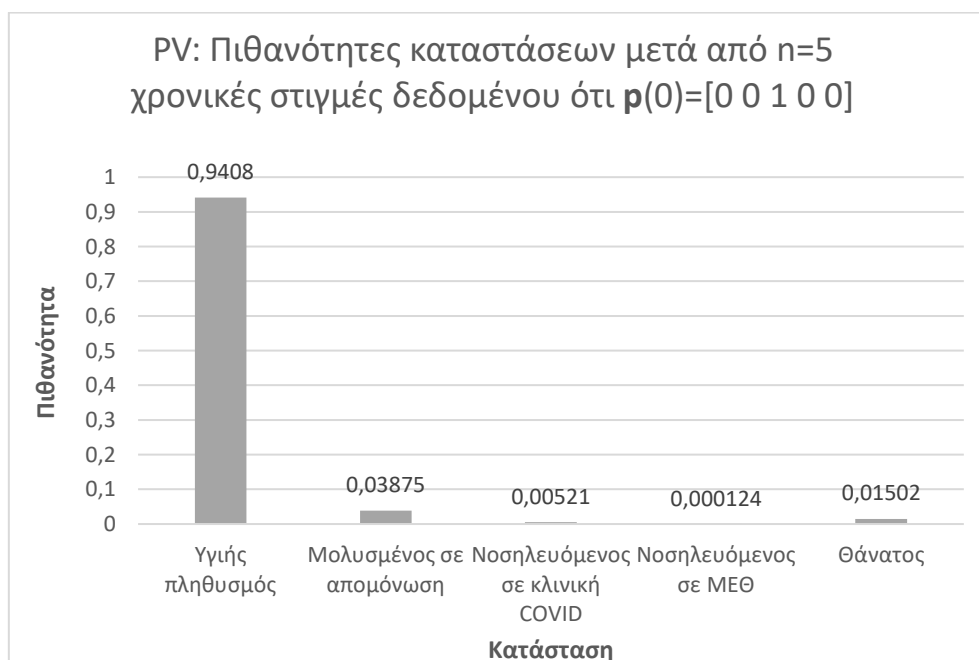
$$p(5)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot P^5= [0,9588 \ 0,03524 \ 0,00474 \ 0,000065 \ 0,00107]$$



Διάγραμμα 55-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV

- Δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση 3, οι μεταβάσεις πραγματοποιούνται με τις παρακάτω πιθανότητες, όπου παρουσιάζονται και διαγραμματικά:

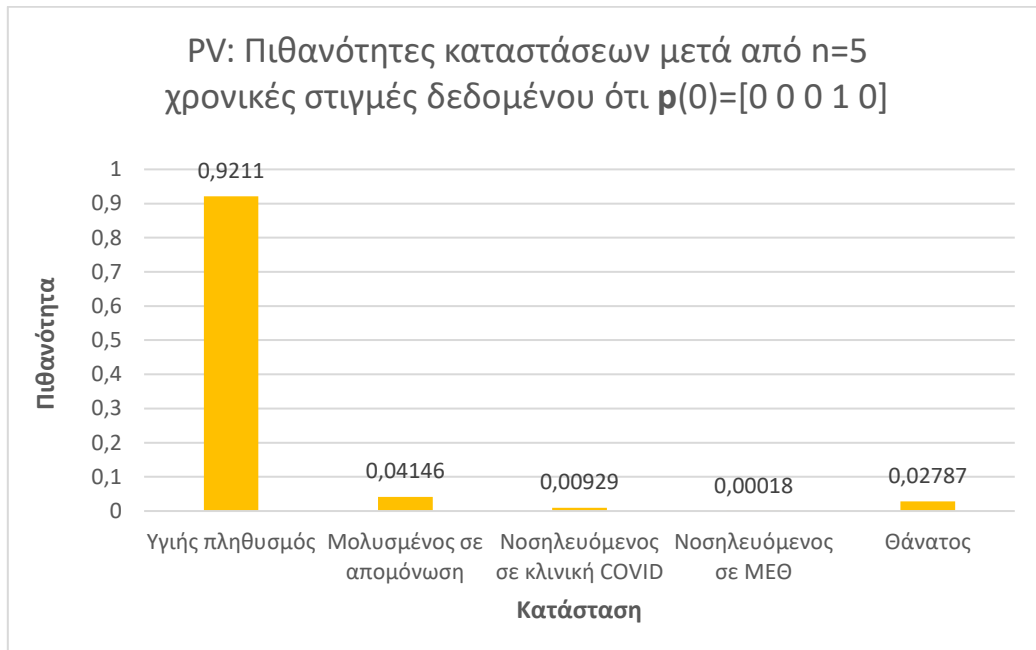
$$p(5)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \cdot P^5 = [0,9408 \ 0,03875 \ 0,00521 \ 0,000124 \ 0,01502]$$



Διάγραμμα 56-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV

- Δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση 4, οι πιθανότητες μετάβασης και το διάγραμμα κατανομής καταστάσεων είναι τα εξής:

$$p(5)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot P^5 = [0,9211 \ 0,04146 \ 0,00929 \ 0,000180 \ 0,02787]$$

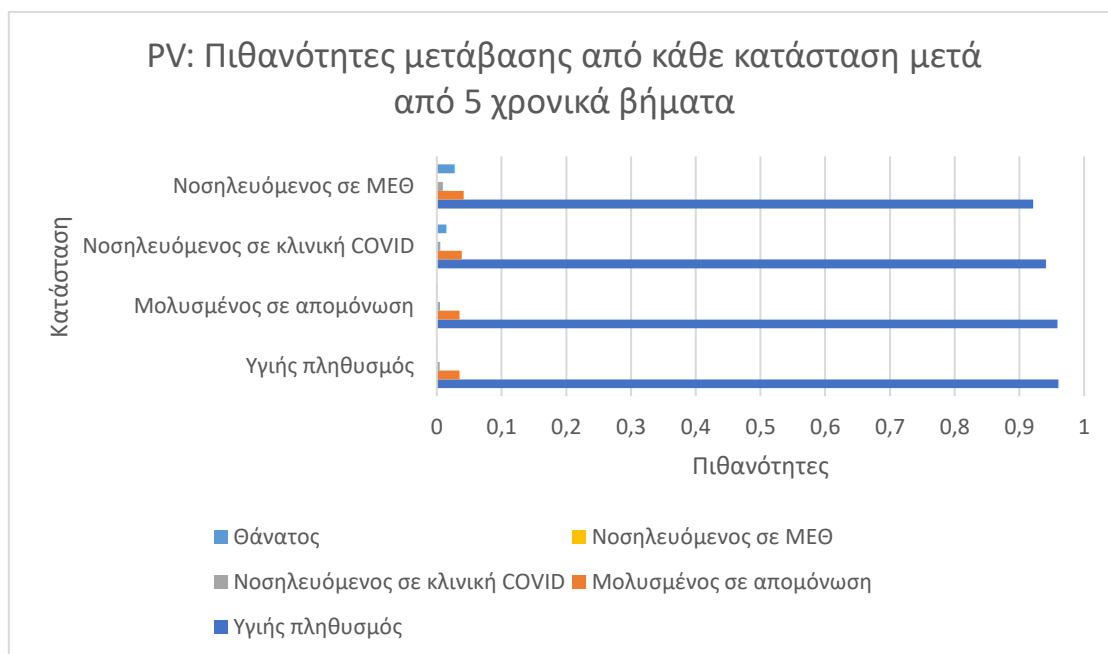


Διάγραμμα 57- Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλου PV

- Δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση είναι η απορροφητική κατάσταση 5, έχουμε ότι:

$$p(5)=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot P^5 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Οι πιθανότητες με τις οποίες πραγματοποιούνται οι μεταβάσεις από κάθε κατάσταση σε κάθε άλλη, μετά από 5 χρονικά βήματα, παρουσιάζονται στο παρακάτω γράφημα:



Διάγραμμα 58-Πιθανότητες μετάβασης καταστάσεων μετά από $n=5$ βήματα μοντέλου PV

Ο πίνακας P^{10} αναφέρεται στις πιθανότητες μετάβασης των καταστάσεων μετά από 10 χρονικά βήματα, για τον οποίο ισχύουν οι εξής πιθανότητες:

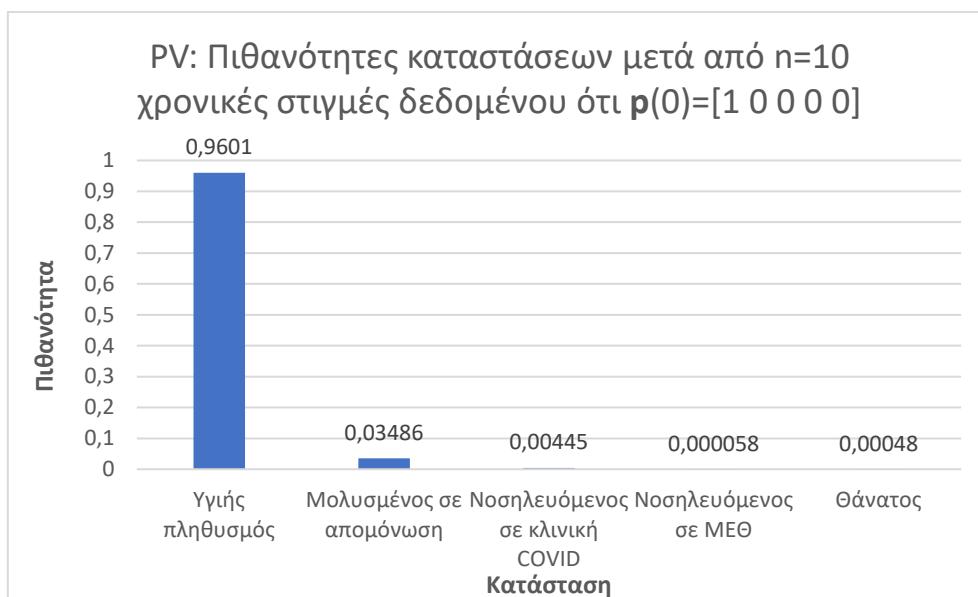
	1	2	3	4	5
1	0,9601	0,03486	0,00445	0,000058	0,00048
2	0,9592	0,03484	0,00445	0,000058	0,00137
3	0,9458	0,03435	0,00439	0,000057	0,01533
4	0,9334	0,03392	0,00433	0,000057	0,02824
5	0	0	0	0	1

Πίνακας 14- Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων $n=10$ βημάτων μοντέλου PV

Συγκεκριμένα, από τη σχέση (9) ισχύουν οι πιθανότητες μετάβασης στην κατάσταση $j \in \{1,2,3,4,5\}$ μετά την πάροδο 10 χρονικών βημάτων, υπό την προϋπόθεση ότι η αρχική κατάσταση της διαδικασίας είναι η:

- κατάσταση 1:

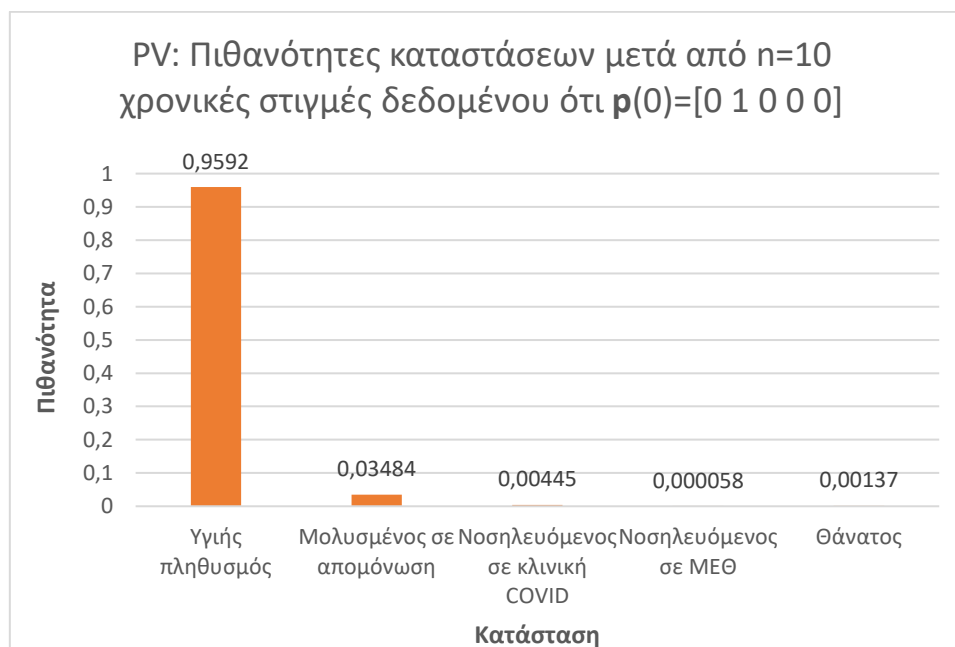
$$p(10)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot P^{10}=[0,9601 \ 0,03486 \ 0,00445 \ 0,000058 \ 0,00048]$$



Διάγραμμα 59-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV

- κατάσταση 2:

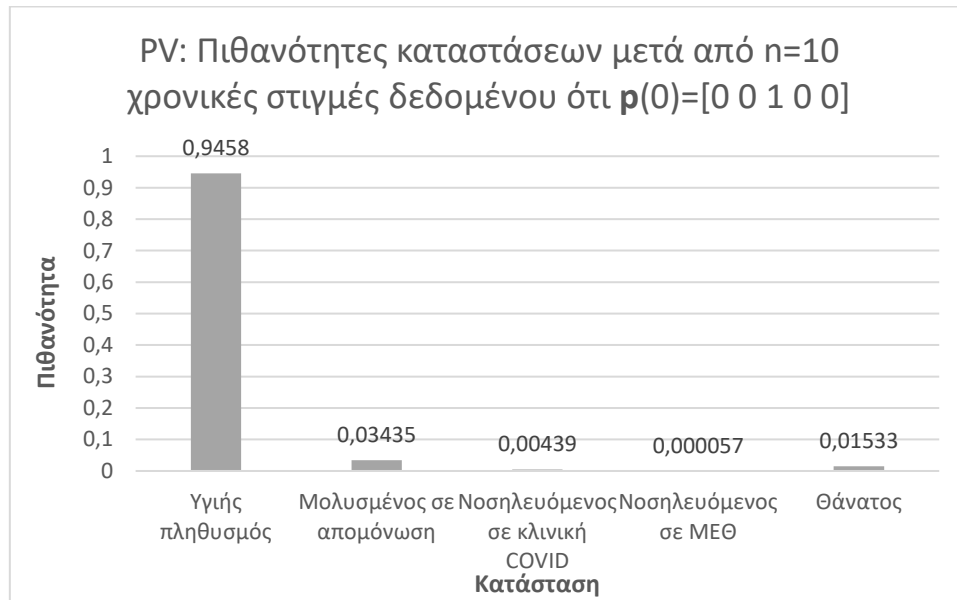
$$p(10)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot P^{10}=[0,9592 \ 0,03484 \ 0,00445 \ 0,000058 \ 0,00137]$$



Διάγραμμα 60-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV

- κατάσταση 3:

$$p(10)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \cdot P^{10} = [0,9458 \ 0,03435 \ 0,00439 \ 0,000057 \ 0,01533]$$



Διάγραμμα 61-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV

- κατάσταση 4:

$$p(10)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot P^{10} = [0,9334 \ 0,03392 \ 0,00433 \ 0,000057 \ 0,02824]$$

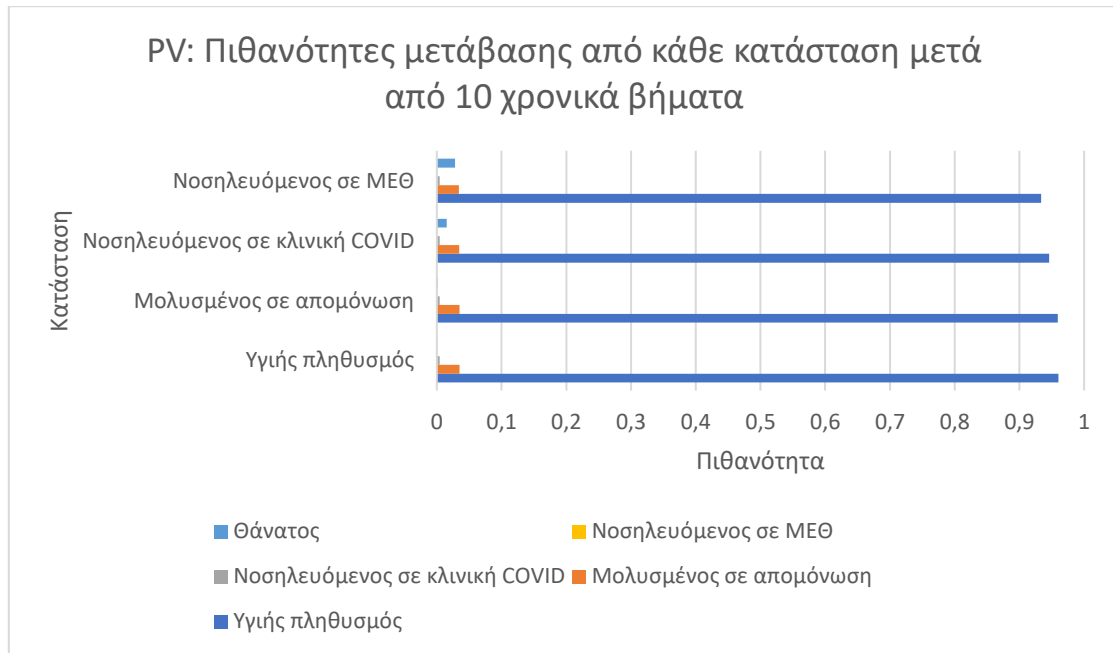


Διάγραμμα 62-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλου PV

- κατάσταση 5:

$$p(10)=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot P^{10}=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Το παρακάτω σχήμα, συγκεντρώνει τα αποτελέσματα του πίνακα P^{10} , δηλαδή τις πιθανότητες μετάβασης 10^{ου} βήματος από κάθε κατάσταση σε κάθε άλλη:



Διάγραμμα 63-Πιθανότητες μετάβασης καταστάσεων μετά από n=10 βήματα μοντέλου PV

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται ο πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων μετάβασης 15^{ου} βήματος:

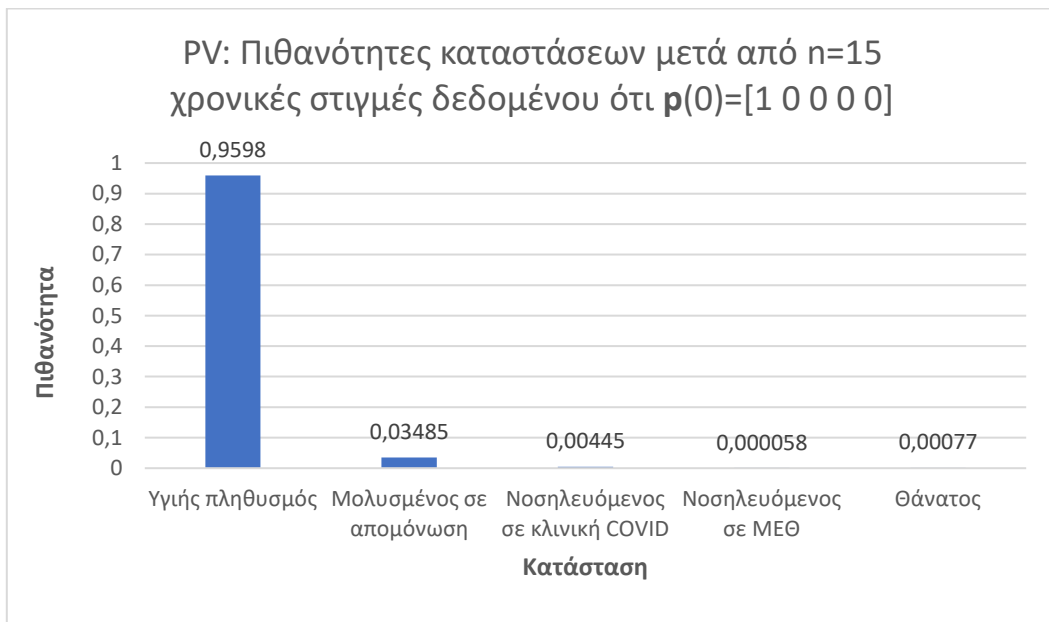
	1	2	3	4	5
1	0,9598	0,03485	0,00445	0,000058	0,00077
2	0,9590	0,03482	0,00445	0,000058	0,00166
3	0,9455	0,03434	0,00438	0,000057	0,01561
4	0,9331	0,03389	0,00433	0,000057	0,02852
5	0	0	0	0	1

Πίνακας 15-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων n=15 βημάτων μοντέλου PV

Αναλυτικότερα, από τη σχέση (9) ισχύουν τα εξής:

- Υπό την προϋπόθεση ότι κάποιος έχει ξεκινήσει απ' την κατάσταση 1, δηλαδή από την κατάσταση «Υγιής πληθυσμός», η πιθανότητες κατάστασης ύστερα από 15 χρονικά βήματα και το αντίστοιχο διάγραμμα είναι:

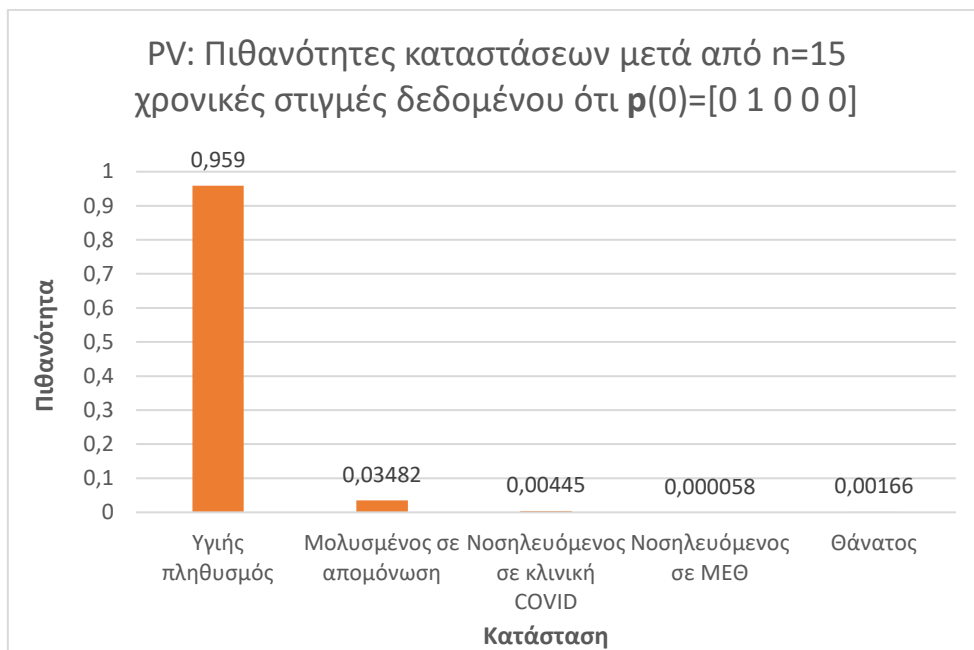
$$p(15)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot P^{15}= [0,9598 \ 0,03485 \ 0,00445 \ 0,000058 \ 0,00077]$$



Διάγραμμα 64-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV

- Ξεκινώντας από την κατάσταση 2, ισχύουν οι ακόλουθες πιθανότητες και το διάγραμμα κατανομής πιθανοτήτων:

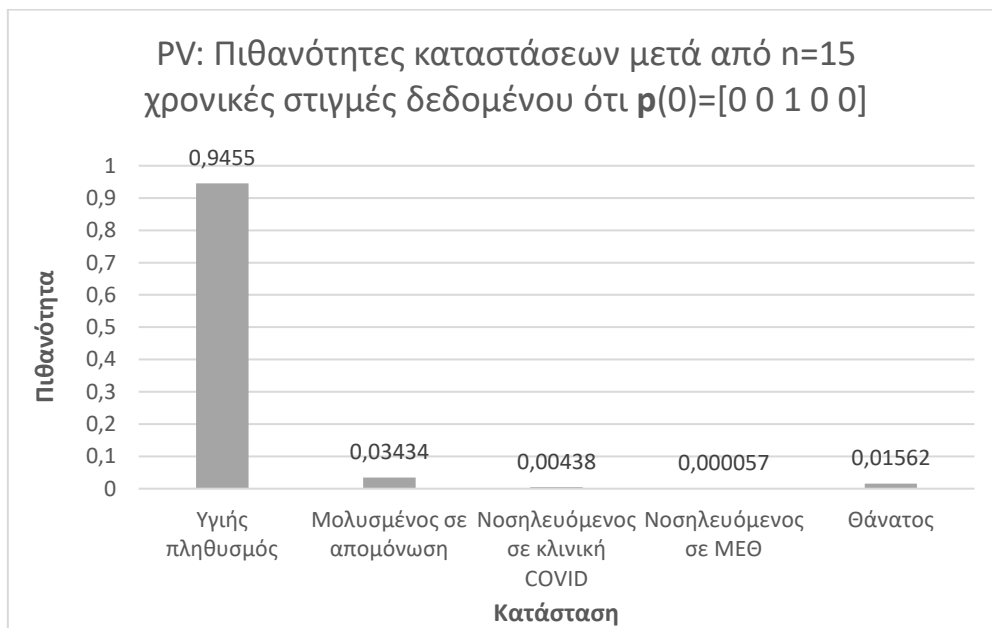
$$p(15)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot P^{15}= [0,9590 \ 0,03482 \ 0,00445 \ 0,000058 \ 0,00166]2$$



Διάγραμμα 65- Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV

- Δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση 3, οι μεταβάσεις πραγματοποιούνται με τις εξής πιθανότητες, όπου παρουσιάζονται και διαγραμματικά:

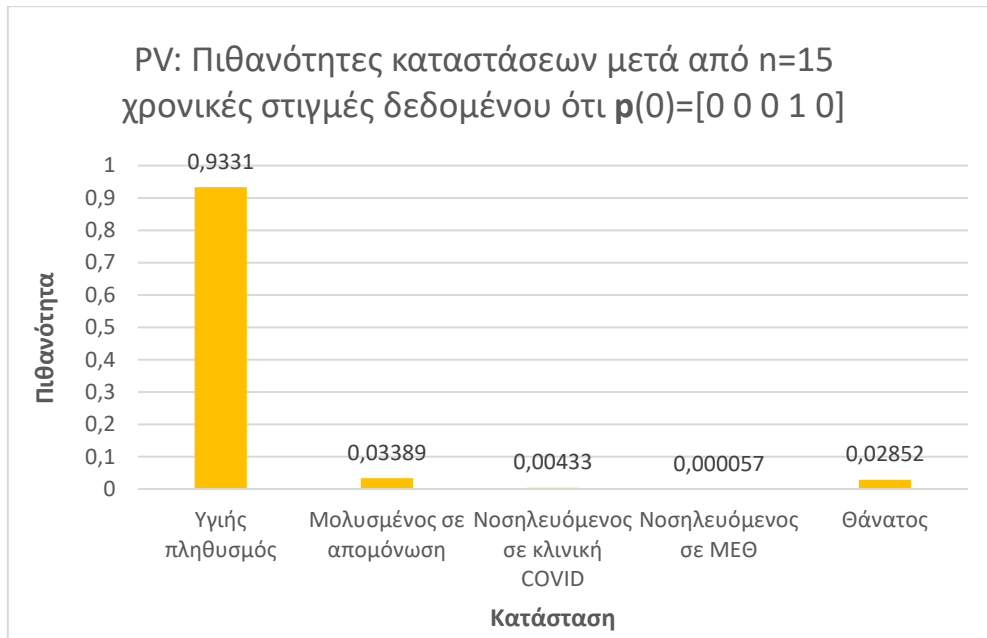
$$p(15)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \cdot P^{15} = [0,9455 \ 0,03434 \ 0,00438 \ 0,000057 \ 0,01561]$$



Διάγραμμα 66- Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV

- Ξεκινώντας από την κατάσταση 4, οι αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης της διαδικασίας και το διάγραμμα κατανομής πιθανοτήτων είναι:

$$p(15)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot P^{15}=[0,9331 \ 0,03389 \ 0,00433 \ 0,000057 \ 0,02852]$$

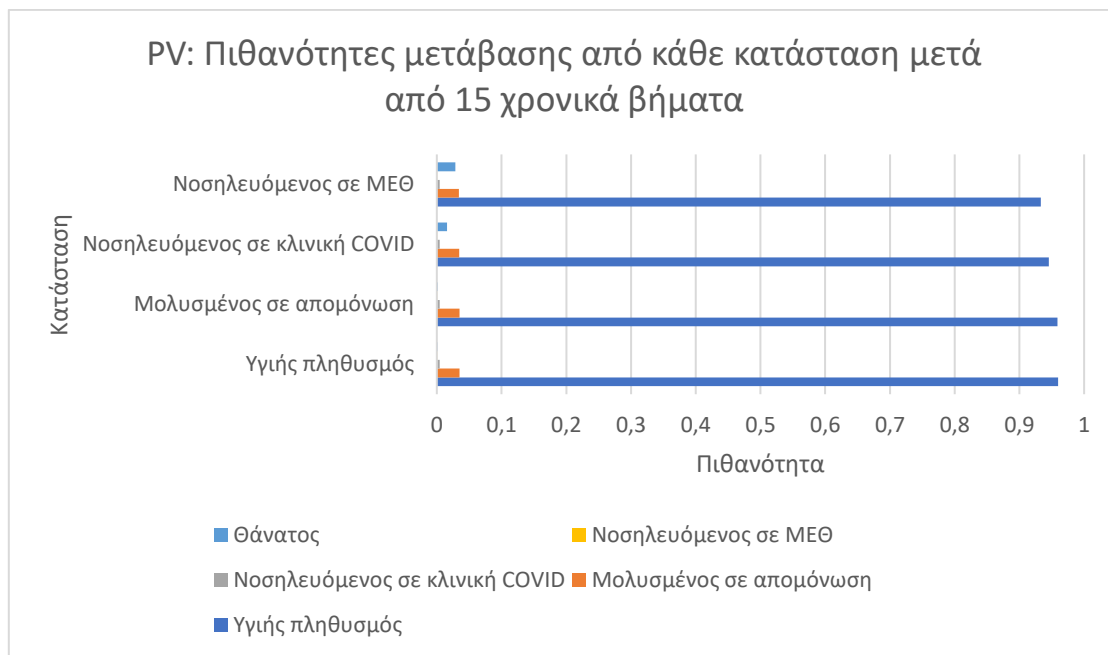


Διάγραμμα 67- Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλου PV

- Τέλος, ξεκινώντας από την κατάσταση 5:

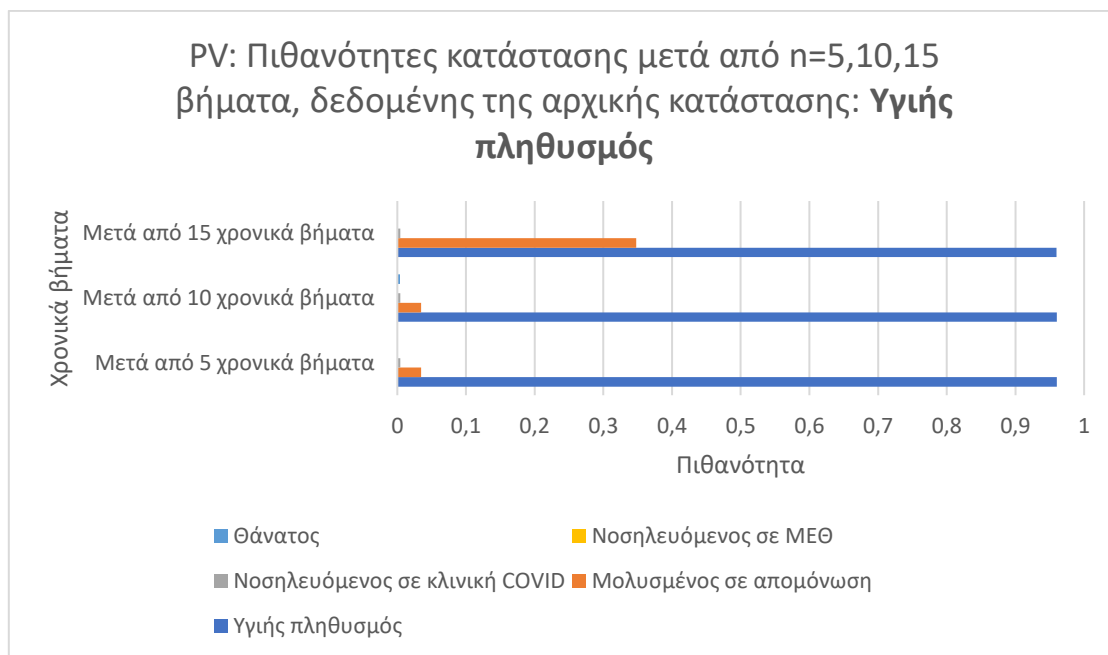
$$p(15)=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot P^{15}=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Το **διάγραμμα 68** παρουσιάζει τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων κατά το 15^ο χρονικό βήμα της διαδικασίας:

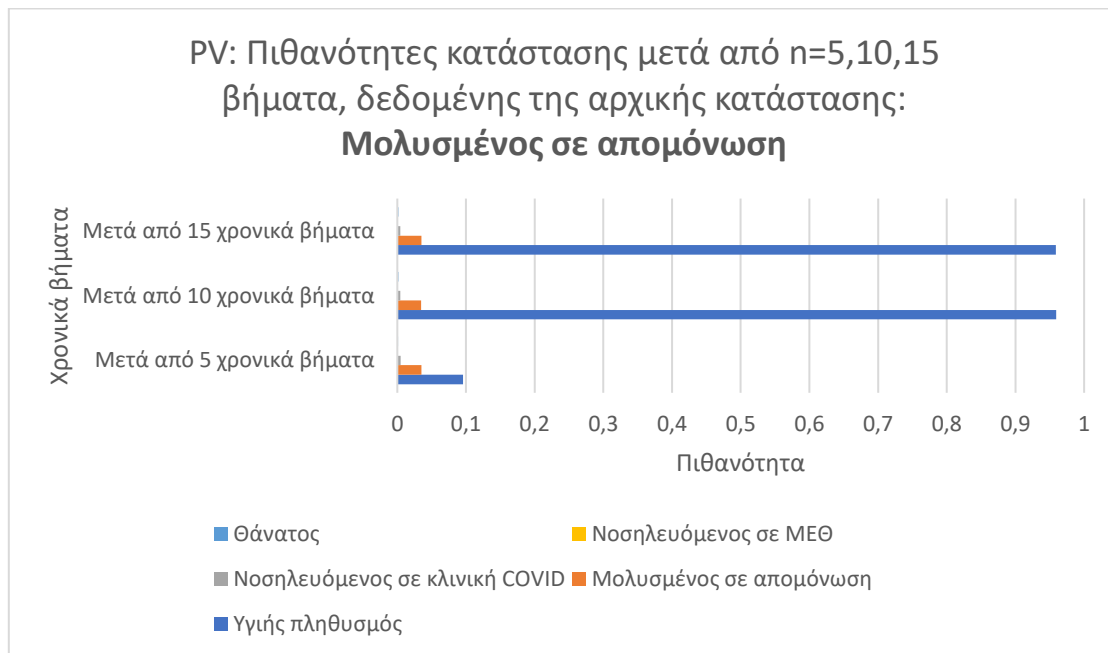


Διάγραμμα 68- Πιθανότητες μετάβασης καταστάσεων μετά από n=15 βήματα μοντέλου PV

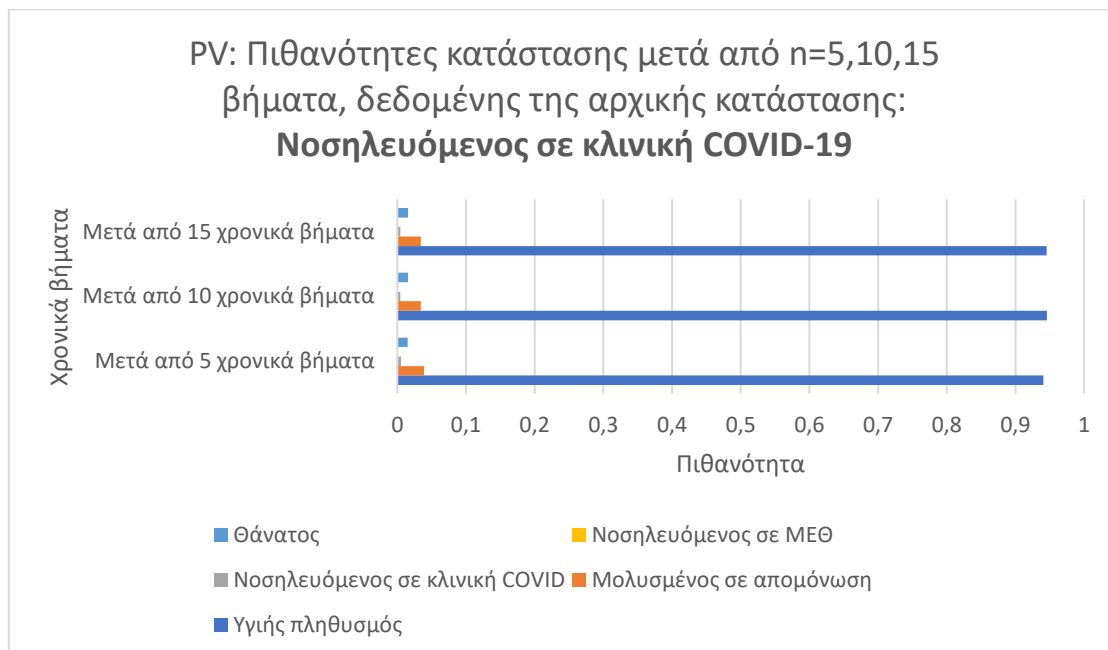
Στα διαγράμματα 69, 70, 71 και 72 φαίνεται η πιθανότητα να βρεθεί κάποιος στην κατάσταση $j = 1,2,3,4,5$, υπό την προϋπόθεση ότι έχει ξεκινήσει από την κατάσταση $i = 1,2,3,4$, μετά από 5, 10 και 15 χρονικά βήματα:



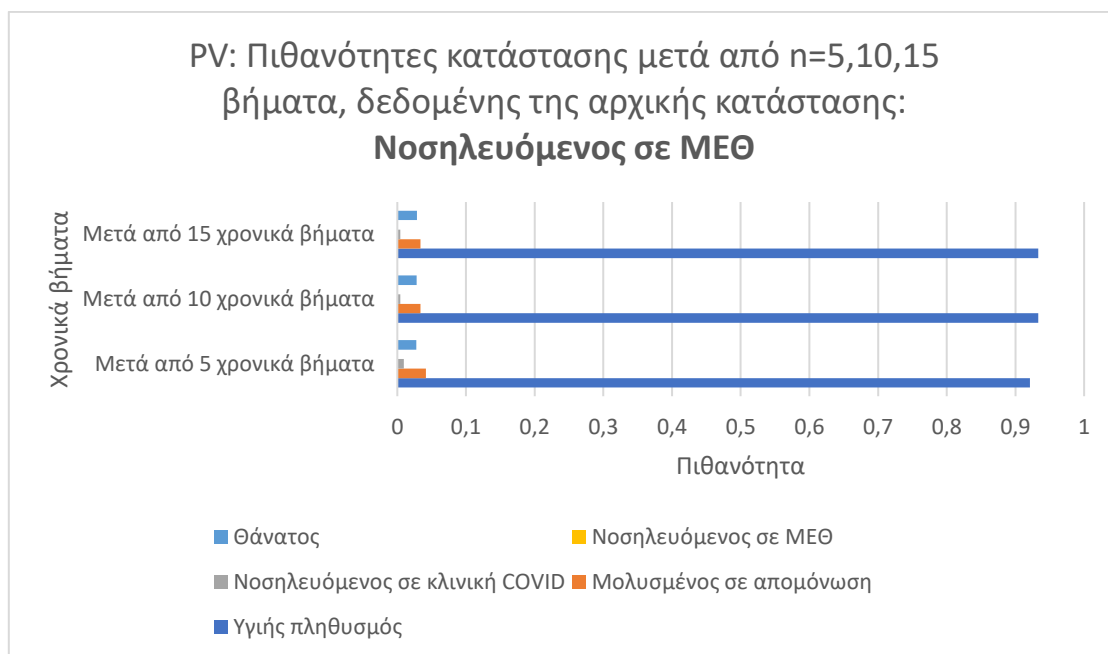
Διάγραμμα 69-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV



Διάγραμμα 70-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV

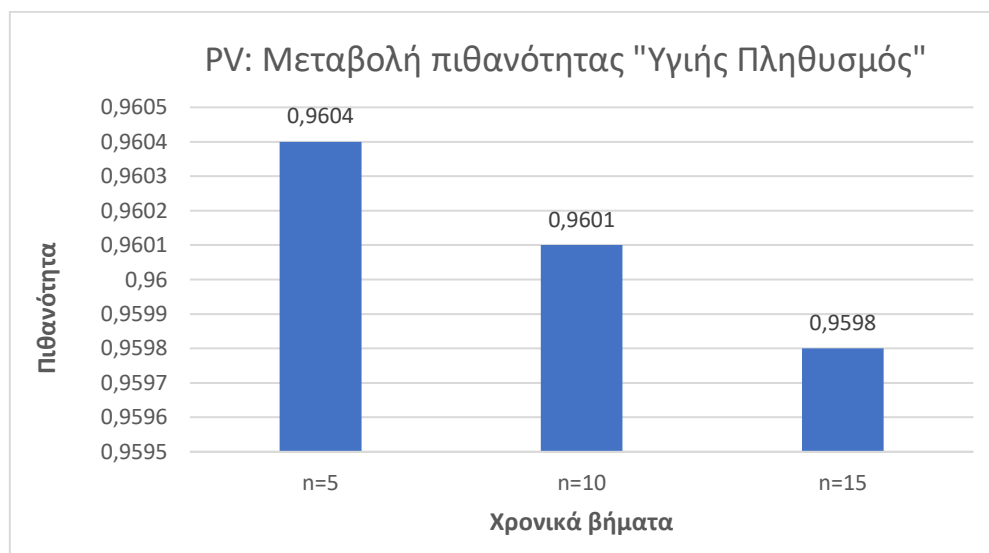


Διάγραμμα 71-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV

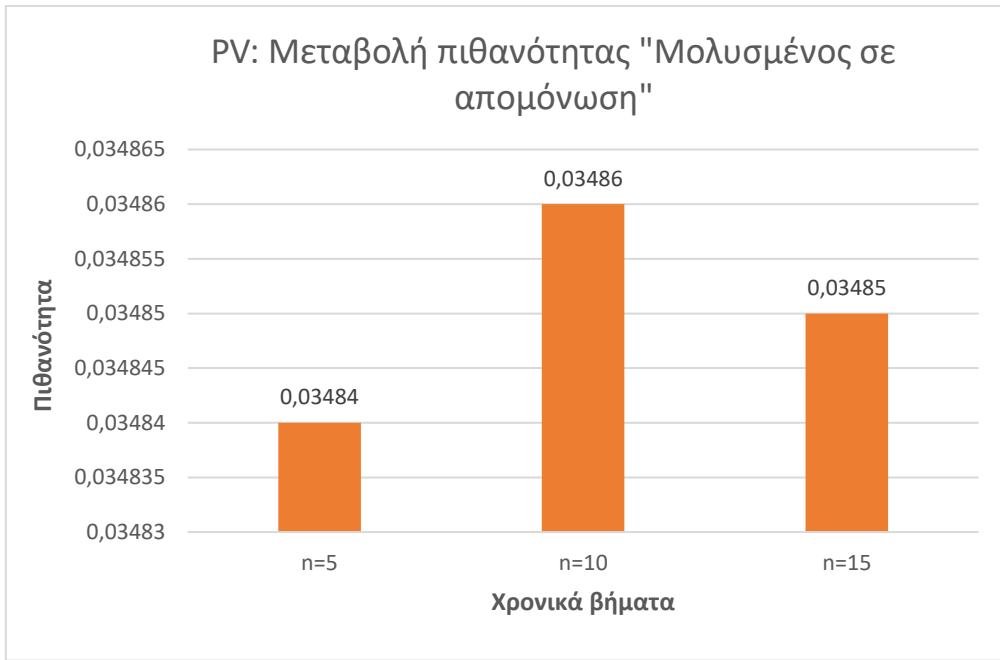


Διάγραμμα 72-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου PV

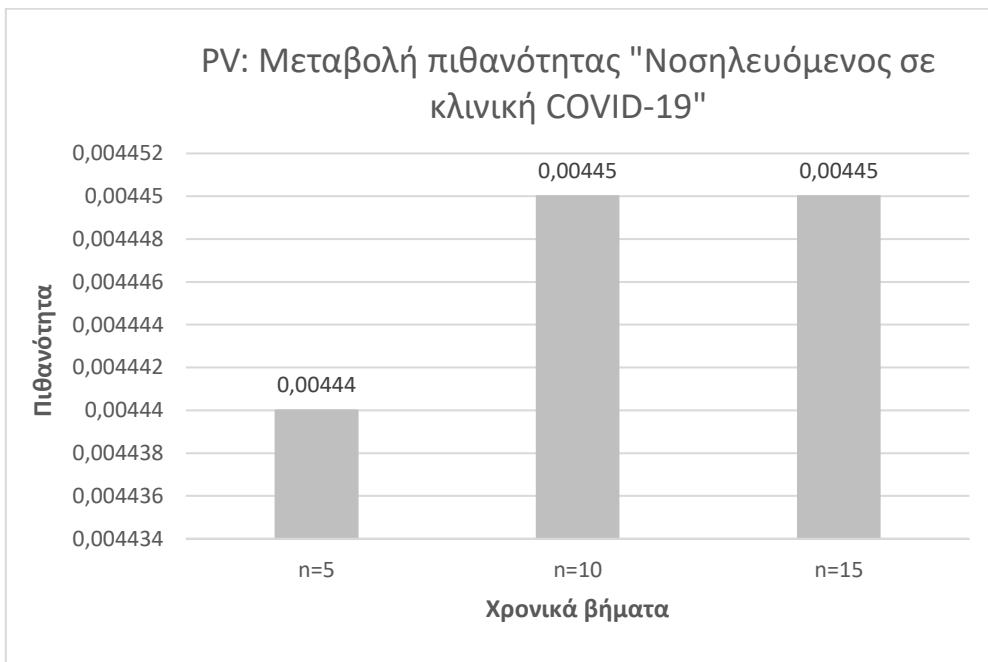
Υπό την προϋπόθεση ότι αρχικά βρισκόμαστε στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός», η μεταβολή της πιθανότητας κάθε κατάστασης ύστερα από $n = 5,10,15$ χρονικά βήματα, παρουσιάζεται στα **διαγράμματα 73, 74, 75, 76 και 77**:



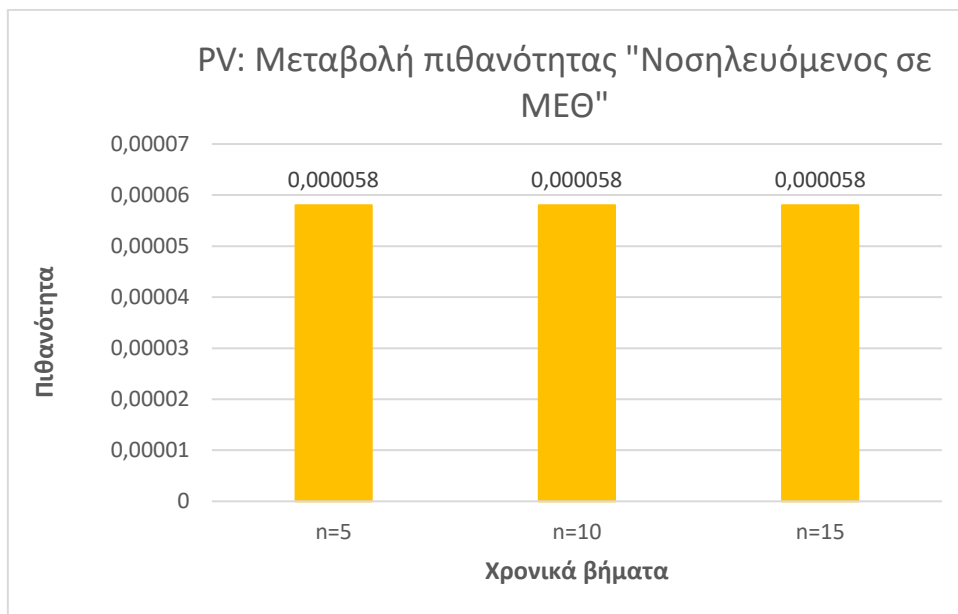
Διάγραμμα 73-Μεταβολή πιθανότητας "Υγιής πληθυσμός" δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV



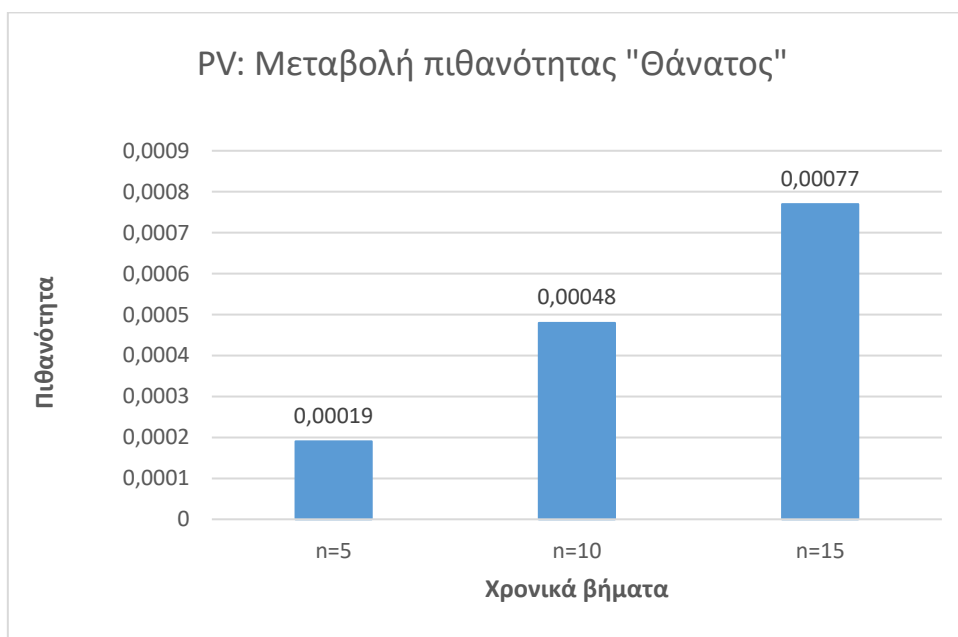
Διάγραμμα 74-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV



Διάγραμμα 75-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV

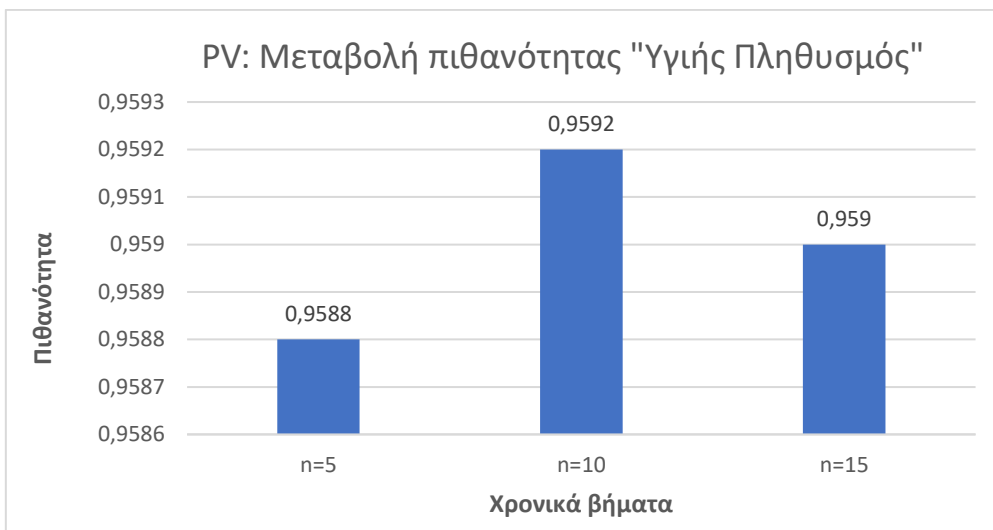


Διάγραμμα 76- Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV

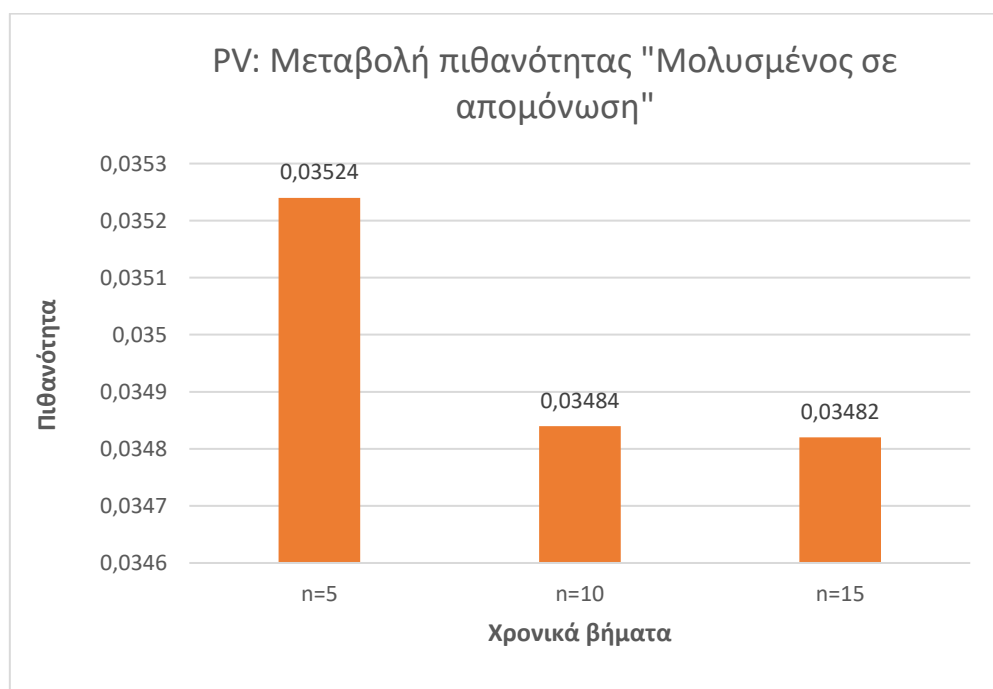


Διάγραμμα 77- Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου PV

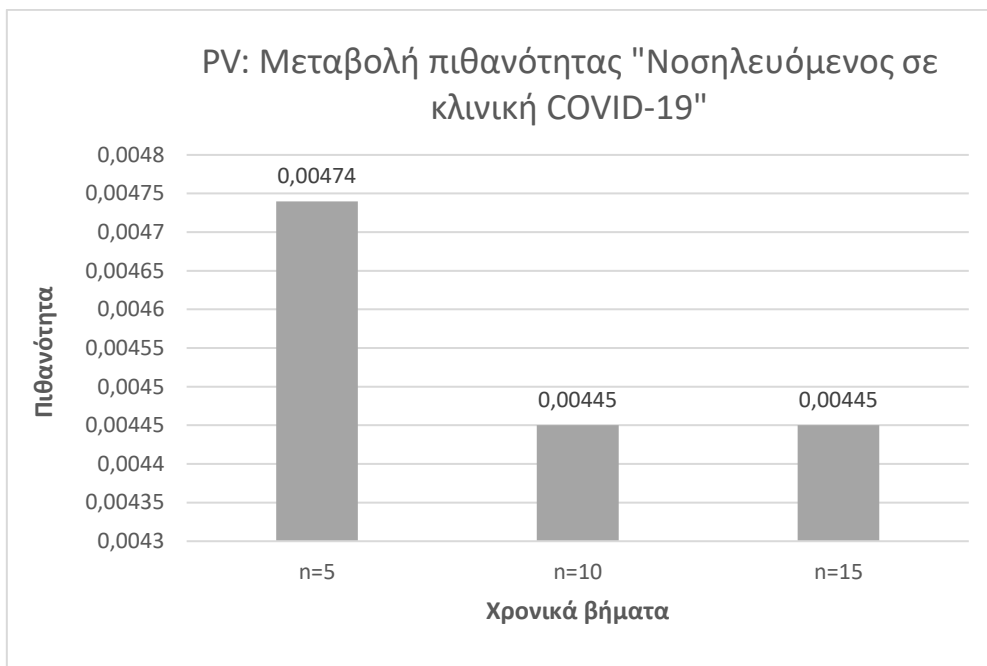
Στα **διαγράμματα 78, 79, 80, 81 και 82** απεικονίζεται η μεταβολή πιθανότητας κάθε κατάστασης μετά από $n = 5, 10, 15$ χρονικές στιγμές, δεδομένου ότι η διαδικασία ξεκινάει από την κατάσταση «**Μολυσμένος σε απομόνωση**»:



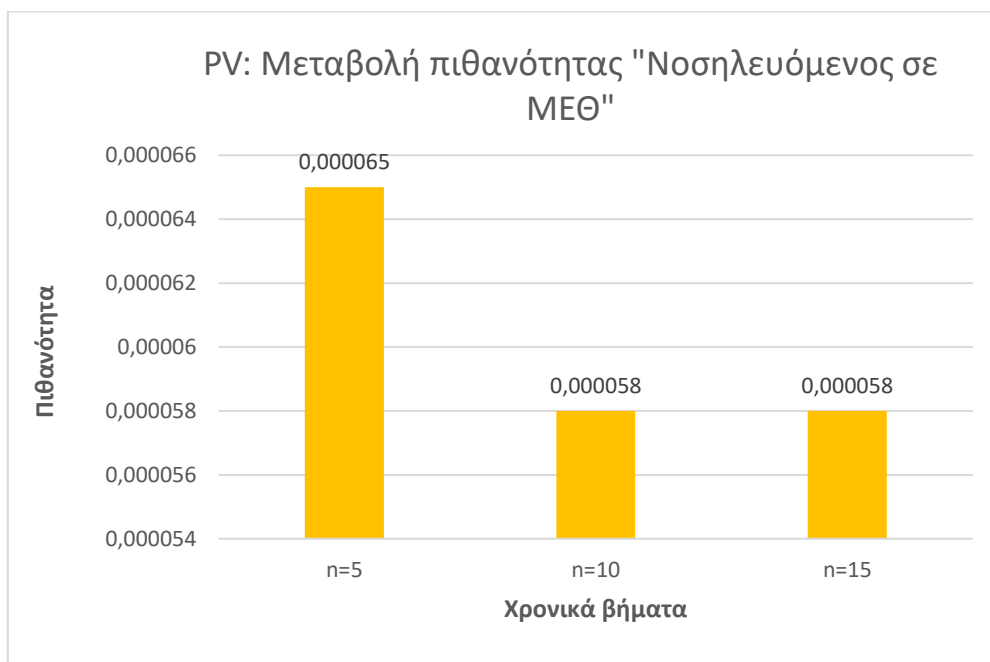
Διάγραμμα 78-Μεταβολή πιθανότητας "Υγιής πληθυσμός" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV



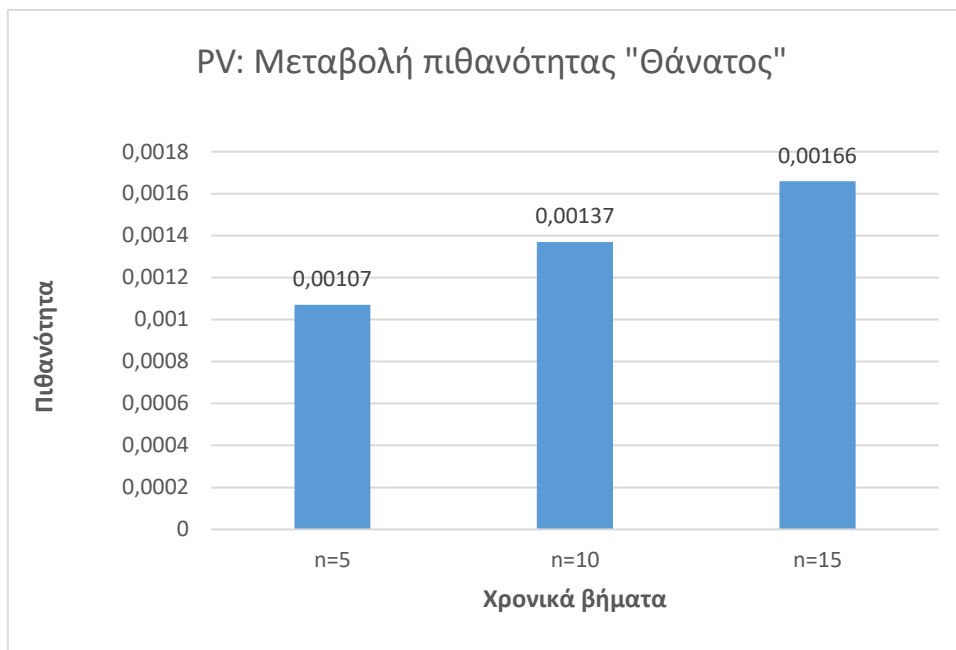
Διάγραμμα 79-Μεταβολή πιθανότητας "Μολυσμένος σε απομόνωση" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV



Διάγραμμα 80-Μεταβολή πιθανότητας "Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV

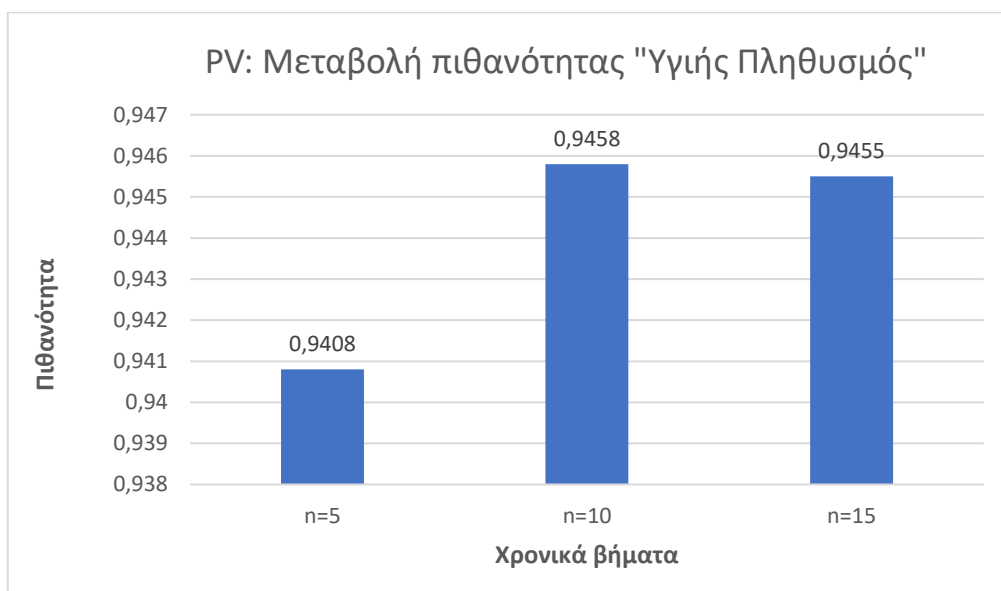


Διάγραμμα 81-Μεταβολή πιθανότητας "Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV

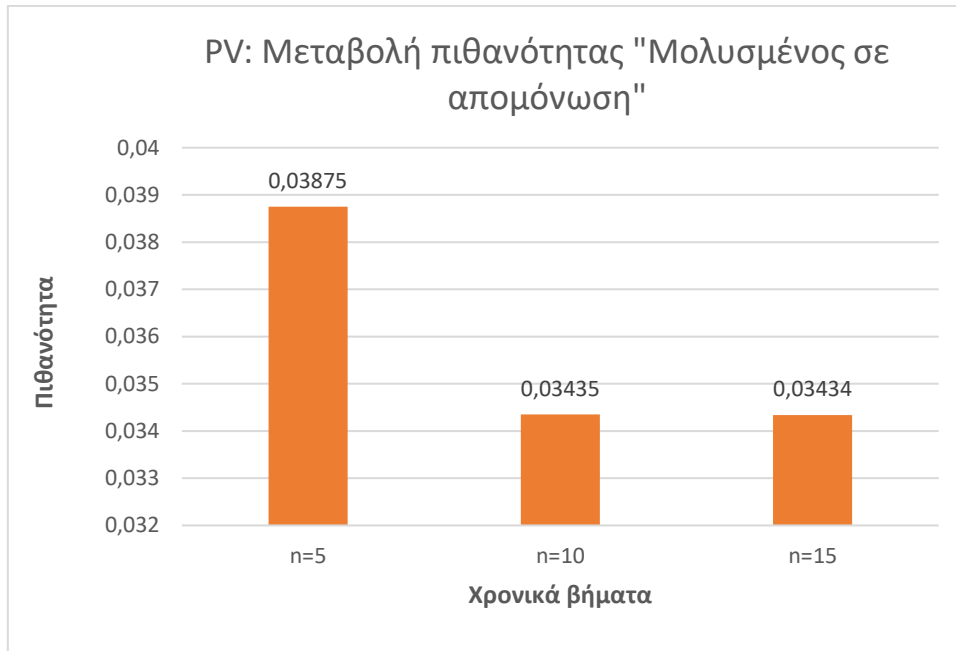


Διάγραμμα 82-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV

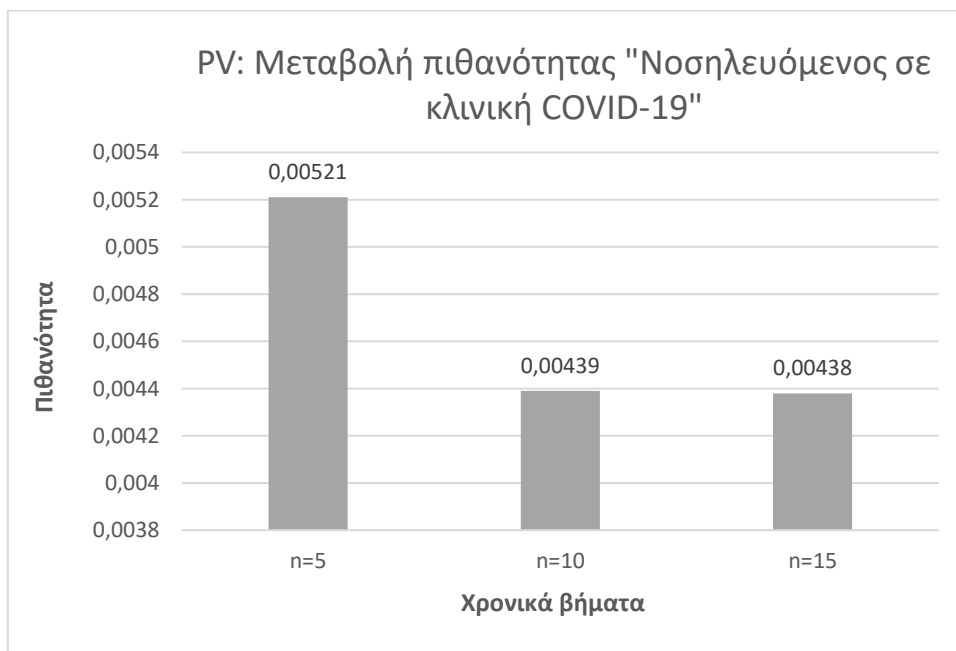
Στη συνέχεια, στα ακόλουθα διαγράμματα απεικονίζεται η μεταβολή της πιθανότητας κάθε κατάστασης μετά από $n = 5, 10, 15$ χρονικά βήματα, δεδομένου ότι αρχικά βρισκόμαστε στην κατάσταση «**Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19**»:



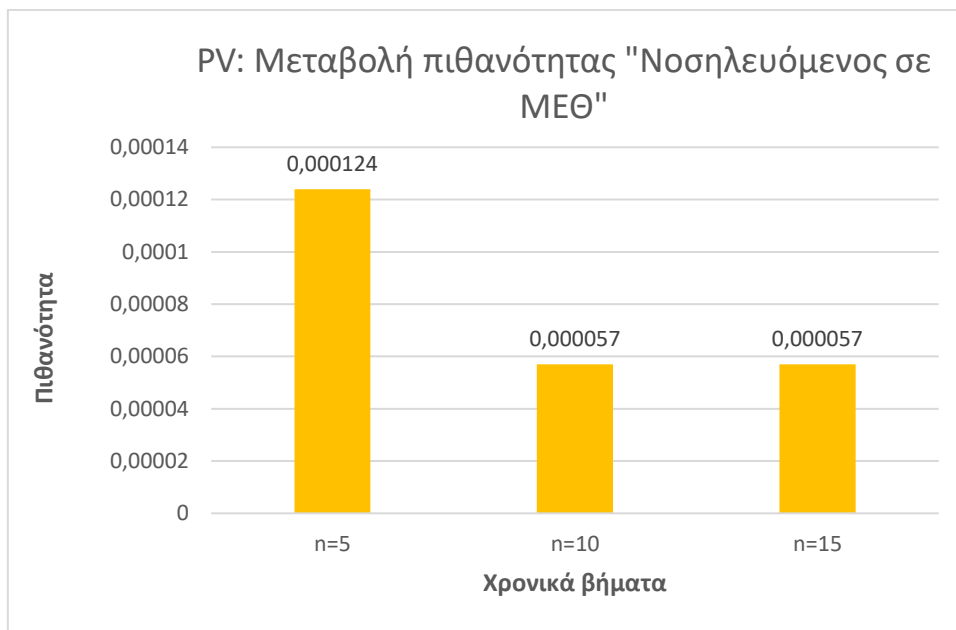
Διάγραμμα 83-Μεταβολή πιθανότητας “Υγιής πληθυσμός” δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV



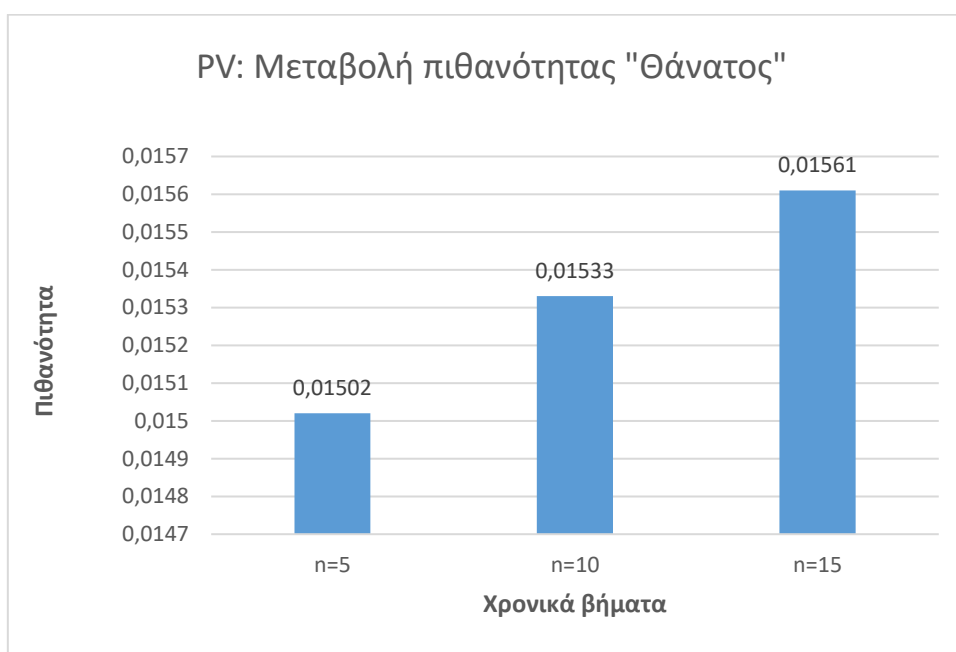
Διάγραμμα 84-Μεταβολή πιθανότητας "Μολυσμένος σε απομόνωση" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV



Διάγραμμα 85-Μεταβολή πιθανότητας "Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV

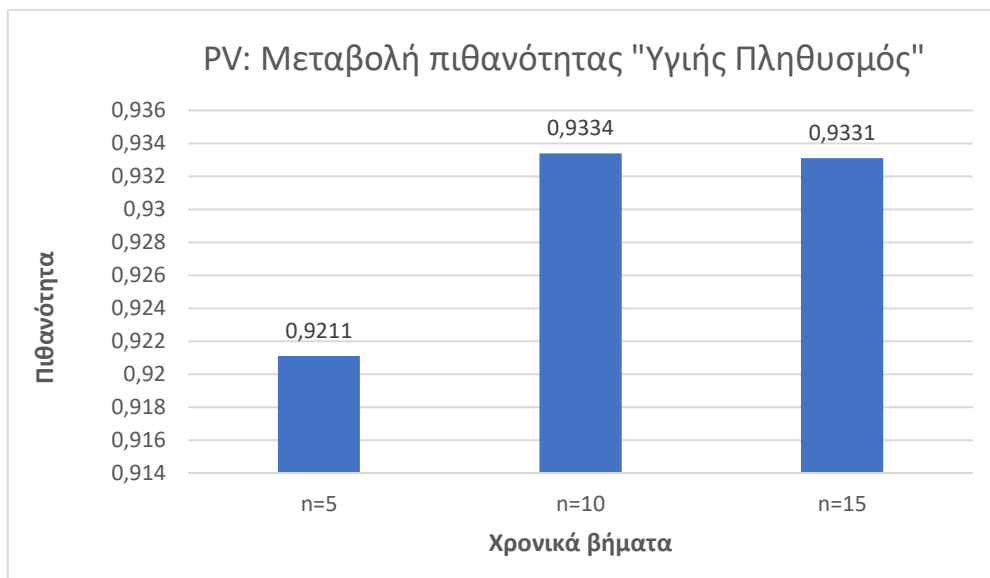


Διάγραμμα 86-Μεταβολή πιθανότητας "Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV

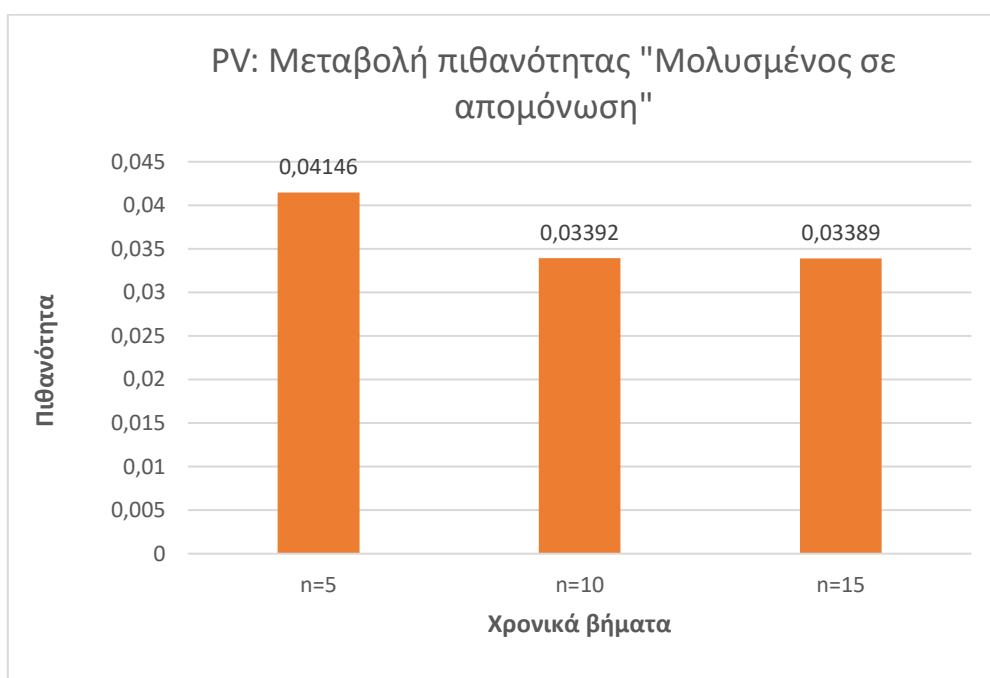


Διάγραμμα 87-Μεταβολή πιθανότητας "Θάνατος" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου PV

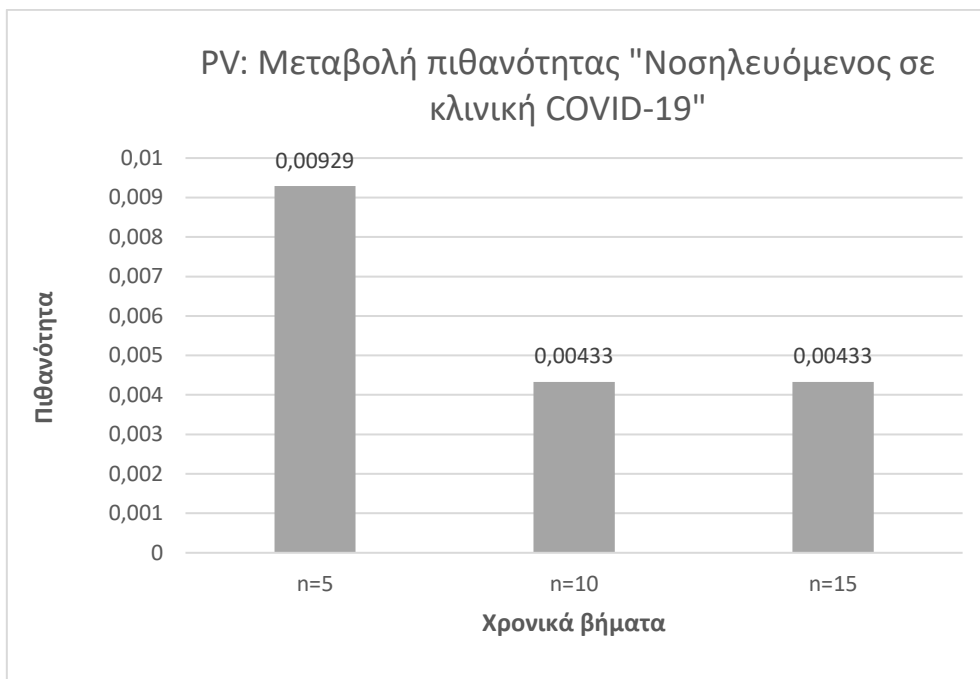
Τέλος, στα **διαγράμματα 88, 89, 90, 91 και 92** απεικονίζεται η μεταβολή της πιθανότητας κάθε κατάστασης μετά από $n = 5, 10, 15$ χρονικές στιγμές, δεδομένου ότι αρχικά βρισκόμαστε στην κατάσταση «**Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ**»:



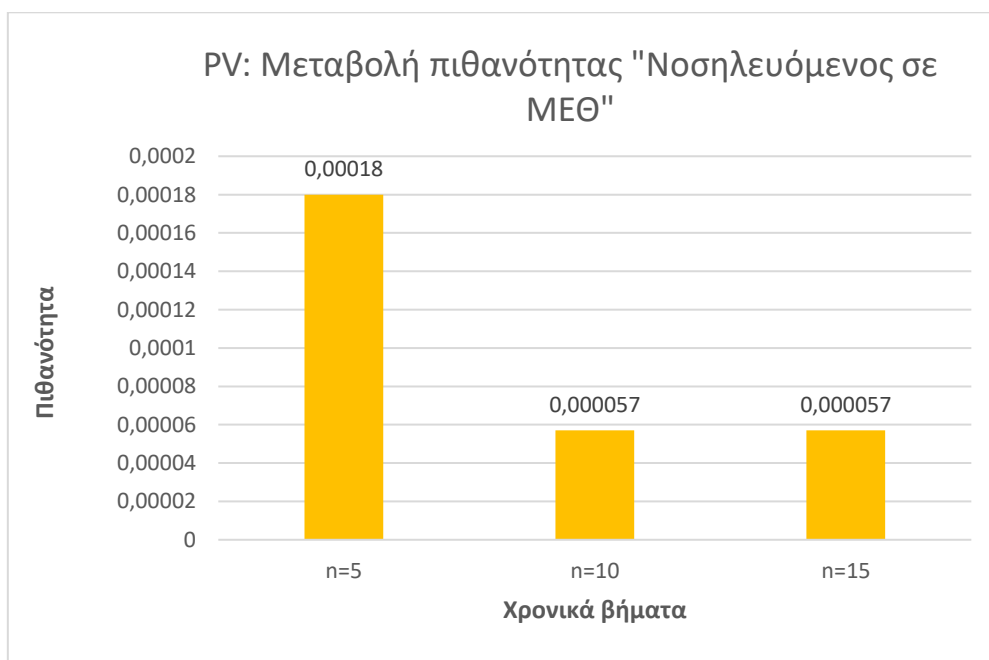
Διάγραμμα 88-Μεταβολή πιθανότητας "Υγιής πληθυσμός" δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου PV



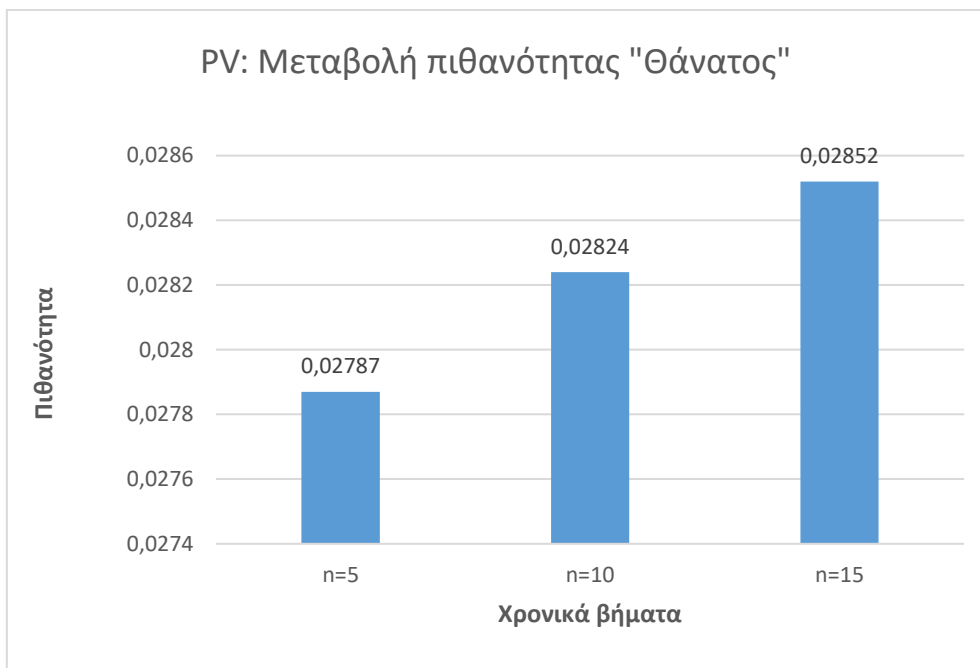
Διάγραμμα 89-Μεταβολή πιθανότητας "Μολυσμένος σε απομόνωση" δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου PV



Διάγραμμα 90-Μεταβολή πιθανότητας "Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλου PV



Διάγραμμα 91-Μεταβολή πιθανότητας "Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλου PV



Διάγραμμα 92-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου PV

Από το **διάγραμμα 73** έως το **διάγραμμα 92** που παρουσιάζεται η μεταβολή των πιθανοτήτων σε κάθε κατάσταση, δεδομένης της αρχικής θέσης της διαδικασίας, παρατηρούμε ότι σε αρκετές περιπτώσεις δεν μεταβάλλονται οι πιθανότητες (ιδίως ανάμεσα στο διάστημα των $n = 10$ και $n = 15$ ημερών). Στην πραγματικότητα υπάρχει μεταβολή, ωστόσο είναι πολύ μικρή στο διάστημα των ημερών που εξετάζεται. Συνεπώς, για ένα μεγαλύτερο αριθμό ημερών τα αποτελέσματα θα ήταν περισσότερο ευδιάκριτα.

3.4.3 Υπολογισμός πιθανότητα επιβίωσης n βημάτων για το μοντέλο PV

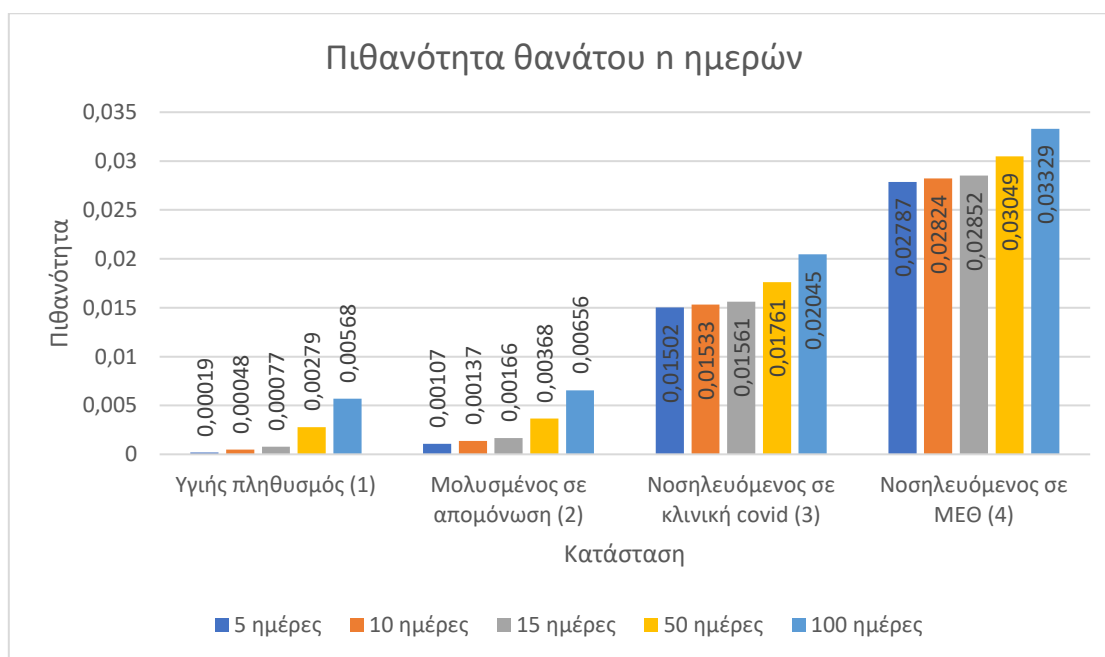
Δεδομένου ότι κάποιος βρίσκεται στην κατάσταση $i \in \{1,2,3,4\}$, ποια είναι η πιθανότητα επιβίωσης μετά από n βήματα;

Η **πιθανότητα θανάτου** $[p(n)]_{i,5}$ μετά από $n = 5, 10, 15, 50, 100, 200, 1000$ ημέρες, δεδομένου ότι η διαδικασία έχει ξεκινήσει από την κατάσταση $i = 1,2,3,4$, η οποία προκύπτει από τη σχέση (9), θα είναι:

	5 ημέρες	10 ημέρες	15 ημέρες	50 ημέρες	100 ημέρες	200 ημέρες	1000 ημέρες
1	0,00019	0,00048	0,00077	0,00279	0,00568	0,01143	0,05623
2	0,00107	0,00137	0,00166	0,00368	0,00656	0,01231	0,05707
3	0,01502	0,01533	0,01561	0,01761	0,02045	0,02611	0,07025
4	0,02787	0,02824	0,02852	0,03049	0,03329	0,03888	0,08244

Πίνακας 16-Πιθανότητες θανάτου από κάθε κατάσταση για n=5,10,15,50,100,200,1000 ημέρες μοντέλου PV

Διαγραμματικά οι παραπάνω πιθανότητες παρουσιάζονται ως εξής:



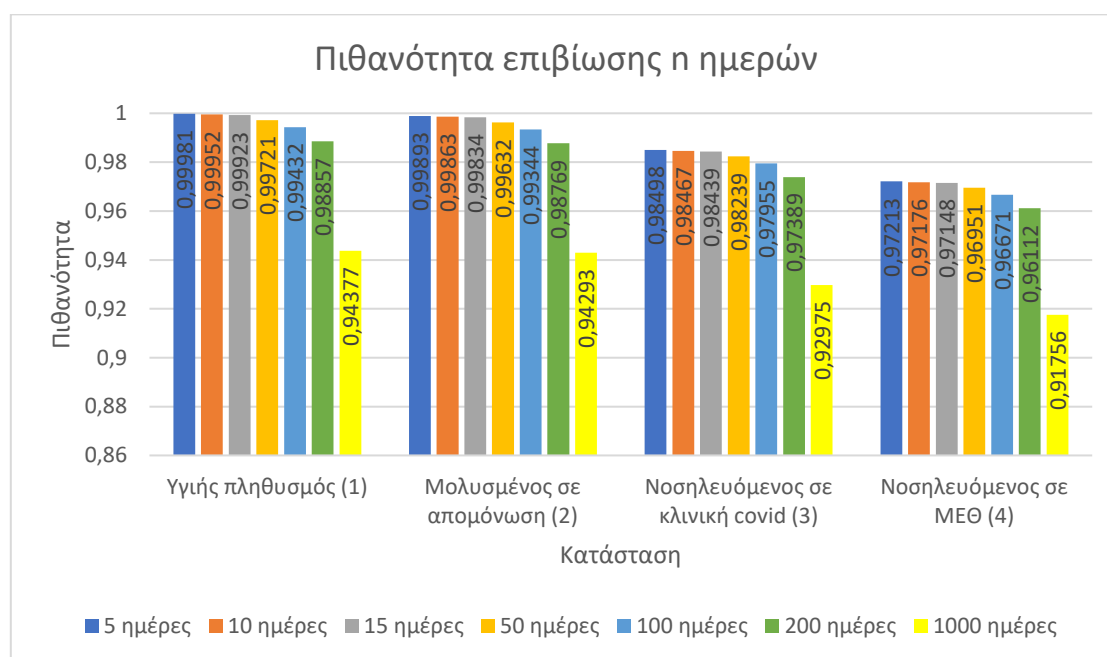
Διάγραμμα 93-Πιθανότητες θανάτου από κάθε κατάσταση για n=5,10,15,50,100 ημέρες μοντέλου PV

Επομένως, οι αντίστοιχες **πιθανότητες επιβίωσης n-οστού βήματος**, μετά από $n = 5,10,15,50,100,200,1000$ ημέρες θα είναι:

	5 ημέρες	10 ημέρες	15 ημέρες	50 ημέρες	100 ημέρες	200 ημέρες	1000 ημέρες
1	0,99981	0,99952	0,99923	0,99721	0,99432	0,98857	0,94377
2	0,99893	0,99863	0,99834	0,99632	0,99344	0,98769	0,94293
3	0,98498	0,98467	0,98439	0,98239	0,97955	0,97389	0,92975
4	0,97213	0,97176	0,97148	0,96951	0,96671	0,96112	0,91756

Πίνακας 17- Πιθανότητες επιβίωσης από κάθε κατάσταση για n=5,10,15,50,100,200,1000 ημέρες μοντέλου PV

Το αντίστοιχο διάγραμμα πιθανοτήτων επιβίωσης n-οστού βήματος:



Διάγραμμα 94-Πιθανότητες επιβίωσης από κάθε κατάσταση για n=5,10,15,50,100,200,1000 ημέρες μοντέλου PV

Σε συνέχεια του προηγούμενου μέτρου απόδοσης, στο **διάγραμμα 94** παρατηρούμε πάλι πως οι μεταβολές των πιθανοτήτων επιβίωσης ανάμεσα στο διάστημα των ημερών που εξετάζεται δεν διαφέρουν ιδιαίτερα. Όπως επισημάνθηκε στην προηγούμενη ενότητα, οι μεταβολές θα

μπορούσαν να παρατηρηθούν καλύτερα σε ένα μεγαλύτερο αριθμό ημερών n , ωστόσο ένα τέτοιο σενάριο θα καθιστούσε την πρόβλεψη εξαιρετικά αβέβαιη.

3.4.4 Υπολογισμός πιθανότητα απορρόφησης για το μοντέλο PV

Οι πιθανότητες απορρόφησης του μοντέλου PV, προκύπτουν από $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}$, όπου n είναι ο αριθμός ημερών που εξετάζεται. Τα b_{i5} είναι οι καταχωρήσεις του διανύσματος γραμμής \mathbf{B} και αντιστοιχούν στις πιθανότητες απορρόφησης στην κατάσταση 5, για $i \in \{1,2,3,4\}$. Όπως είναι αναμενόμενο, μακροπρόθεσμα για έναν πολύ μεγάλο αριθμό ημερών, όλος ο πληθυσμός θα καταλήξει στην κατάσταση 5, επομένως ισχύουν οι εξής πιθανότητες: $b_{15} = 1$, $b_{25} = 1$, $b_{35} = 1$, $b_{45} = 1$. Άρα το διάνυσμα γραμμής που δείχνει τις πιθανότητες απορρόφησης κάθε κατάστασης διαμορφώνεται ως εξής:

$$\mathbf{B} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

3.4.5 Υπολογισμός αναμενόμενου χρόνου θανάτου για το μοντέλο PV

Για τον υπολογισμό του αναμενόμενου χρόνου θανάτου, θα αξιοποιήσουμε τον πρωταρχικό πίνακα, ο οποίος προκύπτει από τη σχέση (10):

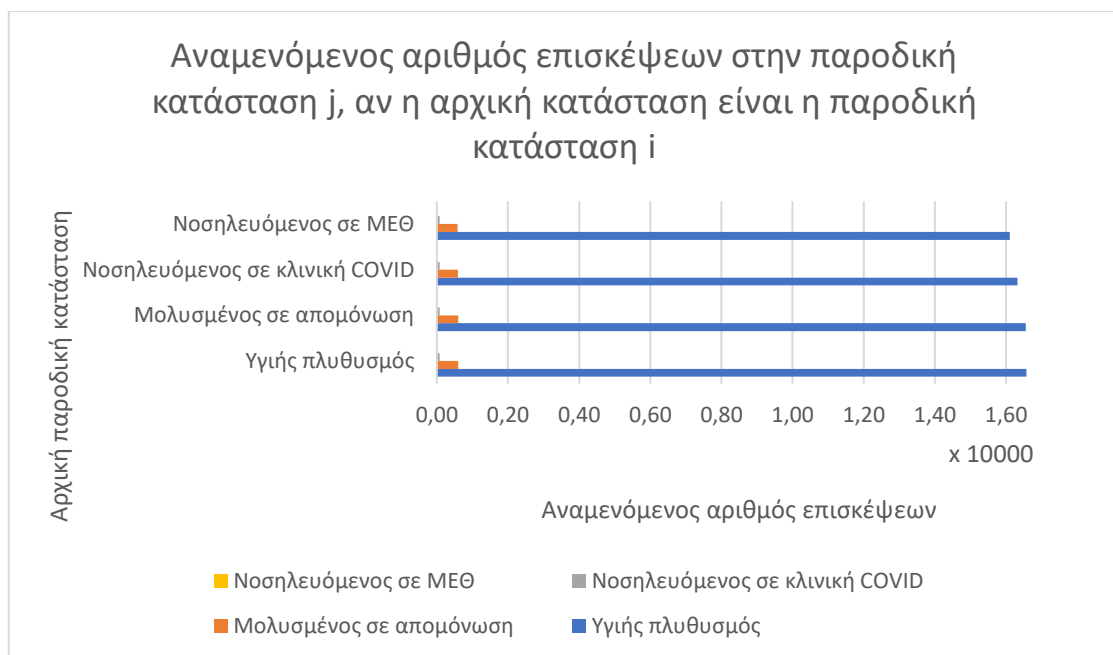
	1	2	3	4
1	16.571,5341	601,8003	76,9100	1,0128
2	16.555,6441	602,3247	76,9100	1,0128
3	16.323,1764	593,8671	76,9100	1,0128
4	16.108,2172	586,0465	75,8972	2,0124

Πίνακας 18-Πρωταρχικός πίνακας μοντέλου PV

Κάθε στοιχείο R_{ij} του πίνακα \mathbf{R} ισούται με τον αναμενόμενο αριθμό φορών που η διαδικασία θα βρεθεί στην κατάσταση $j = 1,2,3,4$ δεδομένου ότι έχει ξεκινήσει από την κατάσταση $i = 1,2,3,4$. Αναλυτικότερα:

- Κατάσταση 1:
 $R_{11}=16.571,534, R_{12}=601,800, R_{13}=76,910, R_{14}=1,012$
- Κατάσταση 2:
 $R_{21}=16.555,644, R_{22}=602,324, R_{23}=76,910, R_{24}=1,012$
- Κατάσταση 3:
 $R_{31}=16.323,176, R_{32}=593,867, R_{33}=76,910, R_{34}=1,012$
- Κατάσταση 4:
 $R_{41}=16.108,217, R_{42}=586,046, R_{43}=75,897, R_{44}=2,012$

Συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα του πρωταρχικού πίνακα, παρουσιάζονται στο ακόλουθο γράφημα:



Διάγραμμα 95-Αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων των παροδικών καταστάσεων μοντέλου PV

Ο αναμενόμενος χρόνος θανάτου (σε ημέρες), δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση i , συμβολίζεται με T_i , όπου $i \in \{1,2,3,4\}$:

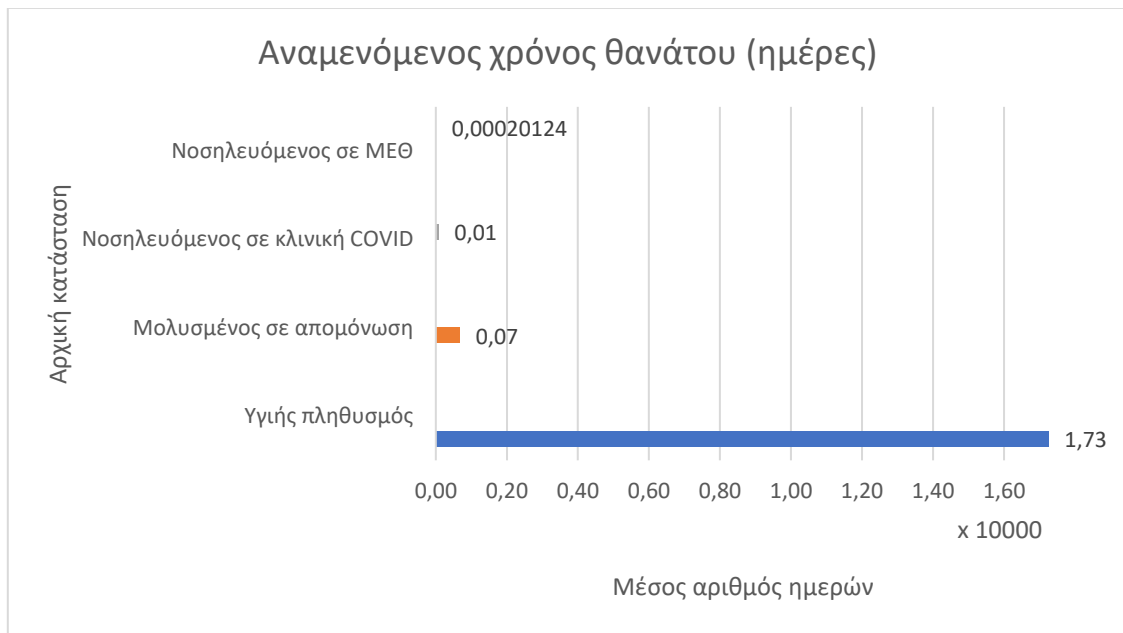
$$T_1 = R_{11} + R_{12} + R_{13} + R_{14} = 17.251,2574 \text{ ημέρες}$$

$$T_2 = R_{22} + R_{23} + R_{24} = 680,2476 \text{ ημέρες}$$

$$T_3 = R_{33} + R_{34} = 77,9229 \text{ ημέρες}$$

$$T_4 = R_{44} = 2,0124 \text{ ημέρες}$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα παρουσιάζονται διαγραμματικά ως εξής:



Διάγραμμα 96-Αναμενόμενος χρόνος θανάτου μοντέλου PV

Στο **διάγραμμα 96** παρατηρούμε πως ο αναμενόμενος χρόνος που απαιτείται για να μεταβεί κάθε κατάσταση στην κατάσταση «Θάνατος», διαφέρει εξαιρετικά στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός» σε σχέση με τις υπόλοιπες. Το επικείμενο αυτό αποτέλεσμα οφείλεται στην μεγάλη πιθανότητα παραμονής των πληθυσμιακών ομάδων στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός», η οποία ισοδυναμεί με $p_{11} = 0,967$ (**Πίνακας 5-Πίνακας** μετάβασης πιθανοτήτων μοντέλου PV).

3.4.6 Υπολογισμός πιθανότητα παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο PV

Η πιθανότητα να παραμείνει η διαδικασία στην κατάσταση i μετά από ακριβώς $n \in \{5,10,15\}$ βήματα, δεδομένου ότι το σύστημα μόλις μπήκε σε αυτή, προκύπτει από την εξίσωση (12):

- Για $n=5$:

$$P_1^{(5)} = 2,790270517549705 \times 10^{-2}$$

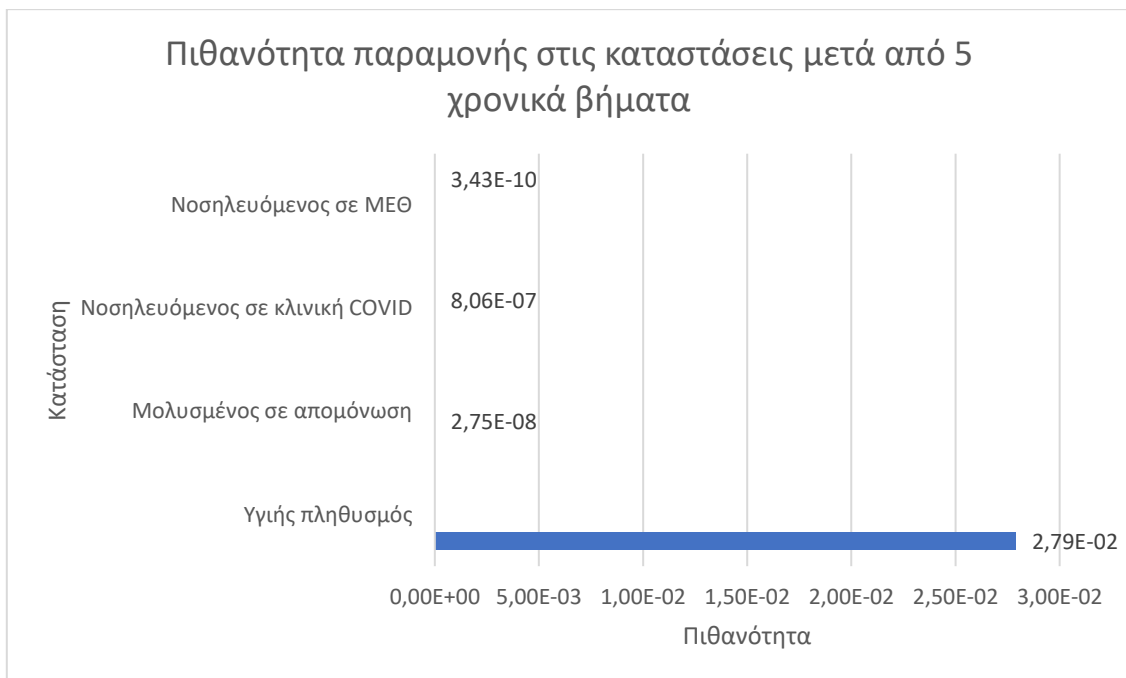
$$P_2^{(5)} = 2,753773932290452 \times 10^{-8}$$

$$P_3^{(5)} = 8,056011312448443 \times 10^{-7}$$

$$P_4^{(5)} = 3,431825766141777 \times 10^{-10}$$

$$P_5^{(5)} = 1$$

Το αντίστοιχο διάγραμμα πιθανοτήτων παραμονής μετά από 5 χρονικά βήματα είναι το ακόλουθο:



Διάγραμμα 97-Πιθανότητα παραμονής των καταστάσεων μετά από $n=5$ ημέρες μοντέλου PV

- Για $n=10$:

$$P_1^{(10)} = 2,359275624577907 \times 10^{-2}$$

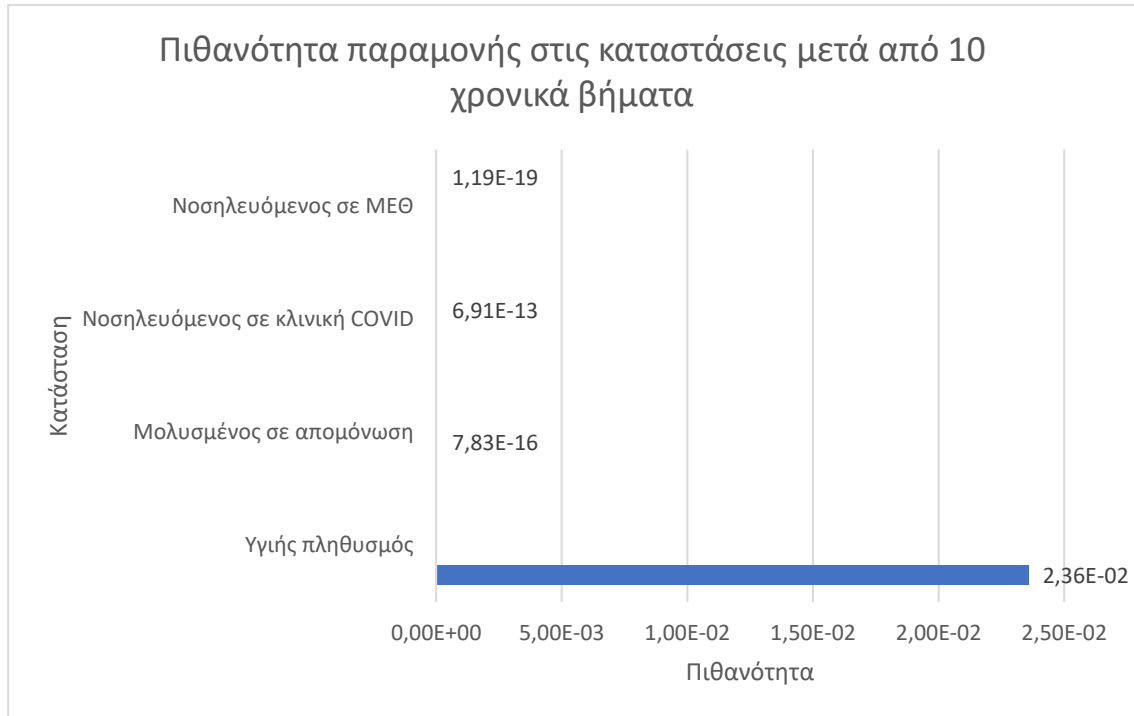
$$P_2^{(10)} = 7,825501441791640 \times 10^{-16}$$

$$P_3^{(10)} = 6,912963729066207 \times 10^{-13}$$

$$P_4^{(10)} = 1,193049635742029 \times 10^{-19}$$

$$P_5^{(10)} = 1$$

Η διαγραμματική παρουσίαση των παραπάνω πιθανοτήτων είναι η εξής:



Διάγραμμα 98-Πιθανότητα παραμονής των καταστάσεων μετά από n=10 ημέρες μοντέλου PV

- Για n=15:

$$P_1^{(15)} = 1,994853702434362 \times 10^{-2}$$

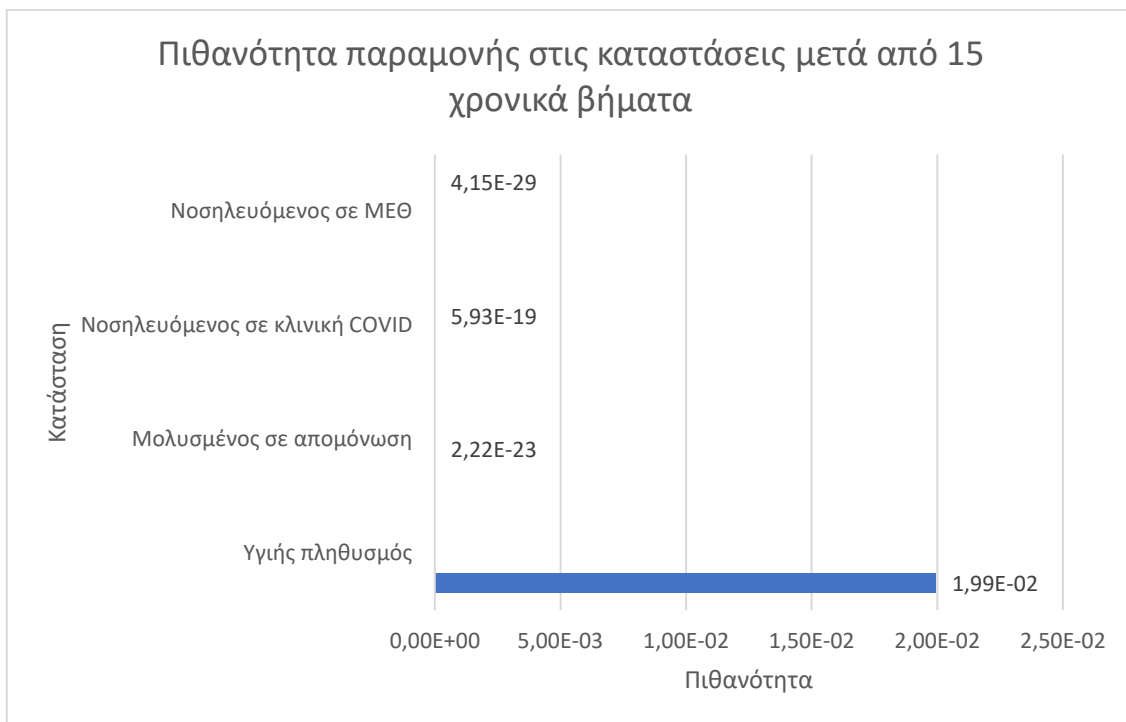
$$P_2^{(15)} = 2,223801747028229 \times 10^{-23}$$

$$P_3^{(15)} = 5,932100349156602 \times 10^{-19}$$

$$P_4^{(15)} = 4,147551566827960 \times 10^{-29}$$

$$P_5^{(15)} = 1$$

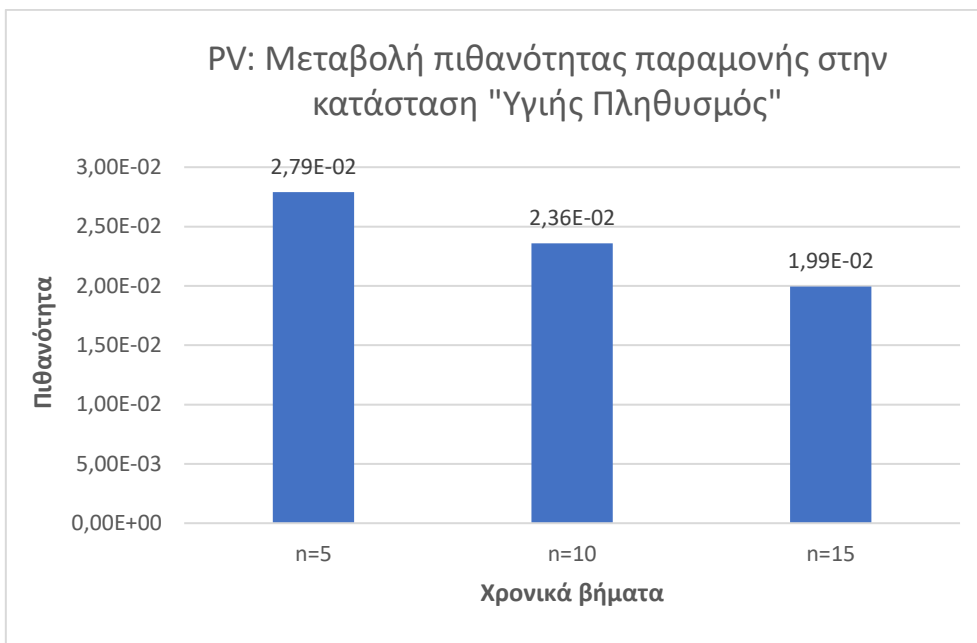
Το αντίστοιχο γράφημα των παραπάνω πιθανοτήτων παραμονής είναι:



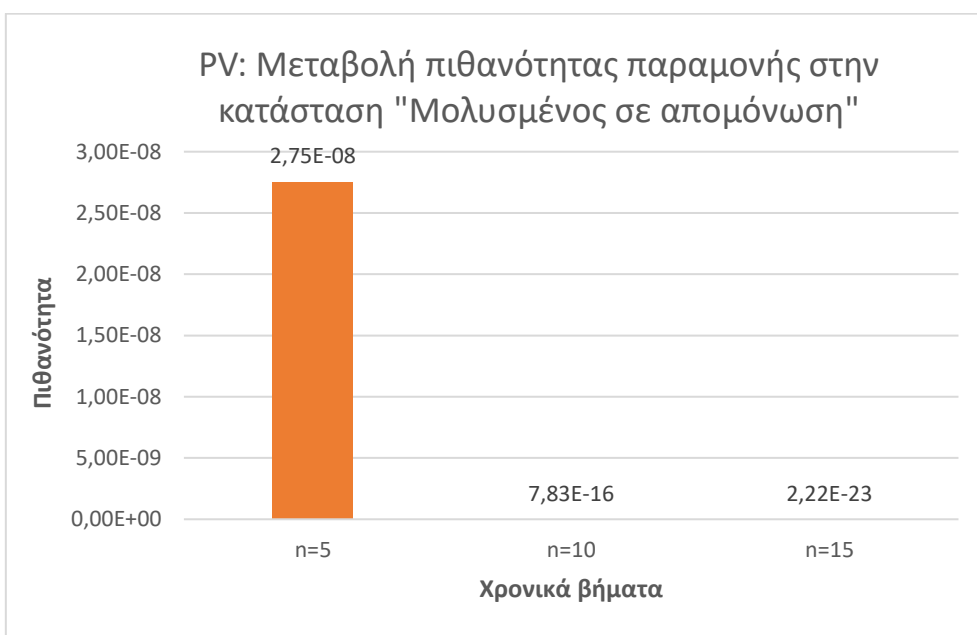
Διάγραμμα 99-Πιθανότητα παραμονής των καταστάσεων μετά από n=15 ημέρες μοντέλου PV

Στα **διαγράμματα 97, 98 και 99** παρατηρούμε για ακόμη μία φορά, πως η πιθανότητα παραμονής στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός» διαφέρει σημαντικά σε σύγκριση με τις υπόλοιπες μεταβατικές καταστάσεις, ανεξάρτητα των ημερών που εξετάζεται. Η συμπεριφορά αυτή αποδίδεται στη μεγάλη πιθανότητα παραμονής ενός βήματος των πληθυσμών στην συγκεκριμένη κατάσταση ($p_{11} = 0,967$).

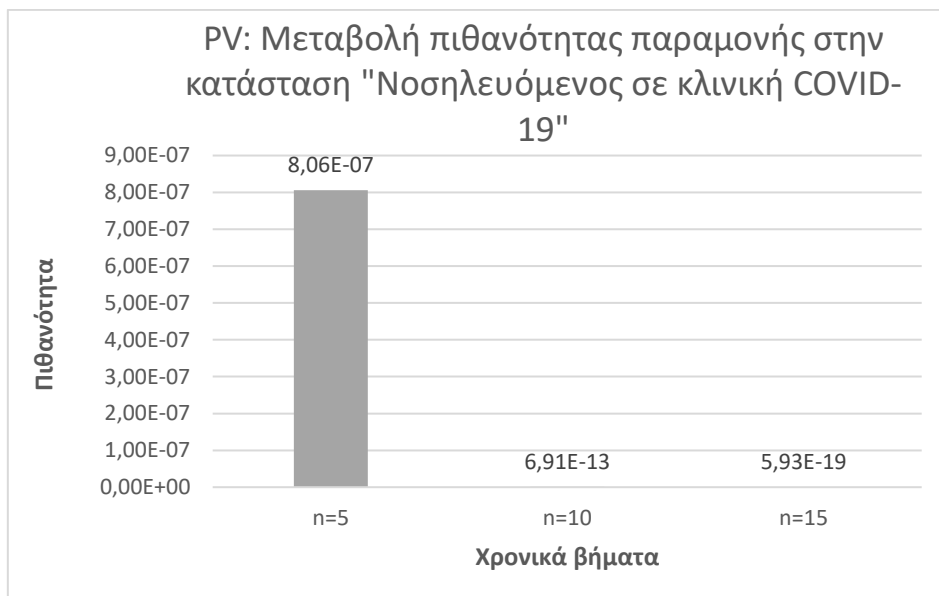
Στη συνέχεια, στα **διαγράμματα 100, 101, 102 και 103** παρουσιάζεται η μεταβολή της πιθανότητας παραμονής σε κάθε κατάσταση μετά από $n = 5,10,15$ χρονικά βήματα, δεδομένου ότι το σύστημα μόλις μπήκε σε αυτή:



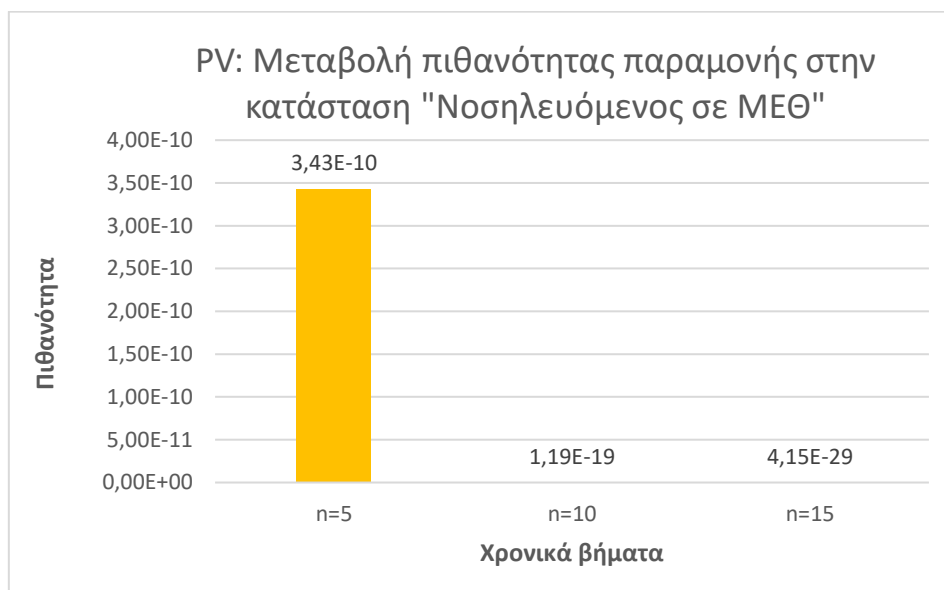
Διάγραμμα 100-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής "Υγιής πληθυσμός" μοντέλου PV



Διάγραμμα 101-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής "Μολυσμένος σε απομόνωση" μοντέλου PV



Διάγραμμα 102-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής "Νοσηλεύόμενος σε κλινική COVID-19" μοντέλου PV



Διάγραμμα 103 Μεταβολή πιθανότητας παραμονής "Νοσηλεύόμενος σε ΜΕΘ" μοντέλου PV

Στα **διαγράμματα 101, 102 και 103** διακρίνουμε ότι το χάσμα ανάμεσα στις πιθανότητες παραμονής είναι πολύ μεγάλο σε σύγκριση με το **διάγραμμα 100** που αφορά την κατάσταση «Υγιής πληθυσμός».

3.4.7 Υπολογισμός μέσου χρόνου παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο PV

Ο αναμενόμενος αριθμός χρονικών βημάτων που η αλυσίδα θα παραμείνει σε κάθε κατάσταση κάθε φορά που την επισκέπτεται, εκτός της απορροφητικής, προκύπτει από την εξίσωση (13) και ισούται με:

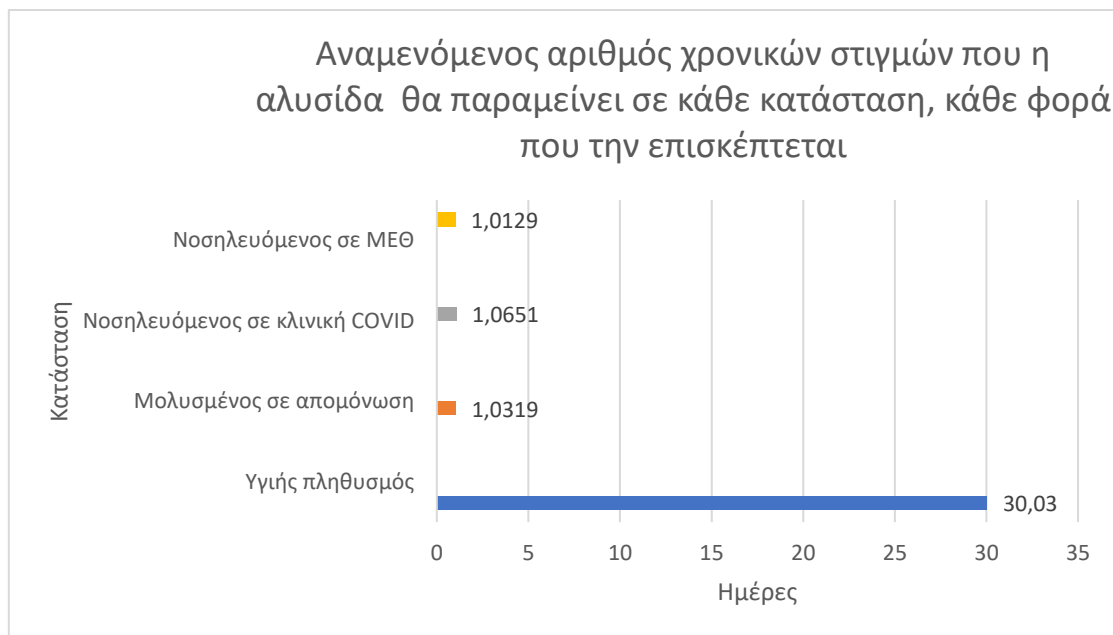
$$E(T_1) = 30,3030$$

$$E(T_2) = 1,0319$$

$$E(T_3) = 1,0651$$

$$E(T_4) = 1,0129$$

Τα αποτελέσματα για το μέσο χρόνο παραμονής σε κάθε κατάσταση, παρουσιάζονται με τη μορφή διαγράμματος ως εξής:



Διάγραμμα 104-Μέσος χρόνος παραμονής κάθε κατάστασης μοντέλου PV

Στο **διάγραμμα 104** παρατηρούμε πως ο μέσος χρόνος παραμονής στην κατάσταση «Μολυσμένος σε απομόνωση» δείχνει να είναι μεγαλύτερος σε σχέση με την κατάσταση «Νοσηλευόμενος πληθυσμός σε κλινική COVID-19». Η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στις πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος, καθώς $p_{22} = 0,030954$ ενώ $p_{33} = 0,061194$.

3.4.8 Υπολογισμός διακύμανσης του μέσου χρόνου παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο PV

Η διασπορά του αριθμού των χρονικών βημάτων που η αλυσίδα θα παραμείνει σε κάθε κατάσταση, κάθε φορά που την επισκέπτεται, εκτός της απορροφητικής, προκύπτει από τη σχέση (14) και αντιστοιχεί σε:

$$\text{Var}(T_1)=887,9706$$

$$\text{Var}(T_2)=0,0329$$

$$\text{Var}(T_3)=0,0694$$

$$\text{Var}(T_4)=0,0131$$

3.5 Μοντέλο πληθυσμού που έχει εμβολιαστεί πλήρως(FV)

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου που περιγράφει την κατάσταση ενός ατόμου που είναι πλήρως εμβολιασμένο, τη χρονική στιγμή n . Όπως υπολογίστηκε στην ενότητα **3.2**, οι μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων του μοντέλου συντελούνται με τις ακόλουθες πιθανότητες

	1	2	3	4	5
1	0,91	0,08658	0,00342	0	0
2	0,87542	0,08658	0,038	0	0
3	0	0,9501679	0,0379468	0,0014	0,0104853
4	0	0	0,9881147	0,0013853	0,0105
5	0	0	0	0	1

P=

3.5.1 Υπολογισμός πιθανότητας μετάβασης ενός βήματος για το μοντέλο FV

Οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος υπολογίζονται από τον πίνακα μετάβασης P όπου προκύπτουν από τη σχέση (2), δηλαδή ξεκινώντας από κάθε κατάσταση, η πιθανότητα μετάβασης στην κατάσταση $j \in \{1,2,3,4,5\}$ σε ένα βήμα είναι οι εξής:

$$p_{1j}=[0,91 \quad 0,08658 \quad 0,00342 \quad 0 \quad 0]$$

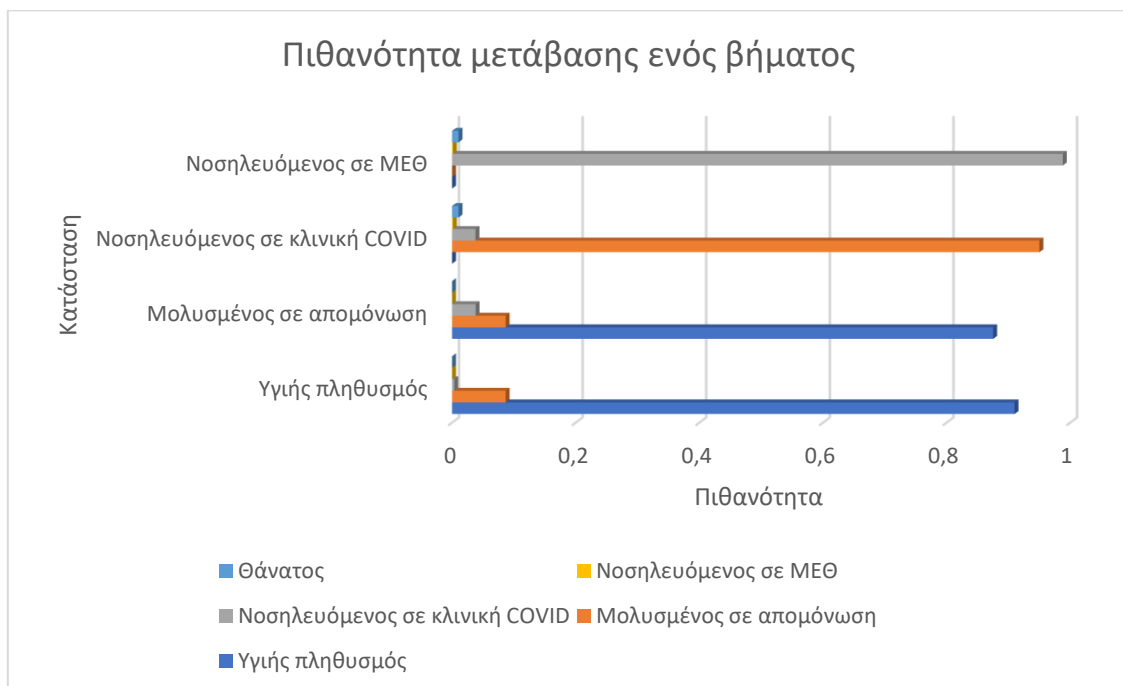
$$p_{2j}=[0,87542 \quad 0,08658 \quad 0,038 \quad 0 \quad 0]$$

$$p_{3j}=[0 \quad 0,9501679 \quad 0,0379468 \quad 0,014 \quad 0,0104853]$$

$$p_{4j}=[0 \quad 0 \quad 0,9881147 \quad 0,0013853 \quad 0,0105]$$

$$p_{5j}=[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

Το αντίστοιχο γράφημα που παρουσιάζει τις πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος, είναι το ακόλουθο:



Διάγραμμα 105-Πιθανότητα μετάβασης ενός βήματος μοντέλου FV

3.5.2 Υπολογισμός πιθανότητας μετάβασης n βημάτων για το μοντέλο FV

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι πίνακες μετάβασης n -οστού βήματος, για $n = 5, 10, 15$ βήματα αντίστοιχα, οι οποίοι προκύπτουν από τη σχέση (8).

Ο πίνακας P^5 δηλώνει τις πιθανότητες μετάβασης των καταστάσεων μετά από 5 χρονικά βήματα:

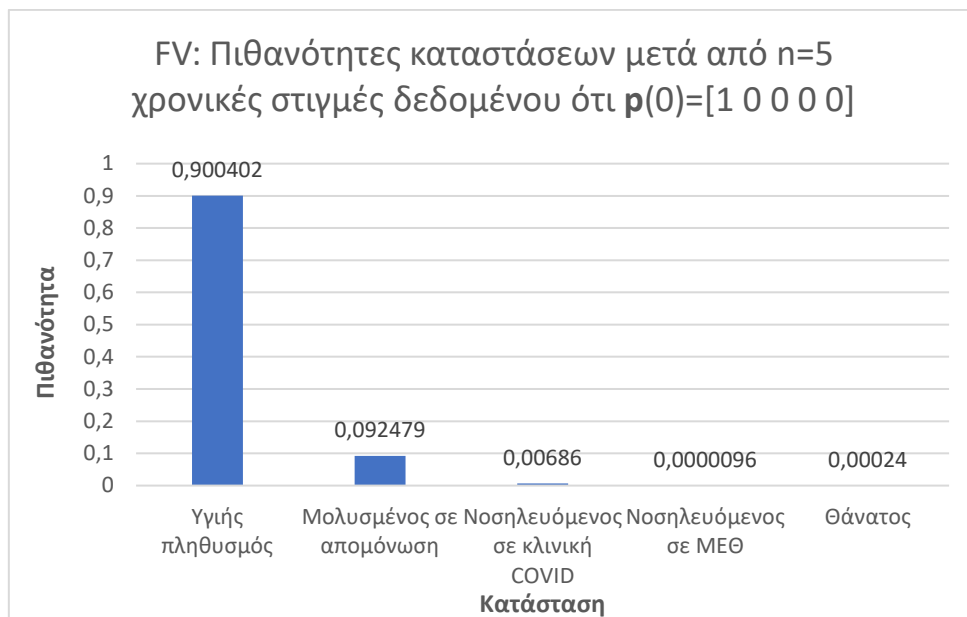
	1	2	3	4	5
1	0,900402	0,092479	0,006860	0,0000096	0,00024
2	0,899949	0,092509	0,006895	0,0000097	0,00063
3	0,889232	0,092384	0,006889	0,0000110	0,01148
4	0,878095	0,092313	0,007783	0,0000124	0,02179
5	0	0	0	0	1

Πίνακας 19-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων $n=5$ βημάτων μοντέλου FV

Πιο συγκεκριμένα, μέσω της σχέσης (9), παρουσιάζονται οι πιθανότητες κάθε κατάστασης μετά από 5 χρονικές στιγμές, καθώς και το αντίστοιχο γράφημα κατανομής πιθανότητας κάθε κατάστασης, υπό την προϋπόθεση ότι η αρχική κατάσταση της διαδικασίας είναι η:

- κατάσταση «Υγιής πληθυσμός»:

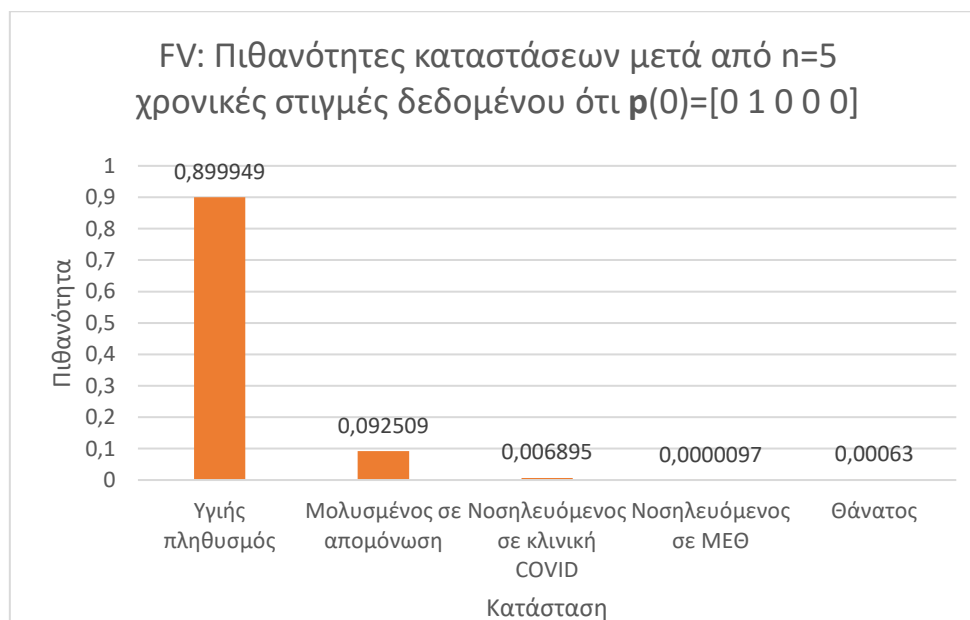
$$p(5)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot P^5=[0,900402 \ 0,092479 \ 0,00686 \ 0,0000096 \ 0,00024]$$



Διάγραμμα 106-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV

- κατάσταση «Μολυσμένος σε απομόνωση»:

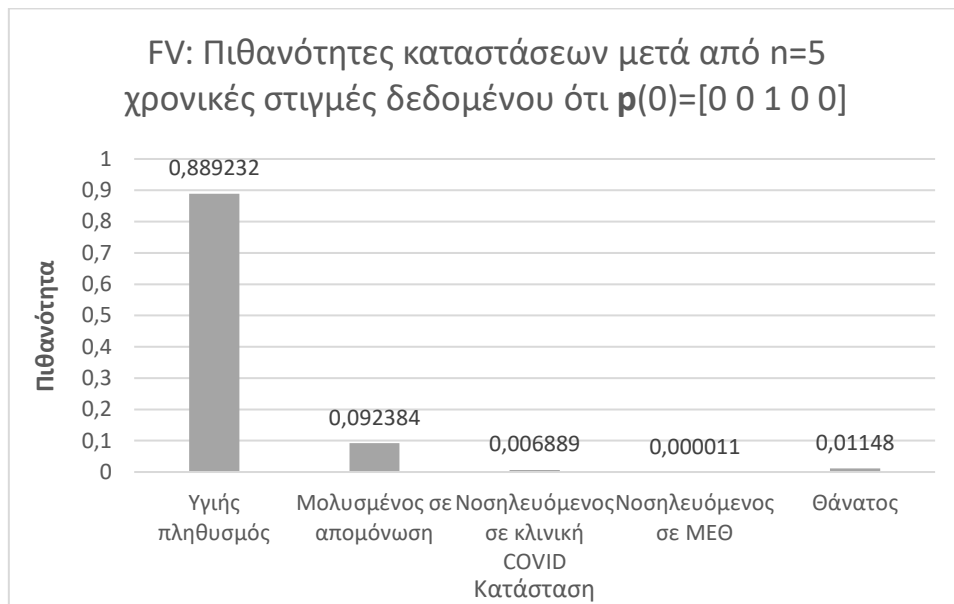
$$p(5)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0] \cdot P^5 = [0,899949\ 0,092509\ 0,006895\ 0,0000097\ 0,00063]$$



Διάγραμμα 107-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV

- κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19»:

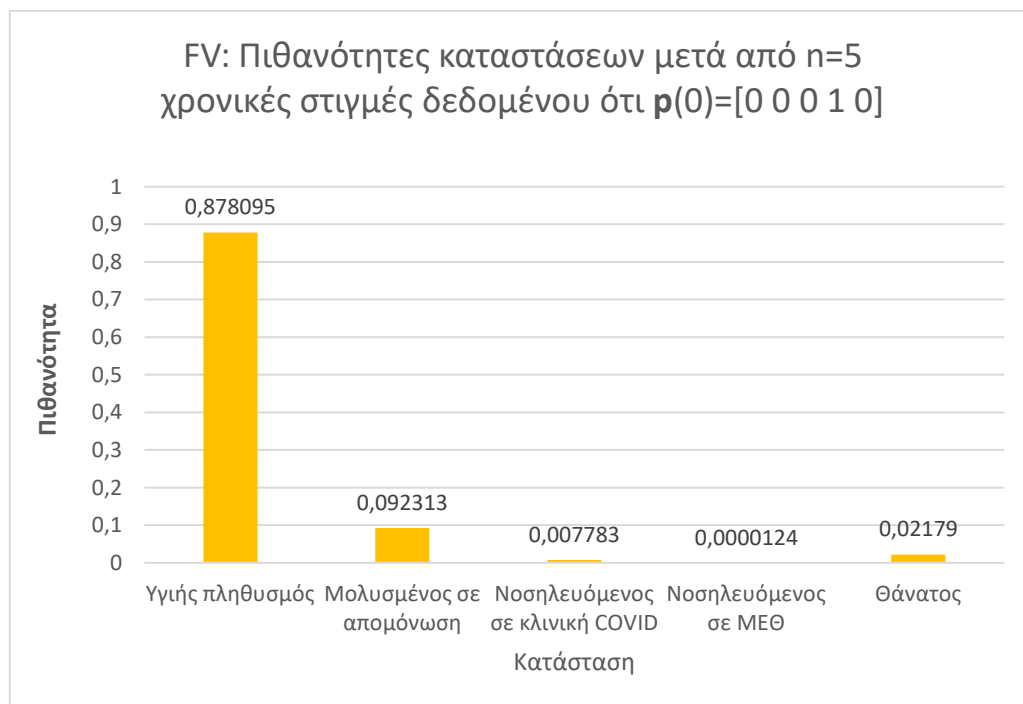
$$p(5)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \cdot P^5 = [0,889232 \ 0,092384 \ 0,006889 \ 0,000011 \ 0,01148]$$



Διάγραμμα 108-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου FV

- κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ»:

$$p(5)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot P^5 = [0,878095 \ 0,092313 \ 0,007783 \ 0,0000124 \ 0,02179]$$

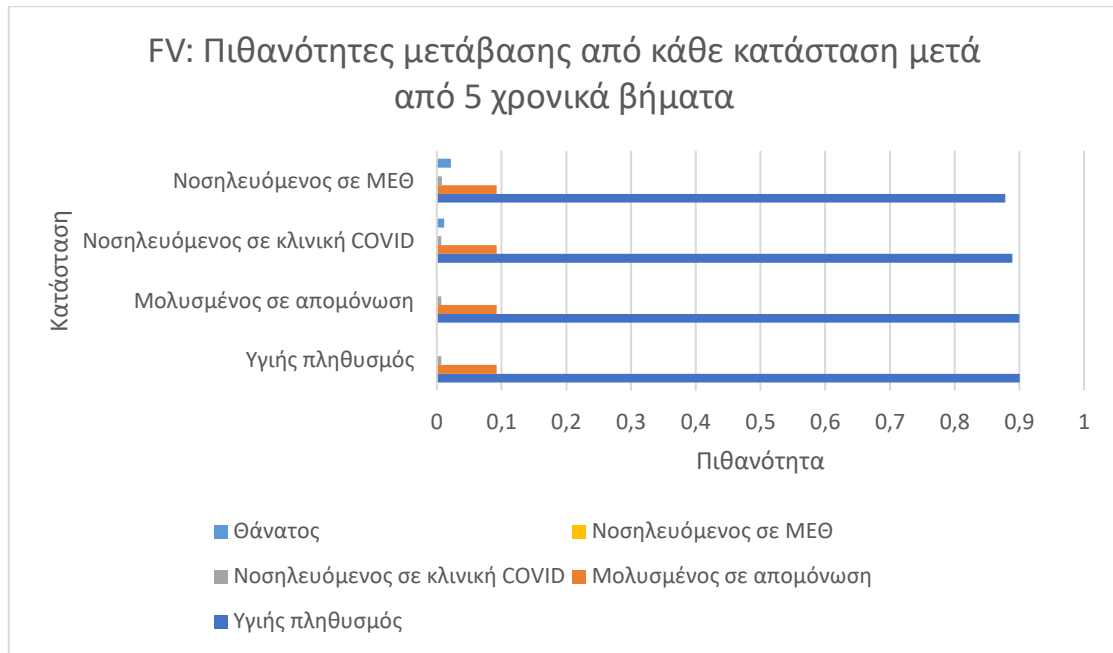


Διάγραμμα 109-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλου FV

- κατάσταση «Θάνατος»:

$$p(5)=[0\ 0\ 0\ 0\ 1] \cdot P^5 = [0\ 0\ 0\ 0\ 1]$$

Οι πιθανότητες μετάβασης του πίνακα P^5 παρουσιάζονται διαγραμματικά στο ακόλουθο γράφημα:



Διάγραμμα 110-Πιθανότητες μετάβασης μετά από n=5 βήματα μοντέλου FV

Ο πίνακας P^{10} αναφέρεται στις πιθανότητες μετάβασης $10^{ου}$ βήματος:

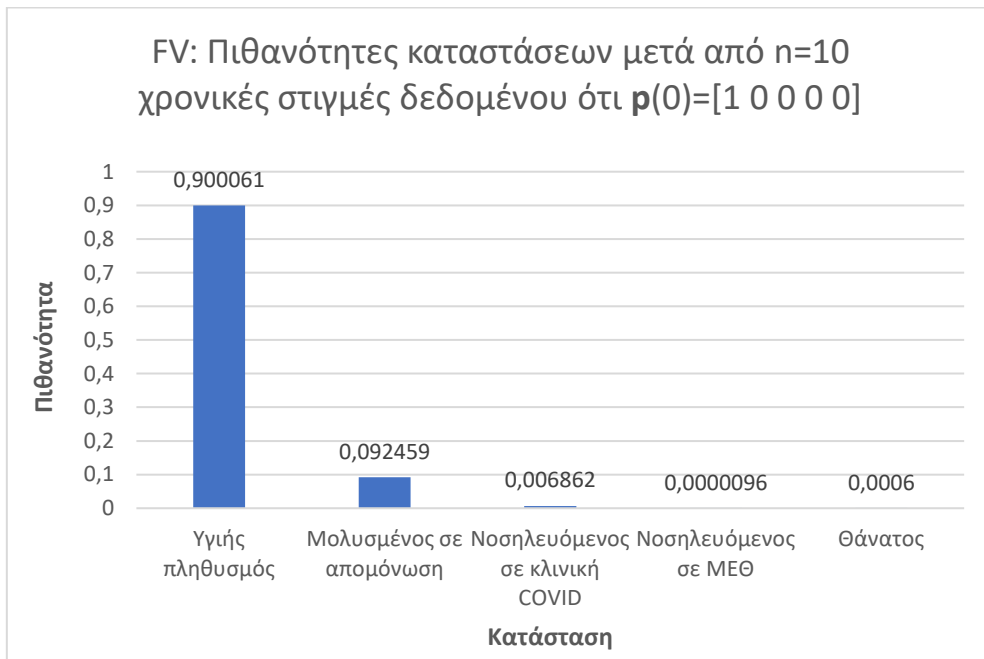
	1	2	3	4	5
1	0,900061	0,092459	0,006862	0,0000096	0,00060
2	0,899711	0,092423	0,006859	0,0000096	0,00099
3	0,889944	0,091420	0,006784	0,0000095	0,01184
4	0,880649	0,090466	0,006714	0,0000094	0,02216
5	0	0	0	0	1

Πίνακας 20-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων n=10 βημάτων μοντέλου FV

Μέσω της σχέσης (9), για κάθε κατάσταση ξεχωριστά, ισχύουν οι πιθανότητες να βρεθεί κάποιος στην κατάσταση $j \in \{1,2,3,4,5\}$ μετά από 10 χρονικά βήματα όπως και το διάγραμμα κατανομής πιθανότητας, δεδομένου ότι έχει ξεκινήσει από την:

- κατάσταση «Υγιής Πληθυσμός»:

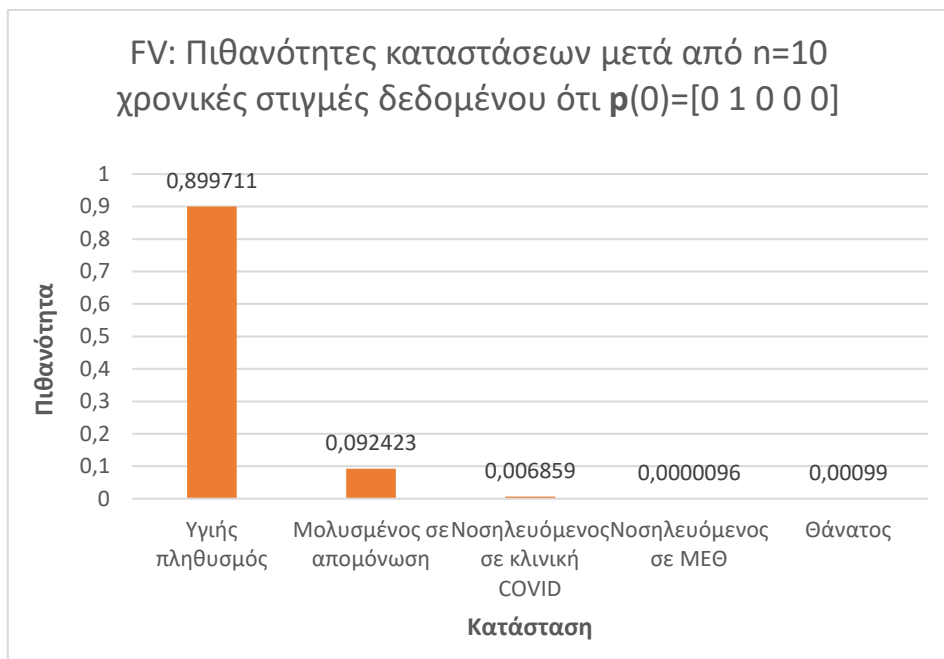
$$p(10)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot P^{10} = [0,900061 \ 0,092459 \ 0,006862 \ 0,0000096 \ 0,0006]$$



Διάγραμμα 111-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου FV

- κατάσταση «Μολυσμένος σε απομόνωση»:

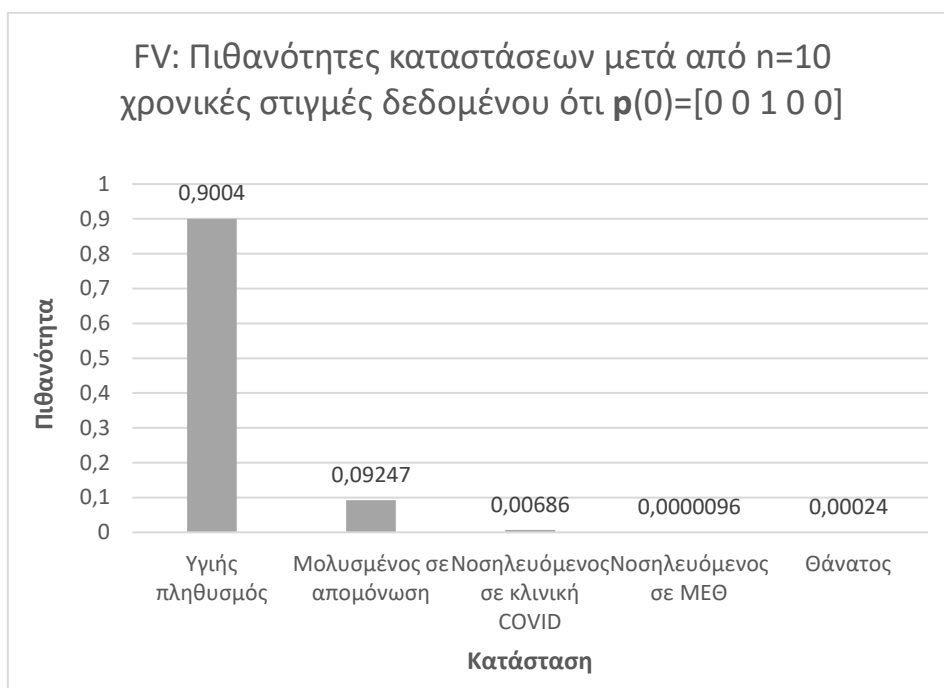
$$p(10)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot P^{10} = [0,899711 \ 0,092423 \ 0,006859 \ 0,0000096 \ 0,00099]$$



Διάγραμμα 112-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου FV

- κατάσταση «Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19»:

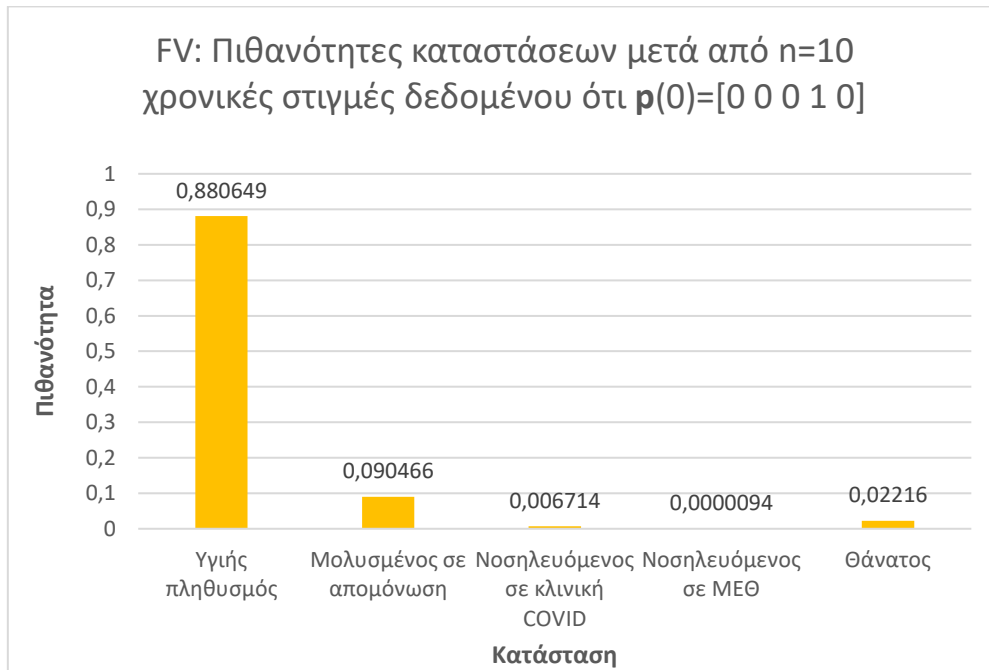
$$p(10)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \cdot P^{10} = [0,889944 \ 0,09142 \ 0,006784 \ 0,0000095 \ 0,01184]$$



Διάγραμμα 113-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου FV

- κατάσταση «Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ»:

$$p(10)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot P^{10}=[0,880649 \ 0,090466 \ 0,006714 \ 0,0000094 \ 0,02216]$$

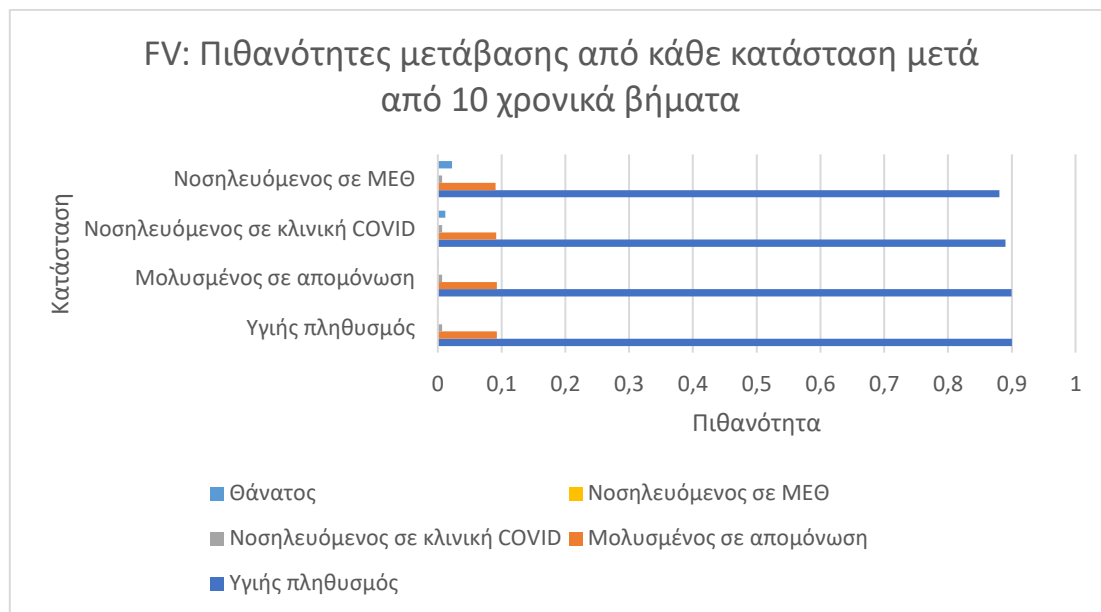


Διάγραμμα 114-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλου FV

- κατάσταση «Θάνατος»:

$$p(10)=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot P^{10}=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Το ακόλουθο γράφημα παρουσιάζει τη μετάβαση της διαδικασίας από μία κατάσταση $i = 1,2,3,4$ σε μία κατάσταση $j = 1,2,3,4,5$ σε $n = 10$ χρονικά βήματα:



Διάγραμμα 115-Πιθανότητες μετάβασης μετά από n=10 βήματα μοντέλου FV

Οι πιθανότητες μετάβασης 15^{ου} βήματος, αναγράφονται στον πίνακα P^{15} .

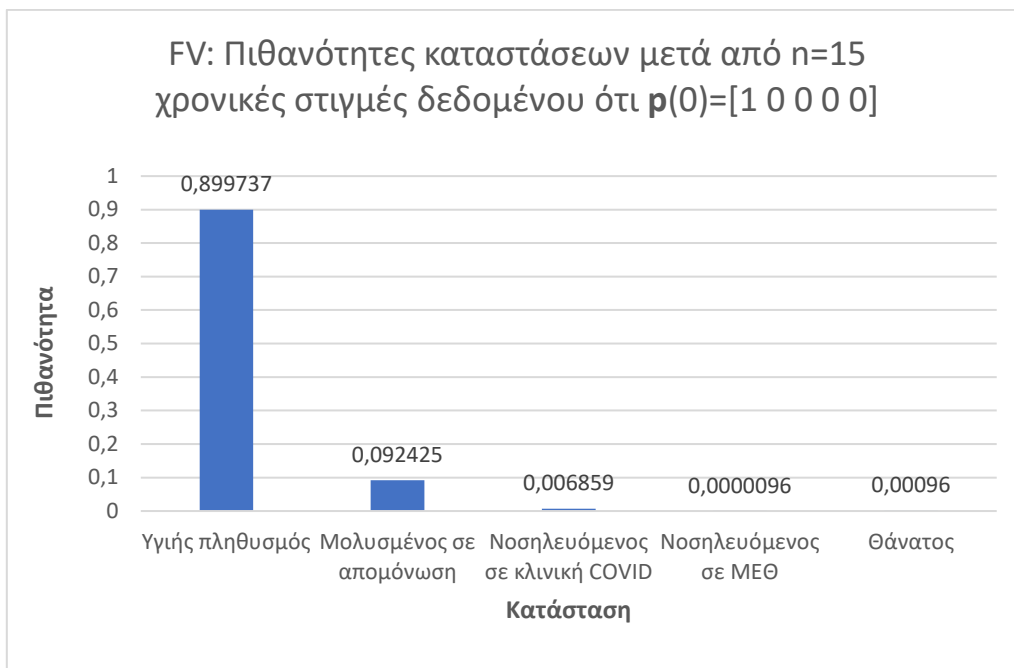
	1	2	3	4	5
1	0,899737	0,092425	0,006859	0,0000096	0,00096
2	0,899387	0,092389	0,006856	0,0000096	0,00135
3	0,889624	0,091387	0,006782	0,0000095	0,01219
4	0,880333	0,090432	0,006711	0,0000094	0,02251
5	0	0	0	0	1

Πίνακας 21-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων n=15 βημάτων μοντέλου FV

Αναλυτικότερα, μέσω της σχέσης (9), παρουσιάζονται οι πιθανότητες κατάστασης 15^{ου} βήματος στην κατάσταση $j \in \{1,2,3,4,5\}$ όπως επίσης και το αντίστοιχο διάγραμμα κατανομής πιθανότητας, υπό την προϋπόθεση ότι η αρχική κατάσταση είναι:

- η κατάσταση 1:

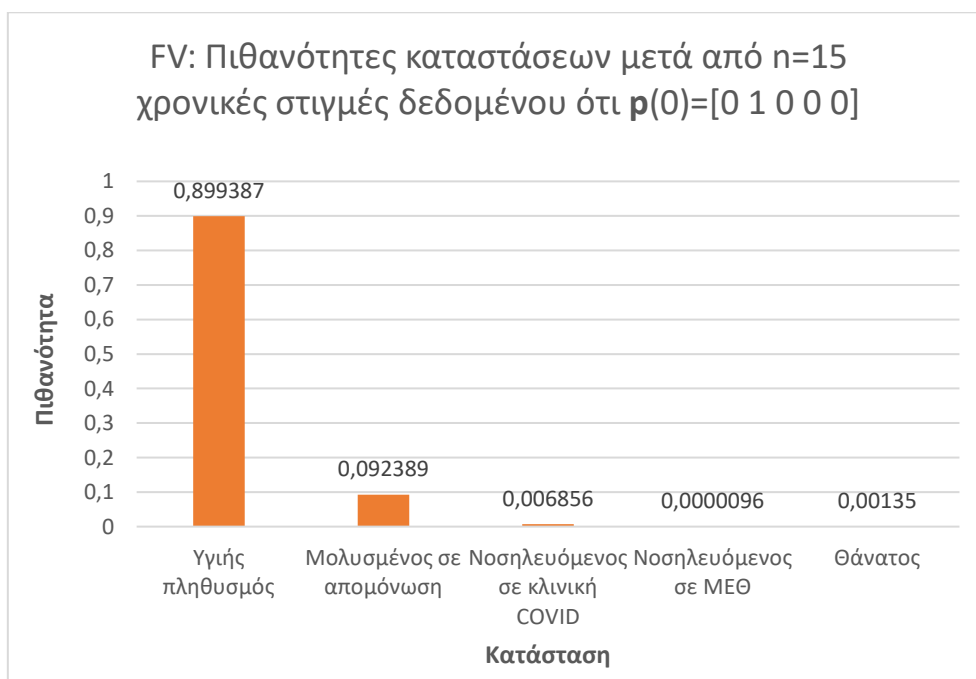
$$p(15)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot P^{15}=[0,899737 \ 0,092425 \ 0,006859 \ 0,0000096 \ 0,00096]$$



Διάγραμμα 116-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV

- η κατάσταση 2:

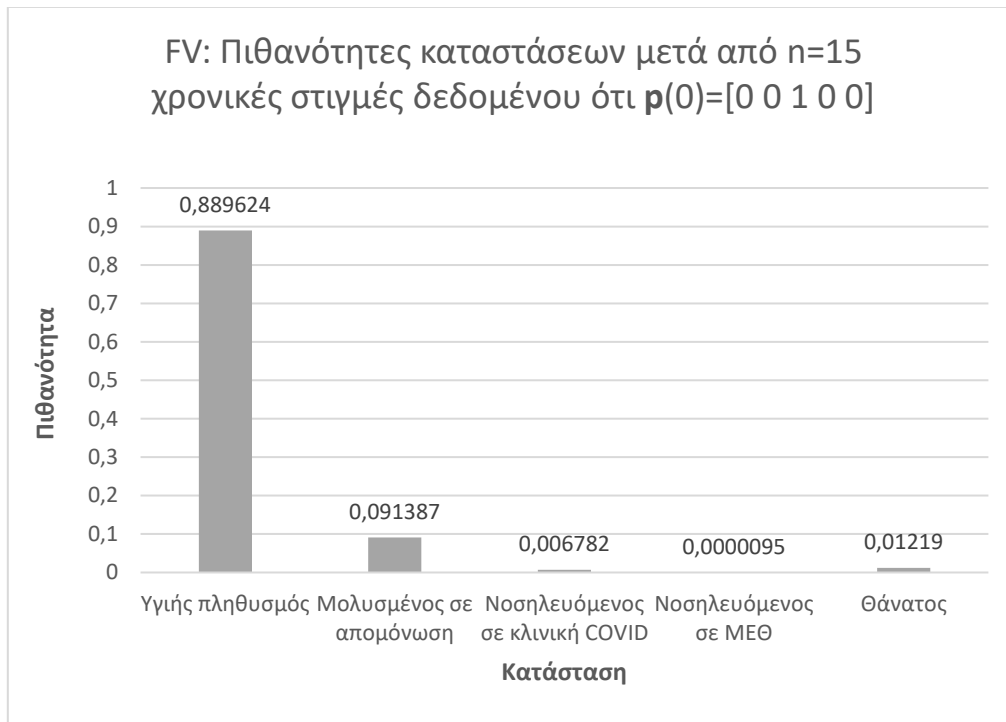
$$p(15)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0] \cdot P^{15} = [0,899387\ 0,092389\ 0,006856\ 0,0000096\ 0,00135]$$



Διάγραμμα 117-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV

- η κατάσταση 3:

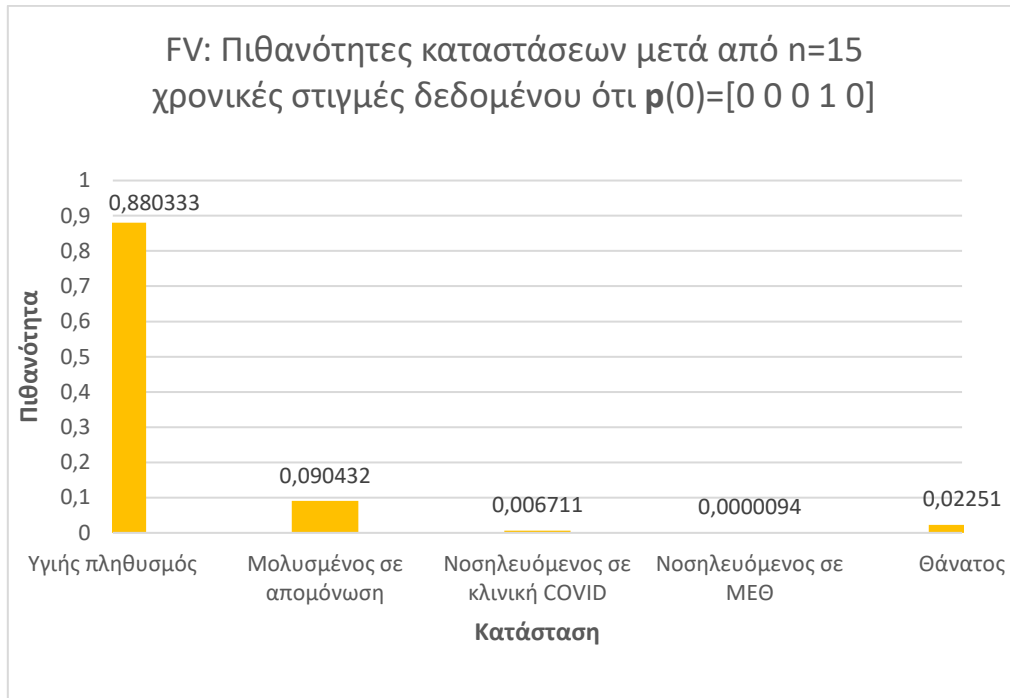
$$\mathbf{p}(15)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \cdot \mathbf{P}^{15} = [0,889624 \quad 0,091387 \quad 0,006782 \quad 0,0000095 \quad 0,01219]$$



Διάγραμμα 118-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $\mathbf{p}(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου FV

- η κατάσταση 4:

$$\mathbf{p}(15)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot \mathbf{P}^{15} = [0,880333 \quad 0,090432 \quad 0,006711 \quad 0,0000094 \quad 0,02251]$$

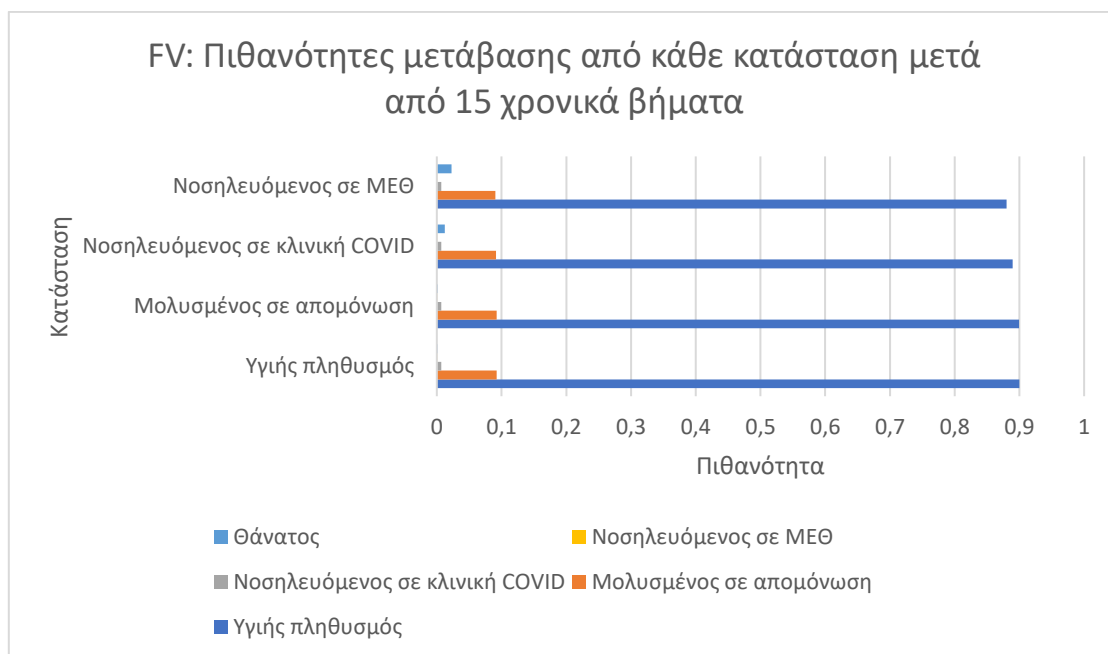


Διάγραμμα 119-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου FV

- Τέλος, η κατάσταση 5:

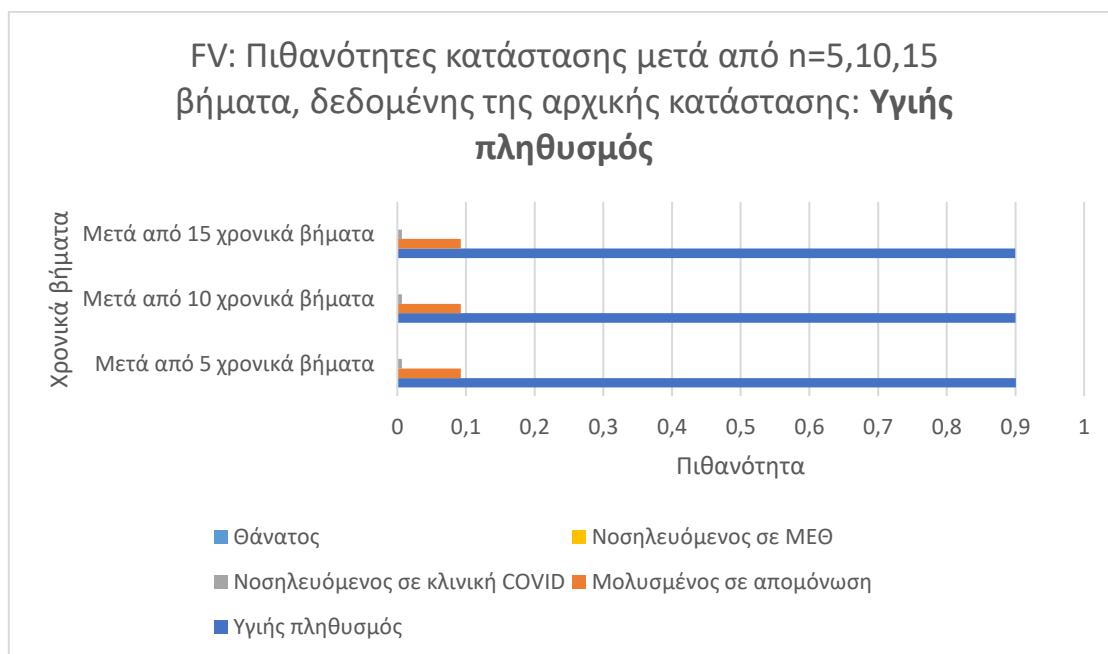
$$p(15)=[0\ 0\ 0\ 0\ 1] \cdot P^{15}=[0\ 0\ 0\ 0\ 1]$$

Το γράφημα που ακολουθεί, απεικονίζει τις πιθανότητες μετάβασης της διαδικασίας από την κατάσταση i στην κατάσταση j μετά την πάροδο $n = 15$ χρονικών βημάτων, για $i = 1,2,3,4$ και $j = 1,2,3,4,5$:

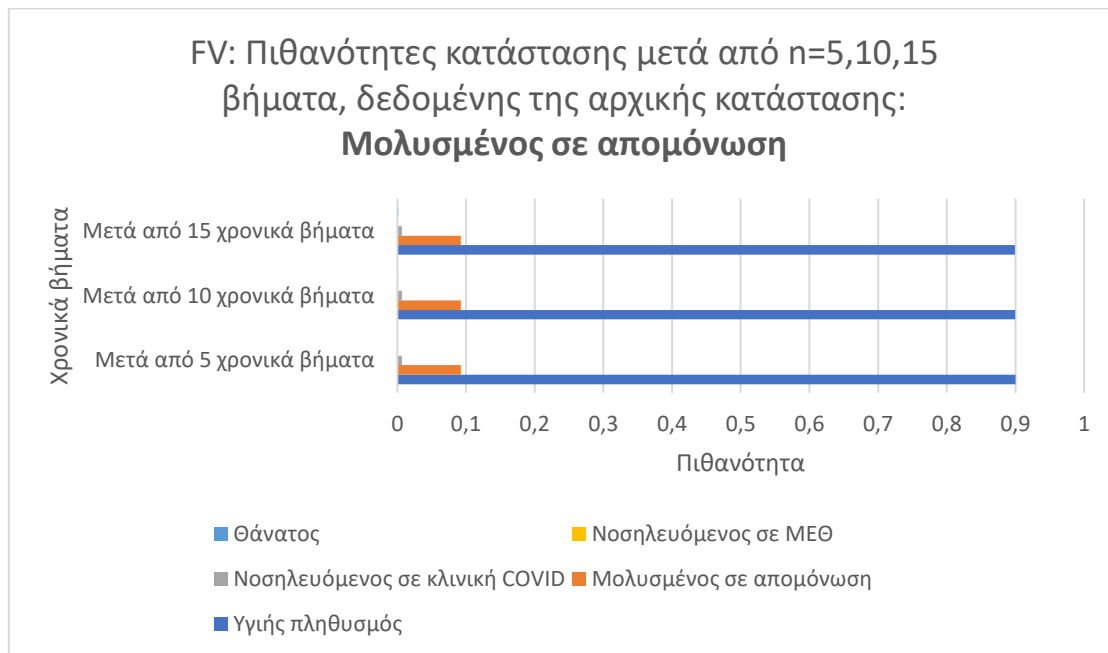


Διάγραμμα 120-Πιθανότητες μετάβασης μετά από n=15 βήματα μοντέλου FV

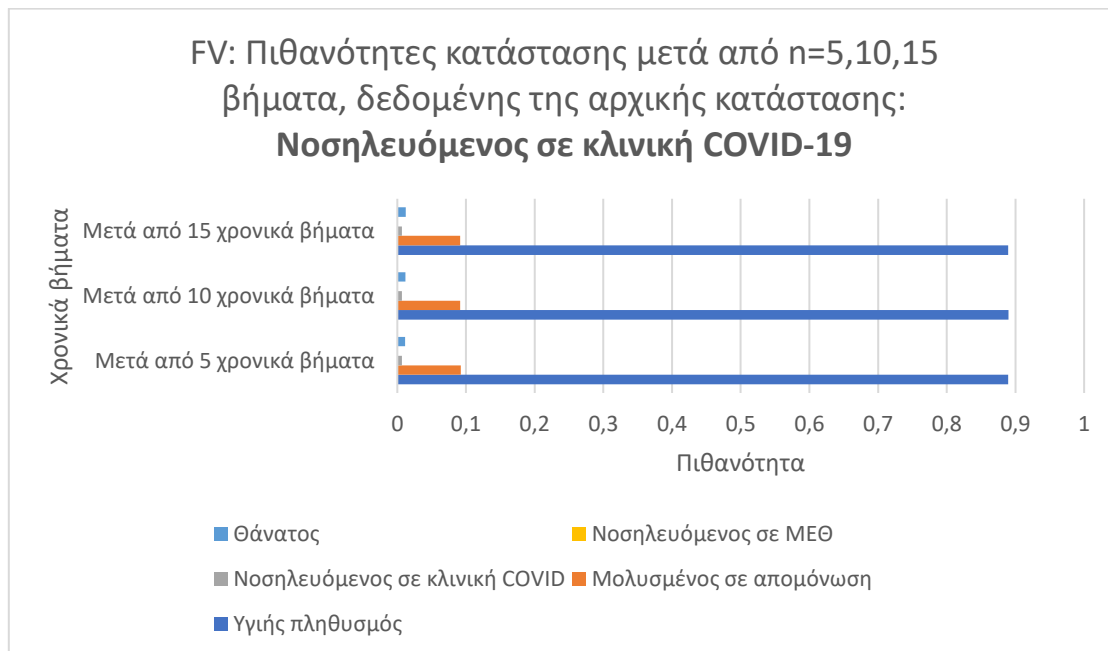
Στα **διαγράμματα 121, 122, 123 και 124** φαίνεται η πιθανότητα να βρεθεί κάποιος στην κατάσταση $j \in \{1,2,3,4,5\}$, δεδομένου ότι έχει ξεκινήσει από την κατάσταση $i \in \{1,2,3,4\}$, σε 5, 10 και 15 χρονικά βήματα:



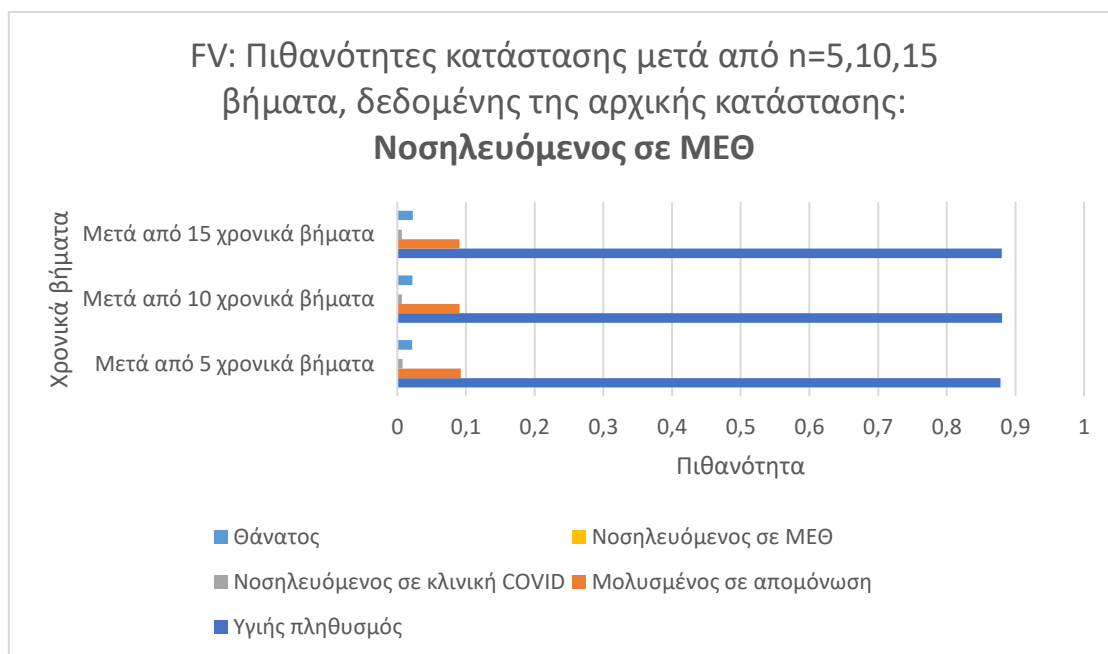
Διάγραμμα 121-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου FV



Διάγραμμα 122-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου FV

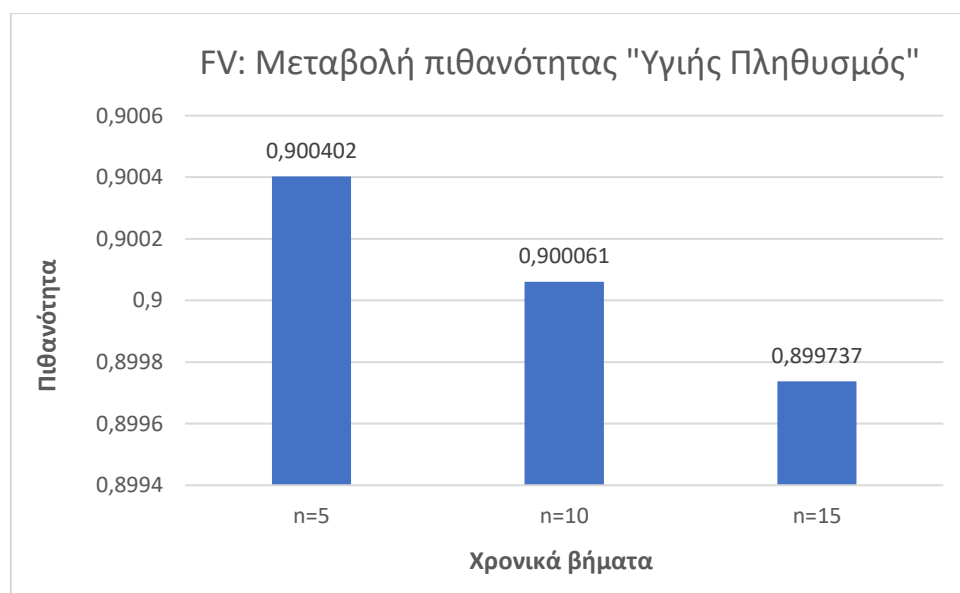


Διάγραμμα 123-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου FV

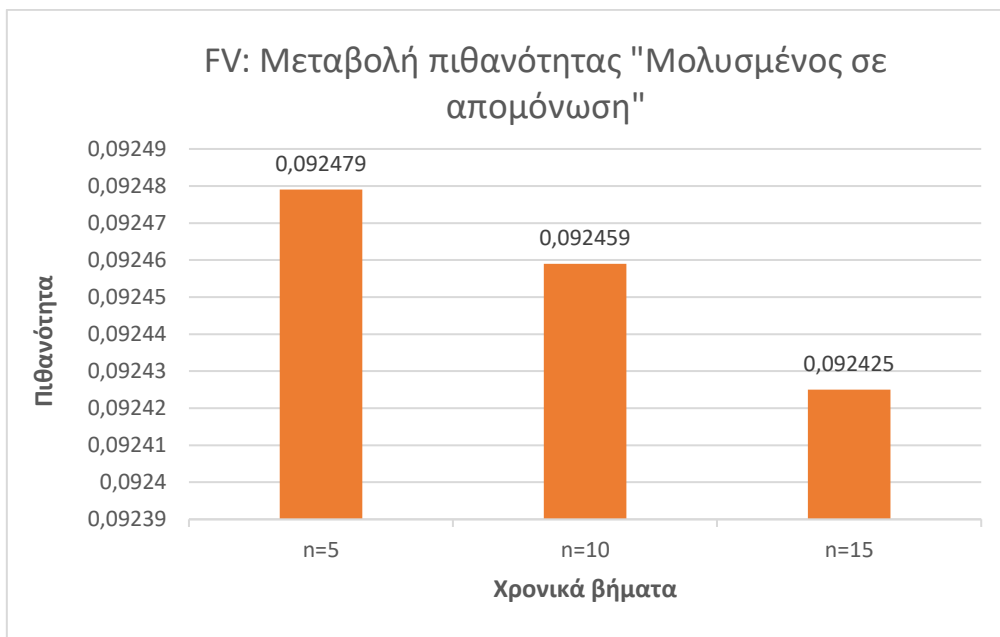


Διάγραμμα 124-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου FV

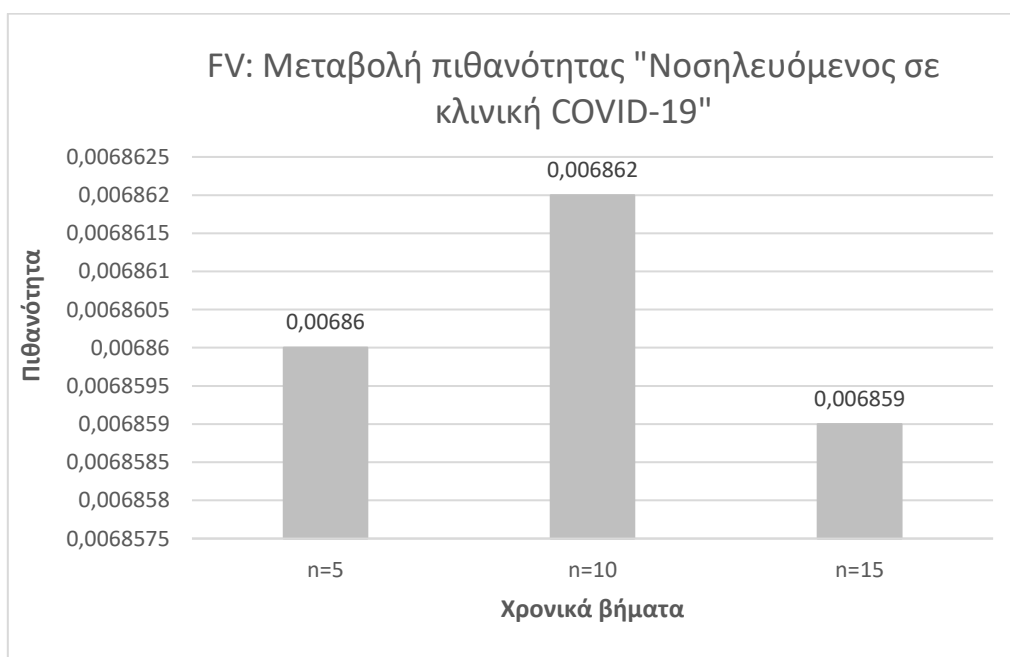
Στα **διαγράμματα 125, 126, 127, 128 και 129** απεικονίζεται η μεταβολή της πιθανότητας κάθε κατάστασης μεμονωμένα μετά από $n = 5,10,15$ χρονικές στιγμές, δεδομένου ότι αρχικά βρισκόμαστε στην κατάσταση «Υγιής Πληθυσμός»:



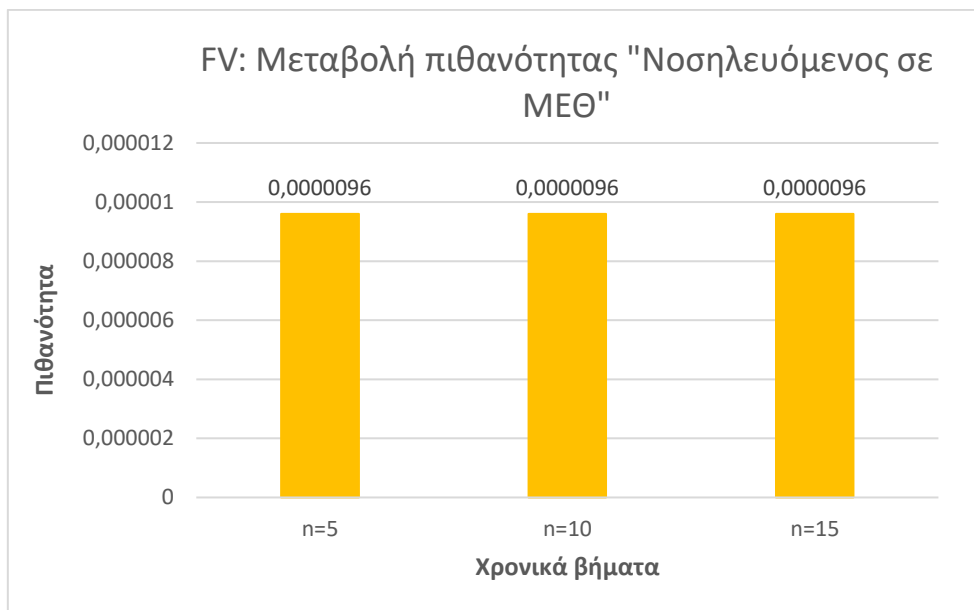
Διάγραμμα 125-Μεταβολή πιθανότητας "Υγιής πληθυσμός" δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV



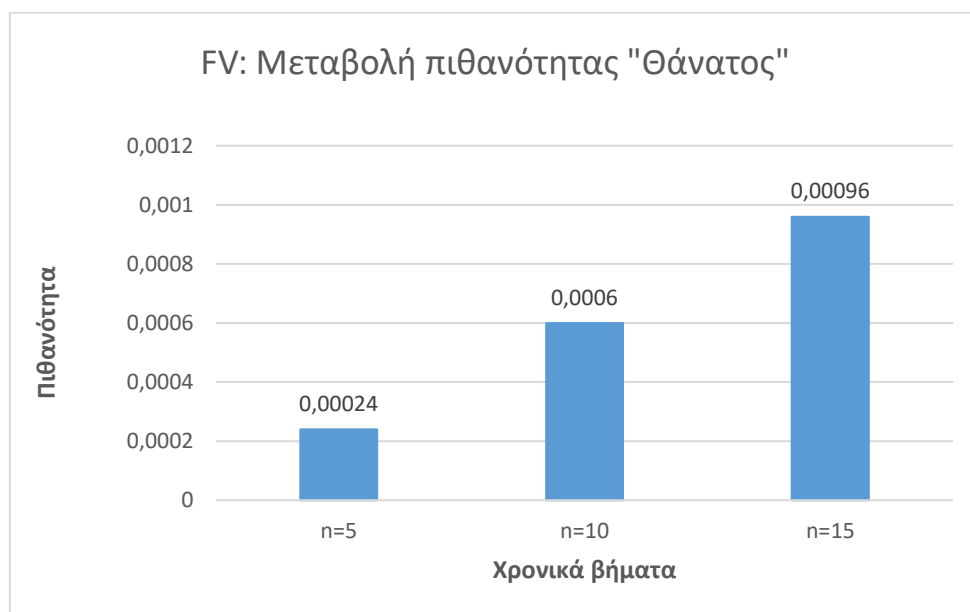
Διάγραμμα 126-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV



Διάγραμμα 127-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV

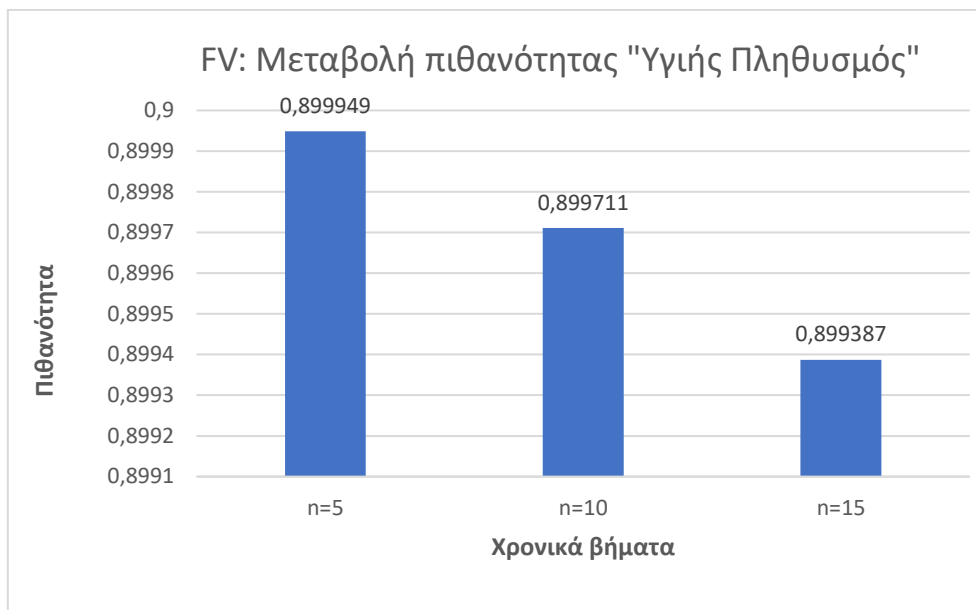


Διάγραμμα 128-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV

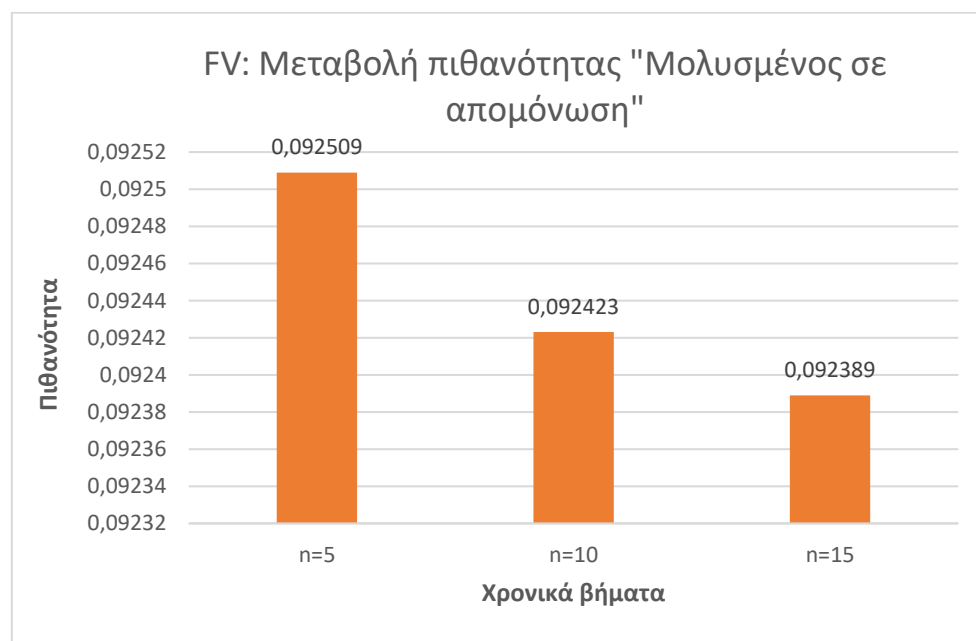


Διάγραμμα 129-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου FV

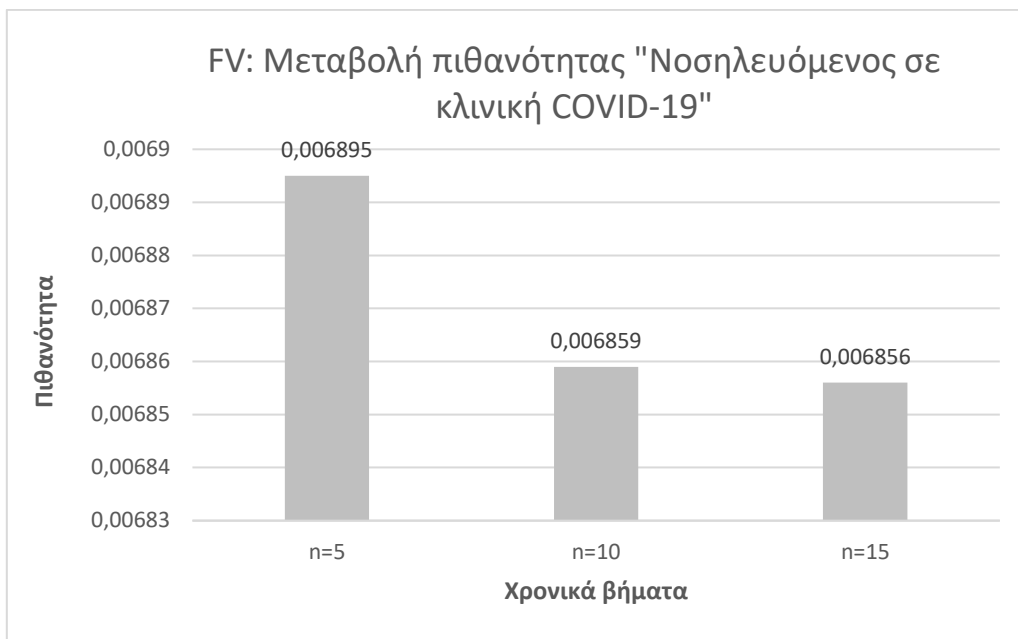
Έστω ότι αρχικά βρισκόμαστε στην κατάσταση «Μολυσμένος σε απομόνωση». Στα παρακάτω διαγράμματα (διάγραμμα 130-134) απεικονίζεται η μεταβολή πιθανότητας κάθε κατάστασης μετά από $n = 5, 10, 15$ χρονικές στιγμές:



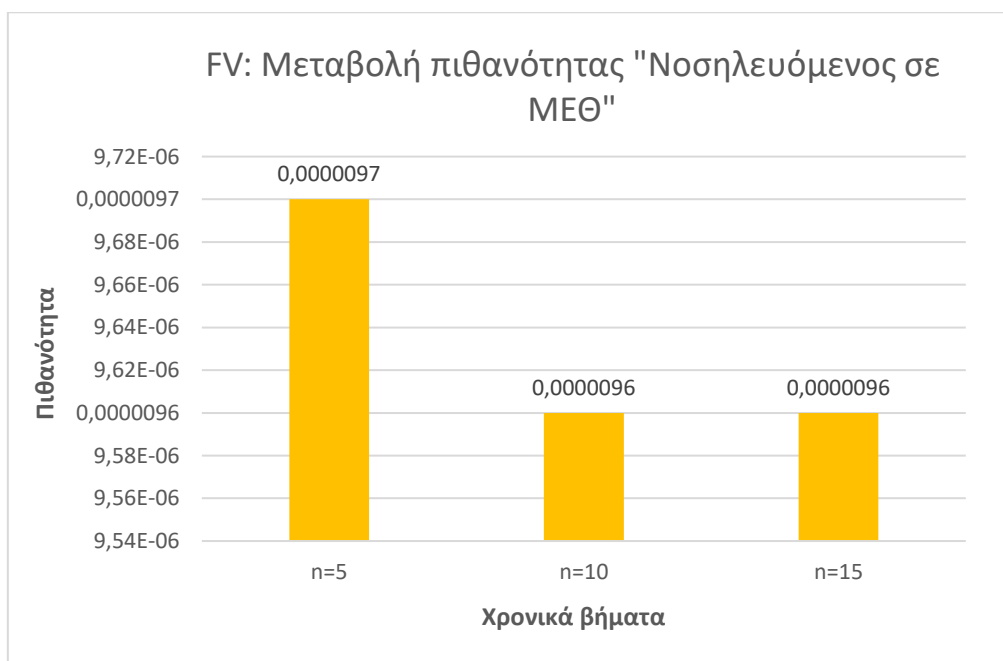
Διάγραμμα 130-Μεταβολή πιθανότητας “Υγιής πληθυσμός” δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου FV



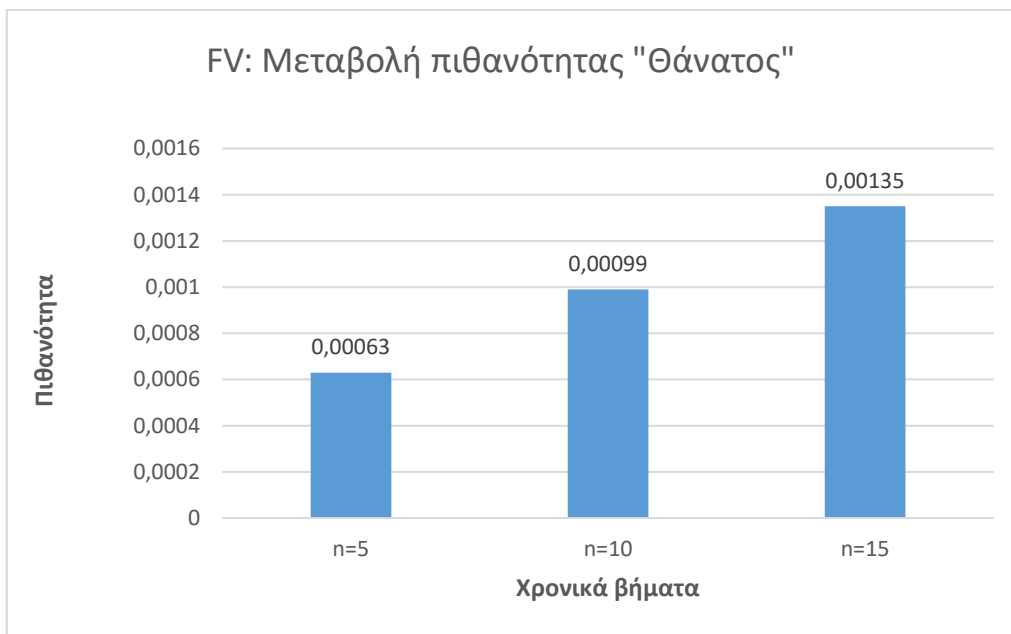
Διάγραμμα 131-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου FV



Διάγραμμα 132-Μεταβολή πιθανότητας "Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου FV

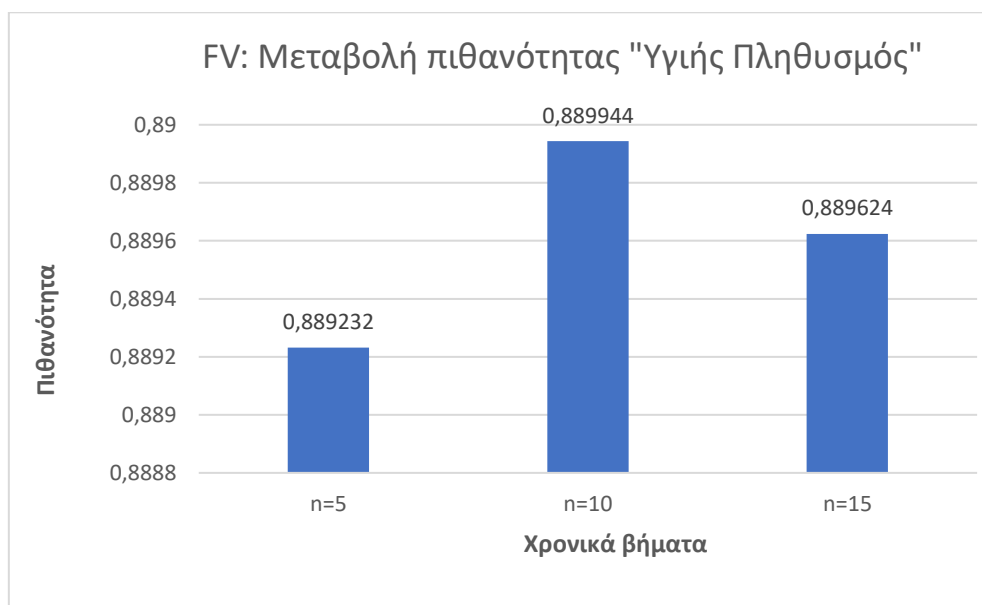


Διάγραμμα 133-Μεταβολή πιθανότητας "Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου FV

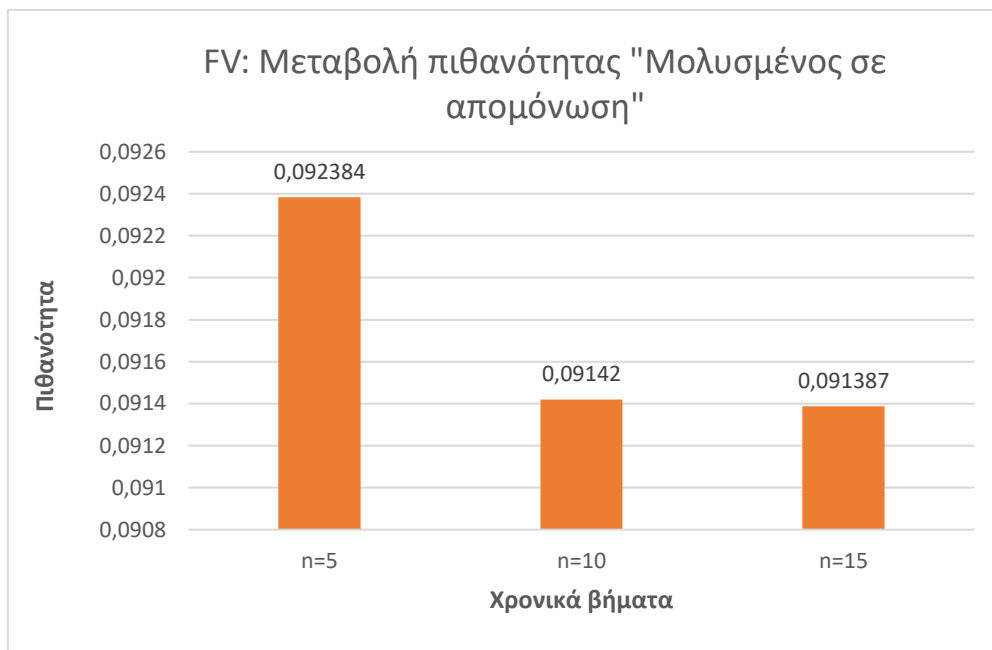


Διάγραμμα 134-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου FV

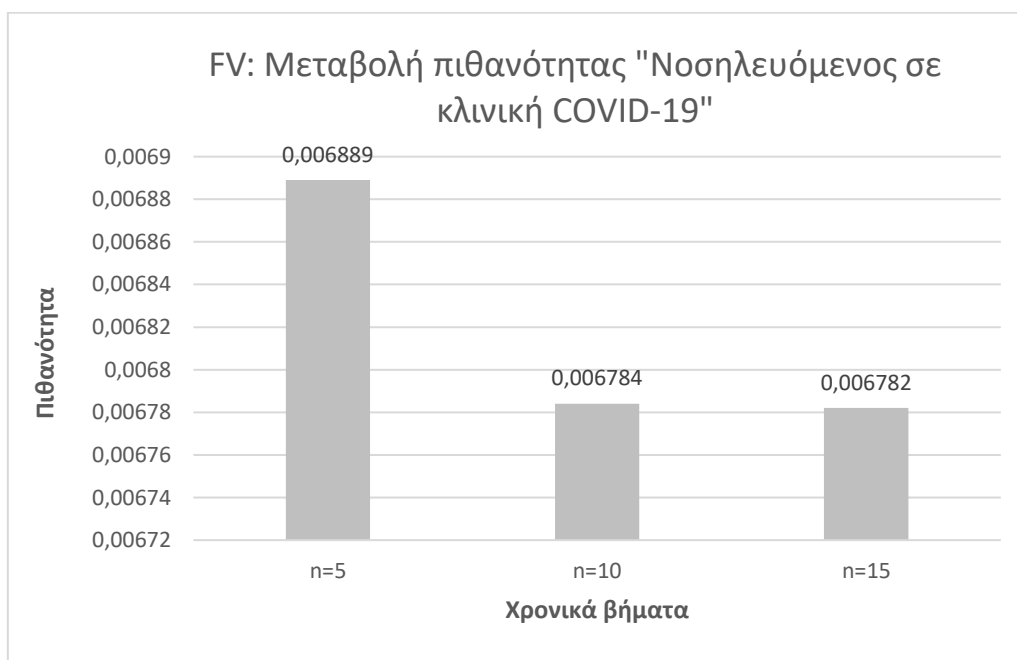
Στη συνέχεια, στα **διαγράμματα 135, 136, 137, 138 και 139** φαίνεται η μεταβολή της πιθανότητας κάθε κατάστασης μετά από $n = 5, 10, 15$ χρονικά βήματα, δεδομένου ότι αρχικά η διαδικασία ξεκινάει από την κατάσταση «**Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19**»:



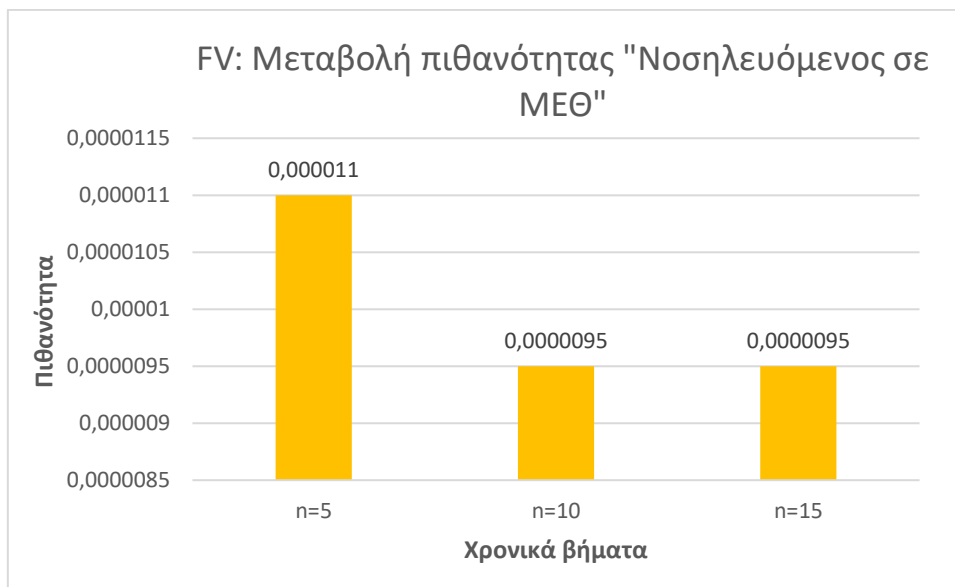
Διάγραμμα 135-Μεταβολή πιθανότητας “Υγιής πληθυσμός” δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου FV



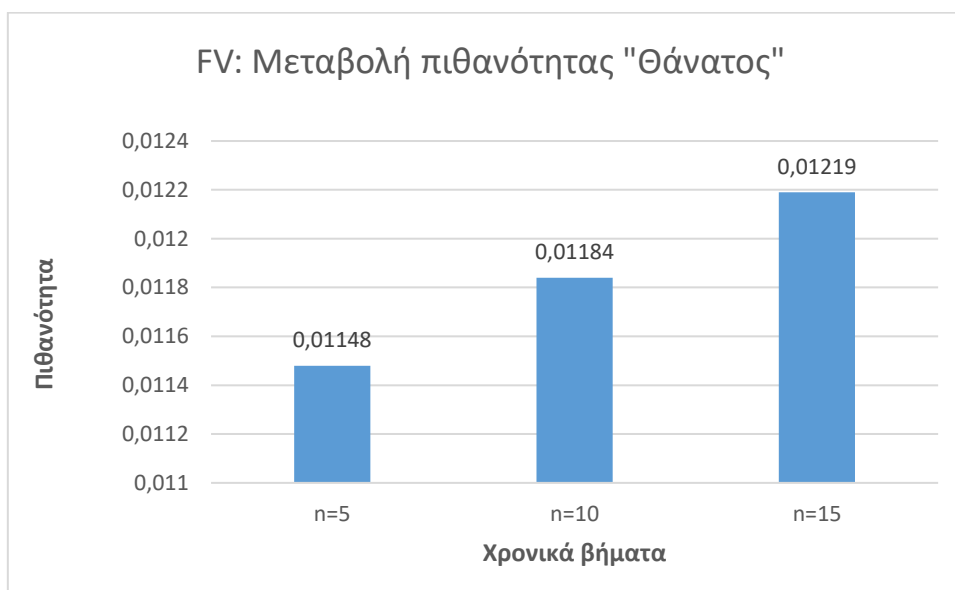
Διάγραμμα 136-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου FV



Διάγραμμα 137-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου FV

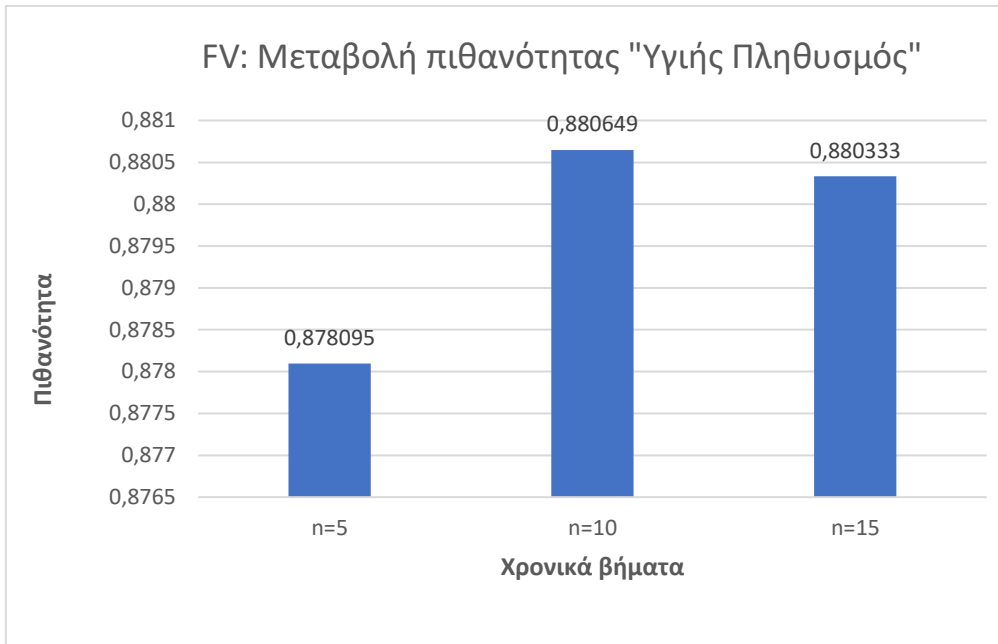


Διάγραμμα 138-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου FV

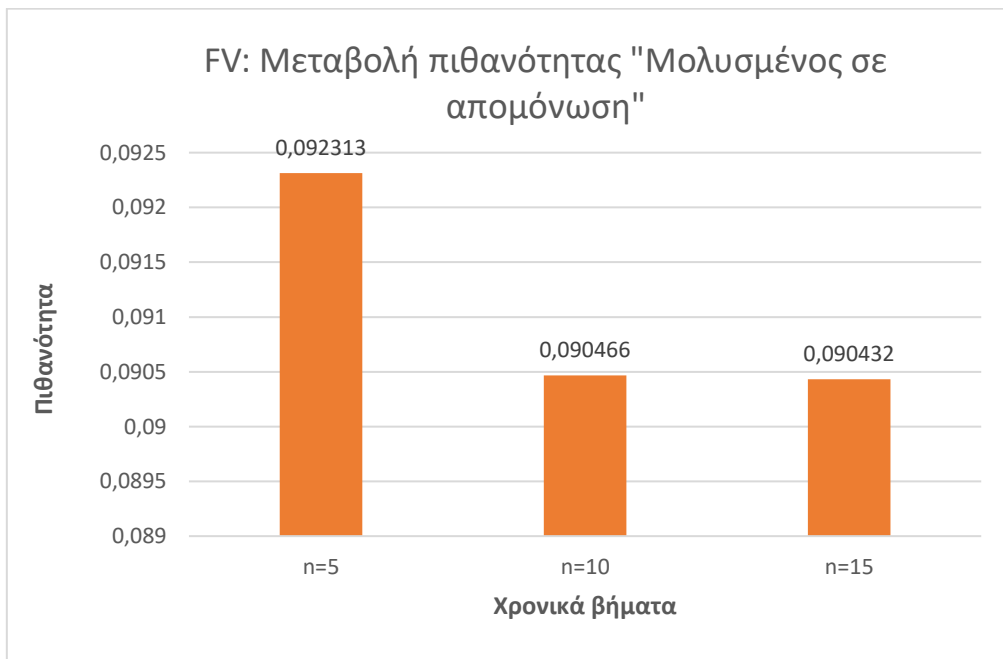


Διάγραμμα 139-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου FV

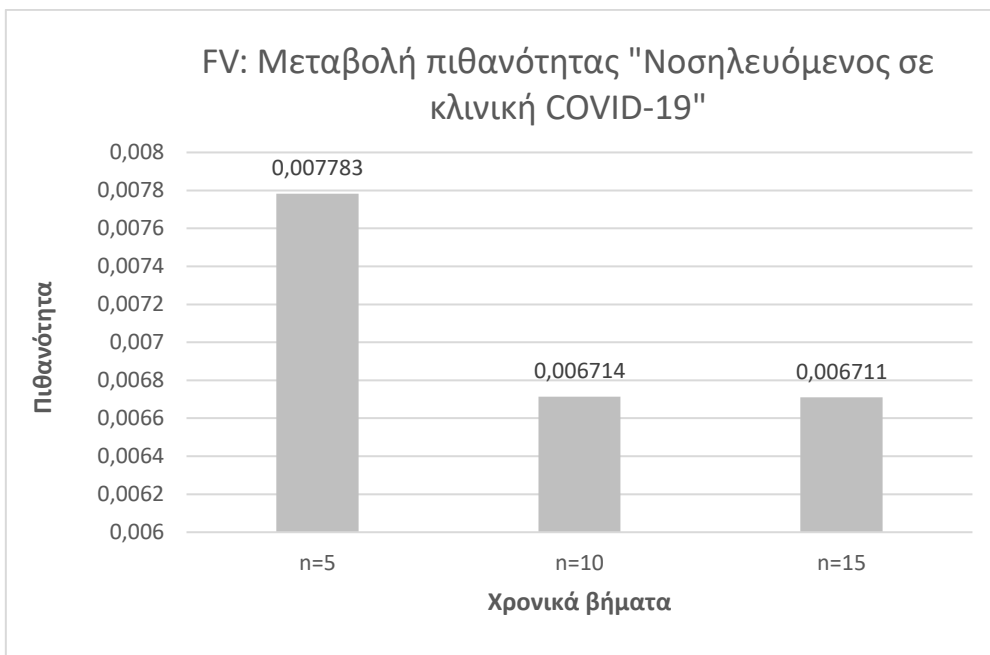
Τέλος, δεδομένου ότι αρχικά βρισκόμαστε στην κατάσταση «**Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ**», στα **διαγράμματα 140, 141, 142, 143 και 144** απεικονίζεται η μεταβολή της πιθανότητας κάθε κατάστασης μετά από $n = 5, 10, 15$ χρονικές στιγμές:



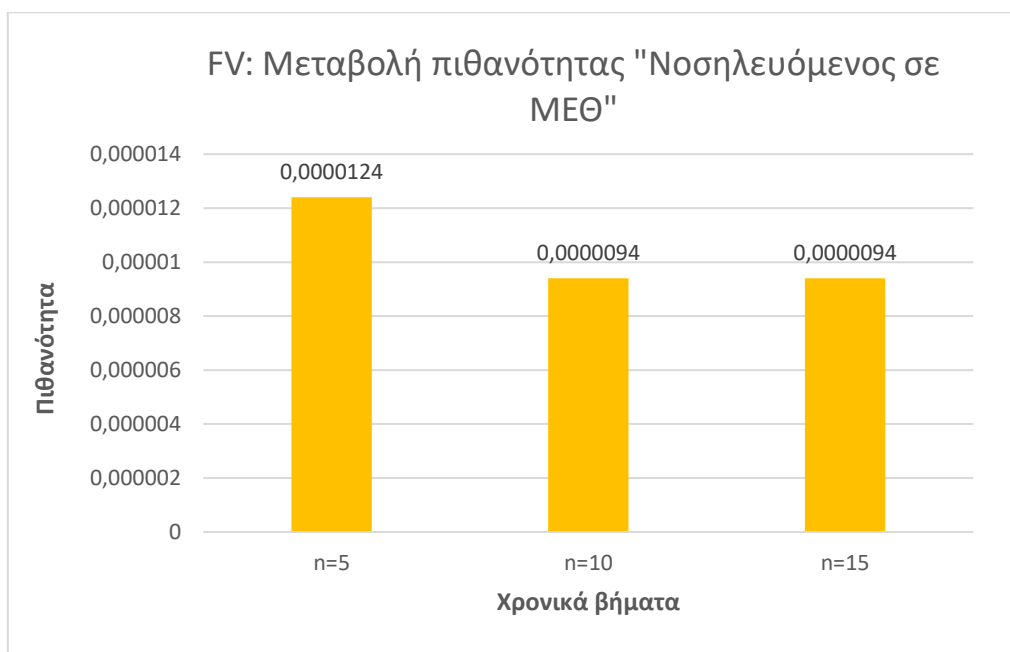
Διάγραμμα 140-Μεταβολή πιθανότητας "Υγιής πληθυσμός" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλου FV



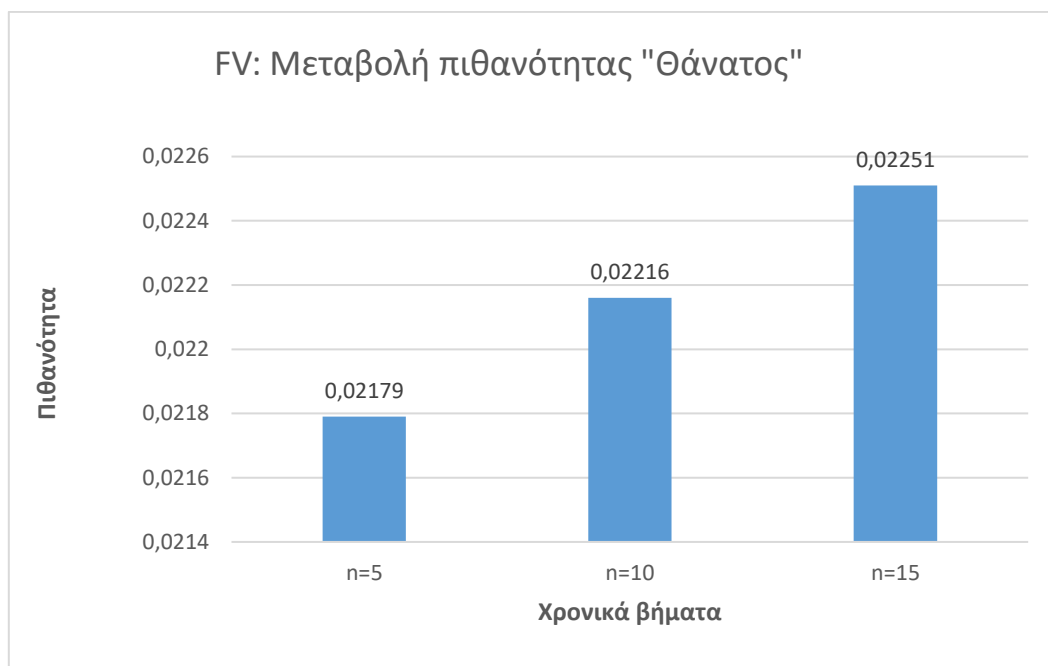
Διάγραμμα 141-Μεταβολή πιθανότητας "Μολυσμένος σε απομόνωση" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλου FV



Διάγραμμα 142-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου FV



Διάγραμμα 143-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου FV



Διάγραμμα 144-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου FV

Στα **διαγράμματα 127, 135 και 140** διακρίνουμε μία απόκλιση από τη θεωρία, καθώς οι πιθανότητες θα έπρεπε σταδιακά να μειώνονται, ενώ στα συγκεκριμένα παρουσιάζεται αύξηση κατά το 10^ο χρονικό βήμα. Οι πιθανότητες αυτές αφορούν μεταβάσεις από και προς την κατάσταση «Υγιής πληθυσμός», επομένως αποδίδουμε τη συμπεριφορά αυτή σε πιθανή ύπαρξη λάθους των πειραματικών δεδομένων που αφορούν τη συγκεκριμένη κατάσταση.

3.5.3 Υπολογισμός πιθανότητα επιβίωσης n βημάτων για το μοντέλο FV

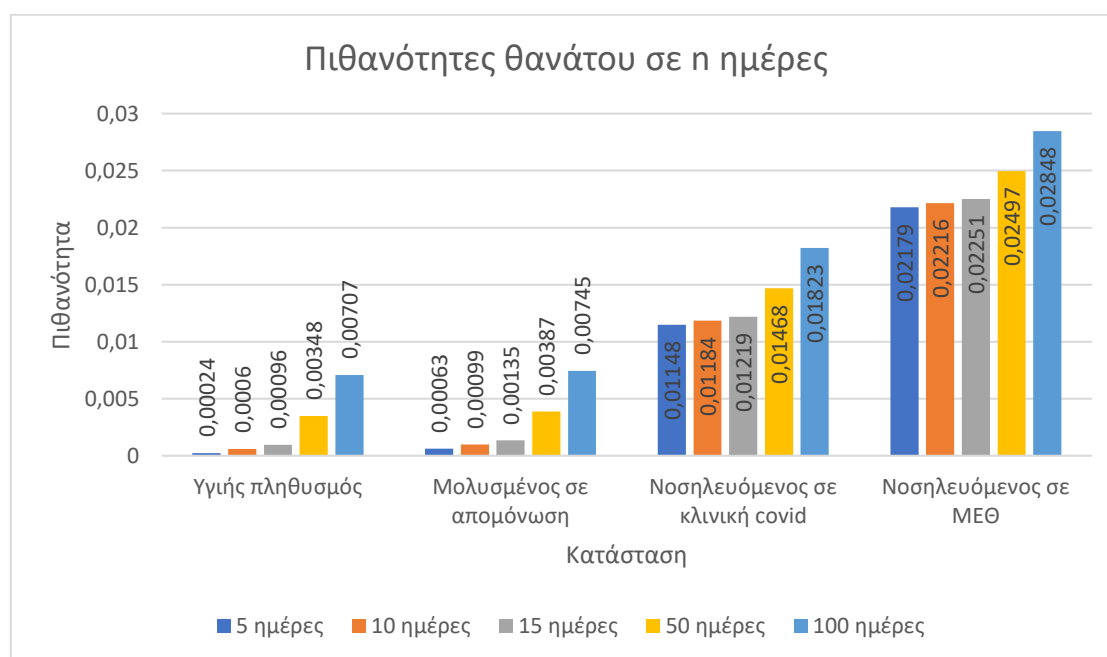
Δεδομένου ότι κάποιος βρίσκεται στην κατάσταση $i \in \{1,2,3,4\}$ ποια είναι η πιθανότητα επιβίωσης μετά από n βήματα;

Οι **πιθανότητες θανάτου** $[p(n)]_{i,5}$ μετά από $n = 5, 10, 15, 50, 100, 200, 1000$ βήματα, δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση $i = 1,2,3,4$, οι οποίες προκύπτουν από τη σχέση (9), είναι οι εξής:

	5 ημέρες	10 ημέρες	15 ημέρες	50 ημέρες	100 ημέρες	200 ημέρες	1000 ημέρες
1	0,00024	0,00060	0,00096	0,00348	0,00707	0,01420	0,06945
2	0,00063	0,00099	0,00135	0,00387	0,00745	0,01458	0,06981
3	0,01148	0,01184	0,01219	0,01468	0,01823	0,02528	0,07991
4	0,02179	0,02216	0,02251	0,02497	0,02848	0,03546	0,08952

Πίνακας 22-Πιθανότητες θανάτου από κάθε κατάσταση για n=5,10,15,100,200,1000 ημέρες μοντέλου FV

Και το αντίστοιχο γράφημα που παρουσιάζει τις πιθανότητες θανάτου n -οστού βήματος, για $n = 5,10,15,50,100$ είναι το ακόλουθο:



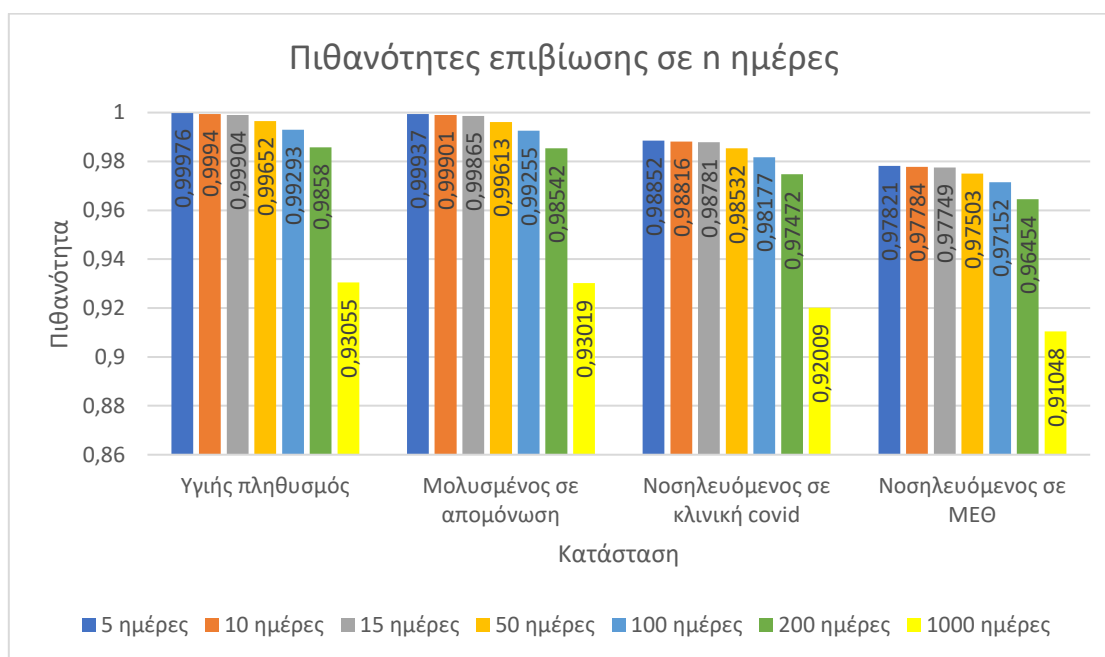
Διάγραμμα 145-Πιθανότητες θανάτου από κάθε κατάσταση για n=5,10,15,100 ημέρες μοντέλου FV

Κατά συνέπεια, οι ζητούμενες **πιθανότητες επιβίωσης n -οστού βήματος** κάθε παροδικής κατάστασης, μετά από $n = 5,10,15,50,100,200,1000$ χρονικές στιγμές είναι:

	5 ημέρες	10 ημέρες	15 ημέρες	50 ημέρες	100 ημέρες	200 ημέρες	1000 ημέρες
1	0,99976	0,99940	0,99904	0,99652	0,99293	0,9858	0,93055
2	0,99937	0,99901	0,99865	0,99613	0,99255	0,98542	0,93019
3	0,98852	0,98816	0,98781	0,98532	0,98177	0,97472	0,92009
4	0,97821	0,97784	0,97749	0,97503	0,97152	0,96454	0,91048

Πίνακας 23-Πιθανότητες επιβίωσης από κάθε κατάσταση για n=5,10,15,100,200,1000 ημέρες μοντέλου FV

Οι παραπάνω πιθανότητες επιβίωσης παρουσιάζονται διαγραμματικά στο γράφημα που ακολουθεί:



Διάγραμμα 146-Πιθανότητες επιβίωσης από κάθε κατάσταση για n=5,10,15,100,200,1000 ημέρες μοντέλου FV

Στο **διάγραμμα 146** παρατηρούμε ότι οι πιθανότητες επιβίωσης n -οστού βήματος δεν παρουσιάζουν μεγάλη μεταβολή, παρόλο που το διάστημα των ημερών που εξετάζεται διαφέρει σημαντικά. Επίσης, παρατηρούμε πως ούτε η αρχική θέση της διαδικασίας επηρεάζει

ιδιαίτερα τα προκύπτοντα αποτελέσματα. Αυτές οι συμπεριφορές οφείλονται στα μεγάλα ποσοστά που παρέχει το μοντέλο είτε να παραμείνει ($p_{11} = 0,91$) είτε να επιστρέψει ($p_{21} = 0,87542$) η διαδικασία στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός». Συγχρόνως, γνωρίζουμε από τη θεωρία της ενότητας 2.2.3, ότι με κάθε επαναληπτική εκτέλεση της διαδικασίας ένα μέρος του πληθυσμού θα καταλήγει στην απορροφητική κατάσταση «Θάνατος». Ωστόσο, στο συγκεκριμένο μοντέλο αυτό θα πραγματοποιείται με πολύ αργούς ρυθμούς εφόσον οι πιθανότητες απορρόφησης $p_{35} = 0,0104853$ και $p_{45} = 0,0105$ είναι πολύ μικρές.

3.5.4 Υπολογισμός πιθανότητα απορρόφησης για το μοντέλο FV

Έστω b_{ij} η πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση j , υπό την προϋπόθεση ότι η διαδικασία έχει ξεκινήσει από την κατάσταση $i \in \{1,2,3,4\}$. Ορίζουμε \mathbf{B} ένα διάνυσμα γραμμής με τις καταχωρήσεις b_{ij} . Λόγω του ότι το μοντέλο διαθέτει μία απορροφητική κατάσταση, βάση της θεωρίας ισχύει πως μακροπρόθεσμα ($n \rightarrow \infty$) όλος ο πληθυσμός θα καταλήξει σε αυτήν. Επομένως, οι πιθανότητες απορρόφησης στην κατάσταση «Θάνατος» είναι $b_{15} = 1$, $b_{25} = 1$, $b_{35} = 1$, $b_{45} = 1$ και ο διάνυσμα γραμμής \mathbf{B} διαμορφώνεται ως εξής:

$$\mathbf{B} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

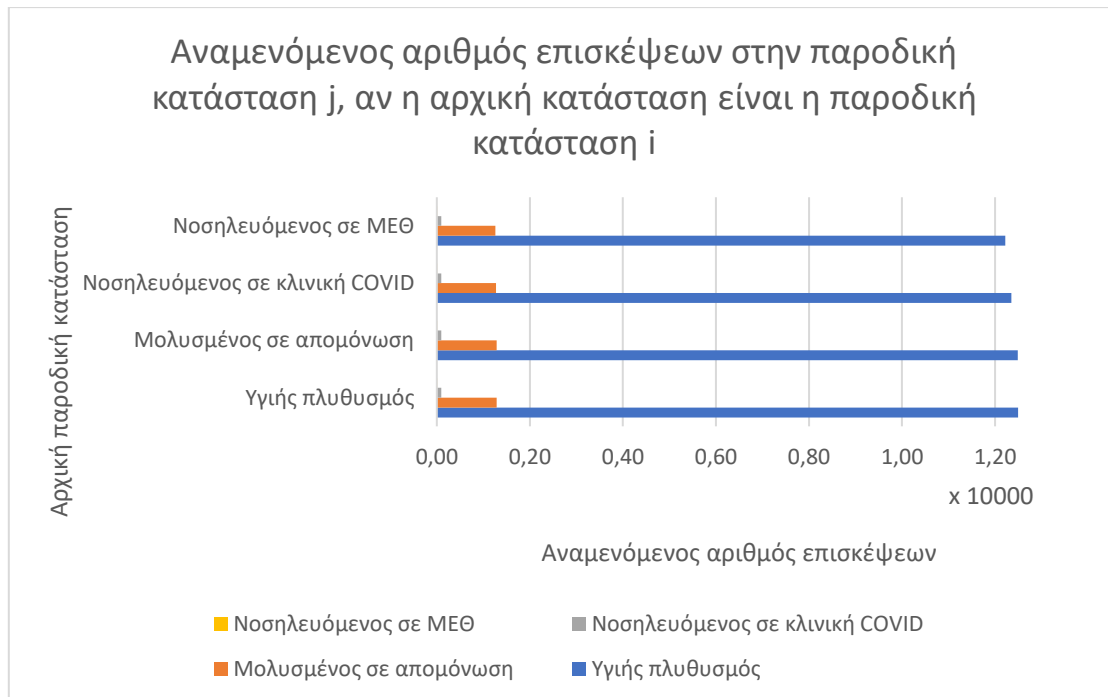
3.5.5 Υπολογισμός αναμενόμενου χρόνου θανάτου για το μοντέλο FV

Με σκοπό την εκτίμηση του αναμενόμενου χρόνου θανάτου, θα χρησιμοποιήσουμε τον πρωταρχικό πίνακα \mathbf{R} , όπου προκύπτει από τη σχέση (10):

	1	2	3	4
1	12.493,40907	1.283,27753	95,23791	0,13351
2	12.487,48447	1.283,81074	95,23791	0,13351
3	12.350,99730	1.269,77880	95,23791	0,13351
4	12.221,13193	1.256,42762	94,23652	1,13350

Πίνακας 24-Πρωταρχικός πίνακας μοντέλου FV

Τα αποτελέσματα του πίνακα **R** απεικονίζονται στο παρακάτω γράφημα. Αναλυτικότερα δείχνουν τον αναμενόμενο αριθμό επισκέψεων στην παροδική κατάσταση j , δεδομένου ότι η αρχική θέση της διαδικασίας είναι η παροδική κατάσταση i , για $i, j = 1, 2, 3, 4$:



Διάγραμμα 147-Αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων των παροδικών καταστάσεων μοντέλου FV

Ο αναμενόμενος αριθμός ημερών πριν το θάνατο T_i δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ισούται με:

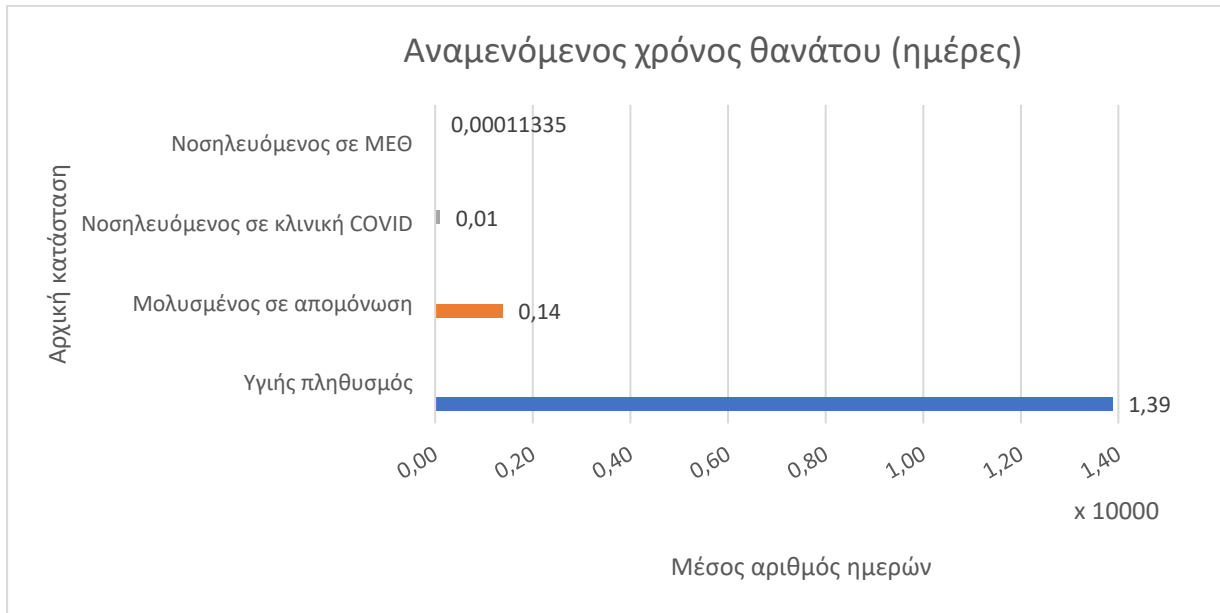
$$T_1 = R_{11} + R_{12} + R_{13} + R_{14} = 13.872,05802 \text{ ημέρες}$$

$$T_2 = R_{22} + R_{23} + R_{24} = 1379,18216 \text{ ημέρες}$$

$$T_3 = R_{33} + R_{34} = 95,37142 \text{ ημέρες}$$

$$T_4 = R_{44} = 1,13350 \text{ ημέρες}$$

Το ακόλουθο γράφημα παρουσιάζει διαγραμματικά τον αναμενόμενο χρόνο θανάτου (σε ημέρες), κάθε κατάστασης:



Διάγραμμα 148-Αναμενόμενος χρόνος θανάτου μοντέλου FV

Όπως έχει επισημανθεί, ο αναμενόμενος χρόνος θανάτου εξαρτάται άμεσα από την αρχική θέση του συστήματος, κι αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε στο **διάγραμμα 148** στο οποίο οι χρόνοι διαφέρουν σημαντικά, ιδίως ανάμεσα στις καταστάσεις «Υγιής πληθυσμός» και «Νοσηλεύόμενος σε ΜΕΘ».

3.5.6 Υπολογισμός πιθανότητα παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο FV

Έστω ότι το σύστημα μόλις μπήκε στην κατάσταση $i = 1,2,3,4,5$. Η πιθανότητα να παραμείνει σε αυτήν για ακριβώς $n = 5,10,15$ βήματα υπολογίζεται από την εξίσωση (12):

- Για $n=5$

$$P_1^{(5)} = 5,616289305900000 \times 10^{-2}$$

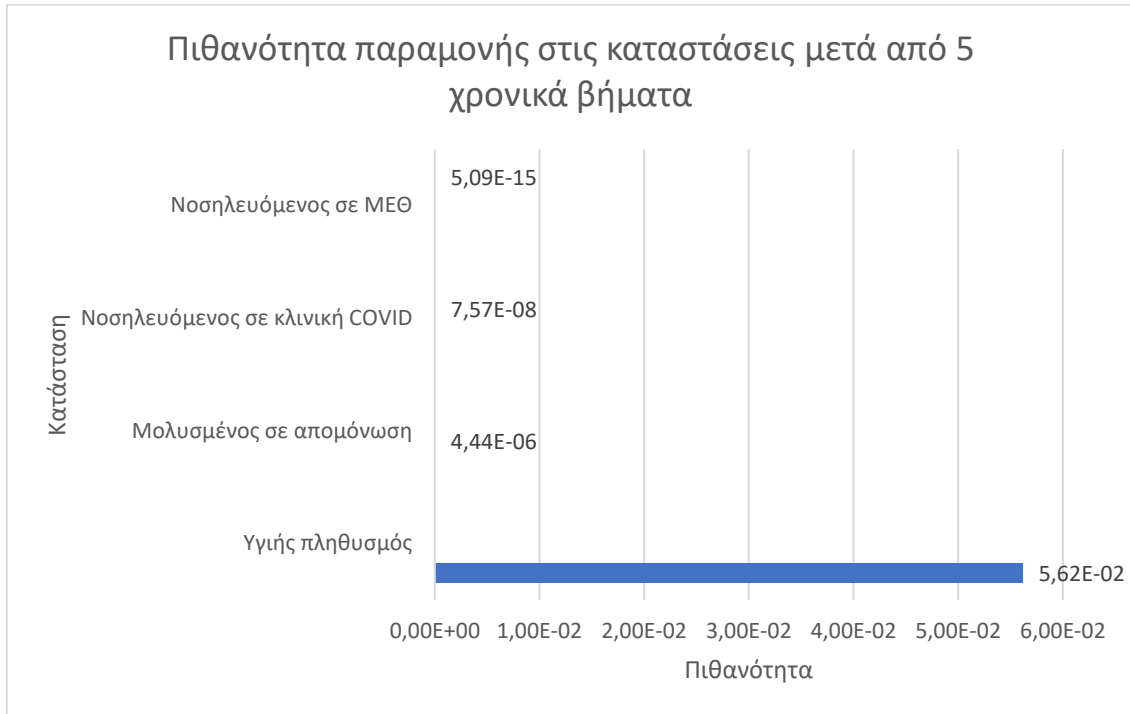
$$P_2^{(5)} = 4,443840103696481 \times 10^{-6}$$

$$P_3^{(5)} = 7,569633978576401 \times 10^{-8}$$

$$P_4^{(5)} = 5,094682521685347 \times 10^{-15}$$

$$P_5^{(5)} = 1$$

Το αντίστοιχο διάγραμμα που παρουσιάζει την πιθανότητα παραμονής σε κάθε κατάσταση ξεχωριστά, ύστερα από 5 χρονικά βήματα είναι το ακόλουθο:



Διάγραμμα 149-Πιθανότητες παραμονής των καταστάσεων μετά από n=5 ημέρες μοντέλου FV

- Για n=10:

$$P_1^{(10)} = 3,504745063062967 \times 10^{-2}$$

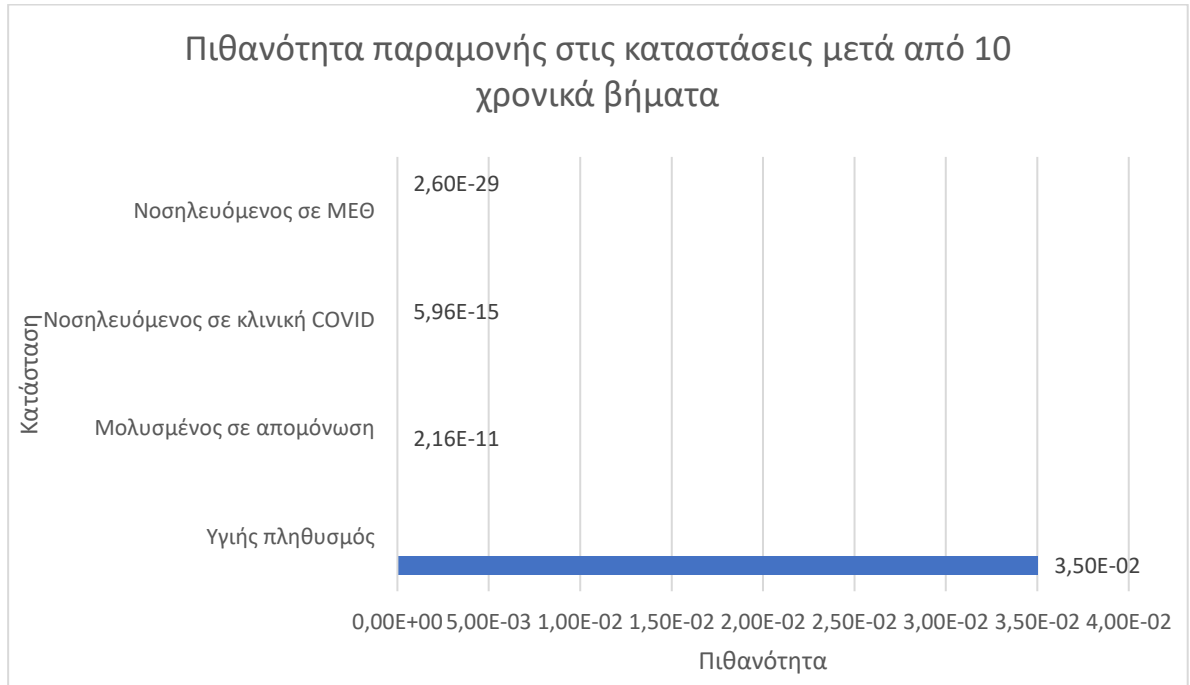
$$P_2^{(10)} = 2,161953413240476 \times 10^{-11}$$

$$P_4^{(10)} = 5,955944907165052 \times 10^{-15}$$

$$P_5^{(10)} = 2,599179643236393 \times 10^{-29}$$

$$P_5^{(10)} = 1$$

Οι παραπάνω πιθανότητες παραμονής στις καταστάσεις μετά από 10 χρονικά βήματα, παρουσιάζονται διαγραμματικά ως εξής:



Διάγραμμα 150-Πιθανότητες παραμονής των καταστάσεων μετά από n=10 ημέρες μοντέλου FV

- Για n=15:

$$P_1^{(15)} = 2,187073579731819 \times 10^{-2}$$

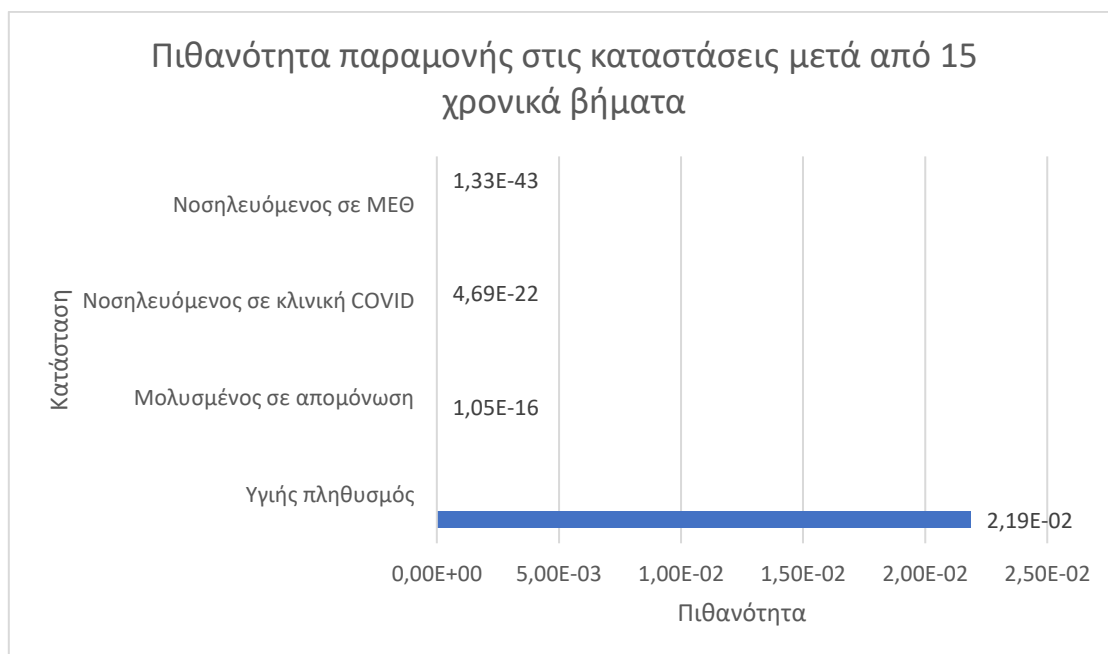
$$P_2^{(15)} = 1,051802596842802 \times 10^{-16}$$

$$P_3^{(15)} = 4,686260899480990 \times 10^{-22}$$

$$P_4^{(15)} = 1,326036468231122 \times 10^{-43}$$

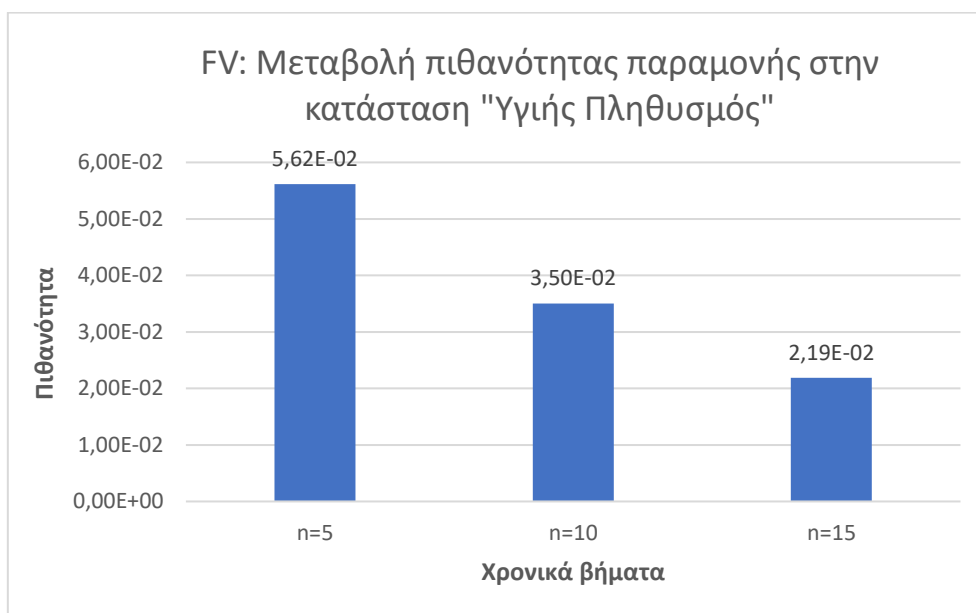
$$P_5^{(15)} = 1$$

Στο **διάγραμμα 151** απεικονίζονται οι πιθανότητες παραμονής στις καταστάσεις, μετά από 15 χρονικά βήματα:

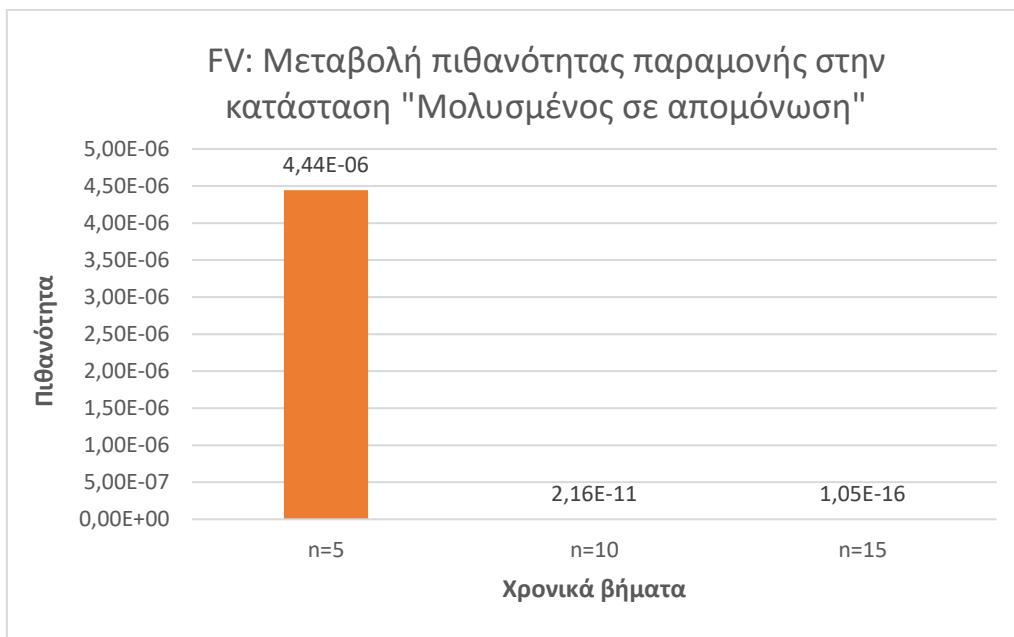


Διάγραμμα 151-Πιθανότητες παραμονής των καταστάσεων μετά από n=15 ημέρες μοντέλου FV

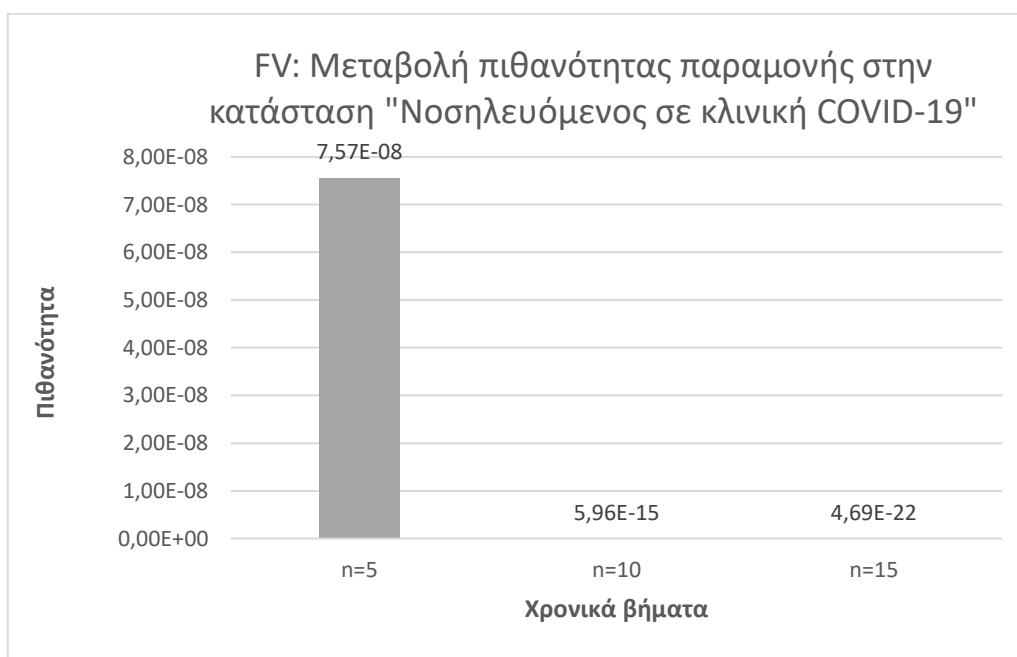
Στα **διαγράμματα 152, 153, 154 και 155** που ακολουθούν παρουσιάζεται η μεταβολή της πιθανότητας παραμονής σε κάθε κατάσταση μετά από $n = 5, 10, 15$ χρονικές στιγμές:



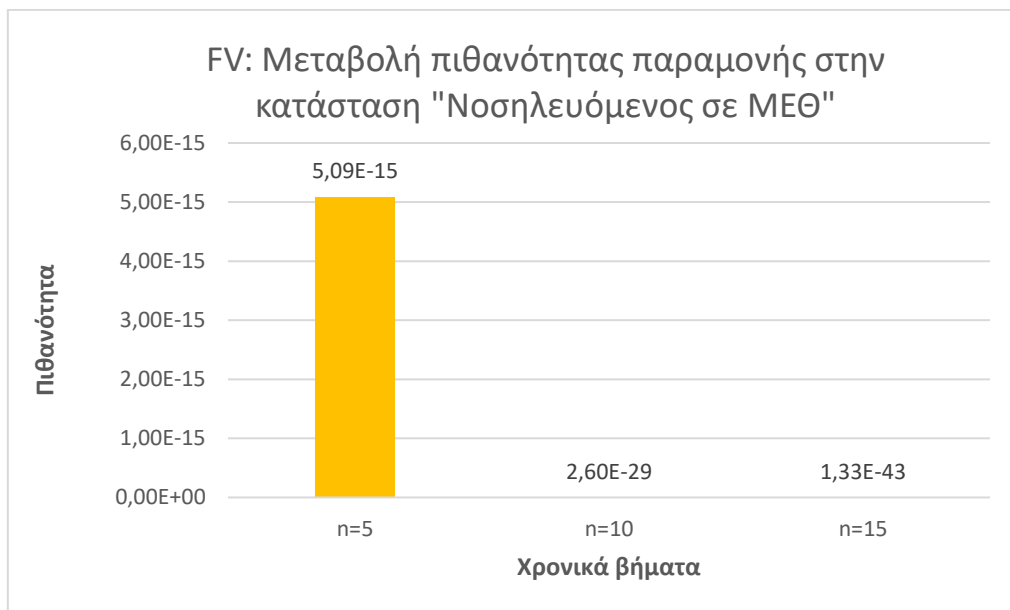
Διάγραμμα 152-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής "Υγιής πληθυσμός" μοντέλου FV



Διάγραμμα 153-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής "Μολυσμένος σε απομόνωση" μοντέλου FV



Διάγραμμα 154-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής "Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19" μοντέλου FV



Διάγραμμα 155-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής “Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ” μοντέλου FV

Όπως ήταν αναμενόμενο, στα **διαγράμματα 152, 153, 154 και 155** παρατηρούμε πως όσο η διαδικασία πλησιάζει στην κατάσταση απορρόφησης και όσο μεγαλύτερο αριθμό ημερών εξετάζουμε, μειώνονται σημαντικά οι πιθανότητες παραμονής στις μεταβατικές καταστάσεις.

3.5.7 Υπολογισμός μέσου χρόνου παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο FV

Ο αναμενόμενος αριθμός χρονικών στιγμών $E(T_i)$ που η αλυσίδα (M.A.) θα παραμείνει στην κατάσταση $i = 1,2,3,4$, κάθε φορά που την επισκέπτεται, προκύπτει από την εξίσωση (13) και αντιστοιχεί σε:

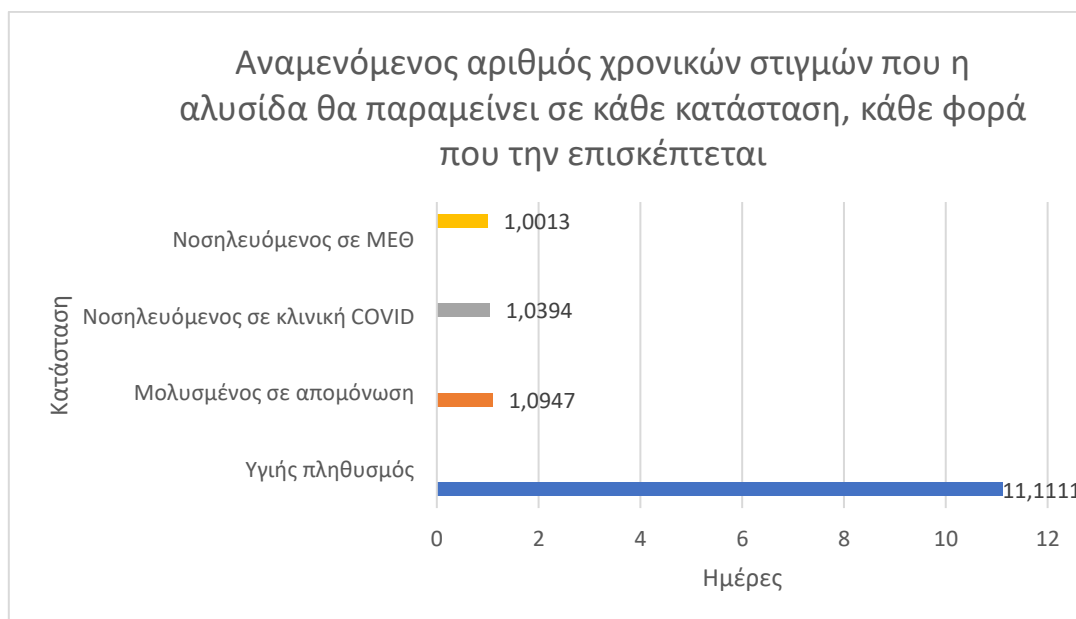
$$E(T_1) = 11,1111 \text{ ημέρες}$$

$$E(T_2) = 1,0947 \text{ ημέρες}$$

$$E(T_3) = 1,0394 \text{ ημέρες}$$

$$E(T_4) = 1,0013 \text{ ημέρες}$$

Ο μέσος χρόνος παραμονής σε κάθε κατάσταση, κάθε φορά που η διαδικασία επισκέπτεται την μεταβατική κατάσταση i , παρουσιάζονται στο παρακάτω γράφημα:



Διάγραμμα 156-Μέσος χρόνος παραμονής κάθε κατάστασης μοντέλου FV

Στο **διάγραμμα 156** παρατηρούμε πως ο μέσος χρόνος παραμονής σε κάθε κατάσταση μειώνεται σταδιακά, ενώ δεν διαφέρει ιδιαίτερα στις καταστάσεις «Μολυσμένος σε απομόνωση», «Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19» και «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ». Δεδομένων των πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος που προέκυψαν στον **Πίνακας 2-Πίνακας** μετάβασης πιθανοτήτων μοντέλου FV , είναι λογικό καθώς ούτε οι πιθανότητες παραμονής διαφέρουν σημαντικά.

3.5.8 Υπολογισμός διακύμανσης του μέσου χρόνου παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο FV

Η διασπορά του αριθμού χρονικών στιγμών $Var(T_i)$ που η αλυσίδα (M.A.) θα παραμείνει στην κατάσταση $i = 1,2,3,4$, κάθε φορά που την επισκέπτεται, υπολογίζεται από τη σχέση (14) και ισούται με:

$$Var(T_1) = 112,3456$$

$$Var(T_2) = 0,1037$$

$$Var(T_3) = 0,0409$$

$$Var(T_4) = 0,0013$$

3.6 Μοντέλο πληθυσμού που έχει χορηγηθεί την αναμνηστική δόση (BO)

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου που περιγράφει την κατάσταση ενός ατόμου που έχει χορηγηθεί την αναμνηστική δόση (booster), τη χρονική στιγμή n . Υπενθυμίζουμε πως οι μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων πραγματοποιούνται σύμφωνα με τις παρακάτω πιθανότητες:

	1	2	3	4	5
1	0,99	0,00999961	0,00000039	0	0
2	0,98996139	0,00999961	0,000039	0	0
3	0	0,99993	0,0000389	0,000023	0,0000081
4	0	0	0,9999681	0,0000229	0,000009
5	0	0	0	0	1

3.6.1 Υπολογισμός πιθανότητας μετάβασης ενός βήματος για το μοντέλο BO

Οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος για το μοντέλο BO εμφανίζονται στον πίνακα P όπου προκύπτουν από τη σχέση (2). Αναλυτικότερα, δεδομένου ότι η διαδικασία ξεκινάει από κάθε κατάσταση ξεχωριστά, θα βρεθεί στην κατάσταση $j = 1,2,3,4,5$ με τις εξής πιθανότητες:

$$p_{1j}=[0,99 \quad 0,00999961 \quad 0,00000039 \quad 0 \quad 0]$$

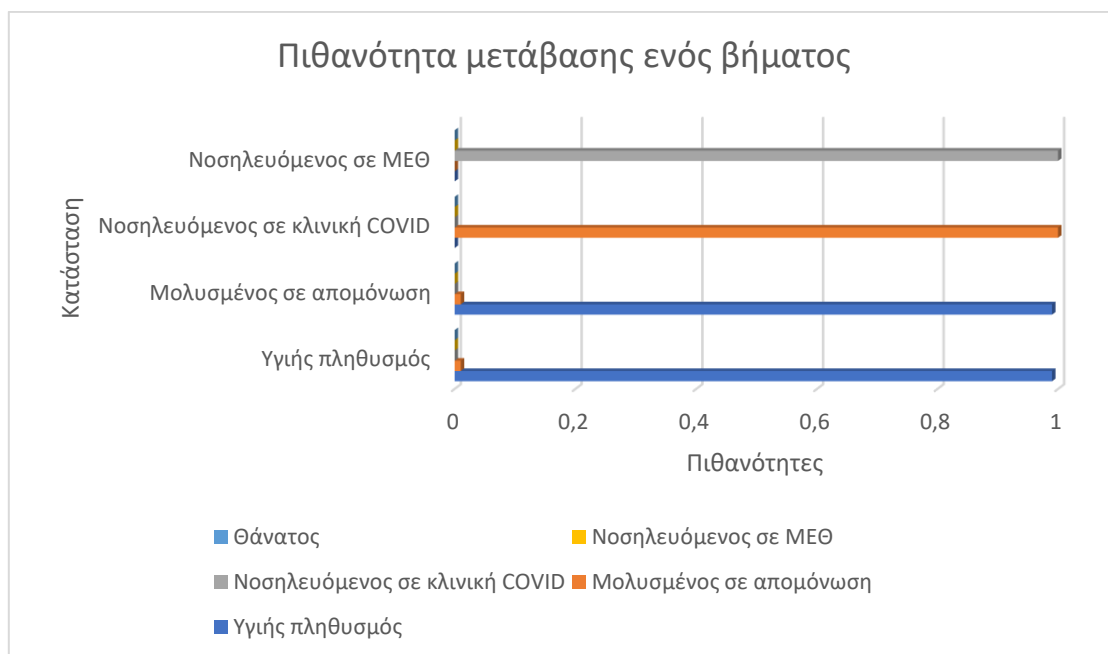
$$p_{2j}=[0,98996139 \quad 0,00999961 \quad 0,000039 \quad 0 \quad 0]$$

$$p_{3j}=[0 \quad 0,99993 \quad 0,0000389 \quad 0,000023 \quad 0,0000081]$$

$$p_{4j}=[0 \quad 0 \quad 0,9999681 \quad 0,0000229 \quad 0,000009]$$

$$p_{5j}=[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

Το γράφημα που αντιστοιχεί στις παραπάνω πιθανότητες είναι το ακόλουθο:



Διάγραμμα 157-Πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος μοντέλου BO

3.6.2 Υπολογισμός πιθανότητας μετάβασης n βημάτων για το μοντέλο BO

Οι πίνακες μετάβασης n -οστού βήματος P^n , δηλώνουν την πιθανότητα να ξεκινήσει η αλυσίδα από την κατάσταση $i \in \{1,2,3,4,5\}$ και να βρεθεί στην κατάσταση $j \in \{1,2,3,4,5\}$, σε $n \in \{5,10,15\}$ βήματα και προκύπτουν από τη σχέση (8).

Πιο συγκεκριμένα, ο πίνακας P^5 αναφέρεται στις πιθανότητες μετάβασης της διαδικασίας από κάθε κατάσταση σε κάθε άλλη, ύστερα από 5 χρονικές στιγμές:

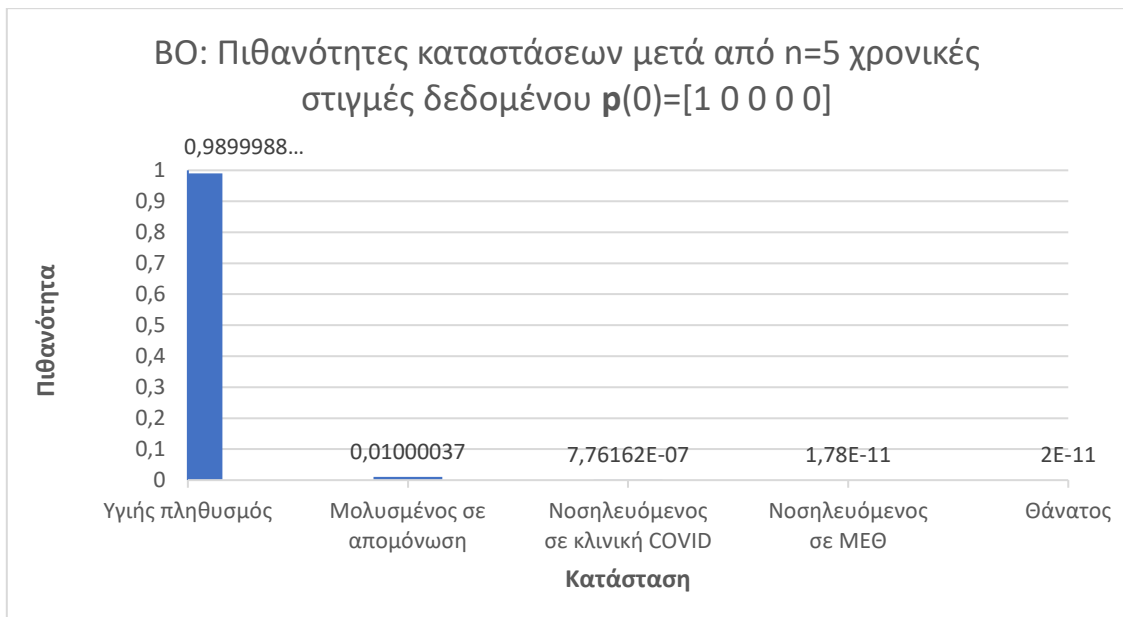
	1	2	3	4	5
1	0,9899988454	0,01000037	0,00000077616 23	0,00000000001 78	0,00000000002
2	0,9899988451	0,01000037	0,00000077616 24	0,00000000001 78	0,00000000033
3	0,9899908217	0,01000030	0,00000077615 65	0,00000000001 79	0,00000810103
4	0,9899819050	0,01000021	0,00000077989 73	0,00000000001 8	0,00001710116
5	0	0	0	0	1

Πίνακας 25-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων $n=5$ βημάτων μοντέλου BO

Παρατίθενται αναλυτικά οι πιθανότητες κατάστασης μετά από 5 χρονικές στιγμές, οι οποίες υπολογίζονται μέσω της σχέσης (9), καθώς και το διάγραμμα κατανομής πιθανότητας, δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση είναι η:

- κατάσταση 1:

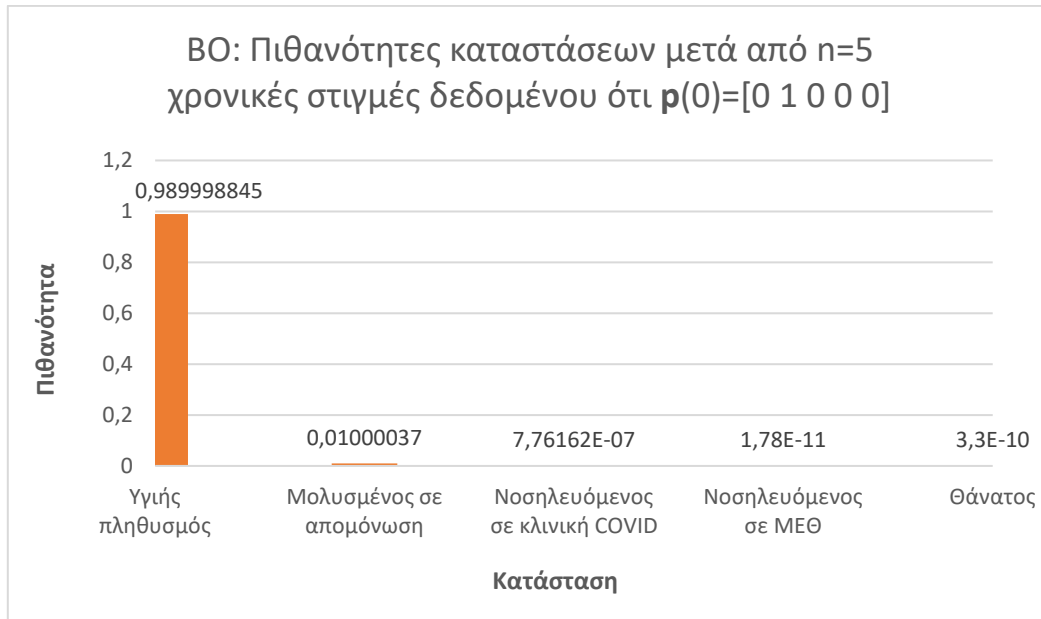
$$p(5)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot P^5=[0,9899988454 \ 0,01000037 \ 0,0000007761623 \ 0,0000000000178 \ 0,000000000002]$$



Διάγραμμα 158-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου BO

- κατάσταση 2:

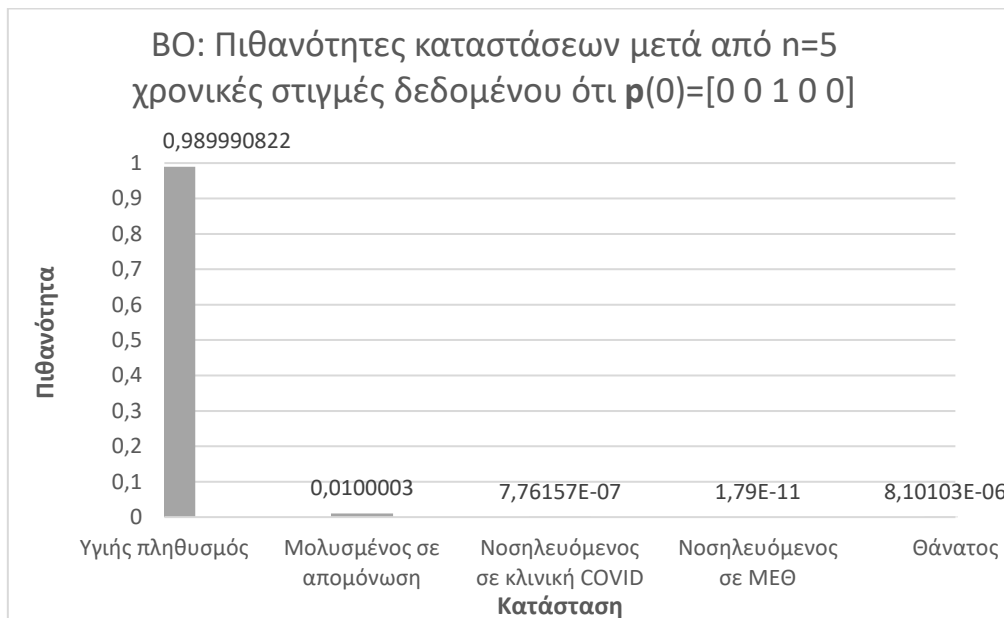
$$p(5)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot P^5=[0,9899988451 \ 0,01000037 \ 0,0000007761624 \ 0,0000000000178 \ 0,0000000000033]$$



Διάγραμμα 159-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου ΒΟ

- κατάσταση 3:

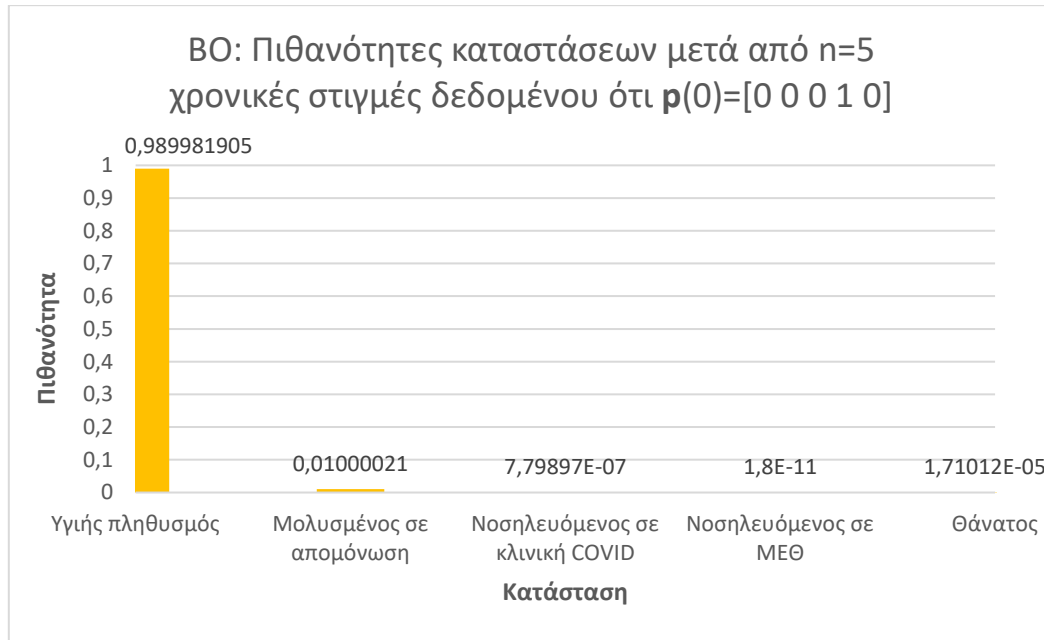
$$p(5)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \cdot P^5=[0,9899908217 \ 0,01000030 \ 0,0000007761565 \ 0,0000000000179 \ 0,00000810103]$$



Διάγραμμα 160-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου ΒΟ

- κατάσταση 4:

$$p(5)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot P^5 = [0,9899819050 \ 0,01000021 \ 0,0000007798973 \ 0,000000000018 \ 0,00001710116]$$

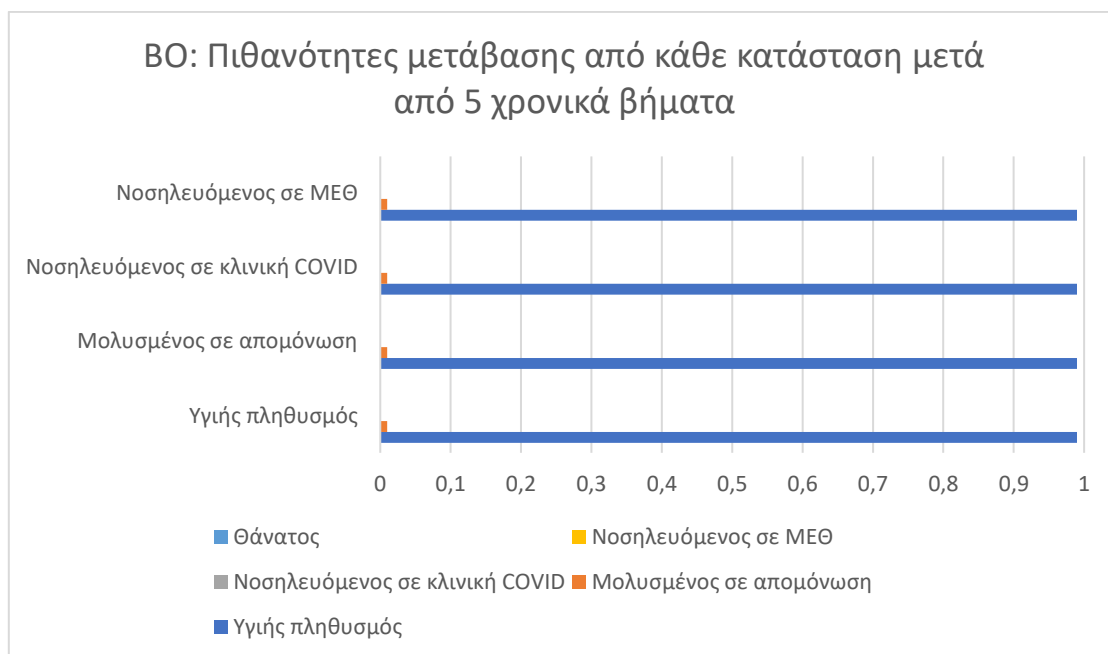


Διάγραμμα 161-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλου ΒΟ

- κατάσταση 5:

$$p(5)=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot P^5 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Οι πιθανότητες μετάβασης των καταστάσεων μετά την πάροδο $n = 5$ χρονικών βημάτων, από την κατάσταση $i = 1,2,3,4,5$ στην κατάσταση $j = 1,2,3,4,5$ απεικονίζονται στο **διάγραμμα 162**:



Διάγραμμα 162-Πιθανότητες μετάβασης των καταστάσεων μετά από n=5 βήματα μοντέλου ΒΟ

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται ο πίνακας P^{10} , ο οποίος εκφράζει τις πιθανότητες που συντελούνται οι μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων μετά από 10 χρονικές στιγμές:

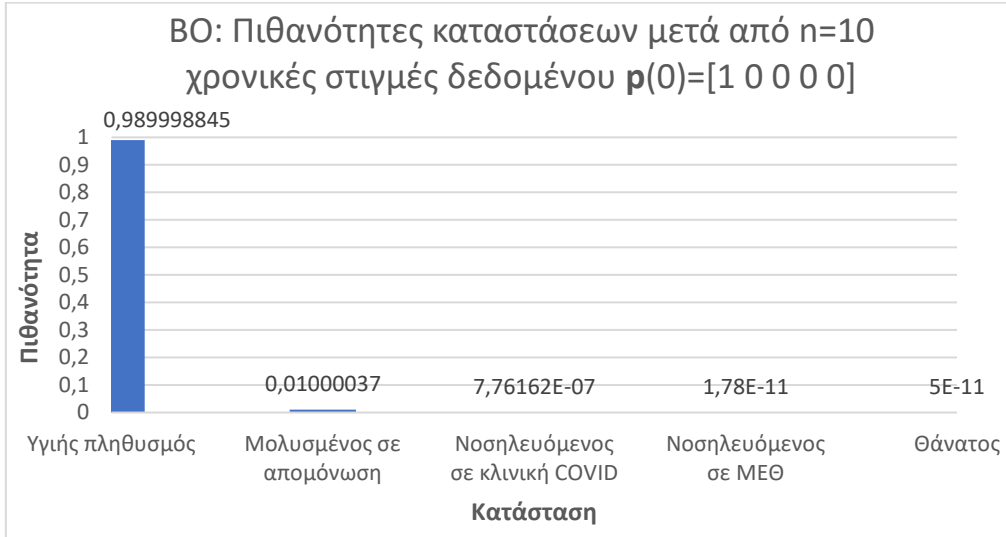
	1	2	3	4	5
1	0,9899988454	0,01000037	0,0000007761 623	0,0000000000 178	0,0000000000 5
2	0,9899988451	0,01000037	0,0000007761 623	0,0000000000 178	0,0000000003 6
3	0,9899908254	0,01000029	0,0000007761 560	0,0000000000 178	0,0000081010 6
4	0,9899819153	0,01000020	0,0000007761 490	0,0000000000 178	0,0000171011 9
5	0	0	0	0	1

Πίνακας 26-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων μετά από n=10 βήματα μοντέλου ΒΟ

Παρατίθενται οι πιθανότητες κάθε κατάστασης μετά από 10 βήματα, όπου προκύπτουν από την εξίσωση (9), όπως επίσης και το διάγραμμα κατανομής πιθανότητας, αν η αρχική θέση της διαδικασίας είναι η:

- κατάσταση 1:

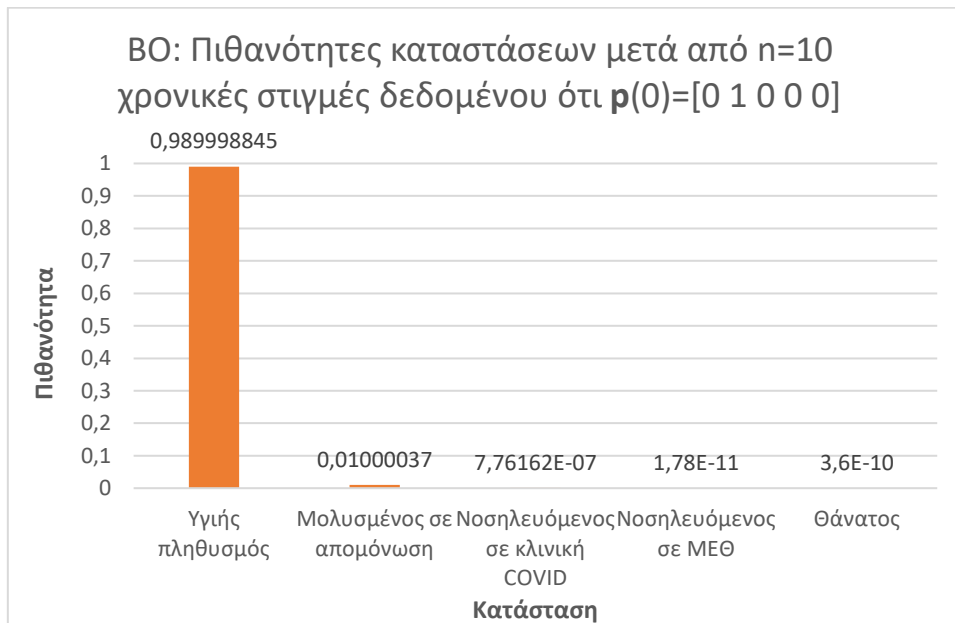
$$p(10)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot P^{10} = [0,989998845 \quad 0,01000037 \quad 0,0000007761623 \quad 0,000000000178 \quad 0,00000000005]$$



Διάγραμμα 163-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου BO

- κατάσταση 2:

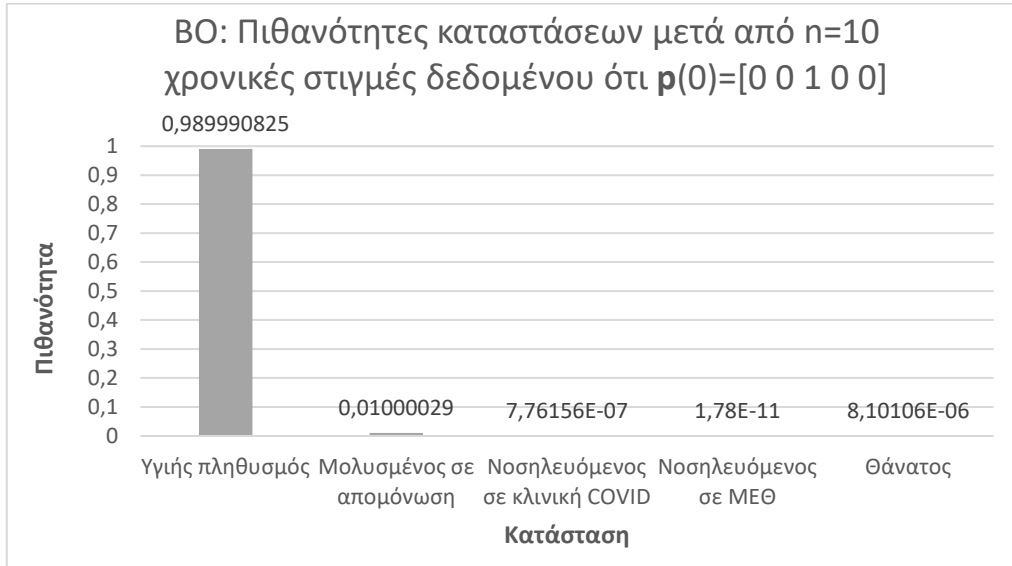
$$p(10)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot P^{10} = [0,9899988451 \quad 0,01000037 \quad 0,0000007761623 \quad 0,000000000178 \quad 0,00000000036]$$



Διάγραμμα 164-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου BO

- κατάσταση 3:

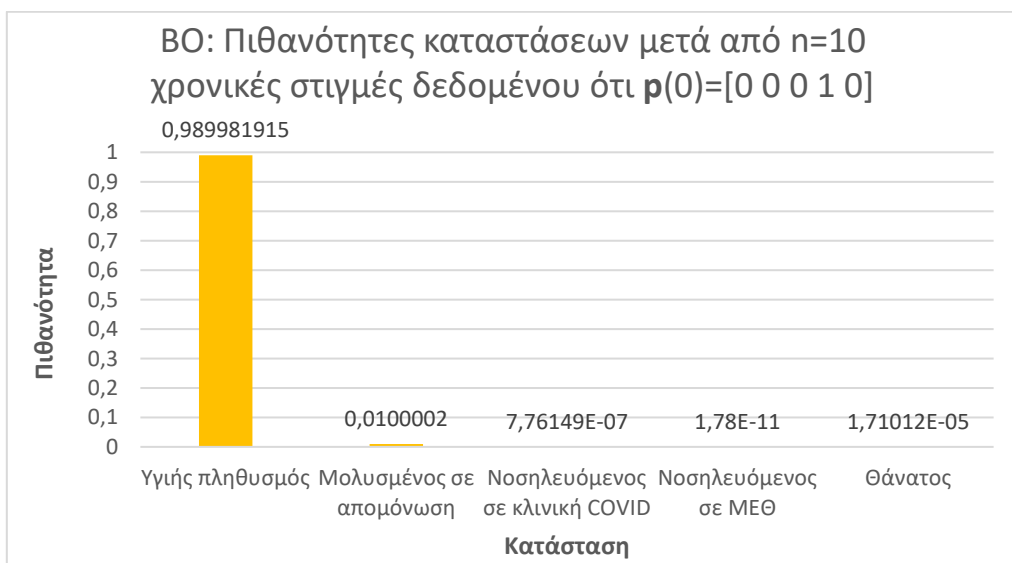
$$\mathbf{p}(10)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \cdot \mathbf{P}^{10} = [0,9899908254 \quad 0,01000029 \quad 0,000000776156 \\ 0,0000000000178 \quad 0,00000810106]$$



Διάγραμμα 165-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $\mathbf{p}(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου BO

- κατάσταση 4:

$$\mathbf{p}(10)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot \mathbf{P}^{10} = [0,9899819153 \quad 0,01000020 \quad 0,000000776149 \\ 0,0000000000178 \quad 0,00001710119]$$

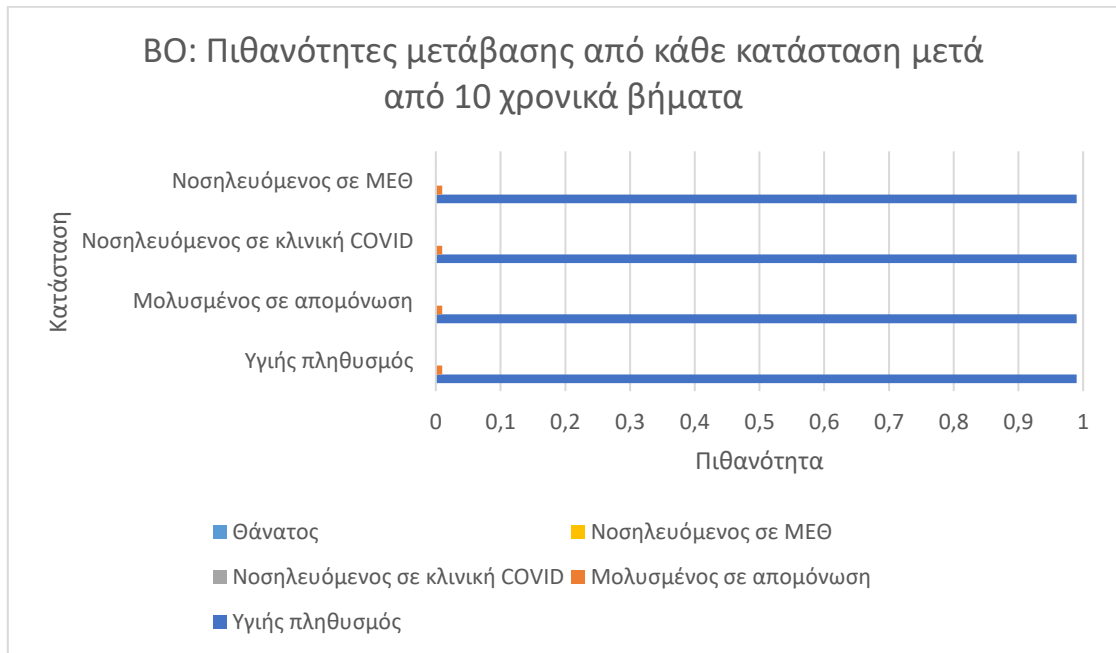


Διάγραμμα 166-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=10 βήματα δεδομένου ότι $\mathbf{p}(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλου BO

- κατάσταση 5:

$$p(10)=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot P^{10}= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Οι πιθανότητες μετάβασης της διαδικασίας από κάθε κατάσταση σε κάθε άλλη ύστερα από 10 χρονικά βήματα, απεικονίζονται διαγραμματικά στο ακόλουθο γράφημα:



Διάγραμμα 167-Πιθανότητες μετάβασης των καταστάσεων μετά από n=10 βήματα μοντέλου BO

Οι πιθανότητες μετάβασης από μία κατάσταση $i = 1,2,3,4,5$ σε μία κατάσταση $j = 1,2,3,4,5$ μετά από $n = 15$ χρονικές στιγμές αναγράφονται στον πίνακα P^{15} :

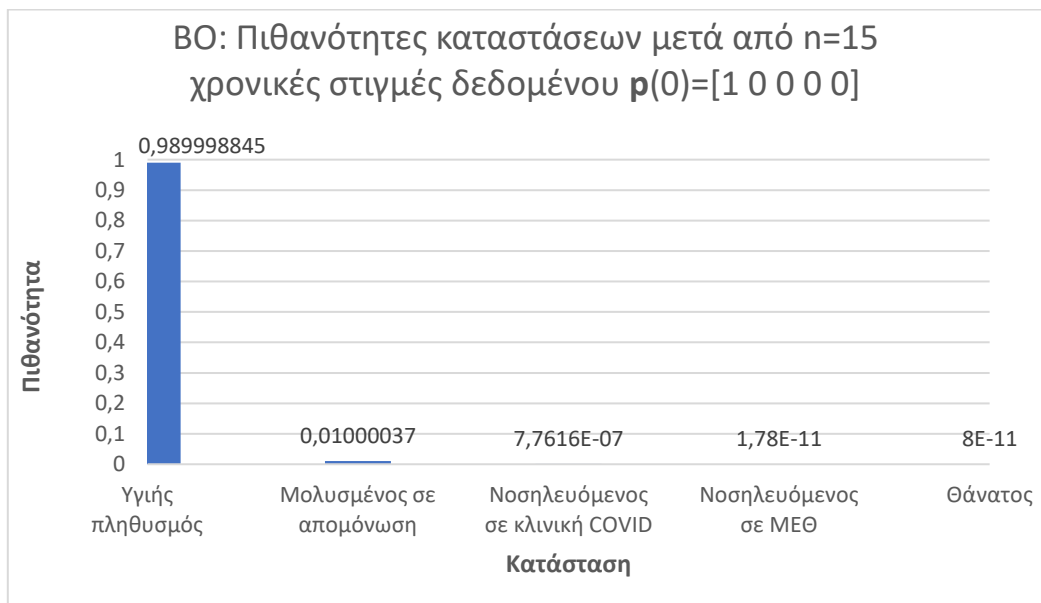
	1	2	3	4	5
1	0,9899988453	0,01000037	0,0000007761 6	0,0000000000 178	0,0000000000 8
2	0,9899988450	0,01000037	0,0000007761 6	0,0000000000 178	0,0000000003 9
3	0,9899908253	0,01000029	0,0000007761 5	0,0000000000 178	0,0000081010 9
4	0,9899819152	0,01000020	0,0000007761 4	0,0000000000 178	0,0000171012 2
5	0	0	0	0	1

Πίνακας 27-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων n=15 βημάτων μοντέλου BO

Αναλυτικότερα, μέσω της σχέσης (9), παρουσιάζονται οι πιθανότητες κατάστασης ύστερα από 15 χρονικά βήματα και το αντίστοιχο γράφημα κατανομής πιθανότητας, υπό την προϋπόθεση ότι η αρχική κατάσταση είναι η:

- κατάσταση 1:

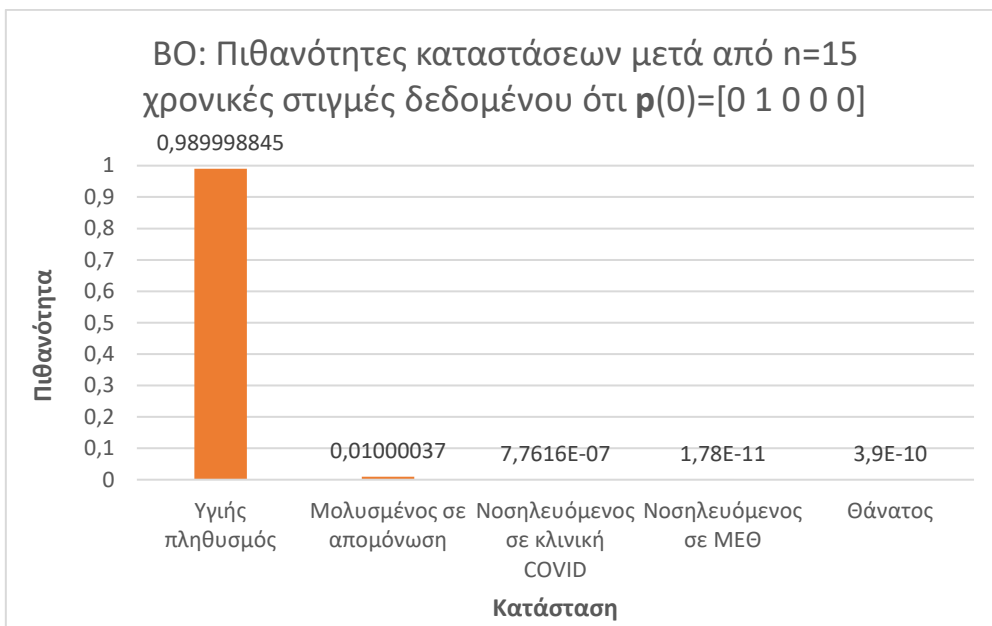
$$\mathbf{p}(15)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot \mathbf{P}^{15}=[0,9899988453 \ 0,01000037 \ 0,00000077616 \\ 0,0000000000178 \ 0,000000000008]$$



Διάγραμμα 168-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $\mathbf{p}(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου BO

- κατάσταση 2:

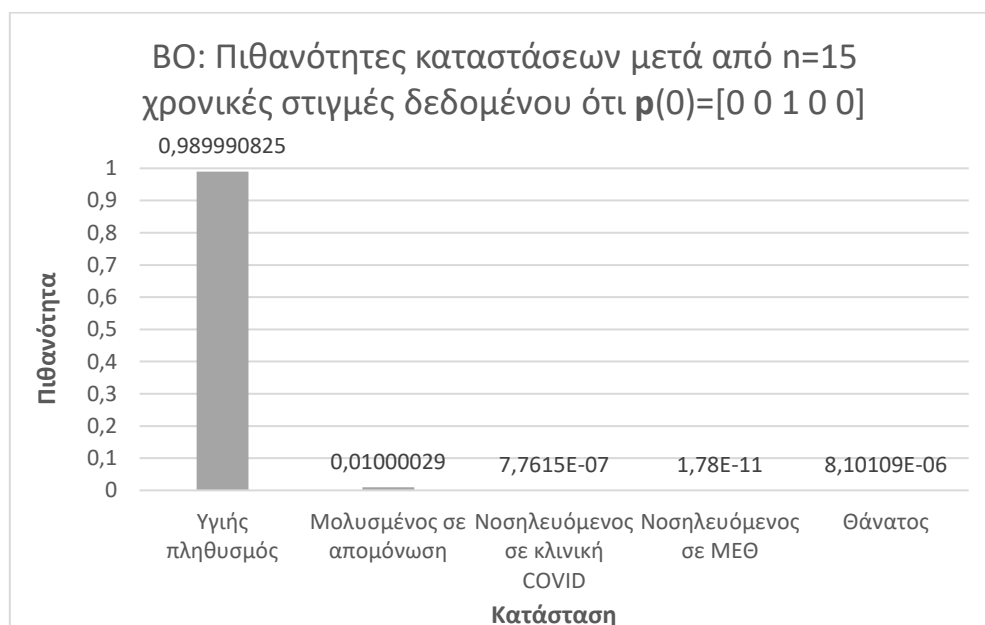
$$\mathbf{p}(15)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot \mathbf{P}^{15}=[0,989998845 \ 0,01000037 \ 0,00000077616 \ 0,0000000000178 \\ 0,000000000039]$$



Διάγραμμα 169-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου ΒΟ

- κατάσταση 3:

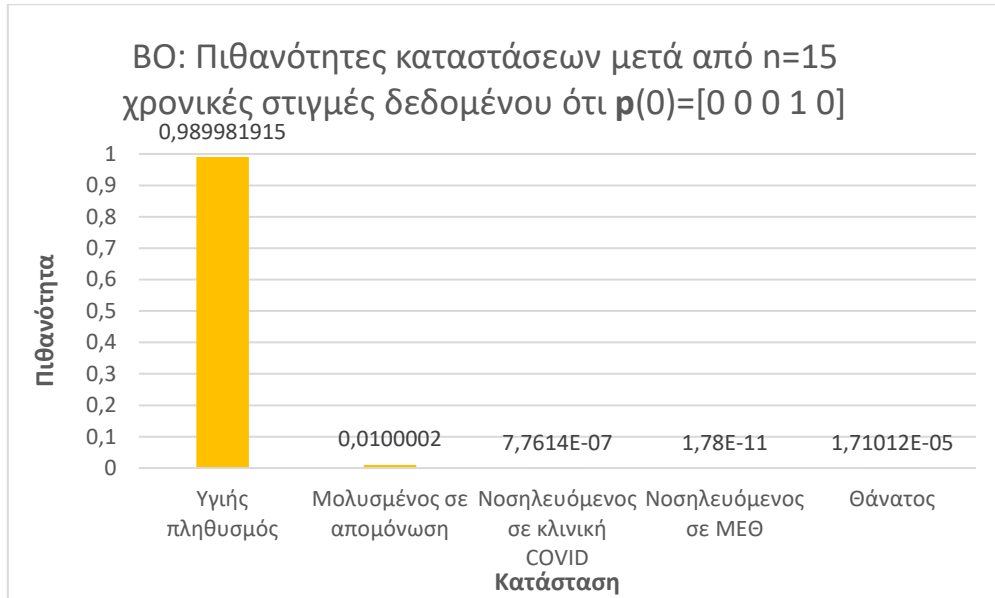
$$p(15)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \cdot P^{15}=[0,9899908253 \ 0,01000029 \ 0,00000077615 \ 0,0000000000178 \ 0,00000810109]$$



Διάγραμμα 170-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου ΒΟ

- κατάσταση 4:

$$p(15)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot P^{15} = [0,9899819152 \quad 0,01000020 \quad 0,00000077614 \\ 0,0000000000178 \quad 0,00001710122]$$

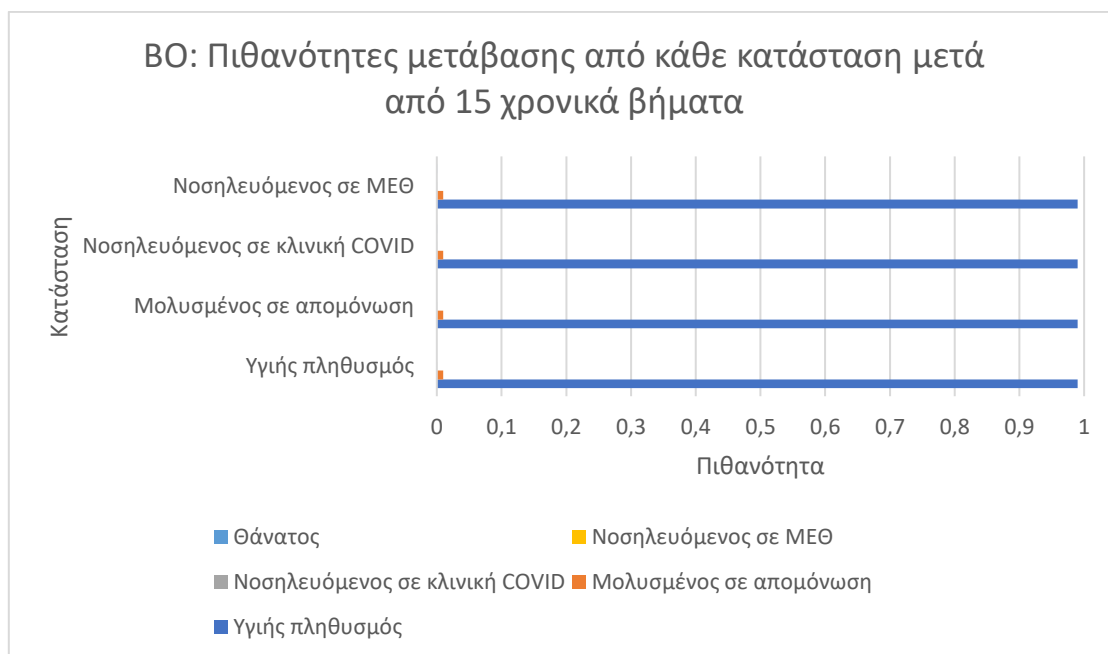


Διάγραμμα 171-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλου BO

- κατάσταση 5:

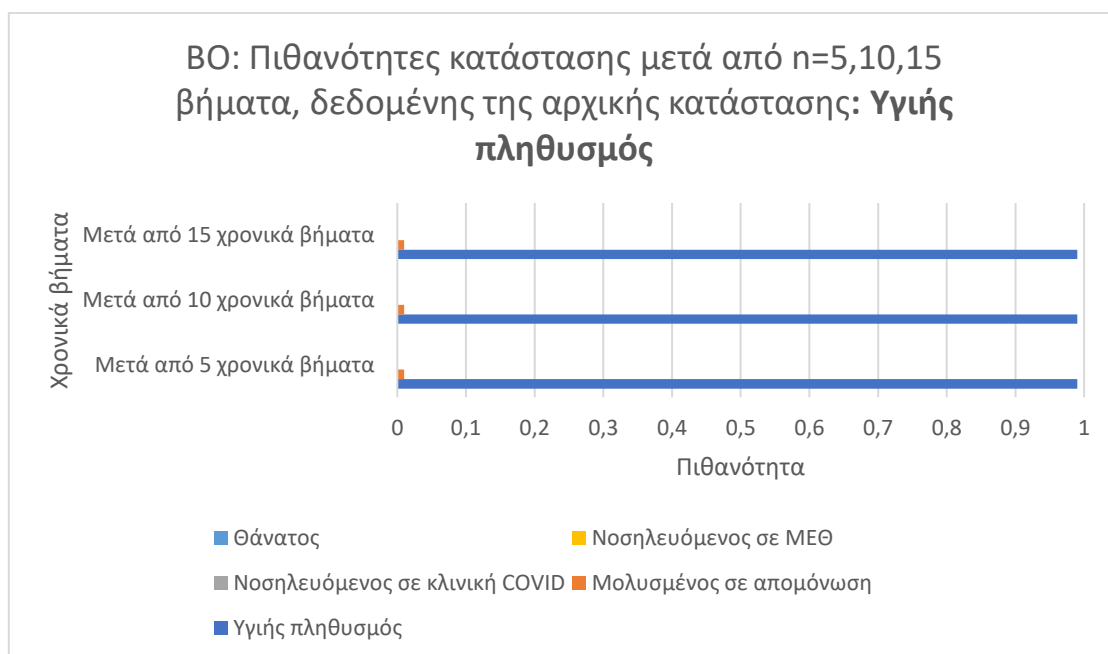
$$p(15)=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot P^{15} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

Το **διάγραμμα 172** απεικονίζει τις πιθανότητες με τις οποίες πραγματοποιούνται οι μεταβάσεις από μία κατάσταση $i \in \{1,2,3,4,5\}$ σε μία κατάσταση $j \in \{1,2,3,4,5\}$ ύστερα από $n = 15$ χρονικές στιγμές:

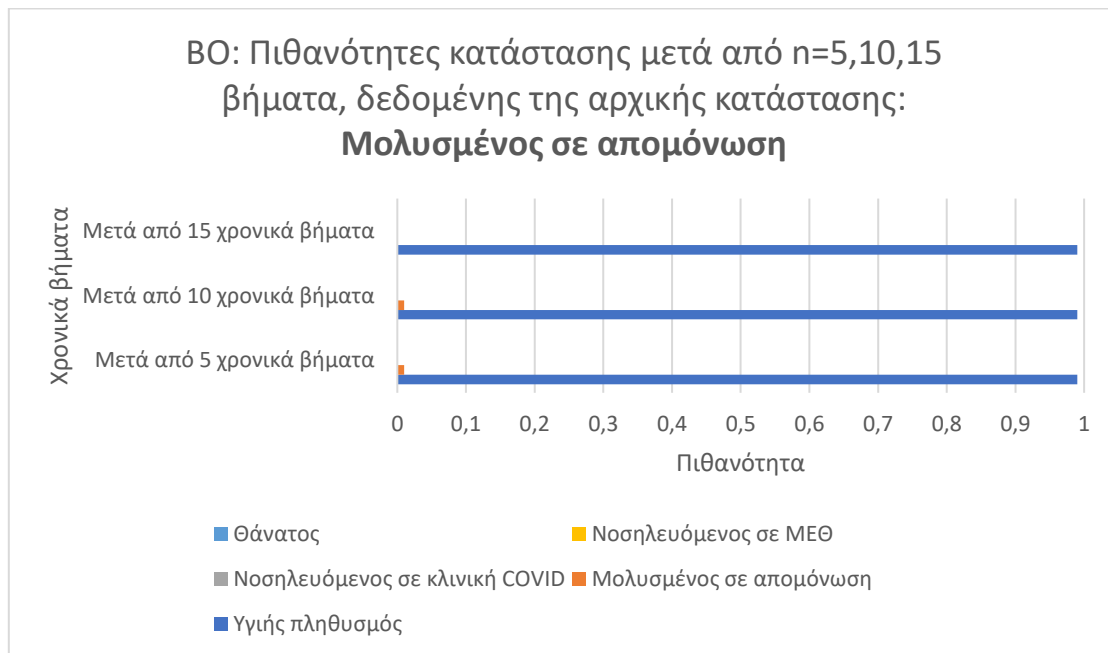


Διάγραμμα 172-Πιθανότητες μετάβασης μετά από n=15 βήματα μοντέλου BO

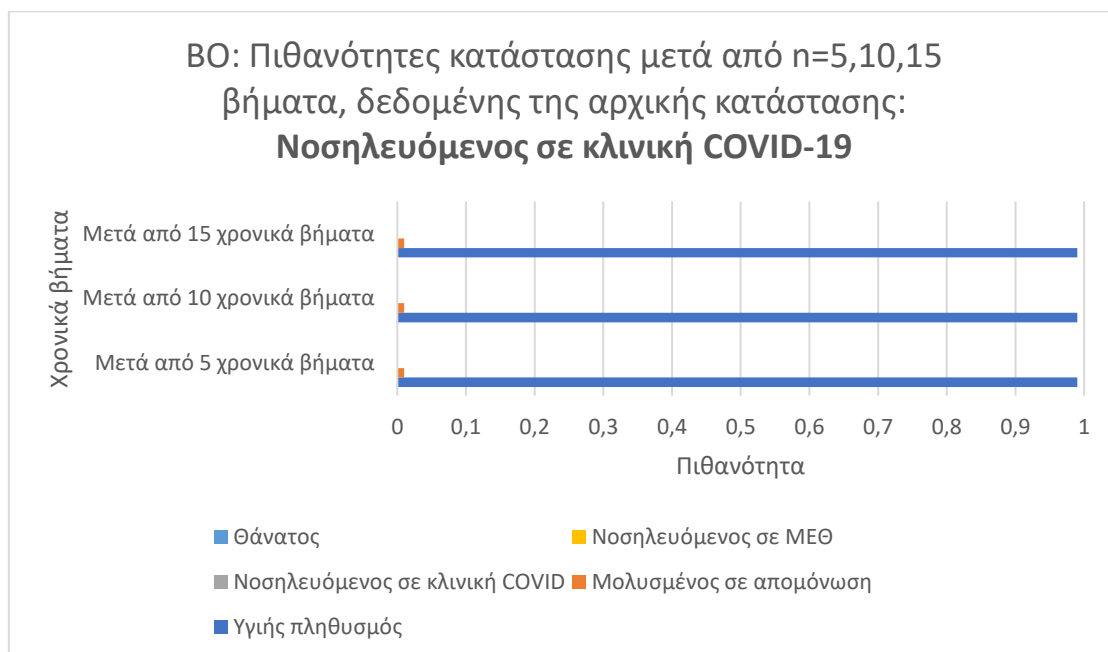
Η πιθανότητα να βρεθεί κάποιος στην κατάσταση $j \in \{1,2,3,4,5\}$, δεδομένου ότι έχει ξεκινήσει από την κατάσταση $i \in \{1,2,3,4\}$, μετά από 5, 10 και 15 χρονικές στιγμές, φαίνεται στα **διαγράμματα 173, 174, 175 και 176:**



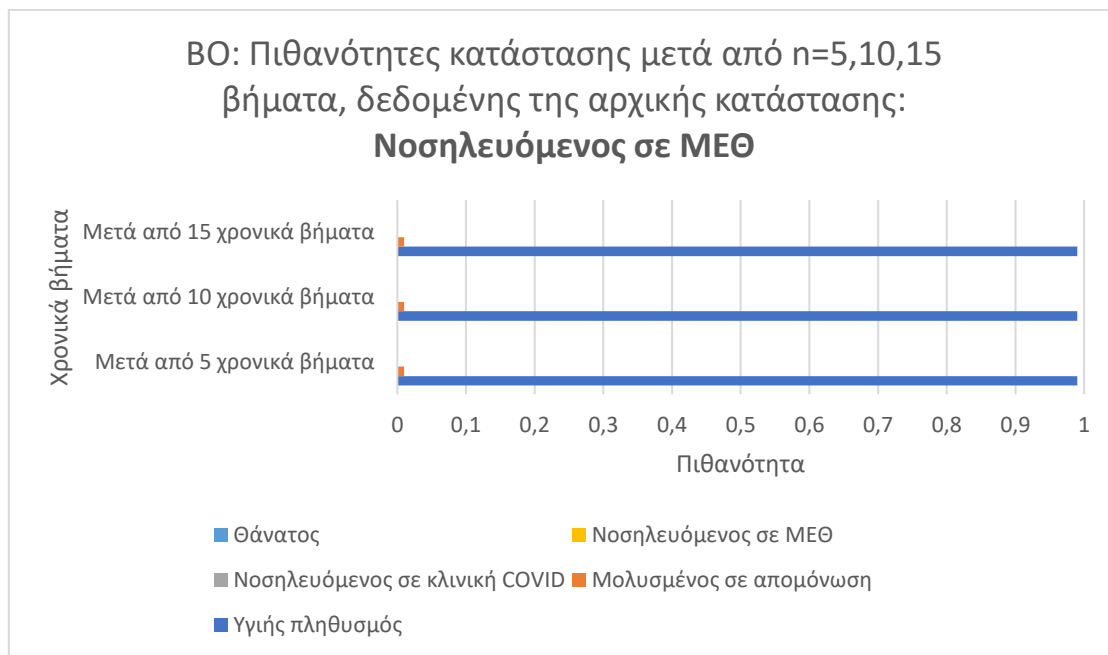
Διάγραμμα 173-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου BO



Διάγραμμα 174-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου ΒΟ

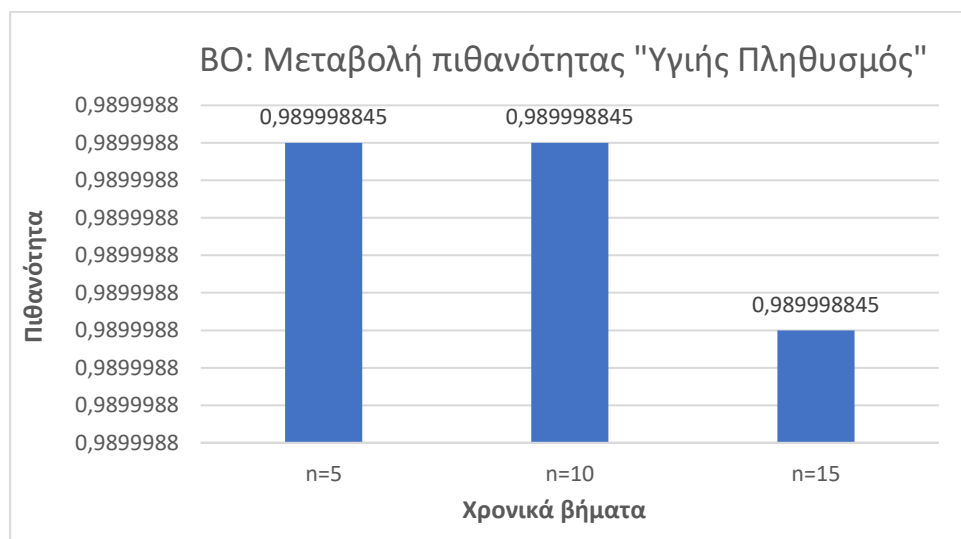


Διάγραμμα 175-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου ΒΟ

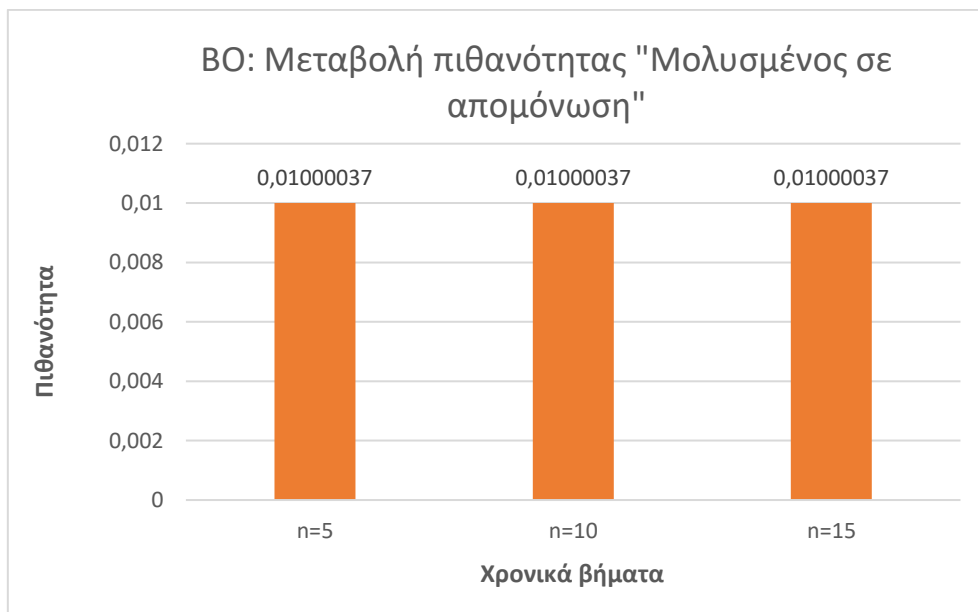


Διάγραμμα 176-Πιθανότητες κατάστασης μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου ΒΟ

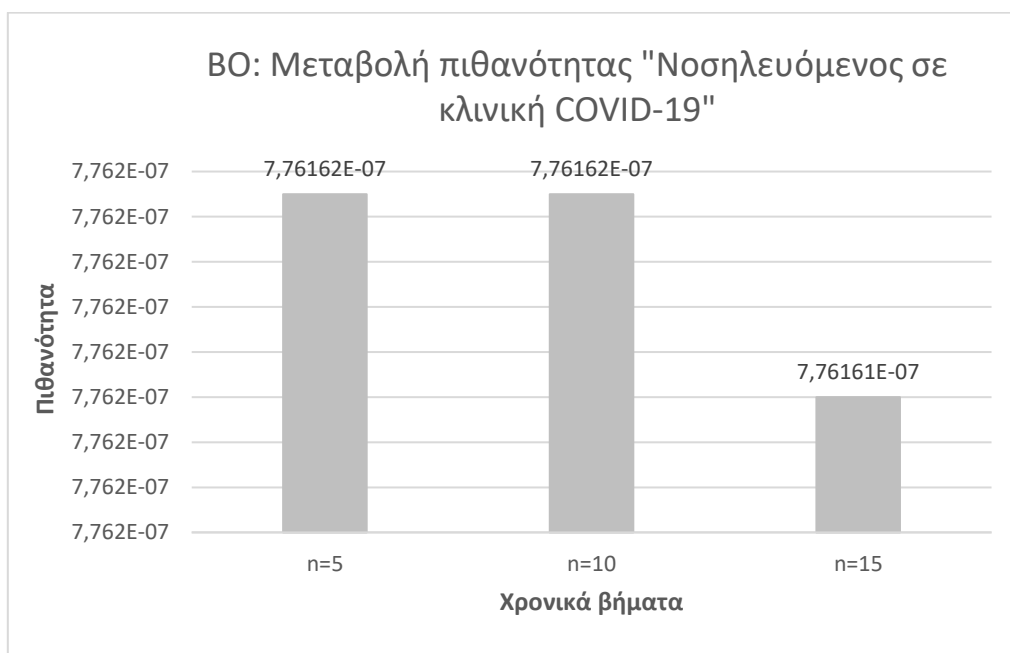
Η μεταβολή των πιθανοτήτων για κάθε κατάσταση, μετά από $n = 5, 10, 15$ χρονικά βήματα, δεδομένου ότι η διαδικασία έχει ξεκινήσει από στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός», απεικονίζεται στα **διαγράμματα 177, 178, 179, 180 και 181:**



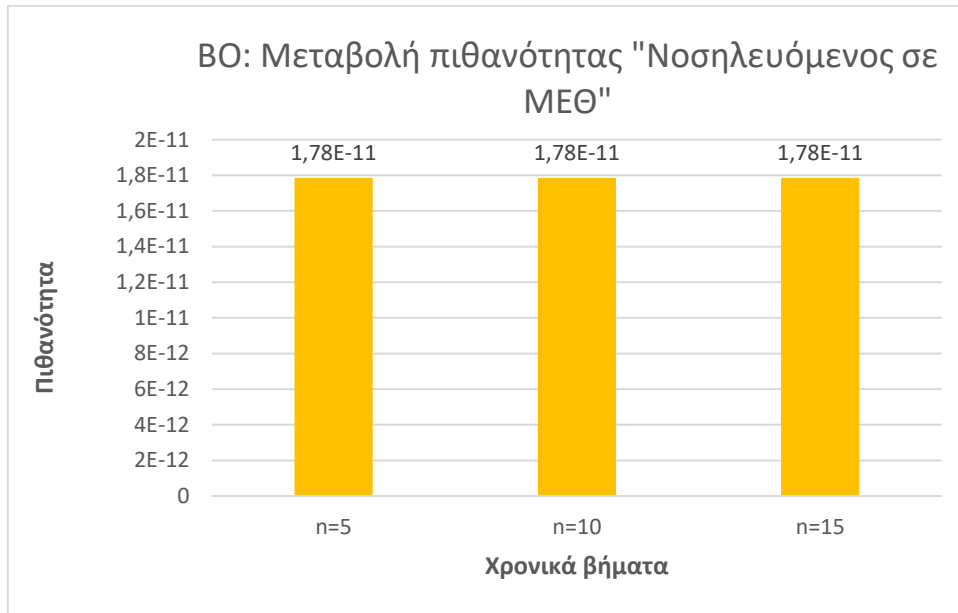
Διάγραμμα 177-Μεταβολή πιθανότητας "Υγιής πληθυσμός" δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου ΒΟ



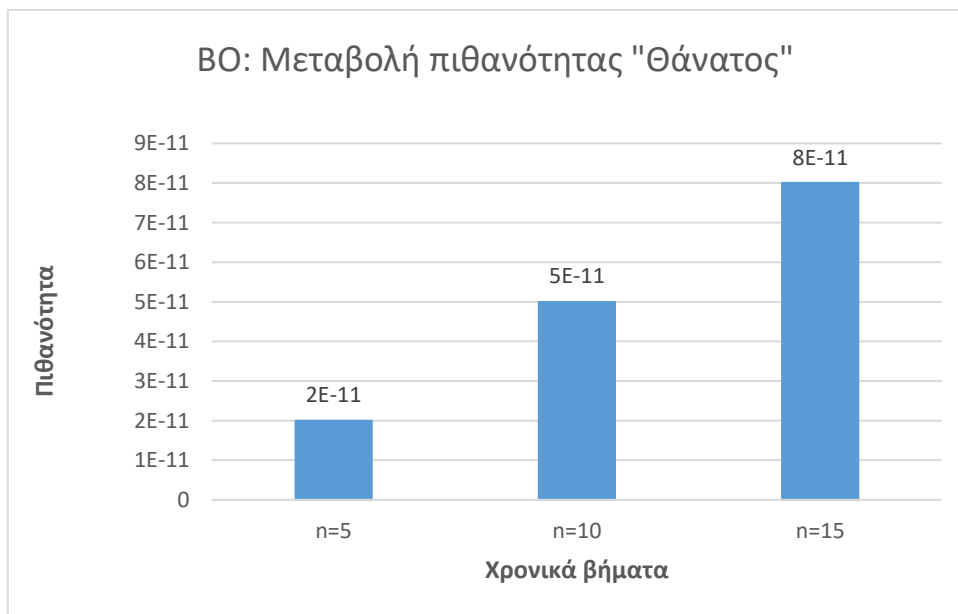
Διάγραμμα 178-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO



Διάγραμμα 179-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO

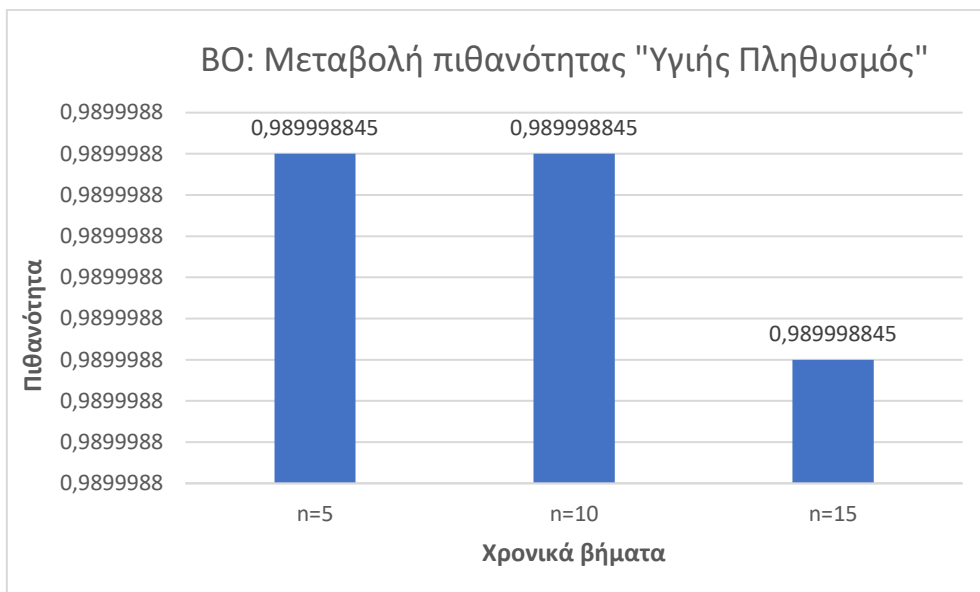


Διάγραμμα 180-Μεταβολή πιθανότητας "Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ" δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO

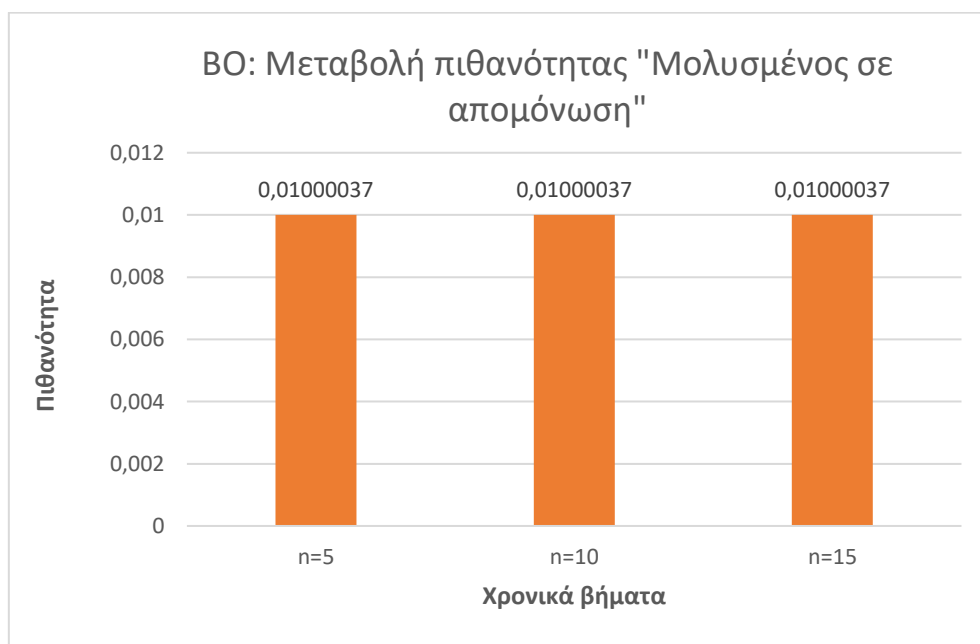


Διάγραμμα 181-Μεταβολή πιθανότητας "Θάνατος" δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλου BO

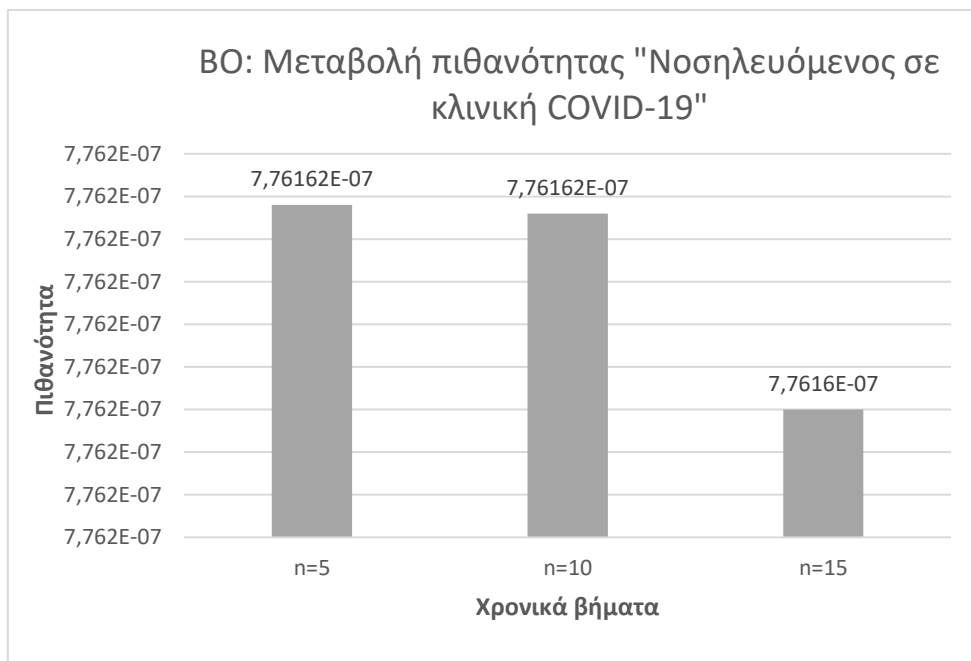
Στα **διαγράμματα 182, 183, 184, 185 και 186** απεικονίζεται η μεταβολή της πιθανότητας κάθε κατάστασης μετά από $n = 5, 10, 15$ χρονικά βήματα, δεδομένου ότι αρχικά βρισκόμαστε στην κατάσταση «**Μολυσμένος σε απομόνωση**»:



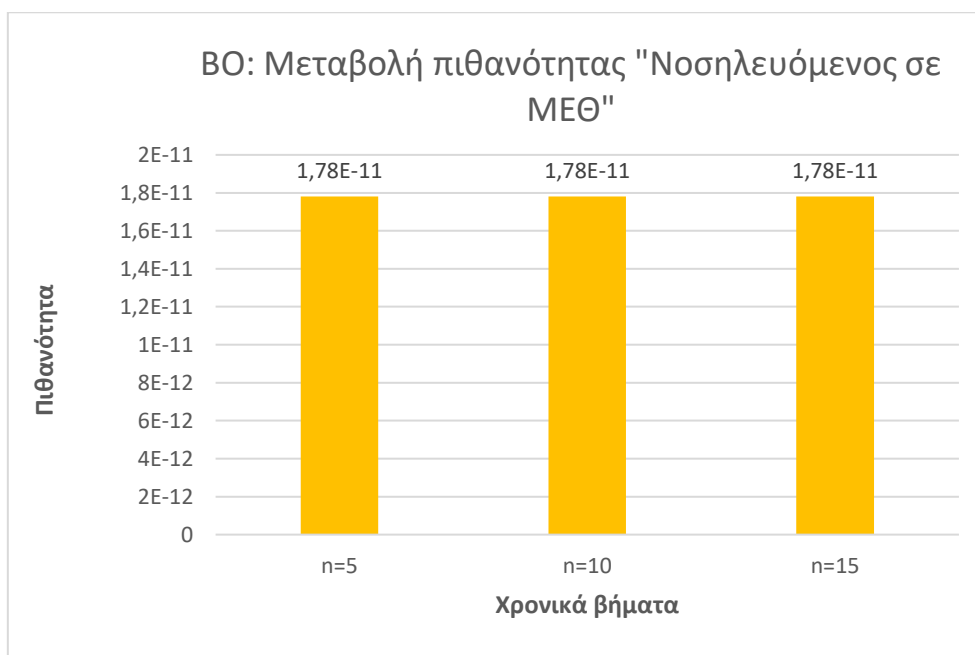
Διάγραμμα 182-Μεταβολή πιθανότητας "Υγιής πληθυσμός" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου BO



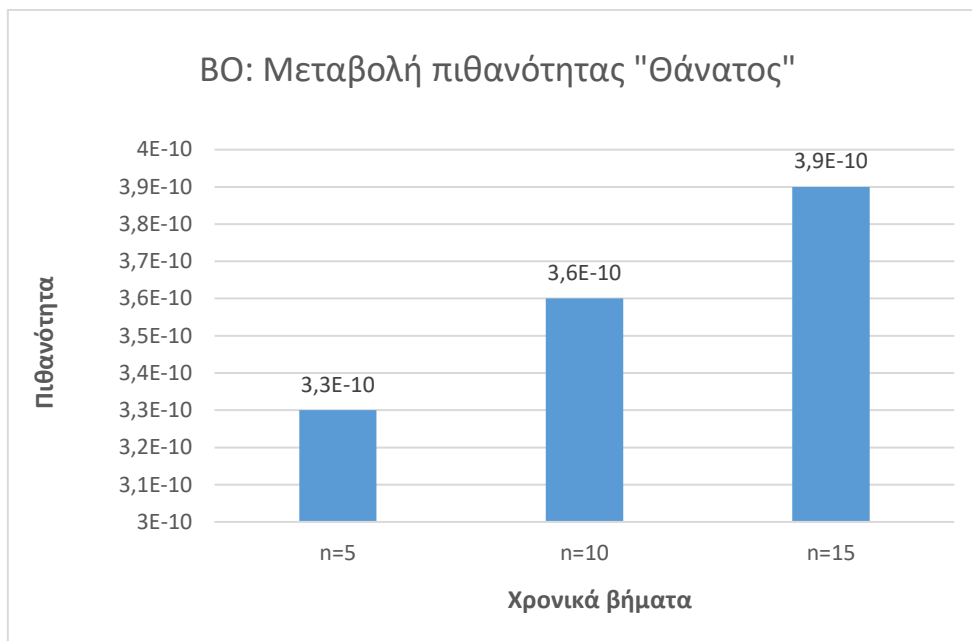
Διάγραμμα 183-Μεταβολή πιθανότητας "Μολυσμένος σε απομόνωση" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου BO



Διάγραμμα 184-Μεταβολή πιθανότητας “ Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου ΒΟ

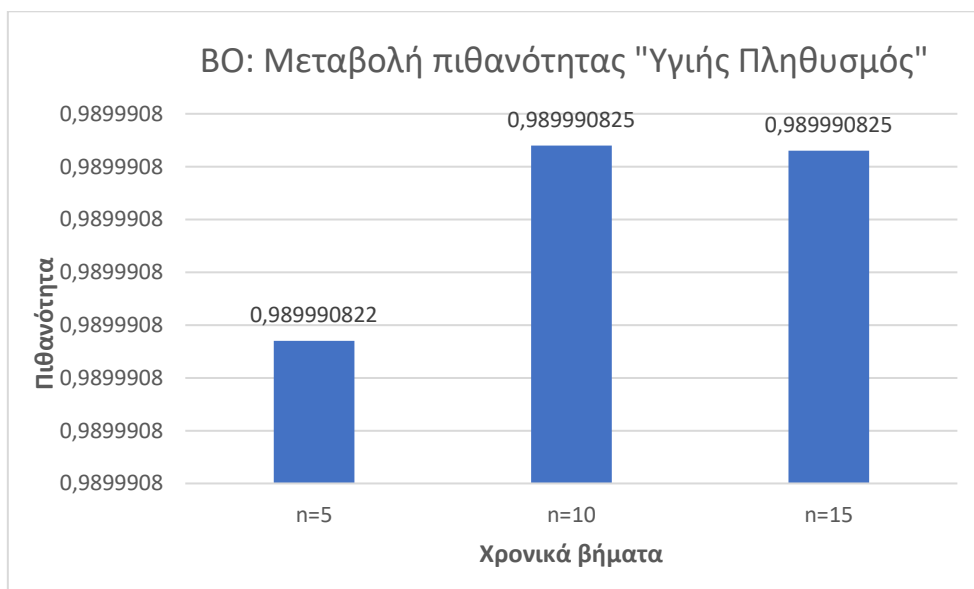


Διάγραμμα 185-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου ΒΟ

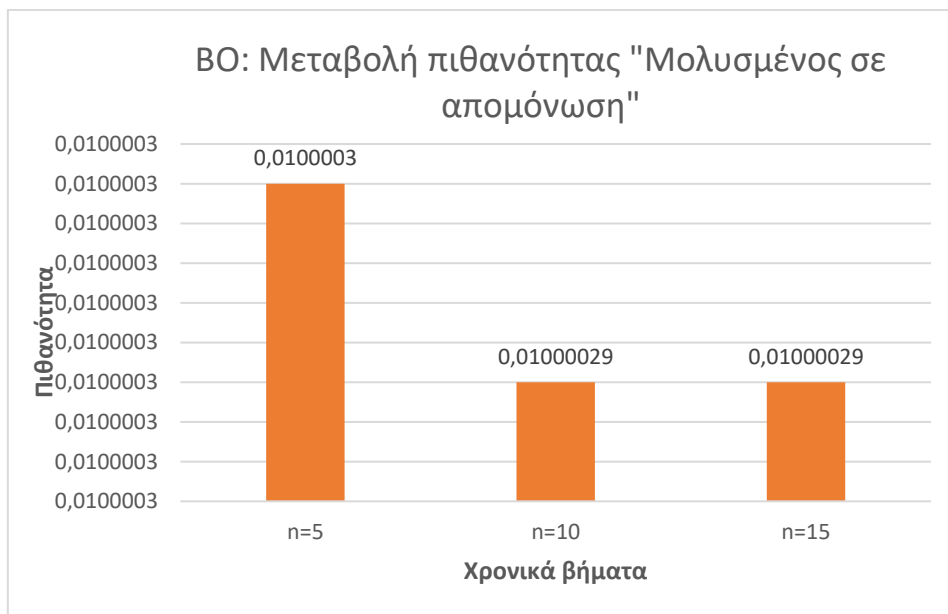


Διάγραμμα 186-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλου BO

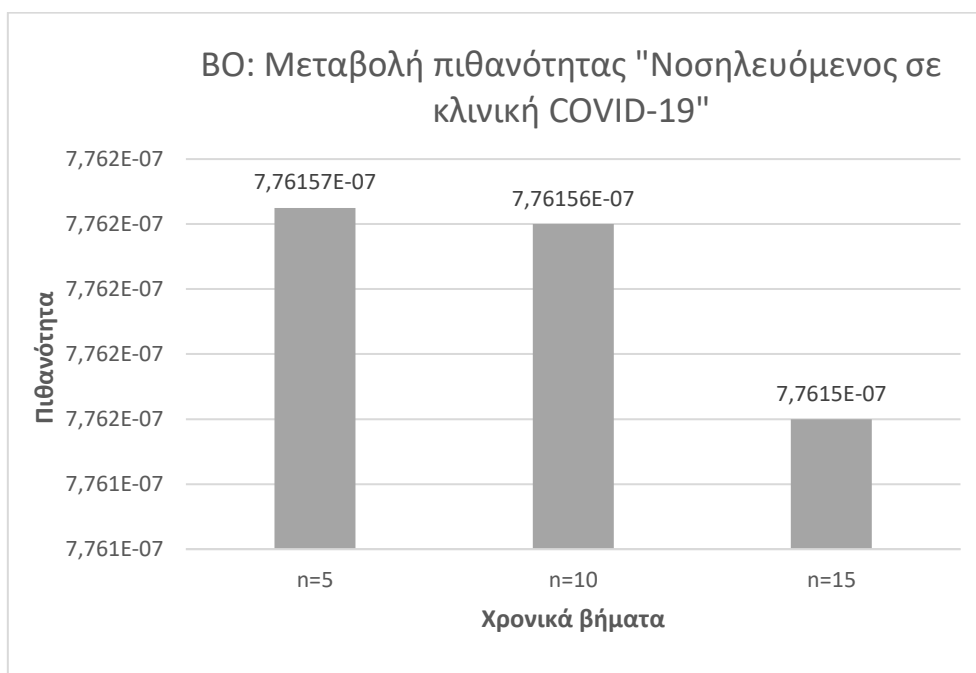
Στη συνέχεια, στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζεται η μεταβολή πιθανότητας κάθε κατάστασης μετά από $n = 5, 10, 15$ χρονικά βήματα, δεδομένου ότι η αρχική θέση της διαδικασίας είναι η κατάσταση «**Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19**»:



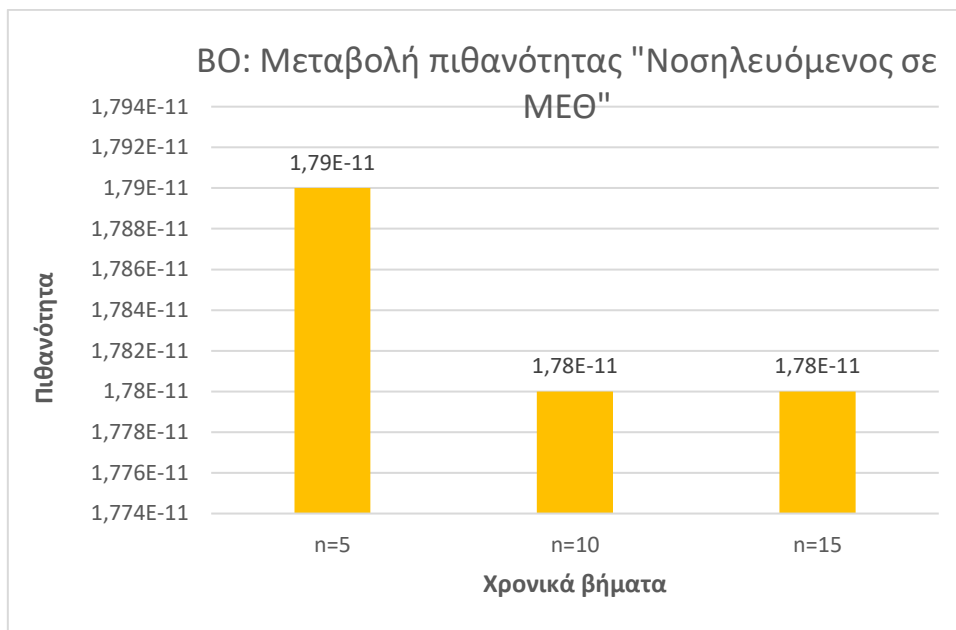
Διάγραμμα 187-Μεταβολή πιθανότητας “Υγιής πληθυσμός” δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου BO



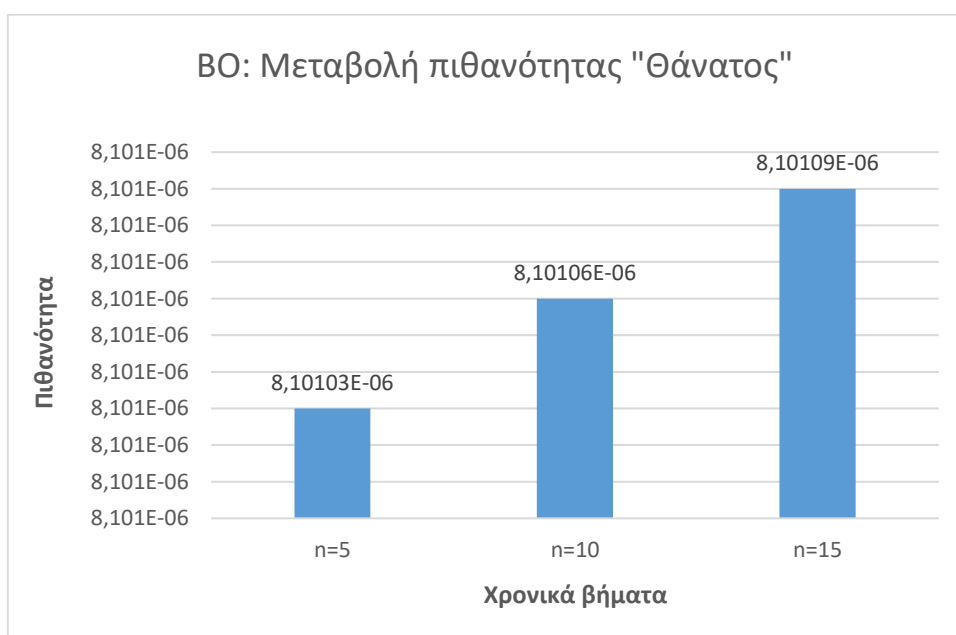
Διάγραμμα 188-Μεταβολή πιθανότητας “Μολυσμένος σε απομόνωση” δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου ΒΟ



Διάγραμμα 189-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19” δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλου ΒΟ

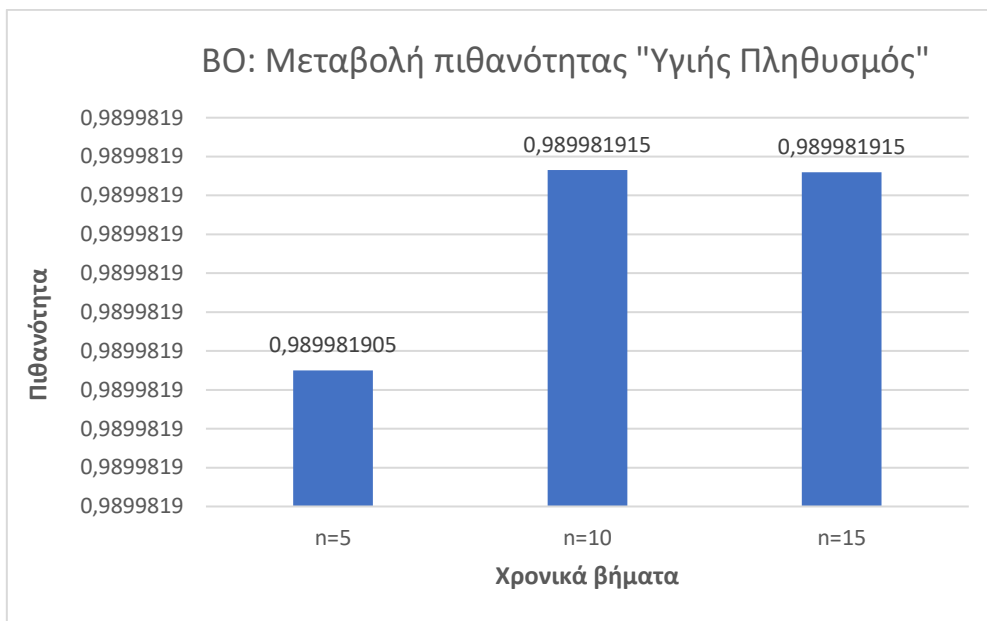


Διάγραμμα 190-Μεταβολή πιθανότητας “Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου ΒΟ

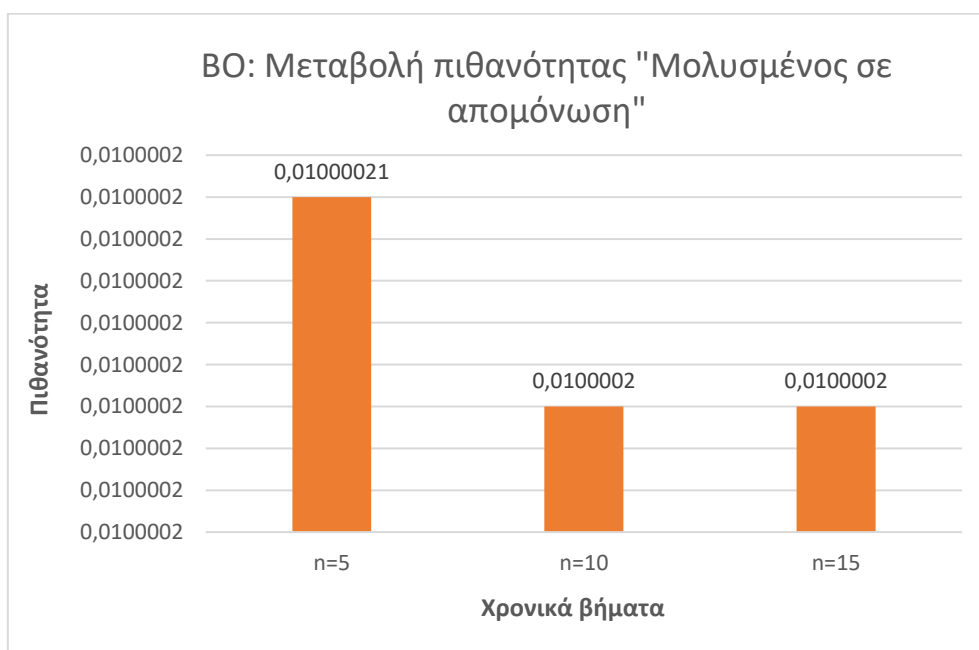


Διάγραμμα 191-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλου ΒΟ

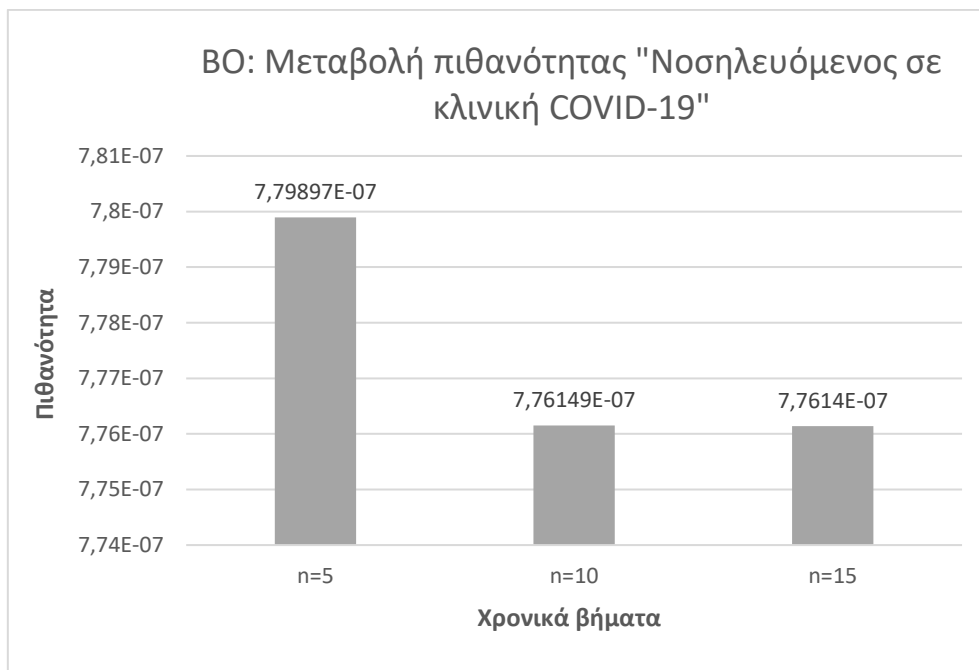
Τέλος, στα **διαγράμματα 192, 193, 194, 195 και 196** απεικονίζεται η μεταβολή της πιθανότητας κάθε κατάστασης, δεδομένου ότι αρχικά βρισκόμαστε στην κατάσταση «Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ», μετά από $n = 5, 10, 15$ χρονικές:



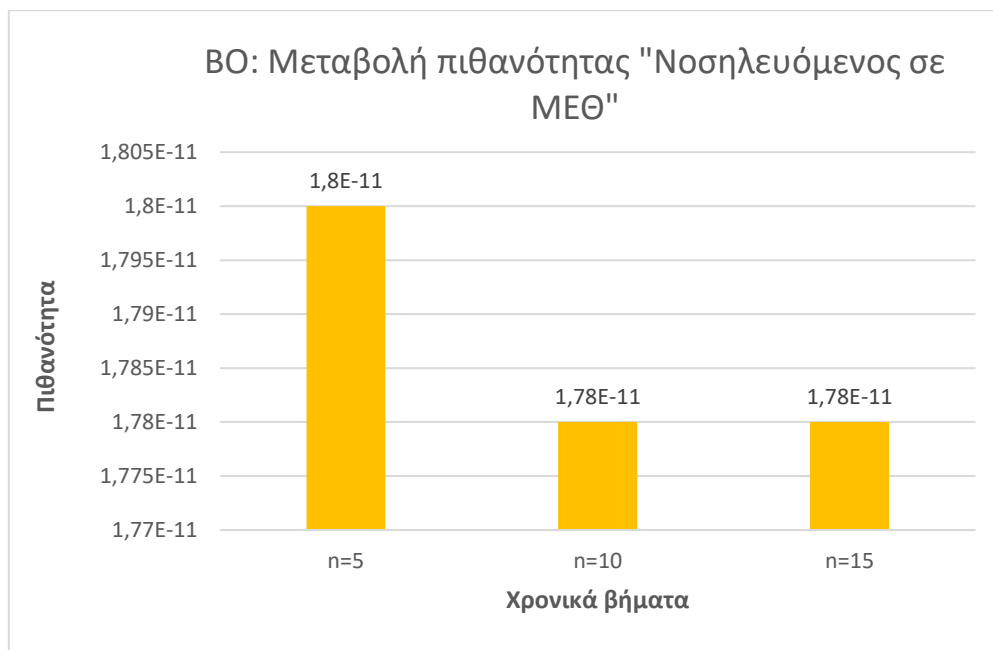
Διάγραμμα 192-Μεταβολή πιθανότητας "Υγιής πληθυσμός" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλου BO



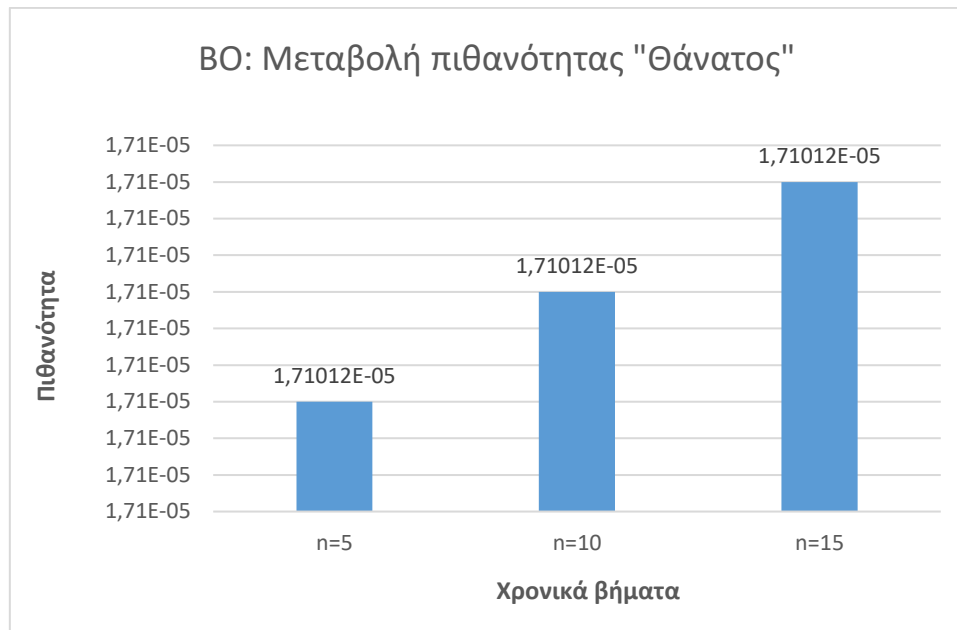
Διάγραμμα 193-Μεταβολή πιθανότητας "Μολυσμένος σε απομόνωση" δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλου BO



Διάγραμμα 194-Μεταβολή πιθανότητας "Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19" δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου ΒΟ



Διάγραμμα 195-Μεταβολή πιθανότητας "Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ" δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου ΒΟ



Διάγραμμα 196-Μεταβολή πιθανότητας “Θάνατος” δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλου BO

Όπως παρατηρούμε από το **διάγραμμα 177** έως το **διάγραμμα 196**, η μεταβολή πιθανοτήτων των καταστάσεων είναι αρκετά μικρή στο διάστημα των $n = 5, 10, 15$ χρονικών βημάτων (ημερών) που εξετάζουμε, με ορισμένες πιθανότητες να παραμένουν ακριβώς ίδιες. Αυτό συμβαίνει, διότι οι μεταβάσεις ενός βήματος συντελούνται με πολύ μεγάλες πιθανότητες (πχ. $p_{11} = 0,99$) ή διαφορετικά πολύ μικρές ($p_{34} = 0,0000081$), συνεπώς η διαφορά θα φαινόταν καλύτερα σε ένα αρκετά μεγαλύτερο αριθμό ημερών n . Ένα τέτοιο σενάριο όμως δεν καθίσταται ρεαλιστικό, καθώς όσο πιο μακροπρόθεσμη είναι η πρόβλεψη τόσο πιο δύσκολο είναι να ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα.

3.6.3 Υπολογισμός πιθανότητα επιβίωσης n βημάτων για το μοντέλο BO

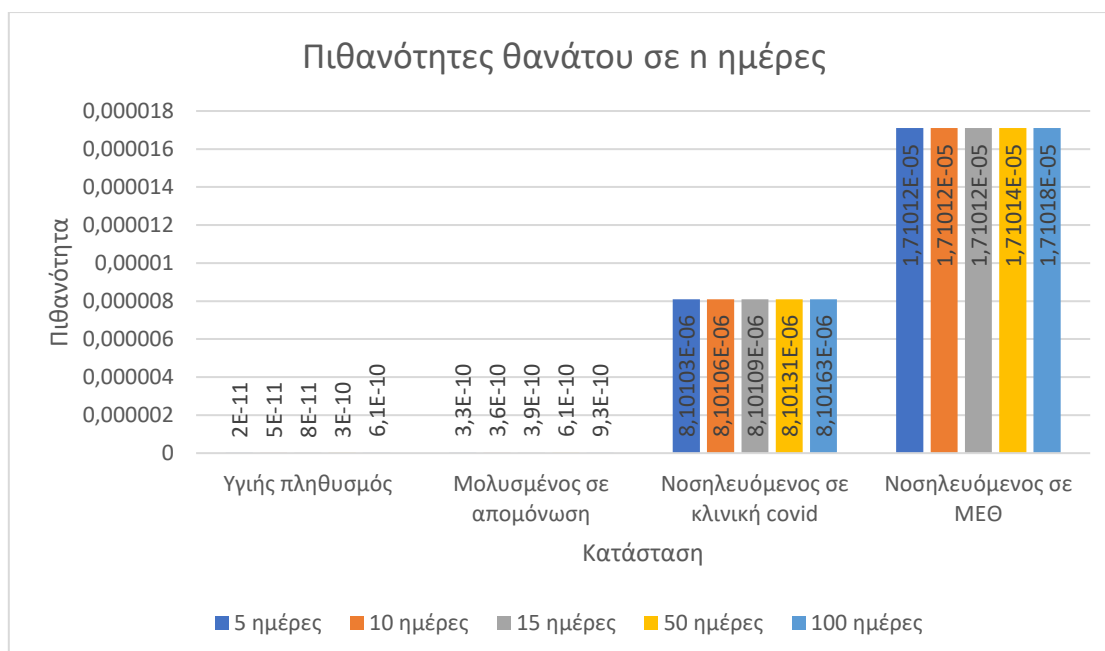
Δεδομένου ότι κάποιος βρίσκεται στην κατάσταση $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ποια είναι η πιθανότητα επιβίωσης μετά από n βήματα;

Με σκοπό τον υπολογισμό των πιθανοτήτων επιβίωσης n -οστού βήματος των παροδικών καταστάσεων που προκύπτουν από την εξίσωση (9), αρχικά θα εκτιμήσουμε την **πιθανότητα απορρόφησης** $[p(n)]_{i,5}$ μετά από $n = 5, 10, 15, 50, 100, 200, 1000$ βήματα, δεδομένου ότι αρχικά κάποιος βρίσκεται στην κατάσταση $i = 1, 2, 3, 4$:

	5 ημέρες	10 ημέρες	15 ημέρες	50 ημέρες	100 ημέρες	200 ημέρες	1000 ημέρες
1	2×10^{-11}	5×10^{-11}	8×10^{-11}	3×10^{-10}	$6,1 \times 10^{-10}$	$1,24 \times 10^{-9}$	$6,27 \times 10^{-9}$
2	$3,3 \times 10^{-10}$	$3,6 \times 10^{-10}$	$3,9 \times 10^{-10}$	$6,1 \times 10^{-10}$	$9,3 \times 10^{-10}$	$1,56 \times 10^{-9}$	$6,59 \times 10^{-9}$
3	$8,10103 \times 10^{-6}$	$8,10106 \times 10^{-6}$	$8,10109 \times 10^{-6}$	$8,10131 \times 10^{-6}$	$8,10163 \times 10^{-6}$	$8,10226 \times 10^{-6}$	$8,10729 \times 10^{-6}$
4	$1,710116 \times 10^{-5}$	$1,710119 \times 10^{-5}$	$1,710122 \times 10^{-5}$	$1,710144 \times 10^{-5}$	$1,710176 \times 10^{-5}$	$1,710238 \times 10^{-5}$	$1,710741 \times 10^{-5}$

Πίνακας 28-Πιθανότητες θανάτου από κάθε κατάσταση για n=5,10,15,50,100,200,1000 ημέρες μοντέλου ΒΟ

Το ακόλουθο διάγραμμα παρουσιάζει την πιθανότητα θανάτου μετά από $n \in \{5, 10, 15, 50, 100\}$ ημέρες, δεδομένου ότι η διαδικασία ξεκινάει από την κατάσταση $i \in \{1, 2, 3, 4\}$:



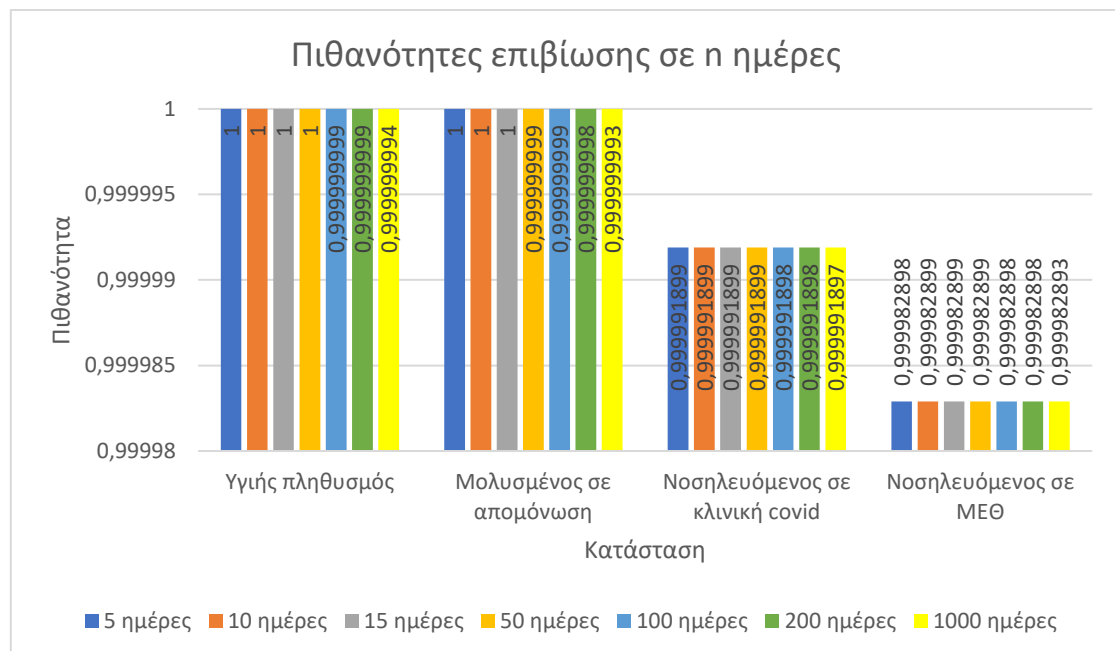
Διάγραμμα 197-Πιθανότητες θανάτου από κάθε κατάσταση για n=5,10,15,50,100 ημέρες μοντέλου ΒΟ

Επομένως, οι αντίστοιχες πιθανότητες επιβίωσης μετά από n βήματα προκύπτουν αν αφαιρέσουμε τις πιθανότητες απορρόφησης $[p(n)]_{i,5}$ από τη μονάδα. Για $n = 5, 10, 15, 50, 100, 200, 1000$ έχουμε:

	5 ημέρες	10 ημέρες	15 ημέρες	50 ημέρες	100 ημέρες	200 ημέρες	1000 ημέρες
1	0,999999999 98	0,999999999 95	0,999999999 92	0,999999999 60	0,999999999 39	0,999999998 76	0,999999993 73
2	0,999999999 67	0,999999999 64	0,999999999 61	0,999999999 39	0,999999999 07	0,999999998 44	0,999999993 41
3	0,999991898 97	0,999991898 94	0,999991898 91	0,999991898 69	0,999991898 37	0,999991897 74	0,999991897 1
4	0,999982898 4	0,999982898 81	0,999982898 78	0,999982898 56	0,999982898 24	0,999982897 62	0,999982892 59

Πίνακας 29-Πιθανότητες επιβίωσης από κάθε κατάσταση για $n=5,10,15,50,100,200,1000$ ημέρες μοντέλου ΒΟ

Το αντίστοιχο διάγραμμα που απεικονίζει τις πιθανότητες επιβίωσης ύστερα από $n \in \{5, 10, 15, 50, 100, 200, 1000\}$ ημέρες, είναι το ακόλουθο:



Διάγραμμα 198-Πιθανότητες επιβίωσης από κάθε κατάσταση για $n=5,10,15,50,100,200,1000$ ημέρες μοντέλου ΒΟ

Σε αυτό το μέτρο απόδοσης, όπως και στο προηγούμενο, παρατηρούμε πως οι πιθανότητες θανάτου και κατ' επέκταση οι πιθανότητες επιβίωσης n -οστού βήματος των καταστάσεων, όπως παρουσιάζονται στο **διάγραμμα 197** και στο **διάγραμμα 198** αντίστοιχα, δεν διαφέρουν ιδιαίτερα στο διάστημα των ημερών που εξετάζεται.

3.6.4 Υπολογισμός πιθανότητα απορρόφησης για το μοντέλο ΒΟ

Η πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση 5, υπό την προϋπόθεση ότι η διαδικασία έχει ξεκινήσει από την κατάσταση $i \in \{1,2,3,4\}$, συμβολίζεται με b_{ij} . Μέσω της θεωρίας καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως μακροπρόθεσμα για ένα πολύ μεγάλο αριθμό ημερών, όλος ο πληθυσμός των μεταβατικών καταστάσεων θα καταλήξει στην απορροφητική κατάσταση. Επομένως, οι πιθανότητες απορρόφησης στην κατάσταση «Θάνατος» θα είναι $b_{15} = 1, b_{25} = 1, b_{35} = 1, b_{45} = 1$. Ορίζουμε \mathbf{B} ένα διάνυσμα γραμμής με τις καταχωρήσεις b_{ij} :

$$\mathbf{B} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

3.6.5 Υπολογισμός αναμενόμενου χρόνου θανάτου για το μοντέλο ΒΟ

Για την προσέγγιση του αναμενόμενου χρόνου θανάτου των μεταβατικών καταστάσεων, θα χρησιμοποιήσουμε τον πρωταρχικό πίνακα \mathbf{R} , όπου προκύπτει από τη σχέση (10):

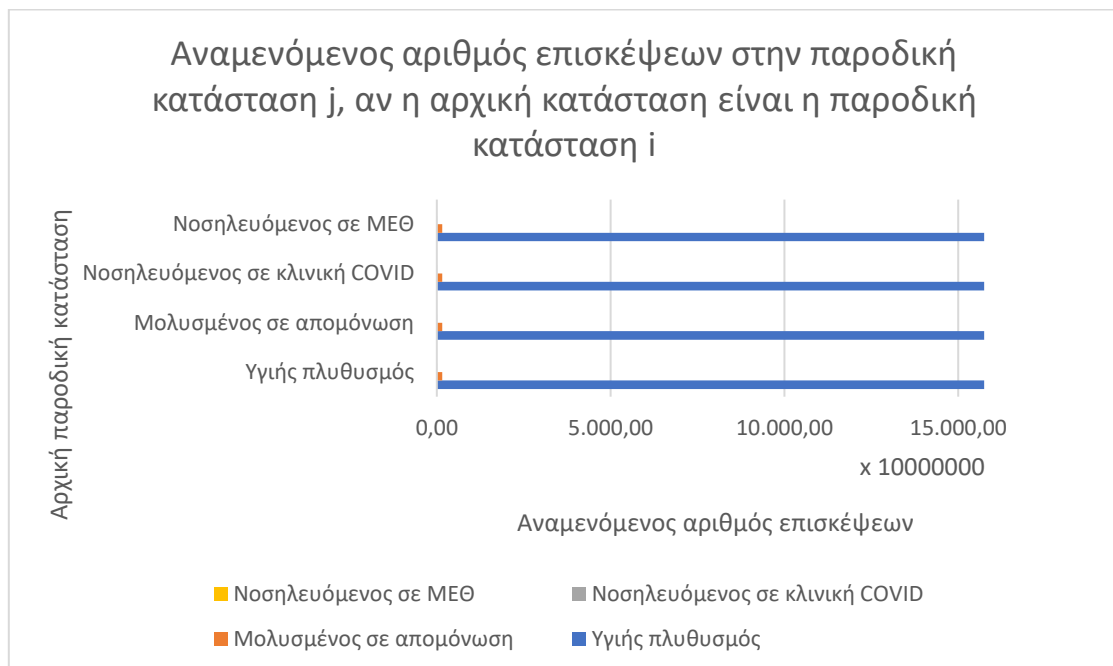
	1	2	3	4
1	$1,574655 \times 10^{11}$	$1,590623 \times 10^9$	$1,234535 \times 10^5$	2,8394
2	$1,574655 \times 10^{11}$	$1,590623 \times 10^9$	$1,234535 \times 10^5$	2,8394
3	$1,574642 \times 10^{11}$	$1,590610 \times 10^9$	$1,234535 \times 10^5$	2,8394
4	$1,574628 \times 10^{11}$	$1,590596 \times 10^9$	$1,234524 \times 10^5$	3,8394

Πίνακας 30-Πρωταρχικός πίνακας μοντέλου ΒΟ

Ο πίνακας \mathbf{R} υπολογίζει τον αναμενόμενο αριθμό επισκέψεων στις καταστάσεις 1, 2, 3 και 4, δεδομένου ότι κάποιος έχει ξεκινήσει από:

- την κατάσταση 1:
 $R_{11}=1,574655 \times 10^{11}$, $R_{12}=1,590623 \times 10^9$, $R_{13}=1,234535 \times 10^5$, $R_{14}=2,8394$
- την κατάσταση 2:
 $R_{21}=1,574655 \times 10^{11}$, $R_{22}=1,590623 \times 10^9$, $R_{23}=1,234535 \times 10^5$, $R_{24}=2,8394$
- την κατάσταση 3:
 $R_{31}=1,574642 \times 10^{11}$, $R_{32}=1,590610 \times 10^9$, $R_{33}=1,234535 \times 10^5$, $R_{34}=2,8394$
- την κατάσταση 4:
 $R_{41}=1,574628 \times 10^{11}$, $R_{42}=1,590596 \times 10^9$, $R_{43}=1,234524 \times 10^5$, $R_{44}=3,8394$

Το παρακάτω γράφημα παρουσιάζει τον αναμενόμενο αριθμό επισκέψεων σε κάθε μία από τις μεταβατικές καταστάσεις $j \in \{1,2,3,4\}$, δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση της διαδικασίας είναι η επίσης μεταβατική κατάσταση $i \in \{1,2,3,4\}$:



Διάγραμμα 199-Αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων των παροδικών καταστάσεων μοντέλου ΒΟ

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενες ενότητες, ο αναμενόμενος χρόνος θανάτου (σε ημέρες), εξαρτάται από την αρχική θέση που βρίσκεται το σύστημα. Συνεπώς, στην περίπτωση που η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση i , ο αναμενόμενος χρόνος απορρόφησής στην κατάσταση «Θάνατος», συμβολίζεται με T_i , όπου $i \in \{1,2,3,4\}$:

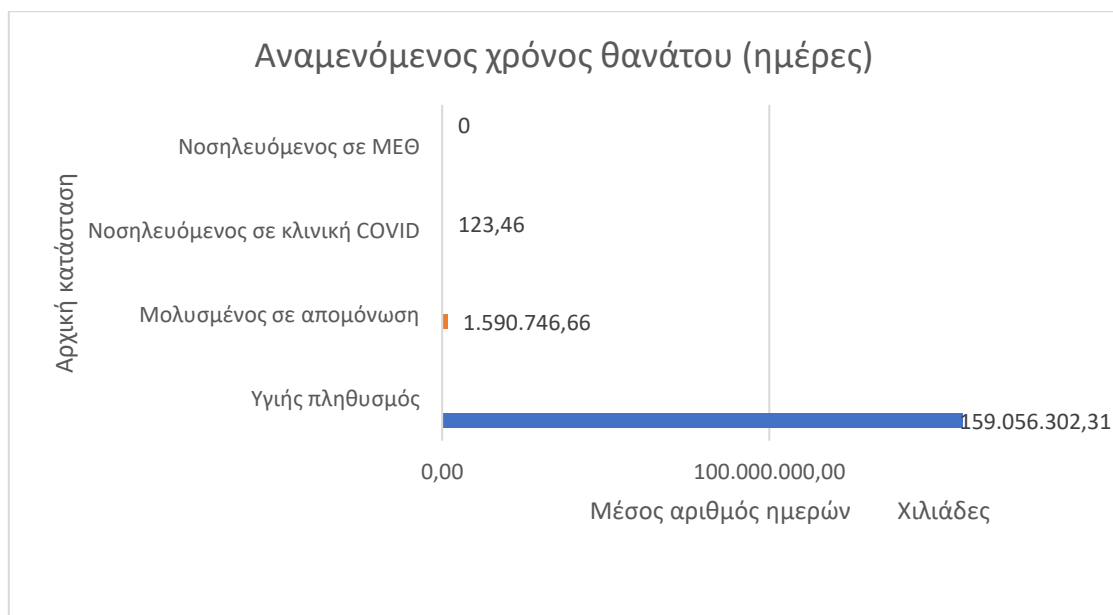
$$T_1 = R_{11} + R_{12} + R_{13} + R_{14} = 159.056.302.307,9004 \text{ ημέρες}$$

$$T_2 = R_{22} + R_{23} + R_{24} = 1.590.746.658,3326 \text{ ημέρες}$$

$$T_3 = R_{33} + R_{34} = 123.456,3528 \text{ ημέρες}$$

$$T_4 = R_{44} = 3,8394 \text{ ημέρες}$$

Ο αναμενόμενος χρόνος θανάτου δεδομένου πως η διαδικασία έχει ξεκινήσει από την κατάσταση i , απεικονίζεται διαγραμματικά στο παρακάτω γράφημα:



Διάγραμμα 200-Αναμενόμενος χρόνος θανάτου μοντέλου ΒΟ

Όπως παρατηρούμε στο συγκεκριμένο μέτρο απόδοσης τα αποτελέσματα δεν είναι ρεαλιστικά, καθώς ο αναμενόμενος χρόνος θανάτου ενός ατόμου που έχει χορηγηθεί αναμνηστική δόση, δεδομένης της αρχικής κατάστασης «Υγιής πληθυσμός», ισοδυναμεί με 159.056.302.307,9004 ημέρες, αριθμός που δεν αντιστοιχεί σε ανθρώπινα χρόνια. Ωστόσο ο σκοπός της έρευνας είναι

να εστιάσουμε στο μεγάλο χάσμα που δημιουργείται ανάμεσα στα προκύπτοντα αποτελέσματα του εκάστοτε μοντέλου και μέσω αυτών να προβούμε σε συμπεράσματα για την ανάλυση επιβίωσης των πληθυσμιακών ομάδων αναφορικά με την αποτελεσματικότητα του εμβολιασμού.

3.6.6 Υπολογισμός πιθανότητα παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο BO

Έστω πως η Μαρκοβιανή αλυσίδα μόλις μπήκε στην κατάσταση $i \in \{1,2,3,4\}$. Η πιθανότητα παραμονής σε αυτή μετά από $n \in \{5,10,15\}$ βήματα υπολογίζεται από τη σχέση (12) και ισοδυναμεί με:

- Για $n=5$:

$$P_1^{(5)} = 9,509900499000008 \times 10^{-3}$$

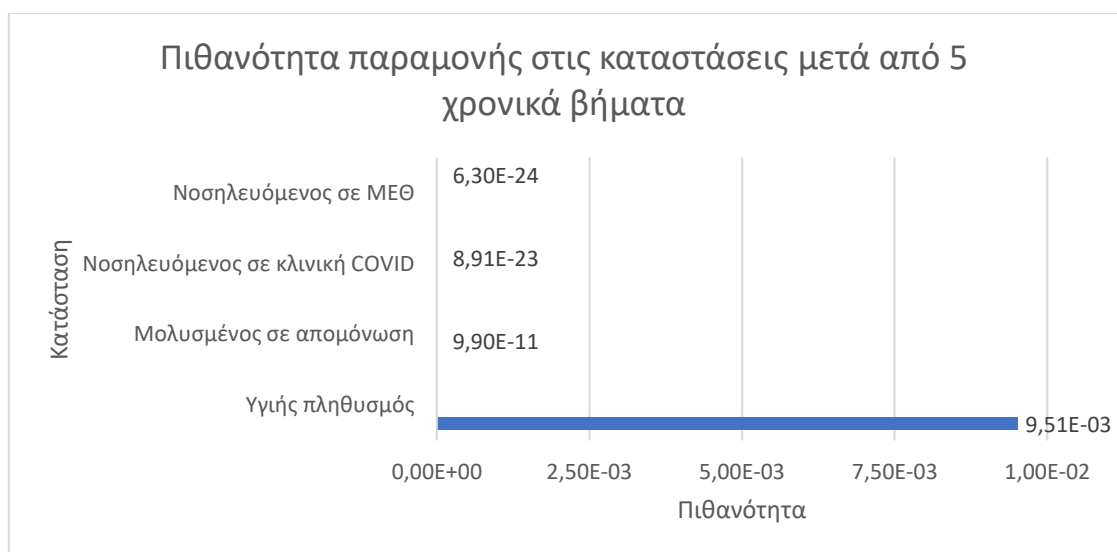
$$P_2^{(5)} = 9,898073549812691 \times 10^{-11}$$

$$P_3^{(5)} = 8,906993025441632 \times 10^{-23}$$

$$P_4^{(5)} = 6,297489705673199 \times 10^{-24}$$

$$P_5^{(5)} = 1$$

Οι πιθανότητες παραμονής σε κάθε μεταβατική κατάσταση i μετά από 5 χρονικά βήματα, με την προϋπόθεση ότι η διαδικασία μόλις έχει μπει σε αυτή, παρουσιάζεται διαγραμματικά ως εξής:



Διάγραμμα 201-Πιθανότητα παραμονής των καταστάσεων μετά από $n=5$ ημέρες μοντέλου BO

- Για $n=10$:

$$P_1^{(10)} = 9,043820750088052 \times 10^{-3}$$

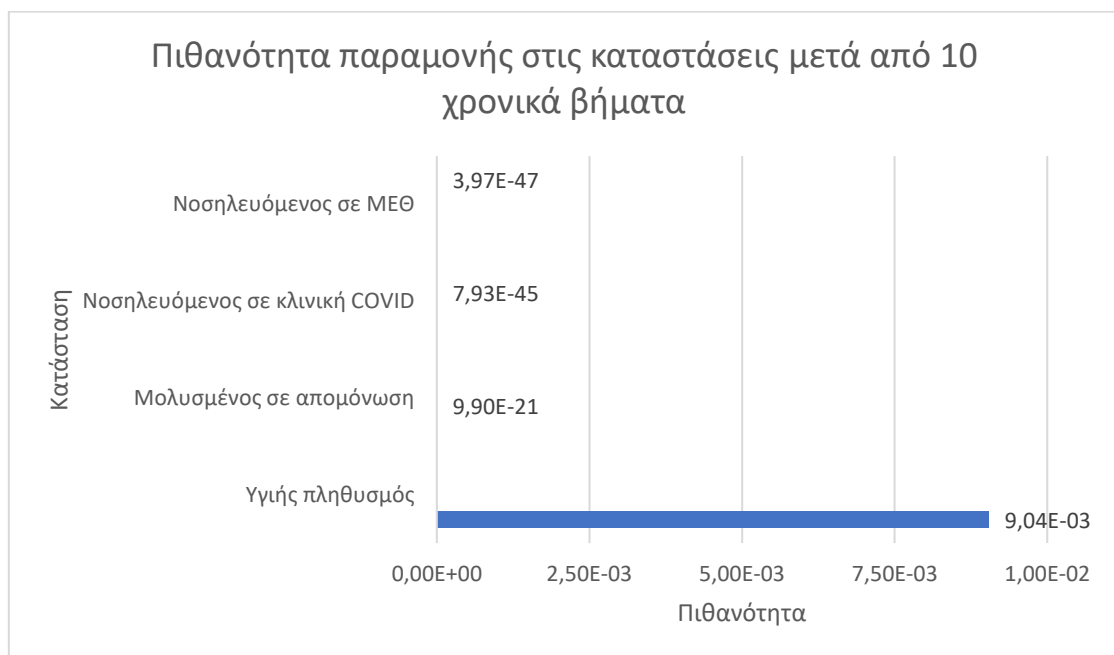
$$P_2^{(10)} = 9,896143576014306 \times 10^{-21}$$

$$P_3^{(10)} = 7,933761098833333 \times 10^{-45}$$

$$P_4^{(10)} = 3,965928479068162 \times 10^{-47}$$

$$P_5^{(10)} = 1$$

Ακολούθως, παρουσιάζεται διαγραμματικά η πιθανότητα παραμονής στις καταστάσεις, μετά την πάροδο 10 χρονικών βημάτων:



Διάγραμμα 202-Πιθανότητα παραμονής των καταστάσεων μετά από $n=10$ ημέρες μοντέλου ΒΟ

- Για $n=15$:

$$P_1^{(15)} = 8,600583546412891 \times 10^{-3}$$

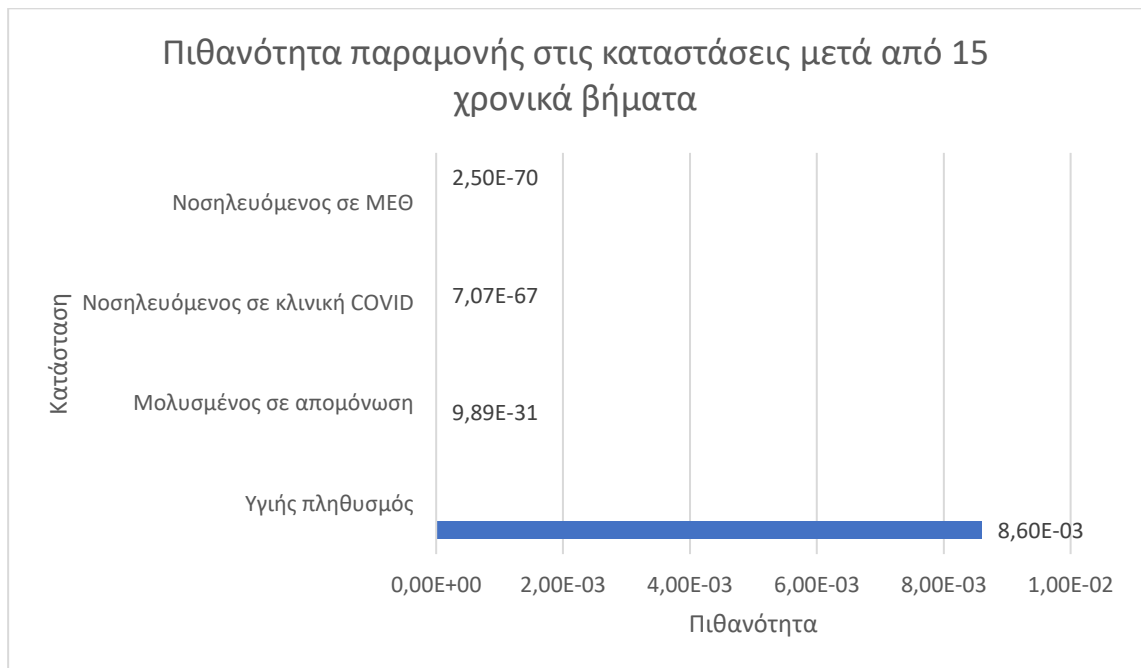
$$P_2^{(15)} = 9,894213978531460 \times 10^{-31}$$

$$P_3^{(15)} = 7,066870378540590 \times 10^{-67}$$

$$P_4^{(15)} = 2,497596571998291 \times 10^{-70}$$

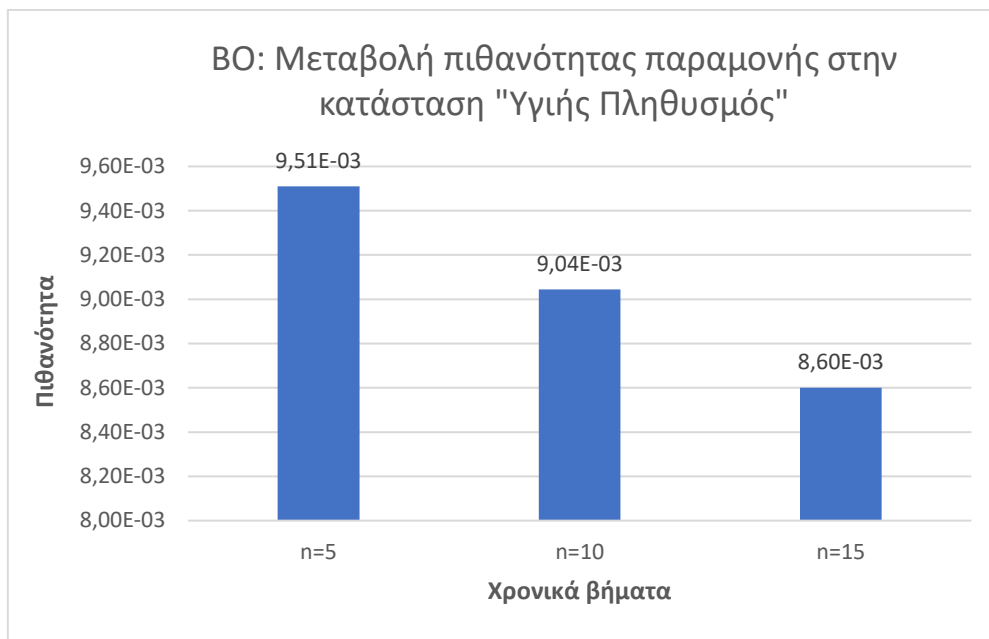
$$P_5^{(15)} = 1$$

Τέλος, οι πιθανότητες παραμονής των μεταβατικών καταστάσεων μετά από 15 χρονικές στιγμές απεικονίζονται στο **διάγραμμα 203**:

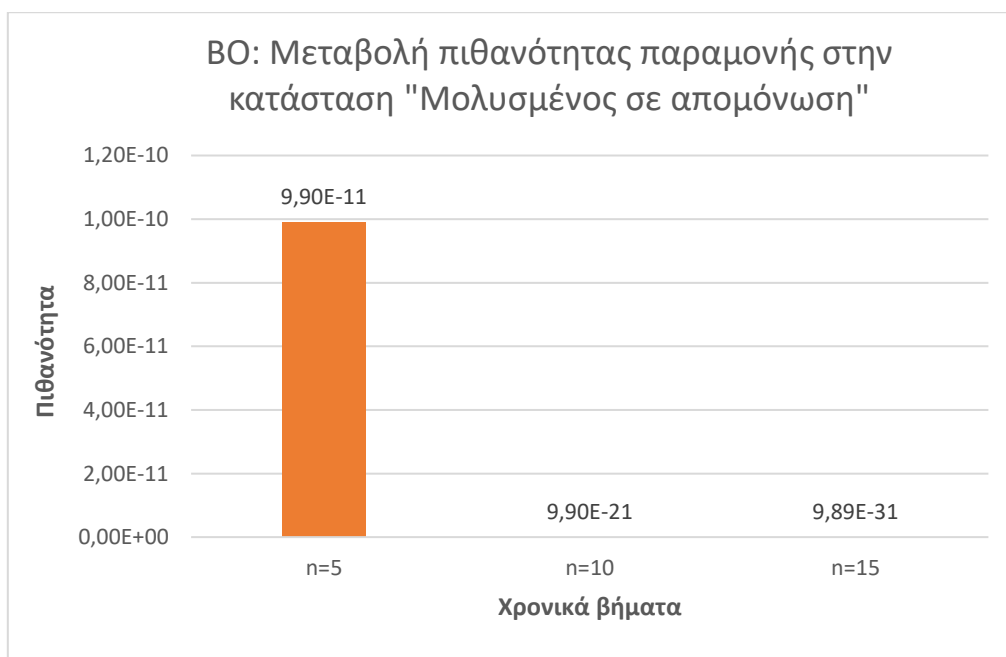


Διάγραμμα 203-Πιθανότητα παραμονής των καταστάσεων μετά από n=15 ημέρες μοντέλου ΒΟ

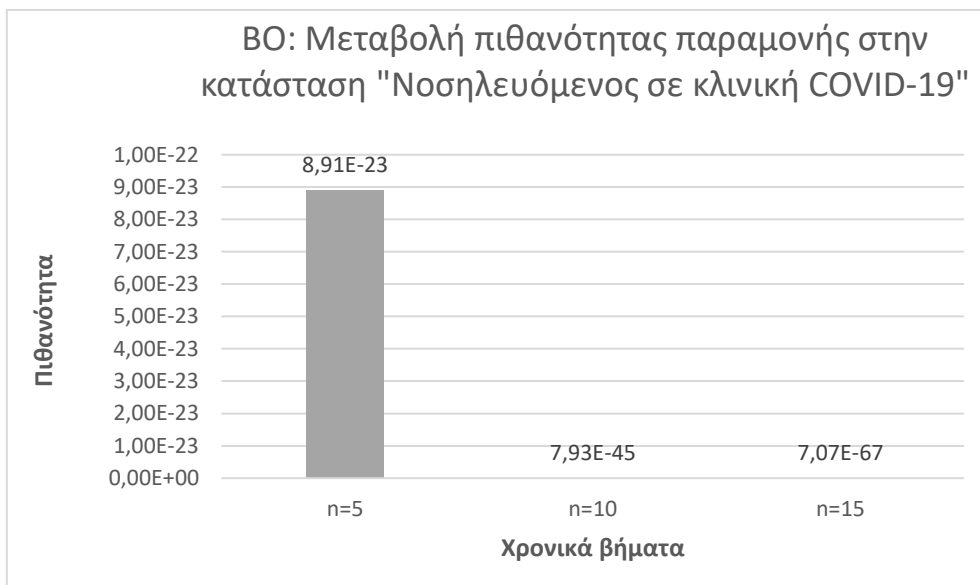
Θεωρούμε πως η Μαρκοβιανή αλυσίδα μόλις μπήκε στην μεταβατική κατάσταση $i = 1,2,3,4$. Μας ενδιαφέρει να απεικονίσουμε διαγραμματικά την μεταβολή της πιθανότητας παραμονής της διαδικασίας στην ίδια κατάσταση μετά από $n = 5,10,15$ χρονικές στιγμές. Τα **διαγράμματα 204, 205, 206** και **207** που ακολουθούν παρουσιάζουν την μεταβολή των πιθανοτήτων παραμονής της διαδικασίας σε κάθε κατάσταση i ξεχωριστά:



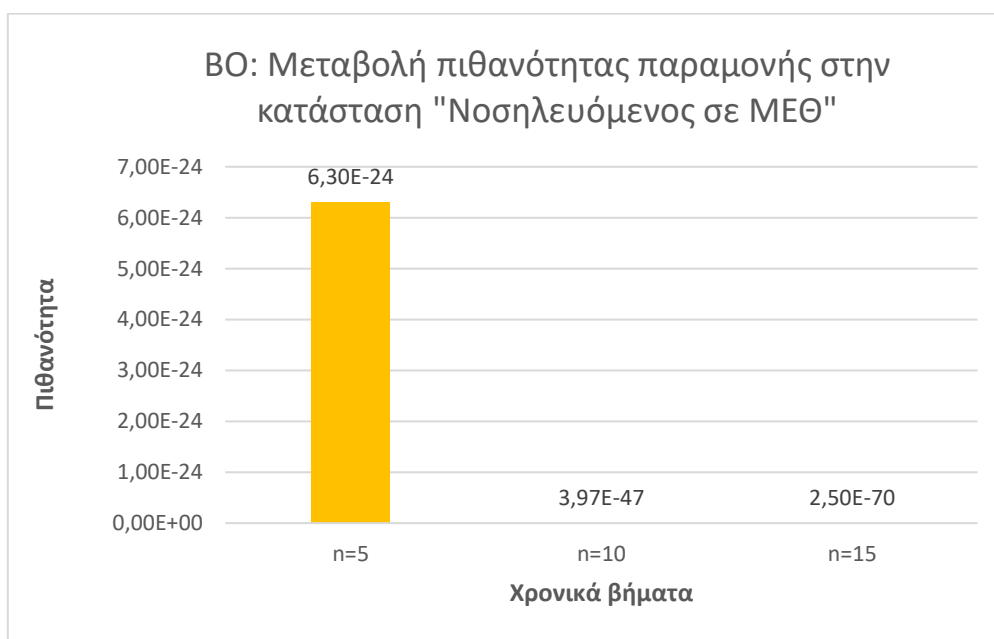
Διάγραμμα 204-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής "Υγιής πληθυσμός" μοντέλου ΒΟ



Διάγραμμα 205 Μεταβολή πιθανότητας παραμονής "Μολυσμένος σε απομόνωση" μοντέλου ΒΟ



Διάγραμμα 206 Μεταβολή πιθανότητας παραμονής "Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19" μοντέλου ΒΟ



Διάγραμμα 207 Μεταβολή πιθανότητας παραμονής "Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ" μοντέλου ΒΟ

3.6.7 Υπολογισμός μέσου χρόνου παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο ΒΟ

Ο αναμενόμενος αριθμός χρονικών βημάτων που η αλυσίδα (M.A) θα παραμείνει σε κάθε κατάσταση κάθε φορά που την επισκέπτεται, εκτός από την απορροφητική, προκύπτει από τη εξίσωση (13):

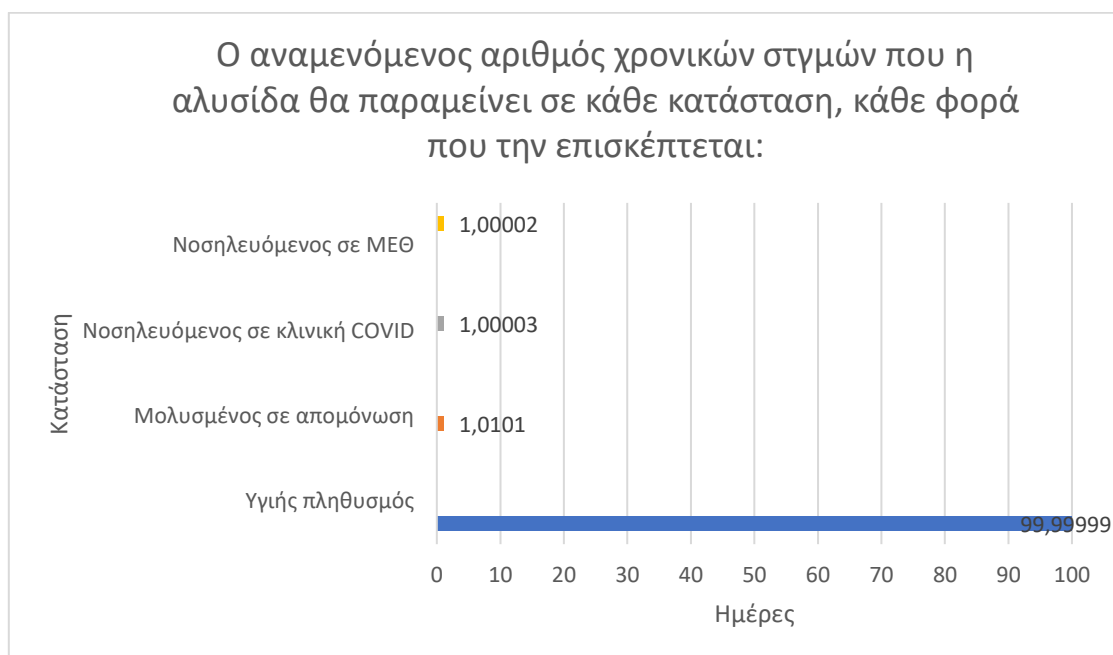
$$E(T_1) = 99,99999 \text{ ημέρες}$$

$$E(T_2) = 1,01010 \text{ ημέρες}$$

$$E(T_3) = 1,00003 \text{ ημέρες}$$

$$E(T_4) = 1,00002 \text{ ημέρες}$$

Το ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζει το μέσο χρόνο που θα παραμείνει η αλυσίδα σε κάθε μεταβατική κατάσταση, κάθε φορά που την επισκέπτεται:



Διάγραμμα 208-Μέσος χρόνος παραμονής κάθε κατάστασης μοντέλου ΒΟ

Στο **διάγραμμα 208** διακρίνουμε πως ο μέσος χρόνος παραμονής διαφέρει σημαντικά στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός» συγκριτικά με τις υπόλοιπες μεταβατικές καταστάσεις. Δεδομένων των πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος που προέκυψαν στον **Πίνακας 3-Πίνακας** μετάβασης πιθανοτήτων μοντέλου ΒΟ, είναι λογικό να συμβαίνει αυτό, καθώς η πιθανότητα παραμονής στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός» ισοδυναμεί με $p_{11} = 0,99$, ενώ στις υπόλοιπες καταστάσεις κυμαίνεται λίγο πάνω από το μηδέν.

3.6.8 Υπολογισμός διακύμανσης του μέσου χρόνου παραμονής σε κάθε κατάσταση για το μοντέλο ΒΟ

Στη συνέχεια, υπολογίζεται η διασπορά του αριθμού χρονικών στιγμών που η αλυσίδα θα παραμείνει σε κάθε κατάσταση, κάθε φορά που την επισκέπτεται, εκτός της απορροφητικής, η οποία προκύπτει από την εξίσωση (14):

$$\text{Var}(T_1)=9.899,99999$$

$$\text{Var}(T_2)=0,01020$$

$$\text{Var}(T_3)=0,00003$$

$$\text{Var}(T_4)=0,00002$$

3.7 Συγκρίσεις και αποτελέσματα για την ανάλυση επιβίωσης του πληθυσμού

Στην ενότητα αυτή θα πραγματοποιηθούν συγκρίσεις μεταξύ των προκυπτόντων αποτελεσμάτων του εκάστοτε επιδημιολογικού μοντέλου.

Αρχικά, στον **Πίνακα 31**, παρουσιάζονται οι πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος. Ο πίνακας αυτός, συγκεντρώνει τα αποτελέσματα όλων των μοντέλων (UN, PV, FV, BO) αναφορικά με τις πιθανότητες όπου η διαδικασία μεταβαίνει από την κατάσταση $i = 1,2,3,4$ στην κατάσταση $j = 1,2,3,4,5$ σε ένα χρονικό βήμα:

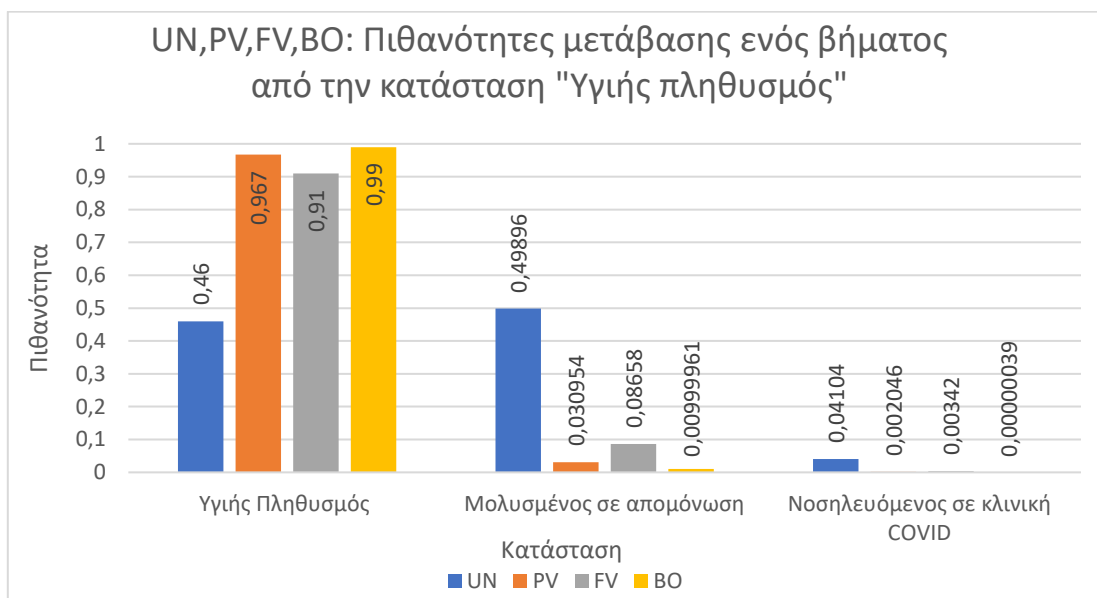
Πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος

	1				2				3				4				5			
	UN	PV	FV	BO	UN	PV	FV	BO	UN	PV	FV	BO	UN	PV	FV	BO	UN	PV	FV	BO
1	0,46	0,96 7	0,91	0,99	0,49 896	0,03 0954	0,08 658	0,00 9999 61	0,04 104	0,00 2046	0,00 342	3,9× 10 ⁻⁷	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,42 504	0,90 7046	0,87 542	0,98 9961 39	0,49 896	0,03 0954	0,08 658	0,00 9999 61	0,07 6	0,06 22	0,03 8	3,9× 10 ⁻⁵	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0,79 233	0,91 2975	0,95 0167 9	0,99 993	0,07 448	0,06 1194	0,03 7946 8	3,89 ×10 ⁻⁵	0,02	0,01 3	0,00 14	2,3× 10 ⁻⁵	0,11 319	0,01 2831	0,01 0485 3	8,1×1 0 ⁻⁶
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0,86 681	0,97 417	0,98 8114 7	0,99 9968 1	0,01 769	0,01 283	0,00 1385 3	2,29 ×10 ⁻⁵	0,11 55	0,01 3	0,01 05	9×10 ⁻⁶

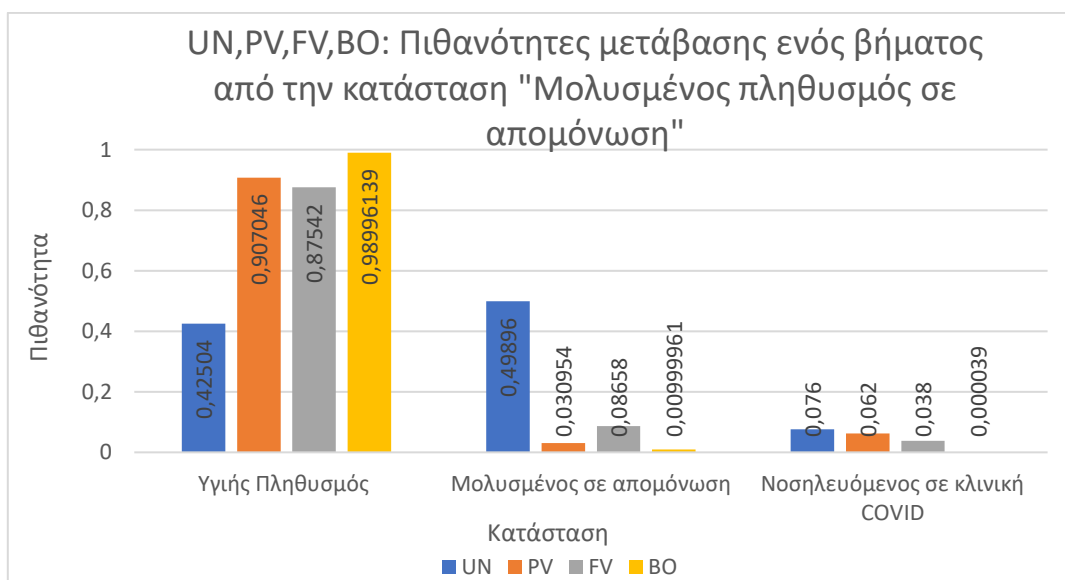
Πίνακας 31-Πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος μοντέλων UN, PV, FV, BO

Η κατάσταση 5 είναι απορροφητική κατάσταση, επομένως επικοινωνεί μόνο με τον εαυτό της με πιθανότητα τη μονάδα και δεν έχει συμπεριληφθεί στον **πίνακα 31**.

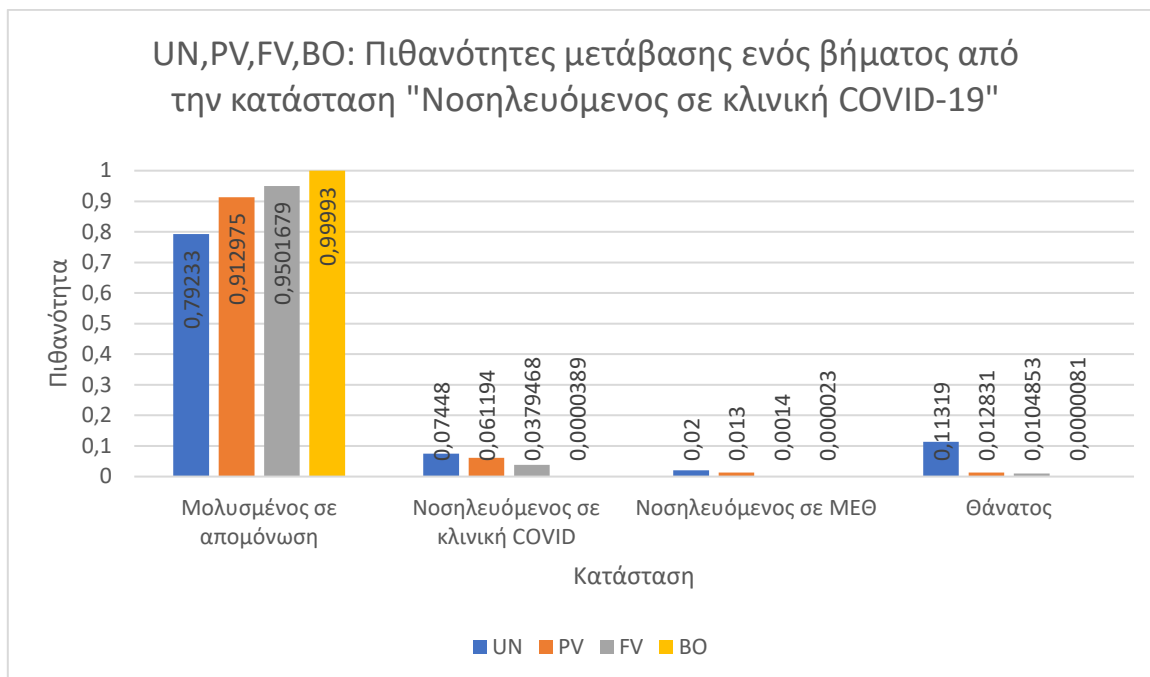
Αναλυτικότερα, η πιθανότητα η διαδικασία να μεταβεί από κάθε κατάσταση (εκτός της απορροφητικής) σε κάθε άλλη δυνατή κατάσταση σε μία χρονική στιγμή, για όλα τα μοντέλα, φαίνεται στα **διαγράμματα 209, 210, 211 και 212**:



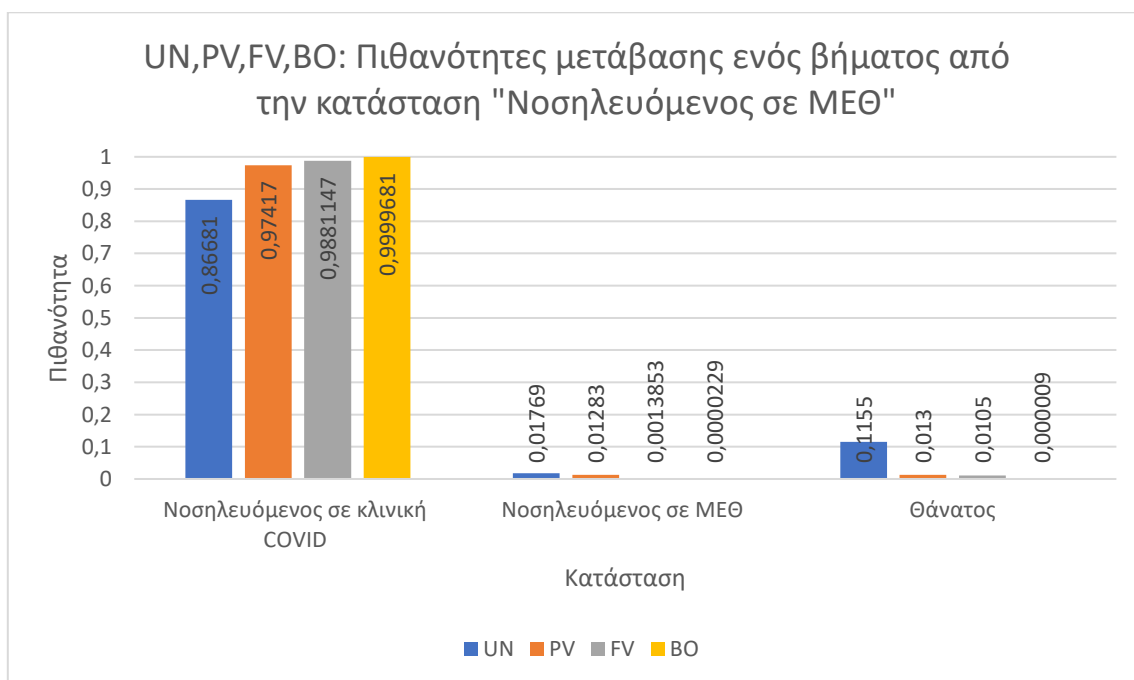
Διάγραμμα 209-Πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός» μοντέλων UN, PV, FV, BO



Διάγραμμα 210-Πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος στην κατάσταση «Μολυσμένος σε απομόνωση» μοντέλων UN, PV, FV, BO



Διάγραμμα 211-Πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος στην κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19» μοντέλων UN, PV, FV, BO



Διάγραμμα 212-Πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος στην κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ» μοντέλων UN, PV, FV, BO

Όπως παρατηρούμε το μοντέλο PV δείχνει να έχει περισσότερες πιθανότητες μετάβασης στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός» σε σχέση με το μοντέλο FV:

$$(PV)p_{11} = 0,967 > (FV)p_{11} = 0,91 \text{ και}$$

$$(PV)p_{21} = 0,907046 > (FV)p_{21} = 0,87542$$

Ενώ αρχικά η συμπεριφορά αυτή φαίνεται να μην είναι ορθή, αξίζει να σημειωθεί πως η πλειοψηφία εκείνων που κάνουν την πρώτη δόση, που ανήκουν δηλαδή στο μοντέλο PV, θα κάνει και τη δεύτερη σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Ενώ τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί για τον πληθυσμό που ανήκει στο μοντέλο FV καλύπτουν περιστατικά πολύ περισσότερων μηνών, οπότε θα έχουν και περισσότερες πιθανότητες νόσησης. Επομένως τα παραπάνω αποτελέσματα είναι λογικά.

Αναλύοντας τα αποτελέσματα των πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως ο εμβολιασμός με ενισχυτική δόση (μοντέλο BO) παρέχει πολύ υψηλά ποσοστά προστασίας από νόσηση, νοσηλεία σε κλινική COVID-19, νοσηλεία σε ΜΕΘ και θάνατο από τον κορωνοϊό σε σχέση με τα υπόλοιπα μοντέλα, ιδίως εκείνο που αφορά τον πληθυσμό που δεν έχει χορηγηθεί καμία δόση εμβολίου (μοντέλο UN).

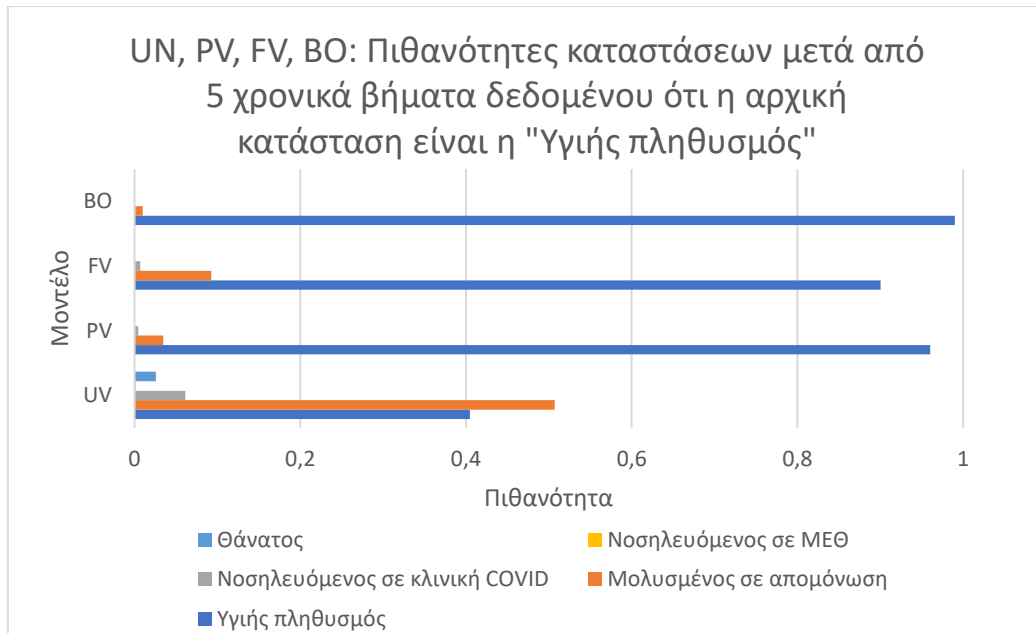
Στη συνέχεια, παρουσιάζεται οι πίνακες μετάβασης πιθανοτήτων $n = 5$ βημάτων, με τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα όλων των μοντέλων:

Πιθανότητες μετάβασης μετά από 5 βήματα

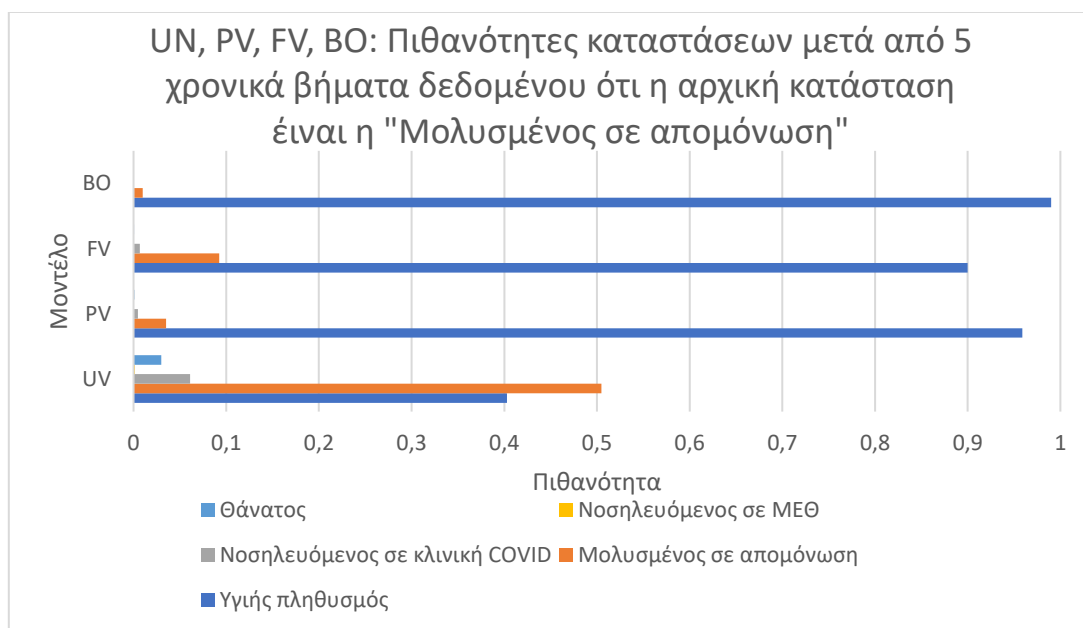
	1				2				3				4				5			
	UN	PV	FV	BO	UN	PV	FV	BO	UN	PV	FV	BO	UN	PV	FV	BO	UN	PV	FV	BO
1	0,40 468	0,9 604	0,90 0402	0,98999 88454	0,50 712	0,03 484	0,09 2479	0,010 00037	0,06 1218	0,00 444	0,00 6860	7,7616 23×10^{-7}	0,00 1253	$5,8 \times 10^{-5}$	$9,6 \times 10^{-6}$	1,78 $\times 10^{-11}$	0,02 571	0,00 019	0,00 024	2×10^{-11}
2	0,40 286	0,9 588	0,89 9949	0,98999 88451	0,50 492	0,03 524	0,09 2509	0,010 00037	0,06 0986	0,00 474	0,00 6895	7,7616 24×10^{-7}	0,00 1250	$6,5 \times 10^{-5}$	$9,7 \times 10^{-6}$	1,78 $\times 10^{-11}$	0,02 996	0,00 107	0,00 063	$3,3 \times 10^{-10}$
3	0,35 409	0,9 408	0,88 9232	0,98999 08217	0,44 459	0,03 875	0,09 2384	0,010 00030	0,05 3739	0,00 521	0,00 6889	7,7615 65×10^{-7}	0,00 1119	0,000 1,24	1,10 $\times 10^{-5}$	1,79 $\times 10^{-11}$	0,14 645	0,01 502	0,01 148	8,1010 3×10^{-6}
4	0,31 389	0,9 211	0,87 8095	0,98998 19050	0,39 547	0,04 146	0,09 2313	0,010 00021	0,04 8504	0,00 929	0,00 7783	7,7989 73×10^{-7}	0,00 1025	0,000 180	1,24 $\times 10^{-5}$	$1,8 \times 10^{-11}$	0,24 110	0,02 787	0,02 179	1,7101 16×10^{-5}

Πίνακας 32-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων n=5 βημάτων μοντέλων UN, PV, FV, BO

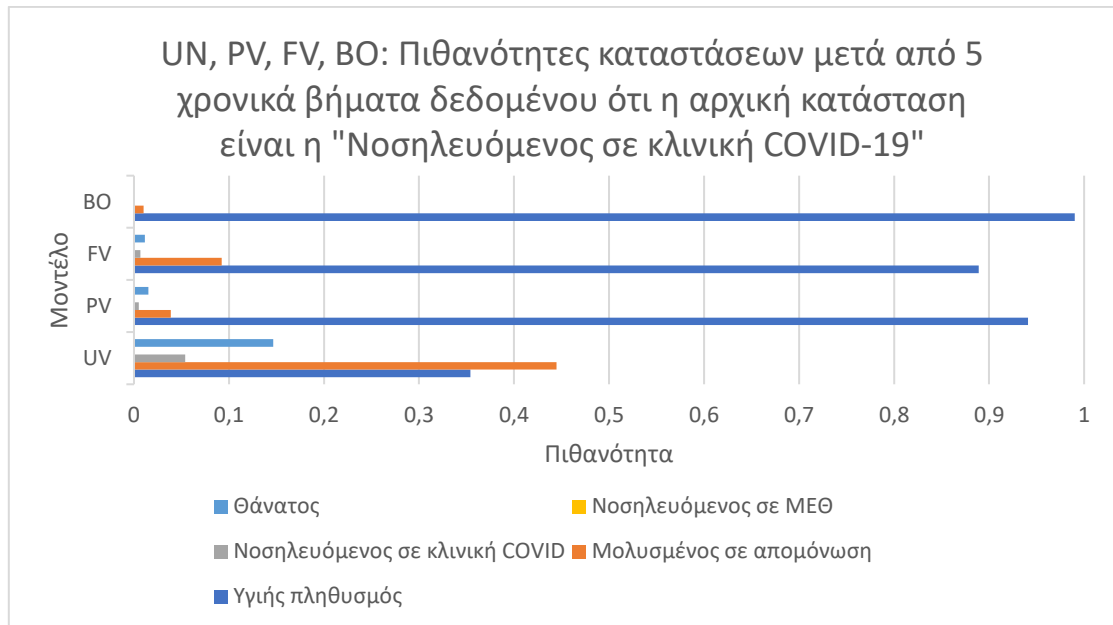
Έστω ότι η διαδικασία ξεκινάει από την κατάσταση i . Από το **διάγραμμα 213** έως το **διάγραμμα 216** παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα των πιθανοτήτων μετάβασης p_{ij}^n , για $i = 1,2,3,4$ και $j = 1,2,3,4,5$ μετά την πάροδο $n = 5$ χρονικών βημάτων, για κάθε εξεταζόμενο μοντέλο (UN, PV, FV, BO):



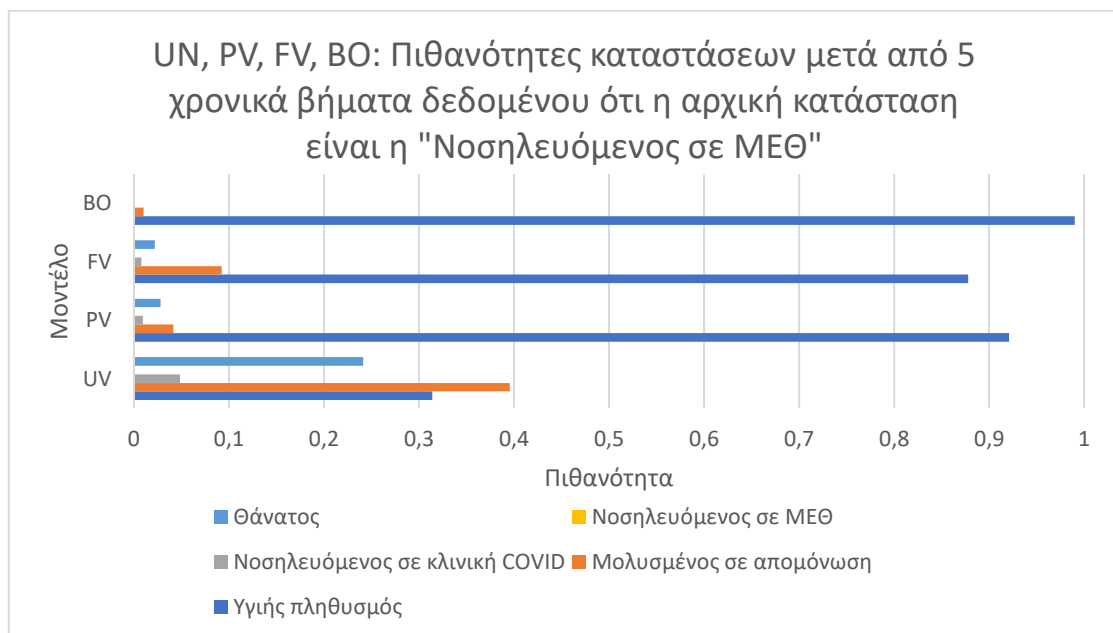
Διάγραμμα 213-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=5$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV ,BO



Διάγραμμα 214-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=5$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO



Διάγραμμα 215-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO



Διάγραμμα 216-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=5 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO

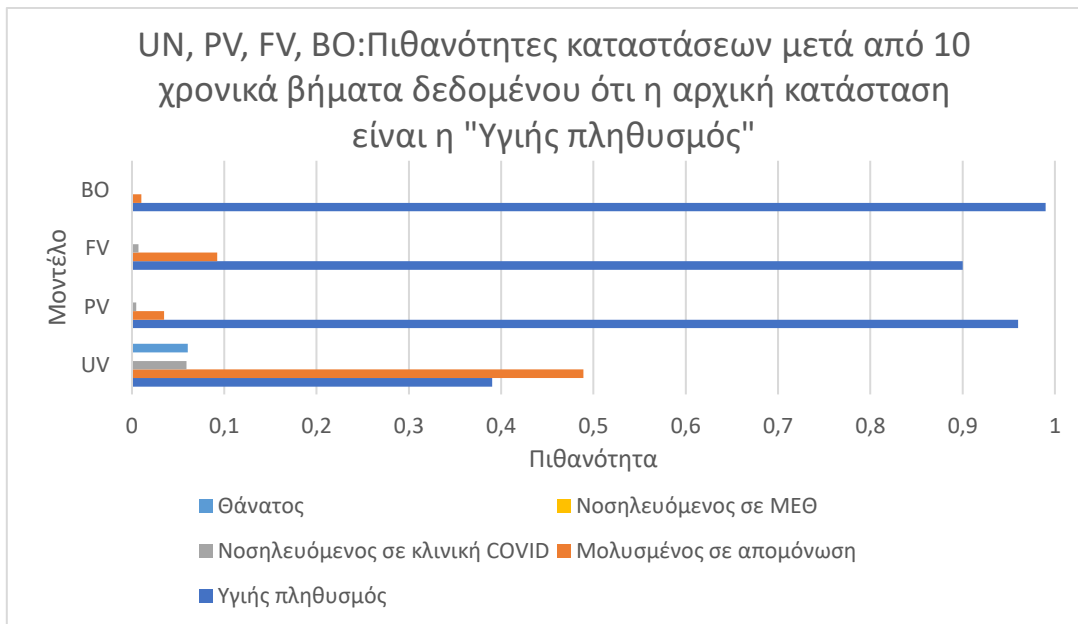
Ο πίνακας 33 συγκεντρώνει τα αποτελέσματα των πιθανοτήτων μετάβασης p_{ij}^n , για $i = 1,2,3,4$ και $j = 1,2,3,4,5$ μετά την πάροδο $n = 10$ χρονικών βημάτων, όλων των μοντέλων:

Πιθανότητες μετάβασης μετά από 10 βήματα

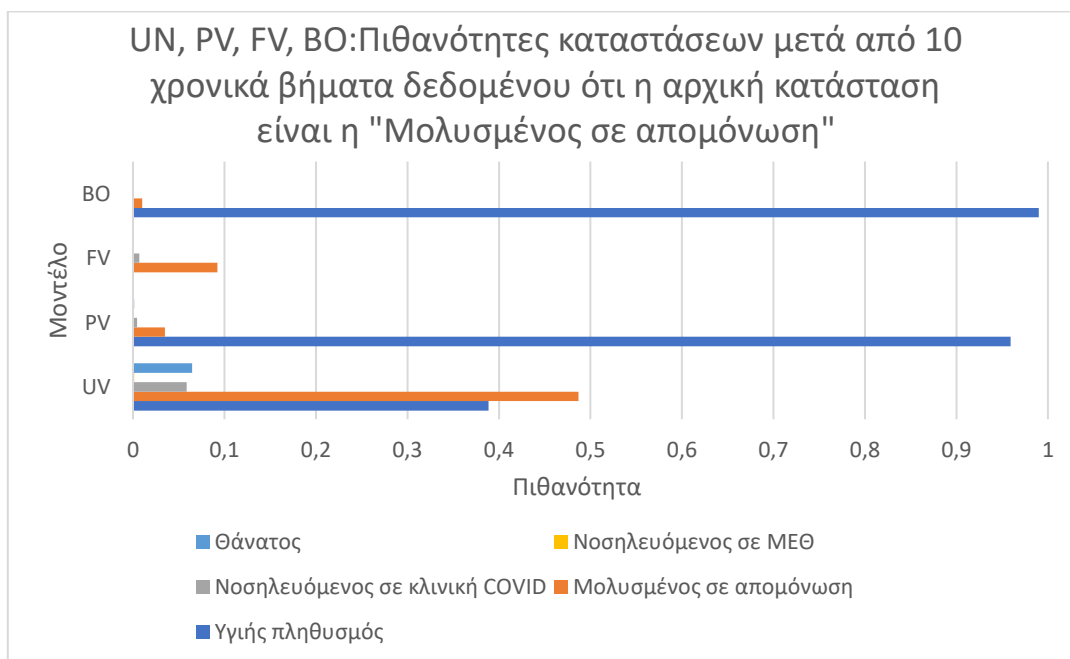
	1				2				3				4				5			
	UN	PV	FV	BO	UN	PV	FV	BO	UN	PV	FV	BO	UN	PV	FV	BO	UN	PV	FV	BO
1	0,39 014	0,96 013	0,90 0061	0,98999 88454	0,48 899	0,03 486	0,092 459	0,0100 0037	0,05 9052	0,00 445	0,00 6862	7,7616 23×10 ⁻⁷	0,00 121	5,8 ×10 ⁻⁵	9,6 ×10 ⁻⁶	1,78 ×10 ⁻¹¹	0,06 059	0,00 048	0,00 060	5×10 ⁻¹¹
2	0,38 844	0,95 92	0,89 9711	0,98999 88451	0,48 686	0,03 484	0,092 4233	0,0100 0037	0,05 8794	0,00 445	0,00 6859	7,7616 23×10 ⁻⁷	0,00 120	5,8 ×10 ⁻⁵	9,6 ×10 ⁻⁶	1,78 ×10 ⁻¹¹	0,06 469	0,00 137	0,00 099	3,6×10 ⁻¹⁰
3	0,34 179	0,94 58	0,88 9944	0,98999 08254	0,42 839	0,03 435	0,091 420	0,0100 0029	0,05 1733	0,00 439	0,00 6784	7,7615 60×10 ⁻⁷	0,00 106	5,7 ×10 ⁻⁵	9,5 ×10 ⁻⁶	1,78 ×10 ⁻¹¹	0,17 702	0,01 533	0,01 184	8,1010 6×10 ⁻⁶
4	0,30 384	0,93 34	0,88 0649	0,98998 19153	0,38 083	0,03 392	0,090 466	0,0100 0020	0,04 5991	0,00 433	0,00 6714	7,7614 9×10 ⁻⁷	0,00 094	5,8 ×10 ⁻⁵	9,4 ×10 ⁻⁶	1,78 ×10 ⁻¹¹	0,26 837	0,02 824	0,02 216	1,7101 19×10 ⁻⁵

Πίνακας 33-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων n=10 βημάτων μοντέλων UN, PV, FV, BO

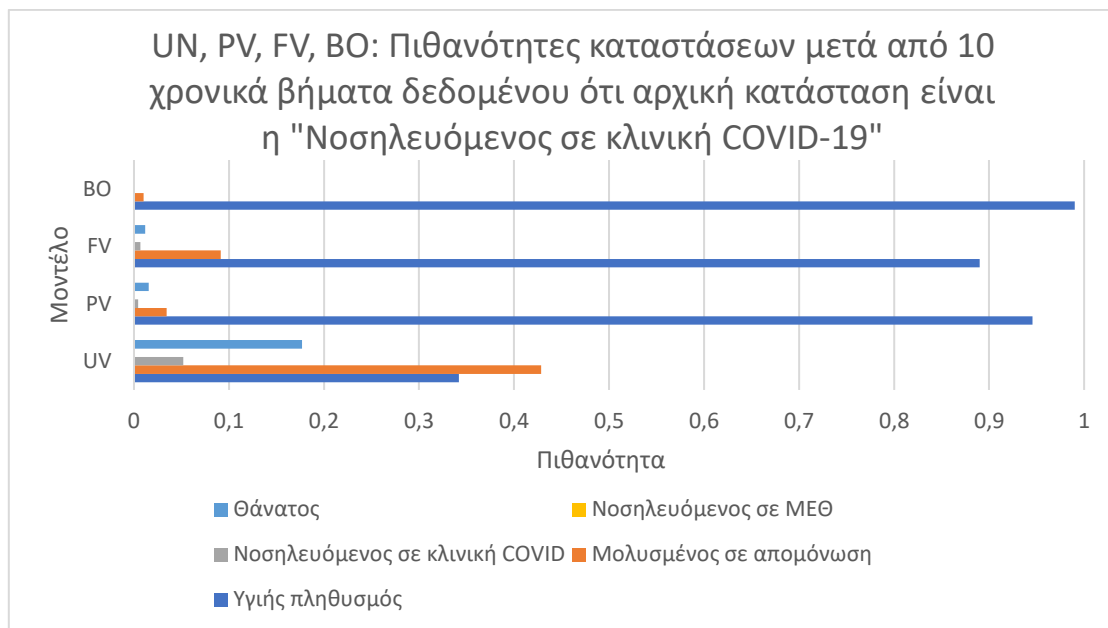
Στα διαγράμματα 217, 218, 219 και 220 απεικονίζονται οι πιθανότητες μετάβασης p_{ij}^n μεταξύ των καταστάσεων για όλα τα μοντέλα, μετά από $n = 10$ χρονικές στιγμές, όπου $i = 1,2,3,4$ και $j = 1,2,3,4,5$:



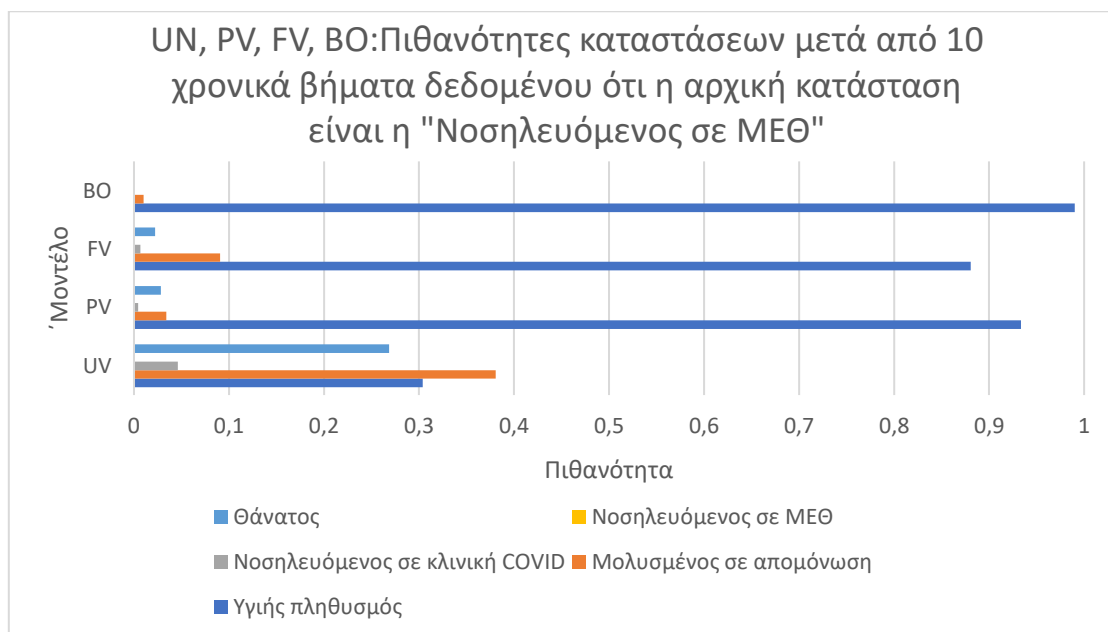
Διάγραμμα 217-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=10$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO



Διάγραμμα 218-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=10$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO



Διάγραμμα 219-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=10$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO



Διάγραμμα 220-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=10$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO

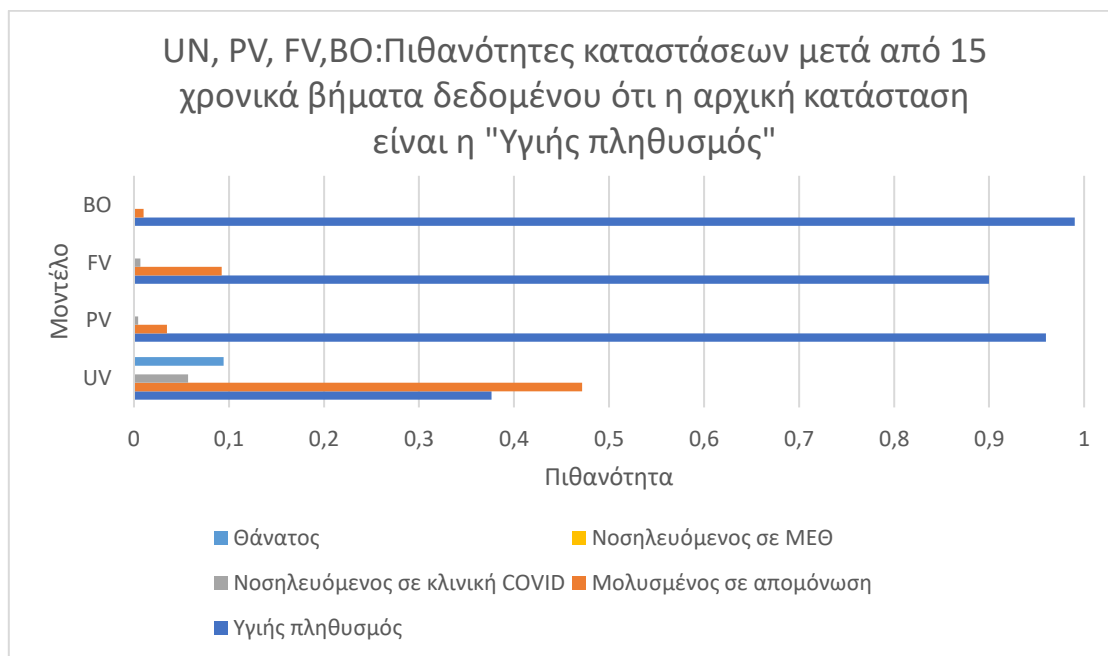
Τέλος, ο πίνακας 34 συγκεντρώνει τις πιθανότητες όλων των μοντέλων με τις οποίες πραγματοποιούνται οι μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων μετά από $n = 15$ χρονικά βήματα:

Πιθανότητες μετάβασης μετά από 15 βήματα

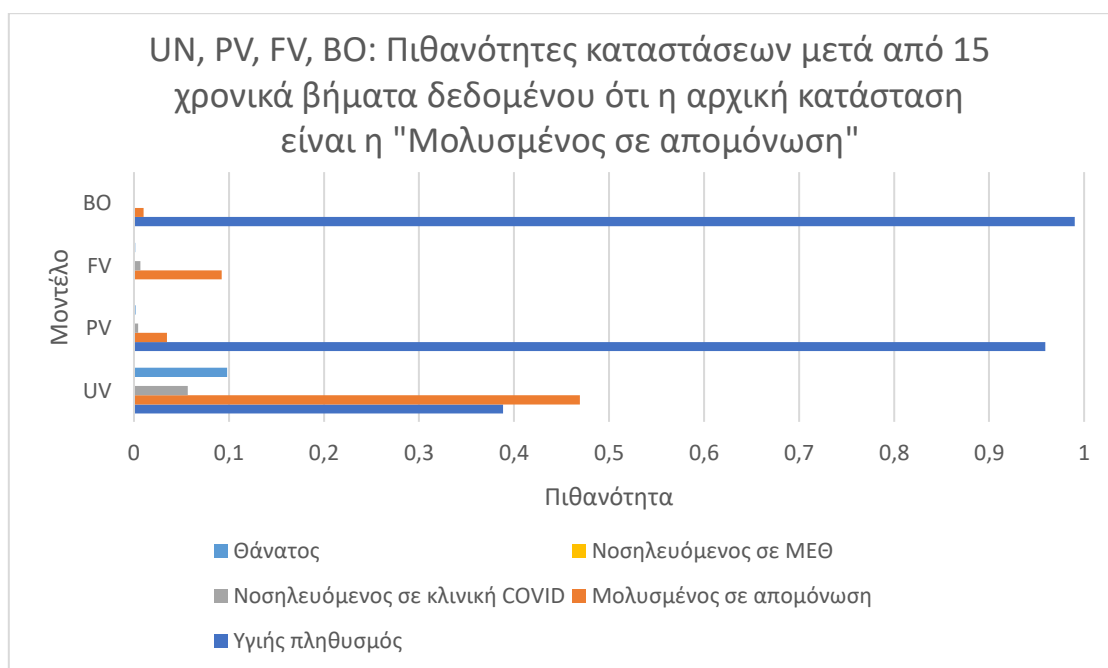
	1				2				3				4				5			
	UN	PV	FV	BO	UN	PV	FV	BO	UN	PV	FV	BO	UN	PV	FV	BO	UN	PV	FV	BO
1	0,37 617	0,95 98	0,899 737	0,989998 8453	0,47 149	0,03 485	0,092 425	0,0100 0037	0,056 938	0,00 445	0,006 859	7.7616 $\times 10^{-7}$	0,001 167	5,8 \times 10^{-5}	9,6 \times 10^{-6}	1,78 \times 10^{-11}	0,094 22	0,00 077	0,00 096	8 $\times 10^{-11}$
2	0,37 453	0,95 90	0,899 387	0,989998 8450	0,46 943	0,03 482	0,092 389	0,0100 0037	0,056 690	0,00 445	0,006 856	7.7616 $\times 10^{-7}$	0,001 162	5,8 \times 10^{-5}	9,6 \times 10^{-6}	1,78 \times 10^{-11}	0,098 17	0,00 166	0,00 135	3,9 $\times 10^{-10}$
3	0,32 955	0,94 55	0,889 624	0,989990 8253	0,41 305	0,03 434	0,091 387	0,0100 0029	0,049 881	0,00 438	0,006 782	7.7615 $\times 10^{-7}$	0,001 023	5,7 \times 10^{-5}	9,5 \times 10^{-6}	1,78 \times 10^{-11}	0,206 48	0,01 561	0,01 219	8,10109 $\times 10^{-6}$
4	0,29 297	0,93 31	0,880 333	0,989981 9152	0,36 720	0,03 389	0,090 432	0,0100 0020	0,044 344	0,00 433	0,006 711	7.7614 $\times 10^{-7}$	0,000 909	5,7 \times 10^{-5}	9,4 \times 10^{-6}	1,78 \times 10^{-11}	0,294 56	0,02 852	0,02 251	1,71012 2×10^{-5}

Πίνακας 34-Πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων n=15 βημάτων μοντέλων UN, PV, FV, BO

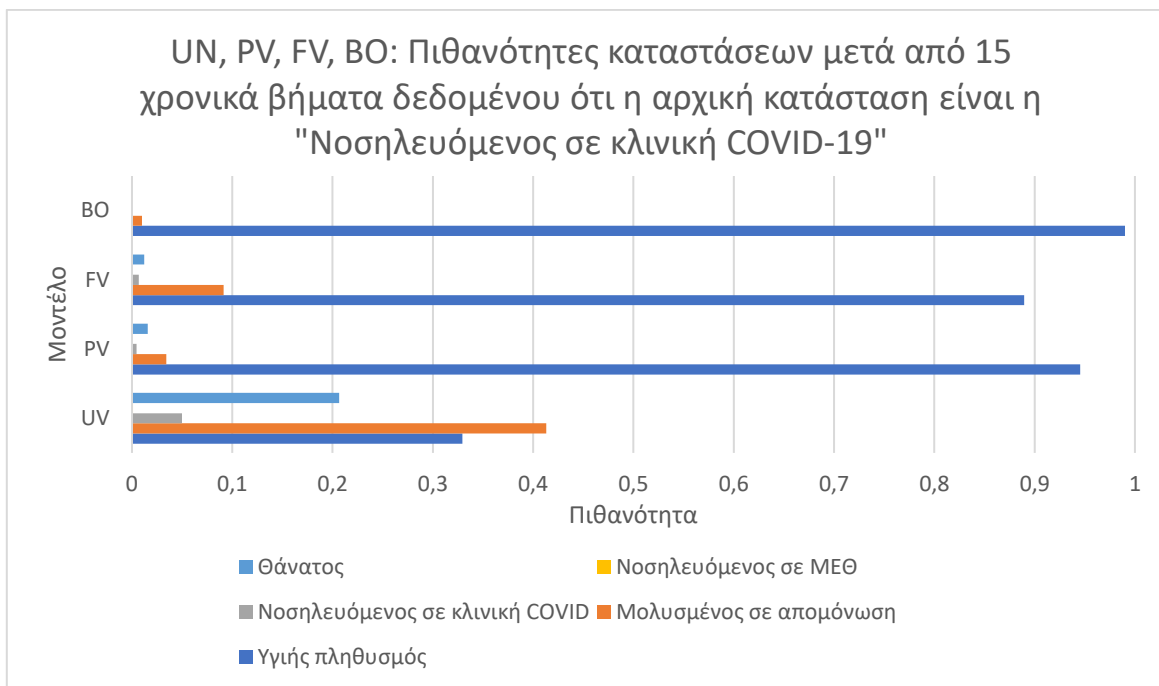
Στα διαγράμματα 221, 222, 223 και 224 παρουσιάζονται οι πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων p_{ij}^n όλων των μοντέλων, για $i = 1,2,3,4$ και $j=1,2,3,4,5$, μετά από $n = 15$ χρονικές στιγμές:



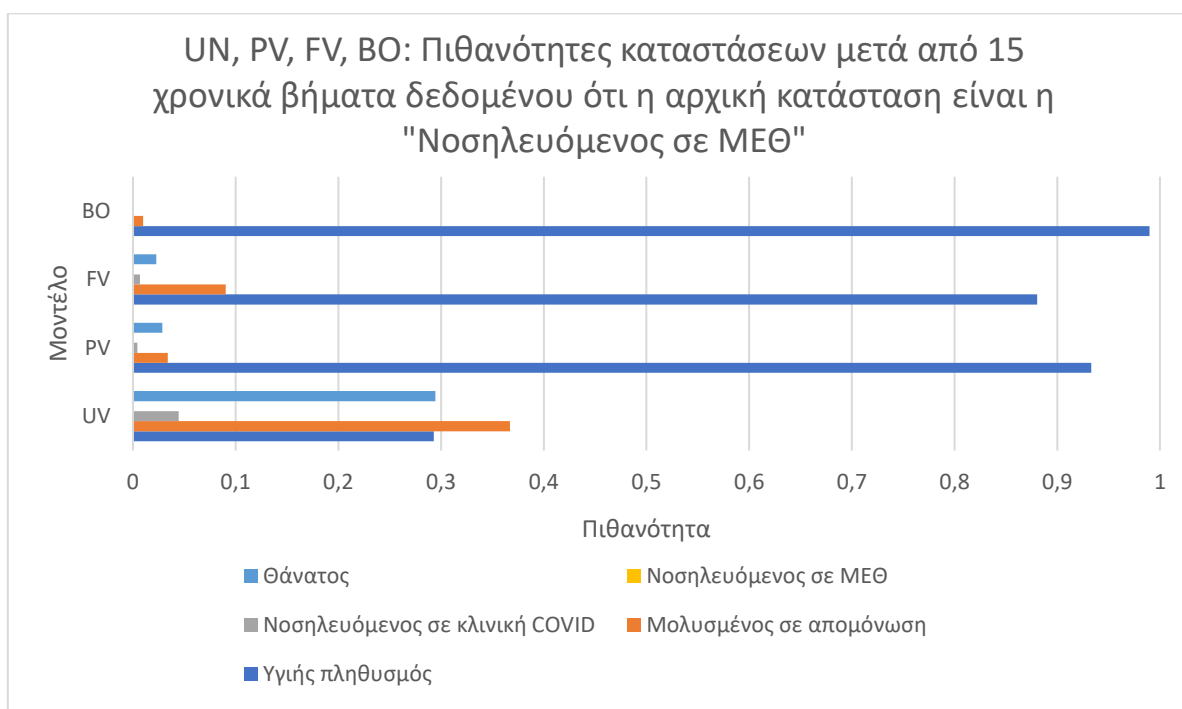
Διάγραμμα 221-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=15$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO



Διάγραμμα 222-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από $n=15$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO



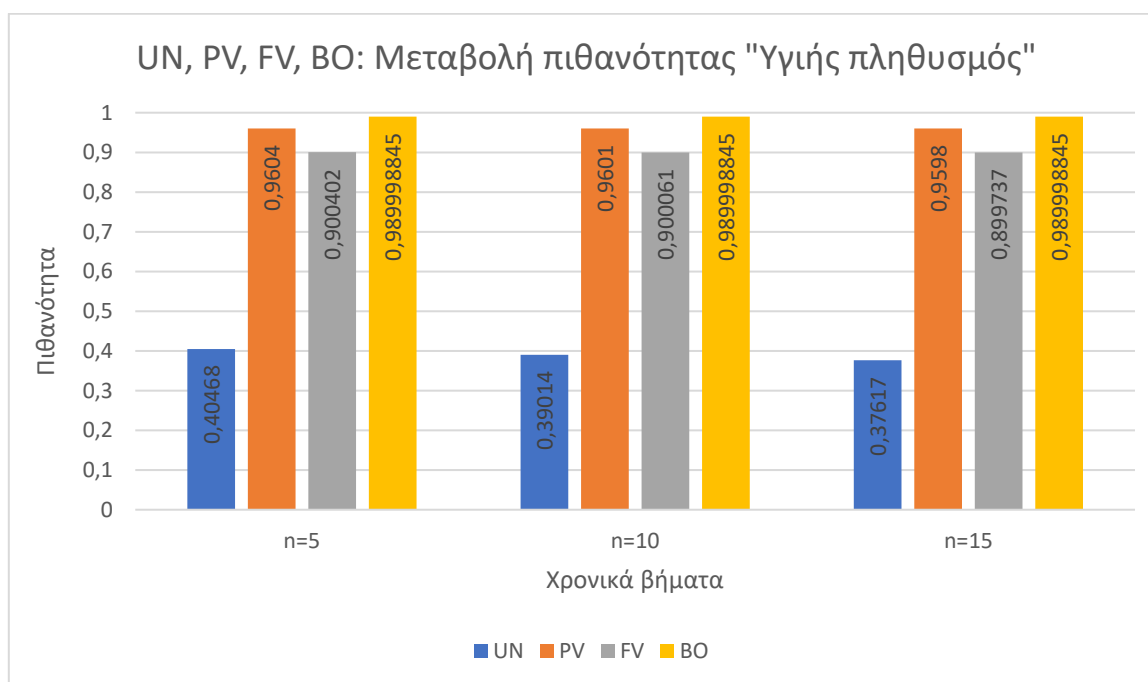
Διάγραμμα 223-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO



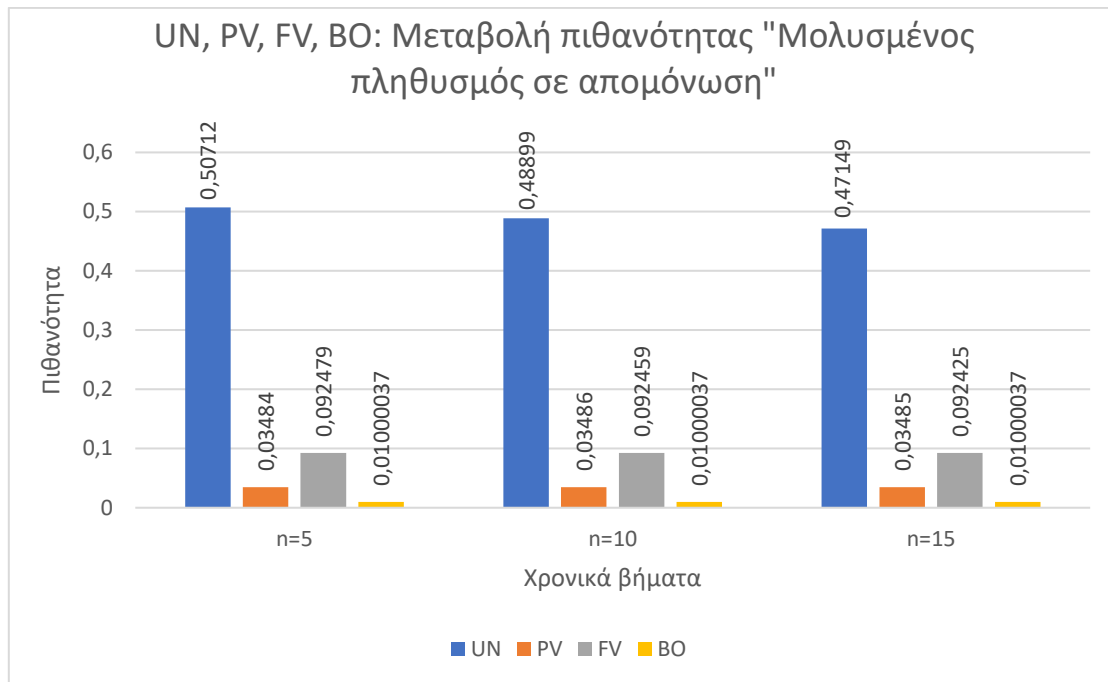
Διάγραμμα 224-Πιθανότητες καταστάσεων μετά από n=15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO

Οι πίνακες μετάβασης n -οστού βήματος σχετίζονται άμεσα με τους πίνακες μετάβασης ενός βήματος. Συνεπώς, ήταν αναμενόμενο πως οι πιθανότητες μετάβασης ύστερα από n βήματα στην κατάσταση «Θάνατος», θα είναι μεγαλύτερες από ότι στην κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ», καθώς αυτό συμβαίνει και στις μεταβάσεις ενός βήματος, δεδομένων των πιθανοτήτων που προέκυψαν στην ενότητα 3.2. Επιπλέον, είναι δύο οι καταστάσεις που άμεσα επικοινωνούν με την κατάσταση «Θάνατος» (p_{35} , p_{45}) και λόγω του ότι αποτελεί απορροφητική κατάσταση δεν υπάρχει περίπτωση διαφυγής από αυτήν. Αντιθέτως, στην κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ» μεταβαίνει άμεσα μόνο μία (p_{34}) και εφόσον πρόκειται για μεταβατική κατάσταση, η πιθανότητα παραμονής σε αυτή κατά το επόμενο χρονικό βήμα δεν είναι βέβαιη. Κατά συνέπεια, κάθε φορά που επαναλαμβάνεται η διαδικασία θα αυξάνεται με μεγαλύτερο ρυθμό η πιθανότητα απορρόφησης σε σχέση με την πιθανότητα μετάβασης στην κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ».

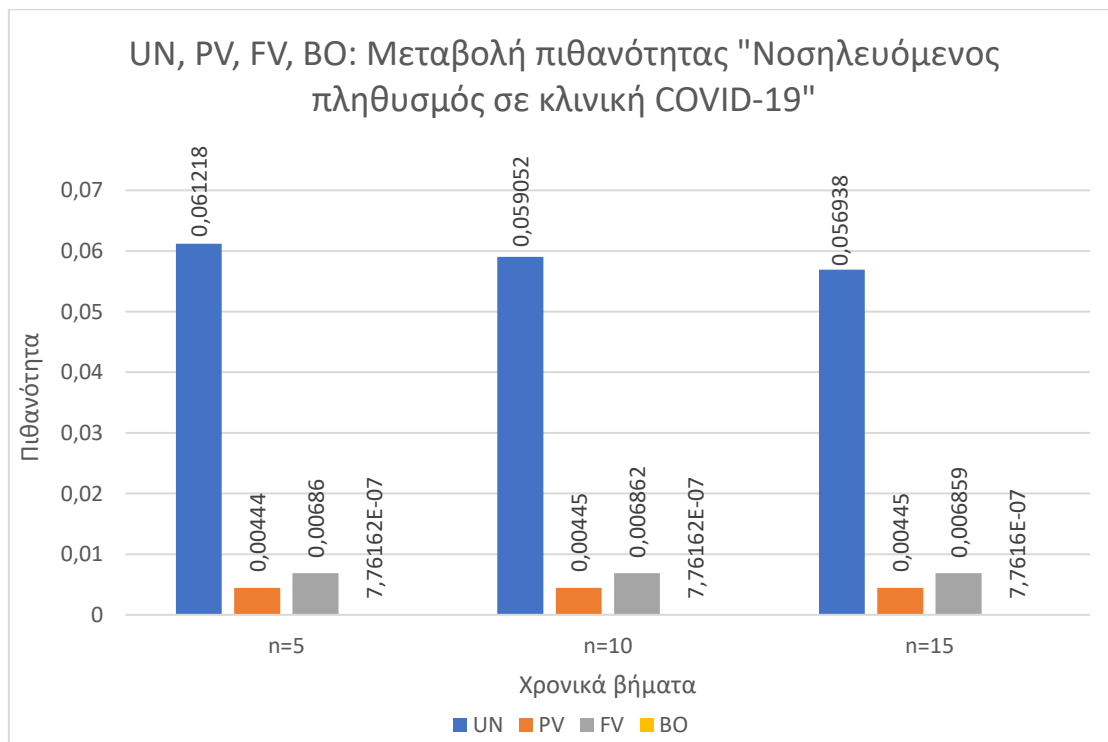
Ένα πολύ χρήσιμο μέτρο σύγκρισης των αποτελεσμάτων είναι η μεταβολή των πιθανοτήτων μετάβασης n -οστού βήματος. Τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα όλων των μοντέλων της μεταβολής πιθανότητας για κάθε κατάσταση μετά από $n = 5, 10, 15$ χρονικές στιγμές, δεδομένου ότι αρχικά βρισκόμαστε στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός», απεικονίζονται στα διαγράμματα 225, 226, 227, 228 και 229:



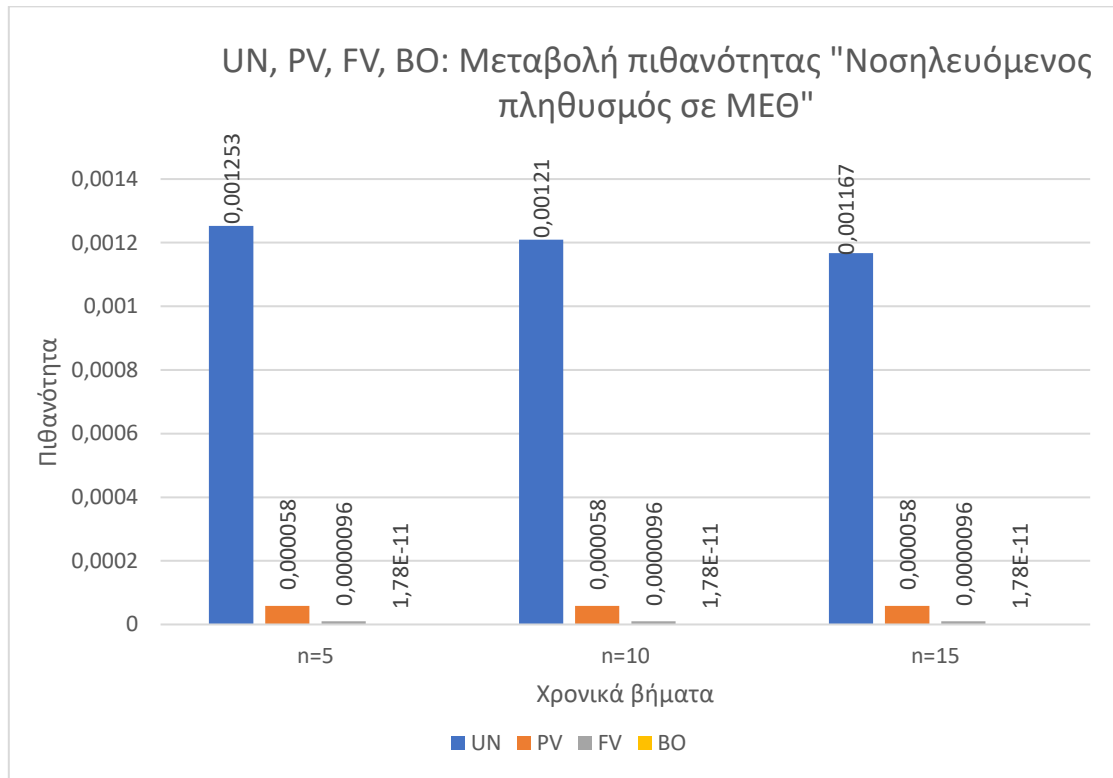
Διάγραμμα 225-Μεταβολή πιθανότητας «Υγιής πληθυσμός» μετά από $n=5, 10, 15$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO



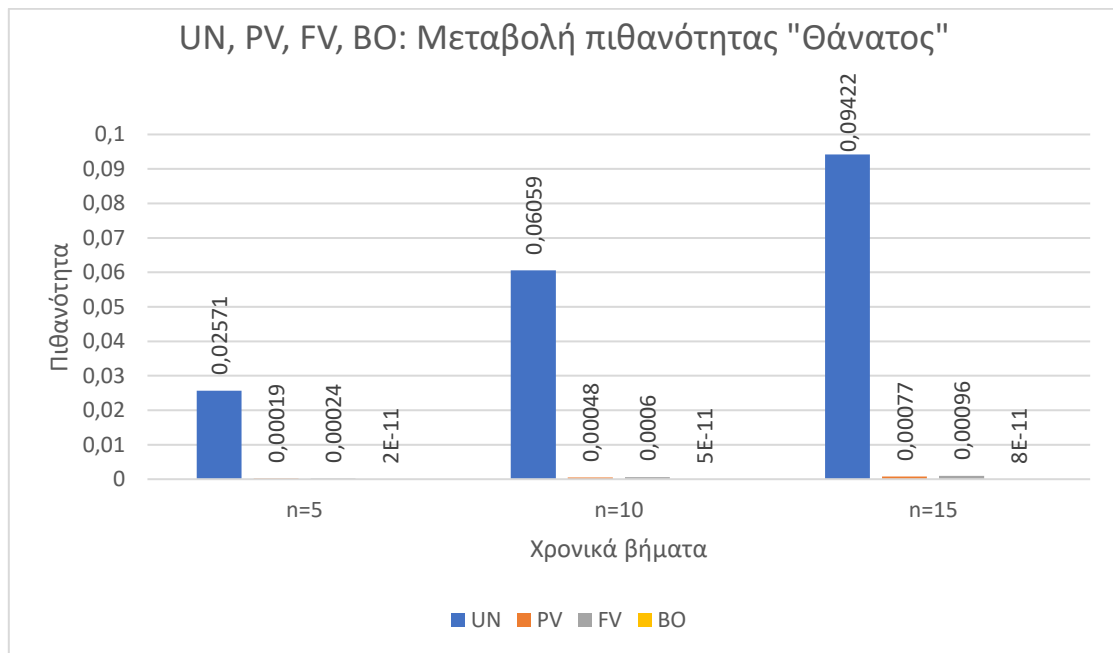
Διάγραμμα 226-Μεταβολή πιθανότητας «Μολυσμένος σε απομόνωση» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO



Διάγραμμα 227-Μεταβολή πιθανότητας «Νοσηλεύόμενος σε κλινική COVID-19» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO

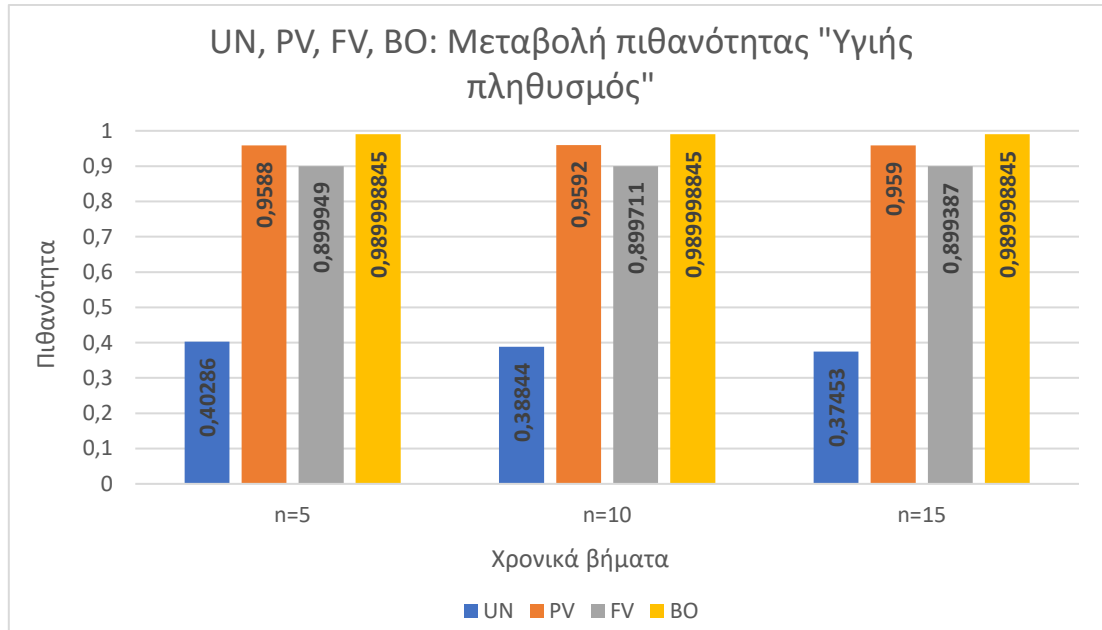


Διάγραμμα 228-Μεταβολή πιθανότητας «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO

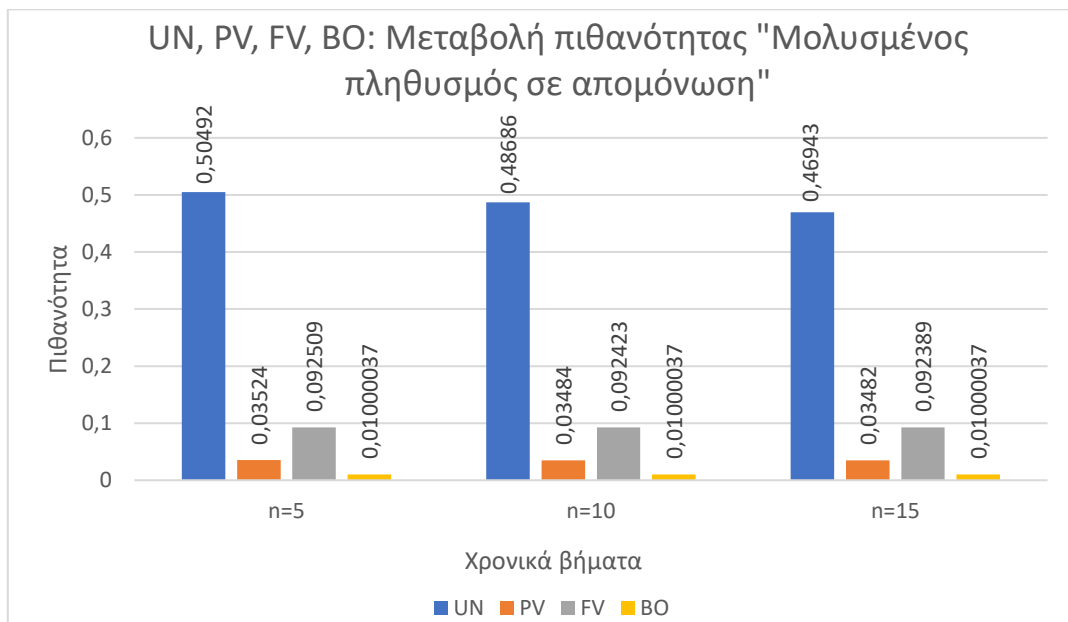


Διάγραμμα 229-Μεταβολή πιθανότητας «Θάνατος» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO

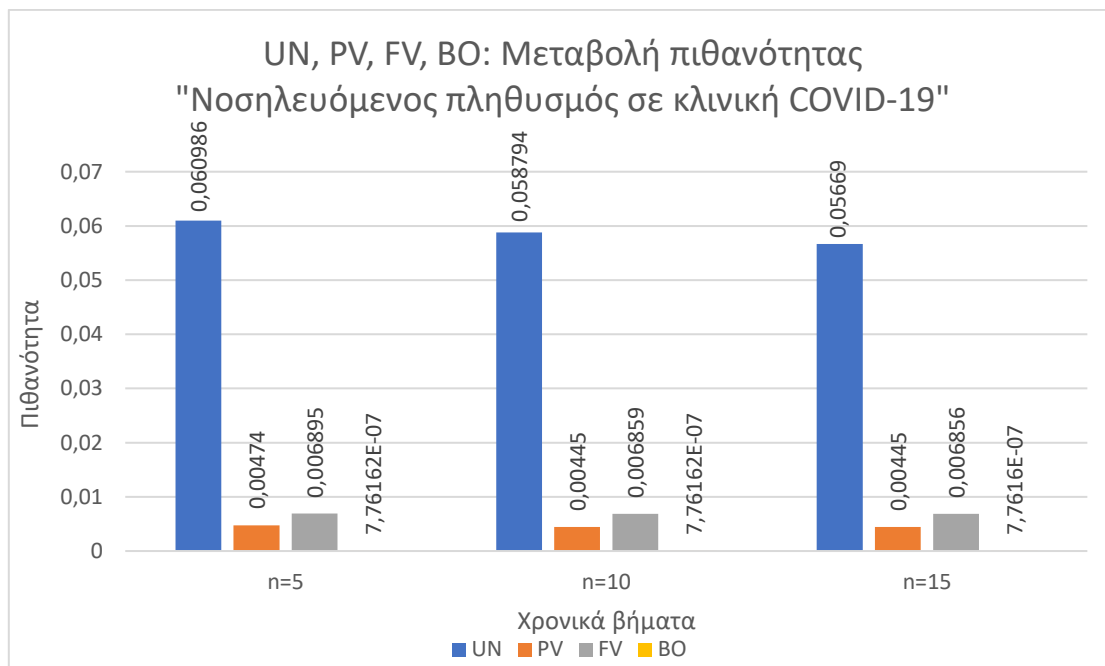
Η μεταβολής πιθανότητας για κάθε κατάσταση μετά από $n = 5, 10, 15$ χρονικές στιγμές όλων των μοντέλων, δεδομένου ότι αρχικά βρισκόμαστε στην κατάσταση «Μολυσμένος σε απομόνωση», απεικονίζεται στα διαγράμματα 230, 231, 232, 233 και 234:



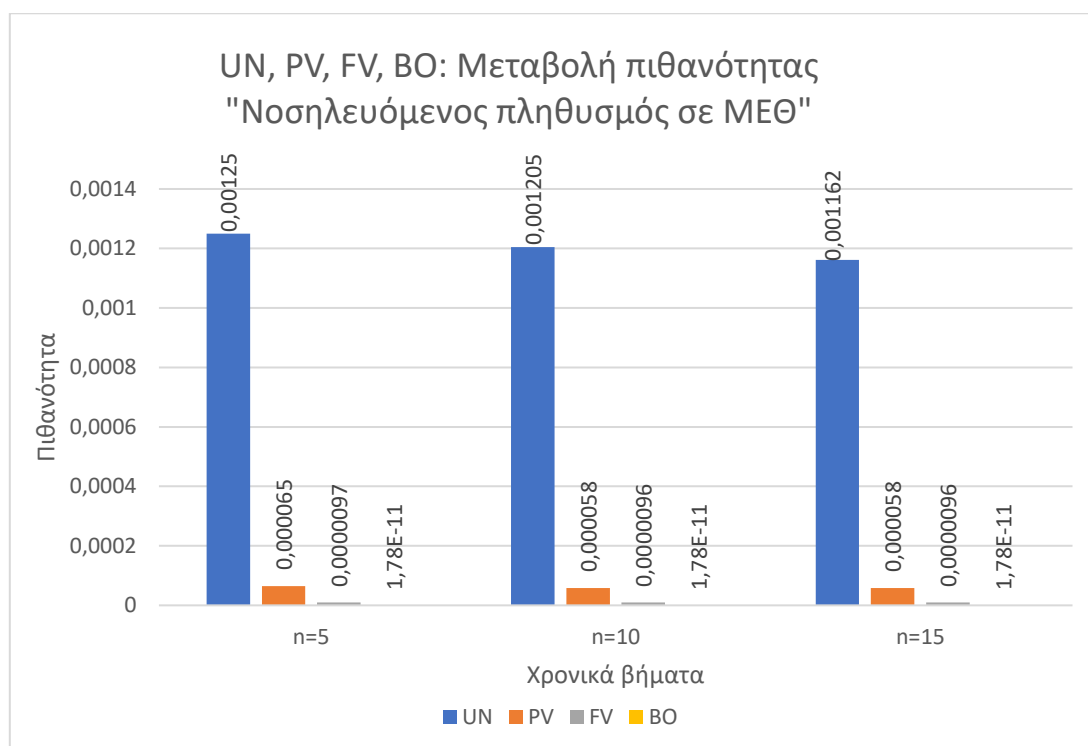
Διάγραμμα 230-Μεταβολή πιθανότητας «Υγιής πληθυσμός» μετά από $n=5, 10, 15$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO



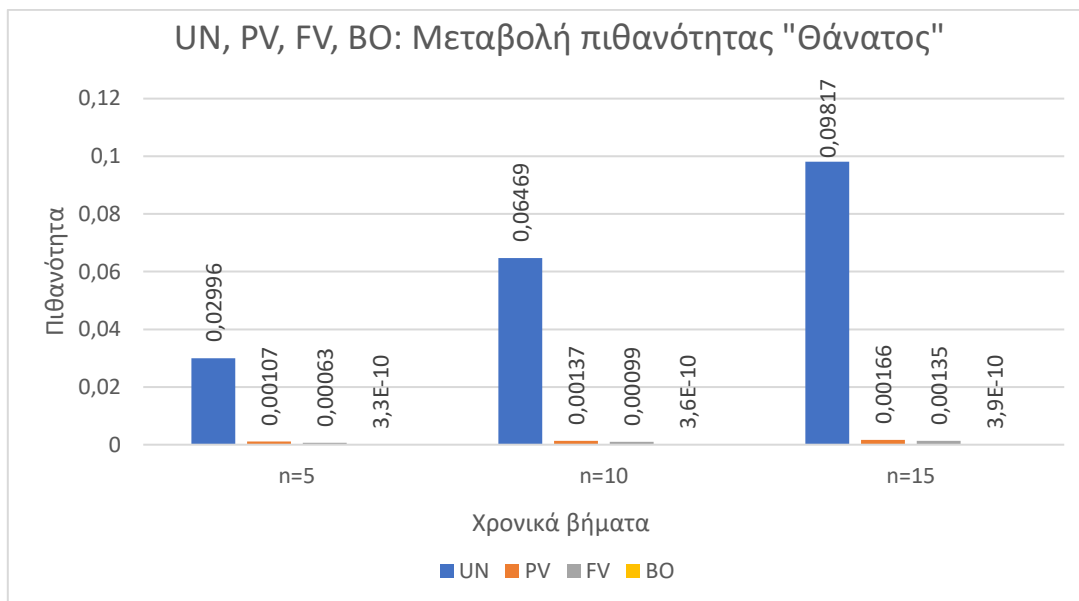
Διάγραμμα 231-Μεταβολή πιθανότητας «Μολυσμένος σε απομόνωση» μετά από $n=5, 10, 15$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO



Διάγραμμα 232-Μεταβολή πιθανότητας «Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO

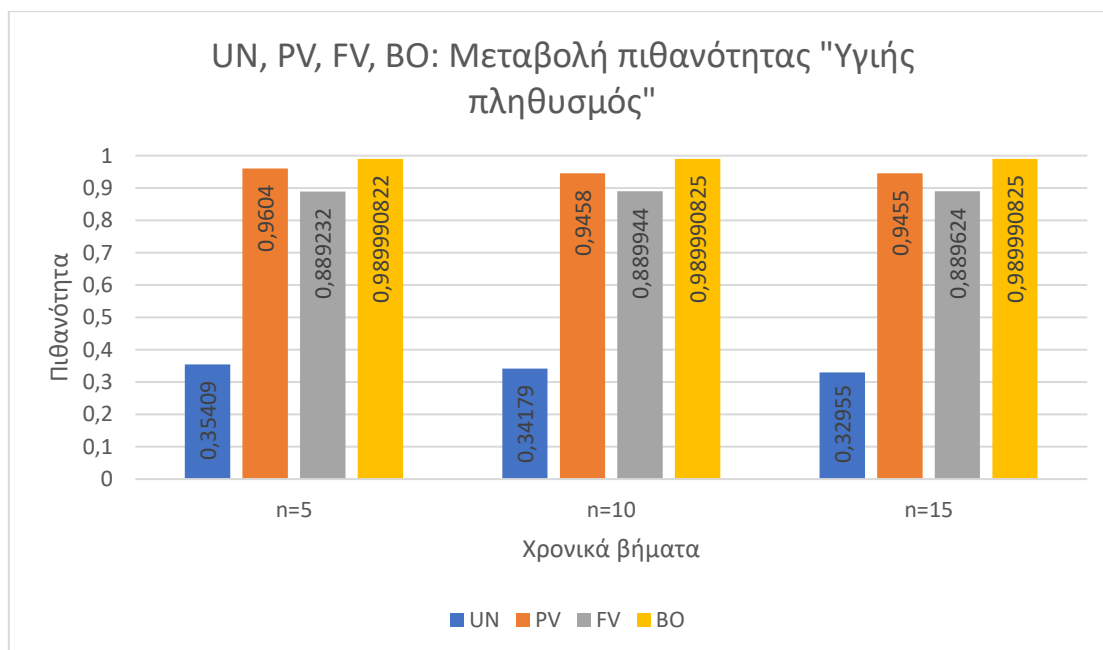


Διάγραμμα 233-Μεταβολή πιθανότητας «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO

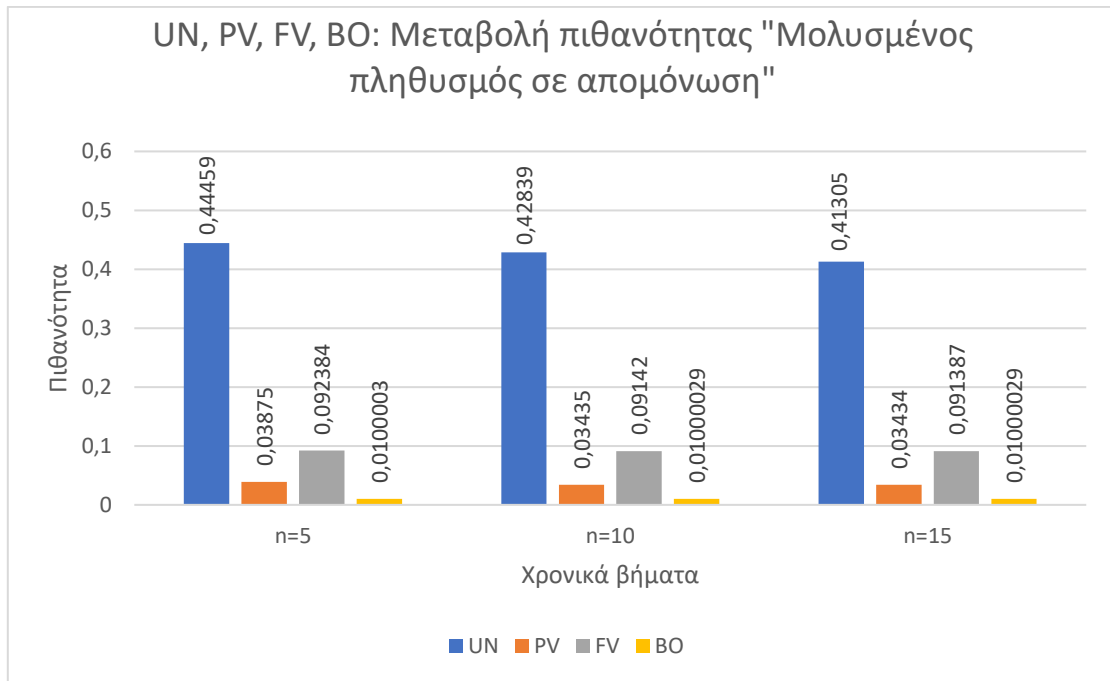


Διάγραμμα 234-Μεταβολή πιθανότητας «Θάνατος» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO

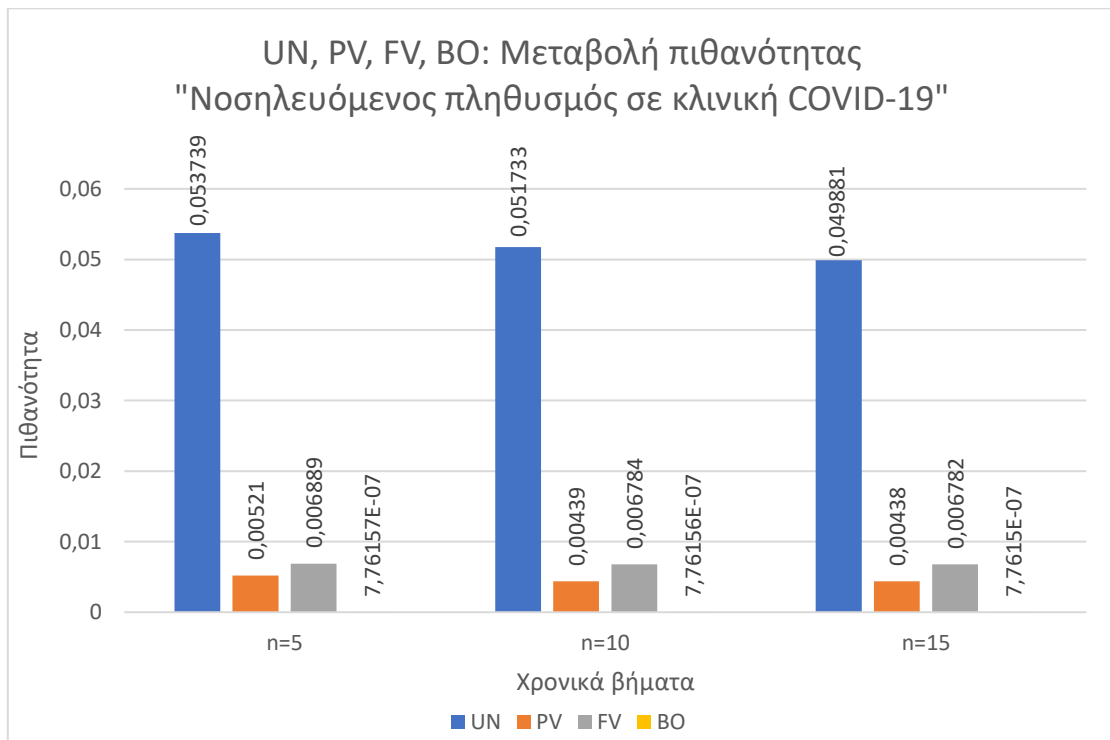
Τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα όλων των μοντέλων της μεταβολής πιθανότητας για κάθε κατάσταση μετά από $n = 5, 10, 15$ χρονικά βήματα, με δεδομένο ότι η διαδικασία ξεκινάει από την κατάσταση «Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19», απεικονίζονται στα διαγράμματα 235, 236, 237, 238 και 239:



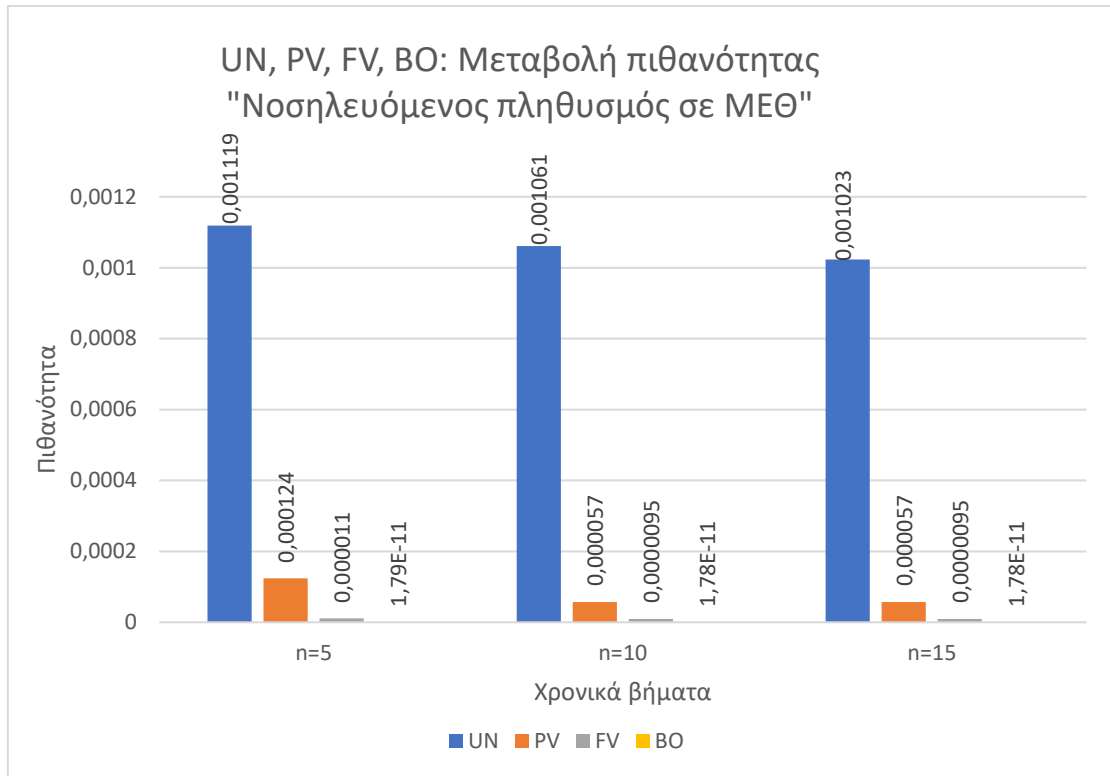
Διάγραμμα 235-Μεταβολή πιθανότητας «Υγιής πληθυσμός» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO



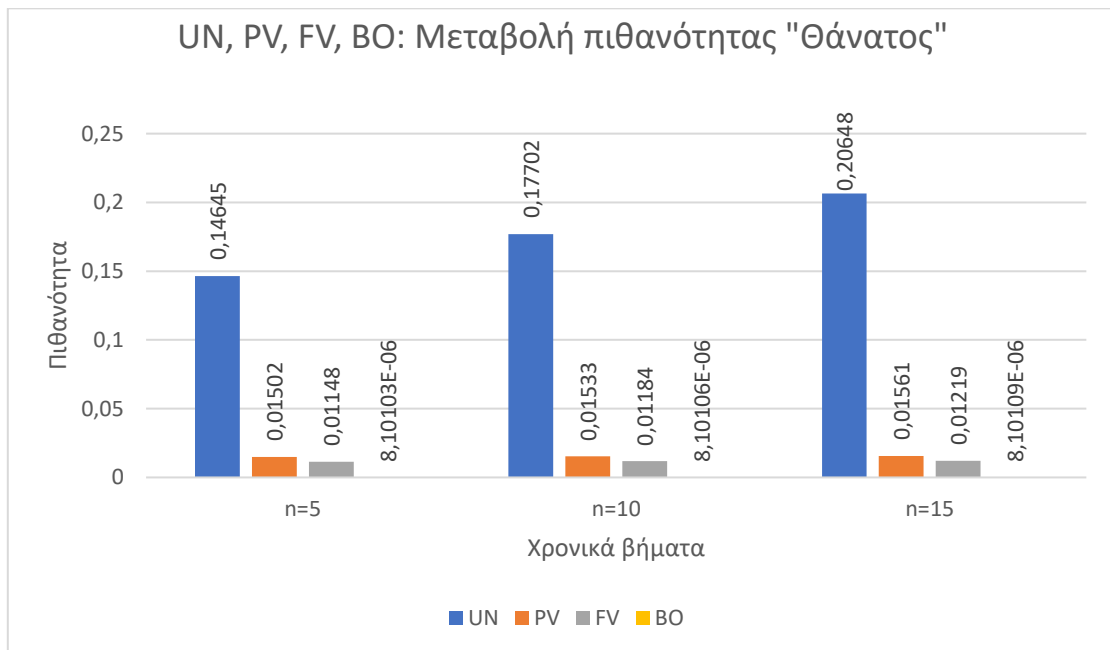
Διάγραμμα 236-Μεταβολή πιθανότητας «Μολυσμένος σε απομόνωση» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO



Διάγραμμα 237-Μεταβολή πιθανότητας «Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO

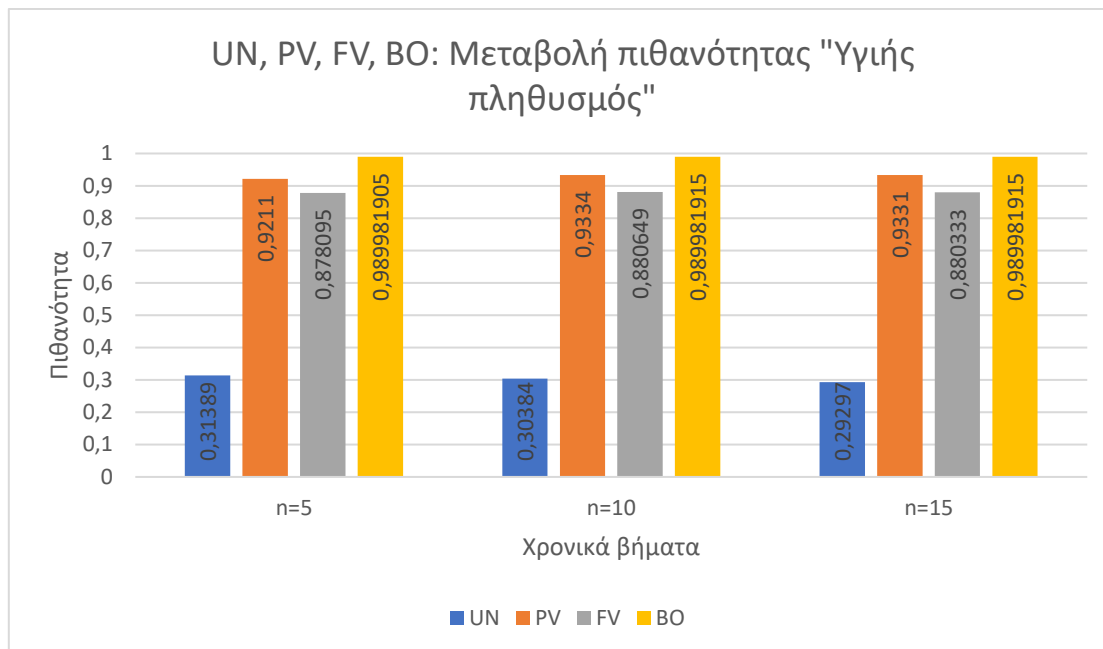


Διάγραμμα 238-Μεταβολή πιθανότητας «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO

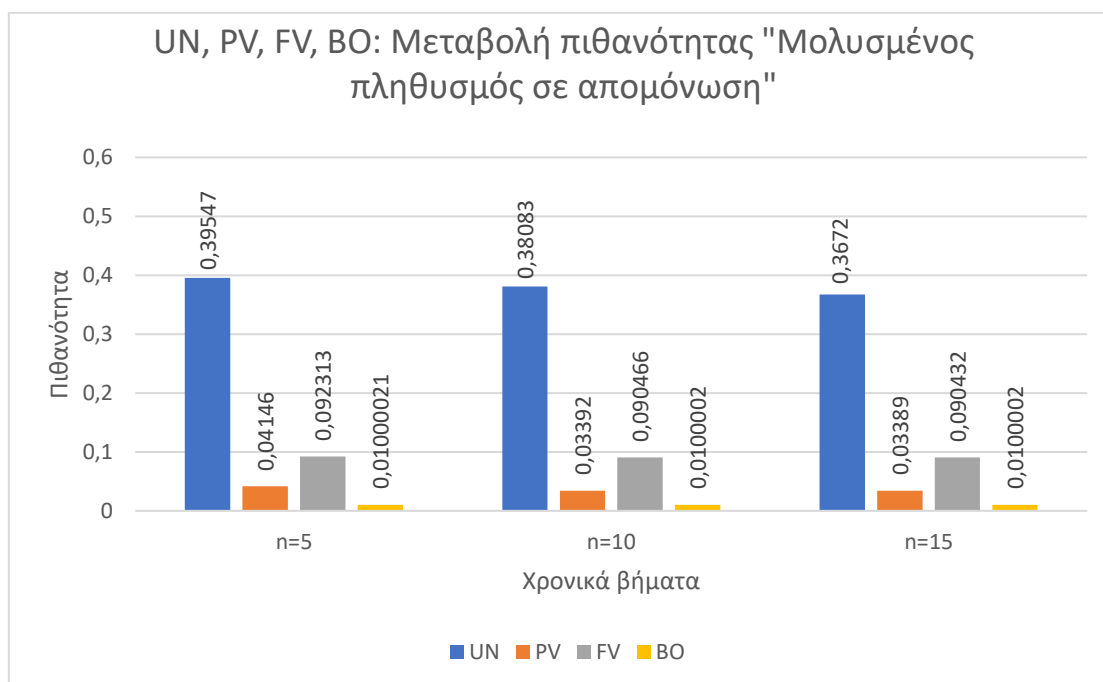


Διάγραμμα 239-Μεταβολή πιθανότητας «Θάνατος» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO

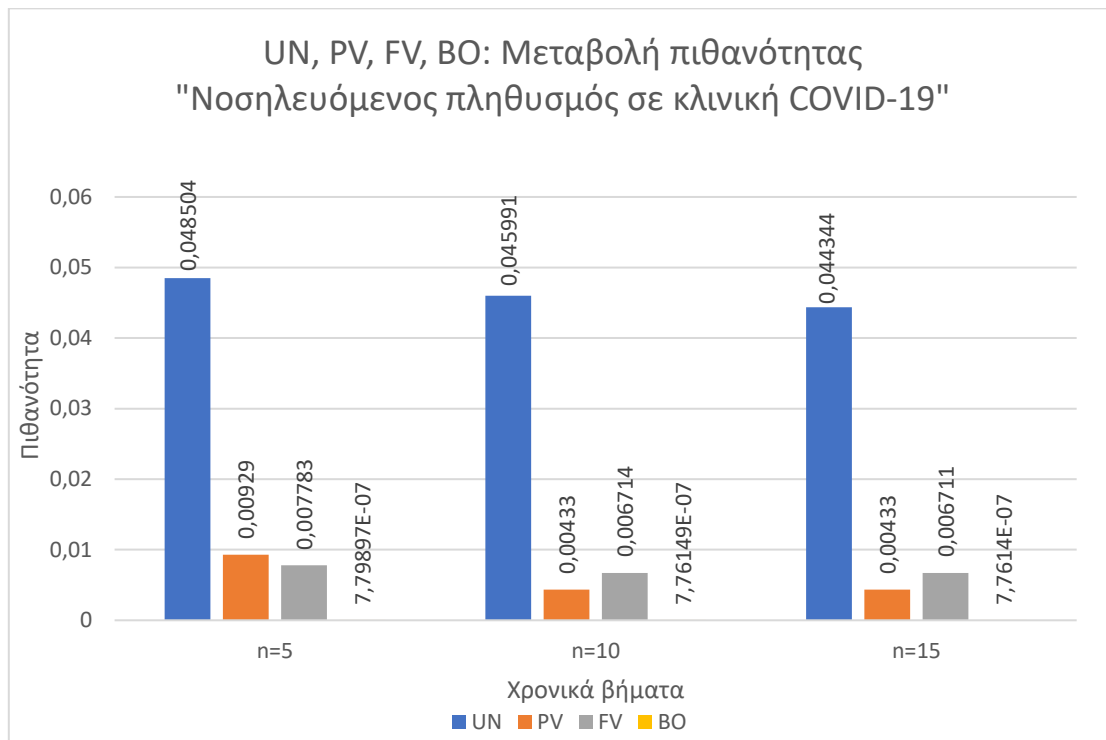
Τα αποτελέσματα όλων των μοντέλων για τη μεταβολής πιθανότητας κάθε κατάστασης μετά από $n = 5, 10, 15$ χρονικά βήματα, δεδομένου ότι αρχικά βρισκόμαστε στην κατάσταση «Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ», φαίνονται στα διαγράμματα 240, 241, 242, 243 και 244:



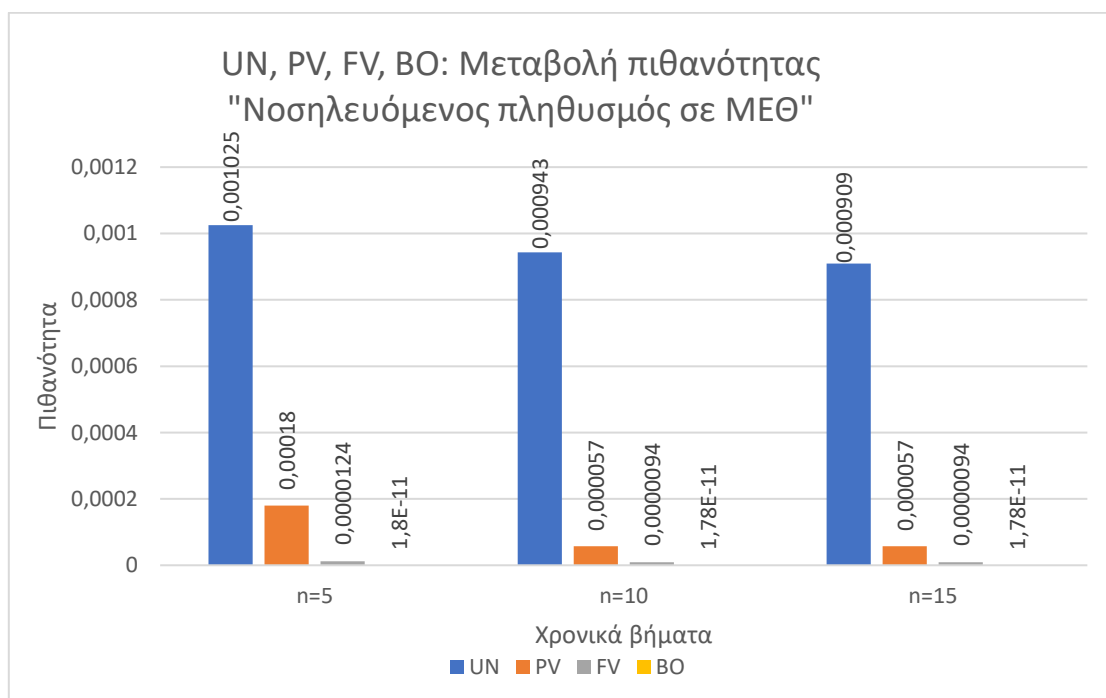
Διάγραμμα 240-Μεταβολή πιθανότητας «Υγιής πληθυσμός» μετά από $n=5, 10, 15$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO



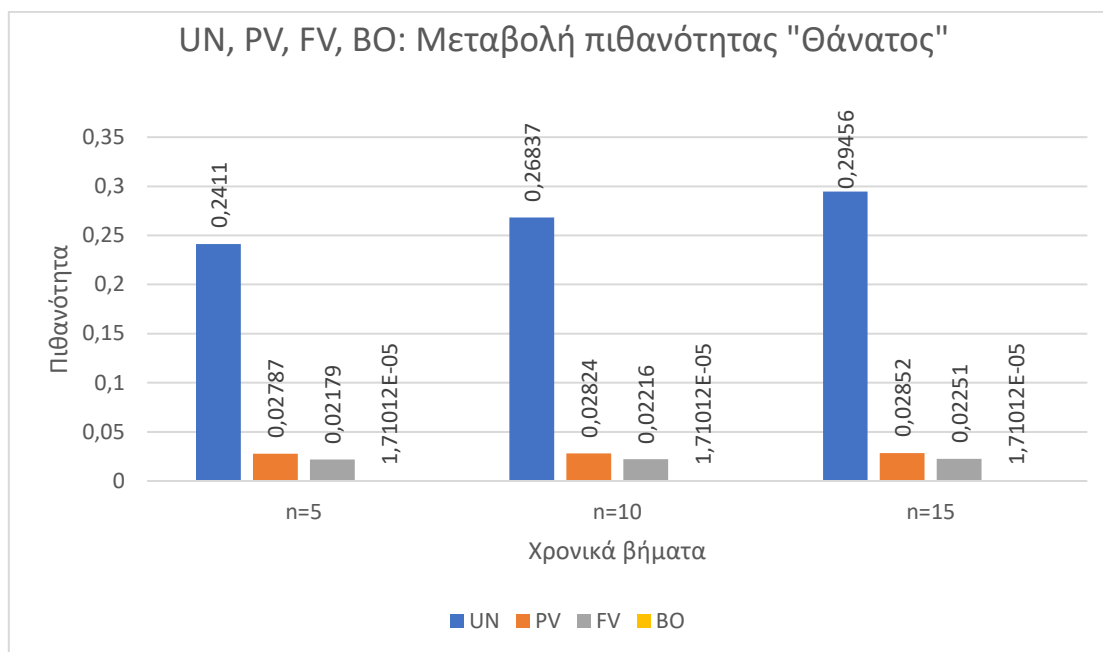
Διάγραμμα 241-Μεταβολή πιθανότητας «Μολυσμένος σε απομόνωση» μετά από $n=5, 10, 15$ βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO



Διάγραμμα 242-Μεταβολή πιθανότητας «Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO



Διάγραμμα 243-Μεταβολή πιθανότητας «Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO



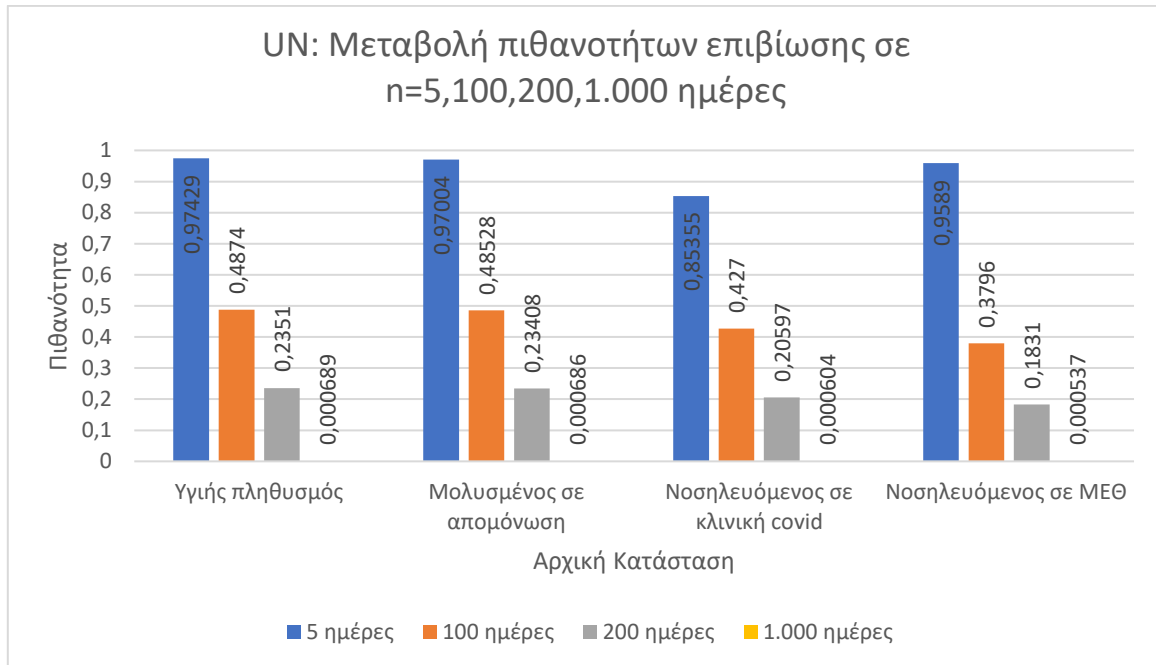
Διάγραμμα 244-Μεταβολή πιθανότητας «Θάνατος» μετά από n=5,10,15 βήματα δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO

Όπως παρατηρούμε από το **διάγραμμα 225** έως το **διάγραμμα 244**, προκύπτει πως οι πιθανότητες μετάβασης του συνόλου των μεταβατικών καταστάσεων μειώνεται με την πάροδο των χρονικών βημάτων. Αντιθέτως στην απορροφητική κατάσταση «Θάνατος» οι πιθανότητες μετάβασης σταδιακά αυξάνονται. Η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός πως δεδομένης της ύπαρξης της απορροφητικής κατάστασης, είναι βέβαιο πως η Μαρκοβιανή αλυσίδα θα καταλήξει σε αυτή με πιθανότητα τη μονάδα. Όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων που εκτελείται η διαδικασία, ο πληθυσμός των μεταβατικών καταστάσεων θα μειώνεται, καθώς υπάρχει θετική πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση «Θάνατος».

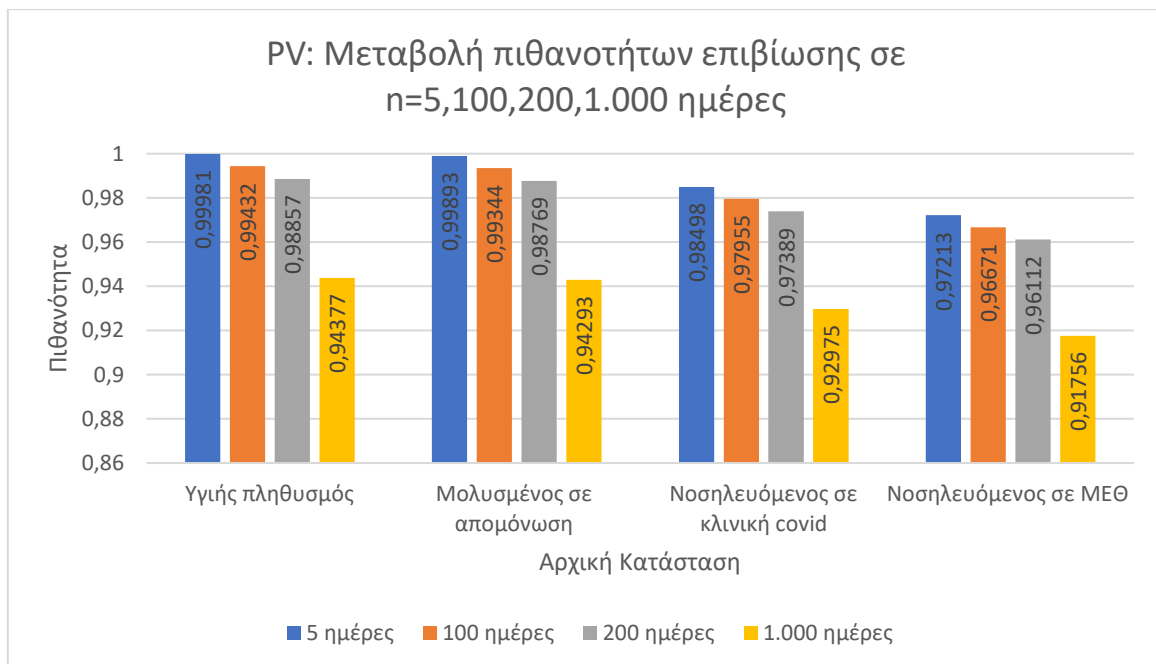
Τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τις πιθανότητες μετάβασης n -οστού βήματος, μας οδηγούν στο συμπέρασμα πως το μοντέλο BO είναι φανερά πιο αποτελεσματικό. Ανεξάρτητα των αρχικών συνθηκών, οι πιθανότητες μετάβασης στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός» υπερσχύουν των υπολοίπων μοντέλων, ιδίως σε σχέση με το μοντέλο UN, ενώ οι πιθανότητες μετάβασης σε όλες τις υπόλοιπες καταστάσεις που αφορούν νόσηση, νοσηλεία σε κλινική COVID-19/ΜΕΘ και θάνατο από κορωνοϊό είναι αισθητά μειωμένες.

Ένα από τα πιο σημαντικά μέτρα απόδοσης που υπολογίστηκαν, είναι η **πιθανότητα επιβίωσης n -οστού βήματος**. Στα **διαγράμματα 245, 246, 247 και 248** φαίνεται η μεταβολή

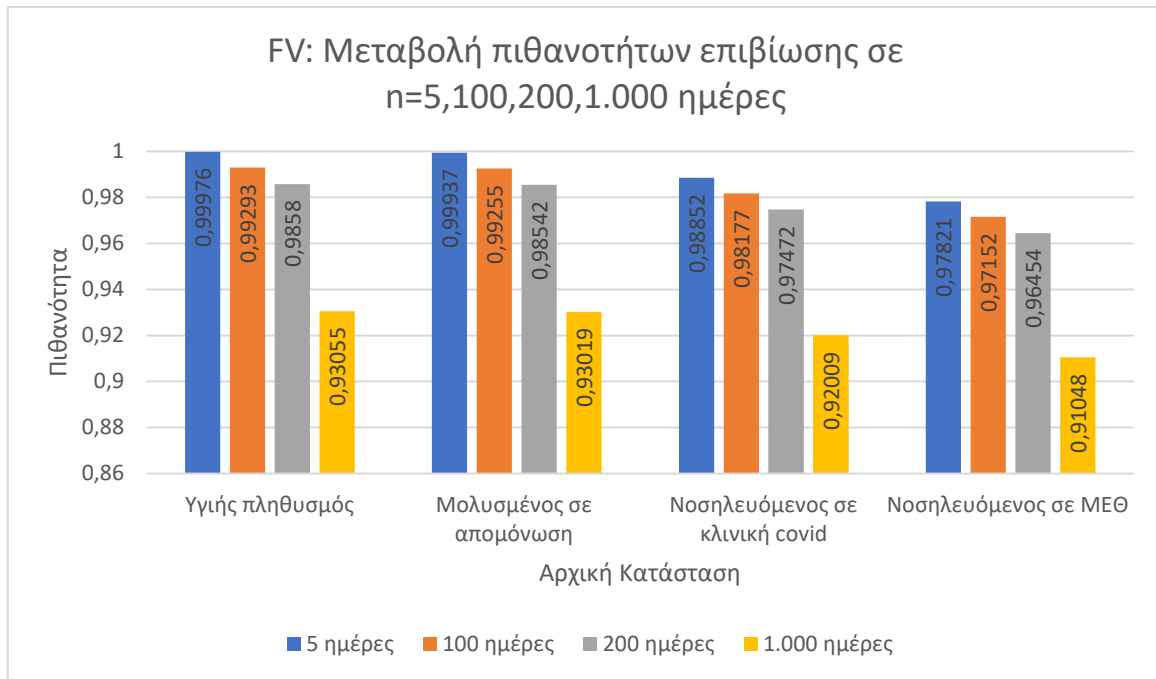
των πιθανοτήτων επιβίωσης, μετά την πάροδο 5, 100, 200 και 1.000 ημερών, για κάθε εξεταζόμενο μοντέλο ξεχωριστά, δεδομένου ότι έχουμε ξεκινήσει από την κάθε κατάσταση του άξονα x:



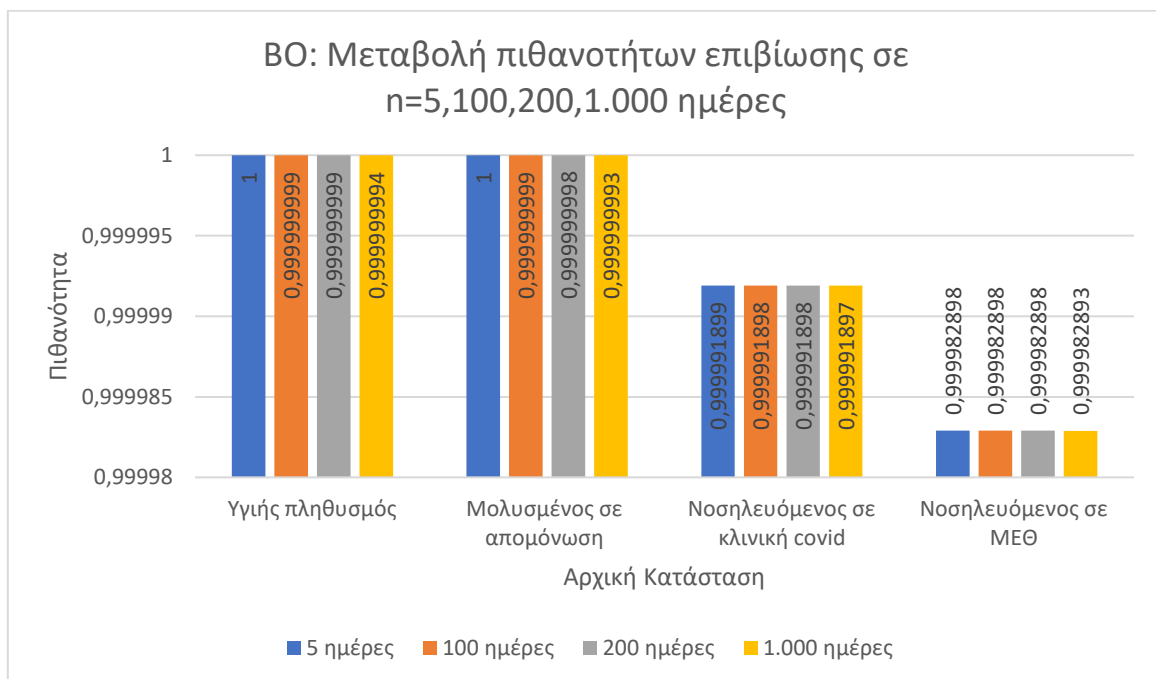
Διάγραμμα 245-Μεταβολή πιθανοτήτων επιβίωσης μετά από n=5,100,200,1000 ημέρες μοντέλων UN



Διάγραμμα 246-Μεταβολή πιθανοτήτων επιβίωσης μετά από n=5,100,200,1000 ημέρες μοντέλων PV

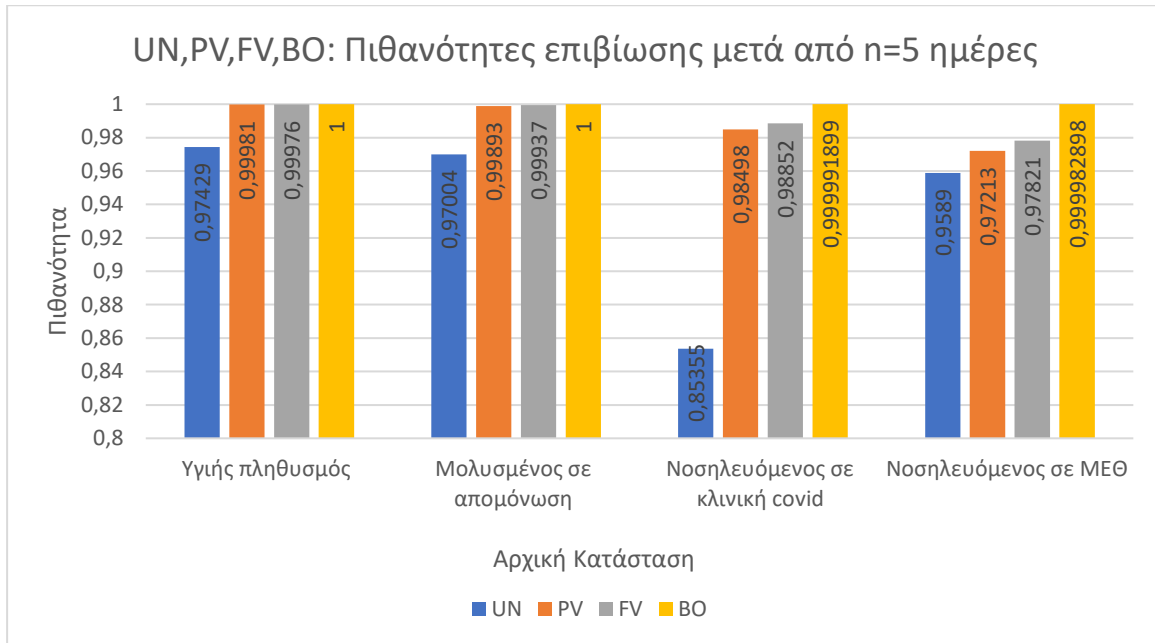


Διάγραμμα 247-Μεταβολή πιθανοτήτων επιβίωσης μετά από n=5,100,200,1000 ημέρες μοντέλων FV

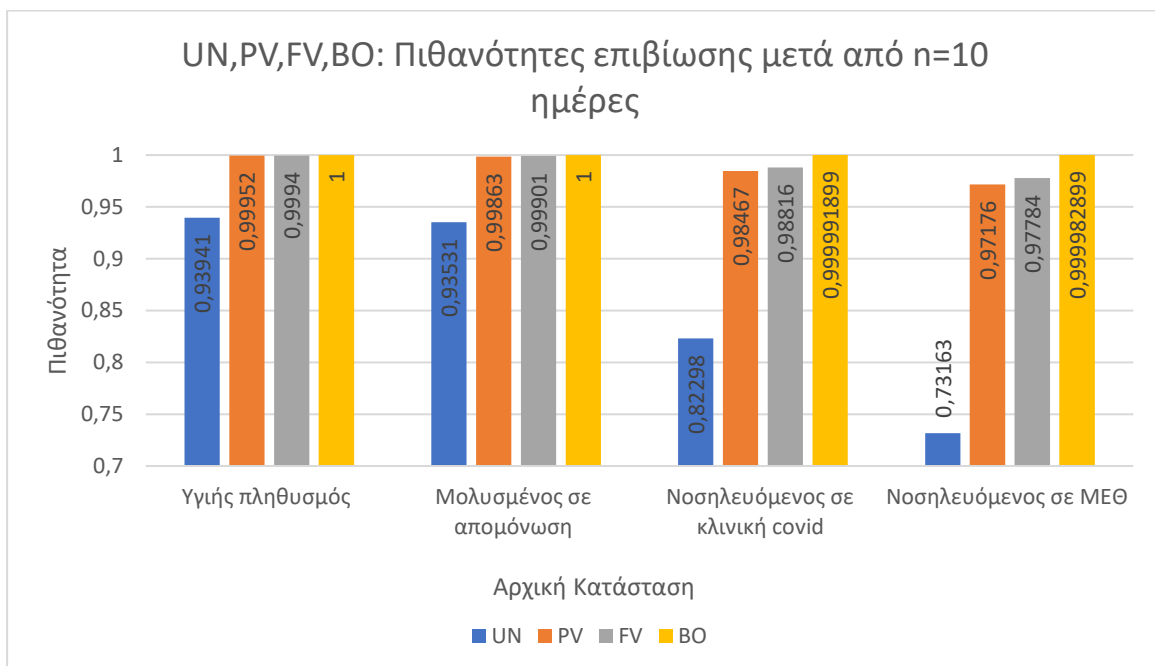


Διάγραμμα 248-Μεταβολή πιθανοτήτων επιβίωσης μετά από n=5,100,200,1000 ημέρες μοντέλων BO

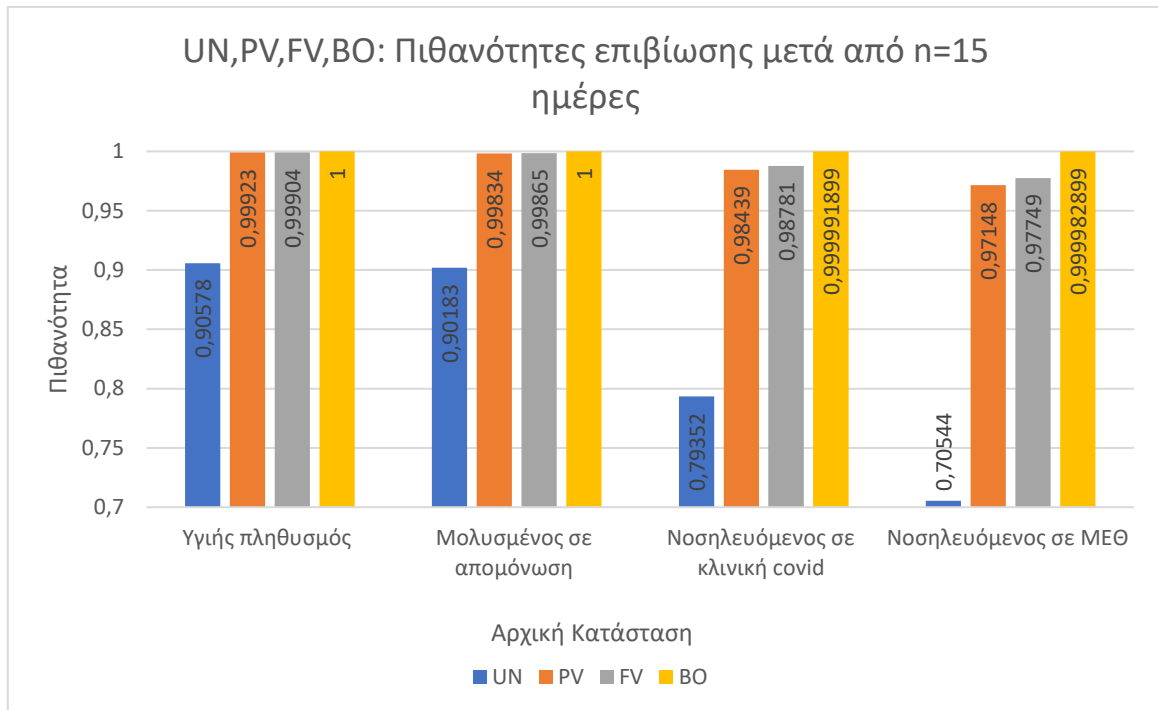
Στα διαγράμματα 249, 250, 251, 252, 253, 254 και 255 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα των πιθανοτήτων επιβίωσης κάθε μοντέλου (UN, PV, FV, BO), σε $n = 5, 10, 15, 50, 100, 200, 1.000$ ημέρες, δεδομένου ότι η διαδικασία ξεκινάει από κάθε κατάσταση του άξονα x:



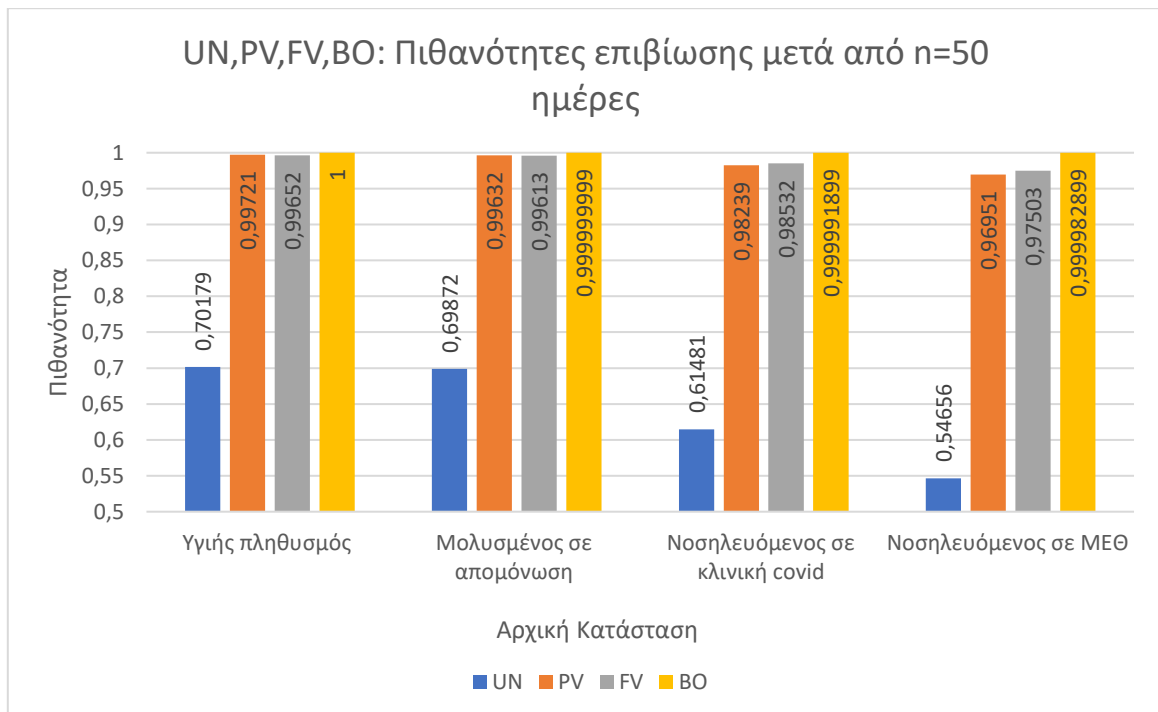
Διάγραμμα 249-Πιθανότητες επιβίωσης μετά από n=5 βήματα μοντέλων UN, PV, FV, BO



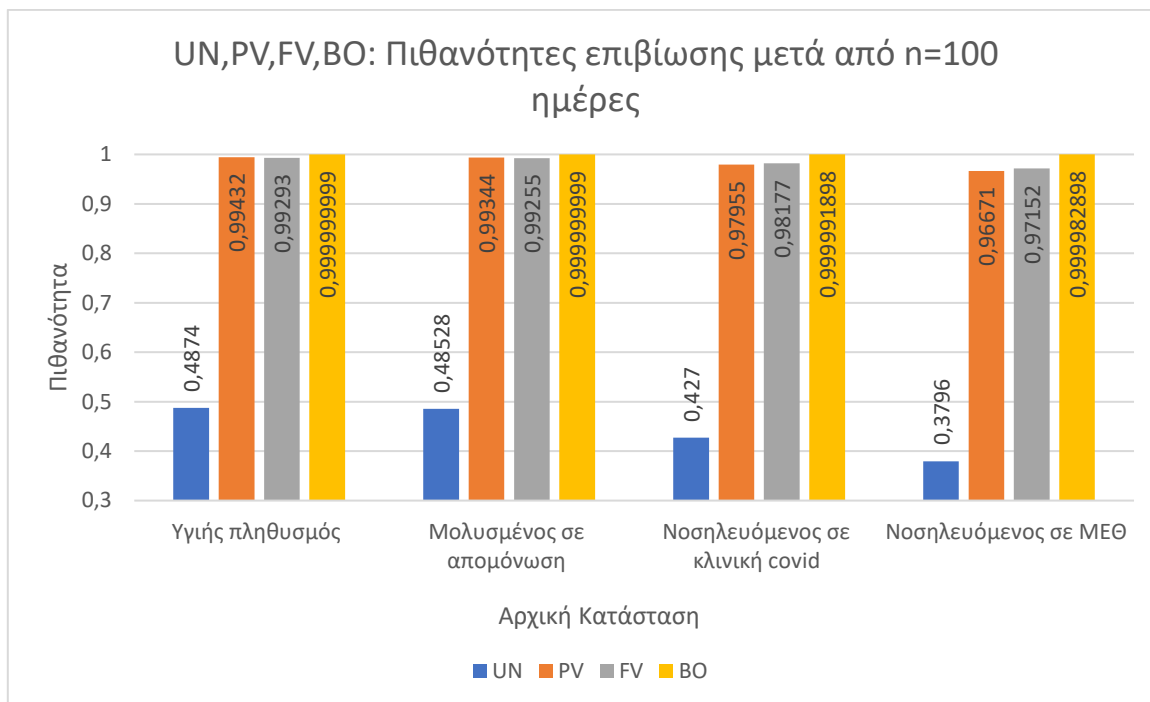
Διάγραμμα 250-Πιθανότητες επιβίωσης μετά από n=10 βήματα μοντέλων UN, PV, FV, BO



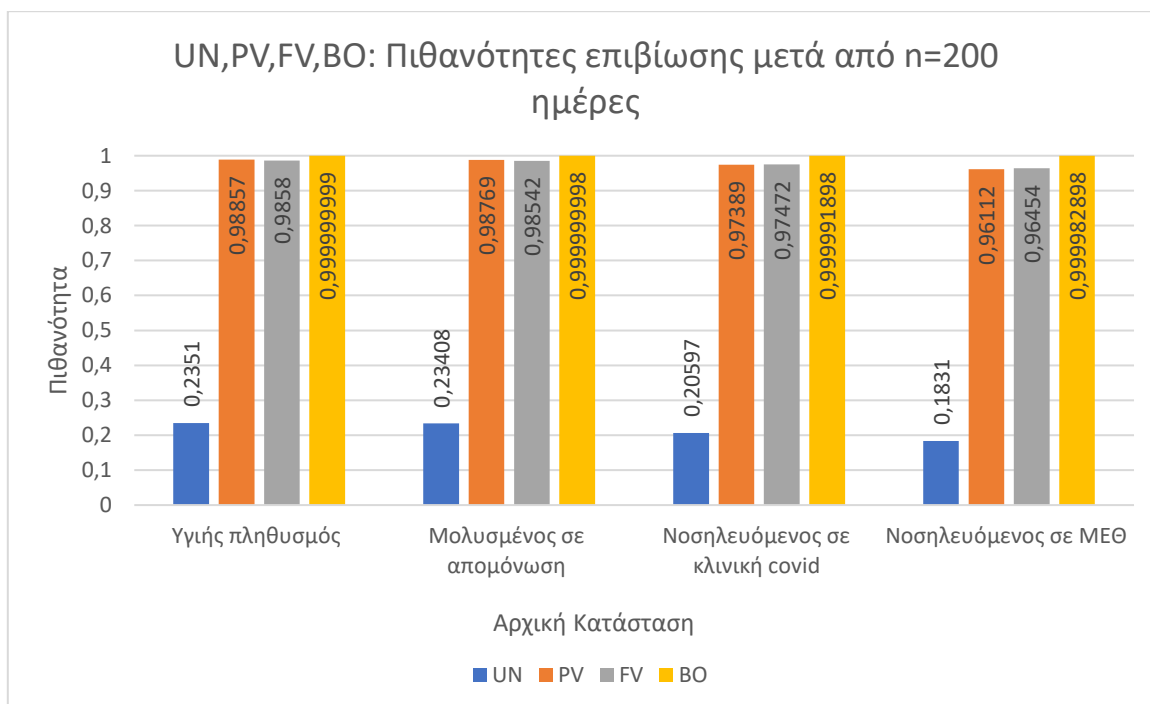
Διάγραμμα 251-Πιθανότητες επιβίωσης μετά από n=15 βήματα μοντέλων UN, PV, FV, BO



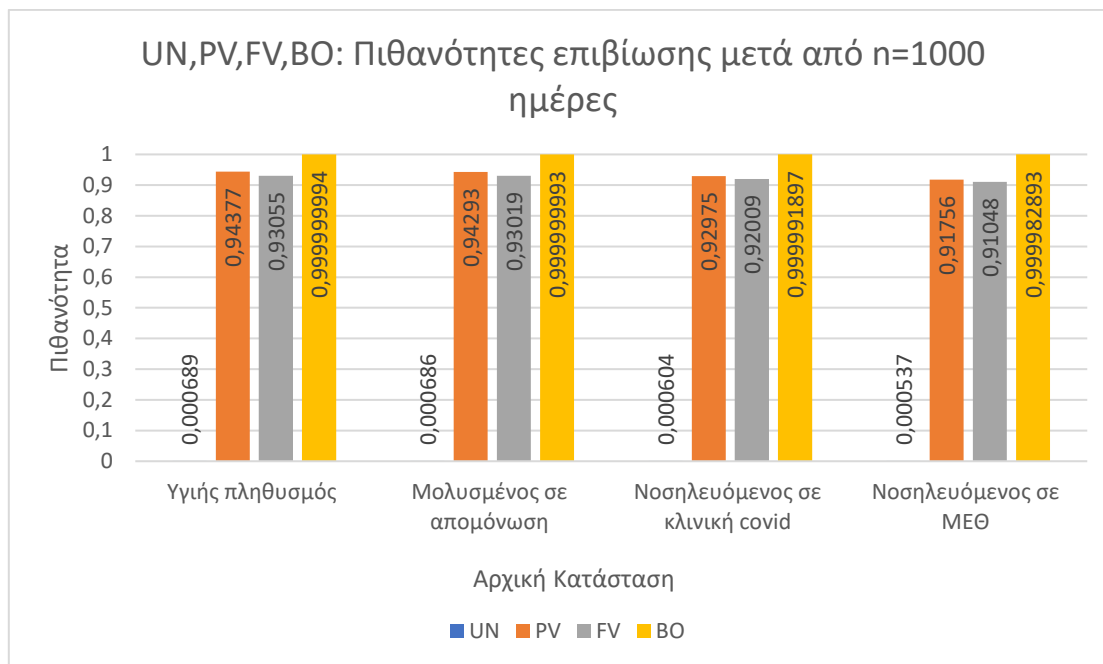
Διάγραμμα 252-Πιθανότητες επιβίωσης μετά από n=50 βήματα μοντέλων UN, PV, FV, BO



Διάγραμμα 253-Πιθανότητες επιβίωσης μετά από n=100 βήματα μοντέλων UN, PV, FV, BO



Διάγραμμα 254-Πιθανότητες επιβίωσης μετά από n=200 βήματα μοντέλων UN, PV, FV, BO



Διάγραμμα 255-Πιθανότητες επιβίωσης μετά από n=1000 βήματα μοντέλων UN, PV, FV, BO

Τα αποτελέσματα του μέτρου αυτού είναι βασισμένα στις πιθανότητες n -οστού βήματος. Κατά συνέπεια, παρατηρούμε πάλι πως οι πιθανότητες μετάβασης στην απορροφητική κατάσταση σταδιακά αυξάνονται, ενώ στις μεταβατικές μειώνονται. Δεδομένου πως οι πιθανότητες επιβίωσης αφορούν μόνο τις μεταβατικές καταστάσεις, είναι λογικό να μειώνονται με την πάροδο των ημερών, καθώς η έκθεση στην κατάσταση «Θάνατος» μεγαλώνει. Ακόμη, παρατηρούμε πως οι πιθανότητες επιβίωσης διακρίνονται καλύτερα όσο αυξάνεται ο αριθμός των ημερών που εξετάζεται, εφόσον για $n = 5, 10, 15, 50$ ημέρες ορισμένες καταχωρήσεις είναι τόσο κοντά στη μονάδα που δηλώνονται ως «1». Τέλος, λόγω των “ακραίων” πιθανοτήτων μετάβασης που έχει το μοντέλο BO, διακρίνουμε πως οι μεταβολές των πιθανοτήτων επιβίωσης πραγματοποιούνται με φανερά πιο αργούς ρυθμούς σε σχέση με τα υπόλοιπα μοντέλα. Για παράδειγμα, ακόμα και στο διάστημα των $n = 1000$ ημερών το οποίο εξετάζεται στο **διάγραμμα 255**, παρατηρούμε πως οι πιθανότητες επιβίωσης είναι πολύ υψηλές ανεξαρτήτως της αρχικής θέσης της διαδικασίας, εφόσον κυμαίνονται από 0,999999994 έως 0,999982893, καθώς και η διαφορά σε σχέση με το **διάγραμμα 249** που εξετάζει τις ίδιες πιθανότητες αλλά σε διάστημα $n = 5$ ημερών είναι σχεδόν μηδαμινή.

Συμπερασματικά, καταλήγουμε πως το μοντέλο BO ανταποκρίνεται καλύτερα στην έκθεση των πληθυσμιακών ομάδων στην πανδημία COVID-19 σε σύγκριση με τα υπόλοιπα μοντέλα.

Το συμπέρασμα αυτό, προκύπτει βάση της σύγκρισης των πιθανοτήτων επιβίωσης n -οστού βήματος, οι οποίες όπως παρατηρούμε από το **διάγραμμα 249** έως το **διάγραμμα 255**, είναι φανερά μεγαλύτερες, αλλά και του ρυθμού με τον οποίο συντελούνται οι μεταβάσεις. Ο ρυθμός με τον οποίο πραγματοποιείται η απορρόφηση αποτελεί μείζον ζήτημα για την επιβίωση, καθώς επιτυγχάνεται ένα σημαντικό πλεονέκτημα χρόνου κατά το οποίο μπορεί να αποφευχθεί ο κορεσμός στις υγειονομικές εγκαταστάσεις ή διαφορετικά είναι πιθανή η εύρεση νέου τρόπου αντιμετώπισης του ιού.

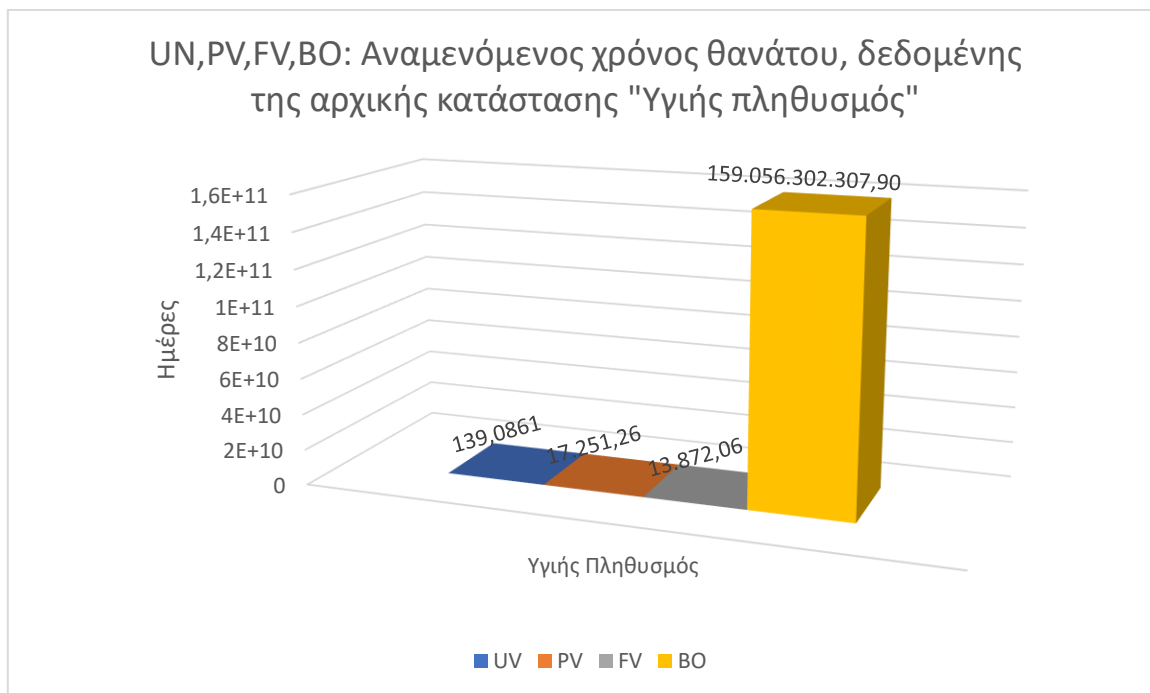
Στη συνέχεια, το επόμενο μέτρο που αξίζει να συγκριθεί είναι ο αναμενόμενος χρόνος θανάτου. Ο παρακάτω πίνακας δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό ημερών πριν εισέλθει η Μαρκοβιανή αλυσίδα στην κατάσταση απορρόφησης, δεδομένης της αρχικής κατάστασης:

Αναμενόμενος χρόνος θανάτου (ημέρες)

	UN	PV	FV	BO
1	139,0861	17.251,2574	13.872,05802	159.056.302.307,9004
2	81,3824	680,2476	1.379,18216	1.590.746.658,3326
3	8,8311	77,9229	95,37142	123.456,3528
4	1,1735	2,0124	1,1335	3,8394

Πίνακας 35-Αναμενόμενος χρόνος θανάτου των καταστάσεων μοντέλων UN, PV, FV, BO

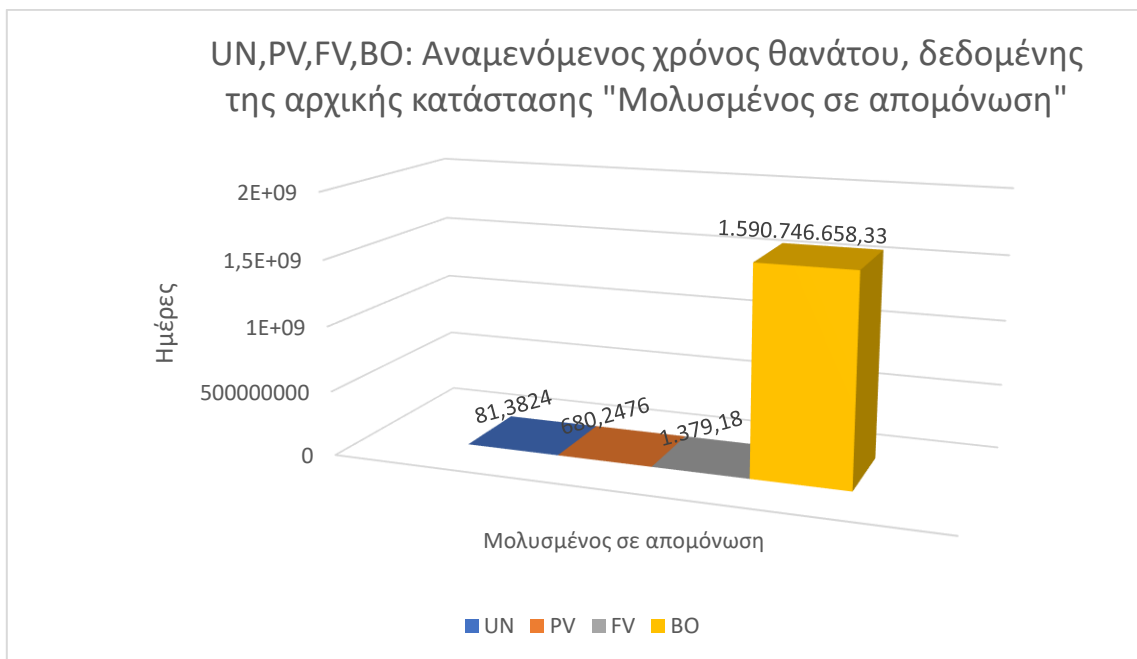
Ο αναμενόμενος χρόνος θανάτου εξαρτάται άμεσα από την αρχική θέση του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα, το ακόλουθο γράφημα απεικονίζει τον αναμενόμενο χρόνο θανάτου, στην περίπτωση που η αρχική θέση της αλυσίδας είναι η κατάσταση «**Υγιής πληθυσμός**»:



Διάγραμμα 256-Αναμενόμενος χρόνος θανάτου δεδομένου ότι $p(0)=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO

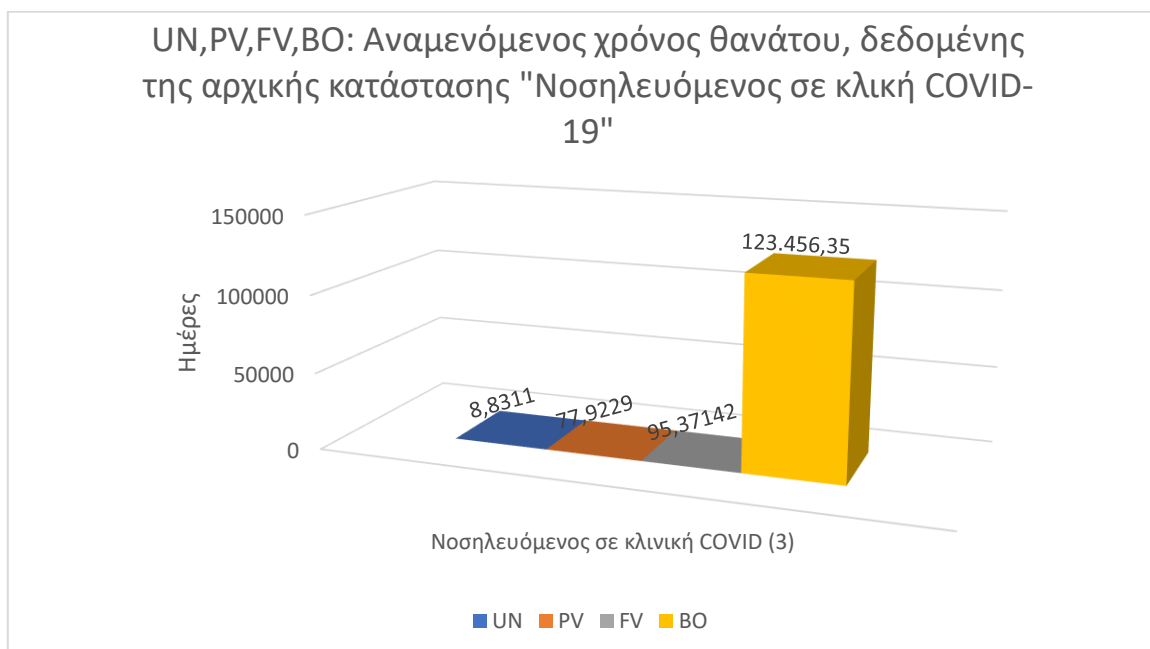
Παρατηρούμε πως το μοντέλο PV δείχνει να έχει μεγαλύτερο αναμενόμενο χρόνο θανάτου σε σχέση με το μοντέλο FV. Όπως ερμηνεύτηκε προηγουμένως, αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο τρόπος που συλλέχθηκαν τα δεδομένα θέτουν τους πλήρως εμβολιασμένους σε πολύ μεγαλύτερη έκθεση στις απόρροιες της πανδημίας, λόγω του ότι καλύπτουν μεγαλύτερο χρονικό διάστημα σε σχέση με τα δεδομένα των μερικώς εμβολιασμένων.

Έστω τώρα πως η διαδικασία ξεκινάει από την κατάσταση «**Μολυσμένος σε απομόνωση**». Ο αναμενόμενος χρόνος που απαιτείται για να φτάσει στην απορροφητική κατάσταση, παρουσιάζεται διαγραμματικά ως εξής:



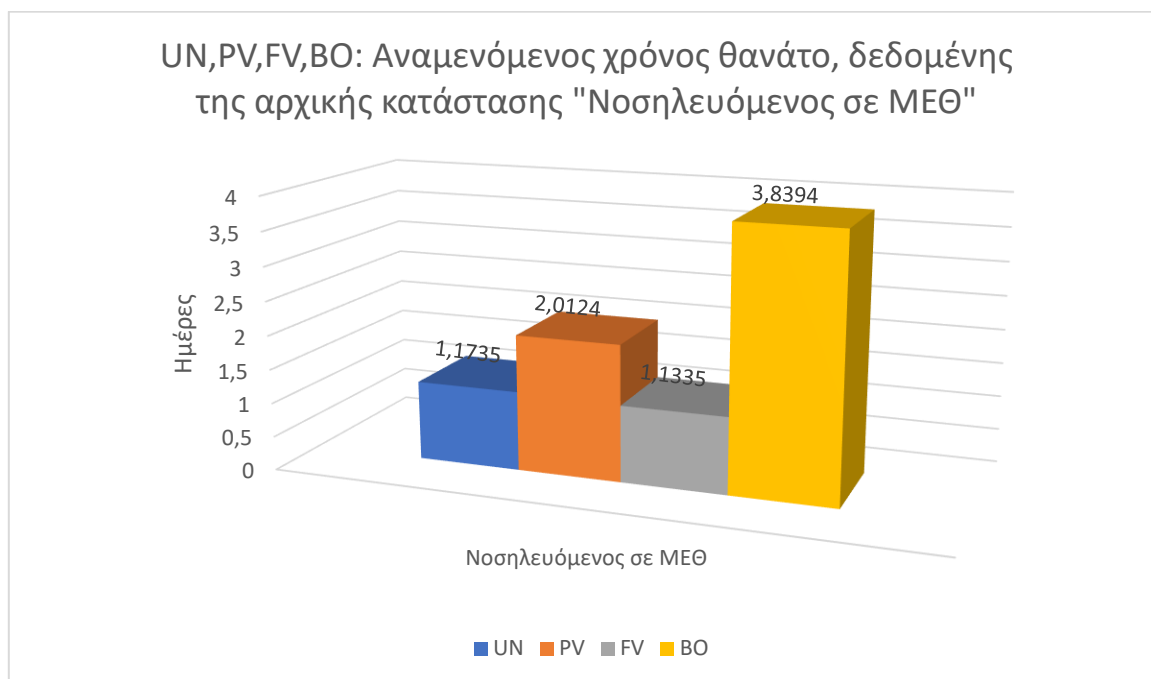
Διάγραμμα 257-Αναμενόμενος χρόνος θανάτου δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 1 \ 0 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO

Στη συνέχεια, στην περίπτωση που η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση «**Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19**», ο αναμενόμενος χρόνος θανάτου των μοντέλων παρουσιάζεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Διάγραμμα 258-Αναμενόμενος χρόνος θανάτου δεδομένου ότι $p(0)=[0 \ 0 \ 1 \ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO

Τέλος, ο αναμενόμενος χρόνος θανάτου, δεδομένης της αρχικής κατάστασης «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ», παρουσιάζεται στο ακόλουθο διάγραμμα:



Διάγραμμα 259-Αναμενόμενος χρόνος θανάτου δεδομένου ότι $p(0)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ μοντέλων UN, PV, FV, BO

Στο **διάγραμμα 259** βλέπουμε ότι ο αναμενόμενος χρόνος θανάτου δεδομένης της αρχικής κατάστασης «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ» δείχνει να είναι περισσότερος για το μοντέλο μερικής εμβολιασμένου και ανεμβολίαστου πληθυσμού σε σχέση το μοντέλο του πλήρως εμβολιασμένου πληθυσμού. Η προβληματική αυτή συμπεριφορά, είναι πιθανό να οφείλεται στο γεγονός πως η έρευνα βασίστηκε σε πειραματικά δεδομένα, οπότε είναι πιθανή η ύπαρξη λάθους στα προκύπτοντα αποτελέσματα.

Για ακόμη μία φορά, παρατηρούμε πως το μοντέλο BO είναι ξεκάθαρα πιο αποτελεσματικό αναφορικά με τη νόσηση, νοσηλεία σε κλινική COVID-19/ΜΕΘ και θάνατο από κορονοϊό σε σχέση με τα υπόλοιπα, καθώς ο αναμενόμενος χρόνος θανάτου διαφέρει σημαντικά ανεξάρτητα των αρχικών συνθηκών που έχουμε εξετάσει.

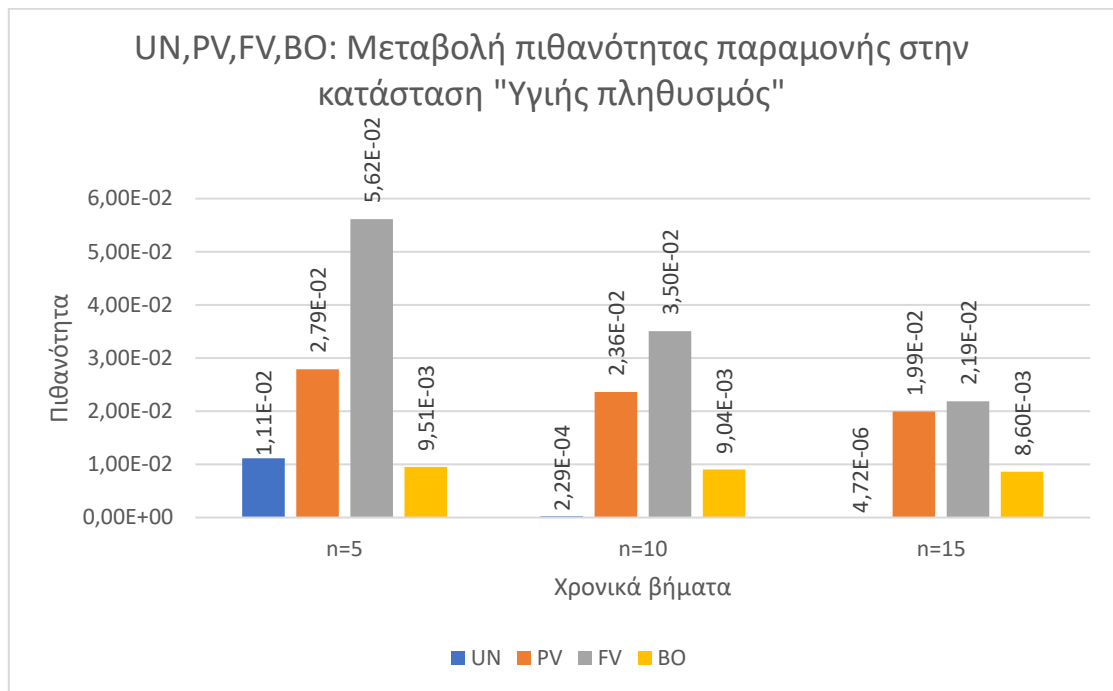
Το επόμενο μέτρο απόδοσης είναι η πιθανότητα παραμονής στις μεταβατικές καταστάσεις, μετά από $n = 5, 10, 15$ χρονικά βήματα. Παρατίθεται ο ακόλουθος πίνακας, ο οποίος συγκεντρώνει τα αποτελέσματα των πιθανοτήτων παραμονής n -οστού βήματος όλων των μοντέλων:

Πιθανότητες παραμονής στις μεταβατικές καταστάσεις μετά από n=5,10,15 βήματα

	n=5				n=10				n=15			
	UN	PV	FV	BO	UN	PV	FV	BO	UN	PV	FV	BO
1	1,1122000 70400000 $\times 10^{-2}$	2,7902705 17549705 $\times 10^{-2}$	5,6162893 05900000 $\times 10^{-2}$	9,5099004 99000008 $\times 10^{-3}$	2,2907203 64069936 $\times 10^{-4}$	2,3592756 24577907 $\times 10^{-2}$	3,5047450 63062967 $\times 10^{-2}$	9,0438207 50088052 $\times 10^{-3}$	4,7180358 33676475 $\times 10^{-6}$	1,9948537 02434362 $\times 10^{-2}$	2,1870735 79731819 $\times 10^{-2}$	8,6005835 46412891 $\times 10^{-3}$
2	1,5495337 99854011 $\times 10^{-2}$	2,7537739 32290452 $\times 10^{-8}$	4,4438401 03696481 $\times 10^{-6}$	9,8980735 49812691 $\times 10^{-11}$	4,7921423 37717568 $\times 10^{-4}$	7,8255014 41791640 $\times 10^{-16}$	2,1619534 13240476 $\times 10^{-11}$	9,8961435 76014306 $\times 10^{-21}$	1,4820346 73080949 $\times 10^{-5}$	2,2238017 47028229 $\times 10^{-23}$	1,0518025 96842802 $\times 10^{-16}$	9,8942139 78531460 $\times 10^{-31}$
3	2,1212123 54658454 $\times 10^{-6}$	8,0560113 12448443 $\times 10^{-7}$	7,5696339 78576401 $\times 10^{-8}$	8,9069930 25441632 $\times 10^{-23}$	4,8616365 43300698 $\times 10^{-12}$	6,9129637 29066207 $\times 10^{-13}$	5,9559449 07165052 $\times 10^{-15}$	7,9337610 98833333 $\times 10^{-45}$	1,1142453 43105331 $\times 10^{-17}$	5,9321003 49156602 $\times 10^{-19}$	4,6862608 99480990 $\times 10^{-22}$	7,0668703 78540590 $\times 10^{-67}$
4	1,7017185 37289412 $\times 10^{-9}$	3,4318257 66141777 $\times 10^{-10}$	5,0946825 21685347 $\times 10^{-15}$	6,2974897 05673199 $\times 10^{-24}$	2,9479960 29923767 $\times 10^{-18}$	1,1930496 35742029 $\times 10^{-19}$	2,5991796 43236393 $\times 10^{-29}$	3,9659284 79068162 $\times 10^{-47}$	5,1070023 63792353 $\times 10^{-27}$	4,1475515 66827960 $\times 10^{-29}$	1,3260364 68231122 $\times 10^{-43}$	2,4975965 71998291 $\times 10^{-70}$

Πίνακας 36-Πίνακας πιθανοτήτων παραμονής μεταβατικών καταστάσεων n=5,10,15 βημάτων μοντέλων UN,PV,FV,BO

Στα παρακάτω γραφήματα φαίνεται η πιθανότητα παραμονής σε κάθε κατάσταση (εκτός της απορροφητικής) όλων των μοντέλων μετά από $n = 5, 10, 15$ χρονικές στιγμές:



Διάγραμμα 260-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής «Υγιής πληθυσμός» μετά από $n=5, 10, 15$ βήματα μοντέλων UN, PV, FV, BO

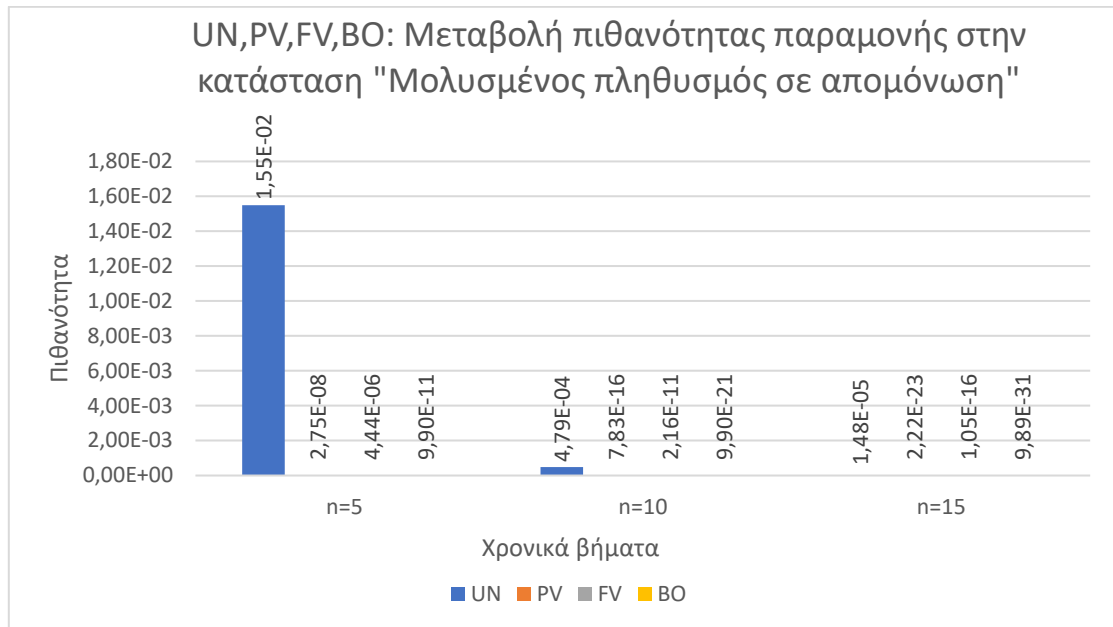
Στο **διάγραμμα 263** παρατηρούμε πως το μοντέλο UN έχει αρκετά μικρή πιθανότητα παραμονής στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός», κάτι το οποίο ήταν αναμενόμενο καθώς έχει μεγαλύτερη πιθανότητα νόσησης σε σύγκριση με τα υπόλοιπα μοντέλα. Επίσης παρατηρούμε πως η αντίστοιχη πιθανότητα του μοντέλου BO για $n = 5$ χρονικά βήματα είναι ακόμη πιο μικρή, κάτι το οποίο δείχνει να μην είναι φυσιολογικό. Ωστόσο, υπενθυμίζουμε πως τα αποτελέσματα αυτά προέρχονται από τον τύπο:

$$P^n = (1 - P_{ii})P_{ii}^n$$

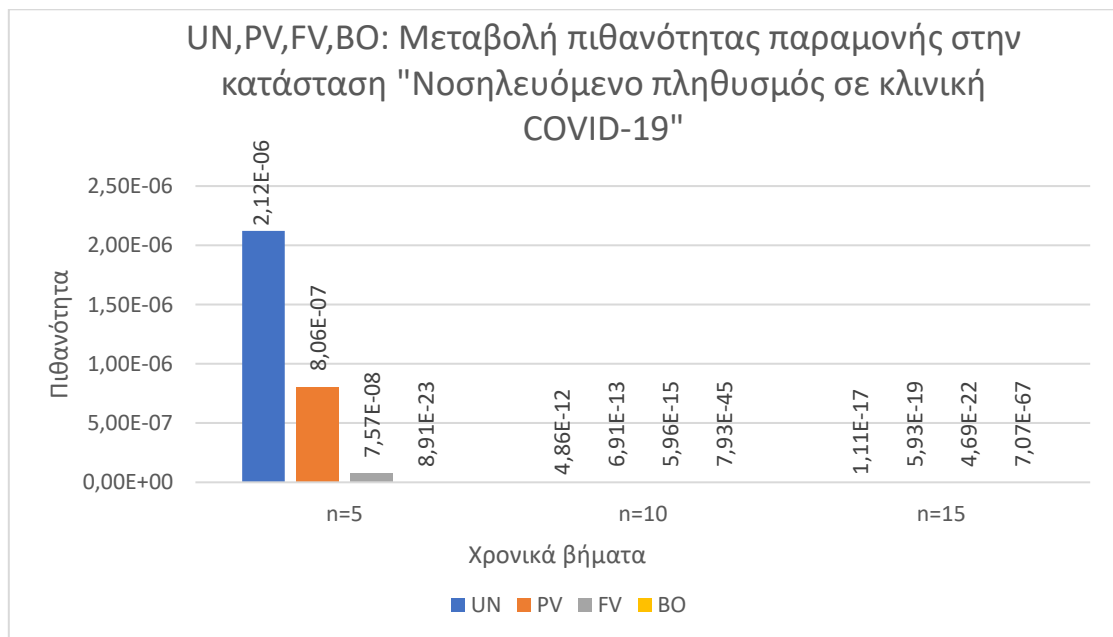
όπου $n = 5, 10, 15$ και $i = 1, 2, 3, 4$.

Ο παραπάνω τύπος συνδυάζει την πιθανότητα παραμονής στην ίδια κατάσταση (P_{ii}) και την πιθανότητα εγκατάλειψης της κατάστασης ($1 - P_{ii}$). Δεδομένης της πολύ μεγάλης πιθανότητας που έχει το μοντέλο να παραμείνει στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός» ($P_{ii} = 0,99$),

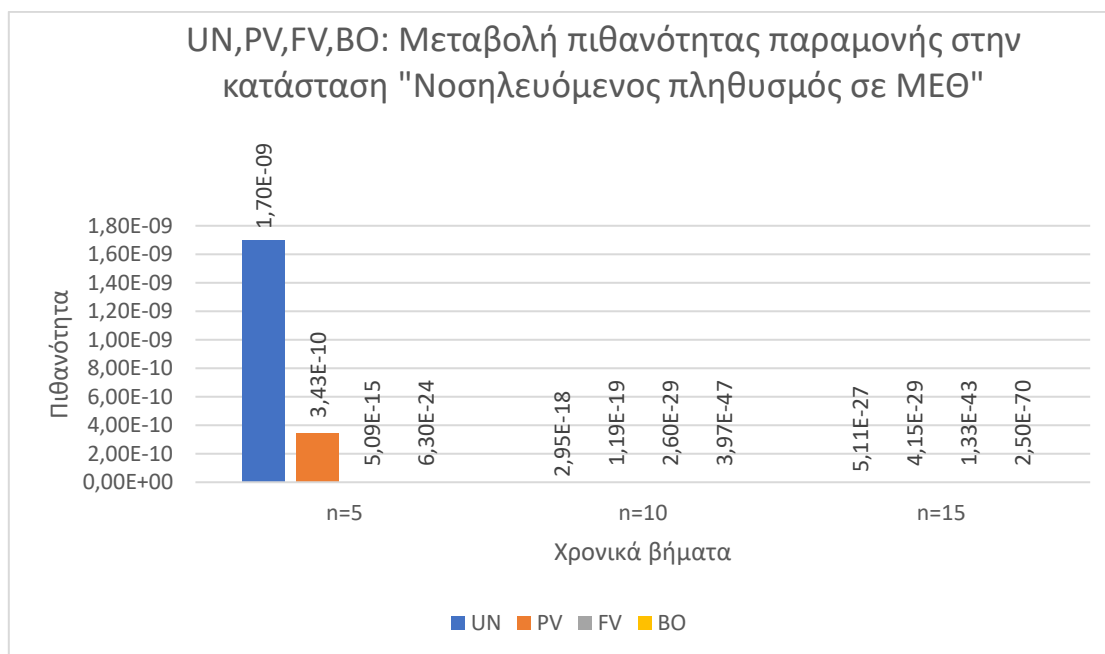
συνεπάγεται πως η πιθανότητα να μεταβεί από αυτήν την κατάσταση θα είναι πολύ μικρή της τάξης του $(1 - P_{ii} =) 0,01$, ποσοστό που ελαττώνει κατά πολύ το τελικό αποτέλεσμα.



Διάγραμμα 261-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής «Μολυσμένος σε απομόνωση» μετά από n=5,10,15 βήματα μοντέλων UN, PV, FV, BO



Διάγραμμα 262-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής «Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19» μετά από n=5,10,15 βήματα μοντέλων UN, PV, FV, BO



Διάγραμμα 263-Μεταβολή πιθανότητας παραμονής «Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ» μετά από n=5,10,15 βήματα μοντέλων UN, PV, FV,

Στα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε πως το μοντέλο του ανεμβολίαστου πληθυσμού (UN) έχει μεγαλύτερη πιθανότητα παραμονής στις μεταβατικές καταστάσεις «Μολυσμένος σε απομόνωση», «Νοσηλεύομενος σε κλινική COVID-19» και «Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ», συγκριτικά με τα υπόλοιπα, κάτι το οποίο είναι λογικό καθώς έχει μεγαλύτερη πιθανότητα νόσησης και κατ' επέκταση μεγαλύτερη πιθανότητα να βρεθεί στις υπόλοιπες καταστάσεις που συνεπάγονται. Επιπρόσθετα, παρατηρούμε πως όσο αυξάνεται ο αριθμός των ημερών που εξετάζεται, τόσο μειώνονται σταδιακά οι πιθανότητες παραμονής, μία συμπεριφορά που επίσης αποδίδεται στο γεγονός ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των ημερών, τόσο θα μειώνεται ο πληθυσμός των μεταβατικών καταστάσεων. Επομένως, όσο μικρότερες πληθυσμιακές ομάδες καλούμαστε να διαχειριστούμε, τόσο μικρότερες θα είναι οι πιθανότητες παραμονής στις καταστάσεις, καθώς λιγοστεύουν και τα περιστατικά.

Συμπερασματικά, καταλήγουμε πως το μοντέλο του πληθυσμού που έχει χορηγηθεί ενισχυτική δόση (BO) λειτουργεί καλύτερα όσον αφορά τις καταστάσεις που αφορούν νόσηση, νοσηλεία σε κλινική COVID-19 και νοσηλεία σε ΜΕΘ. Αυτό προκύπτει από το γεγονός πως οι πιθανότητες παραμονής είναι αισθητά μειωμένες συγκριτικά με τα υπόλοιπα μοντέλα, κάτι το οποίο ήταν αναμενόμενο δεδομένης της πολύ μικρής πιθανότητας νόσησης που έχει κάποιος που ανήκει στο μοντέλο BO. Στην περίπτωση όμως που εξετάζουμε την κατάσταση «Υγής

πληθυσμός» το μοντέλο που δείχνει πιο αποτελεσματικό είναι του πλήρως εμβολιασμένου πληθυσμού (FV), καθώς δίνει μεγαλύτερη πιθανότητα παραμονής σε σχέση με τα υπόλοιπα. Η συμπεριφορά αυτή είναι πιθανό να οφείλετε στο ότι τα δεδομένα που συλλέχθηκαν είναι πειραματικά και κατ' επέκταση είναι πιθανό να υπάρχουν αριθμητικές αποκλείσεις στα αποτελέσματα. Στη συνέχεια, αναφορικά με τα μοντέλα UN και PV παρατηρούμε πως οι πιθανότητες παραμονής είναι μικρές στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός», γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι θα είναι πιο γρήγορη η μετάβαση των πληθυσμών στις υπόλοιπες καταστάσεις. Επίσης, παρατηρούμε πως οι ίδιες πιθανότητες είναι αυξημένες στις ακόλουθες μεταβατικές καταστάσεις και βάση αυτών κρίνονται αναποτελεσματικά για την επιβίωση των πληθυσμιακών ομάδων από την COVID-19, συγκριτικά με τα μοντέλα FV και BO.

Το τελευταίο μέτρο απόδοσης που θα συγκρίνουμε είναι ο μέσος χρόνος που θα ξοδέψει η αλυσίδα (M.A.) σε κάθε κατάσταση, κάθε φορά που την επισκέπτεται. Ο ακόλουθος πίνακας παρουσιάζει συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα όλων των μοντέλων για τον αναμενόμενο αριθμό χρονικών στιγμών που η αλυσίδα θα παραμείνει σε κάθε μεταβατική κατάσταση, κάθε φορά που την επισκέπτεται, καθώς και την αντίστοιχη διακύμανση του μέσου χρόνου παραμονής:

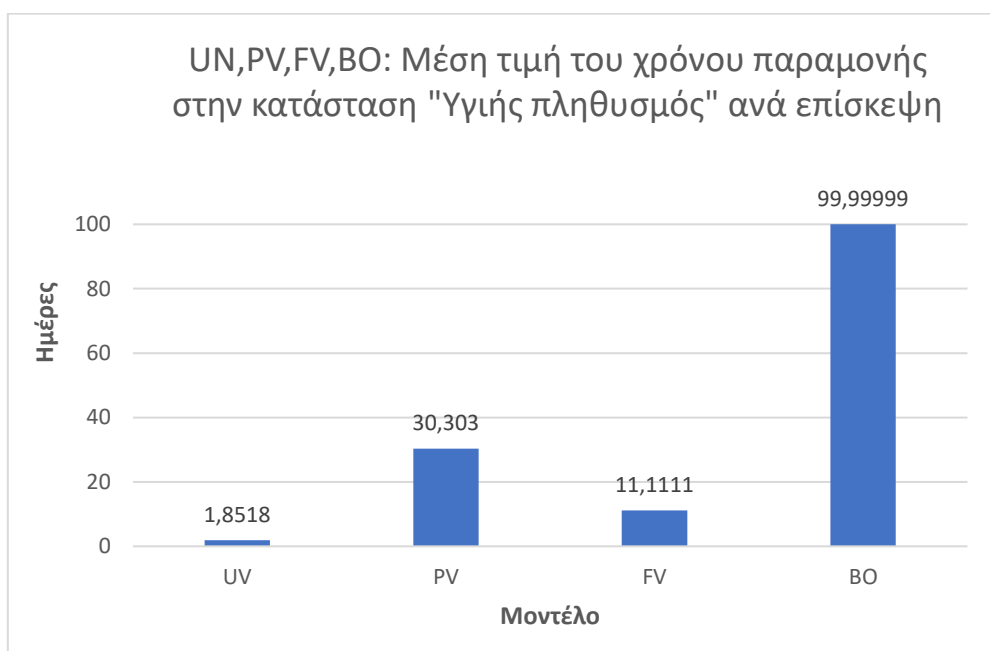
Ο αναμενόμενος αριθμός χρονικών στιγμών που η αλυσίδα (M.A.) θα παραμείνει σε κάθε κατάσταση κάθε φορά που την επισκέπτεται, εκτός από την απορροφητική(ημέρες)

	UN		PV		FV		BO	
	mean	variance	mean	variance	mean	variance	mean	variance
1	1,8518	1,5775	30,3030	887,9706	11,1111	112,35	99,99999	9.899,99999
2	1,9958	1,9875	1,0319	0,0328	1,0947	0,1037	1,01010	0,01022
3	1,0804	0,0869	1,0651	0,0694	1,0394	0,0409	1,00003	0,00003
4	1,0180	0,0183	1,0129	0,0131	1,0013	0,0013	1,00002	0,00002

Πίνακας 37-Αναμενόμενος αριθμός βημάτων σε κάθε κατάσταση ανά επίσκεψη μοντέλων UN, PV, FV, BO

Τα **διαγράμματα 267, 268, 269 και 270** συγκεντρώνουν τους μέσους χρόνους παραμονής σε κάθε κατάσταση (εκτός της απορροφητικής) για κάθε μοντέλο, σε κάθε κατάσταση ξεχωριστά. Αναλυτικότερα:

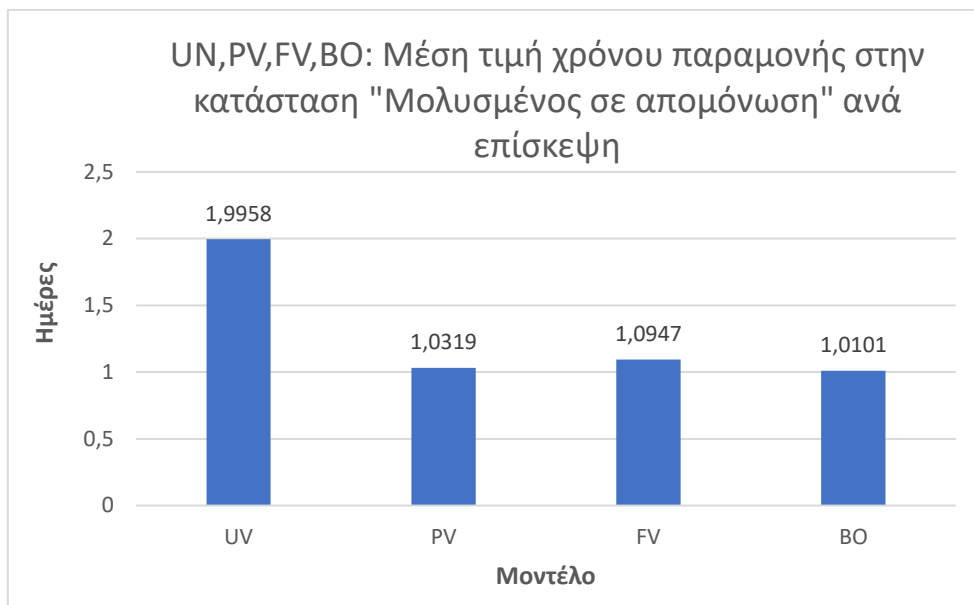
- Η μέση τιμή του χρόνου παραμονής όλων των μοντέλων στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός» ανά επίσκεψη, παρουσιάζεται διαγραμματικά ως εξής:



Διάγραμμα 264-Μέση τιμή χρόνου παραμονής στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός» μοντέλων UN, PV, FV, BO

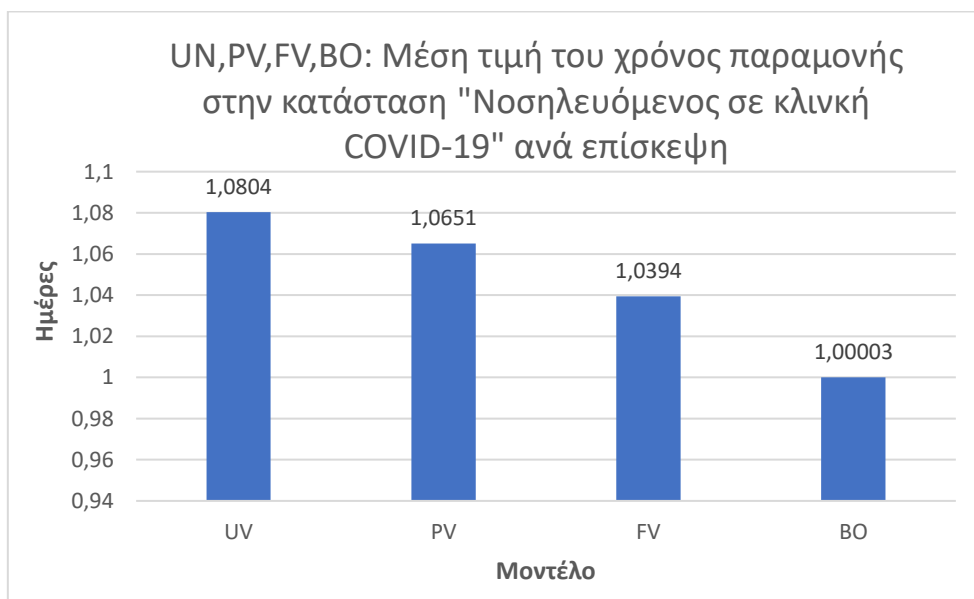
Όπως παρατηρούμε η μέση τιμή του χρόνου παραμονής στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός» είναι εμφανώς μεγαλύτερη για το μοντέλο του μερικώς εμβολιασμένου πληθυσμού (30,303 ημέρες) σε σχέση με του πλήρως εμβολιασμένου πληθυσμού (11,1111 ημέρες). Όπως επισημάνθηκε σε προηγούμενα μέτρα απόδοσης, η συμπεριφορά αυτή αποδίδεται στο γεγονός πως ο τρόπος με τον οποίο συλλέχθηκαν τα δεδομένα, καθιστούν το μοντέλο FV μεγαλύτερο χρονικό διάστημα εκτεθειμένο στον κίνδυνο νόσησης από κορονοϊό.

- Η μέση τιμή του χρόνου παραμονής όλων των μοντέλων στην κατάσταση «Μολυσμένος σε απομόνωση» ανά επίσκεψη, απεικονίζεται στο παρακάτω διάγραμμα:



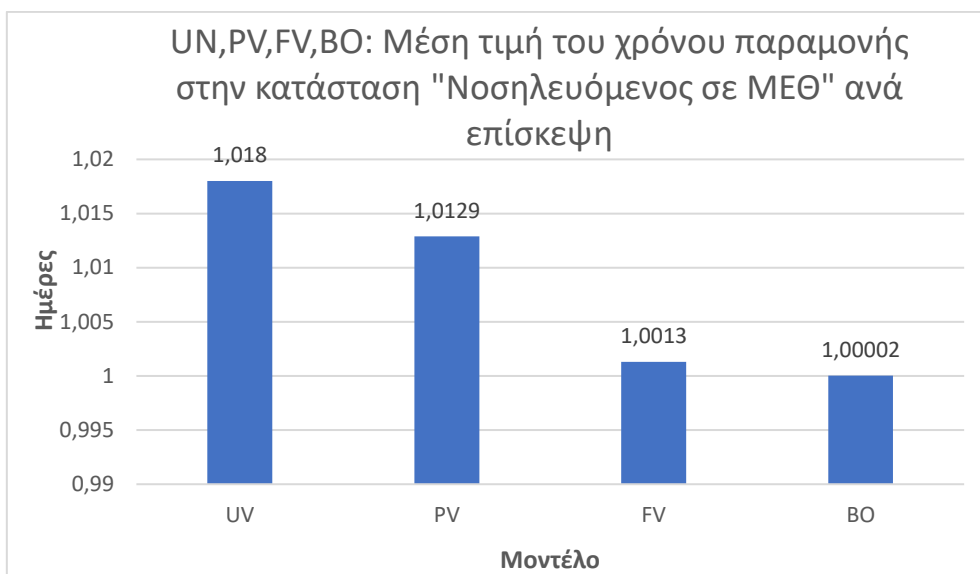
Διάγραμμα 265-Μέση τιμή χρόνου παραμονής στην κατάσταση «Μολυσμένος σε απομόνωση» μοντέλων UN, PV, FV, BO

- Η μέση τιμή του χρόνου παραμονής όλων των μοντέλων στην κατάσταση «Νοσηλευόμενος πληθυσμός σε κλινική COVID-19» ανά επίσκεψη είναι:



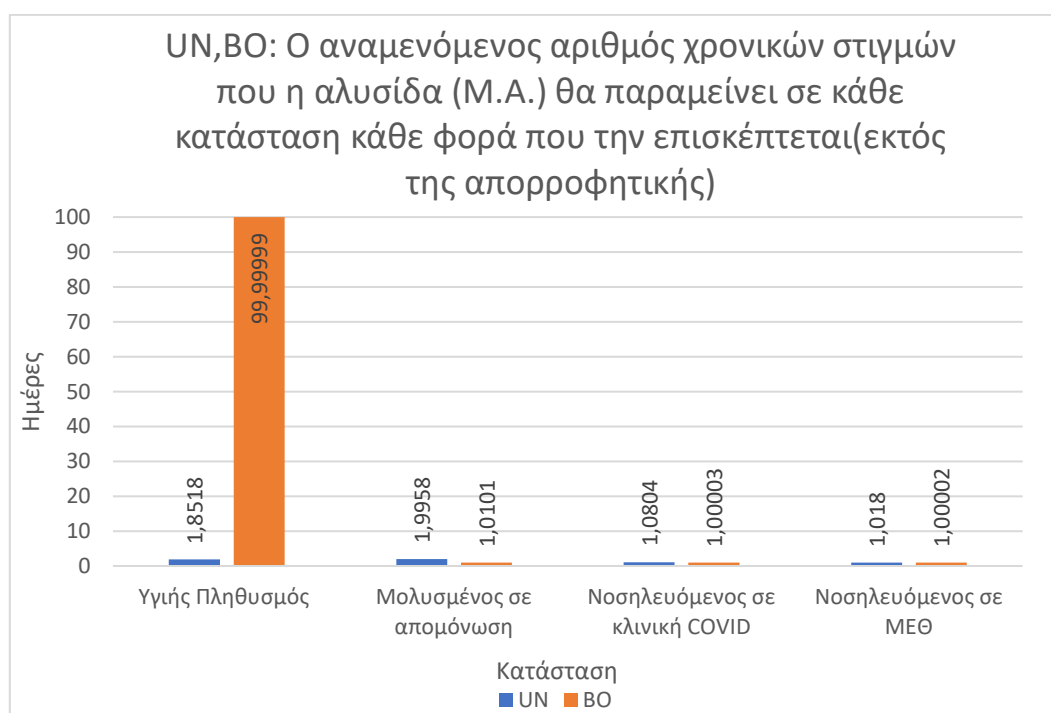
Διάγραμμα 266-Μέση τιμή χρόνου παραμονής στην κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19» μοντέλων UN, PV, FV, BO

- Τέλος, η μέση τιμή του χρόνου παραμονής όλων των μοντέλων στην κατάσταση «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ» ανά επίσκεψη, είναι:



Διάγραμμα 267-Μέση τιμή χρόνου παραμονής στην κατάσταση «Νοσηλεύομενος σε ΜΕΘ» μοντέλων UN, PV, FV, BO

Για την καλύτερη παρατήρηση του συγκεκριμένου μέτρου απόδοσης, θα συγκρίνουμε μόνο τα μοντέλα UN και BO, καθώς αποδίδουν τις πιο “ακραίες” τιμές. Στο ακόλουθο διάγραμμα παρουσιάζεται ο αναμενόμενος αριθμός χρονικών στιγμών που θα παραμείνει η αλυσίδα σε κάθε μεταβατική κατάσταση, ανά επίσκεψη:



Διάγραμμα 268-Πίνακας μέση τιμή του χρόνου παραμονής στις μεταβατικές καταστάσεις ανά επίσκεψη μοντέλων UN, BO

Στα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε το μοντέλο BO διαφέρει σημαντικά σε σχέση με τα υπόλοιπα μοντέλα, έχοντας πολύ μεγαλύτερο χρόνο παραμονής στην κατάσταση «Υγιής πληθυσμός». Αντιθέτως, όσο η διαδικασία πλησιάζει την κατάσταση απορρόφησης (καταστάσεις «Μολυσμένος σε απομόνωση», «Νοσηλευόμενος σε κλινική COVID-19» και «Νοσηλευόμενος σε ΜΕΘ») βλέπουμε ότι σταδιακά ο μέσος χρόνος παραμονής είναι μεγαλύτερος για το μοντέλο του ανεμβολίαστου πληθυσμού. Συνοψίζοντας, τα μοντέλα FV, PV και UN θα μεταβούν γρηγορότερα στις καταστάσεις που αφορούν νόσηση, νοσηλεία σε κλινική COVID-19/ΜΕΘ από κορωνοϊό σε σύγκριση με το μοντέλο BO.

Η ανάλυση του μέσου χρόνου παραμονής των καταστάσεων (εκτός της απορροφητικής) ανά επίσκεψη, μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως η ενισχυτική δόση booster είναι πιο αποτελεσματική συγκριτικά με τα υπόλοιπα μοντέλα, ιδίως εκείνο του ανεμβολίαστου πληθυσμού.

4 Συμπεράσματα και Μελλοντική Έρευνα

Η ανάλυση επιβίωσης από τη νόσο COVID-19 αναλύθηκε εκτενώς στην παρούσα Διπλωματική Εργασία, με απώτερο σκοπό μία προσεγγιστική μοντελοποίηση της πανδημίας και την ανάλυση της βιωσιμότητας των διαφόρων πληθυσμιακών ομάδων. Για το λόγο αυτό, δημιουργήθηκαν Μαρκοβιανά μοντέλα διακριτού χρόνου αναφορικά με τη συμπεριφορά των πληθυσμιακών ομάδων ως προς τον εμβολισμό, για τα οποία υπολογίστηκαν σημαντικά μέτρα απόδοσης, όπως είναι ο αναμενόμενος χρόνος θανάτου, η πιθανότητα θανάτου μετά την πάροδο n ημερών, καθώς και άλλα μέτρα που σχετίζονται με την εξέλιξη των μοντέλων. Με την αναλυτική ερμηνεία και σύγκριση των μέτρων απόδοσης που υπολογίστηκαν για το εκάστοτε μοντέλο, είμαστε σε θέση να προβούμε στα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Η συντριπτική πλειοψηφία των μέτρων απόδοσης, σε συνδυασμό με την ουσιαστική διαφορά που παρουσιάστηκε ανάμεσα στα μοντέλα UN και BO, μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως ο εμβολιασμός με ενισχυτική δόση αποτελεί έναν πολύ σημαντικό παράγοντα για την επιβίωση από την πανδημία COVID-19.
- Το πιθανότερο σενάριο είναι πως το μοντέλο του πλήρως εμβολιασμένου πληθυσμού είναι αποτελεσματικότερο σε σχέση με εκείνο που αφορά τον μερικώς εμβολιασμένο πληθυσμό, κάτι που όμως δεν διαπιστώνεται σε ορισμένα μέτρα απόδοσης. Η συμπεριφορά αυτή αποδίδεται στο γεγονός πως τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί για το μοντέλο FV καλύπτουν περιστατικά αρκετών μηνών, ενώ τα δεδομένα του μοντέλου PV καλύπτουν περιστατικά του διαστήματος που μεσολαβεί ανάμεσα στις δύο δόσεις εμβολίου. Κατά συνέπεια, το μοντέλο FV είναι μεγαλύτερο χρονικό διάστημα εκτεθειμένο στον κίνδυνο νόσησης από κορωνοϊό.
- Οι προβληματικές συμπεριφορές που παρουσιάστηκαν σε ορισμένα μέτρα απόδοσης, είναι πιθανό να οφείλονται στο γεγονός πως η πλειοψηφία των δεδομένων που συλλέχθηκαν είναι πειραματικά, καθώς η προσπάθειας εύρεσης πραγματικών στοιχείων δεν στέφθηκε με επιτυχία.
- Η εφαρμογή των παρόντων επιδημιολογικών μοντέλων σε ένα πολύ μεγάλο αριθμό ημερών (n) σημαίνει ότι μακροπρόθεσμα όλος ο πληθυσμός θα αφανιστεί από την πανδημία COVID-19. Ωστόσο, ένα τέτοιο σενάριο δεν καθίσταται ρεαλιστικό γιατί αυτό θα συνέβαινε σε έναν εξαιρετικά μεγάλο αριθμό χρονικών βημάτων ($n \rightarrow \infty$), που δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Επιπρόσθετα, όταν θέτονται σε μακροπρόθεσμη εφαρμογή μοντέλα που

επιηρεάζονται άμεσα από την τεχνολογία, τα προκύπτοντα αποτελέσματα είναι αβέβια. Τα παραπάνω επιδημιολογικά μοντέλα ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία, καθώς με την εξέλιξη της τεχνολογίας και της τεχνογνωσίας πάνω στα κομμάτια που απαρτίζουν μία πανδημία, τα δεδομένα μεταβάλλονται συνεχώς.

- Ενώ η πιθανότητα απορρόφησης των μεταβατικών καταστάσεων όλων των μοντέλων είναι ίδια ($B = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$), διαφέρει σημαντικά ο ρυθμός με τον οποίο πραγματοποιείται η απορρόφηση. Αυτό συμβαίνει διότι όσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα απορρόφησης τόσο θα μειώνεται ο αριθμός επαναλήψεων που απαιτείται για να καταλήξει η διαδικασία στην απορροφητική κατάσταση. Συμπερασματικά, το μοντέλο UN θα καταλήξει σε πολύ μικρότερο χρονικό διάστημα στην κατάσταση «Θάνατος» σε σχέση με το μοντέλο BO.
- Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες αποτελούν κατάλληλα εργαλεία πρόβλεψης και σύγκρισης γεγονότων, ακόμη κι αν αυτά βρίσκονται ακόμα σε εξέλιξη ή διαφορετικά αν δεν υπάρχουν αρκετά διαθέσιμα στοιχεία. Στη συγκεκριμένη μελέτη αποτέλεσαν το βασικό εργαλείο πρόβλεψης και οπτικοποίησης της πορείας της πανδημίας του άμεσου μέλλοντος, χωρίς να υπάρχουν στη δημοσιότητα τα απαραίτητα δεδομένα.
- Η έγκαιρη χαρτογράφηση της διασποράς του ιού και η ποσοτικοποίηση των κινδύνων που απορρέει μία τόσο κρίσιμη κατάσταση, είναι πολύ χρήσιμα δεδομένα. Συγκεκριμένα, η μοντελοποίηση του ρυθμού διασποράς του ιού καθιστά διαχειρίσιμο το αντίκτυπο μίας μελλοντικής επιδημικής έξαρσης σε όλα τα κοινωνικά και οικονομικά επίπεδα που ασκεί επιρροή. Πρακτικά, δίνει τη δυνατότητα να αποφευχθεί το πρόβλημα κορεσμού στις κλινικές COVID-19 και στις ΜΕΘ, εφόσον έχουν προηγηθεί εκτιμήσεις για έγκαιρη στελέχωση των νοσοκομείων. Ένα ακόμη πλεονέκτημα είναι το σημαντικό χρονικό περιθώριο που δίνεται στις υγειονομικές εγκαταστάσεις περίθαλψης για τον εφοδιασμό επαρκή αριθμού ιατρικού εξοπλισμού. Ακόμη, παρέχει την προοπτική στους ειδικούς να λάβουν τα κατάλληλα μέτρα για την αντιμετώπισή του. Η άμεση ανταπόκριση του δημόσιου συστήματος υγείας είναι καταλυτικός παράγοντας για τον περιορισμό του επιδημικού φορτίου σε συνθήκες έξαρσης.

Η συλλογή πραγματικών δεδομένων σε πραγματικό χρόνο αποτέλεσε ένα εξαιρετικά δύσκολο κομμάτι, γι' αυτό το λόγο η έρευνα βασίστηκε ως επί το πλείστον σε πειραματικά δεδομένα. Στην περίπτωση που συλλεχθούν τα απαραίτητα στοιχεία για τη συμπλήρωση των πινάκων πιθανοτήτων μετάβασης, τότε θα υπάρξει και πιο ακριβής προσέγγιση των μέτρων απόδοσης, και κατά συνέπεια βέλτιστες εκτιμήσεις για τη διασπορά του ιού.

Λόγω του ότι δεν διανύεται ακόμη η μεταπανδημική περίοδος, είναι σαφές πως η εύρεση νέων τρόπων αντιμετώπισης του ιού, βρίσκεται σε εξέλιξη. Επομένως, σε μελλοντικό χρόνο θα παρουσίαζε ιδιαίτερο ενδιαφέρον η προσθήκη νέων καταστάσεων στα μοντέλα που επηρεάζουν την επιβίωση από την πανδημία (πχ. 4^η δόση εμβολίου, αντικό χάπι).

Εν κατακλείδι, αξίζει να σημειωθεί πως τα μοντέλα που δημιουργήθηκαν είναι ευπροσάρμοστα σε νέες συνθήκες. Αυτό σημαίνει πως με την κατάλληλη συλλογή δεδομένων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση επιβίωσης από την εκάστοτε πανδημία που είτε έπληξε την ανθρωπότητα σε παλαιότερα χρόνια είτε ενδέχεται να εμφανιστεί και κατ' επέκταση να πραγματοποιηθεί σύγκριση με τις απόρροιες της τρέχουσας πανδημίας COVID-19.

Βιβλιογραφία

- [1] «Lesson 1: Introduction to Epidemiology,» 18 May 2012. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.cdc.gov/csels/dsepd/ss1978/lesson1/section1.html>.
- [2] J. M. Last, A Dictionary of Epidemiology, 4 επιμ., New York: Oxford University Press, 2001.
- [3] D. Grennan, «What Is a Pandemic?,» 5 March 2019. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://jamanetwork.com/journals/jama/article-abstract/2726986>.
- [4] M. S. Green, T. Swartz, E. Mayshar, B. Lev, A. Leventhal, P. E. Slater και J. Shemer, «When is an Epidemic an Epidemic?,» *The Israel Medical Association Journal*, τόμ. 4, π. 6, 1 January 2002.
- [5] «Pandemic Influenza,» 12 May 2020. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.cdc.gov/flu/pandemic-resources/index.htm>.
- [6] K. Fukuda, H. Harmanci, K. Park, M. Chamberland, E. (. Pluut, T. C. Niemi, C. Vivas και J. K. Coninx, WHO Global Influenza Programme, Geneva 21 Switzerland: WHO press, 2008.
- [7] M. A. McIntosh, «The Plague in Ancient Athens,» 20 November 2019. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://brewminate.com/the-plague-in-ancient-athens/>.
- [8] J. Howard, «Plague was one of history’s deadliest diseases—then we found a cure,» 6 June 2020. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.nationalgeographic.com/science/article/the-plague>.
- [9] «De-coding the Black Death,» 3 October 2001. [Ηλεκτρονικό]. Available: <http://news.bbc.co.uk/2/hi/health/1576875.stm>.
- [10] T. Saul, «Inside the swift, deadly history of the Spanish Flu pandemic,» 16 February 2018. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.nationalgeographic.com/history/history-magazine/article/history-spanish-flu-pandemic>.
- [11] «2009 H1N1 Pandemic,» 11 June 2019. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.cdc.gov/flu/pandemic-resources/2009-h1n1-pandemic.html>.
- [12] D. Cucinotta και M. Vanelli, «WHO Declares COVID-19 a Pandemic,» 2020 March 19. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC7569573/>.

- [13] P.-I. Leea και P.-R. Hsueh, «Emerging threats from zoonotic coronaviruses-from SARS and MERS to 2019-nCoV,» 4 February 2020. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC7102579/>.
- [14] D. M. Knipe και P. M. Howley, Fields Virology, fifth edition, 5 επιμ., τόμ. 1, Philadelphia: Lippincott Williams & Wilkins, a Wolters Business, 2007.
- [15] P. C. Y. Woo, Y. Huang, S. K. P. Lau και K.-Y. Yuen, «Coronavirus Genomics and Bioinformatics Analysis,» 24 August 2010. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3185738/>.
- [16] F. He, Y. Deng και W. Li, «Coronavirus disease 2019: What we know?,» 14 March 2020. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/jmv.25766>.
- [17] S. Kazmi, «Vaccine platforms and their effectiveness against COVID-19,» 29 April 2020.
- [18] «Χρονολόγιο - Ενέργειες του Συμβουλίου για την COVID-19,» 2022. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.consilium.europa.eu/el/policies/coronavirus/timeline/>.
- [19] «WHO Director-General's opening remarks at the media briefing on COVID-19 - 11 March 2020,» 11 March 2020. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.who.int/director-general/speeches/detail/who-director-general-s-opening-remarks-at-the-media-briefing-on-covid-19---11-march-2020>.
- [20] «How COVID-19 Spreads,» 14 July 2021. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.cdc.gov/coronavirus/2019-ncov/prevent-getting-sick/how-covid-spreads.html>.
- [21] «Symptoms of COVID-19,» 22 March 2022. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.cdc.gov/coronavirus/2019-ncov/symptoms-testing/symptoms.html>.
- [22] «How to Protect Yourself & Others,» 25 February 2022. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.cdc.gov/coronavirus/2019-ncov/prevent-getting-sick/prevention.html>.
- [23] «Understanding How COVID-19 Vaccines Work,» 24 February 2022. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.cdc.gov/coronavirus/2019-ncov/vaccines/different-vaccines/how-they-work.html>.
- [24] «COVID-19 advice for the public: Getting vaccinated,» 13 April 2022. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019/covid-19-vaccines/advice>.

- [25] «Governor's Annual Report - 2019,» 20 March 2020. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.bankofgreece.gr/en/news-and-media/press-office/news-list/news?announcement=49748136-1841-47d7-b5a5-e6a49bc99b6d>.
- [26] E. Parlapani, V. Holeva, P. Voitsidis, A. Blekas, I. Gliatas, G. N. Porfyri, A. Golemis, K. Papadopoulou, A. Dimitriadou, A. F. Chatzigeorgiou, V. Bairachtari, S. Patsiala και M. Skoupra, «Psychological and Behavioral Responses to the COVID-19 Pandemic in Greece,» 19 August 2022. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fpsy.2020.00821/full>.
- [27] «Covid-19 crisis: Greek gov't details measures, exclusions for unprecedented ban on public movement,» 2020.
- [28] «COVID-19 Οδηγίες για ταξιδιώτες,» 20 Απρίλιος 2022. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://eody.gov.gr/neos-koronaios-covid-19-odigies-gia-taxidiotes/>.
- [29] «Policy Responses to COVID-19,» 2 July 2021. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.imf.org/en/Topics/imf-and-covid19/Policy-Responses-to-COVID-19#G>.
- [30] K. Tyko, J. Guynn και M. Snider, «Coronavirus fears empty store shelves of toilet paper, bottled water, masks as shoppers stock up,» 28 February 2020. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://eu.usatoday.com/story/money/2020/02/28/coronavirus-2020-preparation-more-supply-shortages-expected/4903322002/>.
- [31] «Εθνική Εκστρατεία Εμβολιασμού,» 11 January 2021. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://emvolio.gov.gr/diadikasia-emvoliasmou>.
- [32] «Stay Up to Date with Your COVID-19 Vaccines,» 21 April 2022. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.cdc.gov/coronavirus/2019-ncov/vaccines/stay-up-to-date.html>.
- [33] «Ιστορική ημέρα: Ξεκίνησαν σήμερα οι εμβολιασμοί κατά του Covid-19,» 27 December 2020. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.naftemporiki.gr/story/1674716/istoriki-imera-ksekinisan-simera-oi-emboliasmoi-kata-tou-covid-19>.
- [34] «Pfizer-BioNTech COVID-19 Vaccine (also known as COMIRNATY): Overview and Safety,» 27 April 2022. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.cdc.gov/coronavirus/2019-ncov/vaccines/different-vaccines/Pfizer-BioNTech.html>.

- [35] «COVID-19: Έρευνα και εμβόλια,» 28 Μάρτιος 2022. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.consilium.europa.eu/el/policies/coronavirus/covid-19-research-and-vaccines/>.
- [36] «Moderna COVID-19 Vaccine (also known as Spikevax): Overview and Safety,» 1 April 2022. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.cdc.gov/coronavirus/2019-ncov/vaccines/different-vaccines/Moderna.html>.
- [37] «Εθνική Εκστρατεία Εμβολιασμού,» 19 Μάρτιος 2022. [Ηλεκτρονικό]. Available: https://emvolio.gov.gr/sites/default/files/attachments/3i_dosi_ppt_final_29_03_2022emv.pdf.
- [38] Π. Μπουλούτζα, «Ξεκινάει η AstraZeneca, έρχεται η Johnson & Johnson,» 6 Φεβρουάριος 2021. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.kathimerini.gr/society/561254500/xekinai-i-astrazeneca-erchetai-i-johnson-amp-johnson/>.
- [39] «Johnson & Johnson’s Janssen COVID-19 Vaccine: Overview and Safety,» 27 April 2022. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.cdc.gov/coronavirus/2019-ncov/vaccines/different-vaccines/janssen.html>.
- [40] R. F. Bass, Stochastic Processes, United Kingdom: Cambridge University Press, 2011.
- [41] Μ. Λουλάκης, Στοχαστικές Διαδικασίες, Αθήνα: Συνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, 2019.
- [42] J. Medhi, Stochastic Processes, 2 επιμ., New York: Wiley Eastern Ltd. and Halsted Press, 1982.
- [43] K. S. Trivedi, Probability and Statistics with Reliability, Queuing, and Computer Science Applications, 2 επιμ., John Wiley & Sons, 2016.
- [44] C. M. Grinstead και J. Snell, Introduction to Probability, USA: American Mathematical Society, 1998.
- [45] C. 3.-D. T. M. Chains, «Paris Descartes,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://helios2.mi.parisdescartes.fr/~glaunes/MasterBME/StochBioChapter3.pdf>.
- [46] Γ. Κοκολάκης, Σημειώσεις Στοχαστικών Ανελιξέων, Αθήνα, 2007.
- [47] F. Grabski, Semi-Markov Processes: Applications in System Reliability and Maintenance, Gdynia, Poland: Book Aid International; Elsevier, 2015.

- [48] J. L. Romeu, «A Markov Chain Model for Covid-19 Survival Analysis,» 17 July 2020. [Ηλεκτρονικό]. Available: https://www.researchgate.net/publication/343021113_A_Markov_Chain_Model_for_Covid-19_Survival_Analysis.
- [49] L. Wasserman, All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference, Springer texts in statistics, 2004.
- [50] [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.stelios67pi.eu/testing.html>. [Πρόσβαση Ιανουάριος 2022].
- [51] «Εθνικός Οργανισμός Δημόσιας Υγείας (ΕΟΔΥ),» 2021. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://eody.gov.gr/epidimiologika-statistika-dedomena/imerisies-ektheseis-covid-19/>.
- [52] «Ποιοι εμβολιασμένοι νοσούν και νοσηλεύονται από COVID-19;»,» 27 Νοέμβριος 2021. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.naftemporiki.gr/story/1805229/poioi-emboliasmenoi-nosoun-kai-nosileuontai-apo-covid-19>.
- [53] Γ. Σουλάκη, «Τα αποκαρδιωτικά στοιχεία για τους εμβολιασμούς και τις νοσηλείες Covid, που έφεραν νέα μέτρα,» 3 Νοέμβριος 2021. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.iatropedia.gr/eidiseis/ta-apokardiotika-stoicheia-gia-tous-emvoliasmous-kai-tis-nosileies-covid-pou-eferan-nea-metra/148793/>.
- [54] «Τρίτη δόση εμβολίου κατά του κορωνοϊού- Πόσο μας προστατεύει από νόσηση,» 4 Νοέμβριος 2021. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.tovima.gr/2021/11/04/science/triti-dosi-emvoliou-kata-tou-koronaioy-poso-mas-prostateyei-apo-nosisi/>.
- [55] N. Barda, N. Dagan, C. Cohen, M. A. Hernan, M. Lipsitch, I. S. Kohene, B. Y. Reis και R. D. Balicer, «Effectiveness of a third dose of the BNT162b2 mRNA COVID-19 vaccine for preventing severe outcomes in Israel: an observational study,» 29 October 2021. [Ηλεκτρονικό]. Available: [https://www.thelancet.com/journals/lancet/article/PIIS0140-6736\(21\)02249-2/fulltext](https://www.thelancet.com/journals/lancet/article/PIIS0140-6736(21)02249-2/fulltext).
- [56] Χ. Θ. Παναγόπουλος, «Κορωνοϊός: Γιατί οι θάνατοι εμβολιασμένων δεν συνεπάγονται αναποτελεσματικότητα των εμβολίων,» 19 Οκτώβριος 2021. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.cnn.gr/focus/story/285995/koronoios-giati-oi-thanatoi-emvoliasmenon-den-synepagontai-anapotelesmatikotita-ton-emvolion>.

- [57] A.R.Pasi, «Comparison of CFR among vaccinated, partially vaccinated and unvaccinated study participants of VIN-WIN study,» January 2022. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377123721002823>.
- [58] J. B. Griffin, M. Haddix, P. Danza, R. Fisher, T. H. Koo, E. Traub, P. Gounder, C. Jarashow και S. Balter, «SARS-CoV-2 Infections and hospitalizations among persons aged >16 years, by vaccination status,» 27 August 2021. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.cdc.gov/mmwr/volumes/70/wr/mm7034e5.htm#contribAff>.

