

ΧΡΥΣΟΣΤΟΜΟΣ ΣΑΡΗΓΙΑΝΝΙΔΗΣ

ΑΛΥΣΙΔΕΣ ΜΑΡΚΟΝ
ΚΑΙ
ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ



Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών
Σάμος 10 Φεβρουαρίου 2023

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: Μιχάλης Ανούσης

ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Νικόλαος Παπαλεξίου

Ανδρέας Παπασαλούρος

Στους γονείς μου

Περιεχόμενα

Εισαγωγή 1

1 Εισαγωγή στις αλυσίδες Markov 3

- 1.1 Στοχαστικές Ανεξίξεις 3
- 1.2 Αλυσίδες Markov διακριτού χρόνου 3
- 1.3 Ταξινόμηση καταστάσεων 6
- 1.4 Ανάγωγες κλάσεις 8
- 1.5 Πρώτα περάσματα 11
- 1.6 Στάσιμες κατανομές 13
- 1.7 Πεπερασμένοι μη αρνητικοί πίνακες 16

2 Πίνακες 19

- 2.1 Εισαγωγή 19
- 2.2 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier 20
- 2.3 Δομημένοι πίνακες 24
 - 2.3α' Κυκλικοί πίνακες 24
 - 2.3β' z -Κυκλικοί πίνακες 27
 - 2.3γ' Toeplitz πίνακες 29
 - 2.3δ' Τριγωνικοί Toeplitz πίνακες 32

3 Παραδείγματα αλυσίδων Markov με εφαρμοσμένους πίνακες 37

- 3.1 Αλυσίδες Markov και "Φιδάκι" 37
- 3.2 Παραγοντοποίηση Wiener-Hopf και επίλυση προβλημάτων ουρών 40

Παράρτημα A 45

Βιβλιογραφία 47

Εισαγωγή

Πολλές φορές θέλουμε να μελετήσουμε φαινόμενα ή συστήματα τα οποία εξελίσσονται, κυρίως αναφορικά με τον χρόνο, και των οποίων η μελλοντική συμπεριφορά δεν είναι τελείως καθορισμένη (προβλέψιμη) αλλά χαρακτηρίζεται από ένα είδος "τυχειότητας". Τέτοιου είδους συστήματα συναντά κανείς γύρω του στην Φυσική, στην Βιολογία, στην Οικονομία, στις Κοινωνικές επιστήμες, στην Αστρονομία κ.α. Με τον όρο "Στοχαστικές Μέθοδοι" εννοούμε όλες εκείνες τις μαθηματικές μεθόδους, με την βοήθεια των οποίων μελετάμε συστήματα, που η λειτουργία τους επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από τον παράγοντα τύχη. Τα συστήματα αυτά ονομάζονται Στοχαστικά και η Θεωρία Πιθανοτήτων φαίνεται να είναι το κατάλληλο πλαίσιο για την μελέτη τους. Πράγματι, τα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται τόσο για την περιγραφή όσο και για την μελέτη των στοχαστικών αυτών συστημάτων κατασκευάζονται με τη βοήθεια οικογενειών τυχαίων μεταβλητών, τις οποίες καλούμε Στοχαστικές Ανεξίξεις, που ικανοποιούν κάθε φορά ορισμένες χαρακτηριστικές ιδιότητες.

Το θέμα της εργασίας αυτής βρίσκεται στη διασταύρωση δύο μεγάλων ερευνητικών τομέων: της εφαρμοσμένης πιθανότητας και της αριθμητικής ανάλυσης που παρουσιάζουν επίσης μεγάλο ενδιαφέρον για εφαρμογές.

Το πρώτο κεφάλαιο περιέχει μία βασική περιγραφή των θεμελιωδών εννοιών που σχετίζονται με τις αλυσίδες Markov, καθώς είναι εμπλουτισμένο με παραδείγματα και γραφήματα για την καλύτερη κατανόησή τους.

Το δεύτερο κεφάλαιο περιέχει μία συστηματική επεξεργασία των δομημένων πινάκων που απαιτούνται για την ανάλυση και την επίλυση στοχαστικών προβλημάτων. Ορισμένες από τις κατηγορίες τέτοιων πινάκων που παρουσιάζονται αναλυτικά, είναι οι Κυκλικοί, οι z -κυκλικοί, οι Toeplitz και οι Τριγωνικοί Toeplitz πίνακες. Επίσης, γίνεται αναφορά και σε ορισμένους αλγορίθμους, που χρησιμοποιούνται στην αντιμετώπιση σύνθετων υπολογιστικών προβλημάτων, που αφορούν τέτοιους πίνακες, καθώς και στο υπολογιστικό τους κόστος.

Το τρίτο κεφάλαιο της εργασίας περιέχει δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής των εννοιών που παρουσιάζονται στα δύο προηγούμενα κεφάλαια. Γίνεται ανάλυση του επιτραπέζιου παιχνιδιού "Φιδάκι" το οποίο αποτελεί σύστημα αλυσίδας Markov. Έπειτα αναλύουμε ένα βασικό πρόβλημα της Θεωρίας Ουρών, "Το πρόβλημα της συντομότερης ουράς", με τη χρήση της Wiener-Hopf παραγοντοποίησης και άπειρων Toeplitz πινάκων.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στις αλυσίδες Markov

1.1 Στοχαστικές Ανελίξεις

Ορισμός 1.1.1. (Στοχαστική Ανέλιξη)

Μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_t\}_{t \in T}$, οι οποίες ορίζονται συνήθως στον ίδιο πιθανοθεωρητικό χώρο Ω , καλείται στοχαστική ανέλιξη. Δηλαδή $\forall t \in T$, η συνάρτηση X_t είναι μία τυχαία μεταβλητή. Το σύνολο T καλείται παραμετρικός χώρος της ανέλιξης, ενώ εάν υποθέσουμε ότι κάθε μία από τις τ.μ. X_t παίρνει τιμές μέσα σε ένα σύνολο S τότε καλούμε το S χώρο καταστάσεων της ανέλιξης.

Ταξινόμηση των Στοχαστικών Ανελίξεων :

(A) Ταξινόμηση με βάση τον χώρο καταστάσεων S .

Εάν το σύνολο S είναι αριθμήσιμο σύνολο, τότε η ανέλιξη καλείται **στοχαστική ανέλιξη διακριτού χώρου καταστάσεων**, ενώ εάν το S δεν είναι αριθμήσιμο σύνολο καλείται **στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χώρου καταστάσεων**.

(B) Ταξινόμηση με βάση τον παραμετρικό χώρο T .

Εάν το σύνολο T είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο, τότε η ανέλιξη καλείται **στοχαστική ανέλιξη σε διακριτό χρόνο ή αλυσίδα**, ενώ εάν το T δεν είναι αριθμήσιμο σύνολο καλείται **στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο**.

1.2 Αλυσίδες Markov διακριτού χρόνου

Ορισμός 1.2.1. (Ιδιότητα Markov)

Η στοχαστική ανέλιξη $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ καλείται αλυσίδα Markov εάν ικανοποιεί την παρακάτω ιδιότητα

$$P[X_{n+1} = j | X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, X_n] = P[X_{n+1} = j | X_n], \quad (1.1)$$

για κάθε κατάσταση $j \in S$ και για κάθε χρονική στιγμή $n \in \mathbb{N}$.

Αυτό σημαίνει ότι εάν γνωρίζουμε την κατάσταση X_n του συστήματος την χρονική στιγμή n , τότε οι προηγούμενες καταστάσεις X_0, X_1, \dots, X_{n-1} δεν μας βοηθάνε να καθορίσουμε σε ποιά κατάσταση θα βρίσκεται το σύστημα τη χρονική στιγμή $n+1$. Απαιτείται επίσης οι νόμοι που διέπουν την εξέλιξη του συστήματος να είναι αμετάβλητοι στο χρόνο. Αυτό διατυπώνεται ως εξής :

Ορισμός 1.2.2. (Υπόθεση ομογένειας)

Μία αλυσίδα Markov $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ομογενής εάν ικανοποιεί την παρακάτω ιδιότητα

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i] = P[X_1 = j | X_0 = i], \quad (1.2)$$

για κάθε κατάσταση $i, j \in S$ και για κάθε χρονική στιγμή $n \in \mathbb{N}$.

Η ιδιότητα Markov και η υπόθεση ομογένειας είναι εξαιρετικά ισχυρές γιατί προκαλούν αυτόματα έναν αριθμό ιδιοτήτων των αλυσίδων Markov και μας επιτρέπουν να απλοποιήσουμε αρκετές από τις αποδείξεις στη συνέχεια. Από εδώ και στο εξής οι αλυσίδες Markov με τις οποίες θα ασχοληθούμε θα υποθέτουμε ότι είναι ομογενείς.

Ορισμός 1.2.3. Ορίζουμε τον πίνακα $P = (p_{i,j})_{i,j \in S}$ με μία γραμμή και μία στήλη για κάθε κατάσταση του S και τέτοιος ώστε

$$p_{i,j} = P[X_1 = j | X_0 = i], \quad \forall i, j \in S$$

Ο P ονομάζεται **πίνακας μετάβασης** της αλυσίδας Markov και είναι ένας στοχαστικός πίνακας. Αυτό σημαίνει ότι όλα τα στοιχεία του είναι μη-αρνητικά και πως το άθροισμα των στοιχείων της κάθε γραμμής είναι ίσο με 1 καθώς μία γραμμή i παριστάνει όλους τους δυνατούς τρόπους κατά τους οποίους το σύστημα μπορεί να μεταβεί από την κατάσταση i σε μία άλλη κατάσταση του S σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Η παρακάτω πρόταση είναι μία από τις βασικές προτάσεις που συναντά κανείς στην θεωρία των αλυσίδων Markov, και μας δίνει έναν τρόπο υπολογισμού των πιθανοτήτων μετάβασης n -βημάτων.

Πρόταση 1.2.4. (Chapman-Kolmogorov) Για κάθε $i, j \in S$ και $n, m = 1, 2, \dots$

$$p_{i,j}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} p_{i,k}^{(n)} p_{k,j}^{(m)} \quad (1.3)$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{(n+m)} &= P\{X_{n+m} = j | X_0 = i\} = \sum_{k \in S} P\{X_{n+m} = j, X_n = k | X_0 = i\} = \\ &= \sum_{k \in S} P\{X_{n+m} = j | X_n = k, X_0 = i\} \cdot P\{X_n = k | X_0 = i\} = \\ &= \sum_{k \in S} P\{X_{n+m} = j | X_n = k\} \cdot P\{X_n = k | X_0 = i\} = \\ &= \sum_{k \in S} p_{i,k}^{(n)} p_{k,j}^{(m)} \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 1.2.5. Για $m = 1$, έχουμε:

$$p_{i,j}^{(n+1)} = \sum_{k \in S} p_{i,k}^{(n)} p_{k,j} \quad n = 1, 2, \dots$$

δηλαδή οι πιθανότητες μετάβασης n -βημάτων μπορούν να υπολογιστούν από τις πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος, αναδρομικά.

Οι παραπάνω ισότητες, με τη βοήθεια των πινάκων μετάβασης, μας λένε ότι:

$$P^{(m+n)} = P^{(n)} \cdot P^{(m)}$$

και ακόμα παρατηρώντας ότι:

$$P^{(2)} = P^{(1)} \cdot P^{(1)} = P \cdot P = P^2$$

οπότε επαγωγικά παίρνουμε:

$$P^{(n)} = P^n \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

δηλαδή για να υπολογίσουμε τον πίνακα μετάβασης n -βημάτων $P^{(n)}$ αρκεί να υπολογίσουμε την $n^{\text{οστη}}$ δύναμη του πίνακα P , δηλαδή τον πίνακα P^n .

Έστω ότι το $\pi^{(n)} = (\pi_i^{(n)})_{i \in S}$ είναι το διάνυσμα πιθανότητας της αλυσίδας Markov την χρονική στιγμή n , δηλαδή $\pi_i^{(n)} = P[X_n = i | X_0]$. Τότε η Πρόταση 1.2.4 συνεπάγεται την ακόλουθη διανυσματική εξίσωση

$$\pi^{(n+1)T} = \pi^{(n)T} P, \quad n \geq 0$$

και επίσης

$$\pi^{(n)T} = \pi^{(0)T} P^n, \quad n \geq 0.$$

Αυτό μας εφιστά την προσοχή στο γεγονός ότι, εκτός από την δυναμική του συστήματος, πρέπει κανείς να επιλέξει το σημείο εκκίνησης X_0 . Αυτό μπορεί να είναι μία συγκεκριμένη κατάσταση, ή μπορεί να επιλεγθεί τυχαία, ανάλογα με τις περιστάσεις. Ωστόσο το μεγαλύτερο μέρος του ενδιαφέροντός μας θα επικεντρωθεί σε δεσμευμένες πιθανότητες και σπάνια θα λάβουμε ρητά υπόψη την αρχική κατανομή πιθανοτήτων.

Πρόταση 1.2.6. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} & P[X_{n+1} = j_1, X_{n+2} = j_2, \dots, X_{n+k} = j_k | X_n = i] \\ &= P[X_1 = j_1, X_2 = j_2, \dots, X_k = j_k | X_0 = i] \\ &= p_{i,j_1} p_{j_1,j_2} \cdots p_{j_{k-1},j_k} \end{aligned}$$

για κάθε χρονική στιγμή $n \geq 0$, για κάθε χρονικό διάστημα $k \geq 1$ και για κάθε ακολουθία καταστάσεων i, j_1, \dots, j_k στο S .

Στους παραπάνω ορισμούς και προτάσεις ο χρόνος n είναι αυθαίρετος αλλά σταθερός. Η Πρόταση 1.2.5 για παράδειγμα δηλώνει ότι εάν περιμένουμε n μονάδες χρόνου, παρατηρούμε ότι το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i τότε γνωρίζουμε ότι μετά από χρόνο n το σύστημα θα εξελιχθεί

ακριβώς όπως ένα νέο σύστημα το οποίο θα ξεκινούσε από την κατάσταση i με το ρολόι του στο μηδέν. Μερικές φορές παρόμοιες ιδιότητες ισχύουν εάν ο χρόνος που επιλέγεται για την παρατήρηση είναι τυχαίος, ακόμα κι αν καθορίζεται από το ίδιο το σύστημα. Αυτό ισχύει, ειδικότερα, για τους χρόνους διακοπής, όπως δηλώνεται από τη σημαντική ισχυρή ιδιότητα Markov, την οποία παρουσιάζουμε παρακάτω.

Εν συντομία, μία τυχαία μεταβλητή V είναι **χρόνος διακοπής** για την αλυσίδα Markov $\{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ εάν αρκεί να εξετάσουμε τα X_0, X_1, \dots, X_k για να προσδιορίσουμε αν $V \leq k$ ή $V > k$. Με άλλα λόγια, μπορούμε να γράψουμε ότι αν το V είναι πεπερασμένο, μπορεί να υπολογιστεί, χρησιμοποιώντας την αλυσίδα Markov. Για να δώσουμε ένα παράδειγμα, παίρνουμε ένα υποσύνολο A του συνόλου των καταστάσεων και ορίζουμε το T ως την πρώτη φορά που το σύστημα επισκέπτεται μία κατάσταση στο A :

$$T = \min\{n \geq 0 : X_n \in A\}$$

με το T να θεωρείται άπειρο αν $X_n \notin A$ για κάθε n . Το T είναι χρόνος διακοπής. Ένα παράδειγμα τυχαίας μεταβλητής που δεν είναι χρόνος διακοπής είναι η τελευταία επίσκεψη στο A .

Θεώρημα 1.2.7. (Ισχυρή ιδιότητα Markov)

Θεωρούμε την αλυσίδα Markov $\{X_n : n \geq 0\}$ με πίνακα μετάβασης P . Έστω V ο χρόνος διακοπής για την αλυσίδα. Υπό την προϋπόθεση ότι $V < \infty$ και $X_V = i$, η ανέλιξη $\{X_{V+n} : n \geq 0\}$ είναι μία αλυσίδα Markov με πίνακα μετάβασης P και αρχική κατάσταση i και είναι ανεξάρτητη των X_0, X_1, \dots, X_V .

Αυτή είναι μία θεμελιώδης ιδιότητα που χρησιμοποιείται ξανά και ξανά στην ανάλυση των αλυσίδων Markov.

1.3 Ταξινόμηση καταστάσεων

Οι καταστάσεις μίας αλυσίδας Markov μπορούν να είναι είτε παροδικές είτε θετικά επανερχόμενες ή μηδενικά επανερχόμενες, και τα χαρακτηριστικά τους διαφέρουν ανάλογα την κατηγορία στην οποία ανήκουν. Η ταξινόμηση βασίζεται στις τυχαίες μεταβλητές που μετρούν τον αριθμό των επισκέψεων του συστήματος σε μία κατάσταση και αυτές που μετρούν τα χρονικά διαστήματα μεταξύ των διαδοχικών επισκέψεων.

Δηλώνουμε με N_j τον συνολικό αριθμό των επισκέψεων της αλυσίδας στην κατάσταση j . Τυπικά γράφουμε,

$$N_j = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}\{X_n = j\} \quad (1.5)$$

όπου $\mathbb{1}\{\cdot\}$ χαρακτηριστική συνάρτηση: παίρνει την τιμή 1 αν η συνθήκη μεταξύ των αγκίστρων είναι αληθής και την τιμή 0 αν είναι ψευδής.

Για να αναλύσουμε το N_j , χρειάζεται να εισάγουμε την έννοια του πρώτου χρόνου διέλευσης θ_j , από την κατάσταση j .

$$\theta_j = \min\{n \geq 0 : X_n = j\},$$

θεωρώντας το άπειρο αν $X_n \neq j$ για κάθε n .

Σε ορισμένες περιπτώσεις, μας ενδιαφέρει η πρώτη επίσκεψη στην κατάσταση j , χωρίς να λάβουμε υπόψη την κατάσταση 0. Τον χρόνο T_j μέχρι αυτό το γεγονός τον ονομάζουμε πρώτο χρόνο επιστροφής και τον ορίζουμε ως,

$$T_j = \min\{n \geq 1 : X_n = j\}$$

Διαφέρει από το θ_j , μόνο αν $X_0 = j$. Επίσης ορίζουμε

$$f_{i,j} = P[T_j < \infty | X_0 = i],$$

όπου $f_{i,j}$ η πιθανότητα, ξεκινώντας από την κατάσταση i , η αλυσίδα Markov να επιστρέψει στην κατάσταση j σε πεπερασμένο χρόνο.

Η ακόλουθη ιδιότητα αποδεικνύεται εύκολα. Δίνουμε τις λεπτομέρειες γιατί απεικονίζουν με απλό τρόπο τη χρήση της ισχυρής ιδιότητας Markov.

Θεώρημα 1.3.1. Η δεσμευμένη κατανομή του N_j , δεδομένου ότι $X_0 = j$, είναι

$$P[N_j = n | X_0 = j] = f_{j,j}^{n-1}(1 - f_{j,j}), \quad \text{για } n \geq 1. \quad (1.6)$$

Απόδειξη

Αφού $X_0 = j$, ο αριθμός των επισκέψεων στο j είναι τουλάχιστον 1. Είναι ακριβώς 1 αν η αλυσίδα Markov δεν επιστρέφει ξανά στο j μετά την χρονική στιγμή 0. Έτσι,

$$P[N_j = 1 | X_0 = j] = P[T_j = \infty | X_0 = j] = 1 - f_{j,j}.$$

Αν η αλυσίδα Markov επιστρέφει στην κατάσταση j , τότε μπορούμε να γράψουμε ότι $N_j = 1 + \tilde{N}_j$ όπου \tilde{N}_j ο συνολικός αριθμός μετά και την πρώτη επιστροφή, δηλαδή το \tilde{N}_j είναι ο συνολικός αριθμός των επισκέψεων στο j για τις ανεξίτητες $X_{T_j}, X_{T_j+1}, X_{T_j+2}, \dots$. Από την ισχυρή ιδιότητα Markov, αυτό έχει την ίδια κατανομή με το ίδιο το N_j , και μπορούμε να γράψουμε

$$P[N_j = n | X_0 = j] = f_{j,j} P[\tilde{N}_j = n - 1 | T_j < \infty] = f_{j,j} P[N_j = n - 1 | X_0 = j].$$

Πόρισμα 1.3.2. Η δεσμευμένη κατανομή του N_j , δεδομένου ότι $X_0 = i \neq j$, είναι

$$P[N_j = 0 | X_0 = i] = 1 - f_{i,j},$$

$$P[N_j = n | X_0 = i] = f_{i,j} f_{j,j}^{n-1} (1 - f_{j,j}), \quad \text{για } n \geq 1. \quad (1.7)$$

Η σημαντική παρατήρηση εδώ είναι ότι ταυτοποιήσαμε δύο κατηγορίες καταστάσεων με διαφορετικά χαρακτηριστικά: εάν $f_{j,j} < 1$, τότε το N_j έχει κατάλληλη κατανομή και είναι πεπερασμένο με πιθανότητα 1. Αυτές οι καταστάσεις καλούνται **παροδικές** και έχουν πεπερασμένο αριθμό επισκέψεων από την αλυσίδα Markov.

Αντιθέτως, εάν $f_{j,j} = 1$ τότε $P[N_j = n | X_0 = j] = 0$ για κάθε πεπερασμένο n , το οποίο υποδηλώνει ότι $N_j = \infty$ με πιθανότητα 1. Οι καταστάσεις αυτές

ονομάζονται **επανερχόμενες** και μόλις η αλυσίδα Markov επισκεφθεί μία από αυτές, θα επιστρέφει σε αυτή ξανά και ξανά.

Γίνεται μια ακόμα διάκριση, μεταξύ θετικά επανερχόμενων και μηδενικά επανερχόμενων καταστάσεων: μία κατάσταση είναι **θετικά επανερχόμενη** εάν ο αναμενόμενος χρόνος επιστροφής, ή αλλιώς η μέση τιμή του T_j , $E[T_j|X_0 = j]$ είναι πεπερασμένος και **μηδενικά επανερχόμενη** εάν η μέση τιμή του T_j είναι άπειρη, παρά το γεγονός ότι το T_j είναι πεπερασμένο με πιθανότητα 1.

Ορίζοντας το $r_{i,j} = E[N_j|X_0 = i]$ προκύπτει από το Θεώρημα 1.3.1. και το Πρόσχημα 1.3.2. ότι

$$r_{i,j} = \begin{cases} \frac{f_{i,j}}{1-f_{j,j}}, & i \neq j \\ \frac{1}{1-f_{j,j}}, & i = j \end{cases} \quad (1.8)$$

όπου για $i \neq j$ το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης θα είναι 0 εάν $f_{i,j} = 0$, δηλαδή αν είναι αδύνατο να φτάσουμε από το i στο j , και άπειρο αν $f_{i,j} > 0$ και $f_{j,j} = 1$. Ομοίως για $i = j$ το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης είναι άπειρο αν $f_{j,j} = 1$.

Έτσι, ένας άλλος τρόπος για να γίνει διάκριση μεταξύ των καταστάσεων είναι σημειώνοντας ότι το $r_{j,j}$ είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν η j είναι παροδική, οπότε το $r_{i,j}$ είναι πεπερασμένο για όλες τις αρχικές καταστάσεις i . Για τις επανερχόμενες καταστάσεις, το $r_{i,j}$ είναι μηδέν ή άπειρο ανάλογα με το αν είναι δυνατό ή όχι να φτάσουμε στο j από το i .

Ως συνέπεια αυτού ο πίνακας P έχει την ακόλουθη ιδιότητα.

Θεώρημα 1.3.3. Θεωρούμε την δυναμοσειρά $S = (s_{i,j})_{i,j \in E} = \sum_{n=0}^{\infty} P^n$. Το στοιχείο $s_{i,j}$ είναι η δεσμευμένη μέση τιμή των επισκέψεων στο j δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση είναι η i .

Αν η j είναι παροδική κατάσταση τότε $s_{i,j} < s_{j,j} < \infty$, για κάθε i . Αν η j είναι επανερχόμενη, τότε $s_{j,j} = \infty$, και $s_{i,j} = \infty$ ή 0, για $i \neq j$.

Απόδειξη. Από (1.5), με το θεώρημα μονότονης σύγκλισης(A.3) έχουμε

$$\begin{aligned} E[N_j|X_0 = i] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\mathbb{1}\{X_n = j\}|X_0 = i] = \sum_{n=0}^{\infty} P[X_n = j|X_0 = i] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (P^n)_{i,j} = s_{i,j} \end{aligned}$$

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλέον συνέπεια της παραπάνω συζήτησης. \square

1.4 Ανάγωγες κλάσεις

Συσχετίζουμε με φυσικό τρόπο ένα γράφημα μετάβασης με την αλυσίδα Markov: Σε κάθε κατάσταση αντιστοιχεί ένας κόμβος του γραφήματος και ορίζουμε ένα κατευθυνόμενο τόξο από τον κόμβο i στον κόμβο j , συμβολίζοντάς το με (i, j) για κάθε ζεύγος καταστάσεων, ώστε $p_{i,j} > 0$. Μία

πεπερασμένη ακολουθία κατευθυνόμενων τόξων $(i, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_k, j)$ ονομάζεται **μονοπάτι** από το i στο j . Ένα μονοπάτι από το i στο i ονομάζεται **βρόχος** του i . Επίσης γράφουμε ότι η κατάσταση i **οδηγεί** στην κατάσταση j εάν υπάρχει μονοπάτι από το i στο j στο γράφημα μετάβασης και πως οι καταστάσεις i και j **επικοινωνούν** εάν το i οδηγεί στο j και το j οδηγεί στο i .

Είναι χρήσιμο να υιοθετήσουμε την σύμβαση ότι κάθε κατάσταση επικοινωνεί με τον εαυτό της. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε την σχέση επικοινωνίας δύο καταστάσεων ως σχέση ισοδυναμίας που προκαλεί μία διαμέριση του χώρου καταστάσεων σε κλάσεις ισοδυναμίας που ονομάζονται **κλάσεις επικοινωνίας καταστάσεων**. Με άλλα λόγια, ένα υποσύνολο C του E είναι μία κλάση επικοινωνίας εάν για κάθε $i \in C$, κάθε $j \in E$ που επικοινωνεί με το i ανήκει επίσης στο C . Στην βιβλιογραφία οι κλάσεις επικοινωνίας ονομάζονται και **ανάγωγες**. Μία αλυσίδα Markov ονομάζεται **ανάγωγη** αν όλες οι καταστάσεις της επικοινωνούν. Δηλαδή εάν σχηματίζουν μία ενιαία κλάση επικοινωνίας. Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας μετάβασης P είναι επίσης **ανάγωγος** (A.4). Στο Σχήμα 1.1 δίνουμε ένα παράδειγμα γραφήματος μετάβασης που σχετίζεται με μία ανάγωγη αλυσίδα Markov.



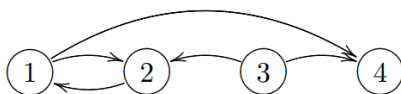
Σχήμα 1.1: Γράφημα μετάβασης μίας ανάγωγης αλυσίδας Markov

Αν μία αλυσίδα Markov με πίνακα μετάβασης P έχει K κλάσεις επικοινωνίας που συμβολίζονται με C_1, C_2, \dots, C_K , τότε οι καταστάσεις μπορούν να μετατεθούν έτσι ώστε ο πίνακας μετάβασης $P' = \Pi P \Pi^T$ που σχετίζεται με τις μετατεθειμένες καταστάσεις να είναι block-τριγωνικός.

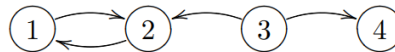
$$P' = \begin{bmatrix} P_{1,1} & & & 0 \\ P_{2,1} & P_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ P_{K,1} & P_{K,2} & & P_{K,K} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

όπου $P_{i,j}$ ο υποπίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης από τις καταστάσεις της C_i στις καταστάσεις της C_j . Τα διαγώνια blocks είναι ανάγωγοι τετραγωνικοί πίνακες και ο Π είναι ο πίνακας μετάθεσης που σχετίζεται με την αναδιάταξη.

Ορίζουμε επίσης τις τελικές και τις μεταβατικές κλάσεις. Μία κλάση επικοινωνίας C είναι **τελική κλάση** εάν δεν υπάρχει μονοπάτι που να οδηγεί σε κάποια κατάσταση έξω από αυτή. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε κατάσταση $i \in C$ δεν υπάρχει κατάσταση j έξω από την C ώστε η i να οδηγεί στην j . Εάν αντίθετα, οι καταστάσεις στη C οδηγούν σε κάποια κατάσταση έξω από το C η κλάση ονομάζεται **μεταβατική**. Αν μία κατάσταση σχηματίζει τελική κλάση από μόνη της τότε λέγεται **απορροφητική**.



Σχήμα 1.2: Το σύνολο $C = \{1, 2\}$ είναι μία μεταβατική κλάση, η κατάσταση 3 σχηματίζει από μόνη της μία μεταβατική κλάση και η κατάσταση 4 είναι απορροφητική.



Σχήμα 1.3: Το σύνολο $C = \{1, 2\}$ είναι μία τελική κλάση, η κατάσταση 3 σχηματίζει από μόνη της μία μεταβατική κλάση και η κατάσταση 4 είναι απορροφητική.

Για την αλυσίδα Markov που σχετίζεται με τον πίνακα μετάβασης (1.9), η κλάση C_1 είναι τελική και κάθε κλάση C_i , για $2 < i \leq K$ είναι τελική αν και μόνο αν $P_{i,j} = 0$ για $j = 1, \dots, i - 1$.

Στην περίπτωση που ο χώρος καταστάσεων είναι πεπερασμένος, το κατευθυνόμενο γράφημα που σχετίζεται με την αλυσίδα Markov αποτελεί χρήσιμο εργαλείο για να ερμηνεύουμε την ταξινόμηση καταστάσεων, που ασχοληθήκαμε στην υποενότητα 1.3. Στην πραγματικότητα, αποδυναμώνεται ότι μια κατάσταση i είναι παροδική εάν οδηγεί σε κάποια κατάσταση j , από την οποία δεν υπάρχει μονοπάτι επιστροφής στην i . Διαφορετικά, είναι επανερχόμενη. Αυτό προκύπτει από τα δύο θεωρήματα που ακολουθούν. Έτσι η κατάσταση 3 και στα δύο σχήματα (1.2) και (1.3) είναι παροδική.

Αν ο χώρος καταστάσεων είναι άπειρος, τότε το κατευθυνόμενο γράφημα δεν είναι αρκετό για να προσδιορίσει όλες τις παροδικές και τις επανερχόμενες καταστάσεις.

Το θεώρημα που ακολουθεί δείχνει ότι η φύση μίας κατάστασης είναι μία ιδιότητα των κλάσεων.

Θεώρημα 1.4.1. *Οι καταστάσεις μίας μεταβατικής κλάσης είναι παροδικές. Σε μία τελική κλάση οι καταστάσεις είναι είτε όλες θετικά επανερχόμενες είτε μηδενικά επανερχόμενες είτε παροδικές.*

Η δεύτερη πρόταση στο θεώρημα μας λέει μόνο ότι, αν μπορούμε με κάποιο τρόπο να καθορίσουμε τη φύση μίας κατάστασης σε μία τελική κλάση τότε μπορούμε να αναγνωρίσουμε επίσης την φύση και των υπόλοιπων καταστάσεων της ίδιας κλάσης. Με αυτόν τον τρόπο, μία τελική κλάση την ονομάζουμε θετικά/μηδενικά επανερχόμενη ή παροδική εάν όλες οι καταστάσεις της είναι θετικά/μηδενικά επανερχόμενες ή παροδικές αντίστοιχα. Μπορούμε να είμαστε πιο συγκεκριμένοι μόνο στην περίπτωση που η τελική κλάση περιέχει πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων.

Θεώρημα 1.4.2. *Εάν μία τελική κλάση περιέχει μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων είναι θετικά επανερχόμενη.*

Μία τελευταία ιδιότητα που αξίζει να αναφερθεί είναι ότι η διασύνδεση μεταξύ επανερχόμενων καταστάσεων είναι ιδιαίτερα ισχυρή. Μόλις μία αλυσίδα Markov επισκεφθεί μία επανερχόμενη κατάσταση i , θα επισκεφθεί, με πιθανότητα 1, κάθε κατάσταση στην κλάση και αυτό θα επιτευχθεί σε πεπερασμένο χρόνο. Αυτό είναι και το νόημα του θεωρήματος που ακολουθεί.

Θεώρημα 1.4.3. *Αν η C είναι μία τελική κλάση επανερχόμενων καταστάσεων, τότε $f_{i,j} = 1$ για κάθε $i, j \in C$.*

Με βάση αυτές τις ιδιότητες, μπορούμε κάποιες γενικές παρατηρήσεις σχετικά με τον πίνακα μετάβασης P και την δυναμοσειρά S . Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν K κλάσεις επικοινωνίας C_1, C_2, \dots, C_K έτσι ώστε ο $P' = \Pi P \Pi^T$ να έχει την δομή του (1.9). Ο πίνακας $S = \sum_{n=0}^{\infty} (P')^n$ έχει την ίδια δομή με τον P' . Εάν η C_j είναι παροδική κλάση, τότε η $S_{i,j}$ είναι πεπερασμένη για κάθε i . Αν είναι επανερχόμενη, τότε όλα τα στοιχεία της $S_{j,j}$ είναι άπειρα και για $i \neq j$ η $S_{i,j}$ είναι μηδενική εάν δεν υπάρχει μονοπάτι από την C_i στην C_j ή η $S_{i,j}$ περιέχει άπειρα στοιχεία μόνο εάν υπάρχει τέτοιο μονοπάτι.

Αυτή η ιδιότητα ισχύει επίσης στην περίπτωση που ο αριθμός K των κλάσεων επικοινωνίας είναι άπειρος.

Κατα συνέπεια, μόλις αποσαφηνιστεί η δομή της κλάσης, χρειάζεται μόνο να επικεντρωθούμε στην ανάλυση των τελικών κλάσεων. Έτσι εξηγείται το γεγονός ότι συνήθως θεωρούμε την αλυσίδα Markov ανάγωγη ή ισοδύναμα ότι όλες οι καταστάσεις της επικοινωνούν.

1.5 Πρώτα περάσματα

Από το Θεώρημα 1.4.1 γνωρίζουμε ότι, όταν μία αλυσίδα Markov είναι ανάγωγη, αν μία κατάσταση είναι παροδική, τότε όλες οι καταστάσεις είναι παροδικές και κάθε όρος της σειράς $S = \sum_{n=0}^{\infty} P^n$ είναι πεπερασμένος. Εάν αντίθετα, μία κατάσταση είναι επανερχόμενη, τότε κάθε όρος της S απειρίζεται. Τώρα, ας χωρίσουμε τον χώρο καταστάσεων E σε δύο μη κενά υποσύνολα A και B ($A \cup B = E, A \cap B = \emptyset$). Συμβολίζουμε με P_A, P_B τους υποπίνακες του P που έχουν στοιχεία του P και δείκτες στα A και B αντίστοιχα. Συμβολίζουμε επίσης με $P_{A,B}$ τον υποπίνακα του P με δείκτες γραμμών στο A και δείκτες στηλών στο B . Τακτοποιούμε τις καταστάσεις με τέτοιο τρόπο ώστε ο πίνακας μετάβασης να έχει την μορφή

$$P = \begin{bmatrix} P_A & P_{A,B} \\ P_{B,A} & P_B \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Ορίζουμε το τ ως τον πρώτο χρόνο επιστροφής σε κάθε κατάσταση έξω από το A :

$$\tau = \min\{n \geq 1 : X_n \notin A\}$$

και έχουμε την ακόλουθη ιδιότητα.

Θεώρημα 1.5.1. Υποθέτουμε ότι η αλυσίδα Markov είναι ανάγωγη.

- Για οποιοδήποτε κατάλληλο υποσύνολο A του συνόλου των καταστάσεων, η σειρά $S = \sum_{n=0}^{\infty} P_A^n$ συγκλίνει.
- Για κάθε $i, j \in A$, το $S_{i,j}$ είναι ο αναμενόμενος αριθμός των επισκέψεων στην κατάσταση j , ξεκινώντας από την κατάσταση i , κατά την διάρκεια του χρονικού διαστήματος $[0, \tau]$.

- Για κάθε $i \in B$ και $j \in A$, το $(P_{B,A}S)$ είναι ο αναμενόμενος αριθμός των επισκέψεων στην κατάσταση j , ξεκινώντας από την κατάσταση i , κατά την διάρκεια του χρονικού διαστήματος $[0, \tau]$.
- Για κάθε $i \in A$, το $(S1)_i = E[\tau | X_0 = i]$, δηλαδή είναι ο αναμενόμενος χρόνος του πρώτου περάσματος από το B , ξεκινώντας από την κατάσταση i .
- Για κάθε $i \in A$ και $j \in B$, το $(SP_{A,B})_{i,j} = P[\tau < \infty \text{ και } X_\tau = j | X_0 = i]$, δηλαδή είναι η πιθανότητα, το j να είναι η πρώτη κατάσταση του B που θα επισκεφτεί το σύστημα, δεδομένου ότι ξεκίνησε από την κατάσταση i .

Απόδειξη. Ορίζουμε τον πίνακα

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P_A & P_{A,B} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

που αντιστοιχεί σε μία νέα αλυσίδα Markov όπου οι καταστάσεις του B έχουν γίνει απορροφητικές. Δηλαδή, εάν η αλυσίδα Markov επισκεφτεί μία κατάσταση j στο B , θα μείνει για πάντα εκεί. Το σημαντικό εδώ είναι ότι ο χρόνος του πρώτου περάσματος από το A στο B είναι πανομοιότυπος στην αρχική και στις νέες διαδικασίες.

Αφού ο P είναι ανάγωγος, για κάθε κατάσταση $i \in A$ υπάρχει μονοπάτι που να οδηγεί σε κάποια κατάσταση $j \in B$, έτσι ώστε οι καταστάσεις του A να είναι παροδικές στην νέα αλυσίδα Markov και ο αναμενόμενος αριθμός των επισκέψεων στην κατάσταση $j \in A$, δεδομένου ότι ξεκινήσαμε από την κατάσταση $i \in A$, να είναι πεπερασμένος. Απο το Θεώρημα (1.3.3) οι αναμενόμενοι αριθμοί των επισκέψεων δίνονται από την πάνω-αριστερά γωνία του $\tilde{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}^n$, ο οποίος είναι ξεκάθαρο ότι προκύπτει από τον

$\sum_{n=0}^{\infty} P_A^n$. Αυτό αποδεικνύει τις δύο πρώτες προτάσεις.

Η τρίτη πρόταση αποδεικνύεται με την συνθήκη της πρώτης μετάβασης.

$$E[N_j | X_0 = i] = \sum_{k \in A} P_{i,k} E[N_j | X_0 = k] = (P_{B,A}S)_{i,j}.$$

Η τέταρτη πρόταση προκύπτει από το γεγονός ότι εάν $X_0 \in A$ τότε $\tau = \sum_{j \in A} N_j$, όπου N_j είναι ο συνολικός αριθμός των επισκέψεων στο A .

Τέλος, εάν αναλύσουμε το γεγονός $[X_\tau = j]$, σύμφωνα με τις πιθανές τιμές του τ και την τελευταία κατάσταση που επισκέφτηκε το σύστημα στο A την χρονική στιγμή $\tau - 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} P[X_\tau = j | X_0 = i] &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in A} P[X_{n-1} = k, X_n = j, \tau = n | X_0 = i] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in A} (P_A^n - 1)_{i,k} (P_{A,B})_{k,j} = (SP_{A,B})_{i,j} \end{aligned}$$

□

Αυτή η ιδιότητα έχει έναν αριθμό από άμεσες αλγεβρικές συνέπειες που εμείς θα αναφέρουμε σαν πόρισμα για μελλοντική αναφορά.

Πόρισμα 1.5.2. Το σύστημα $(I - P_A)X = I$ έχει πάντα λύση. Αν το μέγεθος του P_A είναι πεπερασμένο, τότε η λύση είναι το $S = (I - P_A)^{-1}$ και είναι μοναδική. Αν το μέγεθος του P_A είναι άπειρο, τότε το $S = \sum_{n=0}^{\infty} P_A^n$ είναι η ελάχιστη μη αρνητική λύση.

Απόδειξη. Προφανώς, $S_1 = I + P_A S$, έτσι ώστε το S να είναι λύση του συστήματος $(I - P_A)X = I$. Αν το μέγεθος του P_A είναι πεπερασμένο, τότε η λύση είναι $(I - P_A)^{-1}$. Αν το μέγεθος του P_A είναι άπειρο, μπορεί να υπάρχουν περισσότερες λύσεις. Για οποιαδήποτε, από αυτές, λύση X , μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} X &= I + P_A X \\ &= I + P_A + P_A^2 + \dots + P_A^n + P_A^{n+1} X \\ &\geq I + P_A + P_A^2 + \dots + P_A^n \end{aligned}$$

για κάθε n , έτσι ώστε $X \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n P_A^i = S$, που ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

1.6 Στάσιμες κατανομές

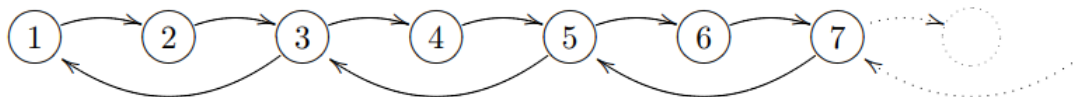
Σε αυτή την ενότητα, θα συζητήσουμε για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της κατανομής πιθανότητας της X_n , ή, ισοδύναμα, για τις διαδοχικές δυνάμεις P^n του πίνακα μετάβασης, όσο $n \rightarrow +\infty$. Πριν από αυτό όμως, θα χρειαστεί να εισάγουμε την έννοια της περιοδικότητας.

Εξ ορισμού, μία κατάσταση i έχει **περιοδικότητα** $\delta > 1$ εάν όλοι οι βρόχοι του i στο γράφημα μετάβασης έχουν μήκος πολλαπλάσιο του δ . Αυτό είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι $P[X_n = i | X_0 = i] > 0$ μόνο εάν $n \equiv 0 \pmod{\delta}$. Η περίπτωση μίας κατάστασης i , όπου $P[X_n = i | X_0 = i] = 0$ για κάθε n , δημιουργεί τεχνικές δυσκολίες μόνο και δεν θα ασχοληθούμε με τέτοιες περιπτώσεις.

Η περιοδικότητα είναι μία ιδιότητα κλάσης και όλες οι καταστάσεις σε μία κλάση επικοινωνίας έχουν την ίδια περίοδο. Έτσι, όσο εμείς περιοριζόμαστε σε ανάγωγες αλυσίδες Markov, είτε καμία κατάσταση δεν θα είναι περιοδική, είτε όλες θα έχουν την ίδια περίοδο δ , την οποία θα ονομάζουμε περίοδο της αλυσίδας Markov.

Το Σχήμα (1.4) δείχνει ένα παράδειγμα μίας ανάγωγης αλυσίδας Markov περιόδου 3.

Ο πίνακας μετάβασης που σχετίζεται με την αλυσίδα έχει την ακόλουθη



Σχήμα 1.4: Γράφημα μετάβασης μίας άπειρης, ανάγωγης, περιοδικής αλυσίδας Markov με περίοδο 3.

δομή, όπου "*" σημαίνει μη μηδενικό στοιχείο.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & * & & & & & 0 \\ 0 & 0 & * & & & & \\ * & 0 & 0 & * & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & & \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & * & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & \ddots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Εάν ο P είναι πίνακας μετάβασης μίας ανάγωγης, πεπερασμένης, περιοδικής αλυσίδας Markov με περίοδο δ , τότε υπάρχει ένας πίνακας μετάθεσης Π , τέτοιος ώστε ο $P' = \Pi P \Pi^T$ να έχει την μορφή

$$P' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & P_{1,\delta} \\ P_{2,1} & 0 & \ddots & & 0 \\ & P_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & & & P_{\delta,\delta-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

όπου τα μηδενικά διαγώνια blocks είναι τετραγωνικά. Οποιοσδήποτε ανάγωγος πίνακας P ο οποίος μπορεί να μεταταθεί στην μορφή (1.11) μέσω του μετασχηματισμού $P' = \Pi P \Pi^T$ ονομάζεται **κυκλικός** με περίοδο δ .

Εάν η αλυσίδα Markov είναι ανάγωγη και μη περιοδική, τότε δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσουμε ότι για κάθε i και j , υπάρχει n_0 ώστε $P[X_n = j | X_0 = i] > 0$ για $n \geq n_0$. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε αρχική κατάσταση i και κάθε κατάσταση j στην οποία θέλουμε να φτάσουμε, υπάρχει μία αυστηρά θετική πιθανότητα να βρεθούμε στην κατάσταση j σε οποιοδήποτε δεδομένο χρόνο, με την προϋπόθεση ότι θα κοιτάξουμε αρκετά μακριά στο μέλλον. Σαφώς, αυτό δεν μπορεί να ισχύει αν η αλυσίδα Markov είναι περιοδική, καθώς οι διαδοχικές επισκέψεις στο j χωρίζονται με χρονικά διαστήματα που είναι πολλαπλάσια της περιόδου. Ωστόσο υπάρχει μία παρόμοια ιδιότητα και δείχνει πως για κάθε i και j , υπάρχει r και n_0 ώστε $P[X_{n\delta+r} = j | X_0 = i] > 0$ για κάθε $n \geq n_0$ και $P[X_m = j | X_0 = j] = 0$ για κάθε $m \neq r \pmod{\delta}$. Τώρα είμαστε έτοιμοι να μιλήσουμε για την οριακή κατανομή, η οποία είναι πιο εύκολη στον χειρισμό στην περίπτωση που οι καταστάσεις μας είναι παροδικές.

Θεώρημα 1.6.1. Θεωρούμε ότι η αλυσίδα Markov είναι ανάγωγη. Εάν οι καταστάσεις της είναι παροδικές, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} P[X_n = j | X_0 = i] = 0$ για κάθε i και j .

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (P^n)_{i,j} = \sum_{n=0}^{\infty} P[X_n = j | X_0 = i]$ συγκλίνει για κάθε i, j , από Θεώρημα (1.3.3). \square

Θεώρημα 1.6.2. Θεωρούμε ότι μία αλυσίδα Markov είναι ανάγωγη. Οι καταστάσεις της είναι θετικά επανερχόμενες αν και μόνο αν, υπάρχει ένα αυστηρά θετικό και αμετάβλητο διάνυσμα πιθανότητας, δηλαδή ένα διάνυσμα $\pi = (\pi_i)$ ώστε $\pi_i > 0 \forall i$ με

$$\pi^T P = \pi^T \text{ και } \sum \pi_i = 1 \quad (1.12)$$

Σε αυτή την περίπτωση,

- αν η αλυσίδα Markov δεν είναι περιοδική τότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P[X_n = j | X_0 = i] = \pi_j \quad (1.13)$$

για κάθε j , ανεξαρτήτως i .

- αν η αλυσίδα είναι περιοδική με περίοδο δ τότε,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P[X_{n\delta} = j | X_0 = j] = \delta \pi_j$$

για κάθε j .

- Το αμετάβλητο διάνυσμα π είναι μοναδικό μεταξύ άλλων μη αρνητικών διανυσμάτων, έως και μία πολλαπλασιαστική σταθερά.

Παρατηρούμε ότι, στην περίπτωση της μη περιοδικής αλυσίδας Markov, το π_i είναι αντίστροφο του αναμενόμενου χρόνου επιστροφής στην κατάσταση i , ξεκινώντας από την i . Επίσης η σχέση (1.13) ισχύει και για την περίπτωση περιοδικών αλυσίδων.

Θεώρημα 1.6.3. Θεωρούμε μία ανάγωγη αλυσίδα Markov. Εάν οι καταστάσεις της είναι μηδενικά επανερχόμενες, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} P[X_n = j | X_0 = i] = 0 \forall i, j$. Επιπλέον, υπάρχει ένα θετικό αμετάβλητο διάνυσμα, μοναδικό έως και μία πολλαπλασιαστική σταθερά, ώστε το άθροισμα των στοιχείων του να μην είναι πεπερασμένο.

Έτσι υπάρχει πάντα ένα αμετάβλητο διάνυσμα για τον πίνακα μετάβασης μίας επαναλαμβανόμενης αλυσίδας Markov. Επίσης, κάποιες μεταβατικές αλυσίδες έχουν ένα αμετάβλητο διάνυσμα, αλλά κάποιες όχι.

Τα ακόλουθα παραδείγματα απεικονίζουν τις καταστάσεις που συναντάμε σε θετικά/μηδενικά επαναλαμβανόμενες και μεταβατικές αλυσίδες Markov.

Παράδειγμα 1.6.4. Για τον πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & \\ & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

έχουμε $\pi^T P = \pi^T$ με $\pi^T = [1/2, 1, 1, \dots]$. Το διάνυσμα π έχει "άπειρη" μάζα, δηλαδή, το άθροισμα των στοιχείων του είναι άπειρο. Παρατηρήστε ότι η αλυσίδα Markov είναι μηδενικά επανερχόμενη, αλλά για να δειχθεί αυτό πρέπει να επαληθεύσουμε ότι ο χρόνος επιστροφής σε οποιαδήποτε από τις καταστάσεις της είναι πεπερασμένος με πιθανότητα 1.

Παράδειγμα 1.6.5. Για τον πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & \\ & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

έχουμε $\pi^T P = \pi^T$ με $\pi^T = [1, 4, 12, 36, 108, \dots]$. Το διάνυσμα π έχει απεριόριστα στοιχεία. Σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα Markov είναι παροδική.

Παράδειγμα 1.6.6. Για τον πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & & \\ & 3/4 & 0 & 1/4 & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

έχουμε $\pi^T P = \pi^T$ με $\pi^T = (2/3)[1/2, 2/3, 2/9, 2/27, \dots]$ και $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$. Σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα Markov είναι θετικά επανερχόμενη.

1.7 Πεπερασμένοι μη αρνητικοί πίνακες

Εφόσον ο πίνακας μετάβασης μίας αλυσίδας Markov είναι στοχαστικός, είναι δεδομένο ότι είναι μη αρνητικός και αν ο χώρος καταστάσεων είναι πεπερασμένος, μπορούμε να επικαλεστούμε την θεωρία των Perron-Frobenius. Πρόκειται για ένα ενοποιημένο σώμα πολλών αποτελεσμάτων σχετικά με την φασματική ακτίνα $\rho(A)$ ενός μη αρνητικού πίνακα και τα κυρίαρχα ιδιοδιανύσματα του, δηλαδή τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ όπου $|\lambda| = \rho(A)$.

Θεώρημα 1.7.1. (Perron-Frobenius) Έστω $A \geq 0$ ένας ανάγωγος πίνακας πεπερασμένου μεγέθους n . Τότε

- (i) Ο A έχει μία θετική πραγματική ιδιοτιμή ίση με $\rho(A)$.
- (ii) Στο $\rho(A)$ αντιστοιχεί ένα δεξί ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x} > 0$ και ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{y}^T > 0$ ώστε $A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}^T A = \rho(A)\mathbf{y}^T$.
- (iii) Το $\rho(A)$ είναι μία απλή ιδιοτιμή του A , δηλαδή το $\rho(A)$ είναι μία απλή ρίζα της $\det(A - \lambda I)$.
- (iv) Εάν ο A έχει ακριβώς p ιδιοτιμές με συντελεστή $\rho(A)$ τότε αυτές οι ιδιοτιμές είναι ρίζες της εξίσωσης $\lambda^p - \rho(A)^p = 0$. Εάν $p > 1$ τότε ο A είναι κυκλικός με περίοδο p (βλέπε Σχέση (1.11)).
- (v) Αν B είναι ένας μη αρνητικός πίνακας μεγέθους n ώστε $A - B \geq 0$, $B \neq A$, τότε $\rho(A) > \rho(B)$.

Παρατηρήστε ότι, αν ο πίνακας A δεν είναι κυκλικός, υπάρχει μόνο μία ιδιοτιμή με μέγιστο συντελεστή. Οι πίνακες για τους οποίους ισχύει αυτή η ιδιότητα ονομάζονται **πρωτογενείς**.

Βλέπουμε ότι, για πεπερασμένους πίνακες η συνθήκη ύπαρξης και μοναδικότητας ενός αμετάβλητου διανύσματος πιθανότητας είναι πολύ απλή. Πράγματι, από το Θεώρημα (1.7.1) άμεσα προκύπτει ότι, εάν ο P είναι ένας ανάγωγος στοχαστικός πίνακας πεπερασμένου μεγέθους, τότε υπάρχει μοναδικό θετικό διάνυσμα ώστε $\pi^T P = \pi^T$. Επομένως, η αλυσίδα Markov που σχετίζεται με τον P είναι θετικά επανερχόμενη και το θεώρημα (1.4.2) είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος των Perron-Frobenius.

Αν ο πίνακας είναι μη αρνητικός και όχι απαραίτητα ανάγωγος τότε προκύπτει το ακόλουθο ασθενέστερο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.7.2. Έστω $A \geq 0$ ένας πίνακας πεπερασμένου μεγέθους n . Τότε

- (i) Ο A έχει μία μη αρνητική πραγματική ιδιοτιμή ίση με $\rho(A)$.
- (ii) Στο $\rho(A)$ αντιστοιχεί ένα δεξί ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x} \geq 0$ και ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{y}^T \geq 0$ ώστε $A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$, $\mathbf{y}^T A = \rho(A)\mathbf{y}^T$.
- (iii) Αν B ένας μη αρνητικός πίνακας πεπερασμένου μεγέθους n ώστε $A - B \geq 0$ τότε $\rho(A) \geq \rho(B)$.

Η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ ενός μη αρνητικού πίνακα A ονομάζεται ιδιοτιμή Perron-Frobenius και οποιοδήποτε μη αρνητικό δεξί ιδιοδιάνυσμα \mathbf{x} που της αντιστοιχεί ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα Perron-Frobenius. Ομοίως, κάθε ζεύγος $(\rho(A), \mathbf{x})$ ονομάζεται ζεύγος Perron-Frobenius.

Θεώρημα 1.7.3. Έστω $A \geq 0$ ένας πίνακας πεπερασμένου μεγέθους n . Αν ο A έχει μόνο μία ανάγωγη τελική κλάση, τότε υπάρχει ένα θετικό διάνυσμα \mathbf{x} ώστε $A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$.

Απόδειξη. Στο Θεώρημα (1.7.2) το διάνυσμα \mathbf{x} έχει μη αρνητικά στοιχεία. Δίχως βλάβη της γενικότητας, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα (A.1) μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο A έχει την ακόλουθη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & & & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & & \\ \vdots & & & \\ A_{k,1} & \dots & A_{k,k-1} & A_{k,k} \end{bmatrix}$$

όπου $A_{i,i}$, με $i = 1, \dots, k$ είναι ανάγωγοι πίνακες. Εφόσον ο $A_{1,2}$ αντιστοιχεί σε τελική κλάση τότε $\rho(A) = \rho(A_{1,1})$. Ας χωρίσουμε το \mathbf{v} σύμφωνα με τη διαμέριση του A ως $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_i)_{i=1, \dots, k}$. Θα αποδείξουμε το θεώρημα με επαγωγή στον αριθμό των ανάγωγων κλάσεων k . Για $k = 1$ ο πίνακας A είναι ανάγωγος, έτσι ώστε από το θεώρημα Perron-Frobenius $\mathbf{x} \geq 0$. Υποθέτουμε ότι το θεώρημα ισχύει για $k-1$ ανάγωγες κλάσεις και θα δείξουμε ότι ισχύει για k ανάγωγες κλάσεις. Ας συμβολίσουμε με A_{k-1} τον υποπίνακα του A που αντιστοιχεί στις πρώτες $k-1$ ανάγωγες κλάσεις και παρατηρούμε ότι το διάνυσμα \mathbf{w} με στοιχεία \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, k-1$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A_{k-1} , δηλαδή $A_{k-1}\mathbf{w} = \rho(A)\mathbf{w}$. Επομένως, από επαγωγική υπόθεση, έχουμε ότι $\mathbf{x}_i \geq 0$ για $i = 1, \dots, k-1$. Άρα πρέπει να αποδείξουμε ότι $\mathbf{x}_k > 0$. Παρατηρούμε ότι το \mathbf{x}_k δεν μπορεί να είναι μηδενικό, διαφορετικά θα έχουμε $\sum_{j=1}^{k-1} A_{k,j}\mathbf{x}_j = 0$, δηλαδή αφού $\mathbf{x}_j > 0$ για $j = 1, \dots, k-1$, θα έχουμε $A_{k,j} = 0$ για $j = 1, \dots, k-1$, έτσι ώστε να υπάρχει και άλλη τελική κλάση. Υποθέτουμε ότι το \mathbf{x}_k έχει μερικά μηδενικά στοιχεία και ας ονομάσουμε το πρώτο h . Τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μη μηδενικά. Σε αυτή την περίπτωση, από την ανισότητα $A_{K,K}\mathbf{x}_k \leq \rho(A)\mathbf{x}_k$ συμπεραίνουμε ότι τα στοιχεία του $A_{k,k}$ με δείκτες (i, j) όπου $i \leq h$ και $j \geq h+1$, πρέπει να είναι μηδενικά. Το γεγονός αυτο σημαίνει ότι, ο $A_{k,k}$ δεν είναι ανάγωγος που είναι άτοπο από υπόθεση. \square

Κεφάλαιο 2

Πίνακες

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, θα ανακαλέσουμε και θα αναλύσουμε ορισμένες δομικές και υπολογιστικές ιδιότητες οι οποίες αποτελούν την βάση για τον σχεδιασμό και την ανάλυση γρήγορων αλγορίθμων για την αριθμητική λύση των αλυσίδων Markov. Αφού εισάγουμε τον ορισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier, καθώς και τον γρήγορο αλγόριθμο για τον υπολογισμό του, θα περιγράψουμε κυκλικούς, z -κυκλικούς και Toeplitz πίνακες, μαζί με τα ανάλογα blocks τους, τα οποία παρεμβαίνουν στην μαθηματική μοντελοποίηση των αλυσίδων Markov.

Πρώτα θα εισάγουμε τις έννοιες των block πινάκων, block διανυσμάτων και των γινομένων πινάκων Kronecker και Hadamard.

Δεδομένων των θετικών ακεραίων p, q και $m_i, n_j, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q$ και δεδομένων των $m_i \times n_j$ πινάκων $A_{i,j}, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q$ ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,q} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{p,1} & A_{p,2} & \dots & A_{p,q} \end{bmatrix}$$

μεγέθους $m \times n$, όπου $m = \sum_{i=1}^p m_i, n = \sum_{j=1}^q n_j$, ονομάζεται $p \times q$ **block πίνακας** με **block στοιχεία** $A_{i,j}, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q$. Αν $q = 1$, ο πίνακας A ονομάζεται **block διάνυσμα-στήλη**, block μεγέθους p , με block στοιχεία $A_{i,1}, i = 1, \dots, p$. Ομοίως, αν $p = 1$, ο πίνακας A ονομάζεται **block διάνυσμα-γραμμή**, block μεγέθους q , με block στοιχεία $A_{1,j}, j = 1, \dots, q$. Για παράδειγμα ο πίνακας

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

μπορεί να ξαναγραφτεί σε μορφή block ως εξής

$$A = \begin{bmatrix} E & 0_2 \\ 2E & I_2 \end{bmatrix}$$

όπου E είναι ένας 2×3 πίνακας με όλα του τα στοιχεία ίσα με 1, 0_2 είναι ένας 2×2 πίνακας με όλα του τα στοιχεία ίσα με 0 και I_2 είναι ένας 2×2 ταυτοτικός πίνακας.

Εάν $A = (a_{i,j})$ και $B = (b_{i,j})$ είναι πίνακες μεγέθους $m \times n$ και $p \times q$ αντίστοιχα, συμβολίζουμε με $A \otimes B$ το **γινόμενο Kronecker** των A και B , δηλαδή τον $m \times n$ block πίνακα με block στοιχεία $a_{i,j}B$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, μεγέθους $p \times q$. Συγκεκριμένα, για έναν $m \times n$ πίνακα A έχουμε

$$I_n \otimes A = \begin{bmatrix} A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A \end{bmatrix}, \quad A \otimes I_n = \begin{bmatrix} a_{1,1}I_n & \cdots & a_{1,m}I_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}I_n & \cdots & a_{m,m}I_n \end{bmatrix}$$

όπου I_n ο $n \times n$ ταυτοτικός πίνακας.

Το γινόμενο Kronecker μας επιτρέπει να γράφουμε ένα γινόμενο πινάκων σε μορφή διανύσματος. Για τον σκοπό αυτό εισάγουμε την σχέση

$$\mathbf{x} = \text{vec}(X) = [x_{1,1}, \dots, x_{m,1}, \dots, \dots, x_{1,n}, \dots, x_{m,n}]^T \quad (2.1)$$

που συσχετίζει τον $m \times n$ πίνακα X με ένα διάνυσμα mn -διάστασης και προκύπτει από τη σύνθεση των στηλών του X . Έτσι βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\text{vec}(AXB) = (B^T \otimes A)\text{vec}(X) \quad (2.2)$$

Ομοίως αν το \mathbf{x} είναι διάνυσμα mn -διάστασης ορίζουμε $\text{vec}_m^{-1}(\mathbf{x})$ τον $m \times n$ πίνακα έτσι ώστε $\text{vec}(\text{vec}_m^{-1}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$.

Δίνοντας τα διανύσματα $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1, \dots, n}$, $\mathbf{b} = (b_i)_{i=1, \dots, n}$ συμβολίζουμε με $\mathbf{a} * \mathbf{b}$ το **γινόμενο Hadamard** των διανυσμάτων \mathbf{a} και \mathbf{b} το οποίο είναι

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = [a_i b_i, a_n b_n]$$

Το γινόμενο Hadamard επεκτείνεται φυσικά σε block διανύσματα, ως εξής

$$[A_1, \dots, A_n] * [B_1, \dots, B_n] = [A_1 B_1, \dots, A_n B_n]$$

Συμβολίζουμε με $\text{Diag}(A_1, \dots, A_n)$ τον διαγώνιο block πίνακα έχοντας για διαγώνια blocks τους πίνακες A_i , $i = 1, \dots, n$. Αν τα blocks είναι βαθμωτά, δηλαδή, αν $A_i = a_i$, τότε ο $\text{Diag}(a_1, \dots, a_n)$ αντιπροσωπεύει έναν διαγώνιο πίνακα.

2.2 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Έστω i η φανταστική μονάδα ώστε $i^2 = -1$. Για έναν ακέραιο $n \geq 1$, ας ορίσουμε

$$\omega_n = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$$

Ο μιγαδικός αριθμός ω_n είναι μία πρωτογενής n -οστή ρίζα της μονάδας, δηλαδή ο ω_n είναι τέτοιος ώστε $\omega_n^n = 1$ και $\omega_n^i \neq \omega_n^j$, $i, j = 0, \dots, n-1$. Τα στοιχεία του συνόλου $\{\omega_n^i, i = 0, \dots, n-1\}$ είναι οι n ρίζες της εξίσωσης $z^n - 1 = 0$, που τις ξέρουμε επίσης ως n -οστές ρίζες της μονάδας ή σημεία Fourier.

Ο πίνακας Vandermonde

$$\Omega_n = (\omega_n^{(i-1)(j-1)})_{i,j=1,\dots,n}$$

που σχηματίζεται με τα σημεία Fourier ονομάζεται *πίνακας Fourier* τάξης n . Είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο $\Omega_n^{-1} = \frac{1}{n}\bar{\Omega}_n$ όπου $\bar{\Omega}_n$ είναι ο μιγαδικός συζυγής του πίνακα Ω_n . Το γεγονός αυτό είναι άμεση συνέπεια της ακόλουθης ιδιότητας των n -οστών ριζών της μονάδας:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_n^{ij} = \begin{cases} 0, & \text{αν } j \not\equiv 0 \pmod{n} \\ n, & \text{αν } j \equiv 0 \pmod{n} \end{cases}$$

Ο μετασχηματισμός $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = \frac{1}{n}\bar{\Omega}_n \mathbf{x}$ ονομάζεται **διακριτός μετασχηματισμός Fourier** τάξης n ή **DFT** (Discrete Fourier Transformation) για λόγους συντομίας. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} = \Omega_n \mathbf{y}$ ονομάζεται **αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier** ή **IDFT** τάξης n . Επίσης γράφουμε $\mathbf{y} = DFT_n(\mathbf{x})$ και $\mathbf{x} = IDFT_n(\mathbf{y})$. Ως προς τα στοιχεία x_i, y_i έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \bar{\omega}_n^{(i-1)(j-1)} x_j, \\ x_i &= \sum_{j=1}^n \omega_n^{(i-1)(j-1)} y_j \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

Εάν n είναι μία ακέραια δύναμη του 2, ο IDFT ενός μιγαδικού διανύσματος μήκους n μπορεί να υπολογιστεί από τους αλγόριθμους γρήγορου μετασχηματισμού Fourier (FFT), με μόλις $5n \log_2 n$ αριθμητικές πράξεις με πραγματικούς αριθμούς. Ο ίδιος ασυμπτωματικός αριθμός των πράξεων είναι επαρκής και για τον υπολογισμό του DFT. Αν το \mathbf{x} είναι πραγματικό διάνυσμα, τότε ο $IDFT_n(\mathbf{x})$ μπορεί να υπολογιστεί χονδρικά με $5n \log_2 n$ πράξεις. Ο ίδιος αριθμός υπολογισμών επαρκεί για να υπολογίσουμε τον DFT ενός διανύσματος \mathbf{y} ο οποίος είναι ο IDFT ενός πραγματικού διανύσματος.

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τον ορισμό του DFT με όρους πολυωνύμων με τον ακόλουθο τρόπο. Έστω $y(z) = \sum_{j=0}^{n-1} z^j y_{j+1}$ πολυώνυμο βαθμού μικρότερου από n που ορίζεται από το διάνυσμα y και παρατηρούμε από το (2.3) ότι $x_i = y(\omega_n^{i-1})$, $i = 1, \dots, n$. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε τον IDFT ενός διανύσματος ως τιμές που παίρνει το πολυώνυμο $y(z)$ στις n -οστές ρίζες της μονάδας. Όμοια, ο DFT μπορεί να θεωρηθεί ως οι συντελεστές του πολυωνύμου $y(z)$ που παρεμβάλλουν τις τιμές x_i , $i = 1, \dots, n$ στις n -οστές ρίζες της μονάδας.

Παρατήρηση 2.2.1. Από τις ιδιότητες $\Omega_n^{-1} = \bar{\Omega}_n$ και $\Omega_n^T = \Omega_n$ συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας $W_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\Omega_n$ είναι μοναδιαίος, δηλαδή $\bar{W}_n^T W_n = I$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2$ όταν $\mathbf{y} = W_n \mathbf{x}$, δηλαδή $\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{n}} IDFT_n(\mathbf{x})$.

Οι διακριτοί μετασχηματισμοί Fourier μπορούν να επεκταθούν σε block διανύσματα. Δεδομένων των block διανυσμάτων-στήλης \mathbf{x}, \mathbf{y} block μεγέθους n , με $m \times p$ στοιχεία, ο μετασχηματισμός $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = \frac{1}{n}(\Omega_n \otimes I_m)\mathbf{x}$ ονομάζεται

block μετασχηματισμός Fourier τάξης n . Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} = (\Omega_n \otimes I_m)\mathbf{y}$ ονομάζεται αντίστροφος block μετασχηματισμός Fourier τάξης n . Όπως και στην κλιμακωτή περίπτωση, γράφουμε $\mathbf{y} = DFT_n(\mathbf{x})$ και $\mathbf{x} = IDFT_n(\mathbf{y})$. Όσον αφορά τα block στοιχεία έχουμε

$$Y_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \bar{\omega}_n^{(i-1)(j-1)} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$X_i = \sum_{j=1}^n \omega_n^{(i-1)(j-1)} y_j$$

Παρατηρήστε ότι ένας block DFT (IDFT) συνίσταται για τους υπολογισμούς mp DF (IDF) μετασχηματισμών. Πιο συγκεκριμένα, ορίζοντας το $(Y_i)_{h,k}$ ως στοιχείο του Y_i στη θέση (h, k) το διάνυσμα

$$\mathbf{v}^{(h,k)} = [(Y_1)_{h,k}, (Y_2)_{h,k}, \dots, (Y_n)_{h,k}]^T \text{ είναι τέτοιο ώστε}$$

$$\mathbf{v}^{(h,k)} = DFT_n([(X_1)_{h,k}, (X_2)_{h,k}, \dots, (X_n)_{h,k}]^T), \quad h = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, p$$

Μία παρόμοια σχέση ισχύει και για τον $IDFT_n$.

Όπως και στην βαθμωτή περίπτωση, μπορούμε να συσχετίσουμε το block διάνυσμα \mathbf{y} με ένα πολυωνυμικό πίνακα $Y(z) = \sum_{i=0}^{n-1} z^i Y_{i+1}$. Ονομάζουμε **πολυωνυμικό πίνακα** $m \times p$ οποιοδήποτε πολυώνυμο του οποίου οι συντελεστές είναι $m \times p$ πίνακες, ή ισοδύναμα, έναν πίνακα του οποίου τα στοιχεία είναι πολυώνυμα. Ο μέγιστος βαθμός των στοιχείων του ονομάζεται **βαθμός του πολυωνυμικού πίνακα**. Με αυτόν τον τρόπο ο IDFT ενός block διανύσματος μπορεί να θεωρηθεί ως οι τιμές που παίρνει ο πολυωνυμικός πίνακας $Y(z)$ στις ρίζες της μονάδας. Ο DFT ενός block διανύσματος \mathbf{x} μπορεί ως ένα διάνυσμα συντελεστών του πολυωνυμικού πίνακα, το οποίο παρεμβάλει τα $X_i, i = 1, \dots, n$ στις n -οστές ρίζες της μονάδας.

Μία ωραία εφαρμογή του DFT είναι ο Αλγόριθμος 2.1 για τον υπολογισμό του γινομένου $A(z)$ δύο $m \times m$ πολυωνυμικών πινάκων $B(z)$ και $C(z)$. Η βασική ιδέα αυτού του αλγορίθμου είναι να υπολογιστούν οι συντελεστές του $A(z)$ με παρεμβολή των τιμών του $A(z)$ στα σημεία Fourier μέσω ενός DFT. Οι τιμές του $A(z)$ υπολογίζονται από τον πολλαπλασιασμό των τιμών των $B(z)$ και $C(z)$ στα σημεία Fourier οι οποίες υπολογίζονται χωριστά μέσω δύο IDF μετασχηματισμών. Ο αριθμός N των σημείων Fourier πρέπει να είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του $A(z)$.

Αλγόριθμος 2.1 Γινόμενο πολυωνυμικών πινάκων

ΕΙΣΟΔΟΣ: Οι συντελεστές των $m \times m$ πολυωνυμικών πινάκων $B(z) = \sum_{i=0}^{n_1} z^i B_i$

και $C(z) = \sum_{i=0}^{n_2} z^i C_i$ βαθμού n_1 και n_2 , αντίστοιχα.

ΕΞΟΔΟΣ: Οι συντελεστές του $m \times m$ πολυωνυμικού πίνακα $A(z) = B(z)C(z) = \sum_{i=0}^n z^i A_i$ βαθμού το πολύ $n = n_1 + n_2 + 1$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ:

- 1 Υπολόγισε την ελάχιστη ακέραια δύναμη του 2, έστω N , έτσι ώστε $N > n_1 + n_2$.
- 2 Έστω \mathbf{b} ένα N -διάστατο block διάνυσμα στήλης με στοιχεία B_{i-1} για $i = 1, \dots, n_1 + 1$ και μηδέν σε οποιαδήποτε άλλη θέση. Όμοια ορίζουμε το \mathbf{c} ως N -διάστατο block διάνυσμα στήλης με στοιχεία C_{i-1} για $i = 1, \dots, n_2 + 1$ και μηδέν σε οποιαδήποτε άλλη θέση.
- 3 Υπολόγισε τα $\mathbf{u} = IDFT_N(\mathbf{b}), \mathbf{v} = IDFT_N(\mathbf{c})$.
- 4 Υπολόγισε το $\mathbf{w} = \mathbf{u} * \mathbf{v}$.
- 5 Υπολόγισε το $\mathbf{y} = (Y_i)_{i=1, \dots, N} = DFT_N(\mathbf{w})$.
- 6 Εξήγαγε $A_i = Y_{i+1}$, $i = 0, \dots, n$.

Η υπολογιστική προσπάθεια αυτού του αλγορίθμου ανέρχεται σε $2m^2$ IDFT μετασχηματισμούς μήκους N , σε m^2 DF μετασχηματισμούς μήκους N και σε N γινόμενα πινάκων, ωστόσο το κόστος του είναι $O(m^2 N \log N + m^3 N)$. Αν οι συντελεστές του $B(z)$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε έπεται ότι U_1 και $U_{\frac{N}{2}+1}$ είναι πραγματικοί και πως $U_i = \bar{U}_{N-i+2}$, $i = 2, \dots, \frac{N}{2}$. Η ίδια ιδιότητα ισχύει και για τα block στοιχεία V_i του \mathbf{v} αν ο $C(z)$ έχει πραγματικούς συντελεστές. Δηλαδή, αν και ο $B(z)$ και ο $C(z)$ έχουν πραγματικούς συντελεστές, το \mathbf{y} επίσης έχει αυτή την ιδιότητα και ο υπολογισμός του \mathbf{w} ανάγεται στον υπολογισμό δύο γινομένων πραγματικών πινάκων και $\frac{N}{2} - 1$ γινομένων μιγαδικών πινάκων. Δεδομένου ότι ένα γινόμενο μιγαδικών πινάκων μπορεί να εκτελεστεί με τρεις πολλαπλασιασμούς και πέντε προσθέσεις πραγματικών πινάκων, μέσω του (A.3), το συνολικό κόστος του τέταρτου βήματος του αλγορίθμου 2.1 είναι περίπου $\frac{3N}{2}$ πολλαπλασιασμοί πραγματικών πινάκων και $\frac{5N}{2}$ προσθέσεις πραγματικών πινάκων. Επομένως αν δώσουμε έναν πραγματικό αριθμό ως είσοδο, το κόστος του αλγορίθμου 2.1 είναι

$$N(3m^3 + 2m^2) + \frac{15}{2}m^2 N \log N \quad (2.4)$$

πράξεις, μέχρι τους όρους χαμηλότερης τάξης. Αν το m είναι αρκετά μεγάλο, το κυρίαρχο μέρος της πολυπλοκότητας είναι $3Nm^3$. Χρησιμοποιώντας τον συνηθισμένο αλγόριθμο για πολλαπλασιασμό πολυωνύμων το κόστος θα ήταν $2m^3(n_1 + 1)(n_2 + 1)$ πράξεις. Παρατηρήστε ότι για σχετικά μέτρια μεγάλες τιμές των n_1 και n_2 έχουμε ότι $N \ll (n_1 + 1)(n_2 + 1)$.

Παρατήρηση 2.2.2. Από την πολυωνυμική ερμηνεία των DFT και IDFT, προκύπτει μία χρήσιμη ιδιότητα που μας επιτρέπει να γλιτώσουμε αριθμητικές πράξεις στην αριθμητική των δυναμοσειρών. Σε αυτό το πλαίσιο, πρέπει να υπολογίσουμε τους IDFT των block διανυσμάτων των οποίων το μήκος διπλασιάζεται σε

κάθε βήμα συμπληρώνοντας με μηδενικά. Πιο συγκεκριμένα, πρέπει να υπολογίσουμε τον $IDFT_{2n}$ του διανύσματος $[Y_1, \dots, Y_n, 0, \dots, 0]$ μήκους $2n$ μόλις έχουμε το $IDFT_n$ του $[Y_1, \dots, Y_n]$ χωρίς να ξεκινήσουμε τον υπολογισμό από την αρχή.

Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται το block διάνυσμα $\mathbf{y} = (Y_i)_{i=1, \dots, n}$ που ορίζει τον πολυωνυμικό πίνακα $Y(z) = \sum_{i=0}^{n-1} z^i Y_{i+1}$ και ότι έχουμε υπολογίσει το $IDFT_n(\mathbf{y})$, δηλαδή, τις τιμές $X_j = Y(\omega_n^{j-1})$, $j = 1, \dots, n$. Θέλουμε να υπολογίσουμε τις τιμές $T_j = Y(\omega_{2n}^{j-1})$ για $j = 1, \dots, 2n$, δηλαδή τον $IDFT_{2n}(\hat{\mathbf{y}})$, με $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{Y}_i)_{i=1, \dots, 2n}$, όπου $\hat{Y}_i = Y_i$ για $i = 1, \dots, n$ και $Y_i = 0$ σε οποιαδήποτε άλλη θέση. Από τη σχέση $\omega_{2n}^2 = \omega_n$, βρίσκουμε ότι $T_{2j-1} = X_j$, $j = 1, \dots, n$. Επομένως τα περιττά στοιχεία του $\mathbf{t} = (T_j)_{j=1, \dots, 2n}$ είναι ήδη διαθέσιμα. Άμεσα αποδεικνύεται ότι το block διάνυσμα $\mathbf{w} = IDFT_n(D\mathbf{y})$, όπου $D = \text{Diag}(1, \omega_{2n}, \omega_{2n}^2, \dots, \omega_{2n}^{n-1}) \otimes I_n$. Επομένως για να υπολογίσουμε το T_j , $j = 1, \dots, 2n$ αρκεί να υπολογίσουμε έναν επιπλέον IDFT μήκους n .

Δεδομένου του πολυωνυμικού πίνακα $X(z) = \sum_{i=0}^{n-1} z^i X_{i+1}$ βαθμού μικρότερου του n και δεδομένου $\mathbf{y} = (Y_i)_{i=1, \dots, n}$, χρειάζεται να υπολογίσουμε τον πολυωνυμικό πίνακα $W(z) = \sum_{i=0}^{2n-1} z^i W_{i+1}$ βαθμού μικρότερου του $2n$, έτσι ώστε $W(\omega_n^i) = X(\omega_n^i)$, $i = 0, \dots, n-1$ και $W(\omega_{2n}^{2i-1}) = Y_i$, $i = 1, \dots, n$. Με $\mathbf{w}^{(1)} = (W_i)_{i=1, \dots, n}$ και $\mathbf{w}^{(2)} = (W_i)_{i=n+1, \dots, 2n}$ δείχνουμε ότι

$$\mathbf{w}^{(1)} = \frac{\mathbf{x} + \bar{D} \cdot DFT_n(\mathbf{y})}{2} \text{ και } \mathbf{w}^{(2)} = \frac{\mathbf{x} - \bar{D} \cdot DFT_n(\mathbf{y})}{2}. \text{ Έτσι ώστε και εδώ να}$$

αρκεί να υπολογίσουμε έναν DFT μήκους n για να υπολογίσουμε τα W_1, \dots, W_{2n} .

2.3 Δομημένοι πίνακες

Θα αναφέρουμε τις δομικές και υπολογιστικές ιδιότητες ορισμένων σημαντικών κατηγοριών πινάκων μεταξύ των οποίων οι κυκλικόι, οι z -κυκλικόι και οι Toeplitz πίνακες, καθώς και τα ανάλογα blocks τους, που παίζουν σημαντικό ρόλο στο σχεδιασμό αλγορίθμων για την επίλυση αλυσίδων Markov.

2.3α' Κυκλικόι πίνακες

Οι κυκλικόι πίνακες είναι στενά συνδεδεμένοι με τους DF μετασχηματισμούς.

Ορισμός 2.3.1. Δεδομένου του διανύσματος-γραμμής $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$, ο $n \times n$ πίνακας

$$A = (a_{j-i \bmod n})_{i,j=1, \dots, n} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix}$$

ονομάζεται **κυκλικός πίνακας** που σχετίζεται με το $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$ και συμβολίζεται με $\text{Circ}(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$.

Ένας κυκλικός πίνακας καθορίζεται πλήρως από την πρώτη του γραμμή $\mathbf{r}^T = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$ ή από την πρώτη του στήλη $\mathbf{c} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]^T$. Οποιαδήποτε άλλη γραμμή ή στήλη προκύπτει από την προηγούμενη εφαρμόζοντας μία κυκλική μετάθεση στα στοιχεία της. Το τελευταίο στοιχείο μετατίθεται στην πρώτη θέση και τα υπόλοιπα μετατοπίζονται κατά μία θέση. Με C συμβολίζουμε τον κυκλικό πίνακα που σχετίζεται με το $[0, 1, 0, \dots, 0]$, δηλαδή

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i C^i \quad (2.6)$$

δηλαδή, οποιοσδήποτε κυκλικός πίνακας μπορεί να θεωρηθεί ως πολυώνυμο στο C .

Άμεσα προκύπτει ότι

$$C\bar{\Omega}_n = \bar{\Omega}_n \text{Diag}(1, \bar{\omega}_n, \bar{\omega}_n^2, \dots, \bar{\omega}_n^{n-1})$$

πολλαπλασιάζοντας με $\frac{1}{n}\Omega_n$ από αριστερά έχουμε

$$\frac{1}{n}\Omega_n C\bar{\Omega}_n = \text{Diag}(1, \bar{\omega}_n, \bar{\omega}_n^2, \dots, \bar{\omega}_n^{n-1})$$

Επιπλέον έχουμε ότι

$$\frac{1}{n}\Omega_n C^T \bar{\Omega}_n = \text{Diag}(1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1})$$

αφού ο Ω_n είναι συμμετρικός. Από τις δύο παραπάνω εξισώσεις και την (2.6) προκύπτει η ακόλουθη ιδιότητα.

Θεώρημα 2.3.2. Αν ο A είναι ένας κυκλικός πίνακας με πρώτη γραμμή την \mathbf{r}^T και πρώτη στήλη την \mathbf{c} , τότε

$$A = \frac{1}{n}\bar{\Omega}_n \text{Diag}(\mathbf{w})\Omega_n$$

όπου $\mathbf{w} = \Omega_n \mathbf{c} = \bar{\Omega}_n \mathbf{r}$.

Ένα άμεσο πόρισμα του παραπάνω θεωρήματος είναι ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το γινόμενο $A\mathbf{x}$ ενός $n \times n$ κυκλικού πίνακα A και ενός διανύσματος \mathbf{x} μέσω δύο IDF μετασχηματισμών μήκους n και ενός DFT. Πράγματι το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$A\mathbf{x} = \text{DFT}_n(\text{IDFT}_n(\mathbf{c}) * \text{IDFT}_n(\mathbf{x})) \quad (2.7)$$

όπου το $*$ συμβολίζει το γινόμενο Handamard διανυσμάτων.

Από το Θεώρημα (2.3.2), βρίσκουμε επίσης ότι το γινόμενο δύο κυκλικών πινάκων είναι κυκλικός πίνακας και ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου κυκλικού πίνακα είναι και αυτός κυκλικός.

Ο ορισμός των κυκλικών πινάκων επεκτείνεται φυσικά και σε block πίνακες.

Ορισμός 2.3.3. Δεδομένου του block διανύσματος γραμμής $[A_0, A_1, \dots, A_{n-1}]$, όπου $A_i, i = 0, \dots, n-1$ $m \times m$ πίνακες, ο $n \times n$ block πίνακας

$$A = (A_{j-i \bmod n})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{n-1} \\ A_{n-1} & A_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_1 \\ A_1 & \dots & A_{n-1} & A_0 \end{bmatrix}$$

ονομάζεται **block κυκλικός πίνακας** που σχετίζεται με το $[A_0, A_1, \dots, A_{n-1}]$ και συμβολίζεται με $Circ(A_0, A_1, \dots, A_{n-1})$.

Ομοίως στην βαθμωτή περίπτωση έχουμε

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} C^i \otimes A_i \quad (2.8)$$

και Θεώρημα (2.3.2) γενικεύεται στην ακόλουθη ιδιότητα.

Θεώρημα 2.3.4. Αν ο A είναι ένας block κυκλικός πίνακας με πρώτη block γραμμή την \mathbf{r}^T και πρώτη block στήλη την \mathbf{c} , τότε

$$A = \frac{1}{n}(\bar{\Omega}_n \otimes I_m) \text{Diag}(W_1, \dots, W_n)(\Omega_n \otimes I_m)$$

όπου

$$[W_1, \dots, W_n] = \mathbf{r}^T (\bar{\Omega}_n \otimes I_m)$$

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix} = (\Omega_n \otimes I_m) \mathbf{c}$$

Όπως και στους κυκλικούς πίνακες, η κλάση των block κυκλικών πινάκων είναι κλειστή ως προς τον πολλαπλασιασμό και την αντιστροφή πινάκων.

Η εξίσωση (2.7) γίνεται

$$\mathbf{Ax} = \text{DFT}_n(\text{IDFT}_n(\mathbf{c}) * \text{IDFT}_n(\mathbf{x})) \quad (2.9)$$

όπου \mathbf{c} είναι το πρώτο block διάνυσμα στήλης του A , που μας δείχνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το γινόμενο \mathbf{Ax} ενός $n \times n$ block κυκλικού πίνακα A και ενός block διανύσματος \mathbf{x} με block στοιχεία μεγέθους $m \times p$, μέσω δύο IDF μετασχηματισμών και ενός DFT μήκους n και n γινόμενα $m \times m$ επί $m \times p$ πινάκων.

Με τον Αλγόριθμο 2.2 συνδυάζουμε τις (2.7) και (2.9) για τον πολλαπλασιασμό ενός block κυκλικού πίνακα και ενός block διανύσματος. Για $m = p = 1$ ο αλγόριθμος ανάγεται στην βαθμωτή περίπτωση.

Αλγόριθμος 2.2 Γινόμενο block κυκλικών πινάκων-διανύσματος

ΕΙΣΟΔΟΣ: Θετικοί ακέραιοι m, n, p , όπου $n = 2^k$, k ένας θετικός ακέραιος, n -διάστατο block διάνυσμα $\mathbf{c} = (C_i)_{i=1,\dots,n}$, με $m \times m$ block στοιχεία τα οποία είναι η πρώτη στήλη του block κυκλικού πίνακα A και το n -διάστατο block διάνυσμα $\mathbf{x} = (X_i)_{i=1,\dots,n}$ με $m \times p$ block στοιχεία.

ΕΞΟΔΟΣ: Το block διάνυσμα $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = (Y_i)_{i=1,\dots,n}$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ:

- 1 Υπολόγισε το $\mathbf{w} = (W_i)_{i=1,\dots,n} = IDFT_n(\mathbf{c})$
- 2 Υπολόγισε το $\mathbf{v} = (V_i)_{i=1,\dots,n} = IDFT_n(\mathbf{x})$
- 3 Υπολόγισε το γινόμενο πινάκων $U_i = W_i V_i$, $i = 1, \dots, n$
- 4 Υπολόγισε το $\mathbf{y} = DFT_n(\mathbf{u})$ για $\mathbf{u} = (U_i)_{i=1,\dots,n}$

Το κόστος του υπολογισμού του \mathbf{y} δεδομένων των \mathbf{x} και \mathbf{c} είναι προφανώς $O((m+p)mn \log n + nm^2 p)$ πράξεις. Αν τα στοιχεία του \mathbf{c} είναι πραγματικά, τότε συνεπάγεται ότι τα W_i , $W_{\frac{n}{2}+1}$ είναι επίσης πραγματικά και πως $W_i = \overline{W_{n-i+2}}$, $i = 2, \dots, \frac{n}{2}$. Η ίδια ιδιότητα ισχύει και για τα block στοιχεία V_i του \mathbf{v} αν το \mathbf{x} είναι πραγματικό. Δηλαδή αν και το \mathbf{c} και το \mathbf{x} είναι πραγματικά τότε το \mathbf{u} επίσης έχει αυτή την ιδιότητα και ο υπολογισμός των U_i , $i = 1, \dots, n$ ανάγεται στον υπολογισμό δύο γινομένων πραγματικών πινάκων και $\frac{n}{2} - 1$ γινομένων μιγαδικών πινάκων. Δεδομένου ότι ένα γινόμενο μιγαδικών πινάκων μπορεί να εκτελεστεί με τρεις πολλαπλασιασμούς και πέντε προσθέσεις πραγματικών πινάκων, μέσω της (A.3), το συνολικό κόστος του τρίτου βήματος το αλγόριθμου είναι $3(\frac{n}{2} - 1) + 2$ πολλαπλασιασμοί μεταξύ $m \times m$ και $m \times p$ πραγματικών πινάκων, $\frac{n}{2} - 1$ προσθέσεις $m \times m$ πινάκων και $4(\frac{n}{2} - 1)$ προσθέσεις $m \times p$ πινάκων. Επομένως αν εισάγουμε πραγματικούς αριθμούς, το κόστος του αλγόριθμου 2.2 είναι

$$n(3m^2 p + \frac{m(m+3p)}{2}) + \frac{5}{2}(m^2 + 2mp)n \log n \quad (2.10)$$

πράξεις, μέχρι τους όρους χαμηλότερης τάξης. Αν οι m και p είναι αρκετά μεγάλοι, το κυρίαρχο μέρος της πολυπλοκότητας είναι $3m^2 n p$. Χρησιμοποιώντας τον συνηθισμένο αλγόριθμο για ένα γινόμενο πίνακα-διανύσματος, το κόστος θα ήταν $2m^2 n^2 p$ πράξεις.

2.3β' z -Κυκλικοί πίνακες

Η κλάση των z -κυκλικών πινάκων είναι μία γενίκευση των κυκλικών πινάκων.

Ορισμός 2.3.5. Δεδομένου ενός βαθμωτού μεγέθους $z \neq 0$ και του διανύσματος-γραμμής $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$, ο $n \times n$ πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ za_{n-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ za_1 & \dots & za_{n-1} & a_0 \end{bmatrix}$$

ονομάζεται z -κυκλικός πίνακας που σχετίζεται με το $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$.

Παρατηρήστε ότι ένας z -κυκλικός πίνακας καθορίζεται πλήρως από το z και από τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του, $\mathbf{r}^T = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$, ή της πρώτης του στήλης $\mathbf{c} = [a_0, za_{n-1}, \dots, za_1]^T$.

Συμβολίζουμε με C_z τον z -κυκλικό πίνακα που σχετίζεται με το διάνυσμα $[0, 1, 0, \dots, 0]$, δηλαδή,

$$C_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ z & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εύκολα αποδεικνύουμε ότι

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i C_z^i \quad (2.11)$$

Δηλαδή, οποιοσδήποτε z -κυκλικός πίνακας μπορεί να θεωρηθεί ως πολυώνυμο στο C_z

Είναι εύκολο, επίσης, να αποδείξουμε ότι

$$C_z^n = z D_z C D_z^{-1}, \quad D_z = \text{Diag}(1, z, z^2, \dots, z^{n-1})$$

όπου C είναι ο κυκλικός πίνακας της (2.5). Επομένως, αν ο A είναι z^n -κυκλικός, από την (2.11) προκύπτει ότι

$$A = D_z \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i C^i \right) D_z^{-1}$$

όπου $\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i C^i$ είναι κυκλικός. Από το Θεώρημα (2.3.2) προκύπτει και το επόμενο.

Θεώρημα 2.3.6. Αν A είναι ένας z^n -κυκλικός πίνακας με πρώτη γραμμή την \mathbf{r}^T και πρώτη στήλη την \mathbf{c} τότε

$$A = \frac{1}{n} D_z \bar{\Omega}_n \text{Diag}(\mathbf{w}) \Omega_n D_z^{-1}$$

με $\mathbf{w} = \bar{\Omega}_n D_z \mathbf{r} = \Omega_n D_z^{-1} \mathbf{c}$.

Το παραπάνω θεώρημα, δείχνει ότι, όπως οι κυκλικοί πίνακες, έτσι και όλοι οι πίνακες στην κλάση των z -κυκλικών, μπορούν να διαγωνοποιηθούν ταυτόχρονα μέσω ενός συνδυασμού DFT και διαγώνιας κλίμακας με τις ακέραιες δυνάμεις του z . Επομένως, για κάθε δεδομένο z , οι z -κυκλικοί πίνακες είναι κλειστοί ως προς τον πολλαπλασιασμό και την αντιστροφή πινάκων.

Ορισμός 2.3.7. Δεδομένου ενός βαθμωτού μεγέθους $z \neq 0$ και του block διανύματος-γραμμής $[A_0, A_1, \dots, A_{n-1}]$, ο $n \times n$ πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{n-1} \\ zA_{n-1} & A_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_1 \\ zA_1 & \dots & zA_{n-1} & A_0 \end{bmatrix}$$

ονομάζεται **block z-κυκλικός πίνακας** που σχετίζεται με το $[A_0, A_1, \dots, A_{n-1}]$.

Το ανάλογο θεώρημα του Θεωρήματος (2.3.6) για τους z-κυκλικούς πίνακες αναφέρεται παρακάτω.

Θεώρημα 2.3.8. Αν ο A είναι ένας block z^n -κυκλικός πίνακας με πρώτη block στήλη την \mathbf{c} και με πρώτη block γραμμή το $[A_0, A_1, \dots, A_{n-1}]$, τότε

$$A = \frac{1}{n}(D_z \otimes I_m)(\bar{\Omega}_n \otimes I_m) \text{Diag}(\mathbf{w})(\Omega_n \otimes I_m)(D_z^{-1} \otimes I_m)$$

όπου

$$\mathbf{w} = (\bar{\Omega}_n \otimes I_m)(D_z \otimes I_m) \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix} = (\Omega_n \otimes I_m)(D_z^{-1} \otimes I_m)\mathbf{c}.$$

2.3γ' Toeplitz πίνακες

Toeplitz πίνακας είναι ένας πίνακας της μορφής

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \ddots \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

δηλαδή έχει ίσα στοιχεία σε κάθε διαγώνιό του. Το στοιχείο στη θέση (i, j) ενός Toeplitz πίνακα είναι μία συνάρτηση της διαφοράς $j - i$. Για αυτόν τον λόγο γράφουμε επίσης, $A = (a_{j-i})_{i,j \in E}$, όπου το σύνολο E των δεικτών μπορεί να είναι $E = \{1, \dots, n\}$, ή $E = \mathbb{N}$, ή $E = \mathbb{Z}$. Γενικά, ένας πίνακας ονομάζεται πεπερασμένος αν το σύνολο E των δεικτών του είναι το $\{1, \dots, n\}$, άπειρος αν $E = \mathbb{N}$ και bi-infinite αν $E = \mathbb{Z}$. Όμοια οι block Toeplitz πίνακες έχουν την μορφή $A = (A_{j-i})_{i,j \in E}$ όπου A_k , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ είναι $m \times m$ πίνακες. Ένας $n \times n$ Toeplitz πίνακας $A = (a_{j-i})_{i,j=1,\dots,n}$ μπορεί να ενσωματωθεί σε έναν $2n \times 2n$ κυκλικό πίνακα B του οποίου η πρώτη γραμμή είναι η $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, *, a_{-n+1}, \dots, a_{-1}]$, όπου το $*$ δηλώνει οποιονδήποτε αριθμό. Παρατηρούμε ότι ο κύριος υποπίνακας του B συμπίπτει με τον A . Για παράδειγμα, για $n = 3$ έχουμε,

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_0 & a_1 & a_2 & * & a_{-2} & a_{-1} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & * & a_{-2} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & * \\ \hline * & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & * & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & * & a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{array} \right]$$

Πιο γενικά, ένας $n \times n$ Toeplitz πίνακας μπορεί να ενσωματωθεί σε έναν $q \times q$ κυκλικό πίνακα για οποιοδήποτε $q \geq 2n-1$: αρκεί να αντικαταστήσουμε τα $*$ με $q-2n+1$ αυθαίρετα στοιχεία. Αν $q = 2n-1$ τότε δεν υπάρχει επιπλέον στοιχείο. Όμοια ένας $n \times n$ block Toeplitz πίνακας A με $m \times m$ blocks μπορεί να ενσωματωθεί σε έναν $q \times q$ block κυκλικό πίνακα B με $m \times m$ blocks για οποιοδήποτε $q \geq 2n-1$.

Αυτή η ιδιότητα ενσωμάτωσης μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το γινόμενο $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ ενός (block) Toeplitz πίνακα A με ένα (block) διάνυσμα \mathbf{x}

μέσω του αλγόριθμου 2.2 με τον ακόλουθο τρόπο. Πρώτα ενσωματώνουμε τον A σε έναν κυκλικό πίνακα B . Έπειτα ορίζουμε το q -διάστατο block διάνυσμα $\mathbf{z} = (Z_i)$ που προκύπτει συμπληρώνοντας το \mathbf{x} με μηδενικά, δηλαδή $Z_i = X_i, i = 1, 2, \dots, n$ και $Z_i = 0$ σε οποιαδήποτε άλλη θέση. Τα πρώτα n block στοιχεία του block διανύσματος $\mathbf{w} = B\mathbf{z}$ συμπίπτουν με το \mathbf{y} . Αν το q που επιλέξαμε είναι ακέραια δύναμη του 2, τότε το γινόμενο $B\mathbf{z}$ μπορεί να υπολογιστεί αποτελεσματικά από τον αλγόριθμο 2.2 ο οποίος βασίζεται στον FFT.

Θα συνδυάσουμε αυτόν τον υπολογισμό με τον Αλγόριθμο 2.3 ο οποίος περιλαμβάνει και την βαθμωτή περίπτωση όπου $m = p = 1$.

Αλγόριθμος 2.3 Γινόμενο block Toeplitz πίνακα-διανύσματος

ΕΙΣΟΔΟΣ: Θετικοί ακέραιοι m, n, p , οι $m \times m$ πίνακες $A_i, i = -(n-1), \dots, n-1$ οι οποίοι ορίζουν τον $n \times n$ block Toeplitz πίνακα $A = (A_{j-i})_{i,j=1,\dots,n}$ και το n -διάστατο block διάνυσμα $\mathbf{x} = (X_i)_{i=1,\dots,n}$ με $m \times p$ block στοιχεία.

ΕΞΟΔΟΣ: Το block διάνυσμα $\mathbf{y} = A\mathbf{x} = (Y_i)_{i=1,\dots,n}$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ:

- 1 Υπολόγισε τον ελάχιστο ακέραιο k έτσι ώστε $2^k \geq 2n$.
Θέσε $q = 2^k$.
 - 2 Όρισε τον q -διάστατο block διάνυσμα-στήλης $\mathbf{v} = (V_i)_{i=1,\dots,q}$ έτσι ώστε
 $V_i = A_{-i+1}$ αν $i = 1, \dots, n$
 $V_{q-i+1} = A_i$ αν $i = 1, \dots, n-1$ και
 $V_i = 0$ οπουδήποτε αλλού
 και όρισε τον $q \times q$ block κυκλικό πίνακα B έχοντας την πρώτη block στήλη \mathbf{v} . Ο block Toeplitz πίνακας A είναι ενσωματωμένος στον B .
 - 3 Όρισε το q -διάστατο block διάνυσμα-στήλης $\mathbf{z} = (Z_i)_{i=1,\dots,q}$ έτσι ώστε $Z_i = X_i$ αν $i = 1, \dots, n$ και $Z_i = 0$ οπουδήποτε αλλού.
 - 4 Υπολόγισε το $\mathbf{w} = B\mathbf{z} = (W_i)_{i=1,\dots,q}$ μέσω του αλγόριθμου 2.2.
 - 5 Θέσε $Y_i = W_i, i = 1, \dots, n$
-

Η ανάλυση της πολυπλοκότητας του αλγορίθμου 2.3 μπορεί να πραγματοποιηθεί παρόμοια με την περίπτωση του αλγορίθμου 2.2 και οδηγεί στο υπολογιστικό κόστος των

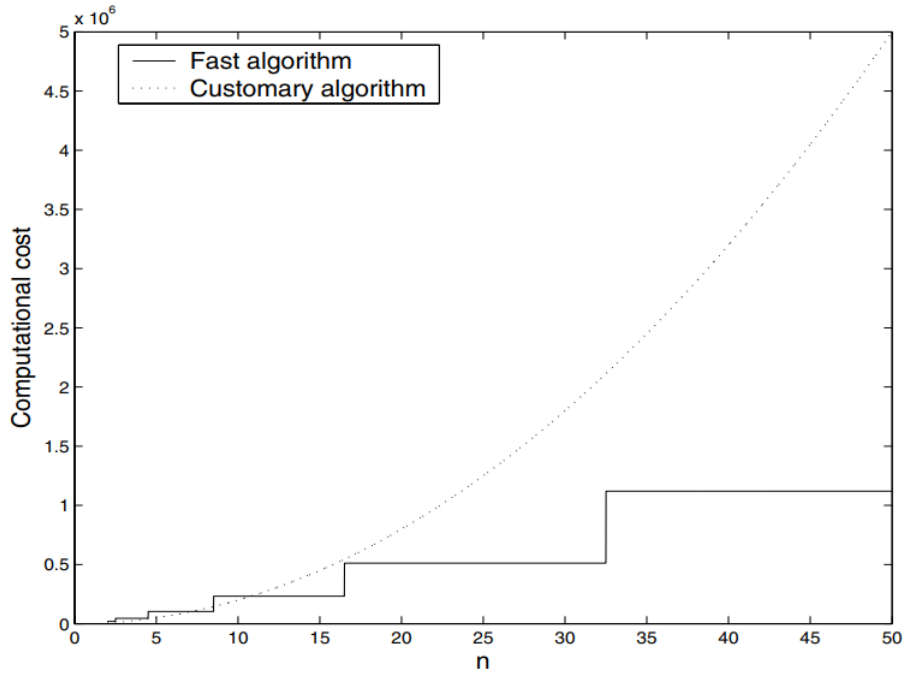
$$O((m+p)mn \log n + nm^2p)$$

πράξεων. Αν $p = m = 1$, δηλαδή ο A είναι ένας Toeplitz πίνακας και \mathbf{x} ένα διάνυσμα, τότε το ασυμπτωματικό κόστος ανάγεται σε $O(n \log n)$ πράξεις, σε αντίθεση με τον συνηθισμένο αλγόριθμο πολλαπλασιασμού πίνακα-διανύσματος που το κόστος του είναι $O(n^2)$. Αν $m = p$, το ασυμπτωματικό κόστος είναι $O(m^2n \log n + m^3n) = O(m^2n(\log n + m))$. Δηλαδή αν το m είναι αρκετά μεγάλο σε σχέση με το $\log n$, το κόστος υπολογισμού των FFT είναι αμελητέο σε σχέση με το κόστος υπολογισμού των γινομένων των πινάκων.

Από το όριο πολυπλοκότητας (2.10) του γινομένου ενός κυκλικού πίνακα και ενός διανύσματος, συμπεραίνουμε ότι για μία πραγματική είσοδο το όριο πολυπλοκότητας του γινομένου ενός Toeplitz πίνακα και ενός διανύσματος είναι

$$q(3m^2p + \frac{m(m+3p)}{2}) + \frac{5}{2}(m^2 + 2mp)q \log q \quad (2.12)$$

μέχρι τους όρους χαμηλότερης τάξης, όπου q είναι η ελάχιστη ακέραια δύναμη του 2 και μεγαλύτερο από $2n - 1$. Στην Σχήμα (2.1) συγκρίνουμε το κόστος (2.12), όπου $q = q(n)$ και το κόστος $2n^2m^2p$ του συνηθισμένου αλγορίθμου ως συνάρτηση του n για $m = p = 10$. Βλέπουμε ότι και για σχετικά μικρές τιμές του n , ο αλγόριθμος 2.3 είναι ταχύτερος από τον συνηθισμένο αλγόριθμο.



Σχήμα 2.1: Υπολογιστικό κόστος αλγορίθμων για τον πολλαπλασιασμό ενός block Toeplitz πίνακα με ένα block διάνυσμα για $m = p = 10$ σαν συνάρτηση του n .

Αλγόριθμος 2.4 Γινόμενο block διανύσματος-Toeplitz πίνακα

ΕΙΣΟΔΟΣ: Θετικοί ακέραιοι m, n, p , οι $m \times m$ πίνακες $A_i, i = -(n-1), \dots, n-1$ οι οποίοι καθορίζουν τον $n \times n$ block Toeplitz πίνακα $A = (A_{j-i})_{i,j=1,\dots,n}$ και το n -διάστατο block διάνυσμα $\mathbf{x}^T = [X_1, \dots, X_n]$ με $p \times p$ block στοιχεία.

ΕΞΟΔΟΣ: Το block διάνυσμα γραμμής $\mathbf{y}^T = \mathbf{x}A = [Y_1, \dots, Y_n]$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ:

- 1 Θεώρησε τον block Toeplitz πίνακα $H = A^T = (A_{i-j}^T)_{i,j=1,\dots,n}$ και το block διάνυσμα στήλης $\mathbf{w} = \mathbf{x} = (X_i^T)_{i=1,\dots,n}$.
- 2 Υπολόγισε το γινόμενο $\mathbf{v} = H\mathbf{w}$ μέσω του αλγόριθμου 2.3.
- 3 Εξήγαγε $Y_i = V_i^T$, $i = 1, \dots, n$

2.3δ' Τριγωνικοί Toeplitz πίνακες

Έστω $Z = (z_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ ένας $n \times n$ κάτω τριγωνικός πίνακας

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

με $z_{i+1,1} = 1$ για $i = 1, \dots, n-1$, $z_{i,j} = 0$ σε οποιαδήποτε άλλη θέση.

Για δωσμένο διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1,\dots,n}$, ορίζουμε τον $n \times n$ κάτω τριγωνικό Toeplitz πίνακα

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} Z^i = \begin{bmatrix} x_1 & & & 0 \\ x_2 & x_1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ x_n & \dots & x_2 & x_1 \end{bmatrix}$$

έχοντας το \mathbf{x} σαν πρώτη στήλη.

Όμοια, δεδομένου ενός διανύσματος γραμμής $\mathbf{y}^T = [y_1, y_2, \dots, y_n]$, ορίζουμε τον $n \times n$ άνω τριγωνικό Toeplitz πίνακα

$$U(\mathbf{y}^T) = \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1} (Z^T)^i = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ & y_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & y_2 \\ 0 & & & y_1 \end{bmatrix}$$

έχοντας το \mathbf{y}^T σαν πρώτη γραμμή.

Οι παραπάνω ορισμοί επεκτείνονται και σε block πίνακες με τον ακόλουθο τρόπο. Συμβολίζουμε με $L(\mathbf{x})$ τον block τριγωνικό Toeplitz πίνακα έχοντας για πρώτη block στήλη το \mathbf{x} και με $U(\mathbf{y}^T)$ τον block άνω τριγωνικό Toeplitz πίνακα έχοντας για πρώτη block γραμμή το \mathbf{y}^T , δηλαδή

$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & & & 0 \\ x_2 & x_1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ x_n & \dots & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$U(\mathbf{y}^T) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ & y_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & y_2 \\ 0 & & & y_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^T = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$$

Έστω $T_n = L(\mathbf{a})$, $\mathbf{a} = (a_{i-1})_{i=1, \dots, n}$ ένας $n \times n$ κάτω τριγωνικός Toeplitz πίνακας. Αφού T_n είναι ένα πολυώνυμο στο Z και $Z^k = 0$ για $k \geq n$, η κλάση των κάτω τριγωνικών Toeplitz πινάκων είναι κλειστή ως προς τον πολλαπλασιασμό. Εξάλλου, από το θεώρημα Cayley-Hamilton (Α.2) ο αντίστροφος ενός οποιουδήποτε αντιστρέψιμου πίνακα A μπορεί να γραφτεί σαν πολυώνυμο στο A , επομένως ο T_n^{-1} παραμένει κάτω τριγωνικός Toeplitz πίνακας και ο υπολογισμός του ισοδυναμεί με τον υπολογισμό των στοιχείων στην πρώτη στήλη του T_n^{-1} . Όμοια η κλάση των block τριγωνικών Toeplitz πινάκων είναι κλειστή ως προς τον πολλαπλασιασμό και την αντιστροφή πινάκων.

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι $n = 2h$, όπου h είναι ένας θετικός ακέραιος και T_n μία διαμέριση σε $h \times h$ blocks που γράφεται

$$T_n = \begin{bmatrix} T_h & 0 \\ S_h & T_h \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

όπου οι T_h, S_h είναι $h \times h$ Toeplitz πίνακες και ο T_h είναι κάτω τριγωνικός. Αν ο T_n είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο T_h είναι αντιστρέψιμος και

$$T_n^{-1} = \begin{bmatrix} T_h^{-1} & 0 \\ -T_h^{-1}S_h T_h^{-1} & T_h^{-1} \end{bmatrix}$$

Έτσι η πρώτη στήλη \mathbf{v}_n του T_n^{-1} δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{v}_n = T_n^{-1} \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_h \\ -T_h^{-1}S_h \mathbf{v}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_h \\ -L(\mathbf{v}_h)S_h \mathbf{v}_h \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

όπου $L(\mathbf{v}_h) = T_h^{-1}$ ο κάτω τριγωνικός Toeplitz πίνακας του οποίου η πρώτη στήλη είναι η \mathbf{v}_h .

Η ίδια σχέση ισχύει αν ο T_n είναι block τριγωνικός πίνακας. Σε αυτή την περίπτωση τα στοιχεία a_0, \dots, a_{n-1} αντικαθίστανται από $m \times m$ blocks A_0, \dots, A_{n-1} και το \mathbf{v}_n συμβολίζει την πρώτη block στήλη του T_n^{-1} .

Η αναπαράσταση (2.15) του \mathbf{v}_n οδηγεί σε έναν αναδρομικό αλγόριθμο (Αλγόριθμος 2.5) για τον υπολογισμό του, τον οποίο περιγράφουμε για block τριγωνικούς Toeplitz πίνακες, block μεγέθους $n = 2^k$, για θετικό ακέραιο k .

Αλγόριθμος 2.5 Αντιστροφή κάτω τριγωνικού block Toeplitz πίνακα.

ΕΙΣΟΔΟΣ: Ο θετικός ακέραιος k και τα $m \times m$ block στοιχεία A_0, \dots, A_{n-1} , $n = 2^k$, της πρώτης block στήλης του block κάτω τριγωνικού Toeplitz πίνακα T_n , όπου $\det A_0 \neq 0$.

ΕΞΟΔΟΣ: Την πρώτη block στήλη \mathbf{v}_n του T_n^{-1} .

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ:

1 Θέσε $\mathbf{v}_1 = A_0^{-1}$.

2 Για $i = 0, \dots, k-1$, δεδομένου \mathbf{v}_h , $h = 2^i$:

(α) Υπολόγισε τα γινόμενα block Toeplitz πίνακα-διανύσματος $\mathbf{w} = S_h \mathbf{v}_h$ και $\mathbf{u} = -L(\mathbf{v}_h)\mathbf{w}$.

(β) Θέσε $\mathbf{v}_{2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_h \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}$.

Ο υπολογισμός του block διανύσματος \mathbf{u} στο i -οστό βήμα του αλγορίθμου απαιτεί τον υπολογισμό δύο γινομένων ενός block Toeplitz πίνακα και ενός block διανύσματος. Εφόσον αυτό μπορεί να εκτελεστεί σε $O(2^i m^3 + i 2^i m^2)$ πράξεις, μέσω του αλγορίθμου 2.3, το συνολικό κόστος του αλγορίθμου 2.5 είναι $O(nm^3 + nm^2 \log n)$. Πιο συγκεκριμένα, αν η είσοδος είναι πραγματική, από την εκτίμηση της πολυπλοκότητας (2.12) με $p = m$, συμπεραίνουμε ότι τα όρια της πολυπλοκότητας του i -οστού σταδίου ανάγονται σε $2(3m^3 q + \frac{15}{2} m^2 q \log q + 2m^2 q)$ για $q = 2^{i+1}$. Εξάλλου σε αυτή την εκτίμηση της πολυπλοκότητας μετρήσαμε δύο φορές το κόστος υπολογισμού του DFT του διανύσματος \mathbf{v}_n (συμπληρωμένο με μηδενικά) το οποίο εμφανίζεται και στα δύο γινόμενα Toeplitz πίνακα-διανύσματος $S_n \mathbf{v}_n$ και $L(\mathbf{v}_n) \mathbf{w}$ (βλέπε βήμα 2 και 3 του αλγορίθμου 2.3). Λαμβάνοντας αυτό υπόψη, το όριο πολυπλοκότητας μειώνεται σε $\frac{25}{2} m^2 h \log(h) + 6m^3 h + 4m^2 h$.

Επομένως, αφού $\sum_{i=0}^{k-1} 2^{i+1} = 2(2^k - 1)$, το συνολικό κόστος είναι μικρότερο από

$$25m^2 n \log(2n) + (12m^3 + 8m^2)n \quad (2.16)$$

όπου έχουμε οριοθετήσει το $\log 2^i$ με $\log n$.

Το block τριγωνικό Toeplitz σύστημα $T_n \mathbf{x} = \mathbf{b}$ μπορεί να λυθεί σε $O(m^2 n \log n + m^3 n)$ πράξεις, υπολογίζοντας πρώτα τον αντίστροφο πίνακα T_n^{-1} , μέσω του αλγορίθμου 2.5 και έπειτα υπολογίζοντας το γινόμενο $T_n^{-1} \mathbf{b}$ μέσω του αλγορίθμου 2.3.

Εναλλακτικά, ο υπολογισμός της πρώτης block στήλης του αντίστροφου του T_n μπορεί να εκτελεστεί χρησιμοποιώντας την συνήθη προσέγγιση, δηλαδή αντιστρέφοντας το διαγώνιο block A_0 και εφαρμόζοντας αντικατάσταση προς τα εμπρός. Αυτό ισοδυναμεί με τον υπολογισμό $n(n+1)/2$ γινομένων πινάκων και $n(n-1)/2$ αθροισμάτων πινάκων. Το κόστος στην περίπτωση πραγματικής εισόδου είναι $n^2 m^3$ πράξεις, μέχρι τους όρους χαμηλότερης τάξης. Μία γραφική παράσταση της τελευταίας εκτίμησης κόστους σε σχέση με το όριο (2.16) ως συναρτήσεις του n , αναφέρεται στο Σχήμα (2.2) με $m = 10$.

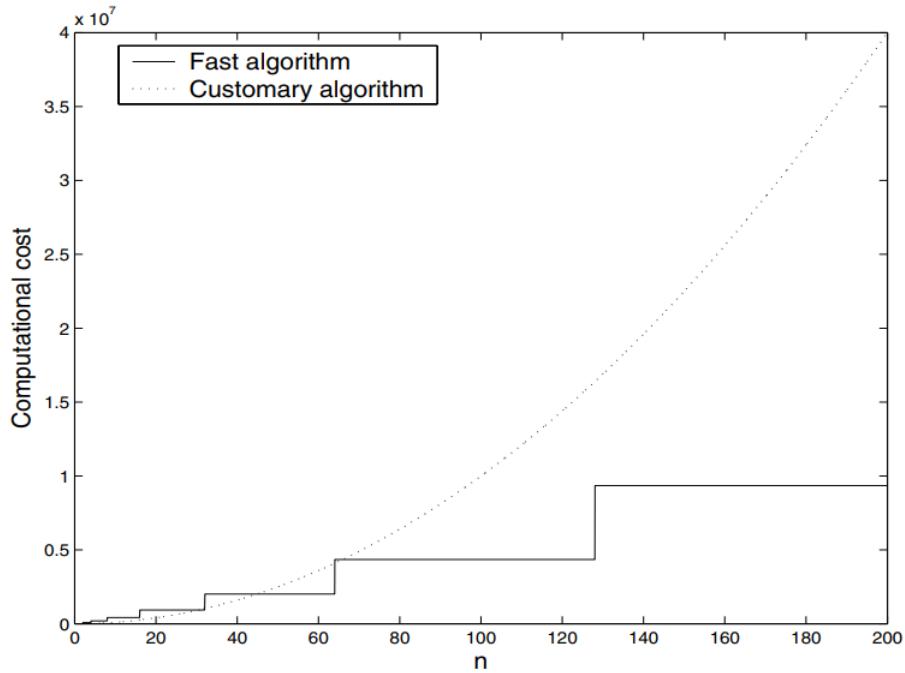
Αν ο T_n είναι άνω τριγωνικός Toeplitz, τότε το σύστημα $T_n \mathbf{x} = \mathbf{b}$ μπορεί να λυθεί σε $O(m^2 n \log n + m^3 n)$ πράξεις, υπολογίζοντας πρώτα τον αντίστροφο πίνακα T_n^{-1} μέσω του αλγορίθμου 2.6 και έπειτα υπολογίζοντας το γινόμενο $T_n^{-1} \mathbf{x}$ μέσω του αλγορίθμου 2.3.

Αν ο block Toeplitz πίνακας T_n δεν είναι block τριγωνικός, ο αντίστροφός του δεν είναι block Toeplitz, όπως δείχνει και το ακόλουθο παράδειγμα

Παράδειγμα 2.3.9. Έστω $n = 4$ και

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Έχουμε



Σχήμα 2.2: Υπολογιστικό κόστος αλγορίθμων για την αντιστροφή ενός block τριγωνικού Toeplitz πίνακα για $m = 10$ σαν συνάρτηση του n .

$$A^{-1} = \frac{1}{265} \begin{bmatrix} 65 & -50 & 5 & 5 \\ 12 & 56 & -48 & 5 \\ -14 & 23 & 56 & -50 \\ -3 & -14 & 12 & 65 \end{bmatrix}$$

Αλγόριθμος 2.6 Αντιστροφή άνω τριγωνικού block Toeplitz πίνακα.

ΕΙΣΟΔΟΣ: Ο θετικός ακέραιος k και τα $m \times m$ block στοιχεία A_0, \dots, A_{n-1} , $n = 2^k$, της πρώτης block γραμμής του block άνω τριγωνικού Toeplitz πίνακα T_n , όπου $\det A_0 \neq 0$.

ΕΞΟΔΟΣ: Την πρώτη block γραμμή \mathbf{v}_n^T του T_n^{-1} .

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ:

- 1 Θέσε $B_i = A_i^T$, $i = 0, \dots, n-1$ και $\mathbf{b} = (B_{i-1})_{i=1, \dots, n}$.
 - 2 Εφάρμοσε τον Αλγόριθμο 2.5 στον κάτω τριγωνικό block πίνακα $L(\mathbf{b}) = T_n^T$ και υπολόγισε την πρώτη block στήλη \mathbf{v}_n του $(T_n^T)^{-1}$.
 - 3 Εξήγαγε το block διάνυσμα γραμμής \mathbf{v}_n^T .
-

Κεφάλαιο 3

Παραδείγματα αλυσίδων Markov με εφαρμοσμένους πίνακες

3.1 Αλυσίδες Markov και "Φιδάκι"

Όλοι είναι εξοικειωμένοι με το επιτραπέζιο παιχνίδι "Φιδάκι" αλλά δεν είναι πολλοί αυτοί που γνωρίζουν ότι αποτελεί ένα πολύ ενδιαφέρον παράδειγμα αλυσίδας Markov. Ένας καλός τρόπος εισαγωγής στη θεωρία των αλυσίδων Markov είναι η επίλυση του προβλήματος "Πόσο διαρκεί ένα παιχνίδι στο Φιδάκι;". Οι μαθηματικοί, με τη βοήθεια των υπολογιστών, καθόρισαν την ακριβή μέση τιμή των κινήσεων που χρειάζονται για να τερματίσει το παιχνίδι όταν δύο άτομα παίζουν σε ένα ταμπλό.

Το κλασικό ταμπλό του παιχνιδιού περιέχει 100 τετράγωνα τα οποία είναι αριθμημένα διαδοχικά από το 1 έως το 100. Οι παίχτες ξεκινούν το παιχνίδι τοποθετώντας τα πιόνια τους στο τετράγωνο 0 και ο πρώτος παίχτης που φτάνει ή ξεπερνά το τετράγωνο 100, κερδίζει. Οι παίχτες παίζουν εναλλάξ, αλλά εφόσον οι κινήσεις του ενός είναι ανεξάρτητες από του άλλου, χρειάζεται να μελετήσουμε μόνο τον έναν. Ας τον ονομάσουμε παίχτη A.

Στο ταμπλό μας υπάρχουν 8 φίδια:

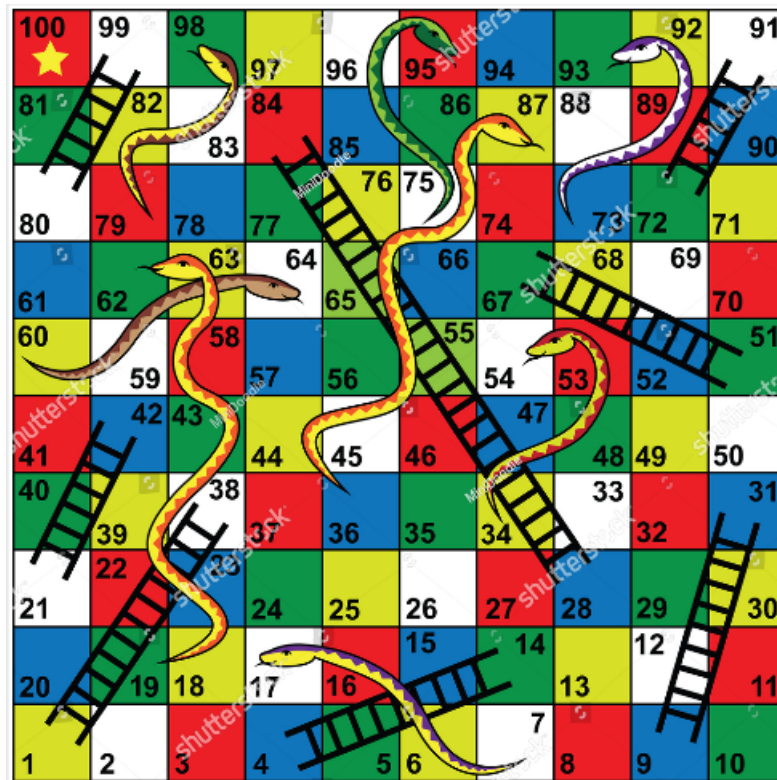
$$(17, 7), (54, 34), (62, 19), (64, 60), (87, 36), (93, 73), (95, 75), (98, 79)$$

δηλαδή το πρώτο φίδι έχει το κεφάλι του στο τετράγωνο 17 και την ουρά του στο τετράγωνο 7. Επίσης υπάρχουν 8 σκάλες:

$$(1, 38), (4, 14), (9, 31), (21, 42), (28, 84), (51, 67), (72, 91), (80, 99)$$

δηλαδή η πρώτη σκάλα έχει τα πόδια της στο τετράγωνο 1 και η κορυφή της είναι στο τετράγωνο 38.

Όταν έρθει η σειρά του A να παίξει, ρίχνει το ζάρι. Αν βρίσκεται στο τετράγωνο i και ο αριθμός που θα δείξει το ζάρι είναι ο d , τότε θα μετακινηθεί στο τετράγωνο $i + d$. Αν το τετράγωνο $i + d$ είναι τα πόδια μίας σκάλας, ο A αμέσως θα μετακινηθεί στο τετράγωνο που βρίσκεται η κορυφή της. Αντίστοιχα, αν το τετράγωνο $i + d$ είναι το κεφάλι ενός φιδιού τότε ο A θα μετακινηθεί αμέσως στο τετράγωνο που τελειώνει η ουρά του.



Σχήμα 3.1: Ταμπλό παιχνιδιού

Έχουμε λοιπόν ένα σύστημα με n καλά ορισμένες και ανεξάρτητες καταστάσεις E_1, \dots, E_{100} . Οι καταστάσεις στο "Φιδάκι" καθορίζονται από τη θέση των πιονιών. Εάν το σύστημά μας βρίσκεται σε μία κατάσταση E_i τότε μπορεί να μεταβεί σε μία άλλη κατάσταση, υπό την προϋπόθεση ότι ο παίχτης πρέπει να κάνει μία κίνηση. Μπορούμε να σκεφτούμε ότι οι μεταβάσεις γίνονται σε τακτά χρονικά διαστήματα και σχηματίζουν μία ακολουθία μεταβάσεων E_{i_1}, \dots, E_{i_n} . Συμβολίζουμε με p_{ij} την πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση E_i στην κατάσταση E_j σε μία μετάβαση. Το p_{ij} εξαρτάται μόνο από το i και το j άρα η ακολουθία E_{i_1}, \dots, E_{i_n} είναι μία αλυσίδα Markov.

Αν είμαστε σε μία οποιαδήποτε κατάσταση E_i η επόμενη μετάβαση θα πρέπει να μας οδηγήσει σε μία άλλη κατάσταση, έτσι

$$p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{in} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

Μπορούμε να αναλύσουμε την p_{ij} σε έναν τετραγωνικό πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι στοχαστικός, εφόσον δείξαμε στην (3.1) ότι το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του είναι ίσο με 1.

Αν δεν υπάρχουν φίδια και σκάλες στο ταμπλό μας τότε σε κάθε γύρο, θα πηγαίνουμε προς τα εμπρός για όσα τετράγωνα μας υποδεικνύει το ζάρι. Έτσι ο P θα είναι ένας 100×100 πίνακας P_0 . Η αρίθμηση των γραμμών του πίνακα είναι από το 0 έως το 99 και των στηλών από το 1 έως το 100. Δηλαδή, για παράδειγμα $p_{0,1} = \frac{1}{6}$, $p_{1,1} = 0$, $p_{98,100} = \frac{5}{6}$.

$$P_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{3}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αν (μ, ν) είναι ένα φίδι ή μία σκάλα, τότε δεν θα βρεθούμε ποτέ στο τετράγωνο μ στο τέλος ενός γύρου. Όταν θα βρεθούμε στο τετράγωνο μ θα μετακινηθούμε αυτόματα στο τετράγωνο ν .

Έτσι για να πάρουμε τον πίνακα μετάβασης P , για το ολοκληρωμένο ταμπλό, για οποιοδήποτε ζεύγος (μ, ν) προσαρμόζουμε στον P_0 τις δύο παρακάτω διαδικασίες

- (i) Προσθέτουμε την μ -οστή στήλη στην ν -οστή.
- (ii) Κάνουμε την μ -οστή στήλη μηδενική.

Έχουμε ήδη δει ότι το $p_{ij}^{(N)}$ είναι η πιθανότητα μετακίνησης από την κατάσταση E_i στην κατάσταση E_j σε N μεταβάσεις. Αν μετακινηθούμε από την E_i στην E_j σε 2 κινήσεις σημαίνει ότι βρεθήκαμε και σε μία ενδιάμεση κατάσταση E_k και η ακολουθία $E_i E_k E_j$ έχει πιθανότητα $p_{ik} p_{kj}$.

Σε αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε την πρόταση (1.2.4) των Chapman-Kolmogorov και την σχέση (1.4). Συγκεκριμένα για το παιχνίδι μας μας ενδιαφέρει το στοιχείο $p_{1,100}^{(N)}$ το οποίο είναι η πιθανότητα να τελειώσουμε το παιχνίδι σε N γύρους το πολύ. Δεν είναι απαραίτητο να βρούμε τον P^N για να υπολογίσουμε αυτό το στοιχείο, αντίθετα αν u είναι το $1 \times n$ διάνυσμα-γραμμής

$$u = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

τότε το $p_{1,100}^{(N)}$ είναι το τελευταίο στοιχείο στο διάνυσμα-γραμμής

$$uP^N \equiv (\dots((uP)P)\dots)P$$

Ένας τύπος για το $p_{1,100}^{(N)}$ είναι της μορφής

$$p_{1,100}^{(N)} = \sum_{r=1}^{100} c_r \lambda_r^N$$

όπου λ_r είναι οι χαρακτηριστικές ρίζες του P και c_r σταθερές. Στην περίπτωση μας $p_{1,100}^{(N)} \sim 1 - c\lambda^N$, για μεγάλα N , εφόσον $c_1 = \lambda_1 = 1$ και οι υπολογισμένες τιμές του $p_{1,100}^{(N)}$ δίνουν $c = 1,2514$, $\lambda = 0,9746$.

Η πιθανότητα $\pi_1^{(N)}$ για έναν παίχτη να τελειώσει το παιχνίδι, σε ακριβώς N γύρους δίνεται από τον τύπο

$$\pi_1^{(N)} = p_{1,100}^{(N)} - p_{1,100}^{(N-1)}$$

Ο μέσος αριθμός των γύρων που θα χρειαστεί ένας παίχτης είναι ίσος με

$$\sum_{r=1}^{\infty} r\pi_1^{(r)} \simeq \sum_{r=1}^{100} r\pi_1^{(r)} + \sum_{r=101}^{\infty} r(c\lambda^{r-1} - c\lambda^r) = 47,98$$

Η πιθανότητα $\pi_2^{(N)}$ όπου ένα παιχνίδι με δύο παίχτες θα κερδιθεί στον N -οστό γύρο είναι

$$\pi_2^{(N)} = \left(\sum_{i=N}^{\infty} \pi_1^{(i)} \right)^2 - \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} \pi_1^{(i)} \right)^2$$

η οποία δίνει έναν μέσο αριθμό των γύρων σε ένα παιχνίδι με 2 παίχτες

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} \pi_1^{(i)} \right)^2 = \sum_{k=1}^{100} (1 - p_{1,100}^{(k-1)})^2 + \sum_{k=101}^{\infty} (c\lambda^k)^2 = 27,44$$

Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι σε ένα παιχνίδι που έχουν γίνει παραπάνω από 10 κινήσεις ένας παίχτης είναι πιο πιθανόν να βρίσκεται στο τετράγωνο 16 παρά σε οποιοδήποτε άλλο τετράγωνο.

3.2 Παραγοντοποίηση Wiener-Hopf και επίλυση προβλημάτων ουρών

Μία ακόμα ενδιαφέρουσα εφαρμογή αφορά τους άπειρους Toeplitz πίνακες. Έστω $a(x)$, $b(x)$ πολυώνυμα βαθμού n , m με συντελεστές a_i , b_i , αντίστοιχα. Ορίζουμε το πολυώνυμο Laurent, δηλαδή ένα πολυώνυμο στο x και στο x^{-1} , που δίνεται από τον τύπο

$$c(x) = \sum_{i=-m}^n c_i x^i = a(x)b(x^{-1})$$

Τότε μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι ισχύει η ακόλουθη UL παραγοντοποίηση

$$\begin{bmatrix} c & \dots & c_n & & \\ \vdots & c_0 & \ddots & c_n & \\ c_{-m} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & \dots & a_n & & \\ & a_0 & \ddots & a_n & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_m & & & & \\ b_{m-1} & b_m & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ b_0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

όπου ο πρώτος παράγοντας U είναι ένας άπειρος άνω τριγωνικός Toeplitz πίνακας και ο δεύτερος παράγοντας L είναι ένας άπειρος κάτω τριγωνικός.

Αν τα μηδενικά των $a(x)$ και $b(x)$ βρίσκονται στον μοναδιαίο δίσκο ονομάζεται Wiener-Hopf παραγοντοποίηση. Οι Wiener-Hopf παραγοντοποιήσεις συναντώνται σε πολλές εφαρμογές.

Η παραγοντοποίηση Wiener-Hopf μπορεί να οριστεί για συναρτήσεις με τιμές-πίνακες $C(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i x^i$, $C_i \in \mathbb{C}^{m \times m}$, έτσι ώστε $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|C_i\| < \infty$ με την προϋπόθεση ότι $\det C(x) \neq 0$ για $|x| = 1$.

Μία κανονική Wiener-Hopf παραγοντοποίηση παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$C(x) = A(x)B(x^{-1}), \quad A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i A_i, \quad B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i x^i$$

όπου $A(x)$ και $B(x)$ έχουν μηδενικά στον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο.

Η αναπαράσταση του πίνακα παρέχει μία παραγοντοποίηση block UL του άπειρου block Toeplitz πίνακα (C_{j-i}) .

$$\begin{bmatrix} C_0 & C_1 & \dots & \\ C_{-1} & C_0 & C_1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \dots & \\ & A_0 & A_1 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 & & \\ B_{-1} & B_0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Ο υπολογισμός κανονικών Wiener-Hopf παραγοντοποιήσεων είναι θεμελιώδης στη λύση πολλών μοντέλων ουράς. Ένα παράδειγμα εφαρμογής σε μοντέλα ουράς δίνεται από το πρόβλημα της συντομότερης ουράς.

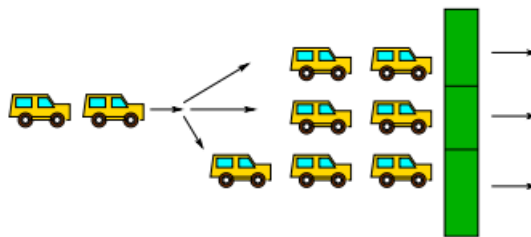
Πρόβλημα Υπάρχουν m πύλες σε έναν σταθμό διοδίων σε κάποιον αυτοκινητόδρομο. Τα αυτοκίνητα φθάνουν σε αυτόν, μπαίνουν σε μία γραμμή, πληρώνουν το αντίτιμο και συνεχίζουν την πορεία τους σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες

- κάθε στιγμή καταφθάνουν a αυτοκίνητα με γνωστή κατανομή πιθανότητας $p(a)$.
- κάθε αυτοκίνητο ακολουθεί τη συντομότερη γραμμή
- κάθε στιγμή ένα αυτοκίνητο φεύγει από κάθε πύλη

Το ερώτημα είναι πως θα προσδιοριστεί η πιθανότητα να υπάρχουν l αυτοκίνητα στην ουρά περιμένοντας να εξυπηρετηθούν. Το μοντέλο αυτό είναι κοντά στο σημαντικό μοντέλο που ορίζει το ασύρματο πρωτόκολλο IEEE 802.11 που χρησιμοποιείται στις ασύρματες συνδέσεις ενός οικιακού δικτύου.

Συμβολίζουμε με $p_{i,j}$ την πιθανότητα μετά από μία χρονική στιγμή το μήκος της ουράς να αλλάζει από i σε j και στη συνέχεια $p_{i,j} = a_{j-i}$ αν $i \geq m$. Δηλαδή αν υπάρχουν τουλάχιστον m αυτοκίνητα στην ουρά, όπου a_k η πιθανότητα να φθάσουν $k + m$ αυτοκίνητα έτσι ώστε $0 \leq a_k \leq 1$, $\sum_{k=-m}^{\infty} a_k = 1$, $a_k = 0$ για $k < -m$.

Το πρόβλημα μετατρέπεται σε ένα άπειρο πρόβλημα ιδιοτιμής του τύπου



Σχήμα 3.2: Το πρόβλημα της συντομότερης ουράς

$$\pi^T P = \pi^T$$

όπου $\pi \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα πιθανότητας. Δηλαδή $\sum \pi_i = 1, \pi_i \geq 0$, και ο $P = (p_{i,j})$ είναι σχεδόν Toeplitz σε γενικευμένη άνω Hessenberg μορφή.

$$P = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ & a_0 & a_1 & \ddots \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

όπου $b_{i,j}$ είναι κατάλληλες οριακές πιθανότητες. Ο πίνακας αυτός μπορεί να διαιρεθεί σε $m \times m$ blocks ως εξής

$$P = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & \dots & \dots \\ A_{-1} & A_0 & A_1 & \ddots & \ddots \\ 0 & A_{-1} & A_0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Αν αφαιρέσουμε την πρώτη block γραμμή και την πρώτη block στήλη του παραπάνω πίνακα, παίρνουμε τον block Hessenberg block Toeplitz πίνακα

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \dots & \dots \\ A_{-1} & A_0 & A_1 & \ddots & \ddots \\ 0 & A_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Η Wiener-Hopf παραγοντοποίηση του $\hat{P} - I$ μας επιτρέπει να λύσουμε εύκολα το πρόβλημα $\pi(P - I) = 0$, όπου το π με τη σειρά του χωρίζεται σε υποδιανύσματα $\pi^{(0)}, \pi^{(1)}, \dots$ μήκους m . Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι το $\pi^{(0)}$ είναι γνωστό, τότε ο υπολογισμός του $\pi^{(i)}$ για $i > 0$ ανάγεται στην επίλυση δύο block τριγωνικών Toeplitz συστημάτων. Ο υπολογισμός του $\pi^{(0)}$ μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας κατάλληλους τύπους.

Η Wiener-Hopf παραγοντοποίηση του $\hat{P} - I$ έχει την ακόλουθη μορφή

$$\hat{P} - I = \begin{bmatrix} U_0 & U_1 & \dots & & \\ & U_0 & & & \\ & & U_1 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & & & & \\ -G & I & & & \\ & -G & I & & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

όπου G η λύση της ακόλουθης εξίσωσης πινάκων

$$X = \sum_{i=-1}^{\infty} A_i X^i$$

έχοντας μη αρνητικές εισόδους και φασματική ακτίνα $\rho(x) = 1$.

Ένας τρόπος για να λύσουμε αυτή την εξίσωση είναι να αναγάγουμε το πρόβλημα σε άπειρο γραμμικό block Toeplitz σύστημα.

Παράρτημα Α

Θεώρημα Α.1. Ένας $m \times m$ πίνακας A είναι αναγώγιμος αν και μόνο αν υπάρχει ένας μεταθετικός πίνακας Π ώστε ο $\Pi^T A \Pi$ να έχει την μορφή

$$\Pi^T A \Pi = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}$$

όπου $A_{1,1}$ και $A_{2,2}$ είναι τετραγωνικά blocks.

Θεώρημα Α.2. (Caley-Hamilton)

Έστω $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \sum_{i=0}^n \lambda^i a_i$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $n \times n$ πίνακα A . Τότε

$$p(A) = \sum_{i=0}^n a_i A^i = 0$$

Επιπλέον, αν ο A είναι αντιστρέψιμος έχουμε

$$A^{-1} = -a_0^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} A^i$$

Θεώρημα Α.3. (Μονότονης σύγκλισης)

Θεωρούμε μία συνάρτηση f και μία αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών, μετρήσιμων συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $f_n(x)$ συγκλίνει στο $f(x)$ σχεδόν παντού. Τότε $\int f = \lim \int f_n$.

Ορισμός Α.4. Ένας πίνακας P είναι ανάγωγος εάν το κατευθυνόμενο γράφημά του είναι ισχυρά συνδεδεμένο, δηλαδή για οποιοδήποτε ζεύγος i, j υπάρχει μονοπάτι που συνδέει τον κόμβο i με τον κόμβο j .

Βιβλιογραφία

- [1] D. A. Bini, G. Latouche, and B. Meini, *Numerical methods for structured Markov chains*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, New York, 2005. Oxford Science Publications.
- [2] Δάρας Τ.Ι., Σύψας Π.Θ. *Στοχαστικές Ανελίξεις*. Θεωρία & εφαρμογές. Εκδόσεις Ζήτη. Σεπτέμβριος 2003. Θεσσαλονίκη.
- [3] Χρυσ αφίνου Ο. *Εισαγωγή στις στοχαστικές ανελίξεις Β' Έκδοση*. Με ασκήσεις και λύσεις. Εκδόσεις Σοφία. Σεπτέμβριος 2012.
- [4] Ανούσης Μ., Τσολομούτης Α., Φελουζής Β. (2014). *Πραγματική Ανάλυση*. Ιδιωτική Έκδοση, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών, Σάμος.
- [5] D. E. Daykin, J. E. Jeacocke and D. G. Neal. *Markov Chains and Snakes and Ladders*. Source: The Mathematical Gazette , Dec., 1967, Vol. 51, No. 378 (Dec., 1967), pp. 313-317. Published by: The Mathematical Association
- [6] Dario A. Bini *Matrix structures and applications Luminy, November, 3–7 2014*. September 30, 2014