ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ-ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

«CREDIBILITY»

Διπλωματική Εργασία για το Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών

Η παρούσα Εργασία εκπονήθηκε
ως μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων για την απόκτηση
του αντιστοίχου τίτλου σπουδών στην

Στατιστική και Αναλογιστικά-Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά

(Δεμίρη Νικολέτα)

Ημερομηνία:30/12/2022

ΣΑΜΟΣ

Συγγραφέας:Δεμίρη Νικολέτα

……………………………………………………………………………………………………

Επιβλέπων: Αναπληρωτής καθηγητής Χατζόπουλος Πέτρος

……………………………………………………………………………………………………

Μέλος Επιτροπής: Αναπληρωτής καθηγητής Ζήμερας Στέλιος

……………………………………………………………………………………………………

Μέλος Επιτροπής:Καθηγητής Καραγρηγορίου Αλέξανδρος

……………………………………………………………………………………………………

ΣΑΜΟΣ

COPYRIGHT

Δηλώνω υπεύθυνα ότι η διπλωματική εργασία έχει συνταχθεί από εμένα και κανένα μέρος της δεν είναι αντιγραμμένο από έντυπες ή ηλεκτρονικές πηγές, μετάφραση από ξενόγλωσσες πηγές και αναπαραγωγή από εργασίες άλλων ερευνητών ή φοιτητών. Όπου έχω βασιστεί σε ιδέες ή κείμενα άλλων, έχω προσπαθήσει με όλες μου τις δυνάμεις να το προσδιορίσω σαφώς μέσα από την καλή χρήση αναφορών ακολουθώντας την ακαδημαϊκή δεοντολογία.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι εκφράζουν τις επίσημες θέσεις του Πανεπιστημίου Αιγαίου.

Ονοματεπώνυμο: Δεμίρη Νικολέτα

Ημερομηνία : 30/12/2022

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ 6
ΕΙΣΑΓΩΓΗ 7
Κεφάλαιο 1 8
Κεφάλαιο 2 10
Κεφάλαιο 3 12
Κεφάλαιο 4 17
Συμπεράσματα 19
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 20

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «*Στατιστική και Αναλογιστικά - Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά*», του τμήματος Στατιστικής και Αναλογιστικών-Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου, κατά το ακαδημαϊκό έτος 2021-2023.

Αντικείμενο της παρούσας Μεταπτυχιακής Διπλωματικής Διατριβής είναι η εφαρμογή μοντέλων: Buhlmann-Straub, credibility regression model (του Hachemeister 1975), VaR καθώς και TVaR χρησιμοποιώντας τα στατιστικά στοιχεία της ΕΑΕΕ (για κάθε έτος 2014-2020 για το πλήθος των ασφαλισμένων οχημάτων, τον αριθμό ζημιών και το συνολικό ποσό ζημιών (ανά χρήση οχήματος), για Σωματικές βλάβες και Υλικές Ζημιές.

Η πραγματοποίηση της Διατριβής αυτής δεν θα γινόταν χωρίς την επίβλεψη, καθοδήγηση και βοήθεια του καθηγητή μου, κ. Χατζόπουλο, ο οποίος με εμπιστεύτηκε και μου ανέθεσε το θέμα και τον ευχαριστώ θερμά για αυτό. Οι εύστοχες παρατηρήσεις και συμβουλές του συνέβαλαν καθοριστικά στη συγγραφή της παρούσας Μεταπτυχιακής Διπλωματικής Διατριβής.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το αξίωμα της αξιοπιστίας δείχνει ότι δεν μπορούμε να έχουμε ομοιογενείς ομάδες κινδύνων, δεδομένου ότι κάποια χαρακτηριστικά που επιδρούν σε αυτή την ομοιογένεια, τα οποία είναι μη παρατηρήσιμα και αποτελούν τους υπολειπόμενους παράγοντες (residuals), οι οποίοι δεν συμπεριλαμβάνονται, διότι:

i. Ενδέχεται να είναι μη μετρήσιμη ποσότητα (π.χ. η οδική συμπεριφορά ενός ατόμου, ο βαθμός κινδυνολογίας)
ii. Ενδέχεται να είναι πρακτικά δύσκολο να μετρηθούν (π.χ. τα συνολικά χιλιόμετρα οδήγησης)
iii. Ενδέχεται να είναι ηθικά μη αποδεκτό (π.χ. το φύλο, η εθνικότητα)
iv. Ενδέχεται να μην δεν υπάρχει στατιστική επάρκεια (π.χ. ο κίνδυνος είναι σπάνιος, ή σε πρακτικές εφαρμογές μικρή στατιστική πληροφορία στις τάξεις κινδύνων), με συνέπεια την μη εφαρμογή του νόμου των μεγάλων αριθμών και της μέσης τιμής και άρα την αδυναμία κατάταξης του κινδύνου σε κάποια ομοιογενή ομάδα.

Γενικότερα η θεωρία του credibility έχει τις εξής υποθέσεις:

i. Τόσο ο ατομικός όσο και ο ομαδικός κίνδυνος έχουν το δικό τους προφίλ κινδύνου (risk profile). Είναι σύνηθες, η παρατηρήσιμη εμπειρία ζημιών να είναι περιοριστική για την χρήση του νόμου των μεγάλων αριθμών.
ii. Ο κάθε κίνδυνος αποτελεί κομμάτι ενός συνολικού κινδύνου με κοινά χαρακτηριστικά από συναφείς κινδύνους. Η συνολική εμπειρία ζημιών, συνήθως μας παρέχει επαρκή στατιστική πληροφορία για εφαρμογή του νόμου των μεγάλων αριθμών και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό ενός μέσου ασφαλίστρου (π.χ. manual rate)
iii. Είναι φανερό ότι και οι δύο παραπάνω πηγές από πληροφορίες θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν για μια δίκαιη τιμολόγηση.

Ο κύριος σκοπός της θεωρίας credibility είναι η κατασκευή ενός μαθηματικού εργαλείου όπου θα συνδυάσει τόσο την ατομική όσο και την ομαδική εμπειρία ζημιών.

Αναλυτικότερα, η θεωρία Αξιοπιστίας είναι ένας τρόπος στατιστικής εκτιμητικής (credibility estimate), ενός κινδύνου, έστω x . Ο εκτιμητής, έστω c , σύμφωνα με τη θεωρία της ακριβής αξιοπιστίας (exact credibility) είναι ένας γραμμικός συνδυασμός (σταθμικός μέσος), συμβιβάζοντας τις παρατηρήσεις από τα δεδομένα που πήραμε από παλιές μετρήσεις του συγκεκριμένου κινδύνου x με την ‘‘υποκειμενική’’ (ή prior) γνώμη του αναλυτή έτσι ώστε ο εκτιμητής να πάρει την μορφή:

$$c = z * R + (1-z) * H$$

όπου

• R : ο μέσος από τις παλιές παρατηρήσεις του κινδύνου x

• H : ο prior μέσος ή η υποκειμενική γνώμη (collateral data)

• z : ο παράγοντας αξιοπιστίας (credibility factor) $0 \le z \le 1$, είναι ένα μέτρο της βαρύτητας όπου ο ασφαλιστής θα δώσει τις παρατηρήσεις του συγκεκριμένου κινδύνου x . Όσο περνάνε τα χρόνια τόσο το z θα αυξάνει και θα τείνει στο 1, διότι περισσότερες παρατηρήσεις θα συσσωρεύονται για τον κίνδυνο x $\{z \to 1\}$

Αν και το c μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν μέσο για τον προσδιορισμό του καθαρού ασφαλίστρου, για έναν κίνδυνο x , συχνά το χρησιμοποιούμε (στη Θεωρία Credibility) και ως μέσο για τον προσδιορισμό της συχνότητας (ή ύψους) της ζημιάς για τον κίνδυνο x . Έτσι, το c μπορεί να είναι σταθμισμένος μέσος μεταξύ R - του μέσου της κλάσης του κινδύνου x που μας ενδιαφέρει και H - συναφών δεδομένων (δηλαδή δεδομένων από άλλες πηγές που θεωρούμε ότι είναι σχετικά) με τον κίνδυνο x .

Στο πρώτο κεφάλαιο παρατίθενται τρεις επιπλέον ορισμοί για την καλύτερη κατανόηση του όρου credibility καθώς και της εφαρμογής του. Στη συνέχεια στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται το credibility function με εφαρμογή των μοντέλων Buhlmann-Straub και credibility regression model του Hachemeister για δείγμα ασφαλισμένων οχημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε και θα αναλύσουμε μερικούς επιπλέον ορισμούς της θεωρίας credibility.

Ορισμός 1

Το “σωστό” ή “δίκαιο” ατομικό ασφάλιστρο (ή γενικότερα εκτίμηση) ενός κινδύνου, με προφίλ κινδύνου θ, σύμφωνα με τις αρχές της αξιοπιστίας, είναι:

$$\boldsymbol{p^{ind}(\theta) = \mu(\theta) \coloneqq E\left[x_{n+1}|\theta\right]}$$

Ωστόσο, στην ασφαλιστική πρακτική τα θ και μ(θ) είναι άγνωστα και έτσι το πρόβλημα τις τιμολόγησης μπορεί να διατυπωθεί ως ο προσδιορισμός της ποσότητας μ(θ), δηλαδή έχουμε να βρούμε μία εκτίμηση μ(Θ) για το μ(Θ).

Ορισμός 2

Το συλλογικό ασφάλιστρο ορίζεται ως ο αδέσμευτος μέσος του συλλογικού κινδύνου:

$$\mathbf{p^{coll} \equiv \mu_0 \coloneqq E[x_{n+1}] = E_\Theta\left[E\left(x_{n+1}|\Theta\right)\right] = \int_\Theta^n \mu(\theta) * dU(\theta) = E[\mu(\Theta)]}$$

Ορισμός 3

Ο Μπεϋζιανός εκτιμητής Αξιοπιστίας (ή βέλτιστος κατά μέσο τετραγωνικό σφάλμα εμπειρικός εκτιμητής σύμφωνα με την Μπεϋζιανή Credibility) ορίζεται ως:

$$\mathbf{p}^{\mathbf{Bayes}} = \boldsymbol{\mu}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}) \coloneqq \mathbf{E}\left[\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\Theta}) | \underline{\mathbf{x}}\right]$$

δηλαδή ορίζεται ως η αναμενόμενη τιμή της posterior κατανομής της $\mu(\theta)$, δεδομένου των παρατηρήσεων.

Η θεωρία Αξιοπιστίας μας παρέχει μία θεμελιώδη προσέγγιση για την τιμολόγηση ασφαλιστικών προϊόντων. Για πρώτη φορά στην αναλογιστική επιστήμη εισήχθη ως μέτρο αξιοπιστίας για την "προσάρτηση σε ένα συγκεκριμένο σώμα εμπειρίας για σκοπούς καθορισμού τιμών".

Σε περίπτωση όπου η αξιοπιστία ισούται με 0 (μηδέν) αυτό σημαίνει ότι τα δεδομένα είναι πολύ λίγα και ανεπαρκή για να εξάγουμε χρήσιμα και έγκυρα συμπεράσματα. Αν πάλι ισούται με τη μονάδα τότε τα δεδομένα είναι πλήρως αξιόπιστα για τον υπολογισμό ποσοστού.

Όταν πρόκειται να γίνει μία εκτίμηση με τη χρήση νέων δεδομένων, ένα ερώτημα στο οποίο απαντά η κλασσική θεωρία αξιοπιστίας είναι το πώς να συνδυάζεται εύλογα τα δεδομένα με βάση την "προηγούμενη εμπειρία" και όχι πλήρως αξιόπιστα για να αποφασιστούν τα ασφάλιστρα που θα χρεωθούν.

Εάν υπάρχουν αρκετά δεδομένα, επιτυγχάνεται η πλήρης αξιοπιστία, δηλαδή η πρόβλεψη θα βασίζεται στα πρόσφατα δεδομένα μόνο αναλογικά.

Διαφορετικά, αποδίδεται μόνο μερική αξιοπιστία στα δεδομένα και η πρόβλεψη εξαρτάται επίσης από το "χειροκίνητο ποσοστό".

Ένα βασικό πρόβλημα της κλασσικής αξιοπιστίας είναι ότι βασίζεται στην αυθαίρετη επιλογή της πιθανότητας κάλυψης και της παραμέτρου ακρίβειας!

Κεφάλαιο 2

Στην ασφαλιστική πρακτική, με βάση κάποιους a priori παράγοντες κινδύνου, οι κίνδυνοι έχουν ομαδοποιηθεί σε διάφορες τάξεις κινδύνου (tariff positions) και ένα ασφάλιστρο κινδύνου πρέπει να υπολογιστεί για κάθε μία από τις τάξεις αυτές.

Έστω ότι θέλουμε να τιμολογήσουμε σε χαρτοφυλάκιο ασφάλισης αυτοκινήτου αστικής ευθύνης. Τυπικά, για την i-τάξη κινδύνου (risk class), με i προφίλ κινδύνου, έχουμε τις ακόλουθες πληροφορίες :

s_{ij}: συνολικό κόστος ζημιών στο j-έτος

v_{ij}:έκθεση στον κίνδυνο, δηλαδή ο αριθμός των ετών στον κίνδυνο στο j-έτος(συμβόλαια που ήταν σε ισχύ για όλο το έτος μετρούν για μονάδα και για τα υπόλοιπα αναλογικά για το χρόνο που ήταν σε ισχύ). Γενικεύοντας, τα v_{ij} αναφέρονται ως όγκοι κινδύνου(risk volume)

$x_{ij} = \frac{s_{ij}}{v_{ij}}$: μέσο κόστος ζημιών ανά μονάδα όγκου κινδύνου στο j-έτος, το οποίο αντιπροσωπεύει και το τεχνικό ασφάλιστρο(claim or loss ratio)

N_{ij}: αριθμός ζημιών στο j- έτος

$F_{ij} = \frac{N_{ij}}{v_{ij}}$: συχνότητα ζημιών στο j- έτος ή ο αριθμητικός μέσος όρος του πλήθους ζημιών ανά μονάδα έκθεσης στον κίνδυνο.

$Y_{ij} = \frac{S_{ij}}{\mathrm{N}}$: μέσος όρος ζημιών στο j- έτος, ή ο αριθμητικός μέσος όρος του ύψους ζημιών

Ο σκοπός είναι ο υπολογισμός για την i-τάξη κινδύνου την αληθή τιμή του τεχνικού ασφαλίστρου για την επόμενη περίοδο. Αυτό μπορεί να γίνει απευθείας με βάση τις παρατηρήσεις ή έμμεσα αναλύοντας και υπολογίζοντας τις δύο συνιστώσες "συχνότητα ζημιών" και "μέσο ύψος ζημιών".

Ας υποθέσουε ότι κάθε κίνδυνος στην i-τάξη κινδύνου είναι σε ισχύ για ολόκληρο το έτος,έτσι ώστε ο όγκος κινδύνου του στο j-έτος,έστω v_{ij},να είναι ακέραιος αριθμός.Σε αυτήν την ειδική περίπτωση έχουμε ότι $x_{ij} = \frac{1}{v_{ij}} \sum_{v=1}^{v_{ij}} S_{ij}^{(v)}$, όπου $S_{ij}^{(v)}$ δηλώνει το συνολικό ύψος ζημιών του v-κινδύνου στην i-τάξη (στο j-έτος), με

$$E\left[S_{ij}{}^{v}|\theta_i\right]=\mu(\theta_i) \qquad \text{και} \qquad Var\left[S_{ij}{}^{v}|\theta_i\right]=\sigma^2(\theta_i)$$

Το $\mu(\theta_l)$ είναι η άγνωστη ποσότητα που θέλουμε να εκτιμήσουμε.

Επειδή, τα χ_{ij} είναι ο μέσος όρος των v_{ij}κινδύνων και οι v_{ij}κίνδυνοι μπορούν να θεωρηθούν ως (δεσμευμένοι)ανεξάρτητα μεταξύ τους τότε

$$E\left[X_{ij}|\theta_i\right]=\mathrm{E}\left[S_{ij}{}^{v}\right]=\mu(\theta_i) \qquad \text{και} \qquad Var\left[X_{ij}|\theta_i\right]=\frac{\sigma^2(\theta_i}{v_{ij}}$$

Είναι λογικό να μοντελοποιούμε τη δεσμευμένη διασπορά ως αντιστρόφως ανάλογη των γνωστών όγκων κινδύνων (εδώ τα ασφαλιστικά έτη) ακόμη και στην περίπτωση όπου τα έτη είναι μη ακέραιος αριθμός (συνήθης περίπτωση όπου κάποια συμβόλαια ήταν σε ισχύ για λιγότερο από ένα έτος). Αν θέλαμε να μοντελοποιήσουμε τη συχνότητα ζημιών ή το μέσο ύψος ζημιάς τότε έχουμε την ίδια συμπεριφορά μόνο που στην δεύτερη περίπτωση ο όγκος κινδύνου είναι ο παρατηρούμενος αριθμός ζημιώνN_{ij}. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το συνολικό τεχνικό ασφάλιστρο για την τάξη i -κινδύνου είναι το γινόμενο του όγκου κινδύνου (εδώ ο αριθμός των ετών στον κίνδυνο – η κεντρική έκθεση στον κίνδυνο) .

Ουσιαστικά, το συνολικό τεχνικό ασφάλιστρο βρίσκεται σε γραμμική σχέση με τον όγκο κινδύνου, χαρακτηριστικό το οποίο είναι σύνηθες και σε πολλές άλλες περιπτώσεις, Για παράδειγμα, το ασφάλιστρο στην ασφάλιση πυρός εξαρτάται από το ασφαλισμένο ποσό του κτηρίου και από το ασφαλισμένο ποσό των περιεχομένων του, στην ομαδική ασφάλιση ατυχήματος, το ασφάλιστρο εξαρτάται από τον αριθμό των εργαζομένων της εταιρείας. Έτσι, για τον υπολογισμό του τεχνικού ασφαλίστρου είναι σπουδαίο να θεωρήσουμε το μέσο κόστος ζημιών ανά μονάδα όγκου κινδύνου, δηλαδή να μοντελοποιήσουμε τις ποσότητες x_{ij}=$\frac{S_{ij}}{v_{ij}}$. Αυτά, καλούνται λόγοι ζημιών(claims ratios or loss ratios),έτσι ώστε για κάθε i-κίνδυνο να προσδιορίσουμε τον αντίστοιχο λόγο ζημιάς: μ(θ_i)= $E\left[X_{ij}|\theta_i\right]$.

Το δεύτερο μοντέλο της εμπειρικής μπεϋζιανής θεωρίας αξιοπιστίας (ή μοντέλο Buhlmann) αποτελεί μία γενίκευση του πρώτου μοντέλου, που εξετάσαμε, εφόσον λαμβάνει υπόψη τη μεταβολή της έκθεσης στον κίνδυνο (exposures) σε διαφορετικές χρονικές περιόδους. Έτσι, για παράδειγμα το μοντέλο αυτό θα λάβει υπόψη, σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, το διαφορετικό αριθμό συμβολαίων από έτος σε έτος, για το συγκεκριμένο κίνδυνο όπου θέλουμε να κάνουμε πρόγνωση για το επόμενο έτος, σε αντιπαράθεση με το πρώτο μοντέλο όπου σιωπηλά υποθέσαμε ότι η έκθεση στον κίνδυνο (π.χ αριθμός συμβολαίων) παραμένει περίπου σταθερός. Και εδώ θέλουμε να εκτιμήσουμε το καθαρό πραγματικό ασφάλιστρο ή συχνότητα ζημιάς ή μέσο ύψος ζημιάς, για μια κλάση ή ομάδα κινδύνου. Έστω, Y_1, Y_2, να δηλώνουν τα συνολικά ύψοι ζημιών ή συνολικό αριθμό ζημιών σε διαδοχικές περιόδους για την κλάση κινδύνου αυτή, και έστω P_1, P_2 η αντίστοιχη σειρά γνωστών και σταθερών ποσοτήτων να εκφράζουν την έκθεση στον κίνδυνο (για παράδειγμα το P_j μπορεί να δηλώνει τον αριθμό των συμβολαίων ή το χρόνο έκθεσης στον κίνδυνο ή τον αριθμό ζημιών) και θα τα αναφέρουμε ως όγκος κινδύνου (risk volume). Τότε με X_1,X_2,... , θα δηλώνουμε τις τυχαίες μεταβλητές που ορίζονται ως :

$$X_j=\frac{Y_j}{P_j}$$

Δηλαδή τα Xj κανονικοποιούν τα Yj εξαλοίφοντας την επίδραση των διαφορετικών κινδύνων (π.χ των διαφορετικών συμβολαίων από έτος σε έτος). Οπότε, γενικεύοντας, τα Xj εκφράζουν τον αριθμητικό μέσο ύψους (ή αριθμού) ζημιών ανά μονάδα έκθεσης στον κίνδυνο ή ισοδύναμα εκφράζει τον αριθμητικό μέσο ύψους (ή αριθμού) ζημιών ανά μονάδα όγκου κινδύνου.

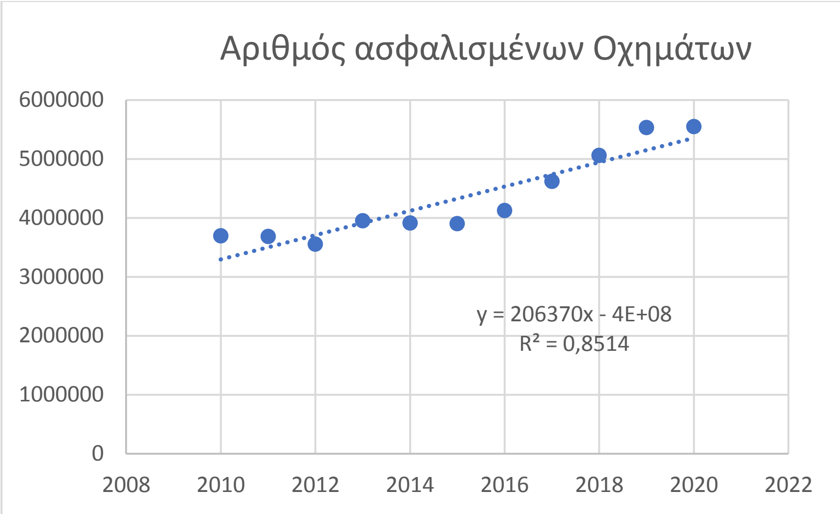
Κεφάλαιο 3

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η εμπειρική ανάλυση των εκτιμητών για κάθε κατηγορία οχήματος για το επόμενο έτος.Τα δεδομένα έχουν συλλεχθεί από την ιστοσελίδα Ένωσης Ασφαλιστών Εταιρειών Ελλάδος, και αφορούν δώδεκα (12) κατηγορίες οχημάτων όπου αναφέρονται τα εξής:

Το πλήθος των ασφαλισμένων οχημάτων ανα κατηγορία παρουσιάζεται στον 1^{o} πίνακα ανα έτος και ακολούθως στο αντίστοιχο διάγραμμα 1.

1ος ΠΙΝΑΚΑΣ

ΕΤΟΣ	ΑΡ.ΑΣΦ.ΟΧΗΜ.
2007	
2008	
2009	
2010	3696589
2011	3683057
2012	3554390
2013	3946823
2014	3913139
2015	3900943
2016	4120863
2017	4620570
2018	5056924
2019	5529558
2020	5546970



1ο Διάγραμμα

Πρακτικά, απαιτείται ο υπολογισμός για την κάθε κατηγορία οχήματος, για το επόμενο έτος:

α. του «εκτιμητή συχνότητας»,

β. του «εκτιμητή μέσου κόστους ζημιών»

γ. Του «εκτιμητή λόγου ζημιών».

Για τους παραπάνω υπολογισμούς θα εφαρμόσουμε τις μεθόδους Buhlmann-Straub και credibility regression model του Hachemeister.

Αρχικά, θα δώσουμε, πρώτα, μια θεωρητική προσέγγιση των υπό μελέτη εκτιμητών. Παρακάτω παρουσιάζονται οι ορισμοί τους:

- $x_{ij} = \frac{S_{ij}}{v_{ij}}$: μέσο κόστος ζημιών ανά μονάδα έκθεσης στον κίνδυνο στο j-έτος (τεχνικό ασφάλιστρο)
- $F_{ij} = \frac{N_{ij}}{v_{ij}}$: συχνότητα ζημιών ανά μονάδα όγκου κινδύνου στο j- έτος, όπου N_{ij}: συνολικός αριθμός ζημιών στο j-έτος
- $Y_{ij} = \frac{S_{ij}}{N_{ij}}$: μέσο ύψος ζημιών στο j-έτος.

Υπολογίζουμε τα παραπάνω για τα έτη 2014-2020, καθώς, επίσης, και τα βάρη (weights) τα οποία είναι ο αριθμός ζημιών ανά έτος για κάθε κατηγορία αυτοκινήτου για τα έτη 2014-2020. Τα δεδομένα που προκύπτουν τα εκχωρούμε σε μεταβλητή, στην R, με το όνομα ‘dedomena’.

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τον εκτιμητή συχνότητας, δηλαδή το F_{ij} για Σωματικές βλάβες και τις υλικές ζημιές.Με την εντολή cm() έγινε η προσαρμογή του μοντέλου Buhlmann Straub και με την εντολή summary() πήραμε τα ζητούμενα αποτελέσματα.

Για τα Επιβατηγά ΙΧ έχουμε ότι ο εκτιμητής συχνότητας για το έτος 2021 είναι 0.00260322415 για τις σωματικές βλάβες.Ο αντίστοιχος εκτιμητής για τις υλικές ζημιές είναι 0.06814082.

Υπολογίζουμε, επίσης, και το x_{ij} για τις σωματικές βλάβες και τις υλικές ζημιές.

- Για τις σωματικές βλάβες ο εκτιμητής μέσου κόστους ζημιών για το έτος 2021 είναι 15145.68.
- Για τις υλικές ζημιές ο εκτιμητής μέσου κόστους ζημιών για το έτος 2021 είναι 963.2997.

Τέλος, υπολογίζουμε και τον εκτιμητή λόγου ζημιών, Y_{ij}, για τις δυο κατηγορίες.

Προκύπτει,λοιπόν, ότι:

- Για τις σωματικές βλάβες ο εκτιμητής λόγου ζημιών για το έτος 2021 είναι 39.42760.
- Για τις υλικές ζημιές ο εκτιμητής λόγου ζημιών για το έτος 2021 είναι 66.06006.

Χρησιμοποιούμε πακέτο tseries για να ελέγξουμε αν οι χρονοσειρές «εκτιμητής συχνότητας ανα έτος», «εκτιμητής μέσου κόστους ζημιών ανα έτος» και «εκτιμητής λόγου ζημιών ανά έτος» είναι στάσιμες. Τις παραπάνω χρονοσειρές τις καταχωρούμε αντίστοιχα στις μεταβλητές TSERIES1, TSERIES2, TSERIES 3. Ο έλεγχος αυτός στηρίζεται στις εξής υποθέσεις:

H0: όχι στάσιμη vs Ha: στάσιμη

Παρακάτω, παραθέτονται τα output από τα αποτελέσματα του τεστ για τις 3 χρονοσειρές:

```
> adf.test(TSERIES1)

        Augmented Dickey-Fuller Test

data:  TSERIES1
Dickey-Fuller = -2.3008, Lag order = 2, p-value = 0.4578
alternative hypothesis: stationary

> adf.test(TSERIES2)

        Augmented Dickey-Fuller Test

data:  TSERIES2
Dickey-Fuller = -2.0291, Lag order = 2, p-value = 0.5613
alternative hypothesis: stationary

> adf.test(TSERIES3)

        Augmented Dickey-Fuller Test

data:  TSERIES3
Dickey-Fuller = -2.3174, Lag order = 2, p-value = 0.4515
alternative hypothesis: stationary
```

Παρατηρούμε ότι και στις 3 περιπτώσεις το pvalue είναι μεγαλυτερο του επιπέδου εμπιστοσύνης μας, 0.05. Συνεπώς δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση και ,επομένως, και οι τρεις χρονοσειρές είναι μη στάσιμες.

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τους τρείς εκτιμητές ,ξανά, χρησιμοποιώντας, όμως, τώρα το μοντέλο credibility του Hachemeister. Στο συγκεκριμένο μοντέλο θα χρησιμοποιήσουμε την εντολή cm() για να προσαρμόσουμε το μοντέλο στα δεδομένα.

Για τον εκτιμητή συχνότητας έχουμε ότι:

- Για τις σωματικές βλάβες , ο εκτιμητής συχνότητας ζημιών για το έτος 2021 είναι 0.00058853.
- Για τις υλικές ζημιές ο εκτιμητής συχνότητας ζημιών για το έτος 2021 είναι 0.06053945.

Για τον εκτιμητή μέσου κόστους ζημιών για το έτος 2021 έχουμε ότι:

- Για τις σωματικές βλάβες, ο εκτιμητής μέσου κόστους ζημιών για το έτος 2021 είναι 6979.707.
- Για τις υλικές ζημιές ο εκτιμητής μέσου κόστους ζημιών για το έτος 2021 είναι 571.5696.

Για τον εκτιμητή του λόγου ζημιών για το έτος 2021 έχουμε ότι:

- Για τις σωματικές βλάβες, ο εκτιμητής του λόγου ζημιών για το έτος 2021 είναι 4.107836.
- Για υλικές ζημιές,ο εκτιμητής του λόγου ζημιών για το έτος 2021 είναι 36.47543.

Το μοντέλο παλινδρόμησης αξιοπιστίας του Hachemeister (1975) είναι μια γενίκευση του μοντέλου Bühlmann–Straub. Εάν τα δεδομένα δείχνουν συστηματική τάση, το τελευταίο μοντέλο συνήθως υποεκτιμά ή υπερεκτιμά το πραγματικό ασφάλιστρο μιας οντότητας. Η ιδέα του Hachemeister ήταν να προσαρμόσει στα δεδομένα ένα μοντέλο παλινδρόμησης όπου οι παράμετροι είναι ένας σταθμισμένος μέσος όρος αξιοπιστίας της παλινδρόμησης μιας οντότητας τις παραμέτρους και τις παραμέτρους της ομάδας. Έτσι γενικότερα, συγκρίνοντας τα δύο μοντέλα, παρατηρούμε πως το credit regression model του Hachemeister model παράγει περισσότερο συντηρητικές εκτιμήσεις συγκριτικά με το Bühlmann–Straub μοντέλο. Αυτό το παρατηρούμε να ισχύει ανεξαρτήτου κατηγορίας οχημάτων.

Κεφάλαιο 4

Παρακάτω βλέπουμε την προσαρμογή της κατανομής Lomax(α, λ) στον εκτιμητή του λόγου ζημιών που αφορά την κάλυψη σωματικών βλαβών.

Αρχικά, θα προσδιορίσουμε θεωρητικά την προαναφερθείσα κατανομή.

Η κατανομή Lomax(α, λ), υπό συνθήκες την βλέπουμε ως κατανομή Pareto τύπου ΙΙ, είναι μια κατανομή πιθανοτήτων βαριάς ουράς που χρησιμοποιείται ευρέως στους τομείς των επιχειρήσεων, των οικονομικών, της αναλογιστικής επιστήμης κτλ. Η κατανομή αυτή παρουσιάζει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

Α.σ.κ. : $1 - [1 + \frac{x}{\lambda}]^{-\alpha}$

Σ.π.π. : $\frac{\alpha}{\lambda}[1 + \frac{x}{\lambda}]^{-(\alpha+1)}$

Παράμετροι: α>0 (shape), λ>0 (scale)

Μέση τιμή: $\frac{\lambda}{\alpha-1}$, $\alpha > 1$

- Διακύμανση : $\frac{\lambda^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$, $\alpha > 2$

Καταχωρούμε τα δεδομένα μας, που αφορούν τις σωματικές βλάβες, στη μεταβλητή z και κάνουμε προσαρμογή του μοντέλου Hachemeister για να βρούμε, έπειτα, τα credibility premiums. Οι κατηγορίες των οχημάτων είναι 12. Ο μέσος της Lomax εδώ θα είναι ο δειγματικός μέσος των δεδομένων που βρήκαμε, όπως φαίνεται παρακάτω με την εντολή mean(), και η διασπορά θα είναι ίση με αυτή των παρατηρούμενων τιμών. Το output των αποτελεσμάτων της προσαρμογής φαίνεται παρακάτω:

```
> as.data.frame(x)
              x
1  0.0001035941
2  0.0022194393
3  0.0088479998
4  0.0011895622
5  0.0142998738
6  0.0017588048
7  0.0091540859
8  0.0192125382
9  0.0012914893
10 0.0020883274
11 0.0049843617
12 0.0240748906
```

Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία αναλύσαμε εκτενώς το ζήτημα της αξιοπιστίας, με την διεθνή ορολογία "Credibility". Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση δεδομένων είναι η R.Αντλήθηκαν επίσης στοιχεία από την ΕΑΕΕ, για τα έτη 2014-2020, τα οποία αφορούν 12 κατηγορίες αυτοκινήτων και αναφέρονται τα εξής: πλήθος ασφαλισμένων οχημάτων ανα κατηγορία, αριθμός ζημιών και συνολικό ποσό ζημιών.

Εφαρμόστηκαν οι μεθόδοι Buhlmann- Straub και credibility regression model του Hachemeister και εκτιμήθηκε ο εκτιμητής συχνότητας, ο εκτιμητής μέσου κόστους ζημιών και ο εκτιμητής λόγου ζημιών.

Τέλος, λαμβάνοντας υπόψιν όλα τα παραπάνω καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:

- Το μοντέλο παλινδρόμησης αξιοπιστίας του Hachemeister (1975) είναι μια γενίκευση του μοντέλου Bühlmann–Straub.
- Το μοντέλο Hachemeister υποεκτιμά ή υπερεκτιμά το ασφάλιστρο, όταν έχουμε τάση στα δεδομένα
- Συγκρίνοντας τα δύο μοντέλα, παρατηρούμε πως το credit regression model του Hachemeister model παράγει περισσότερο συντηρητικές εκτιμήσεις συγκριτικά με το Bühlmann–Straub μοντέλο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Σημειώσεις μαθήματος ‘Αναλογιστικά Μαθηματικά’ 2021-2022, Π. Χατζόπουλος
2. Μεταπτυχιακές εργασίες του μαθήματος ‘Αναλογιστικά μαθηματικά’.
3. ‘NONHOMOGENEUS GENERALISATIONS OF POISSON PROCESS IN THE MODELING OF RANDOM PROCESSES RELATED TO ROAD ACCIDENTS’, Franciszek Grabski
4. ‘NONHOMOGENEOUS STOCHASTIC PROCESSES CONNECTED TO POISSON PROCESS ‘, Franciszek Grabski
5. toolbox actuar/http://www.safetoolboxes.com/sfeatures.html
6. D.G. Hart και άλλοι , Actuarial Practice of General Insurance, 1996, Institute of Actuaries of Australia
7. B. Sundt, An Introduction to Nonlife Insurance Mathematics, 1991, VVW Karlsruhe