

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΥΡΕΣΗΣ ΣΟΛΙΤΟΝΙΩΝ

Διπλωματική Εργασία

ΔΕΒΕΤΖΑΚΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ



Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών

Επιβλέπων καθηγητής: Βασίλειος Κουκουλογιάννης

Περιεχόμενα

1 Τι είναι το Σολιτονιο	5
2 Εισαγωγικές έννοιες	7
2.1 Μερικές διαφορικές εξισώσεις	8
2.2 Σύνολα.	10
2.3 Ορθογώνιες συναρτήσεις.	10
2.4 Ο χώρος των ιδιοσυναρτήσεων.	10
2.5 Περιοδική συνάρτηση.	11
3 Σειρές και μετασχηματισμός Fourier	12
3.1 Σειρές Fourier.	13
3.1.1 Μιγαδική σειρά Fourier.	15
3.2 Διακριτοποίηση Πλέγματος	17
3.2.1 Διακριτοποίηση της Σειράς Fourier.	18
3.3 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier	19
3.3.1 Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier	20
3.3.2 Ιδιότητες Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier	21
3.3.3 Ο Κώδικας του διακριτού μετασχηματισμού Fourier στο Matlab	22
3.4 Interpolant	25
4 Οι εξισώσεις NLS και KDV	27
4.1 Μη γραμμική εξίσωση Schrödinger	27
4.2 Η εξίσωση Korteweg-de Vries	30
5 Αριθμητικοί μέθοδοι υπολογισμού σολιτονίων.	32
5.1 Μέθοδος Petviashvili	34
5.1.1 Petviashvili στην μη γραμμική NLS	34
5.1.2 Η εξίσωση KDV με την μέθοδο Petviashvili	42
5.2 Μέθοδος ITEM	45
5.2.1 Η μη γραμμική NLS με την μέθοδο ITEM	45

6	Αριθμητικές Μέθοδοι ολοκλήρωσης για μη γραμμικές κυματικές εξισώσεις	55
6.1	Αριθμητικές Μέθοδοι για Προσομοιώσεις Χρονικής Εξέλιξης	56
6.2	Μέθοδος των γραμμών	57
6.3	Ψευδοφασματική Μέθοδος	65
6.3.1	Ψευδοφασματική Μέθοδος - Εξίσωση NLS	65
6.3.2	Η RK στην ψευδοφασματική μέθοδο	70
6.3.3	Ψευτοφασματική μέθοδος - Εξίσωση KDV	72
7	Συμπεράσματα	75

Πρόλογος

Η εργασία αυτή πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών Πανεπιστημίου Αιγαίου, τμήμα μαθηματικό. Η ολοκλήρωση της έγινε κάτω από την καθοδήγηση, κ. Β. Κουκουλογιάννη. Από τη θέση αυτή θα ήθελα να του εκφράσω τις πιο θερμές ευχαριστίες μου για την ουσιαστική βοήθεια και συμβολή τόσο στην περάτωση της εργασίας αυτής όσο και στη συνεχή στήριξη που μου προσέφερε.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή μελετώνται και παρουσιάζονται κάποιες αριθμητικές μέθοδοι με τις οποίες επιτυγχάνεται η εύρεση αρχικών συνθηκών για λύσεις μη γραμμικών κυμάτων και ειδικότερα σολιτονίων καθώς και μέθοδοι για την μελέτη της χρονικής τους εξέλιξης. Αρχικά γίνεται μια αναφορά σε κάποια σημαντικά εργαλεία τα οποία είτε είναι αναγκαία για να μπορούν να οριστούν κάποιες έννοιες είτε είναι μέρος των μεθόδων που χρησιμοποιούνται. Ένα από αυτά τα εργαλεία είναι ο ευθύς και αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier ο οποίος αναλύεται περισσότερο από τα υπόλοιπα. Παρακάτω παρουσιάζονται οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται για την μελέτη των μεθόδων, η μη γραμμική εξίσωση schrodinger (NLS) και η εξίσωση Korteweg-de Vries (KDV). Στη συνέχεια εισαγάγουμε την έννοια του σολιτονίου και αναλύονται δύο σημαντικές αριθμητικές μέθοδοι για την εύρεση αρχικών συνθηκών, η μέθοδος του Petviashvili και η Μέθοδος φανταστικού χρόνου (ITEM). Ακολουθούν οι αριθμητικές μέθοδοι ολοκλήρωσης μη γραμμικών κυμάτων οι οποίες είναι η Μέθοδος των γραμμών αλλά και η Ψευτοφασματική μέθοδος. Τέλος μετά από κάθε μέθοδο και εξίσωση παρουσιάζονται οι κώδικες καθώς και το γραφικό αποτέλεσμα που προκύπτει.

Κεφάλαιο 1

Τι είναι το Σολιτονιο

Σύμφωνα με την Κυματική το σολιτόνιο είναι ένα κύμα ή μια ομάδα κυμάτων που συνδυάζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματισθεί ένα ενιαίο σύνθετο κύμα που μπορεί να διαδοθεί σε μεγάλες αποστάσεις χωρίς να διαχωρισθεί ή να αλλοιωθεί η αρχική μορφή του. Το σολιτόνιο μπορεί να εμφανισθεί σε διάφορες μορφές κυμάτων όπως ηχητικά και φωτεινά κύματα. Ένα χαρακτηριστικό των σολιτονίων είναι ότι μπορούν να αλληλεπιδράσουν από άλλα σολιτόνια χωρίς να χάσουν το αρχικό τους σχήμα. Επιπλέον δεν χάνουν την ενέργεια τους, δεν διαχωρίζονται σε μικρότερες κυματικές μορφές, δεν εξασθενούν αφρίζοντας. Το μεγαλύτερο σολιτόνιο είναι το τσουνάμι το οποίο λανθασμένα χαρακτηρίζεται ως παλιρροιακό κύμα. Το σολιτόνιο συνεχίζει την πορεία του μέχρι να προσκρούσει σε ηπειρωτική υφαλοκρηπίδα όπου εξαιτίας του μεγάλου μεγέθους του προκαλεί καταστροφικές συνέπειες.

Ο όρος σολιτόνιο προήλθε από την λατινική λέξη *solitarius* – *solitary*. Εδώ και 40 χρόνια, η έρευνα για τα σολιτόνια έχει διεξαχθεί σε διάφορους τομείς όπως η φυσική σωματιδίων, η μοριακή βιολογία, η κβαντική μηχανική, η γεωλογία, η μετεωρολογία, η ωκεανογραφία, η αστροφυσική και η κοσμολογία.

Η ανακάλυψη των σολιτονίων είναι μία από τις πιο απολαυστικές ιστορίες της επιστήμης και προέκυψε από μια τυχαία παρατήρηση που έκανε ο Σκωτσέζος μηχανικός Τζον Σκοτ Ράσελ τον Αύγουστο του 1834 όταν έτυχε να παρακολουθεί μια φορτηγίδα που μετακινούσαν άλογα κατά μήκος ενός καναλιού. Όταν το καλώδιο έσπασε και η φορτηγίδα ξαφνικά σταμάτησε, ο Ράσελ παρατήρησε έκπληκτος έναν σχηματισμό σαν σαμαράκι στο νερό, το οποίο περιέγραψε ως εξής: «Μια μάζα νερού μετακινήθηκε προς τα εμπρός με μεγάλη ταχύτητα, παίρνοντας τη μορφή ενός μεγάλου μεμονωμένου κύματος (*solitary wave*), ενός στρογγυλού, λείου και καλοσχηματισμένου υδάτινου όγκου, ο οποίος συνέχισε την πορεία του κατά μήκος του καναλιού χωρίς προφανώς να αλλάξει σχήμα ή να μειωθεί η ταχύτητά του. Το ακολούθησα πάνω

στη ράχη του αλόγου μου και το ξεπέρασα ενόσω ακόμα κινούνταν με ρυθμό περίπου δεκατριών με δεκαπέντε χιλιομέτρων την ώρα, διατηρώντας το αρχικό του σχήμα που είχε μήκος περίπου 9 μέτρα και τριάντα με πενήντα εκατοστά ύψος. Το ύψος του σταδιακά μειώθηκε και ύστερα από μια καταδίωξη ενάμισι με τριών χιλιομέτρων το έχασα στις στροφές του καναλιού».

Με λίγα λόγια ο J. S. Russell παρατήρησε ότι ο κυματισμός ήταν εντοπισμένος, σταθερός σε πλάτος και μπορούσε να διατηρηθεί για μεγάλες αποστάσεις. Η δε ταχύτητα εξαρτιόταν από το πλάτος και το βάθος του νερού, ενώ οι κυματισμοί δεν συσσωματώνονταν (σε αντίθεση από τα συνήθη κύματα).

Ο Ράσελ στη συνέχεια πραγματοποίησε πειράματα σε μια δεξαμενή κυμάτων στο σπίτι του για να χαρακτηρίσει αυτά τα μυστηριώδη σολιτόνια (που ονόμασε κύμα μετατόπισης), βρίσκοντας ότι η ταχύτητα εξαρτάται από το μέγεθος του σολιτονίου αλλά δεν κατάφερε να βρει την εξίσωση κίνησης. Οι ιδιότητες των κυμάτων σολιτονικού τύπου έγιναν πλήρως κατανοητές με την εφαρμογή της μεθόδου αντίστροφης σκέδασης η οποία αναπτύχθηκε τη δεκαετία του 1960.

Ο όρος σολιτόνιο εμφανίστηκε το 1965 για τη σωματιδιακή φύση των κυμάτων τα οποία παρέμεναν ανέπαφα ακόμα και μετά από τις συγκρούσεις μεταξύ τους. Η εξάρτηση του δείκτη διάθλασης από την ένταση του κύματος οδηγεί σε φαινόμενα χωρικής αυτοεστίασης ή χωρικής απόκλισης και χρονικής αυτοδιαμόρφωσης φάσης. Αυτά τα 2 φαινόμενα έχουν σαν αποτέλεσμα την δημιουργία σολιτονίων.

Από τότε τα σολιτόνια στη φυσική κερδίζουν ολοένα και αυξανόμενο ενδιαφέρον. Τον 20ό αιώνα τα σολιτόνια έγιναν το κλειδί στην κατανόηση του πώς λειτουργεί η μη-γραμμικότητα στη φύση. Η βασικότερη αιτία για αυτό είναι η συμπεριφορά των σολιτονίων ως σωματίδια και η παράδοξη φύση τους ως «ρυθμοί» των μη γραμμικών συστημάτων.

Δύο σολιτόνια διαφορετικού μεγέθους (και κατά συνέπεια διαφορετικής ταχύτητας) μπορούν να περάσουν το ένα μέσα από το άλλο, να αναδυθούν και να συνεχίσουν την κίνησή τους. Η συμπεριφορά των σολιτονίων έχει επίσης παρατηρηθεί και σε άλλα συστήματα, όπως το πλάσμα και η άμμος που ρέει. Για παράδειγμα, οι εγκάρσιες θίνες, που αποτελούνται από όγκους άμμου σε σχήμα τόξου, έχουν ειπωθεί να «περνούν» ο ένας μέσα από τον άλλο. Η Μεγάλη Κόκκινη Κηλίδα του Δία μπορεί επίσης να είναι ένα είδος σολιτονίου.

Σήμερα, τα σολιτόνια λαμβάνονται υπ' όψιν σε πλήθος φαινομένων, από τη μετάδοση των νευρικών σημάτων έως τις επικοινωνίες που βασίζονται στα σολιτόνια στις οπτικές ίνες. Το 2008, αναφέρθηκε το πρώτο γνωστό μη μεταβαλλόμενο σολιτόνιο στο εξώτερο διάστημα που μετακινούνταν μέσα από το ιονισμένο αέριο που περιβάλλει τη Γη με ταχύτητα περίπου 8 χιλιομέτρων το δευτερόλεπτο.

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγικές έννοιες

Οι περιοδικές συναρτήσεις συναντώνται συχνά σε διάφορα προβλήματα εφαρμογών. Η προσπάθεια να εκφραστούν οι συναρτήσεις αυτές με όρους απλώς περιοδικών συναρτήσεων, όπως είναι οι συναρτήσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου, έχει μεγάλη σημασία στη μελέτη των συναρτήσεων αυτών, στη λύση διάφορων μορφών διαφορικών εξισώσεων, σε προβλήματα προσεγγίσεων κ.λπ. Αποδεικνύεται στα Μαθηματικά ότι στην περίπτωση των περιοδικών συναρτήσεων η προσέγγιση αυτή είναι η καλύτερη δυνατή, δηλαδή η οποιαδήποτε άλλης μορφής προσέγγιση της συνάρτησης έχει μεγαλύτερο σφάλμα. Η υλοποίηση της προσπάθειας αυτής, που ξεκίνησε από τον Fourier, συνεχίζεται ακόμα και σήμερα, συμβάλλοντας στη λύση πολλών προβλημάτων από τις παραπάνω περιπτώσεις.

Για την καλύτερη κατανόηση των όσων ακολουθήσουν δίνονται κάποιοι ορισμοί και αναλύονται κάποιες έννοιες χωρίς ιδιαίτερη εμβάθυνση.

2.1 Μερικές διαφορικές εξισώσεις

Μερικές διαφορικές εξισώσεις καλούνται γενικά εξισώσεις με άγνωστη μια συνάρτηση, τουλάχιστον δύο μεταβλητών, όταν σε αυτές τις εξισώσεις εκτός από την άγνωστη συνάρτηση και τις ανεξάρτητες μεταβλητές, εμφανίζονται και μερικές παράγωγοι της άγνωστης συνάρτησης. Γενικά μερική διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση u λέγεται μια εξίσωση της μορφής:

$$F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0 \quad (2.1)$$

Τάξη μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης λέγεται η μέγιστη από τις τάξεις των παραγώγων της άγνωστης συνάρτησης που συναντάμε στην εξίσωση. Βαθμός μιας ΜΔΕ λέγεται ο εκθέτης στον οποίο είναι υψωμένη η μεγαλύτερης τάξης παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης.

Γραμμική λέγεται μια ΜΔΕ αν όλοι οι όροι της είναι 1ου βαθμού ως προς την u και τις παραγώγους της.

Ημιγραμμική λέγεται μια ΜΔΕ αν είναι 1ου βαθμού ως προς την παράγωγο μεγαλύτερης τάξης της u .

Σχεδόν γραμμική λέγεται μια ΜΔΕ αν είναι γραμμική ως προς τη u αλλά όχι ως προς τις παραγώγους τους.

Παραδείγματα ΜΔΕ:

1. $u_x(x, t) + u_y(x, t) = \nabla u = 0$	εξίσωση μεταφοράς
2. $uu_x(x, t) + u_y(x, t) = 0$	εξίσωση Hopf
3. $\nabla^2 u = \Delta u = 0$	εξίσωση Laplace
4. $(\nabla^2 + k^2)u = 0$	εξίσωση Helmholtz
5. $\nabla^2 u = -F(\vec{x})$	εξίσωση Poisson
6. $u_t(x, t) = \sigma u_{xx}(x, t)$	εξίσωση διάχυσης
7. $u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t)$	κυματική εξίσωση

Κάθε μερική διαφορική εξίσωση αναφέρεται σε ένα χωρίο D του \mathbb{R} , από το οποίο παίρνουν τιμές οι μεταβλητές του χώρου της άγνωστης συνάρτησης. Για να μπορούμε να βρούμε την άγνωστη συνάρτηση, χωρίς αυτή να εξαρτάται από άλλες άγνωστες συναρτήσεις ή σταθερές θα πρέπει να ξέρουμε την τιμή της για κάποια τιμή του χρόνου (συναρτήσει των μεταβλητών του χώρου, αρχική συνθήκη), καθώς και τις τιμές που παίρνει στο σύνορο του χωρίου ∂D για κάθε τιμή του χρόνου (συνοριακές συνθήκες). Μια ΜΔΕ συνοδευόμενη από τέτοιες κατάλληλες συνθήκες λέμε ότι αποτελεί ένα καλώς τοποθετημένο πρόβλημα. Ο αριθμός των απαραίτητων βοηθητικών συνθηκών καθορίζεται από την υψηλότερης τάξης παράγωγο για κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή. Εφόσον η εξίσωση για παράδειγμα είναι πρώτης τάξης ως προς t και δεύτερης τάξης ως προς x , απαιτείται μία βοηθητική συνθήκη για το t και δύο για το x .

Οι συνθήκες που συναντούμε συνήθως έχουν τη μορφή :

1. *Cauchy* (αρχικές) : $u(\vec{x}, 0) = f_1(x), u_t(\vec{x}, 0) = f_2(x), \dots$

2. *Dirichlet* (συνοριακές 1ου είδους) : $u(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t), \vec{x} \in \partial D, t > 0$

3. *Newmann* (συνοριακές 2ου είδους): $\frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial \vec{n}} = g(\vec{x}, t), \vec{x} \in \partial D, t > 0$

4. *Robin* (συνοριακές 3ου είδους): $\frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial \vec{n}} + ku(\vec{x}, t) = h(\vec{x}, t), \vec{x} \in \partial D, t > 0$, όπου το \vec{n} είναι διάνυσμα κάθετο στο ∂D .

Δηλαδή, αν η εξαρτημένη μεταβλητή είναι καθορισμένη, τότε οι συνοριακές συνθήκες ονομάζονται *Dirichlet*, αν η παράγωγος της εξαρτημένης μεταβλητής είναι καθορισμένη, ονομάζονται *Neumann* και αν και η εξαρτημένη μεταβλητή και η παράγωγός της εμφανίζονται στις συνοριακές συνθήκες, τότε ονομάζονται συνοριακές συνθήκες τρίτου τύπου ή *Robin*.

Η λύση μίας μερικής διαφορικής εξίσωσης είναι μία συνάρτηση, η οποία ορίζει την εξαρτημένη μεταβλητή ως συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών, στα παράδειγμα μας $u(x, t)$. Ουσιαστικά, χρειαζόμαστε μία συνάρτηση, η οποία όταν αντικαθίσταται στη μερική διαφορική εξίσωση και όλες τις βοηθητικές συνθήκες να τις ικανοποιεί όλες μαζί. Οι λύσεις μπορεί να είναι δύο τύπων :

1. Αν η λύση είναι μία μαθηματική συνάρτηση, τότε ονομάζεται αναλυτική λύση. Ενώ οι αναλυτικές λύσεις είναι ακριβείς, είναι συνήθως δύσκολο να τις εξαγάγουμε, εκτός από μερικές απλές περιπτώσεις μερικών διαφορικών εξισώσεων.

2. Αν έχει αριθμητική μορφή, δηλαδή για παράδειγμα το $u(x, t)$ μπορεί να γραφεί ως αριθμητικός πίνακας συναρτήσεως του x και του t τότε η λύση ονομάζεται αριθμητική. Πιο συγκεκριμένα, η αριθμητική λύση είναι προσέγγιση της αναλυτικής λύσης με καλή ακρίβεια.

Οι μέθοδοι που θα ακολουθήσουν στην συνέχεια επικεντρώνονται λοιπόν, στον υπολογισμό με ακρίβεια, αυτών των αριθμητικών λύσεων ([2], [4]).

2.2 Σύνολα.

Θεωρούμε το σύνολο $C^k(I)$, δηλαδή το σύνολο των συναρτήσεων που είναι k φορές συνεχώς παραγωγίσιμες σε ένα ανοιχτό διάστημα $I \subset \mathbb{R}$.

Επίσης θεωρούμε $C_p(a, b)$ το σύνολο των τμηματικά συνεχών συναρτήσεων στο (a, b) ([3]).

2.3 Ορθογώνιες συναρτήσεις.

Αν θεωρήσουμε δύο συναρτήσεις $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο αυτών των συναρτήσεων το ολοκλήρωμα

$$(f, g) = \int \bar{f}(x)g(x) dx \quad (2.2)$$

οπου \bar{f} η συζυγής συνάρτηση της f .

Στην περίπτωση που $(f, g) = 0$ οι συναρτήσεις f, g θα ονομάζονται ορθογώνιες συναρτήσεις ([3]).

2.4 Ο χώρος των ιδιοσυναρτήσεων.

Εάν θεωρήσουμε ένα ομογενές πρόβλημα, με την συνθήκη της περιοδικότητας, τότε οι ιδιοσυναρτήσεις της λύσης είναι άπειρες στο πλήθος και ορθογώνιες. Επομένως $(y_n, y_m) = 0$. Επίσης εάν θεωρήσουμε ότι το πρόβλημα είναι γραμμικό τότε μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλη σταθερά έτσι ώστε

$$(y_n, y_n) = \int \bar{f}(x)g(x) dx = 1. \quad (2.3)$$

Επομένως το σύνολο των ιδιοσυναρτήσεων γίνεται ορθοκανονικό και $(y_n, y_m) = \delta_{nm}$. Ένα τέτοιο σύνολο μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι μια πλήρη βάση του χώρου, δηλαδή μπορεί να εκφραστεί με μοναδικό τρόπο, κάθε συνάρτηση του χώρου, ως ένας άπειρος γραμμικός συνδιασμός των ιδιοσυναρτήσεων. Επομένως

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad (2.4)$$

όπου οι συντελεστές c_n είναι οι συντεταγμένες της $f(x)$. Τέλος οι συντελεστές της $f(x)$ δίνονται απο τη σχέση

$$c_n = (f, y_n), \quad (2.5)$$

στην περίπτωση που η βάση είναι ορθοκανονική και

$$c_n = \frac{(f, y_n)}{(y_n, y_n)}, \quad (2.6)$$

εάν η βάση είναι ορθογώνια ([3]).

2.5 Περιοδική συνάρτηση.

Μία συνάρτηση $f(x)$ είναι περιοδική με περίοδο T όταν ισχύει $f(x + T) = f(x)$. Η ελάχιστη δυνατή περίοδος λέγεται και θεμελιώδης περίοδος και εμείς όταν λέμε περίοδο θα αναφερόμαστε σε αυτήν.

Για τις περιοδικές συναρτήσεις ισχύουν:

- i)* το διάγραμμα μιας περιοδικής συνάρτησης σε μια περίοδο λέγεται κύμα ή κυματομορφή
- ii)* αν η μεταβλητή μιας περιοδικής συνάρτησης συμβολίζει το διάστημα, τότε η περίοδος της λέγεται μήκος κύματος και συμβολίζεται με λ ,
- iii)* κάθε περιοδική συνάρτηση $f(t)$ με θεμελιώδη περίοδο T γίνεται περιοδική με θεμελιώδη περίοδο 2π , θέτοντας

$$t = \frac{2\pi}{T}x \quad (2.7)$$

- iv)* αν T είναι η θεμελιώδης περίοδος, τότε ορίζεται ως συχνότητα f ο αριθμός

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.8)$$

και ως κυκλική συχνότητα ω [5]

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.9)$$

Κεφάλαιο 3

Σειρές και μετασχηματισμός Fourier

Πολλές φορές η φύση αντιδρά είτε ρυθμικά είτε άρρυθμα όταν της προκαλούμε κάποια διαταραχή. Στην πρώτη περίπτωση η αντίδραση εκδηλώνεται σε ορισμένες συχνότητες, ενώ στη δεύτερη περίπτωση σε όλες σχεδόν τις συχνότητες με κάποια ίσως προτίμηση σε μερικές από αυτές. Η μελέτη των φαινομένων αυτών οδηγεί στις σειρές και στα ολοκληρώματα Fourier. Οι σειρές Fourier χρησιμοποιήθηκαν από τον Γάλλο μαθηματικό Fourier στις αρχές του 19ου αιώνα στην προσπάθεια του να μελετήσει την διάδοση της θερμότητας. Απο τότε και έπειτα οι σειρές Fourier χρησιμοποιούνται για την επίλυση διαφόρων εφαρμοσμένων προβλημάτων αλλά και θεωρητικών.

3.1 Σειρές Fourier.

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε πότε μια συνάρτηση προσεγγίζεται απο μια σειρά Fourier ([5]).

Μια συνάρτηση f λέγεται τμηματικά συνεχής στο $[a, b]$ αν υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους σημεία $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, τέτοια ώστε η f να είναι συνεχής σε κάθε διάστημα (x_i, x_{i+1}) για κάθε $i = 1, 2, \dots, n-1$ και σε κάθε x_i να υπάρχουν τα πλευρικά όρια και είναι πεπερασμένα. Το σύνολο των τμηματικά συνεχών συναρτήσεων στο (a, b) συμβολίζεται με $C_p(a, b)$.

Αφού η f είναι συνεχής σε κάθε διάστημα (x_i, x_{i+1}) , $\forall i = 1, 2, 3, \dots$ θα είναι και φραγμένη στο διάστημα αυτό και επομένως θα είναι φραγμένη και στο (a, b) , οπότε είναι και ολοκληρώσιμη. Άρα $\forall f, g \in C_p(a, b)$ θα υπάρχει το εσωτερικό τους γινόμενο (f, g) .

Μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση θα λέγεται τμηματικά λεία αν υπάρχει η παράγωγος της και είναι τμηματικά συνεχής.

Έστω μια συνάρτηση $f \in C_p(a, b)$ και $\{\phi_n(x)\}$ με $n \in \mathbb{N}$ ορισμένων στο $[a, b]$ με $(\|\phi_n\|)^2 = (\phi_n, \phi_n) \neq 0$.

Ονομάζουμε γενικευμένη σειρά Fourier, που αντιστοιχεί στην f και το $\{\phi(x)\}$ με $n \in \mathbb{N}$, το άθροισμα

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi(x), \quad c_n \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

Οι συντελεστές θα δίνονται απο τη σχέση

$$c_n = \frac{(\phi_n, f)}{\|\phi_n\|^2} \quad (3.2)$$

Επομένως τώρα πρέπει να δούμε την σχέση της f με την σειρά Fourier. Θεωρούμε την πεπερασμένη σειρά

$$\Phi_N(x) = \sum_{n=1}^N d_n \phi(x), \quad d_n \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

Θα αναζητήσουμε τα κατάλληλα d_n ώστε οι τιμές της σειρά να είναι όσο γίνεται πιο κοντά στις τιμές της f . Αυτό θα συμβαίνει όταν η μέση τετραγωνική απόκλιση $\|f - \Phi_N\|^2$ γίνεται ελάχιστη. Αλλά

$$\|f - \Phi_N\|^2 = \int_a^b [f(x) - \sum_{n=0}^N d_n \phi_n(x)]^2 dx \quad (3.4)$$

$$\|f - \Phi_N\|^2 = \int_a^b [f^2(x) - 2 \sum_{n=0}^N d_n f(x) \phi_n(x) + \sum_{n,m=0}^N d_n d_m \phi_n(x) \phi_m(x)] dx \quad (3.5)$$

$$\|f - \Phi_N\|^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{n=0}^N d_n (\phi_n, f) + \sum_{n,m=0}^N d_n d_m (\phi_n \phi_m) \quad (3.6)$$

Αλλά

$$(\phi_n, f) = (\phi_n, \sum_{m=0}^N c_m \phi_m) = c_n \|\phi_n\|^2 \quad (3.7)$$

Οπότε

$$\|f - \Phi_N\|^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{n=0}^N c_n d_n \|\phi_n\|^2 + \sum_{n=0}^N (d_n)^2 \|\phi_n\|^2 \quad (3.8)$$

$$\|f - \Phi_N\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=0}^N (c_n)^2 \|\phi_n\|^2 + \sum_{n=0}^N (c_n - d_n)^2 \|\phi_n\|^2 \quad (3.9)$$

Η ποσότητα όμως

$$\sum_{n=0}^N (c_n - d_n)^2 \|\phi_n\|^2 \quad (3.10)$$

είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν και ελαχιστοποιείται όταν $d_n = c_n$. Δηλαδή όταν στην πεπερασμένη σειρά έχουμε τους συντελεστές της άπειρης σειράς Fourier.

Στην περίπτωση αυτή

$$\|f - \Phi_N\|^2 \geq 0 \Rightarrow \|f\|^2 - \sum_{n=0}^N (c_n)^2 \|\phi_n\|^2 \geq 0 \Rightarrow \|f\|^2 \geq \sum_{n=0}^N (c_n)^2 \|\phi_n\|^2 \quad (3.11)$$

και παίρνοντας το όριο για $N \rightarrow \infty$ έχουμε τη γνωστή ανισότητα Bessel:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{n=0}^{\infty} (c_n)^2 \|\phi_n\|^2. \quad (3.12)$$

Στην περίπτωση που το σύστημα $\{\phi_n(x)\}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι πλήρες ισχύει η ισότητα στη σχέση (ταυτότητα Parseval).

Κάθε περιοδική συνάρτηση $y = f(x)$, μπορεί να γραφτεί ως ένα άπερο άθροισμα ημιτονοειδών συναρτήσεων. Το κλασικό ορθογώνιο σύστημα Fourier είναι ένα πλήρες σύστημα συναρτήσεων του $C_p(-L, L)$, οι οποίες είναι συνεχείς και τμηματικά λείες στο $[-L, L]$ και ικανοποιούν τη συνθήκη $f(-L) = f(L)$. Επομένως η πλήρης σειρά Fourier μιας περιοδικής συνάρτησης είναι:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi kt + b_k \sin 2\pi kt) \quad (3.13)$$

όπου οι σταθερές a_k και b_k λέγονται συντελεστές Fourier της f και δίνονται από τους τύπους:

$$a_k = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos k\omega x dx \quad (3.14)$$

και

$$b_k = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin k\omega x dx \quad (3.15)$$

3.1.1 Μιγαδική σειρά Fourier.

Έστω ότι έχουμε την πλήρη σειρά Fourier μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[-L, L]$ ([6],[7]) :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (3.16)$$

Αντικαθιστούμε τα ημίτονα και τα συνημίτονα από τις σχέσεις :

$$\cos \frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2} \left[e^{i \frac{n\pi x}{L}} + e^{-i \frac{n\pi x}{L}} \right] \quad (3.17)$$

και

$$\sin \frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2i} \left[e^{i \frac{n\pi x}{L}} - e^{-i \frac{n\pi x}{L}} \right] \quad (3.18)$$

επομένως η σειρά γίνεται

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \left[e^{i \frac{n\pi x}{L}} + e^{-i \frac{n\pi x}{L}} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2i} \left[e^{i \frac{n\pi x}{L}} - e^{-i \frac{n\pi x}{L}} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{i \frac{n\pi x}{L}} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) + e^{-i \frac{n\pi x}{L}} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}} + c_{-n} e^{-i \frac{n\pi x}{L}}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Για τον υπολογισμό των συντελεστών έχουμε :

$$\|e^{i \frac{n\pi x}{L}}\|^2 = (e^{i \frac{n\pi x}{L}}, e^{i \frac{n\pi x}{L}}) = \int_{-L}^L e^{-i \frac{n\pi x}{L}} e^{i \frac{n\pi x}{L}} dx = \int_{-L}^L dx = 2L$$

και

$$(e^{i\frac{n\pi x}{L}}, f) = \int_{-L}^L e^{-i\frac{n\pi x}{L}} f(x) dx \quad (3.20)$$

Άρα οι συντελεστές θα είναι:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{L}} dx \quad (3.21)$$

3.2 Διακριτοποίηση Πλέγματος

Πρώτα απο όλα θα πρέπει να θεωρήσουμε κατάλληλο πλέγμα ωστε να μπορέσουμε να πετύχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Θεωρούμε λοιπόν ένα ομοιόμορφο πλέγμα σημείων, $[x_1, \dots, x_N]$ με $x_{j+1} - x_j = h$, για κάθε h και το σύνολο των αντίστοιχων τιμών δεδομένων $[u_1, \dots, u_N]$. Εφόσον το πλέγμα μας είναι περιοδικό, και κατ επέκταση και η συνάρτηση που μας δίνει τις τιμές τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε, θεωρούμε οτι την περίοδο της συνάρτησης και του πλέγματος $T = 2\pi$ και τότε μπορούμε να πούμε οτι $u_{N+1} = u_1$ και με τον ίδιο συλλογισμό οτι $u_0 = u_N$. Επίσης εφόσον έχουμε την θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$ μπορούμε να θεωρήσουμε το διάστημα $[-\pi, \pi]$.

Επομένως με βάση τα προηγούμενα καταλήγουμε στα ακόλουθα συμπεράσματα, $x_0 = -\pi, x_1 = \pi + h, \dots, x_N = \pi$.

Σε αυτό το σημείο ενδιαφέρον παρουσιάζει η κατάλληλη επιλογή των διακριτών σημείων που θα χρησιμοποιήσουμε καθώς μια σωστή επιλογή των διαστημάτων δειγματοληψίας είναι απαραίτητη έτσι ώστε να έχουμε μια αξιόπιστη παρουσίαση του φαινομένου που μελετούμε. Είναι σημαντικό τα σημεία που θα επιλέξουμε να έχουν αρκετή πληροφορία ωστε να εξάγουμε πιο σωστά συμπεράσματα. Επομένως λοιπόν μπορούμε κάποιες φορές να επανακατασκευάσουμε την διακριτοποίηση μας.

Εφόσον έχουμε ορίσει όλα τα παραπάνω, αυτό που θα καθορίσει την διακριτοποίηση του πλέγματος θα είναι η επιλογή των σημείων. Πλέον μπορούμε να ορίσουμε και το h όπου $h = \frac{2\pi}{N}$.

Τέλος για να μπορέσουμε να περάσουμε εξ ολοκλήρου στον διακριτό μετασχηματισμό θα πρέπει να ορίσουμε κατάλληλους δείκτες k . Η απόσταση h που έχουμε θεωρήσει, υποδηλώνει οτι οι κυματάριθμοι διαφέρουν απο ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του $\frac{2\pi}{h}$. Επομένως, αντιστοιχούν στις συχνότητες $\frac{2\pi k}{N}$. Καταλήγουμε στο οτι το εύρος των κυματοαριθμών που διακρίνεται στο πλέγμα θα είναι διακριτό και πεπερασμένο φάσμα $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$ ([11]).

3.2.1 Διακριτοποίηση της Σειράς Fourier.

Σε αυτό το σημείο θα περάσουμε στην διακριτή μορφή της σειράς Fourier.

Εν γένει λοιπόν σύμφωνα με τον τύπο των ορθογωνίων μπορούμε να προσεγγίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα μια συνάρτησης f στο (a, b) . Επομένως

$$\int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0)h + f(x_1)h + \dots + f(x_{n-1})h] = \quad (3.22)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \quad (3.23)$$

Με h να είναι η διαφορά $x_{n+1} - x_n$.

Επομένως οι συντελεστές a_k και b_k απο τη συνεχή μορφή θα περάσουν στη διακριτή μορφή:

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos k\omega x dx \rightarrow \frac{2h}{L} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cos k\omega x_i \quad (3.24)$$

και

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin k\omega x dx \rightarrow \frac{2h}{L} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \sin k\omega x_i \quad (3.25)$$

3.3 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform–DFT), ο οποίος είναι το πεπερασμένο διακριτό αντίστοιχο του μετασχηματισμού Fourier, αποτελεί το σημαντικότερο εργαλείο ευρείας χρήσεως της ψηφιακής τεχνολογίας. Ο DFT μπορεί να θεωρηθεί ως μία προσέγγιση των συνήθων σειρών Fourier αλλά και από μόνος του έχει σημαντικό ενδιαφέρον. Ο μετασχηματισμός απέκτησε ιδιαίτερη σπουδαιότητα από τις εφαρμογές του, οι οποίες εμπλέκουν επεξεργασία αριθμητικών δεδομένων. Πιο συγκεκριμένα, ο DFT μετασχηματίζει πεπερασμένες ακολουθίες πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών (διακριτά σημεία κύματος) σε μιγαδικές ακολουθίες, οι οποίες διατηρούν όλη την πληροφορία του αρχικού κύματος. Οι βασικές ιδιότητες του DFT συμβάλλουν αποτελεσματικά στην επεξεργασία του αρχικού κύματος και την ανακατασκευή αυτού.

Στη συνέχεια θα μεταφέρουμε λοιπόν την σειρά Fourier που ορίσαμε παραπάνω σε ένα μιγαδικό άθροισμα. Επομένως

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega x} = \sum_{-\infty}^{-1} c_k e^{ik\omega x} + c_0 + \sum_1^{+\infty} c_k e^{ik\omega x} \quad (3.26)$$

Στη συνέχεια θα φτιάξουμε κατάλληλα τους δείκτες θέτοντας όπου $k = -m$, και έχουμε ότι όταν $k = -\infty \rightarrow m = \infty$ επίσης όταν $k = -1 \rightarrow m = 1$.

Εν τέλει καταλήγουμε στον εξής μετασχηματισμό:

$$c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} e^{-im\omega x} + c_m e^{im\omega x} \quad (3.27)$$

και τώρα όπου $m = k$

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [c_{-k} e^{-ik\omega x} + c_k e^{ik\omega x}] = \quad (3.28)$$

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (\cos k\omega x - i \sin k\omega x) + c_k (\cos k\omega x + i \sin k\omega x) = \quad (3.29)$$

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(c_{-k} + c_k) \cos k\omega x + i(c_k - c_{-k} \sin k\omega x)] \quad (3.30)$$

Επομένως από (3.24) και (3.25) έχουμε ότι:

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad (3.31)$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad (3.32)$$

και

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 \quad (3.33)$$

επίσης ισχύει ότι $c_{-k} = c_k^*$.

Καταλήγοντας έχουμε ότι

$$c_k = \frac{1}{2} \frac{2h}{L} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) \cos k\omega x_i - i f(x_i) \sin k\omega x_i \Rightarrow \quad (3.34)$$

$$c_k = \frac{h}{L} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) e^{-ik\omega x_i} \quad (3.35)$$

ο οποίος είναι ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier.

Αν αντικαταστήσουμε το άθροισμα με ολοκλήρωμα καθώς και τα x_i με το ολόκληρο συνεχές διάστημα x τότε έχουμε τον γνωστό μετασχηματισμό Fourier.

$$c_k = \frac{h}{L} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ik\omega x} \quad (3.36)$$

Επίσης εφόσον θεωρήσαμε την περίοδο $T = 2\pi$ μπορούμε να πούμε ότι $x \in [0, L] \rightarrow [0, 2\pi]$ άρα $L = 2\pi$ και επομένως ο μετασχηματισμός Fourier θα είναι:

$$c_k = \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ik\omega x} \quad (3.37)$$

και ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier παίρνει την μορφή:

$$c_k = \frac{h}{2\pi} \sum_{i=1}^N f(x) e^{-ik\omega x_i} \quad (3.38)$$

με

$$x \in [h, 2h, \dots, \pi - h], \quad k \in \left[-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}\right] \quad (3.39)$$

3.3.1 Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier

Με βάση τα παραπάνω, εφόσον ορίσαμε τον ευθύ διακριτό μετασχηματισμό Fourier μπορούμε να ορίσουμε και τον αντίστροφο του. Επομένως εάν ο τύπος για τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier είναι:

$$\hat{u}_k = \frac{h}{2\pi} \sum_{j=1}^N e^{-ikx_j} u_j \quad (3.40)$$

με

$$x \in [h, 2h, \dots, \pi - h], k \in \left[-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}\right] \quad (3.41)$$

τότε ο αντίστροφος του διακριτού μετασχηματισμού Fourier ο οποίος μας δίνει τις αρχικές τιμές της περιοδικής συνάρτησης ορίζεται ως:

$$u_j = \sum_{k=-N/2}^{N/2} e^{ikx_j} \hat{u}_k \quad (3.42)$$

και ο αριθμός κυμάτων k όπως και ο χωρικός δείκτης j παίρνουν μόνο ακέραιες τιμές.

3.3.2 Ιδιότητες Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier

Οι ακόλουθες βασικές ιδιότητες του DFT προκύπτουν ως άμεσες συνέπειες του ορισμού του μετασχηματισμού.

Γραμμικότητα.

$$f_1(n) \longleftrightarrow F_1(k) \quad f_2(n) \longleftrightarrow F_2(k) \Rightarrow \quad (3.43)$$

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) \longleftrightarrow a_1 F_1(k) + a_2 F_2(k). \quad (3.44)$$

όπου a_1, a_2 αυθαίρετες σταθερές.

Συμμετρία.

$$f(n) \longleftrightarrow F(k) \Rightarrow \frac{1}{N} F(n) \longleftrightarrow f(-k) \quad (3.45)$$

Χρονική μετατόπιση.

$$f(n) \longleftrightarrow F(k) \Rightarrow f(n - n_0) \longleftrightarrow F(k) e^{-i2\pi kn_0/N} \quad (3.46)$$

Μετατόπιση συχνότητας.

$$f(n) \longleftrightarrow F(k) \Rightarrow e^{-i2\pi kn_0/N} f(n) \longleftrightarrow F(k - k_0) \quad (3.47)$$

Συνέλιξη στο χρόνο.

$$(f_1 * f_2)(n) \longleftrightarrow F_1(k)F_2(k), \quad (3.48)$$

όπου $F_1(k)$ και $F_2(k)$ είναι οι DFT των ακολουθιών $f_1(n)$ και $f_2(n)$.

Συνέλιξη στη συχνότητα.

$$f_1(n) \longleftrightarrow F_1(k) \quad f_2(n) \longleftrightarrow F_2(k) \Rightarrow \quad (3.49)$$

$$(f_1 f_2)(n) = f_1(n)f_2(n) \longleftrightarrow \frac{1}{N}(F_1 * F_2)(k) \quad (3.50)$$

Τέλος, διατυπώνεται και αποδεικνύεται το ακόλουθο βασικό θεώρημα.

Θεώρημα Parseval για τον DFT. Για τις μιγαδικές ακολουθίες $f_1(n)$ και $f_2(n)$ ($n = 0, 1, \dots, N - 1$) και τους αντίστοιχους DFT $F_1(k)$ και $F_2(k)$ ($k = 0, 1, \dots, N - 1$) αυτών, ισχύει

$$\sum_{n=0}^{N-1} f_1(n)\bar{f}_2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_1(k)\bar{F}_2(k) \quad (3.51)$$

3.3.3 Ο Κώδικας του διακριτού μετασχηματισμού Fourier στο Matlab

Στο Matlab για να υπολογίσουμε τον ευθύ και τον αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό Fourier υπάρχει η εντολή 'fft' και 'ifft' όπου τους συμβολίσαμε με vk και vf αντίστοιχα. Παρουσιάζεται παρακάτω ο κώδικας που φτιάξαμε για τον ευθύ και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, για να δείξουμε πώς δουλεύει στο matlab, για ένα τυχαίο διάνυσμα v καθώς και τα αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν. Με το vk συμβολίζουμε τον ευθύ μετασχηματισμό χωρίς την χρήση της εντολής του Matlab και με vf τον αντίστροφο.

Listing 3.1: Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

```

1 clear ;
2 clc;
3 v=[1 ,3 ,2 ,5 ,3 ,6 ,7 ,5 ,2 ,1];
4 %fft(v)
5 vk= fft_gv (v)
6 vk2= fft_gv2 (v)
7 vkm=fft(v)
8 %ifft(vk)
9 vf= ifft_gv (vk)
10 vf2=ifft_gv(vk2)
11 vfm=ifft(vkm)
12 v
13 %plot(v, '.', ' MarkerSize ' ,5);
14 %plot(v, '.')
15 function vk= fft_gv (v)
16 n= length (v);
17 h=2* pi/n;
18 x= linspace (0 ,2*pi -h,n);
19 vk= zeros (1,n);
20 for k=1:n
21 vk(k)=exp (-1i*(k-n/2 -1)*x)*v';
22 end
23 end
24 function vk= fft_gv2 (v)
25 n= length (v);
26 h=2* pi/n;
27 x= linspace (0 ,2*pi -h,n);
28 vk= zeros (1,n);
29 k=-n/2:n/2 -1;
30 kx=x' .*k;
31 vk=v*exp (-1i*kx);
32 end
33 function vf= ifft_gv (vk)
34 n= length (vk);
35 h=2* pi/n;
36 x= linspace (0 ,2*pi -h,n);
37 vf= zeros (1,n);
38 %k=-n /2+1:n/2;
39 k=-n/2:n/2 -1;
40 for j=1:n
41     vf(j)=exp (1i*k*x(j))*vk' ./n;
42 end

```



```

vk =
-5.0000 + 0.0000i  0.0000 + 3.5267i  1.7082 - 1.9021i  0.0000 + 5.7063i -11.7082 - 1.1756i  35.0000 + 0.0000i -11.7082 + 1.1756i  0.0000 - 5.7063i  1.7082 + 1.9021i  0.0000 - 3.5267i
vk2 =
-5.0000 + 0.0000i  0.0000 + 3.5267i  1.7082 - 1.9021i  0.0000 + 5.7063i -11.7082 - 1.1756i  35.0000 + 0.0000i -11.7082 + 1.1756i  0.0000 - 5.7063i  1.7082 + 1.9021i  0.0000 - 3.5267i
vkm =
35.0000 + 0.0000i -11.7082 + 1.1756i  0.0000 - 5.7063i  1.7082 + 1.9021i  0.0000 - 3.5267i -5.0000 + 0.0000i  0.0000 + 3.5267i  1.7082 - 1.9021i  0.0000 + 5.7063i -11.7082 - 1.1756i
vf =
1.0000 - 0.0000i  1.0000 + 0.0000i  2.0000 - 0.0000i  5.0000 + 0.0000i  7.0000 - 0.0000i  6.0000 + 0.0000i  3.0000 - 0.0000i  5.0000 + 0.0000i  2.0000 - 0.0000i  3.0000 + 0.0000i
vf2 =
1.0000 - 0.0000i  1.0000 + 0.0000i  2.0000 - 0.0000i  5.0000 + 0.0000i  7.0000 - 0.0000i  6.0000 + 0.0000i  3.0000 - 0.0000i  5.0000 + 0.0000i  2.0000 - 0.0000i  3.0000 + 0.0000i
vfm =
1.0000  3.0000  2.0000  5.0000  3.0000  6.0000  7.0000  5.0000  2.0000  1.0000
v =
1  3  2  5  3  6  7  5  2  1
% >> |

```

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο κώδικας δουλεύει καθώς χρησιμοποιώντας τον ευθύ μετασχηματισμό vk ή $vk2$ και μετά τον αντίστροφο μετασχηματισμό vf παίρνουμε τελικά το διάνυσμα v που χρησιμοποιήθηκε στο συγκεκριμένο παράδειγμα.

3.4 Interpolant

Σε αυτό το σημείο θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε την συνάρτηση παρεμβολής στον διακριτό μετασχηματισμό Fourier. Για να γίνει αυτή η διαδικασία θα πρέπει να υπάρχει ξεκάθαρη εικόνα του τι σημαίνει αυτό. Επομένως είναι καίριο να αναφερθούμε ότι με τον μετασχηματισμό Fourier μεταφερόμαστε από τον χώρο των θέσεων στον χώρο των συχνοτήτων. Όμως αυτό από μόνο του δεν μας φανερώνει όλες τις πληροφορίες που μπορούμε να αντλήσουμε από την χρήση του μετασχηματισμού. Επομένως ορίζοντας την συνάρτηση παρεμβολής για τις μετασχηματισμένες τιμές του κύματος που μελετούμε, μπορούμε να πάρουμε την συνάρτηση συχνότητας του ([11]).

Ορίζουμε λοιπόν την συνάρτηση παρεμβολής του διακριτού μετασχηματισμού Fourier το εξής πολυώνυμο:

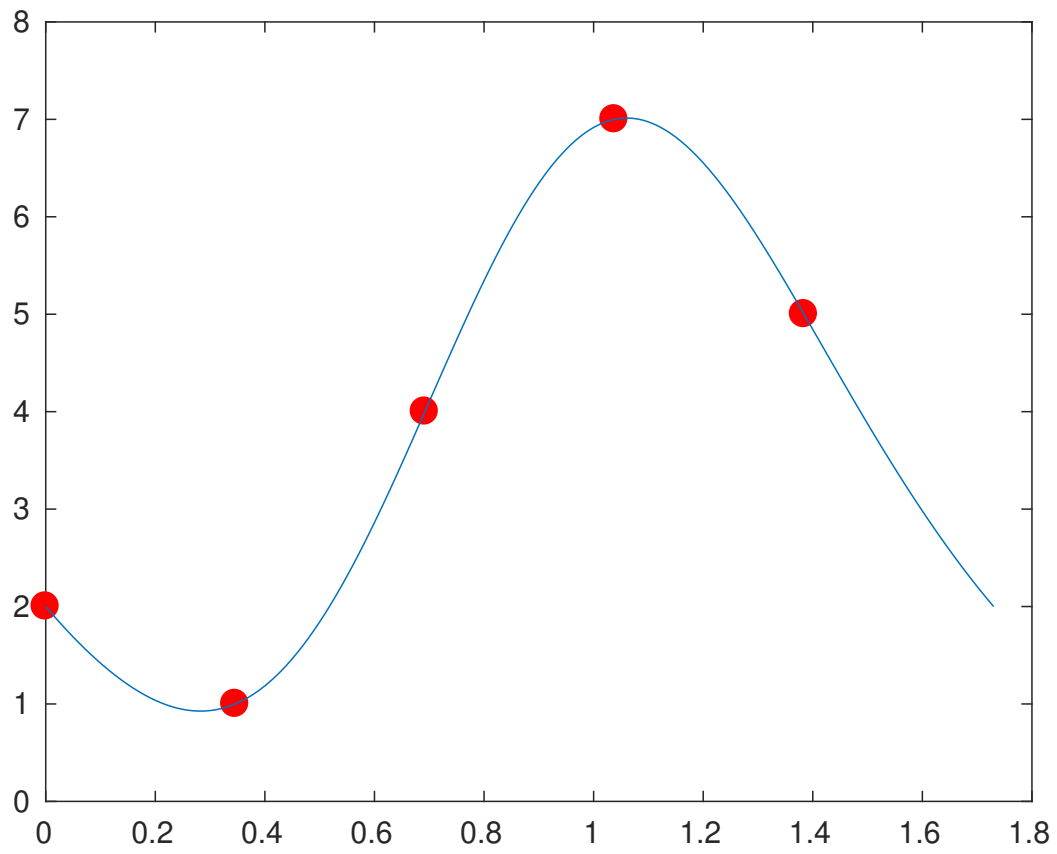
$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N/2}^{N/2} e^{ikx_j} \hat{u}_k, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.52)$$

ο Κώδικας και το γραφικό αποτέλεσμα της Interpolant για ένα τυχαίο διάνυσμα v βρίσκεται παρακάτω.

Listing 3.2: Interpolant

```
1 clear;
2 clc;
3 N=6
4 L=1.73;w=2*pi/L;
5 x=linspace(0,L,N)
6 x=x(1:end-1)
7 dx=x(2)-x(1)
8 n=length(x)
9 v=[2, 1, 4, 7, 5, 9, 6, 3, 1, 7, 4, 2];
10 v=v(1:n)
11 vk=fft(v)
12 xx=0:0.01:L;
13 k=[0:(n-1)/2 -(n-1)/2:-1];
14 int=0;
15 for i=1:n
16     int=int+dx/L*vk(i)*exp(1i*w*k(i)*xx);
17 end
18 plot(x,v,'r.','MarkerSize',30)
19 hold on;
```

```
20 plot(xx,int)
21 hold off;
```



Κεφάλαιο 4

Οι εξισώσεις NLS και KDV

Σε αυτό το σημείο της εργασίας θα αναλύσουμε και θα αναφέρουμε κάποια χαρακτηριστικά των εξισώσεων Korteweg–de Vries (εν συντομία KDV) και της μη-γραμμικής εξίσωσης Schrödinger (Nonlinear Schrödinger equation, εν συντομία NLS) οι οποίες έχουν χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση και κατανόηση των μεθόδων που θα ακολουθήσουν.

4.1 Μη γραμμική εξίσωση Schrödinger

Η μη-γραμμική εξίσωση Schrödinger είναι μία μη-γραμμική παραλλαγή της εξίσωσης Schrödinger, η οποία έχει μελετηθεί αρκετά τα τελευταία χρόνια και εφαρμόζεται στην κλασική και κβαντική μηχανική. Η συνηθισμένη μορφή της NLS, θεωρώντας κυβική μη-γραμμικότητα, είναι η

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + P\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q|u|^2u = 0 \quad (4.1)$$

όπου $u = u(x, t)$ είναι η εξαρτημένη μιγαδική μεταβλητή και $P, Q \in \mathbb{R}$.

Πρόκειται για μια κλασική εξίσωση πεδίου η οποία έχει εφαρμογές σε διάφορους τομείς όπως είναι η διάδοση του φωτός σε μη γραμμικές οπτικές ίνες, τα συμπυκνώματα Bose-Einstein και πολλά άλλα. Η ευρύτερη φυσική σημασία αυτής της μερικής διαφορικής εξίσωσης έγινε εμφανής με το φαινόμενο της αυτοεστίασης και τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μία ηλεκτρομαγνητική δέσμη μπορεί να διαδοθεί χωρίς να εξαπλωθεί σε μη γραμμικά μέσα.

Στα εφαρμοσμένα μαθηματικά, η εξίσωση NLS αποκτά ευρεία σημασία αφού σε μία χωρική διάσταση, είναι ολοκληρώσιμη και λύνεται αναλυτικά χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό σκέδασης, που αποτελεί μια μορφή μη γραμμικού μετασχηματισμού Fourier.

Η NLS είναι πλήρως ολοκληρώσιμη δηλαδή κατέχει άπειρα ανεξάρτητα ολοκληρώματα της κίνησης. Τα ολοκληρώματα της κίνησης είναι

συναρτήσεις οι οποίες διατηρούν σταθερή τιμή κατά μήκος οποιασδήποτε λύσης της NLS. Τρία από αυτά κατέχουν ιδιαίτερη φυσική σημασία. Τα οποία είναι,

- Η **Νόρμα**

$$N(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)|^2 dx \quad (4.2)$$

- Η **Ορμή**

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} i(u\bar{u}_x - \bar{u}u_x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} i[(v + iw)(v_x - iw_x) - (v - iw)(v_x + iw_x)] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} i[(v v_x + i w v_x - i v w_x + w w_x) - (v v_x - i w v_x + i v w_x + w w_x)] dx \\ P(t) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} (v w_x - w v_x) dx \end{aligned} \quad (4.3)$$

- και η **Ενέργεια** του συστήματος

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (|u_x|^2 - \frac{1}{2}Q|u|^4) dx. \quad (4.4)$$

Επιπλέον, η NLS επιδέχεται ακριβείς λύσεις μη-γραμμικών κυμάτων οι οποίες ονομάζονται σολιτόνια για τα οποία έγινε μια γενική και θεωρητική αναφορά στην εισαγωγή της εργασίας.

Τα σολιτόνια λοιπόν ειδικότερα, είναι ένας αυτοενισχυμένος κυματοσυρμός που διατηρεί το σχήμα του ενώ διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα. Με τον όρο κυματοσυρμός εννοούμε ένα σύνολο (απείρων) κυμάτων που ταξιδεύει ως μονάδα. Δηλαδή, τα κύματα συνδυάζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματισθεί ένα ενιαίο σύνθετο κύμα που μπορεί να διαδοθεί σε μεγάλες αποστάσεις χωρίς να διαχωρισθεί ή να χαθεί η αρχική μορφή του. Αυτό συμβαίνει μέσω της εξισορρόπησης δύο φαινομένων, της μη-γραμμικότητας και της διασποράς. Ουσιαστικά για να έχουμε ύπαρξη σολιτονίων το μέσο πρέπει να παρουσιάζει γραμμικά φαινόμενα διασποράς (dispersion) η περίθλασης (diffraction), αλλά και μη γραμμικότητας. Μπορεί να εμφανισθούν σε διάφορες μορφές όπως ηχητικά ή φωτεινά κύματα.

Για να ονομαστεί ένα μη γραμμικό κύμα σολιτόνιο, θα πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

1. Είναι εντοπισμένο. Δηλαδή $\lim_{x \rightarrow \infty} |u| = c_+$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} |u| = c_-$ με $c_{\pm} \in \mathbb{R}$.
2. Να διατηρεί το σχήμα του κατά την κίνησή του.
3. Η σύγκρουση δύο σολιτονίων είναι ελαστική. Δηλαδή, όταν ένα σολιτόνιο αλληλεπιδρά με ένα άλλο σολιτόνιο, αναδύεται από τη σύγκρουση αμετάβλητο εκτός από πιθανή αλλαγή στη φάση μίας κυματομορφής. Με λίγα λόγια, το πλάτος, το σχήμα και η ταχύτητα διατηρούνται μετά από σύγκρουση με άλλο σολιτόνιο.

Εδώ θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι, το πρόσημο του γινομένου του P με το Q στην (5.1) καθορίζει τη φύση της εξίσωσης. Αν είναι $PQ > 0$ η NLS χαρακτηρίζεται ως εστιάζουσα (focusing) ενώ αν είναι $PQ < 0$ τότε η NLS χαρακτηρίζεται ως αφεσιάζουσα (defocusing).

Στην περίπτωση της εστιάζουσας NLS, η εξίσωση επιδέχεται λύσεις φωτεινού σολιτονίου, δηλαδή ενός κύματος του οποίου το πλάτος είναι πεπερασμένο στο “κέντρο” του ενώ είναι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |u| = 0$. Η εξίσωση που μας δίνει τη λύση του φωτεινού σολιτονίου για την NLS είναι η παρακάτω:

$$u = \sqrt{\frac{2|P|}{|Q|}} u_0 \operatorname{sech}(u_0(x - 2c|P|t)) \exp[i (c x + (u_0^2 - c^2) |P| t)] \quad (4.5)$$

όπου u_0 και c είναι ελεύθερες μεταβλητές που καθορίζουν την ταχύτητα/αντίστροφο εύρος πλάτους και τον κυματάριθμο του σολιτονίου αντίστοιχα.

Στην περίπτωση της αφεσιάζουσας NLS, η εξίσωση επιδέχεται λύση σκοτεινού σολιτονίου, ενός εντοπισμένου κύματος δηλαδή, το οποίο κινείται σε ένα σταθερό υπόβαθρο και στο “κεντρο” του εμφανίζει βύθισμα. Στην περίπτωση αυτή έχουμε, $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} = K$ όπου $K > 0$. Η εξίσωση της λύσης του σκοτεινού σολιτονίου είναι η εξής:

$$u = \sqrt{\frac{2|P|}{|Q|}} u_0 [B \tanh(u_0 B x) + i A] \exp[i (c x - (2u_0^2 + c^2) |P| t)] \quad (4.6)$$

όπου B, A ορίζουν το πλάτος και βάθος του “σκοταδιού” (του βυθίσματος δηλαδή) και την ταχύτητα του σολιτονίου αντίστοιχα (σημειώνεται ότι $A^2 + B^2 = 1$)

4.2 Η εξίσωση Korteweg–de Vries

Η εξίσωση Korteweg-de Vries (KdV) είναι μια κλασική μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση που αρχικά διατυπώθηκε για τη μοντελοποίηση της ροής ρηχών υδάτων. Εκτός από τις εφαρμογές στην υδροδυναμική, η KdV έχει μελετηθεί για να αποσαφηνίσει ενδιαφέρουσες μαθηματικές ιδιότητες. Εμφανίστηκε σε πλήθος φυσικών καταστάσεων όπου η μη γραμμικότητα και η διασπορά είναι σημαντικές. Παραδείγματα άλλων τέτοιων φυσικών συστημάτων απαντώνται στη μετεωρολογία, τη φυσική πλάσματος, τα laser, την ακουστική, την οπτική, τους ημιαγωγούς. Συνεπώς, η εξίσωση KdV θεωρείται μια από τις σπουδαιότερες μονοδιάστατες μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Επίσης είναι ένα από τα πιο γνωστά μοντέλα για σολιτόνα και αποτελεί σημαντικό θεμέλιο για τη μελέτη άλλων εξισώσεων. Μπορεί να εκφραστεί με διαφορετικές μορφές, μερικές από τις οποίες είναι σε αδιάστατη μορφή. Η ιστορία της εξίσωσης KdV ξεκίνησε με πειράματα του John Scott Russell το 1834, ακολουθούμενη από θεωρητικές έρευνες από τον Lord Rayleigh και τον Joseph Boussinesq γύρω στο 1870 και τέλος επανήλθε στο μαθηματικό προσκήνιο το 1895 από τους Korteweg και de Vries. Η εξίσωση KdV δεν μελετήθηκε πολύ μετά από αυτό μέχρι που οι Zabusky και Kruskal (1965) ανακάλυψαν αριθμητικά ότι οι λύσεις της φαινόταν να αποσυντίθεται σε μεγάλους χρόνους σε μια συλλογή σολιτονίων. Έκαναν επίσης τη σύνδεση με προηγούμενα αριθμητικά πειράματα των Fermi, Pasta Ulam και Tsingou δείχνοντας ότι η εξίσωση KdV ήταν το συνεχές όριο του συστήματος FPUT. Η ανάπτυξη της αναλυτικής λύσης μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού σκέδασης έγινε το 1967 από τους Gardner, Greene Kruskal και Miura [8]. Η εξίσωση KdV φαίνεται τώρα ότι είναι στενά συνδεδεμένη με την αρχή του Huygens.

Η κλασική μορφή της KDV είναι η ακόλουθη

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (4.7)$$

και η αναλυτική της λύση είναι

$$u(x, t) = f(x - ct) = \frac{1}{2}c \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x - ct)\right] \quad (4.8)$$

που είναι η εξίσωση για ένα σολιτόνιο που ταξιδεύει από αριστερά προς τα δεξιά με ταχύτητα c και ύψος $\frac{1}{2}c$ με το sech να συμβολίζει την υπερβολική συντέμνουσα.

Για να λυθεί αναλυτικά η εξίσωση (4.7) απαιτούνται μία αρχική συνθήκη και τρεις συνοριακές. Επίσης παίρνουμε ως αρχική συνθήκη την εξίσωση

$$u(x, 0) = f(x) = \frac{1}{2}c \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x)\right] \quad (4.9)$$

το οποίο εξάγεται από την εξίσωση (4.8) για $t = 0$.

Η KdV είναι και αυτή πλήρως ολοκληρώσιμη, κατέχει άπειρα ανεξάρτητα ολοκληρώματα της κίνησης τα οποία δεν αλλάζουν με τον χρόνο. Τα πρώτα ολοκληρώματα της κίνησης είναι

1. Η **Μάζα**

$$m = \int u(x, t) dx \quad (4.10)$$

2. Η **Ορμή**

$$P(t) = \int u^2(x, t) dx, \quad (4.11)$$

3. Η **Ενέργεια**

$$E(t) = \int [2u^3(x, t) - (\partial_x u(x, t))^2] dx. \quad (4.12)$$

Η εξίσωση KdV όπως αναφέρθηκε έχει πολλές συνδέσεις με φυσικά προβλήματα. Εκτός από το ότι είναι η κυρίαρχη εξίσωση της χορδής στο συνεχές πρόβλημα Fermi-Pasta-Ulam-Tsignου, περιγράφει κατά προσέγγιση την εξέλιξη μακρών, μονοδιάστατων κυμάτων σε πολλές φυσικές ρυθμίσεις, όπως:

- κύματα ριγών νερών με ασθενώς μη γραμμικές δυνάμεις αποκατάστασης,
- μακρά εσωτερικά κύματα σε έναν ωκεανό με στρωματοποίηση πυκνότητας,
- ακουστικά κύματα ιόντων σε ένα πλάσμα,
- ακουστικά κύματα σε κρυστάλλινο πλέγμα.

Τέλος η εξίσωση KdV μπορεί επίσης να λυθεί χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό αντίστροφης σκέδασης όπως αυτοί που εφαρμόζονται στη μη γραμμική εξίσωση Schrödinger. Βεβαίως, σε πληθώρα φαινομένων δεν είναι δυνατόν να αγνοηθούν μηχανισμοί απόσβεσης και εξωτερικές διεγέρσεις. Στις περιπτώσεις αυτές καταλήγουμε σε εξισώσεις της μορφής:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + L(u) = f, \quad (4.13)$$

όπου η f εκράζει τις εξωτερικές συνάμεις και το $L(u)$ την απόσβεση.

Κεφάλαιο 5

Αριθμητικοί μέθοδοι υπολογισμού σολιτονίων.

Τα μη γραμμικά κύματα περιγράφονται συχνά με μερικές διαφορικές εξισώσεις των οποίων οι λύσεις δεν μπορούν να βρεθούν αναλυτικά ακόμη και σε ένα χώρο μιας διάστασης. Οι αριθμητικοί υπολογισμοί χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση διαφόρων λύσεων, συμπεριλαμβανομένων των στατικών λύσεων. Στη μελέτη των φαινομένων μη γραμμικών κυμάτων, τα μοναχικά κύματα παίζουν σημαντικό ρόλο. Αυτά τα κύματα είναι ειδικές εντοπισμένες λύσεις μη γραμμικών εξισώσεων κύματος που διατηρούν το δικό τους σχήμα κατά τη διάδοση. Εάν αυτά τα κύματα είναι σταθερά, μπορούν να γίνουν ένα μη εξαφανιζόμενο μέρος στη μακροχρόνια λύση και μπορεί ακόμη και να κυριαρχήσουν στο διάλυμα μακράς διάρκειας. Μερικά παραδείγματα είναι τα σολιτόνια στην NLS και οι εξισώσεις KdV. Ακόμα κι αν είναι ασταθή, μπορεί να παίζουν σημαντικό ρόλο στη δυναμική της λύσης. Για παράδειγμα, τα μοναχικά κύματα εδάφους στην NLS σε δύο διαστάσεις είναι σημαντικά για τη θεωρία της κατάρρευσης αυτής της εξίσωσης. Μέχρι στιγμής, έχουν αναπτυχθεί αριθμητικές μέθοδοι για τον υπολογισμό των μοναχικών κυμάτων. Μια από αυτές είναι η Shooting method. Αυτή η μέθοδος είναι αποτελεσματική σε προβλήματα στη μία διάσταση αλλά δεν εφαρμόζεται σε περισσότερες διαστάσεις. Η μέθοδος του Νεύτωνα είναι επίσης μια ακόμη μέθοδος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί αλλά η παραδοσιακή εφαρμογή που απαιτεί μεγάλη προσπάθεια για τις υψηλότερες διαστάσεις μπορεί να επιφέρει δυσκολίες κατά καιρούς. Μια μέθοδος η οποία είναι επίσης αποτελεσματική και απλή στην εφαρμογή σε οποιοδήποτε διαστάσεις είναι η μέθοδος Petviashvili. Μια αποτελεσματική αριθμητική μέθοδος για τον υπολογισμό λύσεων εντοπισμένων κυμάτων σε χώρο δύο διαστάσεων προτάθηκε από τον V. I. Petviashvili στο πλαίσιο της εξίσωσης Kadomtsev-Petviashvili με θετική διασπορά (εξίσωση KPI). Η αριθμητική μέθοδος αποδείχθηκε ότι

συγκλίνει προς μια σταθερή λύση, αλλά δεν δόθηκε ανάλυση ή απόδειξη. Ένα χρόνο αργότερα, βρέθηκε αναλυτικά η ίδια λύση, που αναφέρεται ως το διδιάστατο σολιτόνιο. Μετά την πρωτοποριακή εργασία, η αριθμητική μέθοδος του Petviashvili εφαρμόστηκε σε πολυάριθμα μη γραμμικά προβλήματα στη σύγχρονη μαθηματική φυσική. Ακόμη μια αποτελεσματική μέθοδος που θα μελετηθεί σε αυτή την εργασία είναι η μέθοδος εξέλιξης του φανταστικού χρόνου (ITEM). Αυτή η μέθοδος όμως, στην αρχική της μορφή, είναι αρκετά αργή. Όμως πρόσφατα εισηχθεί μια τεχνική επιτάχυνσης της μεθόδου και με αυτόν τον τρόπο έγινε πολύ πιο γρήγορη (AITEM) ([9]).

5.1 Μέθοδος Petviashvili

Αυτή η μέθοδος προτάθηκε για εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές με αλγεβρική μη γραμμικότητα από τον Petviashvili (1976). Βασίζεται στην ιδέα της αναδρομής σταθερού σημείου, αλλά με τη βασική βελτίωση, την εισαγωγή ενός σταθερού παράγοντα. Συνθήκες σύγκλισης αυτής της μεθόδου για εξισώσεις σταθερού συντελεστή με μη γραμμικότητα αποκτήθηκαν από τους Pelinovsky και Stepanyants (2004). Επεκτάσεις αυτής της μεθόδου σε γενικότερες κυματικές εξισώσεις δόθηκαν από τους Musslimani και Yang (2004), Ablowitz and Musslimani (2005), και Lakoba and Yang (2007). Αυτές οι μορφές της μεθόδου συχνά συγκλίνουν γρήγορα και είναι εύκολο να εφαρμοστούν. Ωστόσο, δεν μπορούν παρά να συγκλίνουν στις βασικές καταστάσεις των μη γραμμικών εξισώσεων κύματος και θα αποκλίνουν για διεγερμένες καταστάσεις. Για διανυσματικές εξισώσεις, μπορεί να αποκλίνουν ακόμη και για τις βασικές καταστάσεις.

5.1.1 Petviashvili στην μη γραμμική NLS

Για να παρουσιάσουμε την μέθοδο του Petviashvili θα χρησιμοποιούμε την πολυδιάστατη εξίσωση NLS με τη συνθήκη της μη γραμμικότητας ([9]).

$$iU_t + \nabla^2 U + |U|^{p-1}U = 0, \quad (5.1)$$

όπου $p > 1$ και ∇^2 ο τελεστής Laplace,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad (5.2)$$

Θεωρούμε λύσεις της μορφής $U(x, t) = u(x)e^{i\mu t}$ όπου $u(x) > 0$, $\mu > 0$ η σταθερά διάδοσης του κύματος.

Εισαγάγοντας την παραπάνω δοκιμαστική λύση στην (4.1) παίρνουμε

$$i(e^{i\mu t}u)_t + \nabla^2(e^{i\mu t}u) + |e^{i\mu t}u|^{p-1}e^{i\mu t}u = 0 \quad (5.3)$$

άρα

$$iu(e^{i\mu t})_t + iu_t e^{i\mu t} + (\nabla^2 e^{i\mu t})u + \nabla^2 u e^{i\mu t} + |e^{i\mu t}|^{p-1}|u|^{p-1}e^{i\mu t}u = 0, \quad (5.4)$$

Ομως $\nabla^2 e^{i\mu t} = 0$ εφόσον η ποσότητα $e^{i\mu t}$ δεν εξαρτάται από το x , $u_t = 0$ και $|e^{i\mu t}| = |\cos\mu t + i\sin\mu t| = \sqrt{\cos^2\mu t + \sin^2\mu t} = 1$ από τον τύπο του Euler.

Τελικά έχουμε ότι:

$$i^2\mu e^{i\mu t}u + \nabla^2 u e^{i\mu t} + u^p e^{i\mu t} = 0 \quad (5.5)$$

$$-\mu e^{i\mu t}u + \nabla^2 u e^{i\mu t} + u_p e^{i\mu t} = 0 \quad (5.6)$$

$$e^{i\mu t}(-\mu u + \nabla^2 u + u^p) = 0, \quad e^{i\mu t} \neq 0 \quad (5.7)$$

$$-\mu u + \nabla^2 u + u^p = 0 \quad (5.8)$$

Θέτοντας τώρα όπου $\mu - \nabla^2 = M$ ένας θετικά ορισμένος διαφορικός τελεστής με σταθερούς συντελεστές και p μια σταθερά όπως αναφέραμε και παραπάνω, έχουμε τελικά ότι:

$$u^p = (\mu - \nabla^2)u \Rightarrow Mu = u^p \quad \eta \quad u = M^{-1}u^p \quad (5.9)$$

Ο Petviashvili πρότεινε τον εξής αλγόριθμο επανάληψης:

$$U_{n+1} = S_n^\gamma M^{-1}U_n^p \quad (5.10)$$

όπου $S_n = \frac{\langle Mu_n, u_n \rangle}{\langle u_n^p, u_p \rangle}$ και γ μια σταθερά.

Η βασική ιδέα λοιπόν είναι η εισαγωγή ενός σταθεροποιητικού παράγοντα. Σκοπός αυτού του παράγοντα είναι να μην αφήνει την λύση να προσεγγίσει το μηδέν όταν η επαναληπτική λύση αποσυντίθεται και να την καταστείλει όταν προσπαθεί να μεγαλώσει πολύ. Αυτός λοιπόν ο παράγοντας είναι ο S_n .

Για τον υπολογισμό του M^{-1} και του M θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Fourier. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$Mu = u^p \quad (5.11)$$

$$F(Mu) = F(u^p) \Rightarrow (\mu + k^2)F(u) = F(u^p) \quad (5.12)$$

$$F(u) = (\mu + k^2)^{-1}F(u^p) \quad (5.13)$$

Και με χρήση του αντιστρόφου μετασχηματισμού Fourier παίρνουμε:

$$u = F^{-1}[(\mu + k^2)^{-1}F(u^p)] \quad (5.14)$$

όπου $F[M]$ είναι ο συμβολισμός του μετασχηματισμού Fourier για το M .

Σε αυτό το σημείο θα δούμε πως μπορεί να επιλεγεί η σταθερά γ που αναφέραμε παραπάνω στον αλγόριθμο του Petviashvili (5.10).

Αυτή η σταθερά λοιπόν μπορεί να επιλεγεί ως εξής:

Υποθέτουμε ότι η ακριβής λύση είναι τάξης $O(1)$. Μετά απο κάποιες

επαναλήψεις η προσεγγιστική λύση $u_n(x)$ θα είναι τάξης $O(\epsilon)$, όπου $\epsilon \ll 1$ ή $\gg 1$. Βλέπουμε επομένως ότι $S_n = O(\epsilon^{1-p})$ και έτσι $u_{n+1} = O(\epsilon^{(1-p)\gamma+p})$. Επομένως η επαναληπτική λύση u_{n+1} για να γίνει τάξης $O(1)$ πρέπει

$$(1-p)\gamma + p = 0 \quad (5.15)$$

έτσι η σταθερά γ θα πρέπει να πάρει την τιμή

$$\gamma = \frac{p}{p-1} \quad (5.16)$$

Η απόδειξη ισχύει και για την απλούστερη περίπτωση της μονοδιάστατης NLS. Επομένως από την (5.8) σε αυτή την περίπτωση έχουμε:

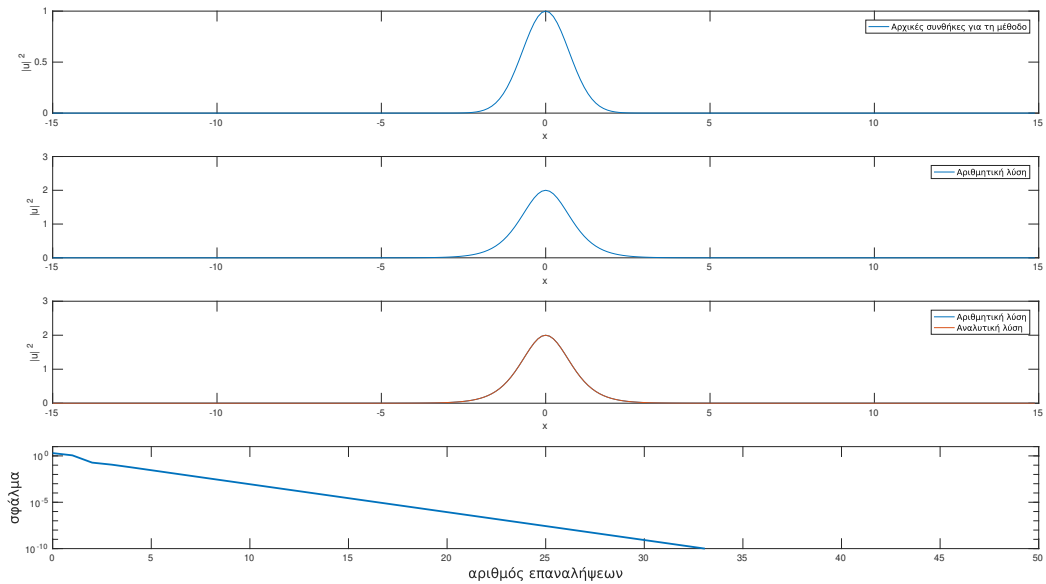
$$-\mu + \frac{\partial}{\partial x}u + u^p = 0 \quad (5.17)$$

και τελικά

$$u^p = (\mu - \frac{\partial}{\partial x})u \Rightarrow Mu = u^p \quad \eta \quad u = M^{-1}u^p \quad (5.18)$$

με το M τώρα να ισούτε με $M = \mu - \frac{\partial}{\partial x}$.

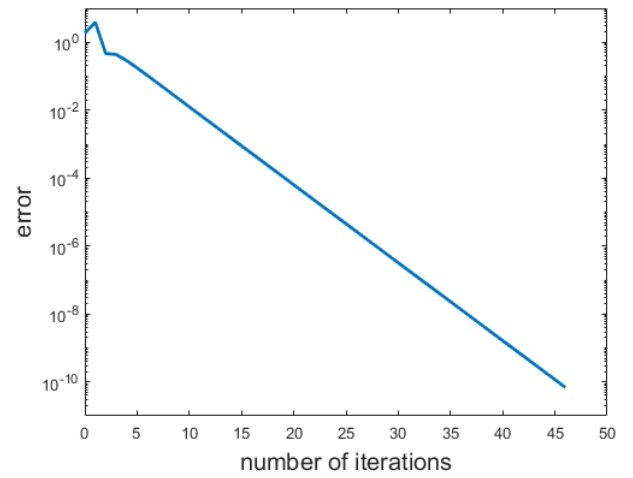
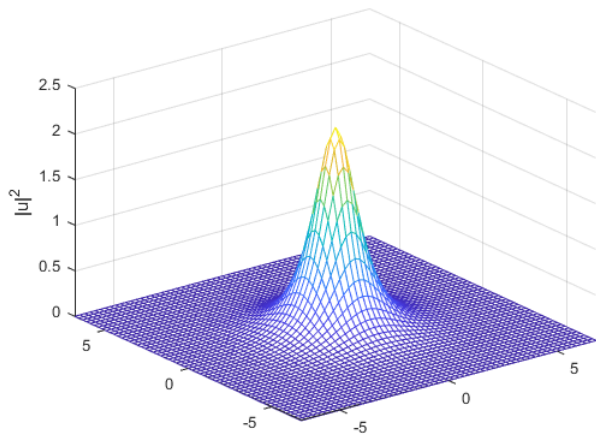
Ακολουθεί το γράφημα των αρχικών συνθηκών για την μέθοδο, η αριθμητική λύση με την μέθοδο του Petviashvili, η σύγκριση της αναλυτικής λύσης με την αριθμητική λύση για την μονοδιάστατη NLS καθώς και το γράφημα του σφάλματος σε σχέση με τον αριθμό των βημάτων.



Σχήμα 5.1: NLS-1D αριθμητική λύση με τη μέθοδο Petviashvili και αναλυτική λύση

Παρατηρούμε ότι το γράφημα της λύσης που επιτυγχάνεται από την μέθοδο του Petviashvili είναι όμοια με το γράφημα της αναλυτικής λύσης, με σφάλμα μικρότερο του 10^{-10} σε 33 επαναλήψεις.

Στη συνέχεια βλέπουμε το γράφημα για την διδιάστατη NLS καθώς και τον αριθμό των βημάτων που πραγματοποιούνται ώστε το σφάλμα της μεθόδου να γίνει μικρότερο από το σφάλμα που έχουμε καθορίσει στον κώδικα.



Σχήμα 5.2: NLS-2D Μέθοδος Petviashvili και Αριθμός επαναλήψεων

Παρατηρούμε λοιπόν ότι με τη μέθοδο του Petviashvili επιτυγχάνεται η σύγκλιση της λύσης του σολιτονίου με σφάλμα μικρότερο του 10^{-10} σε 46 επαναλήψεις. Οι κώδικες για τα παραπάνω γραφήματα της μεθόδου για την μονοδιάστατη και την διδιάστατη NLS δίνονται παρακάτω.

Listing 5.1: Petviashvili-1D NLS.

```

1  clear;
2  clc;
3  Lx=30; Nx=256; errormax=1e-10; nmax=500;
4  x=-Lx/2:Lx/Nx:(Lx/2-Lx/Nx);
5  kx=[0:Nx/2-1 -Nx/2:-1]*2*pi/Lx;
6  k2=kx.^2;
7  p=3; gamma=p/(p-1);
8  mu=1; U=1*exp(-(x.^2));
9  subplot(411)
10 plot(x,U)
11 xlabel('x'); ylabel('|u|^2'); legend('initial
    conditions for the method');
12
13 for nn=1:nmax
14 Mu=ifft(fft(U).*(mu+k2));
15 U3=U.*U.*U;
16 L0U=U3-Mu;
17 errorU(nn)=max(max(abs(L0U)));
18 if errorU(nn) < errormax
19 break
20 end
21 alpha=sum(sum(Mu.*U))/sum(sum(U3.*U));
22 U=alpha^gamma*ifft(fft(U3)./(mu+k2));
23 end
24
25 u0=1;p=1;q=1;
26 UU=sqrt(2*p/q).*u0.*sech(u0.*x);UU2=UU.*conj(UU);
27 U2=U.*conj(U);
28 subplot(412)
29 plot(x,U2)
30 xlabel('x'),ylabel('|u|^2'); legend('Numerical
    solution')
31 subplot(413)
32 plot(x,U2 ,x,UU2);
33 xlabel('x');ylabel('|u|^2'); legend('Numerical
    solution','Analytic solution');
34
35 subplot(414); semilogy(0:nn-1, errorU, 'linewidth', 2)
36 axis([0 50 1e-10 10])
37 xlabel('number of iterations', 'fontsize', 15)
38 ylabel('error', 'fontsize', 15)

```


Listing 5.2: Petviashvili-2D NLS.

```

1 clear;
2 clc;
3 Lx=30; Ly=30; Nx=128; Ny=128; errormax=1e-10; nmax
  =300;
4 x=-Lx/2:Lx/Nx:(Lx/2-Lx/Nx);
5 y=-Ly/2:Ly/Ny:(Ly/2-Ly/Ny);
6 kx=[0:Nx/2-1 -Nx/2:-1]*2*pi/Lx; ky=[0:Ny/2-1 -Ny
  /2:-1]*2*pi/Ly;
7 [X,Y]=meshgrid(x,y); [KX,KY]=meshgrid(kx,ky); K2=KX
  .^2+KY.^2;
8 p=3; gamma=p/(p-1);
9 mu=1; U0=2.2*exp(-(X.^2+Y.^2));
10 U=2.2*exp(-(X.^2+Y.^2));% ansatz
11 for nn=1:nmax
12 Mu=ifft2(fft2(U).*(mu+K2));
13 U3=U.*U.*U;
14 LOU=U3-Mu;
15 errorU(nn)=max(max(abs(LOU)));
16 if errorU(nn) < errormax
17 break
18 end
19 alpha=sum(sum(Mu.*U))/sum(sum(U3.*U));
20 U=alpha^gamma*ifft2(fft2(U3)./(mu+K2));
21 end
22
23 % subplot(211);
24 % mm=36:94; mesh(x(mm), y(mm), U(mm,mm));
25 % axis([x(36) x(94) y(36) y(94) 0 2.5])
26 % zlabel('|u|^2')
27 % subplot(212); semilogy(0:nn-1, errorU, 'linewidth',
  2)
28 % axis([0 50 1e-11 10])
29 % xlabel('number of iterations', 'fontsize', 15)
30 % ylabel('error', 'fontsize', 15)
31 % nn
32
33 figure(1)
34 mm=36:94; mesh(x(mm), y(mm), U(mm,mm));
35 axis([x(36) x(94) y(36) y(94) 0 2.5])
36 zlabel('|u|^2')
37 figure(2)
38 semilogy(0:nn-1, errorU, 'linewidth', 2)

```

```
39 axis([0 50 1e-11 10])
40 xlabel('number of iterations', 'fontsize', 15)
41 ylabel('error', 'fontsize' , 15)
```

5.1.2 Η εξίσωση KDV με την μέθοδο Petviashvili

Σε αυτό το σημείο θα βρούμε την αριθμητική λύση της εξίσωσης Korteweg -de Vries (KDV) με την μέθοδο του Petviashvili ([9]). Έχουμε λοιπόν την εξίσωση

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0 \quad (5.19)$$

επομένως

$$u_t = -(u_{xxx} + 6uu_x) \quad (5.20)$$

Θεωρούμε λύσης της γενικής μορφής:

$$u = u(x - ct) \quad (5.21)$$

Παραγωγίζοντας την ως προς t έχουμε:

$$u_t = u(x - ct)_t \quad (5.22)$$

Σε αυτό το σημείο εάν θέσουμε $x - ct = \xi$ προκύπτει ότι

$$u_t = u_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (5.23)$$

επομένως

$$u_t = -cu_\xi \quad (5.24)$$

όμως $6uu_x = 3(u^2)_x$, και τελικά η εξίσωση (5.20) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$-cu_\xi + u_{\xi\xi\xi} + 3(u^2)_\xi = 0 \quad (5.25)$$

και εάν ολοκληρώσουμε ως προς ξ τότε έχουμε

$$-cu + u_{\xi\xi} + 3u^2 = 0 \quad (5.26)$$

$$-cu + u_{\xi\xi} = -u^2 \quad (5.27)$$

$$u^2 = cu - u_{\xi\xi} \quad (5.28)$$

και εάν $L = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$ τότε

$$u^2 = cu + Lu \quad (5.29)$$

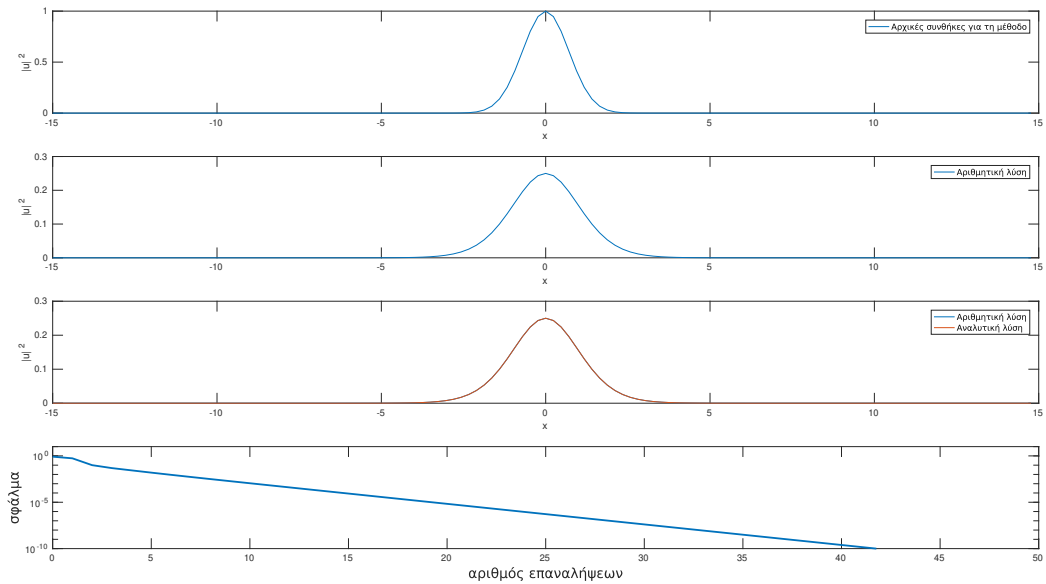
$$u^2 = u(c + L) \quad (5.30)$$

Τελος εάν θέσουμε τον τελεστή $M = c + L$

$$u^2 = uM \quad (5.31)$$

$$u = u^2 M^{-1} \quad (5.32)$$

Απο αυτό το σημείο και μετά δουλεύουμε ακριβώς όπως και στην εξίσωση NLS που δείξαμε παραπάνω, δηλαδή με βάση την μέθοδο του



Σχήμα 5.3: KDV Αναλυτική λύση και Αριθμητική λύση

Petviashvili για να βρούμε την αριθμητική λύση έχουμε τον εξής αλγόριθμο επανάληψης:

$$U_{n+1} = S_n^\gamma M^{-1} U_n^p \quad (5.33)$$

Για τον υπολογισμό του M^{-1} και του M θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Fourier και για τον υπολογισμό της σταθεράς γ ακολουθούμε τα ίδια βήματα με πριν (NLS). Το γράφημα και ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε παρατίθεται παρακάτω.

Σε αυτό το σχήμα (5.3) βλέπουμε στην πρώτη περίπτωση το γράφημα των αρχικών συνθηκών που χρησιμοποιήθηκαν για την μέθοδο, στη δεύτερη το γράφημα της αριθμητικής λύσης και στην τρίτη περίπτωση την αριθμητική με την αναλυτική λύση μαζί. Παρατηρούμε και σε αυτή την περίπτωση ότι τα γραφήματα τις αναλυτικής και της αριθμητικής λύσης συμπίπτουν καθώς το σφάλμα γίνεται μικρότερο του 10^{-10} σε 42 επαναλήψεις, κάτι το οποίο βλέπουμε στο τέταρτο γράφημα της εικόνας.

Listing 5.3: Petviashvili-KDV.

```

1  clear;
2  clc;
3  Lx=30; Nx=128;
4  errormax=1e-10; nmax=300;
5  x=-Lx/2:Lx/Nx:(Lx/2-Lx/Nx);
6  kx=[0:Nx/2-1 -Nx/2:-1]*2*pi/Lx;
7  k2=kx.^2;
8  p=2; gamma=p/(p-1);
9  c=1; m=1;
10 UU=0.5*c*sech(0.5*sqrt(c)*(x)).^2;
11 U=1*exp(-(x.^2));
12 subplot(411)
13 plot(x,U)
14 xlabel('x'); ylabel('|u|^2'); legend('initial
    conditions for the method');
15
16 for nn=1:nmax
17 Mu=ifft(fft(U).*(m+k2));
18 U2=3*U.*U;
19 LOU=U2-Mu;
20 errorU(nn)=max(max(abs(LOU)));
21 if errorU(nn) < errormax
22 break
23 end
24 alpha=sum(sum(Mu.*U))/sum(sum(U2.*U));
25 U=alpha^gamma*ifft(fft(U2)./(c+k2));
26 end
27
28 UU=0.5*c*sech(0.5*sqrt(c)*(x)).^2;UU2=UU .* conj(UU);
29 U2=U.* conj(U);
30 subplot(412)
31 plot(x,U2)
32 xlabel('x'),ylabel('|u|^2'); legend('Numerical
    solution')
33 subplot (413)
34 plot(x,U2 ,x,UU2);
35 xlabel ('x');ylabel('|u|^2'); legend('Numerical
    solution','Analytic solution');
36 subplot(414); semilogy(0:nn-1, errorU, 'linewidth', 2)
37 axis([0 50 1e-10 10])
38 xlabel('number of iterations', 'fontsize', 15)
39 ylabel('error', 'fontsize' , 15)

```

5.2 Μέθοδος ITEM

Η ιδέα της μεθόδου εξέλιξης του φανταστικού χρόνου (ITEM) όπως εφαρμόζεται σε γραμμικές εξισώσεις είναι αρκετά παλιά. Την τελευταία δεκαετία, αυτή η μέθοδος έχει εφαρμοστεί και σε μη γραμμικές εξισώσεις. Σε αυτή τη μέθοδο, αναζητείται η στάσιμη λύση μιας εξίσωσης εξέλιξης με την αριθμητική ολοκλήρωση αυτής της εξίσωσης όπου ο χρόνος t αντικαθίσταται από $-it$ (γιαυτό και ο όρος «φανταστικός χρόνος»), και κανονικοποιώντας την λύση μετά από κάθε βήμα της ολοκλήρωσης του χρόνου για να έχει μια σταθερή νόρμα L^2 (ισχύς όπως ονομάεται στη φυσική). Για τις γραμμικές εξισώσεις, αυτή η μέθοδος είναι γνωστή από παλιά να είναι ισοδύναμη με το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού του φυσικού συστήματος υπό τον περιορισμό ότι η λύση που αναζητείται έχει μια δεδομένη ισχύ και πρόσφατα αποδείχθηκε ότι ισχύει και για μη γραμμικές εξισώσεις.

5.2.1 Η μη γραμμική NLS με την μέθοδο ITEM

Η N - διάστατη γενικευμένη μη γραμμική NLS με αυθαίρετο δυναμικό έχει την παρακάτω φόρμα:

$$iU_t + \nabla^2 U + F(|U|^2, x)U = 0, \quad (5.34)$$

όπου $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ είναι μια χωρική μεταβλητή N - διαστάσεων, και $F(\cdot, \cdot)$ μια συνάρτηση πραγματικών τιμών.

Θεωρούμε λύσεις για την (5.34) της μορφής

$$U(x, t) = u(x)e^{i\mu t} \quad (5.35)$$

όπου $u(x)$ μια χωρική συνάρτηση πραγματικών τιμών, και μ η παράμετρος διάδοσης του κύματος. Τότε η $u(x)$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση:

$$L_{00}u = \mu u \quad (5.36)$$

με

$$L_{00} = \nabla^2 + F(u^2, x). \quad (5.37)$$

Με βάση την αρχική μορφή της μεθόδου εξέλιξης του φανταστικού χρόνου η εξίσωση μας μετασχηματίζεται ως εξής

$$u_t = L_{00}u \quad (5.38)$$

Η σχέση αυτή προκύπτει εάν στην θέση του χρόνου t βάλουμε τον φανταστικό χρόνο it . Στη συνέχεια, μετά από κάθε βήμα της χρονικής

ολοκλήρωσης κανονικοποιείται η λύση για να μπορέσει να διατηρήσει μια σταθερή ισχύ.

Η ισχύς P του σολιτονίου $u(x)$ ορίζεται από τη σχέση

$$P(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x, \mu) dx \quad (5.39)$$

Η απλούστερη υλοποίηση της αριθμητικής ολοκλήρωσης χρόνου είναι η μέθοδος Euler σύμφωνα με την οποία το σχήμα ITEM είναι:

$$u_{n+1} = \left[\frac{P}{\langle \hat{u}_{n+1}, \hat{u}_{n+1} \rangle} \right]^{\frac{1}{2}} \hat{u}_{n+1} \quad (5.40)$$

με

$$\hat{u}_{n+1} = u_n + [L_{00}u]_{u=u_n} \Delta t \quad (5.41)$$

όπου το u_n είναι η λύση μετά την n -οστή επανάληψη. Σε αυτό το σημείο να σημειώσουμε ότι με την μέθοδο ITEM η ισχύς σε κάθε επανάληψη διατηρείται, δηλαδή:

$$\langle u_n, u_n \rangle = P \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.42)$$

Έτσι, εάν οι επαναλήψεις (5.40) - (5.41) συγκλίνουν σε ένα σολιτόνιο $u(x)$ τότε αυτό το $u(x)$ πρέπει να ικανοποιεί την Εξίσωση (5.36) με την ισχύ να είναι P και τη σταθερά διάδοσης να είναι ίση με

$$\mu = \frac{1}{p} \langle L_{00}u, u \rangle \quad (5.43)$$

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε δύο γραμμικούς τελεστές L_0 και L_1 οι οποίοι ορίζονται ως εξής:

$$L_0 \equiv L_{00} - \mu = \nabla^2 + F(u^2, x) - \mu \quad (5.44)$$

και

$$L_1 \equiv \nabla^2 + F(u^2, x) + 2u^2 F_{u^2}(u^2, x) - \mu \quad (5.45)$$

όπου $F_{u^2} \equiv \partial F / \partial u^2$. Με βάση λοιπόν αυτούς τους συμβολισμούς έχουμε $L_0 u = 0$ και L_1 είναι ο τελεστής γραμμικοποίησης του $L_0 u$ ως προς το u .

Αυτό το αρχικό σχήμα ITEM όμως αντιμετωπίζει ένα σοβαρό πρόβλημα. Το πρόβλημα είναι ότι είναι πολύ αργό καθώς η χρονική ολοκλήρωση της εξίσωσης (5.38) με τη μέθοδο Euler υφίσταται αυστηρούς περιορισμούς σταθερότητας στο βήμα μέγεθος Δt . Για να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία, μια ιδέα είναι να χρησιμοποιηθούν μέθοδοι implicit time-stepping (όπως η μέθοδος backward Euler) για την ολοκλήρωση της εξίσωσης φανταστικού χρόνου (5.38). Μια άλλη ιδέα είναι να εισαγάγουμε έναν τελεστή 'προετοιμασίας' μετασχηματίζοντας την εξίσωση

(5.38), το οποίο θα έχει ως αποτέλεσμα ένα πιο γρήγορο σχήμα και εξίσου αποτελεσματικό με το προηγούμενο. Αυτός ο μετασχηματισμός περιγράφεται παρακάτω.

Στο επιταχυνόμενο σχήμα ITEM, αντί να εξελίξουμε την αρχική εξίσωση φανταστικού χρόνου (5.38), εξελίσσουμε την ακόλουθη τροποποιημένη εξίσωση φανταστικού χρόνου

$$u_t = M^{-1}[L_{00}u - \mu u] \quad (5.46)$$

όπου M είναι ένας θετικά ορισμένος και αυτοσυζυγής τελεστής "προετοιμασίας" η αλλιώς (τελεστής επιτάχυνσης). Η εφαρμογή της μεθόδου Euler σε αυτή τη νέα εξίσωση, ονομάζεται μέθοδος επιταχυνόμενης εξέλιξης φανταστικού χρόνου (AITEM) και δίνεται από τις:

$$u_{n+1} = \left[\frac{P}{\langle \hat{u}_{n+1}, \hat{u}_{n+1} \rangle} \right]^{\frac{1}{2}} \hat{u}_{n+1}, \quad (5.47)$$

$$\hat{u}_{n+1} = u_n + M^{-1}(L_{00}u - \mu u)_{u=u_n, \mu=\mu_n} \Delta t \quad (5.48)$$

και

$$\mu_n = \frac{\langle M^{-1}u, L_{00}u \rangle}{\langle M^{-1}u, u \rangle}_{u=u_n} \quad (5.49)$$

Εδώ το P είναι η ισχύς που ορίζεται από την (5.39) η οποία είναι προκαθορισμένη και σταθερή. Σημειώνουμε ότι στο ανανεωμένο σχήμα μας το μ_n δίνεται από την σχέση (5.49) και είναι διαφορετικό από το αρχικό σχήμα όπου δινόταν από την σχέση (5.43).

Αυτό το ανανεωμένο σχήμα μας δίνει τη δυνατότητα να εξαγάγουμε τις συνθήκες σύγκλισης του παραπάνω AITEM. Επίσης μπορεί να γίνει κατάλληλος μετασχηματισμός του τελεστή M ώστε να επιτευχθεί πιο γρήγορη σύγκλιση της μεθόδου.

Θεωρούμε τώρα την δισδιάστατη μη γραμμική NLS στην μορφή που χρησιμοποιήθηκε και στην μέθοδο Petviashvili του προηγούμενου κεφαλαίου.

$$iU_t + \nabla^2 U + |U|^{p-1}U = 0 \quad (5.50)$$

όπου $p > 1$ και ∇^2 ο τελεστής Laplace.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad (5.51)$$

Η εξίσωση επιδέχεται λύσεις της μορφής $U(x, t) = u(x)e^{i\mu t}$ όπου $u(x) > 0$ και $\mu > 0$ η σταθερά διάδοσης του κύματος. Επομένως έχουμε την εξίσωση

$$-\mu u + \nabla^2 u + |u|^{p-1}u = 0 \quad (5.52)$$

$$\nabla^2 + |u|^{p-1}u = \mu u \quad (5.53)$$

Επομένως έχουμε ότι

$$u(\nabla^2 + |u|^{p-1}) = \mu u \quad (5.54)$$

και εάν

$$L_{00} = \nabla^2 + |u|^{p-1} \quad (5.55)$$

έχουμε ότι

$$L_{00}u = \mu u \quad (5.56)$$

Εάν τώρα στην αρχική μας εξίσωση κάνουμε αντικατάσταση τον χρόνο t με τον φανταστικό χρόνο it έχουμε ότι

$$iu_t(it)_t + \nabla^2 u + |u|^{p-1}u = 0 \quad (5.57)$$

Επομένως

$$-u_t + \nabla^2 u + |u|^{p-1}u = 0 \quad (5.58)$$

$$u_t = \nabla^2 u + |u|^{p-1}u \quad (5.59)$$

$$u_t = u(\nabla^2 + |u|^{p-1}) \quad (5.60)$$

επομένως έχουμε ότι

$$u_t = L_{00}u \quad (5.61)$$

Και για το επιταχυνόμενο σχήμα σύμφωνα με την μέθοδο ΑΙΤΕΜ έχουμε ότι

$$u_t = M^{-1}[L_{00}u - \mu u] \quad (5.62)$$

όπου M ένας θετικά ορισμένος και αυτοσυζηγής τελεστής. Και τα u_{n+1} , \hat{u}_{n+1} , μ_n υπολογίζονται απο τις σχέσεις:

$$u_{n+1} = \left[\frac{P}{\langle \hat{u}_{n+1}, \hat{u}_{n+1} \rangle} \right]^{\frac{1}{2}}, \hat{u}_{n+1} \quad (5.63)$$

$$\hat{u}_{n+1} = u_n + M^{-1}(L_{00}u - \mu u)_{u=u_n, \mu=\mu_n} \Delta t, \quad (5.64)$$

και

$$\mu_n = \frac{\langle M^{-1}u, L_{00}u \rangle}{\langle M^{-1}u, u \rangle}_{u=u_n} \quad (5.65)$$

με P να είναι η προκαθορισμένη ισχύς.

Θα δούμε και σε αυτή την μέθοδο την απλούστερη μορφή της μονοδιάστατης NLS έχουμε τα εξής:

$$iu_t + u_{xx} + |u|^{p-1}u \quad (5.66)$$

και αντικαθιστώντας τον χρόνο t με τον φανταστικό χρόνο it έχουμε ότι

$$iu_t(it)_t + U_{xx} + |u|^{p-1}u = 0 \quad (5.67)$$

Επομένως

$$-u_t + u_{xx} + |u|^{p-1}u = 0 \quad (5.68)$$

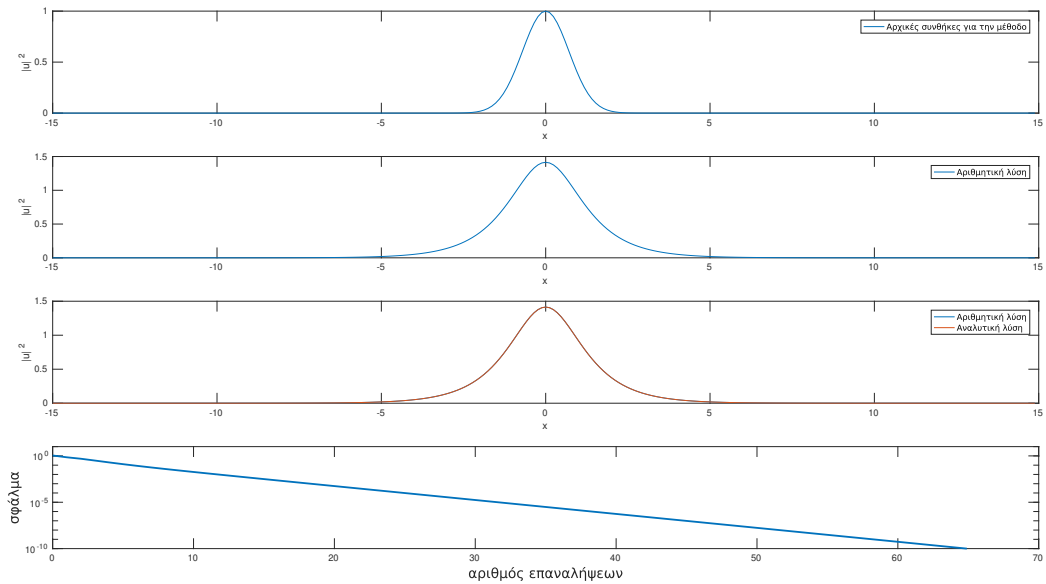
$$u_t = u_{xx} + |u|^{p-1}u \quad (5.69)$$

$$u_t = L_{00}u \quad (5.70)$$

όπου το L_{00} σε αυτή την περίπτωση είναι το

$$L_{00} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + |u|^{p-1}u \quad (5.71)$$

Απο αυτό το σημείο και μετά το επιταχυνόμενο σχήμα ITEM (AITEM) της διδιάστατης NLS είναι ακριβώς το ίδιο με της μονοδιάστατης NLS. Επομένως δεν υπάρχει κάποιος λόγος για να αναπτυχθεί και σε αυτή την περίπτωση. Παρακάτω ακολουθεί ο κώδικας της μεθόδου για την μονοδιάστατη NLS αλλά και το γράφημα της καθώς και το γράφημα της Petviashvili και της αναλυτικής λύσης.



Σχήμα 5.4: NLS1D- Αναλυτική λύση και Αριθμητική λύση ΑΙΤΕΜ

Και σε αυτή την περίπτωση έχουμε το γραφικό αποτέλεσμα των αρχικών συνθηκών που χρησιμοποιήθηκαν για την μέθοδο, την αριθμητική λύση που προέκυψε καθώς και την αριθμητική και αναλυτική λύση μαζί. Παρατηρούμε ότι η μέθοδος συγκλίνει με σφάλμα μικρότερο του 10^{-10} σε 65 επαναλήψεις. Δηλαδή σύμφωνα με το (5.1) χρειάστηκαν 23 επαναλήψεις περισσότερες από ότι χρειάστηκαν με την μέθοδο του Petviashvili. Σε αυτή την περίπτωση, βάση αποτελεσμάτων, μια αρχική εκτίμηση είναι ότι η αριθμητική λύση με τη μέθοδο του Petviashvili συγκλίνει αρκετά πιο γρήγορα από την μέθοδο ΑΙΤΕΜ με το σφάλμα των αριθμητικών λύσεων να είναι μικρότερο του 10^{-10} .

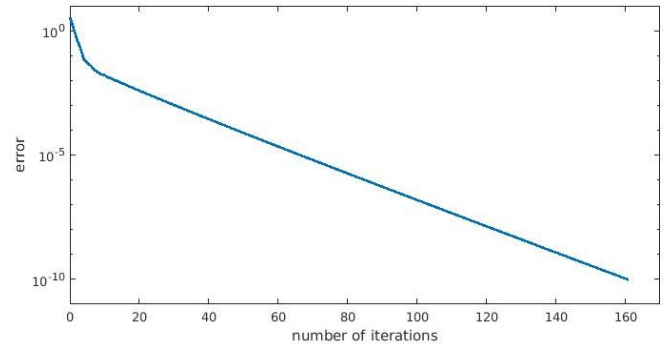
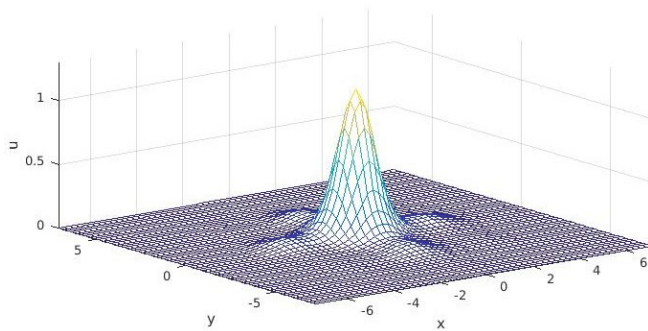
Listing 5.4: AITEM 1D-NLS.

```

1 clear;
2 clc;
3 Lx =30; Nx =256; errormax =1e-10; nmax =500;
4 dx=Lx/Nx;
5 x=-Lx/2:dx:Lx/2-dx;
6 kx=[0:Nx/2-1 -Nx/2:-1]*2*pi/Lx;
7 k2=kx .^2;
8 u=exp(-(x.^2));
9 subplot(411)
10 plot(x,u)
11 xlabel('x'); ylabel('|u|^2'); legend('initial
    conditions for the method')
12 P=4; c=1; DT=0.9;
13
14 u=u*sqrt(P/(u*conj(u)*dx));
15
16
17 for nn=1:nmax
18 u3=u.*conj(u).*u;
19 L00u=ifft(-k2.*fft(u))+u3;
20 Minvu=ifft(fft(u)./(c+k2));
21 mu=sum(Minvu.*L00u)/sum(Minvu.*u);
22 L0u=L00u-mu*u;
23 uerror(nn)=max(abs(L0u));
24     if uerror(nn) < errormax
25         break
26     end
27 u=u+ifft(fft(L0u)./(c+k2))*DT;
28 u=u*sqrt(P/(u*conj(u)*dx));
29 end
30
31 u0=1;p=1;q=1;
32 uu=sqrt(2*p/q).*u0.*sech(u0.*x);
33 subplot(412)
34 plot(x,u)
35 xlabel('x'),ylabel('|u|^2'); legend('Numerical
    solution')
36 subplot(413)
37 plot(x,u ,x,uu);
38 xlabel('x');ylabel('|u|^2'); legend('Numerical
    solution','Analytic solution');
39 subplot(414); semilogy(0:nn-1, uerror, 'linewidth', 2)

```

```
40 axis([0 70 1e-10 10])
41 xlabel('number of iterations', 'fontsize', 15)
42 ylabel('error', 'fontsize' , 15)
```



Θεωρούμε τώρα την εξίσωση 2D NLS με περιοδικό δυναμικό.

$$iU_t + U_{xx} + U_{yy} - V_0(\sin^2 x + \sin^2 y)U + |U|^2 U = 0 \quad (5.72)$$

που μοντελοποιεί τη μη γραμμική διάδοση του φωτός καθώς και τη δυναμική συμπυκνώματος Bose-Einstein σε οπτικά πλέγματα υπό μη γραμμικότητα αυτοεστίασης. Θεωρώντας λύσεις της μορφής

$$U(x, y, t) = u(x, y)e^{i\mu t} \quad (5.73)$$

με $u(x, y) > 0$ και επομένως η εξίσωση (5.48) μετασχηματίζεται:

$$-\mu u + u_{xx} + u_{yy} - V_0(\sin^2 x + \sin^2 y)u + u^3 = 0, \quad (5.74)$$

επομένως λύνοντας ως προς μu έχουμε την τελική μας μορφή για να μπορέσουμε να κάνουμε χρήση της μεθόδου.

$$u_{xx} + u_{yy} - V_0(\sin^2 x + \sin^2 y)u + u^3 = \mu u, \quad (5.75)$$

όπου μ είναι η σταθερά διάδοσης. Για να υπολογίσουμε λοιπόν την λύση της εξίσωσης (5.75) παίρνουμε ότι $M=c-\nabla^2$ όπου c θετική σταθερά. Παρακάτω ακολουθεί ο κώδικας και το γράφημα της μεθόδου για $c=2$, $\mu = -3.7$ και $\Delta t=0.9$ για το σχήμα AITEM.

Εκτελώντας τον κώδικα λαμβάνουμε την αναδρομική λύση του σολιτονίου με την συγκεκριμένη μέθοδο άλλα και το διάγραμμα σφάλματος σε σχέση με τον αριθμό βημάτων που εκτελέστηκαν για να επιτευχθεί η λύση.

Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα το σφάλμα της λύσης πέφτει κάτω από 10^{-10} σε 162 επαναλήψεις.

Listing 5.5: AITEM CODE 2DNLS-PERIODICPOT.

```

1 Lx=10*pi; Ly=10*pi; Nx=128; Ny=128; maxerror=1e-10;
   nmax=500;
2 dx=Lx/Nx; x=-Lx/2:dx:Lx/2-dx; kx=[0:Nx/2-1 -Nx
   /2:-1]*2*pi/Lx;
3 dy=Ly/Ny; y=-Ly/2:dy:Ly/2-dy; ky=[0:Ny/2-1 -Ny
   /2:-1]*2*pi/Ly;
4 [X,Y]=meshgrid(x, y); [KX,KY]=meshgrid(kx, ky); K2=KX
   .^2+KY.^2;
5 V=6*(sin(X).^2+sin(Y).^2);
6 P=1.9092; c=2; DT=0.9;
7 u=sech(2*sqrt(X.^2+Y.^2));
8 % initial condition
9 u=u*sqrt(P/(sum(sum(abs(u.*u)))*dx*dy));
10 % power normalization
11 for nn=1:nmax
12 % iteration starts
13 L00u=ifft2(-K2.*fft2(u))+(u.*u-V).*u;
14 Minvu=ifft2(fft2(u)./(c+K2));
15 mu=sum(sum(Minvu.*L00u))/sum(sum(Minvu.*u));
16 L0u=L00u-mu*u;
17 uerror(nn)=max(max(abs(L0u)));
18 if uerror(nn) < maxerror
19 break
20 end
21 u=u+ifft2(fft2(L0u)./(c+K2))*DT;
22 u=u*sqrt(P/(sum(sum(abs(u.*u)))*dx*dy));
23 end
24 % iteration ends
25 mu
26 subplot(221); mm=35:94; mesh(x(mm), y(mm), u(mm,mm));
27 axis([x(mm(1)) x(mm(end)) y(mm(1)) y(mm(end)) 0 1.3]);
28 xlabel('x'),ylabel('y'),zlabel('u')
29 subplot(222); semilogy(0:nn-1, uerror, 'linewidth', 2)
   ;
30 axis([0 170 1e-11 10])
31 xlabel('number of iterations'),ylabel('error')

```

Κεφάλαιο 6

Αριθμητικές Μέθοδοι ολοκλήρωσης για μη γραμμικές κυματικές εξισώσεις

Οι αριθμητικοί υπολογισμοί παίζουν σημαντικό ρόλο στη μελέτη των μη γραμμικών κυμάτων. Πολλά σημαντικά φαινόμενα, όπως ελαστική σύγκρουση σολιτονίων KdV και η σκέδαση φράκταλ σε αλληλεπιδράσεις εντοπισμένων κυμάτων, ανακαλύφθηκαν πρώτα με αριθμητικούς υπολογισμούς. Τέτοιες αριθμητικές ανακαλύψεις παρακίνησαν περαιτέρω αναλυτικές έρευνες, οι οποίες στη συνέχεια οδήγησαν σε βαθύτερη κατανόηση αυτών των φαινομένων. Οι αριθμητικοί υπολογισμοί είναι ιδιαίτερα σημαντικοί για τη μελέτη μη ολοκληρώσιμων εξισώσεων.

Τα τελευταία χρόνια έχει γίνει μεγάλη πρόοδος στις αριθμητικές μεθόδους για μη γραμμικές εξισώσεις κυμάτων και έχουν αναπτυχθεί πολλές εξαιρετικά ακριβείς και αποτελεσματικές αριθμητικές τεχνικές. Σε αυτό το κεφάλαιο, περιγράφουμε αριθμητικές μεθόδους για διάφορες πτυχές υπολογισμών των μη γραμμικών κυμάτων όπως προσομοίωση εξέλιξης και υπολογισμός λύσεων μεμονωμένων κυμάτων. Θα αναπτυχθούν θεμελιώδεις ιδιότητες αυτών των μεθόδων, όπως η ακρίβεια, η αριθμητική σταθερότητα, οι συνθήκες σύγκλισης και οι ταχύτητες σύγκλισης. Θα δείξουμε ότι όλες αυτές οι μέθοδοι που παρουσιάζουμε έχουν φασματική χωρική ακρίβεια. Δηλαδή, το χωρικό σφάλμα εξασθενεί εκθετικά με την απόσταση από την κεντρική δομή (για ομαλές συναρτήσεις). Έτσι, αυτές οι μέθοδοι αποδίδουν εξαιρετικά ακριβή αριθμητικά αποτελέσματα.

6.1 Αριθμητικές Μέθοδοι για Προσομοιώσεις Χρονικής Εξέλιξης

Η προσομοίωση χρονικής εξέλιξης μιας μη γραμμικής κυματικής εξίσωσης που ξεκινά από μια δεδομένη αρχική συνθήκη είναι σίγουρα σημαντική για την μελέτη μη γραμμικών κυμάτων. Ένα παράδειγμα είναι η αριθμητική προσομοίωση της εξίσωσης KdV από τους Zabusky και Kruskal (1965), που οδήγησε στην ανακάλυψη των σολιτονίων και στην εφεύρεση του μετασχηματισμού αντίστροφης σκέδασης (Gardner et al. (1967)). Στις πρώιμες προσομοιώσεις εξέλιξης εξισώσεων μη γραμμικών κυμάτων χρησιμοποιούνται κυρίως μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών (όπως στο Zabusky και Kruskal (1965)), που έχουν χαμηλή χωρική ακρίβεια. Ξεκινώντας από τη δεκαετία του 1970, είχαν αναπτυχθεί διάφοροι τύποι φασματικών μεθόδων. Στη συνέχεια, όταν συνδυάζεται με σχήματα βηματισμού υψηλής ταχύτητας (όπως οι μέθοδοι Runge-Kutta), μπορεί να επιτευχθεί υψηλή συνολική ακρίβεια. Όλες αυτές οι μέθοδοι είναι πολύ εύκολο να εφαρμοστούν, ειδικά χρησιμοποιώντας λογισμικά πακέτα όπως το MATLAB. Αυτό κάνει την προσομοίωση της εξέλιξης των εξισώσεων μη γραμμικών κυμάτων πολύ προσιτή και βολική σήμερα. Έχουν εφευρεθεί πολλοί τύποι φασματικών μεθόδων. Σε αυτή την ενότητα, περιγράφουμε δύο από αυτές: την Μέθοδο των Γραμμών και την Ψευδοφασματική μέθοδο. Για να δείξουμε τις επιδόσεις τους, τις εφαρμόζουμε στις εξισώσεις που χρησιμοποιήθηκαν παραπάνω, στην μη γραμμική NLS και στην εξίσωση KDV. Θα παρουσιαστούν επίσης οι αντίστοιχοι κωδικοί MATLAB. Πρέπει να τονιστεί ότι η επιλογή της εξίσωσης NLS και KDV ως παράδειγμα είναι τυχαία. Αυτές οι αριθμητικές μέθοδοι δεν έχουν καμία σχέση με την ιδιότητα ολοκληρωσιμότητας της εξίσωσης NLS και επομένως μπορεί να εφαρμοστεί εξίσου σε άλλες μη ολοκληρώσιμες εξισώσεις σε αυθαίρετες χωρικές διαστάσεις και οι τροποποιήσεις των προγραμμάτων μας στο MATLAB σε εξισώσεις εξέλιξης είναι συχνά απλές.

6.2 Μέθοδος των γραμμών

Η πρώτη μέθοδος που θα μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι η αποκαλούμενη Μέθοδος των γραμμών, η αλλιώς Method of Lines (MOL). Πρόκειται για μια υπολογιστική μέθοδο αριθμητικής επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων σύμφωνα με την οποία γίνεται αντικατάσταση των χωρικών παραγώγων της μερικής διαφορικής εξίσωσης με μια αριθμητική προσέγγιση. Για την παρουσίαση της μεθόδου θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση την γραμμική εξίσωση μεταφοράς:

$$u_t + cu_x = 0, \quad (6.1)$$

όπου c είναι η γραμμική ταχύτητα ή ταχύτητα ροής. Επομένως σύμφωνα με την μέθοδο των γραμμών θα πρέπει να αντικαταστήσουμε την χωρική παράγωγο u_x με μια αλγεβρική προσέγγιση της. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί εάν χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών και πιο συγκεκριμένα με την προς τα εμπρός πεπερασμένη διαφορά έχουμε ότι:

$$u_x \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \quad (6.2)$$

όπου i ο δείκτης κατά μήκος του x και Δx η απόσταση του x_i από το x_{i-1} . Η προσέγγιση λοιπόν της μεθόδου των γραμμών για την εξίσωση (6.1) θεωρώντας M χωρικά σημεία θα είναι:

$$\frac{du_i}{dt} = -c \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}, \quad 1 \leq i \leq M \quad (6.3)$$

Επομένως εξίσωση (6.3) πλέον εκφράζεται από ένα σύστημα M ΣΔΕ καθώς περιέχει μόνο μια ανεξάρτητη μεταβλητή, το t . Η μετατροπή αυτή από μερική διαφορική (6.1) σε ένα σύστημα ΣΔΕ (6.3) αποτελεί την ουσία των μεθόδων των γραμμών. Δηλαδή η αντικατάσταση της χωρικής παραγώγου, στην περίπτωση μας το u_x , μετατρέπει την μερική διαφορική εξίσωση σε ένα σύστημα από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Για να υπολογίσουμε λοιπόν την λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης, αρκεί να υπολογίσουμε τη λύση της προσέγγισης του συστήματος των συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Η εξίσωση (6.1) είναι πρώτης τάξης ως προς t και πρώτης τάξης ως προς x επομένως απαιτεί μια αρχική συνθήκη και μια συνοριακή.

$$u(x, 0) = f(x) \quad (6.4)$$

$$u(0, t) = g(t) \quad (6.5)$$

Η εξίσωση (6.3) αποτελεί M πρώτης τάξης ΣΔΕ αρχικών συνθηκών και συνεπώς απαιτεί M αρχικές συνθήκες. Από την (6.4) συμπεραίνουμε ότι αυτές είναι οι

$$u(x_i, 0) = f(x_i), \quad 1 \leq i \leq M \quad (6.6)$$

Επιπλέον, εφαρμόζοντας την (6.4) για το πλεγματικό σημείο $i = 1$ έχουμε

$$u(x_1, t) = g(t) \quad (6.7)$$

Οι εξισώσεις (6.3), (6.6) και (6.7) αποτελούν την ολοκληρωμένη προσέγγιση μεθόδου των γραμμών της εξίσωσης (6.1) οι οποίες καθορίζονται από τις εξισώσεις (6.4) και (6.5). Η λύση του συστήματος ΣΔΕ δίνει M συναρτήσεις

$$u_1(t), u_2(t), \dots, u_{M-1}(t), u_M(t) \quad (6.8)$$

οι οποίες είναι η προσέγγιση του $u(x, t)$ στα σημεία $i = 1, 2, \dots, M$. Η προσέγγιση της πεπερασμένης διαφοράς της εξίσωσης (6.2) μπορεί να γραφτεί ως:

$$u_x \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (6.9)$$

όπου $O(\Delta x)$ δηλώνει την τάξη του Δx , δηλαδή το σφάλμα αποκοπής της προσέγγισης της εξίσωσης (6.3) είναι ανάλογο του Δx στην πρώτη δύναμη. Έτσι η εξίσωση (6.9) ονομάζεται πρώτης τάξης πεπερασμένη διαφορά, αφού το σφάλμα αποκοπής του Δx είναι στην πρώτη δύναμη. Όταν το $\Delta x \rightarrow 0$ η προσέγγιση της εξίσωσης (6.2) είναι η παράγωγος. Ωστόσο, στους προγραμματιστικούς υπολογισμούς το Δx παραμένει πεπερασμένο, άρα και η εξίσωση (6.2) παραμένει προσέγγιση.

Για να μελετήσουμε την μη γραμμική NLS με τη μέθοδο των γραμμών απαιτείται μία προετοιμασία. Αρχικά θεωρούμε το πραγματικό και φανταστικό μέρος της ανεξάρτητης μεταβλητής $u = x + iy$. Εισαγάγοντας τη μεταβλητή αυτή στην (4.1) και χωρίζοντας το πραγματικό με το φανταστικό μέρος παίρνουμε τις εξισώσεις:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -P \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - Q |u|^2 y \quad (6.10)$$

και

$$\frac{\partial y}{\partial t} = P \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + Q |u|^2 x. \quad (6.11)$$

Όπου z η χωρική μεταβλητή καθώς για x, y έχουμε δηλώσει το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του u .

Έπειτα προχωρούμε στη χωρική διακριτοποίηση θεωρώντας κατάρχας τη χωρική διάσταση να βρίσκεται σε ένα πεπερασμένο διάστημα $z \in [z_0, z_{end}]$ και θεωρώντας $N + 1$ σημεία στο διάστημα αυτό με $z_i = z_0 + j\Delta z$ με $i = 0, 1, 2, \dots, N$ και $\Delta z = \frac{z_{end} - z_0}{N}$ το χωρικό βήμα. Έπειτα, χρησιμοποιούμε τον τύπο των πεπερασμένων διαφορών 2ης τάξης για να αντικαταστήσουμε την παράγωγο δευτερης τάξης των (6.10)-(6.11) και παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{x_i}{dt} &= -P \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta z^2} - Q |u|^2 y_i \\ \frac{y_i}{dt} &= P \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta z^2} + Q |u|^2 x_i \end{aligned}, \quad i = 0 \dots N, \quad (6.12)$$

ή θεωρώντας το συμβολισμό $\Delta_i u = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}$, οι παραπάνω γίνονται:

$$\begin{aligned} \frac{x_i}{dt} &= -P \Delta_i y - Q |u|^2 y_i \\ \frac{y_i}{dt} &= P \Delta_i x + Q |u|^2 x_i \end{aligned}, \quad i = 0 \dots N. \quad (6.13)$$

Έπειτα πρέπει να ορίσουμε οριακές συνθήκες για το παραπάνω σύστημα. Δύο από τις δημοφιλέστερες επιλογές είναι:

- Περιοδικές συνοριακές συνθήκες

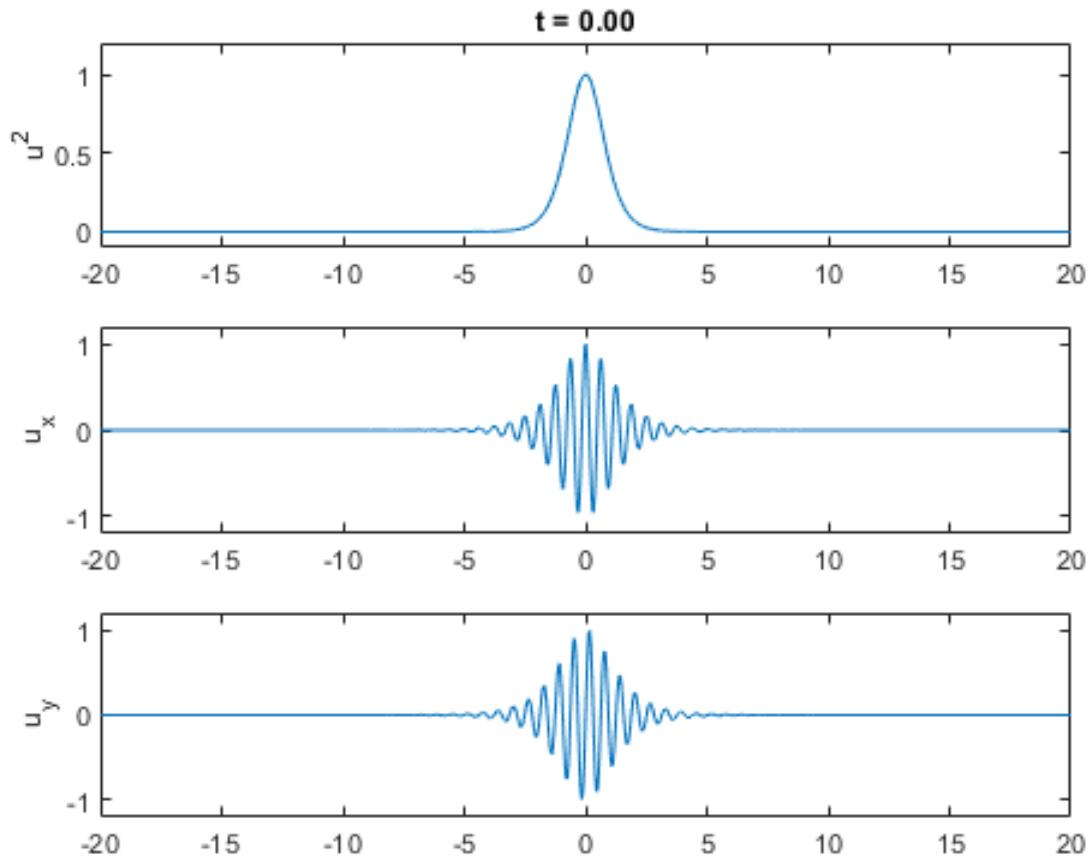
$$u_{N+1} = u_0, \quad u_{-1} = u_N, \quad (6.14)$$

- Συνοριακές συνθήκες Dirichlet

$$u_{N+1} = 0, \quad u_{-1} = 0. \quad (6.15)$$

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήσαμε περιοδικές συνοριακές συνθήκες.

Με τον τρόπο αυτό μετατρέψαμε τη ΜΔΕ (4.1) στο σύστημα ΣΔΕ (6.13) και αυτό που απομένει είναι να θεωρήσουμε το κατάλληλο σχήμα ολοκλήρωσης ΣΔΕ. Επομένως θεωρώντας περιοδικές συνοριακές συνθήκες και κάνοντας χρήση μιας Αναλυτής RK4 έχουμε το εξής αποτέλεσμα.



Βλέπουμε αρχικά το προφίλ του u στη συνέχεια το πραγματικό μέρος του u και τέλος το φανταστικό μέρος.

Listing 6.1: MOL 1D-NLS.

```

1 clear;
2 clc;
3 format long;
4 global p q hz
5 p=0.5;q=1;
6 tic;
7 t0=0;tend=0;hz=0.01; ht=0.0001;
8 t=t0:ht:tend;
9 nt=length(t);
10 tdrawstep=0.02;

```

```

11 tdraw=t0:tdrawstep:tend;
12
13 %drwlimits
14 umin=-0.1;umax=1.2;
15 xmin=-1.2;xmax=1.2;
16
17 %z=spatial variable
18 zmin=-20;zmax=20;
19 z=zmin:hz:zmax;
20 ns=length(z);
21
22 x=zeros(1,ns);
23 y=zeros(1,ns);
24
25 u0=1;c=10;
26 %c=0;
27 x=x+sqrt(2*abs(p)/abs(q))*u0*sech(u0*(z)).*cos(c*(z));
28 y=y+sqrt(2*abs(p)/abs(q))*u0*sech(u0*(z)).*sin(c*(z));
29
30 %u0=2;c=8;
31 %c=0
32 %x=x+sqrt(2*abs(p)/abs(q))*u0*sech(u0*(z-10)).*sin(c*(
    z-10));
33 %y=y+sqrt(2*abs(p)/abs(q))*u0*sech(u0*(z-10)).*cos(c*(
    z-10));
34
35
36
37 nn=[];ee=[];
38     nn=[nn,norm_nls([x';y'])];
39     ee=[ee,energy_nls([x';y'])];
40     plot_nls(t(1),z,[x';y'],zmin,zmax,umin,umax,
        xmin,xmax);
41     %plot_integrals(t(1:1),nn,ee);
42
43 for i=2:nt
44
45     [x1,y1]=OneStepRK4(@f,x,y,ht);
46     nn=[nn,norm_nls([x1';y1'])];
47     ee=[ee,energy_nls([x1';y1'])];
48     if (mod(t(i),tdrawstep)>=0 && mod(t(i),
        tdrawstep)<ht)
49         plot_nls(t(i),z,[x1';y1'],zmin,zmax,umin,
            umax,xmin,xmax);

```

```

50         %plot_integrals(t(1:i),nn,ee);
51         pause(0.);
52     end;
53     %t=t+ht;
54     x=x1;
55     y=y1;
56
57 end;
58 toc;
59
60 function [x1,y1]=OneStepRK4(f,x,y,ht)
61
62     [k1x,k1y]=f(x,y,ht);
63
64     a=x+k1x/2;
65     b=y+k1y/2;
66
67     [k2x,k2y]=f(a,b,ht);
68
69     a=x+k2x/2;
70     b=y+k2y/2;
71
72     [k3x,k3y]=f(a,b,ht);
73
74     a=x+k3x;
75     b=y+k3y;
76
77     [k4x,k4y]=f(a,b,ht);
78
79     x1=x+(k1x+2*k2x+2*k3x+k4x)/6;
80     y1=y+(k1y+2*k2y+2*k3y+k4y)/6;
81 end
82
83 function [z1,z2]=f(x,y,ht)
84 global p q
85 p1=diffmatrix(y);
86 p2=diffmatrix(x);
87 u2=x.^2+y.^2;
88 z1=ht.*(-p*p1-q*u2.*y);
89 z2=ht.*(p*p2+q*u2.*x);
90 end
91
92
93 function pp=diffmatrix(x)

```

```

94 global hz
95 ns=length(x);
96
97 d2=diff(x,2);
98 ad1=(x(2)+x(ns)-2*x(1)); ad3=(x(1)+x(ns-1)-2*x(ns));
99 pp=[ad1,d2,ad3]./hz.^2;
100 end
101
102 function plot_nls(t,z,xy,zmin, zmax, umin, umax,xmin,
    xmax)
103     figure(1)
104     ns=length(xy)/2;
105     x=xy(1:ns)';
106     y=xy(ns+1:end)';
107     uu=x.^2+y.^2;
108     subplot(3,1,1);
109     plot(z,uu);
110     ylabel('u^2');
111     axis([zmin zmax umin umax])
112     title(sprintf('t = %.2f',t));
113     subplot(3,1,2);
114     plot(z,x);
115     ylabel('u_x');
116     axis([zmin zmax xmin xmax])
117     subplot(3,1,3);
118     plot(z,y);
119     ylabel('u_y');
120     axis([zmin zmax xmin xmax])
121     drawnow;
122 end
123
124 function e=energy_nls(xy)
125 global hz
126
127 ns=length(xy)/2;
128 x=xy(1:ns)';y=xy(ns+1:end)';
129 xp=[x(2:ns) x(1)]; xm=[x(ns) x(1:ns-1)];
130 dx=xp-xm;
131 yp=[y(2:ns) y(1)]; ym=[y(ns) y(1:ns-1)];
132 dy=yp-ym;
133 du2=dx.^2+dy.^2;
134 u4=(x.^2+y.^2).^2;
135 f=du2-0.5.*u4;
136 a=ones(ns,1);a(1)=0.5;a(end)=0.5;

```



```
137 e=hz.*f*a;
138 end
139
140 function y=norm_nls(xy)
141 global hz
142 ns=length(xy)/2;
143 uu=xy(1:ns).^2+xy(ns+1:end).^2;
144 a=ones(1,ns);
145 a(1)=0.5;a(end)=0.5;
146 y=hz.*a*uu;
147 end
```

6.3 Ψευδοφασματική Μέθοδος

Μία από τις πρώτες φασματικές μεθόδους που αναπτύχθηκαν για τις εξισώσεις κυμάτων είναι η ψευδοφασματική μέθοδος. Η Ψευδοφασματική μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων και τα διακριτά φασματικά χαρακτηριστικά που σχετίζονται με τον μετασχηματισμό Fourier για την ανάλυση των αριθμητικών αποτελεσμάτων. Η τελευταία προσέγγιση ονομάζεται διακριτή φασματική ανάλυση. Το κύριο πλεονέκτημα της ψευδοφασματικής μεθόδου σε σύγκριση με άλλες μεθόδους ολοκλήρωσης όπως για παράδειγμα, τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, σχετίζεται με το υπολογιστικό κόστος. Από την άλλη πλευρά, τα φασματικά χαρακτηριστικά που σχετίζονται με τον μετασχηματισμό Fourier φέρουν πρόσθετες πληροφορίες σχετικά με την εσωτερική δομή των κυμάτων, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση της χρονικής-χωρικής συμπεριφοράς των αριθμητικών λύσεων.

6.3.1 Ψευδοφασματική Μέθοδος - Εξίσωση NLS

Για να μπορέσουμε να περιγράψουμε αυτή τη μέθοδο λίγο πιο πρακτικά θα πάρουμε ως παράδειγμα την εξίσωση NLS.

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0 \quad (6.16)$$

Αφού διακριτοποιηθεί αυτή η εξίσωση στο χώρο, γίνεται

$$u_{n,t} = i(u_{n,xx} + 2|u_n|^2u_n) \quad (6.17)$$

όπου το u_n είναι η λύση σε ένα σημείο x_n του πλέγματος.

Η βασική ιδέα του ψευδοφασματικού μεθόδου είναι η χρήση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier για τον υπολογισμό της χωρικής παραγώγου $u_{n,xx}$ και η χρήση κατάλληλης προσεγγιστικής μεθόδου (Runge-Kutta, Adams, Leapfrog, κ.λπ.) για να προχωρήσει στον χρόνο.

Ο υπολογισμός του $u_{n,xx}$ από τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier είναι

$$u_{n,xx} = F^{-1}[(ik)^2 F(u_n)] \quad (6.18)$$

Το παραπάνω σχήμα προκύπτει με τον εξής συλλογισμό.
Εφόσον

$$F(u_n(x)) = F(\omega) \quad (6.19)$$

και

$$F^{-1}[F(u_n(x))] = u_n(x) \quad (6.20)$$

τότε για την πρώτη παράγωγο της u_n θα έχουμε

$$F\left[\frac{\partial}{\partial x}u_n(x)\right] = 2\pi i\omega F(u_n(x)) \quad (6.21)$$

και αν $2\pi\omega = k$ τότε έχουμε για την δεύτερη παράγωγο του $u_n(x)$ ότι

$$F\left[\frac{\partial}{\partial x^2}u_n(x)\right] = (ki)^2F(u_n(x)) \quad (6.22)$$

$$F\left[\frac{\partial}{\partial x^2}u_n(x)\right] = -k^2F(u_n(x)) \quad (6.23)$$

επομένως με χρήση του αντίστροφου έχουμε ότι

$$F^{-1}[-k^2F(u_n(x))] = \frac{\partial}{\partial x^2}u_n(x) \quad (6.24)$$

όπου είναι και το ζητούμενο.

Για μια ομαλή συνάρτηση $u(x, t)$, η ακρίβεια αυτού του υπολογισμού είναι φασματική. Δηλαδή, το σφάλμα είναι μικρότερο από οποιαδήποτε δύναμη του χωρικού διαστήματος x (Trefethen (2000), Boyd (2001)). Ο λόγος είναι ότι όταν μια συνεχής συνάρτηση διακριτοποιείται, το σφάλμα διακριτοποίησης προκαλείται από την αλλοίωση των υψηλών κυμματαριθμών στους χαμηλούς κυμματαριθμούς. Η διακριτοποιημένη λειτουργία έχει πεπερασμένο φασματικό εύρος ζώνης $[-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}]$ ενώ η συνεχής συνάρτηση έχει ένα άπειρο φασματικό εύρος ζώνης. Έτσι το σφάλμα διακριτοποίησης είναι μικρότερο από οποιαδήποτε δύναμη του Δx , που δίνει τη φασματική ακρίβεια των $u_{n,xx}$ με τον τύπο (6.18). Εάν η συνάρτηση $u(x)$ μπορεί να επεκταθεί σε μια αναλυτική συνάρτηση σε μια οριζόντια λωρίδα του το μιγαδικού x επιπέδου, τότε αυτό το σφάλμα διακριτοποίησης διασπάται εκθετικά με το x λόγω του Θεωρήματος Paley-Wiener (Trefethen (2000)). Αφού ληφθούν τα $u_{n,xx}$, η χωρικά διακριτοποιημένη εξίσωση (6.18) μπορεί στη συνέχεια να προωθηθεί στο χρόνο με ένα σχήμα χρονικής βηματοδότησης όπως η μέθοδος Runge-Kutta. Εδώ επιλέγουμε την κλασική μέθοδο Runge-Kutta τέταρτης τάξης για χρονικά βήματα. Γιαυτό προκύπτει ότι η χρονική ακρίβεια είναι τέταρτης τάξης. Ο κώδικας MATLAB του προκύπτοντος σχήματος για την εξίσωση NLS (6.16) εμφανίζεται παρακάτω.

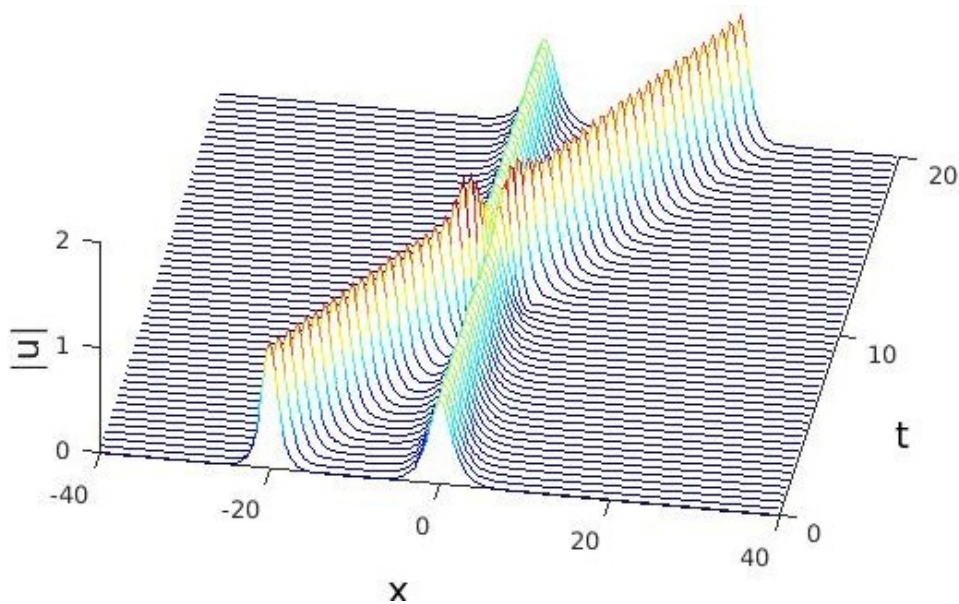
Listing 6.2: Pseudospectral Method-NLS.

```

1 clear;
2 clc;
3 L = 80; N = 256;
4 dt = 0.035
5 tmax = 20;
6 nmax = round(tmax/dt);
7 dx = L/N
8 dt/dx^2
9 2*sqrt(2)/pi^2
10 x = (-L/2:dx:L/2-dx)';
11 k = [0:N/2-1 -N/2:-1]'*2*pi/L;
12 k2 = k.^2;
13 u = 1.2*sech(1.2*(x + 20)).*exp(1.2i*x) + 0.8*sech
    (0.8*x);
14 udata = u; tdata = 0;
15
16 for nn = 1:nmax %
    integration begins
17     du1 = 1i*(ifft(-k2.*fft(u)) + 2*u.*u.*conj(u));
18     v = u + 0.5*du1*dt;
19     du2 = 1i*(ifft(-k2.*fft(v)) + 2*v.*v.*conj(v));
20     v=u+0.5*du2*dt;
21     du3 = 1i*(ifft(-k2.*fft(v)) + 2*v.*v.*conj(v));
22     v = u + du3*dt;
23     du4 = 1i*(ifft(-k2.*fft(v)) + 2*v.*v.*conj(v));
24     u = u + (du1 + 2*du2 + 2*du3 + du4)*dt/6;
25     if mod(nn, 20) == 0
26         udata = [udata u];
27         tdata = [tdata nn*dt];
28     end
29 end
30 % integration ends
31
32 waterfall(x, tdata, abs(udata')); %
    solution plotting
33 colormap(jet(128)); view(10, 60)
34 text(-2, -6, 'x', 'fontsize', 15)
35 text(50, 5, 't', 'fontsize', 15)
36 zlabel('|u|', 'fontsize', 15)
37 axis([-L/2 L/2 0 tmax 0 2]); grid off
38 set(gca, 'xtick', [-40 -20 0 20 40])
39 set(gca, 'ytick', [0 10 20])

```

```
40 | set(gca, 'ztick', [0 1 2])
```



Σχήμα 6.1: NLS Ψευδοφασματική Μέθοδος

Η αρχική συνθήκη σε αυτόν τον κώδικα λαμβάνεται ως δύο μονά σολιτόνια της εξίσωσης NLS που κινούνται το ένα προς το άλλο. Εκτελώντας αυτόν τον κώδικα, παίρνουμε το Σχήμα 6.1, το οποίο δείχνει ότι η σύγκρουση μεταξύ αυτών των δύο σολιτονίων είναι ελαστική και το μόνο αποτέλεσμα της σύγκρουσης είναι η μετατόπιση θέσης. Υπάρχει επίσης μια μετατόπιση φάσης, αλλά δεν είναι ορατή στο διάγραμμα. Το αριθμητικό αποτέλεσμα συμφωνεί με τη θεωρία της αντίστροφης σκέδασης της εξίσωσης NLS. Έχουμε εξηγήσει ότι η ψευδοφασματική μέθοδος είναι φασματικά ακριβής στο χώρο. Για να επαληθεύσουμε αυτό το γεγονός, παίρνουμε μια πολύ μικρή τιμή χρονικού βήματος $t = 0,0005$ στον παραπάνω κώδικα, έτσι ώστε το χρονικό σφάλμα να είναι αμελητέο. Θεωρούμε επίσης ότι η αρχική συνθήκη είναι μια ενιαία κίνηση σολιτονίου.

$$u(x, 0) = \operatorname{sech}(x + 10)e^{ix} \quad (6.25)$$

Αυτή η αρχική συνθήκη είναι βολική καθώς η ακριβής λύση της σε μεταγενέστερους χρόνους είναι απλώς $\operatorname{sech}(x - 2t + 10)e^{ix}$, που μας διευκολύνει να υπολογίσουμε το σφάλμα των αριθμητικών λύσεων σε μεταγενέστερες στιγμές για διαφορετικές αποστάσεις πλέγματος.

6.3.2 Η RK στην ψευδοφασματική μέθοδο

Σε αυτό το σημείο θα δούμε αναλυτικότερα πως δουλεύει η RK4 που είναι σημαντικό κομμάτι στην ψευτοφασματική μέθοδο και την χρησιμότητα της με βάση τον παραπάνω κώδικα. Αρχικά να πούμε ότι αν θεωρήσουμε ένα γενικό πρόβλημα της μορφής:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (6.26)$$

Όπου h το μέγεθος του βήματος. Τότε η μέθοδος RK4 περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad t_{n+1} = t_n + h \quad (6.27)$$

και

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad (6.28)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_1}{2}\right), \quad (6.29)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_2}{2}\right), \quad (6.30)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3). \quad (6.31)$$

Εφόσον λοιπόν έχει χρησιμοποιηθεί η διακριτοποιημένη NLS θα το κρατήσουμε ως έχει.

Επομένως έχουμε το εξής πρόβλημα:

$$\frac{du_n}{dt} = f(t_n, y_n) \quad (6.32)$$

και εφόσον το πρόβλημα μας είναι η NLS τότε μπορούμε να το γράψουμε ως εξής:

$$\frac{du_n}{dt} = u_{n,t} \quad (6.33)$$

και

$$f(t_n, y_n) = i(u_{n,xx} + 2|u_n|^2 u_n) \quad (6.34)$$

Στον κώδικα που παρουσιάσαμε παραπάνω υπάρχει η μεταβλήτη du_1 η οποία στην ουσία είναι:

$$du_1 = f(t_1, y_1) = i(u_{1,xx} + 2|u_1|^2 u_1) \quad (6.35)$$

Σε αυτό το σημείο να αναφέρουμε ότι στην εξίσωση μας δεν είναι χρονο εξαρτώμενη επομένως:

$$du_1 = f(y_1) = i(u_{1,xx} + 2|u_1|^2 u_1) \quad (6.36)$$

Το οποίο είναι πιο κοντά στον κώδικα που δείξαμε. Επομένως στην περίπτωση μας η μέθοδος μετασχηματίζεται ως εξής:

$$du_1 = f(y) \quad (6.37)$$

$$du_2 = f(v) \quad (6.38)$$

$$du_3 = f(v) \quad (6.39)$$

$$du_4 = f(v) \quad (6.40)$$

Όπου v για την περίπτωση του du_2 είναι:

$$v = u + \frac{1}{2} du_1 dt \quad (6.41)$$

Για την περίπτωση του du_3 είναι:

$$v = u + \frac{1}{2} du_2 dt \quad (6.42)$$

Και για την περίπτωση du_4 έχουμε:

$$v = u + du_3 dt \quad (6.43)$$

Το $u_{n,xx}$ υπολογίζεται με τον μετασχηματισμό Fourier όπως ορίσαμε παραπάνω και το dt είναι το βήμα μας το οποίο ορίζεται κατάλληλα.

Με την εντολή $conj(u)$ παίρνουμε τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού u και έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα $|u_n|^2$.

6.3.3 Ψευτοφασματική μέθοδος - Εξίσωση KDV

Με την ίδια ακριβώς λογική που εφαρμόζουμε στην NLS μπορούμε να προσεγγίσουμε και την KDV με την μόνη διαφορά ότι σε αυτή την περίπτωση πρέπει να υπολογιστεί η ποσότητα $u_{n,xxx}$ όπου

$$u_{n,xxx} = -ik^3 F^{-1}F(u_n) \quad (6.44)$$

και αρχική συνθήκη

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}c \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{cx^2}\right) \quad (6.45)$$

όπου c η ταχύτητα διάδοσης του σολιτονίου. Παρακάτω παρατίθεται και ο κώδικας της KDV με την ψευτοφασματική μέθοδο.

Listing 6.3: Pseudospectral Method-KDV.

```

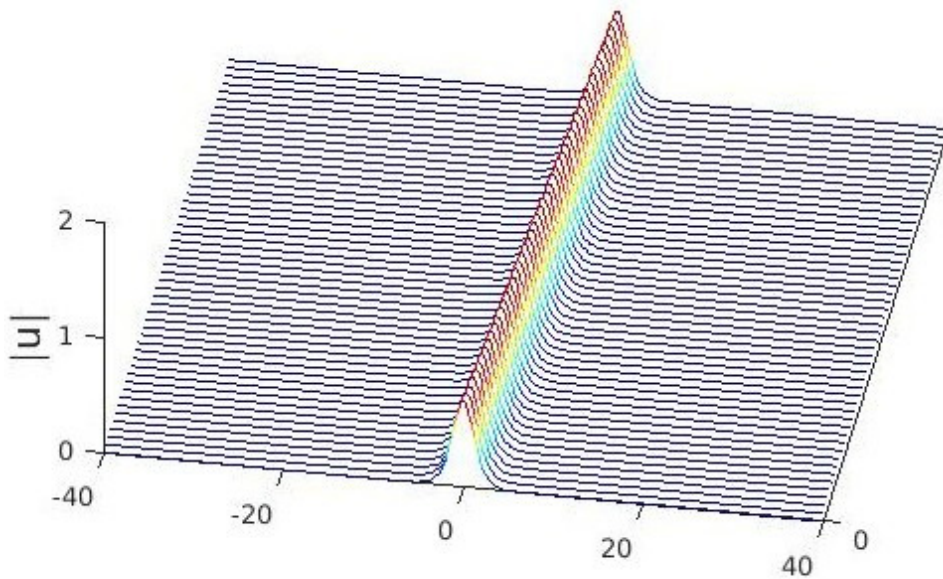
1  clear;
2  clc;
3  L = 80;
4  N = 256;
5  dt = 0.002;
6  tmax = 2;
7  nmax = round(tmax/dt);
8  dx = L/N;
9  x = (-L/2:dx:L/2-dx)';
10 k = [0:N/2-1 -N/2:-1]'*2*pi/L;
11 k1 = 1i*k;
12 k2 = -k.^2;
13 k3 = -1i*k.^3;
14 c=1.5;a=0;
15 UU=0.5*c*sech(0.5*sqrt(c)*(x)).^2;
16 u=0.5*c*sech(0.5*sqrt(c)*(x)).^2;
17 udata = u;
18 tdata = 0;
19
20
21  for nn = 1:nmax
22      du1 = real(-ifft(k3.*fft(u))) - real(3*ifft(k1.*
23          fft(u.^2)));
24      v = u + 0.5*du1*dt;
25      du2 = real(-ifft(k3.*fft(v))) - real(3*ifft(k1.*
26          fft(v.^2)));
27      v = u + 0.5*du2*dt;
28      du3 = real(-ifft(k3.*fft(v))) - real(3*ifft(k1.*
29          fft(v.^2)));
30      % du1 = -ifft(k3.*fft(u)) + 6*ifft(k1.*fft(u)).*u;
31      % v = u + 0.5*du1*dt;
32      % du2 = -ifft(k3.*fft(v)) + 6*ifft(k1.*fft(v)).*v;
33      % v = u + 0.5*du2*dt;
34      % du3 = -ifft(k3.*fft(v)) + 6*ifft(k1.*fft(v)).*v;
35      % v = u + du3*dt;
36      % du4 = -ifft(k3.*fft(v)) + 6*ifft(k1.*fft(v)).*v;
37      u = u + (du1 + 2*du2 + 2*du3 + du4)*dt/6;
38      if mod(nn, 20) == 0
39          udata = [udata u];

```

```

39     tdata = [tdata nn*dt];
40     end
41 end
42
43 waterfall(x, tdata, abs(udata'));
44 colormap(jet(128)); view(10, 60)
45 text(-2, -6, 'x', 'fontsize', 15)
46 text(50, 5, 't', 'fontsize', 15)
47 zlabel('|u|', 'fontsize', 15)
48 axis([-L/2 L/2 0 tmax 0 2]); grid off
49 set(gca, 'xtick', [-40 -20 0 20 40])
50 set(gca, 'ytick', [0 10 20])
51 set(gca, 'ztick', [0 1 2])

```

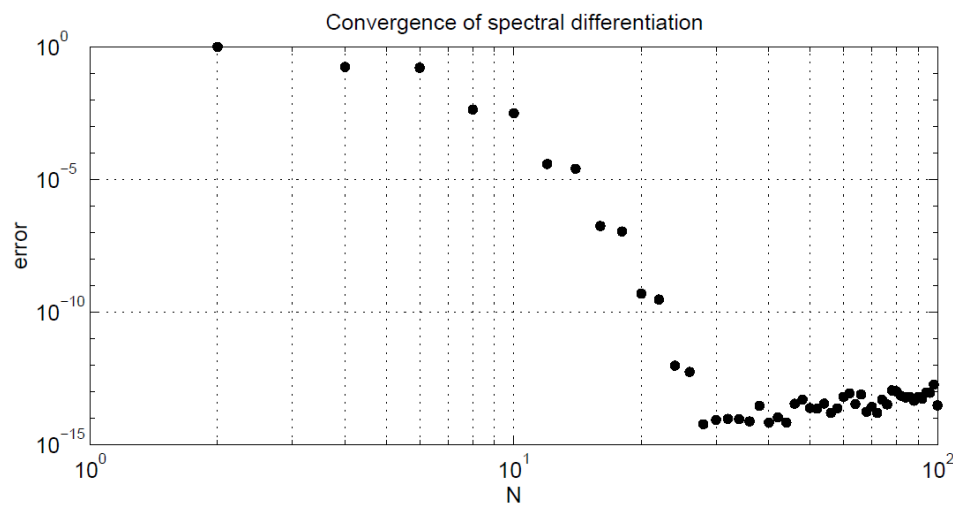
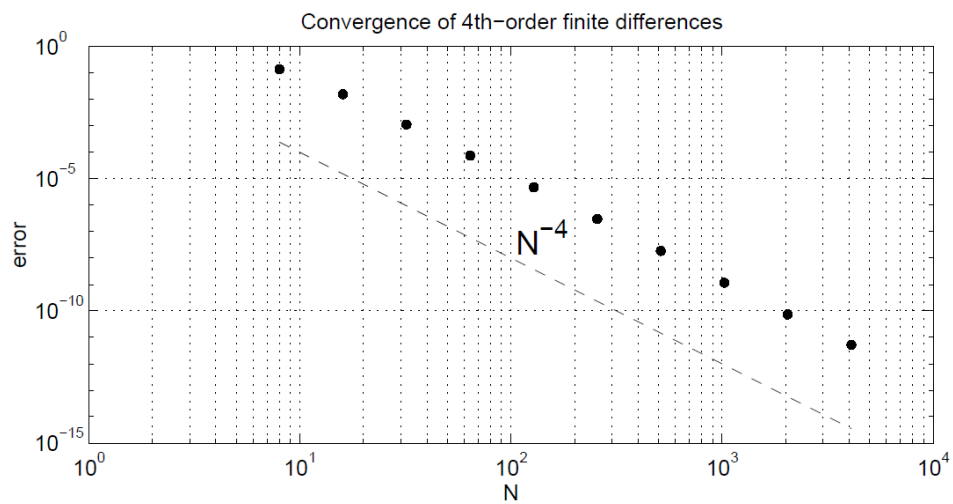


Σχήμα 6.2: Pseudospectral Method-KDV

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα

Με βάση τις παρατηρήσεις που κάναμε στο πρώτο κομμάτι της εργασίας, για τις μεθόδους αριθμητικής εύρεσης σολιτονίων, για τη διάστατη NLS με την μέθοδο ΑΙΤΕΜ χρειάστηκαν 115 επαναλήψεις περισσότερες από ότι χρειάστηκαν με την μέθοδο του Petviashvili, ενώ για την περίπτωση της μονοδιάστατης NLS χρειάστηκαν 53 επαναλήψεις περισσότερες με την μέθοδο ΑΙΤΕΜ. Σε αυτή την περίπτωση βάση αποτελεσμάτων, μια αρχική εκτίμηση είναι ότι η μέθοδος του Petviashvili συγκλίνει αρκετά πιο γρήγορα από την μέθοδο ΑΙΤΕΜ. Επίσης ένα αρνητικό της μεθόδου ΑΙΤΕΜ είναι ότι χρειάζεται μια αρχική εκτίμηση της ισχύος του σολιτονίου που δεν είναι ευκολο να υπολογιστεί. Στο δεύτερο κομμάτι της εργασίας είδαμε τις μεθόδους αριθμητικής επίλυσης μη γραμμικών κυματικών εξισώσεων και συγκρίνοντας τις δύο μεθόδους (MOL-Pseudo) θα παρατηρήσουμε ότι η Ψευδοφασματική Μέθοδος είναι πολύ πιο αποτελεσματική από την πρώτη μέθοδο όταν θεωρούμε περιοδικές συνοριακές συνθήκες. Αυτό οφείλεται στο ότι ο αριθμητικός υπολογισμός της δεύτερης παραγώγου μέσω του μετασχηματισμού Fourier είναι κατά πολύ ακριβέστερος αυτού μέσω των πεπερασμένων διαφορών το οποίο μπορούμε να το συμπεράνουμε συγκρίνοντας τα δύο γραφήματα. Στην πρώτη περίπτωση υπολογίζεται η δεύτερη παράγωγος μέσω πεπερασμένων διαφορών τέταρτης τάξης και στην δεύτερη υπολογίζεται με τον μετασχηματισμό Fourier. Για παράδειγμα για να τον υπολογισμό της δεύτερης παραγώγου μέσω πεπερασμένων διαφορών 4ης τάξης με σφάλμα χρειάστηκαν 1100 σημεία ενώ για το ίδιο σφάλμα μέσω του μετασχηματισμού Fourier χρειάστηκαν κάτι λιγότερο από 25 σημεία. Επομένως βάση αυτού στην Ψευδοφασματική μέθοδο μπορεί να χρησιμοποιηθεί πολύ μεγαλύτερο βήμα σε σχέση με την προηγούμενη μέθοδο [11].



Βιβλιογραφία

- [1] Παναγιώτης Μανιαδής, *Αριθμητική μελέτη δυναμικών ιδιοτήτων διακριτών Breather σε πλέγματα περιοδικά και μη*
- [2] Σεβαστός Διαμαντίδης, *Σημειώσεις Διάλεξης: ΜΔΕ 1ης τάξης*, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
- [3] Σεβαστός Διαμαντίδης, *Σημειώσεις Διάλεξης: Γραμμικές ΜΔΕ 2ης τάξης*, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
- [4] Μιχάλης Πλεξουσάκης, Παναγιώτης Χατζηπαντελίδης, *Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων*
- [5] Αθανάσιος Μπράτσος, *Μαθήματα Ανωτέρων Μαθηματικών*
- [6] Valery Seron, *Fourier Series, Fourier Transform and their Applications to Mathematical Physics*
- [7] Georgi P. Tolstov, *Fourier Series*
- [8] Χρήστος Ντάβας, *Η εξίσωση KdV από τις βασικές λύσεις μέχρι τον αντίστροφο μετασχηματισμό σκέδασης (IST)*
- [9] Jianke Yang, *Nolinear Waves in Integrable and Nonintegrable System*
- [10] William E. Schiesser, Graham W. Griffiths, *A COMPENDIUM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION MODELS: Method of Lines Analysis with Matlab*
- [11] Lloyd N. Thefethen, *Spectral Methods in Matlab*