



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ**  
**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΩΝ ΚΑΙ**  
**ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ**  
**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**  
**«ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΑ ΚΑΙ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΑ**  
**ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ»**  
**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

*«Η συνεισφορά του Πυθαγόρα στην Επιστήμη»*

Όνοματεπώνυμο

Κουτσοκώστα Ελένη Α.Μ 3252021008

Καβάλου Ελευθερία Α.Μ 3252021005

Τριμελής εξεταστική επιτροπή

Όνοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
Χαραλαμπίδης Γιάννης	Καθηγητής	
Κωστούλας Θεόδωρος	Αναπληρωτής Καθηγητής	
Λερός Ασημάκης	Επίκουρος Καθηγητής	

ΣΑΜΟΣ, 2023

## Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Πληροφοριακά και Επικοινωνιακά Συστήματα» και είναι αποτέλεσμα εντατικής δουλειάς πολλών μηνών. Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Γιάννη Χαραλαμπίδη, για την ευκαιρία που μας έδωσε να ασχοληθούμε με ένα αντικείμενο που ανταποκρίνεται στα επιστημονικά μας ενδιαφέροντα καθώς και για την αμέριστη βοήθεια και καθοδήγηση που μας προσέφερε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Οι γνώσεις και οι υποδείξεις του ήταν καθοριστικοί παράγοντες για την πορεία και την ολοκλήρωση των σπουδών μας.

Στη συνέχεια θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε ιδιαίτερος και τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής, τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Λερός Ασημάκης και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Κωστούλα Θεόδωρο για την αποτελεσματική συνεργασία, τις υποδείξεις τους και τη συμβολή τους στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας. Ευχαριστούμε θερμά όλους τους διδάσκοντες του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών για τη συνεργασία και την υποστήριξη τους στη διάρκεια των μαθημάτων.

Τέλος, ιδιαίτερες ευχαριστίες θέλουμε να εκφράσουμε προς τις οικογένειες μας για την συμπαράστασή τους, καθώς και την υλική και ηθική στήριξη των επιλογών μας.

## Περιεχόμενα

Ευχαριστίες.....	2
Περίληψη.....	4
Λέξεις Κλειδιά.....	5
Abstract .....	6
Key words.....	6
Πίνακας εικόνων .....	7
1. Εισαγωγή.....	8
2. Ο βίος του Πυθαγόρα .....	10
2.1 Οι μύθοι.....	10
2.2 Καταγωγή και εκπαίδευση. Τα ταξίδια του.....	12
2.3 Βασικές ιδέες του .....	16
2.3.1 Το δόγμα της μετενσάρκωσης.....	16
2.3.2 Ηθική και Θρησκεία.....	17
2.3.3 Τρόπος ζωής.....	21
2.3.4 Η διαίρεση της ψυχής.....	21
2.3.5 Ουράνια σώματα .....	22
2.3.6 Αρμονία των σφαιρών.....	24
2.3.7 Η τετρακτύς.....	24
2.4 Η πυθαγόρειος σχολή.....	26
3. Ο Πυθαγόρας ως μαθηματικός.....	32
3.1 Πυθαγόρεια Μεθοδολογία.....	32
3.2 Πυθαγόρεια Αριθμολογία.....	34
3.2.1 Ιδιότητες των αριθμών.....	48
3.2.2 Περιττοί και άρτιοι αριθμοί.....	49
3.2.3 Τρίγωνοι και τετράγωνοι αριθμοί.....	50
3.3 Αναλογίες .....	51
3.4 Μουσική .....	53
3.5 Πυθαγόρειο θεώρημα .....	54
3.6 Λογισμός .....	60
3.6.1. Διαφορικός λογισμός.....	61
3.6.2. Ολοκληρωτικός λογισμός.....	63
3.7 Πυθαγόρεια άλγεβρα.....	66
3.8 Πυθαγόρεια γεωμετρία.....	67
3.9 Ασυμμετρία .....	69
3.10 Αρρητότητα.....	71

4. Η σχέση μαθηματικών και φιλοσοφίας.....	74
4.1 Οι Προσωκρατικοί.....	75
4.2 Αναξίμανδρος ο Μιλήσιος .....	76
4.3 Ο Πλάτων και η φιλοσοφία.....	77
4.4 Αριστοτέλης .....	79
4.5 Η φιλοσοφία των μαθηματικών.....	81
4.6 Τα αλφαβητικά σύμβολα.....	87
5. Συμπεράσματα.....	91

## Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως στόχο να διερευνήσει τη ζωή, τη φιλοσοφία και την προσφορά του Πυθαγόρα του Σάμιου στην επιστήμη μέχρι και σήμερα. Ο Πυθαγόρας ήταν φιλόσοφος, μαθηματικός, γεωμέτρης και θεωρητικός της μουσικής. Σήμερα είναι γνωστός για το Πυθαγόρειο Θεώρημα, όμως αποτέλεσε μία πολυχιδή προσωπικότητα και η προσφορά του αποτέλεσε τον ακρογωνιαίο λίθο όλης της μετέπειτα πνευματικής δραστηριότητας της Ελλάδας και ολόκληρης της Δύσης.

Σε αυτήν την εργασία θα γίνει προσπάθεια για την ανίχνευση του βίου του Πυθαγόρα, της εκπαίδευσης που έλαβε αλλά και της ευρύτερης φιλοσοφίας του τρόπου ζωής του, που οδήγησε στην ίδρυση της περίφημης Πυθαγόρειας Σχολής, με σκοπό να φωτιστούν πτυχές της ζωής του πέρα από την ενασχόληση με τα μαθηματικά, κάτι που έχει αρχίσει να απασχολεί τους μελετητές μόνο τις τελευταίες δεκαετίες.

Έπειτα θα εξεταστεί η συνεισφορά του Πυθαγόρα σε ποικίλους τομείς του επιστητού. Συγκεκριμένα θα αναλυθεί η συνεισφορά του στα μαθηματικά, με την ανακάλυψη των άρρητων αριθμών, τον απειροστικό και διαφορικό λογισμό, την πυθαγόρεια άλγεβρα. Στη γεωμετρία, με το πυθαγόρειο θεώρημα και γενικότερα τον ρόλο του γεωμετρικού σχήματος, στη μουσική, με την ανακάλυψη του μουσικού διαστήματος και τη θεωρία της αρμονίας των σφαιρών και στην αστρονομία με το ιδιαίτερο πυθαγόρειο αστρονομικό μοντέλο του σύμπαντος.

Τέλος, είναι γνωστό ότι φιλόσοφοι ήδη από την αρχαιότητα έχουν εντοπίσει μία διαλεκτική σχέση μεταξύ των μαθηματικών και της φιλοσοφίας. Ο Πυθαγόρας έδινε φιλοσοφική προέκταση σε όλες τις θεωρίες και ανακαλύψεις του. Η φιλοσοφία διαπερνούσε οριζόντια τον τρόπο ζωής των Πυθαγορείων και καθόριζε τη δράση

τους. Γι' αυτό κρίνεται σκόπιμο να επιχειρηθεί μία ευρύτερη σύνδεση της επιστήμης των μαθηματικών με τη φιλοσοφία στο τελευταίο κεφάλαιο. Θα γίνει αναφορά στο έργο των Προσωκρατικών φιλοσόφων, αλλά και στον Πλάτωνα και στον Αριστοτέλη, των οποίων η σχέση με τα μαθηματικά άνοιξε τον δρόμο για τη φιλοσοφία τους και η φιλοσοφία τους ήταν δομημένη με μαθηματικούς όρους. Θα αναφερθούν επίσης οι σύγχρονες αντιλήψεις γύρω από τη φιλοσοφία των μαθηματικών. Έπειτα θα παρατεθούν τα συμπεράσματα στα οποία έχει καταλήξει η εργασία.

### Λέξεις Κλειδιά

Πυθαγόρας, Πυθαγόρεια Σχολή, μαθηματικά, γεωμετρία, μουσική, αστρονομία, φιλοσοφία, Πυθαγόρειο Θεώρημα, αριθμός, διαφορικός λογισμός, απειροστικός λογισμός, μουσικό διάστημα, αρμονία των σφαιρών, αστρονομικό μοντέλο, Πλάτων, Αριστοτέλης, προσωκρατικοί, φιλοσοφία των μαθηματικών

## Abstract

This thesis aims to explore the life, philosophy and origins of Pythagoras of Samios in science up to the present day. Pythagoras was a philosopher, mathematician, geometer and music theorist. Today he is best known for the Pythagorean Theorem, but he was a multifaceted personality and his contribution was the cornerstone of all later intellectual activity in Greece and the entire West.

This paper will attempt to trace the life of Pythagoras, the education he received and the broader philosophy of his way of life, which led to the founding of the famous Pythagorean School, in order to shed light on aspects of his life beyond his involvement with mathematics, something that has only begun to concern scholars in recent decades.

Pythagoras' contributions to various fields of scholarship will then be examined. In particular, his contribution to mathematics will be analysed, with the discovery of the irrational numbers, infinitesimal and differential calculus, and Pythagorean algebra. To geometry, with the Pythagorean theorem and the role of the geometric figure in general; to music, with the discovery of musical space and the theory of the harmony of spheres; and to astronomy, with the unique Pythagorean astronomical model of the universe.

Finally, it is known that philosophers from ancient times have identified a dialectical relationship between mathematics and philosophy. Pythagoras gave a philosophical extension to all his theories and discoveries. Philosophy horizontally permeated the Pythagorean way of life and determined their actions. It therefore seems appropriate to attempt a broader connection between the science of mathematics and philosophy in the final chapter. Reference will be made to the work of the Presocratic philosophers, but also to Plato and Aristotle, whose relationship with mathematics paved the way for their philosophy and their philosophy was structured in mathematical terms. Modern concepts around the philosophy of mathematics will also be mentioned. The conclusions that the paper has reached will then be set out.

## Key words

Pythagoras, Pythagorean School, mathematics, geometry, music, astronomy, philosophy, Pythagorean Theorem, number, differential calculus, infinitesimal calculus, musical space, harmony of spheres, astronomical model, Plato, Aristotle, pre-Socratic, philosophy of mathematics

## Πίνακας εικόνων

Εικόνα 1. Το αστρονομικό μοντέλο των Πυθαγορείων .....	23
Εικόνα 2. Το σύμβολο της ιεράς Τετρακτύος .....	25
Εικόνα 3. Πυθαγόρειοι συμβολισμοί των αριθμών .....	26
Εικόνα 4 - Πυθαγόρεια Αριθμολογία .....	35
Εικόνα 5 - Χρίσμα Κατακομβών .....	42
Εικόνα 6 - Πρωταρχική θεία Τριάς .....	43
Εικόνα 7. Η πυθαγόρεια αριθμοσοφία .....	47
Εικόνα 8: Άρτιοι αριθμοί.....	50
Εικόνα 9: Περιττοί αριθμοί .....	50
Εικόνα 10: Τρίγωνοι, Τετράγωνοι και Ορθογώνιοι αριθμοί .....	50
Εικόνα 11: Απεικόνιση θεωρήματος Πυθαγόρα .....	55
Εικόνα 12: Εναλλακτική απεικόνιση Πυθαγορείου θεωρήματος.....	55
Εικόνα 13: Τρίγωνο Πυθαγορείου θεωρήματος .....	56
Εικόνα 14: Γεωμετρική απόδειξη Πυθαγορείου θεωρήματος .....	57
Εικόνα 15: Ζωογονικό τρίγωνο Πυθαγορείου θεωρήματος.....	58
Εικόνα 16: Παράγωγος συνάρτησης .....	61
Εικόνα 17: Ολοκλήρωμα συνάρτησης.....	64
Εικόνα 18: Απόδειξη ασυμμετρίας .....	70
Εικόνα 19: Απόδειξη αρρητότητας (1) .....	72
Εικόνα 20: Απόδειξη αρρητότητας (2) .....	73
Εικόνα 21 - Πεντάλφα ως σύμβολο του Πυθαγορισμού .....	89
Εικόνα 22 - Η πεντάλφα ως εργαλείο των κτιστών .....	90

## 1. Εισαγωγή

Ο Πυθαγόρας αποτελεί μία από τις πιο αινιγματικές και συνάμα ενδιαφέρουσες προσωπικότητες της αρχαιότητας. Η πολυπρισματικότητα της προσωπικότητάς του τονίζεται από όλους τους συγγραφείς που ασχολήθηκαν με τη βιογράφησή του. Η συνεισφορά του στον κόσμο των μαθηματικών είναι αναμφισβήτητη. Θεωρείται ο κατεξοχήν θεμελιωτής των ελληνικών μαθηματικών, ενώ πρώτος επιχείρησε την αριθμητική ερμηνεία του σύμπαντος. Ο σύγχρονος κόσμος έχει συνδέσει το όνομά του με το πυθαγόρειο θεώρημα.

Δεν μπορεί να παραβλεφθεί και η δράση του, με την ίδρυση της Πυθαγόρειας σχολής. Ο Πυθαγόρας ακολουθούσε έναν εκκεντρικό τρόπο ζωής, βαθιά συνδεδεμένο με τις φιλοσοφικές του δοξασίες. Απέκτησε τόσο μεγάλη φήμη, ώστε υπάρχουν ισχυρισμοί ότι σε εκείνον οφείλεται η διαμόρφωση της Μεγάλης Ελλάδας, αφού συνέρρεαν μεγάλοι πληθυσμοί στην Κάτω Ιταλία για να τον ακούσουν, με αποτέλεσμα τη μόνιμη εγκατάστασή τους στις περιοχές.

Ήταν ο πρώτος που αποκάλεσε τον εαυτό του φιλόσοφο και καθιέρωσε τη σημασία της φιλοσοφίας, σε αντίθεση με την έννοια της σοφίας που ανήκει μόνο στους θεούς. Χρησιμοποίησε επίσης πρώτος τον όρο «κόσμος» για να χαρακτηρίσει το όλον της περιοχής.

Οι πρώιμες μαρτυρίες τονίζουν, επίσης, με ιδιαίτερη έμφαση την απύθμενη γνώση του Πυθαγόρα, πράγμα που γίνεται φανερό από το γεγονός ότι ο στοχαστής θεωρούνταν αυθεντία στα θρησκευτικά θέματα, από τις θαυματουργικές του ικανότητες και από τη μεγάλη γοητεία που ασκούσε ως κήρυκας ενός αυστηρά οργανωμένου τρόπου ζωής που συνιστούσε συνδυασμό μαγικών σχεδόν απαγορεύσεων και ηθικών επιταγών. (Huffman, 2005)

Από όλα τα παραπάνω είναι εμφανές ότι η ιδεολογική επιρροή του Πυθαγόρα είναι πολύ βαθύτερη από τα φαινόμενα και οι πνευματικές του καταβολές έως σήμερα δεν έχουν αναγνωριστεί σε όλο το φάσμα τους.

Όσοι μελετητές έχουν ασχοληθεί με τη βιογράφιση και τη δράση του Πυθαγόρα και της Πυθαγορείου Σχολής, έχουν αντιμετωπίσει μία σειρά προβλημάτων στην έρευνά τους, καθώς δεν υπάρχουν γραπτές πηγές της εποχής. Οι πρώτες ολοκληρωμένες



βιογραφίες για τον Πυθαγόρα γράφτηκαν τους πρώτους αιώνες μ.Χ, ενώ η δράση του Πυθαγόρα τοποθετείται τον 6<sup>ο</sup> αιώνα π.Χ. Αυτό το τεράστιο χρονικό χάσμα έχει ως αποτέλεσμα πολλές πληροφορίες να θεωρούνται αναξιόπιστες, να υπάρχουν πολλά στοιχεία μύθου, ενώ πολλές φορές οι ποικίλες πηγές αντιφάσκουν. Η παρούσα εργασία δεν ήταν δυνατό να μην επηρεαστεί από τις ερευνητικές δυσκολίες, όμως παρακάτω γίνεται απόπειρα για να αποδοθεί μία σφαιρική εικόνα για τη ζωή και δράση του Πυθαγόρα και των Πυθαγορείων.

## 2. Ο βίος του Πυθαγόρα

### 2.1 Οι μύθοι

Τα στοιχεία που υπάρχουν για τη ζωή του Πυθαγόρα είναι πολλά και αντιφατικά, καθώς ο ίδιος δεν άφησε κανένα γραπτό κείμενο. Πολλοί φιλόσοφοι έχουν προσπαθήσει, αιώνες μετά, να γράψουν βιογραφίες για τον Πυθαγόρα και να αποκωδικοποιήσουν την μυστικιστική του δράση, με αποτέλεσμα πολλές φορές οι πληροφορίες να ξεφεύγουν από την πραγματικότητα και να ενδύονται με παραμυθικά στοιχεία. Δεν εκλείπουν και οι μύθοι γύρω από τη γέννηση του Πυθαγόρα.

- Λέγεται ότι ονομάστηκε Πυθαγόρας επειδή η Πυθία προέβλεψε σε χρησμό τη γέννησή του αναφέροντας ότι η Πυθαΐς θα γεννήσει παιδί «που θα διαφέρει κατά την ωραιότητα και τη σοφία από όλους τους ανθρώπους και θα καταστεί πάρα πολύ ωφέλιμο στο ανθρώπινο γένος».
- Έχει υποστηριχθεί ακόμη ότι ήταν γιος του Υπερβορείου Απόλλωνα, υπονοώντας τη θεϊκή καταγωγή του, όπως είχε διατυπώσει ένας Σάμιος ποιητής: «Τον Πυθαγόρα, που γεννήσε από τον Απόλλωνα τον φίλο του Διός, η Πυθαΐς, η ομορφότερη μεταξύ των Σαμίων».
- Άλλος μύθος αναφέρει ότι ο Πυθαγόρας, ενώ καθόταν σε ένα θέατρο, σηκώθηκε και έδειξε στους θεατές το πόδι του το οποίο είχε γίνει χρυσό.
- Είναι γνωστός και ο μύθος ότι γοήτευε τα φίδια και ότι ο ίδιος είχε δαγκώσει έναν θανατηφόρο όφη με αποτέλεσμα τον θάνατο του όφη.
- Άλλοτε ταξίδευε με πλεούμενο τον ποταμό Κάσα, όταν άρχισαν να ακούγονται φωνές από το ποτάμι που φώναζαν «Πυθαγόρα χαίρε», καθιστώντας έντρομους τους συντρόφους του.
- Κάποτε, εμφανίστηκε να συνομιλεί με τους μαθητές του ταυτόχρονα στον Κρότωνα και στο Μεταπόντο, δηλαδή κατείχε το θεϊκό χάρισμα της πολυστασίας, της ικανότητας να βρίσκεται σε παραπάνω από ένα μέρος ταυτόχρονα.
- Ακόμη, ήταν πιστευτό ότι προέβλεπε το μέλλον και έκανε θαύματα.

Η επινόηση όλων αυτών των μύθων γύρω από το πρόσωπο του Πυθαγόρα καταδεικνύει ότι κατά τη διάρκεια της ζωής του αποτελούσε μία μυστηριώδη, σκοτεινή και αινιγματική μορφή που δύσκολα κανείς μπορούσε να κατανοήσει. Έτσι

είναι λογικό το γεγονός ότι οι μύθοι του προσδίδουν υπεράνθρωπες ιδιότητες και τον ανάγουν σε θρύλο. Μ' ένα λόγο,σε κανένα άλλο πρόσωπο δεν έχουν διανοηθεί οι άνθρωποι

να αποδώσουν περισσότερα ή πιο ξεχωριστά κατορθώματα.(Πορφύριος, 2001)

Για πολλά χρόνια ήταν απαγορευτικό να συζητείται και να γράφεται οτιδήποτε σχετίζεται με τον Πυθαγόρα.Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να μην έχει γραφτεί τίποτα για εκείνον από τη μέρα του θανάτου του και για τα επόμενα εκατό χρόνια. Για αυτό υπάρχουν ελάχιστες αξιόπιστες πηγές. Οι πρώτες λεπτομερείς αναφορές στον Πυθαγόρα, πραγματείες του Αριστοτέλη και των μαθητών του που σώζονται σε αποσπασματική μόνο μορφή, χρονολογούνται στα τέλη του 4<sup>ου</sup> αιώνα π.Χ(Huffman, 2005). Εκτενείς βιογραφίες άρχισαν να γράφονται από συγγραφείς πολύ μεταγενέστερων χρόνων, από τον Διογένη Λαέρτιο και τους νεοπλατωνικούς Πορφύριο και Ιάμβλιχο.

## 2.2 Καταγωγή και εκπαίδευση. Τα ταξίδια του

Ο Πυθαγόρας γεννήθηκε περίπου το 569 π.Χ. Οι μαρτυρίες παραδίδουν ότι το επικρατέστερο μέρος γέννησης είναι η Σάμος. Οι περισσότεροι συμφωνούν στο ότι ο Πυθαγόρας υπήρξε γιος του Μνήσαρχου (Πορφύριος, 2001), όπως παραδίδεται από τον *Πυθαγόρου Βίον* του Πορφυρίου. Υπάρχει διαφωνία σχετικά με την καταγωγή του πατέρα του, καθώς ο Νεάνθης στο Ε' βιβλίο των *Μυθικών* αναφέρει ότι ο Μνήσαρχος ήταν Σύρος, λόγω όμως της εμπορικής δραστηριότητάς του στη Σάμο τιμήθηκε και έγινε πολίτης της. Ο βίος πληροφορεί ότι μητέρα του ήταν η Πυθαΐδα, απόγονος του Αγκαίου, του ιδρυτή της Σάμου, προσδίδοντας στον Πυθαγόρα ευγενική καταγωγή, και ότι είχε δύο μεγαλύτερα αδέρφια, τον Εύνοστο και τον Τυρρηνό.

Είναι σίγουρο ότι πέρασε τα πρώτα χρόνια της ζωής του στη Σάμο. Συνοπτικά, σύμφωνα με τον μελετητή Kurt von Fritz, τα μέρη που έζησε είναι τα εξής:

- 18 χρόνια στη Σάμο
- 4 χρόνια στη Σύρο και στην Ιωνία
- 12 χρόνια στην Αίγυπτο
- 18 χρόνια στη Βαβυλωνία
- 4 χρόνια στη Σάμο
- 39 χρόνια στην Κάτω Ιταλία (με τα 20 να είναι στον Κρότωνα και τα υπόλοιπα 19 στο Μεταπόντιο)

Κατά τη νεότητά του, ο Πυθαγόρας ήταν ένα προικισμένο παιδί, με έφεση στη μάθηση κάθε είδους. Δάσκαλοί του ήταν ο Φερεκύδης στη Λέσβο, ο Ερμοδάμαντας στη Σάμο και ο Αναξίμανδρος στη Μίλητο. Η παιδεία του ξεκίνησε με μουσική, γυμναστική και ζωγραφική, ενώ κοντά στον Αναξίμανδρο έμαθε γεωμετρία και αστρονομία. Ο βίος πληροφορεί ότι τις «μαθηματικές επιστήμες» τις έμαθε ο Πυθαγόρας όταν πήγε στην Αίγυπτο, από Άραβες, Χαλδαίους και Εβραίους και εκεί ήρθε σε πρώτη επαφή με τη γνώση των ονείρων και εφάρμοσε τη μαντική με τη χρήση λιβανιού.

Ήδη από την εφηβεία του, η φήμη του είχε φτάσει στον Θαλή και στον Βίαντα, δύο από τους επτά σοφούς της αρχαιότητας. Θεωρούνταν σεμνός και με σωφροσύνη, θαυμαζόταν για την ευφράδεια του λόγου του και για τη φυσική του ομορφιά. Στα 18

του έφυγε από την Σάμο, λόγω της ανάληψης της εξουσίας από τον τύραννο Πολυκράτη, κάτι που θα τον εμπόδιζε στη συνέχεια των σπουδών του.

Μάλιστα ο Θαλής διακρίνοντας την μεγάλη διαφορά του Πυθαγόρα σε σχέση με τους άλλους νέους, έμεινε κοντά του με ευχαρίστηση και του μετέδωσε όσες γνώσεις κατείχε και που ήταν δυνατόν να μεταδοθούν. Κοντά στον Θαλή ο Πυθαγόρας έλαβε την πρώτη του σοβαρή εκπαίδευση πάνω στα μαθηματικά, τη γεωμετρία και όσα έχουν σχέση με τους αριθμούς και τους υπολογισμούς(Παπαδοπούλου & Ευθυμίου). Ο Θαλής τον βοήθησε επίσης να βελτιώσει τις διατροφικές του συνήθειες και απέκτησε πολύ καλή υγεία, την ικανότητα να κοιμάται λίγο καθώς και διαύγεια και καθαρότητα ψυχής. Όταν η εκπαίδευση του ολοκληρώθηκε, ο Θαλής τον προέτρεψε να μεταβεί στην Αίγυπτο, υποστηρίζοντας ότι «εάν ο Πυθαγόρας ερχόταν σε επαφή μαζί τους, θα γινόταν θεϊκότερος και σοφότερος από όλους τους ανθρώπους.»

Στην Αίγυπτο ο Πυθαγόρας έμεινε 22 χρόνια, μέσα στα οποία σπούδασε αιγυπτιακή φιλολογία, μαθηματικά, αστρονομία και ιατρική. Επίσης επισκέφθηκε τα άδυτα των ναών της Αιγύπτου, διαμορφώνοντας τη θρησκευτική φιλοσοφία του. Στην Αίγυπτο συναναστρεφόταν τους ιερείς και αφομοίωσε τη σοφία των Αιγυπτίων και τη γλώσσα τους, καθώς και τις τρεις διαφορετικές γραφές τους: την «επιστολογραφική», την «ιερογλυφική» και τη «συμβολική», που διαβάζονται είτε κυριολεκτικά (καθώς παριστάνουν συγκεκριμένα πράγματα μέσω της μίμησης) είτε αλληγορικά, με υπαινιγμούς.(Πορφύριος, 2001)

Οι Αιγύπτιοι ιερείς για να δοκιμάσουν την αντοχή του, τον υπέβαλλαν σε δύσκολες δοκιμασίες, αντίθετες με την ελληνική αγωγή, νομίζοντας ότι ως ξένος δεν άντεχε τη σκληρή αιγυπτιακή ιερατική εκπαίδευση. Όμως ο Πυθαγόρας υλοποίησε όλα τα προστάγματα με μεγάλη προθυμία και τόσο πολύ θαυμάστηκε που έλαβε την άδεια να θυσιάζει στους Θεούς και να παίρνει μέρος στις ιερές τελετές, προνόμιο που δεν αναφέρεται να παραχωρήθηκε σε κανέναν άλλο ξένο. Εκεί εντρυφήσε ακόμη περισσότερο στη γεωμετρία και την αστρονομία τελειοποιώντας τις γνώσεις του κι έφθασε στο απόγειο της μάθησης της επιστήμης των αριθμών και της μουσικής.

Σύμφωνα με τον Ιάμβλιχο ο Πυθαγόρας μετά την Αίγυπτο μεταφέρθηκε στη Βαβυλώνα, αιχμάλωτος από τους στρατιώτες του Καμβύση. Εκεί ήρθε σε επαφή με τους Μάγους, δηλαδή τους Πέρσες ιερείς, και διδάχθηκε από αυτούς θεολογικά και αστρονομικά θέματα για άλλα δώδεκα έτη. Κατά τον Πορφύριο, εκεί βρήκε τον

Ζάρατο, που τον εξάγνισε από τα μιάσματα της προηγούμενης ζωής και του έμαθε πώς να είναι αγνός και να επιδιώκει την αρετή. Ακόμη του ανέπτυξε τις θεωρίες του για τη φύση και για τις αρχές των πάντων.

Έπειτα ο Πυθαγόρας επέστρεψε στη Σάμο, με σκοπό να μεταδώσει τις πλούσιες γνώσεις του στους συμπολίτες του. Κατασκεύασε εκεί ένα ημικυκλικό διδασκαλείο το οποίο πήρε το όνομά του και χρησιμοποιούταν από τους Σαμίους για να συσκεφθούν για τα κοινά. Έξω από την πόλη κατασκεύασε μία σπηλιά για την άσκηση της φιλοσοφίας του, όπου περνούσε το μεγαλύτερο μέρος της ημέρας μαζί με λίγους μαθητές του. Έμεινε στην πατρίδα του μόνο τέσσερα χρόνια, μέσα στα οποία ασχολήθηκε με τη διδασκαλία κάποιων νέων, μέσα στους οποίους ήταν και ο Ευρυμένης ο Σάμιος, ο οποίος ακολουθώντας τις διατροφικές συμβουλές του Πυθαγόρα κατάφερε πολλές νίκες στους Ολυμπιακούς Αγώνες.

Επίσης φέρεται να προέτρεψε έναν νέο να μάθει μαθηματικά, χρησιμοποιώντας ένα τέχνασμα, με το οποίο ο Πυθαγόρας πλήρωνε τον νέο για κάθε μάθημα που παρακολουθούσε. Όταν ο νέος είχε αντιληφθεί την υπεροχή των μαθηματικών και τα μάθαινε με ευχαρίστηση, ο Πυθαγόρας του ανακοίνωσε την αδυναμία καταβολής των τριών οβολών. Όπως ήταν αναμενόμενο, ο νέος αρνήθηκε να σταματήσει τα μαθήματα και μάλιστα ήθελε να δίνει ο ίδιος μισθό τριών οβολών στον Πυθαγόρα για κάθε μάθημα. Λέγεται πως ο νέος ήταν συνονόματος του Πυθαγόρα και πως απέπλευσε μαζί με το δάσκαλό του, όταν αυτός αποφάσισε να φύγει από τη Σάμο.

Οι λόγοι για τους οποίους ο Πυθαγόρας αποφάσισε να φύγει ξανά από τη Σάμο, βασίζονται στο γεγονός ότι δεν βρήκε την ανταπόκριση που περίμενε από τους συμπολίτες του, όταν προσπάθησε να τους μεταδώσει κάποιες από τις γνώσεις του, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν τον εκτιμούσαν, αφού τον ανάγκαζαν να παίρνει μέρος στις δημόσιες λειτουργίες. Ο άλλος λόγος ήταν η απογοήτευσή του για τα πολιτικά πράγματα της Σάμου. Έτσι έφυγε για την Κάτω Ιταλία, όπου ανέπτυξε την κύρια δράση του για τα επόμενα 39 χρόνια, μέχρι τον θάνατό του.

Πριν φτάσει στον Κρότωνα, ο Πυθαγόρας πήγε στους Δελφούς, μαθητεύοντας κοντά στην ιέρεια Θεμιστόκλεια ή Αριστόκλεια. Η επαφή του με την ιέρεια είχε βαρύνουσα σημασία για τη μετέπειτα πορεία του αφού σύμφωνα με τον Βίο του Πορφυρίου *"δίδαξε και πολλά άλλα που έλεγε ότι τα έμαθε από την Αριστόκλεια στους Δελφούς"*. Αυτός ήταν και ο λόγος που ίδρυσε μία σχολή χωρίς περιορισμούς φύλου.

Κατόπιν στην Κρήτη θέλοντας να συναντήσει τους μύστες του Μόργου, ενός από τους Ιδαίους Δάκτυλους. Εκείνοι τον εξάγνισαν με την «κεραύνια λίθο», την ημέρα κοντά στη θάλασσα ξαπλωμένος μπρούμυτα και τη νύχτα κοντά στον ποταμό στεφανωμένος με μαλλί μελανού αρνιού. Κατήλθε και στο Ιδαίο Άντρο κρατώντας μαλλί μαύρου αρνιού, παρέμεινε τις καθιερωμένες 27 ημέρες και απέδωσε προσφορές στον Δία.(Πορφύριος, 2001)

Φθάνοντας στον Κρότωνα, ο Πυθαγόρας έκανε μεγάλη εντύπωση στους κατοίκους και σύντομα οι λόγοι του είχαν μεγάλη απήχηση και ένα τεράστιο ακροατήριο. Σύμφωνα μάλιστα με τον Πορφύριο, ο Πυθαγόρας είχε τόσο μεγάλη επιρροή στο ακροατήριό του, που με τη βοήθειά του απελευθέρωσε τις υποδουλωμένες πόλεις, επειδή τους είχε εμφυσήσει το ελεύθερο φρόνημα, δίνοντας νόμους που ζήλευαν οι γειτονικές πόλεις.

Ο Πυθαγόρας μόλις σε έναν χρόνο από τη λειτουργία της σχολής του συνελήφθη, με τις κατηγορίες της αθεΐας και της διαφθοράς των νέων. Η υπόθεσή του εκδικάστηκε από χίλιους δικαστές, αλλά ο Πυθαγόρας αθωώθηκε και του επιτράπηκε να συνεχίσει την διδασκαλία.

Υπάρχουν διαφορετικές εκδοχές για τις συνθήκες του θανάτου του, που συνέβη όταν ο Πυθαγόρας βρισκόταν σε μεγάλη ηλικία. Σύμφωνα με μία εκδοχή, είχε βίαιο θάνατο όταν οι αντίπαλοί του πυρπόλησαν τη σχολή του. Άλλες εκδοχές υποστηρίζουν ότι υπέβαλε το εαυτό του σε ασιτία ή ότι αυτοκτόνησε.

## 2.3 Βασικές ιδέες του

### 2.3.1 Το δόγμα της μετενσάρκωσης

Το δόγμα της μετενσάρκωσης αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο της πυθαγόρειας διδασκαλίας. Η ψυχή είναι η τέλεια και αυτόνομη ζωική οντότητα, μπορεί να ζει ανεξάρτητα από το σώμα, και αποτελεί άρνηση του σώματος και της σωματικότητας. (Βεΐκος, 1998) Όλες οι ψυχές έχουν θεία προέλευση και επιβιώνουν μέσα από μια συνεχή διαδοχή όλων των μορφών της ζωής. Η απελευθέρωση όμως της ψυχής από τα δεσμά του σώματος επιτυγχάνεται μόνο με την κάθαρση. (Cornford, 1923) Πάνω σε αυτή τη βάση ο Πυθαγόρας υιοθέτησε τη θεωρία της μετενσάρκωσης, την οποία ανήγαγε σε βασικό δόγμα της διδασκαλίας του.

Σύμφωνα με τον Ηρόδοτο (*Ιστορίαι* 2.123) αυτή η δοξασία έχει αιγυπτιακή καταγωγή, αφού πρώτοι οι Αιγύπτιοι υποστήριζαν ότι η ψυχή του ανθρώπου είναι αθάνατη και ότι συμπληρώνει έναν κύκλο αλληπάλληλων μετενσαρκώσεων σε άλλα ζωικά είδη, διάρκειας 3.000 χρόνων, πριν επιστρέψει σε ένα νέο ανθρώπινο σώμα. (Κάλφας & Ζωγραφίδης, 2011) Έτσι, δεν αποκλείεται ο Πυθαγόρας να είχε επηρεαστεί κατά τη μαθητεία του κοντά στους Αιγύπτιους.

Αν η ψυχή του ανθρώπου μετά τον θάνατό του είναι «τέλεια», τότε ενώνεται με τον θεό, ενώ αν έχει διαπράξει αμαρτήματα, τότε επιστρέφει με τη μορφή ζώου ή φυτού για να εξαγνιστεί. Η βασική ιδέα της μετεμψύχωσης δεν αποτελεί πρωτοτυπία. Το καινούριο στοιχείο στη μετεμψύχωση σύμφωνα με τον Cornford είναι μία ηθική έκφραση: η μετενσάρκωση συνεπικουρεί στην εξιλέωση από κάποιο παλαιό αμάρτημα, ενώ η ατομική ψυχή επιβιώνει, φέροντας το στίγμα της αναπόφευκτης ευθύνης και αφού ολοκληρώσει έναν κύκλο από ζωές, στο τέλος εξαγνίζεται από τον πόνο και απελευθερώνεται. (Cornford, 1923)

Απώτερος σκοπός της ψυχής είναι κατά τον Πυθαγόρα η απαλλαγή της από τη συμμετοχή σε αυτήν την κοσμική πορεία της μεταβολής. (Βεΐκος, 1998) Η κάθαρση της ψυχής συντελείται με πνευματική άσκηση και με σωματική δίαιτα. (Βεΐκος, 1998) Ο Βεΐκος υποστηρίζει ότι στόχος για τους Πυθαγόρειους ήταν η οργάνωση του βίου με τέτοιο τρόπο, ώστε να ακολουθεί τον θεό και να ταυτίζεται μαζί του, μέσα από τον πλήρη εξαγνισμό της ψυχής και την απελευθέρωσή του από τη σωματική



φυλακή, ώστε να μην είναι αναγκαίος ο κύκλος των μετενσαρκώσεων. Η ψυχή μπορεί με τη βαθμιαία κάθαρσή της να επιστρέψει στη θεϊκή της έδρα. (Βεΐκος, 1998)

Ο Αριστοτέλης ισχυρίζεται ότι ο Πυθαγόρας είχε φθάσει σε αυτό το σημείο: Κατά τον Ιάμβλιχο, ο Αριστοτέλης έγραψε μια πραγματεία *«Περί Πυθαγόρειας φιλοσοφίας»* όπου λέει ότι του *«λογικού ζώου το μεν είναι θεός, το δε άνθρωπου, το δε ως ο Πυθαγόρας»*. Είναι σίγουρο ότι ο Πυθαγόρας δίδασκε τη μετενσάρκωση, αφού υπάρχει μία μαρτυρία του Ξενοφάνη, όπου για πρώτη φορά στην αρχαία γραμματεία μνημονεύεται ο Πυθαγόρας (Κάλφας & Ζωγραφίδης, 2011). Η ειρωνική του στάση είναι προφανής: *«Λένε ότι όταν κάποτε είδε να βασανίζουν ένα σκυλάκι, το συμπόνεσε και είπε: "Σταμάτα, μην το χτυπάς, γιατί είναι η ψυχή κάποιου φίλου· την αναγνώρισα όταν άκουσα τη φωνή του."»*. Ο ίδιος ο Πυθαγόρας πίστευε ότι είχε ζήσει πολλές ζωές και θυμόταν τις προσωπικότητες μέσα στις οποίες είχε μετενσαρκωθεί. Έτσι, πίστευε ότι σε προηγούμενες ζωές ήταν ο Αιθαλίδης, ο Εύφορβος, ο Ερμότιμος και ο Πύρρος.

### 2.3.2 Ηθική και Θρησκεία

Η Πυθαγόρεια ηθική διαπερνούσε οριζόντια όλο το φάσμα των δραστηριοτήτων της Σχολής. Δεν επρόκειτο για μία αόριστη ηθικολογία, σχετικά με το τι είναι ή όχι επιτρεπτό, *«αλλά μία ολοκληρωτική αγωγή του ανθρώπου, συνυφασμένη με τη μεταφυσική, τη συμβολική, την ανθρωποσοφία και τη μυστηριοσοφία»*. (Γράβιγγερ, 1998) Η πυθαγόρεια ηθική ήταν πρακτικά εφαρμόσιμη σε όλες τις πτυχές της ζωής.

Στην αρχή, ο Πυθαγόρας, σύμφωνα με τον Γράβιγγερ, αναγνώριζε τρία είδη αρετής: τη σωφροσύνη, την ανδρεία και τη δικαιοσύνη. Με την έννοια της σωφροσύνης ήταν άρρηκτα συνδεδεμένες και οι έννοιες της φιλίας, της αγάπης, της εχεμύθειας και της σιγής. Επίσης δείγμα σωφροσύνης ήταν η περιφρόνηση του πλούτου και της δόξας, ο ειλικρινής σεβασμός προς τους γηραιότερους, η καταστολή της οργής και της βιαιότητας. Έτσι, ο χαρακτήρας των πυθαγορείων θα έπρεπε να χαρακτηρίζεται από *«ηρεμία και πραότητα, πειθαρχία και φιλομάθεια και προπαντός από τον σεβασμό προς τον εαυτό και τους άλλους.»* (Γράβιγγερ, 1998)

Η ανδρεία σχετιζόταν με την υπερφαλάγγιση των αντικοινωνικών τάσεων και των αλόγων επιθυμιών, από τις οποίες κατακλυζόταν ο κοινός άνθρωπος. Η δικαιοσύνη είχε να κάνει με τις κοινωνικές και πολιτικές αντιλήψεις.

Ο Πυθαγόρας είχε μία σειρά από προτροπές, τα πυθαγόρεια ακούσματα ή σύμβολα, που αποσκοπούσαν στην ηθική συγκρότηση των μαθητών. Τα ακούσματα δεν είναι ούτε ένα συνονθύλευμα από δεισιδαιμονικές επιταγές, ούτε περιέχουν «μία τρομακτική ποσότητα από παραλογισμούς». Αντίθετα, φανερώνουν πλήρη έλεγχο και επίγνωση των πράξεων του ανθρώπου, ενώ στοχεύουν σε μία ασυμβίβαστη διατήρηση της αγνότητας και του συντονισμού του ατόμου με τον θεϊκό και ανθρώπινο κόσμο. (GemelliMarciano&Huffman, 2014)Κατά τον Ιάμβλιχο το σύνολο των «ακουσμάτων» διαιρείται σε τρεις κατηγορίες: στην πρώτη εντάσσονται όσα ακούσματα φανερώνουν«τι εστι». Δεύτερα είναι όσα αποκαλύπτουν το «τιμάλιστα», την τελειότητα κάθε ποιότητας, και τέλος, όσα δηλώνουν «τι πρακτέον». Οι διακρίσεις αυτές σχετίζονται με οντολογικούς, θρησκευτικούς και ηθικούς προβληματισμούςαντίστοιχα.(Κλαμπανιστή, 2021)Λόγω της γενικευμένης μυστικότητας των διδαγμάτων, είχαν βαθύτερο συμβολικό υπόβαθρο. Επρόκειτο ουσιαστικά για έναν εσωτερικό ηθικό κώδικα:

- «μην ανακατεύεις τη φωτιά με το μαχαίρι»: μην προκαλείς την οργή των άλλων
- «μην υπερβαίνεις τον ζυγό»: να είσαι δίκαιος και αμερόληπτος
- «μην κάθεσαι σε χοίνικα»: ίση καθημερινή φροντίδα, χωρίς υπερβολές
- «μην τρως καρδιά»: μην βασανίζεσαι με λύπες
- «μη φοράς θεούς σε δαχτυλίδια»: μην προβάλλεις πρόχειρα τις θρησκευτικές σου πεποιθήσεις
- «μη βαδίζεις στις λεωφόρους»: μην ακολουθείς τους πολλούς

Οι ηθικές συνεπώς προτροπές δίνονταν υπό τη μορφή απαγόρευσης, με επιδίωξη να διαμορφωθεί μια στάση ζωής, η οποία θα περιλάμβανε εγκράτεια, αυτοέλεγχο, υπακοή στους νόμους, εκτίμηση της γνώμης των επαϊόντων σε κάθε θέμα, άσκηση σε έργα αρετής, προσήλωση και προσανατολισμό σε επόμενη μορφή ζωής.(Κλαμπανιστή, 2021)Η πρακτική των ακουσμάτων είναι έτσι βαθιά μεταμορφωτική, όχι μόνο επειδή αυξάνει σημαντικά την δύναμη συγκέντρωσης κάποιου, αλλά κυρίως επειδή ενεργοποιεί τους μηχανισμούς της «δεκτικής συνείδησης», που απαιτεί το υποκείμενο να εγκαταλείψει τον εγωισμό και συνειδητά να επικεντρωθεί στα «σημάδια» της θεϊκής παρουσίας και πώς να επιτύχει την αρμονία με τις ποικίλες της εκδηλώσεις στο κοσμικό και κοινωνικό πλαίσιο.(Gemelli Marciano & Huffman, 2014)

Μία βασική ηθική αντίληψη του Πυθαγόρα ήταν η καθολική συγγένεια μεταξύ όλων των όντων, μία αντίληψη που έχει τις ρίζες της στον Ορφισμό, αναπτύσσεται από τον Πυθαγορισμό και εκτείνεται στη συνέχεια μέχρι τον Πλατωνισμό και τους Στωικούς. Έτσι, η ανθρώπινη ψυχή συγγενεύει και μπορεί να ταυτιστεί με τον θεό, αλλά και με όλα τα έμψυχα όντα.

Μία άλλη σημαντική πτυχή της πυθαγόρειας ηθικής είναι η «αυθυπευθυνότητα», η οποία έχει τις ρίζες της στον ορφισμό, όμως με τον πυθαγορισμό παραλαμβάνει την εξής νέα ερμηνεία: για την κατάκτηση της αθανασίας, δεν ήταν αναγκαία καμία θεϊκή επέμβαση. Ο άνθρωπος δεν προστατεύεται από κάποιο δαιμόνιο που του υπαγορεύει τι να πράξει, όπως ισχυριζόταν ο Σωκράτης, ούτε από κάποιον φύλακα άγγελο, όπως αργότερα αναγνωρίζει ο Χριστιανισμός. Ο άνθρωπος τίθεται στο επίκεντρο, καθορίζει την τύχη του και έχει την ελευθερία της επιλογής. Έτσι η σημασία της ατομικής ευθύνης έρχεται στο προσκήνιο, και η αρνητική έκβαση της ζωής δεν ανάγεται στη θεϊκή τιμωρία και στην επέμβαση δυνάμεων ανώτερων από τον άνθρωπο, αλλά ως αποτέλεσμα των συνεπειών των ανθρωπίνων πράξεων.

Πάνω σε αυτή τη βάση, ο Π. Γράβιγγερ έρχεται στη διαπίστωση ότι οι Πυθαγόρειοι δεν προσεύχονταν, καθώς η προσευχή θεωρούταν βλασφημία γιατί προϋπέθετε ότι οι φυσικοί νόμοι είναι μεταβλητοί. Αντί αυτού, οι πυθαγόρειοι επιδίδονταν σε εξαγνισμό μέσα από καθαρικές πρακτικές «ώστε να καταστούν οι ίδιοι παράγοντες αρμονίας.»(Γράβιγγερ, 1998) Συμπερασματικά, ο άνθρωπος καθίσταται ο δημιουργός του πεπρωμένου του και με αυτόν τον τρόπο η θεϊκή ταύτιση είναι εφικτή.

Ενώ οι φυσικοί φιλόσοφοι τοποθετούσαν τη γη στο κέντρο του σύμπαντος, ο κόσμος του Πυθαγόρα περιβάλλεται από «μυστικές και ακατάληπτες δυνάμεις, κατανοητές μέσα από συμβολισμούς και μυθικές παραστάσεις».(Καλογεράκος & Θανάσας, 2000)Η λατρευτική στάση των Πυθαγορείων δεν εναρμονιζόταν με την επίσημη θρησκεία των Ολύμπιων θεών, αλλά διασταυρωνόταν περισσότερο με τον μυστικισμό των Ορφικών. Θεωρούσαν ιδιαίτερο προστάτη τους τον Απόλλωνα με τον οποίο πίστευαν πως ο Πυθαγόρας συνδεόταν στενά ως ιερέας ή ως γιος του.(Μαραγγιανού-Δερμούση, 2011)Τις συμπαντικές αυτές δυνάμεις οι Πυθαγόρειοι τις διαχώριζαν ιεραρχικά σε Θεούς, Ήρωες και Δαίμονες.

Για τους Πυθαγόρειους ο κόσμος ήταν πλήρης θεών, που γίνονταν αντιληπτοί ως νοερές οντότητες, απομακρυσμένες από την πρωταρχική Μονάδα. Τόπος κατοικίας

των θεών αυτών ήταν οι αστέρες. Οι πλησιέστεροι προς τη Μονάδα ήταν και οι τελειότεροι, γιατί είχαν άμεση γνώση, ομοιογένεια και αθανασία. (Γράβιγκερ, 1998) Η τιμή προς αυτούς τους θεούς δεν θα έπρεπε να εξαντλείται στην τυπική λατρεία με θυσίες και άλλες επιφανειακές εκδηλώσεις, αλλά μέσω του σεβασμού του Νόμου τον οποίο εκπροσωπούσαν. Έτσι η τιμή προς τους θεούς εκδηλωνόταν με τη διαρρύθμιση ενός τρόπου ζωής, αρμονικού με τις υπαγορεύσεις των θείων νόμων.

Οι Ήρωες αγαοί (φωτισμένοι) αποτελούσαν ενδιάμεσα όντα και ήταν υποδεέστεροι από τους θεούς. Εκείνοι ζούσαν στον Αιθέρα. Ο Κρατύλος του Πλάτωνα έκανε την ετυμολογική συσχέτιση Ήρωες-Έρω, δηλαδή οι ήρωες αυτοί προέκυψαν από τον έρωτα κάποιας θνητής με θεό ή αντίστροφα, καθιστώντας τους ίδιους ημίθεους. Ήταν σοφοί, εύγλωττοι, και είχαν το ενδιαφέρον να διδάξουν τους ανθρώπους. Επρόκειτο για βοηθητικές οντότητες που υπερέβαιναν τους ανθρώπους σε γνώση και αρετή, γι' αυτό είχαν τον ρόλο να τους καθοδηγήσουν προς την αποθέωσή τους.

Η Τρίτη κατηγορία θεοτήτων που οι Πυθαγόρειοι όφειλαν σεβασμό ήταν οι καταχθόνιοι δαίμονες, δηλαδή οι επίγειοι. Εκείνοι είναι οι ψυχές που πέρασαν τη ζωή τους στη γη ως σοφοί και επιδέξιοι. Για το λόγο αυτόν, μετά τον θάνατο απαλλάσσονται από το φυσικό σώμα και έχουν τη δυνατότητα να μετενσαρκωθούν και να επιστρέψουν στη γη για να καθοδηγήσουν τους ανθρώπους, ως δάσκαλοι του ανθρώπινου γένους.

### 2.3.3 Τρόπος ζωής

Από την ιδέα της μετενσάρκωσης απορρέει άμεσα και εκείνη της χορτοφαγίας. Ο Πυθαγόρας θεωρείται ότι έθεσε τα θεμέλια για την χορτοφαγία, αφού στη σχολή του ακολουθούσαν αυστηρή δίαιτα, καθώς αναγνώριζε σε ζωικές μορφές, φίλους και συντρόφους από το παρελθόν. Έτσι απαγόρευε τόσο την θανάτωση όσο και την κατανάλωσή τους. Στόχος του ήταν επίσης να εξασκήσει τους μαθητές σε έναν απλό τρόπο ζωής, που θα τους εξασφάλιζε καλή σωματική και ψυχική υγεία. Απαγόρευε το λιθρίνι και το μελανούρι, ζητούσε αποχή από καρδιά, κουκιά, κοιλίες και μπαρμπούνια. Ο ίδιος απαγόρευε θυσίες έμψυχων όντων σε θεούς. Η καθημερινή του διατροφή περιείχε μέλι και ψωμί και λαχανικά. Σπάνια έτρωγε θαλασσινά και δεν έπινε κρασί την ημέρα. Απέφευγε το γέλιο και οτιδήποτε θα ικανοποιούσε τα κατώτερα γούστα, αλλά και το υπερβολικό κατσούφιασμα. Θεωρούσε ότι η συμπεριφορά πρέπει να χαρακτηρίζεται από ευπρέπεια και σεβασμό.

Όπως αναφέρει ο Διογένης ο Λαέρτιος, ο Πυθαγόρας δεν επέτρεπε στους φίλους του να εύχονται «χρόνια πολλά», γιατί τα είχε συνδέσει με τον κύκλο των μετενσαρκώσεων στις οποίες παγιδεύεται η ψυχή και δεν το θεωρούσε κάτι θετικό. Επίσης ονόμαζε τη μέθη «βλάβη» και αποδοκίμαζε κάθε υπερβολή. Για τις σεξουαλικές ανάγκες πίστευε ότι πρέπει να ικανοποιούνται μόνο τον χειμώνα, γιατί τις θεωρούσε βλαβερές.

Διαιρούσε τη διάρκεια της ζωής σε τέσσερα τμήματα, 20 χρόνια παιδί, 20 χρόνια έφηβος, 20 χρόνια νέος, 20 χρόνια γέρος, ενώ αντιστοιχούσε τις περιόδους αυτές με τις τέσσερις εποχές: το παιδί αντιστοιχεί στην άνοιξη, ο έφηβος στο καλοκαίρι, ο νέος στο φθινόπωρο και ο γέρος στον χειμώνα.

### 2.3.4 Η διαίρεση της ψυχής

Σύμφωνα με τον Διογένη τον Λαέρτιο, ο Πυθαγόρας διαιρούσε την ψυχή σε τρία μέρη, νου, λογικό και πάθος, θεωρώντας τη λογική ικανότητα σκέψης προνόμιο μόνο του ανθρώπου. Η αντίληψη αυτή άσκησε αργότερα επιρροή στον Πλάτωνα και τη δική του τριμερή διαίρεση της ψυχής. Έδρα της ψυχής θεωρούσε την απόσταση από την καρδιά έως τον εγκέφαλο. Η καρδιά περιείχε το πάθος, ενώ ο εγκέφαλος το λογικό και τον νου. Το λογικό μέρος της ψυχής ήταν το αθάνατο, ενώ τα άλλα θνητά.

Η ψυχή τρέφεται με αίμα, οι ικανότητές της είναι άνεμοι και η ίδια είναι αόρατη όπως ο αιθέρας. Οι φλέβες, οι αρτηρίες και τα νεύρα είναι τα δεσμά της ψυχής. Οι αισθήσεις είναι «σταγόνες» από αυτά. Όταν βγαίνει η ψυχή από το σώμα περιπλανάται στον αέρα, ενώ ο Ερμής συνοδεύει τις ψυχές πηγαίνοντας τις καθαρές στην υψηλότερη περιοχή, ενώ τις ακάθαρτες δεν τις αφήνει να αναμειγνύονται με τις καθαρές ούτε μεταξύ τους, αλλά τις συνδέει με τις Ερινύες, τις θεές της εκδίκησης. Ακόμα ο Πυθαγόρας πίστευε ότι ο αέρας ήταν γεμάτος με ψυχές που ονομάζονταν ήρωες και δαίμονες. Αυτές έστελναν στους ανθρώπους και στα άλλα ζώα τα όνειρα και τα σημάδια για μελλοντική αρρώστια και υγεία. Έτσι, αυτό που είχε τη μεγαλύτερη σημασία είναι αν η ψυχή θα στραφεί προς το καλό ή προς το κακό.

### 2.3.5 Ουράνια σώματα

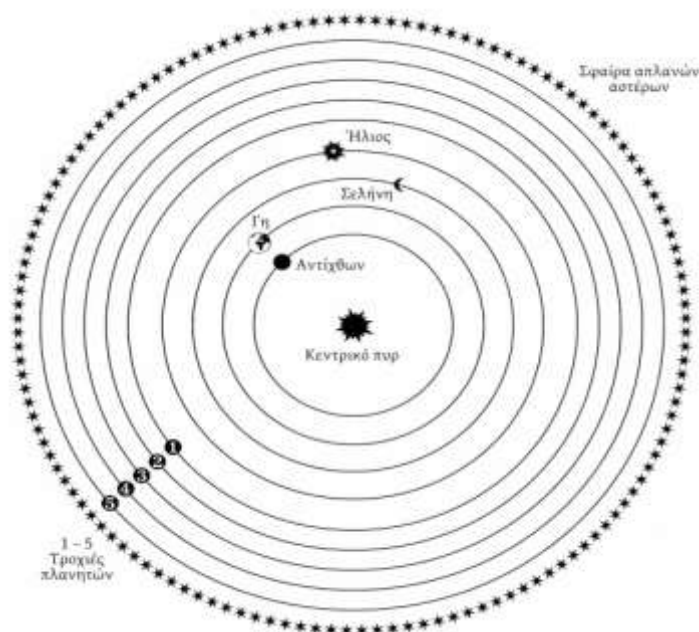
Ο Πυθαγόρας ήταν ο πρώτος που υποστήριξε ότι η Γη έχει σχήμα σφαιρικό, παρατηρώντας το σχήμα του ήλιου και της Σελήνης. Πιθανώς η άποψη αυτή διατυπώθηκε και για λόγους συμμετρίας, αφού οι Πυθαγόρειοι υποστήριζαν ότι η σφαίρα ήταν η τελειότερη μορφή που θα μπορούσε να πάρει ένα στερεό σώμα. Πεποίθησή τους ήταν επίσης ότι όλα τα ουράνια σώματα κινούνταν γύρω από ένα κοινό κέντρο που ονόμαζαν κεντρικό πυρ, και δεν είχε σχέση με τον ήλιο.

Ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι υποστήριζαν επίσης την ύπαρξη ενός πλανήτη που ο Αριστοτέλης ονομάζει «αντίχθονα». Αυτό εξυπηρετούσε τη δική τους κοσμοθεωρία, δεδομένου ότι τα ουράνια σώματα που εντόπιζαν ήταν εννέα, κάτι που δεν τους ικανοποιούσε αφού το δέκα θεωρούταν ο αριθμός που συμβόλιζε την τέλεια αρμονία. Για αυτό εισήγαγαν έναν πλανήτη που ήταν όμοιος με τη γη, αλλά αόρατος από αυτή. Έτσι, σύμφωνα με τον Αριστοτέλη στο Περί Ουρανού, οι Πυθαγόρειοι δεν αναζητούσαν την αιτία των πραγμάτων, αλλά προσάρμοζαν τα φαινόμενα στη δική τους θεωρία *«οὐ πρὸς τὰ φαινόμενα τοὺς λόγους καὶ τὰς αἰτίας ζητοῦντες, ἀλλὰ πρὸς τινὰς λόγους καὶ δόξας αὐτῶν τὰ φαινόμενα προσέλκοντες καὶ πειρώμενοι συγκοσμεῖν»*.

Το ευφάνταστο αυτό αστρονομικό μοντέλο δεν ήταν πρακτικά χρήσιμο, αφού δεν μπορούσε να εξηγήσει τα γνωστά αστρονομικά φαινόμενα. Φαίνεται όμως ότι τους Πυθαγορείους δεν τους απασχολούσε η επίλυση των αστρονομικών προβλημάτων και η πρακτική εφαρμογή. Αυτό που ήθελαν ήταν να δώσουν απλώς μια εικόνα της τάξης

και της αρμονίας του ουρανού. Στη δική τους περιγραφή ο ουρανός παρουσίαζε στοιχεία τελειότητας: ήταν κλειστός, δηλαδή είχε όρια, είχε *πέρας*· είχε το τελειότερο σχήμα, το σφαιρικό· η κίνησή του ήταν η κυκλική. Το κυριότερο όμως ήταν ότι ο ουρανός εμπεριείχε δέκα ουράνια σώματα, ενσωμάτωνε επομένως τις βασικές αριθμητικές αναλογίες, γινόταν «αρμονία και αριθμός». (Κάλφας & Ζωγραφίδης, 2011)

Διακήρυτταν επίσης ότι η κίνηση των ουράνιων σωμάτων σίγουρα είχε σαν αποτέλεσμα να βγαίνει κάποιος ήχος, αφού κάτι τέτοιο συμβαίνει και με τα σώματα στη γη. Και αφού οι αποστάσεις μεταξύ τους είναι αναλογικές, επόμενο ήταν ότι θα παράγεται μουσική και αποκαλούσαν το φθόγγο των άστρων *εναρμόνιο*. (Taylor, 1995) Από εδώ πρέπει να προέκυψε και η διαδεδομένη πεποίθηση ότι υπάρχει η «αρμονία των σφαιρών», μια ουράνια δηλαδή μουσική, την οποία μπορούν να ακούσουν μόνο εκείνοι που είχαν μνηθεί στον ενδότερο κύκλο της πυθαγόρειας αδελφότητας. (Κάλφας & Ζωγραφίδης, 2011) Με αυτά τα δεδομένα, το αστρονομικό μοντέλο των Πυθαγορείων αποτυπώνεται στο παρακάτω σχήμα:



Εικόνα 1. Το αστρονομικό μοντέλο των Πυθαγορείων

### 2.3.6 Αρμονία των σφαιρών

Η μουσική έπαιξε βασικό ρόλο στην καθημερινότητα των Πυθαγορείων, αφού πίστευαν στις θεραπευτικές της ιδιότητες. Σύμφωνα με τον Πυθαγόρα το σύμπαν βρίσκεται σε αρμονική διάταξη και η θέασή του επιφέρει την κάθαρση. Αυτό οδήγησε στη θεωρία που διαμόρφωσε ο Πυθαγόρας για την «Αρμονία των σφαιρών». Η αρμονία των σφαιρών συνιστά το σύνολο των ήχων που παράγονται από την περιστροφή των πλανητών, ανάλογα με την απόστασή τους από τη γη, και οι οποίοι, όμως, δεν ακούγονται. (Ο Πυθαγόρας τα Μαθηματικά και η Φυσική, 2016)

Η καινοτομία των Πυθαγορείων έγκειται στην πεποίθηση ότι τα μουσικά διαστήματα εκφράζονται με αριθμητικές αναλογίες, μεταξύ των αριθμών 1,2,3, και 4. Από αυτούς τους τέσσερις αριθμούς, κατασκευάζονται οι αναλογίες της τέταρτης, πέμπτης και ογδής αρμονικής.

Έτσι ο Πυθαγόρας ήταν ο πρώτος που εγκαθίδρυσε τις βάσεις της επιστήμης της Μουσικής πάνω σε μια επιστημονικά τεκμηριωμένη θεωρία της Μουσικής. Ανακάλυψε τη σχέση ανάμεσα στο μήκος των χορδών και στο τονικό ύψος που αυτές δίνουν. Για να το πετύχει αυτό χρησιμοποίησε ένα έγχορδο όργανο, που έφτιαξε ο ίδιος, το «Μονόχορδο». (Ο Πυθαγόρας τα Μαθηματικά και η Φυσική, 2016) Οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν μια απόλυτα σταθερή σχέση ανάμεσα στο μήκος που έχουν οι χορδές της λύρας και στις βασικές συγχορδίες ( $1/2$  για την όγδοη,  $3/2$  για την πέμπτη και  $4/3$  για την τέταρτη). Οι αναλογίες αυτές συνθέτουν την Αρμονία που για τους Πυθαγόρειους είχε σημασία κυριολεκτικά κοσμική.

### 2.3.7 Η τετρακτύς

Η βασική θεωρία που κρύβεται τόσο στη δημιουργία του αστρονομικού σύμπαντος των πυθαγορείων όσο και στην καινοτομία τους στη μουσική είναι η Τετρακτύς, το ιερό σύμβολο του Πυθαγορισμού, που αναπαρίσταται με το παρακάτω σχήμα:





Εικόνα 2. Το σύμβολο της ιεράς Τετρακτύος

Το σύμβολο της τετρακτύος αποτελεί σύνοψη του πυθαγόρειου μυστικισμού. Από τη μία η Τετρακτύς συσχετίζεται με την τετράδα και τον αριθμό τέσσερα, που συμβολίζει τη σταθερότητα και τη λογική και ως εκ τούτου και τη δικαιοσύνη. Ο Πυθαγόρας είχε επίσης καθορίσει τέσσερις βάσεις της σοφίας: την αριθμητική, τη μουσική, τη γεωμετρία, την αστρονομία και τονίζει ότι ο 4 είναι ιερός αριθμός. Συσχετίζεται όμως και με τη δεκάδα, τον τέλειο αριθμό. Για αυτό οι πυθαγόρειοι της απέδιδαν και άλλους χαρακτηρισμούς, όπως *Κόσμος*, *Ουρανός*, *Ατλας*, *Παν*, *Γνώμων*, *Ειμαρμένη* κλπ. Η τετρακτύς αποτελεί η ίδια σύστημα αριθμών. Συμβολίζει τα “στοιχεία του αριθμού”, που αποτελούν στοιχεία όλων των πραγμάτων. Περιλαμβάνει τις αρμονικές αναλογίες της μουσικής αρμονίας και θα μπορούσαμε να την περιγράψουμε, χρησιμοποιώντας τα λόγια του πυθαγορικού όρκου, ως το σύστημα «που περιλαμβάνει τη ρίζα και την πηγή της ανεξάντλητης Φύσης». Σ’ ένα από τα ακούσματα που μας διασώζει ο Ιάμβλιχος, η τετρακτύς ταυτίζεται με την κοσμική αρμονία. (Cornford, 1923) Η Τετρακτύς ταυτιζόταν επίσης με το μαντείο των Δελφών, αφού η ίδια αποτελούσε την ουσία της αλήθειας του σύμπαντος και το μαντείο είχε σκοπό να την αποκαλύπτει.

Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία, το άθροισμα των πρώτων τεσσάρων φυσικών αριθμών ( $1+2+3+4$ ) που ισούται με το 10, τον τέλειο αριθμό που διέπει όλες τις σχέσεις και εξασφαλίζει την αρμονία του σύμπαντος. Ο Πορφύριος δίνει την εξής εξήγηση για την τελειότητα του αριθμού 10: «Γιατί, αν η φύση του σύμπαντος περατώνεται σύμφωνα με αριθμητικούς «λόγους» και αναλογίες κι αν καθετί που γεννιέται, αναπτύσσεται και ολοκληρώνεται, κυβερνάται από αριθμητικούς «λόγους», κι αν από την άλλη η δεκάδα εμπεριέχει κάθε «λόγο» και αναλογία και κάθε μορφή αριθμού, πώς να μην αποκαλέσει κανείς τη δεκάδα τέλειο αριθμό; (Πορφύριος, 2001) Ήδη οι μαθητές του Πυθαγόρα είχαν δείξει την αποτελεσματικότητα της μεθόδου αυτής που

επινόησαν, και είχαν κάνει φανερό πως το σχήμα γεννά από μέσα του διαρκώς νέες δυνατότητες συσχέτισης των αριθμών μεταξύ τους και κάνουν εφικτό τον σχηματισμό νέων αριθμητικών και γεωμετρικών αναλογιών. (Βεΐκος, 1998)

Η Τετρακτύς αποτελεί λοιπόν έναν τρίγωνο αριθμό, και οι Πυθαγόρειοι αναγνώριζαν δέκα τέτοια σύνολα, αποδίδοντάς τους φιλοσοφικές ιδιότητες που εξηγούν την κοσμοθεωρία τους.

Αριθμοί	1	2	3	4
Μεγέθη	Σημείο	Γραμμή	Επιφάνεια	Στερεό
Στοιχεία	Φωτιά	Αέρας	Νερό	Γη
Εικόνες	Πυραμίδα	Οκτάεδρο	Εικοσάεδρο	Κύβος
Ζώντα πράγματα	Σπόρος	Ανάπτυξη σε μάκρος	Σε πλάτος	Σε πάχος
Κοινωνικά σύνολα	Άνθρωπος	Χωριό	Πόλη	Χώρα
Ικανότητες	Λόγος	Γνώση	Γνώμη	Αίσθηση
Εποχές	Άνοιξη	Θέρος	Φθινόπωρο	Χειμώνας
Ηλικίες	Νηπιακή	Νεαρή	Ωριμη	Γηραιά
Τμήματα των ζώντων	Σώμα		Τα τρία μέρη της ψυχής	

Εικόνα 3. Πυθαγόρειοι συμβολισμοί των αριθμών (Πηγή: <https://www.pronews.gr>)

## 2.4 Η πυθαγόρειος σχολή

Η Πυθαγόρειος σχολή, μια από τις σπουδαιότερες φιλοσοφικές σχολές της αρχαίας Ελλάδας, ιδρύθηκε περίπου το 520 π.Χ, όταν ο Πυθαγόρας εγκαταστάθηκε στην Κάτω Ιταλία, και συγκεκριμένα στον Κρότωνα. Η σχολή έζησε πάνω από δέκα αιώνες, με περιόδους εξαιρετικής ακμής και περιόδους κατάπτωσης. Ο Πυθαγόρας αποτελούσε τον μόνο δάσκαλο της σχολής για 40 χρόνια. Η σχολή στεγαζόταν σε ένα μεγάλο οίκημα που ονομαζόταν Ομακοεΐον. Εάν η σχολή της Μιλήτου θεωρείται το πρώτο πανεπιστήμιο του κόσμου, η σχολή του Πυθαγόρα θεωρείται το πρώτο συστηματικό πανεπιστήμιο του κόσμου. (Κλαμπανιστή, 2021) Οργανώθηκε με πρότυπο τις μυστικιστικές λατρευτικές εταιρείες, όπου η ένταξη των μελών γινόταν μέσα από τη

διαδικασία της μύησης που περιλάμβανε τον εξαγνισμό και στη συνέχεια την αποκάλυψη της αλήθειας. (Cornford, 1923)

Ο Αριστόξενος περιγράφει τον στόχο της Πυθαγόρειας σχολής: Όλα όσα καθορίζουν σχετικά με το τι θα πρέπει και τι δε θα πρέπει να πράττει κανείς στοχεύουν στην επικοινωνία (ομιλία) με το θεό· και αυτό αποτελεί βασική αρχή τους, ενώ έχουν οργανώσει ολόκληρο τον βίο τους με σκοπό να ακολουθούν το Θεό, μία αντίληψη που συνιστά βασική αρχή της φιλοσοφίας τους. (Πορφύριος, 2001) Το μέσον για να ανυψωθεί κανείς σ' αυτή την κατάσταση αποτελούσε η φιλοσοφία, η ενατένιση του κόσμου μέσα στον οποίο ενυπάρχει ή είναι ενσωματωμένος ο Θεός. Επιπλέον, γινόταν αποδεκτή η αντίληψη ότι ανάμεσα στο Θεό και την ψυχή δεν υπάρχει ένα αξεπέραστο χάσμα αλλά μία θεμελιώδης ταύτιση ως προς τη φύση. Αυτό δημιουργούσε έντονη αντίφαση με την ορθόδοξη θρησκεία του δωδεκαθέου, που είχε έδρα του τον Όλυμπο.

Η διάταξη του κόσμου υπάρχει σε μεγάλη κλίμακα στο σύμπαν και σε μικρή κλίμακα στα άτομα, δηλαδή στα μέρη εκείνα του σύμπαντος που αποτελούν τα ίδια ολότητες. Αυτά δεν είναι άλλα από τα έμβια όντα. Ένα έμβιο ον (με ψυχή και σώμα) αποτελεί την ατομική μονάδα, που καλείται μικρόκοσμος· το σύμπαν ή μακρόκοσμος είναι κατά τον ίδιο τρόπο έμβιο ον που έχει επίσης ψυχή και σώμα. Τα άτομα αποτελούν αντίγραφο του συνόλου σε σμίκρυνση· δεν είναι απλώς κλάσματα αλλά ομόλογα μέρη του όλου, στο οποίο ενυπάρχουν. (Πορφύριος, 2001) Τα κριτήρια επιλογής των μαθητών ήταν πολύ αυστηρά, αλλά δεν υπήρχαν περιορισμοί φύλου. Η μύηση των μαθητών ήταν μία μακροχρόνια διαδικασία που διαρκούσε δύο με πέντε χρόνια. Ο Πυθαγόρας και οι συνεργάτες του «φυσιογνώμουν» τους υποψήφιους μαθητές. Εξέταζαν το σώμα, τις κινήσεις, τις εκφράσεις, τη συμπεριφορά προκειμένου να βγάλουν συμπεράσματα για το ήθος, τον χαρακτήρα, και γενικά την καταλληλότητά τους.

Υπήρχαν διάφορες βαθμίδες μύησης. Οι περισσότεροι μαθητές ήταν Εξωτερικοί, δηλαδή μη μυημένοι, και μπορούσαν να παρακολουθούν τις δημόσιες διδασκαλίες του. Για τους εσωτερικούς, σύμφωνα με τον Π. Γράβιγγερ, υπήρχαν τέσσερις βαθμίδες. Αν ο υποψήφιος μαθητής εγκρινόταν, γινόταν ακουσματικός. Μετά την επιτυχή μαθητεία, οι ακουσματικοί ανάγονταν σε Εσωτερικούς, που μελετούσαν αριθμολογία, γεωμετρία, μουσικολογία. Έπειτα ακολουθούσαν οι πρακτικές γνώσεις,

όπως αστρονομία, γεωγραφία, μετεωρολογία, ανατομο-φυσιολογία, Ιατρική. Τότε ονομάζονταν φυσικοί. Υπάρχουν μαρτυρίες και για άλλον βαθμό, τους Σεβαστικούς και τους Πολιτικούς.

Συνοπτικά οι βαθμίδες μύησης είχαν ως εξής:

- Οι Εξωτερικοί (προπαρασκευαστικό στάδιο)
- Οι Εσωτερικοί (4 βαθμίδες μύησης):

1. Δόκιμοι: Ακουσματικοί ή ακροατές
2. Δάσκαλοι: Μαθηματικοί
3. Σεβαστικοί
4. Πολιτικοί (Οικονομικοί και Νομοθέτες)

Για τον Πυθαγόρα, η φιλοσοφική μύηση δεν είναι απλώς εισαγωγή σε ένα θεωρητικό σύστημα, είναι ολοκληρωτική ψυχική μεταστροφή, στράτευση σε έναν νέο τρόπο ζωής. Στη διδασκαλία του Πυθαγόρα δίνεται έμφαση στο βιωματικό και όχι τόσο στο γνωστικό στοιχείο. Για αυτόν τον λόγο η φιλοσοφία δεν είναι δυνατόν να καλλιεργηθεί σε απομόνωση: απαιτεί την ένταξη σε μια ομάδα ομοϊδεατών και *όμακόων* (που ακούν τα ίδια διδάγματα), σε μια αδελφότητα με αυστηρή ιεραρχία και κοινοκτημοσύνη αγαθών, στην οποία κυριαρχεί η μορφή του δασκάλου και μύστη.

Οι Καλογεράκος & Θανασάς παρατηρούν ότι η κοινότητα των Πυθαγορείων είναι κλειστή: ο κανόνας της σιωπής προστατεύει τα κοινά δόγματα από τα βέβηλα αφτιά των αμύητων. Σιωπή επιβάλλεται και στα νέα μέλη της κοινότητας κατά την περίοδο της μαθητείας τους, για πέντε χρόνια, μέχρι να αποκτήσουν το δικαίωμα να εισέλθουν στον ενδότερο κύκλο των μνημένων και το πλεονέκτημα της προσωπικής επαφής με τον Πυθαγόρα. (Καλογεράκος & Θανασάς, 2000) Η σιωπή δίνει τη δυνατότητα στον Πυθαγόρειο να ζει σε αυτόν τον κόσμο, όπως δουλεύοντας ενεργά στην κοινωνία έχουν κάνει σε όλες τις περιόδους, και δεν εμποδίζει τον λόγο ή τη δράση. Ο εσωτερικός χώρος που δημιουργείται από αυτήν την σιωπή πρέπει να προστατευτεί επειδή ανήκει στα θεία: έτσι ένας κανόνας διατάσσει τον έλεγχο της γλώσσας περισσότερο από οτιδήποτε άλλο, άλλος απαγορεύει το ασυγκράτητο γέλιο.

Υπερβολικός λόγος ή γέλιο θα απομάκρυναν την προσοχή από τον εσωτερικό εαυτό, διαταράσσοντας την ησυχία. (Gemelli Marciano & Huffman, 2014) Η αυτοπειθαρχία που εκφράζει η σιωπή των πυθαγορείων και η προσκόλλησή τους σε πλήθος απαγορεύσεις θεμελιώνεται πάνω σε μία πιο βασική πεποίθηση σύμφωνα με την οποία οι πράξεις μας βρίσκονται υπό τον συνεχή και εξονυχιστικό έλεγχο θεϊκών δυνάμεων. (Huffman, 2005)

Οι Πυθαγόρειοι του 5<sup>ου</sup> αιώνα π.Χ. συγκαταλέγονται στους πιο σημαντικούς επιστήμονες του καιρού τους και ο Πυθαγόρας φαίνεται να ενδιαφερόταν ιδιαίτερα για την επιστήμη. Σύμφωνα με τον Ιάμβλιχο, οι μαθητές διακρίνονταν στους λεγόμενους ακουσματικούς, (δηλαδή ακροατές) και στους μαθηματικούς. Οι μαθηματικοί ασχολούνταν με τα μαθηματικά, τη μεταφυσική, την ηθική, τα γεωμετρικά και αστρονομικά έργα. (Γαλακούτη, 2014) Οι ακουσματικοί δεν επιτρέπεται να υποβάλουν ερωτήσεις, παρά μόνο να ακούν τη διδασκαλία για πέντε χρόνια, χωρίς να βλέπουν την παρουσία του Πυθαγόρα. Κύριο χαρακτηριστικό αυτής της ομάδας ήταν ο τεράστιος σεβασμός προς το πρόσωπο του Πυθαγόρα, τον οποίο τιμούσαν ως ενσάρκωση του Απόλλωνα. (Γαλακούτη, 2014) Οι μαθητές έπρεπε να δώσουν όρκο μυστικότητας και επιβάλλονταν μεγάλες ποινές σε όποιον φανέρωνε τη διδασκαλία. Επίσης η διδασκαλία ήταν μόνο προφορική.

Το άλλο βασικό χαρακτηριστικό του συλλόγου είναι η ύπαρξη του δασκάλου, που εμπνέει σεβασμό, καθώς και η ισοτιμία των μελών. Ο σεβασμός προς τον ιδρυτή είχε σαν αποτέλεσμα να παραμείνουν ανώνυμες μερικές ανακαλύψεις που έγιναν από μέλη της σχολής αλλά που αποδόθηκαν στον ίδιο τον Πυθαγόρα. Έτσι πολλά επιτεύγματα, που είχαν ίσως υποστηριχθεί σαν αποτελέσματα ατομικών ερευνών, αποδόθηκαν στον Πυθαγόρα, για λόγους που υπαγορεύονταν από τον κανόνα της συλλογικής έρευνας και για λόγους σεβασμού προς τον δάσκαλο. (Βεΐκος, 1998)

Ο μυστικιστικός χαρακτήρας της σχολής φαίνεται και από τον τρόπο αναγνώρισης των μαθητών. Η πεντάλφα και ο γνώμων ράβονταν στις ενδυμασίες των μαθητών και με τη χρήση των συμβόλων επικοινωνούσαν μεταξύ τους. (Κλαμπανιστή, 2021)

Η πυθαγόρεια φιλοσοφία χαρακτήριζε κάθε πτυχή της καθημερινότητας των μαθητών και όχι μόνο τη διδασκαλία. Πέρα από τις επιστημονικές μελέτες, τα διδάγματα ήταν επίσης θρησκευτικά, ηθικά και πολιτικά.

Οι πεποιθήσεις μιας θρησκευτικής κοινότητας αποτυπώνονται, σ' ένα αρχικό στάδιο, στις συνήθειες της καθημερινής ζωής.(Cornford, 1923) Η ζωή τους χαρακτηριζόταν από τον ασκητισμό, κάτι που ήταν έκδηλο στην καθημερινότητά τους. Ντύνονταν στα λευκά, η καθημερινή τους διατροφή αποτελούταν από μέλι ή κυρήθρα, ψωμί νερό και λαχανικά ενώ απείχαν από τροφές όπως κρέας, ψάρι και κουκιά. Η ενδυμασία τους δεν ήταν μάλλινη αλλά βαμβακερή, πιθανώς για την υγιεινή του σώματος σε σχέση με τη γυμναστική άσκηση,

Το καθημερινό πρόγραμμα περιλάμβανε τον πρωινό περίπατο, ο οποίος ήταν μοναχικός, σε μέρη με την απαραίτητη ηρεμία, κυρίως σε περιβόλια ναών και ιερά άλση και άλλα ευχάριστα σημεία με πράσινο, επειδή θεωρούσαν ότι δεν έπρεπε να συναντήσουν κανένα προτού βάλουν σε τάξη τον ψυχισμό τους. Έπειτα γύμναζαν το σώμα τους με ένα εύρος ασκήσεων. Ακολουθούσε ένα λιτό γεύμα και μετά αφιέρωναν τον χρόνο τους στις πολιτικές και οικονομικές υποθέσεις. Γίνονταν οι παραδόσεις των μαθημάτων. Το απόγευμα γινόταν δεύτερος περίπατος, όχι μοναχικός αυτή τη φορά, στον οποίο μπορούσαν να επιδοθούν σε φιλοσοφικές συζητήσεις. Έπειτα ακολουθούσε λουτρό και συνάντηση για συνεστίαση. Ένασημαντικό σημείο του ημερήσιου προγράμματος αποτελούσε η άσκηση αυτοελέγχου, την οποία έκαναν οι μαθητές κάθε βράδυ πριν τον ύπνο, αλλά και κάθε πρωί πριν οτιδήποτε άλλο. Μέσα στο πλαίσιο αυτό εντάσσονταν και πνευματικές ασκήσεις που ενδυνάμωναν τη μνήμη.

Η αυστηρά οργανωτική συγκρότηση της σχολής προϋπέθετε υπακοή και αυτοπειθαρχία, στην οποία γινόταν η μύηση των μαθητών από την περίοδο της δοκιμασίας τους.

Το εύρος της έλξης που ασκούσε ο Πυθαγόρειος τρόπος ζωής καταδεικνύεται πιο εύγλωττα ότι ορισμένες από τις ηγετικές φυσιογνωμίες του Κρότωνα και άλλων πόλεων της Κάτω Ιταλίας υπήρξαν οπαδοί του υποδεικνυόμενου τρόπου ζωής. Αυτό είχε ως απόρροια να ασκήσουν οι πυθαγόρειοι σημαντική επιρροή στο πολιτικό σκηνικό.(Huffman, 2005) Σύμφωνα με τον Burnet, δεν υπάρχει καμία απόδειξη ότι οι Πυθαγόρειοι ευνόησαν το αριστοκρατικό κόμμα μάλλον παρά το δημοκρατικό κόμμα.(Burnet, 1980) Αυτό φαίνεται λογικό, δεδομένης της εμπειρίας του Πυθαγόρα με τον τύραννο της Σάμου. Σε όλα τα χωρία των αρχαίων συγγραφέων στα οποία παρατίθεται ο Αριστόξενος, ο Πυθαγόρας και οι οπαδοί του περιγράφονταν ως λάτρεις της ελευθερίας.(Gorman, 1979) Είναι υπό διερεύνηση το εάν οι Πυθαγόρειοι ανέλαβαν ποτέ την εξουσία στις πόλεις της Κάτω Ιταλίας. Υπήρχαν συγκεκριμένες

πολιτικές συνέπειες της διδασκαλίας που ενστερνίζονταν τα μέλη της κοινότητας, αλλά ποτέ δεν διοίκησε τον Κρότωνα ή κάποια άλλη ιταλική πόλη, ενώ ο ίδιος ο Πυθαγόρας παρέμεινε σε απόσταση από την πολιτική ενασχόληση. (Gorman, 1979) Πιθανώς ο Κρότωνας παρέμεινε μία ολιγαρχία κάτω από την πυθαγόρεια επιρροή και στο εξής. Αλλά αυτή η ανάγκη δεν σημαίνει ότι οι πυθαγόρειοι ευνοούσαν την αριστοκρατική ολιγαρχία έναντι άλλων συστημάτων. Οι πυθαγόρειοι μπορούν μεταβίβας να ευνοήσουν την «αριστοκρατία», αν «αριστοκρατία» καθιστά την ιδιοκτησία κριτήριο για επιρροή. Γιατί, από όλους τους ισχυρισμούς, οι πυθαγόρειοι δεν κατείχαν προσωπική ιδιοκτησία, ζούσαν μία ζωή λιτότητας, και προωθούσαν μη υλικές αξίες ανάμεσα στους ίδιους και σε εκείνους που εξουσίαζαν. (Rowett, 2014)

Η πυθαγόρεια διδασκαλία συμπυκνώνεται σε τρεις ερωτήσεις που ο Πυθαγόρας προέτρεπε τους μαθητές του να σκέφτονται στο τέλος της ημέρας, σε ένα πλαίσιο αυτοκριτικής:

«πηπαρέβην, τι δ' έρεξα, τι μοι δέον ουκ ετελέσθη»  
(πού έσφαλα, τι έκανα, τι έπρεπε να κάνω αλλά δεν έκανα).

### 3. Ο Πυθαγόρας ως μαθηματικός

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι γνώσεις που υπάρχουν σήμερα για τον Πυθαγόρα ως μαθηματικό. Συγκεκριμένα παρουσιάζονται μια σειρά από επιτεύγματα που αποδίδονται στον Πυθαγόρα όπως η μεθοδολογία, οι αριθμοί, οι αναλογίες, η μουσική που συνοδεύει τα μαθηματικά, το πυθαγόρειο θεώρημα, ο απειροστικός και ο διαφορικός λογισμός, η πυθαγόρεια άλγεβρα και γεωμετρία. Το κεφάλαιο αυτό έχει τη χρησιμότητα να δώσει στον αναγνώστη όλες τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειάζεται για τα μαθηματικά του Πυθαγόρα, έτσι ώστε να μπορέσει να αντιληφθεί το επόμενο κεφάλαιο – δηλαδή τη σύνδεση του τρόπου αντίληψης των μαθηματικών με τη φιλοσοφία, που θα παρουσιαστεί στο τέταρτο κεφάλαιο της διπλωματικής εργασίας.

#### 3.1 Πυθαγόρεια Μεθοδολογία

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο Πυθαγόρας έζησε μια ζωή στην οποία ταξίδευε συνεχώς. Κατά τα ταξίδια του, στις διάφορες πόλεις που διέμενε, δίδασκε συνεχώς σε διάφορα μέρη, με βασική όμως περιοχή την Νότια Ιταλία. Παρά το μεγάλο εύρος πόλεων στις οποίες δίδαξε ο Πυθαγόρας, σε γενικές γραμμές ακολουθούσε κοινές μεθόδους διδασκαλίας, οι οποίες έχουν μείνει γνωστές ως σήμερα. Η μέθοδος διδασκαλίας του Πυθαγόρα ήταν μονάχα προφορική (Σταματοπούλου, 2016).

Η μαθηματική του μεθοδολογία, θεωρείται σήμερα ως μια από τις πιο σημαντικές συνεισφορές του, η οποία βασίστηκε στην αρχή της αρμονίας του σύμπαντος. Ο Πυθαγόρας πίστευε ότι το σύμπαν αποτελείται από αρμονικές αναλογίες και ότι αυτές οι αναλογίες μπορούσαν να εκφραστούν μαθηματικά. Η προσέγγισή του στα μαθηματικά βασίστηκε στην ιδέα ότι τα πάντα στο σύμπαν θα μπορούσαν να εξηγηθούν με όρους αριθμούς και τις σχέσεις τους.

Η μεθοδολογία αυτή περιλαμβάνει μια σειρά από βασικές αρχές όπως η μελέτη γεωμετρικών σχημάτων, η χρήση αναλογιών και η εφαρμογή αριθμητικών εννοιών σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου (Huffman, 2005). Ο Πυθαγόρας πίστευε ότι η μελέτη της γεωμετρίας ήταν απαραίτητη για την κατανόηση του φυσικού κόσμου και δίδασκε ότι τα γεωμετρικά σχήματα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για να



αναπαραστήσουν φυσικά αντικείμενα και έννοιες. Το διάσημο θεώρημά του, το οποίο θα αναλυθεί στη συνέχεια, είναι ένα κλασικό παράδειγμα της χρήσης της γεωμετρίας για την επίλυση προβλήματα του πραγματικού κόσμου.

Μια άλλη βασική αρχή της Πυθαγόρειας μεθοδολογίας ήταν η χρήση αναλογιών, ιδιαίτερα της αναλογίας ακέραιων αριθμών. Ο Πυθαγόρας πίστευε ότι το σύμπαν αποτελούνταν από αρμονικές αναλογίες και προσπάθησε να κατανοήσει και να περιγράψει αυτούς τους λόγους χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά. Αυτό οδήγησε στην ανάπτυξη της έννοιας της μουσικής αρμονίας, η οποία πίστευε ότι βασιζόταν στις αναλογίες των μηκών των δονούμενων χορδών.

Ο Πυθαγόρας πίστευε επίσης στη σημασία της αφαίρεσης και του λογικού συλλογισμού στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Δίδαξε στους μαθητές του να χρησιμοποιούν επαγωγικό συλλογισμό για να καταλήξουν σε μαθηματικές αλήθειες και τόνισε τη σημασία της απόδειξης μαθηματικών προτάσεων μέσω λογικής επιχειρηματολογίας.

Σε γενικές γραμμές, η Πυθαγόρεια μεθοδολογία ήταν μια μοναδική προσέγγιση στα μαθηματικά που έδινε έμφαση στην αρμονία του σύμπαντος και στη χρήση της γεωμετρίας, των αναλογιών και του λογικού συλλογισμού για την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου. Η κληρονομιά του Πυθαγόρα στα μαθηματικά, τη φιλοσοφία και την πνευματικότητα συνεχίζει να είναι αισθητή στον σύγχρονο κόσμο και οι ιδέες και οι μέθοδοί του παραμένουν επιρροές μέχρι σήμερα.

### 3.2 Πυθαγόρεια Αριθμολογία

«τί το σοφόν;»  
«ο αριθμός.»

Κατά τον Πυθαγόρα και τους μαθητές του, οι αριθμοί είχαν ύψιστη σημασία καθώς τους αποδίδονταν ιδιότητες οι οποίες εντοπίζονται για πρώτη φορά στην ιστορία Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται κυρίως η αριθμητική υπόσταση των αριθμών ενώ στη συνέχεια, σε επόμενο κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η σύνδεση των αριθμών με τη φιλοσοφία.

Βασική αντίληψη της κοσμοθεωρίας Πυθαγορείων αποτελεί η πεποίθηση ότι οι Αρχές των μαθηματικών είναι επίσης και οι Αρχές του Όντος. Με άλλα λόγια, σύμφωνα με τον Αριστοτέλη (μετά τα φυσικά 985B) πίστευαν ότι τα πάντα στη φύση αποτελούν ομοιώματα των αριθμών ότι τα στοιχεία των αριθμών είναι στοιχεία των όντων και ότι ολόκληρος ο ουρανός είναι αριθμός. Έτσι ο αριθμός ως έννοια αποκτά βαρύνουσα σημασία με φιλοσοφικές προεκτάσεις. Η θεωρία των Πυθαγορείων εδράζεται, στην πραγματικότητα, σε μια κοσμοαντίληψη με βάση την οποία ο αριθμός συλλαμβάνεται μ' έναν τρόπο εντελώς διαφορετικό από αυτόν που μας είναι οικείος. Στις μέρες μας, αντιλαμβανόμαστε πλέον τον αριθμό ως αποτέλεσμα επισώρευσης πολλών μονάδων, ώστε το 3 για εμάς να προκύπτει από την πρόσθεση του 1 στο 1 και πάλι στο 1· ο αριθμός, άρα, γεννάται μέσω της επανάληψης της στοιχειώδους ενότητας. (Brun, 1992) Ο αριθμός εξομοιώνεται με τον θεϊκό παράγοντα και έτσι ο Πυθαγόρας «αναδιάρθρωσε ριζικά το ελληνικό πάνθεον: οι θεοί, όχι πλέον ανθρωπόμορφα όντα σε μία θεϊκή μελοδραματική παράσταση, είχαν γίνει αφηρημένες μαθηματικές οντότητες. Η πυθαγόρεια εικόνα του κόσμου δεν ήταν το συμπαντικό θέατρο του Όμηρου και του Ησίοδου, αλλά ένας μεταφυσικός χορός αριθμών. (Wertheim, 1998) Για τους Πυθαγόρειους, ο αριθμός προκύπτει από τη διαίρεση της Ενότητας. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, «Το εν, διχαζόμενο, διπλασιάζεται: το ένα παρήγαγε το δύο» (Μετά τα Φυσικά, XIV, 3). Κυριολεκτώντας, λοιπόν, η ενότητα δεν έχει πληθυντικό ή, μάλλον, οφείλουμε να διακρίνουμε το *Εν*, τον αριθμό των αριθμών, από τη μονάδα, τον αριθμό δηλαδή των αριθμούμενων πραγμάτων. Αυτή η κοσμοαντίληψη συνεπάγεται μια φιλοσοφία της εγκόλπωσης, όπου ο αριθμός είναι τμήμα της ενότητας κι όχι η ενότητα τμήμα του αριθμού (Brun,

1992). Υπ’ αυτή την έννοια, η Μονάδα αποτελεί τον πρώτο αριθμό στη σειρά των αριθμών στην ουσία δεν πρόκειται καν για αριθμό, αλλά για την *ἀρχή* (“πρώτη αρχή” ή “απαρχή”) των αριθμών.(Cornford, 1923)

Ακόμη, ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του απέδιδαν αριθμητικές ικανότητες στα γράμματα της αλφαβήτου, στοιχείο που θα αναλυθεί και στη συνέχεια. Κρίνεται σκόπιμο όμως να αναφερθεί στην παρούσα ενότητα η Πυθαγόρεια Αριθμολογία η οποία αντιστοιχίζει τα γράμματα του αλφάβητου με έναν αριθμό από το Α ως το Ω.

Πυθαγόρειος Αριθμολογία								
<b>Α</b>	<b>Β</b>	<b>Γ</b>	<b>Δ</b>	<b>Ε</b>	<b>Σ</b>	<b>Ζ</b>	<b>Η</b>	<b>Θ</b>
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>Ι</b>	<b>Κ</b>	<b>Λ</b>	<b>Μ</b>	<b>Ν</b>	<b>Ξ</b>	<b>Ο</b>	<b>Π</b>	
10	20	30	40	50	60	70	80	
<b>Ρ</b>	<b>Σ</b>	<b>Τ</b>	<b>Υ</b>	<b>Φ</b>	<b>Χ</b>	<b>Ψ</b>	<b>Ω</b>	
100	200	300	400	500	600	700	800	

Εικόνα 4 - Πυθαγόρεια Αριθμολογία

Στην προηγούμενη ενότητα αναλύθηκε η πυθαγόρεια αντίληψη σχετικά με την τελειότητα του αριθμού 10. Όμως στην Πυθαγόρεια Αριθμολογία κάθε φυσικός αριθμός έχει την αυταξία του. Οι άρτιοι αριθμοί ανήκαν στο θηλυκό γένος ενώ οι περιττοί στο αρσενικό: Αν διαιρέσουμε και τον ένα και τον άλλο σε επιμέρους ενότητες, στο μέσον του άρτιου θα φανεί ένα κενό, εκεί που ο περιττός είναι πάντα πλήρης εξ ενός των μελών του· για το λόγο αυτό οι Πυθαγόρειοι είναι της γνώμης πως ο άρτιος μοιάζει περισσότερο με θηλυκό και ο περιττός με αρσενικό(Brun, 1992). Στη συνέχεια θα αναλύσουμε τους σημαντικότερους αριθμούς κατά τον Πυθαγόρα και τους μαθητές του.

## **Ο αριθμός 0**

Το μηδέν είναι ο αριθμός που ξεκινάει τη μέτρηση. Είναι μια άρρητη και απροσδιόριστη αρχή των πάντων που συμβολίζει την απαρχή του Σύμπαντος και την προέλευση του κόσμου. Το μηδέν αναφέρεται και ως Εν. Είναι το απόλυτο που προηγείται από κάθε αριθμό, προγενέστερο ακόμη και κάθε αριθμητικής έννοιας. Αυτή είναι μια θεώρηση που διαφοροποιείται σημαντικά από μεταγενέστερες θεωρήσεις – κυρίως θεολογικές και θρησκευτικές – όπως ο Καθολικισμός (Γράβιγγερ, 1998). Αυτή η θεωρία όμως υπήρχε και στην Αρχαία Ελλάδα όπως αναφέρει ο Γράβιγγερ (1998), καθώς υπάρχουν αναφορές μεταξύ Ενός και Μονάδας: χαρακτηριστικά αυτή η θεωρία συναντάται στον Ορφέα και σε Νεοπλατωνικούς φιλόσοφους με έντονα στοιχεία παρμένα από τη θεωρία του Πυθαγόρα.

## **Ο αριθμός 1**

Ο αριθμός 1 συμβολίζει την ενότητα και την προέλευση όλων των πραγμάτων, αφού όλοι οι άλλοι αριθμοί μπορούν να δημιουργηθούν από το 1, προσθέτοντας το ίδιο όσες φορές χρειάζεται. Για παράδειγμα:  $7 = 1+1+1+1+1+1+1$ . Ο αριθμός 1 δεν είναι ούτε θηλυκός, ούτε αρσενικός. Αν προστεθεί σε έναν περιττό αριθμό τον μετατρέπει σε άρτιο, ενώ αν προστεθεί σε έναν άρτιο, τον μετατρέπει σε περιττό. Το 1 είναι η μονάδα – η αρχή των μερικών πραγμάτων, ο πρώτος αριθμός – που διαφοροποιείται από το μηδέν ως αρχή των πάντων. Ως αρχή όλων των αριθμών συμπεριλαμβάνει όλες τις αρετές που αποδίδονται στους αριθμούς, για αυτό και του αποδίδεται ο χαρακτηρισμός τέλειος αριθμός. Το ένα αποδίδεται επίσης και στους εγκοσμίους και υπερκόσμιους θεούς και πιο συγκεκριμένα στον Δία (θεός της γης), τον Ποσειδώνα (θεός της θάλασσας) και τον Πλούτωνα (θεός του κάτω κόσμου – θανάτου).

## **Ο αριθμός 2**

Ο αριθμός 2 συμβολίζει την δυϊκότητα και αντιπροσωπεύει την πόλωση, την αντίθεση, την ανισότητα. Είναι ο πρώτος θηλυκός αριθμός. Τα αντίθετα είναι πάντοτε σε ζεύγη

- αρσενικό-θηλυκό,
- αριστερό-δεξί
- ζωντανός-νεκρός
- περιττός-άρτιος
- όριο-άπειρο
- φως-σκότος
- καλό-κακό
- τετράγωνο-επίμηκες

## **Ο αριθμός 3**

Οι Πυθαγόρειοι τον θεωρούσαν ότι ήταν ο πρώτος αληθινός αριθμός. Αποτελεί παράλληλα ευθεία κι επιφάνεια, ένας πραγματικός τριγωνικός και ισόπλευρος αριθμός, του οποίου οι πλευρές έχουν πάντα την αξία δύο ενοτήτων.(Brun, 1992)Είναι ένα σύνολο που αντιπροσωπεύει την αρχή, τη μέση και το τέλος. Υπονοεί επίσης τα τρία επίπεδα χρόνου,Παρελθόν-Παρόν-Μέλλον, αλλά σχετίζεται και με την τριμερή διαίρεση της ψυχής. Ο αριθμός τρία υπάρχει για να ισορροπεί την αντίθεση

μεταξύ του ένα και του δύο. Επίσης σχετίζεται με τα στερεά σώματα, εφόσον η ιδέα του στερεού εδράζεται σε τρεις διαστάσεις (Brun, 1992). Είναι ο πρώτος άρρεν αριθμός, ένας αριθμός ο οποίος είναι και ο πρώτος ασύνθετος. Κατά τον Ιάμβλιχο είναι ο αρχηγός της επιστροφής των προελθόντων. Συναντάται επίσης και ως δημιουργικό τρίγωνο κατά τους Πυθαγορείους. Ο Αριστοτέλης αναφέρει τον αριθμό τρία ως τον νόμο βάσει του οποίου διατάσσονται τα πάντα. Σε αυτό τον αριθμό περιέχονται όλα τα πνευματικά και σωματικά στοιχεία που υπάρχουν στον κόσμο. Η τριάδα είναι ένας συμβολισμός της μεταφυσικής έννοιας. Συγκεφαλαιώνει τις τρεις όψεις του συνόλου:

$$1 \text{ (Ενέργεια)} + 2 \text{ (Αντίσταση)} = 3 \text{ (Κίνηση)}$$

ή εναλλακτικά

$$1 \text{ (Αρχή)} + 2 \text{ (Μέση)} = 3 \text{ (Τέλος)}$$

ή εναλλακτικά

$$1 \text{ (Ενέργεια)} + 2 \text{ (Υλη)} = 3 \text{ (Ζωή)}$$

#### **Ο αριθμός 4**

Με το 4 εκφράζεται η έννοια της δικαιοσύνης, στη βάση του ότι η δικαιοσύνη είναι ουσιαστικά αμοιβαιότητα και η αμοιβαιότητα ενσαρκώνεται σε έναν τετράγωνο αριθμό. (Guthrie, 1962). Ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του απέδιδαν απεριόριστη σημασία στην τετράδα καθώς οι αριθμοί ως τον αριθμό 4 αν προστεθούν στο σύνολό τους (1+2+3+4) έχουν ως άθροισμα το 10, αριθμός πολύ σημαντικός για τους Πυθαγορείους. Αν αυτός ο αριθμός λογιστεί ως άθροισμα (1+0) έχει άθροισμα 1 που συμβολίζει την αρχική πηγή δημιουργίας. Σε ακόμη μια όψη που αντανακλάται αυτή η απεριόριστη σημασία είναι οι εποχές του χρόνου – η καμπύλη των τεσσάρων εποχών η οποία έχει συνεχή ροή (Γράβιγγερ, 1998).

## Ο αριθμός 5

Ο αριθμός 5 συμβολίζει τον γάμο, αφού προκύπτει από την ένωση του πρώτου αρσενικού με τον πρώτο θηλυκό αριθμό (3+2). Ο αριθμός 5 είναι το μέσο μεταξύ των πρώτων δέκα αριθμών – ως τον αριθμό δέκα που όπως αναφέρθηκε παραπάνω αποδιδόταν σημαντική έννοια. Ο δρόμος του αριθμού πέντε αποτελεί μια διαρκής αναζήτηση για περισσότερη ελευθερία, με σκοπό την εσωτερική έκφραση. Πρόκειται για μια αέναη προσπάθεια έκφρασης, της οντότητάς του. Η γεωμετρική απεικόνιση του αριθμού 5 είναι η πεντάλφα ή η σφραγίδα του Σολομώντα η οποία αντιπροσωπεύει την ένωση του μακρόκοσμου με τον μικρόκοσμο, δηλαδή την ένωση του ανθρώπου με τον Θεό, σύμβολο που ως σήμερα πιστεύεται ότι προσδίδει τύχη. Οι μαθητές του Πυθαγόρα προσδίδαν στο σύμβολο της πεντάλφας χαρακτηριστικά σε κάθε άκρη του, που σχετίζονται με τα στοιχεία της φύσης, αρχικά των οποίων σχηματίζουν τη λέξη ΥΓΕΙΑ:

- Ύδωρ
- Γαία
- Ιδέα / Ιερό
- ΕΙλη (θερμότητα ήλιου)
- Αήρ

Η ΥΓΕΙΑ συμβολίζει την αντίθετη όψη του θανάτου, όχι με υλικούς όρους αλλά με πνευματικούς. Για αυτό το λόγο το κέντρο της Πεντάλφας συμβολίζει την αθάνατη Ζωή. Κατά την αρχαιότητα η Πεντάλφα ονομαζόταν επίσης «Πεντάγραμμο», καθώς αποτελείται από 5 γραμμές, «Πεντάγωνο» διότι έχει 5 γωνίες και «Πεντάμυχος». Στη βιβλιογραφία συναντάται συχνά ως σύμβολο της Πυθαγόρειας φιλοσοφίας της τελειότητας του ανθρώπου, του Θεού Εντός και της αιωνιότητας. Κατά τον Πυθαγόρα, ο αριθμός 5 είναι ο αριθμός του ανθρώπου και της Ψυχής.

## Ο αριθμός 6

Θεωρείται ο πρώτος τέλειος αριθμός, αφού προκύπτει από το άθροισμα των τριών πρώτων αριθμών (1+2+3) αλλά και από το γινόμενό τους (1x2x3). Παράγεται από το άθροισμα και το γινόμενο του πρώτου άρτιου (2) και του πρώτου περιττού αριθμού (3), του αρσενικού και του θηλυκού, και για αυτό καλείται “αρσενόθηλυς” ή γάμος. Ο αριθμός έξι είναι η μετενσάρκωση του σώματος, η μετεμψύχωση, σε εξέλιξη των αριθμών 1 (σημείο), 2 (γραμμή), 3 (επιφάνεια), 4 (όγκος), 5 (πραγματικό σώμα). Ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του συμβόλιζαν με τον αριθμό 6 την ολομέλεια, την ειρήνη και τον κόσμο. Ειδικότερα για τον κόσμο, αν προσθέσουμε τον αριθμό του κάθε γράμματος θα βρούμε τον αριθμό 600, του οποίου οι αριθμοί αν προστεθούν μας δίνουν άθροισμα 6, που απαντάται και ως τέλειος κόσμος (Γράβιγγερ, 1998):

$$\text{ΚΟΣΜΟΣ} = 20 + 70 + 200 + 40 + 70 + 200 = 600$$

Ο αριθμός 6 έχει την ιδιότητα να διαιρείται ακριβώς σε δύο ίδια σκέλη (3+3), γεγονός που του αποδίδει την έννοια της Ισορροπίας και του Ζυγού. Από τους μεταγενέστερους φιλοσόφους (π.χ. Ιάμβλιχος) ο αριθμός 6 ως αριθμός που αποδίδει την ισορροπία καθώς εκλαμβάνεται ως ένα όργανο σύνδεσης, φιλίας, έρωτα και κάλους.

## Ο αριθμός 7

Ο αριθμός 7 είναι ένας ιδιόμορφος αριθμός στην Πυθαγόρεια αντίληψη, αφού είναι ο μόνος αριθμός που δεν γεννά κανέναν αριθμό της δεκάδας και δεν γεννιέται από κανέναν τους. Αυτή η ιδιότητα ώθησε τους Πυθαγόρειους να τον ονομάσουν Αθηνά, καθώς η θεά αυτή δεν γεννήθηκε από μητέρα ούτε υπήρξε ποτέ η ίδια μητέρα.



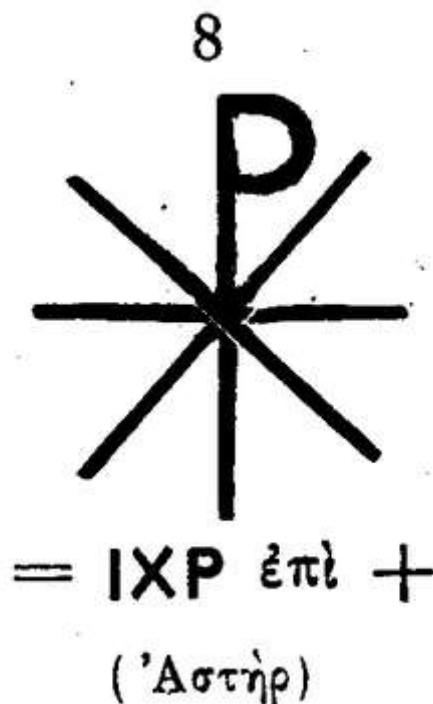
Συναντάται ακόμη και ως φωτεινός νους και ως φρόνηση. Το επτά είναι ο μόνος αριθμός που πολλαπλασιαζόμενος με κάποιον άλλον δεν γεννά κανέναν από αυτούς της δεκάδας και που δεν είναι το γινόμενο του πολλαπλασιασμού κανενός αριθμού. Δεδομένου ότι μπορεί να διαιρεθεί μονάχα με τον εαυτό του, θεωρείται ότι αντιπροσωπεύει την άκρη μιας πόλης – την ακρόπολη. Ο αριθμός 7 αποκαλείται επίσης ως Τελεσφορος – δηλαδή ο οδηγός προς τη λύση, προς το τέλος(Γράβιγγερ, 1998).

### **Ο αριθμός 8**

Ο αριθμός 8 είχε επίσης εξέχουσα σημασία, καθώς αποτελεί τον πρώτο κύβο ( $2*2*2$ ). Οι Πυθαγόρειοι χαρακτήρισαν την οκτάδα ως “Εμπεριέχουσα των Αρμονιών”, επειδή συνιστά πηγή μουσικής αναλογίας. Επίσης, γίνονταν θυσίες προς τους θεούς την όγδοη μέρα κάθε μήνα. Ο αριθμός 8 ήταν συνδεδεμένος με την ασφάλεια, την σταθερότητα και τη γενικότερη ισορροπία στο σύμπαν. Ο Φιλόλαος, που είναι επηρεασμένος από τον Πυθαγόρα προσδίδει στον αριθμό 8 έννοιες όπως ο έρωτας, η φιλία, η σκέψη και η φαντασία συνδέοντάς τον με τη δημιουργία του κόσμου. Αναφέρει ότι η 8<sup>η</sup> μέρα της δημιουργίας έρχεται μετά την 7<sup>η</sup> – μετά τη μέρα που τα όντα ανέπτυξαν νόηση και την 8<sup>η</sup> ανέπτυξαν τα παραπάνω συναισθήματα για τις σχέσεις τους με τους συνανθρώπους τους (Γράβιγγερ, 1998).

Αρκετά σημαντική αναπαράσταση του αριθμού οκτώ είναι το Κηρύκειο του θεού Ερμή το οποίο σύμφωνα με πηγές συμβολίζει την «αιώνια κίνηση των κύκλων την κανονική αναπνοή του κόσμου». Το κηρύκειο αναπαρίσταται με μία λεπτή ξύλινη ράβδο (συνήθως δάφνης ή ελιάς), γύρω από την οποία δύο φίδια είναι τυλιγμένα των οποίων τα κεφάλια συναντιώνται αντικρυστά στο πάνω μέρος της ράβδου. Πάνω από τα κεφάλια των φιδιών, στην κορυφή της ράβδου, υπάρχουν δύο φτερούγες, γεγονός που αναπαρίσταται σε νεότερη μορφή διότι από σωζόμενα τεκμήρια όπως αγγειογραφίες από την αρχαία Ελλάδα τα δύο φίδια βρίσκονται στην κορυφή και σχηματίζουν κύκλο, ενώ τα κεφάλια τους σχηματίζουν δύο «κέρατα» επάνω από τον κύκλο αυτό. Τα δύο φίδια συμβολίζουν τα αντίθετα στοιχεία (π.χ. φως – σκοτάδι, άνδρας – γυναίκα, κ.α.)Ο κεντρικός άξονας είναι εκείνος που διαχωρίζει, συνθέτει και συμβιβάζει τα αιώνως αντίθετα και θεωρείται ο άξονας του κόσμου. Η οκτάδα

αργότερα χρησιμοποιήθηκε για να συνθέσει το σύμβολο των πρώτων Χριστιανών κατά την εποχή του Κωνσταντίνου: το Χρίσμα των κατακομβών (που συναντάται και ως αστέρι του Χριστιανισμού), το οποίο παρατίθεται:

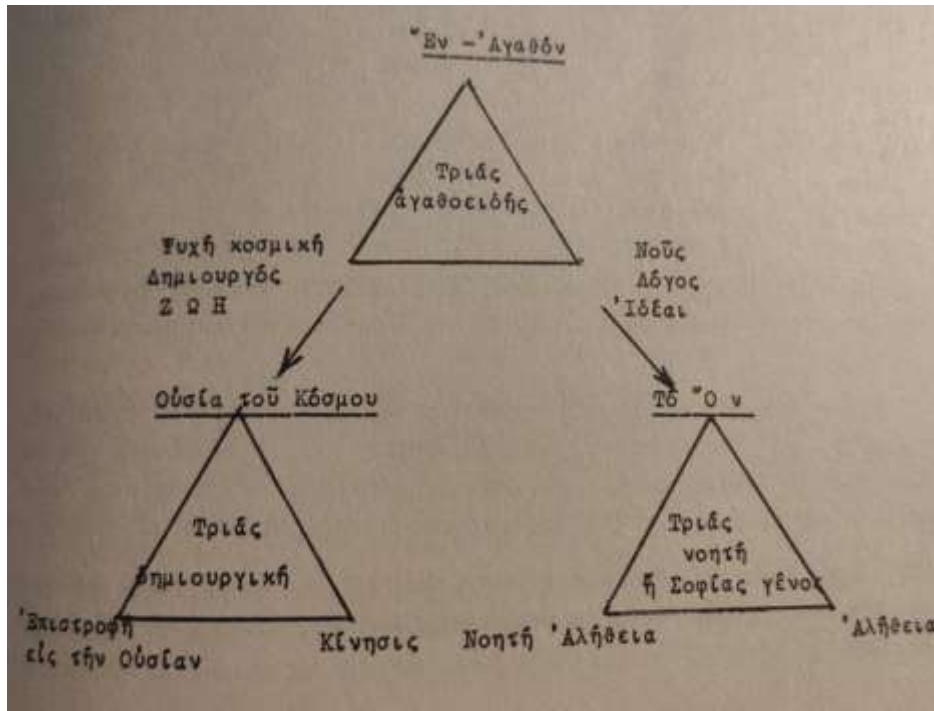


Εικόνα 5 - Χρίσμα Κατακομβών

## Ο αριθμός 9

Οι Πυθαγόρειοι έβλεπαν το εννέα σαν έναν αριθμό που σηματοδοτούσε την ολοκλήρωση. Αυτό επειδή λάμβαναν υπόψη τους εννέα μήνες της εγκυμοσύνης αλλά και την ύπαρξη των εννέα Μουσών. Επίσης αποτελεί το πρώτο άρρεν τετράγωνο (3\*3). Ο Πυθαγόρας επίσης απέδωσε στον αριθμό 9 κάποιες ιδιότητες με φιλοσοφικό ενδιαφέρον όπως ότι η διαφορά που προκύπτει μεταξύ ενός οποιουδήποτε σύνθετου διψήφιου αριθμού και του αριθμού που προκύπτει από την αναστροφή των ψηφίων του, που είναι πάντοτε πολλαπλάσιος του 9. Ο Ορφέας, ο οποίος είναι μεταγενέστερος, στηριζόμενος στη θεωρία του Πυθαγόρα για τους αριθμούς 9 και 3, απέδωσε στον αριθμό 9 τρεις τριάδες αρχών: τα τρίγωνα αιθήρ-χάος-κοσμογονικό όν, ουρανός-γη-έρως και νους-δύναμη-πατέρας (Γράβιγγερ, 1998). Αργότερα, στην ίδια κατεύθυνση ο τρίγωνο και χρησιμοποιώντας και τη θεωρία του Πυθαγόρα για τις

ιδιότητες των ισοσκελή τριγώνων έχουμε την αναφορά των Πλατωνικών στην πρωταρχική θεία Τριάδα. Τρία ισοσκελή τρίγωνα σε μορφή ενός μεγάλου τριγώνου σηματοδοτούν:



Εικόνα 6 - Πρωταρχική θεία Τριάς

Κατά τον Πυθαγόρα επίσης απαντώνται αναφορές του αριθμού 9 σε αγγελικούς χορούς που σχετίζονταν με τον Διόνυσο και μορφές οι οποίες σήμερα έχουν άλλη θρησκευτική σημασία καθώς μετέπειτα χρησιμοποιήθηκαν από τον Χριστιανισμό. Σε αυτούς τους χορούς διακρίνονταν εννέα διαφορετικές μορφές : τα σεραφείμ, τα χερουβείμ, οι θρόνοι, οι κυριότητες οι δυνάμεις οι εξουσίες οι αρχές, οι αρχάγγελοι και οι άγγελοι.

### Ο αριθμός 10

Ο αριθμός αυτός ήταν ίσως ο πιο ιερός αριθμός για τους Πυθαγορείους, αριθμός που συμβόλιζε τον ουρανό, τον κόσμο, τον Θεό και περικλείει όλα εντός του – αφού ήταν

ο αριθμός που περιλαμβάνει τους αριθμούς από το 1 ως το 9, οι οποίοι μετά από το 10 απλώς επαναλαμβάνονται. Έτσι το δέκα συμβολίζει τον νέο κύκλο και τη νέα φάση της παγκόσμιας εκδήλωσης. Περισσότερα για τον αριθμό δέκα θα παρατεθούν στο επόμενο κεφάλαιο καθώς το δέκα θεωρείται ένα από τα σύμβολα των Πυθαγορείων το οποίο ήταν συνδεδεμένο με φιλοσοφικές θεωρήσεις.

### **Ο αριθμός 11**

Ο αριθμός 11 ήταν το σύμβολο της εσωτερικής διαμάχης, της δυσαρμονίας, της αντίστασης και των παραπλανήσεων. Αφού ο αριθμός δέκα συμβόλιζε το τέλος του πρώτου κύκλου, ο αριθμός έντεκα είναι η αρχή του νέου. Η πρώτη δεκάδα – η δεκάδα των θείων έχει ολοκληρωθεί και αρχίζει η δεύτερη δεκάδα. Στη βάση αυτών των θεωριών του Πυθαγόρα, μεταγενέστερα ο αριθμός αυτός απαντάται να συμβολίζει τον Πειρασμό και τον Εωσφόρο – ως τον κίνδυνο που διατρέχουν τα πλάσματα να απομακρυνθούν από το Θεό – δηλαδή την πρώτη δεκάδα (Γράβιγγερ, 1998).

### **Ο αριθμός 12**

Το δώδεκα συμβόλιζε το όριο της τελειότητας των αιτίων που συγκεντρώνουν τα όρια του Κόσμου. Αριθμός της τριπλής τετράδας ο αριθμός 12. Ακόμη είναι ο αριθμός που ενώνει την Αστρονομία με τη Θρησκεία εκείνη την εποχή, καθώς είναι αριθμός που αναπαριστά τον ζωδιακού κύκλου και το Δωδεκάθεο. Η ένωση του ζωδιακού κύκλου και του Δωδεκάθεου είναι ως εξής:

- Κριός – Αθηνά
- Ταύρος – Αφροδίτη
- Δίδυμοι – Ερμής
- Καρκίνος – Δίας
- Λέων – Απόλλωνας
- Παρθένος – Δήμητρα

- Ζυγός – Ήφαιστος
- Σκορπιός – Άρης
- Τοξότης – Άρτεμις
- Αιγόκερος – Εστίας
- Υδροχόος – Ήρα
- Ιχθύς - Ποσειδώνας

Εξετάζοντας τα παραπάνω ζευγάρια μπορούμε να εντοπίσουμε σημαντικές διαφορές ανάμεσα στα ζώδια και τους θεούς. Η Αθηνά απεικονίζεται συχνά με ακόντιο και πανοπλία, όντας έτοιμη και ισχυρή, εικόνα που συνάδει με την εικόνα του κριού. Η Αφροδίτη αναπαρίσταται πάνω σε έναν ταύρο και τα κοινά τους στοιχεία είναι η φύση, η καλλιέργεια και η γονιμότητα. Ο Λόγος που αναπτύχθηκε μέσω της ικανότητας του Ερμή, τα γράμματα, η επικοινωνία, η συνδιαλλαγή, το εμπόριο, είναι όλα στοιχεία των Διδύμων.

Η Άρτεμις αναφέρεται ότι γεννήθηκε λίγο πριν τον Απόλλωνα και ο Καρκίνος έρχεται πριν τον Λέοντα, σημείο του ζωδιακού κύκλου με το Απολλώνιο φως. Ο Απόλλωνας, είναι θεός της μουσικής, της ποίησης, της χαράς, της ζωής, της αρμονίας στη φύση ενώ το λιοντάρι συμβολίζει και αυτό τον άρχοντα, τον βασιλιά του ζωικού βασιλείου και της φύσης. Το ζώδιο του Παρθένου σχετίζεται με τη Δήμητρα μέσω του πλανήτη Δήμητρα που καταστράφηκε κι ήταν ο κυβερνήτης της Παρθένου. Ο Ζυγός αναπαρίσταται με μια σιδερένια ζυγαριά και ο Ήφαιστος ήταν ο θεός σιδηρουργός.

Ο Άρης, θεός του πολέμου και της μάχης, αρρενωπός, με ανδρικό παράστημα, ζοηρό βλέμμα και διεισδυτικό, δυνατό σώμα μοιάζει με τον σκορπιό ένα ζώο που φέρνει τον θάνατο, ζώδιο της σεξουαλικότητας, κάτι που επίσης ταιριάζει στον Άρη, επειδή αντιπροσωπεύει την ανδρική ορμή και την ερωτική πράξη. Η Άρτεμις συχνά αναπαρίσταται με τόξο και βέλη όπως ο τοξότης. Η Εστία και ο Αιγόκερος συμβολίζουν τη νοικογένεια. Ο Υδροχόος και η Ήρα συμβολίζουν τη ζήλια και τέλος ο Ποσειδώνας και οι Ιχθύς συμβολίζουν τη θάλασσα.

## Λοιποί αριθμοί

Οι Πυθαγόρειοι, πέρα από τη δεκάδα αναγνώριζαν και άλλους ιερούς αριθμούς, όπως:

Ο αριθμός 27, επειδή είναι ο πρώτος άρρεν κύβος ( $3*3*3$ )

Ο αριθμός 28, ως ο δεύτερος τέλειος αριθμός, ( $1+2+4+7+14=28$ ), καθώς επίσης και το άθροισμα των επτά αριθμών, ( $1+2+3+4+5+6+7=28$ .)

Ο αριθμός 35, ως το άθροισμα των κύβων του πρώτου θήλυ και πρώτου άρρενος, ( $8+27=35$ )

Ο αριθμός 36, ως το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού των πρώτων τετραγώνων των αριθμών, ( $4*9=36$ ) Ακόμα, το άθροισμα των τριών πρώτων κύβων, δηλαδή  $1+8+27=36$ . Επίσης το άθροισμα των οκτώ πρώτων αριθμών, δηλαδή  $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ .

Οι αριθμοί σχετίζονταν με συγκεκριμένες ηθικές έννοιες. Έτσι, ο Πυθαγόρας συνέδεσε τη θεωρία των φίλων αριθμών με εκείνη της φιλίας. Ο Πυθαγόρας εκτιμούσε πολύ την φιλία, ως μία αρετή θεμελιωμένη πάνω στην «εναρμόνιο ισότητα». Ήταν ο πρώτος που είπε «Κοινά τα των φίλων» και όταν ερωτήθηκε τί εστί φίλος απάντησε «έτερος εγώ». Συνέδεε άμεσα τη φιλία με τη θεωρία του περί φίλων αριθμών: Οι αριθμοί 220 και 284 αποκαλούνται Φίλιοι Αριθμοί διότι συνδέονται μεταξύ τους με μια ιδιαίτερη σχέση, ο κάθε ένας από αυτούς είναι το άθροισμα των διαιρετών του άλλου.

Οι διαιρέτες του 220 είναι: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110

Οι διαιρέτες του 284 είναι: 1, 2, 4, 71, 142

Έτσι:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

Έτσι, οι αριθμοί αφενός αποκτούν αρετές και κοινωνικές ιδιότητες. Αφετέρου οι φίλοι αντιπροσωπεύονται με τους αριθμούς 220 και ο 284 γιατί τα μέρη τού καθένα έχουν την δύναμη να δημιουργούν τον άλλον.

Δεδομένης της αξίας που έχει ο αριθμός για τους Πυθαγορείους, θεωρούσαν ότι και η ίδια η γλώσσα έχει μαθηματική δομή και είναι βασισμένη στους αριθμούς. Αυτή η πεποίθηση τους οδήγησε στο να αντιστοιχίσουν κάθε αριθμό με ένα γράμμα και διαμορφώσουν την πυθαγόρειο αριθμοσοφία, η οποία είναι σε θέση να αποκαλύπτει βαθύτερα νοήματα. Έτσι η αντιστοιχία γραμμάτων-αριθμών αποτυπώνεται ως εξής, συμπεριλαμβανομένων των γραμμάτων Δίγαμμα (F), Κόππα (Q) και Σαμπί(Ξ).

Σύμβολο	Αξία	Σύμβολο	Αξία	Σύμβολο	Αξία
α	1	ι	10	ρ	100
β	2	κ	20	σ	200
γ	3	λ	30	τ	300
δ	4	μ	40	υ	400
ε	5	ν	50	φ	500
δίγαμμα- F	6	ξ	60	χ	600
ζ	7	ο	70	ψ	700
η	8	π	80	ω	800
θ	9	κόππα- Q	90	σαμπί- Ξ	900

Εικόνα 7. Η πυθαγόρεια αριθμοσοφία (Πηγή: <https://lexarithmos.wordpress.com>)

### 3.2.1 Ιδιότητες των αριθμών

Η σημαντικότητα των αριθμών, ήταν για τον Πυθαγόρα ένα ζήτημα στο οποίο δομήθηκαν ολόκληρες θεωρίες τις οποίες θα δούμε στη συνέχεια. Ένα πολύ μεγάλο εύρος στη βιβλιογραφία του Πυθαγόρα ασχολείται με την εννοιολογική προσέγγιση των αριθμών. Ο μαθητής του Πλάτωνα Σπεύσιππος θεωρείται ότι είναι ο πρωτοπόρος στην ανάλυση των αριθμών του Πυθαγόρα, με το σύγγραμμά του «Περί Πυθαγορείων Αριθμών». Αυτό δείχνει και τα έντονα κοινά στοιχεία που υπάρχουν σε Πλάτωνα και Πυθαγόρα, με ανοιχτό ακόμη το ενδεχόμενο του ποιος επηρέασε ποιόν σε σχέση με τους μετέπειτα μαθητές τους (Mattéi, 1995). Ο Αριστοτέλης απέδωσε στους αριθμούς κατά τον Πυθαγόρα διάφορες ιδιότητες, οι οποίες είναι οι εξής:

- Οι αριθμοί αποτελούν την αρχή των πάντων και τις αρχές των όντων. Οι αριθμοί αποτελούν το κλειδί του κόσμου, την αρμονία της φύσης. Η φύση υπακούει σε μια τάξη: την παγκόσμια αρμονία.
- Τα ίδια τα πράγματα είναι οι αριθμοί, όλα μπορούν να αναχθούν σε αριθμούς, τα υλικά, τα αφηρημένα, τα νοητά, τα οποιαδήποτε αντικείμενα.
- Οι αριθμοί είναι η ουσία των πάντων
- Οι αριθμοί αποτελούν αιτίες της ουσίας όλων των άλλων πραγμάτων
- Οι αρχές των μαθηματικών είναι οι αρχές όλων των πραγμάτων
- Στους αριθμούς μπορούν να αναχθούν τα πάντα
- Τα σώματα αποτελούνται από αριθμούς
- Οι αριθμοί παράγουν τα φυσικά σώματα
- Τα όντα είναι αριθμοί - από αυτούς αποτελούνται τα όντα
- Οι αριθμοί μπορούν να κατασκευάσουν ολόκληρο το σύμπαν
- Τα στοιχεία των αριθμών είναι τα στοιχεία όλων των όντων και ολόκληρος ο ουρανός δεν είναι παρά αρμονία και αριθμός
- Όλα τα όντα φαίνονται να είναι τέλεια απεικόνιση των αριθμών
- Στοιχεία του αριθμού είναι το άρτιο και το περιττό, όπου το περιττό είναι πεπερασμένο και το άρτιο είναι άπειρο.
- Ο αριθμός Ένα συνίσταται και από τα δύο, καθώς είναι και άρτιο και περιττό.
- Οι αριθμοί που προέρχονται από το Ένα συνιστούν την ολότητα του ουρανού.
- Τα όντα υπάρχουν με τη μίμηση των αριθμών



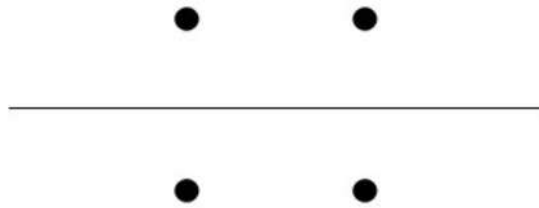
Για την αντίληψη των παραπάνω, χρειάζεται να δούμε πιο συγκεκριμένα το τι απέδιδε ο Πυθαγόρας στους Αριθμούς, σε σχέση με τα Πράγματα. Αρχικά θα πρέπει να αναφερθεί ότι αντιθέτως με τη σημερινή αντίληψη για τους αριθμούς, δεν αποδίδονταν ισότιμες λειτουργίες στους αριθμούς. Αντιθέτως, ο κάθε αριθμός είχε την ικανότητα να ταξινομηθεί σε συγκεκριμένες κατηγορίες με βάση το υπόλοιπο της διαίρεσής του με τον αριθμό 10. Οι κατηγορίες που προκύπταν ήταν δέκα: η πρώτη με υπόλοιπο 1, η δεύτερη με υπόλοιπο 2, κ.ο.κ. ως τη δέκατη κατηγορία με υπόλοιπο μηδέν – άρα χωρίς υπόλοιπο.

Το 10 είχε ύψιστη σημασία για τον Πυθαγόρα και τους Πυθαγόρειους και ο Πυθαγόρας θεωρείται ο θεμελιωτής της δεκαδικής και προσθετικής αριθμητικής – σε αντίθεση με την ισχύουσα που ήταν εξηταβάθμια (Mattéi, 1995).

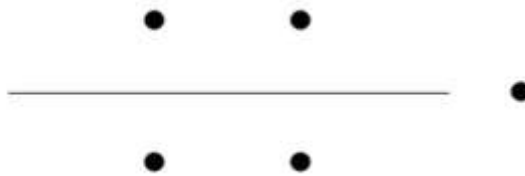
### 3.2.2 Περιττοί και άρτιοι αριθμοί

Ο Πυθαγόρας επίσης ήταν ο θεμελιωτής της διάκρισης των αριθμών σε περιττούς και άρτιους. Οι περιττοί αριθμοί θεωρούνταν πεπερασμένοι ενώ οι άρτιοι θεωρούνταν άπειροι. Αυτό το χαρακτηριστικό το λαμβάνουν διότι οι περιττοί αριθμοί έχουν την ιδιότητα όταν διαιρούνται στη μέση, να αφήνουν υπόλοιπο τη μονάδα. Έτσι, μια απεικόνιση ενός περιττού αριθμού μπορεί να είναι ένα μέρος – μονάδα – δεύτερο μέρος. Για παράδειγμα ο αριθμός 7 μπορεί να διαιρεθεί σε  $3+3+1$ , αριθμοί που θα πρέπει να μπουν στη σειρά 3-1-3 για να δείχνουν μια διαδικασία με αρχή, μέση και τέλος, δηλαδή μια πεπερασμένη διαδικασία που αντιπροσωπεύει την ολότητα του αριθμού.

Αντιθέτως, αυτή η διαδικασία δεν είναι πεπερασμένη για τους άρτιους αλλά άπειρη. Επιπρόσθετα η πεπερασμένη και άπειρη ιδιότητα προκύπτει από το γεγονός της γραφικής αναπαράστασης (Heidel, 1901): Όταν ένα σχήμα κουκίδας αντιπροσωπεύει τη μονάδα, και γίνεται προσπάθεια διάταξης και διαίρεσης των αριθμών πάνω και κάτω από μια ευθεία γραμμή, οι άρτιοι αριθμοί μπορούν να διαχωρίζονται απείρως με την γραμμή αυτή ενώ για τους περιττούς αριθμούς, πάντοτε θα προκύπτει η μονάδα ως υπόλοιπο – η οποία θεωρείται ότι τους περιορίζει.



Εικόνα 8: Άρτιοι αριθμοί



Εικόνα 9: Περιττοί αριθμοί

### 3.2.3 Τρίγωνοι και τετράγωνοι αριθμοί

Ο Πυθαγόρας επίσης εισήγαγε μια διάκριση των αριθμών σύμφωνα με την διάταξή τους κατά τη δημιουργία γεωμετρικών σχημάτων στο φυσικό χώρο. Για αυτό τον λόγο αυτή η διάκριση ονομάζεται και παραστατική. Σε αυτή τη διαδικασία, ένας αριθμός τοποθετούνταν σε μια παραστατική εικόνα στο χώρο. Με αυτό τον τρόπο σχηματίζονταν ακολουθίες τριγώνων, τετραγώνων και ορθογώνιων. Στη συνέχεια παρουσιάζονται μερικά παραδείγματα αυτής της διάκρισης.



Εικόνα 10: Τρίγωνοι, Τετράγωνοι και Ορθογώνιοι αριθμοί

### 3.3 Αναλογίες

Ο Πυθαγόρας διατύπωσε τη θεωρία των αναλογιών, οι οποίες διακρίνονται σε πρώτη ή αριθμητική, δεύτερη ή γεωμετρική και τρίτη ή αρμονική που παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Κατά την αριθμητική αναλογία, σε περίπτωση τριών αριθμών  $\alpha > \beta > \gamma$  που ισχύει η ισότητα των διαφορών  $\alpha - \beta = \beta - \gamma$ , υπάρχει αριθμητική αναλογία. Ο  $\beta$  μεσαίος αριθμός – ο αριθμητικός μέσος εκφράζεται μέσω της σχέσης

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Κατά τη γεωμετρική αναλογία, σε περίπτωση τριών αριθμών  $\alpha > \beta > \gamma$  που ισχύει η ισότητα των διαφορών  $\alpha / \beta = \beta / \gamma$ , υπάρχει γεωμετρική αναλογία. Ο  $\beta$  μεσαίος αριθμός – ο γεωμετρικός μέσος εκφράζεται μέσω της σχέσης

$$\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$$

Κατά την αρμονική αναλογία, σε περίπτωση τριών αριθμών  $\alpha > \beta > \gamma$  που ισχύει ότι ο μέγιστος προς τον ελάχιστο ( $\alpha/\gamma$ ) ισούται με το λόγο της διαφοράς του μέσου από τον μέγιστο προς τη διαφορά του ελάχιστου από τον μέσο ( $((\alpha-\beta)/(\beta-\gamma))$ ). Τότε δομείται αρμονική αναλογία, κατά την οποία ο  $\beta$  μεσαίος αριθμός – ο αρμονικός μέσος εκφράζεται μέσω της σχέσης

$$\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma}$$

Ο Πυθαγόρας επίσης ασχολήθηκε με τις αναλογίες των γεωμετρικών σχημάτων και απέδωσε τις εξής ιδιότητες στα γεωμετρικά σχήματα – και όχι μόνο (Mattéi, 1995):

- Η θέση προσδιορίζεται από το σημείο – τη μονάδα.
- Αντίστοιχα η γραμμή είναι ανάλογη με τη δυάδα, η επιφάνεια με την τριάδα και το στερεό προς την τετράδα.
- Στον ίδιο ή στους μαθητές του Πυθαγόρα αποδίδεται η ιδιότητα του τριγώνου να έχει δύο ίσες ορθές εσωτερικές γωνίες.
- Στους ίδιους αποδίδεται η κατασκευή του πενταγράμμου ως σχήμα που προκύπτει από τρία τρίγωνα που αλληλοεμπλέκονται μεταξύ τους.
- Ανακάλυψε την παραβολή της επιφάνειας ενός σχήματος, την υπερβολή και την έλλειψή της.
- Απέδειξε την ασυμμετρία της διαγώνιου του τετραγώνου
- Κατά τον Αριστοτέλη, ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του κατάρτησαν έναν πίνακα δέκα αντίθετων στοιχείων, σχετικών και όχι σχετικών με τη γεωμετρία και τα μαθηματικά γενικότερα:
  - Πέρας ↔ άπειρον
  - Περιττόν ↔ Άρτιον
  - Εν ↔ Πλήθος
  - Δεξιόν ↔ Αριστερόν
  - Άρρεν ↔ Θήλυ
  - Ηρεμόν ↔ Κινούμενον
  - Ευθύ ↔ Καμπύλον
  - Φως ↔ Σκότος
  - Αγαθόν ↔ Κακόν
  - Τετράγωνον ↔ Ετερόμηκες

### 3.4 Μουσική

Σύμφωνα με πηγές, ο Πυθαγόρας είχε τη θεώρηση ότι οι μουσικές νότες μπορούσαν να μεταφραστούν σε μαθηματικές εξισώσεις όταν σε μια εργασία άκουσε ένα σιδερά και παρατήρησε τον ήχο των σφυριών του να χτυπούν στα αμόνια (Riedweg, 2002). Αμέσως αντιλήφθηκε ότι οι ήχοι των σφυριών ήταν αρμονικοί και όμορφοι και αμέσως μπήκε στη διαδικασία να πειραματιστεί με αυτά. Παράλληλα συνειδητοποίησε ότι η μελωδία που παιζόταν όταν χτυπούσε το σφυρί ήταν ευθέως ανάλογη με το μέγεθος του σφυριού και επομένως κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η μουσική ήταν μαθηματική (Riedweg, 2002). Κατά πολλούς επίσης ο Πυθαγόρας με αυτή την ανακάλυψη θεωρείται ότι είναι αυτός που ανακάλυψε τη διατονική κλίμακα δηλαδή την κλίμακα στην οποία η σειρά των μουσικών φθόγγων προχωρά ανά τόνους και ημιτόνια.

Για τον Πυθαγόρα η μουσική ήταν ένα από τα τμήματα της ευρύτερης μαθηματικής επιστήμης διότι η ύπαρξη των μαθηματικών αναλογιών επικαθορίζει τις αρμονίες της μουσικής. Άλλωστε για τον Πυθαγόρα, τα μαθηματικά ήταν η θεϊκή επιστήμη που καθόριζε ολόκληρο το σύμπαν μέσα από τη δημιουργία του Σύμπαντος από το Θεό. Αυτή η δημιουργία ήταν χωρισμένη σε σφαίρες όπου η κάθε μία τους αντιστοιχούσε σε έναν τόνο, ένα αρμονικό διάλειμμα, έναν αριθμό, μια μορφή. Οι σφαίρες αντιστοιχούσαν επίσης σε πνευματικά και υλικά επίπεδα από τις πιο αφηρημένες δομές της λογικής ως τα πιο συμπαγή γεωμετρικά στερεά.

Επίσης, ο Πυθαγόρας χρησιμοποιούσε τη μουσική για θεραπεία (ψυχική, σωματική και πνευματική) τόσο στους μαθητές του όσο και στον κόσμο ευρύτερα. Ο Ιάμβλιχος αναφέρει ότι ο Πυθαγόρας χρησιμοποιούσε συγκεκριμένες μελωδίες για τη θεραπεία της ψυχής, δηλαδή για τη μελαγχολία, τη θλίψη, το θυμό και άλλων συναισθημάτων.

Σε ότι αφορά τη μουσική συνεισφορά του Πυθαγόρα, είναι γνωστή ως σήμερα η θεωρία των σφαιρών που αποδίδεται στον ίδιο τον Πυθαγόρα και τους μαθητές του. Όπως αναφέρεται, ο Πυθαγόρας είχε ακούσει τη μουσική αυτή και σύμφωνα με τη θεωρία που ανέπτυξε η μουσική αυτή προερχόταν από την κίνηση των πλανητών. Ανάλογα με χαρακτηριστικά των πλανητών όπως η ταχύτητα και η μάζα τους, η κίνησή τους παρήγαγε ένα συγκεκριμένο τόνο, μια συγκεκριμένη νότα. Σημαντικό

στοιχείο για την αντίληψη της νότας αυτής είναι και η απόσταση από την οποία ακούγεται. Οι πιο μακρινοί πλανήτες όπως ο Κρόνος είχαν πιο βαριές νότες ενώ οι πιο κοντινοί πλανήτες όπως η Σελήνη, πιο οξείες νότες.

Κατά τον Πυθαγόρα, το Σύμπαν ήταν χωρισμένο σε δώδεκα τμήματα που ήταν τμήματα ενός νοητού μονόχορδου. Τα άκρα της χορδής ήταν το απόλυτο πνεύμα και η απόλυτη ύλη. Το άκρο της μιας πλευράς ονομαζόταν σφαίρα των σταθερών αστεριών και ήταν η χώρα των αθάνατων ψυχών – το απόλυτο πνεύμα, ενώ σταδιακά οι υπόλοιπες σφαίρες ήταν οι πλανήτες Κρόνος, Δίας, Άρης, Ήλιος, Αφροδίτη, Ερμής, Σελήνη, Φωτιά, Αέρας, Νερό και Γη που ήταν το άλλο άκρο – η απόλυτη ύλη.

Ακόμη μια θεωρία από τον Πυθαγόρα και τους μαθητές που συνδέει τη μουσική κλίμακα με την αστρονομία αντιστοιχεί την κάθε νότα με έναν από τους επτά πλανήτες αλλά και την ανθρώπινη ηλικία. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή,

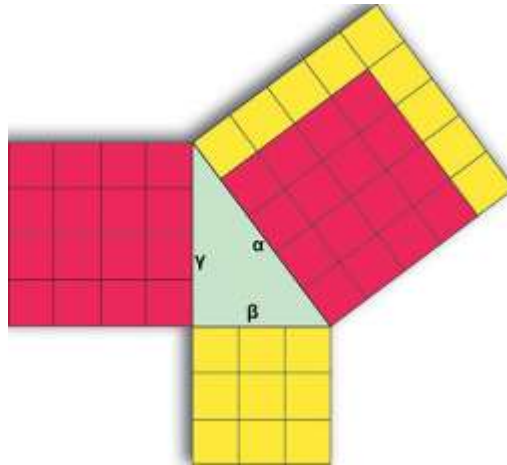
- Η Σελήνη αποκρυσταλλώνει την παιδική ηλικία, το φωνήεν Α και τη νότα ΛΑ
- Ο Ερμής αντιστοιχεί στην παιδική ηλικία, το φωνήεν Ε και τη νότα ΣΟΛ
- Η Αφροδίτη αντικατοπτρίζει την νεότητα, στο φωνήεν Η και στη νότα ΦΑ
- Ο Ήλιος αντιστοιχεί στην ενηλικίωση, στο φωνήεν Ι και στη νότα ΜΙ
- Ο Άρης αντιστοιχεί στην Πλήρη Ισχύ, στο φωνήεν Ο και στη νότα ΡΕ
- Ο Δίας αντιστοιχεί στην Ωριμότητα, στο φωνήεν Υ και στη νότα ΝΤΟ,
- Ο Κρόνος αντιστοιχεί στα γηρατεία, στο φωνήεν Ω και στη νότα ΣΙ.

### 3.5 Πυθαγόρειο θεώρημα

Το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι μια σχέση που διέπει τις πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου. Σύμφωνα με το θεώρημα του Πυθαγόρα, σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτεινουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο κάθετων πλευρών του.

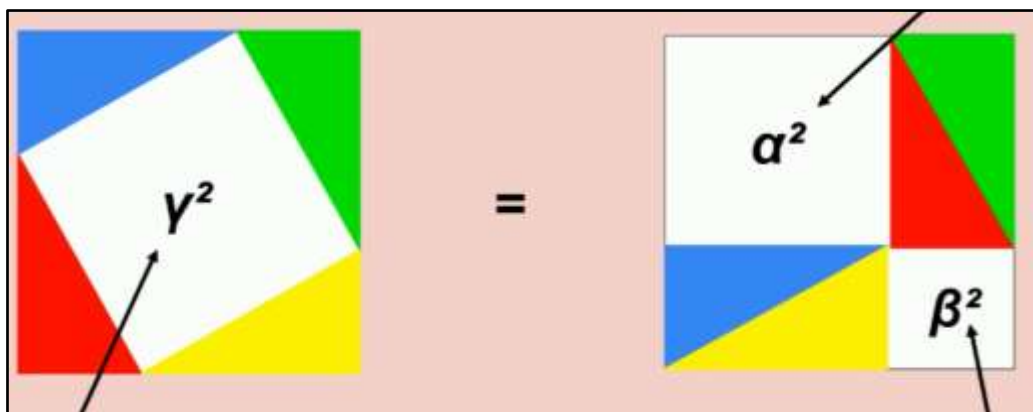
*«έντοϊζόρθογωνίοιςτριγώνοιςτὸἀπὸτῆςτῆνὀρθῆνγωνίανύποτεινούσηςπλευρᾶςτετράγωνο νῖσονἔστιτοῖςἀπὸτῶντῆνὀρθῆνγωνίανπεριεχουσῶνπλευρῶντετραγώνοις»*

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$



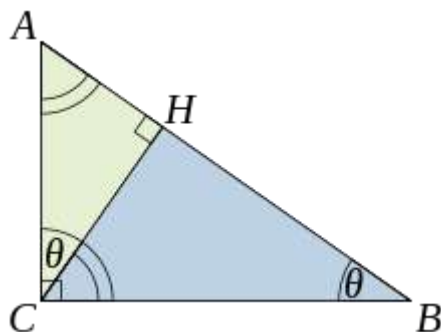
Εικόνα 11: Απεικόνιση θεωρήματος Πυθαγόρα

Διάφορες πηγές στη βιβλιογραφία αναφέρουν ότι το θεώρημα ήταν ήδη γνωστό και πριν τον Πυθαγόρα, σε αυτόν όμως αποδίδεται γιατί το απέδειξε πρώτος. Η απόδειξη του Πυθαγόρα βασίστηκε στα εμβαδά του τριγώνου. Η απόδειξη βασίζεται στο παραπάνω σχήμα όπου το κίτρινο εμβαδό της πλευράς  $\beta$  και το κόκκινο εμβαδό της πλευράς  $\gamma$  ισούνται με το εμβαδό της πλευράς  $\alpha$  που είναι το άθροισμα των δυο προηγούμενων. Εναλλακτικά, βλέπουμε το παρακάτω σχέδιο, όπου το κάθε τετράγωνο της παρακάτω εικόνας περιέχει τέσσερα χρωματιστά όμοια τρίγωνα, όπου στην πρώτη εικόνα χωρίζονται και στη δεύτερη κατανέμονται για να δείξουν τις αναλογίες. Στο πρώτο ορθογώνιο η λευκή περιοχή που μένει εκτός από τα τρίγωνα είναι το εμβαδό της υποτεινουσας του παραπάνω τριγώνου, ενώ οι λευκές περιοχές στο δεξιά τμήμα της εικόνας είναι οι άλλες δύο πλευρές του τριγώνου. Τα δύο αυτά ορθογώνια και οι λευκές περιοχές έχουν ίσο εμβαδό. Ο υπολογισμός των εμβαδών των λευκών περιοχών, οδηγεί στο πυθαγόρεια θεώρημα.



Εικόνα 12: Εναλλακτική απεικόνιση Πυθαγορείου θεωρήματος

Εκτός από την απόδειξη του Πυθαγόρα, στη βιβλιογραφία υπάρχουν δεκάδες και ίσως εκατοντάδες αποδείξεις του θεωρήματος που ανά τα χρόνια έχουν προκύψει από μαθηματικούς και άλλους συγγραφείς. Μια από αυτές είναι η απόδειξη με την ομοιότητα των τριγώνων, όπου σε τρίγωνο ABC φέρουμε ευθεία από τη γωνία C στο σημείο H της ευθείας AB που τέμνεται κάθετα και σχηματίζει δυο ορθές γωνίες.



Εικόνα 13: Τρίγωνο Πυθαγορείου θεωρήματος

Σε αυτό το τρίγωνο έχουμε

$$\frac{BC}{AB} = \frac{BH}{BC}$$

Και

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC}$$

Οι σχέσεις αυτές μπορούν να γραφτούν και με την παρακάτω μορφή

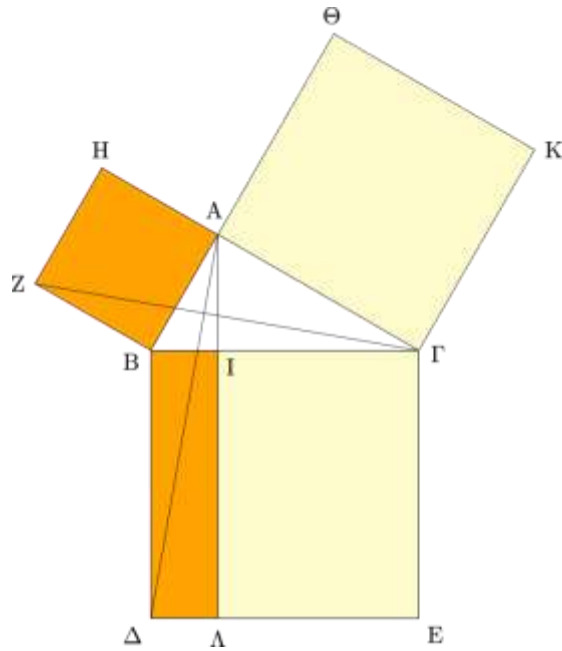
- $BC^2 = AB * BH$
- $AC^2 = AB * AH$

Προσθέτοντας τις δυο παραπάνω εξισώσεις προκύπτει:

- $BC^2 + AC^2 = AB * BH + AB * AH = AB * (BH+AH) = AB^2$

Ακόμη μια γνωστή απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος αποδίδεται στον Ευκλείδη και αποτελεί μια μέθοδο συνδυαστική των δύο παραπάνω μεθόδων, η οποία παρουσιάζεται συνοπτικά παρακάτω με τέσσερα απλά βήματα.

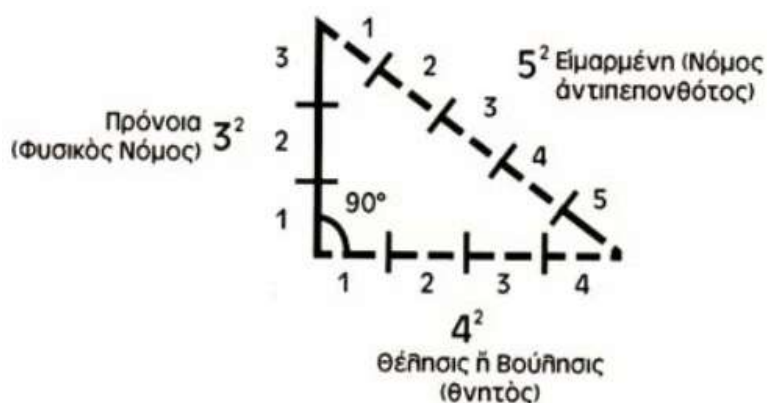




Εικόνα 14: Γεωμετρική απόδειξη Πυθαγορείου θεωρήματος

1. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  τοποθετούμε ένα τετράγωνο στις πλευρές του, όπως στην παραπάνω διαδικασία και χαράσσουμε κάθετη γραμμή  $A\Lambda$  στη  $\Delta E$ . Το τετράγωνο της υποτεινούς χωρίζεται σε δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Ο στόχος είναι να αποδειχθεί ότι τα  $B\Lambda\Delta$  και  $ABZH$  έχουν ίδιο εμβαδόν, όπως και τα  $A\Gamma E\Lambda$  και  $A\Gamma K\Theta$ .
2. Στη συνέχεια χαράσσονται οι  $A\Delta$  και  $Z\Gamma$ . Τα τρίγωνα που προκύπτουν ( $BZ\Gamma$  και  $BA\Delta$ ) είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία ( $BZ = BA$  και  $B\Gamma = B\Delta$ ), ενώ οι γωνίες  $ZB\Gamma$  και  $AB\Delta$  είναι και αυτές ίσες, αφού ισούνται με 1 ορθή συν την γωνία  $AB\Gamma$ . Συνεπώς, τα τρίγωνα έχουν ίσα εμβαδά.
3. Όμως, το κάθε τρίγωνο έχει εμβαδόν ίσο με το μισό του αντίστοιχου ορθογωνίου. Συγκεκριμένα το  $BZ\Gamma$  έχει κοινή βάση με το  $ABZH$  (την  $BZ$ ) και το ίδιο ύψος (το  $AB$ , διότι τα  $\Gamma, A, H$  είναι συνευθειακά, αφού η γωνία  $\Gamma A H$  ισούται με 2 ορθές) και το τρίγωνο  $AB\Delta$  έχει ίδια βάση με το  $B\Lambda\Delta$  και ίδιο ύψος.
4. Συνεπώς, οι περιοχές με πορτοκαλί σκίαση έχουν ίσα εμβαδά αφού το εμβαδόν τους είναι διπλάσιο από το εμβαδό ίσων τριγώνων. Το ίδιο συμβαίνει και με τις περιοχές με κίτρινη σκίαση που έχουν μεταξύ τους ίσο εμβαδόν. Αυτό μπορεί να αποτυπωθεί χαράσσοντας τις  $A\epsilon$  και  $B\kappa$ , και συγκρίνοντας τα τρίγωνα  $A\Gamma\epsilon$  και  $B\kappa\Gamma$  τόσο μεταξύ τους όσο και με τις κίτρινες περιοχές που όπως αποτυπώθηκε στο 1<sup>ο</sup> βήμα, ήταν και ο στόχος προς απόδειξη.

Σύμφωνα με την Πυθαγόρειος αριθμοσοφία, οι αριθμοί 3, 4 και 5, του μήκους των τριών πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου, αντιστοιχούν σε συγκεκριμένη ερμηνεία.



Εικόνα 15:Ζωογονικό τρίγωνο Πυθαγορείου θεωρήματος

Η Κάθετη πλευρά που τριγώνου που έχει μήκος 3 αντιστοιχεί στην Πρόνοια, του Θεϊκού Νόμου. Η Πρόνοια είναι ο Νόμος, ο οποίος προνοεί για το μέλλον ως αίδιος, σταθερός και δίκαιος. Ο αριθμός τρία είναι η ιερά μεσότητα μεταξύ της αρχής της εκδηλώσεως (αριθμός δύο) και του τέλους των εκδηλωμένων πραγμάτων (αριθμός 4).

Η Οριζόντια πλευρά που έχει μήκος 4 και είναι η βάση του τριγώνου αντιστοιχεί στην ανθρώπινη βούληση, η οποία αυξάνεται ή μειώνεται σύμφωνα με τα στοιχεία της φύσης τα οποία αντιστοιχούν σε ανθρώπινα ψυχικά χαρακτηριστικά:

1. Η φωτιά (πυρ) που αντιστοιχεί στην ορμή, την μαχητικότητα, την λάμψη, τον ενθουσιασμό, την «εν ΘεωΟυσίαν του».
2. Ο αέρας (αήρ), την αεί κινουμένη νοητική σύσταση των ιδεών και των λογικών ή παραλόγων σκέψεων.
3. Το νερό (ύδωρ), το συναισθηματικό υπόβαθρο και την υποκειμενική αντίληψη των καταστάσεων.
4. Τη γη, τα ένστικτα και τας σωματικές ανάγκες και απαιτήσεις της καθημερινότητας.

Η ανύψωση του αριθμού 4 στο τετράγωνο δείχνει την δυνατότητα του ανθρώπου να ανυψωθεί προς το θεό, να επιτύχει την αρετή της ψυχής να μείνει αναλλοίωτος, λαμπρός και να προσδώσει στην αιωνιότητα της φύσης.

Τέλος η υποτείνουσα του τριγώνου με αριθμό 5 αναφέρεται στη Μοίρα του ανθρώπου. Ο αριθμός 5 για τον Πυθαγόρα και τους μαθητές του είναι η πεμπτουσία των αριθμών και εκφράζει την δικαιοσύνη. Ο αριθμός 5 όταν ανυψώνεται στο τετράγωνο μετατρέπει τις αισθήσεις σε αισθήματα και μέσω ειδικών συνάψεων σε συναισθήματα, σκέψεις, ιδέες. Ο ίδιος ο άνθρωπος είναι εκείνος που ερμηνεύει τα μεταφερόμενα στον εγκέφαλο εξωτερικά ερεθίσματα των 5 αισθήσεών του, θα τα μετατρέψει σε πράξεις. Το αποτέλεσμα των πράξεων του παρελθόντος, που διαμορφώνεται στην πορεία του ανθρώπου στο χρόνο είναι η Ειμαρμένη.

### 3.6 Λογισμός

Ο Απειροστικός Λογισμός, ή απλά Λογισμός, είναι η μαθηματική μελέτη της συνεχούς μεταβολής των τιμών. Οι δύο βασικές κατευθύνσεις του είναι ο διαφορικός και ο ολοκληρωτικός λογισμός. Ο πρώτος σχετίζεται με τα ποσοστά των αλλαγών και τις κλίσεις των καμπυλών, ενώ ο δεύτερος με τη σώρευση των ποσοτήτων και τις περιοχές κάτω από τις καμπύλες. Οι δυο αυτές κατευθύνσεις συνδέονται μεταξύ τους με το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού, θεώρημα που συνδέει την έννοια της παραγώγου μιας συνάρτησης με την έννοια του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης. Μια από τις ρίζες του απειροστικού λογισμού εντοπίζονται στην αρχαιότητα, στον Πυθαγόρα και τους μαθητές του, που έθεσαν τις βάσεις για την έννοια του λογισμού με τον καθορισμό της έννοιας του ορίου. Συγκεκριμένα ο Εύδοξος ανέπτυξε θεωρία κατά την οποία απέδειξε τους όγκους του κώνου και της πυραμίδας.

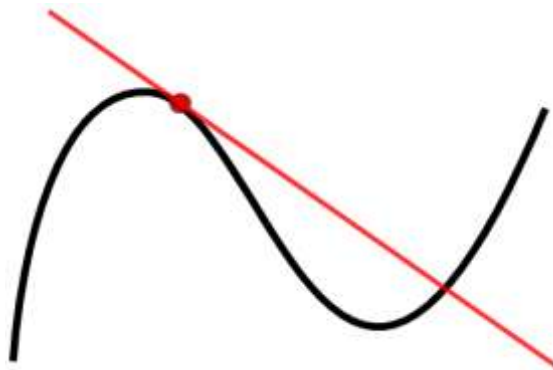
Για την ανάπτυξη του λογισμού συνήθως εστιάζουμε στο μικρό επίπεδο, σε εξαιρετικά μικρές ποσότητες. Ιστορικά, η πρώτη μέθοδος για να γίνει αυτό ήταν από απειροελάχιστα, αντικείμενα που μπορούν να αντιμετωπιστούν σαν πραγματικοί αριθμοί, αλλά τα οποία είναι, κατά μία έννοια, «απείρως μικρά». Για παράδειγμα, ένας απειροελάχιστος αριθμός θα μπορούσε να είναι μεγαλύτερος από το 0, αλλά μικρότερος από οποιονδήποτε αριθμό στην ακολουθία  $1, 1/2, 1/3, \dots$  και επομένως μικρότερος από οποιονδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό. Από αυτή την άποψη, ο λογισμός είναι μια συλλογή τεχνικών χειρισμού απειροελάχιστων. Τα σύμβολα  $d x$  και  $d y$  θεωρήθηκαν απειροελάχιστα και η παράγωγος  $d y / d x$  ήταν η αναλογία τους (Bell, 2013).

Λόγω της δυσκολίας του να προσεγγιστεί ακριβώς η έννοια του απειροελάχιστου, αυτή η προσέγγιση έμεινε σχετικά πίσω στις αρχές του 19<sup>ου</sup> αιώνα ενώ στα τέλη του 19<sup>ου</sup>, τα απειροελάχιστα αντικαταστάθηκαν στον ακαδημαϊκό χώρο από την έψιλον, δέλτα προσέγγιση των ορίων. Τα όρια περιγράφουν τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης σε μια συγκεκριμένη είσοδο ως προς τις τιμές της σε κοντινές εισόδους. Καταγράφουν τη συμπεριφορά μικρής κλίμακας χρησιμοποιώντας την εγγενή δομή του συστήματος πραγματικών αριθμών (ως μετρικό χώρο με την ιδιότητα ελάχιστου άνω ορίου). Σε αυτή τη θεωρία, ο λογισμός είναι μια συλλογή τεχνικών για τον χειρισμό ορισμένων ορίων. Τα απειροελάχιστα αντικαθίστανται από ακολουθίες μικρών και μικρότερων αριθμών και η απείρως μικρή συμπεριφορά μιας συνάρτησης

βρίσκεται λαμβάνοντας την περιοριστική συμπεριφορά για αυτές τις ακολουθίες. Τα όρια θεωρήθηκε ότι παρέχουν μια πιο αυστηρή βάση για τον λογισμό, και για αυτόν τον λόγο έγιναν η τυπική προσέγγιση κατά τον 20ό αιώνα, όταν και αναβίωσε η έννοια του απειροελάχιστου, με την εισαγωγή της μη τυπικής ανάλυσης και της ομαλής απειροελάχιστης ανάλυσης, που παρείχαν στέρεες βάσεις για τη χειραγώγηση των απειροελάχιστων (Bell, 2013).

### 3.6.1. Διαφορικός λογισμός

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ο διαφορικός λογισμός μελετάει τους ρυθμούς μεταβολής των ποσοτήτων. Το βασικό αντικείμενο μελέτης είναι η παράγωγος της εξεταζόμενης συνάρτησης. Όταν η παράγωγος υπάρχει και ορίζεται σε ένα σημείο, τότε ισούται με την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο εκείνο. Για μια συνάρτηση πραγματικών αριθμών μιας μόνο πραγματικής μεταβλητής, η παράγωγος της συνάρτησης σε ένα σημείο καθορίζει την καλύτερη γραμμική προσέγγιση στη συνάρτηση στο σημείο αυτό.



Εικόνα 16: Παράγωγος συνάρτησης

Το θεώρημα του λογισμού είναι μια θεμελιώδης έννοια που συνδέει τις έννοιες της διαφοροποίησης και της ολοκλήρωσης. Το θεώρημα αποδικνύει ότι η διαφοροποίηση και η ολοκλήρωση είναι αντίστροφες πράξεις μεταξύ τους. Δηλαδή, αν η  $f(x)$  είναι συνεχής συνάρτηση και η  $F(x)$  είναι αντιπαράγωγος της  $f(x)$ , τότε το οριστικό ολοκλήρωμα της  $f(x)$  από το  $a$  στο  $b$  είναι ίσο με  $F(b) - F(a)$ .

Η απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος του λογισμού, ξεκινάει θεωρώντας την παράγωγο του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνάρτησης  $f(x)$  από το  $a$  στο  $x$ , που συμβολίζεται με  $F(x) = \int [a,x] f(t) dt$ . Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, προκύπτει ότι:

$$F'(x) = \lim_{(h \rightarrow 0)} [F(x+h) - F(x)]/h = \lim_{(h \rightarrow 0)} [\int [a,x+h] f(t) dt - \int [a,x] f(t) dt]/h$$

$$= \lim_{(h \rightarrow 0)} \int [x,x+h] f(t) dt/h = \lim_{(h \rightarrow 0)} [f(x+\Delta x) \Delta x]/\Delta x \text{ όπου } \Delta x = h$$

Το όριο καθώς το  $h$  πλησιάζει το μηδέν της παραπάνω παράστασης είναι ο ορισμός της παραγώγου της  $f(x)$  στο  $x$ , που συμβολίζεται με  $f'(x)$ . Επομένως, προκύπτει ότι:

$$F'(x) = f(x)$$

Αυτό δείχνει ότι η παράγωγος του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνάρτησης είναι ίση με την ίδια τη συνάρτηση, με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση είναι συνεχής.

Για να αποδειχθεί το δεύτερο μέρος του θεμελιώδους θεωρήματος του λογισμού, θεωρούμε το οριστικό ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης  $f(x)$  από το  $a$  στο  $b$ , που συμβολίζεται με  $\int [a,b] f(x) dx$ . Χρησιμοποιώντας το πρώτο μέρος του θεμελιώδους θεωρήματος του λογισμού, έχουμε:

$$\int [a,b] f(x) dx = F(b) - F(a)$$

όπου το  $F(x)$  είναι αντιπαράγωγο του  $f(x)$ . Η αντιπαράγωγος της  $f(x)$  είναι μια συνάρτηση που, όταν διαφοροποιείται, δίνει την αρχική συνάρτηση  $f(x)$ . Επομένως, έχουμε:

$$d/dx F(x) = f(x)$$

Παραγωγίζουμε και τις δύο πλευρές ως προς το  $x$ , έχουμε:

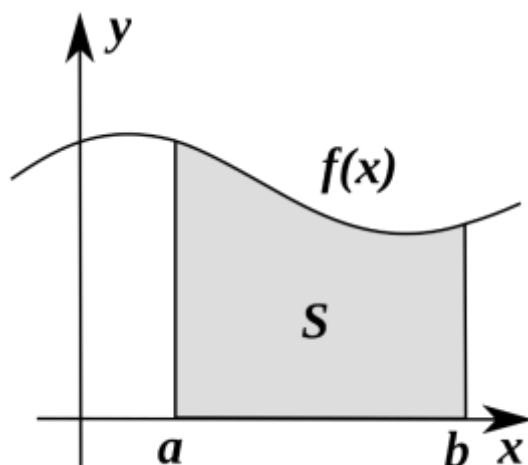
$$d/dx [\int [a,x] f(t) dt] = d/dx F(x) = f(x)$$

Αυτό δείχνει ότι η παράγωγος του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνάρτησης από το  $a$  έως το  $x$  είναι ίση με την ίδια τη συνάρτηση, με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση είναι συνεχής. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος του λογισμού.

Συμπερασματικά, το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού είναι μια θεμελιώδης έννοια στον λογισμό που συνδέει τις έννοιες της διαφοροποίησης και της ολοκλήρωσης. Το θεώρημα δηλώνει ότι η διαφοροποίηση και η ολοκλήρωση είναι αντίστροφες πράξεις μεταξύ τους και μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου και τις ιδιότητες των αντιπαραγώγων. Το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού είναι ένα ισχυρό εργαλείο το οποίο χρησιμοποιείται και σε πολλούς τομείς των της ευρύτερης μαθηματικής επιστήμης, συμπεριλαμβανομένων της φυσικής, της μηχανικής και της οικονομίας.

### 3.6.2. Ολοκληρωτικός λογισμός

Αντίθετα με το διαφορικό λογισμό στον οποίο το επίκεντρο είναι η παράγωγος, στον ολοκληρωτικό λογισμό, στο επίκεντρο είναι το ολοκλήρωμα. Στα μαθηματικά, ολοκλήρωμα είναι το συνεχές ανάλογο ενός αθροίσματος. Το ολοκλήρωμα χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί το εμβαδό και ο όγκος. Η διαδικασία υπολογισμού ενός ολοκληρώματος, που ονομάζεται ολοκλήρωση, είναι η μία από τις δύο θεμελιώδεις πράξεις του λογισμού μαζί με την διαφοροποίηση. Η ολοκλήρωση αρχικά εισήχθη ως μέθοδος για να επιλυθούν προβλήματα, όπως η εύρεση μιας περιοχής κάτω από μια καμπύλη ή ο προσδιορισμός της μετατόπισης από την ταχύτητα.



Εικόνα 17: Ολοκλήρωμα συνάρτησης

Τα παρακάτω ολοκληρώματα αφορούν την περιοχή στο επίπεδο που οριοθετείται από τη γραφική παράσταση μιας δεδομένης συνάρτησης μεταξύ δύο σημείων στην πραγματική ευθεία, όπως στην παραπάνω εικόνα. Σε περιπτώσεις που η ευθεία περνάει κάτω από τον οριζόντιο άξονα, σχηματίζονται περιοχές στο πάνω και στο κάτω τμήμα της γραφικής παράστασης. Οι περιοχές πάνω από τον οριζόντιο άξονα του επιπέδου είναι θετικές (όπως αυτή στην εικόνα) ενώ οι περιοχές κάτω είναι αρνητικές. Τα ολοκληρώματα αναφέρονται επίσης στην έννοια του αντιπαραγώγου, μιας συνάρτησης της οποίας παράγωγος είναι η δεδομένη συνάρτηση. Στην περίπτωση αυτή, ονομάζονται αόριστα ολοκληρώματα. Το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού που αναφέρθηκε προηγουμένως, συσχετίζει τα καθορισμένα ολοκληρώματα με τη διαφοροποίηση και παρέχει μια μέθοδο για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνάρτησης όταν είναι γνωστή η αντιπαραγώγός της.

Η αρχή των μεθόδων υπολογισμού εμβαδών και όγκων χρονολογούνται από τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά και τον Πυθαγόρα και τους μαθητές του, οι αρχές της ολοκλήρωσης διατυπώθηκαν στα τέλη του 17ου αιώνα (Apostol, 1969).

Τα ολοκληρώματα μπορούν να γενικευθούν ανάλογα με τον τύπο της συνάρτησης καθώς και τον τομέα στον οποίο εκτελείται η ολοκλήρωση. Για παράδειγμα, ένα ολοκλήρωμα γραμμής ορίζεται για συναρτήσεις δύο ή περισσότερων μεταβλητών και το διάστημα ολοκλήρωσης αντικαθίσταται από μια καμπύλη που συνδέει τα δύο



τελικά σημεία του διαστήματος. Σε ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα, η καμπύλη αντικαθίσταται από ένα κομμάτι επιφάνειας σε τρισδιάστατο χώρο.

### 3.7 Πυθαγόρεια άλγεβρα

Αν και ο Πυθαγόρας, είναι περισσότερο γνωστός για το θεώρημά του που περιγράφει τη σχέση μεταξύ των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου, ωστόσο, η συνεισφορά του στα μαθηματικά εκτείνεται πολύ πέρα από αυτό το διάσημο θεώρημα. Συγκεκριμένα, ο Πυθαγόρας θεωρείται ένας από τους πρωτοπόρους της άλγεβρας, έχοντας αναπτύξει αρκετές σημαντικές έννοιες και τεχνικές που αποτελούν τη βάση της σύγχρονης αλγεβρικής σκέψης.

Μια από τις πιο σημαντικές συνεισφορές του Πυθαγόρα στην άλγεβρα ήταν η ιδέα της μαθηματικής απόδειξης. Πριν από τον Πυθαγόρα, τα μαθηματικά βασίζονταν σε μεγάλο βαθμό στη διαίσθηση και την εμπειρική παρατήρηση, με ελάχιστη προσοχή σε επίσημες αποδείξεις ή λογικούς συλλογισμούς. Ο Πυθαγόρας και οι οπαδοί του, ωστόσο, πίστευαν ότι όλες οι μαθηματικές αλήθειες μπορούσαν να προκύψουν από τις πρώτες αρχές χρησιμοποιώντας επαγωγικό συλλογισμό, και ανέπτυξαν ένα αυστηρό σύστημα απόδειξης για να υποστηρίξουν αυτήν την άποψη. Αυτή η έμφαση στην απόδειξη ήταν μια σημαντική πρόοδος στην αλγεβρική σκέψη και έθεσε τα θεμέλια για τη σύγχρονη προσέγγιση στη μαθηματική ανάλυση (Heath, 1981). Ο Πυθαγόρας πίστευε ότι αυτή η προσέγγιση ήταν ουσιαστική για τη διαπίστωση της εγκυρότητας των μαθηματικών προτάσεων και για τη διάκριση των αληθών δηλώσεων από τις ψευδείς.

Μία από τις πιο διάσημες αποδείξεις του Πυθαγόρα είναι η απόδειξή του για το Πυθαγόρειο θεώρημα, το οποίο περιγράφει τη σχέση μεταξύ των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου. Αυτό το θεώρημα μπορεί να εκφραστεί αλγεβρικά ως  $a^2 + b^2 = c^2$ , όπου τα  $a$ ,  $b$  και  $c$  αντιπροσωπεύουν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου. Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος από τον Πυθαγόρα περιελάμβανε τη χρήση γεωμετρικών κατασκευών και λογικών συλλογισμών για να αποδείξει ότι το τετράγωνο της υποτεινουσας (η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου) είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών.

Εκτός από την εργασία του για το Πυθαγόρειο θεώρημα, ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του ανέπτυξαν πολλές άλλες σημαντικές αποδείξεις και μαθηματικές τεχνικές. Για παράδειγμα, ήταν οι πρώτοι που χρησιμοποίησαν την απόδειξη μέσω αντίφασης, μια τεχνική που περιλαμβάνει την υπόθεση του αντίθετου από αυτό που κάποιος θέλει να αποδείξει και στη συνέχεια να αποδείξει ότι αυτή η υπόθεση οδηγεί σε αντίφαση.

Αυτή η τεχνική εξακολουθεί να χρησιμοποιείται ευρέως στα μαθηματικά σήμερα και έχει οδηγήσει σε πολλές σημαντικές μαθηματικές ανακαλύψεις. Η συμβολή του Πυθαγόρα στην ανάπτυξη της μαθηματικής απόδειξης ήταν βαθιά, και οι ιδέες του συνεχίζουν να διαμορφώνουν τον τρόπο που σκεφτόμαστε τα μαθηματικά σήμερα. Η έμφαση που έδωσε στον απαγωγικό συλλογισμό και στις συστηματικές προσεγγίσεις στη μαθηματική ανάλυση έθεσε τα θεμέλια για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης και τη σύγχρονη προσέγγιση της μαθηματικής απόδειξης.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, το πιο διάσημο παράδειγμα της δουλειάς του Πυθαγόρα στην άλγεβρα είναι το ίδιο το Πυθαγόρειο θεώρημα, το οποίο περιγράφει τη σχέση μεταξύ των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου. Αυτό το θεώρημα μπορεί να εκφραστεί αλγεβρικά ως  $a^2 + b^2 = c^2$ , όπου τα  $a$ ,  $b$  και  $c$  αντιπροσωπεύουν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου. Το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα στην αλγεβρική γεωμετρία και έχει εφαρμογές σε ένα ευρύ φάσμα πεδίων, από την αρχιτεκτονική και τη μηχανική έως τη φυσική και την επιστήμη των υπολογιστών.

Εκτός από το έργο του στην άλγεβρα, ο Πυθαγόρας είχε επίσης σημαντική συνεισφορά σε άλλους τομείς των μαθηματικών, συμπεριλαμβανομένης της γεωμετρίας, της τριγωνομετρίας και της θεωρίας των αναλογιών. Η επιρροή του στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης ήταν βαθιά και οι ιδέες του συνεχίζουν να διαμορφώνουν τον τρόπο που σκεφτόμαστε τα μαθηματικά σήμερα.

### 3.8 Πυθαγόρεια γεωμετρία

Αν η άλγεβρα θεωρείται η επιστήμη της ποσότητας, η γεωμετρία του χώρου, της οποίας το αντικείμενο δεν είναι οι αριθμοί αλλά τα γεωμετρικά σχήματα. Βέβαια, ο Τζανάκης (1998) αναφέρει ότι ο απώτερος σκοπός της γεωμετρίας δεν είναι η κατανόηση των γεωμετρικών σχημάτων αλλά η απόκτηση μιας ευρύτερης μαθηματικής παιδείας. Για να εκπληρωθούν αυτοί οι σκοποί, η μάθηση της γεωμετρίας περνάει από την κατανόηση διαφόρων όψεων και αρχών όπως η απεικόνιση, η ακριβής περιγραφή, η κριτική σκέψη, η απόδειξη, η αιτιολόγηση κ.α.

Ο Πυθαγόρας όπως και ο Πλάτωνας έδιναν μια θεϊκή υπόσταση στη Γεωμετρία, επιστήμη που ανέπτυξαν σε μεγάλο βαθμό οι Έλληνες στην αρχαιότητα (Γράβιγγερ,

1998). Το ρητό «Θεός αεί γεωμετρεί» και ο «γεωμέτρης Θεός» είναι χαρακτηριστικά, για το θεό που κατά το δωδεκάθεο αποδίδονταν οι παραπάνω ιδιότητες, δηλαδή για τον Απόλλωνα.

Το ισοσκελές – ισόπλευρο τρίγωνο ήταν το κύριο έμβλημα του Πυθαγόρα και των μαθητών του, καθώς θεωρούταν σύμβολο ιερό ακόμη και σε προ-Πυθαγορικές περιόδους. Αυτό το σύμβολο για τον Πυθαγόρα ήταν σύμβολο που διαμόρφωσε την αρχή του σύμπαντος. Σημαντικό επίσης για τους συμβολισμούς ήταν και ο τρόπος που ήταν τοποθετημένο καθώς η απεικόνιση με την κορυφή στην πάνω μεριά συμβολίζει το Πνεύμα, τον Άνδρα, τη Φωτιά ενώ με την κορυφή προς τα κάτω συμβολίζει την Ύλη, την Γυναίκα, το Νερό (Γράβιγγερ, 1998). Επίσης στη βιβλιογραφία αναφέρονται διάφορες άλλες εκδοχές για την σημασιολογία του τριγώνου ως προς τις πλευρές του:

- Παρελθόν – Παρόν – Μέλλον,
- Θείο – Υδράργυρος – Αλάτι ,
- Πατήρ – Υιός – Άγιο Πνεύμα,
- Γέννηση – Ζωή – Θάνατος, κ.α.

Εκτός όμως από το τρίγωνο, και άλλα γεωμετρικά σχήματα είχαν αντίστοιχες ερμηνείες. Η επιφάνεια συμβολίζεται με τον αριθμό τρία. Η γωνία είναι ένα σύμβολο της επαφής του ανθρώπου με τα θεία, η δε ορθή γωνία εκφράζει την ισότητα, την ισότητα και το πεπερασμένο όριο της επαφής αυτής. Η αμβλεία και η οξεία γωνία συμβόλιζαν την αοριστία, την κακία, την ένδεια και την υπερβολή σε αντίθεση με την οξεία που εκφράζει την αρετή. Η ευθεία γραμμή συμβόλιζε τη γνώση η οποία είναι απεριόριστη σε έκταση, δε μπορεί να υποστεί φραγές και μπορεί να τέμνεται με διάφορες άλλες γραμμές, απεριόριστα.

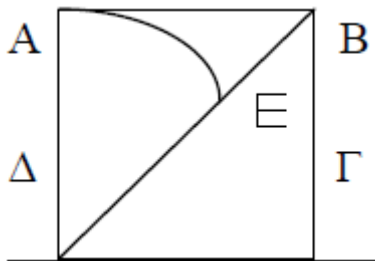
### 3.9 Ασυμμετρία

Στον Πυθαγόρα και τους μαθητές του αποδίδεται η απόδειξη της ασυμμετρίας. Για να γίνει όμως κατανοητή αυτή η έννοια θα εξηγηθεί αρχικά η συμμετρία. Η συμμετρία είναι μια θεμελιώδης έννοια στα μαθηματικά, την επιστήμη και την τέχνη που αναφέρεται σε μια ισορροπημένη και αναλογική διάταξη των μερών. Εμφανίζεται όταν κάτι μπορεί να χωριστεί σε δύο ή περισσότερα πανομοιότυπα ή σχεδόν πανομοιότυπα μέρη που αντικατοπτρίζουν το ένα το άλλο γύρω από έναν κεντρικό άξονα ή επίπεδο. Η συμμετρία μελετάται συχνά μέσω της χρήσης γεωμετρικών σχημάτων και μοτίβων. Υπάρχουν διάφοροι τύποι συμμετρίας, όπως η ανακλαστική (ή κατοπτρική) συμμετρία, η περιστροφική συμμετρία και η μεταφορική συμμετρία. Η ανακλαστική συμμετρία εμφανίζεται όταν ένα αντικείμενο ή ένα σχήμα αντικατοπτρίζεται κατά μήκος μιας γραμμής, με αποτέλεσμα δύο ίδια μισά. Η περιστροφική συμμετρία εμφανίζεται όταν ένα αντικείμενο ή σχήμα μπορεί να περιστραφεί κατά μια ορισμένη γωνία γύρω από ένα σταθερό σημείο και να εξακολουθεί να εμφανίζεται το ίδιο. Η μεταφραστική συμμετρία εμφανίζεται όταν ένα αντικείμενο ή ένα σχήμα επαναλαμβάνεται κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής σε ένα μοτίβο που είναι πανομοιότυπο κάθε φορά.

Αντίστοιχα, η ασυμμετρία αναφέρεται στην έλλειψη συμμετρίας ή ισορροπίας μεταξύ δύο ή περισσότερων μαθηματικών αντικειμένων, συναρτήσεων ή εξισώσεων. Η ασυμμετρία μπορεί να προκύψει σε διάφορα μαθηματικά πλαίσια, όπως η άλγεβρα, η γεωμετρία, η τοπολογία και η ανάλυση. Για παράδειγμα, μια συνάρτηση μπορεί να είναι ασύμμετρη εάν οι τιμές της στη μία πλευρά ενός σημείου ή άξονα είναι διαφορετικές από τις τιμές της στην άλλη πλευρά. Ομοίως, ένα γεωμετρικό σχήμα μπορεί να είναι ασύμμετρο εάν δεν μπορεί να χαρτογραφηθεί στον εαυτό του με οποιονδήποτε συνδυασμό μεταφράσεων, περιστροφών ή ανακλάσεων. Η ασυμμετρία είναι μια θεμελιώδης έννοια σε πολλούς τομείς των μαθηματικών και έχει σημαντικές επιπτώσεις σε τομείς όπως η φυσική, η επιστήμη των υπολογιστών και η μηχανική.

Ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του απόδειξαν την ασυμμετρία με γεωμετρικό τρόπο. Η ασυμμετρία που απέδειξαν είναι της τετραγωνικής ρίζας του 2 με το 1 μέσω της εις άτοπον απαγωγής, μια μέθοδος που παρατίθεται από τον Αριστοτέλη και αναφέρει ότι αν η διαγώνιος είναι συμμετρική προς την πλευρά του τετραγώνου, προκύπτει αντίφαση πως ο αριθμός αυτός είναι παράλληλα και άρτιος και περιττός. Έστω το

τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$ , του οποίου η πλευρά  $AB$  ισούται με τη ρίζα του 2 και η διαγώνιος ισούται με το 2.



Εικόνα 18: Απόδειξη ασυμμετρίας

Στην περίπτωση αυτή, η διαγώνιος στο σημείο που ισούται με την πλευρά  $AB$  είναι η  $\Delta E$  και ισούται με τη ρίζα του 2. Στο σημείο αυτό ισχύει ότι τα  $\Delta E + EB$  (ασύμμετρο) και  $\Delta B$  (σύμμετρο) είναι ίσα. Το παραπάνω δείχνει ότι το άθροισμα των ασύμμετρων τμημάτων είναι κάποιες φορές σύμμετρο και κάποιες ασύμμετρο.

Σήμερα, η ασυμμετρία μπορεί να αποδειχθεί με διάφορες μεθόδους, ανάλογα με το συγκεκριμένο πλαίσιο στο οποίο εξετάζεται. Κάποιοι από τους πιο συνηθισμένους τρόπους είναι οι εξής:

- Τα αντιπαραδείγματα: Αυτός είναι ένας τρόπος για να αποδειχθεί ότι ένα αντικείμενο είναι ασύμμετρο. Για παράδειγμα, εάν υποπτευόμαστε ότι ένα συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα δεν είναι συμμετρικό, μπορούμε να αναζητήσουμε μια διαμόρφωση σημείων ή γραμμών που παραβιάζει τη συνθήκη συμμετρίας.
- Οι τυπικές αποδείξεις: Σε ορισμένες περιπτώσεις, είναι δυνατό να αποδειχθεί η ασυμμετρία χρησιμοποιώντας επίσημες μεθόδους μαθηματικού συλλογισμού. Σε περίπτωση που θέλουμε να δείξουμε ότι μια συνάρτηση δεν είναι συμμετρική, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της συμμετρίας για να εξαγάγουμε μια αντίφαση, αποδεικνύοντας έτσι ότι η συνάρτηση δεν μπορεί να είναι συμμετρική.
- Μια άλλη προσέγγιση για την απόδειξη της ασυμμετρίας είναι η αναζήτηση αμετάβλητων ιδιοτήτων που διατηρούνται υπό ορισμένους μετασχηματισμούς. Εάν ένα μαθηματικό αντικείμενο δεν έχει τέτοιες

αμετάβλητες, είναι πιθανό να είναι ασύμμετρο. Για παράδειγμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έλλειψη περιστροφικής αμετάβλητης για να δείξουμε ότι ένα συγκεκριμένο σχέδιο είναι ασύμμετρο.

- Οι ομάδες συμμετρίας κατά τις οποίες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία των ομάδων συμμετρίας για να μελετήσουμε τις συμμετρίες ενός μαθηματικού αντικειμένου. Σε περίπτωση που θα διαπιστωθεί ότι μια ομάδα μετασχηματισμών αφήνει το αντικείμενο αμετάβλητο, αλλά δεν υπάρχουν άλλες τέτοιες ομάδες, τότε το αντικείμενο είναι ασύμμετρο. Αυτή η προσέγγιση χρησιμοποιείται συχνά στη μελέτη των κρυσταλλικών δομών, όπου οι ιδιότητες συμμετρίας ενός κρυστάλλου περιγράφονται ως προς την ομάδα συμμετρίας του πλέγματος του.

### 3.10 Αρρητότητα

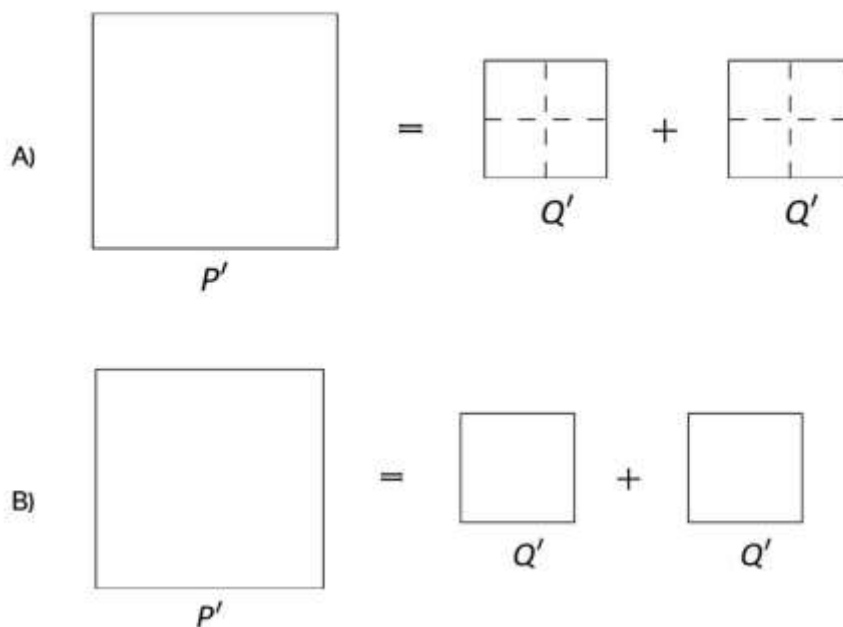
Ακόμη μια απόδειξη που αναφέρεται στον Πυθαγόρα και τους μαθητές του είναι η απόδειξη της αρρητότητας. Μεταγενέστερα ντοκουμέντα αναφέρουν την απόδειξη της αρρητότητας τον 5<sup>ο</sup> π.Χ. αιώνα για τη ρίζα των αριθμών 3, 5, 7, κ.α. ενώ η ρίζα του αριθμού 2δ δεν αναφέρεται, γεγονός που σημαίνει ότι είχε ήδη ανακαλυφθεί στην εποχή του Πυθαγόρα και των μαθητών του ως προς τη μη αρρητότητα του (Waerden, 1979). Η παλαιότερη αναφορά προκύπτει από τον Αριστοτέλη ο οποίος αν θεωρηθεί ότι η πλευρά και διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι σύμμετρες τότε θα καταλήξουμε στην εξής αντίφαση: τα άρτια θα γίνουν ίσα με τα περιττά και θα οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ύπαρξης ασύμμετρης σχέσης μεταξύ τους. Για την παραπάνω απόδειξη προϋπόθεση είναι η γνώση της αρρητότητας.

Ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του μελέτησαν επίσης την επίλυση προβλημάτων ορθογωνίων τριγώνων των οποίων οι πλευρές είναι ακέραιοι αριθμοί, γεγονός που μας οδηγεί στη διαπίστωση ότι τους ενδιέφερε η μελέτη των ισοσκελή τριγώνων ως προς αυτή την κατηγορία. Τα ισοσκελή τρίγωνα με υποτείνουσα  $\alpha$  και  $\beta$  μια από τις κάθετες πλευρές έχουν την ιδιότητα  $\alpha^2 = 2\beta^2$

Αν το  $a^2$  μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα τετράγωνο ( $P$ ) και το  $\beta^2$  με ένα τετράγωνο ( $Q$ ), γνωρίζουμε ότι ένα τετράγωνο με πλευρά άρτιο αριθμό έχει την ιδιότητα να χωρίζεται σε τέσσερα ίσα μικρότερα τετράγωνα. Παρομοίως, χωρίζουμε το ( $P$ ) όσο και το ( $Q$ ) σε τέσσερα μικρότερα τετράγωνα. Εάν οι πλευρές των νέων τετραγώνων είναι εκ νέου άρτιοι, τότε επαναλαμβάνουμε πάλι τη διαδικασία μέχρι να προκύψει ένα τουλάχιστον τετράγωνο (προερχόμενο είτε από το ( $P$ ) είτε από το ( $Q$ )) με πλευρά περιττό αριθμό και επομένως δεν θα μπορεί να διαιρεθεί με τον αριθμό 4. Σε αυτή την περίπτωση δύο περιπτώσεις θα μπορούν να συμβούν:

Στην πρώτη περίπτωση από το τετράγωνο  $P$  καταλήγουμε μετά από έναν αριθμό διαιρέσεων σε ένα περιττό τετράγωνο  $P'$ , ενώ σε σχέση με το  $Q$  μετά από έναν αριθμό διαιρέσεων καταλήγουμε ή στην περίπτωση  $Q'$  το οποίο μπορεί να είναι άρτιο ή περιττό. Στις δύο περιπτώσεις που αναφέρονται παρακάτω, προκύπτει ότι ένας περιττός αριθμός είναι ίσος με το διπλάσιο ενός αριθμού άρτιου τη μια φορά και ενός περιττού αριθμού στην άλλη, κάτι το οποίο είναι μη πραγματικό.

Περίπτωση I

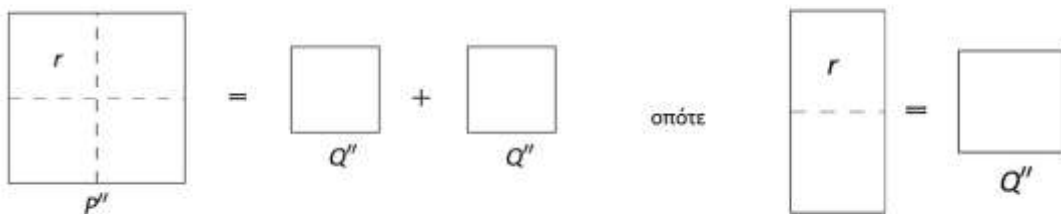


Εικόνα 19: Απόδειξη αρρητότητας (1)



Στη δεύτερη περίπτωση καταλήγουμε σε άρτιο τετράγωνο  $P'$ , που είναι ίσο με το διπλάσιο ενός περιττού τετραγώνου  $Q''$ . Το  $P''$  επειδή είναι άρτιο μπορεί να χωριστεί σε τέσσερα μικρότερα τετράγωνα, καθένα από τα οποία είναι ίσο με  $r$  και επομένως καταλήγουμε  $2r = Q''$ , δηλαδή ο άρτιος αριθμός ισούται με τον περιττό, το οποίο δεν είναι πραγματικό, ούτε σε αυτή την περίπτωση.

Περίπτωση II



Εικόνα 20: Απόδειξη αρρητότητας (2)

Με βάση τους παραπάνω συλλογισμούς, συμπεραίνουμε το γεγονός ότι τα ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα με πλευρές ακέραιους δεν υφίστανται. Συνεπώς, η εξίσωση  $a^2=2b^2$  δεν έχει λύση στους ακέραιους, δηλαδή ότι ο αριθμός  $\sqrt{2}$  είναι άρρητος.

## 4. Η σχέση μαθηματικών και φιλοσοφίας

Τα ευρήματα και ο τρόπος ζωής της Πυθαγορείου Σχολής καταδεικνύουν αναμφισβήτητα μία διαλεκτική σχέση μεταξύ φιλοσοφίας και μαθηματικών, κάτι που επιβεβαιώνεται σε όλη την αρχαιοελληνική σκέψη. Αυτό συμβαίνει γιατί φιλοσοφία και μαθηματικά συνδέονται με έναν συνεκτικό κρίκο, που δεν είναι άλλος από την έννοια της λογικής. Στο εσωτερικό της αρχαίας ελληνικής φιλοσοφίας μπορεί να διακριθεί μια ισχυρή παράδοση η οποία αξιοποιεί τη συγγένεια μαθηματικών και φιλοσοφίας. Η τάση αυτή ξεκινά από τον Αναξίμανδρο, περνά από τους Πυθαγορείους και τον Παρμενίδα και καταλήγει στον Πλάτωνα και τις ποικίλες μορφές του πλατωνισμού. (Κάλφας & Ζωγραφίδης, 2011) Ειδικά την εποχή της Πυθαγορείου Σχολής, η επιστήμη και η φιλοσοφία δεν αποτελούσαν διαφορετικά πεδία, αλλά αλληλοεπικαλύπτονταν. Η επιστήμη των μαθηματικών αυτονομήθηκε αργότερα, στα τέλη του 5<sup>ου</sup> π.Χ. αιώνα, ενώ αργότερα αυτονομείται και η επιστήμη της αστρονομίας. Οι δύο αυτές επιστήμες θα μείνουν σε όλη τη διάρκεια της αρχαιότητας ως οι μόνες αυτόνομες επιστήμες, ενώ όλες οι άλλες εμπίπτουν στην Αρχαία Φιλοσοφία. (Κετέν, Βενάρδος, & Νικολαΐδου, 2020)

Ο Εξαρχάκος (2000) υποστηρίζει ότι το θεωρητικό πλαίσιο της φιλοσοφίας αλλά και το μοντέλο άσκησης και λειτουργίας της τροφοδότησε σημαντικά τον τομέα των μαθηματικών, ως επιστήμης με κωδικοποιημένη γλώσσα. Έτσι τα μαθηματικά υιοθέτησαν τρόπους σκέψης της φιλοσοφίας όπως: η θεώρηση του όλου, ο παραγωγικός συλλογισμός, ο επαγωγικός συλλογισμός, ο αναλογικός συλλογισμός και η αφαίρεση και γενίκευση. (Κετέν, Βενάρδος, & Νικολαΐδου, 2020) Έτσι, δεν φαίνεται παράλογη η αντίληψη των Πυθαγορείων ότι «η αρχή των πάντων είναι οι αριθμοί».

Πριν την εξέλιξη της φιλοσοφίας, υπήρχε διάχυτη η αντίληψη ότι ο κόσμος εξουσιάζεται και κυριαρχείται από θεϊκές δυνάμεις. Η θέση αυτή αμφισβητείται ολοένα και περισσότερο από την ανάπτυξη των Μαθηματικών. Όταν το 585 π.Χ. ο Θαλής ο Μιλήσιος προέβλεψε και εξήγησε το φαινόμενο της ολικής έκλειψης του ηλίου κλονίστηκαν οι θρησκευτικές προκαταλήψεις και τα δόγματα. Υπό αυτό το πρίσμα γίνεται κατανοητό ότι η φιλοσοφική σκέψη πολέμησε και ελευθέρωσε την κοινωνία από την ιεροκρατία και το σκοταδισμό. Η αναζήτηση της αλήθειας μέσω της επιστημονικής έρευνας, γεννά αναπόφευκτα όλο και πιο βαθιά και πολυσύνθετα

ερωτήματα, που με την σειρά τους οδηγούν στην τάση για μια ενοποιημένη αντιμετώπισή τους και κατά συνέπεια στην φιλοσοφία.

#### 4.1 Οι Προσωκρατικοί

Οι Προσωκρατικοί ήταν οι πρώτοι φιλόσοφοι στον κόσμο, οι οποίοι προσπάθησαν να ερμηνεύσουν φυσικά φαινόμενα με βάση τη λογική, χωρίς αναφορές σε υπερφυσικά όντα. Ήταν οι πρώτοι φιλόσοφοι που συζήτησαν το πρόβλημα του «φυσικού κόσμου» και προσπάθησαν να αποκωδικοποιήσουν τη λειτουργία του. Για να τον ερμηνεύσουν, χρησιμοποίησαν όρους που χρησιμοποιούνται μέχρι και σήμερα στις επιστήμες, όπως «δύναμις», «μέγεθος», «κίνησις», η έννοια του «γίγνεσθαι», του «συνεχούς», του «ασυνεχούς», του «χώρου», του «ατόμου», του «αριθμού». Μπορούμε με ασφάλεια να τους αποκαλέσουμε τους πρώτους φυσικούς φιλοσόφους, εννοώντας με αυτό ότι ήταν που αποπειράθηκαν πάνω σε μία λογική βάση εκείνη την απλοποίηση της πραγματικότητας που ήταν η αναζήτηση του ανθρώπινου νου σε όλες τις εποχές. (Guthrie, 1962)

Ο Θαλής ο Μιλήσιος είναι ο πρώτος φιλόσοφος που εισηγείται αυτήν την ορθολογική ερμηνεία του φυσικού κόσμου, ερμηνεύοντας φυσικά φαινόμενα ανάγοντάς τα σε κοινές αιτίες που δεν αποτελούν θεότητες. Έτσι έδωσε ερμηνείες εκτός θρησκευτικού πλαισίου για φυσικά φαινόμενα όπως σεισμοί, εκλείψεις, για τον άνεμο κλπ.

Οι προσωκρατικοί φιλόσοφοι έβλεπαν ως αιτία των πραγμάτων την «πρώτη αρχή», δηλαδή την πρώτη ύλη από την οποία είναι φτιαγμένος ο κόσμος. Αυτή η πρώτη αρχή αποτελεί τη βάση πάνω στην οποία έχει δημιουργηθεί ο υλικός και φθαρτός κόσμος. Η πρώτη αρχή δεν είναι ενιαία για όλους τους φιλοσόφους. Για παράδειγμα, ο Θαλής βρίσκει την αρχή της δημιουργίας των πραγμάτων στο νερό, για τον Αναξίμανη είναι ο αέρας, για τον Λεύκιππο τα άτομα που συνθέτουν τον κόσμο, ενώ για τον Αναξίμανδρο το άπειρο.

## 4.2 Αναξίμανδρος ο Μιλήσιος

Ο Αναξίμανδρος διατύπωσε τη γενική θεωρία του φυσικού κόσμου, με αφετηριακά δεδομένα τις θεογονικές - σχεδόν ταυτόσημες στην παγκόσμια προεπιστημονική αντίληψη - παραστάσεις του Χάους, της Νύκτας, του Αέρα και του Ωκεανού, και του νερού (σύμφωνα και με τη διδασκαλία του δάσκαλου του Θαλή), πέτυχε να κατανοήσει την προκοσμική κατάσταση του δομήσιμου υλικού του Κόσμου και να συλλάβει την έννοια της άμορφης και αδιαμόρφωτης μάζας ως αρχής του σύμπαντος. Σε αυτή την έννοια ο ίδιος έδωσε το όνομα «άπειρον», που το εισήγαγε στη φιλοσοφία, ουσιαστικοποιώντας το ουδέτερο του επιθέτου «άπειρος». Η έννοια του απείρου είχε έως τότε ομηρικές καταβολές και χρησιμοποιούνταν ως επίθετο, («άπειρη θάλασσα»), για να περιγράψει μία τεράστια, απέραντη έκταση.

Στον Αναξίμανδρο όμως το Άπειρο αποτελεί ένα αχανές και άγνωστο περιβάλλον, «από το οποίο γεννιούνται όλα όσα υπάρχουν στους κόσμους και στο οποίο γυρίζουν, για να καταστραφούν ξανά», ανάγοντάς το σε κοσμογονική αρχή. Το αναξιμάνδρειο άπειρο θα πρέπει λοιπόν να ήταν η τεράστια, αχανής και ανεξάντλητη μάζα που προϋπήρχε του κόσμου και κάλυπτε όλο τον χώρο. Αυτό δε σημαίνει ότι πρόκειται για μία απέραντη κενή έκταση, ο απεριόριστος χώρος, αλλά παίζει ρόλο το υλικό που γεμίζει αυτή την έκταση. Ο κενός χώρος θα ήταν νεκρός και αδρανής. Το άπειρο όμως είναι κάτι το δραστικό και ισχυρό, αφού «περιέχει τα πάντα και κυριαρχεί στα πάντα», και είναι γόνιμο, αφού «γεννά» τις βασικές αντιθετικές δυνάμεις του θερμού και του ψυχρού. Αν έχουν έτσι τα πράγματα, ο Αναξίμανδρος προσέφυγε στο άπειρο γιατί δεν ήθελε η πρωταρχική του ουσία να μοιάζει με οτιδήποτε υπάρχει στον γνωστό μας κόσμο. Αυτό που *κυριαρχεί* στον κόσμο πρέπει να είναι πιο ισχυρό (πιο «μεγάλο») από *ό,τι υπάρχει* στον κόσμο. (Κάλφας & Ζωγραφίδης, 2011) Η σπουδαιότητα αυτής της έννοιας τόσο για την αρχαία ελληνική φιλοσοφία όσο και σε χώρους όπως τα πιο αμιγή μαθηματικά δεν είναι υπερβολικό να εκτιμηθεί ως κυρίαρχη σε *ό,τι* ακολούθησε στη σκέψη.

Και φυσικά το Άπειρο ως έννοια με τον έναν ή τον άλλον τρόπο, δηλαδή ως το απροσδιόριστο σύνολο, εμφανίζεται στα ελληνικά μαθηματικά, τον Ευκλείδη και τους πρώτους αριθμούς, τον Αρχιμήδη και τις άπειρες σειρές, φτάνοντας μέχρι τον Νεύτωνα και τον Leibniz και στο 19ο αιώνα στις θεωρίες για κατηγοριοποίηση της έννοιας του Απείρου.

### 4.3 Ο Πλάτων και η φιλοσοφία

Είναι πασίγνωστη η επιγραφή της πλατωνικής Ακαδημίας «μηδειςἀγεωμέτρητοςείσιτω», που πιστοποιεί τη σχέση φιλοσοφίας-μαθηματικών και υπονοεί ότι δεν είναι δυνατό να φιλοσοφήσει κάποιος που δεν γνωρίζει μαθηματικά. Στον Πλάτωνα αποδίδεται και η φράση: «Αιεί ο Θεός ο μέγας γεωμετρεί». Ο Πλάτων διατύπωσε τη θεωρία των Ιδεών, στην προσπάθειά του να αποδείξει ότι υπάρχουν ηθικές αξίες απόλυτες και αναλλοίωτες (ηθικός ρεαλισμός). Γρήγορα ωστόσο συνειδητοποιεί ότι η θεωρία των Ιδεών ταιριάζει απόλυτα με τη μαθηματική σκέψη, αφού και οι μαθηματικές οντότητες είναι αφηρημένες, δεν έχουν χωροχρονικές ή αιτιώδεις ιδιότητες και είναι αιώνιες και αμετάβλητες. Έτσι θα εκμεταλλευτεί στο έπακρο τη σχέση μαθηματικών και φιλοσοφίας. (Κάλφας & Ζωγραφίδης, 2011)

Στην ουσία ο Πλάτων θεωρεί ότι οι μελλοντικοί φιλόσοφοι πρέπει να διδαχθούν δύο βασικά πράγματα. Αυτά είναι ο τρόπος με τον οποίο οι μαθηματικοί περνούν από τα αξιώματα στα θεωρήματα: πώς από το γενικό εξάγεται το ειδικότερο. Για παράδειγμα, πώς από τον ορισμό του τριγώνου αποδεικνύεται ότι το άθροισμα των γωνιών του είναι δύο ορθές. Αυτή η ασφαλής μετάβαση από τη μία αληθή πρόταση στην άλλη είναι απαραίτητη και στη φιλοσοφία. Το δεύτερο είναι ο ιδεατός χαρακτήρας των μαθηματικών οντοτήτων. Όσοι ξέρουν γεωμετρία, γνωρίζουν επακριβώς τι είναι τρίγωνο και τι είναι κύκλος, αφού γνωρίζουν τους ορισμούς τους· δεν περιμένουν να το μάθουν κοιτώντας γύρω τους τα τριγωνικά ή τα κυκλικά αντικείμενα ούτε απογοητεύονται επειδή δεν βλέπουν στον αισθητό τους περίγυρο κανένα τέλειο τρίγωνο και κύκλο. Ο Πλάτων διακηρύσσει ότι το μαθηματικό τρίγωνο αποτελεί Ιδέα. Ως Ιδέα είναι νοητή και σταθερή, ανεξάρτητη από τα ατελή αισθητά τρίγωνα, μία και μοναδική απέναντι στην πολλαπλότητα των αισθητών τριγώνων. (Κάλφας & Ζωγραφίδης, 2011)

Οι μαθηματικές Ιδέες συνιστούν το καλύτερο παράδειγμα πλατωνικών Ιδεών. Γίνεται αντιληπτό ακόμη και από κάποιον αμήτο στα μαθηματικά, ότι ο ορισμός του τριγώνου δεν εξαρτάται από τα τριγωνικά αντικείμενα που υπάρχουν στο περιβάλλον μας. Άρα η ύπαρξη του απόλυτου Τριγώνου είναι κατά κάποιον τρόπο εφικτή. Ενώ είναι πολύ δύσκολο να πειστεί κάποιος ότι μια πράξη του είναι δίκαιη μόνο αν έχει κάποια σχέση με την απόλυτη Ιδέα της δικαιοσύνης, η οποία είναι αμφιλεγόμενη,

είναι έτοιμος να δεχτεί ότι ένα ορατό αντικείμενο είναι τριγωνικό αν έχει τρεις γωνίες και τρεις πλευρές, αν έχει δηλαδή κάποια σχέση με το απόλυτο Τρίγωνο. (Κάλφας & Ζωγραφίδης, 2011)

Έτσι, δεν είναι τυχαίο ότι στην εκπαίδευση κάθε φιλοσόφου της πλατωνικής ακαδημίας υπήρχε προαπαιτούμενο δεκαετής σπουδή στα μαθηματικά, ενώ περιλαμβάνονται 5 μαθηματικές αξίες :

- μαθηματικά
- αριθμητική
- επίπεδη γεωμετρία και στερεά γεωμετρία
- αστρονομία
- αρμονία

Σύμφωνα με τον Πλάτωνα, οι νόμοι των μαθηματικών υπάρχουν ανεξάρτητα από το ανθρώπινο μυαλό. Στην πραγματικότητα ο άνθρωπος δεν εφευρίσκει τις μαθηματικές σχέσεις, αλλά τις ανακαλύπτει. Αυτές υπήρχαν ανέκαθεν και σίγουρα πολλές από αυτές δεν έχουν ακόμα συνειδητοποιηθεί. Ο Πλάτων, λοιπόν, σύμφωνα με τη θεωρία των Ιδεών του, θεωρούσε ότι ο άνθρωπος είναιδέσμιος του αισθητού κόσμου και τα μαθηματικά αποτελούν μέσο για να εξυψωθεί το πνεύμαπέρα από τον υλικό κόσμο στον άφθαρτο κόσμο του “Είναι”.(Κάλφας, 2015)Για τον Πλάτωνα, λοιπόν, η αποστολή της φιλοσοφίας ήταν να φανερώσει την αληθινή γνώση, η οποία κρύβεται πίσω από το πέπλο της φαινομενικότητας και της δοξασίας, της μεταβλητότητας και της απατηλότητας του προσωρινούκόσμου.

Ειδικότερα, ο Πλάτων υποστήριξε ότι το σύμπαν είναι κατασκευασμένο πάνω σε ένα βασικό υλικό, το τρίγωνο, παρουσιάζοντας την ιδέα ότι το σύμπαν δημιουργήθηκε έτσι ώστενα μοιάζει με μια γεωμετρική ακολουθία. Τα τρίγωνα, σύμφωνα με τον Πλάτωνα, δημιουργούν<sup>5</sup> στερεά, τα οποία ανήκουν στο σύνολο των γεωμετρικών σχημάτων που ονομάζονταιπολύεδρα. Μόνο 5κανονικά στερεά είναι πιθανά: ο κύβος, το τετράεδρο, το οκτάεδρο, το δωδεκάεδρο και τοεικοσάεδρο Παράλληλα, σύμφωνα με την πλατωνική φιλοσοφία ο κόσμος στηρίζεται πάνω σε πέντε βασικάστοιχεία.

Αυτά είναι η γη, ο αέρας, η φωτιά, το νερό και το σύμπαν. Σε κάθε ένα από αυτά τα στοιχεία αντιστοιχεί και ένα κανονικό κυρτό πολύεδρο εγγράψιμο σε μια σφαίρα.

Είναι επίσης γνωστό ότι το έργο του Πλάτωνα «Τίμαιος» που έχει ως θέμα το μύθο της Ατλαντίδας, βρίθει μαθηματικών θεμάτων. Το κλασικό θεώρημα για την ύπαρξη μόνο πέντε πλατωνικών στερεών βασίζεται στην περίφημη σχέση

$$K+E=A+2$$

Που αποτελεί τον πρώτο τύπο της Αλγεβρικής Τοπολογίας. (Ζαχαρίου, 1984)

#### 4.4 Αριστοτέλης

Σύμφωνα με τον Κάλφα, Αριστοτέλης ήταν ο πρώτος φιλόσοφος που ανακάλυψε την έννοια της Λογικής. Η Λογική δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως επιστήμη, αφού δεν έχει κάποιο συγκεκριμένο αντικείμενο μελέτης. Στόχος του Αριστοτέλη ήταν να καθορίσει ένα σύνολο κανόνων, οι οποίοι έχουν καθολική ισχύ, με το οποίο σύνολο ο άνθρωπος σκέπτεται, συνεννοείται και επιχειρηματολογεί όταν εξετάζει οποιοδήποτε γνωστικό πεδίο.

Έτσι διαμόρφωσε τον αποδεικτικό συλλογισμό, που συνιστά τη βάση του λογικού επιχειρήματος:

1 η πρόταση: «Όλα τα Α είναι Β»

2 η πρόταση: «Το Γ είναι Α»

3 η πρόταση: «Το Γ είναι Β»

Ο Αριστοτέλης ήταν ο πρώτος φιλόσοφος που χρησιμοποίησε τα σύμβολα της αφηρημένης γλώσσας των μαθηματικών για να αποδείξει αληθείς θέσεις και ο πρώτος που χρησιμοποίησε τα γράμματα του αλφαβήτου ως σύμβολα στη λογική του.

Ο Αριστοτέλης έκανε αντιληπτό ότι το μεγάλο μυστικό του επιστήμονα είναι ο τρόπος που σκέφτεται, δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο συλλογίζεται και προβαίνει σε αποδείξεις. Οι γενικές αρχές της αριστοτελικής επιστήμης δεν είναι επισφαλείς προτάσεις, αλλά αντιθέτως, ο Αριστοτέλης είχε την απαίτηση οι πρώτες αρχές της επιστήμης να είναι αληθείς, καθολικές και αναγκαίες.

Ο Αριστοτέλης αναρωτήθηκε για το πώς φθάνει κανείς στη γνώση των πρώτων αρχών. Προκειμένου το δίκτυο των συλλογισμών και των αποδείξεων να αρχίσει να λειτουργεί, πρέπει να τεθούν οι πρώτες αρχές της επιστήμης. Αυτή η σκέψη τον οδήγησε στην ανακάλυψη του επαγωγικού συλλογισμού. (Κάλφας, 2015)

Οι αρχές αυτές του Αριστοτέλη μπορούν να εφαρμοστούν σε όλες τις επιστήμες. Δεν είναι τυχαίο ότι ο Αριστοτέλης είχε διακρίνει τις γνώσεις σε τρεις κατηγορίες, τις οποίες δομούσε ιεραρχικά: ποιητική, πρακτική και θεωρητική.

Στο κατώτερο επίπεδο τοποθετούνται οι τεχνικές δεξιότητες, δηλαδή το σύνολο των τεχνών, από τις πιο ταπεινές ως τις πιο πολύπλοκες, όπως η ιατρική. Όλες αυτές οι δεξιότητες συνιστούν ένα σύνολο κανόνων, στηριζόμενες στη συσσωρευμένη εμπειρία των ανθρώπων και που προϋπόθεση για την άσκησή τους είναι η διδασκαλία και αφομοίωσή τους. Στην δεύτερη κατηγορία τοποθετούνται οι πρακτικές γνώσεις, που έχουν αντικείμενο την ανθρώπινη συμπεριφορά. Ο Αριστοτέλης έχει στον νου του κυρίως την ηθική και πολιτική θεωρία, τη μελέτη δηλαδή της ανθρώπινης «πράξης» είτε σε ατομικό είτε σε συλλογικό επίπεδο. Αν δει κανείς την «πρακτική» γνώση με γνώμονα την ανθρώπινη συμβίωση και ευδαιμονία, η γνώση αυτή είναι η πιο σημαντική το ανώτερο τέλος επίπεδο τοποθετούνται οι τρεις «θεωρητικές» επιστήμες: τα μαθηματικά, η φυσική και η «θεολογία» ή «πρώτη φιλοσοφία»: ο διακριτικό γνώρισμα της θεωρητικής γνώσης είναι η αυτονομία της, η ανεξαρτησία της από κάθε εφαρμογή ή πρακτική χρησιμότητα. Το μοναδικό κίνητρο του θεωρητικού επιστήμονα είναι η αναζήτηση της αλήθειας, η κατανόηση της αντικειμενικής πραγματικότητας. Για τον Αριστοτέλη, η ίδια η φύση του ανθρώπου χαρακτηρίζεται από την αναζήτηση της άδολης και καθαρής γνώσης.

Για τον Αριστοτέλη τα μαθηματικά δεν είχαν την αξία που είχαν για τον Πλάτωνα. Ο Αριστοτέλης πίστευε ότι τα μαθηματικά αποτελούν απλές αφαιρέσεις, κατασκευές του ανθρώπινου μυαλού αφού, όπως δεν υπάρχουν πλατωνικές Ιδέες, δεν υπάρχουν και αυτόνομες μαθηματικές οντότητες. Επομένως, τα μαθηματικά δεν μας μαθαίνουν κάτι για την πραγματική δομή του κόσμου, γιατί αυτό το αναλαμβάνει η φυσική. Ωστόσο ο τρόπος σκέψης που μας προσφέρουν τα μαθηματικά είναι η δίοδος μέσα από την οποία μπορεί να προσεγγιστεί και να ερμηνευθεί η φιλοσοφία.



Μαθηματικά και φιλοσοφία συνυφαίνονται διαλεκτικά για την αποκάλυψη της αλήθειας. Υπό αυτό το πρίσμα ο Αριστοτέλης είναι επίσης ο πρώτος φιλόσοφος που ανακάλυψε τη διεπιστημονική προσέγγιση.

#### 4.5 Η φιλοσοφία των μαθηματικών

Από τα παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι ανέκαθεν οι φιλόσοφοι είχαν μία έλξη προς την επιστήμη των μαθηματικών, χρησιμοποιώντας μαθηματικές δομές για να εξηγήσουν τον υλικό κόσμο και να καταλήξουν σε φιλοσοφικές θέσεις και αντίστροφα, η ενασχόληση με τα μαθηματικά δημιουργούσε πρόσθετους φιλοσοφικούς προβληματισμούς.

Στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα αναπτύχθηκε ένας νέος επιστημονικός κλάδος, η φιλοσοφία των μαθηματικών, που έχει ως στόχο να εξηγήσει τη θέση των μαθηματικών για τον κόσμο και τον άνθρωπο. Αυτή η προσέγγιση αναδεικνύει ότι τα μαθηματικά έχουν άμεση σχέση με τον πραγματικό, μη μαθηματικό κόσμο. Στον κλάδο της φιλοσοφίας των μαθηματικών περιλαμβάνονται διαφορετικά ρεύματα και διαφορετικές ερμηνείες, επηρεασμένα σε μεγάλο βαθμό από την αρχαία ελληνική φιλοσοφία, δείχνοντας ότι η φιλοσοφική θεώρηση των μαθηματικών αποτελεί μέχρι σήμερα ένα προνομιακό πεδίο συζήτησης.

Δύο κυρίαρχα φιλοσοφικά ρεύματα διαμορφώνονται, ο Ρεαλισμός και ο Αντιρεαλισμός.

Ο Ρεαλισμός δέχεται ότι τα μαθηματικά αντικείμενα και οι τιμές αληθείας τους είναι ανεξάρτητα από το νοούν υποκείμενο και τις αισθήσεις. Ένας πρώιμος μαθηματικός ρεαλισμός διατυπώθηκε από τον Πλάτωνα, όπως αναλύθηκε παραπάνω. Το ρεύμα ονομάζεται και πλατωνισμός και νεοπλατωνισμός, το οποίο έχει ασκήσει επιρροή σε μεταγενέστερους φιλοσόφους, όπως ο Καρτέσιος, που θεωρείται ο ιδρυτής του νεοπλατωνισμού. Για τον Καρτέσιο το κατεξοχήν πρότυπο-μοντέλο της γνώσης είναι τα μαθηματικά. Τα μαθηματικά συλλαμβάνονται από τη νόηση, ενώ οι αισθήσεις και η φαντασία αποτελούν κατώτερες γνωστικές δυνάμεις, στις οποίες δε μπορεί να βασιστεί ο άνθρωπος. Η πρώτη αρχή της γνώσης θεμελιώνεται ενορατικά. Δηλαδή, ο

κάθε άνθρωπος έχει «άμεση συνείδηση για το τι συμβαίνει μέσα του» και στο χαρακτηριστικό αυτό στηρίζει τη γνωστική βεβαιότητα, και όχι στην παράδοση και την αυθεντία. Για τον Καρτέσιο τα μαθηματικά αντικείμενα ενυπάρχουν στον νου και μπορούν να προσεγγιστούν μέσω της ενόρασης και όχι μέσω των αισθήσεων.

Αντίστοιχα και ο Καντ επηρεασμένος από τις νεοπλατωνικές θέσεις υποστήριξε ότι οι γνώσεις που έχει ο άνθρωπος υπάρχουν μέσα του *apriori* και ως εκ τούτου δεν συνεισφέρει η εμπειρία που αποκτάται μέσω των αισθήσεων στην απόκτησή τους. Για τον Καντ τονα σκεφτεί κάποιος ένα τρισδιάστατο κύβο σήμαινε να κατασκευάσει τονοητό αντικείμενο. Έτσι το άτομο ανακαλύπτει τη δυνατότητα που είχε ανέκαθεν να κατασκευάζει τρισδιάστατα αντικείμενα. Ο Leibnitz διακατέχεται επίσης από πλατωνικές επιρροές, αφού ταμαθηματικά αντικείμενα, η μαθηματική πράξη είναι μια πειθαρχημένηδραστηριότητα. Πιο συγκεκριμένα τα μαθηματικά αντικείμενα είναικαθαρές οντότητες του νου, *entiarationis*, που δεν αντικατοπτρίζουν άμεσααυτό που εμφανίζεται σαν εξωτερικός κόσμος. Για παράδειγμα τα ισοσκελή τρίγωνα δεν είναι υπαρκτά στον κόσμο των αισθήσεων, αλλά υπάρχουν οντότητες που το σχήμα τους προσιδιάζειιστη νοητή μορφή του ισοσκελούς τριγώνου. Ο Leibniz πιστεύει ότι η πραγματικότητα που ζούμε είναι ενδεχομενική, αλλά τα μαθηματικά αντικείμενα και οι αλήθειες γύρω από αυτά δεν έχουν ενδεχομενικό χαρακτήρα. Οι μαθηματικές αλήθειες είναι αναγκαίες και η αναγκαιότητα οφείλεται στην αναλυτικότητά τους. (Αναπολιτάνος, 2005)

Ο Αντιρεαλισμός αντίθετα, υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά αντικείμενα αποτελούν νοητικές κατασκευές, οι οποίες προέκυψαν μέσω της ανθρώπινης πρόσληψης με τη βοήθεια των αισθήσεων. Έτσι, δεν υπάρχουν ανεξάρτητα από τα νοούντα υποκείμενα, αλλά δημιουργούνται μέσω της νόησης. Αυτή είναι η αριστοτελική φιλοσοφική θέση για τα μαθηματικά. Ο Lockeεπηρεάστηκε από την αριστοτελική θέση και ως εκ τούτου είναι αντίθετη με την καρτεσιανή θεώρηση. Οι κύριες συνιστώσες της φιλοσοφίας τουLocke συμπυκνώνονται στο ότι οι έμφυτες ιδέες δεν υπάρχουν, αλλά αφητηρία τωνανθρώπινων γνώσεων είναι η εμπειρία. Η εμπειρία αυτήκατηγοριοποιείται σε εσωτερική και εξωτερική (τα αισθήματα). Η γνώση εδράζεται πάνωστις απλές ιδέες. Απλές ιδέες είναι αυτές που προκαλούνται στο μυαλό από τις διάφορεςιδιότητες των σωμάτων. Το λογικό του ανθρώπου είναι αυτό

που στη συνέχεια μεδιαδικασίες αφαίρεσης και σύγκρισης καθώς και μεσυνδυασμούς συγκροτεί από τις απλές ιδέες τις περισσότερο σύνθετες. Για τον Locke η πρώτη πηγή μαθηματικής γνώσης είναι εμπειρική με την έννοια πως οι απλές ιδέες πάνω στις οποίες στηρίζεται η κατασκευή αφηρημένων γενικών ιδεών έχουν άμεση εμπειρική προέλευση. Ο Locke θεωρεί πως οι μόνες απλές μαθηματικές ιδέες που προκύπτουν από καθαρή διαδικασία εμπειρικής αφαίρεσης χωρίς κανένα στοιχείο κατασκευής είναι οι ιδέες της μονάδας και του σημείου. Όλες οι άλλες μαθηματικές ιδέες είναι σύνθετες και προκύπτουν από κατασκευαστικές διαδικασίες, όπως για παράδειγμα η διαδικασία της επανάληψης και του συνδυασμού των αρχικών απλών ιδεών της μονάδας και του σημείου. Για παράδειγμα ο αριθμός 12 είναι μια ιδέα που προκύπτει από κάποια συγκεκριμένη επανάληψη της ιδέας της μονάδας, και ο κύκλος μια ιδέα που προκύπτει από την επανάληψη του σημείου με έναν ορισμένο τρόπο.

Ο Berkeley έρχεται σε ρήξη με την καρτεσιανή φιλοσοφία και αμφισβητεί την εξωτερική πραγματικότητα των αντικειμένων. Σύμφωνα με το ίδιο η αισθητηριακή αντίληψη δεν αποτελείτο διάμεσο ανάμεσα σε αυτά και στις εικόνες. Τα φυσικά αντικείμενα είναι πολλαπλότητες αισθητηριακών δεδομένων που εξαρτώνται από το γνώστη τους. Για τον Berkeley οι οντότητες χωρίζονται σε δύο είδη :

- τους φορείς των αισθητηριακών δεδομένων
- τις ιδέες που υπάρχουν στο βαθμό που αποτελούν το αντικείμενο γνώσης των φορέων τους.

Τα αντικείμενα που αντιλαμβανόμαστε σαν υπαρκτά δεν είναι αντικείμενα καθ' αυτά, αλλά εικόνες συγκεκριμένες, δηλαδή πολυπλοκότητες αισθητηριακών δεδομένων. Αυτή η θέση διαμόρφωσε τη φιλοσοφία που ονομάστηκε φαινομεναλισμός του Berkeley. Μια από τις βασικές θέσεις του είναι ότι δεν υπάρχουν γενικές αφηρημένες έννοιες και ο ανθρώπινος νους δε μπορεί να δράσει αφαιρετικά. Για παράδειγμα, η ιδιότητα του τριγωνικού δεν μπορεί να αποτελέσει ξεχωριστή εικόνα – ιδέα και να απομονωθεί από συγκεκριμένα φυσικά ή νοητά τρίγωνα. Όταν σκεφτόμαστε ένα τρίγωνο έχουμε στο νου μας ένα συγκεκριμένο νοητό αντικείμενο, δηλαδή είτε θα σκεφτόμαστε ένα ισοσκελές είτε ένα ισόπλευρό είτε ένα σκαληνό τρίγωνο. Η θέση αυτή του Berkeley για την αδυναμία σχηματισμού αφηρημένων γενικών ιδεών – εικόνων στηρίζεται στην πίστη του για τη μη ύπαρξη δυνατότητας διαχωρισμού ιδιοτήτων από τα συγκεκριμένα φυσικά ή νοητά αντικείμενα. (Αναπολιτάνος, 2005)

Στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα εμφανίζονται τα μαθηματικά παράδοξα, που έρχονται σε αντίθεση με την κοινή αντίληψη των ανθρώπων, διαμορφώνοντας 3 βασικές σύγχρονες φιλοσοφικές προσεγγίσεις των μαθηματικών:

### **Λογικισμός**

Βασική ιδέα του Λογικισμού είναι ότι τα μαθηματικά αποτελούν προέκταση της λογικής. Ο λογικισμός υποστηρίχθηκε για πρώτη φορά από τον Leibniz, ο οποίος υποστήριξε ότι τα μαθηματικά αντικείμενα είναι λογικά αντικείμενα και οι θεωρίες αυτών αποδεικνύονται μόνο με τη λογική. Σύμφωνα με τον Shapiro ο λογικισμός χωρίζεται σε μεταφραστικό και αιτηματικό. Ο μεταφραστικός λογικισμός είναι η άποψη ότι αν δοθούν κατάλληλοι ορισμοί στους μαθηματικούς όρους, οι ίδιες οι μαθηματικές προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς, αποκλειστικά και μόνο λόγω των μορφών τους. Δηλαδή οι μαθηματικές αλήθειες, εάν κατανοηθούν με σωστό τρόπο, είναι αληθείς λογικές. Ο αιτηματικός λογικισμός συνίσταται στην άποψη ότι τα μαθηματικά δεν αποτελούν τίποτα περισσότερο από μια μελέτη των λογικών συνεπειών ανερμήνευτων συνόλων από αξιώματα. Ένας μαθηματικός κλάδος, εάν γίνει με αυτόν τον τρόπο κατανοητός, δεν έχει προκαθορισμένο περιεχόμενο, όπως για παράδειγμα οι φυσικοί αριθμοί ή ο ευκλείδειος χώρος. Αντιθέτως, όλοι οι πρωταρχικοί (μηλογικοί) όροι των μαθηματικών εκλαμβάνονται χωρίς ερμηνεία και κατά συνέπεια χωρίς σταθερότητα. (Shapiro, 1983)

### **Φορμαλισμός**

Ο φορμαλισμός αναπτύχθηκε από τον Hilbert, και ισχυρίζεται ότι η ουσία των μαθηματικών είναι ο χειρισμός χαρακτήρων. Οτιδήποτε μπορεί να ειπωθεί για ένα κλάδο μαθηματικών, εξαντλείται από μία λίστα χαρακτήρων και επιτρεπτών κανόνων. Δηλαδή τα μαθηματικά δεν αναφέρονται σε τίποτα περισσότερο από τους χαρακτήρες και τους κανόνες χειρισμού τους. Έτσι, στο ερώτημα για το τι ακριβώς είναι οι φανταστικοί αριθμοί, ο φορμαλισμός απαντά ότι απλά πρέπει να αντιμετωπίζονται με τους ίδιους σχεδόν κανόνες που αντιμετωπίζονται και οι πραγματικοί αριθμοί.

Για παράδειγμα, ένα θεώρημα της αριθμητικής δεν αντιπροσωπεύει κάποιο γεγονός για τους φυσικούς αριθμούς. Ένα τέτοιο θεώρημα αποτελεί μάλλον το αποτέλεσμα μιας σειράς χειρισμών σύμφωνα με τους κανόνες της αριθμητικής. Επιπλέον, συχνά υπάρχει η αντίληψη ότι οι κανόνες των διαφόρων κλάδων των μαθηματικών

επιλέγονται αυθαίρετα. Από αυτή την άποψη, ένας μαθηματικός κλάδος μπορεί να θεωρηθεί ως παιχνίδι που παίζεται με τυπογραφικούς χαρακτήρες, και μια απόδειξη θεωρήματος του κλάδου ως σωστός τρόπος να παίζει κανείς το παιχνίδι. (Shapiro, 1983)

### **Ιντουισιονισμός**

Κύριος εκπρόσωπος αυτής της θεωρίας υπήρξε ο Brouwer ο οποίος θεσμοθέτησε μια ιδιαίτερη έννοια κατασκευαστικότητας και εισήγαγε ρηξικέλευθες ιδέες γύρω από επιτρεπτή μαθηματική πρακτική, απορρίπτοντας μεγάλα κομμάτια των κλασικών μαθηματικών. Το βασικότερο σημείο της έρευνάς του ήταν η εξέταση της φύσης των νοητών μαθηματικών κατασκευών. Όρισε ως κριτήριο ύπαρξης των μαθηματικών αντικειμένων τη νοητή παράγωγή τους με διαδικασίες κατασκευαστικά ελεγχόμενες. Μια από τις βασικές θέσεις αυτής της σχολής είναι η αυτονομία της μαθηματικής δραστηριότητας και η ανεξαρτησία της από γλωσσικά συστήματα και την τυπική λογική. Θεωρείται η μαθηματική δραστηριότητα προγλωσσική και προλογική, δεν είναι άλογη, όμως προηγείται στον καθορισμό των κανόνων του παιχνιδιού που θα προκύψουν. Αυτό οφείλεται στην προτεραιότητα της θεμελιώδους και διακριτής χρονικής εποπτείας (ενόρασης), γιατί αυτό που μετράει τελικά στο επίπεδο της γνώσης είναι ο τρόπος με τον οποίο εικονίζεται η πραγματικότητα μέσα μας, μέσα στον ανθρώπινο νου. (Αναπολιτάνος, 2005)

Οι Ιντουισιονιστές πιστεύουν ότι η ενόραση έχει προγλωσσικό χαρακτήρα, διαχωρίζουν τα μαθηματικά από τη γλώσσα των μαθηματικών. Όσον αφορά την έννοια της αλήθειας είναι αναπόσπαστη από την έννοια της απόδειξης. Υπαρκτό για αυτούς σημαίνει το κατασκευαστικά υπαρκτό. Απορρίπτουν όμως τον πλατωνικό ισχυρισμό ότι η ενόραση αυτή αποτελεί «αντίληψη» ενός αντικειμενικού βασιλείου. Ειδικότερα, υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά αντικείμενα, όπως οι αριθμοί, κατασκευάζονται από τον μαθηματικό και άρα δεν έχουν ύπαρξη ξέχωρη από τη νόησή του. Για έναν ιντουισιονιστή οι μαθηματικοί ισχυρισμοί απηχούν νοητικές κατασκευές που εκτελούνται σε μαθηματικά αντικείμενα, αντικείμενα τα οποία εξετάζονται και τα ίδια ως νοητικά κατασκευάσματα. (Shapiro, 1983)

Από όλα τα παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι η φιλοσοφία δεν βρίσκεται μακριά από τα κύρια ενδιαφέροντα των μαθηματικών όπως είναι η λογική, η θεωρία υπολογισμού, η ανάλυση και η γεωμετρία. Αντίστοιχα, τα μαθηματικά δεν είναι

άσχετα ως προς τα ενδιαφέροντα των διάφορων φιλοσοφικών πεδίων όπως η επιστημολογία, η μεταφυσική, η λογική, η γνωστική επιστήμη. Ο διάλογος μεταξύ μαθηματικών και φιλοσοφίας εξακολουθεί να παραμένει ανοιχτός και να επιδέχεται πολλαπλές συσχετίσεις και ερμηνείες.

## 4.6 Τα αλφαβητικά σύμβολα

Κατά τον Πυθαγόρα, τα γράμματα του αλφάβητου ερμηνεύονται συμβολικά είτε ως γράμματα είτε ως σημεία εντός μιας λέξης ή μιας ολοκληρωμένης πρότασης. Ακόμη, είχαν και αριθμητική αξία, γεγονός που συναντάται και σε προγενέστερους του Πυθαγόρα (Γράβιγγερ, 1998). Η ερμηνεία των γραμμάτων ονομαζόταν Γεματρία, λέξη σύνθετη από τις λέξεις Γεωμετρία και Γραμματεία, για να δείξει πως αυτές οι δύο επιστήμες συνδέονται. Σε αυτή την συμβολή του Πυθαγόρα, αξίζει να αναφερθούν πέντε περιπτώσεις γραμμάτων ως σύμβολα: το Όμικρον, το Ύψιλον, το Χι, το Δέλτα και το Γάμα.

Το Όμικρον λόγω της μορφής του γράμματος – δηλαδή του κύκλου – συμβολίζει την αρμονία, την πληρότητα ενός κύκλου, το απόλυτο ένα, τον πρωταρχικό αριθμό ο οποίος είναι η αρχή των πάντων. Η θεώρηση αυτή του Πυθαγόρα γίνεται κατανοητή με την ανάλυση του αριθμού και του κάθε γράμματος στο άθροισμά του. Αν προσθέσουμε τον αριθμό του κάθε γράμματος (σύμφωνα με την Πυθαγόρεια Αριθμολογία που αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο) θα βρούμε τον αριθμό 360, ο οποίος αντιστοιχεί και στις μοίρες του κύκλου:

$$\text{ΟΜΙΚΡΟΝ} = 70+40+10+20+100+70+50= 360$$

Το γράμμα Ύψιλον συμβολίζει την απόφαση που καλείται να πάρει ο άνθρωπος όταν ανοίγονται εμπρός του δύο δρόμοι: αυτός της σωτηρίας και αυτός της πλάνης – ο δρόμος του καλού και του κακού. Μέσω του Ύψιλον αναπαρίσταται ο βίος του ανθρώπου: Όταν ο άνθρωπος φτάσει σε εφηβική ηλικία φτάνει σε ένα σημείο όπου η πορεία του διχάζεται στα δύο. Στα δεξιά βρίσκεται ένας δρόμος στενός, ανώμαλος, ανηφορικός και κοπιαστικός αλλά αυτός είναι ο δρόμος που καταλήγει στην αρετή και την ευδαιμονία ενώ στα αριστερά βρίσκεται ένας πιο ευρύς και εύκολος δρόμος που οδηγεί σε απολαύσεις της καθημερινής ζωής αλλά που στο τέλος του βρίσκεται η άβυσσος (Γράβιγγερ, 1998).

Το γράμμα Χι συμβολίζει την ψυχή του κόσμου και τις περισσότερες φορές απαντάται γραμμένο ως κεφαλαίο γράμμα. Αρκετές αναφορές για το Χι συναντώνται

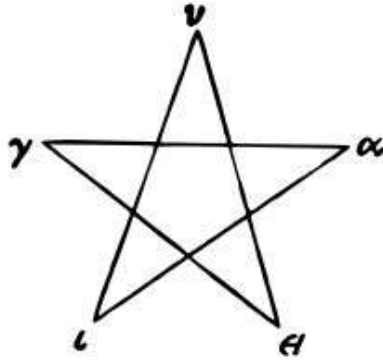
στον Πλάτωνα, όπως αυτή με την σχηματική απεικόνιση του Χι που προέρχεται από την ένωση δύο σφαιρών οι οποίες κινούνται αντίθετα, με λυγισμένα τα άκρα του.

Το γράμμα Δέλτα, συναντάται και ως «Φωτεινό Δέλτα» και έχει αριθμητική ερμηνεία η οποία αποδίδεται κυρίως στο γεωμετρικό του σχήμα και όχι στην θέση του εντός της αλφαβήτου. Το γεωμετρικό σύμβολο αποτελεί τον τριαδικό αριθμό κατά τους Πυθαγορείους και έχει όλες εκείνες τις ιδιότητες που αναλύθηκαν παραπάνω για το ισοσκελές τρίγωνο.

Στο γράμμα Γάμα αποδίδεται σημαντική σημασία καθώς υπάρχουν διάφορες αναφορές εντός των κειμένων που διασώζονται ως σήμερα. Αρχικά αναφέρεται και αυτό κυρίως ως προς την γεωμετρική του όψη ως Γνώμονας δηλαδή ως μια ορθή γωνία. Ο γνώμονας είναι επίσης και βασικό εργαλείο της οικοδομικής δραστηριότητας ο οποίος χρησιμοποιείται για την λάξευση των ακατέργαστων πετρών. Με την τελευταία ιδιότητα συναντάται και μεταφορικά ως εργαλείο που χρησιμοποιείται για τη λάξευση της ψυχής του ανθρώπου (Γράβιγγερ, 1998). Ακόμη θεωρείται σημαντικό γράμμα ως το αρχικό γράμμα των λέξεων Γεωμετρία, Γνώση, Γένεση.

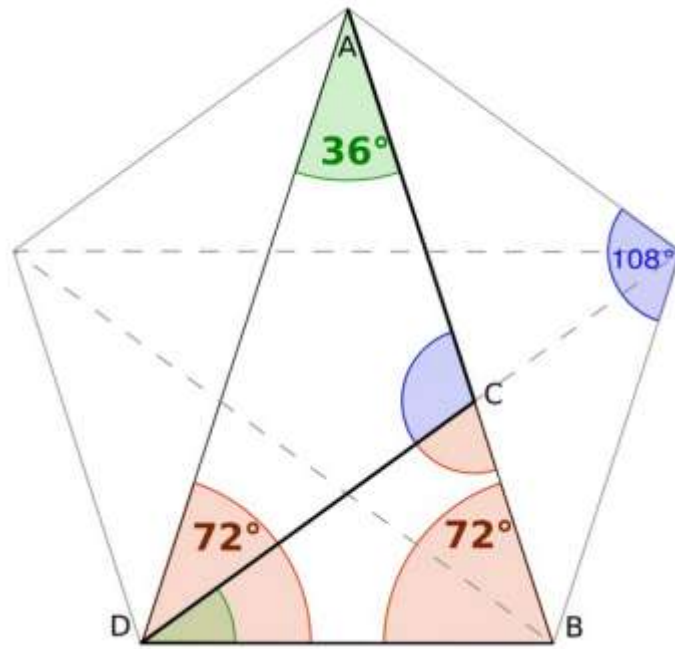
Η πεντάλφα επίσης ήταν ένα σημαντικό σύμβολο για τους Πυθαγορείους, με πολλές αναφορές ότι αποτελεί και το μυστικιστικό σύμβολο της ίδιας της σχολής τους. Ο Πυθαγόρας εργάστηκε για να βρει τη χρυσή τομή του σχήματος και κατέληξε στο θεώρημα ότι η πεντάλφα μπορεί να κατηγοριοποιηθεί σε τέλεια σύνολα. Η Πεντάλφα συχνά απαντάται ως Ισοσκελής Πεντάλφα και εκλαμβάνεται ως σύμβολο συνεχιστών στη θεωρία του Πυθαγόρα αλλά και αναφορικά με τον τρόπο ζωής του. Σε αυτό συνηγορεί και το γεγονός ότι αρκετές αναφορές στην πεντάλφα την αποτυπώνουν με γραμμένα τα γράμματα της λέξης **ΥΓΙΕΙΑ** στην κάθε κορυφή του σχήματος, λέξη που είχε ύψιστη σημασία για τον Πυθαγορισμό. Τα αρχικά γράμματα της λέξης αυτής όπως έχει αναφερθεί και προηγουμένως, συμβολίζουν και τα στοιχεία της φύσης: Ύδωρ – Γαία - Ιδέα / Ιερό (πνεύμα) - ΕΙλη (θερμότητα ήλιου) – Αήρ.





Εικόνα 21 - Πεντάλφα ως σύμβολο του Πυθαγορισμού

Σε μια άλλη εκδοχή της η πεντάλφα συναντάται επίσης και στην Αρχαία Ελλάδα ως εργαλείο που χρησιμοποιούνταν από κτίστες, πιθανότατα μετά την ανακάλυψη του Πυθαγόρα για τις ιδιότητές της. Ο τρόπος που παρασκευαζόταν ήταν με ισομήκη χοντρά ξύλα μήκους 30 πόντων και με γωνίες 18 μοιρών. Η πεντάλφα πήρε το όνομά της από τα πέντε Άλφα που σχηματιζόντουσαν με τη συναρμολόγησή της. Στη συνέχεια παρατίθεται μια πλήρως συναρμολογημένη πεντάλφα για να αντιληφθούμε τη σημαντικότητα και τη λεπτομέρεια στην κατασκευή της. Τα χαρακτηριστικά της φαίνονται στο σχήμα το οποίο δείχνει ακριβώς τις γωνίες που υπάρχουν στα εσωτερικά της τμήματα, και χρησιμοποιήθηκαν για τον κατασκευαστικό κλάδο στην αρχαιότητα.



Εικόνα 22 - Η πεντάλφα ως εργαλείο των κτιστών

Σε άλλες αναφορές η πεντάλφα αναφέρεται απλώς ως πεντάγωνο γεγονός που δείχνει τη σύνδεση του σχήματος αυτού με το Πυθαγόρειο θεώρημα. Η πεντάλφα κατασκευάζεται αν σε ένα κανονικό πεντάγωνο τραβήξουμε τις διαγώνιες από κάθε κορυφή με τρόπο που δημιουργείται ένα ισοσκελές τρίγωνο. Τα ισοσκελή τρίγωνα που σχηματίζονται σχετίζονται με τη «χρυσή τομή». Παράλληλα, η πεντάλφα στο εσωτερικό του πενταγώνου σχηματίζει 10 γωνίες, το πλήθος δηλαδή του πυθαγόρειου τέλειου αριθμού όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως.

## 5. Συμπεράσματα

Η παρούσα εργασία επιδίωξε και κατάφερε σε σημαντικό βαθμό να αξιολογήσει τη συνεισφορά του Πυθαγόρα σε μια σειρά από πεδία της επιστήμης αλλά και εκτός αυτής. Σήμερα η συνεισφορά του Πυθαγόρα είναι περισσότερο γνωστή όσον αφορά το Πυθαγόρειο θεώρημα και την ευρύτερη συνεισφορά του στον κλάδο των μαθηματικών και της Γεωμετρίας, παρ' όλα αυτά η συνεισφορά του σε άλλους τομείς, από την αστρονομία ως τη διατροφή είναι εξίσου σημαντική. Η σημαντικότητα της συνεισφοράς του αναδεικνύεται και μέσω της συνεισφοράς των μετέπειτα μεγάλων φιλοσόφων και άλλων προσωπικοτήτων της αρχαιότητας, οι οποίες βασίστηκαν σε θεωρίες του Πυθαγόρα και των μαθητών του.

Από τη διπλωματική αναδεικνύεται ότι ο Πυθαγόρας αποτέλεσε από τις πιο σημαντικές και ενδιαφέρουσες προσωπικότητες της αρχαιότητας. Η σκιαγράφηση του βίου του και της συνεισφοράς του πραγματοποιήθηκε σε ξεχωριστά κεφάλαια για να αποτιμηθεί η συνεισφορά του στο κάθε πεδίο, η πραγματικότητα όμως είναι ότι αυτά τα πεδία περιπλέκονται έντονα. Η διδασκαλία του Πυθαγόρα, ο Πυθαγορισμός, στηριζόταν σε αρχές και δόγματα που είχαν ως κέντρο τον άνθρωπο, τον βίο του και τη σχέση του με τα θεία. Ένα από αυτά ήταν το δόγμα της μετενσάρκωσης το οποίο αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο της πυθαγόρειας διδασκαλίας κατά την οποία η ψυχή του ανθρώπου διακρινόταν ως ξεχωριστή οντότητα από το σώμα του. Ένα άλλο δόγμα του Πυθαγορισμού ήταν η ηθική στη συμπεριφορά του ανθρώπου η οποία διαπερνούσε την κάθε συμπεριφορά του. Η ηθική μαζί με την σωφροσύνη, την ανδρεία και τη δικαιοσύνη ήταν βασικές αρετές των Πυθαγορείων και του τρόπου ζωής που είχαν στην καθημερινότητά τους.

Η συνεισφορά του στα μαθηματικά ήταν πραγματικά αξεπέραστη σε σχέση με τους άλλους της εποχής του. Ο Πυθαγόρας εισήγαγε βασικά ζητήματα γύρω από την αριθμολογία που ακόμη και σήμερα χρησιμοποιούνται. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η διάκριση των αριθμών σε περιττούς και άρτιους. Σίγουρα όμως το Πυθαγόρειο θεώρημα ήταν η κορυφαία συνεισφορά του Πυθαγόρα του Σάμιου στην επιστήμη των μαθηματικών και ειδικότερα στη Γεωμετρία. Ο τρόπος που απέδειξε το θεώρημα ήταν μοναδικός για την εποχή του. Ακόμη, οι αναλογίες και ο Επαγωγικός συλλογισμός ήταν έννοιες που εισήχθησαν από τον Πυθαγόρα και τους μαθητές του

και χρησιμοποιούνται ως και στις μέρες μας. Σημαντική ήταν η συνεισφορά του Πυθαγόρα στο διαφορικό και τον ολοκληρωτικό λογισμό που αναφέρεται σε μεθόδους σκέψης και συλλογισμού για μαθηματικά και λογικά προβλήματα. Σε αυτό το πλαίσιο εντάσσεται και η έννοια της απόδειξης ως τρόπο τεκμηρίωσης. Οι αποδείξεις του Πυθαγόρα για την ασυμμετρία και την αρρητότητα ήταν και αυτές πρωτοποριακές και έδωσαν τη δυνατότητα για περαιτέρω επιστημονικές ανακαλύψεις, θεωρητικές αναζητήσεις και άνοιξε το δρόμο για τους μεταγενέστερους μαθηματικούς για άλλα θεωρήματα και αποδείξεις.

Ο Πυθαγόρας ήταν Έλληνας φιλόσοφος που ίδρυσε την Πυθαγόρεια σχολή σκέψης, η οποία έδινε έμφαση στην αναζήτηση της γνώσης και στη διασύνδεση όλων των πραγμάτων. Ο Πυθαγόρας πίστευε ότι τα πάντα στο σύμπαν βασίζονταν σε μαθηματικές αρχές και ότι οι αριθμοί ήταν τα δομικά στοιχεία της πραγματικότητας. Αυτή η πεποίθηση τον οδήγησε να συνεισφέρει σημαντικά στους τομείς της αστρονομίας, της θεωρίας της μουσικής και της ηθικής.

Στην αστρονομία, ο Πυθαγόρας υπέθεσε ότι η Γη ήταν μια σφαίρα και ότι οι πλανήτες και τα αστέρια κινούνταν σε κυκλικές τροχιές γύρω της. Πίστευε επίσης ότι οι αποστάσεις μεταξύ των ουράνιων σωμάτων θα μπορούσαν να εκφραστούν σε μαθηματικούς λόγους, οι οποίοι έθεσαν τα θεμέλια για τους μεταγενέστερους αστρονόμους να μετρήσουν το μέγεθος και την απόσταση των πλανητών και των αστεριών.

Στη θεωρία της μουσικής, ο Πυθαγόρας ανακάλυψε τις μαθηματικές σχέσεις μεταξύ των μουσικών νότων και των αναλογιών των συχνοτήτων τους. Πίστευε ότι η μουσική είχε τη δύναμη να θεραπεύει το σώμα και την ψυχή και ότι μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο πνευματικής και ηθικής ανάπτυξης.

Ο Πυθαγόρας πίστευε επίσης στη σημασία της ηθικής και της ηθικής συμπεριφοράς. Τόνισε την έννοια του κάρμα, την ιδέα ότι οι πράξεις ενός ατόμου καθορίζουν τη μοίρα του στη μετά θάνατον ζωή. Δίδαξε ότι η επιδίωξη της γνώσης και της σοφίας ήταν απαραίτητη για να ζήσουν μια ενάρετη ζωή και ότι τα άτομα είχαν την ευθύνη να χρησιμοποιούν τη γνώση τους για το μεγαλύτερο καλό.

Η συνεισφορά του Πυθαγόρα στην επιστήμη και την ανθρωπότητα δεν περιορίστηκε σε αυτούς τους τομείς. Έκανε επίσης σημαντική συμβολή στη φιλοσοφία, τη θρησκεία και την πολιτική. Ο Πυθαγόρας πίστευε στη μετεμψύχωση των ψυχών, την

ιδέα ότι η ψυχή ενός ατόμου θα μπορούσε να ξαναγεννηθεί σε άλλο σώμα μετά το θάνατο. Αυτή η πεποίθηση αποτέλεσε τη βάση της φιλοσοφίας του για τη χορτοφαγία, η οποία υποστήριζε ότι το να σκοτώνεις ζώα για φαγητό ήταν ηθικά λάθος.

Οι διδασκαλίες του Πυθαγόρα είχαν επίσης σημαντικό αντίκτυπο στην πολιτική. Πίστευε στη σημασία μιας δίκαιης και σταθερής κοινωνίας και υποστήριξε τη δημιουργία μιας κοινότητας ομοϊδεατών ατόμων που θα μπορούσαν να ζήσουν μαζί και να επιδιώξουν τη γνώση και τη σοφία. Αυτή η κοινότητα, γνωστή ως Πυθαγόρεια Αδελφότητα, είχε σημαντική επιρροή στην πολιτική και πολιτιστική ζωή της αρχαίας Ελλάδας.

Συμπερασματικά, οι συνεισφορές του Πυθαγόρα στην επιστήμη και την ανθρωπότητα ήταν πολύπλευρες και εκτεταμένες. Ενώ οι μαθηματικές ανακαλύψεις του, ιδιαίτερα το Πυθαγόρειο Θεώρημα, παραμένουν οι πιο διάσημες συνεισφορές του, οι διδασκαλίες του για την αστρονομία, τη θεωρία της μουσικής, την ηθική, τη φιλοσοφία, τη θρησκεία και την πολιτική είχαν επίσης μόνιμη επίδραση στην ανθρώπινη σκέψη και πολιτισμό. Η κληρονομιά του Πυθαγόρα συνεχίζει και επεκτείνεται πολλούς αιώνες μετά τη ζωή του. Συνεχίζει να εμπνέει και να επηρεάζει άτομα και ολόκληρες κοινότητες σε όλο τον κόσμο σήμερα, και αυτός είναι ένας από τους λόγους ύπαρξης αυτής της εργασίας.

## Αναφορές

### Ελληνόγλωσσες αναφορές

- Βεΐκος, Θ. (1998). *ΟΙ ΠΡΟΣΩΚΡΑΤΙΚΟΙ*. Αθήνα: ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ.
- Γαλακούτη, Α. (2014). *Η φιλοσοφία των Πυθαγορείων ως τρόπος βίου και η συμβολή τους στην Επιστήμη. (Μεταπτυχιακή Εργασία)*. Ανάκτηση από <https://amitos.library.uop.gr>.
- Γράβιγγερ, Π. (1998). *Ο Πυθαγόρας και η μυστικιστική διδασκαλία του πυθαγορισμού*. Αθήνα: ΙΔΕΟΘΕΑΤΡΟΝ.
- Καλογεράκος, Ι., & Θανασάς, Π. (2000). Οι Προσωκρατικοί φιλόσοφοι. Στο Σ. κ. Βιρβιδάκης, *Η Ελληνική φιλοσοφία από την Αρχαιότητα έως τον 20ό Αιώνα*. Πάτρα: ΕΑΠ.
- Κάλφας, Β., & Ζωγραφίδης, Γ. (2011). *ΑΡΧΑΙΟΙ ΕΛΛΗΝΕΣ ΦΙΛΟΣΟΦΟΙ*. Θεσσαλονίκη: ΙΔΡΥΜΑ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΔΗ.
- Κλαμπανιστή, Ε. (2021). *ΒΙΟΣ ΚΑΙ ΕΡΓΟΝ ΗΘΙΚΟΝ/ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΗΘΙΚΗ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΩΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΩΝ*. Ανάκτηση από Άλλος ένας ιστότοπος Blogs.sch.gr: <https://blogs.sch.gr/eklampan/>
- Μαραγγιανού-Δερμούση, Ε. (2011). *Οι Προσωκρατικοί*. Αθήνα: Καρδαμίτσα.

### Ξενόγλωσσες αναφορές

- Apostol, T. (1969). *Calculus, Volume 1: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*. Wiley Publications.
- Bell, J. (2013). Continuity and Infinitesimals. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
- Brun, J. (1992). *Οι Προσωκρατικοί*. (Α. Τάκης, Μεταφρ.) Αθήνα: ΧΑΤΖΗΝΙΚΟΛΗ.
- Burnet, J. (1980). *Η αυγή της ελληνικής φιλοσοφίας*. (Α. Βαγενάς, Μεταφρ.) Αθήνα: Αναγνωστίδη.
- Cornford, F. (1923). Mysticism and Science in the Pythagorean Tradition. *The Classical Quarterly*, 17(1), 1-12. doi:10.1017/S0009838800014774
- Gemelli Marciano, M. L., & Huffman, C. (2014). *The Pythagorean way of life and Pythagorean ethics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Gorman, P. (1979). *Pythagoras: A Life*. Oxfordshire: Routledge Kegan & Paul.
- Guthrie, W. (1962). *A History of Greek Philosophy* (Τόμ. I The Earlier Presocratics and the Pythagoreans). Cambridge: Cambridge University Press.
- Heath, T. L. (1981). *A history of Greek mathematics (Vol. 1)*. Dover Publications.
- Heidel, W. A. (1901). Πέρας and Άπειρον in the Pythagorean Philosophy. *Archiv für Geschichte der Philosophie*, 14, 3, σσ. 384-400.

- Huffman, C. (2005). Η πυθαγόρεια παράδοση. Στο A. LONG, *Οι Προσωκρατικοί Φιλόσοφοι*. Αθήνα: Δ.Ν ΠΑΠΑΔΗΜΑ.
- Mattéi, J.-F. (1995). *Ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι*. Αθήνα: Μ. Καρδαμίτσα.
- Riedweg, C. (2002). *Pythagoras: His Life, Teachings, and Influence*. New York: Cornell University Press.
- Rowett, C. (2014). The Pythagorean Society and Politics. Στο C. Huffman (Επιμ.), *A History of Pythagoreanism*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Shapiro, S. (1983). Mathematics and Reality. *Philosophy of Science*, 50, 523-548.
- Taylor, T. (1995). *Η θεωρητική αριθμητική των Πυθαγορείων*. Αθήνα: Ιάμβλιχος.
- Waerden, B. (1979). *Die Pythagoreer. Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft*. Zürich/München: Artmenis Verlag.
- Wertheim, M. (1998). *Το παντελόνι του Πυθαγόρα*. Αθήνα: Τραυλός .
- Αναπολιτάνος, Δ. (2005). *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών*. Αθήνα: Νεφέλη.
- Βεΐκος, Θ. (1998). *ΟΙ ΠΡΟΣΩΚΡΑΤΙΚΟΙ*. Αθήνα: ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ.
- Γαλακούτη, Α. (2014). *Η φιλοσοφία των Πυθαγορείων ως τρόπος βίου και η συμβολή τους στην Επιστήμη. (Μεταπτυχιακή Εργασία)*. Ανάκτηση από <https://amitos.library.uop.gr>.
- Γράβιγγερ, Π. (1998). *Ο Πυθαγόρας και η μυστικιστική διδασκαλία του πυθαγορισμού*. Αθήνα: ΙΔΕΟΘΕΑΤΡΟΝ.
- Ζαχαρίου, Α. (1984). Τα Μαθηματικά στη Στοιχειώδη και Μέση Εκπαίδευση. . *Πρακτικά του 1ου Πανελληνίου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας*. Αθήνα.
- Καλογεράκος, Ι., & Θανασάς, Π. (2000). Οι Προσωκρατικοί φιλόσοφοι. Στο Σ. κ. Βιρβιδάκης, *Η Ελληνική φιλοσοφία από την Αρχαιότητα έως τον 20ό Αιώνα*. Πάτρα: ΕΑΠ.
- Κάλφας, Β. (2015). *Η φιλοσοφία του Αριστοτέλη*.
- Κάλφας, Β., & Ζωγραφίδης, Γ. (2011). 2.2. Τι είναι το άπειρο του Αναξίμανδρου;. Στο *Αρχαίοι Έλληνες Φιλόσοφοι*. Θεσσαλονίκη: ΙΔΡΥΜΑ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΔΗ.
- Κάλφας, Β., & Ζωγραφίδης, Γ. (2011). 3.5 Μυστικισμός και μαθηματικά. Στο *Αρχαίοι Έλληνες Φιλόσοφοι*. Θεσσαλονίκη: ΙΔΡΥΜΑ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΔΗ.
- Κάλφας, Β., & Ζωγραφίδης, Γ. (2011). *ΑΡΧΑΙΟΙ ΕΛΛΗΝΕΣ ΦΙΛΟΣΟΦΟΙ*. Θεσσαλονίκη: ΙΔΡΥΜΑ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΔΗ.
- Κάλφας, Β., & Ζωγραφίδης, Γ. (2011). Οι ιδέες και τα μαθηματικά. Στο *Αρχαίοι Έλληνες Φιλόσοφοι*. Θεσσαλονίκη: ΙΔΡΥΜΑ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΔΗ.
- Κετέν, Ν., Βενάρδος, Π., & Νικολαΐδου, Σ. (2020). «Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω»: Μαθηματικά και Αρχαία Ελληνική Σκέψη. *Open Schools Journal for Open Science*, 3(6). doi:<https://doi.org/10.12681/osj.24309>

Κλαμπανιστή, Ε. (2021). *ΒΙΟΣ ΚΑΙ ΕΡΓΟΝ ΗΘΙΚΟΝ/ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΗΘΙΚΗ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΩΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΩΝ*. Ανάκτηση από Άλλος ένας ιστότοπος Blogs.sch.gr: <https://blogs.sch.gr/eklampan/>

Μαραγγιανού-Δερμούση, Ε. (2011). *Οι Προσωκρατικοί*. Αθήνα: Καρδαμίτσα.

*Ο Πυθαγόρας τα Μαθηματικά και η Φυσική*. (2016, 03 10). Ανάκτηση από Physics4u: <http://physics4u.gr>

Παπαδοπούλου, Γ., & Ευθυμίου, Β. (χ.χ.). *Η ιστορία του Πυθαγόρα και του πυθαγορείου θεωρήματος*. Ανάκτηση από math.uoc.gr: <http://www.math.uoc.gr>

Πορφύριος. (2001). *Πυθαγόρου Βίος*. (Κ. Μακρής, Μεταφρ.) Αθήνα: Κατάρτι. Ανάκτηση από <http://repository.edulll.gr/1948>

Σταματοπούλου, Μ. (2016). *Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΑ ΣΕ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗΣ. Πρακτικά του Ελληνικού Ινστιτούτου Εφαρμοσμένης Παιδαγωγικής και Εκπαίδευσης (ΕΛΛ.Ι.Ε.Π.ΕΚ.), 8ο Πανελλήνιο Συνέδριο 18,19 Νοεμβρίου 2016.*



## Διαδικτυακοί τόποι

<https://www.wikipedia.org/>

[www.greek-language.gr](http://www.greek-language.gr)

<http://physics4u.gr>