ΜΑΥΡΙΚΗΣ ΑΓΓΕΛΟΣ

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΟΜΑΔΕΣ ΚΑΙ ΑΛΥΣΙΔΕΣ MARKOV

Harmonic Analysis on finite Groups and Markov Chains

Η παρουσα Διατριβη
εκπονηθηκε στο Τμημα Μαθηματικων
ως μερικη ικανοποιηση των απαιτησεων για την αποκτηση του
Μεταπτυχιακου Διπλωματος ¨Σπουδες στα Μαθηματικα’
κατευθυνσης :
Θεωρητικα Μαθηματικα

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Σάμος 13 Οκτωβρίου 2022

Τριμελης Επιτροπη

Μιχαήλ Ανούσης, Επιβλέπων Καθηγητής

Ευάγγελος Φελουζής, Μέλος

Νικόλαος Δαφνής, Μέλος

Στη Μητέρα μου!

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η διατριβή αυτή έγινε υπό την καθοδήγηση του καθηγητή του Πανεπιστημίου Αιγαίου Μιχαήλ Ανούση, τον οποίο και ευχαριστώ για την αμέριστη συμπαράστασή του και την άριστη και δημιουργική συνεργασία που είχαμε κατά την εκπόνηση της διατριβής. Επίσης, ευχαριστώ τα μέλη της Τριμελούς Επιτροπής, τον καθηγητή Ευάγγελο Φελουζή και τον καθηγητή Νικόλαο Δαφνή για τις εύστοχες παρατηρήσεις και τις συμβουλές τους. Τέλος, ένα μεγαλύτερο ευχαριστώ στη Μητέρα μου Αναστασία που πάντα με στηρίζει για να πετύχω τους στόχους μου και που καθημερίνα με διδάσκει πως πρέπει ποτέ να μην παρατάω να αγωνίζομαι για αυτούς, όσες δύσκολες στιγμές και αν έρθουν.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Η παρούσα εργασία παρέχει μία λεπτομερή εισαγωγή στην Αρμονική Ανάλυση των πεπερασμένων ομάδων και την σύνδεση της με την θεωρία των Αλυσίδων Markov. Επιπλέον, γίνεται αναφορά σε δύο μοντέλα διάχυσης προκειμένου να φανερωθεί η χρησιμότητα αυτής της θεωρίας στις εφαρμογές και ο άμεσος τρόπος με τον οποίο εφαρμόζεται. Συγκεκριμένα, στο πρώτο και βασικό μέρος της εργασίας δίνονται, αυστηρά, οι βασικές έννοιες της θεωρίας αναπαραστάσεων πεπερασμένων ομάδων από την οπτική της Αρμονικής Ανάλυσης συμπεριλαμβανομένου της έννοιας της δράσης ομάδας και της Μαρκοβιανής Αλυσίδας. Αυτές οι δύο έννοιες, που αποτελούν τα βασικά εργαλεία της εργασίας, καθορίζονται με τρόπο ανάλογο της οπτικής που επιδιώκεται. Στο δεύτερο μέρος γίνεται περιορισμός του πρώτου στις κυκλικές ομάδες και τους υπερκύβους. Ορίζοντας μέτρα πιθανότητας πάνω σε αυτές τις ομάδες προκύπτει η επέκταση της Αρμονικής Ανάλυσης στη Θεωρία Πιθανοτήτων και Στοχαστικών Διαδικασιών.

Μέρος I

Αρμονική Ανάλυση για Αναπαραστάσεις

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες

1.1 Markov Chains

Έστω C_n ένα κανονικό n-γωνο. Απαριθμούμε τις πλευρές του n-γωνιου από το 0 εως το $n-1$ και θεωρούμε ότι αυτοί οι αριθμοί είναι τα στοιχεία της ομάδας $\mathbb{Z}_n$. Με αυτό το τρόπο υπάρχει μια σύνδεση μεταξύ j και $j+1$, για όλα τα $j \in \mathbb{Z}_n$. Αυτό ονομάζεται διακριτός κύκλος και απεικονίζεται όπως στο επόμενο διάγραμμα.

Σχήμα 1.1: Διακριτός Κύκλος[5]

Υποθέτουμε ότι κάποιος κινείται από κορυφή σε κορυφή ρίχνοντας ένα νόμισμα. Συγκεκριμένα, αν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι ¨ΚΕΦΑΛΗ’ μετατοπίζεται μία κορυφή δεξιά, ένω αν είναι ¨ΓΡΑΜΜΑΤΑ μία κορυφή αριστερά. Ο χρόνος T είναι διακριτός και θεωρόυμε ότι τη χρονική στιγμη $T=0$ βρίσκεται στη θέση 0. Αν μετά από χρόνο $T=t$ βρίσκεται στη θέση j, την χρονική στιγμή $T=t+1$ θα μεταβεί ή στη θέση $j+1$ ή στη $j-1$ με πιθανότητα $1/2$.

Επομένως, παρατηρούμε ότι αν μετά από χρόνο $T=t$ ο άνθρωπος είναι στη θέση j, η μετατόπιση του την επόμενη χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από τη j. Αυτό το παράδειγμα, ονομάζεται συμμετρικός τυχαίος περίπατος σε διακριτό κύκλο, και ανήκει στη σπουδαία κλάση των Μαρκοβιανών Αλυσίδων. Εκείνων των στοχαστικών διαδικασιών, που όπως θα δούμε παρακάτω, χαρακτηρίζονται από αυτή την ιδιότητα ¨έλλειψης μνήμης¨.

Ο τυχαίος περίπατος, αποτελεί το βασικό εργαλείο για τα παραδείγματα που δίνονται στη συνέχεια με επιπρόσθετο στόχο να φανερωθεί η σύνδεση της Αρμονικής Ανάλυσης με την θεωρία πιθανοτήτων και Στοχαστικών Διαδικασιών.

Θα δώσουμε αυστηρά τον ορισμό των Μαρκοβιανών Αλυσίδων και απαραίτητες ιδιότητες αυτών με έμφαση στο θεωρητικό τους μέρος και τεχνικές που παραπέμπουν στο κεντρικό μέρος της εργασίας.

Ορισμός 1.1.1. *Ένας πραγματικός πίνακας $P=(p(x,y))_{x,y\in X}$ πάνω στο X καλείται στοχαστικός, αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) $p(x,y) \geq 0, \ \forall x,y \in X$

(ii) $\sum_{y\in X} p(x,y) = 1, \ \forall x \in X$.

Σημείωση 1.1.2. *Αν επιπλέον στον παραπάνω ορισμό συμπεριλάβουμε και την ιδιότητα* $\sum_{x\in X} p(x,y) = 1, \forall y \in X$. *Τότε ο πίνακας ονομάζεται διπλά στοχαστικός.*

Ορισμός 1.1.3. *Έστω* X *ένα σύνολο,* v *μια κατανομή πιθανότητας στο* X *και* $P = (p(x,y))_{x,y\in X}$ *στοχαστικός πίνακας στο* X. *Μια ομογενής Μαρκοβιανή Αλυσίδα με χώρο καταστάσεων* X, *αρχική κατανομή* v *και πίνακα μετάβασης* P, *είναι μια ακολουθία (πεπερασμένη) τυχαίων μεταβλητών* $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_n : Y \to X$, *όπου* (Y,μ) *είναι ένας πεπερασμένος χώρος μέτρου που ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα:*

$$\mu\{\xi_0 = x\} = v(x)$$

$$\mu\{\xi_{k+1} = x_{k+1} | \xi_0 = x, \xi_1 = x_1, ..., \xi_k = x_k\} = p(x_k, x_{k+1})$$

$\forall k \in \mathbb{Z}_n$ *και* $x_0, x_1, ..., x_n \in X$ *ώστε* $\mu\{\xi_0 = x, \xi_1 = x_1, ..., \xi_k = x_k\} > 0$.

Θεώρημα 1.1.4. ***(Ιδιότητα Markov)*** *Μια ακολουθία* $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_n : Y \to X$ *είναι Αλυσίδα Markov με αρχική κατανομή* v *και πίνακα μετάβασης* P, *αν και μόνο αν,* $\forall x_0, x_1, ..., x_n \in X$ *ισχύει*

$$\mu\{\xi_0 = x, \xi_1 = x_1, ..., \xi_n = x_n\} = v(x_0)p(x_0,x_1)p(x_1,x_2)\cdots p(x_{n-1},x_n).$$

Συγκεκριμένα,

$$\mu\{\xi_k = x\} = \sum_{x_0,x_1,...,x_{k-1}\in X} v(x_0)p(x_0,x_1)p(x_1,x_2)\cdots p(x_{n-1},x_n),$$

δηλαδή $\mu\{\xi_k = x\} = v^{(k)}(x)$, *όπου* $(v^{(k)})^\top = v^\top P^k$ *για* $k = 0,1,2,...,n$ *και*

$$\mu\{\xi_{k+1} = x_{k+1} | \xi_0 = x, \xi_1 = x_1, ..., \xi_k = x_k\} = \mu\{\xi_{k+1} = x_{k+1} | \xi_k = x_k\}.$$

Απόδειξη. Έστω $(\xi_i)_{i=0,1,...n}$ είναι Μαρκοβιανή Αλυσίδα, τότε από το Θεώρημα του *Bayes* έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mu\{\xi_n = x_n, \xi_j = x_j, j = 0,...,n-1\} &= \mu\{\xi_n = x_n | \xi_j = x_j, j = 0,...,n-1\}\cdot \\
\mu\{\xi_j = x_j, j = 0,...,n-1\} &= \\
&= p(x_{n-1},x_n)\mu\{\xi_j = x_j, j=0,...,n-1\} \\
&= \cdots \\
&= p(x_{n-1},x_n)\cdots p(x_0,x_1)\cdot v(x_0).
\end{aligned}$$

(1.2)

Από την άλλη μεριά αν έχουμε:

$$\mu\{\xi_0 = x_0, \xi_1 = x_1, ..., \xi_n = x_n\} = v(x_0)p(x_0,x_1)p(x_1,x_2)\cdots p(x_{n-1},x_n)$$

με $\mu\{\xi_0 = x_0\} = v(x_0)$ τότε, για όλα τα $n = 0,1,...,k-1$

$$\begin{aligned}
\mu\{\xi_n = x_n | \xi_j = x_j, j = 0,...,n-1\} &= \frac{\mu\{\xi_n = x_n, \xi_j = x_j, j = 0,...,n-1\}}{\mu\{\xi_j = x_j, j=0,...,n-1\}} \\
&= p(x_{n-1},x_n).
\end{aligned}$$

(1.4)

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

1.1α′ Σύγκλιση σε ισορροπία

Έστω $P = (p(x,y))_{x,y\in X}$ ένας στοχαστικός πίνακας. Μία στάσιμη κατανομή για τον P είναι ένα μέτρο πιθανότητας π στον X έτσι ώστε

$$\pi^\top = \pi^\top P$$

όπου, $\pi(y) = \sum_{x\in X} \pi(y)p(x,y), \ \forall y \in X.$

Θα λέμε ότι η Μαρκοβιανή Αλυσίδα είνα εργοδική, αν $\forall x, y \in X$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$p^{(n_0)}(x,y) > 0.$$

Θεώρημα 1.1.5. *Ένας στοχαστικός πίνακας P είναι εργοδικός, αν και μόνο αν, υπάρχει μια κατανομή πιθανότητας π στον X τέτοια ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)}(x,y) = \pi(y), \qquad \forall x, y \in X.$$

Με άλλα λόγια, τα παραπάνω όρια υπάρχουν, είναι ανεξάρτητα των x και δημιουργούν μια αυστηρή κατανομή πιθανότητας. Επιπλέον, αν P είναι εργοδικός, τότε η π είναι η μοναδική κατανομή για τον P.[4]

Πόρισμα 1.1.6. *Έστω P ένας εργοδικός στοχαστικός πίνακας και π μια στάσιμη κατανομή. Τότε υπάρχουν $A > 0, \ 0 < c < 1,$ και $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για όλα $n \geq n_1$,*

$$\max_{x,y\in X} |p^{(n)}(x,y) - \pi(y)| \leq A(1-c)^n.$$

[4]

1.1β′ Αντίστροφη Μαρκοβιανή Αλυσίδα

Ορισμός 1.1.7. *Έστω P ένας στοχαστικός πίνακας, λέμε ότι ο P είναι αντιστρέψιμος αν υπάρχει αυστηρή κατανομή πιθανότητας π στον X έτσι ώστε*

$$\pi(x)p(x,y) = \pi(y)p(y,x) \qquad \forall x, y \in X.$$

Σε μια τέτοια περίπτωση, θα λέμε ότι οι P και π είναι detailed balance.

Πρόταση 1.1.8. *Ένας στοχαστικός πίνακας $P = (p(x,y))_{x,y\in X}$ είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν, ισχύουν οι παρακάτων συνθήκες:*

(i) *αν $p(x,y) \neq 0$ τότε $p(y,x) \neq 0$,* $\qquad \forall x, y \in X.$

(ii) *$\forall n \in \mathbb{N}$ και για κάθε επιλογή από $x_0, x_1, ..., x_n \in X$ έχουμε:*

$$p(x_0,x_1)\cdots p(x_{n-1},x_n)p(x_n,x_0) = p(x_0,x_n)p(x_n,x_{n-1})\cdots p(x_1,x_0).$$

Απόδειξη. Από την συνθήκη της αντιστρεψιμότητας, συμπεριλαμβανομένης της υπόθεσης ότι $p(x,y) \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{p(y,x)}{p(x,y)} = \frac{\pi(x)}{\pi(y)}. \tag{1.5}$$

Αν ο P είναι αντιστρέψιμος και π αυστηρή κατανομή στον X τότε η (i) αποδεικνύεται άμεσα. Για να αποδείξουμε την (ii) από την (i) υποθέτουμε ότι $p(x_i, x_{i\pm1}) \neq 0\,, \ \forall i \in \mathbb{Z}_{n+1}$. Τότε,

$$p(x_0,x_1)\cdots p(x_{n-1},x_n)p(x_n,x_0)=p(x_0,x_n)p(x_n,x_{n-1})\cdots p(x_1,x_0)\Rightarrow$$

$$\tfrac{p(x_0,x_1)}{p(x_1,x_0)}\tfrac{p(x_1,x_2)}{p(x_2,x_1)}\cdots\tfrac{p(x_{n-1},x_n)}{p(x_n,x_{n-1})}\tfrac{p(x_n,x_0)}{p(x_0,x_n)}=1.$$

Επομένως, από την (1.5) έχουμε

$$\frac{\pi(x_1)}{\pi(x_0)}\frac{\pi(x_2)}{\pi(x_1)}\cdots\frac{\pi(x_n)}{\pi(x_{n-1})}\frac{\pi(x_0)}{\pi(x_n)}=1 \tag{1.6}$$

το οποίο ικανοποιείται τετριμμένα.

Αντίθετα, υποθέτουμε ότι ο P ικανοποιεί τις συνθήκες (i) και (ii). Θεώρούμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον X ώστε $x\sim y$ αν $x=y$ ή αν υπάρχει ακολουθία $x_0,x_1,...,x_n\in X$ έτσι ώστε $x_0=x,x_n=y$ και $p(x_i,x_{i+1})\neq 0\ ,\ \ \forall i\in\mathbb{Z}_n$.

Έστω $X=X^1\sqcup X^2\sqcup\cdots\sqcup X^N$ η διαμέριση που προκύπτει από την παραπάνω σχέση ισοδυναμίας.

Για $i\in\{1,2,...,N\}$ και δεδομένο $x_0^i\in X^i$ θέτουμε $X_0^i=\{x_0^i\}$,

$$X_1^i=\{x_1\in X^i\setminus X_0^i : p(x_0^i,x_1)\neq 0\}.$$

Γενικεύοντας παίρνουμε,

$$X_{n+1}^i=\{x_{n+1}\in X^i\setminus(X_0^i\sqcup X_1^i\sqcup\cdots\sqcup X_n^i) : \exists x_n\in X_n^i\ s.t\ p(x_{n+1},x_n)\neq 0\}.$$

Τότε, $X^i=X_0^i\sqcup X_0^i\sqcup\cdots\sqcup X_{N_i}^i$ για κάποιο $N_i\in\mathbb{N}$. Θέτουμε $\overline{\pi}(x_0^i)=1$,

$$\overline{\pi}(x_1)=\tfrac{p(x_0^i,x_1)}{p(x_1,x_0^i)}$$

$\forall x_1\in X_1^i$ και γενικότερα, $\forall x_n\in X_n^i,\ n\leq N_i$,

$$\overline{\pi}(x_n)=\tfrac{p(x_0^i,x_1)}{p(x_1,x_0^i)}\tfrac{p(x_1,x_2)}{p(x_2,x_1)}\cdots\tfrac{p(x_{n-2},x_{n-1})}{p(x_{n-1},x_{n-2})}\tfrac{p(x_{n-1},x_n)}{p(x_n,x_{n-1})}$$

όπου $x_j\in X_j^i$ και $x_j\sim x_{j+1},\ \ \forall j\in\mathbb{Z}_n$. Από την (1.6) η παραπάνω σχέση είναι καλά ορισμένη.

Θέτουμε $c=\sum\limits_{x\in X}\overline{\pi}(x)$ και ορίζουμε $\pi=\frac{\overline{\pi}}{c}$. Τότε το π είναι αυστηρό μέτρο πιθανότητας στον X. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι P και π είναι detailed balance.

Έστω $x,y\in X$. Αν $p(x,y)=0$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Διαφορετικά, υπάρχουν $0\geq i\leq N$ και $0\geq n\leq N-1$ ώστε $x,y\in X^i$ και την ανταλλαγή του x με το y μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x\in X_n^i,\ \ y\in X_{n+1}^i$. Τότε, αν $x_n=x,\ \ x_{n+1}=y,\ \ x_j\in X_j^i$ και $x_j\sim x_{j+1},\ \ \forall j\in\mathbb{Z}_n$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\pi(x)p(x,y) &= \frac{1}{c}\frac{p(x_0^i,x_1)}{p(x_1,x_0^i)}\frac{p(x_1,x_2)}{p(x_2,x_1)}\cdots\frac{p(x_{n-1},x_n)}{p(x_n,x_{n-1})}p(x_n,x_{n+1})\\
&= \frac{1}{c}\frac{p(x_0^i,x_1)}{p(x_1,x_0^i)}\frac{p(x_1,x_2)}{p(x_2,x_1)}\cdots\frac{p(x_{n-1},x_n)}{p(x_n,x_{n-1})}\frac{p(x_n,x_{n+1})}{p(x_{n+1},x_n)}p(x_{n+1},x_n)\\
&= \pi(y)p(y,x)
\end{aligned}$$

(1.8)

και άρα το ζητούμενο. □

Ορίζουμε ένα γραμμικό τελεστή $P : L(X) \to L(X)$ με

$$(Pf)(x) = \sum_{y \in X} p(x,y)f(y), \quad \forall f \in L(X)$$

και ένα εσωτερικό γινόμενο με

$$\langle f_1, f_2 \rangle_\pi = \sum_{x \in X} f_1(x)\overline{f_2(x)}\pi(x) \quad \forall f_1, f_2 \in L(X)$$

Πρόταση 1.1.9. *P και π είναι detailed balance, αν και μόνο αν, ο P είναι αυτοσυζυγής κάτω από το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$.*

Απόδειξη. Έστω $f_1, f_2 \in L(X)$. Υποθέτουμε οτι P και π είναι detailed balance , τότε έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\langle Pf_1, f_2 \rangle_\pi &= \sum_{x \in X} [\sum_{y \in X} p(x,y)f_1(y)]\overline{f_2(x)}\pi(x) \\
&= \sum_{x \in X} \sum_{y \in X} \pi(x)p(x,y)f_1(y)\overline{f_2(x)} \\
&= \sum_{x \in X} \sum_{y \in X} \pi(x)p(x,y)f_1(y)\overline{f_2(x)} \\
&= \sum_{x \in X} \sum_{y \in X} \pi(y)p(y,x)f_1(y)\overline{f_2(x)} \\
&= \langle f_1, Pf_2 \rangle_\pi.
\end{aligned}$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο P είναι αυτοσυζυγής. Τότε, εύκολα για κάθε $x, y \in X$ παίρνουμε

$$\pi(x)p(x,y) = \langle P\delta_y, \delta_x \rangle_\pi = \langle \delta_y, P\delta_x \rangle_\pi = \pi(y)p(x,y)$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο. □

Υποθέτουμε ότι P και π είναι detailed balance, τότε από τη παραπάνω πρόταση ο P είναι αυτοσυζυγής. Από την Γραμμική Άλγεβρα συμπεραίνουμε ότι ο P είναι διαγωνοποιήσιμός, δηλαδή υπάρχουν πραγματικές ιδιοτημές $\{\lambda_x : x \in X\}$ και πραγματικός πίνακας $(u(x,y))_{x,y \in X}$ τέτοια ώστε

$$\sum_{y \in X} p(x,y)u(y,z) = u(x,z)\lambda_z$$

$$\sum_{x \in X} u(x,y)u(x,z)\pi(x) = \delta_y(z).$$

Αν συμβολίσουμε με $\Delta = (\lambda_x \delta_x(y))_{x,y \in X}$ τον διαγώνιο πίνακα των ιδιοτιμών, με $D = (\pi(x)\delta_x(y))_{x,y \in X}$ τον διαγώνιο πίνακα των συντελεστών του π και $I = (\delta_x(y))_{x,y \in X}$ τον ταυτοτικό πίνακα, μπορούμε να γράψουμε τις παραπάνω σχέσεις ως εξής

$$PU = U\Delta$$

$$U^\top DU = I.$$

Πρόταση 1.1.10. $p^{(n)}(x,y) = \pi(y)\sum_{z\in X} u(x,z)\lambda_z^n u(y,z).$

Απόδειξη. Από την σχέση $PU = U\Delta$ και την $U^\top DU = I$ παίρνουμε ότι $P = U^\top D$.Επομένως,

$$P^2 = PP = U\Delta U^\top DU\Delta U^\top D = U\Delta I\Delta U^\top D = U\Delta^2 U^\top D.$$

Επαναλλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία n-φορές έχουμε την σχέση

$$P^n = U\Delta^n U^\top D$$

η οποία συμπίπτει με την $p^{(n)}(x,y) = \pi(y)\sum_{z\in X} u(x,z)\lambda_z^n u(y,z).$ □

Παράδειγμα 1.1.11. ***(Μαρκοβιανή Αλυσίδα με δύο καταστάσεις)*** *Υποθέτουμε ότι $X = \{0,1\}$. Ένας στοχαστικός πίνακας πάνω στο X θα πρέπει να είναι της μορφής*

$$P = \begin{bmatrix} p(0,0) & p(0,1) \\ p(1,0) & p(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

με $p,q \in [0,1]$. Αυτός ο πίνακας και η κατανομή $\pi(0) = \frac{q}{p+q}$,$\pi(1) = \frac{p}{p+q}$ είναι detailed balance. Επίσης, είναι εύκολο να δούμε ότι ο P είναι εργοδικός όταν και μόνο όταν $p,q > 0$, $\min p,q < 1$ ή ισοδύναμα $p,q > 0$ και $|1-p-q| < 1$.

Τώρα, έχουμε ότι

$$U = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\frac{p}{q}} \\ 1 & \sqrt{\frac{q}{p}} \end{bmatrix}$$

είναι ό πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του P , ο οποίος είναι ορθοκανονικός σύμφωνα με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f,g\rangle_\pi = \langle (f(0),f(1)),(g(0),g(1))\rangle_\pi = \tfrac{f(0)g(0)q+f(1)g(1)p}{p+q}.$$

Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι $\lambda_0 = 1,\quad \lambda_1 = 1-p-q$. Οπότε,

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{bmatrix},\quad D = \begin{bmatrix} \frac{q}{p+q} & 0 \\ 0 & \frac{p}{p+q} \end{bmatrix}$$

και από την σχέση $P^n = U\Delta^n U^\top D$ παίρνουμε ότι

$$P^n = \begin{bmatrix} \frac{q}{p+q} + \frac{q}{p+q}(1-p-q)^n & \frac{q}{p+q} - \frac{q}{p+q}(1-p-q)^n \\ \frac{q}{p+q} - \frac{q}{p+q}(1-p-q)^n & \frac{q}{p+q} + \frac{q}{p+q}(1-p-q)^n \end{bmatrix}$$

Πρόταση 1.1.12. *Ο 1 είναι πάντα ιδιότιμή του P. Επιπλέον, αν λ είναι ιδιοτιμή του P τότε $|\lambda| \leq 1$.*

Απόδειξη. Προφανώς $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$, άρα ο 1 είναι ιδιοτιμή του P. Τώρα, υποθέτουμε ότι $Pf = \lambda f$ με f μη τετριμμένη και επιλέχουμε $x \in X$ τέτοια ώστε $|f(x)| \geq |f(y)|, \quad \forall y \in X$. Τότε,

$$\begin{aligned} |\lambda f(x)| &= |\sum_{y\in X} p(x,y)f(y)| \leq \sum_{y\in X} p(x,y)|f(y)| \\ &\leq |f(x)| \sum_{y\in X} p(x,y) = |f(x)|. \end{aligned}$$

Επομένως, $|\lambda| \leq 1$. □

1.2 Πιθανοθεωρητικές Ανισότητες

Έστω μ και v δύο μέτρα πιθανότητας στον X, τότε ορίζουμε την συνολική απόσταση κύμανσής τους ως εξής:

$$\|\mu - v\|_{TV} = \max_{A\subseteq X} \big| \sum_{A\subseteq X} (\mu(x) - v(x)) \big| \equiv \max_{A\subseteq X} |\mu(A) - v(A)|.$$

Πρόταση 1.2.1. *Έστω ο χώρος $L^1(X)$ με την σύνηθη νόρμα $\|\mu - v\|_{L^1(X)} = \sum_x |\mu(x) - v(x)|$. Τότε,*

$$\|\mu - v\|_{TV} = \tfrac{1}{2}\|\mu - v\|_{L^1(X)}.$$

Απόδειξη. Έστω B ένα υποσύνολο του X τέτοιο ώστε

$$\|\mu - v\|_{L^1(X)} = \sum_{x\in B} |\mu(x) - v(x)|.$$

Είναι φανερό ότι η διαφορά μεταξύ των μέτρων μ και v δεν αλλάζει πρόσημο στο B και το αντίθετο πρόσημο το παίρνει στο συμπληρωματικό του.
Χωρίς βλάβη της γενικότητατς, υποθέτουμε ότι η διαφορά $\mu - v$ στο B είναι θετική. Τότε,

$$\begin{aligned} \sum_{x\in B} |\mu(x) - v(x)| &= \sum_{x\in B} (\mu(x) - v(x)) \\ &= 1 - \sum_{x\in B^c} \mu(x) - 1 + \sum_{x\in B^c} v(x) \\ &= \sum_{x\in B^c} (v(x) - \mu(x)) \\ &= \sum_{x\in B^c} |\mu(x) - v(x)|. \end{aligned}$$

Οπότε,

$$\|\mu - v\|_{L^1(X)} = \sum_{x\in B} |\mu(x) - v(x)| + \sum_{x\in B^c} |\mu(x) - v(x)| = 2\|\mu - v\|_{TV}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Θεωρούμε τον αντιστρέψιμο πίνακα P που είναι σε detailed balance με το αυστηρό μέτρο πιθανότητας π. Επίσης, $\forall x \in X$ ορίζουμε με $v_x^{(k)}(y) = p^{(k)}(x,y)$ την κατανομή πιθανότητας μετά από k-βήματα όταν η αρχική κατανομή είναι το μέτρο *Dirac* δ_x.

Εισάγουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f_1, f_2\rangle_{\frac{1}{\pi}} = \sum_{x\in X} f_1(x)\overline{f_2(x)}\frac{1}{\pi(x)}$$

με νόρμα $\|f\|^2_{\frac{1}{\pi}} = \langle f, f\rangle_{\frac{1}{\pi}}$. Τότε παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

Πρόταση 1.2.2. *Έστω P μια εργοδική αντιστρέψιμη Μαρκοβιανή Αλυσίδα η οποία είναι detailed balance με το μέτρο π. Για κάθε $x \in X$ έχουμε*

$$\|v_x^{(n)} - \pi\|^2_{\frac{1}{\pi}} = \sum_{z\in X, z\neq z_0} \lambda_z^{2n} u(x,z)^2.$$

Όπου $\{\lambda_x : x \in X\}$ είναι πραγματικές ιδιοτιμές και $(u(x,y))_{x,y\in X}$ πραγματικός πίνακας τέτοιος ώστε

$$\sum_{y\in X} p(x,y)u(y,z) = u(x,z)\lambda_z$$

όπως στην πρόταση 1.1.10.[6]

Πόρισμα 1.2.3. ***(Upper Bound Lemma)***

$$\|v_x^{(n)} - \pi\|^2_{TV} \leq \tfrac{1}{4} \sum_{z\in X, z\neq z_0} \lambda_z^{2n} u(x,z)^2.$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|v_x^{(n)} - \pi\|^2_{TV} &= \frac{1}{4}\|v_x^{(n)} - \pi\|^2_{L^1(X)} \\
&= \frac{1}{4}\{\sum_{y\in X}[|p^{(n)}(x,y) - \pi(y)|\frac{1}{\sqrt{\pi(y)}}]\sqrt{\pi(y)}\}^2 \\
&\leq \|v_x^{(n)} - \pi\|^2_{\frac{1}{\pi}} \sum_{y\in X}\pi(y) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{z\in X, z\neq z_0} \lambda_z^{2n} u(x,z)^2.
\end{aligned}$$

□

Στο προηγούμενο παράδειγμα της Αλυσίδας Markov με δύο καταστάσεις από το Πόρισμα Upper Bound Lemma παίρνουμε

$$\|v_0^{(n)} - \pi\|^2_{TV} \leq \tfrac{1}{4}(1-p-q)^{2n}\tfrac{p}{q}.$$

Επίσης, αν υπολογίσουμε στο παράδειγμα την παραπάνω νόρμα έχουμε

$$\|v_0^{(n)} - \pi\|_{TV}^2 = (\tfrac{p}{p+q})^2(1-p-q)^{2n}.$$

Άρα, σε αυτή την περίπτωση η ισότητα ικανοποιείται όταν $p = q$. Μπορούμε να δώσουμε ένα μεγαλύτερο φράγμα για την απόσταση κύμανσης μεταξύ της κατανομής μετά από n-βήματα και του μέτρου π χρησιμοποιώντας την ¨μέγιστη' ιδιοτιμή ως εξής:

Πόρισμα 1.2.4. *Έστω* $\lambda^* = \max\{|\lambda_z| : z \in X \setminus \{z_0\}\}$ *τότε*

$$\|v_x^{(n)} - \pi\|_{TV}^2 \leq \tfrac{1-\pi(x)}{4\pi(x)}|\lambda^*|^{2n}.$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|v_x^{(n)} - \pi\|_{TV}^2 &\leq \frac{1}{4}\sum_{z\in X, z\neq z_0} \lambda_z^{2n} u(x,z)^2 \\
&\leq \frac{1}{4}|\lambda^*|^{2n} \sum_{z\in X, z\neq z_0} u(x,z)^2 \\
&= \frac{1}{4}|\lambda^*|^{2n}(\frac{1}{\pi(x)} - u(x,z_0)^2) \\
&= \frac{1}{4}|\lambda^*|^{2n}(\frac{1}{\pi(x)} - 1) \\
&= \frac{1-\pi(x)}{4\pi(x)}|\lambda^*|^{2n}.
\end{aligned}$$

□

Έστω X ένα πεπερασμένο σύνολο, μ ένα μέτρο πιθανότητας στο X και f μια μετρήσιμη συνάρτηση στο X. Τότε, θα συμβολίζουμε με

$$E_\mu(f) = \textstyle\sum_{x\in X} f(x)\mu(x)$$

την μέση τιμή της f και με

$$var_\mu(f) = E_\mu((f - E_\mu(f))^2)$$

την διακύμανση της f.

Ολοκληρώνουμε αυτή την ενότητα με δύο διάσημες ανισότητες.

Πρόταση 1.2.5. ***(Ανισότητα Markov)***

$$\mu\{x \in X : |f(x)| \geq \alpha\} \leq \tfrac{E_\mu(|f|)}{\alpha}, \qquad \forall \alpha > 0.$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\frac{E_\mu(|f|)}{\alpha} &= \frac{1}{\alpha}\sum_{\substack{x\in X\\ |f(x)|\geq\alpha}} |f(x)|\mu(x) + \frac{1}{\alpha}\sum_{\substack{x\in X\\ |f(x)|<\alpha}} |f(x)|\mu(x) \\
&\geq \frac{1}{\alpha}\sum_{\substack{x\in X\\ |f(x)|\geq\alpha}} |f(x)|\mu(x) \\
&\geq \sum_{\substack{x\in X\\ |f(x)|\geq\alpha}} \mu(x) \\
&= \mu\{x \in X : |f(x)| \geq \alpha\}.
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 1.2.6. ***(Ανισότητα Chebyshev)***

$$\mu\{x \in X : |f(x) - E_\mu(f)| \geq \alpha\} \leq \tfrac{var_\mu(f)}{\alpha^2}, \qquad \forall \alpha > 0.$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \mu\{|f(x) - E_\mu(f)| \geq \alpha\} &= \mu\{x \in X : |f(x) - E_\mu(f)|^2 \geq \alpha^2\} \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} E_\mu(|f - E_\mu(f)|^2) \\ &= \frac{var_\mu(f)}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

□

1.3 Δράση Ομάδων

Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα με 1_G το ταυτοτικό στοιχείο και Ω ένα πεπερασμένο σύνολο.

Ορισμός 1.3.1. *Μια (αριστερή) δράση της G στο Ω είναι μια απεικόνιση*

$$G \times \Omega \longrightarrow \Omega$$

$$(g, \omega) \mapsto g \cdot \omega$$

ώστε να ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες

(i) $(gh) \cdot \omega = g \cdot (h \cdot \omega) \qquad , \forall g, h \in G \quad , \forall \omega \in \Omega$

(ii) $1_G \cdot \omega = \omega \qquad , \forall \omega \in \Omega.$

Θα συμβολίζουμε την δράση της G στο Ω με $G \rightsquigarrow \Omega$.

Παρατήρηση 1.3.2. *Αν η $(g, \omega) \mapsto g \cdot \omega$ είναι μια αριστερή δράση τότε η απεικόνιση $(g, \omega) \mapsto \omega g := g^{-1} \cdot \omega$ ορίζει μια δεξιά δράση αντίστροφα.*
Πράγματι, για g, h αυθαίρετα στοιχεία της G έχουμε

$$(\omega g)h = h^{-1} \cdot (\omega g) = h^{-1} \cdot g^{-1} \cdot \omega = (gh)^{-1} \cdot \omega = \omega(gh)$$

και

$$\omega 1_G = 1_G^{-1} \cdot \omega = 1_G \cdot \omega = \omega.$$

Σημείωση 1.3.3. *Αν H είναι υποομάδα της G, τότε η H δρα στην G. Η δράση αυτή ονομάζεται "Περιορισμός".*

Ορισμός 1.3.4. *Μια δράση της G στο Ω είναι μεταβατική αν $\forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega$, $\exists g \in G$ ώστε $g \cdot \omega_1 = \omega_2$. Αν η G δρα μεταβατικά στο Ω, τότε λέμε ότι ο Ω είναι ένας ομογενής G-χώρος.*

Ένα στοιχείο $\omega \in \Omega$ είναι σταθερό από το $g \in G$ αν $g \cdot \omega = \omega$.
Ορίζουμε, για $\omega \in \Omega$, με

$$Stab_G(\omega) = \{g \in G : g \cdot \omega = \omega\}$$

την Σταθεροποιούσα και με

$$Orb_G(\omega) = \{g \cdot \omega : g \in G\}$$

την G-τροχιά του ω.[6]

Λήμμα 1.3.5. *Αν ορίσουμε μια σχέση $\sim$ στο Ω με $\omega_1 \sim \omega_2$ όταν $\exists g \in G$ ώστε $\omega_1 = g \cdot \omega_2$. Τότε, αυτή η σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας και οι G-τροχιές είναι κλάσεις ισοδυναμίας στο Ω. Συγκεκριμένα, οι G-τροχιές του Ω δίνουν μια διαμερισή του.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η $\sim$ ικανοποιεί τις ιδιότητες της σχέσης ισοδυναμίας. Έχουμε,

(α) $\forall \omega \in \Omega$ ισχύει $\omega \sim \omega$, αφού $\omega = 1_G \cdot \omega$ από την δράση της G.

(β) Έστω $\omega_1 \sim \omega_2$, τότε $\exists g \in G$ ώστε

$$\begin{aligned} \omega_1 = g \cdot \omega_2 &\iff g^{-1}\omega_1 = g^{-1}g \cdot \omega_2 \\ &\iff \omega_1 \cdot g^{-1} = 1_G \cdot \omega_2 \\ &\iff \omega_2 = \omega_1 \cdot g^{-1}. \end{aligned}$$

Άρα, $\omega_2 \sim \omega_1$.

(γ) Έστω $\omega_1 \sim \omega_2$ και $\omega_2 \sim \omega_3$. Τότε, $\exists g_1, g_2 \in G$ ώστε $\omega_1 = g_1 \cdot \omega_2$ και $\omega_2 = g_2 \cdot \omega_3$. Επειδή η $(G, \cdot)$ είναι ομάδα, έχουμε ότι $g := g_1 \cdot g_2 \in G$, $\omega_1 = g \cdot \omega_3$ και έτσι $\omega_1 \sim \omega_3$.

Επομένως, έχουμε το ζητούμενο. □

Σχόλιο 1.3.6. *Μπορούμε να δώσουμε ένα ισοδύναμο ορισμό της μεταβατικής δράσης της G στο Ω ως:*

$$G \overset{\mu\epsilon\tau.}{\rightsquigarrow} \Omega \qquad \iff \qquad Orb_G(\omega) = \Omega \quad , \quad \forall \omega \in \Omega$$

Δηλαδή, υπάρχει μόνο μια τροχιά στο Ω.

Παράδειγμα 1.3.7. *Έστω G μια ομάδα και $H \leq G$ υποομάδα της G. Ορίζουμε με X το σύνολο των (αριστερών) συμπλόκων της H στην G,δηλαδή $X := G \backslash H = \{gH : g \in G\}$.*
Τότε, η G δρα (από αριστερά) στο X με

$$h \cdot gH = (hg)H \text{ , για } g, h \in G.$$

Πρόταση 1.3.8. *Έστω S_Ω η ομάδα όλων των μεταθέσεων του συνόλου Ω και G μια ομάδα. Τότε, κάθε δράση της G στο Ω επάγει ομομορφισμό $\sigma : G \to S_\Omega$ και αντίστροφα.*

Απόδειξη. Εφόσον η G δρα στο Ω έχουμε ότι $\forall g \in G, \sigma_g(\omega) = g \cdot \omega$ και $\sigma_g \in S_\Omega$.
Η σ_g είναι ισομορφισμός:
Για $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ με $g \cdot \omega_1 = g \cdot \omega_2$ παίρνουμε

$$g^{-1} \cdot (g \cdot \omega_1) = g^{-1} \cdot (g \cdot \omega_2) \Rightarrow 1_G \cdot \omega_1 = 1_G \cdot \omega_2 \Rightarrow \omega_1 = \omega_2$$

και

$$\omega = g^{-1} \cdot (g \cdot \omega) = \sigma_{g^{-1}} \circ \sigma_g(\omega).$$

Τώρα, $\forall g_1, g_2 \in G$ και $\omega \in \Omega$ έχουμε

$$\sigma_{g_1 g_2}(\omega) = (g_1 g_2) \cdot \omega = g_1 \cdot g_2 \cdot \omega = \sigma_{g_1}(\sigma_{g_2}(\omega)) = \sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2}(\omega).$$

Άρα, κάθε δράση της G στο Ω ορίζει έναν ομομορφισμό σ_g. Το αντίστροφο προκύπτει από το γεγονός ότι, αν έχουμε έναν ομομορφισμό $\sigma : G \to S_\Omega$, η δράση ορίζεται με $g \cdot \omega := \sigma_g(\omega)$. □

Το σύνολο όλων των στοιχείων της G που σταθεροποιούν τα στοιχεία του Ω είναι ο πυρήνας του ομομορφισμού σ_g. Δηλαδή,

$$Ker(\sigma_g) = \{g \in G : g \cdot \omega = \omega, \forall \omega \in \Omega\}$$

Όταν $Ker(\sigma_g) = \{1_G\}$, η δράση ονομάζεται ¨πιστή¨. Το οποίο θα ισχύει στην περίπτωση μας.

Σημείωση 1.3.9. *Δύο G-χώροι Ω και Ω' είναι ισόμορφοι αν υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση $\Phi : \Omega \to \Omega'$ ώστε $\Phi(g \cdot \omega) = g \cdot \Phi(\omega)$. Η Φ ονομάζεται G-αναλλοίωτη.*

Λήμμα 1.3.10. *Έστω Ω ένας G-χώρος και $K := Stab_G(\omega)$ για $\omega \in \Omega$. Τότε η απεικόνιση*

$$\Psi : G/K \to \Omega$$

$$gK \mapsto g \cdot \omega$$

είναι G-ισοδύναμη.
Επομένως, ο Ω και ο $G/Stab_G(\omega)$ είναι ισόμορφοι G-χώροι.

Απόδειξη. Εφόσον ο Ω είναι G-χώρος άμεσα η Ψ είναι επί.
Θα δείξουμε ότι είναι 1-1 και καλά ορισμένη.

Έχουμε ότι, για $\quad g_1 K = g_2 K \iff g_1^{-1} g_2 \in K \iff g_1^{-1} g_2 \cdot \omega = \omega \iff$

$$g_1^{-1} \cdot g_2 \cdot \omega = \omega \iff g_2 \cdot \omega = g_1 \cdot \omega \iff \Psi(g_1 K) = \Psi(g_2 K).$$

Άρα, η Ψ είναι ισόμορφη και ακόμα,

$$g_1 \cdot \Psi(g_2 K) = g_1 \cdot (g_2 \cdot \omega) = g_1 g_2 \cdot \omega = \Psi(g_1 g_2 K).$$

□

Πόρισμα 1.3.11. *Από την δράση της G στο Ω, έχουμε ότι*

$$|G| = |Stab_G(\omega)| \cdot |Orb_G(\omega)|$$

για κάθε $\omega \in \Omega$.

Απόδειξη. Αφού η G δρα μεταβατικά στο Ω που είναι ισόμορφο με τον $G/Stab_G(\omega)$ προκύπτει ότι, $|Orb_G(\omega)| = |G/Stab_G(\omega)|\,, \forall \omega \in \Omega$. Επομένως, από το θεώρημα $Lagrange$ παίρνουμε ότι $|G/Stab_G(\omega)| = |G|/|Stab_G(\omega)|, \forall \omega \in \Omega$ και έτσι έχουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 1.3.12. *Έστω $\phi : \Omega \to \Omega^{'}$ είναι ένας G-αναλλοίωτος ισομορφισμός του G-χώρου. Ισχύει ότι,*

$$Stab_G(\omega) = Stab_G(\phi(\omega)), \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

Απόδειξη. Για $\omega \in \Omega, g \in G$ απο τις ιδιότητες της ϕ παίρνουμε. Έστω $g \in Stab_G(\phi(\omega)$ τότε

$$g \cdot \phi(\omega) = \phi(\omega) \iff \phi(g \cdot \omega) = \phi(\omega) \Rightarrow$$

$$\phi^{-1} \circ \phi(g \cdot \omega) = \phi^{-1} \circ \phi(\omega) \Rightarrow g \cdot \omega = \omega \Rightarrow g \in Stab_G(\omega)$$

Άρα, $Stab_G(\phi(\omega)) \subseteq Stab_G(\omega)$.

Αν τώρα $g \in Stab_G(\omega)$ έχουμε ότι,

$$g \cdot \omega = \omega \Rightarrow \phi(g \cdot \omega) = \phi(\omega) \Rightarrow g \cdot \phi(\omega) = \phi(\omega) \Rightarrow g \in Stab_G(\phi(\omega).$$

Επομένως, $Stab_G(\omega) \subseteq Stab_G(\phi(\omega))$ και έτσι $Stab_G(\omega) = Stab_G(\phi(\omega))$. □

Λήμμα 1.3.13. *Έστω Ω ένας G-χώρος. Τότε $Stab_G(g{\cdot}\omega) = gStab_G(\omega)g^{-1}, \quad \forall g \in G, \forall \omega \in \Omega$.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} h \in Stab_G(g \cdot \omega) &\iff h \cdot (g \cdot \omega) = g \cdot \omega \\ &\iff g^{-1} \cdot [h \cdot (g \cdot \omega)] \equiv (g^{-1}hg) \cdot \omega = \omega \\ &\iff g^{-1}hg \in Stab_G(\omega). \end{aligned}$$

□

Πρόταση 1.3.14. *Έστω $H, K \leq G$ δύο υποομάδες της G. Τότε G/H και G/K είναι ισόμορφοι G-χώροι αν και μόνο $\exists g \in G$ έτσι ώστε $K = g^{-1}Hg$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\exists g \in G$ έτσι ώστε $K = g^{-1}Hg$. Θέτουμε $\Omega = G/H$ και $\omega = g^{-1}H$ τότε $K = Stab_G(\omega)$. Άρα, από το Λήμμα 1.2.10 παίρνουμε ότι Ω και $G/Stab_G(\omega)$ είναι ισόμορφοι G χώροι.
Από την άλλη μεριά, υποθέτουμε ότι $\phi : G/H \to G/K$ είναι ένας G-ισοδύναμος ισομορφισμός. Έστω $g \in G$ ώστε $\phi(H) = gK$. Από το Πόρισμα 1.2.12 $Stab_G(H) = Stab_G(gK)$ και επειδή $Stab_G(H) = H$, $Stab_G(gK) = gKg^{-1}$ παίρνουμε $H = g^{-1}Kg$. □

Παράδειγμα 1.3.15. ***(Δράση του Caley)***
Έστω G μια ομάδα. Για κάθε $g, h \in G$ ορίζουμε αριστερή και δεξιά δράση της G στον εαυτό της με $g \cdot h = gh$ και $g \cdot h = hg^{-1}$ αντίστοιχα. Προφανώς, οι δράσεις είναι μεταβατικές και πιστές. Σε αυτή την περίπτωση η G είναι ισόμορφη με μια υποομάδα της S_G.

Παράδειγμα 1.3.16. *Έστω G μια ομάδα και Ω_1, Ω_2 δύο σύνολα. Υποθέτουμε ότι η G δρα στο Ω_1. Τότε η G δρά στον χώρο $F(\Omega_1, \Omega_2) = \{f : \Omega_1 \to \Omega_2\}$ με*

$$[g \cdot f](\omega_1) = f(g^{-1} \cdot \omega_1), \qquad \forall f \in F(\Omega_1, \Omega_2),\ \forall \omega_1 \in \Omega_1,\ \forall g \in G.$$

Όταν η $\Omega_1 = G$ και $\Omega_2 = \mathbb{C}$ τότε θα συμβολίζουμε τον χώρο των συναρτήσεων $F(\Omega_1, \Omega_2)$ με $L(G)$.Αν έχουμε μια δράση Caley (αριστερή ή δεξια) τότε η αντίστοιχη δράση της G στον $L(G)$ θα ονομάζεται κανονική αναπαράσταση.
Επιπλέον, όταν η δράση της G στο Ω_1 είναι μεταβατική ώστε $\Omega_1 \equiv X = G/Stab_G(\omega_1)$ και $\Omega_2 = \mathbb{C}$ τότε ορίζουμε τον $F(\Omega_1, \Omega_2)$ με $L(X)$ και η αντίστοιχη δράση της G στον $L(X)$ καλείται μεταθετική αναπαράσταση.

Κεφάλαιο 2

Θεωρία Αναπαραστάσεων και μετασχηματισμός **Fourier**

2.1 Αναπαραστάσεις και αναγωγισιμότητα

Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και $V(\mathbb{C})$ ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{C}$. Ορίζουμε με $GL(V)$ την γραμμική ομάδα της V που αποτελείται από τις αντιστρέψιμες γραμμικές απεικονίσεις $A : V \to V$.

Ορισμός 2.1.1. *Μια αναπαράσταση της G στον V είναι μια δράση*

$$G \times V \longrightarrow V$$

$$(g, v) \mapsto p(g)v$$

ώστε $p(g) : V \to V$ είναι γραμμική και αντιστρέψιμη με $p(g_1 \cdot g_2) = p(g_1)p(g_2), \forall g_1, g_2 \in G$ και $p(1_G) = I_V$. Όπου 1_G είναι το ταυτοτικό στοιχείο της G και $I_V : V \to V$ είναι το τατυτοτικό στοιχείο της $GL(V)$.
Θα συμβολίζουμε μια αναπαράσταση με το ζεύγος (p, V).

Σημείωση 2.1.2. *Μπορούμε να δούμε τα παραπάνω ως ένα ομομορφισμό $p : G \longrightarrow GL(V)$.*

Αν n είναι η διάσταση του V, καθώς η $GL(V)$ είναι ισόμορφη με την $GL(n, \mathbb{C})$(την ομάδα των $n \times n$ αντιστρέψιμων πινάκων), μπορούμε να θεωρήσουμε την αναπαράσταση της G ως τον ομομορφισμό $p : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$.
Σε αυτή τη περίπτωση η διάσταση του διανυσματικού χώρου θα είναι ο βαθμός της αναπαράστασης και θα τον συμβολίζουμε με d_p.

Υποθέτουμε ότι (p, V) είναι μια αναπαράσταση της G και $W \leq V$ ένας G-αναλλοίωτος διανυσματικός υπόχωρος του V, δηλαδή $p(g)w \in W, \ \forall g \in G, \forall w \in W$ (Θα γράφουμε εν συντομία $p(G)W \leq W$). Τότε η απεικόνιση p_w που στέλνει τα $g \in G$ στα $p(g)|_W \in GL(W)$ θα την ονομάζουμε περιορισμό της p στον υπόχωρο W και το ζεύγος (p_w, W) υπο-αναπαράσταση της (p, V).

Μια πολύ σημαντική κλάση αναπαραστάσεων είναι αυτή των ανάγωγων.

Ορισμός 2.1.3. *Μια αναπαράσταση (p, V) μιας ομάδας G θα ονομάζεται ανάγωγη αν οι μόνοι G-αναλλοίωτοι υπόχωροι είναι οι τετριμμένοι. Δηλαδή, αν $W \leq V$ με $p(G)W \leq W$ τότε $W = 0$ ή $W = V$.*

Παρατήρηση 2.1.4. *Κάθε μονοδιάστατη αναπαράσταση είναι ανάγωγη.*

Πριν περάσουμε στην ενότητα των Μοναδιαίων Αναπαραστάσεων είναι απαραίτητο να σημειώσουμε την ισοδυναμία αναπαραστάσεων.

Σημείωση 2.1.5. *Έστω (p, V), (σ, W) δύο αναπαραστάσεις από την ίδια ομάδα G. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία ένα προς ένα γραμμική απεικόνιση $E : V \longrightarrow V$ ώστε $\sigma(g)E = Ep(g)$. Τότε, θα λέμε ότι οι δύο αναπαραστάσεις είναι ισοδύναμες και θα συμβολίζουμε με p σ. Προφανώς, οι δύο αναπαραστάσεις θα έχουν τον ίδιο βαθμό.*

2.2 Μοναδιαίες Αναπαραστάσεις

Έστω $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ και $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ δύο διανυσματικοί χώροι εφοδιασμένοι με εσωτερικά γινόμενα. Ο adjoint του γραμμικού τελεστή $T : V \longrightarrow W$ είναι ο γραμμικός τελεστής $T^* : W \longrightarrow V$ έτσι ώστε $\langle w, Tv\rangle_W = \langle T^*w, v\rangle_V$, $\forall v \in V$, $\forall w \in W$.

Ορισμός 2.2.1. *Ένας γραμμικός τελεστής $T : V \longrightarrow W$ θα ονομάζεται μοναδιαίος αν $T^*T = TT^* = I$ ή ισοδύναμα αν $\langle Tv_1, Tv_2\rangle_W = \langle v_1, v_2\rangle_V$, $\forall v_1, v_2 \in V$.*

Παρατήρηση 2.2.2. *Αν A είναι ένας μοναδιαίος πίνακας τότε $A^* = \bar{A}^t$ και επιπλέον το φάσμα του περιέχεται στον μοναδιαίο κύκλο. Δηλαδή, $\sigma_A \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.*
Πράγματι,

$$\langle Av, Av\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = |\lambda|^2\|v\|$$

και

$$\langle Av, Av\rangle = \langle v, v\rangle = \|v\|.$$

Άρα, $|\lambda| = 1$.

Ορισμός 2.2.3. *Μια αναπαράσταση (p, V) είναι μοναδιαία αν $\langle p(g)v_1, p(g)v_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$, $\forall g \in G$, $\forall v_1, v_2 \in V$. Ισοδύναμα, η p είναι μοναδιαία αν $p(G) \leq \mathcal{U}(V)$ είναι υποομάδα της ομάδας των μοναδιαίων τελεστών της V.*

Αν θεωρήσουμε μια αυθαίρετη αναπαράσταση (p, V) μπορούμε να την εφοδιάσουμε με ένα αυθαίρετο εσωτερικό γινόμενο ώστε η p να είναι μοναδιαία. Ορίζουμε για κάθε $v, w \in V$ το εσωτερικό γινόμενο ως:

$$(v, w) = \sum_{g\in G} \langle p(g)v, p(g)w\rangle \tag{2.1}$$

Πρόταση 2.2.4. *Η αναπαράσταση $(p, V, (\cdot,\cdot))$ είναι μοναδιαία και ισοδύναμη με την αναπαράσταση $(p, V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.*

Απόδειξη. Η ισοδυναμία προκύπτει άμεσα από το ταυτοτικό τελεστή $I_V : V \to V$. Αρκεί να δείξουμε ότι η p είναι μοναδιαία.
Πράγματι, $\forall v, w \in V, \forall h \in G$ έχουμε

$$\begin{aligned}(p(h)v, p(h)w) &= \sum_{g\in G} \langle p(g)p(h)v, p(g)p(h)w\rangle \\ &= \sum_{g\in G} \langle p(gh)v, p(gh)w\rangle \\ &= \sum_{k\in G} \langle p(k)v, p(k)w\rangle \\ &= (v, w).\end{aligned}$$

Άρα έχουμε το ζητούμενο. □

Σχόλιο 2.2.5. *Η παραπάνω πρόταση μας δίνει την δυνατότητα για κάθε αναπαράσταση της G να ορίσουμε μια ισοδύναμη μοναδιαία αναπαράσταση της.*

Θα επικεντρωθούμε στην κλάση των μοναδιαίων αναπαραστάσεων. Θεωρούμε ότι ο V είναι ένας πεπερασμένης διάστασης μιγαδικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και p μοναδιαία. Τότε κάτω από αυτές τις υποθέσεις έχουμε ότι $p(g^{-1}) = p(g)^{-1} = p(g)^*$, $\forall g \in G$.

Ορισμός 2.2.6. *Δύο αναπαραστάσεις (p, V) και (σ, W) είναι μοναδιαία ισοδύναμες αν υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $U : V \to W$ ώστε $\forall g \in G$, $\sigma(g)U = Up(g)$.*

Λήμμα 2.2.7. *Έστω (p, V) και (σ, W) δύο μοναδιαίες αναπαραστάσεις μιας πεπερασμένης ομάδας G. Αν $p \sim \sigma$ τότε είναι και μοναδιαία ισοδύναμοι.*

Απόδειξη. Αφού $p \sim \sigma$ υπάρχει αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση $T : V \to W$ όπου

$$p(g) = T^{-1}\sigma(g)T\ ,\ \forall g \in G. \tag{2.2}$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει μοναδιαίος $U : V \to W$ ώστε

$$p(g) = U^{-1}\sigma(g)U\ ,\ \forall g \in G.$$

Χρησιμοποιώντας την $p(g^{-1}) = p(g)^*$ και παίρνοντας τον adjoint στην σχέση (2.2) προκύπτει ότι

$$p(g) = T^*\sigma(g)(T^*)^{-1}$$

και

$$\sigma(g) = Tp(g)T^{-1}.$$

Έχουμε,

$$T^*Tp(g)(T^*T)^{-1} = T^*\sigma(g)(T^*)^{-1} = p(g) \Rightarrow$$

$$p(g)^{-1}(T^*T)p(g) = T^*T. \tag{2.3}$$

Έστω $T = U|T|$ η πολική ανάλυση της T, όπου $|T| : V$ η τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή T^*T και $U : V \to W$ μοναδιαίος(Θα δώσουμε και θα αποδείξουμε το θεώρημα της πολικής ανάλυσης προς στο τέλος της ενότητας).

Από την μοναδικότητα της τετραγωνικής ρίζας παίρνουμε

$$p(g)^{-1}|T|p(g) = |T| \tag{2.4}$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά και δεξιά κατάλληλα και έχοντας υπόψιν την αντιστρεψιμότητα της τετραγωνικής ρίζας οδηγούμαστε στη σχέση

$$\begin{aligned} Up(g)U^{-1} &= T|T|^{-1}p(g)|T|T^{-1} \\ &= Tp(g)T^{-1} \\ &= \sigma(g) \end{aligned}$$

η οποία ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Έστω τώρα ότι (p_i, W_i), $i = 1, ..., k$ είναι αναπαραστάσεις από κάποια ομάδα G και $V = W_1 \oplus ... \oplus W_k$. Τότε $p = p_1 \oplus ... \oplus p_k$ είναι το ευθύ άθροισμα πεπερασμένου αριθμού αναπαραστάσεων ώστε

$$p(g)v = p_1(g)w_1 + ... + p_k(g)w_k$$

για κάθε $v = w_1 + ... + w_k \in V$, $w_i \in W_i$ και $g \in G$.

Παρατήρηση 2.2.8. *Αν W είναι ένας G-αναλλοίωτος υπόχωρος του V κάτω από την αναπαράσταση p. Τότε, το ορθογώνιο συμπλήρωμα του W είναι επίσης G-αναλλοίωτος υπόχωρος του V και μάλιστα $V = W \oplus W^{\perp}$.*
Πράγματι, αν v ένα αυθαίρετο στοιχείο του $W^{\perp} = \{x \in V : \langle x, w\rangle = 0,\ \forall w \in W\}$ και $g \in G$ έχουμε ότι $\langle p(g)v, w\rangle = \langle v, p(g^{-1})w\rangle = 0,\ \forall w \in W$. Τώρα, από τον ορισμό του ευθύ αθροίσματος από πάνω για $p_1 = p_w$, $p_2 = p_{w^{\perp}}$ έχουμε ότι $p = p_1 \oplus p_2$ και η παρατήρηση είναι σωστή.

Λήμμα 2.2.9. *Κάθε αναπαράσταση της G είναι το ευθύ άθροισμα πεπερασμένου πλήθους ανάγωγων αναπαραστάσεων.*

Απόδειξη. Έστω (p, V) μια αναπαράσταση της G. Διακρίνουμε περιπτώσεις:
(1) Αν η (p, V) είναι ανάγωγη τότε δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε.
(2) Επίσης, αν ο $dim(V) = 1$ πάλι η απόδειξη είναι προφανής.
(3) Υποθέτουμε ότι η (p, V) είναι μη-ανάγωγη και $dim(V) > 1$. Έστω $(p_i, V_i), i = 1, 2, ..., n$ μια πεπερασμένη ακολουθία ανάγωγων G-αναλλοίωτων υπόχωρων του V. Έχουμε ότι $dim(V_i) < dim(V)$, $\forall i$ και $V^{'} := V_1 \oplus ... \oplus V_n \leq V$. Αν $dim(V^{'}) = dim(V)$ τότε έχουμε τελειώσει. Τέλος στη περίπτωση που $dim(V^{'}) < dim(V)$ επικαλούμαστε την Παρατήρηση 2.2.8, ορίζουμε το ορθογώνιο συμπλήρωμα του του $V^{'}$ $((V^{'})^{\perp})$ και παίρνουμε $V^{'} \oplus (V^{'})^{\perp} = V$, $p = p_{V'} \oplus p_{(V')^{\perp}}$.
Όπου, $p_{V'} = p_1 \oplus ... \oplus p_n$. □

Ορισμός 2.2.10. *Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα. Ορίζουμε με $\tilde{G}$ τον δυϊκό της G, το πλήρες σύνολο των ανάγωγων κατα ζεύγη μη-ισοδύναμων μοναδιαίων αναπαραστάσεων της G.*

Σημείωση 2.2.11. *Ένας γραμμικός τελεστής $T : V \to V$ είναι θετικός αν $\langle Tv, v\rangle > 0, \quad \forall v \in V,\ v \neq 0$.*

Πρόταση 2.2.12. *Έστω $(V(\mathbb{C}), \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ ένας διανυσματικός χώρος πάνω στους μιγαδικούς εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο. Ισχύει ότι:*

(i) *Κάθε θετικός τελεστής είναι αυτοσυζυγής.*

(ii) *Αν δύο αυτοσυζυγείς τελεστές A, B μετατίθενται ($AB = BA$), τότε υπάρχει ορθογώνια διάσπαση $V = \oplus_{i=1}^{m} W_i$ ώστε $AW_i = W_i = BW_i$, $\quad \forall i = 1, 2, ..., m$. Δηλαδή, δέχονται μια κοινή βάση ιδιοδιανυσμάτων.*

(iii) *αν T είναι θετικός τελεστής, τότε υπάρχει μοναδικός θετικός τελεστής S ώστε $S^2 = T$. Ο S καλείται τετραγωνική ρίζα του P.*

Απόδειξη. (i) Έστω T ένας θετικός τελεστής και $x, y \in V$, $z \in \mathbb{C}$. Έχουμε,

$$\langle T(x+zy), x+zy\rangle = \langle T(x), x\rangle + z\langle T(x), y\rangle + \bar{z}\langle T(y), x\rangle + |z|^2\langle T(y), y\rangle > 0 \Rightarrow$$

$$\langle T(x+zy), x+zy\rangle = \langle T(x), x\rangle + \bar{z}\langle T^*(x), y\rangle + z\langle T^*(y), x\rangle + |z|^2\langle T(y), y\rangle > 0$$

Άρα, $z\langle T(x), y\rangle + \bar{z}\langle T(y), x\rangle = \bar{z}\langle T^*(x), y\rangle + z\langle T^*(y), x\rangle$ και επειδή ο z είναι τυχαίος παίρουμε ότι $\langle T^*(x), y\rangle = \langle T(x), y\rangle$ ή $T^* = T$.

(ii) Έστω $x \in V$, $z \in \mathbb{C}$. Αν $Ax = zx$, τότε $A(Bx) = zBx = B(Ax)$. Άρα κάθε ιδιόχωρος του A είναι B-αναλλοίωτος.
Τώρα, έστω $W_i = \{x \in V : Bx = z_i x\}$, $i \in I$. $|I| < \infty$ και $z_i \neq z_j$, $i, j \in I$. Τότε για κάθε $x \in W_i$ και $y \in W_j$ έχουμε

$$z_i\langle x, y\rangle = \langle z_i x, y\rangle = \langle Bx, y\rangle \stackrel{selfadjoint}{=} \langle x, By\rangle = \langle x, z_j y\rangle = z_j\langle x, y\rangle.$$

Επομένως, $\langle x, y\rangle = 0$ και άρα $W_i \perp W_j$, $\forall i \neq j$.

Αν $W = \oplus_i W_i$ τότε ο $W^\perp$ είναι B-αναλλοίωτος. Υποθέτουμε ότι $W^\perp \neq \{0\}$ και $E := B|_{W^\perp} : W^\perp \to W^\perp$. Αν $x \in W^\perp \setminus \{0\}$ με $Ex = zx$, τότε $Bx = zx$ και το x θα ανήκει σε κάποιο ιδιοχώρο του B. Αυτό σήμαινει ότι το x θα είναι κάθετο στον $W^\perp$. Άρα $W^\perp = \{0\}$ και επειδή κάθε τελεστής σε μη-μηδενικό διανυσμάτικό χώρο πεπερασμένης διάστασης έχει ιδιοτημές παίρνουμε ότι $V = \oplus_{i=1}^{|I|} W_i$. Τέλος, αφού για κάθε $i \in I$ ο $B|_{W_i}$ γράφεται ως ένα πολλαπλάσιο του ταυτοτικού τελεστή έπεται ότι είναι διαγωνοποιήσιμος και άρα ο B είναι διαγωνοποιήσιμος.

(iii) Θεωρούμε ότι P_i είναι οι ορθογώνιες προβολές σε κάθε ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην z_i ιδιοτιμή. Αν $T = \sum_{i=1}^m z_i P_i$ τότε από την θετικότητα του τελεστή, $z_i > 0$, $\forall i$. Θέτουμε $S = \sum_{i=1}^m \sqrt{z_i} P_i$, τότε παίρνουμε ότι $S^2 = T$, ο S είναι θετικός και $ST = TS$. Άρα, από το (ii) έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 2.2.13. ***(Πολική Ανάλυση)*** *Κάθε αντιστρέψιμος γραμμικός τελεστής $A : V \to V$ μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως $A = UT$. Όπου, U είναι μοναδιαίος και T είναι θετικός.*

Απόδειξη. Έστω T η τετραγωνική ρίζα του τελεστή A^*A ώστε $T^2 = A^*A$ και θέτουμε $U = AT^{-1}$. Τότε,

$$UU^* = AT^{-2}A^* = AA^{-1}(A^*)^{-1}A^* = I.$$

Άρα, U μοναδιαίος και $A = UT$.
Τώρα, για την μοναδικότητα , αν $A = U_1T_1$ και $A = U_2T_2$ δύο πολικές αναλύσεις του A τότε ο $T_1T_2^{-1}$ είναι μοναδιαίος και έτσι $T_1^2 = T_2^2$.
Αφού η τετραγωνική ρίζα είναι μοναδική παίρνουμε ότι $T_1 = T_2$ και $U_1 = U_2$. □

2.2α′ Λήμμα του Schur

Έστω (p, V) και (σ, W) δύο αναπαραστάσεις από κάποια ομάδα G. Αν $L : V \to W$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός ώστε $Lp(g) = \sigma(g)L$, $\forall g \in G$ τότε αυτός θα ονομάζεται intertwiner. Το επόμενο Λήμμα συσχετίζει την έννοια της αναγωγιμότητας με την ύπαρξει intertwiners.

Λήμμα 2.2.14. ***(Schur)*** *Έστω (p, V) και (σ, W) δύο ανάγωγες αναπαραστάσεις μιας ομάδας G. Αν L είναι ένας intertwiner των p και σ, τότε είτε αυτός είναι ο μηδενικός είτε είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Αν L είναι ένας intertwiner, τότε ο πυρήνας του είναι p-αναλλοίωτος και η εικόνα του είναι σ-αναλλοίωτη. Όμως, οι αναπαραστάσεις (p, V) και (σ, W) είναι ανάγωγες. Οπότε, είτε $Ker(L) = V$ και $Im(L) = \{0\}$ είτε $Ker(L) = \{0\}$ και $Im(L) = W$. □

Πόρισμα 2.2.15. *Έστω (p, V) μια ανάγωγη αναπαράσταση από κάποια ομάδα G και L ένας intertwiner της p με τον εαυτό της. Τότε, ο L είναι ένα πολλαπλάσιο του ταυτοτικού τελεστή: $L \in \mathbb{C} \cdot I$.*

Απόδειξη. Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του L, ο τελεστής $(\lambda I - L)$ είναι επίσης intertwiner της p με τον εαυτό της. Επομένως, από το προηγούμενο Λήμμα θα είναι ή 0 ή θα είναι ισομορφισμός και άρα αντιστρέψιμος. Όμως από τον ορισμό της ιδιοτιμής ο $(\lambda I - L)$ δεν μπορεί να είναι αντιστρέψιμος, άρα θα είναι ο μηδενικός και $L = \lambda I$. □

Θεώρημα 2.2.16. *Έστω G μια αβελιανή πεπερασμένη ομάδα. Τότε κάθε πεπερασμένης διάστασης ανάγωγη μιγαδική αναπαράσταση της G είναι μονοδιάστατη.*

Απόδειξη. Αν (p, V) είναι μια ανάγωγη αναπαράσταση, τότε για $h \in G$ ορίζουμε $T_h \in GL(V)$ με $T_h = p(h)$. Επειδή η G είναι αβελιανή η T είναι ένας ομομορφισμός από τον V στον V. Πράγματι, για κάθε $g \in G$ παίρνουμε

$$T_h p(g) = p(h)p(g) = p(hg) = p(gh) = p(g)p(h) = p(g)T_h.$$

Επομένως, από την Πρόταση 2.2.15 T_h είναι κάποιος μιγαδικός μη- μηδενικός. Αφού η (p, V) είναι ανάγωγη τότε $dimV = 1$ και $T : V \to \mathbb{C}^{\times}$ ομομορφισμός. □

2.2β′ Πίνακες Συντελεστών

Έστω (p, V) να είναι μια μοναδιαία αναπαράσταση κάποιας πεπερασμένης ομάδας G. Για $v, w \in V$ θεωρούμε την συνάρτηση $u_{v,w}(g) = \langle p(g)w, v\rangle$, $g \in G$. Ο λόγος αυτής της ορολογίας προκύπτει από το γεγονός ότι, αν $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του V ο $p(g)$ είναι ένας πίνακας $n \times n$ στοιχείων που συμπίπτει με τον πίνακας $(u_{v_i,v_j}(g))_{i,j}$.

Σημείωση 2.2.17. *Κάθε μιγαδική συνάρτηση $u : G \to \mathbb{C}$ μπορεί να γραφτεί ως συντελεστής κάποιας αναπαράστασης p. Πράγματι,θεωρούμε ότι $V := L(G)$ είναι ο χώρος όλων των μιγαδικών συναρτήσεων εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο $\langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f_1\bar{f}_2$, $\forall f_1, f_2 \in L(G)$.Τότε έχουμε, $u(g) = \langle p(g)\delta_{1_G}, \bar{u}\rangle$ με δ_{1_G} να είναι η συνάρτηση Dirac στο μοναδιαίο της G και $[p(g)f](h) = f(gh), \forall g, h \in G$, $\forall f \in L(G)$.*

Λήμμα 2.2.18. *Έστω (p, V) και (σ, W) δύο ανάγωγες μη ισοδύναμες αναπαραστάσεις της G. Τότε όλοι οι συντελεστές της p είναι ορθογώνιοι με όλους τους συντελεστές της σ.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για $v_1, v_2 \in V,\ w_1, w_2 \in W$ οι συναρτήσεις $u_g = \langle p(g)v_1, v_2\rangle_V$ και $u_g^{'} = \langle \sigma(g)w_1, w_2\rangle_W$ είναι ορθογώνιες στον $L(G)$. Θεωρούμε των γραμμικό μετασχηματισμό $L : V \to W$ με $L_v = \langle v, v_2\rangle_V w_2, \quad \forall v \in V$. Τότε ο γραμμικός μετασχηματισμός $\tilde{L} : V \to W$ με

$$\tilde{L} = \textstyle\sum_{g\in G} \sigma(g^{-1})Lp(g)$$

ικανοποιεί την σχέση $\tilde{L}p(g) = \sigma(g)\tilde{L}\ \ ,\forall g \in G$ και άρα είναι intertwinning μεταξύ της p και της σ.
Τώρα, επειδή οι αναπαραστάσεις είναι ανάγωγες ο $\tilde{L}$ θα είναι οι αντιστρέψιμος ή θα είναι μηδέν. Όμως η p δεν είναι ισοδύναμη με την σ άρα, ο $\tilde{L} = 0$.
Επομένως,

$$\begin{aligned} 0 = \langle \tilde{L}v_1, w_1\rangle_W &= \textstyle\sum_{g\in G} \langle Lp(g)v_1, \sigma(g)w_1\rangle_W \\ &= \textstyle\sum_{g\in G} \langle p(g)v_1, v_2\rangle_V \cdot \langle w_2, \sigma(g)w_1\rangle_W \\ &= \textstyle\sum_{g\in G} u(g)u^{'}\bar{(}g) = \langle u, u^{'}\rangle_{L(G)} \qquad . \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 2.2.19. *Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα τότε, υπάρχει πεπερασμένο πλήθος μη-ισοδύναμών κατα ζεύγη μοναδιαίων ανάγωγων αναπαραστάσεων. Δηλαδή, $|\hat{G}| < \infty$.[4]*

Έστω (p, V) μια ανάγωγη αναπαράσταση και $\{v_1, ..., v_d\}$ μια ορθογώνια βάση του V. Τότε οι συντελεστές $u_{ij}(g) = \langle p(g)v_j, v_i\rangle$ είναι ανα δύο ορθογώνιοι. Συγκεκριμένα

Λήμμα 2.2.20. $\langle u_{ij}, u_{kh}\rangle_{L(G)} = \frac{|G|}{d}\delta_{ik}\delta_{jh}$.

Απόδειξη. Για σταθερούς δείκτες i, k θεωρούμε τον τελεστή $L_{ik} : V \to V$ με $L_{ik} = \langle v, v_i\rangle_V v_k$ και παρατηρούμε ότι $tr(L_{ik}) = \delta_{ik}$, όπου $tr(L_{ik})$ το ίχνος του πίνακα L_{ik}. Ορίζουμε τον τελεστή $\tilde{L}_{ik} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} p(g^{-1})L_{ik}p(g)$ για τον οποίο ισχύει ότι $p(g)\tilde{L}_{ik} = \tilde{L}_{ik}p(g)$. Αφού η p είναι ανάγωγη τότε πρέπει $\tilde{L}_{ik} = \alpha I$ για $\alpha \in \mathbb{C}$. Επίσης, $tr(\tilde{L}_{ik}) = tr(_{ik}) = \delta_{ik}$ και $tr(\tilde{L}_{ik}) = \alpha d$ άρα, $\alpha = \frac{1}{d}\delta_{ik}$.
Τώρα,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{L}_{ik}v_j, v_h\rangle_V &= \tfrac{1}{|G|}\textstyle\sum_{g\in G} \langle L_{ik}p(g)v_j, p(g)v_h\rangle_V \\ &= \tfrac{1}{|G|}\textstyle\sum_{g\in G} \langle p(g)v_j, v_i\rangle_V \cdot \langle v_k, p(g)v_h\rangle_V \\ &= \tfrac{1}{|G|}\textstyle\sum_{g\in G} \langle u_{ij}, v_{kh}\rangle_V \end{aligned}$$

και $\langle \tilde{L}_{ik}v_j, v_h\rangle_V = \langle \frac{1}{d}\delta_{ik}Iv_j, v_h\rangle_V = \frac{1}{d}\delta_{ik}\delta_{jh}$. Άρα έχουμε το ζητούμενο.

□

Δίνουμε κάποιες επιπλέον ιδιότητες για τους πίνακες συντελεστών μιας μοναδιαίας αναπαράστασης.

Λήμμα 2.2.21. *Όπως στο προηγούμενο Λήμμα χωρίς την υπόθεση της αναγωγιμότητας , $\forall g, g_1, g_2 \in G,\ 1 < i, g, k \leq d$ έχουμε:*

(i) $u_{ij}(g^{-1}) = \overline{u_{ji}(g)}$

(ii) $u_{ij}(g_1 g_2) = \sum_{h=1}^{d} u_{ih}(g_1) u_{hj}(g_2)$

(iii) $\sum_{j=1}^{d} u_{ji}(g)\overline{u_{jk}(g)} = \delta_{ik}$ *και* $\sum_{i=1}^{d} u_{ji}(g)\overline{u_{ki}(g)} = \delta_{jk}$

Απόδειξη. (i) Έχουμε άμεσα $\langle p(g^{-1})v_j, v_i\rangle = \overline{\langle v_i, p(g^{-1})v_j\rangle} = \overline{\langle p(g)v_i, v_j\rangle}$.

(ii) Κάθε $x \in V$ μπορεί να γραφεί ως $x = \sum_{i=1}^{d} {}_i\langle x, v_i\rangle$, οπότε $\forall g \in G$ γράφουμε

$$p(g)v_j = \sum_{h=1}^{d} v_h u_{hj}(g).$$

Έτσι $\sum_{h=1}^{d} v_h u_{hj}(g_1 g_2) = p(g_1 g_2)v_j = \sum_{h=1}^{d} p(g_1) v_h u_{hj}(g_2)$ και παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με το v_i προκύπτει η ζητούμενη ισότητα.

(iii) Αφού η $p(g)$ είναι μοναδιαία έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{d} u_{ji}(g)\overline{u_{jk}(g)} &= \langle \sum_{j=1}^{d} v_j u_{ji}(g), \sum_{h=1}^{d} v_h u_{hk}(g)\rangle \\
&= \langle p(g)v_i, p(g)v_k\rangle \\
&= \langle v_i, v_k\rangle \\
&= \delta_{ik}.
\end{aligned}$$

□

2.3 Χαρακτήρες

Σε κάθε κλάση ισοδυναμίας ανάγωγων αναπαραστάσεων μπορούμε να συσχετίσουμε μια συνάρτηση, η οποία ονομάζεται χαρακτήρας της αναπαράστασης και ορίζεται με $\chi_p(g) = tr(p(g))$.Αν V είναι ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος πάνω στους μιγαδικούς και $End(V)$ ο χώρος όλων των τελεστών από τον V στον V τότε το ίχνος είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση $tr : End(V) \to \mathbb{C}$ που ικανοποιεί ότι $tr(ST) = tr(TS),\ \forall T, S \in End(V)$ και $tr(I_V) = dim(V)$.

Στην επόμενη πρόταση δίνουμε βασικές ιδιότητες του ίχνους που θα επικαλεστούμε στην συνέχεια.

Πρόταση 2.3.1. *Έστω V είναι ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος πάνω στους μιγαδικούς εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$.*

(i) *Αν $v = \{v_1, ...v_d\}$ μια ορθοκανονική βάση του V τότε, για $T \in End(V)$ έχουμε*

$$tr(T) = \sum_{i=1}^{d} \langle Tv_i, v_i \rangle_V.$$

(ii) *Αν* $A \in GL(V)$ *και* $T \in End(V)$ *ισχύει ότι* $tr(T) = tr(A^{-1}TA)$. *(Κεντρική Ιδιότητα)*

(iii) *Έστω* $\lambda_1, ..., \lambda_d$ *οι ιδιοτιμές του τελεστή* $T \in End(V)$. *Τότε,* $tr(T) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i$.

(iv) *Σύμφωνα με το συμβολισμό του* (i) *έχουμε*

$$tr(TS) = \sum_{j,i=1}^{d} \langle Tv_j, v_i \rangle_V \langle Sv_i, v_j \rangle_V$$

$\forall T, S \in End(V)$.

Από το (ii) της προηγούμενης πρότασης και σύμφωνα με την υποενότητα 2.2β έχουμε $tr(p(g)) = \sum_{j=1}^{n} u_{jj}(g)$ και η συνάρτηση χ_p δεν εξαρτάται από συγκεκριμένη επιλογή της ορθοκανονικής βάσης ούτε από κάποιο συκεκριμένο στοιχείο p της κλάσης ισοδυναμίας.

Παρατηρούμε ότι, αν p είναι μονοδιάστατη αναπαράσταση τότε $\chi_p = p$.

Επίσης, είναι δυνατό να ορίσουμε χαρακτήρα για μη-ανάγωγη αναπαράσταση. Αν (p, V) είναι μονοδιαία αναπαράσταση έχουμε ότι $\chi_p(g) = tr(p(g))$ για κάθε $g \in G$.

Πρόταση 2.3.2. *Έστω* χ_p *ο χαρακτήρας της αναπαράστασης* (p, V) *από την πεπερασμένη ομάδα* G. *Τότε για όλα τα* s, t *στην* G *έχουμε*

(i) $\chi_p(\mathbf{1}_G) = dim(V)$.

(ii) $\chi_p(s^{-1}) = \overline{\chi_p(s)}$.

(iii) $\chi_p(t^{-1}st) = \chi_p(s)$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι

(i) $\chi_p(\mathbf{1}_G) = tr(p(\mathbf{1}_G)) = tr(I) = dim(V)$.

(ii) $\chi_p(s^{-1}) = tr(p(s^{-1})) = tr(p(s)^*) = \overline{\chi_p(s)}$.

(iii) Προκύπτει άμεσα από την Κεντρική Ιδιότητα του ίχνους.

□

Παράδειγμα 2.3.3. *Αν* G *είναι μια πεπερασμένη ομάδα με* $|G| = n$ *και* p *μια* G*-αναπαράσταση τότε οι ιδιοτιμές της* $p(g)$, $\forall g \in G$ *είναι οι* n*-οστες ρίζες της μονάδας.*

Πράγματι,

αν s *τυχαίο στοιχείο της* G *θα ισχύει ότι* $s^n = \mathbf{1}_G$. *Επομένως,*

$$p(s)^n = p(s^n) = p(\mathbf{1}_G) = I$$

το οποίο μας οδηγεί στο ζητούμενο.

Όπως είδαμε σε προηγούμενη ενότητα όλοι οι συντελεστές δύο ανάγωγων μη-ισοδύναμων αναπαραστάσεων είναι κάθετοι μεταξύ τους, το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι χαρακτήρες δύο μη-ισοδύναμων αναπαραστάσεων είναι κάθετοι στον $L(G)$. Επίσης, είδαμε ότι η νόρμα των u_{jj} είναι ίση με $\frac{|G|}{d}$ και άρα, η αντίστοιχη νόρμα των χαρακτήρων θα ισούται με $|G|$. Στην επόμενη πρόταση συνοψίζονται τα αποτελέσματα που περιγράψαμε.

Πρόταση 2.3.4. *Έστω p και σ δύο ανάγωγος αναπαραστάσεις της ομάδα G.*

(i) *Αν p και σ είναι μη-ισοδύναμες τότε $\langle \chi_p, \chi_\sigma \rangle = 0$.*

(ii) $\langle \chi_p, \chi_p \rangle = |G|$.

Πρόταση 2.3.5. *Έστω p και σ δύο ανάγωγος αναπαραστάσεις της ομάδα G. Υποθέτουμε ότι η p είναι το ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων ,$p = p_1 \oplus \cdots \oplus p_k$ και σ ανάγωγη. Αν $m_\sigma = |\{j : p_j \sim \sigma\}|$ τότε*

$$m_\sigma = \frac{1}{|G|} \langle \chi_p, \chi_\sigma \rangle$$

.

Απόδειξη. Από τη διάσπαση της p παίρνουμε ότι ο χαρακτήρας της είναι το άθροισμα των χαρακτήρων των j συνιστωσών της. Δηλαδή, $\chi_p = \sum_{j=1}^{k} \chi_{p_j}$.
Επομένως, δοθείσης της ανάγωγης αναπαράστασης σ το εσωτερικό γινόμενο της p με την σ είναι διάφορο του μηδενός όταν και μόνο όταν η δεύτερη είναι υπο-αναπαράσταση της πρώτης, το οποίο είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι για ένα πλήθος των j συνιστωσών θα έχουμε, $\sigma = p_j$. □

Ο αριθμός m_σ καλείται πολλαπλότητα της σ ως υπο-αναπαράσταση της p. Προφανώς, αν η σ δεν περιέχεται στην p, $m_\sigma = 0$.

Πόρισμα 2.3.6. *Έστω p και σ δύο ανάγωγος αναπαραστάσεις της ομάδα G. Τότε,*

$$p = \bigoplus_{\sigma \in \tilde{G}} m_\sigma \sigma$$

όπου $m_\sigma \sigma = \sigma \oplus \sigma \oplus \cdots \oplus \sigma$ και

$$\chi_p = \sum_{\sigma \in \tilde{G}} m_\sigma \sigma$$

.

Πόρισμα 2.3.7. *Έστω p και σ δύο ανάγωγες αναπαραστάσεις της ομάδα G. Υποθέτουμε ότι αυτές διασπώνται ως $p = \oplus_{i \in I} m_i p_i$ και $\sigma = \oplus_{j \in J} n_j p_j$, όπου τα p_i είναι ανάγωγα με m_i και n_j οι αντίστοιχες πολλαπλότητες. Για το σύνολο των κοινών ανάγωγων αναπαραστάσεων $I \cap J$ έχουμε*

$$\frac{1}{|G|} \langle \chi_p, \chi_\sigma \rangle = \sum_{i \in I \cap J} m_i n_i$$

.

Πόρισμα 2.3.8. *Μια αναπαράσταση p μιας ομάδας G είναι ανάγωγη αν και μόνο αν $\langle \chi_p, \chi_p \rangle = |G|$.*

Πόρισμα 2.3.9. *Δύο αναπαράστασεις p μιας ομάδας G είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν $\chi_p = \chi_\sigma$.*

Θεώρημα 2.3.10. ***(Peter-Weyl)*** *Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και $(\lambda, L(G))$ η αριστερή κανονική αναπαράσταση.*

(i) *Κάθε ανάγωγη αναπαράσταση (p, V_p), $\;p \in \tilde{G}$ εμφανίζεται στο διαχωρισμό της λ με πολλαπλότητα ίση με την διάσταση d_p.*

(ii) *Αν u_{ij}^p ο πίνακας συντελεστών της $p \in \tilde{G}$ σε σχέση με μια ορθοκανονική βάση, τότε οι συναρτήσεις*

$$\left\{ \sqrt{\frac{d_p}{|G|}} u_{ij}^p \ : \ i,j = 1,...,d_p, \ \ g \in \tilde{G} \right\}$$

αποτελούνα ένα ορθοκανονικό σύστημα του $L(G)$.

(iii) $|G| = \sum\limits_{g \in \tilde{G}} d_p^2$ *και* $L(G) = \bigoplus\limits_{g \in \tilde{G}} d_p V_p$.

Απόδειξη. Ορίζουμε με

$$\lambda = \bigoplus_{g \in \tilde{G}} m_p p$$

τη διάσπαση της λ σε ανάγωγες, όπου οι συντελεστές m_p είναι η πολλαπλότητα της λ σε σχέση με την αντίστοιχη υπο-αναπαράσταση p.

Τώρα, από το γεγονός ότι τα μέτρα Dirac $(\delta_g)_{g \in G}$ αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύστημα στον $L(G)$ άμεσα παίρνουμε ότι $\chi_\lambda(g) = 0$ αν $g \neq 1_G$, $\chi_\lambda(1_G) = 1$, αφού $\lambda(h)\delta_g = \delta_{hg}$.

Από την άλλη μεριά, αν $p \in \tilde{G}$ από την προηγούμενη πρόταση έχουμε $m_p = \langle \chi_\lambda, \chi_p \rangle = \chi_p(1_G)$. Άρα, $m_p = d_p$ και $|G| \equiv dim(L(G)) = \sum_{g \in \tilde{G}} m_p d_p = \sum\limits_{g \in \tilde{G}} d_p^2$.
Αυτό μπορεί να προκύψει και από την σχέση

$$\chi_\lambda(1_G) = |G| = \sum_{g \in \tilde{G}} m_p \chi_p(1_G)$$

.

Τέλος, στην ενότητα των Πινάκων Συντελεστών είδαμε ότι οι συναρτήσεις $\sqrt{\frac{d_p}{|G|}} u_{ij}^p \ : \ i,j = 1,...,d_p, \ \ g \in \tilde{G}$ αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύστημα στον $L(G)$. Αυτό το σύστημα είναι πλήρες. Πράγματι, κάθως $\sum\limits_{g \in \tilde{G}} d_p^2 = |G|$ έχουμε ότι

$$\left| \left\{ \sqrt{\frac{d_p}{|G|}} u_{ij}^p \ : \ i,j = 1,...,d_p, \ \ g \in \tilde{G} \right\} \right| = |G|$$

.
Εφόσον η τελευταία σχέση ισούται με την διάσταση του $L(G)$, έχουμε τελειώσει.
$\square$

Παράδειγμα 2.3.11. *Έστω $C_n =< \alpha >$ η κυκλική ομάδα. Θέτουμε $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ και παίρνουμε την μοναδιάστατη αναπαράσταση της C_n, $(p_k, \mathbb{C})$ με $p_k(a^h) = \omega^{kh}$. Τότε,*

$$\tilde{C_n} = \{p_k \ : \ k = 0, 1, ..., n-1\}$$

.

Πράγματι, αφού ο χαρακτήρας μίας μοναδιάστατης αναπαράστασης είναι ο ίδιος της ο εαυτός έχουμε

$$\langle \chi_{p_k}, \chi_{p_h} \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i(k-h)j}{n}} = \begin{cases} n & \alpha\nu \quad k = h \\ 0 & \alpha\nu \quad k \neq h \end{cases}$$

.

Άρα από τα αμέσως προηγούμενα πορίσματα και το (iii) του θεωρήματος Peter-Weyl έχουμε το ζητούμενο.

2.4 Συνέλιξη και Μετασχηματισμός Fourier

Ορισμός 2.4.1. *Έστω P και Q δύο μιγαδικές συναρτήσεις πάνω στην ομάδα G. Τότε η συνέλιξη της P με την Q ορίζεται από τη σχέση*

$$[P \star Q](g) = \sum_{h \in G} P(gh^{-1})Q(h)$$

.

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$[P \star Q](g) = \sum_{h \in G} P(h)Q(h^{-1}g) = \sum_{h,k \in G, \ kh=g} P(k)Q(h)$$

.

Παρατήρηση 2.4.2. *(α)Η σείρα στην συνέλιξη έχει σημασία διότι δεν ισχύει εν γένει ότι $P \star Q = Q \star P$. (β) Η σειρά στο γινόμενο της συνέλιξης σταματά να έχει σημασία όταν η ομάδα είναι αβελιανή.*
Για να δώσουμε ένα αντιπαράδειγμα για το (α) και ένα παράδειγμα για το (β), θεωρούμε μιά πεπερασμένη ομάδα G και δύο αυθαίρετα στοιχεία της k, h. Ακόμα θεωρούμε το Dirac μέτρο πάνω στη G, τότε

$$\delta_k \star \delta_h = \delta_{kh} \qquad \text{και} \qquad \delta_h \star \delta_k = \delta_{hk}.$$

Επομένως, οι δύο σχέσεις είναι ίσες όταν $kh = hk$.

Ορισμός 2.4.3. *Μια άλγεβρα πάνω σε ένα σώμα $\mathbb{F}$, είναι ένας διανυσματικός χώρος V εφοδιασμένος με γινόμενο ώστε να είναι δακτύλιος με την πρόσθεση και το γινόμενο με τον βαθμωτο πολλαπλασιασμό να ικανοποιούν την συνθήκη*

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

$\forall \lambda \in \mathbb{F}$ *και* $\forall A, B \in V$.

Μια άλγεβρα λέγεται μεταθετική (ή αβελιανή) αν είναι μεταθετική ως δακτύλιος, δηλαδή $AB = BA$ για όλα τα $A, B \in V$.

Λήμμα 2.4.4. *Ο χώρος $L(G)$ των μιγαδικών συναρτήσεων που ορίζονται στην ομάδα G, εφοδιασμένος με γινόμενο την συνέλιξη είναι άλγεβρα πάνω στους μιγαδικούς αριθμούς. Δηλαδή, ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) *Ο $L(G)$ με την σύνηθη πρόσθεση συναρτήσεων και το σύνηθες βαθμωτο πολλαπλασιασμό είναι διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{C}$.*

(ii) *Ισχύει ότι $(P + Q) \star R = P \star R + Q \star R$ και $R \star (P + Q) = R \star P + R \star Q$.*

(iii) *Το δ_{1_G} είναι το μοναδιαίο στοιχείο του $L(G)$ σε σχέση με το γινόμενο συνέλιξη. Δηλαδή, $P \star \delta_{1_G} = P = \delta_{1_G} \star P$.*

(iv) *Το γινόμενο συνέλιξη είναι προσεταιριστικό : $(P \star Q) \star R = P \star (Q \star R)$.*

Απόδειξη. Οι συνθήκες (i) και (ii) προκύπτουν άμεσα από τους ορισμούς διανυσματικού χώρου και συνέλιξης.
(iii) Έχουμε ότι

$$[P \star \delta_{1_G}](g) = \sum_{h \in G} P(gh^{-1})\delta_{1_G}(h) = P(g)$$

και

$$[\delta_{1_G} \star P](g) \sum_{h \in G} \delta_{1_G}(h)P(h^{-1}g) = P(g).$$

(iv) Έστω $P, Q, R \in L(G)$, τότε

$$\begin{aligned}
[P \star (Q \star R)](g) &= \sum_{h \in G} P(gh^{-1})[Q \star R](h) \\
&= \sum_{t \in G} \sum_{h \in G} P(gh^{-1})Q(ht^{-1})R(t) \quad (h = mt) \\
&= \sum_{t \in G} \sum_{h \in G} P(gt^{-1}m^{-1})Q(m)R(t) \\
&= \sum_{t \in G} [P \star Q](gt^{-1)R(t)} \\
&= [(P \star Q) \star R](g).
\end{aligned}$$

□

Το Κέντρο της $L(G)$ είναι μία υπό-άλγεβρα της, η οποία περιέχει όλες τις μιγαδικές συναρτήσεις $P \in L(G)$ που μετατίθονται με κάθε άλλο στοιχείο της $L(G)$. Δηλαδή, $P \star Q = Q \star P, \qquad \forall Q \in L(G)$. Τα στοιχεία αυτά ονομάζονται κεντρικά.

Λήμμα 2.4.5. *Μια συνάρτηση $P \in L(G)$ είναι κεντρική αν και μόνο αν $P(\alpha^{-1}t\alpha) = P(t), \qquad \forall \alpha, t \in G$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $P(\alpha^{-1}t\alpha) = P(t), \qquad \forall \alpha, t \in G$ τότε

$$\begin{aligned}
[P \star Q](g) &= \sum_{h \in G} P(h)Q(h^{-1}g) && = \\
&= \sum_{h \in G} P(\alpha^{-1}h\alpha)Q(h^{-1}g) && (gh^{-1} = \alpha) \\
&= \sum_{\alpha \in G} P(\alpha^{-1}g\alpha^{-1}\alpha)Q(\alpha) \\
&= \sum_{\alpha \in G} P(\alpha^{-1}g)Q(\alpha) \\
&= [Q \star P](g).
\end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά αν P είναι κεντρική θα ισχύει ότι

$$\sum_{h \in G} P(h)Q(gh^{-1}) = \sum_{h \in G} P(gh^{-1})Q(h), \qquad \forall Q \in L(G), \forall g \in G$$

. Επομένως, θέτουμε $g = t\alpha$ και παίρνουμε

$$\sum_{h \in G} P(h)Q(t\alpha h^{-1}) = \sum_{h \in G} P(t\alpha h^{-1})Q(h)$$

.

Επιλέγουμε $Q = \delta_a$, άρα

$$\sum_{h \in G} P(h)\delta_a(t\alpha h^{-1}) = \sum_{h \in G} P(t\alpha h^{-1})\delta_a(h) \Leftrightarrow P(\alpha^{-1}t\alpha) = P(t)$$

. □

Ορισμός 2.4.6. *Έστω $P \in L(G)$. Ο μετασχηματισμός Fourier της P σε σχέση με την G-αναπαράσταση (p, V) ,είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός $\widehat{P}(p) : V \to V$ με $\widehat{P}(p) = \sum_{g \in G} P(g)p(g)$.*

Λήμμα 2.4.7. *Για κάθε $P, Q \in L(G)$ και για κάθε G-αναπαράσταση (p, V) ισχύει ότι*

$$\widehat{P \star Q}(p) = \widehat{P}(p)\widehat{Q}(p)$$

.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\widehat{P \star Q}(p) &= \sum_{g\in G}\Big[\sum_{h\in G} P(h)Q(h^{-1}g)\Big]p(g)\\
&= \sum_{g\in G}\sum_{h\in G} P(h)Q(h^{-1}g)p(h^{-1}g)p(h)\\
&= \sum_{h\in G}\Big[\sum_{g\in G} Q(h^{-1}g)p(h^{-1}g)\Big]P(h)p(h)\\
&= \widehat{Q}(p)\widehat{P}(p).
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 2.4.8. *Αν P είναι κεντρική συνάρτηση, ο μετασχηματισμός Fourier δίνεται από την σχέση*

$$\widehat{P}(p) = \lambda I \qquad \mu\epsilon \qquad \lambda = \tfrac{1}{d_p}\sum_{g\in G} P(g)\chi_p(g) = \frac{1}{d_p}\langle P, \overline{\chi_p}\rangle.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
p(g)\widehat{P(p)}p(g^{-1}) &= \sum_{h\in G} P(h)p(g)p(h)p(g^{-1})\\
&= \sum_{h\in G} P(h)p(ghg^{-1})\\
&= \sum_{h\in G} P(ghg^{-1})p(ghg^{-1})\\
&= \widehat{P(p)}.
\end{aligned}$$

Άρα η $\widehat{P}$ είναι intertwinner της $\widehat{P}$. Επομένως, $\widehat{P} = \lambda I,\ \ \lambda \in \mathbb{C}$ και

$$tr(\widehat{P}(p)) = \sum_{g\in G} P(g)\chi_p(g) = \lambda d_p$$

. □

Θεώρημα 2.4.9. ***(Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier)*** *Αν $P \in L(G)$ η ακόλουθη σχέση ισχύει*

$$P(p) = \frac{1}{|G|}\sum_{p\in\tilde{G}} d_p tr\big(p(g^{-1})\widehat{P}(p)\big),\ \ \forall g \in G.$$

Συγκεκριμένα, αν $P_1, P_2 \in L(G)$ και ικανοποιούν την ιδιότητα ότι $\widehat{P_1} = \widehat{P_2}$ τότε $P_1 = P_2$.

Απόδειξη. Από το θεώρημα Peter-Weyl έχουμε ότι οι συναρτήσεις $\sqrt{\frac{d_p}{|G|}}u^p_{ij}$ υπολογισμένες στην ορθοκανονική βάση $v^p_1, ..., v^p_{d_p}$ δίνουν μία ορθοκανονική βάση για τον $L(G)$. Το ίδιο ισχύει και για τις συζηγείς συναρτήσεις $\sqrt{\frac{d_p}{|G|}}\overline{u^p_{ij}}$.

Έτσι, κάθε συνάρτηση $P \in L(G)$ μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$P(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{p \in \tilde{G}} d_p \sum_{i,j=1}^{d_p} \langle P, \overline{u_{ij}^p} \rangle \overline{u_{ij}^p}(g)$$

,
όπου $1 \leq i, j \leq d_p$.
Τώρα, εφόσον $\widehat{P}(p) = \sum\limits_{g \in G} P(g)p(g)$ και $u_{ij}^p = \langle p(g)v_j^p, v_i^p \rangle$ παίρνουμε

$$\langle P, \overline{u_{ij}^p} \rangle = \sum_{g \in G} P(g)u_{ij}^p = \sum_{g \in G} P(g)\langle p(g)v_j^p, v_i^p \rangle = \langle \widehat{P}(p)v_j^p, v_i^p \rangle$$

και

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{d_p} \langle P, \overline{u_{ij}^p} \rangle \overline{u_{ij}^p}(g) &= \sum_{i,j=1}^{d_p} \langle \widehat{P}(p)v_j^p, v_i^p \rangle \langle v_i^p, p(g)v_j^p \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{d_p} \langle \widehat{P}(p)v_j^p, v_i^p \rangle \langle p(g^{-1})v_i^p, v_j^p \rangle \\ &= tr\big(p(g^{-1})\widehat{P}(p)\big). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$P(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{p \in \tilde{G}} d_p \sum_{i,j=1}^{d_p} \langle P, \overline{u_{ij}^p} \rangle \overline{u_{ij}^p}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{p \in \tilde{G}} d_p tr\big(p(g^{-1})\widehat{P}(p)\big), \ \forall g \in G.$$

□

Ορίζουμε το σύνολο $C(G) = \bigoplus\limits_{g \in \tilde{G}} \{\widehat{P(p)} : P \in L(G)\}$ *τότε ισχύει ότι*

Πόρισμα 2.4.10. *Ο Μετασχηματισμός Fourier* $P \in L(G) \mapsto \widehat{P} \in C(G)$ *και η απεικόνιση* $Q \in C(G) \mapsto \widehat{Q} \in L(G)$, *με* $\widehat{Q}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{p \in \tilde{G}} d_p tr\big(p(g^{-1}Q(g))\big)$, *είναι 1-1 και αντιστρέφονται μεταξύ τους. Επιπλέον,* $C(G) = \bigoplus\limits_{g \in \tilde{G}} Hom(V_p)$.

Θεώρημα 2.4.11. *Οι χαρακτήρες* $\{\chi_p,\ p \in \tilde{G}\}$ *ορίζουν μια ορθογώνια βάση στον υπόχωρο των κεντρικών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, το πλήθος των στοιχείων του δυϊκού* $|\tilde{G}|$ *είναι ίσο με των αριθμό των κλάσεων ισοδυναμίας της* G.

Απόδειξη. Ήδη έχουμε δει ότι οι χαρακτήρες των ανάγωγων αναπαραστάσεων είναι κεντρικές συναρτήσεις, οι οποίες είναι ορθογώνιες αν οι αναπαραστάσεις δεν είναι ισοδύναμες. Επιπλέον, από την Πρόταση 2.4.8 αν μια κεντρική συνάρτηση P είναι ορθογώνια με αυτούς τους χαρακτήρες τότε $\widehat{P}(p) = 0 \Rightarrow P = 0, \ \forall p \in \tilde{G}$. Άρα, οι χαρακτήρες είναι ορθογώνια βάση των κεντρικών συναρτήσεων οι οποίες έχουν διάσταση ίση με το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίς της G που προκύπτει από το Λήμμα 2.4.5. □

Πρόταση 2.4.12. ***(Φόρμουλα του Plancherel)*** *Έστω P και Q δύο συναρτήσεις της G. Τότε,*

$$\langle P, Q\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{p\in\tilde{G}} d_p tr\big(\widehat{P}(p)\widehat{Q}(p)^*\big). \tag{2.1}$$

Απόδειξη. Έχουμε ,

$$\langle P, Q\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{p\in\tilde{G}} d_p \sum_{i,j=1}^{d_p}\langle P, \overline{u_{ij}^p}\rangle\langle\overline{u_{ij}^p}, Q\rangle$$

.
Από την σχέση

$$\langle P, \overline{u_{ij}^p}\rangle = \sum_{g\in G} P(g)u_{ij}^p = \sum_{g\in G} P(g)\langle p(g)v_j^p, v_i^p\rangle = \langle\widehat{P}(p)v_j^p, v_i^p\rangle$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\langle P, Q\rangle &= \frac{1}{|G|}\sum_{p\in\tilde{G}} d_p \sum_{i,j=1}^{d_p}\langle P, \overline{u_{ij}^p}\rangle\langle\overline{u_{ij}^p}, Q\rangle \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{p\in\tilde{G}} d_p \sum_{i,j=1}^{d_p}\langle\widehat{P}(p)v_j^p, v_i^p\rangle\langle v_i^p, \widehat{Q}(p)v_j^p\rangle \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{p\in\tilde{G}} d_p tr\big(\widehat{P}(p)\widehat{Q}(p)^*\big).
\end{aligned}$$

□

Λήμμα 2.4.13. *Έστω $p, \sigma \in \tilde{G}$ και $u_{ij}^p, u_{hk}^\sigma,\ 1 \le i, j \le d_p,\ 1 \le h.k \le d_\sigma$ οι αντίστοιχοι πίνακες συντελεστών. Τότε,*

$$u_{ij}^p \star u_{hk}^\sigma = \frac{|G|}{d_p}\delta_{jh}\delta_{p\sigma}u_{ik}^p.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε το (ii) και (iii) από το Λήμμα 2.2.21 στην συνέλιξη. Έτσι,

$$\begin{aligned}
[u_{ij}^p \star u_{hk}^\sigma] &= \sum_{g\in G} u_{ij}^p(gs)u_{hk}^\sigma(s^{-1}) \\
&= \sum_{l=1}^{d_p} u_{il}^p(g)\sum_{s\in G} u_{lj}^p(s)\overline{u_{hk}^\sigma(s)} \\
&= \sum_{l=1}^{d_p} u_{il}^p(g)\delta_{jh}\delta_{lk}\frac{|G|}{d_{\ p}}\delta_{p\sigma} \\
&= \frac{|G|}{d_p}\delta_{jh}\delta_{p\sigma}u_{ik}^p.
\end{aligned}$$

□

Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο δίνοντας την συνέλιξη, τον Μετασχηματισμό Fourier και κάποιες σημειώσεις σχετικά με τα μέτρα πιθανότητας σε πεπερασμένες ομάδες.

Παρατηρούμε ότι ένα μέτρο πιθανότητας πάνω σε μία πεπερασμένη ομάδα G *είναι μία απεικόνιση* $P : G \to \mathbb{R}$ *που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) $P(g) \geq 0, \quad \forall g \in G.$

(ii) $\sum_{g \in G} P(g) = 1.$

Εαν P *και* Q *είναι δύο μέτρα πιθανότητας τότε προφανώς η συνέλιξη δίνεται από την σχέση*

$$[P \star Q](g) = \sum_{h \in G} P(h)Q(h^{-1}g) = \sum_{h,k \in G,\ kh=g} P(k)Q(h)$$

.
Επομένως, το γινόμενο συνέλιξη προσδιορίζει την πιθανότητα το $g = hk$.

Επιπλέον, αν U *είναι η διακριτή ομοιόμορφη κατανομή με* $U(g) = \frac{1}{|G|}, \ \forall g \in G$ *τότε ισχύει ότι* $U \star P = P \star U = U$ *για κάθε μέτρο πιθανότητα* P *στην* G, *αφού* $U(gh) = U(g), \ \forall g, h \in G$.

Τέλος, υποθέτουμε ότι το μέτρο P *εκφράζει τις πιθανότητες μετάβασης ενός τυχαίο περιπάτου με αρχική κατανομή το μέτρο* $Dirac$ *τότε είναι εύκολο να καταλάβουμε ότι το* n*-φορές γινόμενο συνέλιξη της* P *με τον εαυτό της θα μας προσδιορίσει την κατανομή του τυχαίου περιπάτου. Ακόμα, σύμφωνα με το θεώρημα του Αντίστροφου Μετασχηματισμού Fourier και από το Λήμμα 2.4.7, ορίζοντας* $P^{n*} = P \star P \star \cdots \star P$ *παίρνουμε την σχέση*

$$P^{n*}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{p \in \tilde{G}} d_p tr\big(p(g^{-1})(\widehat{P}(p))^n\big)$$

.

Μέρος II

Αρμονική Ανάλυση και τυχαίος περίπατος

Κεφάλαιο 3

Αρμονική Ανάλυση σε κυκλικές ομάδες

Θεωρούμε $C_n = \{\bar{0}, \bar{1}, ..., \overline{n-1}\}$ *μια κυκλική ομάδα με* n *στοιχεία. Ταυτίζουμε αυτή την ομάδα με το σύνολο* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *και επομένως,* $\bar{x} \equiv x + n\mathbb{Z}$, $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$. *Τα στοιχεία* $\bar{x}$ *θα τα ορίζουμε απλά με* x *και θα γράφουμε* $\equiv_n$ *την ισότητα mod n. Επίσης, αν* $f \in L(C_n)$ *τότε μπορούμε να θεωρήσουμε την* f *σαν μία συνάρτηση* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *η οποία ικανοποιεί την περιοδική ιδιότητα* $f(x+n) = f(x)$.

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, για μία τυχαία πεπερασμένη ομάδα G, *η άλγεβρα* $L(G)$*(με τον πολλαπλασιασμό συνέλιξη) είναι μεταθετική μόνο όταν η* G *είναι αβελιανή. Επιπλέον, το κέντρο της* $L(G)$ *κατασκευάζεται από την ορθογώνια βάση των χαρακτήρων* $\{\chi_p : p \in \widehat{G}\}$ *και επειδή ο υπόχωρος των κεντρικών συναρτήσεων έχει διάσταση ίση με το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας της* G, *μπορούμε να συμπεράνουμε ότι μια πεπερασμένη ομάδα είναι αβελιανή όταν και μόνο όταν όλες οι ανάγωγες αναπαραστάσεις είναι μονοδιάστατες.*

Σύμφωνα με το παράδειγμα 2.3.11 έχουμε ότι αν $\phi : C_n \to \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *με* $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$, *τότε αυτή ισούται με* $\phi(x) = \chi_z(x) = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ *για κάποιο* $z \in C_n$.

Ο Μετασχηματισμός Fourier για μιά συνάρτηση $f \in L(C_n)$ *δίνεται από την σχέση*

$$\hat{f} = \langle f, \chi_z \rangle = \sum_{y \in C_n} f(y)\overline{\chi_x(y)}$$

.

Θεώρημα 3.0.1. *Για κάθε* $f \in L(C_n)$ *ισχύει ότι*

$$f = \frac{1}{n} \sum_{x \in C_n} \widehat{f}(x)\chi_x. \tag{3.1}$$

Σχόλιο 3.0.2. *Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier, για την κυκλική ομάδα, που περιγράφεται στο προηγούμενο θεώρημα δείχνει ξεκάθαρα ότι οι χαρακτήρες αποτελούν την βάση του* $L(C_n)$.

Θεώρημα 3.0.3. ***(Η Φόρμουλα Plancherel της*** C_n***)*** *Αν* $f \in L(C_n)$ *τότε*

$$\|\widehat{f}\| = \sqrt{n}\|f\|$$

.

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f}\|^2 &= \langle \widehat{f}, \overline{\widehat{f}} \rangle \\
&= \sum_{x \in C_n} \Big[\sum_{y_1 \in C_n} f(y_1)\overline{\chi_x(y_1)} \Big] \Big[\sum_{y_2 \in C_n} \overline{f(y_2)} \chi_x(y_2) \Big] \\
&= \sum_{y_1 \in C_n} \sum_{y_2 \in C_n} f(y_1)\overline{f(y_2)} \sum_{x \in C_n} \overline{\chi_x(y_1)} \chi_x(y_2) \\
&= n \sum_{y \in C_n} f(y)\overline{f(y)} \\
&= n\|f\|^2.
\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 3.0.4. *Για το μέτρο Dirac* δ_x *έχουμε ότι*

$$\widehat{\delta_x} = \overline{\chi_x},$$

.
Συγκεκριμένα, $|\delta_x(y)| = 1$ *για όλα* $y \in C_n$ *και για* $x = 0$ *έχουμε* $\delta_0 = 1$.

Θεωρούμε τον τελεστή $T_x : L(C_n) \to L(C_n)$, *ο οποίος ορίζεται από την σχέση*

$$(T_x f)(y) = f(y - x) \qquad \forall x, y \in C_n, \ \ , f \in L(C_n)$$

.
Τότε, $\widehat{T_x f}(y) = \overline{\chi_y(x)}\widehat{f}(y)$ *και* $T_x = f \star \delta_x$.

Υποθέτουμε ότι R *είναι ένας γραμμικός τελεστής στην* $L(C_n)$ *με* $(Rf)(x) = \sum_{y \in C_n} r(x, y) f(y)$. *Λέμε ότι ο* R *είναι* C_n*-αναλλοίωτος αν μετατίθεται με κάθε* T_x.

Λήμμα 3.0.5. *Ο γραμμικός τελεστής* R *είναι* C_n*-αναλλοίωτος όταν και μόνο όταν* $r(x - z, y - z) = r(x, y), \ \ \forall x, y, z \in C_n$.

Απόδειξη. Ο γραμμικός τελεστής R θα είναι C_n-αναλλοίωτος αν και μόνο αν $[T_x(Rf)](v) = [R(T_x f)](v)$ το οποίο σημαίνει ότι

$$\sum_{u \in C_n} r(v - z, u) f(u) = \sum_{u \in C_n} r(v, u) f(u)$$

.
Ισοδύναμα,

$$\sum_{u \in C_n} r(v - z, u - z) f(u - z) = \sum_{u \in C_n} r(v, u) f(u - z)$$

. □

Θεώρημα 3.0.6. *Έστω R ένας γραμμικός τελεστής. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο R είναι τελεστής συνέλιξης.*

(ii) *Κάθε χ_x είναι ιδιοδιάνυσμα του R.*

Απόδειξη. ($(i) \to (ii)$): Αν ο R είναι ένας τελεστής συνέλιξης τότε υπάρχει συνάρτηση $h \in L(C_n)$ τέτοια ώστε

$$Rf = f \star h, \qquad \forall f \in L(C_n)$$

. Άρα,

$$R\chi_x = \sum_{y \in C_n} \chi_x(t-y)h(t) = \chi_x(y) \sum_{y \in C_n} \overline{\chi_x(t)}h(t) = \chi_x(y)\widehat{h}(t)$$

. Επομένως, κάθε χ_x είναι ιδιοδιάνυσμα του R.
($(ii) \to (i)$): Αντίθετα, αν R είναι ένας γραμμικός τελεστής ώστε να υπάρχει $\lambda \in L(C_n)$ που να ικανοποιεί την σχέση

$$R\chi_x = \lambda(x)\chi_x$$

.Από τον Αντίστροφο Μετασχηματισμό Fourier παίρνουμε

$$\begin{aligned}(Rf)(z) &= \frac{1}{n}\sum_{x \in C_n} \widehat{f}(x)\lambda_x\chi_x(z) \\ &= \sum_{y \in C_n} \frac{1}{n}\sum_{x \in C_n} \lambda_x\chi_x(z-x) \\ &= [h \star f](z)\end{aligned}$$

όπου $h(y) = \frac{1}{n}\sum_{x \in C_n} \lambda(x)\chi_x(y)$. □

Πόρισμα 3.0.7. *Το φάσμα του τελεστή R δίνεται από το σύνολο*

$$\sigma(R) = \{\widehat{h}(x) : x \in C_n\}$$

.

Λήμμα 3.0.8. *Το φάσμα του τελεστή συνέλιξης $Rf = f \star h$ με h πραγματική, είναι πραγματικό αν και μόνο η h είναι συμετρική ($h(-t) = h(t)$).*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο πόρισμα το φάσμα του τελεστή δίνεται από το σύνολο $\{\widehat{h}(x) : x \in C_n\}$. Άρα, θα πρέπει

$$\begin{aligned}\widehat{h}(x) = \overline{\widehat{h}(t)} \Leftrightarrow 0 &= \widehat{h}(x) - \overline{\widehat{h}(x)} \\ &= \sum_{y \in C_n} h(y)\overline{\chi_x(y)} - \sum_{y \in C_n} h(y)\chi_x(y) \\ &= \sum_{y \in C_n} \big[h(y) - h(-y)\big]\overline{\chi_x(y)}.\end{aligned}$$

Το οποίο ισχύει για όλα $x \in C_n$ αν και μόνο αν $h(y) - h(-y), \quad \forall y \in C_n$. □

3.1 Αλυσίδες Markov σε κυκλικές ομάδες

Θα λέμε ότι μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα ορισμένη στην C_n είναι αναλλοίωτη όταν ο πίνακας μετάβασης $(p(x,y))_{x,y\in C_n}$ είναι C_n-αναλλοίωτος. Δηλαδή, $\forall x,y,z \in C_n$ ισχύει ότι

$$p(x-z.y-z) = p(x,y).$$

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας μ θέτοντας $\mu(x) = p(0,x), \quad x \in C_n$. Τότε εμείς έχουμε ότι $p(x,y) = \mu(y-x)$ και πιο γενικά

$$p^{(k)}(x,y) = \mu^{*k}(y-x).$$

Επιπλέον,

$$\sum_{y\in X} p(x,y)f(y) = \sum_{y\in X} \mu(y-x)f(y) = \sum_{y\in X} \tilde{\mu}(x-y)f(y) = [f \star \tilde{\mu}](x)$$

όπου $\tilde{\mu}(y) = \mu(-y)$.

Λήμμα 3.1.1. *Ένας αναλλοίωτος πίνακας μετάβασης $p(x,y)$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν το μέτρο $\mu(x) = p(0,x)$ είναι συμμετρικό. Σε αυτή την περίπτωση ο p είναι σε detailed balance με την διακριτή ομοιόμορφη κατανομή $\pi(x) = \frac{1}{n}$.*

Απόδειξη. Αν $p(x,y)$ είναι αντιστρέψιμος τότε θα έχει πραγματικές ιδιοτιμές και επομένως από το Λήμμα 3.0.8 το μ θα είναι συμμετρικό.
Αντίθετα, αν το μ είναι συμμετρικό τότε $p(x,y) = p(y,x)$ και έτσι ο p είναι σε detailed balance με την διακριτή ομοιόμορφη κατανομή $\pi(x) = \frac{1}{n}$. □

Θεώρημα 3.1.2. *Έστω $\mu : C_n \to [0,1]$ ένα μέτρο πιθανότητας και π το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας. Τότε, $\forall k \in \mathbb{N}$ έχουμε*

$$\|\mu^{*k} - \pi\| \leq \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{t\in\mathbb{Z}_n\setminus\{0\}} |\widehat{\mu}(t)|^{2k}}.$$

Απόδειξη.

Θεώρημα 3.1.3. *Έστω $\mu : C_n \to [0,1]$ μία κατανομή πιθανότητας και π το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας. Τότε, $\forall k \in \mathbb{N}$ έχουμε*

$$\|\mu^{*k} - \pi\| \geq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t\in\mathbb{Z}_n\setminus\{0\}} |\widehat{\mu}(t)|^{2k}}.$$

Ορισμός 3.1.4. *Για μια κατανομή πιθανότητας μ ορισμένη στην C_n θα λέμε ότι έχει φασματικό κενό αν*

$$|\widehat{\mu}(k)| < 1$$

για όλα τα $k \in C_n \setminus \{0\}$.

Σημείωση 3.1.5. *Για $k = 0$ θα ισχύει πάντα ότι*

$$\widehat{\mu}(0) = \sum_{t \in C_n} \mu(t) e^{\frac{-2\pi i 0 t}{n}} = \sum_{t \in C_n} \mu(t) = 1.$$

Επιπλέον, για $k \neq 0$ από την τριγωνική ανισότητα έχουμε,

$$|\widehat{\mu}(k)| \leq \sum_{t \in C_n} |\mu(t) e^{\frac{-2\pi i k t}{n}}| = \sum_{t \in C_n} \mu(t) = 1.$$

Θεώρημα 3.1.6. *Μία κατανομή πιθανότητας μ στην C_n έχει ένα φασματικό κενό αν και μόνο αν η μ είναι εργοδική.([14])*

3.1α΄ Στασιμότητα σε Διακριτό Κύκλο

Περιοριζόμαστε στις Μαρκοβιανές Αλυσίδες που περιγράφονται από το συμμετρικό μέτρο

$$\mu(1) = \mu(-1) = \frac{1}{2} \qquad \text{και} \quad \mu(x) = 0, \ \ \forall x.$$

Είναι προφανές ότι το συμμετρικό μέτρο περιγράφει τον τυχαίο περίπατο στον διακριτό κλυκλο ώστε:

$$p(x,y) = \mu(y-x) = \begin{cases} 1/2 & \text{αν} \quad y \equiv_n x+1 \\ 1/2 & \text{αν} \quad y \equiv_n x-1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}.$$

Το φάσμα δίνεται από το σύνολο των αριθμών

$$\widehat{\mu}(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{2\pi i x}{n}} + e^{\frac{-2\pi i x}{n}}\right) = cos\left(\frac{2\pi i x}{n}\right)$$

με $x = 0, 1, ..., n-1$.
Αν ο n είναι περιττός τότε το συμμετρικό μέτρο έχει ένα φασματικό κενό το οποίο είναι ισοδύναμο με την εργοδικότητα του τυχαίου περιπάτου. Δίνονται τα φράγματα των Θεωρημάτων 3.1.2 και 3.1.3 για την συμμετρική κατανομή.

Θεώρημα 3.1.7. *Για n περιττό και $k \geq n^2$ έχουμε*

$$\|\mu^{*k} - \pi\|_{TV} \leq e^{\frac{-\pi^2 k}{2n^2}}.$$

Ακόμα, για $n > 6$ και για κάθε k παίρνουμε

$$\|\mu^{*k} - \pi\|_{TV} \geq e^{-\frac{\pi^2 k}{2n^2} - \frac{\pi^4 k}{2n^4}}.$$

Απόδειξη. (βλ.[14]) □

Παρατήρηση 3.1.8. *Αν ο n είναι άρτιος τότε ο τυχαίος περίπατος δεν είναι εργοδικός.*

Κεφάλαιο 4

Αρμονική Ανάλυση σε υπερκύβους

Ένας n-διάστατος υπερκύβος είναι το καρτεσιανό γινόμενο n κυκλικών ομάδων C_2. Δηλαδή,

$$Q_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \ : \ x_1, x_2, ..., x_n \in \{0, 1\}\}$$

,
εφοδιασμένο με το μεταθετικό γινόμενο

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \qquad mod\ 2.$$

Αν $x \in Q_n$ τότε $x + x = 0$, δηλαδή $x = -x$.

Εισάγουμε τους χαρακτήρες της Q_n, θέτοντας για $x, y \in Q_n$,

$$\chi_x(y) = (-1)^{x \cdot y}$$

όπου $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$.
Είναι εύκολο να δούμε ότι αν $\phi : Q_n \to \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ με $\phi(x + y) = \phi(x)\phi(y)$, τότε αυτή ισούται με $\phi(x) = \chi_z(y) = (-1)^{z \cdot y}$ για κάποιο $z \in Q_n$.

Λήμμα 4.0.1.

$$\sum_{y \in Q_n} \chi_x(y) = \begin{cases} 2^n & \alpha\nu \quad x = 0 \\ 0 & \alpha\nu \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Απόδειξη. Αν $x = 0$ τότε $\chi_x(y) = 1, \ \forall y \in Q_n$ και επειδή $|Q_n| = 2^n$ ο πρώτος κλάδος της ισότητας αποδείχθηκε.
Τώρα, αν $x \neq 0$ θα υπάρχει $z \in Q_n$ έτσι ώστε $\chi_x(z) = -1$. Οπότε έχουμε,

$$-\sum_{y \in Q_n} \chi_x(y) = \chi_x(z) \sum_{y \in Q_n} \chi_x(y) = \sum_{y \in Q_n} \chi_x(z + y) = \sum_{y \in Q_n} \chi_x(y)$$

$$\Rightarrow \sum_{y \in Q_n} \chi_x(y) = 0$$

και άρα το ζητούμενο. □

Έστω $L(Q_n)$ η άλγεβρα των μιγαδικών συναρτήσεων της Q_n με το γινόμενο συνέλιξη. Ο Μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης $f \in L(Q_n)$, για $x \in Q_n$, δίνεται από την σχέση

$$\widehat{f}(x) = \langle f, \chi_x \rangle = \sum_{y \in Q_n} f(y)\chi_x(y) = \sum_{y \in Q_n} f(y)(-1)^{x \cdot y}.$$

Επομένως, ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier για την $f \in L(Q_n)$ είναι

$$f = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in Q_n} \widehat{f}(x)\chi_x.$$

Τώρα, από την ορθογώνια σχέση των χαρακτήρων παίρνουμε ότι

$$\langle \widehat{f}, \widehat{f} \rangle = \sum_{y,z \in Q_n} f(y)\overline{f(z)} \sum_{x \in Q_n} \chi_x(y)\chi_x(z) = 2^n \langle f, f \rangle$$

και άρα την Φόρμουλα του Plancherel.

Ισοδύναμα μπορεί να γραφεί στην μορφή :

$$\|\widehat{f}\| = \sqrt{2^n}\|f\|.$$

Η συνέλιξη δίνεται όπως στην $L(C_n)$, $[f_1 \star f_2](y) = \sum_{x \in Q_n} f_1(y-x)f_2(x)$ και επομένως για τον τελεστή

$$(T_x f)(y) = f(y-x) \qquad \forall x, y \in Q_n,\ \ f \in L(Q_n)$$

ισχύει ότι $\widehat{T_x f}(y) = \chi_y(x)\widehat{f}(y)$ και $T_x f = f \star \delta_x$.

Όπως στην περίπτωση της κυκλικής ομάδας και στον υπερκύβο, ένα τελεστής R από την $L(Q_n)$ στον εαυτό της θα λέγεται Q_n-αναλλοίωτος αν μετατίθεται με τον T_x για όλα τα $x \in Q_n$.

Σημείωση 4.0.2. *Προφανώς κάθε χαρακτήρας είναι ιδιοδιάνυσμα του R.[6]*

Σημείωση 4.0.3. *Αν μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στην Q_n, θα ισχύει ότι*

$$\widehat{\mu}(z) = \sum_{t \in Q_n} \mu(t)(-1)^{t \cdot z}$$

και

$$\mu^{*k}(y-x) = \frac{1}{2^n} \sum_{z \in Q_n} (\widehat{\mu}(z))^k (-1)^{z\cdot(y-x)}.$$

4.1 Αλυσίδες Markov σε υπερκύβους

Μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα στην Q_n με στοχαστικό πίνακα $(p(x,y))_{x,y\in Q_n}$ θα λέγεται Q_n-αναλλοίωτη όταν

$$p(x+z, y+z) = p(x,y) \qquad \forall x,y,z \in Q_n.$$

Αν θέσουμε $\mu(x) = p(0,x),\ \forall x \in Q_n$, τότε το μ θα είναι ένα μέτρο πιθανότητας στην Q_n όπου

$$p^{(k)}(x,y) = \mu^{*k}(y-x).$$

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να αντικαταστίσουμε το Λήμμα 3.0.8 με την απλή παρατήρηση ότι η $h : Q_n \to \mathbb{R}$ έχει πραγματικό Μετασχηματισμό Fourier, αφού οι χαρακτήρες είναι πραγματικές συναρτήσεις. Επιπλέον, το γεγονός ότι κάθε αναλλοίωτος πίνακας $p(x,y)$ είναι συμμετρικός αντικαθιστά το Λήμμα 3.1.1, με την επιπλέον σημείωση ότι ο p είναι σε detailed balance με την κατανομή $\pi(x) = \frac{1}{2^n}$.

Τώρα, από την φορμουλα του Plancherel και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\widehat{\pi}(z) = \delta_0(z),\ \ \widehat{\mu}(0) = 1$, παίρνουμε

$$\|v_x^{(k)} - \pi\|^2 = \frac{1}{2^n} \sum_{z\neq 0,\ z\in Q_n} \widehat{\mu}(z)^{2k}.$$

Άρα, το Upper Bound Lemma γίνεται

$$\|v_x^{(k)} - \pi\|_{TV}^2 = \|\mu^{*k} - \pi\|_{TV}^2 \leq \frac{1}{4} \sum_{z\neq 0,\ z\in Q_n} |\widehat{\mu}(z)|^{2k}.$$

4.1α′ Στασιμότητα του μοντέλου διάχυσης Ehrenfest

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία κάλπη με k σφαιρίδια κόκκινου ή μαύρου χρώματος. Εκλέγουμε μία σφαίρα τυχαία και την αντικαθιστούμε με μία άλλη αντίθετου χρώματος. Αν επαναλλάβουμε το πείραμα n φορές και ορίσουμε την ακολουθία X_n που μετράει το πλήθος των μαύρων σφαιριδίων στην κάλπη στο n-οστό πείραμα, θα πάρουμε μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα ορισμένη στην Q_n.

Αυτή είναι η απλούστερη περιγραφή του μοντέλου διάχυσης Ehrenfest. Σκοπός μας δεν είναι να περιγράψουμε την μοντελοποίηση ένος τέτοιου τυχαίου φαινομένου αλλά να ¨δανειστούμε' το μέτρο που προκύπτει, προκειμένου να δείξουμε τους υπολογισμούς του φάσματος της διαδικασίας και του άνω φραγματός της για να δώσουμε άλλη μία ισχυρή ένδειξη άμεσης χρησιμότητας της Αρμονικής Ανάλυσης στις εφαρμογές.

Έστω το μέτρο πιθανότητας μ που περιγράφεται από την σχέση

$$\mu(0,0,...,0)=\mu(1,0,...,0)=\mu(0,1,...,0)=\cdots=\mu(0,0,...,1)=\frac{1}{n+1} \tag{4.1}$$

και μηδενιζέται για οποιοδήποτε άλλο στοιχείο της Q_n.
Ο αντίστοιχος πίνακας μετάβασης είναι

$$p(x,y)=\mu(y-x)=\begin{cases}\frac{1}{n+1} & \alpha\nu \quad y=x\\ \frac{1}{n+1} & \alpha\nu \quad y\sim x\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}.$$

όπου $x\sim y$ αν και μόνο άν $|\{j:x_j\neq y_j\}|=1$.
Για $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in Q_n$ ορίζουμε με $w(x)=|\{j:x_j=1\}|$ το πλήθος των μονάδων του x.

Πρόταση 4.1.1. *Αν μ το μέτρο της σχέσης (4.1) τότε*

$$\widehat{\mu}(x)=1-\frac{2w(x)}{n+1}.$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}(x) &= \sum_{y\in Q_n}\mu(y)(-1)^{x\cdot y}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{x_j}\\ &= \frac{1}{n+1}-\frac{w(x)}{n+1}-\frac{n-w(x)}{n+1}\\ &= 1-\frac{2w(x)}{n+1}.\end{aligned}$$

□

Έστω V_k ο υπόχωρος της $L(Q_n)$ που παράγεται από τους χαρακτήρες στοιχείων βαρύτητας k:

$$V_k=\langle\chi_x\ :\ w(x)=k\rangle.$$

Πόρισμα 4.1.2. *Κάθε V_k είναι ιδιόχωρος του τελεστή συνέλιξης $Tf=f\star\mu$ και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι $1-\frac{2k}{n+1}$. Ακόμα, $dim(V_k)=\binom{n}{k}$ και $L(Q_n)=\bigoplus_{k=0}^{n}V_k$. Δηλαδή, $1-\frac{2}{n+1}$ είναι η δεύτερη μεγαλύτερη ιδιοτιμή με πολλαπλότητα ίση με n.*

Ολοκληρώνουμε, δίνοντας μία εκτίμηση για το άνω και το κάτω φράγμα της συνολικής κύμανσης της κατανομής της διαδικασίας με το ομοιόμορφο διακριτό μέτρο.

Θεώρημα 4.1.3. *Έστω μ το μέτρο της σχέσης (4.1). Για $k = \frac{1}{4}(n+1)(\log n + c)$ έχουμε*

$$\|\mu^{*k} - \pi\|_{TV}^2 \leq \frac{1}{2}\big(e^{e^{-c}} - 1\big)$$

.

Επιπλέον, για $k = \frac{1}{4}(n+1)(\log n - c)$, $0 < c < \log n$ και n μεγάλο έχουμε

$$\|\mu^{*k} - \pi\|_{TV}^2 \geq 1 - 20e^{-c}$$

.

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|\mu^{*k} - \pi\|_{TV}^2 &\leq \frac{1}{4} \sum_{z \neq 0,\, z \in Q_n} \widehat{\mu}(z)^{2k} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} dim(V_j)\big(1 - \frac{2j}{n+1}\big)^{2k} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j}\big(1 - \frac{2j}{n+1}\big)^{2k} \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{[\frac{n+1}{2}]} \binom{n}{j}\big(1 - \frac{2j}{n+1}\big)^{2k}
\end{aligned}$$

αφού αν $j + j' = n + 1$ τότε $(1 - \frac{2j}{n+1}\big)^{2k} = (1 - \frac{2j'}{n+1}\big)^{2k}$.
Επίσης, επειδή $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \leq \frac{n!}{j!}$ και $1 - x \leq e^{-x}$ προκύπτει ότι

$$(1 - \frac{2j}{n+1}\big)^{2k} \leq e^{-\frac{4kj}{n+1}}$$

,
όταν $j \leq \frac{n+1}{2}$.
Επομένως,

$$\|\mu^{*k} - \pi\|_{TV}^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{[\frac{n+1}{2}]} \frac{n!}{j!} e^{-\frac{4kj}{n+1}} \qquad (\star).$$

Τώρα, αν επιλέξουμε $k = \frac{1}{4}(n+1)(\log n + c)$ η σχέση $(\star)$ γίνεται

$$\begin{aligned}
\|\mu^{*k} - \pi\|_{TV}^2 &\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{[\frac{n+1}{2}]} \frac{n!}{j!} e^{-j \log n - jc} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{[\frac{n+1}{2}]} \frac{1}{j!} e^{-jc} \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (e^{-c})^j \\
&= \frac{1}{2} \big(e^{e^{-c}} - 1 \big).
\end{aligned}$$

(Για το κάτω φράγμα, βλ.[6])

Βιβλιογραφία

[1] Μαρμαρίδης Ν. , *Θεωρία Ομάδων*, ΣΕΑΒ, ΚΑΛΛΙΠΟΣ,(2015).

[2] Appleabaum D. , *Probability on Compact Lie Groups*, Springer,(2004).

[3] Barry S. , *Representasion of Finite and Compact Groups*, AMS,(1996).

[4] Berkovich G.Ya.,Zhmud.E.M. , *Characters of Finite Groups. Part 1*, AMS,(1998).

[5] Ceccherini-Silberstein T., Scarabotti F., Tolli F., *Harmonic Analysis on Finite Groups*, Cambridge University Press,(2009).

[6] T. Ceccherini-Silberstein, F. Scarabotti, F. Tolli , *Representation theory of the symmetric groups*, Cambridge University Press,(2010).

[7] Diaconis P. , *Random walks on groups: characters and geometry*, Cambridge (online),(2010).

[8] Fraleigh J. , *First Course in Abstract Algebra*, Pearson,(2002).

[9] Katznelson Y. , *An Introduction to Harmonic Analysis*, Cambridge University Press,(2004).

[10] Kesten H. , *Probability on Discrete Structures*, Springer,(2004).

[11] Nestoridi E. , *A non-local random walk on the hypercube*, Applied Probability Trust,(2018).

[12] Rao M. , *Real and Stochastic Analysis*, Springer,(2004).

[13] Rose H.E. , *A Course on Finite Groups*, Springer,(2004).

[14] Sahlsten T. , *Analysis, Random Walks and Groups*, notebook,(2021).

[15] Segal E. , *Group Representation Theory*, lecture notes,(2014).

[16] Steinberg B., *Representation Theory of Finite Groups*, Springer,(2012).

[17] Strang G. , *Linear Algebra and Its Applications*, Cengage Learning,(2005).

[18] Webb P. , *A Course in Finite Group Representation Theory*, Cambridge University Press,(2016).

[19] Willwacher T. , *Basic group and representation theory*, lecture notes,(2014).

[20] Woess W. , *Random Walks on Infinite Graphs and Groups*, Cambridge University Press,(2000).