

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ



ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

**ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ
ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΣΕΙΡΩΝ**

Συγγραφέας

Μαρία Αναστασοπούλου

Επιβλέπων

Επικ. Καθηγητής Αθανάσιος Ρακιτζής

ΔΙΑΤΡΙΒΗ

για την απόκτηση

Διδακτορικού Διπλώματος στο

Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών-Χρηματοοικονομικών

Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Σάμος, 2023

Με ατομική μου ευθύνη και γνωρίζοντας τις κυρώσεις, που προβλέπονται από τις διατάξεις της παρ. 6 του άρθρου 22 του Ν. 1599/1986, δηλώνω ότι:

Είμαι η αποκλειστική συγγραφέας της υποβληθείσας Διδακτορικής Διατριβής με τίτλο «**Διαγράμματα Ελέγχου για Υποδείγματα Διακριτών Χρονολογικών Σειρών**». Η συγκεκριμένη Διδακτορική Διατριβή είναι πρωτότυπη και εκπονήθηκε αποκλειστικά για την απόκτηση του Διδακτορικού διπλώματος του Τμήματος. Κάθε βοήθεια, την οποία είχα για την προετοιμασία της, αναγνωρίζεται πλήρως και αναφέρεται επακριβώς στην εργασία. Επίσης, επακριβώς αναφέρω στην εργασία τις πηγές, τις οποίες χρησιμοποίησα, και μνημονεύω επώνυμα τα δεδομένα ή τις ιδέες που αποτελούν προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας άλλων, ακόμη κι εάν η συμπερίληψή τους στην παρούσα εργασία υπήρξε έμμεση ή παραφρασμένη. Γενικότερα, βεβαιώνω ότι κατά την εκπόνηση της Διδακτορικής Διατριβής έχω τηρήσει απαρέγκλιτα όσα ο νόμος ορίζει περί διανοητικής ιδιοκτησίας και έχω συμμορφωθεί πλήρως με τα προβλεπόμενα στο νόμο περί προστασίας προσωπικών δεδομένων και τις αρχές Ακαδημαϊκής Δεοντολογίας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ



ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

**ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ
ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΣΕΙΡΩΝ**

Συγγραφέας

Μαρία Αναστασοπούλου

Επιβλέπων

Επικ. Καθηγητής. Αθανάσιος Ρακιτζής

ΔΙΑΤΡΙΒΗ

για την απόκτηση

Διδακτορικού Διπλώματος στο

Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών-Χρηματοοικονομικών

Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Σάμος, 2023

UNIVERSITY OF THE AEGEAN



DOCTORAL THESIS

**CONTROL CHARTS FOR INTEGER-VALUED
TIME SERIES MODELS**

Author

Maria Anastasopoulou

Supervisor

Assistant Professor. Athanasios Rakitzis

*A thesis submitted in fulfillment of the requirements for the degree
of Doctor of Philosophy
at the*

Department of Statistics and Actuarial-Financial Mathematics

University of the Aegean

Samos, 2023

Τριμελής επιτροπή

Επίκουρος Καθηγητής Αθανάσιος Ρακιτζής
(Επιβλέπων),
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Ελλάδα

Καθηγητής Αλέξανδρος Καραγρηγορίου,
Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών-
Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ελλάδα

Αναπληρωτής Καθηγητής Τζων Τσιμήκας,
Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών-
Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ελλάδα

Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ελλάδα,
2023

Επταμελής εξεταστική επιτροπή

Αθανάσιος Ρακιτζής

Επίκουρος Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Ελλάδα

Αλέξανδρος Καραγρηγορίου

Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ελλάδα

Τζων Τσιμήκας

Αναπληρωτής Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ελλάδα

Θεοδόσης Δημητράκος

Επίκουρος Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ελλάδα

Βασίλειος Κούτρας

Επίκουρος Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ελλάδα

Πέτρος Μαραβελάκης

Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Ελλάδα

Δημήτριος Αντζουλάκος

Αναπληρωτής Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Ελλάδα

Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ελλάδα, 2023

Ευχαριστίες

Η διεξαγωγή της παρούσας διδακτορικής διατριβής αποτέλεσε ένα δύσκολο αλλά συγχρόνως ευχάριστο ταξίδι, γεμάτο πάθος, αυτοπειθαρχία και σκληρή δουλειά. Κατά τη διάρκεια αυτού του ταξιδιού, είχα την ευκαιρία να μοιραστώ τις σκέψεις, τους προβληματισμούς και τις γνώσεις μου με ανθρώπους που συνέβαλαν στην επιτυχή ολοκλήρωση αυτού του έργου. Για τον λόγο αυτό οφείλω να τους εκφράσω τις ειλικρινείς ευχαριστίες μου.

Πρωτίστως, θα ήθελα να εκφράσω την ειλικρινή εκτίμησή μου προς στον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Αθανάσιο Ρακιτζή, για τη συνεχή καθοδήγηση, υποστήριξη και υπομονή που μου παρείχε κατά τη διάρκεια του διδακτορικού μου. Είμαι ειλικρινά ευγνώμων για τις πολύτιμες γνώσεις και την εμπειρία που μοιράστηκε γενναιόδωρα μαζί μου, οι οποίες μου επέτρεψαν να ολοκληρώσω με επιτυχία την παρούσα διδακτορική διατριβή. Είμαι πραγματικά τυχερή που είχα την ευκαιρία να συνεργαστώ με τον κ. Αθανάσιο Ρακιτζή και τον ευχαριστώ θερμά για την εμπιστοσύνη, την ενθάρρυνση, την άμεση ανταπόκριση και τα εποικοδομητικά σχόλιά του, τα οποία αναμφίβολα έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση της ακαδημαϊκής και επαγγελματικής μου πορείας.

Ιδιαίτερα επίσης ευχαριστώ τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής μου, τον κ. Καραγρηγορίου και τον κ. Τσιμήκα, για το χρόνο, την εμπειρία και τα σχόλιά τους σχετικά με την εργασία μου.

Επιπλέον, είμαι βαθύτατα ευγνώμων στην οικογένειά μου για την αδιάλειπτη αγάπη και υποστήριξή τους, η οποία μου έδωσε τη δύναμη να ολοκληρώσω τις σπουδές μου. Όλο αυτό το διάστημα ήταν υποστηρικτές των μορφωτικών αναζητήσεων και επιθυμιών μου προσφέροντάς μου με κόπο και αυτοθυσία όλα τα απαραίτητα εφόδια για να επιτύχω τους στόχους μου.

Τέλος, θα ήθελα να αναγνωρίσω τη βοήθεια και τη συνδρομή που μου παρείχαν οι συνάδελφοι και οι φίλοι μου, οι οποίοι πρόσφεραν συναισθηματική υποστήριξη και ενθάρρυνση καθ' όλη τη διάρκεια του διδακτορικού μου.

Περίληψη

Η παρούσα διδακτορική διατριβή πραγματεύεται θέματα που αφορούν στην ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου με μνήμη για την παρακολούθηση διεργασιών, οι οποίες μοντελοποιούνται σύμφωνα με ένα μοντέλο χρονοσειρών με ακέραιες τιμές.

Συγκεκριμένα, βασικό αντικείμενο της διατριβής αποτελεί η μελέτη και η ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση διεργασιών που προέρχονται από διαδικασίες $BAR(1)$, $BBAR(1)$ και $BINARCH(1)$. Το πρώτο υπόδειγμα χρησιμοποιείται συχνά στην περιγραφή διωνυμικών δεδομένων (π.χ. αριθμός ελαττωματικών αντικειμένων) στα οποία υπάρχει συσχέτιση 1ης τάξης. Επιπλέον, τα μοντέλα $BBAR(1)$ και $BINARCH(1)$, αποτελούν γενίκευση του $BAR(1)$ και είναι κατάλληλα σε περιπτώσεις που παρατηρείται σημαντική απόκλιση της μεταβλητότητας των δεδομένων από την αντίστοιχη του διωνυμικού μοντέλου. Και για τα τρία υποδείγματα δίνονται, εν συντομία, οι βασικές τους ιδιότητες και στη συνέχεια αναπτύσσονται κατάλληλα διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση των αντίστοιχων διεργασιών.

Για την περίπτωση των διεργασιών τύπου $BAR(1)$ προτείνονται και μελετώνται μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA. Παράλληλα, εξετάζεται η απόδοση των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου DEWMA (double EWMA), τα οποία αποτελούν σύγχρονα διαγράμματα ελέγχου με μνήμη, με σκοπό να διαπιστωθεί αν και πόσο υπερτερούν έναντι του συνήθους διαγράμματος ελέγχου τύπου EWMA στην παρακολούθηση διεργασιών $BAR(1)$. Στη συνέχεια, προτείνονται και μελετώνται μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου EWMA για την παρακολούθηση των διεργασιών τύπου $BBAR(1)$. Επίσης, για την περίπτωση διεργασιών $BINARCH(1)$, εξετάζονται μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart, EWMA και CUSUM καθώς και δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA.

Εκτός από τον τρόπο λειτουργίας και εφαρμογής των παραπάνω διαγραμμάτων, παρουσιάζεται ο στατιστικός σχεδιασμός τους ενώ δίνονται και πρακτικές οδηγίες για την επιλογή των τιμών των παραμέτρων κάθε διαγράμματος. Για τον υπολογισμό της απόδοσης των προτεινόμενων διαγραμμάτων ελέγχου χρησιμοποιείται η τεχνική των Μαρκοβιανών αλυσίδων αλλά και η προσομοίωση Monte Carlo.

Τέλος, πραγματοποιείται αριθμητική σύγκριση της απόδοσης των προτεινόμενων διαγραμμάτων ελέγχου, χωριστά για διεργασίες τύπου $BAR(1)$, $BBAR(1)$ και $BINARCH(1)$ ενώ παρουσιάζονται και πρακτικές εφαρμογές αυτών σε πραγματικά δεδομένα και συγκεκριμένα σε προβλήματα στατιστικής παρακολούθησης από τις επιστημονικές περιοχές της επιδημιολογίας, των οικονομικών και της διαχείρισης δικτύων υπολογιστών.

Abstract

The topic of this PhD dissertation is the development of memory-type control charts for monitoring processes that are modeled according to a time series model with integer values. Specifically, the focus is on the study and development of control charts for monitoring $\text{BAR}(1)$, $\text{BBAR}(1)$ and $\text{BINARCH}(1)$ processes. The first model is commonly used to describe binomial data (e.g. number of non-conforming items) with first-order autocorrelation. Moreover, the $\text{BBAR}(1)$ and $\text{BINARCH}(1)$ models are generalizations of the $\text{BAR}(1)$ model and thus appropriate for cases where there is evidence that there is extra-binomial variation in the data. For all the three models, main properties are provided, followed by the construction of the suggested control charts that can be used for the monitoring of the corresponding processes.

For the case of $\text{BAR}(1)$ processes, one-sided EWMA control charts are proposed and studied. In addition, double EWMA (DEWMA) charts are studied in comparison with the ordinary EWMA charts, in attempt to assess whether the more complex DEWMA chart has better performance or not than its competitor (the EWMA chart). The results from this comparative study are given in the case of $\text{BAR}(1)$ process.

For the case of $\text{BBAR}(1)$ processes, one-sided EWMA charts are also studied. Three different types of one-sided charts (Shewhart, EWMA and CUSUM) are proposed and studied for the monitoring of $\text{BINARCH}(1)$ processes whereas the case of two-sided Shewhart and EWMA charts is also discussed.

Aspects of the statistical design for all the considered charts, for each of the three processes, are discussed and empirical rules for the selection of the proper values of the parameters of each chart are given. The Markov chain method as well as Monte Carlo simulation are used for the evaluation of the performance of each chart.

Finally, numerical comparisons (in terms of average run length) are given for all the considered charts, for the three different processes ($\text{BAR}(1)$, $\text{BBAR}(1)$ and $\text{BINARCH}(1)$), separately. In addition, the practical implementation of the proposed charts in statistical process monitoring problems is discussed in detail by applying them in real data that are available from three areas of applied science (epidemiology, economics and computer network management).

Πίνακας Περιεχομένων

Κατάλογος Πινάκων	xiii
Κατάλογος Εικόνων.....	xvii
Κατάλογος Συντομογραφιών	xix
Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή – Βιβλιογραφική Ανασκόπηση.....	1
1.1 Εισαγωγή στο Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας.....	1
1.2 Ιστορική Αναδρομή.....	2
1.3 Η έννοια της ποιότητας ελέγχου	5
1.4 Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών	9
1.5 Τυπικό διάγραμμα ελέγχου	11
1.5.1 Ερμηνεία διαγραμμάτων ελέγχου.....	11
1.5.2 Κατηγορίες διαγραμμάτων ελέγχου	15
1.6 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	18
1.6.1 Εισαγωγικά	18
1.6.2 Διαγράμματα Ελέγχου για Διακριτές Χρονοσειρές	20
1.7 Σκοπός και Δομή διδακτορικής διατριβής.....	31
1.8 Ανακεφαλαίωση	33
Κεφάλαιο 2 Μοντέλα Χρονοσειρών με Ακέραιες Τιμές.....	35
2.1 Εισαγωγή.....	35
2.2 Βασικές Έννοιες.....	35
2.3 Διωνυμικός τελεστής λέπτυνσης.....	37
2.4 Εισαγωγή στα αυτοπαλίνδρομα μοντέλα.....	40
2.5 Το μοντέλο Binomial AR(1).....	41
2.5.1 Ιδιότητες του μοντέλου Binomial AR(1)	41
2.5.2 Έλεγχος Καλής Προσαρμογής του μοντέλου Binomial AR(1)	43
2.5.2 Μέθοδοι Εκτίμησης για τις Παραμέτρους του Μοντέλου Binomial AR(1)	44
2.6. Το Μοντέλο Beta-Binomial AR(1).....	46
2.6.1 Εισαγωγικές έννοιες	46
2.6.2 Τυχαίος τελεστής λέπτυνσης	48
2.6.3 Ιδιότητες του Μοντέλου Binomial AR(1).....	49
2.6.4 Μέθοδοι Εκτίμησης Παραμέτρων του Μοντέλου BBAR(1)	52
2.7 Το Μοντέλο Binomial INARCH(1).....	54

2.7.1 Εισαγωγικές έννοιες	54
2.7.2 Ιδιότητες	55
2.7.3 Μέθοδοι Εκτίμησης Παραμέτρων του Μοντέλου BINARCH(1)	56
2.8 Ανακεφαλαίωση	56
Κεφάλαιο 3 Διαγράμματα Ελέγχου για Διωνυμικές Αυτοπαλίνδρομες Διεργασίες	59
3.1 Εισαγωγή.....	59
3.2 Διαγράμματα Ελέγχου EWMA για διεργασίες BAR(1)	59
3.2.1 Το Διάγραμμα Ελέγχου 1-EWMA	61
3.2.2 Το Διάγραμμα Ελέγχου s-EWMA.....	64
3.2.3 Αριθμητική μελέτη διαγραμμάτων s-EWMA	66
3.3 Διαγράμματα DEWMA για διεργασίες BAR(1).....	70
3.3.1 Το Διάγραμμα Ελέγχου DEWMA.....	71
3.3.2. Υπολογισμός Απόδοσης του Διαγράμματος DEWMA.....	72
3.3.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα για την Απόδοση του Διαγράμματος DEWMA.....	76
3.4 Ανακεφαλαίωση	94
Κεφάλαιο 4 Διαγράμματα Ελέγχου για διεργασίες Beta-BAR(1).....	97
4.1 Εισαγωγή.....	97
4.2 Διαγράμματα EWMA για την παρακολούθηση BBAR(1) διεργασίας.....	97
4.2.1 Το Διάγραμμα Ελέγχου 1-EWMA	98
4.2.2 Το Διάγραμμα Ελέγχου s-EWMA	99
4.2.3 Αριθμητική μελέτη διαγραμμάτων s-EWMA	100
4.3 Ανακεφαλαίωση	105
Κεφάλαιο 5 Διαγράμματα Ελέγχου για διεργασίες BINARCH(1).....	107
5.1 Εισαγωγή.....	107
5.2 Μονόπλευρα Διαγράμματα Ελέγχου για Διεργασίες BINARCH(1)	107
5.2.1 Μονόπλευρα Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart για Διεργασίες BINARCH(1)	108
5.2.2 Μονόπλευρα Διαγράμματα Ελέγχου EWMA για διεργασίες BINARCH(1).....	108
5.2.3 Αριθμητική μελέτη της απόδοσης των μονόπλευρων διαγραμμάτων Shewhart και s-EWMA.....	111
5.2.4 Αριθμητική σύγκριση της απόδοσης των μονόπλευρων διαγραμμάτων Shewhart και s-EWMA	122
5.2.5 Διαγράμματα Ελέγχου CUSUM για την παρακολούθηση διεργασιών BINARCH(1).....	128

5.3 Δίπλευρα Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA για Διεργασίες BINARCH(1)	134
5.3.1 Αριθμητική σύγκριση της απόδοσης των δίπλευρων διαγραμμάτων Shewhart και s-EWMA.....	136
5.4 Ανακεφαλαίωση	140
Κεφάλαιο 6 Αριθμητικές Συγκρίσεις & Εφαρμογές.....	143
6.1 Εισαγωγή.....	143
6.2 Αριθμητικές Συγκρίσεις - Διαγράμματα Ελέγχου EWMA, Shewhart και CUSUM για Διεργασίες BAR(1) και BBAR(1).....	143
6.3 Αριθμητικές Συγκρίσεις - Διαγράμματα Ελέγχου EWMA, Shewhart και CUSUM για Διεργασίες BINARCH(1)	150
6.4 Εφαρμογές σε Πραγματικά Δεδομένα	154
6.4.1 Επιδημιολογικά δεδομένα	154
6.4.2 Εφαρμογές των διαγραμμάτων σε δεδομένα πληθωρισμού.....	165
6.4.3 Εφαρμογές διαγραμμάτων ελέγχου EWMA και DEWMA για διεργασίες BAR(1) – Παρακολούθηση Πλήθους Συνδέσεων σε Σταθμούς Εργασίας.....	178
6.5. Ανακεφαλαίωση	185
Κεφάλαιο 7 Συμπεράσματα & Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα	187
7.1 Συμπεράσματα	187
7.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα	194
Βιβλιογραφία	197
Ελληνική Βιβλιογραφία	197
Ξένη βιβλιογραφία	197
Παραρτήματα.....	209
Παράρτημα Α: Μεθοδολογία Μαρκοβιανών Αλυσίδων	209
Παράρτημα Β: Προτεινόμενα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα για διεργασίες BAR(1) ..	215
Παράρτημα Γ: Μονόπλευρα Διαγράμματα s-EWMA για διεργασίες BAR(1)	220
Γ1: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BAR(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων	220
Γ2: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BAR(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων	221
Γ3: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BAR(1) με προσομοίωση.....	223

Γ4: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BAR(1) με προσομοίωση.....	224
Γ5: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BAR(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων	225
Γ6: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BAR(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων	227
Γ7: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BAR(1) με προσομοίωση.....	229
Γ8: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BAR(1) με προσομοίωση.....	230
Παράρτημα Δ: Μονόπλευρα Διαγράμματα EWMA και DEWMA για διεργασίες BAR(1)	232
Δ1. Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων DEWMA για διεργασίες BAR(1).....	232
Δ2. Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων DEWMA για διεργασίες BAR(1).....	233
Δ3. Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων EWMA για διεργασίες BAR(1).....	234
Δ4. Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων EWMA για διεργασίες BAR(1).....	235
Δ5. Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων DEWMA για διεργασίες BAR(1).....	236
Δ6. Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων DEWMA για διεργασίες BAR(1).....	237
Δ7. Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων EWMA για διεργασίες BAR(1).....	239
Δ8. Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων EWMA για διεργασίες BAR(1).....	240
Παράρτημα Ε: Δίπλευρα Διαγράμματα EWMA και DEWMA για διεργασίες BAR(1)...	241
Ε1. Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των δίπλευρων διαγραμμάτων DEWMA για διεργασίες BAR(1)	241
Ε2. Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των δίπλευρων διαγραμμάτων DEWMA για διεργασίες BAR(1)	242
Ε3. Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των δίπλευρων διαγραμμάτων EWMA για διεργασίες BAR(1)	244

E4. Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των δίπλευρων διαγραμμάτων EWMA για διεργασίες BAR(1)	245
Παράρτημα ΣΤ Προτεινόμενα μονόπλευρα διαγράμματα s-EWMA για διεργασίες BBAR(1)	247
ΣΤ1: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BBAR(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων	247
ΣΤ2: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BBAR(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων.....	248
ΣΤ3: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BBAR(1) με προσομοίωση	251
ΣΤ4: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BBAR(1) με προσομοίωση	253
ΣΤ5: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BBAR(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων.....	255
ΣΤ6: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BBAR(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων.....	257
ΣΤ7: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BBAR(1) με προσομοίωση	260
ΣΤ8: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BBAR(1) με προσομοίωση	261
Παράρτημα Ζ: Προτεινόμενα μονόπλευρα διαγράμματα s-EWMA για διεργασίες BINARCH(1)	264
Ζ1: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BINARCH(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων.....	264
Ζ2: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BINARCH(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων.....	265
Ζ3: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση	268
Ζ4: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση	269
Ζ5: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BINARCH(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων.....	271

Z6: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BINARCH(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων.....	272
Z7: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση.....	275
Z8: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση.....	276
Παράρτημα Η: Προτεινόμενα μονόπλευρα διαγράμματα CUSUM για διεργασίες BINARCH(1)	277
H1: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων CUSUM για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση	277
H2: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων CUSUM για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση	278
H3: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων Combined CUSUM για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση.....	280
H4: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων Combined CUSUM για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση.....	282
H5: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων CUSUM για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση	284
H6: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων CUSUM για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση	285
H7: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων Combined CUSUM για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση.....	287
H8: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων Combined CUSUM για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση.....	289

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1.1	Ιστορική Αναδρομή στον Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας.....	4
Πίνακας 1.2	Οι 8 Διαστάσεις της Ποιότητας.....	7
Πίνακας 1.3	Σφάλματα Τύπου και Τύπου II.....	15
Πίνακας 1.4:	Διαγράμματα ελέγχου για χρονοσειρές με ακέραιες τιμές, επισκόπηση της περιοχής	30
Πίνακας 2.1:	Ιδιότητες της τ.μ. $\alpha \circ N$	38
Πίνακας 3.1:	Διαδικασία Ανάπτυξης Άνω Μονόπλευρου Διαγράμματος Ελέγχου 1-EWMA	62
Πίνακας 3.2:	Διαδικασία Ανάπτυξης Άνω Μονόπλευρου Διαγράμματος Ελέγχου s -EWMA	65
Πίνακας 3.3:	Τιμές ($s, \lambda, UCLs$) και απόδοση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος s -EWMA, Διεργασία BAR(1)	68
Πίνακας 3.4:	Τιμές ($s, \lambda, UCLs$) και απόδοση του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος s -EWMA, Διεργασία BAR(1)	69
Πίνακας 3.5:	Στατιστικός Σχεδιασμός του Δίπλευρου Διαγράμματος DEWMA	74
Πίνακας 3.6:	Υπολογισμός Εκτός Ελέγχου Απόδοσης του Δίπλευρου Διαγράμματος DEWMA.....	75
Πίνακας 3.7:	Προτεινόμενα άνω μονόπλευρα διαγράμματα,.....	78
Πίνακας 3.8:	Προτεινόμενα άνω μονόπλευρα διαγράμματα,.....	78
Πίνακας 3.9:	Προτεινόμενα άνω μονόπλευρα διαγράμματα,.....	79
Πίνακας 3.10:	Προτεινόμενα άνω μονόπλευρα διαγράμματα, μεταβολή μόνο στο ρ_0	80
Πίνακας 3.11:	Προτεινόμενα άνω μονόπλευρα διαγράμματα,.....	82
Πίνακας 3.12:	Προτεινόμενα άνω μονόπλευρα διαγράμματα,.....	83
Πίνακας 3.13:	Προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα,	85
Πίνακας 3.14:	Προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα,	86
Πίνακας 3.15:	Προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα,	86
Πίνακας 3.16:	Προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα,	87
Πίνακας 3.17:	Προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα,	88
Πίνακας 3.18:	Προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα,	88
Πίνακας 3.19:	Προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα,	89
Πίνακας 3.20:	Προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα,	90
Πίνακας 3.21:	Προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα,	91

Πίνακας 3.22: Προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα,	92
Πίνακας 4.1: Διαδικασία Ανάπτυξης Άνω Μονόπλευρου Διαγράμματος Ελέγχου 1-EWMA	98
Πίνακας 4.2: Διαδικασία Ανάπτυξης Άνω Μονόπλευρου Διαγράμματος Ελέγχου <i>s</i> -EWMA	99
Πίνακας 4.3: Τιμές (<i>s</i> , <i>λ</i> , <i>UCLs</i>) και απόδοση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος <i>s</i> - EWMA, Διεργασία BBAR(1) με $\phi_0=0.025$	101
Πίνακας 4.4: Τιμές (<i>s</i> , <i>λ</i> , <i>UCLs</i>) και απόδοση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος <i>s</i> - EWMA, Διεργασία BBAR(1) με $\phi_0=0.05$	102
Πίνακας 4.5: Τιμές (<i>s</i> , <i>λ</i> , <i>LCLs</i>) και απόδοση του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος <i>s</i> - EWMA, Διεργασία BBAR(1) με $\phi_0 = 0.025$	103
Πίνακας 4.6: Τιμές (<i>s</i> , <i>λ</i> , <i>LCLs</i>) και απόδοση του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος <i>s</i> - EWMA, Διεργασία BBAR(1) με $\phi_0 = 0.05$	103
Πίνακας 5.1: Διαδικασία Ανάπτυξης Άνω Μονόπλευρου Διαγράμματος Ελέγχου 1-EWMA	109
Πίνακας 5.2: Διαδικασία Ανάπτυξης Άνω Μονόπλευρου Διαγράμματος Ελέγχου <i>s</i> -EWMA	111
Πίνακας 5.3: Άνω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και <i>s</i> -EWMA, Διεργασία BINARCH(1), Μετατόπιση μόνο στην a_{00}	113
Πίνακας 5.4: Άνω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και <i>s</i> -EWMA, Διεργασία BINARCH(1), Μετατόπιση μόνο στην a_{00} (συνέχεια).....	114
Πίνακας 5.5: Άνω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και <i>s</i> -EWMA, Διεργασία BINARCH(1), Μετατόπιση μόνο στην a_{01}	115
Πίνακας 5.6: Άνω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και <i>s</i> -EWMA, Διεργασία BINARCH(1), Μετατόπιση μόνο στην a_{01} (συνέχεια).....	116
Πίνακας 5.7: Κάτω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και <i>s</i> -EWMA, Διεργασία BINARCH(1), Μετατόπιση μόνο στην a_{00}	118
Πίνακας 5.8: Κάτω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και <i>s</i> -EWMA, Διεργασία BINARCH(1), Μετατόπιση μόνο στην a_{00} (συνέχεια).....	119
Πίνακας 5.9: Κάτω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και <i>s</i> -EWMA, Διεργασία BINARCH(1), Μετατόπιση μόνο στην a_{01}	120
Πίνακας 5.10: Κάτω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και <i>s</i> -EWMA, Διεργασία BINARCH(1), Μετατόπιση μόνο στην a_{01} (συνέχεια).....	121

Πίνακας 5.11: Σύγκριση των διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA για την ανίχνευση αυξήσεων σε BINARCH(1) διεργασία	123
Πίνακας 5.12: Σύγκριση των διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA για την ανίχνευση αυξήσεων σε BINARCH(1) διεργασία	123
Πίνακας 5.13: Σύγκριση των διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA για την ανίχνευση αυξήσεων σε BINARCH(1) διεργασία	124
Πίνακας 5.14: Σύγκριση των διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA για την ανίχνευση αυξήσεων σε BINARCH(1) διεργασία	124
Πίνακας 5.15: Σύγκριση των διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA για την ανίχνευση μειώσεων σε BINARCH(1) διεργασία	126
Πίνακας 5.16: Σύγκριση των διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA για την ανίχνευση μειώσεων σε BINARCH(1) διεργασία	126
Πίνακας 5.17: Σύγκριση των διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA για την ανίχνευση μειώσεων σε BINARCH(1) διεργασία	127
Πίνακας 5.18: Σύγκριση των διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA για την ανίχνευση μειώσεων σε BINARCH(1) διεργασία	127
Πίνακας 5.19: Διαδικασία Ανάπτυξης Διαγράμματος Ελέγχου LR-CUSUM	131
Πίνακας 5.20: Σύγκριση των διαγραμμάτων LR-CUSUM και cLR-CUSUM στην ανίχνευση αυξήσεων	133
Πίνακας 5.21: Σύγκριση των διαγραμμάτων LR-CUSUM και cLR-CUSUM για την ανίχνευση μειώσεων	134
Πίνακας 5.22: Σύγκριση των δίπλευρων διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA, διεργασία BINARCH(1), $\alpha_{00} = 0.35$, $\alpha_{01} = 0.25$, $n = 30$	137
Πίνακας 5.23: Σύγκριση των δίπλευρων διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA, διεργασία BINARCH(1), $\alpha_{00} = 0.08$, $\alpha_{01} = 0.85$, $n = 30$	138
Πίνακας 6.1: Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, s -EWMA, CUSUM. Μοντέλο BAR(1), περίπτωση αυξήσεων	144
Πίνακας 6.2: Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, s -EWMA, CUSUM. Μοντέλο BAR(1), περίπτωση μειώσεων.....	146
Πίνακας 6.3: Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, s -EWMA, CUSUM. Μοντέλο BBAR(1), $\phi_0 = 0.025$, περίπτωση αυξήσεων.....	147
Πίνακας 6.4: Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, s -EWMA, CUSUM. Μοντέλο BBAR(1), $\phi_0 = 0.05$, περίπτωση αυξήσεων.....	147

Πίνακας 6.5: Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, <i>s</i> -EWMA, CUSUM. Μοντέλο BBAR(1), $\phi_0 = 0.05$, περίπτωση αυξήσεων	148
Πίνακας 6.6: Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, <i>s</i> -EWMA, CUSUM. Μοντέλο BBAR(1), $\phi_0 = 0.025$, περίπτωση μειώσεων	149
Πίνακας 6.7: Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, <i>s</i> -EWMA, CUSUM. Μοντέλο BBAR(1), $\phi_0 = 0.05$, περίπτωση μειώσεων	149
Πίνακας 6.8: Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, <i>s</i> -EWMA, LR-CUSUM και cLR-CUSUM.	152
Πίνακας 6.9: Σύγκριση των διαγραμμάτων Shewhart, <i>s</i> -EWMA, CUSUM και Combined CUSUM για την ανίχνευση μειώσεων σε μία BINARCH(1) διεργασία.....	153
Πίνακας 6.10: Προσαρμογή των μοντέλων BAR(1) και BBAR(1) στα δεδομένα Hantavirus	156
Πίνακας 6.11: Προσαρμογή του μοντέλου BINARCH(1) στα δεδομένα Hantavirus.....	160
Πίνακας 6.12: Προσαρμογή των μοντέλων BAR(1), BBAR(1) και BINARCH(1) στα δεδομένα πληθωρισμού	167
Πίνακας 6.13: Προσαρμογή μοντέλου BAR(1) στα δεδομένα πλήθους συνδέσεων	180
Πίνακας 6.14: Εκτιμήσεις των παραμέτρων της διεργασίας π , ρ από τα δεδομένα της Φάσης I.....	181
Πίνακας 7.1: Προτεινόμενα διαγράμματα ελέγχου για διεργασίες BAR(1), BBAR(1) και BINARCH(1).....	193
Πίνακας B1: Προτεινόμενα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα,	215
Πίνακας B2: Προτεινόμενα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα,	215
Πίνακας B3: Προτεινόμενα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα,	216
Πίνακας B4: Προτεινόμενα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα,	216
Πίνακας B5: Προτεινόμενα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα,	217
Πίνακας B6: Προτεινόμενα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα,	217
Πίνακας B7: Προτεινόμενα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα,	218
Πίνακας B8: Προτεινόμενα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα,	219

Κατάλογος Εικόνων

Εικόνα 1.1: Δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου όπου η διεργασία είναι εντός των ορίων ελέγχου	12
Εικόνα 1.2: Δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου όπου η διεργασία είναι εκτός των ορίων ελέγχου	13
Εικόνα 1.3: Δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου όπου η διεργασία είναι εκτός των ορίων ελέγχου	14
Εικόνα 6.1: Γραφική Παράσταση Δεδομένων Hantavirus	154
Εικόνα 6.2: Άνω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και <i>s</i> -EWMA για τα δεδομένα hantavirus	157
Εικόνα 6.3: Μονόπλευρο διάγραμμα CUSUM για τα δεδομένα hantavirus, περίπτωση αυξήσεων	157
Εικόνα 6.4: Κάτω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και <i>s</i> -EWMA για τα δεδομένα hantavirus	159
Εικόνα 6.5: Μονόπλευρο διάγραμμα CUSUM για τα δεδομένα hantavirus, περίπτωση μειώσεων	159
Εικόνα 6.6: Μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart, LR-CUSUM και cLR-CUSUM για τα δεδομένα hantavirus. Περίπτωση αυξήσεων.	162
Εικόνα 6.7: Άνω μονόπλευρα διαγράμματα <i>s</i> -EWMA για τα δεδομένα Hantavirus	162
Εικόνα 6.8: Μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart, LR-CUSUM και cLR-CUSUM για τα δεδομένα hantavirus. Περίπτωση μειώσεων.	164
Εικόνα 6.9: Κάτω μονόπλευρα διαγράμματα <i>s</i> -EWMA για τα δεδομένα hantavirus	164
Εικόνα 6.10: Γραφική Παράσταση Δεδομένων πληθωρισμού	166
Εικόνα 6.11: Άνω μονόπλευρο διάγραμμα Shewhart για τα δεδομένα πληθωρισμού, Φάση I	169
Εικόνα 6.12: Άνω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και <i>s</i> -EWMA για τα δεδομένα πληθωρισμού, Φάση II	170
Εικόνα 6.13: Μονόπλευρα διαγράμματα LR-CUSUM και cLR-CUSUM για τα δεδομένα πληθωρισμού, Φάση II	170
Εικόνα 6.14: Κάτω μονόπλευρο διάγραμμα Shewhart για τα δεδομένα πληθωρισμού, Φάση I	172
Εικόνα 6.15: Κάτω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και <i>s</i> -EWMA για τα δεδομένα πληθωρισμού, Φάση II	173

Εικόνα 6.16: Μονόπλευρα διαγράμματα LR-CUSUM και cLR-CUSUM για τα δεδομένα πληθωρισμού, Φάση II.....	174
Εικόνα 6.17: Άνω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και s-EWMA για τα δεδομένα πληθωρισμού, Φάση II.....	176
Εικόνα 6.18: Κάτω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και s-EWMA για τα δεδομένα πληθωρισμού, Φάση II.....	177
Εικόνα 6.19: Γραφική Παράσταση πλήθους συνδέσεων.....	179
Εικόνα 6.20: Δίπλευρο διάγραμμα Shewhart Φάσης I για τα δεδομένα πλήθους συνδέσεων, 3 Μαΐου 2005.....	180
Εικόνα 6.21: Δίπλευρο διάγραμμα Shewhart Φάσης II για τα δεδομένα πλήθους συνδέσεων, 10 Μαΐου 2005.....	182
Εικόνα 6.22: Δίπλευρα διαγράμματα EWMA και DEWMA για τα δεδομένα πλήθους συνδέσεων, 10 Μαΐου 2005.....	183
Εικόνα 6.23: Δίπλευρο διάγραμμα Shewhart Φάσης II για τα δεδομένα πλήθους συνδέσεων, 17 Μαΐου 2005.....	184
Εικόνα 6.24: Δίπλευρα διαγράμματα EWMA και DEWMA για τα δεδομένα πλήθους συνδέσεων, 17 Μαΐου 2005.....	184
Εικόνα A.1: Περιοχή ελέγχου και περιοχή εκτός ελέγχου σε ένα κάτω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου s-EWMA.....	210
Εικόνα A.2: Περιοχή ελέγχου και περιοχή εκτός ελέγχου σε ένα δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου s-EWMA.....	213

Κατάλογος Συντομογραφιών

AOE	Άνω όριο ελέγχου
EMΠ	Εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας
ΚΓ	Κεντρική γραμμή
KOE	Κάτω όριο ελέγχου
ΣΕΔ	Στατιστικός έλεγχος διεργασιών
ΣΕΠ	Στατιστικός έλεγχος ποιότητας
τ.μ.	Τυχαία μεταβλητή
ACF	Autocorrelation function / Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης
AIC	Akaike information criterion / Κριτήριο πληροφορίας Akaike
ARL	Average run length / Μέσο μήκος ροής
BAR(1)	Binomial autoregressive of first order model / Διωνυμικό αυτοπαλίνδρομο μοντέλο πρώτης τάξης
BBAR(1)	Beta-binomial autoregressive of first order model / Βήτα-διωνυμικό αυτοπαλίνδρομο μοντέλο πρώτης τάξης
BIC	Bayesian information criterion / Μπευζιανό κριτήριο πληροφορίας
BINARCH(1)	Binomial INARCH(1) / Διωνυμικό υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικό αυτοπαλίνδρομο μοντέλο 1ης τάξης
CD	Conditional delay / Υπό συνθήκη καθυστέρηση ανίχνευσης
CED	Conditional expected delay / Αναμενόμενη υπό συνθήκη καθυστέρηση ανίχνευσης
CL	Center line / Κεντρική γραμμή
cLR-CUSUM	Combined likelihood ratio CUSUM / Συνδυασμένο διάγραμμα LR-CUSUM
CLS	Conditional least squares / Υπό συνθήκη ελάχιστα τετράγωνα
CML	Conditional maximum likelihood / Υπό συνθήκη μέγιστη πιθανοφάνεια
CRL	Conforming run length / Μήκος ροής συμμορφούμενων αντικειμένων
CUSUM	Cumulative sum / Συσσωρευμένο άθροισμα
CUSUM-DR	CUSUM-type chart with delay rule / Διάγραμμα ελέγχου CUSUM με κανόνα καθυστέρησης
DEWMA	Double exponentially weighted moving average / Διπλά εκθετικά σταθμισμένος κινητός μέσος όρος
EWMA	Exponentially weighted moving average / Διάγραμμα ελέγχου για τον εκθετικά σταθμισμένο μέσο
FAR	False alarm rate / Ποσοστό εσφαλμένου συναγερμού
iid	Independent and identically distributed / Ανεξάρτητα και ισόνομα κατανομημένα
LCL	Lower Control Limit / Κάτω όριο ελέγχου

<i>LR-CUSUM</i>	Likelihood Ratio CUSUM/Το διάγραμμα CUSUM το οποίο βασίζεται στο λόγο πιθανοφάνειας
<i>MA</i>	Moving Average / Κινούμενος μέσος
<i>MLE</i>	Maximum likelihood estimation / Μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας
<i>PACF</i>	Partial autocorrelation function / Συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης
<i>PINAR(1)</i>	Poisson Integer-Valued Autoregressive model of first order / Μοντέλο Poisson INAR(1)
<i>SDE</i>	Statistical design of experiments / Στατιστικός σχεδιασμός πειραμάτων
<i>SFCUSUM</i>	Score function-based CUSUM / Διάγραμμα CUSUM με βάση τη συνάρτηση σκορ
<i>SPC</i>	Statistical process control / Στατιστικός έλεγχος διεργασιών
<i>SQC</i>	Statistical quality Control / Στατιστικός έλεγχος ποιότητας
<i>ssARL</i>	Steady-state ARL / Αξιολόγηση της εκτός ελέγχου απόδοσης του διαγράμματος
<i>TQM</i>	Total quality management / Διοίκηση ολικής ποιότητας
<i>UCL</i>	Upper control limit / Άνω όριο ελέγχου
<i>UMPU</i>	Uniformly most powerful unbiased test / Ομοιόμορφα ισχυρότατος αμερόληπτος έλεγχος
<i>ZIP</i>	Zero-inflated Poisson / Το μοντέλο της μηδενοδοιγκωμένης κατανομής Poisson
<i>zsARL</i>	Zero-state ARL / Αξιολόγηση της εντός ελέγχου απόδοσης του διαγράμματος
<i>ZTPINAR(1)</i>	Zero-truncated Poisson INAR(1) / PINAR(1) διαδικασία περικομμένη στο μηδέν

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή – Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

1.1 Εισαγωγή στο Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας

Συχνά στην καθημερινότητα αναφέρεται η έννοια της ποιότητας ενός προϊόντος. Προϊόν είναι οτιδήποτε μπορεί να προσφερθεί σε μια αγορά και να προσελκύσει την προσοχή, να αγορασθεί, να χρησιμοποιηθεί ή να καταναλωθεί και το οποίο θα μπορούσε να ικανοποιήσει μια ανάγκη ή επιθυμία. Ο όρος προϊόν δε σχετίζεται μόνο με το υλικό αγαθό αλλά και με την υπηρεσία. Ως υπηρεσία μπορεί να οριστεί η κοινωνική αλληλεπίδραση που προϋποθέτει την άμεση επαφή μεταξύ πελάτη και παρόχου, κατά την οποία ο δεύτερος προσφέρει στον πρώτο άυλα προϊόντα, όπως πληροφορίες, γνώσεις συμβουλές και μελέτες (Montgomery (2020)).

Επιπλέον, ο όρος προϊόν παραπέμπει σε συστήματα δικτύου που διαχειρίζονται τις κοινότητες ή ακόμη και ολόκληρη την κοινωνία, όπως το τραπεζικό σύστημα, το σύστημα υγειονομικής περίθαλψης και το διαδίκτυο. Στην περίπτωση που η ποιότητα οποιουδήποτε από αυτά τα παραπάνω προϊόντα αντιμετώπιζε πρόβλημα, αυτό θα είχε αντίκτυπο στην καθημερινή ζωή. Αυτό εγείρει ένα σημαντικό ερώτημα. Πώς γίνεται να ελεγχθεί ή να διασφαλιστεί η ποιότητα των προϊόντων; Για να απαντηθεί η ερώτηση, μπορούν να χρησιμοποιηθούν στατιστικές μέθοδοι και τεχνικές, το σύνολο των οποίων αποτελούν αυτό που είναι γνωστό ως **Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας** (ΣΕΠ) (Αντζουλάκος (2003)).

Ο **Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας** (*Statistical Quality Control, SQC*) είναι ένα σύνολο στατιστικών μεθόδων οι οποίες στοχεύουν στη λήψη αποφάσεων σχετικά με τις προδιαγραφές ενός προϊόντος που παράγει μια επιχείρηση, τον τρόπο παρακολούθησης και λειτουργίας μιας παραγωγικής διεργασίας, καθώς επίσης και τον τρόπο ελέγχου της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων. Όταν εφαρμόζονται οι τεχνικές του ΣΕΠ, βασικός στόχος είναι να διασφαλιστεί ότι η παραγωγική διαδικασία λειτουργεί σύμφωνα με τα επιθυμητά πρότυπα και ότι πληρούνται οι σχετικές απαιτήσεις των πελατών (Montgomery (2020)).

Για την αποτελεσματική χρήση του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας απαιτείται η ενσωμάτωσή του σε ένα πλαίσιο λειτουργίας και διοίκησης της επιχείρησης που έχει ως στόχο τη διαρκή

βελτίωση της ποιότητας σε όλα τα επίπεδα της επιχείρησης. Το πλαίσιο αυτό είναι γνωστό ως **Διοίκηση Ολικής Ποιότητας** (*Total Quality Management, TQM*) (Μπερσίμης και συν. (2021)).

1.2 Ιστορική Αναδρομή

Η ιστορία του ΣΕΠ ξεκίνησε το 1924, όταν ο Walter Andrew Shewhart (1891-1967) εισήγαγε την έννοια του **διαγράμματος ελέγχου** (*control chart*) σε ένα υπόμνημα (*technical report*) που κυκλοφόρησε από την εταιρεία Bell Telephone Laboratories, στην οποία εργαζόταν. Έκτοτε, ο W. A. Shewhart θεωρείται ως ο ιδρυτής του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας. Εκτός από τον Shewhart, σημαντική συμβολή στην ανάπτυξη πρώιμων τεχνικών του ΣΕΠ είχαν και οι Harold French Dodge (1893-1976) και Harry Roming (1900-1966), οι οποίοι πρότειναν τη χρήση σχεδίων δειγματοληψίας για την αποδοχή/απόρριψη σωρών αντικειμένων (Dodge and Romig, 1944). Ουσιαστικά, σε αυτούς αποδίδεται η τεχνική της **δειγματοληψίας αποδοχής** (*acceptance sampling*) και των σχετικών σχεδίων αποδοχής/απόρριψης σωρών αντικειμένων. Αν και οι Dodge και Romig πρότειναν τα σχέδια αυτά το 1944 δίνοντας και πίνακες για την πρακτική εφαρμογή τους (δείτε Dodge and Romig (1944)), η εφαρμογή τους στη βιομηχανία δεν ξεκίνησε σε αυτή τη χρονική περίοδο. Ο λόγος ήταν ότι οι διευθυντές παραγωγής δεν πίστευαν ότι οι στατιστικές διαδικασίες πρέπει να δημιουργηθούν και να εφαρμοστούν στη διαδικασία παραγωγής (Niavand, 2014).

Το 1937, κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, αυξήθηκε η ζήτηση για αγορά τροφίμων, πυρομαχικών, ρούχων και φαρμάκων από τον στρατό των ΗΠΑ. Ωστόσο, η έλλειψη των επιστημονικών μεθόδων παρακολούθησης των διαδικασιών παραγωγής των προϊόντων ανάγκασε τους στρατιωτικούς ηγέτες των ΗΠΑ να στραφούν στη χρήση μεθόδων του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας (Niavand, 2014). Η ενέργεια αυτή είχε σημαντική συμβολή στη νίκη των ΗΠΑ στον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο ενώ ταυτόχρονα, καθιερώθηκε ο στατιστικός έλεγχος ποιότητας ως κάτι του οποίου η χρήση μπορεί να αποφέρει σημαντικά οφέλη σε επιχειρήσεις και βιομηχανίες.

Μετά το τέλος του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, ιδρύθηκε η επιστημονική ένωση *Association of U.S. Quality Control*, η οποία αργότερα μετονομάστηκε σε *American Society for Quality (ASQ)*, όνομα με το οποίο είναι γνωστή μέχρι και σήμερα. Η ένωση αυτή ξεκίνησε αρχικά με στόχο την προώθηση των τεχνικών του ΣΕΠ στην αμερικανική ήπειρο αλλά πλέον θεωρείται παγκοσμίως μια από τις πιο γνωστές ενώσεις για τον στατιστικό έλεγχο ποιότητας. Λίγα χρόνια αργότερα, οι

τεχνικές του στατιστικού ελέγχου ποιότητας εξαπλώθηκαν σε χώρες πέρα από την αμερικανική ήπειρο, και συγκεκριμένα στο Ηνωμένο Βασίλειο και την Ιαπωνία.

Η περίπτωση είναι ιδιαίτερα χαρακτηριστική και συνήθως αναφέρεται ως παράδειγμα προς μίμηση και στο τι μπορεί να κάνει η χρήση στατιστικών τεχνικών για τον έλεγχο ποιότητας. Πιο συγκεκριμένα, με την καθοδήγηση του William Edwards Deming (1900-1993), αναπτύχθηκαν μέθοδοι στατιστικού ελέγχου ποιότητας στην Ιαπωνία, που αποτέλεσαν τα καλύτερα συστήματα ποιοτικού ελέγχου στον κόσμο. Επιπρόσθετα, ο Kaoru Ishikawa (1915-1989) ήταν ένας από τους πιο σημαντικούς Ιάπωνες σε ότι αφορά την ανάπτυξη διεργασιών ποιοτικού ελέγχου. Ο Ishikawa ξεκίνησε τις μελέτες ποιοτικού ελέγχου το 1950 και λίγα χρόνια αργότερα συνάντησε τον Shewhart στα εργαστήρια Bell. Τη συγκεκριμένη περίοδο, η τηλεφωνική εταιρεία Bell είχε επεκταθεί σημαντικά, ωστόσο, αντιμετώπιζε ορισμένα προβλήματα ποιότητας που προκύπταν λόγω της υψηλής παραγωγής τηλεφωνικού εξοπλισμού. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα, η Bell να ιδρύσει μια επιστημονική ομάδα για την επίλυση των προβλημάτων παραγωγής με τη χρήση της επιστήμης της στατιστικής. Στα εργαστήρια αυτά, ο Shewhart εφάρμοσε για πρώτη φορά στατιστικές μεθόδους στο πρόβλημα του ελέγχου της ποιότητας των προϊόντων που παράγονται. Συγκεκριμένα, παρέδωσε μια τεχνική αναφορά (technical report) στην εταιρεία που εργαζόταν το οποίο περιείχε ένα σκίτσο, το οποίο έμοιαζε με ένα σύγχρονο διάγραμμα ελέγχου. Ωστόσο, ο όρος στατιστικός έλεγχος ποιότητας επινοήθηκε από τον Shewhart, το 1931, στο βιβλίο του με τίτλο *Economic Control of Quality of Manufactured Products* (Goetsch and Davis, 1997).

Η έννοια του ΣΕΠ έχει υποστεί αρκετές αλλαγές από την αρχική της διατύπωση μέχρι σήμερα. Μία από τις πιο σημαντικές επιρροές που υπήρξαν στην επιστημονική περιοχή του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας ήταν οι καινοτόμες ιδέες του Genichi Taguchi (1924-2012), οι οποίες είχαν στόχο τη βελτίωση της ποιότητας στις Η.Π.Α. Ειδικότερα, πρότεινε τη χρήση των μεθόδων του Στατιστικού Σχεδιασμού Πειραμάτων (*Statistical Design of Experiments-SDE*) έτσι ώστε να επιτευχθεί ο καλύτερος δυνατός σχεδιασμός ενός προϊόντος με την μικρότερη μεταβλητότητα αλλά και με το ελάχιστο κόστος.

Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί ότι κατά τη διάρκεια της δεκαετίας 1950 προστέθηκαν άλλα δύο διαγράμματα ελέγχου προκειμένου να βελτιωθεί περαιτέρω η ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων. Συγκεκριμένα, στην εργασία του Page (1954) προτάθηκε το διάγραμμα ελέγχου τύπου CUSUM, ενώ λίγα χρόνια αργότερα, στην εργασία του Roberts (1959) ορίστηκε το διάγραμμα ελέγχου τύπου EWMA. Στη συνέχεια, το 1989, η Motorola εισάγει την έννοια και κυρίως, το

πρόγραμμα Six Sigma (δείτε π.χ. Allen (2019), Costa et al. (2019)), το οποίο στοχεύει στη βελτίωση της ποιότητας μέσω της ελαχιστοποίησης της μεταβλητότητας της διεργασίας. Μέσω της εφαρμογής του προγράμματος Six Sigma, η Motorola βελτίωσε σημαντικά τα προϊόντα και τις υπηρεσίες, το οποίο φυσικά τις απέφερε σημαντικά κέρδη, ενώ παράλληλα μείωσε και τα σχετικά κόστη.

Κλείνοντας την ιστορική αναδρομή στον έλεγχο ποιότητας, θα παρουσιαστούν με χρονολογική σειρά τα κυριότερα σημεία που συνέβαλαν στην εξέλιξη του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας από το 1900 έως και σήμερα (δείτε επίσης Montgomery (2020)). Τα εν λόγω χρονικά συμβάντα παρατίθενται συνοπτικά στον Πίνακα 1.1.

Πίνακας 1.1 Ιστορική Αναδρομή στον Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας

1901	Τα πρώτα εργαστήρια προτύπων (standards) ιδρύονται στη Μ. Βρετανία
1907	Η AT&T Bell Laboratories αρχίζει τη συστηματική επιθεώρηση και έλεγχο προϊόντων και υλικών
1919	Η Ένωση Τεχνικών Επιθεωρητών ιδρύεται στην Αγγλία η οποία αργότερα μετονομάζεται σε Ινστιτούτο Διασφάλισης της Ποιότητας
1920	Η ένωση Τεχνικών Επιθεωρητών ιδρύεται στην Αγγλία η οποία αργότερα μετονομάζεται σε Ινστιτούτο Διασφάλισης της Ποιότητας
1924	Ο W. A. Shewhart εισάγει τα διαγράμματα ελέγχου σε ένα Technical Report στην AT&T Bell
1928	Το δειγματοληπτικό σχέδιο αποδοχής σωρού αναπτύσσεται από τους Dodge και Roming
1931	Ο W. Shewhart εκδίδει το περιοδικό Economic Control of Quality Manufactured Product
1932	Ο W. Shewhart δίνει διαλέξεις σε στατιστικές μεθόδους στην παραγωγή και στα διαγράμματα ελέγχου στο Πανεπιστήμιο του Λονδίνου
1938	Ο W.E. Deming προσκαλεί τον Shewhart για σεμινάρια στα διαγράμματα ελέγχου στο U.S Department of Agriculture Graduate School
1940	Το Υπουργείο Πολέμου των Η.Π.Α. εκδίδει ένα οδηγό για την ανάλυση δεδομένων με χρήση διαγραμμάτων ελέγχου

1946	Ο W.E. Deming προσκαλείται στην Ιαπωνία για να δώσει σεμινάρια Στατιστικού Ποιοτικού Ελέγχου
1948	Καθηγητής G. Taguchi αρχίζει τη μελέτη των πειραματικών σχεδιασμών
1950	Ο K. Ishikawa εισάγει το διάγραμμα αιτίου- αποτελέσματος (cause and effect diagram)
1954	Ο J. M. Juran προσκαλείται από την Ιαπωνία για να δώσει διαλέξεις σε θέματα διοίκησης και βελτίωσης της ποιότητας. Ο E. S. Page εισάγει το διάγραμμα ελέγχου CUSUM
1959	Ο S. Roberts εισάγει το διάγραμμα ελέγχου EWMA. Ξεκινά η έκδοση του επιστημονικού περιοδικού Technometrics
1960	Η ιδέα των κύκλων ποιότητας εισάγεται από τον K. Ishikawa
1969	Τα περιοδικά Quality Progress και Journal of Technology αρχίζουν να εκδίδονται
1975	Εμφανίζονται τα πρώτα βιβλία σε σχεδιασμό πειραμάτων
1989	Αρχίζει να εκδίδεται το περιοδικό Quality Engineering. Η Motorola εισάγει την έννοια six-sigma
1990	Σταδιακή αύξηση της ζήτησης στην βιομηχανία κατά ISO 9000
1997	Η προσέγγιση six-sigma της Motorola υιοθετείται από άλλες βιομηχανίες
1998	Η American Society for Quality Control γίνεται American Society for Quality (www.asq.org), προσπαθώντας να υποδείξει τις σημαντικότερες πτυχές του τομέα της βελτίωσης της ποιότητας.
2000s	Εκδίδονται τα πρότυπα ISO 9000:2000. Οι διεργασίες βελτίωσης της ποιότητας επεκτείνονται και σε άλλους τομείς εκτός της βιομηχανίας συμπεριλαμβάνοντας μεταξύ άλλων τους τομείς της υγείας, της ασφάλειας και οικονομικές υπηρεσίες

1.3 Η έννοια της ποιότητας ελέγχου

Η ποιότητα μπορεί να οριστεί ως το χαρακτηριστικό ενός αγαθού ή μιας υπηρεσίας που μπορεί να εκπληρώσει μία επιθυμία. Με άλλη έννοια, ορίζεται επίσης ως η καταλληλότητα χρήσης ενός προϊόντος (Juran (1988)). Συγκεκριμένα, η ποιότητα του προϊόντος καθορίζει το αν θα επιλέξει ο/η καταναλωτής το συγκεκριμένο μεταξύ πολλών ανταγωνιστικών του. Επιπλέον, η ποιότητα ενός προϊόντος που παράγει μια βιομηχανία ή η ποιότητα της υπηρεσίας που προσφέρει ένας

οργανισμός ή μια επιχείρηση, παίζει ζωτικό ρόλο στην ανάπτυξη τους, την επιχειρηματική τους επιτυχία καθώς και στην επιβίωσή τους σε μια ανταγωνιστική αγορά.

Επιπρόσθετα, η έννοια της ποιότητας συνδέεται άρρηκτα με την ικανοποίηση των πελατών και ως εκ τούτου θα πρέπει το προϊόν που παράγεται να ακολουθεί ορισμένα πρότυπα ή προδιαγραφές. Με τον όρο προδιαγραφή, εννοούνται ορισμένες προϋποθέσεις που περιγράφουν λεπτομερώς τη διεργασία, όπως για παράδειγμα το υλικό που χρησιμοποιείται για την κατασκευή του προϊόντος, ενώ με την έννοια πρότυπο αναφέρονται οι γενικές απαιτήσεις που χρειάζεται να πληροί ένα προϊόν ή μία διεργασία, οι οποίες συνήθως επιβάλλονται από την διοίκηση της επιχείρησης ή τις νομοθετικές αρχές προκειμένου το προϊόν που θα παραχθεί να είναι κατάλληλο για χρήση.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι μία έννοια που συνδέεται άμεσα με την παραγωγή ενός προϊόντος είναι οι περιοχές αποδοχής των ποιοτικών χαρακτηριστικών (*quality characteristics*) του προϊόντος, οι οποίες ονομάζονται όρια προδιαγραφών (*specifications limits*) και καθορίζονται κατά τον σχεδιασμό του προϊόντος. Συγκεκριμένα, ένα προϊόν θα είναι αποδεκτό όταν οι τιμές του ποιοτικού χαρακτηριστικού ανήκουν εντός αυτών των ορίων. Ειδικότερα, ενδιαφέρει η τιμή του να είναι όσο το δυνατόν πλησιέστερα στην επιθυμητή τιμή ή αλλιώς στην τιμή στόχο (*target value, T*), η οποία βρίσκεται συνήθως στο μέσο του διαστήματος του κάτω και άνω ορίου προδιαγραφών. Στην περίπτωση που ένα τουλάχιστον ποιοτικό χαρακτηριστικό του προϊόντος δεν πληροί τις προδιαγραφές που απαιτούνται ή αλλιώς όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό του που λαμβάνει τιμή εκτός των ορίων προδιαγραφών τότε καλείται ελαττωματικό ή μη συμμορφούμενο (*defective or nonconforming*). Άρα, σύμφωνα με τους Montgomery (2020) και Ryan (2011) το προϊόν παρουσιάζει ελάττωμα ή ατέλεια (*defect or nonconformity*).

Γενικά, η ποιότητα μπορεί να ταξινομηθεί ως ποιότητα του σχεδιασμού (*quality of design*) και ποιότητα της συμμόρφωσης (*quality of conformance*) (δείτε π.χ. Sinha and Willborn (1985), Gitlow et al.(1995), Widrick et al. (2002)). Η ποιότητα του σχεδιασμού μπορεί να περιγραφεί ως τα αγαθά και οι υπηρεσίες που παράγονται σε διάφορα σχέδια και επίπεδα. Η ποιότητα του προϊόντος, όπως και άλλα εταιρικά θέματα, πρέπει να αναθεωρούνται συνεχώς σύμφωνα με τις τρέχουσες ρυθμίσεις. Δύο από τους πιο διάσημους επιστήμονες, ο Shewhart και ο Deming, εργάστηκαν για την ποιότητα και τη διαχείριση της ποιότητας χρησιμοποιώντας στατιστικές θεωρίες και έννοιες. Συγκεκριμένα, κατά τη διάρκεια του έτους 1927, ο Deming ο οποίος εργαζόταν στο Υπουργείο Γεωργίας των Η.Π.Α. είχε την ευκαιρία να συναντηθεί με τον Shewhart

στα εργαστήρια της Bell. Η συνάντηση αυτή είχε καθοριστική σημασία για την εξέλιξη του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας, καθώς ο Deming επιμελήθηκε μια σειρά διαλέξεων που έδωσε ο Shewhart στο Υπουργείο Γεωργίας των ΗΠΑ. Το υλικό που καλύφθηκε στις διαλέξεις περιλάμβανε τις βασικές έννοιες του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας και του διαγράμματος ελέγχου, ενώ λίγα χρόνια αργότερα, το 1939, εκδόθηκε το βιβλίο του Shewhart με τίτλο *Statistical Method from the Viewpoint of Quality Control* (Shewhart (1939)).

Αναφορικά με την ποιότητα της συμμόρφωσης, ο Garvin (1987) περιέγραψε τις παρακάτω οκτώ διαστάσεις ποιότητας (Πίνακας 1.2). Η επίτευξη του στόχου της ποιότητας των αντικειμένων δεν είναι τόσο εύκολο έργο. Πραγματοποιείται μία συνεχής παρακολούθηση του συστήματος παραγωγής και διαχείρισης χρησιμοποιώντας τον Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας (Ryan (2011)).

Η μακροπρόθεσμη επίδραση της ποιότητας είναι ένας επιθυμητός στόχος για τη διοίκηση της επιχείρησης. Δεν αρκεί μόνο η απόκτηση της ποιότητας ή της υπηρεσίας του προϊόντος, αλλά η διατήρησή του, η οποία απαιτεί οικονομικό κόστος. Είναι αποκλειστική ευθύνη της διοίκησης να διατηρήσει την ισορροπία μεταξύ της ποιότητας και του κόστους που προκύπτει για τη διατήρηση αυτής της ποιότητας. Επομένως, αν πραγματοποιηθεί η κατάλληλη ανάλυση του κόστους, τότε η ποιότητα θα οδηγήσει στον στόχο της διοίκησης.

Πίνακας 1.2 Οι 8 Διαστάσεις της Ποιότητας

Απόδοση	Πόσο αξίζει το προϊόν για την προβλεπόμενη εργασία; Το προϊόν ή οι υπηρεσίες αξιολογούνται για τις συγκεκριμένες λειτουργίες του. Εάν οι επιθυμητές λειτουργίες εκτελούνται σωστά, τότε η απόδοση του προϊόντος είναι υψηλή.
Αξιοπιστία	Πόσο συχνά το προϊόν αποτυγχάνει να αποδώσει; Όταν η χρήση του προϊόντος είναι κατάλληλη για μεγάλο χρονικό διάστημα, τότε αναφέρεται ότι το προϊόν είναι αξιόπιστο. Για παράδειγμα, εάν η χρήση ενός κινητήρα αυτοκινήτου διαρκεί για μεγάλο χρονικό διάστημα, τότε η αξιοπιστία του είναι υψηλή, αλλιώς είναι αναξιόπιστο.
Ανθεκτικότητα	Πόσο καιρό εξυπηρετεί το προϊόν; Αυτή είναι η πιο κοινή ιδιότητα που επιθυμούν οι πελάτες για οποιοδήποτε προϊόν. Οι πελάτες θέλουν να αγοράσουν τα προϊόντα που τους εξυπηρετούν για μεγαλύτερη διάρκεια

	ζωής. Ειδικότερα, αυτή η διάσταση ισχύει για αυτοκίνητα, ηλεκτρονικά, προϊόντα επικοινωνίας κ.λπ.
Λειτουργικότητα	Η φθορά είναι ένα κοινό χαρακτηριστικό αρκετών προϊόντων. Ωστόσο, η ποιότητα οποιουδήποτε προϊόντος είναι κατάλληλη στον καταναλωτή εάν είναι εύκολο να λάβει τις υπηρεσίες του. Για παράδειγμα, οι εταιρείες κατασκευής κινητών παρέχουν υπηρεσίες μεταπωλήσεων του κινητού. Στην περίπτωση που αντιμετωπιστεί οποιοδήποτε πρόβλημα στον χρήστη, τότε ένα μεγάλο μέρος εταιρειών παρέχουν την αντικατάσταση του κινητού.
Χαρακτηριστικά	Ποιες επιπλέον λειτουργίες μπορεί να κάνει το προϊόν; Οι πελάτες έχουν την τάση να αναζητούν προϊόντα με κάποια επιπλέον χαρακτηριστικά. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, αν το προϊόν διαθέτει τις προστιθέμενες λειτουργίες θα έχει και καλύτερη ποιότητα.
Εκλαμβανόμενη Ποιότητα	Ποια είναι η φήμη του προϊόντος; Συνήθως, οι πελάτες συνδέονται με τις εταιρείες ή τα προϊόντα με τα οποία η προηγούμενη εμπειρία τους είναι ευχάριστη και ικανοποιητική. Για παράδειγμα εάν ένας πελάτης χρησιμοποιεί ένα προϊόν μιας συγκεκριμένης εταιρείας και είναι απόλυτα ικανοποιημένος, τότε σίγουρα θα προτιμήσει να αγοράσει και άλλα είδη αυτής της εταιρείας.
Αισθητική	Η εμφάνιση του προϊόντος παίζει σημαντικό ρόλο στον προσδιορισμό της ποιότητάς του. Υπάρχουν πολλοί παράγοντες που σχετίζονται άμεσα με την αισθητική του προϊόντος, όπως το χρώμα, το σχέδιο, το σχήμα, το μοντέλο. Για παράδειγμα, στην αυτοκινητοβιομηχανία το χρώμα και ο σχεδιασμός ενός οχήματος παίζουν σημαντικό ρόλο την ποιότητά του.
Συμμόρφωση με το πρότυπο	Η ποιότητα του προϊόντος σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με την ορθότητα του σχεδιασμού ενός αντικειμένου. Οποιαδήποτε διαφορά μεταξύ του σχεδιασμού και του τελικού προϊόντος, επηρεάζει την ποιότητα του αντικειμένου.

1.4 Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας εφαρμόζεται ευρέως στον χώρο της βιομηχανίας, επηρεάζοντας σημαντικά τις αποφάσεις που θα ληφθούν προκειμένου να εξασφαλιστεί η ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων. Οι κύριες συνιστώσες του είναι η Δειγματοληψία Αποδοχής (*Acceptance Sampling*), ο Σχεδιασμός και Ανάλυση Πειραμάτων (*Design and Analysis of Experiments*) και ο **Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (ΣΕΔ)** (*Statistical Process Control, SPC*), ο οποίος θα αναλυθεί στην παρούσα ενότητα.

Αναφορικά με τον ΣΕΔ, αποτελεί ένα σημαντικό στατιστικό εργαλείο για τον έλεγχο της παραγωγικής διεργασίας κατά την διάρκεια της παραγωγής των προϊόντων, προκειμένου να διαπιστωθεί ότι η παραγωγή λειτουργεί σταθερά. Η σταθερότητα της διαδικασίας παραγωγής αντανακλάται από τη συμμόρφωση των ποιοτικών χαρακτηριστικών των προϊόντων της με τις σχεδιασμένες απαιτήσεις τους (Qiu (2013)).

Πιο αναλυτικά, ένα προϊόν για να θεωρηθεί κατάλληλο ως προς τις απαιτήσεις του χρήστη θα πρέπει να προέρχεται από μία σταθερά επαναλαμβανόμενη διεργασία, δηλαδή από μία ικανή διεργασία που παράγει προϊόντα με όσο το δυνατόν μικρή μεταβλητότητα γύρω από κάποιες τιμές στόχους που έχουν τεθεί στα ποιοτικά χαρακτηριστικά. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι σε μία οποιαδήποτε παραγωγική διεργασία παρουσιάζεται **φυσική μεταβλητότητα**, δηλαδή μία διεργασία είναι αδύνατον να παράγει δύο ίδια προϊόντα, όσο καλά και αν έχει πραγματοποιηθεί ο σχεδιασμός της. Με άλλα λόγια, θα υπάρχει πάντα ένα μετρήσιμο μέγεθος του προϊόντος (π.χ. βάρος) το οποίο θα λαμβάνει διαφορετικές τιμές. Η διαφορά αυτή είναι συνήθως μικρή και οφείλεται στην ύπαρξη πολλών μικρών, ουσιαστικά αναπόφευκτων αιτιών.

Στο πλαίσιο του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασίας, η φυσική μεταβλητότητα συχνά ονομάζεται **σταθερό σύστημα τυχαίων αιτιών** (*stable system of chance causes*) και θεωρείται εγγενές μέρος της διεργασίας. Άρα, κάθε διεργασία που λειτουργεί μόνο με τυχαία αίτια διακύμανσης θα θεωρείται σταθερή (*stable process*) (Shah et al. (2010)). Ωστόσο, υπάρχει και η περίπτωση να παρουσιαστεί μεταβλητότητα μεγαλύτερη από την φυσική, που οφείλεται κυρίως στις ακατάλληλα ρυθμισμένες μηχανές, σε λάθη χειριστών ή στις ελαττωματικές πρώτες ύλες. Σε αυτές τις περιπτώσεις παρουσιάζεται **ειδική μεταβλητότητα** και ως εκ τούτου η διεργασία θα βρίσκεται σε ασταθή κατάσταση (*unstable process*).

Η έγκαιρη ανίχνευση των ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία, δύναται να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας τα **διαγράμματα ελέγχου** (*control charts*) τα οποία είναι

ικανά να παρακολουθούν τη διεργασία σε πραγματικό χρόνο, προκειμένου να παρθούν οι κατάλληλες διορθωτικές ενέργειες και η διεργασία να επανέρθει σε σταθερή κατάσταση, προτού κατασκευαστούν αρκετά μη συμμορφούμενα προϊόντα. Πριν όμως παρουσιαστούν τα διαγράμματα ελέγχου θα αναλυθεί η διαδικασία που ακολουθείται για τον έλεγχο της παραγωγικής διεργασίας.

Σχετικά με την παρακολούθηση μιας διαδικασίας παραγωγής, μπορεί να χωριστεί κατά προσέγγιση σε δύο φάσεις (Δείτε επίσης Μπερσίμης και συν. (2021), Αντζουλάκος (2003)). Οι φάσεις αυτές είναι γνωστές ως **Φάση I** (*Phase I analysis*) και **Φάση II** (*Phase II analysis*). Συνήθως, πριν την εφαρμογή του διαγράμματος ελέγχου, δεν διατίθενται αρκετές πληροφορίες σχετικά με τις παραμέτρους της διεργασίας, όταν αυτή λειτουργεί παρουσία μόνο φυσικών αιτιών μεταβλητότητας. Έτσι, θα πρέπει αρχικά να διεξαχθεί μια ανάλυση Φάσης I ώστε να διαπιστωθεί πότε και πως η διεργασία είναι σε σταθερή κατάσταση. Ουσιαστικά, αυτό το οποίο πραγματοποιείται είναι η **πιστοποίηση** (*calibration*) της διεργασίας. Συνήθως λαμβάνονται προκαταρκτικά δεδομένα (μετρήσεις) από τη διεργασία και εφαρμόζεται πληθώρα στατιστικών τεχνικών και μεθόδων ώστε να διαπιστωθεί π.χ. ποια η κατανομή του χαρακτηριστικού που καθορίζει την ποιότητα των προϊόντων που παράγονται, ποιες οι τιμές των παραμέτρων της διεργασίας, αν υπάρχει ανεξαρτησία μεταξύ των μετρήσεων ή όχι κλπ.

Αν κατά τη διάρκεια της ανάλυσης Φάσης I διαπιστωθεί ότι η διεργασία δε λειτουργεί σταθερά, θα πρέπει να διεξαχθεί κατάλληλη έρευνα και να εντοπιστούν οι βασικές αιτίες που ευθύνονται για τη δυσμενή αυτή απόδοση και να γίνει η αντίστοιχη προσαρμογή της παραγωγικής διαδικασίας. Στη συνέχεια, αν διαπιστωθεί ότι κατά τη συλλογή των προκαταρκτικών μετρήσεων, υπήρχαν ειδικές αιτίες μεταβλητότητας στη διεργασία, απομακρύνονται οι μετρήσεις που αντιστοιχούν σε αυτή την περίοδο και η διεργασία πιστοποιείται εκ νέου. Αυτή η διαδικασία δύναται να επαναληφθεί αρκετές φορές μέχρι να διαπιστωθεί ο τρόπος λειτουργίας της διεργασίας, παρουσία μόνο φυσικών αιτιών μεταβλητότητας, δηλαδή μέχρι να επιβεβαιωθεί ότι η διεργασία είναι σε σταθερή κατάσταση ή αλλιώς ότι βρίσκεται **εντός ελέγχου** (*In Control*).

Εφόσον διαπιστωθεί ότι η διαδικασία παραγωγής βρίσκεται εντός ελέγχου, τότε εκτιμώνται οι παράμετροί της και στη συνέχεια κατασκευάζεται ένα διάγραμμα ελέγχου **Φάσης II** (*Phase II analysis*). Σε αυτή τη φάση τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται προκειμένου να ελέγχεται συνεχώς και σε πραγματικό χρόνο αν η διαδικασία παραμένει εντός ελέγχου. Επίσης στη φάση αυτή είναι δυνατόν να παρακολουθείται συνεχώς η παραγωγική διεργασία και να ανιχνεύεται

εγκαίρως μια πιθανή αλλαγή στο μέσο επίπεδο των χαρακτηριστικών που καθορίζουν την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος. Όταν ανιχνευθεί σημαντική μετατόπιση του μέσου επιπέδου ή της μεταβλητότητας της διεργασίας, τότε η διαδικασία παραγωγής σταματά και διεξάγεται άμεσα έρευνα με σκοπό τον εντοπισμό και την απομάκρυνση των βασικών αιτιών που ευθύνονται για αυτή την αλλαγή στον τρόπο λειτουργίας της διεργασίας.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι η αλλαγή στο μέσο επίπεδο της διεργασίας ή/και στη μεταβλητότητά της, αντιστοιχεί σε αλλαγές των εντός ελέγχου τιμών των παραμέτρων της διεργασίας. Σε αυτές τις περιπτώσεις θα λέγεται ότι η διεργασία έχει μετατοπιστεί σε **εκτός ελέγχου** διεργασία (*Out of Control*).

1.5 Τυπικό διάγραμμα ελέγχου

1.5.1 Ερμηνεία διαγραμμάτων ελέγχου

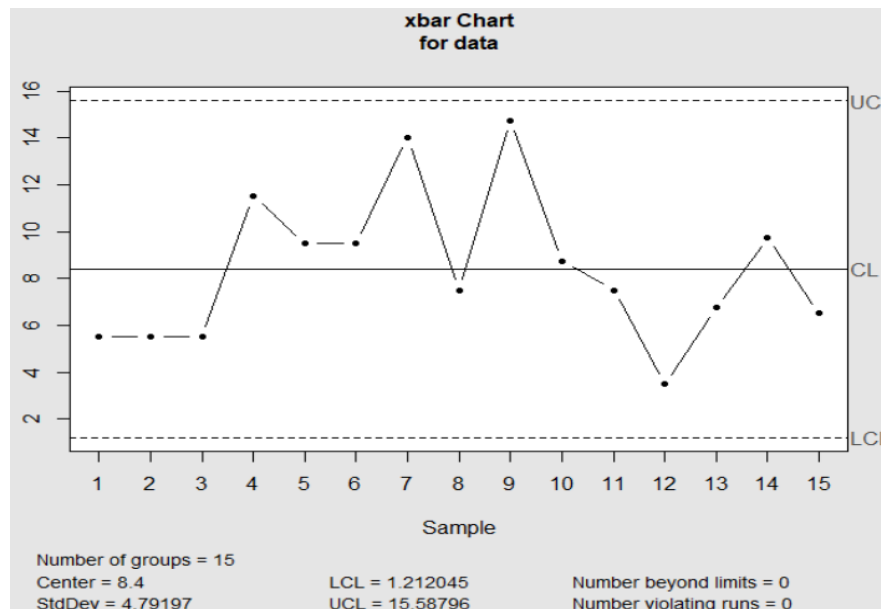
Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα, κύριος εκπρόσωπος των τεχνικών στατιστικής παρακολούθησης διεργασιών αποτελούν τα διαγράμματα ελέγχου. Πρόκειται δηλαδή για τη γραφική αναπαράσταση μιας μεταβλητής μιας παραγωγικής διεργασίας ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού που μετρήθηκε συνήθως σε συνάρτηση με το χρόνο. Οι διαδοχικές παρατηρούμενες τιμές, οι οποίες αντιστοιχούν σε τιμές μια κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης του δείγματος, παρίστανται με σημεία τα οποία έχουν συνδεθεί με μια ευθεία (ή τεθλασμένη γραμμή) για να απεικονίζεται ευκολότερα η εξέλιξη της ακολουθίας στο χρόνο (δείτε επίσης Μπερσίμης και συν. (2021), Αντζουλάκος (2003), Ταγαράς (2001)).

Σε κάθε διάγραμμα ελέγχου, τοποθετούνται κάποιες γραμμές, γνωστές ως **όρια ελέγχου** (*control limits*). Τα όρια ελέγχου συμβολίζονται με *LCL* (*Lower Control Limit*,) ή ΚΟΕ (Κάτω Όριο Ελέγχου) και *UCL* (*Upper Control Limit*) ή ΑΟΕ (Άνω Όριο Ελέγχου). Σε μια τέτοια περίπτωση, το αντίστοιχο διάγραμμα ελέγχου ονομάζεται **δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου** (*two-sided control chart*). Αν χρησιμοποιείται μόνο το *UCL* (αντ. *LCL*) το διάγραμμα ελέγχου ονομάζεται **άνω** (αντ. **κάτω**) **μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου** (*upper or lower one-sided control chart*). Επίσης, εκτός των ορίων ελέγχου, στο διάγραμμα χρησιμοποιείται και μια κεντρική γραμμή (ΚΓ) η οποία συμβολίζεται ως *CL* (*Center Line*). Αξίζει να σημειωθεί ότι τα μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται όταν μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε αλλαγές μόνο προς μία συγκεκριμένη κατεύθυνση, ενώ τα δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου εφαρμόζονται στην περίπτωση που εξετάζουμε αλλαγές προς οποιαδήποτε κατεύθυνση. Για παράδειγμα, αν μας

ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε αυξήσεις στη διασπορά της διεργασίας, τότε είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε ένα άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου ενώ, αν μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε αυξήσεις ή μειώσεις στο μέσο επίπεδο της διεργασίας, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου.

Όσο τα σημεία κατανέμονται «τυχαία» εντός των ορίων ελέγχου, μπορεί να θεωρηθεί ότι η διεργασία είναι υπό έλεγχο (εντός στατιστικού ελέγχου), οπότε και δεν απαιτείται καμία ενέργεια. Όμως, αν ένα ή περισσότερα σημεία βρεθούν εκτός του διαστήματος $[LCL, UCL]$, τότε το διάγραμμα ελέγχου ενημερώνει ότι υπάρχει κατάσταση συναγερμού (*alarm signal*). Ουσιαστικά, σε αυτή την περίπτωση, το διάγραμμα δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας και θα πρέπει να γίνει η σχετική διερεύνηση ώστε να βρεθούν οι αιτίες που οδήγησαν σε αυτή την ένδειξη. Επιπρόσθετα, αν διαπιστωθεί ότι πράγματι υπάρχουν ειδικές αιτίες μεταβλητότητας, παρουσία των οποίων λειτουργεί η διεργασία, τότε θα πρέπει να ληφθούν διορθωτικές ενέργειες και να απομακρυνθούν αυτές οι αιτίες.

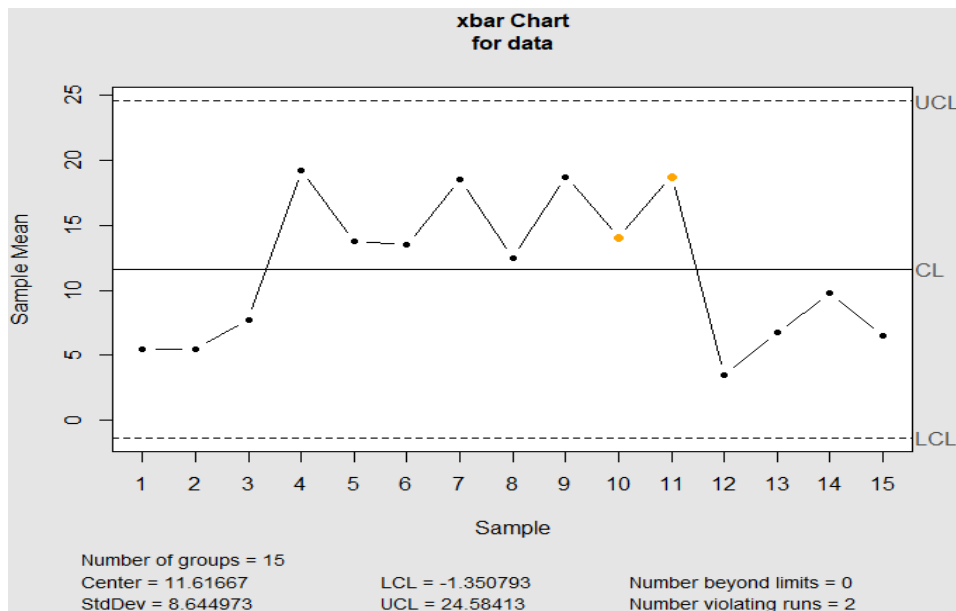
Για παράδειγμα, ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου έχει την παρακάτω μορφή. Από την Εικόνα 1.1 παρατηρείται ότι στο δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου τα σημεία βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου, άρα η διεργασία είναι εντός ελέγχου.



Εικόνα 1.1: Δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου όπου η διεργασία είναι εντός των ορίων ελέγχου

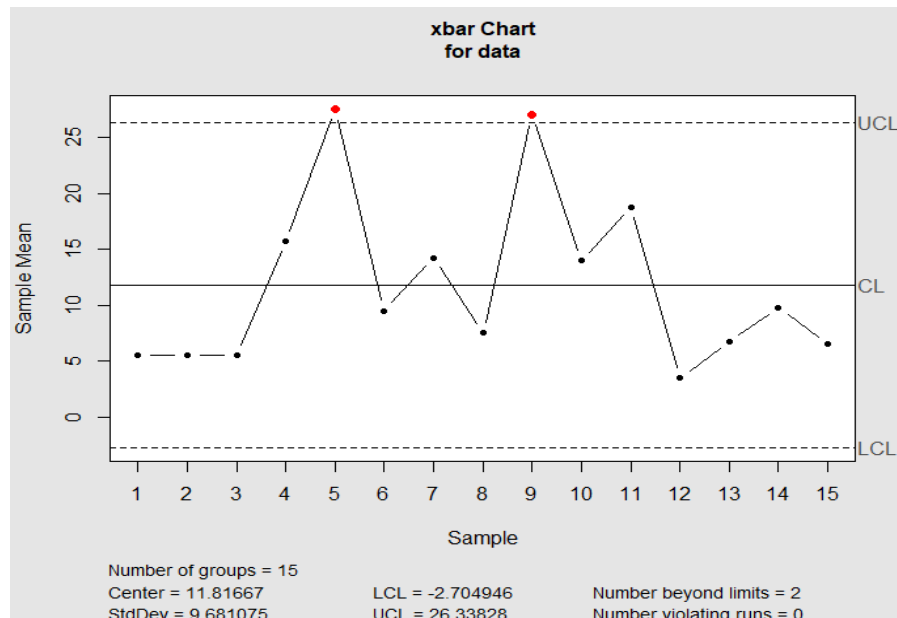
Εντούτοις, ακόμα και αν όλα τα σημεία του δείγματος βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου, αλλά τοποθετημένα κατά συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο, δηλαδή παρουσιάζουν συμμετρία ή περιοδικότητα τότε υπάρχει και πάλι η ένδειξη ότι η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου. Τα δημοφιλέστερα είδη τέτοιων μοτίβων (*patterns*) είναι τα πρότυπα κύκλων (*cycles*), τάσεων (*trends*), έλλειψης μεταβλητότητας (*stratification*), τα μικτά πρότυπα (*mixtures*) και τα πρότυπα αλμάτων (*shifts in the process level*) (Western Electric Handbook (1956), Nelson (1984), Champ and Woodall (1987), Derman and Ross (1997), Klein (2000)).

Για παράδειγμα στην Εικόνα 1.2 παρατηρείται ότι αν και τα 15 σημεία βρίσκονται εντός του διαστήματος [*LCL, UCL*] (και άρα θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου), υπάρχουν 8 διαδοχικά σημεία ανάμεσα στην κεντρική γραμμή και το άνω όριο ελέγχου. Η συγκεκριμένη ακολουθία σημείων (σηματισμός, *pattern*) ενδέχεται να συνδέεται με την παρουσία ειδικής αιτίας μεταβλητότητας στη διεργασία αφού η συμπεριφορά των διαδοχικών τιμών φαίνεται να είναι συστηματική και μη τυχαία. Επομένως, στη συγκεκριμένη περίπτωση ενδεχομένως να υπάρχει μια ειδική αιτία μεταβλητότητας, η οποία θα πρέπει να εντοπιστεί και να αποβληθεί από το σύστημα της διεργασίας.



Εικόνα 1.2: Δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου όπου η διεργασία είναι εκτός των ορίων ελέγχου

Στη συνέχεια, στην Εικόνα 1.3, δίνεται μία κλασική περίπτωση εκτός ελέγχου διεργασίας, στην οποία παρατηρείται ότι υπάρχουν δύο σημεία πάνω από το άνω όριο ελέγχου. Σε μια τέτοια περίπτωση μπορεί να θεωρηθεί ότι η διεργασία βρίσκεται σε κατάσταση συναγερμού (*alarm*) και ως εκ τούτου θα πρέπει να γίνουν οι απαραίτητες ενέργειες έτσι ώστε η διεργασία να επανέλθει σε διεργασία εντός ελέγχου.



Εικόνα 1.3: Δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου όπου η διεργασία είναι εκτός των ορίων ελέγχου

Αναφορικά με τον προσδιορισμό των ορίων ελέγχου αλλά και του μεγέθους δείγματος που θα επιλεγεί, δίνεται σημασία στις πιθανότητες των Σφαλμάτων Τύπου I και Τύπου II. Συγκεκριμένα, με τον όρο **Σφάλμα Τύπου I** (*Type I Error or Producer's Risk or Error α*) αναφέρεται η πιθανότητα ένα σημείο να βρεθεί εκτός ορίων ελέγχου, δεδομένου ότι η διεργασία θεωρείται εντός ελέγχου. Επίσης, το Σφάλμα τύπου I συναντάται συχνά στον Στατιστικό Έλεγχο ποιότητας και ως **Ποσοστό Εσφαλμένου Συναγερμού** (*False Alarm Rate, FAR*). Σχετικά με το **Σφάλμα Τύπου II** (*Type II Error or Consumer's Risk or Error β*), ονομάζεται η πιθανότητα ένα σημείο να βρεθεί εντός των ορίων ελέγχου, ενώ στην πραγματικότητα η διεργασία θεωρείται εκτός ελέγχου. Άρα, αυτή η περίπτωση αναφέρεται στην πιθανότητα μη ανίχνευσης εκτός ελέγχου διεργασίας. Η παραπάνω περιγραφή των Σφαλμάτων Τύπου I και Τύπου II παρουσιάζεται συνοπτικά και στον Πίνακα 1.3.

Πίνακας 1.3 Σφάλματα Τύπου και Τύπου II

Πραγματική Κατάσταση Διεργασίας	Διεργασία σύμφωνα με το Διάγραμμα Ελέγχου	
	Εντός Ελέγχου	Εκτός Ελέγχου
Εντός Ελέγχου	Δεν υπάρχει σφάλμα	Σφάλμα Τύπου I (α)
Εκτός Ελέγχου	Σφάλμα Τύπου II (β)	Δεν υπάρχει σφάλμα

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, αν θεωρηθεί ότι τα όρια ελέγχου απομακρύνονται από την κεντρική γραμμή, τότε μειώνεται η πιθανότητα ύπαρξης ενός σημείου εκτός ελέγχου, που στην πραγματικότητα όμως είναι εντός. Με άλλα λόγια, αυτή η περίπτωση αναφέρεται στο σφάλμα τύπου I. Την ίδια στιγμή όμως αυξάνεται η πιθανότητα σφάλματος τύπου II, δηλαδή τα σημεία φαίνεται να είναι εντός ελέγχου ενώ στην πραγματικότητα είναι εκτός. Διαφορετικά, αν μετακινηθούν τα όρια ελέγχου πιο κοντά στην κεντρική γραμμή, συμβαίνει το αντίθετο αποτέλεσμα. Σε αυτή την περίπτωση δηλαδή, το σφάλμα τύπου I αυξάνεται, ενώ το σφάλμα τύπου II μειώνεται. Επίσης, στην περίπτωση που επιχειρείται να μειωθούν ταυτόχρονα τα σφάλματα α και β τότε αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος. Άρα από αυτό έπεται ότι ο προσδιορισμός του δείγματος μπορεί να πραγματοποιηθεί ελέγχοντας και τις δύο τιμές των σφαλμάτων ταυτόχρονα.

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι το ενδεχόμενο {ένα σημείο εκτός ορίων ελέγχου} σχετίζεται με το ενδεχόμενο {ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας}, σε ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart. Οι παραπάνω ορισμοί μπορούν να επεκταθούν ώστε να καλύπτουν και πιο γενικούς κανόνες ένδειξης εκτός ελέγχου διεργασίας καθώς και πιο σύνθετα διαγράμματα ελέγχου (π.χ. CUSUM, EWMA). Έτσι, η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού, σε ένα οποιοδήποτε διάγραμμα ελέγχου ορίζεται ως

$$\alpha = P(\text{ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας} \mid \text{διεργασία εντός ελέγχου})$$

ενώ με ανάλογο τρόπο, ορίζεται και το σφάλμα τύπου II

$$\beta = P(\text{ένδειξη εντός ελέγχου διεργασίας} \mid \text{διεργασία εκτός ελέγχου})$$

1.5.2 Κατηγορίες διαγραμμάτων ελέγχου

Λαμβάνοντας υπόψη ορισμένα χαρακτηριστικά των διαγραμμάτων ελέγχου, μπορούν να διακριθούν σε συγκεκριμένες κατηγορίες. Στη συνέχεια, θα αναλυθούν τα εν λόγω χαρακτηριστικά καθώς και τα είδη των διαγραμμάτων που προκύπτουν από αυτά (δείτε επίσης Μπερσίμης και συν. (2021), Αντζουλάκος (2003), Ταγαράς (2001)).

Αρχικά, τα διαγράμματα ελέγχου μπορούν να ταξινομηθούν ανάλογα με το είδος της μεταβλητής που μελετάται και άρα να τα χωριστούν σε **διαγράμματα ελέγχου μεταβλητών** (*control charts for variables*) και σε **διαγράμματα ελέγχου ιδιοτήτων** (*control charts for attributes*). Με άλλα λόγια, όταν το χαρακτηριστικό που μελετάται μπορεί να περιγραφεί από μία συνεχή τυχαία μεταβλητή (τ.μ.), τότε πρόκειται για την πρώτη περίπτωση. Διαφορετικά, αν η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το χαρακτηριστικό είναι διακριτή, τότε αφορά τα διαγράμματα ελέγχου ιδιοτήτων.

Επιπρόσθετα, η κατάταξη των διαγραμμάτων ελέγχου μπορεί να βασιστεί στο μέγεθος του δείγματος των τιμών του χαρακτηριστικού που μελετάται. Συγκεκριμένα, υπάρχει η περίπτωση το μέγεθος του δείγματος που λαμβάνεται να είναι μεγαλύτερο της μονάδας, με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούνται **διαγράμματα ελέγχου για ομάδες ή ορθολογικά δείγματα** (*control charts for rational subgroups*). Αντιθέτως, αν το δείγμα που λαμβάνεται αντιστοιχεί σε μία παρατήρηση ή μέτρηση τότε εφαρμόζονται διαγράμματα ελέγχου για **μεμονωμένες παρατηρήσεις** (*control charts for individual observations*).

Επιπλέον, αν ληφθεί υπόψη ο χρόνος με τον οποίο λαμβάνονται οι παρατηρήσεις, τότε προκύπτουν δύο άλλες κατηγορίες διαγραμμάτων ελέγχου. Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρηθεί ότι οι μετρήσεις πραγματοποιούνται με σταθερό ρυθμό δειγματοληψίας, τότε εφαρμόζονται **διαγράμματα ελέγχου σταθερού ρυθμού δειγματοληψίας** (*control charts with fixed sampling rate*), ενώ οποιαδήποτε άλλη περίπτωση θα αναφέρεται σε **διαγράμματα μεταβλητού ρυθμού δειγματοληψίας** (*control charts with variable sampling rate*). Επίσης, τα διαγράμματα αυτά προέρχονται από μία μεγαλύτερη κατηγορία διαγραμμάτων, με την ονομασία **προσαρμοστικά διαγράμματα ελέγχου** (*adaptive control charts*)

Μία επιπλέον βασική διάκριση των διαγραμμάτων είναι αυτή που βασίζεται στο πλήθος των ποιοτικών χαρακτηριστικών που μελετάται. Ειδικότερα, εάν οι μετρήσεις οι οποίες λαμβάνονται αφορούν ένα μόνο ποιοτικό χαρακτηριστικό, τότε εφαρμόζονται **μονοδιάστατα ή μονομεταβλητά διαγράμματα ελέγχου** (*univariate control charts*), ενώ στην περίπτωση που αφορούν παραπάνω χαρακτηριστικά, τότε χρησιμοποιούνται τα **πολυμεταβλητά διαγράμματα ελέγχου** (*multivariate control charts*).

Στην περίπτωση που οι μετρήσεις προέρχονται από μία γνωστή κατανομή (π.χ. την Κανονική), τότε τα διαγράμματα που εφαρμόζονται είναι τα **παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου** (*parametric control charts*). Ενώ αν δεν υπάρχει κάποια συγκεκριμένη πληροφορία για την

κατανομή του χαρακτηριστικού που μελετάται, τότε χρησιμοποιούνται τα **μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου** (*nonparametric or distribution-free control charts*).

Σχετικά με την κατηγοριοποίηση των διαγραμμάτων, μπορεί να πραγματοποιηθεί και με βάση τη χρονική εξάρτηση των μετρήσεων. Με άλλα λόγια, αν οι μετρήσεις που λαμβάνονται την χρονική στιγμή t εξαρτώνται από τις μετρήσεις που λήφθηκαν την προηγούμενη χρονική στιγμή, δηλαδή την $t - 1$, τότε θα αναφέρονται τα **διαγράμματα ελέγχου για αυτοσυσχετιζόμενες διεργασίες** (*control charts for autocorrelated processes*). Προφανώς, μπορεί να υπάρχει και συσχέτιση μεγαλύτερης τάξης. Διαφορετικά, αν οι διαδοχικές μετρήσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους τότε θα εφαρμόζονται τα **διαγράμματα ελέγχου για ασυσχέτιστες διεργασίες** (*control charts for uncorrelated processes*).

Η παραπάνω κατηγοριοποίηση των διαγραμμάτων δύναται να συνεχιστεί περαιτέρω και να προκύψουν επιμέρους οικογένειες διαγραμμάτων ελέγχου. Ειδικότερα, η απεικόνιση των σημείων μπορεί να βασίζεται σε πληροφορία που σχετίζεται με προηγούμενα δείγματα ή να εστιάζει μόνο στο πρόσφατο δείγμα αγνοώντας τα προηγούμενα. Επομένως, στην πρώτη περίπτωση υπάρχουν τα **διαγράμματα ελέγχου με μνήμη** (*control charts with memory*), ενώ η δεύτερη παραπέμπει σε **διαγράμματα ελέγχου χωρίς μνήμη** (*control charts without memory*).

Τα δημοφιλέστερα διαγράμματα ελέγχου της τελευταίας κατηγορίας που χρησιμοποιούνται στην πράξη είναι τα **διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart** (*Shewhart type control charts*) τα οποία ορίστηκαν πρώτη φορά από τον Shewhart (δείτε Shewhart (1926)). Επιπλέον, εφαρμόζονται κυρίως για την ανίχνευση μεγάλων και απότομων μετατοπίσεων στις εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων της διεργασίας.

Από την άλλη πλευρά, στην κατηγορία των διαγραμμάτων ελέγχου με μνήμη ανήκουν τα **διαγράμματα ελέγχου για τον εκθετικά σταθμισμένο μέσο** (*Exponentially Weighted Moving Average, EWMA type control charts*), τα **διαγράμματα ελέγχου συσσωρευμένων αθροισμάτων** (*Cumulative Sum, CUSUM type control charts*) καθώς και τα **διαγράμματα ελέγχου κινούμενου μέσου** (*Moving Average, MA type control charts*). Όπως έχει αναφερθεί, τα διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM προτάθηκαν στην εργασία του Page (1954) ενώ τα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA στην εργασία του Roberts (1959). Ένα κοινό πλεονέκτημα των διαγραμμάτων που εμφανίζεται κατά τη χρήση τους είναι η ανίχνευση μικρών ή/και μεσαίων μετατοπίσεων (κυρίως παροδικών, και όχι απότομων) στις εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων της διεργασίας.

Στα πλαίσια της παρούσας διδακτορικής διατριβής, θα μελετηθούν τα διαγράμματα ελέγχου ιδιοτήτων, όπου τα διαθέσιμα δεδομένα είναι δεδομένα καταμετρήσεων (*count data*). Η συγκεκριμένη κατηγορία διαγραμμάτων ελέγχου έχει αναπτυχθεί σημαντικά τα τελευταία χρόνια και αυτό οφείλεται στο ότι σε πολλές διεργασίες, δεν είναι πάντοτε εύκολο να ληφθεί μια αριθμητική τιμή από ένα χαρακτηριστικό που καθορίζει την ποιότητα των προϊόντων που παράγονται ή της υπηρεσίας που παρέχεται. Έτσι, καταγράφεται η παρουσία ή όχι, ενός ή περισσοτέρων *ιδιοτήτων* (*attributes*) στα μέλη του δείγματος που λαμβάνεται από τη διεργασία. Επομένως, τα διαθέσιμα δεδομένα είναι δεδομένα καταμετρήσεων και η παρακολούθηση της διεργασίας γίνεται με την εφαρμογή κατάλληλων διαγραμμάτων ελέγχου ιδιοτήτων. Στην επόμενη ενότητα, δίνεται μια βιβλιογραφική επισκόπηση της περιοχής των πιο συχνά χρησιμοποιούμενων διαγραμμάτων ελέγχου ιδιοτήτων.

1.6 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

1.6.1 Εισαγωγικά

Τα τελευταία χρόνια έχει παρατηρηθεί έντονο ενδιαφέρον στον επιστημονικό χώρο του στατιστικού ελέγχου ποιότητας/στατιστικού ελέγχου διεργασιών δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην μελέτη των χαρακτηριστικών αυτών που περιγράφονται από μία διακριτή τυχαία μεταβλητή. Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα, σε τέτοιες περιπτώσεις εφαρμόζονται διαγράμματα ελέγχου ιδιοτήτων. Τα δημοφιλέστερα διαγράμματα αυτής της κατηγορίας είναι τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart p και np , τα οποία χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση του ποσοστού και του πλήθους των μη συμμορφούμενων μονάδων, αντίστοιχα, σε ένα δείγμα πεπερασμένου μεγέθους (Montgomery (2020), Ryan (2011), Qiu (2013)). Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημανθεί ότι τα συγκεκριμένα διαγράμματα ελέγχου βασίζονται στην υπόθεση ότι ο αριθμός των μη συμμορφούμενων μονάδων ακολουθεί μια διωνυμική κατανομή $B(n, p)$, όπου n είναι το μέγεθος του δείγματος και p είναι η πιθανότητα επιτυχίας (δηλαδή η πιθανότητα ένα χαρακτηριστικό ή μια μονάδα να είναι μη συμμορφούμενα).

Επιπλέον, μια συνήθης παραδοχή κατά την εφαρμογή των διαγραμμάτων p και np είναι ότι οι διαδοχικές μετρήσεις είναι ανεξάρτητες και ισόνομες (*independent and identically distributed, iid*) τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν τη διωνυμική κατανομή. Παραδοσιακά, τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται στη βιομηχανία για την παρακολούθηση παραγωγικών διεργασιών, με σκοπό την ανίχνευση της μείωσης της ποιότητας των παραγόμενων αντικειμένων. Επίσης

μπορούν να εφαρμοστούν και στην παρακολούθηση μη-βιομηχανικών διεργασιών (Woodall (1997), Bersimis et al. (2018)), για την έγκαιρη και έγκυρη ανίχνευση μη-φυσιολογικών (συνήθως ανεπιθύμητων) καταστάσεων όπως για παράδειγμα στην ανίχνευση εξάρσης μεταδοτικών ασθενειών, στην ανίχνευση μεταβολών στη γονιμότητα/θνησιμότητα του πληθυσμού, στην ανίχνευση αυξήσεων των ποσοστών ανεργίας και εγκληματικότητας.

Για την παρακολούθηση τέτοιου είδους διεργασιών έχουν πραγματοποιηθεί μελέτες στις οποίες έχουν εφαρμοστεί και άλλα διαγράμματα ελέγχου και μάλιστα διαπιστώθηκε ότι είναι πιο αποτελεσματικά από τα παραδοσιακά διαγράμματα τύπου Shewhart. Για παράδειγμα, οι Gan (1993), Chang and Gan (2001), Wu et al (2008), Haridy et al. (2013) και Haridy et al. (2014) πρότειναν και μελέτησαν διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωματικών αντικειμένων, ενώ για τις ίδιες διεργασίες οι Gan (1990) και Yeh et al.(2008) πρότειναν και μελέτησαν την απόδοση διαγραμμάτων ελέγχου τύπου EWMA.

Αν και η υπόθεση της ανεξαρτησίας μεταξύ των διαδοχικών μετρήσεων αποτελεί μία κοινή παραδοχή στην οποία βασίζονται τα προαναφερθέντα διαγράμματα ελέγχου, στην πράξη οι παρατηρήσεις σε μια διεργασία θα εμφανίζουν αυτοσυσχέτιση, ιδιαίτερα όταν υπάρχει υψηλός ρυθμός δειγματοληψίας (δηλ. τα διαδοχικά δείγματα ή οι μεμονωμένες μετρήσεις συλλέγονται με μικρή χρονική απόσταση μεταξύ τους). Ο υψηλός ρυθμός δειγματοληψίας οφείλεται συνήθως στην τεχνολογική πρόοδο και στις αυτοματοποιημένες διαδικασίες δειγματοληψίας (Psarakis and Papaleonida (2007), Kim and Lee (2019)).

Επομένως, σε ποικίλα προβλήματα που συναντώνται στην καθημερινή ζωή, η υπόθεση της ανεξαρτησίας παραβιάζεται και ως εκ τούτου δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα προαναφερθέντα διαγράμματα ελέγχου, διότι θα παρουσιάζουν αυξημένο ποσοστό εσφαλμένου συναγερμού (*false alarm rate*, FAR), μεγαλύτερο του επιθυμητού. Με άλλα λόγια, σε μία τέτοια περίπτωση θα υπάρχουν συχνότερες (από το αναμενόμενο) ενδείξεις ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, ενώ στην πραγματικότητα βρίσκεται εντός ελέγχου. Κάτι τέτοιο δεν είναι επιθυμητό αφού οδηγεί σε συχνές, και στην πραγματικότητα, μη απαραίτητες διακοπές στη διεργασία και αύξηση του κόστους παρακολούθησης/λειτουργίας της.

Στην περίπτωση διαγραμμάτων ελέγχου για διεργασίες στις οποίες εμφανίζεται αυτοσυσχέτιση μεταξύ των διαδοχικών μετρήσεων έχουν προταθεί διάφορες προσεγγίσεις, οι οποίες κατά κύριο λόγο αφορούν διαγράμματα ελέγχου μεταβλητών. Τέτοια διαγράμματα έχουν μελετηθεί εδώ και αρκετές δεκαετίες (δείτε Johnson and Bagshaw (1974), Alwan and Roberts (1988), Harris and

Ross (1991), Montgomery and Mastrangelo (1991), Alwan (1992), Wardell et al. (1992), Alwan et al. (1994), Schipper and Schmid (2001), Knoth and Schmid (2004)).

Ωστόσο, οι μέθοδοι και οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται σε τέτοιου είδους δεδομένα θα πρέπει να προσαρμοστούν κατάλληλα προκειμένου να εφαρμοστούν σε διαγράμματα ελέγχου ιδιοτήτων. Η διερεύνηση αυτού του προβλήματος παρουσιάζει έντονο ενδιαφέρον τα τελευταία χρόνια. Αυτό που έχει προταθεί ως λύση είναι να γίνεται αρχικά η επιλογή ενός κατάλληλου μοντέλου διακριτών χρονοσειρών και στη συνέχεια να πραγματοποιείται ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου με βάση το μοντέλο που επιλέχτηκε (Weiß (2015)). Στη συνέχεια, παρουσιάζεται μια βιβλιογραφική επισκόπηση σχετικά με τα διαγράμματα ελέγχου που έχουν χρησιμοποιηθεί για την παρακολούθηση διεργασιών που προέρχονται από μοντέλα διακριτών χρονοσειρών.

1.6.2 Διαγράμματα Ελέγχου για Διακριτές Χρονοσειρές

1.6.2.1 Μοντέλα με Απείρωσ Αριθμίσμο Πλήθος Τιμών

Οι πρώτες προσπάθειες που καταγράφονται στη βιβλιογραφία σχετικά με την ανάπτυξη των διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση διακριτών χρονοσειρών ξεκίνησαν από τον Weiß το 2007. Συγκεκριμένα, ο Weiß (2007) πρότεινε τη χρήση των μοντέλων INARMA (δείτε McKenzie (1985), Al-Osh and Alzaid (1987), Alzaid and Al-Osh (1988)) για τη μοντελοποίηση διεργασιών όπου τα διαθέσιμα δεδομένα είναι δεδομένα ιδιοτήτων, στα οποία υπάρχει αυτοσυσχέτιση. Ειδικότερα, πρότεινε τη χρήση του μοντέλου INAR(1) (*Integer-Valued Autoregressive model of first order*) ως ένα απλό και κατάλληλο μοντέλο για τη μοντελοποίηση παρατηρήσεων από την κατανομή Poisson οι οποίες εμφανίζουν αυτοσυσχέτιση 1^{ης} τάξης. Το μοντέλο αυτό είναι γνωστό ως μοντέλο Poisson INAR(1) (ή PINAR(1)). Για την παρακολούθηση μιας PINAR(1) διεργασίας και την ανίχνευση αλλαγών στις τιμές των παραμέτρων αυτής, ο Weiß (2007) πρότεινε και μελέτησε διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart και κινούμενου μέσου (MA). Ωστόσο, αν και απλά στην εφαρμογή τους, τα παραπάνω διαγράμματα δεν είναι ιδιαίτερα ευαίσθητα στην ανίχνευση μικρών ή/και μεσαίων μετατοπίσεων στις παραμέτρους της διεργασίας.

Λίγα χρόνια αργότερα, σε μια προσπάθεια να βελτιωθεί η ικανότητα (ταχύτητα) ανίχνευσης αλλαγών στις παραμέτρους μιας INAR(1) διεργασίας, ο Weiß (2009a) ανέπτυξε ένα σύνθετο διάγραμμα ελέγχου (*composite control chart*), στο οποίο εφαρμόζεται ταυτόχρονα ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart και ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου EWMA. Από τη μελέτη αυτή διαπιστώθηκε ότι η ιδέα του συνδυασμού αυτών των δύο διαγραμμάτων προσφέρει ικανοποιητική ευελιξία αφού

- i). Το προτεινόμενο διάγραμμα μπορεί να ανιχνεύσει μια μετατόπιση προς οποιαδήποτε κατεύθυνση, για ένα μεγάλο εύρος μετατοπίσεων (μικρές, μεσαίες ή και μεγάλες μετατοπίσεις).
- ii). Η ευαισθησία του είναι αυξημένη έναντι ενός διαγράμματος τύπου Shewhart ή ενός (απλού) διαγράμματος τύπου EWMA.

Επίσης, η περίπτωση των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου CUSUM για την παρακολούθηση διεργασιών PINAR(1) μελετήθηκε από τους Weiß and Testik (2009). Τα αποτελέσματα της μελέτης των Weiß and Testik (2009) έδειξαν ότι το προτεινόμενο διάγραμμα CUSUM είχε σε γενικές γραμμές καλύτερη απόδοση στην ανίχνευση αυξήσεων και στις παραμέτρους μιας διεργασίας PINAR(1) συγκριτικά με οποιοδήποτε άλλο διάγραμμα που είχε προταθεί έως τότε για την παρακολούθηση τέτοιων διεργασιών. Επίσης, για τις εν λόγω διεργασίες ο Weiß (2009b) πρότεινε ένα νέο διάγραμμα ελέγχου, το διάγραμμα συνδυασμένων αλμάτων (*combined jumps chart*), στο οποίο απεικονίζονται ταυτόχρονα οι τιμές των παρατηρήσεων από τη διεργασία αλλά και οι διαφορές (άλματα) των διαδοχικών τιμών αυτής. Μάλιστα, αυτός ο συνδυασμός διαγραμμάτων αποδείχθηκε αποτελεσματικός για διάφορα είδη μετατοπίσεων, ειδικά όταν το μέγεθος της εντός ελέγχου μέση τιμής της διεργασίας δεν είναι πολύ μικρό. Ωστόσο, η αριθμητική ανάλυση έδειξε ότι η απόδοση του διαγράμματος είναι αρκετά ευαίσθητη στον τρόπο με τον οποίο επιλέγονται οι παράμετροι του διαγράμματος.

Επιπλέον, για την ανίχνευση αυξήσεων σε διεργασίες PINAR(1), ο Weiß (2011) πρότεινε και μελέτησε το άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου s -EWMA, το οποίο βασίστηκε σε έναν νέο τύπο στρογγυλοποίησης, που επιτρέπει τον ακριβή υπολογισμό της απόδοσης του διαγράμματος, χωρίς να απαιτούνται πολύπλοκες και χρονοβόρες προσομοιώσεις. Ταυτόχρονα, το διάγραμμα αυτό αποδείχθηκε ικανότερο από το αντίστοιχο διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart στην ανίχνευση μετατοπίσεων μικρού μεγέθους στη μέση τιμή της διεργασίας PINAR(1). Ωστόσο, αν συγκριθεί με το προτεινόμενο διάγραμμα των Weiß and Testik (2009), διαπιστώνεται ότι το CUSUM είναι πιο ισχυρό στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων, ενώ το s -EWMA παρουσιάζει καλή ευαισθησία σε μέτριες έως και μεγάλες μετατοπίσεις.

Επίσης, θα πρέπει να σημειωθεί ότι ένας βασικός περιορισμός στη χρήση του μοντέλου PINAR(1) είναι ότι δεν μπορεί να ερμηνεύσει δεδομένα που παρουσιάζουν υπερμεταβλητότητα, δηλαδή όταν η διακύμανση είναι μεγαλύτερη από τη μέση τιμή. Αυτό οφείλεται στο ότι στην κατανομή Poisson, η οποία είναι η περιθώρια κατανομή του μοντέλου PINAR(1), η μέση τιμή

ισούται με τη διασπορά (*equidispersion property*). Οι Weiß and Testik (2011) παρατήρησαν πως η παρουσία υπερμεταβλητότητας στη διεργασία επηρεάζει σημαντικά την εντός ελέγχου απόδοση του διαγράμματος CUSUM καθώς και την ικανότητα ανίχνευσης εκτός ελέγχου καταστάσεων, ειδικά όταν πρόκειται για πολύ μικρές μετατοπίσεις της μέσης τιμής και για μικρό μέγεθος δείγματος. Για τον λόγο αυτό, οι Weiß and Testik (2012) αναζήτησαν ένα καταλληλότερο μοντέλο χρονοσειρών καθώς και ένα διάγραμμα ελέγχου για να παρακολουθήσει μία τέτοια διεργασία. Συγκεκριμένα, πρότειναν και μελέτησαν διαγράμματα ελέγχου CUSUM τα οποία βασίζονται στον λόγο πιθανοφάνειας και τα εφάρμοσαν στην παρακολούθηση διεργασιών που μοντελοποιούνται σύμφωνα με ένα υπόδειγμα PINARCH(1). Το συγκεκριμένο υπόδειγμα αποτελεί ένα πολύ συχνά χρησιμοποιούμενο μοντέλο για δεδομένα από κατανομή Poisson με αυτοσυσχέτιση πρώτης τάξης, στα οποία όμως υπάρχει υπερμεταβλητότητα. Για λεπτομέρειες σχετικά με τα μοντέλα PINAR(1) και PINARCH(1) δείτε Weiß (2018). Από τη μελέτη των Weiß and Testik (2012) διαπιστώθηκε ότι είναι ιδιαίτερα ευαίσθητα στην ανίχνευση μικρών ή/και μεσαίων μετατοπίσεων στις παραμέτρους της συγκεκριμένης διεργασίας.

Στη συνέχεια, οι Yontay et al. (2013) επέκτειναν τα μονόπλευρα διαγράμματα CUSUM των Weiß and Testik (2009) σε δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση τόσο των αυξήσεων όσο και μειώσεων στη μέση τιμή της PINAR(1) διεργασίας. Επιπλέον, οι Weiß and Testik (2015) χρησιμοποίησαν ένα διάγραμμα ελέγχου προκειμένου να παρακολουθήσουν και να ανιχνεύσουν την παρουσία ειδικών αιτιών μεταβλητότητας στη διεργασία PINAR(1). Συγκεκριμένα, η μέθοδος που πρότειναν, ήταν η εφαρμογή των συνήθων διαγραμμάτων ελέγχου CUSUM στα κατάλοιπα (*residuals*) του παραπάνω μοντέλου. Η σύγκριση των εν λόγω διαγραμμάτων με τα συνήθη διαγράμματα ελέγχου CUSUM έδειξε ότι τα διαγράμματα ελέγχου που αναπτύχθηκαν ήταν ιδιαίτερα ευαίσθητα στην ανίχνευση μετατοπίσεων υπό την παρουσία υπερμεταβλητότητας. Πρόσφατα, οι Kim and Lee (2021) πρότειναν ένα διάγραμμα ελέγχου CUSUM το οποίο βασίζεται στα κατάλοιπα του PINAR(1), τα οποία όμως υπολογίζονται με χρήση του εκτιμητή των διαδοχικών διαφορών (*successive differences estimator*, Bourguignon and Vasconcellos (2015)).

Επιπρόσθετα, στην περίπτωση που η μεταβλητότητα διαφέρει από την μέση τιμή της Poisson κατανομής, οι Li et al. (2016) ανέπτυξαν διαγράμματα ελέγχου για διεργασίες που μοντελοποιούνται ως ένα υπόδειγμα NGINAR(1). Στο συγκεκριμένο υπόδειγμα η περιθώρια κατανομή είναι η γεωμετρική (αντί της Poisson που είναι για το μοντέλο PINAR(1)) και μπορεί

να θεωρηθεί ως γενίκευση του τελευταίου. Το μοντέλο NGINAR(1) είναι χρήσιμο στη μοντελοποίηση χρονοσειρών με ακέραιες τιμές στις οποίες εμφανίζεται υπερμεταβλητότητα στα δεδομένα. Σκοπός της μελέτης των Li et al (2016) ήταν η ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου, τα οποία να μπορούν να παρακολουθούν μια NGINAR(1) διεργασία και να είναι δυνατή η ανίχνευση αλλαγών στη μέση τιμή, στη μεταβλητότητα καθώς και στην αυτοσυσχέτιση αυτής. Για τον λόγο αυτό εφαρμόστηκε το διάγραμμα CUSUM, το συνδυασμένο διάγραμμα ελέγχου αλμάτων (Weiß (2009b)), καθώς και το συνδυασμένο διάγραμμα EWMA, που είχε αναπτυχθεί επίσης από τον Weiß (2011) για διεργασίες PINAR(1). Τα αποτελέσματα της αριθμητικής μελέτης των Li et al. (2016) έδειξαν ότι το συνδυασμένο διάγραμμα αλμάτων αποτελεί μία καλή επιλογή για την ανίχνευση των μειώσεων στις παραμέτρους της διεργασίας, ενώ το διάγραμμα CUSUM είναι πιο ευαίσθητο στην ανίχνευση των αυξήσεων στις τιμές αυτών, συγκριτικά με το συνδυασμένο διάγραμμα EWMA.

Τα τελευταία χρόνια έχει παρατηρηθεί έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον για την ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου σε σύγχρονες διεργασίες, στις οποίες παρατηρείται χαμηλός ρυθμός εμφάνισης ελαττωματικών αντικειμένων (*high-yield processes* ή *high-quality processes*), υπερμεταβλητότητα και υπομεταβλητότητα (*underdispersion*). Στην περίπτωση των διακριτών χρονοσειρών με απείρως αριθμήσιμο πλήθος τιμών έχουν αναπτυχθεί διαγράμματα ελέγχου για τέτοιου είδους διεργασίες, οι οποίες χαρακτηρίζονται από την παρουσία πολλών μηδενικών τιμών. Σε αυτή την κατηγορία, ανήκει το μοντέλο της μηδενοδοιογκωμένης κατανομής Poisson (*Zero-inflated Poisson*, ZIP). Οι Jazi et al. (2012) πρότειναν και μελέτησαν το μοντέλο ZIPINAR(1) ενώ ο Zhu (2012) πρότεινε και μελέτησε το μοντέλο ZIPINARCH(1). Τα δύο αυτά μοντέλα αποτελούν επεκτάσεις των συνήθων υποδειγμάτων PINAR(1) και PINARCH(1), αντίστοιχα. Για τις παραπάνω διεργασίες, οι Rakitzis et al (2017a) μελέτησαν την απόδοση των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων τύπου Shewhart και CUSUM. Τα αποτελέσματα της μελέτης τους έδειξαν ότι το διάγραμμα CUSUM έχει την μεγαλύτερη ευαισθησία στην ανίχνευση μικρών και μεσαίων αυξήσεων του μέσου επιπέδου της διεργασίας ZIPINAR(1). Ωστόσο, αν αυξηθεί το ποσοστό των μηδενικών μετρήσεων, τότε η απόδοση του διαγράμματος CUSUM χειροτερεύει ενώ το αντίστοιχο διάγραμμα Shewhart βελτιώνεται. Ταυτόχρονα, διαπιστώθηκε ότι στην περίπτωση της διεργασίας ZIPINARCH(1) τα διαγράμματα Shewhart και CUSUM, επηρεάζονται πολύ περισσότερο (κυρίως το τελευταίο) από την παρουσία μηδενικής διόγκωσης σε σύγκριση με τα αντίστοιχα διαγράμματα που αναπτύχθηκαν για το μοντέλο ZIPINAR(1).

Οι Huh et al (2017) πρότειναν και μελέτησαν διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM (παρόμοιο με αυτό των Weiß and Testik (2012)), GLR-CUSUM (δείτε Lai (1995)) και SFCUSUM (*score function-based CUSUM*, Gombay et al. (2009)) στην περίπτωση διεργασιών τύπου Poisson INGARCH(1,1) και ZIP INGARCH(1,1). Τα αποτελέσματα της μελέτης των Huh et al (2017) αναδεικνύουν την υπεροχή του διαγράμματος CUSUM (όπως αυτό ορίστηκε από τους Weiß and Testik (2012)) έναντι του αντίστοιχου διαγράμματος GLR-CUSUM στην ανίχνευση αυξήσεων στις εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων της διεργασίας. Επιπλέον, το διάγραμμα SFCUSUM φαίνεται να δίνει πιο σπάνια εσφαλμένο συναγερμό, και συνεπώς προτείνεται στις περιπτώσεις που οι συχνές διακοπές στη διεργασία επιφέρουν μεγάλο κόστος.

Οι Li et al. (2019) μελέτησαν την απόδοση διαγραμμάτων ελέγχου στην ανίχνευση μετατοπίσεων στο μέσο επίπεδο διεργασιών οι οποίες μοντελοποιούνται σύμφωνα με μια διαδικασία PINAR(1) περικομμένη στο μηδέν (*zero-truncated Poisson INAR(1)* ή ZTPINAR(1), Bakouch and Ristić (2010)) είτε ως μετατοπισμένες διαδικασίες INAR(1) με περιθώρια κατανομή τη γεωμετρική (*Type I and Type II Shifted Geometric INAR(1)* ή SGINAR(1)-I, SGINAR(1)-II, δείτε Nastić (2012)). Τα διαγράμματα που μελετήθηκαν ήταν το συνδυασμένο διάγραμμα αλμάτων, το διάγραμμα ελέγχου CUSUM (δείτε Rakitzis et al. (2017a)) και το διάγραμμα ελέγχου EWMA (Weiß (2011)). Από τη μελέτη τους προέκυψε ότι το διάγραμμα CUSUM είναι αυτό με την καλύτερη απόδοση έναντι των άλλων δύο, όταν η διεργασία είναι ZTPINAR(1). Ωστόσο, στις περιπτώσεις που η διεργασία μοντελοποιείται ως SGINAR(1)-I ή ως SGINAR(1)-II πρότειναν και την χρήση του συνδυασμένου διαγράμματος αλμάτων. Ανάλογη ήταν και η εργασία των Li et al. (2022), ως προς τα διαγράμματα ελέγχου που μελετήθηκαν, για διεργασίες τύπου INAR-GIP(1) όπου η περιθώρια κατανομή είναι η γεωμετρικά διογκωμένη κατανομή Poisson (*geometrically inflated Poisson distribution*, Rakitzis et al. (2016)). Από τη μελέτη τους προέκυψε ότι το διάγραμμα ελέγχου τύπου CUSUM ήταν το πλέον ευαίσθητο μεταξύ των διαγραμμάτων που μελετήθηκαν.

Προκειμένου να βελτιωθεί περαιτέρω η απόδοση των διαγραμμάτων CUSUM στην παρακολούθηση διεργασιών με μεγάλο αριθμό μηδενικών τιμών, οι Kim and Lee (2019), πρότειναν έναν νέο τύπο διαγράμματος CUSUM στον οποίο εφαρμόζεται ένας κανόνας καθυστέρησης (*CUSUM-type chart with delay rule*, CUSUM-DR). Το συγκεκριμένο διάγραμμα αποτελεί επέκταση των συνδυασμένων διαγραμμάτων CUSUM που εισήγαγαν οι He et al. (2014) για την παρακολούθηση μιας διεργασίας τύπου ZIP. Εκτός του διαγράμματος CUSUM-DR οι Kim

and Lee (2019) μελέτησαν την απόδοση ενός διαγράμματος CUSUM το οποίο βασίζεται στο μήκος ροής συμμορφούμενων αντικειμένων/δειγμάτων (*conforming run length* ή CRL, δείτε Bourke (1991)). Η στατιστική συνάρτηση CRL ορίζεται ως το πλήθος των συμμορφούμενων αντικειμένων (ή δειγμάτων) μέχρι την εμφάνιση του πρώτου μη συμμορφούμενου. Οι Kim and Lee (2019) όρισαν το CRL ως το πλήθος των μηδενικών τιμών μέχρι την εμφάνιση της πρώτης μη μηδενικής τιμής και ανέπτυξαν το διάγραμμα CRL-CUSUM καθώς και ένα συνδυασμένο διάγραμμα Shewhart – CRL-CUSUM για την παρακολούθηση διεργασιών τύπου ZIPINAR(1) και ZIPINARCH(1). Τα αποτελέσματα της αριθμητικής μελέτης, έδειξαν ότι το διάγραμμα CUSUM-DR είναι αποτελεσματικό σε περιπτώσεις που υπάρχει μικρή έως μέτρια αύξηση στην εντός ελέγχου μέση τιμή των εν λόγω διεργασιών και παράλληλα το ποσοστό των μηδενικών τιμών είναι σχεδόν σταθερό. Αντίθετα, σε περιπτώσεις που υπάρχει μικρή έως μέτρια αύξηση του μέσου επιπέδου των παραπάνω διεργασιών και ταυτόχρονα παρατηρείται αύξηση στο ποσοστό των μηδενικών, τα διαγράμματα CRL-CUSUM και τα συνδυασμένα διαγράμματα Shewhart CRL-CUSUM είχαν την καλύτερη απόδοση.

Οι Fernandes et al. (2020), πρότειναν και μελέτησαν την απόδοση των διαγραμμάτων Shewhart και CUSUM στην παρακολούθηση διεργασιών τύπου ZMGINAR(1) με στόχο την ανίχνευση αυξήσεων στο μέσο επίπεδο τους. Το μοντέλο ZMGINAR(1) προτάθηκε από τον Barreto-Souza (2015) και χρησιμοποιεί ως περιθώρια κατανομή την τροποποιημένη στο μηδέν Γεωμετρική κατανομή (*zero-modified geometric distribution*). Το μοντέλο αυτό θεωρείται ότι είναι αρκετά ευέλικτο αφού μπορεί να μοντελοποιήσει δεδομένα καταμετρήσεων είτε με υπερμεταβλητότητα είτε με υπομεταβλητότητα. Η παρουσία υπερμεταβλητότητας ή υπομεταβλητότητας αποδίδεται στην παρουσία ή στην έλλειψη πολλών μηδενικών τιμών, αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα της μελέτης των Fernandes et al. (2020) έδειξαν ότι το διάγραμμα Shewhart αποτελεί μία καλή επιλογή σε περιπτώσεις που παρατηρείται υψηλό ποσοστό μηδενικών. Αντίθετα, το διάγραμμα CUSUM έχει καλύτερη απόδοση όταν διατηρείται σχεδόν σταθερό το ποσοστό μηδενικών ή το ποσοστό των μηδενικών τιμών είναι αρκετά χαμηλό.

1.6.2.2 Μοντέλα με Πεπερασμένο Εύρος τιμών

Έστω τώρα ότι μας ενδιαφέρει να παρακολουθήσουμε τον αριθμό X των ελαττωματικών σε ένα δείγμα n αντικειμένων. Σε αυτή την περίπτωση, το πλήθος των πιθανών τιμών που μπορεί να λάβει το X είναι πεπερασμένο και συνήθως στο σύνολο $\{0, 1, \dots, n\}$. Επομένως, η παρακολούθηση

τέτοιου τύπου διεργασιών προϋποθέτει την επιλογή ενός κατάλληλου μοντέλου χρονοσειρών με πεπερασμένο πλήθος δυνατών ακεραίων τιμών.

Ο Weiß (2009c) μελέτησε διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart και κινητού μέσου όρου (*moving average*, MA) στην περίπτωση παρακολούθησης διεργασιών, οι οποίες μοντελοποιούνται σύμφωνα με το διωνυμικό αυτοπαλίνδρομο μοντέλο πρώτης τάξης (*binomial autoregressive of first order model* ή BAR(1)). Το συγκεκριμένο μοντέλο προτάθηκε και μελετήθηκε από τους McKenzie (1985) και Al-Osh and Alzaid (1991). Επίσης, οι Weiß and Atzmuller (2010) παρουσίασαν ένα διάγραμμα EWMA για δίτιμα (binary) δεδομένα, το οποίο είναι κατάλληλο για την ανίχνευση αλλαγών στην πιθανότητα εμφάνισης ενός συγκεκριμένου συμβάντος.

Αν και το μοντέλο BAR(1) είναι ένα απλό μοντέλο χρονοσειράς για διωνυμικές παρατηρήσεις με αυτοσυσχέτιση πρώτης τάξης, εντούτοις, είναι αρκετά περιοριστικό αφού βασίζεται στην υπόθεση πως τα μέλη/μονάδες κάθε δείγματος έχουν την ίδια πιθανότητα «επιτυχίας» (π.χ. να εμφανίσουν μια συγκεκριμένη παρενέργεια κατά τη λήψη ενός φαρμάκου). Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές κάτι τέτοιο δε συμβαίνει και μια πιο ρεαλιστική υπόθεση είναι αυτή της ετερογένειας μεταξύ των μονάδων/μελών κάθε δείγματος. Σε αυτή την περίπτωση, το μοντέλο BAR(1) δεν είναι κατάλληλο για τη μοντελοποίηση των διαθέσιμων δεδομένων. Οι Weiß and Kim (2014) επέκτειναν το μοντέλο BAR(1) προτείνοντας και μελετώντας το μοντέλο Beta-BAR(1) το οποίο είναι γνωστό ως Βήτα-διωνυμικό αυτοπαλίνδρομο μοντέλο πρώτης τάξης (*beta-binomial autoregressive of first order model* ή BBAR(1)). Το μοντέλο BBAR(1) είναι κατάλληλο για τη μοντελοποίηση διωνυμικών δεδομένων με αυτοσυσχέτιση 1^{ης} τάξης, όπου οι μονάδες σε κάθε δείγμα εμφανίζουν ετερογένεια. Για την παρακολούθηση διεργασιών τύπου BAR(1) και BBAR(1), αναπτύχθηκαν μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart και τύπου CUSUM από τους Rakitzis et al. (2017b). Η συγκεκριμένη εργασία έδειξε πως η παρουσία της ετερογένειας στα δεδομένα επηρεάζει σημαντικά την απόδοση των διαγραμμάτων και ιδιαίτερα, των διαγραμμάτων τύπου CUSUM. Ωστόσο, διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA για την παρακολούθηση διεργασιών τύπου BAR(1) και BBAR(1) δεν είχαν μελετηθεί μέχρι πρόσφατα. Οι ιδιότητές τους καθώς και η απόδοσή τους αποτελούν το αντικείμενο του Κεφαλαίου 3 της παρούσας διδακτορικής διατριβής

Όπως και στην περίπτωση των μοντέλων χρονοσειρών με ακέραιες τιμές και απείρως αριθμήσιμο πλήθος τιμών, εκτός από τα μοντέλα τύπου INAR(1), υπάρχουν και μοντέλα τύπου INGARCH(p,q). Τα συγκεκριμένα μοντέλα μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για τη

μοντελοποίηση διωνυμικών δεδομένων με ετερογένεια. Το πιο απλό μοντέλο αυτής της κατηγορίας είναι το μοντέλο binomial INARCH(1), το οποίο προτάθηκε και μελετήθηκε από τους Weiß and Pollett (2014) και Ristić et al. (2016). Οι ιδιότητες αυτής της κατηγορίας μοντέλων δίνονται στο επόμενο κεφάλαιο. Αν και όπως έδειξε η βιβλιογραφική επισκόπηση, έχουν μελετηθεί σχεδόν όλοι οι τύποι διαγραμμάτων ελέγχου για διεργασίες τύπου PINARCH(1), δεν έχει γίνει κάτι αντίστοιχο για την περίπτωση διαγραμμάτων ελέγχου για διεργασίες τύπου BINARCH(1). Στο Κεφάλαιο 4 της παρούσας διδακτορικής διατριβής παρουσιάζονται οι ιδιότητες και η απόδοση διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart, EWMA και CUSUM για την παρακολούθηση διεργασιών BINARCH(1).

1.6.3 Σύνθετα Διαγράμματα Ελέγχου με Μνήμη

Παρόλο που τα διαγράμματα ελέγχου CUSUM και EWMA είναι καλύτερα από τα διαγράμματα Shewhart στην ανίχνευση μικρών και μεσαίων μεταβολών του μέσου επιπέδου της διεργασίας, υπάρχει αυξανόμενο ενδιαφέρον για την περαιτέρω βελτίωση της απόδοσής τους. Μερικές φορές αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την ανάπτυξη και χρήση πιο "εξελιγμένων" διαγραμμάτων, τα οποία είναι διαγράμματα ελέγχου με μνήμη και ορίζονται με τη μίξη διαγραμμάτων διαφορετικού (ή και του ίδιου) τύπου. Ένα τέτοιο διάγραμμα είναι το διάγραμμα ελέγχου Double EWMA (DEWMA) το οποίο αναπτύχθηκε από τους Shamma et al.(1991) και Shamma and Shamma (1992) σε μια προσπάθεια να βελτιώσουν την απόδοση του συνήθους διαγράμματος EWMA στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στο μέσο επίπεδο της διεργασίας. Το συγκεκριμένο διάγραμμα είναι επέκταση του συνήθους διαγράμματος EWMA και βασίζεται στη χρήση της διπλής (αντί της απλής) εκθετικής εξομάλυνσης στις αρχικές μετρήσεις.

Το διάγραμμα DEWMA έχει μελετηθεί από πολλούς συγγραφείς (δείτε Mahmoud and Woodall (2010), Khoo et al. (2010), Adeoti and Malela-Majika (2020), Raza et al. (2020) και τις εκεί αναφορές). Ωστόσο, στην περίπτωση δεδομένων καταμετρήσεων, τέτοιου είδους διαγράμματα, για μια ευρεία γκάμα διακριτών μοντέλων πιθανότητας, έχουν μελετηθεί μόνο στην περίπτωση που υπάρχει ανεξαρτησία μεταξύ των διαδοχικών μετρήσεων. (δείτε π.χ. Zhang et al. (2003), Alevizakos and Koukouninos (2019, 2020, 2021) και τις εκεί αναφορές). Η σχετική βιβλιογραφική αναζήτηση έδειξε πως δεν έχουν μελετηθεί στην περίπτωση δεδομένων καταμετρήσεων με αυτοσυσχέτιση. Στο Κεφάλαιο 3 της παρούσας διδακτορικής διατριβής παρουσιάζονται οι ιδιότητες και η απόδοση μονόπλευρων και δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου τύπου DEWMA για την παρακολούθηση διεργασιών τύπου BAR(1).

Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση τη βιβλιογραφικής ανασκόπηση των διαγραμμάτων ελέγχου για διακριτές χρονοσειρές, θα πρέπει να επισημανθεί η ιδιαίτερη συνεισφορά τους σε πρακτικές εφαρμογές. Μερικά από τα βασικότερα παραδείγματα αυτών είναι τα εξής:

Υγειονομική περίθαλψη:

Τα διαγράμματα ελέγχου για ακέραιες χρονοσειρές εφαρμόζονται στον τομέα της υγείας, καθώς αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο για την παρακολούθηση και την ανάλυση ενός ευρέος φάσματος δεδομένων υγειονομικής περίθαλψης. Ορισμένα παραδείγματα τέτοιων εφαρμογών μπορεί να αφορούν στην παρακολούθηση του ημερήσιου αριθμού των ασθενών που εισάγονται σε ένα νοσοκομείο με μια συγκεκριμένη πάθηση, του εβδομαδιαίου αριθμού των αποτελεσμάτων των εργαστηριακών εξετάσεων που βρίσκονται εκτός των φυσιολογικών ορίων ή του εβδομαδιαίου αριθμού των ανεπιθύμητων συμβάντων που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια μιας χειρουργικής επέμβασης (δείτε π.χ. Lee et al. (2018), Gauran et al., (2018), Weiß and Testik (2011)). Με τον τρόπο αυτό, τα διαγράμματα ελέγχου βοηθούν τους επαγγελματίες στον χώρο της υγείας στον εντοπισμό ζητημάτων ποιότητας και στη λήψη τεκμηριωμένων αποφάσεων σχετικά με τη φροντίδα των ασθενών.

Βιομηχανική παραγωγή:

Η συγκεκριμένη κατηγορία διαγραμμάτων ελέγχου μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον κλάδο της βιομηχανίας για την παρακολούθηση και τον έλεγχο της ποιότητας της διαδικασίας παραγωγής. Μέσω των διαγραμμάτων ελέγχου παρέχονται χρήσιμες πληροφορίες που αφορούν στην απόδοση της διεργασίας με την πάροδο του χρόνου, επιτρέποντας την ανίχνευση αλλαγών στη μέση τιμή ή στη μεταβλητότητα αυτής. Για παράδειγμα, τα διαγράμματα ελέγχου μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παρακολούθηση του ημερήσιου αριθμού των ελαττωματικών σε μια παραγωγική διαδικασία, βοηθώντας στον εντοπισμό της αιτίας του προβλήματος και στη λήψη διορθωτικών μέτρων για την αποτροπή περαιτέρω προβλημάτων ποιότητας (δείτε π.χ. Li et al. (2018), Zhang et al. (2018)). Επομένως, πρόκειται για ένα πολύτιμο εργαλείο που μπορεί να διασφαλίσει στους κατασκευαστές ότι τα παραγόμενα προϊόντα είναι συνεπή και πληρούν τα επιθυμητά πρότυπα ποιότητας.

Διαχείριση δικτύων:

Σε αυτή την περίπτωση, η χρήση διαγραμμάτων ελέγχου βοηθά στον εντοπισμό και στη διόρθωση τυχόν αποκλίσεων από την αναμενόμενη συμπεριφορά του δικτύου και στη διασφάλιση της σταθερής απόδοσής του. Για παράδειγμα, σε μία τέτοια περίπτωση, τα διαγράμματα ελέγχου

μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παρακολούθηση του ημερήσιου αριθμού των σφαλμάτων του δικτύου. Αυτό μπορεί να βοηθήσει στον εντοπισμό της βαθύτερης αιτίας του προβλήματος και στη λήψη διορθωτικών μέτρων για την αποτροπή περαιτέρω προβλημάτων του δικτύου (δείτε π.χ. Sales et al. (2020), Li et al., (2016), Weiß and Testik (2009)).

Τέλος, παρατίθεται ο Πίνακας 1.4 στον οποίο παρουσιάζονται οι μελέτες που έχουν πραγματοποιηθεί μέχρι σήμερα σε διαγράμματα ελέγχου για χρονοσειρές με ακέραιες τιμές. Η παρουσίαση του παρακάτω πίνακα αποσκοπεί στην εύρεση των βιβλιογραφικών/ερευνητικών κενών καθώς και στην ανάδειξη της συμβολής της παρούσας διδακτορικής διατριβής.

Πίνακας 1.4: Διαγράμματα ελέγχου για χρονοσειρές με ακέραιες τιμές, επισκόπηση της περιοχής

Μοντέλο	Διάγραμμα					
	Shewhart	CUSUM	EWMA	DEWMA	SH-EWMA	JUMPS
PINAR(1)	Weiβ (2007)	Weiβ and Testik (2009,2015) Yontay et al. (2013) Kim and Lee (2021)	Weiβ (2011)		Weiβ (2009)	Weiβ (2009b)
PINARCH(1,1)		Huh et al. (2017)				
ZIPINAR(1)	Rakitzis et al. (2017a)	Rakitzis et al. (2017a)				
ZTPINAR(1)	Kim and Lee (2019)	Kim and Lee (2019) Li et al. (2019)	Li et al. (2019)			Li et al. (2019)
ZIPINARCH(1)	Kim and Lee (2019)	Kim and Lee (2019)				
ZIPINARCH(1,1)		Huh et al. (2017)				
SGINAR(1)-I		Li et al. (2019)	Li et al. (2019)			Li et al. (2019)
SGINAR(1)-II		Li et al. (2019)	Li et al. (2019)			Li et al. (2019)
ZMGINAR(1)	Fernades et al. (2020)	Fernades et al. (2020)				
INAR-GIP(1)		Li et al (2022)	Li et al (2022)			
BAR(1)	Rakitzis et al. (2017) Anastasopoulou and Rakitzis (2022a)		Anastasopoulou and Rakitzis (2022a)	Anastasopoulou and Rakitzis (2022b)		
BBAR(1)	Anastasopoulou and Rakitzis (2022a)		Anastasopoulou and Rakitzis (2022a)			
BINARCH(1)	Anastasopoulou and Rakitzis (2022c)	Anastasopoulou and Rakitzis (2021)	Anastasopoulou and Rakitzis (2022c)			
NGINAR(1)		Li et al. (2016)	Li et al. (2016)			Li et al. (2016)

1.7 Σκοπός και Δομή διδακτορικής διατριβής

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εστιάζει στην μελέτη διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση διεργασιών οι οποίες μοντελοποιούνται σύμφωνα με ένα μοντέλο χρονοσειρών με ακέραιες τιμές. Μέσω της βιβλιογραφικής ανασκόπησης, έγινε αντιληπτό ότι έχει υπάρξει σημαντική πρόοδος και ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση των εν λόγω διεργασιών τα τελευταία 10-15 έτη. Παρά ταύτα, διαπιστώθηκε ότι υπάρχουν σημαντικά ερευνητικά κενά, μέρος των οποίων έχει ως στόχο να καλύψει η παρούσα διδακτορική διατριβή.

Αναφορικά με τη δομή της παρούσας διδακτορικής διατριβής, *απαρτίζεται από 7 κεφάλαια*. Με την ολοκλήρωση των εισαγωγικών εννοιών και της βιβλιογραφικής ανασκόπησης στην ερευνητική περιοχή του στατιστικού ελέγχου διεργασιών, ακολουθεί το δεύτερο κεφάλαιο στο οποίο παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες των μοντέλων $BAR(1)$, $BBAR(1)$ και $BINARCH(1)$. Αν και τα συγκεκριμένα υποδείγματα είναι γνωστά και συχνά χρησιμοποιούμενα για τη μοντελοποίηση μετρήσεων από διωνυμική κατανομή στα οποία υπάρχει συσχέτιση 1^{ης} τάξης, από τη βιβλιογραφική αναζήτηση διαπιστώθηκαν ελλείψεις σε κατάλληλες μεθόδους για τη στατιστική παρακολούθηση των αντίστοιχων διεργασιών. Για τον λόγο αυτό στα επόμενα κεφάλαια θα αναπτυχθούν και θα μελετηθούν κατάλληλα διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση διεργασιών τύπου $BAR(1)$, $BBAR(1)$ και $BINARCH(1)$.

Στο Κεφάλαιο 3, παρουσιάζονται διαγράμματα ελέγχου για διεργασίες τύπου $BAR(1)$. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση διεργασιών αυτού του τύπου έχουν προταθεί μόνο από τους Rakitzis et al (2017b), οι οποίοι ανέπτυξαν και μελέτησαν μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart και CUSUM. Δεδομένης της έλλειψης που παρατηρείται στη σχετική βιβλιογραφία, στο Κεφάλαιο 3 θα αναπτυχθούν και θα μελετηθούν μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου EWMA για την ανίχνευση μειώσεων και αυξήσεων του μέσου επιπέδου της διεργασίας $BAR(1)$. Παράλληλα, η βιβλιογραφική αναζήτηση έδειξε πως δεν έχει μελετηθεί η περίπτωση των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου DEWMA για δεδομένα καταμετρήσεων με αυτοσυσχέτιση. Επομένως, η παρούσα διδακτορική διατριβή συμβάλει στην αξιολόγηση της απόδοσης σύγχρονων διαγραμμάτων ελέγχου με μνήμη όπως το DEWMA με σκοπό να διαπιστωθεί αν και πόσο υπερτερεί έναντι παραδοσιακών τεχνικών όπως το σύνηθες διάγραμμα ελέγχου EWMA στην παρακολούθηση $BAR(1)$ διεργασιών.

Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 4 ακολουθεί η περίπτωση των $BBAR(1)$ διεργασιών. Στη σχετική βιβλιογραφία υπάρχουν μόνο διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart και CUSUM

(δείτε Rakitzis et al (2017b)) για την παρακολούθηση διεργασιών τύπου BBAR(1). Επομένως, σκοπός του Κεφαλαίου 4 αποτελεί η ανάπτυξη μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου για την ανίχνευση μετατοπίσεων (μειώσεων ή αυξήσεων) στο μέσο επίπεδο μιας διεργασίας τύπου BBAR(1).

Επιπρόσθετα, η βιβλιογραφική ανασκόπηση έδειξε ότι δεν έχουν μελετηθεί διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση διεργασιών τύπου BINARCH(1). Συνεπώς, στο Κεφάλαιο 5, προτείνονται και μελετώνται διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση διεργασιών που προέρχονται από μία άλλη επέκταση του BAR(1) μοντέλου, που είναι το υπόδειγμα BINARCH(1). Συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο αυτό εξετάζονται μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart, EWMA και CUSUM καθώς και δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA.

Συνεπώς, στα Κεφάλαια 3-5 αναδεικνύεται η ουσιαστική συνεισφορά της διδακτορικής διατριβής στην ερευνητική περιοχή του στατιστικού ελέγχου διεργασιών, η οποία προκύπτει από την ανάπτυξη μονόπλευρων αλλά και δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου με μνήμη για διεργασίες οι οποίες μοντελοποιούνται σύμφωνα με ένα υπόδειγμα χρονολογικής σειράς με ακέραιες τιμές. Ταυτόχρονα, αξίζει να σημειωθεί ότι στα πλαίσια της διδακτορικής διατριβής παρέχονται πληροφορίες σχετικά με τον τρόπο σχεδιασμού των προτεινόμενων διαγραμμάτων καθώς και πρακτικές οδηγίες για την επιλογή των τιμών των παραμέτρων των διαγραμμάτων ώστε αυτά να έχουν την επιθυμητή εντός ελέγχου απόδοση αλλά και αυξημένη ικανότητα ανίχνευσης διαφόρων τύπων μετατοπίσεων. Για τον υπολογισμό της απόδοσης των προτεινόμενων διαγραμμάτων ελέγχου χρησιμοποιείται κυρίως η μέθοδος των Μαρκοβιανών αλυσίδων, η οποία επιτρέπει τον ακριβή υπολογισμό της απόδοσης των εν λόγω διαγραμμάτων. Ωστόσο, σε περιπτώσεις που δεν ήταν δυνατή η χρήση της παραπάνω μεθόδου, χρησιμοποιείται προσομοίωση Monte Carlo.

Στο Κεφάλαιο 6, δίνονται αριθμητικές συγκρίσεις μεταξύ των προαναφερθέντων διαγραμμάτων και άλλων αντίστοιχων διαγραμμάτων ελέγχου που είναι διαθέσιμα στη βιβλιογραφία για κάθε μία από τις παραπάνω διεργασίες. Συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα των αριθμητικών συγκρίσεων έδειξαν ότι τα νέα διαγράμματα έχουν καλύτερη απόδοση για τις περισσότερες από τις εξεταζόμενες περιπτώσεις. Κατά συνέπεια, τα προτεινόμενα διαγράμματα, έχουν απλή εφαρμογή και ταυτόχρονα επιτυγχάνουν βελτιωμένη απόδοση συγκριτικά με τα παραδοσιακά διαγράμματα. Το γεγονός αυτό επιτρέπει την περαιτέρω γενίκευσή τους σε μία μελλοντική έρευνα και την κατασκευή πιο σύνθετων διαγραμμάτων ελέγχου. Εκτός των αριθμητικών συγκρίσεων, στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται και εφαρμογές

των προτεινόμενων διαγραμμάτων ελέγχου στην στατιστική παρακολούθηση διεργασιών, με χρήση πραγματικών δεδομένων. Οι εφαρμογές που παρουσιάζονται προέρχονται από τις επιστημονικές περιοχές της επιδημιολογίας, των οικονομικών και της διαχείρισης δικτύων υπολογιστών. Συνεπώς, η παρούσα διδακτορική διατριβή συμβάλει στην ανάπτυξη των ερευνητικών περιοχών της βιοεπιτήρησης (*biosuveillance*), της χρηματοοικονομικής επιτήρησης (*financial monitoring*) και της παρακολούθησης δικτύων (*network monitoring*).

Τέλος, στο Κεφάλαιο 7, συνοψίζονται τα κυριότερα πλεονεκτήματα των προτεινόμενων διαγραμμάτων έναντι αντίστοιχων που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία, ενώ παράλληλα παρουσιάζονται προτάσεις για περαιτέρω μελέτη και έρευνα.

1.8 Ανακεφαλαίωση

Αρχικά, στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε μία σύντομη ιστορική αναδρομή του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας καταγράφοντας με χρονολογική σειρά τα στάδια εξέλιξής του. Δόθηκαν οι βασικές έννοιες του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών καθώς και οι βασικοί τύποι διαγραμμάτων ελέγχου.

Στη συνέχεια παρουσιάστηκε μια επισκόπηση της περιοχής των διαγραμμάτων ελέγχου για διεργασίες οι οποίες μοντελοποιούνται σύμφωνα με ένα μοντέλο χρονοσειρών με ακέραιες τιμές. Από την εξέταση της σχετικής βιβλιογραφίας διαπιστώθηκε ότι υπάρχει έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον στον χώρο του στατιστικού ελέγχου διεργασιών για διακριτά μοντέλα χρονοσειρών, ειδικά κατά τη διάρκεια της τελευταίας δεκαετίας. Επιπλέον, αναδείχθηκαν σημαντικές ερευνητικές ελλείψεις σε τεχνικές και μεθόδους του στατιστικού ελέγχου διεργασιών για την παρακολούθηση διεργασιών αυτού του τύπου. Ως εκ τούτου παρουσιάζεται η συμβολή της παρούσας διδακτορικής διατριβής, η οποία έχει στόχο την κάλυψη ορισμένων από αυτών των ερευνητικών κενών.

Κεφάλαιο 2

Μοντέλα Χρονοσειρών με Ακέραιες Τιμές

2.1 Εισαγωγή

Η μοντελοποίηση και η ανάλυση χρονοσειρών με ακέραιες τιμές έχουν αποκτήσει αυξημένο ενδιαφέρον κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών. Οι χρονοσειρές με ακέραιες τιμές παρατηρούνται συχνά σε μετρήσεις γεγονότων όπως για παράδειγμα ο μηνιαίος αριθμός ατυχημάτων σε ένα εργοστάσιο, ο αριθμός των κατελημμένων γραμμών σε ένα τηλεφωνικό δίκτυο ανά τριάντα λεπτά κ.ο.κ. Επίσης, τέτοια δεδομένα μπορούν να προκύψουν από τη διακριτοποίηση χρονοσειρών με συνεχείς τιμές. Για παράδειγμα, με βάση τον ημερήσιο όγκο βροχόπτωσης, μπορεί να ληφθεί μια δίτιμη ακολουθία τιμών (μονάδες και μηδενικά), δηλαδή βροχερές και ξηρές μέρες (π.χ. αντίστοιχα 1 και 0).

Αν και τα προηγούμενα χρόνια είχε δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην ανάπτυξη μοντέλων με απείρως αριθμήσιμο πλήθος τιμών (π.χ. με τιμές στο $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2, \dots\}$ ή στο $\mathbb{N} = \{1,2, \dots\}$), τα τελευταία χρόνια μελετώνται και μοντέλα με πεπερασμένο εύρος τιμών δηλ., $\{0,1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ γνωστό. Ορισμένα παραδείγματα πραγματικών εφαρμογών που αναδεικνύουν την σπουδαιότητα της χρήσης αυτών των μοντέλων είναι η μοντελοποίηση του πλήθους των εταιρειών (από τις n) για τις οποίες έγινε μια χρηματιστηριακή συναλλαγή εντός 5λέπτου έναν συγκεκριμένο μήνα του έτους ή η μοντελοποίηση του εβδομαδιαίου αριθμού περιφερειών (από τις n) στις οποίες εμφανίστηκε τουλάχιστον μία νέα μόλυνση από έναν συγκεκριμένο ιό. Το πιο συχνά χρησιμοποιούμενο μοντέλο για την ερμηνεία τέτοιου είδους δεδομένων είναι το Διωνυμικό Αυτοπαλίνδρομο μοντέλο 1ης τάξης (ή $\text{BAR}(1)$) καθώς και οι επεκτάσεις του όπως είναι τα μοντέλα $\text{BBAR}(1)$ και $\text{BINARCH}(1)$.

Επομένως, στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν τα παραπάνω μοντέλα καθώς και οι βασικές ιδιότητές τους προκειμένου στη συνέχεια να αναπτυχθούν κατάλληλα διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθησή των αντίστοιχων διαδικασιών.

2.2 Βασικές Έννοιες

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν βασικές έννοιες οι οποίες σχετίζονται με την ανάλυση χρονοσειρών και θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια. Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε Box et al. (2015) και Prado and West (2015).

Στάσιμη διαδικασία

Ορισμός 2.1: Μία χρονοσειρά $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, η οποία επιδεικνύει παρόμοια εξάρτηση ανάμεσα στις διαδοχικές παρατηρήσεις κατά τη διάρκεια του χρόνου, ονομάζεται στάσιμη χρονοσειρά (*stationary time series*). Επίσης να σημειωθεί ότι η ιδιότητα της στάσιμης χρονοσειράς είναι πολύ σημαντική, καθώς επιτρέπει να εκτιμηθούν με ευκολία οι παράμετροί της.

Αυτοσυνδιακύμανση

Ορισμός 2.2: Έστω $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ μία στάσιμη χρονοσειρά με μέσο $E(X_t) = \mu$. Με τον όρο αυτοσυνδιακύμανση (*autocovariance*) ονομάζεται η συνάρτηση από την οποία λαμβάνεται η συνδιακύμανση της διαδικασίας με τον εαυτό της σε ζεύγη, τα οποία απέχουν h περιόδους μεταξύ τους. Συγκεκριμένα, δίνονται οι παρακάτω σχέσεις:

$$\gamma_h = Cov(X_t, X_{t+h}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)]$$

$$\gamma_0 = V(X_t) = \sigma^2$$

Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης

Ορισμός 2.3: Η συνάρτηση της αυτοσυσχέτισης (*Autocorrelation Function – ACF*) υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0}$$

με το $h \in \mathbb{Z}$ και το $\rho_0 = 1$. Οι αυτοσυσχετίσεις έχουν ιδιαίτερη σημασία στην ανάλυση χρονοσειρών, καθώς υπολογίζουν τον βαθμό στον οποίο συσχετίζεται μια τιμή της χρονοσειράς με παρελθούσες τιμές της. Με άλλα λόγια μπορεί να ειπωθεί ότι αποτελεί «μνήμη» της χρονοσειράς. Επίσης σε μία μελέτη, έχει ενδιαφέρον για έναν ερευνητή η κατασκευή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης της χρονοσειράς και η γραφική της απεικόνιση καθώς μπορεί να αντλήσει χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με το καταλληλότερο μοντέλο. Επομένως, ο όρος συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (*Autocorrelation Function – ACF*) αναφέρεται στις αυτοσυσχετίσεις της χρονοσειράς ως συνάρτηση της χρονικής υστέρησης k , όπου $k = 0, 1, 2, \dots$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, δηλαδή το γράφημα των τιμών ρ_k για $k = 0, 1, 2$, ονομάζεται διάγραμμα αυτοσυσχετίσεων (*correlogram*).

Μετά τον ορισμό των εννοιών της αυτοσυσχέτισης και της αυτοσυνδιακύμανσης, μπορούν να παρουσιαστούν δύο επιπλέον ορισμοί για την έννοια της στάσιμης χρονοσειράς. Ειδικότερα,

μία στάσιμη χρονοσειρά μπορεί να διακριθεί σε αυστηρώς στάσιμη ή ασθενώς στάσιμη χρονοσειρά. Στην περίπτωση αυτή δίνονται οι παρακάτω ορισμοί:

Ορισμός 2.4: Μια χρονοσειρά $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ καλείται αυστηρώς στάσιμη αν οι πολυδιάστατες κατανομές των τυχαίων διανυσμάτων $(X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+k})$ και $(X_{t+m}, X_{t+m+1}, \dots, X_{t+m+k})$ είναι οι ίδιες για κάθε t, k και m στο $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

Ορισμός 2.5: Μια χρονοσειρά $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ καλείται ασθενώς στάσιμη αν

- (i). $E(X_t) = \mu < \infty$, για κάθε $t \in \mathbb{N}$.
- (ii). $E[(X_t - \mu)^2] = \sigma^2 < \infty$, για κάθε $t \in \mathbb{N}$.
- (iii). $E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)] = \gamma_k$, για κάθε $t, k \in \mathbb{N}$.

Προφανώς, ο παραπάνω ορισμός έχει νόημα όταν υπάρχουν οι μέσες τιμές και οι διακυμάνσεις. Από τη συνθήκη (iii) διαπιστώνεται ότι τα ζεύγη όρων της χρονοσειράς $\{X_t\}$ με υστέρηση k , έχουν την ίδια συνδιακύμανση. Δηλαδή, η διακύμανση μεταξύ X_t και X_{t+k} εξαρτάται μόνο από το k και όχι από τον χρόνο t . Για $k = 0$ η σχέση αυτή δείχνει ότι οι διακυμάνσεις $V(X_t)$ είναι σταθερές ($= \gamma_0$) για κάθε t .

Γενικά, μια χρονοσειρά $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ είναι αυστηρώς στάσιμη αν οι πραγματοποιήσεις της δεν εξαρτώνται από το χρόνο που ξεκινούν, αλλά μόνο από τις αρχικές της τιμές. Στην πράξη είναι πιο εύκολο να ελεγχθεί η ασθενής στασιμότητα και αρκετά πιο δύσκολο η αυστηρή στασιμότητα. Συνήθως η ασθενής στασιμότητα αρκεί για την περαιτέρω μελέτη της χρονοσειράς. Επίσης, αν μια χρονοσειρά $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ είναι αυστηρώς στάσιμη, τότε είναι και ασθενώς στάσιμη. Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

2.3 Διωνυμικός τελεστής λέπτυνσης

Ένα βασικό χαρακτηριστικό των διακριτών μοντέλων χρονοσειρών είναι ότι οι τιμές που λαμβάνουν είναι ακέραιες. Προκειμένου να εξασφαλιστεί αυτή η ιδιότητα στα μοντέλα ARMA, εφαρμόζεται ο διωνυμικός τελεστής λέπτυνσης (*binomial thinning operator*), ο οποίος συμβολίζεται με « \circ » και στην πραγματικότητα αντικαθιστά την πράξη του πολλαπλασιασμού οδηγώντας σε ακέραιες τιμές. Σύμφωνα με τους Steutel and van Harn (1979), ο τελεστής αυτός ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 2.6: Αν N είναι μια μη αρνητική διακριτή τυχαία μεταβλητή και $\alpha \in (0, 1)$ τότε με χρήση του διωνυμικού τελεστή λέπτυνσης ορίζεται η τυχαία μεταβλητή

$$\alpha \circ N = \sum_{t=1}^N X_t, \quad (2.1)$$

όπου $X_t, t = 1, 2, \dots$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων (*independent and identically distributed, iid*) τυχαίων μεταβλητών Bernoulli, ανεξάρτητων από το N , με πιθανότητα επιτυχίας α . Η τυχαία μεταβλητή $\alpha \circ N$ μετρά τον αριθμό των επιτυχιών σε ένα τυχαίο πλήθος δοκιμών Bernoulli όπου η πιθανότητα α παραμένει σταθερή σε όλο το πείραμα. Το πλήθος των δοκιμών Bernoulli καθορίζεται από την τιμή της τυχαίας μεταβλητής N . Έτσι, για δεδομένη τιμή του N , έστω $N = n$, η τυχαία μεταβλητή $\alpha \circ N$ ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και α .

Μια διαισθητική ερμηνεία του παραπάνω ορισμού είναι η εξής: Έστω ότι τη χρονική στιγμή t έχουμε έναν πληθυσμό μεγέθους N και έστω επίσης ότι τη χρονική στιγμή $t + 1$ ο πληθυσμός συρρικνώνεται, διότι κάποια από τα μέλη του δεν επιβιώνουν. Αν θεωρηθεί ότι τα μέλη του πληθυσμού αποβιώνουν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και ότι η πιθανότητα «θανάτου» μεταξύ των χρονικών στιγμών t και $t + 1$ είναι ίση με $1 - \alpha$, τότε ο τυχαίος αριθμός των επιζώντων μελών δίνεται από τον όρο $\alpha \circ N$.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφερθεί ότι οι τελεστές λέπτυνσης είναι πιθανοτικοί τελεστές (*probabilistic operators*) οι οποίοι εφαρμόζονται σε τυχαίες μεταβλητές και ορίζουν πράξεις μεταξύ τους. Αν θεωρηθεί ότι αυτές οι μετρήσεις αντιπροσωπεύουν το μέγεθος ενός πληθυσμού, τότε ο τελεστής λέπτυνσης διαγράφει τυχαία μερικά από τα μέλη του πληθυσμού με στόχο τη συρρίκνωση του, έτσι ώστε να οδηγεί πάντα σε ακέραιες τιμές. Ο πιο γνωστός τελεστής λέπτυνσης είναι ο διωνυμικός.

Στη συνέχεια δίνονται οι βασικές ιδιότητες της τ.μ. $\alpha \circ N$. Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε τις εργασίες των Weiß (2008) και Scotto et al. (2015), στις οποίες γίνεται μια επισκόπηση της περιοχής των μοντέλων χρονοσειρών με ακέραιες τιμές, τα οποία βασίζονται σε διαφορετικούς τύπους τελεστών λέπτυνσης.

Πίνακας 2.1: Ιδιότητες της τ.μ. $\alpha \circ N$

$$E(\alpha \circ N) = \alpha \cdot \mu_N$$

$$V(\alpha \circ N) = \alpha^2 \cdot \sigma_N^2 + \alpha(1 - \alpha) \cdot \mu_N$$

$$\text{Cov}(\alpha \circ N) = \alpha \cdot \sigma_N^2$$

όπου $\mu_N = E(N)$, $\sigma_N^2 = V(N)$.

Επεξηγηματικότερα, η έννοια του διωνυμικού τελεστή λέπτυνσης μπορεί να αποτυπωθεί από ένα παράδειγμα. Έστω ότι N_t είναι ο αριθμός των ατόμων που νοσούν από Covid-19 τη

χρονική στιγμή t . Από την χρονική στιγμή t μέχρι την χρονική στιγμή $t + 1$, ένα άτομο μπορεί να συνεχίζει να είναι θετικό στον Covid-19 ή να έχει θεραπευτεί. Παράλληλα, στο ίδιο διάστημα ενδέχεται να προκύψουν νέα κρούσματα Covid-19. Επίσης, υιοθετείται η επιπλέον υπόθεση ότι ένα άτομο μπορεί να μολυνθεί ή να αποκατασταθεί η υγεία του ανεξαρτήτως των υπολοίπων.

Αν συμβολίσουμε με $\alpha \in (0,1)$ την πιθανότητα ένα άτομο να παραμείνει θετικό στον Covid-19 και Y_{t+1} ο αριθμός των νέων μολυσμένων ατόμων μεταξύ των χρονικών περιόδων t έως $t + 1$, τότε ο αριθμός των ασθενών την χρονική στιγμή $t + 1$ θα είναι:

$$N_{t+1} = \sum_{i=1}^{N_t} X_i + Y_{t+1}.$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή λέπτυνσης στην παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι:

$$N_{t+1} = \alpha \circ N_t + Y_{t+1}.$$

Το παραπάνω μοντέλο είναι γνωστό και ως INAR(1) υπόδειγμα, το οποίο εισήχθη από τους McKenzie (1985, 1988) και Al-Osh & Alzaid (1987), και ανήκει στην οικογένεια μοντέλων INARMA (integer-valued ARMA models, Weiß et al., 2019).

Πριν κλείσει η παρούσα ενότητα αξίζει να αναφερθεί ότι σύμφωνα με τον McKenzie (1985), το BAR(1) μοντέλο αποτελεί μια παραλλαγή του μοντέλου INAR(1), με περιθώρια κατανομή τη διωνυμική. Αντίστοιχα το υπόδειγμα PINAR(1), το οποίο βασίζεται και αυτό στον διωνυμικό τελεστή λέπτυνσης, έχει ως περιθώρια κατανομή την κατανομή Poisson. Από τα όσα έχουν αναφερθεί έως τώρα, για να προκύψουν μοντέλα χρονοσειρών με ακέραιες τιμές, γίνεται αντικατάσταση της πράξης του πολλαπλασιασμού στην αναδρομική σχέση του (συνήθους) μοντέλου ARMA από τον διωνυμικό τελεστή λέπτυνσης. Έτσι οδηγούν στην οικογένεια μοντέλων χρονοσειρών με ακέραιες τιμές INARMA και ανάλογα με το ποια είναι η περιθώρια κατανομή της χρονοσειράς, καταλήγουν σε υπο-οικογένειες μοντέλων. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που η περιθώρια κατανομή είναι η κατανομή Poisson, προκύπτει το μοντέλο PINARMA (Poisson-integer-valued ARMA models).

Ορισμός 2.7: Έστω $(\varepsilon_t)_{\mathbb{Z}}$ μία διαδικασία με ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με εύρος τιμών \mathbb{N}_0 και $\rho \in (0,1)$. Τότε η διαδικασία $(X_t)_{\mathbb{Z}}$ ονομάζεται PINAR(1) αν ισχύει η εξής σχέση:

$$X_t = \rho \circ X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.2)$$

με την ακολουθία $(\varepsilon_t)_{\mathbb{Z}}$ να είναι ανεξάρτητη όλες τις πράξεις των λεπτύνσεων (*thinnings*), από οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Επίσης, η εφαρμογή των λεπτύνσεων είναι ανεξάρτητη όλων

των υπολοίπων πράξεων. Το μοντέλο PINAR(1) έχει αρκετές εφαρμογές. Για παράδειγμα η διαδικασία X_t μπορεί να περιγράφει τον αριθμό των πελατών τη χρονική στιγμή t (π.χ. υφιστάμενες συνδέσεις σε έναν server), η ε_t να αναπαριστά τους νέους πελάτες (π.χ. νέες συνδέσεις μεταξύ t και $t + 1$) και ο όρος $X_{t-1} - \rho \circ X_{t-1}$ να δηλώνει τον αριθμό των πελατών που έφυγαν με τη λήξη της τελευταίας περιόδου (π.χ. πόσοι αποσυνδέθηκαν μεταξύ t και $t - 1$).

2.4 Εισαγωγή στα αυτοπαλίνδρομα μοντέλα

Η γενική μορφή ενός αυτοπαλίνδρομου υποδείγματος τάξεως p ή αλλιώς ενός μοντέλου AR(p) προέκυψε κατά τη δεκαετία του 1920 από τις μελέτες των Udny Yule (1871 –1951), Eugen Slutsky (1880 –1948) και άλλων ερευνητών. Η πρώτη όμως γνωστή εφαρμογή αυτών των μοντέλων ήταν του Yule (1927) για την ανάλυση της συμπεριφοράς των ηλιακών κηλίδων σε χρονοσειρές, κατά την οποία δόθηκε η παρακάτω γενική μορφή του μοντέλου AR(p):

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t. \quad (2.3)$$

Η τάξη p αναφέρεται στο μήκος της χρονικής υστέρησης, ενώ η μορφή ενός αυτοπαλίνδρομου υποδείγματος μας παραπέμπει ουσιαστικά σε ένα υπόδειγμα παλινδρόμησης, όπου οι ερμηνευτικές μεταβλητές είναι οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής X_t με χρονική υστέρηση. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος επικράτησε ο όρος αυτοπαλίνδρομο.

Επίσης, η μεταβλητή ε_t θεωρείται ότι είναι λευκός θόρυβος. Συγκεκριμένα, η ε_t είναι μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, για την οποία ισχύει ότι η μέση τιμή είναι ίση με μηδέν και η διακύμανση είναι σταθερή όλες τις χρονικές στιγμές. Επιπλέον, όλες οι παρατηρήσεις της σειράς είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους. Άρα ισχύουν τα εξής: $E(\varepsilon_t) = 0$, $V(\varepsilon_t) = \sigma^2$, $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$, $s \neq 0$

Ένα από τα πιο απλά παραδείγματα αυτοπαλίνδρομου μοντέλου είναι το AR(1) με γενική μορφή:

$$X_t = \mu + aX_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.4)$$

Αν υποθέσουμε ότι είτε ο μέσος είναι μηδέν είτε ότι οι μεταβλητές εκφράζονται ως αποκλίσεις από τους μέσους (δηλαδή ως $X_t - \mu$), τότε

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.5)$$

όπου ε_t , $t = 1, 2, \dots$, είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με την προϋπόθεση η χρονοσειρά να είναι στάσιμη, δηλαδή $|a| < 1$. Για $a > 1$ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης φθίνει γεωμετρικά και τείνει προς το μηδέν κατά τη διάρκεια του χρόνου.

Ανάλογα, όταν $\alpha < 1$ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης πάλι θα τείνει προς το μηδέν αλλά με εναλλασσόμενο πρόσημο αυτή τη φορά.

Έστω ότι η ακολουθία X_t είναι διακριτή και ορισμένη για μη αρνητικούς ακέραιους και $\alpha \in (0,1)$, τότε η X_{t-1} δεν θα είναι ανεξάρτητη με την ε_t . Αυτό συμβαίνει γιατί, το γινόμενο της τυχαίας μεταβλητής X_{t-1} με το α θα έχει ως αποτέλεσμα μη ακέραιο αριθμό. Όμως για να ορίζεται η τυχαία μεταβλητή X_t θα πρέπει στο παραπάνω γινόμενο να προστεθεί ο όρος ε_t , έτσι ώστε η X_t να ισούται με έναν μη αρνητικό ακέραιο αριθμό. Επομένως η X_{t-1} θα εξαρτάται από το λευκό θόρυβο ε_t .

Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος και τη διατήρηση των ακέραιων τιμών στη χρονοσειρά, γίνεται αντικατάσταση του γινομένου αX_{t-1} με τον όρο $\alpha \circ X_{t-1}$, χρησιμοποιώντας το διωνυμικό τελεστή λέπτυνσης. Η παραπάνω αντικατάσταση έχει ως αποτέλεσμα ακέραιους αριθμούς, οπότε με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζουμε την ανεξαρτησία της τυχαίας μεταβλητής X_t με το λευκό θόρυβο ε_t .

2.5 Το μοντέλο Binomial AR(1)

2.5.1 Ιδιότητες του μοντέλου Binomial AR(1)

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες του μοντέλου BAR(1) όπως αυτές δόθηκαν από τον McKenzie (1985) και πιο πρόσφατα από τον Weiß (2018).

Ορισμός 2.1: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $\pi \in (0,1)$ και $\rho \in \left(\max \left\{ -\frac{\pi}{1-\pi}, -\left(\frac{1-\pi}{\pi} \right) \right\}, 1 \right)$, όπου $\beta = \pi(1-\rho)$ και $\alpha = \beta + \rho$. Τότε, το μοντέλο Binomial AR(1) (ή BAR(1)) ορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \beta \circ (n - X_{t-1}), \quad t \geq 1, \quad X_0 \sim B(n, \pi),$$

όπου οι τ.μ. $\alpha \circ X_{t-1}$ και $\beta \circ (n - X_{t-1})$ είναι αμοιβαία ανεξάρτητες ακολουθίες ανεξάρτητων τ.μ. Bernoulli με παραμέτρους α και β , αντίστοιχα. Επίσης, είναι ανεξάρτητες των X_s , $s \leq t$

Η φυσική ερμηνεία του παραπάνω μοντέλου είναι η εξής: Έστω ένα σύστημα n ανεξάρτητων μονάδων που βρίσκονται είτε στην κατάσταση 0 (π.χ. μη λειτουργία) είτε στην κατάσταση 1 (π.χ. λειτουργία). Ο αριθμός των μονάδων που λειτουργούν τη χρονική στιγμή t είναι X_t και είναι ίσος με

- (i) τον αριθμό των μονάδων που βρίσκονται στην κατάσταση 1 τη χρονική στιγμή t , ενώ την προηγούμενη χρονική στιγμή ήταν στην κατάσταση 1 συν

- (ii) τον αριθμό των μονάδων που βρίσκονται στην κατάσταση 1 τη χρονική στιγμή t , ενώ την προηγούμενη χρονική στιγμή ήταν στην κατάσταση 0.

Η περίπτωση (i) περιγράφεται από τον όρο $\alpha \circ X_{t-1}$, όπου α είναι η πιθανότητα να παραμείνει η μονάδα στην κατάσταση 1 ενώ η (ii) από τον όρο $\beta \circ (n - X_{t-1})$, όπου β είναι η πιθανότητα μετάβασης από την 0 στην 1.

Επίσης το μοντέλο BAR(1) έχει ως περιθώρια κατανομή τη διωνυμική με παραμέτρους n και π (συμβ. $B(n, \pi)$) Αυτό σημαίνει πως η πιθανότητα $P(X_t = x)$ υπολογίζεται μέσω της $B(n, \pi)$, για $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Άρα, η (περιθώρια) μέση τιμή είναι $E(X_t) = n\pi$ και η (περιθώρια) διασπορά είναι $V(X_t) = n\pi(1 - \pi)$.

Αν συμβολιστεί με $\rho(k) = \text{Corr}[X_t, X_{t-k}]$, η αυτοσυσχέτιση k -τάξης, τότε, για την περίπτωση του μοντέλου BAR(1), αυτή είναι ίση με:

$$\rho(k) := \text{Corr}[X_t, X_{t-k}] = \rho^k, \quad k \geq 0.$$

Μία βασική ιδιότητα του μοντέλου είναι ότι η ακολουθία $(X_t)_{\mathbb{N}_0}$ είναι μία στάσιμη Μαρκοβιανή αλυσίδα με πιθανότητες μετάβασης $p_{k|l} = P(X_t = k | X_{t-1} = l)$, οι οποίες δίνονται από την ακόλουθη σχέση (Weiß (2018)):

$$p_{k|l} = \sum_{m=\max(0, k+l-n)}^{\min(k, l)} \binom{l}{m} \binom{n-l}{k-m} \alpha^m (1 - \alpha)^{l-m} \beta^{k-m} (1 - \beta)^{n-l+m-k} \quad (2.6)$$

Η εξίσωση (2.6) περιγράφει την πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση l στην κατάσταση k στην περίπτωση της στάσιμης Μαρκοβιανής αλυσίδας $(X_t)_{\mathbb{N}_0}$. Δηλαδή, ποια είναι η πιθανότητα τη χρονική στιγμή t , το πλήθος των επιτυχιών (σε n προσπάθειες) να είναι k δεδομένου ότι την αμέσως προηγούμενη χρονική περίοδο ήταν l .

Επιπλέον, η υπό συνθήκη μέση τιμή $E(X_t | X_{t-1})$ και η υπό συνθήκη διασπορά $V(X_t | X_{t-1})$ έχουν την ιδιότητα ότι είναι γραμμικές ως προς τη X_t . Συγκεκριμένα, δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$E(X_t | X_{t-1}) = \rho X_{t-1} + n\beta \quad (2.7)$$

$$V(X_t | X_{t-1}) = \rho(1 - \rho)(1 - 2\pi)X_{t-1} + n\beta(1 - \beta) \quad (2.8)$$

Από τη σχέση (2.7) διαπιστώνεται ότι η $E(X_t | X_{t-1})$ αλλάζει με την πάροδο του χρόνου σε αντίθεση με τη $E(X_t)$, η οποία παραμένει σταθερή. Όμως, στην περίπτωση του μοντέλου BAR(1), το οποίο είναι ένα μοντέλο στάσιμης χρονοσειράς, έπεται ότι η $E(X_t | X_{t-1})$ παραμένει σταθερή και χρησιμοποιείται για προβλέψεις. Με άλλα λόγια, εφόσον πρόκειται για μία στάσιμη χρονοσειρά οι στατιστικές της ιδιότητες παραμένουν αμετάβλητες στο χρόνο σε αντίθεση με μία μη στάσιμη χρονοσειρά η οποία μπορεί να εμφανίζει τάσεις (*trends*), δηλαδή αλλαγές στη μέση τιμή της με το χρόνο. Για παράδειγμα αν ενδιαφέρει η πρόβλεψη της τιμής

της βενζίνης και η χρονοσειρά δεν είναι στάσιμη τότε είναι πιθανό να εμφανιστούν διακυμάνσεις λόγω της διεθνούς αγοράς ή του πληθωρισμού.

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί πως ένας από τους στόχους της ανάλυσης χρονοσειρών είναι η διεξαγωγή προβλέψεων. Στην περίπτωση του μοντέλου BAR(1), οι προβλέψεις των μελλοντικών τιμών της χρονοσειράς μπορούν να πραγματοποιηθούν μέσω της παρακάτω διαδικασίας: Έστω ότι X_1, \dots, X_T , είναι ένα τμήμα που προέρχεται από τη στάσιμη διαδικασία του BAR(1) μοντέλου και έστω ότι έχουν εκτιμηθεί οι παράμετροι του μοντέλου, π και ρ . Τότε, μπορεί να υπολογισθεί η υπό συνθήκη μέση τιμή $E(X_t|X_{t-1})$ για κάθε μία από τις τιμές της διαδικασίας, ξεκινώντας από $t = 2$. Πάντως ένα μειονέκτημα της συγκεκριμένης μεθόδου είναι πως ο υπολογισμός (εκτίμηση) της παραπάνω μέσης τιμής δε θα οδηγήσει σε ακέραιη τιμή. Για το λόγο αυτό προτείνεται η χρήση συνεκτικών τεχνικών πρόβλεψης (*coherent forecasting techniques*, Freeland and McCabe (2004)) ώστε οι προβλέψεις να είναι τελικά μη αρνητικές ακέραιες τιμές. Στη συνέχεια δε θα μας απασχολήσει ο τρόπος με τον οποίο μπορεί κανείς να προβλέψει μελλοντικές τιμές μιας χρονοσειράς με ακέραιες τιμές.

2.5.2 Έλεγχος Καλής Προσαρμογής του μοντέλου Binomial AR(1)

Σε μία πρακτική εφαρμογή είναι χρήσιμο να ελεγχθεί πρώτα η υπόθεση ότι το BAR(1) μοντέλο είναι κατάλληλο για τα διαθέσιμα δεδομένα. Η υπόθεση της 1^{ης} τάξης αυτοσυσχέτισης μπορεί να επιβεβαιωθεί μέσω της συνάρτησης μερικής αυτοσυσχέτισης (*partial autocorrelation function* PACF). Πιο αναλυτικά, η συνάρτηση PACF παρέχει τον συντελεστή μερικής αυτοσυσχέτισης για χρονικές υστερήσεις $k > 1$. Επομένως, πρόκειται για ένα σημαντικό εργαλείο που μπορεί να προσφέρει χρήσιμες πληροφορίες αναφορικά με τα χαρακτηριστικά της αλληλεξάρτησης.

Σε αυτή την περίπτωση, η εμπειρική μερική αυτοσυσχέτιση k -τάξης ($k > 1$) πρέπει να είναι 0. Όμως η ανάλυση της περιθώριας κατανομής (δηλαδή της κατανομής των X_t) μπορεί να επιφέρει αρκετά προβλήματα. Για παράδειγμα, η χρήση Ιστογράμματος μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα, αφού η μορφή του εξαρτάται σημαντικά από το βαθμό αυτοσυσχέτισης ενώ και η κατανομή του συνήθους χ^2 -test του Pearson (*Pearson's chi-square goodness-of-fit test*) επηρεάζεται σημαντικά από την αυτοσυσχέτιση στα δεδομένα. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στην εργασία του Weiß (2009c), ο οποίος απέδειξε το παρακάτω αποτέλεσμα για την ασυμπτωτική κατανομή του χ^2 -test του Pearson, στην περίπτωση που τα δεδομένα προέρχονται από ένα μοντέλο BAR(1).

Θεώρημα 2.1 (χ^2 -test του Pearson): Έστω $X_1, X_2, \dots, X_T, T \in \mathbb{N}$, ένα τμήμα (*segment*) από μια στάσιμη διαδικασία BAR(1). Έστω ότι για κάθε πιθανή τιμή $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, το N_j δηλώνει τη συχνότητα της τιμής j σε ένα τμήμα T παρατηρήσεων που αντιπροσωπεύονται από τις τυχαίες μεταβλητές X_t και $p_j = P(X_t = j)$.

Τότε, για την ασυμπτωτική κατανομή του ελέγχου χ^2 του Pearson ισχύει ότι

$$\chi^2 = \sum_{j=0}^n \frac{(N_j - T p_j)^2}{T p_j} \xrightarrow{d} \sum_{l=1}^n \left(\frac{1 + \rho^l}{1 - \rho^l} \right) Z_l^2, \text{ καθώς } T \rightarrow \infty,$$

όπου Z_1, \dots, Z_n είναι ανεξάρτητες $N(0, 1)$ τυχαίες μεταβλητές.

Στον παραπάνω έλεγχο απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση H_0 : Το BAR(1) μοντέλο προσαρμόζεται κατάλληλα στα δεδομένα σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha\%$ όταν η τιμή του στατιστικού χ^2 του Θεωρήματος 2.1 είναι μεγαλύτερη από το α -ποσοστιαίο σημείο της ασυμπτωτικής κατανομής. Σημειώνεται ότι τα ποσοστιαία σημεία αυτής της κατανομής δεν είναι διαθέσιμα και βρίσκονται μέσω προσομοίωσης.

2.5.2 Μέθοδοι Εκτίμησης για τις Παραμέτρους του Μοντέλου Binomial AR(1)

Στην πράξη οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων π, ρ του μοντέλου BAR(1) δεν είναι γνωστές και πρέπει να εκτιμηθούν. Έστω ότι είναι διαθέσιμο ένα τμήμα (*segment*) X_1, \dots, X_T με $T \in \mathbb{N}$ από τη στάσιμη διαδικασία του μοντέλου BAR(1).

Η βασική μέθοδος εκτίμησης είναι η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας (*maximum likelihood estimation, MLE*), με τη συνάρτηση πιθανοφάνειας να γράφεται στην ακόλουθη μορφή:

$$l(\pi, \rho) = \log L(\pi, \rho) = \binom{n}{X_1} \pi^{X_1} (1 - \pi)^{n - X_1} \prod_{t=2}^T P_{\pi, \rho}(X_t | X_{t-1}), \quad (2.9)$$

όπου οι πιθανότητες μετάβασης $P_{\pi, \rho}(X_t | X_{t-1})$ δίνονται από τη σχέση (2.6). Για την εύρεση των εκτιμητών μέγιστης πιθανοφάνειας (EMΠ) $\hat{\pi}_{ML}, \hat{\rho}_{ML}$, μεγιστοποιείται η συνάρτηση $l(\pi, \rho) = \log L(\pi, \rho)$ με κατάλληλες αριθμητικές μεθόδους. Επίσης, τα τυπικά σφάλματα των εκτιμητών, προκύπτουν από την παρατηρούμενη πληροφορία του Fisher (*observed Fisher information*, δείτε Weiß (2009c)).

Μία επιπλέον μέθοδος εκτίμησης των παραμέτρων του BAR(1) μοντέλου είναι η μέθοδος των Υπό Συνθήκη Ελαχίστων Τετραγώνων (*Conditional Least Squares* ή CLS). Έστω $(\hat{\pi}_{CLS}, \hat{\rho}_{CLS})$ οι εκτιμητές των παραμέτρων (π, ρ) του μοντέλου BAR(1) οι οποίοι προκύπτουν με τη συγκεκριμένη μέθοδο. Για την εύρεσή τους ακολουθείται η εξής διαδικασία:

Έστω ότι είναι διαθέσιμο ένα τμήμα X_1, \dots, X_T της στάσιμης διαδικασίας του μοντέλου BAR(1). Στη συνέχεια, ορίζεται η παρακάτω συνάρτηση:

$$S(\pi, \rho) = \sum_{t=2}^T (X_t - E[X_t | X_{t-1}])^2 = \sum_{t=2}^T (X_t - \rho \cdot X_{t-1} - n\pi(1 - \rho))^2.$$

και οι CLS εκτιμητές $(\hat{\pi}_{CLS}, \hat{\rho}_{CLS})$ είναι οι

$$(\hat{\pi}_{CLS}, \hat{\rho}_{CLS}) = \arg \min_{\pi, \rho} S(\pi, \rho)$$

δηλαδή προκύπτουν με ελαχιστοποίηση της $S(\pi, \rho)$ ως προς π και ρ .

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστωθεί ότι οι μερικές παράγωγοι 1^{ης} τάξης ως προς π και ως προς ρ είναι αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\pi, \rho)}{\partial \pi} &= -2n(1 - \rho) \sum_{t=2}^T (X_t - \rho X_{t-1} - n\pi(1 - \rho)), \\ \frac{\partial S(\pi, \rho)}{\partial \rho} &= -2 \sum_{t=2}^T (X_t - \rho X_{t-1} - n\pi(1 - \rho))(X_{t-1} - n\pi). \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων

$$\frac{\partial S(\pi, \rho)}{\partial \pi} = 0, \quad \frac{\partial S(\pi, \rho)}{\partial \rho} = 0,$$

προκύπτουν οι παρακάτω κλειστοί τύποι για τους CLS εκτιμητές (δείτε Weiß and Kim (2013)):

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{CLS} &= \frac{\sum_{t=2}^T X_t - \hat{\rho}_{CLS} \cdot \sum_{t=2}^T X_{t-1}}{(T-1)n \cdot (1 - \hat{\rho}_{CLS})}, \\ \hat{\rho}_{CLS} &= \frac{(T-1) \sum_{t=2}^T X_t X_{t-1} - (\sum_{t=2}^T X_{t-1}) \cdot (\sum_{t=2}^T X_t)}{(T-1) \cdot \sum_{t=2}^T X_{t-1}^2 - (\sum_{t=2}^T X_{t-1})^2}. \end{aligned}$$

Επιπλέον, η εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου μπορεί να υλοποιηθεί με τη μέθοδο των Yule-Walker. Έστω ότι ο $\bar{X}_T = (X_1 + \dots + X_T)/T$ είναι ο (συνήθης) δειγματικός μέσος της στάσιμης διαδικασίας X_1, \dots, X_T του μοντέλου BAR(1). Σύμφωνα με τους Weiß and Kim (2011), ένας αμερόληπτος εκτιμητής της παραμέτρου π , είναι ο

$$\hat{\pi} = \frac{1}{n} \cdot \bar{X}_T,$$

με διασπορά

$$V(\hat{\pi}) = \frac{\pi(1-\pi)}{nT} \cdot \frac{1+\rho}{1-\rho} \cdot \left(1 - \frac{2\rho}{1-\rho^2} \cdot \frac{1-\rho^T}{T}\right).$$

Για την εκτίμηση της παραμέτρου $\rho = \rho(1)$ χρησιμοποιείται η εμπειρική αυτοσυσχέτιση πρώτης τάξης, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\rho}_{YW} = \frac{\sum_{t=2}^T (X_t - \bar{X}_T)(X_{t-1} - \bar{X}_T)}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X}_T)^2}.$$

2.6. Το Μοντέλο Beta-Binomial AR(1)

2.6.1 Εισαγωγικές έννοιες

Στη συγκεκριμένη ενότητα θα παρουσιαστεί μια επέκταση του μοντέλου BAR(1), η οποία είναι χρήσιμη όταν παρατηρείται ετερογένεια μεταξύ των n μονάδων ή όταν η μεταβλητότητα των δεδομένων παρουσιάζει σημαντική απόκλιση από την αντίστοιχη του διωνυμικού μοντέλου.

Για παράδειγμα, έστω μία χρονοσειρά με πεπερασμένο αριθμήσιμο πλήθος δυνατών τιμών (π.χ. λαμβάνει τιμές στο $\{0,1,2, \dots, n\}$) και συγκεκριμένα ας θεωρηθεί ότι αυτή η χρονοσειρά περιλαμβάνει τον μηνιαίο αριθμό των κρατών-μελών της Ευρωζώνης με χαμηλό πληθωρισμό. Προφανώς, στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το πλήθος των κρατών-μελών της Ευρωζώνης είναι συγκεκριμένο και άρα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένα μοντέλο με πεπερασμένο εύρος τιμών. Ωστόσο, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι σε αυτή την περίπτωση, φαίνεται πιο ρεαλιστική η υπόθεση ότι όλα τα κράτη-μέλη της Ευρωζώνης δεν έχουν την ίδια πιθανότητα να επιτύχουν χαμηλό μηνιαίο πληθωρισμό λόγω της διαφορετικότητας που παρουσιάζουν στο τρόπο λειτουργίας της οικονομίας τους. Με άλλα λόγια, παραβιάζεται η υπόθεση του διωνυμικού μοντέλου, που θεωρεί ότι και οι n μονάδες έχουν την ίδια πιθανότητα π αφού οι μονάδες (εδώ τα κράτη-μέλη) παρουσιάζουν *ετερογένεια*. Λόγω της παρουσίας ετερογένειας είναι πολύ πιθανό κατά τη συλλογή των δεδομένων να παρατηρηθεί σημαντική μεγαλύτερη μεταβλητότητα στα δεδομένα, έναντι αυτής που θα ανέμενε κανείς υπό το (σύνθηες) μοντέλο της διωνυμικής κατανομής.

Για να αξιολογηθεί αν η μεταβλητότητα μιας κατανομής είναι ίδια ή διαφορετική από τη μεταβλητότητα υπό το μοντέλο της διωνυμικής κατανομής, χρησιμοποιείται ο διωνυμικός δείκτης μεταβλητότητας (*binomial index of dispersion*). Ειδικότερα, αν θεωρηθεί ότι η X είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει τιμές στο διάστημα $\{0, \dots, n\}$ και έχει μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 τότε ο διωνυμικός δείκτης μεταβλητότητας ισούται με

$$I_d = \frac{n\sigma^2}{\mu(n-\mu)} \quad (2.10)$$

και λαμβάνει πάντα θετικές τιμές. Οι τιμές του παρέχουν μια ένδειξη του κατά πόσο μπορεί να διαφέρει η διασπορά της κατανομής της X από τη μέση τιμή της. Έτσι, αν $X \sim \mathcal{B}(n, \pi)$, τότε, αφού $\mu = E(X) = n\pi$ και $\sigma^2 = V(X) = n\pi(1 - \pi)$, με αντικατάσταση στη σχέση (2.10), έπεται ότι $I_d = n^2\pi(1 - \pi)/(n\pi(n - n\pi)) = 1$, για κάθε $\pi \in (0,1)$.

Για το λόγο αυτό, διακριτές τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένο εύρος τιμών, που ικανοποιούν τη σχέση $I_d > 1$, λέγεται ότι παρουσιάζουν υπερμεταβλητότητα (*extra-binomial variation* ή *overdispersion*) δηλαδή μεγαλύτερη μεταβλητότητα σε σύγκριση με τη

μεταβλητότητα της διωνυμικής κατανομής. Με ανάλογο τρόπο ορίζεται και η περίπτωση της υπομεταβλητότητας (*underdispersion* ή *reduced-binomial variation*).

Ένα εύχρηστο διακριτό μοντέλο πιθανοτήτων με πεπερασμένο εύρος τιμών για την περίπτωση της υπερμεταβλητότητας, είναι αυτό της Βήτα-Διωνυμικής κατανομής (*Beta-Binomial distribution*, δείτε Griffiths (1973)), το οποίο έχει χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση περιπτώσεων ασθενείας (Griffiths (1973), Hughes and Madden (1993)) ή για τη μοντελοποίηση της καταναλωτικής συμπεριφοράς (Danaher and Hardie (2005)).

Παρακάτω δίνεται ο ορισμός και οι βασικές ιδιότητες της Βήτα-Διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους $\nu, \phi \in (0,1)$, η οποία θα συμβολίζεται ως $\mathcal{B}\text{Beta}(n; \nu, \phi)$. Συγκεκριμένα, έστω $\alpha, \beta > 0$. Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση Βήτα ορίζεται ως

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

όπου $\Gamma(\cdot)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα η οποία δίνεται από τη σχέση, $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x} dx$, για $t > 0$. Τότε, η τυχαία μεταβλητή Z ακολουθεί την κατανομή Βήτα με παραμέτρους $\alpha, \beta > 0$ (συμβ. $Z \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$) αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Z δίνεται από τη σχέση:

$$f_Z(x; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad x \in (0,1),$$

με μέση τιμή $\nu = E(Z) = \alpha/(\alpha + \beta)$ και διασπορά $V(Z) = \nu(1-\nu)/(\alpha + \beta + 1)$.

Μια εναλλακτική παραμετροποίηση για την κατανομή Βήτα έχει δοθεί από τον Williams (1975). Σύμφωνα με αυτή, ως παράμετροι χρησιμοποιούνται τα $\nu = \alpha/(\alpha + \beta)$ και $\phi = 1/(1 + \alpha + \beta)$, με $\nu, \phi \in (0,1)$. Σε αυτή την περίπτωση, επιλύοντας ως προς α, β το σύστημα των παραπάνω δύο εξισώσεων, έπεται ότι $\alpha = \nu \cdot (1 - \phi)/\phi$, $\beta = (1 - \nu) \cdot (1 - \phi)/\phi$ και άρα

$$Z \sim \text{Beta}\left(\frac{1-\phi}{\phi} \cdot \nu, \frac{1-\phi}{\phi} \cdot (1-\nu)\right),$$

με $E(Z) = \nu$ και $V(Z) = \phi \cdot \nu \cdot (1 - \nu)$.

Μια δημοφιλής γενίκευση της διωνυμικής κατανομής $\mathcal{B}(n, \pi)$ είναι να θεωρηθεί ότι η παράμετρος της π είναι τυχαία μεταβλητή, η οποία ακολουθεί την κατανομή $\text{Beta}(\nu \cdot (1 - \phi)/\phi, (1 - \nu) \cdot (1 - \phi)/\phi)$. Η ερμηνεία που δίνεται σε αυτή την περίπτωση είναι ότι η πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε δοκιμή Bernoulli είναι μια (δεδομένη) τιμή από την παραπάνω κατανομή Βήτα. Άρα, για δεδομένη την τιμή π , ο αριθμός X των επιτυχιών σε σταθερό αριθμό n προσπαθειών, ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\mathcal{B}(n, \pi)$. Οπότε, η συνάρτηση πιθανότητας της (μη-δεσμευμένης) κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X , προκύπτει ως

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \int_0^1 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{p^{v \cdot \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)-1} (1-p)^{(1-v) \cdot \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)-1}}{B\left(v \cdot \frac{1-\phi}{\phi}, (1-v) \cdot \frac{1-\phi}{\phi}\right)} dp \\
&= \frac{\binom{n}{k}}{B\left(v \cdot \frac{1-\phi}{\phi}, (1-v) \cdot \frac{1-\phi}{\phi}\right)} \int_0^1 p^{k+v \cdot \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)-1} (1-p)^{(n-k)+(1-v) \cdot \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)-1} dp \\
&= \binom{n}{k} \frac{B\left(k+v \cdot \frac{1-\phi}{\phi}, (n-k) + (1-v) \cdot \frac{1-\phi}{\phi}\right)}{B\left(v \cdot \frac{1-\phi}{\phi}, (1-v) \cdot \frac{1-\phi}{\phi}\right)}
\end{aligned}$$

όπου στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων έχουν χρησιμοποιηθεί οι ιδιότητες της συνάρτησης Βήτα. Η παραπάνω κατανομή είναι γνωστή ως Βήτα-Διωνυμική (*Beta-binomial distribution*) και θα συμβολίζεται ως $\mathcal{B}\text{Beta}(n; v, \phi)$. Η μέση τιμή και η διασπορά της είναι ίσες με

$$E(X) = n \cdot v, \quad V(X) = n \cdot v \cdot (1-v) \cdot (1 + \phi \cdot (n-1)).$$

Ο παράγοντας $1 + \phi \cdot (n-1) \in (1, n)$ προσδιορίζει το βαθμό της υπερμεταβλητότητας της κατανομής, σε σύγκριση με τη μεταβλητότητα της συνήθους διωνυμικής κατανομής. Η τιμή του αυξάνει, καθώς αυξάνει το ϕ . Δεν είναι δύσκολο να παρατηρηθεί ότι με βάση αυτή την παραμετροποίηση και για δεδομένη τιμή του v , η Βήτα-Διωνυμική κατανομή συγκλίνει στη συνήθη διωνυμική κατανομή $\mathcal{B}(n, v)$ καθώς $\phi \rightarrow 0$.

2.6.2 Τυχαίος τελεστής λέπτυνσης

Έστω $\rho \in (0,1)$. Τότε, από τον ορισμό του διωνυμικού τελεστή λέπτυνσης, η τυχαία μεταβλητή $\rho \circ X$ ορίζεται ως το άθροισμα ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών από κατανομή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας ρ . Σύμφωνα με τους Zheng et al. (2007) (δείτε επίσης Joe (1996)), το ρ μπορεί να διαφέρει ως προς το χρόνο και να είναι τυχαία μεταβλητή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_\rho(\cdot)$. Έτσι, μια άμεση επέκταση του μοντέλου INAR(1) (δείτε εξίσωση (2.2)) είναι το παρακάτω μοντέλο

$$X_t = \rho_t \circ X_{t-1} + \varepsilon_t$$

όπου αντί της παραμέτρου ρ χρησιμοποιείται η τυχαία μεταβλητή ρ_t με τιμές στο $[0,1)$. Το μοντέλο αυτό είναι γνωστό ως RCINAR(1) (*Random Coefficient Integer-Valued AR(1) model*) και αντί του συνήθους διωνυμικού τελεστή λέπτυνσης χρησιμοποιείται μια επέκτασή του, γνωστή και ως τυχαίος συντελεστής λέπτυνσης (*random coefficient thinning*).

Στο σημείο αυτό να σημειωθεί ότι μία ειδική περίπτωση του τυχαίου συντελεστή λέπτυνσης αποτελεί ο Βήτα-Διωνυμικός τελεστής λέπτυνσης και ορίζεται ως εξής (δείτε π.χ. Weiß (2008)):

Ορισμός 2.8: Έστω ότι η X είναι μία τυχαία μεταβλητή με εύρος τιμών $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ και η ϕ μία άλλη τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $(0, 1)$, ανεξάρτητη της X . Τότε προκύπτει μία νέα τυχαία μεταβλητή η $\phi \circ X$ που λαμβάνεται από την X μέσω του τυχαίου συντελεστή λέπτυνσης. Για την ειδική περίπτωση του Βήτα-Διωνυμικού Τελεστή λέπτυνσης, η τυχαία μεταβλητή ϕ ακολουθεί τη Βήτα κατανομή.

Επίσης, αξίζει να αναφερθεί ότι ο Βήτα-Διωνυμικός τελεστής λέπτυνσης μπορεί να προκύψει και από τη γενίκευση του Διωνυμικού τελεστή λέπτυνσης. Έστω η τυχαία μεταβλητή α_ϕ , ανεξάρτητη της X , η οποία ακολουθεί την κατανομή $Beta\left(\frac{\alpha(1-\phi)}{\phi}, \frac{(1-\alpha)(1-\phi)}{\phi}\right)$ με $\alpha, \phi \in (0, 1)$. Τότε η τυχαία μεταβλητή $\alpha_\phi \circ X$ προκύπτει από τη X μέσω της Βήτα-Διωνυμικής λέπτυνσης (*beta-binomial thinning*) αν ο τελεστής « \circ » είναι ο διωνυμικός τελεστής λέπτυνσης, ο οποίος εκτελείται ανεξάρτητα των X και α_ϕ . Άρα, η κατανομή της δεσμευμένης τυχαίας μεταβλητής $\alpha_\phi \circ X | X = x$ είναι η Βήτα-Διωνυμική κατανομή και από τις ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής και διασποράς, έπεται ότι:

$$E[\alpha_\phi \circ X] = \alpha \cdot E(X)$$

$$V[\alpha_\phi \circ X] = \alpha^2 \cdot V[X] + \alpha(1 - \alpha) \cdot E[X] + \phi \cdot \alpha(1 - \alpha) \cdot E[X(X - 1)]$$

Επομένως, διαπιστώνεται ότι η μέση τιμή της Βήτα-Διωνυμικής κατανομής είναι ανεξάρτητη του ϕ , ενώ η διασπορά εξαρτάται από την τιμή του ϕ . Σημειώνεται ότι για τιμές του ϕ κοντά στο μηδέν η συμπεριφορά του Βήτα-Διωνυμικού Τελεστή λέπτυνσης προσεγγίζει αυτή του Διωνυμικού Τελεστή λέπτυνσης. (Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε McKenzie (1985), Weiß (2008), McKenzie (1986), Joe (1996), Jung et al. (2005)).

2.6.3 Ιδιότητες του Μοντέλου Binomial AR(1)

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στην περίπτωση της παρουσίας υπερμεταβλητότητας σε δεδομένα χρονοσειρών με ακέραιες τιμές και πεπερασμένο εύρος τιμών, το μοντέλο BAR(1) δεν είναι το πλέον κατάλληλο για τη μοντελοποίηση τους και θα πρέπει να αναζητηθεί κάποιο καταλληλότερο. Ένα τέτοιο μοντέλο, είναι το μοντέλο Beta-Binomial AR(1). Το μοντέλο αυτό

προτάθηκε και μελετήθηκε από τους Weiß and Kim (2014) και παρακάτω, παρουσιάζονται οι ιδιότητές του.

Αρχικά δίνεται ο ορισμός του Βήτα-Διωνυμικού Αυτοπαλίνδρομου Μοντέλου 1^{ης} τάξης (*Beta-Binomial Autoregressive of order 1*) ή μοντέλο Beta-BAR(1) (συμβ. BBAR(1)).

Ορισμός 2.7: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $\pi \in (0,1)$, $\rho \in \left(\max \left\{ -\frac{\pi}{1-\pi}, -\left(\frac{1-\pi}{\pi}\right) \right\}, 1 \right)$ και $\varphi \in (0,1)$. Έστω επίσης $\beta = \pi(1 - \rho)$ και $\alpha = \beta + \rho$. Τότε, για $t \in \{0,1, \dots\}$, το μοντέλο BBAR(1) ορίζεται μέσω της παρακάτω αναδρομικής σχέσης:

$$X_t = a_\varphi \circ X_{t-1} + \beta_\varphi \circ (n - X_{t-1}),$$

όπου όλες οι τυχαίες μεταβλητές a_φ , β_φ καθώς και οι αντίστοιχες λεπτύνσεις εκτελούνται ανεξάρτητα των υπολοίπων. Επίσης, όλες οι τυχαίες μεταβλητές a_φ , β_φ καθώς και οι αντίστοιχες λεπτύνσεις τη χρονική στιγμή t είναι ανεξάρτητες των X_s , για $s < t$.

Οι πιθανότητες μετάβασης $p_{k|l} = P(X_t = k | X_{t-1} = l)$, $k, l \in \{0,1, \dots, n\}$, για το μοντέλο BBAR(1), δίνονται από τη σχέση (Weiß and Kim (2014))

$$p_{k|l} = \sum_{m=\max(0,k+l-n)}^{\min(k,l)} \binom{l}{m} \binom{n-l}{k-m} \frac{B\left(m + \frac{1-\varphi}{\varphi} \cdot \alpha, l - m + \frac{1-\varphi}{\varphi} \cdot (1-a)\right)}{B\left(\frac{1-\varphi}{\varphi} \cdot \alpha, \frac{1-\varphi}{\varphi} \cdot (1-a)\right)} \times \frac{B\left(k-m + \frac{1-\varphi}{\varphi} \cdot \beta, n-l-k+m + \frac{1-\varphi}{\varphi} \cdot (1-\beta)\right)}{B\left(\frac{1-\varphi}{\varphi} \cdot \beta, \frac{1-\varphi}{\varphi} \cdot (1-\beta)\right)} \quad (2.11)$$

Η ερμηνεία των πιθανοτήτων μετάβασης της εξίσωσης (2.11) είναι αντίστοιχη αυτής που δόθηκε στις πιθανότητες μετάβασης στην εξίσωση (2.6).

Άρα, η διαδικασία BBAR(1) είναι μια πρωταρχική (primitive) και ως εκ τούτου, εργοδική (ergodic)¹ Μαρκοβιανή αλυσίδα.

Για τη δεσμευμένη μέση τιμή $E(X_t | X_{t-1})$ και τη δεσμευμένη διασπορά $V(X_t | X_{t-1})$ διαπιστώνεται ότι η υπό συνθήκη μέση τιμή έχει την ιδιότητα της γραμμικότητας ως προς τη X_t (είναι η ίδια με την αντίστοιχη για το μοντέλο BAR(1)). Αντίθετα, η υπό συνθήκη διασπορά

¹ Εάν η αλυσίδα Μαρκον είναι μη μειώσιμη και μη περιοδική, τότε η αλυσίδα Μαρκον είναι πρωταρχική. Επίσης, μία αλυσίδα λέγεται εργοδική όταν είναι απεριοδική και μη μηδενικά επαναληπτική. Δείτε Χρυσ αφίνου (2012).

δεν είναι γραμμική ως προς X_{t-1} . Συγκεκριμένα, η δεσμευμένη μέση τιμή και η δεσμευμένη διασπορά δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} E[X_t|X_{t-1}] &= \alpha \cdot X_{t-1} + \beta \cdot (n - X_{t-1}) = \rho \cdot X_{t-1} + n\beta & (2.12) \\ V[X_t|X_{t-1}] &= \phi \cdot (\alpha(1 - \alpha) + \beta(1 - \beta)) \cdot X_{t-1}^2 + n\beta(1 - \beta) \cdot (1 + \phi(n - 1)) + X_{t-1} \\ &\quad \cdot (\rho(1 - \rho)(1 - 2\pi)(1 - \phi) - 2n\beta(1 - \beta) \cdot \phi) \end{aligned}$$

Για τις αποδείξεις των δύο παραπάνω σχέσεων δείτε την εργασία των Weiß and Kim (2014). Επίσης η υπό συνθήκη μέση τιμή $E[X_t|X_{t-1}]$ είναι γραμμική ως προς τη X_{t-1} και αν θεωρηθεί $k \geq 1$ τότε η αυτοσυσχέτιση k -τάξης θα είναι ίση με (Weiß and Kim (2014)):

$$\text{Cov}(X_t, X_{t-k}) = \rho^k \sigma^2$$

Άμεσα έπεται ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $\rho(k) = \rho^k$, για περιττό k , μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές αφού η παράμετρος ρ σύμφωνα με τον ορισμό του BBAR(1) μοντέλου μπορεί και λαμβάνει αρνητικές τιμές.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η διαδικασία BBAR(1) είναι εργοδική Μαρκοβιανή αλυσίδα και άρα θα είναι όλες οι καταστάσεις εργοδικές. Στην περίπτωση που όλες οι καταστάσεις είναι εργοδικές τότε υπάρχει μοναδική στάσιμη κατανομή για το μοντέλο BBAR(1).

Έστω ότι η αρχική τιμή X_0 προέρχεται από τη στάσιμη περιθώρια κατανομή τότε όλη η διαδικασία X_t , $t \in \{0, 1, \dots\}$ γίνεται στάσιμη. Σύμφωνα με τους Weiß and Kim (2014) δεν γίνεται να εξαχθεί ένας κλειστός τύπος της στάσιμης περιθώριας κατανομής (όπως π.χ. στην περίπτωση του μοντέλου BAR(1), όπου η στάσιμη κατανομή είναι η $\mathcal{B}(n, \pi)$) όμως για δεδομένες τιμές των παραμέτρων, η κατανομή αυτή μπορεί να προσδιοριστεί αριθμητικά, χρησιμοποιώντας τη θεωρία των Μαρκοβιανών αλυσίδων.

Πιο συγκεκριμένα, το διάνυσμα $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_n)^\top$ των περιθώριων πιθανοτήτων $p_k = P(X_t = k)$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, είναι η λύση της εξίσωσης $\mathbf{P}\mathbf{p} = \mathbf{p}$, όπου \mathbf{P} , είναι ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης $p_{k|l}$ ($k, l \in \{0, 1, \dots, n\}$) οι οποίες δίνονται στην εξίσωση (2.11). Αφού η περιθώρια κατανομή δύναται να προσδιοριστεί, μπορούν να υπολογιστούν εύκολα οι ροπές αυτής, αφού το εύρος των πιθανών τιμών που μπορεί να λάβει η X είναι πεπερασμένο. Για παράδειγμα η ροπή r -τάξης $E(X_t^r)$ υπολογίζεται από τη σχέση $E(X_t^r) = \sum_{x=0}^n x^r p_x$.

Ειδικότερα, για τη μέση τιμή και τη διασπορά της περιθώριας κατανομής, γίνεται να εξαχθούν κλειστοί τύποι. Αρχικά, από τις ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής, έπεται ότι:

$$\mu = E(X_t) = E(E(X_t|X_{t-1})) = \rho\mu + n\beta,$$

απ' όπου επιλύοντας ως προς μ , λαμβάνεται

$$\mu = \frac{n\beta}{1-\rho} = n\pi.$$

Όμοια, από τις ιδιότητες της δεσμευμένης διασποράς, έπεται ότι (δείτε Weiß and Kim (2014)):

$$\sigma^2 = n\pi(1 - \pi) \cdot \frac{(1-\phi)(1+\rho) + n\phi \cdot (1-2\pi(1-\pi)(1-\rho))}{(1-\phi)(1+\rho) + \phi \cdot (1-2\pi(1-\pi)(1-\rho))}$$

Επίσης, δεν είναι δύσκολο να διαπιστωθεί ότι η ποσότητα $n\pi(1 - \pi)$ είναι η διωνυμική διασπορά και το πηλίκο που απομένει, καθορίζει την απόκλιση μεταξύ πραγματικής διασποράς και διασποράς στο διωνυμικό μοντέλο. Άρα, η τιμή του διωνυμικού δείκτη διασποράς I_d (δείτε σχέση (2.10) για την περίπτωση του μοντέλου BBAR(1) είναι ίση με

$$\begin{aligned} I_d &= \frac{(1 - \phi)(1 + \rho) + n\phi \cdot (1 - 2\pi(1 - \pi)(1 - \rho))}{(1 - \phi)(1 + \rho) + \phi \cdot (1 - 2\pi(1 - \pi)(1 - \rho))} \\ &= 1 + \frac{(n - 1) \cdot (1 - 2\pi(1 - \pi)(1 - \rho))}{\left(\frac{1}{\phi} - 1\right)(1 + \rho) + (1 - 2\pi(1 - \pi)(1 - \rho))}. \end{aligned}$$

Παρατηρείται ότι η παραπάνω σχέση είναι γνησίως αύξουσα ως προς ϕ , επομένως το ελάχιστο επιτυγχάνεται για $\phi \rightarrow 0^+$ και το μέγιστο για $\phi \rightarrow 1^-$. Επομένως το I_d παίρνει τιμές στο $(1, n)$, που σημαίνει ότι το μοντέλο BBAR(1) θα εμφανίζει πάντα υπερμεταβλητότητα.

2.6.4 Μέθοδοι Εκτίμησης Παραμέτρων του Μοντέλου BBAR(1)

Έστω X_1, \dots, X_T μία χρονοσειρά με εύρος τιμών $\{0, \dots, n\}$ που προέρχονται από μια διαδικασία BBAR(1). Τις περισσότερες φορές ενδιαφέρει μόνο η εκτίμηση των παραμέτρων α, β ή π, ρ αντίστοιχα. Σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιείται η μέθοδος των ροπών (*method of moments*, MM). Κατά συνέπεια, το π εκτιμάται από το μέσο $\hat{\pi}_{MM} = \bar{X}/n$ και το ρ από την εμπειρική αυτοσυσχέτιση πρώτης τάξης $\hat{\rho}_{MM} = \hat{\rho}_{(1)}$ ή από τα υπό συνθήκη ελάχιστα τετράγωνα (*Conditional Least Squares* (CLS)). Η τελευταία προσέγγιση βασίζεται στον υπό συνθήκη μέσο (δείτε τύπο (2.12)) και γίνεται όπως και στο μοντέλο BAR(1) (δείτε Ενότητα 2.5.2). Οι CLS εκτιμητές δίνονται από τις σχέσεις

$$\hat{\pi}_{CLS} = \frac{\sum_{t=2}^T X_t - \hat{\rho}_{CLS} \sum_{t=2}^T X_{t-1}}{(T-1)n \cdot (1 - \hat{\rho}_{CLS})}, \quad \hat{\rho}_{CLS} = \frac{(T-1) \sum_{t=2}^T X_t X_{t-1} - (\sum_{t=2}^T X_{t-1}) \cdot (\sum_{t=2}^T X_t)}{(T-1) \sum_{t=2}^T X_{t-1}^2 - (\sum_{t=2}^T X_{t-1})^2}.$$

Υπενθυμίζεται ότι η δεσμευμένη μέση τιμή είναι η ίδια στα μοντέλα BAR(1) και BBAR(1).

Ένας άλλος τρόπος εκτίμησης των παραμέτρων του μοντέλου BBAR(1) είναι με χρήση της υπό συνθήκη Μέγιστης Πιθανοφάνειας (*Conditional Maximum Likelihood*, CML). Ειδικότερα, για δεδομένη τιμή x_1 , ο λογάριθμος της δεσμευμένης πιθανοφάνειας δίδεται από τη σχέση:

$$l(\pi, \rho, \phi) = \log P(X_2 = x_2, \dots, X_T = x_T | X_1 = x_1) = \sum_{i=1}^{T-1} \log p_{x_{i+1}|x_i}, \quad (2.13)$$

όπου οι δεσμευμένες πιθανότητες $p_{x_{i+1}|x_i}$, $i = 1, 2, \dots, T - 1$, υπολογίζονται μέσω της (2.11). Η εύρεση των ΕΜΠ για τις παραμέτρους π , ρ και ϕ γίνεται με χρήση αριθμητικών μεθόδων ενώ με αντίστοιχο τρόπο, όπως και στην περίπτωση του μοντέλου BAR(1), μπορούν να εκτιμηθούν τα τυπικά σφάλματα των εκτιμητών.

Λόγω πολυπλοκότητας του τύπου υπολογισμού των πιθανοτήτων μετάβασης, δεν είναι δυνατή η εύρεση αναλυτικών (κλειστών) τύπων για τους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας (ή ML εκτιμητές). Συνήθως χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι μεγιστοποίησης (με χρήση κατάλληλου λογισμικού) προκειμένου να βρεθούν οι ζητούμενοι εκτιμητές. Για να πληρούνται οι περιορισμοί στις τιμές των παραμέτρων του μοντέλου BBAR(1), οι Weiß and Kim (2014) πρότειναν να γίνεται αρχικά υπό συνθήκη μεγιστοποίηση του λογαρίθμου της πιθανοφάνειας ως προς τις παραμέτρους (α, β, ϕ) , υπό τον περιορισμό ότι οι τιμές τους πρέπει να ανήκουν στο $(0,1)^3$. Αφού προκύψουν τα αποτελέσματα της μεγιστοποίησης, μπορούν στη συνέχεια να υπολογιστούν οι εκτιμήσεις $\hat{\pi}_{ML}$, $\hat{\rho}_{ML}$ από τις εκτιμήσεις $\hat{\alpha}_{ML}$, $\hat{\beta}_{ML}$. Για τις αρχικές τιμές των παραμέτρων (ώστε να ξεκινήσει η αριθμητική μέθοδος μεγιστοποίησης), οι Weiß and Kim (2014) πρότειναν να χρησιμοποιούνται οι εκτιμήσεις των παραμέτρων που προκύπτουν με εφαρμογή της μεθόδου των ροπών. Ειδικότερα, οι παράμετροι π , ρ εκτιμώνται αντίστοιχα από τα $\hat{\pi}_{MM}$, $\hat{\rho}_{MM}$.

Για την εκτίμηση του δείκτη I_d χρησιμοποιείται ο παρακάτω εκτιμητής:

$$\hat{I}_d := \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T \frac{(X_t - \bar{X})^2}{n\hat{\pi}_{MM}(1 - \hat{\pi}_{MM})}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές $\hat{\pi}_{MM}$, $\hat{\rho}_{MM}$ των εκτιμητών MM των π , ρ στην παραπάνω σχέση, λαμβάνεται ο εκτιμητής MM για την παράμετρο ϕ του μοντέλου BBAR(1), ο οποίος δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\phi}_{MM} = \left(1 + \frac{n - \hat{I}_d}{\hat{I}_d - 1} \cdot \frac{1 - 2\hat{\pi}_{MM}(1 - \hat{\pi}_{MM})(1 - \hat{\rho}_{MM})}{1 + \hat{\rho}_{MM}} \right)^{-1}.$$

Για την αξιολόγηση της απόδοσης των πεπερασμένων δειγμάτων των εκτιμητών που παρουσιάστηκαν σε αυτή την ενότητα, οι Weiß and Kim (2013) πραγματοποίησαν μία μελέτη προσομοίωσης για διάφορες τιμές των παραμέτρων, υποθέτοντας ότι το $T \in \{25, 50, 100, 250, 1000\}$. Από τη μελέτη τους διαπιστώθηκε ότι η προσέγγιση ML οδηγεί σε βελτιωμένες ιδιότητες πεπερασμένων δειγμάτων. Αντίθετα, η χρήση των άλλων δύο μεθόδων (CLS και YW), οδηγούσε σε αποτελέσματα που δεν γίνονταν πάντα δεκτά, καθώς δεν

τηρούσαν τις προϋποθέσεις του Ορισμού 2.7. Οι εκτιμήσεις αυτές αναφέρθηκαν ως μη αποδεκτές εκτιμήσεις (*inadmissible estimates*).

2.7 Το Μοντέλο Binomial INARCH(1)

2.7.1 Εισαγωγικές έννοιες

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιαστεί ένα ακόμη μοντέλο χρονοσειρών με ακέραιες τιμές και πεπερασμένο εύρος τιμών. Το συγκεκριμένο μοντέλο είναι το Διωνυμικό Υπό Συνήθηκη Ετεροσκεδαστικό Αυτοπαλίνδρομο μοντέλο 1^{ης} τάξης (Binomial INARCH(1) ή BINARCH(1)) και ανήκει στην οικογένεια μοντέλων INGARCH. Τα υποδείγματα INGARCH ορίστηκαν για πρώτη φορά από τον Heinen (2003) και στη συνέχεια μελετήθηκαν από τους Ferland et al.(2006), Fokianos et al.(2009) και Weiß (2009c). Ένα βασικό χαρακτηριστικό αυτών των μοντέλων είναι ότι κατασκευάζονται με βάση τη γραμμική παλινδρόμηση των δεσμευμένων μέσων τιμών $E(X_t|X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$ και χρησιμοποιούνται με σκοπό τη δημιουργία ενός AR υποδείγματος.

Πιο αναλυτικά, αν θεωρηθεί η χρονοσειρά $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, με την X_t να λαμβάνει ακέραιες τιμές στο $\{0, 1, 2, \dots\}$, τότε, η γενική μορφή των μοντέλων $INGARCH(p, q)$, με $p > 1$ και $q > 0$ ικανοποιεί την εξής σχέση:

$$E(X_t|X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) = M_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j M_{t-j},$$

όπου τα β_0 , α_i και β_j είναι θετικοί αριθμοί με $i = 1, 2, \dots, p$ και $j = 1, 2, \dots, q$. Στην περίπτωση που το $q = 0$, προκύπτει το υπόδειγμα $INARCH(p)$. Για να οριστεί το μοντέλο, βασική προϋπόθεση αποτελεί ο καθορισμός της δεσμευμένης κατανομής της X_t δοθέντος των τιμών των X_{t-1}, X_{t-2}, \dots . Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται η Διωνυμική κατανομή ως υπό συνθήκη κατανομή της X_t , το μοντέλο αυτό είναι το BINARCH(1) με το οποίο και θα ασχοληθεί η παρούσα ενότητα.

Πριν παρουσιαστούν οι ιδιότητες του μοντέλου BINARCH(1), αξίζει να αναφερθεί ότι στη βιβλιογραφία των μοντέλων χρονοσειρών για συνεχείς μεταβλητές, τα μοντέλα ARCH προτάθηκαν από τον Engle (1982) ως μοντέλα για την περιγραφή της συμπεριφοράς της μεταβλητότητας των τιμών της χρονοσειράς. Ωστόσο, στις περιπτώσεις που θα εξετάσει η παρούσα διδακτορική διατριβή, κάτι τέτοιο δε συμβαίνει.

Οι Weiß and Pollett (2014) έδειξαν πως το μοντέλο BINARCH(1) αποτελεί οριακή περίπτωση του μοντέλου BAR(1) με τελεστή λέπτυνσης που εξαρτάται από την κατανομή του X (*density dependent thinning*). Επιπρόσθετα, το μοντέλο BINARCH(1) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση δεδομένων χρονοσειρών με ακέραιες τιμές και

πεπερασμένο εύρος τιμών, τα οποία παρουσιάζουν υπερμεταβλητότητα (*extra-binomial variation*), όπως και τα μοντέλα BAR(1) και BBAR(1) που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενες ενότητες του παρόντος κεφαλαίου.

Παρακάτω, δίνονται οι βασικές ιδιότητες του μοντέλου BINARCH(1) καθώς και μια μέθοδος εκτίμησης των παραμέτρων του. Για περισσότερες λεπτομέρειες, δείτε Ristic et al. (2016).

2.7.2 Ιδιότητες

Έστω μια χρονοσειρά $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, με ακέραιες τιμές και πεπερασμένο εύρος τιμών, τέτοια ώστε η κατανομή της δεσμευμένης τυχαίας μεταβλητής $X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$ να είναι η διωνυμική με παραμέτρους n και $\alpha_t = a_0 + (a_1/n)X_{t-1}$, δηλαδή

$$X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots \sim \mathcal{B}(n, \alpha_t),$$

όπου $n \in \mathbb{N}$, $a_0 > 0$, $a_1 \geq 0$ και $a_0 + a_1 < 1$. Η τελευταία ανισότητα, ορίζει μια στάσιμη εργοδική μαρκοβιανή αλυσίδα για τη χρονοσειρά $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, με πιθανότητες μετάβασης οι οποίες δίνονται από τη σχέση:

$$p_{k|l} = (X_t = k | X_{t-1} = l) = \binom{n}{k} \left(a_0 + a_1 \frac{l}{n}\right)^k \left(1 - a_0 - a_1 \frac{l}{n}\right)^{n-k} \quad (2.14)$$

Επομένως, η δεσμευμένη μέση τιμή και η δεσμευμένη διασπορά είναι ίσες με:

$$E(X_t | X_{t-1}) = n\alpha_t = a_1 X_{t-1} + na_0,$$

$$V(X_t | X_{t-1}) = n\alpha_t(1 - \alpha_t) = -\frac{a_1^2}{n} X_{t-1}^2 + a_1(1 - 2a_0)X_{t-1} + na_0(1 - a_0).$$

Άμεσα, από τις παραπάνω σχέσεις, έπεται ότι $V(X_t | X_{t-1}) < E(X_t | X_{t-1})$.

Επίσης, από τις ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής και δεσμευμένης διασποράς, έπεται η μέση τιμή και η διασπορά της στάσιμης κατανομής του μοντέλου BINARCH(1), που είναι ίσες με:

$$\mu = E(X_t) = \frac{na_0}{1-a_1}, \quad \sigma^2 = V(X_t) = \frac{n^2 a_0 (1-a_0-a_1)}{(1-a_1)^2 [a_1^2 + n(1-a_1^2)]},$$

ενώ η k -τάξης αυτοσυσχέτιση ισούται με $\rho(k) = a_1^k$, $k \geq 1$.

Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι αφού η $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, είναι μια χρονοσειρά με ακέραιες τιμές στο $\{0, 1, \dots, n\}$, με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 , τότε ο διωνυμικής δείκτης μεταβλητότητας για την περίπτωση του μοντέλου BINARCH(1) θα ισούται με

$$I_d = \frac{n \cdot \frac{n^2 a_0 (1-a_0-a_1)}{(1-a_1)^2 [a_1^2 + n(1-a_1^2)]}}{\frac{na_0}{1-a_1} \cdot \left(n - \frac{na_0}{1-a_1}\right)} = \frac{n}{a_1^2 + n(1-a_1^2)} > 1$$

Κατά συνέπεια, το μοντέλο BINARCH(1) έχει μεγαλύτερη μεταβλητότητα σε σύγκριση με το απλό διωνυμικό μοντέλο και άρα είναι κατάλληλο για τη μοντελοποίηση τέτοιου είδους δεδομένων.

Σχετικά με την περιθώρια κατανομή της X_t και τις πιθανότητες $P(X_t = k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, όπως και στην περίπτωση του μοντέλου BBAR(1), μπορούν να προσδιοριστούν αριθμητικά. Συγκεκριμένα, αν $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_n)^\top$ είναι το διάνυσμα των περιθωρίων πιθανοτήτων $p_k = P(X_t = k)$, με $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, τότε η λύση της εξίσωσης $\mathbf{P}\mathbf{p} = \mathbf{p}$, όπου \mathbf{P} είναι ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης $p_{k|l}$, οι οποίες για το μοντέλο BINARCH(1) δίνονται στην εξίσωση (2.14), δίνει την περιθώρια κατανομή του μοντέλου BINARCH(1).

2.7.3 Μέθοδοι Εκτίμησης Παραμέτρων του Μοντέλου BINARCH(1)

Έστω X_1, \dots, X_T , ένα τμήμα που προέρχεται από τη στάσιμη διαδικασία BINARCH(1). Οι Ristic et al. (2016) πρότειναν τη μέθοδο της υπό συνθήκη Μέγιστης Πιθανοφάνειας (*Conditional Maximum Likelihood*, CML). Ουσιαστικά, με τη συγκεκριμένη μέθοδο, οι εκτιμητές των a_0, a_1 προκύπτουν από τη μεγιστοποίηση του λογαρίθμου της υπό συνθήκη πιθανοφάνειας (δεσμεύοντας ως προς την τιμή της X_1), η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\log L(a_0, a_1 | \mathbf{x}) = \sum_{t=2}^T \left[\log \binom{n}{x_t} + x_t \log \alpha_t + (n - x_t) \log(1 - \alpha_t) \right] \quad (2.15)$$

Χρησιμοποιώντας κατάλληλες αριθμητικές μεθόδους, οι εκτιμητές των a_0, a_1 προκύπτουν με τη μεγιστοποίηση της $\log L(a_0, a_1 | \mathbf{x})$. Επίσης, τα αντίστοιχα τυπικά σφάλματα των εκτιμήσεων μπορούν να ληφθούν μέσω του παρατηρούμενου Πίνακα Πληροφορίας του Fisher (*observed Fisher's Information Matrix*).

Επιπλέον, η εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου μπορεί να υλοποιηθεί με τη μέθοδο των υπό συνθήκη ελαχίστων τετραγώνων (CLS method, Ristic et al.(2016)). Συγκεκριμένα, οι εκτιμήσεις του διανύσματος των παραμέτρων $\boldsymbol{\theta} = (a_0, a_1)^\top$ προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση της παρακάτω συνάρτησης:

$$S(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=2}^T (X_t - na_0 - a_1 X_{t-1})^2,$$

ως προς το διάνυσμα $\boldsymbol{\theta}$.

2.8 Ανακεφαλαίωση

Η ανάλυση χρονολογικών σειρών κατέχει κυρίαρχη θέση σε πολλούς επιστημονικούς χώρους όπως για παράδειγμα, είναι η επιδημιολογία και τα οικονομικά. Παλαιότερα, οι

έρευνες εστίαζαν σε χρονοσειρές που αποτελούνταν από δεδομένα συνεχών τυχαίων μεταβλητών. Ωστόσο, τα τελευταία χρόνια υπάρχει έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον στην ανάπτυξη και στη μελέτη μοντέλων χρονοσειρών με ακέραιες τιμές.

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάστηκαν υποδείγματα 1ης τάξης για τη μοντελοποίηση διακριτών χρονοσειρών με πεπερασμένο εύρος τιμών. Αρχικά, αναλύθηκαν οι βασικές ιδιότητες καθώς και οι μέθοδοι εκτίμησης των παραμέτρων του binomial AR(1) μοντέλου. Το συγκεκριμένο υπόδειγμα αποτελεί στάσιμη μαρκοβιανή αλυσίδα με περιθώρια κατανομή την $B(n, \pi)$ και είναι κατάλληλο να ερμηνεύσει διωνυμικά δεδομένα με πρώτης τάξης αυτοσυσχέτιση. Επίσης, ορίστηκε για πρώτη φορά από τον McKenzie (1985), ο οποίος αντικατέστησε την πράξη του πολλαπλασιασμού με τον διωνυμικό τελεστή λέπτυνσης, προκειμένου να διατηρήσει ακέραιες τιμές στο μοντέλο.

Στη συνέχεια, αναφέρθηκαν δύο ακόμη μοντέλα διακριτών χρονοσειρών που αποτελούν επέκταση του υποδείματος BAR(1). Ένα από αυτά είναι το beta-binomial AR(1) μοντέλο, το οποίο προτάθηκε από τους Weiß and Kim (2014) με τη χρήση του βήτα διωνυμικού τελεστή λέπτυνσης και είναι ικανό να ερμηνεύσει διωνυμικά δεδομένα με υπερ-μεταβλητότητα. Επίσης, η μοντελοποίηση τέτοιου είδους δεδομένων μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη χρήση του BINARCH(1) μοντέλου. Το συγκεκριμένο υπόδειγμα ανήκει στην οικογένεια των μοντέλων INGARCH (Ferland et al. 2006) και ορίστηκε από τους Weiß and Polet (2014) ως μια οριακή περίπτωση του BAR(1) μοντέλου και με τελεστή λέπτυνσης εξαρτώμενο από την πυκνότητα. Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι οι Ristic et al. (2016) επέκτειναν τη μελέτη των Weiß and Pollett (2014), προτείνοντας και μελετώντας το μοντέλο BINARCH(p).

Συνοψίζοντας, στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν τα τρία πιο συχνά χρησιμοποιούμενα μοντέλα 1ης τάξης για διακριτές χρονοσειρές με πεπερασμένο εύρος τιμών. Για κάθε μοντέλο, δόθηκαν οι βασικές του ιδιότητες και ο τρόπος εκτίμησης των παραμέτρων του. Τέλος, βασικός σκοπός αυτού του κεφαλαίου ήταν η συνοπτική παρουσίαση των εν λόγω μοντέλων χρονοσειρών προκειμένου στη συνέχεια να αναπτυχθούν κατάλληλα διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση διεργασιών που μοντελοποιούνται σύμφωνα με ένα από τα παραπάνω μοντέλα.

Κεφάλαιο 3

Διαγράμματα Ελέγχου για Διωνυμικές Αυτοπαλίνδρομες Διεργασίες

3.1 Εισαγωγή

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα αναπτυχθούν και θα μελετηθούν μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA για την παρακολούθηση BAR(1) διεργασιών. Τα προτεινόμενα διαγράμματα αποτελούν διαγράμματα ελέγχου με μνήμη και μπορούν να θεωρηθούν και ως μία εναλλακτική επιλογή έναντι των διαγραμμάτων ελέγχου CUSUM για την παρακολούθηση BAR(1) διεργασιών. Αξίζει να αναφέρουμε πως διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA για διεργασίες BAR(1) δεν έχουν μελετηθεί έως τώρα στη βιβλιογραφία.

Αν και τα προαναφερθέντα διαγράμματα, ως γνωστόν, είναι ικανά να ανιχνεύουν μικρές αλλά και μεσαίες μετατοπίσεις της μέσης τιμής της διεργασίας, ωστόσο, θα ενδιέφερε να βελτιωθεί περαιτέρω η απόδοση τους. Για τον λόγο αυτό, στο παρόν κεφάλαιο θα αξιολογηθεί η απόδοση σύγχρονων διαγραμμάτων ελέγχου με μνήμη και συγκεκριμένα του διαγράμματος ελέγχου double EWMA (ή DEWMA control chart) με σκοπό να διαπιστωθεί αν και κατά πόσο υπερτερεί έναντι του συνήθους διαγράμματος ελέγχου EWMA.

Επομένως, η διερεύνηση του στατιστικού σχεδιασμού των προτεινόμενων διαγραμμάτων καθώς και ο υπολογισμός της απόδοσής τους για την ανίχνευση αυξήσεων αλλά και μειώσεων στο μέσο επίπεδο μίας διεργασίας τύπου BAR(1) αποτελούν τους βασικούς σκοπούς αυτού του κεφαλαίου. Τέλος, μέσω αριθμητικής σύγκρισης των προτεινόμενων διαγραμμάτων, πρόκειται να δοθεί το βέλτιστο διάγραμμα για κάθε μία από τις εξεταζόμενες περιπτώσεις καθώς και προτεινόμενες τιμές για τις παραμέτρους των υπό μελέτη διαγραμμάτων, ανάλογα με τον τύπο της μετατόπισης.

3.2 Διαγράμματα Ελέγχου EWMA για διεργασίες BAR(1)

Βασικός στόχος των προτεινόμενων διαγραμμάτων αποτελεί η έγκαιρη και έγκυρη ανίχνευση μεταβολών του μέσου επιπέδου της διεργασίας, δηλαδή στη μέση τιμή $\mu \equiv \mu_X = E(X_t) = n\pi$. Όταν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου η μέση τιμή ισούται με $\mu_X = \mu_{0,X}$, ενώ όταν η διεργασία είναι εκτός ελέγχου ισούται με $\mu_X = \mu_{1,X}$. Όμοια, οι τιμές των

παραμέτρων του μοντέλου BAR(1) στην περίπτωση διεργασιών IC και OoC, είναι αντίστοιχα ίσες με π_0, ρ_0 και π_1, ρ_1 . Στην πράξη, είναι πολύ σημαντικό να ανιχνεύονται μεταβολές στη μέση τιμή μ_X και συγκεκριμένα από $\mu_{0,X}$ σε $\mu_{1,X} > \mu_{0,X}$, διότι αυτές συνδέονται με τη χειροτέρευση της διεργασίας. Με άλλα λόγια, σε τέτοιες περιπτώσεις π.χ. η παρουσία ειδικών αιτιών μεταβλητότητας οδηγεί σε αύξηση του μέσου αριθμού ελαττωματικών αντικειμένων που παράγονται, ο οποίος εκφράζεται από τη μέση τιμή μ_X . Αξίζει πάντως να αναφερθεί ότι μια μεταβολή από $\mu_{0,X}$ σε $\mu_{1,X} < \mu_{0,X}$ συνδέεται με τη βελτίωση της διεργασίας, αφού π.χ. μειώνεται ο μέσος αριθμός ελαττωματικών αντικειμένων που αυτή παράγει. Στο σύγχρονο στατιστικό έλεγχο διεργασιών, είναι σημαντικό να μπορεί ένα διάγραμμα να ανιχνεύει και τέτοιου είδους αλλαγές. Ωστόσο, να σημειωθεί ότι αλλαγές που συνδέονται με βελτίωση της διεργασίας μπορούν να συμβούν μόνο μετά από παρέμβαση και διορθωτικές αλλαγές στον τρόπο λειτουργίας της διεργασίας.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί (δείτε Κεφάλαιο 1, Ενότητα 1.5.2), τα διαγράμματα ελέγχου EWMA προτάθηκαν από τον Roberts (1959) και σε αυτά απεικονίζονται τιμές της στατιστικής συνάρτησης

$$Q_t = \lambda X_t + (1 - \lambda)Q_{t-1}, Q_0 = q_0, t = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

όπου $\lambda \in (0, 1]$ είναι η παράμετρος εξομάλυνσης. Για μικρές τιμές του λ , δίδεται μικρότερη βαρύτητα στην πιο πρόσφατη παρατήρηση X_t και μεγαλύτερη σε όλες τις διαθέσιμες παρατηρήσεις από την αρχή της εφαρμογής του διαγράμματος EWMA. Παρά ταύτα, θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα «βάρη» (weights) που δίνονται στις $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_1$ είναι αντίστοιχα $\lambda(1 - \lambda), \lambda^2(1 - \lambda), \dots, \lambda^{t-1}(1 - \lambda)$, δηλαδή φθίνουν γεωμετρικά. Άρα, το διάγραμμα διαθέτει «μνήμη» (*memory-type chart*) και είναι ικανότερο ενός διαγράμματος Shewhart στην ανίχνευση μικρών ή/και μεσαίων μετατοπίσεων στο μέσο της διεργασίας.

Προτού παρουσιαστούν τα διαγράμματα τύπου EWMA για διεργασίες BAR(1), πρέπει να επισημανθεί ότι ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό αυτών των διεργασιών είναι ότι οι τιμές X_t $t \geq 1$, είναι ακέραιες. Κατά συνέπεια, με απευθείας εφαρμογή της (3.1) σε δεδομένα (μετρήσεις) από μια διεργασία τύπου BAR(1), οι τιμές Q_t που προκύπτουν, δεν παραμένουν ακέραιες. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, η απόδοση του διαγράμματος EWMA να μην μπορεί να υπολογιστεί με χρήση της μεθόδου των Brook and Evans (1972) και να απαιτούνται (συνήθως χρονοβόρες) προσομοιώσεις.

3.2.1 Το Διάγραμμα Ελέγχου 1-EWMA

Ο Weiß (2011) πρότεινε και μελέτησε άνω μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA για την παρακολούθηση διεργασιών PINAR(1) (δείτε Κεφάλαιο 2, Ενότητα 2.3). Προκειμένου να παραμένουν ακέραιες οι τιμές της απεικονιζόμενης στατιστικής συνάρτησης (α.σ.σ.), χρησιμοποίησε ως α.σ.σ. την

$$Q_t = \text{round}(\lambda X_t + (1 - \lambda)Q_{t-1}), \quad Q_0 = q_0, \quad (3.2)$$

για $t = 1, 2, \dots, q_0 \in \mathbb{N}_0$. Για τη συνάρτηση $\text{round}(\cdot)$ ισχύει ότι $\text{round}(x) = z$, αν και μόνο αν $x \in [z - 0.5, z + 0.5)$. Αυτό σημαίνει ότι αν $x \in \mathbb{R}$, τότε με εφαρμογή της συνάρτησης $\text{round}(\cdot)$, αυτό στρογγυλοποιείται στον πλησιέστερο ακέραιο. Θα αναφέρεται το συγκεκριμένο διάγραμμα ως το 1-EWMA, στο οποίο απεικονίζονται μόνο ακέραιες τιμές και δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν για πρώτη φορά $Q_t > UCL_1$, όπου UCL_1 είναι ένα κατάλληλο άνω όριο ελέγχου. Προφανώς, όταν υπάρχει μόνο άνω όριο ελέγχου, το διάγραμμα 1-EWMA είναι ένα άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου. Με ανάλογο τρόπο, μπορεί να οριστεί το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα 1-EWMA. Σε εκείνη την περίπτωση, υπάρχει μόνο ένα κάτω όριο ελέγχου LCL_1 και το διάγραμμα δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν για πρώτη φορά $Q_t < LCL_1$. Αξίζει να σημειωθεί πως για την περίπτωση που οι X_t είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. από διωνυμική κατανομή, το διάγραμμα 1-EWMA ταυτίζεται με το διάγραμμα EWMA του Gan (1993).

Για τον υπολογισμό της απόδοσης του άνω μονόπλευρου διαγράμματος 1-EWMA, απαιτείται ο προσδιορισμός της κατανομής του μήκους ροής του διαγράμματος (*run length distribution*), η οποία ορίζεται ως η κατανομή της τ.μ. $L = \min\{j: Q_j > UCL_1\}$. Αντίστοιχα, για την περίπτωση του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος 1-EWMA, η κατανομή του μήκους ροής του διαγράμματος ορίζεται ως η κατανομή της τ.μ. $L = \min\{j: Q_j < LCL_1\}$. Συνήθως ως μέτρο απόδοσης χρησιμοποιείται η μέση τιμή της κατανομής του μήκους ροής, γνωστή και ως ARL (average run length). Το ARL εκφράζει το μέσο αριθμό σημείων που πρέπει να παρασταθούν στο διάγραμμα μέχρι αυτό να δώσει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας. Πιο συγκεκριμένα, τα μέτρα απόδοσης που χρησιμοποιούνται είναι τα παρακάτω (δείτε επίσης Weiß (2015)):

i. zero-state ή initial-state ARL (ARL_0): Χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση της εντός ελέγχου απόδοσης του διαγράμματος. Υπολογίζεται όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου.

ii. steady-state ARL ($ARL(\infty)$): Είναι το μέσο μήκος ροής σταθερής κατάστασης, το οποίο εκφράζει τον αναμενόμενο αριθμό σημείων που πρέπει να αναπαρασταθούν στο διάγραμμα

μέχρι αυτό να δώσει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας, όταν η διεργασία έχει λειτουργήσει για «αρκετό χρόνο» σε κατάσταση εντός ελέγχου

Σχετικά με τον υπολογισμό της κατανομής της L , είτε για το άνω είτε για το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα 1-EWMA, χρησιμοποιείται η μεθοδολογία των Μαρκοβιανών αλυσίδων (Brook and Evans, 1972). Λόγω του ότι η Q_t λαμβάνει ακέραιες τιμές, είναι δυνατός ο υπολογισμός της ακριβούς κατανομής της L (Weiß (2011)), είτε για το άνω είτε για το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα 1-EWMA. Για περισσότερες λεπτομέρειες, δείτε Παράρτημα Α.

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα βήματα της αλγοριθμικής διαδικασίας για την εύρεση των τιμών των παραμέτρων λ , UCL_1 του άνω μονόπλευρου διαγράμματος 1-EWMA. Δείτε επίσης Anastasopoulou and Rakitzis (2022a), Weiß (2011). Αντίστοιχα είναι τα βήματα για την περίπτωση του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος 1-EWMA.

Πίνακας 3.1: Διαδικασία Ανάπτυξης Άνω Μονόπλευρου Διαγράμματος Ελέγχου 1-EWMA

Βήμα 1.	Επιλέγουμε τις εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων π_0, ρ_0 της διεργασίας BAR(1) καθώς και την επιθυμητή τιμή ARL_0 για το $zsARL$.
Βήμα 2.	Επιλέγουμε μία αρχική ακέραιη τιμή UCL_1 για το άνω όριο ελέγχου, με $UCL_1 \geq \mu_{0,X}$ έτσι ώστε το αντίστοιχο άνω μονόπλευρο διάγραμμα Shewhart (περίπτωση $\lambda = 1$) να έχει $zsARL < ARL_0$.
Βήμα 3.	Μειώνουμε την τιμή λ με βήμα 0.01 έτσι ώστε το $zsARL$ να είναι όσο το δυνατόν κοντά στην τιμή ARL_0 και με τον τρόπο αυτό προσδιορίζεται το ζεύγος τιμών (λ, UCL_1) . Η διαδικασία συνεχίζεται μειώνοντας περαιτέρω, με βήμα 1, την αρχική (ακέραιη) τιμή του UCL_1 , υπό τον περιορισμό ότι $UCL_1 > \mu_{0,X}$, και αναζητώντας στη συνέχεια μια νέα τιμή του λ , ώστε το εντός ελέγχου $zsARL$ να είναι όσο το δυνατόν κοντά στην επιθυμητή τιμή ARL_0 .

Από την εφαρμογή των βημάτων 1-3 του Πίνακα 3.1 θα προκύψει ένα σύνολο ζευγών (λ, UCL_1) , για τα οποία η απόδοση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος 1-EWMA είναι το δυνατόν κοντά στην επιθυμητή. Επομένως, για να επιλεγεί το βέλτιστο ζεύγος τιμών, θα πρέπει να εισαχθεί και μια ακόμη συνθήκη, η οποία πρέπει να ικανοποιείται από το άνω μονόπλευρο διάγραμμα 1-EWMA. Η συνθήκη αυτή αναφέρεται στην εκτός ελέγχου απόδοση του διαγράμματος και συνήθως έχει να κάνει με την ικανότητα του διαγράμματος να ανιχνεύει

μετατοπίσεις συγκεκριμένου μεγέθους. Συγκεκριμένα, μεταξύ όλων των ζευγών (λ, UCL_1) επιλέγεται εκείνο για το οποίο ικανοποιούνται οι ακόλουθες δύο συνθήκες:

- (i) Η εντός ελέγχου απόδοση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος 1-EWMA να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στην επιθυμητή τιμή ARL_0 και
- (ii) Η εκτός ελέγχου απόδοση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος 1-EWMA, με βάση το $ssARL$, να είναι η καλύτερη, για δεδομένη εκτός ελέγχου κατάσταση.

Ουσιαστικά η συνθήκη (ii) απαιτεί το διάγραμμα να έχει την μικρότερη τιμή $ssARL$, μεταξύ όλων όσων ικανοποιούν την (i), όταν το μέσο επίπεδο της διεργασίας είναι $\mu_{1,x} > \mu_{0,x}$.

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι λόγω της διακριτής φύσης μιας BAR(1) διαδικασίας, δεν είναι δυνατό να προκύψουν τιμές (λ, UCL_1) ώστε η εντός ελέγχου τιμή του $zsARL$ να είναι ακριβώς ίση με την επιθυμητή τιμή ARL_0 . Για το λόγο αυτό, για να είναι δυνατός ο προσδιορισμός των διαφορετικών ζευγών τιμών (λ, UCL_1) που δίνουν εντός ελέγχου απόδοση κοντά στην επιθυμητή, προτείνεται η χρήση του παρακάτω κριτηρίου (βλέπε Castagliola et al. (2019)):

$$\frac{|zsARL - ARL_0|}{ARL_0} \leq 0.05,$$

όπου $zsARL$ είναι η εντός ελέγχου τιμή του άνω μονόπλευρου διαγράμματος 1-EWMA, για τις δεδομένες τιμές (λ, UCL_1) , και ARL_0 είναι η επιθυμητή για το εντός ελέγχου ARL .

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο στατιστικός σχεδιασμός του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος 1-EWMA γίνεται με ανάλογο τρόπο. Οι αντίστοιχες συνθήκες διατυπώνονται ως εξής:

- (i) Η εντός ελέγχου απόδοση του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος 1-EWMA να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στην επιθυμητή τιμή ARL_0 και
- (ii) Η εκτός ελέγχου απόδοση του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος 1-EWMA, με βάση το $ssARL$, να είναι η καλύτερη, για δεδομένη εκτός ελέγχου κατάσταση. Εδώ, η εκτός ελέγχου κατάσταση αντιστοιχεί σε μετατόπιση του μέσου επιπέδου της διεργασίας σε μια τιμή $\mu_{1,x} < \mu_{0,x}$.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί ότι, για δεδομένο ζεύγος τιμών (λ, UCL_1) (ή αντίστοιχα (λ, LCL_1)), η εντός ελέγχου τιμή του $zsARL$ μπορεί να «έρθει» πιο κοντά στην επιθυμητή τιμή ARL_0 , αν μεταβληθεί κατάλληλα η αρχική τιμή q_0 . Στην εργασία των Anastasopoulou and Rakitzis (2022a) χρησιμοποιήθηκε η τιμή $q_0 = 0$ ώστε να μη δοθεί η δυνατότητα εφαρμογής της μεθόδου της **άμεσης αρχικής αντίδρασης** (*Fast Initial Response*, Lucas and Crosier (1982)) στο διάγραμμα 1-EWMA. Πάντως, μια λογική επιλογή για την τιμή q_0 είναι η $q_0 = \lfloor \mu_{0,x} \rfloor$.

3.2.2 Το Διάγραμμα Ελέγχου s-EWMA

Μια επέκταση του διαγράμματος ελέγχου 1-EWMA που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, είναι το διάγραμμα s-EWMA, $s \in \{2,3, \dots\}$, στο οποίο απεικονίζονται τιμές της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου

$$Q_t^{(s)} = s - \text{round}(\lambda X_t + (1 - \lambda)Q_{t-1}^{(s)}), \quad Q_0^{(s)} = q_0/s, \quad (3.3)$$

για $t = 1,2, \dots$, $q_0 \in \mathbb{N}_0$. Η συνάρτηση $s - \text{round}(\cdot)$ αποτελεί γενίκευση της συνάρτησης $\text{round}(\cdot)$ αφού αν $x \in \mathbb{R}$, τότε $s - \text{round}(x) = z$ αν και μόνο αν $x \in [z - 0.5s, z + 0.5s]$. Αυτό σημαίνει πως για δεδομένη τιμή s , ο πραγματικός αριθμός x στρογγυλοποιείται στο πλησιέστερο πολλαπλάσιο του $1/s$. Για παράδειγμα, αν $s = 2$, τότε η στρογγυλοποίηση γίνεται σε πολλαπλάσια του 0.5 ενώ αν $s = 4$, η στρογγυλοποίηση γίνεται σε πολλαπλάσια του 0.25. Με τον τρόπο αυτό παραμένει δυνατός ο ακριβής υπολογισμός της κατανομής του μήκους ροής του διαγράμματος s-EWMA (με χρήση της μεθόδου των Brook and Evans (1972)) ενώ και η εξομάλυνση των αρχικών παρατηρήσεων είναι λιγότερο έντονη, σε σύγκριση με την περίπτωση της συνήθους στρογγυλοποίησης (δηλαδή για $s = 1$). (Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τον υπολογισμό της απόδοσής του μέσω της μεθόδου των Μαρκοβιανών Αλυσίδων δείτε Παράρτημα Α).

Το διάγραμμα s-EWMA προτάθηκε από τον Weiß (2011) και χρησιμοποιήθηκε για την παρακολούθηση μιας διεργασίας PINAR(1). Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν τα βήματα για το στατιστικό σχεδιασμό του.

Αρχικά, σε αναλογία με τα όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, το άνω μονόπλευρο διάγραμμα s-EWMA δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας για 1^η φορά στο t -οστο σημείο αν $Q_t^{(s)} > UCL_s$. Ανάλογα, το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα s-EWMA δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας για 1^η φορά στο t -οστο σημείο αν $Q_t^{(s)} < LCL_s$. Πλέον, για την εφαρμογή του διαγράμματος s-EWMA απαιτείται ο προσδιορισμός των τιμών (s, λ, UCL_s) (για την περίπτωση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος) ή (s, λ, LCL_s) (για την περίπτωση του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος). Παρακάτω δίνονται τα βήματα της σχετικής διαδικασίας για την περίπτωση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος s-EWMA. Η περίπτωση του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο, μετά από κάποιες απαραίτητες τροποποιήσεις.

Πίνακας 3.2: Διαδικασία Ανάπτυξης Άνω Μονόπλευρου Διαγράμματος Ελέγχου s -EWMA

Βήμα 1.	Επιλέγουμε τις εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων π_0, ρ_0 για μία διεργασία BAR(1) καθώς και την επιθυμητή τιμή ARL_0 για το εντός ελέγχου $zsARL$. Επίσης επιλέγουμε την τιμή $s \in \{2,3,4, \dots\}$.
Βήμα 2.	Επιλέγουμε ως αρχικές τιμές, τις τιμές (λ, UCL_1) που προέκυψαν κατά την αντίστοιχη διαδικασία για το άνω μονόπλευρο διάγραμμα 1-EWMA. Για το δεδομένο s , προσδιορίζεται μία αρχική τιμή UCL_s ως άνω όριο ελέγχου, με $UCL_s = \frac{u}{s} \geq \mu_{0,X}$, έτσι ώστε το αντίστοιχο άνω μονόπλευρο διάγραμμα s -EWMA να έχει $zsARL < ARL_0$. Το u είναι κατάλληλος θετικός ακέραιος.
Βήμα 3.	Η διαδικασία συνεχίζεται μειώνοντας περαιτέρω, με βήμα 1, την αρχική τιμή υπό τον περιορισμό ότι $UCL_s > \mu_{0,X}$, και αναζητώντας στη συνέχεια μια νέα τιμή του λ , ώστε το εντός ελέγχου $zsARL$ να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στο ARL_0 . Προσδιορίζουμε την τιμή λ (μειώνεται με βήμα 0.01), έτσι ώστε, για τις δεδομένες τιμές των s και UCL_s , το εντός ελέγχου $zsARL$ να είναι όσο το δυνατόν κοντά στην επιθυμητή τιμή ARL_0 . Με τη διαδικασία αυτή προκύπτει η τριάδα τιμών (s, λ, UCL_s) .

Η διαδικασία συνεχίζεται εφαρμόζοντας τα βήματα 1-3 που περιγράφονται στον Πίνακα 3.2 και για τα υπόλοιπα ζεύγη τιμών (λ, UCL_1) τα οποία προέκυψαν κατά τη διαδικασία σχεδιασμού του άνω μονόπλευρου διαγράμματος 1-EWMA. Τελικά, θα προκύψει ένα σύνολο δυνατών τιμών (s, λ, UCL_s) για τις παραμέτρους του άνω μονόπλευρου διαγράμματος ελέγχου s -EWMA, για διάφορες τιμές του s . Για τις τιμές αυτές, το εντός ελέγχου $zsARL$ είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στην τιμή ARL_0 . Για την επιλογή της βέλτιστης τριάδας τιμών, προτείνεται η χρήση μιας επιπλέον συνθήκης η οποία αφορά την εκτός ελέγχου απόδοση του διαγράμματος. Συγκεκριμένα, επιλέγεται εκείνη η τριάδα τιμών για την οποία το $ssARL$ του άνω μονόπλευρου διαγράμματος ελέγχου s -EWMA γίνεται ελάχιστο, για δεδομένη μετατόπιση του μέσου επιπέδου της διεργασίας, από την τιμή $\mu_{0,X}$ σε μια τιμή $\mu_{1,X} > \mu_{0,X}$.

Όπως και στην περίπτωση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος 1-EWMA, προτείνεται η χρήση ενός επιπλέον κριτηρίου για την επιλογή των τιμών (s, λ, UCL_s) των παραμέτρων του διαγράμματος, ώστε η εντός ελέγχου απόδοσή του να είναι κοντά στην επιθυμητή. Το κριτήριο που χρησιμοποιήθηκε είναι ίδιο με αυτό που εφαρμόστηκε για το διάγραμμα 1-EWMA.

Με ανάλογο τρόπο, προσδιορίζονται οι τιμές (s, λ, LCL_s) ώστε το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα s -EWMA να έχει την επιθυμητή απόδοση. Επιπλέον, μεταξύ όλων των τριάδων για τις οποίες το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα s -EWMA έχει την επιθυμητή εντός ελέγχου απόδοση, επιλέγεται εκείνη για την οποία το $ssARL$ γίνεται ελάχιστο, για δεδομένη μετατόπιση του μέσου επιπέδου της διεργασίας, από την τιμή $\mu_{0,x}$ σε μια τιμή $\mu_{1,x} < \mu_{0,x}$.

Πριν παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της αριθμητικής μελέτης σχετικά με την απόδοση των προτεινόμενων διαγραμμάτων ελέγχου EWMA, πρέπει να αναφερθεί ότι εκτός του λ και του ορίου ελέγχου (είτε του άνω ορίου, είτε του κάτω ορίου), το μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου s -EWMA περιλαμβάνει μία ακόμη παράμετρο, που είναι το s . Σύμφωνα με τον Weiß (2011), προκειμένου να αποφευχθεί η υπερβολική εξομάλυνση (*oversmoothing*) των τιμών X_t , όπως συμβαίνει στην περίπτωση του διαγράμματος 1-EWMA, γεγονός το οποίο επηρεάζει σημαντικά την ικανότητα του διαγράμματος στην ανίχνευση αλλαγών στη διεργασία, συνιστάται η χρήση μιας τιμής $s > 1$. Ο Weiß (2011) πρότεινε το $s \in \{2,4\}$ ενώ οι ίδιες τιμές χρησιμοποιήθηκαν και από τους Antastاسوبουλου and Rakitzis (2022). Οι τιμές αυτές μπορούν να θεωρηθούν ως ένα ικανοποιητικό αντιστάθμισμα (*trade-off*) μεταξύ της υπερβολικής εξομάλυνσης και των χρονοβόρων υπολογισμών που απαιτούνται για μεγάλες ακέραιες τιμές του s και μικρές τιμές λ . Αξίζει να αναφέρουμε πως αν και δεν είναι δύσκολο να αναπτύξουμε το διάγραμμα s -EWMA για $s = 3$, ο λόγος που δε χρησιμοποιήθηκε είναι επειδή η συνάρτηση $3 - \text{round}(\cdot)$ στρογγυλοποιεί τον πραγματικό αριθμό x σε πολλαπλάσια του $1/3$. Αυτό σημαίνει ότι απαιτείται ένα λεπτομερέστερο επίπεδο στρογγυλοποίησης (σε σύγκριση με τις επιλογές $s = 2$ ή $s = 4$) για τις τιμές που απεικονίζονται στο διάγραμμα.

Στη συνέχεια, θα συζητηθεί η απόδοση του διαγράμματος s -EWMA για $s \in \{1,2,4\}$. Ως εκ τούτου, για κάθε μια από αυτές τις τρεις τιμές του s , θα γίνει ο προσδιορισμός των βέλτιστων τιμών (λ, UCL_s) ή (λ, LCL_s) . Στη συνέχεια, μεταξύ αυτών, επιλέγεται αυτός που βελτιστοποιεί την ικανότητα ανίχνευσης του διαγράμματος, στη δεδομένη μετατόπιση στο $\mu_{0,x}$.

3.2.3 Αριθμητική μελέτη διαγραμμάτων s -EWMA

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα μιας εκτεταμένης αριθμητικής μελέτης σχετικά με την απόδοση των μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου s -EWMA για διεργασίες BAR(1). Εξετάστηκαν διαφορετικού τύπου BAR(1) διεργασίες και συγκεκριμένα, για τις εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων της διεργασίας θεωρήθηκαν:

- $\mu_0 \in \{5,10\}$
- $\rho \in \{0.25,0.50,0.75\}$

- $n \in \{15,30\}$.

Επιπλέον, όταν η διαδικασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου, θεωρείται ότι $\rho_1 = \rho_0$, δηλαδή οι ειδικές αιτίες μεταβλητότητας επηρεάζουν και τελικά αλλάζουν μόνο την παράμετρο π_0 , η οποία μεταβάλλεται από π_0 σε $\pi_1 = \delta\pi_0$, $0 < \delta \neq 1$, με $\delta \in \{1.2, 1.4\}$ (περίπτωση αυξήσεων στο π_0) ή $\delta \in \{0.8, 0.6\}$ (περίπτωση μειώσεων στο π_0). Ουσιαστικά, ενδιαφέρει να διαπιστωθεί η ικανότητα των μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου s -EWMA στην ανίχνευση αλλαγών της τάξης του 20% και του 40% στο εντός ελέγχου μέσο επίπεδο της διεργασίας. Συνεπώς, αυτές είναι οι μετατοπίσεις που θα εξεταστούν και θα ληφθούν τα βέλτιστα διαγράμματα για την ανίχνευσή τους. Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί πως αφού η $\mu_{0,x} = n\pi_0$, μια αλλαγή στο ρ_0 δεν επηρεάζει άμεσα το μέσο επίπεδο της διεργασίας (αν και αλλάζει γενικά τη συμπεριφορά της διεργασίας).

Επίσης, ως ARL_0 επιλέχθηκε, ενδεικτικά, η τιμή 370.4. Η τιμή αυτή εμφανίζεται πολύ συχνά ως επιθυμητή για το ARL_0 και αντιστοιχεί στην τιμή ARL_0 του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου \bar{X} με όρια 3σ (δείτε π.χ. Montgomery 2020).

Στους Πίνακες 3.3 και 3.4 δίνονται οι εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων της διεργασίας $BAR(1)$, για κάθε μια από τις διαφορετικές διεργασίες μαζί με τις βέλτιστες τιμές (s, λ, UCL_s) ή (s, λ, LCL_s) για τη ανίχνευση δεδομένης μετατόπισης δ . Η περίπτωση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος s -EWMA παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.3 ενώ η περίπτωση του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος στον Πίνακα 3.4. Σημειώνεται επίσης ότι η τιμή για το UCL_s δίνεται στη μορφή u/s ενώ αντίστοιχα, το $LCL_s = l/s$. Οι τιμές των u, l δίνονται στις αντίστοιχες στήλες. Επίσης, στη στήλη « $zsARL$ » δίνεται η εντός ελέγχου απόδοση του διαγράμματος ενώ η εκτός ελέγχου απόδοση, για τη δεδομένα μετατόπιση δ , δίνεται στη στήλη « $ssARL$ ».

Όλοι οι υπολογισμοί έχουν γίνει με χρήση της R (R Core Team (2022)) και τα σχετικά προγράμματα για την επιβεβαίωση των τιμών στον Πίνακα 3.3 δίνονται στο Παράρτημα Γ (Γ1-Γ4). Συγκεκριμένα, στο Παράρτημα Γ1-Γ2 δίνεται το πρόγραμμα στην R στο οποίο εφαρμόζεται η μέθοδος των Μαρκοβιανών αλυσίδων για τον υπολογισμό του $zsARL$ και του $ssARL$ ενώ στο Παράρτημα Γ3-Γ4 ο υπολογισμός των παραπάνω μέτρων γίνεται με χρήση προσομοίωσης Monte Carlo. Αντίστοιχα, το πρόγραμμα στην R που επιβεβαιώνει τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.4 με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων δίνεται στο Παράρτημα Γ5-Γ7 ενώ ο υπολογισμός των μέτρων $zsARL, ssARL$ μέσω προσομοίωσης δίνεται στο Παράρτημα Γ7-Γ8.

Πίνακας 3.3: Τιμές (s, λ, UCL_s) και απόδοση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος s -EWMA, Διεργασία BAR(1)

Παράμετροι Εντός Ελέγχου Διεργασίας			Μετατοπίσεις	Τιμές Παραμέτρων Διαγράμματος s -EWMA				Μέτρα Απόδοσης	
μ_0	n	ρ_0		s	λ	u	UCL_s	$zsARL$	$ssARL$
5	15	0.25	1.2	4	0.15	27	27/4	348.08	30.06
			1.4	4	0.15	27	27/4	348.08	10.44
		0.5	1.2	4	0.11	27	27/4	345.24	41.55
			1.4	4	0.11	27	27/4	345.24	15.62
		0.75	1.2	1	0.25	9	9	371.31	88.76
			1.4	1	0.25	9	9	371.31	34.03
	30	0.25	1.2	4	0.33	33	33/4	352.94	48.55
			1.4	4	0.33	33	33/4	352.94	15.09
		0.5	1.2	1	0.12	7	7	379.56	67.34
			1.4	1	0.12	7	7	379.56	25.93
		0.75	1.2	2	0.08	14	14/2	374.46	81.85
			1.4	2	0.08	14	14/2	374.46	35.04
10	15	0.25	1.2	4	0.56	53	53/4	375.92	13.7
			1.4	4	0.56	53	53/4	375.92	3.03
		0.5	1.2	4	0.51	54	54/4	352.91	19.05
			1.4	4	0.51	54	54/4	352.91	4.63
		0.75	1.2	2	0.37	27	27/2	390.62	32.77
			1.4	2	0.37	27	27/2	390.62	9.16
	30	0.25	1.2	2	0.26	27	27/2	353.54	20.01
			1.4	2	0.26	27	27/2	353.54	6.34
		0.5	1.2	4	0.48	61	61/4	364.46	38.9
			1.4	4	0.48	61	61/4	364.46	10.99
		0.75	1.2	4	0.05	47	47/4	349.36	39.03
			1.4	4	0.05	47	47/4	349.36	17.14

Πίνακας 3.4: Τιμές (s, λ, UCL_s) και απόδοση του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος s -EWMA, Διεργασία BAR(1)

Παράμετροι Εντός Ελέγχου Διεργασίας			Μετατοπίσεις	Τιμές Παραμέτρων Διαγράμματος s -EWMA				Μέτρα Απόδοσης	
μ_0	n	ρ_0		s	λ	l	LCL_s	$zsARL$	$ssARL$
5	15	0.25	0.8	4	0.52	7	7/4	366.63	60.64
			0.6	4	0.52	7	7/4	366.63	14.24
		0.5	0.8	2	0.43	3	3/2	388.09	99.3
			0.6	2	0.43	3	3/2	388.09	24.79
		0.75	0.8	4	0.25	6	6/4	361.05	256.22
			0.6	4	0.25	6	6/4	361.05	60.87
	30	0.25	0.8	4	0.53	6	6/4	384.16	74.98
			0.6	4	0.53	6	6/4	384.16	17.65
		0.5	0.8	4	0.74	3	3/4	379.04	106.21
			0.6	4	0.74	3	3/4	379.04	34.61
		0.75	0.8	2	0.78	1	1/2	372.4	131.39
			0.6	2	0.78	1	1/2	372.4	25.84
10	15	0.25	0.8	4	0.53	23	23/4	367.67	32.08
			0.6	4	0.53	23	23/4	367.67	5.62
		0.5	0.8	4	0.65	22	24/4	352.29	26.22
			0.6	4	0.65	22	24/4	352.29	6.64
		0.75	0.8	4	0.67	21	21/4	372.61	41.99
			0.6	4	0.67	21	21/4	372.61	12.39
	30	0.25	0.8	1	0.93	3	3	359.11	46.42
			0.6	1	0.93	3	3	359.11	8.84
		0.5	0.8	4	0.61	18	18/4	370.63	47.22
			0.6	4	0.61	18	18/4	370.63	11.24
		0.75	0.8	4	0.38	17	17/4	359.87	129.67
			0.6	4	0.38	17	17/4	359.87	28.53

Τα αποτελέσματα στους Πίνακες 3.3 και 3.4 δείχνουν ότι για $s > 1$ (δηλαδή για $s = 2$ ή $s = 4$) το εντός ελέγχου $zsARL$ του διαγράμματος ελέγχου s -EWMA είναι κοντά στην επιθυμητή τιμή ARL_0 , στις περισσότερες από τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, λόγω της διακριτής φύσης του μοντέλου $BAR(1)$, ήταν αδύνατο να επιτευχθεί ακριβώς η επιθυμητή τιμή ARL_0 . Ωστόσο, ο λόγος $|zsARL - ARL_0|/ARL_0$, σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις που παρουσιάζονται στους Πίνακες 3.3 και 3.4 είναι το πολύ 5%.

Από πρακτική άποψη και όσον αφορά τον προσδιορισμό των παραμέτρων λ και UCL_s του διαγράμματος, για ένα δεδομένο s , καθώς μειώνεται η τιμή του UCL_s , μειώνεται και η τιμή του λ , κάτι που είναι συνήθως επιθυμητό, ώστε τα διαγράμματα EWMA να είναι πιο αποτελεσματικά από τα διαγράμματα Shewhart. Το εύρος τιμών που προτείνουμε για το λ , προκειμένου να επιτευχθεί η εντός ελέγχου επιθυμητή απόδοση για το άνω μονόπλευρο διάγραμμα είναι $\lambda \in (0.05, 0.25)$. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι σε αντίστοιχη έρευνα, ο Weiß (2011) πρότεινε παρόμοιο εύρος τιμών και συγκεκριμένα επισήμανε ότι είναι προτιμότερο το λ να λαμβάνει τιμές μικρότερες από 0.2. Όμοια, στη μελέτη των Zhang et al. (2014) διαπιστώθηκε ότι σε περιπτώσεις που το λ λαμβάνει τιμές κοντά στο 0.25, τότε το διάγραμμα EWMA ανιχνεύει έγκαιρα μικρές και μεσαίες μετατοπίσεις της μέσης τιμής.

Με παρόμοιο τρόπο, για τα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα, καθώς αυξάνεται το LCL_s , μειώνεται το λ , προκειμένου να επιτευχθεί η επιθυμητή απόδοση IC. Ταυτόχρονα, διατηρείται η ικανότητα του διαγράμματος στην ανίχνευση μικρών και μεσαίων μετατοπίσεων (μειώσεων) στη $\mu_{0,x}$.

3.3 Διαγράμματα DEWMA για διεργασίες $BAR(1)$

Στην προηγούμενη ενότητα αναπτύξαμε μονόπλευρα διαγράμματα s -EWMA για την παρακολούθηση μίας $BAR(1)$ διεργασίας. Παρόλο που τα διαγράμματα ελέγχου CUSUM και EWMA είναι καλύτερα από τα διαγράμματα Shewhart στην ανίχνευση μικρών και μέτριων μεταβολών στις παραμέτρους της διεργασίας, τα τελευταία χρόνια υπάρχει αυξανόμενο ενδιαφέρον για την περαιτέρω βελτίωση της απόδοσής τους. Μερικές φορές αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την ανάπτυξη πιο «εξελιγμένων» διαγραμμάτων, τα οποία είναι διαγράμματα ελέγχου με μνήμη και ορίζονται με τη μίξη διαφορετικών (ή ίδιων) διαγραμμάτων.

Σε αυτή την κατηγορία διαγραμμάτων ελέγχου ανήκει το διάγραμμα Double EWMA (DEWMA), το οποίο προτάθηκε και μελετήθηκε από τους Shamma et al. (1991) και Shamma and Shamma (1992). Οι συγγραφείς πρότειναν το διάγραμμα ελέγχου DEWMA ως ένα διάγραμμα το οποίο βελτιώνει την απόδοση του συνήθους διαγράμματος ελέγχου EWMA στην

ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στο μέσο επίπεδο της διεργασίας. Η ιδέα πίσω από το διάγραμμα DEWMA βασίζεται στη μέθοδο του διπλού εκθετικά σταθμισμένου κινητού μέσου όρου (*double exponentially weighted moving average*), η οποία αποτελεί μια συνήθη μέθοδο πρόβλεψης/εξομάλυνσης στην ανάλυση των χρονοσειρών. Το διάγραμμα DEWMA έχει μελετηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία (βλέπε, ενδεικτικά, Mahmoud and Woodall (2010), Khoo et al. (2010), Adeoti and Malela-Majika (2020), Raza et al. (2020) και τις εκεί αναφορές).

Σε ότι αφορά στη χρήση του διαγράμματος DEWMA για την παρακολούθηση δεδομένων καταμετρήσεων, οι Zhang et al. (2003) μελέτησαν το διάγραμμα DEWMA στην περίπτωση παρακολούθησης και ανίχνευσης αλλαγών σε μια διαδικασία Poisson. Επίσης το διάγραμμα DEWMA μελετήθηκε στην περίπτωση διεργασιών που μοντελοποιούνται σύμφωνα με το πρότυπο της Conway-Maxwell Poisson κατανομής (Alevizakos and Koukouninos (2019)), στην περίπτωση της μηδενοδοιγκωμένης κατανομής Poisson (Alevizakos and Koukouninos (2020)) καθώς και της μηδενοδοιγκωμένης διωνυμικής κατανομής (Alevizakos and Koukouninos (2021)).

Στη συνέχεια, θα μας απασχολήσει η περίπτωση διεργασιών BAR(1) και το πως μπορούμε να παρακολουθήσουμε και να ανιχνεύσουμε αλλαγές στις παραμέτρους αυτής, χρησιμοποιώντας ένα διάγραμμα ελέγχου DEWMA. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί ότι με βάση τη βιβλιογραφική ανασκόπηση που διεξήχθη, διαπιστώθηκε ότι η απόδοση του διαγράμματος DEWMA δεν έχει διερευνηθεί στην περίπτωση δεδομένων καταμετρήσεων, στα οποία υπάρχει αυτοσυσχέτιση. Επιπλέον, προκειμένου να αναδειχθεί η χρησιμότητα και η δυνατότητα εφαρμογής του διαγράμματος ελέγχου DEWMA στην ανίχνευση μεταβολών στις παραμέτρους μιας διεργασίας BAR(1), θεωρούμε διάφορους τύπους μετατοπίσεων ως πιθανές εκτός ελέγχου καταστάσεις. Στόχος είναι να διαπιστώσουμε κατά πόσο το διάγραμμα DEWMA μπορεί να ανιχνεύσει τους διαφορετικούς τύπους μετατοπίσεων.

3.3.1 Το Διάγραμμα Ελέγχου DEWMA

Το διάγραμμα ελέγχου DEWMA εισήχθη από τους Shamma και Shamma (1992) και βασίζεται στην ακόλουθη στατιστική συνάρτηση:

$$Y_t = \lambda Q_t + (1 - \lambda)Y_{t-1} \quad (3.4)$$

για $t = 1, 2, \dots$, όπου το Q_t δίνεται από τη σχέση:

$$Q_t = \lambda X_t + (1 - \lambda)Q_{t-1}.$$

Προφανώς, η παραπάνω σχέση δεν είναι παρά η στατιστική συνάρτηση ενός διαγράμματος ελέγχου EWMA (δείτε επίσης (3.1)) ενώ το $\lambda \in (0, 1]$ είναι η παράμετρος εξομάλυνσης. Για

την επιλογή του λ ισχύει γενικά ότι και στην περίπτωση του διαγράμματος ελέγχου EWMA. Δηλαδή προτείνεται το $\lambda \in [0.05, 0.30]$. Επίσης, οι αρχικές τιμές είναι $Y_0 = Q_0 = \mu_{0,X} = n\pi_0$. Επομένως, η εκθετική εξομάλυνση πραγματοποιείται δύο φορές, με αποτέλεσμα οι Y_t να είναι εξομαλυσμένες σε μεγαλύτερο βαθμό σε σχέση με τις τιμές Q_t .

Αν θεωρήσουμε ένα δίπλευρο διάγραμμα DEWMA για μια διεργασία BAR(1), με όρια LCL_{DE}, UCL_{DE} , τότε αυτό δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας για πρώτη φορά στο σημείο t , αν $Y_t \notin [LCL_{DE}, UCL_{DE}]$. Ο προσδιορισμός των τιμών των ορίων ελέγχου LCL_{DE}, UCL_{DE} , γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου DEWMA να έχει την επιθυμητή εντός ελέγχου απόδοση. Όπως και στην περίπτωση του διαγράμματος ελέγχου s -EWMA, ως κατάλληλο μέτρο για την εντός ελέγχου απόδοση του διαγράμματος DEWMA, θα χρησιμοποιήσουμε το εντός ελέγχου $zsARL$.

Επίσης, αν και η παρουσίαση του διαγράμματος DEWMA έγινε στην περίπτωση που έχουμε δύο όρια ελέγχου (δίπλευρο διάγραμμα), άμεσα μπορούμε να αναπτύξουμε και τα αντίστοιχα μονόπλευρα διαγράμματα (είτε άνω, είτε κάτω). Για παράδειγμα, στο άνω (αντ. κάτω) μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου DEWMA υπάρχει μόνο ένα άνω (αντ. κάτω) όριο ελέγχου UCL_{DE} (LCL_{DE}) και όταν για πρώτη φορά συμβεί το $Y_t > UCL_{DE}$ ($Y_t < LCL_{DE}$), το διάγραμμα δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας. Στη συνέχεια, θα μας απασχολήσει η περίπτωση των δίπλευρων αλλά και των μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου DEWMA.

Υπενθυμίζεται ότι ο βασικός στόχος είναι η έγκυρη και έγκαιρη ανίχνευση αλλαγών στο μέσο επίπεδο της διεργασίας. Αυτό σημαίνει πως θέλουμε να ανιχνεύσουμε αλλαγές από την εντός ελέγχου μέση τιμή $\mu_{0,X}$ στην εκτός ελέγχου τιμή $\mu_{1,X} > \mu_{0,X}$ (περίπτωση αυξήσεων) ή στην εκτός ελέγχου τιμή $\mu_{1,X} < \mu_{0,X}$ (περίπτωση μειώσεων). Λόγω του ότι $\mu_X = n\pi$, η αλλαγή στο εντός ελέγχου μέσο επίπεδο της διεργασίας συνδέεται με αλλαγή στην παράμετρο π , και συγκεκριμένα από την τιμή π_0 στην τιμή $\pi_1 \neq \pi_0$. Όμως, ενδέχεται η παρουσία ειδικών αιτιών μεταβλητότητας να επηρεάσει και την τιμή της παραμέτρου ρ και συγκεκριμένα να επέλθει αλλαγή από την τιμή ρ_0 σε μια τιμή $\rho_1 \neq \rho_0$. Στη συνέχεια, θα μας απασχολήσει η ανίχνευση αλλαγών είτε σε ακριβώς μια από τις παραμέτρους π_0, ρ_0 , είτε και στις δύο παραμέτρους, ταυτόχρονα.

3.3.2. Υπολογισμός Απόδοσης του Διαγράμματος DEWMA

Αρχικά, για τον υπολογισμό της απόδοσης του διαγράμματος DEWMA, αλλά και για το στατιστικό σχεδιασμό του (προσδιορισμός των τιμών των παραμέτρων του διαγράμματος), χρησιμοποιήσουμε προσομοίωση Monte Carlo. Αυτό γίνεται γιατί οι τιμές Y_1, Y_2, \dots , οι οποίες

προκύπτουν μετά από τη διπλή εξομάλυνση των αρχικών τιμών X_1, X_2, \dots (οι οποίες προκύπτουν από μια $BAR(1)$ διεργασία), δεν είναι ακέραιες τιμές και μπορούν να λάβουν ένα μεγάλο αριθμό διαφορετικών τιμών. Στη σχετική βιβλιογραφία (βλέπε Mahmoud and Woodall (2010), Khoo, et al. (2010), Adeoti and Malela-Majika (2020), Raza et al. (2020), Zhang et al. (2003) Alevizakos and Koukouninos (2020), Alevizakos and Koukouninos. (2021)) η προσομοίωση Monte Carlo είναι η μέθοδος που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της απόδοσης τέτοιων ‘μικτών’ διαγραμμάτων όπως το DEWMA αλλά και για τις παραλλαγές του.

Χρησιμοποιώντας προσομοίωση Monte Carlo, θα υπολογίσουμε το εντός ελέγχου $zsARL$, ως το κατάλληλο μέτρο για την εντός ελέγχου απόδοση του διαγράμματος, και το εκτός ελέγχου $ssARL$, για την αξιολόγηση της εκτός ελέγχου απόδοσης του διαγράμματος, για διάφορες μετατοπίσεις στις τιμές των παραμέτρων της $BAR(1)$ διεργασίας.

Στον παρακάτω Πίνακα 3.5 δίνονται τα βήματα της αλγοριθμικής διαδικασίας που ακολουθείται για τον προσδιορισμό των παραμέτρων ($\lambda, LCL_{DE}, UCL_{DE}$) του δίπλευρου διαγράμματος DEWMA. Για την περίπτωση των αντίστοιχων μονόπλευρων διαγραμμάτων (είτε για το άνω, είτε για το κάτω μονόπλευρο), η διαδικασία είναι παρόμοια και για το λόγο αυτό, παραλείπεται.

Πίνακας 3.5: Στατιστικός Σχεδιασμός του Δίπλευρου Διαγράμματος DEWMA

Βήμα 1.	Επιλέγουμε τις τιμές των παραμέτρων n, π_0, ρ_0 για μία διεργασία BAR(1) καθώς και την επιθυμητή τιμή ARL_0 για το εντός ελέγχου $zsARL$.
Βήμα 2.	Επιλέγουμε μία τιμή για την παράμετρο εξομάλυνσης $\lambda \in (0,1]$.
Βήμα 3.	Ορίζουμε τα όρια ελέγχου του διαγράμματος να είναι ίσα με $LCL_{DE} = CL - K, UCL_{DE} = CL + K,$ όπου $CL = [n\pi_0]$ και $CL = [x]$ δηλώνει τον ελάχιστο ακέραιο αριθμό που είναι μεγαλύτερος ή ίσος με x . Χρησιμοποιούμε ως αρχική τιμή το $K = 0.0001$.
Βήμα 4.	Προσομοιώνουμε 50000 διεργασίες BAR(1) με παραμέτρους n, π_0, ρ_0 και με τιμές ορίων ελέγχου, όπως αυτές προέκυψαν στο Βήμα 3. Για κάθε ακολουθία, καταγράφουμε τον αριθμό των σημείων που απεικονίζονται στο διάγραμμα μέχρι αυτό να δώσει για 1 ^η φορά ένδειξη (εσφαλμένου) συναγεμού.
Βήμα 5.	Εκτιμούμε το εντός ελέγχου $zsARL$ ως το δειγματικό μέσο των 50000 πραγματοποιήσεων του μήκους ροής, οι οποίες προέκυψαν στο Βήμα 4. Αν $zsARL \notin (ARL_0 - 1, ARL_0 + 1)$ αυξάνουμε την τιμή του K κατά 0.0001 και επιστρέφουμε στο Βήμα 4, αλλιώς συνεχίζουμε στο Βήμα 6
Βήμα 6.	Χρησιμοποιούμε την τιμή για το K που προέκυψε στο Βήμα 5, υπολογίζουμε τις τιμές των ορίων ελέγχου και ανακηρύσσουμε τη διεργασία ως εκτός ελέγχου για πρώτη φορά στο σημείο $t = 1, 2, \dots$, αν $Y_t \notin [LCL_{DE}, UCL_{DE}]$.

Αφού προσδιορίσουμε τις τιμές των παραμέτρων του διαγράμματος, στη συνέχεια προχωρούμε με τον υπολογισμό της εκτός ελέγχου απόδοσής του. Τα βήματα της σχετικής αλγοριθμικής διαδικασίας, για την περίπτωση του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου DEWMA δίνονται στον Πίνακα 3.6 (βλέπε επίσης Weiß and Testik (2012))

Πίνακας 3.6: Υπολογισμός Εκτός Ελέγχου Απόδοσης του Δίπλευρου Διαγράμματος DEWMA

- Βήμα 1.** Επιλέγουμε τις εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων διεργασίας n, π_0, ρ_0 και την εντός ελέγχου επιθυμητή τιμή ARL_0 για το εντός ελέγχου $zsARL$.
- Βήμα 2.** Επιλέγουμε τις μετατοπίσεις των παραμέτρων της διεργασίας ή, ισοδύναμα, τις εκτός ελέγχου τιμές π_1, ρ_1 . Οι συγκεκριμένες μετατοπίσεις είναι αυτές που θέλουμε να ανιχνεύσουμε το συντομότερο δυνατό.
- Βήμα 3.** Κατασκευάζουμε ένα δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου DEWMA χρησιμοποιώντας τις τιμές (λ, K) που λάβαμε κατά τη φάση σχεδιασμού του διαγράμματος και οι οποίες δίνουν την επιθυμητή εντός ελέγχου απόδοση.
- Βήμα 4.** Προσομοιώνουμε 50000 διεργασίες BAR(1) ως εξής: Για κάθε εκτέλεση προσομοίωσης, δημιουργούμε πρώτα μια εντός ελέγχου διεργασία BAR(1) με παραμέτρους $n, \pi = \pi_0, \rho = \rho_0$, μέχρι την παρατήρηση $t = 199$. Στη συνέχεια, η διεργασία αλλάζει και οι τιμές των παραμέτρων της είναι πλέον $n, \pi = \pi_1, \rho = \rho_1$ και η εκτέλεση της προσομοίωσης συνεχίζεται. Αν $\pi_1 \neq \pi_0$ ή/και $\rho_1 \neq \rho_0$, τότε οι παρατηρήσεις $X_t, t = 200, 201, \dots$, παράγονται μια εκτός ελέγχου διεργασία.
- Βήμα 5.** Για καθεμία από τις 50000 ακολουθίες που παράχθηκαν στο Βήμα 4, καταγράφουμε τον αριθμό των σημείων στο διάγραμμα μέχρι αυτό να δώσει για 1^η φορά ένδειξη (πραγματικού) συναγερμού. Εδώ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
- Αν το διάγραμμα δώσει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας για κάποιο $t = 1, 2, \dots, 199$, τότε η συγκεκριμένη προσομοίωση παραλείπεται.
 - Αν το διάγραμμα δώσει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας για κάποιο $t \geq 200$, τότε υπολογίζουμε την τιμή της ποσότητας $RL - 199$, γνωστή και ως Conditional Delay (CD), υπό συνθήκη καθυστέρηση ανίχνευσης).
- Βήμα 6.** Υπολογίζουμε τη μέση τιμή όλων των διαθέσιμων CD και εκτιμούμε της αναμενόμενη υπό συνθήκη καθυστέρηση ανίχνευσης (*conditional expected delay*, CED), η οποία χρησιμοποιείται ως εκτίμηση του $ssARL$.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί πως η ποσότητα $RL - 199$ εκφράζει τον αριθμό των σημείων που απεικονίστηκαν στο διάγραμμα από τη στιγμή που έγινε η αλλαγή στις τιμές των παραμέτρων της διεργασίας μέχρι αυτό να δώσει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας. Η συγκεκριμένη ποσότητα εκφράζει την υπό συνθήκη καθυστέρηση στην ανίχνευση της εκτός ελέγχου κατάστασης. Επίσης, το ECD δεν είναι παρά η δεσμευμένη μέση τιμή του μήκους ροής του διαγράμματος, δηλαδή:

$$ECD_{\tau} = E(RL - \tau^* + 1 | RL \geq \tau^*)$$

όπου $\tau^* \geq 1$ είναι η χρονική στιγμή στην οποία αλλάζει η διεργασία και από την εντός ελέγχου κατάσταση βρίσκεται στην εκτός ελέγχου κατάσταση. Στα βήματα που περιγράφονται στον Πίνακα 3.6, το $\tau^* = 200$.

Η μέση τιμή όλων των διαθέσιμων CD (όπως αυτές προέκυψαν στο Βήμα 5) αποτελεί εκτίμηση του ECD και χρησιμοποιείται ως εκτίμηση του $ssARL$ αφού (δείτε επίσης Κεφάλαιο 2)

$$ssARL = \lim_{\tau^* \rightarrow \infty} E(RL - \tau^* + 1 | RL \geq \tau^*)$$

3.3.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα για την Απόδοση του Διαγράμματος DEWMA

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα μιας εκτεταμένης αριθμητικής μελέτης για την απόδοση των μονόπλευρων και δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου DEWMA για την παρακολούθηση μιας διεργασίας $BAR(1)$. Επίσης, για λόγους σύγκρισης, έχουμε συμπεριλάβει στα αποτελέσματα την απόδοση των αντίστοιχων διαγραμμάτων ελέγχου EWMA, των οποίων η στατιστική συνάρτηση δίνεται στην εξίσωση (3.1). Τα συγκεκριμένα διαγράμματα EWMA δε βασίζονται στη χρήση της συνάρτησης $s - \text{round}(\cdot)$ (δείτε Ενότητα 3.2). Χρησιμοποιείται η στατιστική συνάρτηση όπως αυτή ορίστηκε από τον Roberts (1959) με τις παρατηρήσεις $X_t, t \geq 1$, να προέρχονται από μια διεργασία $BAR(1)$. Ο λόγος που έγινε είναι αυτό είναι για να διαπιστώσουμε αν η διπλή εξομάλυνση των αρχικών τιμών των παρατηρήσεων έχει ουσιαστική βελτίωση στην απόδοση του διαγράμματος (π.χ. ανιχνεύει το DEWMA ταχύτερα κάποιες συγκεκριμένες αλλαγές στις παραμέτρους της διεργασίας, έναντι του EWMA) ή θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η συνήθης στατιστική συνάρτηση EWMA.

Αναφορικά με τις εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων της διεργασίας $BAR(1)$, θεωρήθηκαν τα εξής σενάρια:

- $\mu_0 \in \{4,8,12\}$
- $\rho_0 \in \{0.25,0.50,0.75\}$
- $n \in \{20,50\}$

Επίσης, η επιθυμητή εντός ελέγχου τιμή του ARL είναι 200.

Για την περίπτωση που διεργασία είναι εκτός ελέγχου, υποθέτουμε ότι αυτό μπορεί να συμβεί στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Όταν έχει επέλθει αλλαγή μόνο στο μ_0 , η οποία είναι της μορφής $\mu_1 = n\delta\pi_0$.
- Όταν έχει επέλθει αλλαγή μόνο στο ρ_0 , η οποία είναι της μορφής $\rho_1 = \rho_0 \pm \tau$.
- Όταν έχει επέλθει ταυτόχρονη αλλαγή στο μ_0 και στο ρ_0 .

Συγκεκριμένα, στην περίπτωση που το $\delta > 1$, τότε έχει συμβεί αύξηση στην στο μέσο επίπεδο της διεργασίας ενώ για $0 < \delta < 1$, τότε έχει συμβεί μείωση σε αυτό. Αντίστοιχα, αν $\tau > 0$, τότε έχουμε αύξηση στην παράμετρο αυτοσυσχέτισης (δηλ. γίνεται πιο έντονη η συσχέτιση μεταξύ των διαδοχικών μετρήσεων), ενώ για $\tau < 0$, η ένταση της συσχέτισης μεταξύ των διαδοχικών παρατηρήσεων, μειώνεται. Προφανώς, η τιμή τ πρέπει να είναι τέτοια ώστε το $\rho_1 \in \left[\max\left\{-\frac{\pi_1}{1-\pi_1}, -\frac{1-\pi_1}{\pi_1}\right\}, 1 \right]$ (δείτε επίσης Κεφάλαιο 2, Ενότητα 2.5).

Στη συνέχεια παραθέτουμε τους Πίνακες 3.7 – 3.10, οι οποίοι δίνουν το διάγραμμα (DEWMA ή EWMA) με την καλύτερη απόδοση στην ανίχνευση μιας συγκεκριμένης αλλαγής στις τιμές των παραμέτρων της διεργασίας. Υπενθυμίζεται πως ως καλύτερο διάγραμμα, θεωρείται αυτό που έχει την ελάχιστη τιμή $ssARL$ για δεδομένη μετατόπιση. Πρέπει επίσης να αναφέρουμε πως για την παράμετρο εξομάλυνσης λ χρησιμοποιήσαμε τις τιμές $\{0.05, 0.10, 0.20, 0.30\}$, οι οποίες συναντώνται πολύ συχνά στη βιβλιογραφία (βλέπε Weiß (2011), Hu and Liu (2021)) και συνήθως αρκούν για να βρούμε το διάγραμμα με την καλύτερη απόδοση, σε ένα μεγάλο εύρος μετατοπίσεων (με έμφαση στις μετατοπίσεις μικρού ή/και μεσαίου μεγέθους).

Στους Πίνακες 3.7 - 3.10 δίνεται το καλύτερο άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου, μεταξύ EWMA και DEWMA, όταν η παρουσία ειδικών αιτιών μεταβλητότητας επιφέρει αλλαγή μόνο στο μ_0 (Πίνακες 3.7-3.9) ή μόνο στο ρ_0 (Πίνακας 3.10). Επίσης, οι τιμές των παραμέτρων του διαγράμματος (λ, UCL) δίνονται στις αντίστοιχες στήλες και έχουν προσδιοριστεί ακολουθώντας τα βήματα που περιγράφονται στον Πίνακα 3.5. Προφανώς, λόγω του ότι το διάγραμμα είναι άνω μονόπλευρο, χρησιμοποιήθηκε μόνο το άνω όριο ελέγχου. Στη συνέχεια, για το ζεύγος τιμών (λ, UCL) που προέκυψε κατά τη φάση του στατιστικού σχεδιασμού του διαγράμματος, καθώς επίσης και για δεδομένη μετατόπιση στις τιμές των παραμέτρων της διεργασίας, υπολογίστηκε η τιμή του $ssARL$, ακολουθώντας βήματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.6. Στη στήλη ‘δ’ δίνονται οι μετατοπίσεις στο μ_0 (Πίνακες 3.7-3.9) ενώ στη στήλη ‘τ’ δίνονται οι μετατοπίσεις στο ρ_0 (Πίνακας 3.10).

Πίνακας 3.7: Προτεινόμενα άνω μονόπλευρα διαγράμματα,
μεταβολή μόνο στο μ_0 όταν $\rho_0 = 0.25$

μ_0	ρ_0	n	λ	UCL	δ	$ssARL$	Διάγραμμα	μ_0	ρ_0	n	λ	UCL	δ	$ssARL$	Διάγραμμα
4	0.25	20	0.05	4.267	1.1	54.12	DEWMA	4	0.25	50	0.05	4.284	1.1	57.49	DEWMA
			0.05	4.651	1.2	26.69	EWMA				0.05	4.702	1.2	28.99	EWMA
			0.1	5.092	1.3	16.71	EWMA				0.10	4.702	1.3	18.6	EWMA
			0.1	5.092	1.4	11.78	EWMA				0.10	5.186	1.4	13.13	EWMA
			0.2	5.757	1.5	8.93	EWMA				0.20	5.186	1.5	10.03	EWMA
8	0.25	20	0.05	8.783	1.1	32.77	EWMA	8	0.25	50	0.05	8.936	1.1	39.71	EWMA
			0.10	9.302	1.2	14.48	EWMA				0.10	8.936	1.2	18.57	EWMA
			0.20	10.056	1.3	8.56	EWMA				0.20	9.574	1.3	11.13	EWMA
			0.30	10.654	1.4	5.81	EWMA				0.30	10.512	1.4	7.72	EWMA
			0.30	10.654	1.5	4.26	EWMA				0.30	11.268	1.5	5.74	EWMA
12	0.25	20	0.05	12.772	1.1	20.26	EWMA	12	0.25	50	0.05	13.084	1.1	29.87	EWMA
			0.20	13.983	1.2	8.1	EWMA				0.10	13.810	1.2	13.27	EWMA
			0.30	14.541	1.3	4.55	EWMA				0.20	14.884	1.3	7.89	EWMA
			0.30	14.541	1.4	3.13	EWMA				0.30	15.732	1.4	5.36	EWMA
			0.30	14.541	1.5	2.45	EWMA				0.30	15.732	1.5	3.99	EWMA

Πίνακας 3.8: Προτεινόμενα άνω μονόπλευρα διαγράμματα,
μεταβολή μόνο στο μ_0 όταν $\rho_0 = 0.50$

μ_0	ρ_0	n	λ	UCL	δ	$ssARL$	Διάγραμμα	μ_0	ρ_0	n	λ	UCL	δ	$ssARL$	Διάγραμμα
4	0.5	20	0.05	4.352	1.1	69.36	DEWMA	4	0.5	50	0.05	4.375	1.1	72.18	DEWMA
			0.05	4.819	1.2	37.17	EWMA				0.05	4.882	1.2	40.38	EWMA
			0.05	4.819	1.3	23.99	EWMA				0.05	4.882	1.3	26.22	EWMA
			0.10	5.354	1.4	17.31	EWMA				0.10	5.472	1.4	19.13	EWMA
			0.10	5.354	1.5	13.08	EWMA				0.10	4.472	1.5	14.63	EWMA
8	0.5	20	0.05	8.98	1.1	44.42	EWMA	8	0.5	50	0.05	8.510	1.1	52.71	DEWMA
			0.05	8.98	1.2	21.03	EWMA				0.05	9.177	1.2	25.88	EWMA
			0.10	9.607	1.3	12.73	EWMA				0.10	9.941	1.3	16.37	EWMA
			0.20	10.458	1.4	8.69	EWMA				0.20	9.941	1.4	11.4	EWMA
			0.30	11.066	1.5	6.38	EWMA				0.30	11.003	1.5	8.58	EWMA
12	0.5	20	0.05	12.965	1.1	28.24	EWMA	12	0.5	50	0.05	13.362	1.1	41.2	EWMA
			0.10	13.562	1.2	12.2	EWMA				0.10	13.362	1.2	19.47	EWMA
			0.30	14.928	1.3	6.89	EWMA				0.30	14.237	1.3	11.74	EWMA
			0.30	14.928	1.4	4.6	EWMA				0.30	15.444	1.4	8.05	EWMA
			0.30	14.928	1.5	3.55	EWMA				0.30	16.332	1.5	5.98	EWMA

Πίνακας 3.9: Προτεινόμενα άνω μονόπλευρα διαγράμματα, μεταβολή μόνο στο μ_0 όταν $\rho_0 = 0.75$

μ_0	ρ_0	n	λ	UCL	δ	$ssARL$	Διάγραμμα	μ_0	ρ_0	n	λ	UCL	δ	$ssARL$	Διάγραμμα
4	0.75	20	0.05	4.512	1.1	92.25	DEWMA	4	0.75	50	0.05	4.548	1.1	97.58	DEWMA
			0.05	5.08	1.2	55.85	EWMA				0.05	5.168	1.2	60.05	EWMA
			0.05	5.08	1.3	38.36	EWMA				0.05	5.168	1.3	41.34	EWMA
			0.05	5.08	1.4	28.13	EWMA				0.05	5.168	1.4	30.81	EWMA
			0.10	5.73	1.5	22.28	EWMA				0.10	5.168	1.5	24.47	EWMA
8	0.75	20	0.05	8.632	1.1	65.9	DEWMA	8	0.75	50	0.05	8.742		74.7	DEWMA
			0.05	9.304	1.2	33.92	EWMA				0.05	9.557		41.18	EWMA
			0.1	10.046	1.3	21.59	EWMA				0.10	9.557		26.89	EWMA
			0.2	10.946	1.4	15.28	EWMA				0.20	10.479		19.49	EWMA
			0.3	11.529	1.5	11.44	EWMA				0.30	10.479		15.03	EWMA
12	0.75	20	0.05	13.28	1.1	44.65	EWMA	12	0.75	50	0.05	13.800		61.81	EWMA
			0.1	13.99	1.2	20.64	EWMA				0.10	13.800		31.42	EWMA
			0.2	14.844	1.3	12.27	EWMA				0.20	14.850		19.88	EWMA
			0.3	15.386	1.4	8.22	EWMA				0.30	16.126		14.18	EWMA
			0.3	15.386	1.5	6.17	EWMA				0.30	16.942		10.6	EWMA

Από τα αποτελέσματα των Πινάκων 3.7-3.9 συμπεραίνουμε ότι στις περισσότερες περιπτώσεις, το άνω μονόπλευρο διάγραμμα EWMA έχει καλύτερη απόδοση από το αντίστοιχο DEWMA. Σχεδόν για όλες τις μετατοπίσεις $\delta > 1$, το άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου EWMA επιτυγχάνει μια τιμή $ssARL$ που είναι μικρότερη από την αντίστοιχη του διαγράμματος DEWMA. Για μικρές μετατοπίσεις (αυξήσεις), της τάξης το 10% ή 20% (δηλ. για $\delta = 1.1$ ή 1.2) προτείνεται το $\lambda = 0.05$ ή 0.10 . Για μεγαλύτερες αυξήσεις, της τάξης του 50% (δηλ. για $\delta = 1.5$), προτείνεται $\lambda = 0.30$. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι από τα αρχικά αποτελέσματα που καταγράψαμε σχετικά με το βέλτιστο άνω μονόπλευρο διάγραμμα στην περίπτωση που έχουμε μόνο αυξήσεις στη μέση τιμή της διεργασίας, παρατηρήθηκε ότι διαφορά στις τιμές $ssARL$ μεταξύ των διαγραμμάτων EWMA και DEWMA, η οποία έφτασε έως και το 35%, ειδικά για μέτριες έως μεγάλες μετατοπίσεις.

Πίνακας 3.10: Προτεινόμενα άνω μονόπλευρα διαγράμματα, μεταβολή μόνο στο ρ_0

Παράμετροι Διεργασίας			Παράμετροι Διεργασίας			Παράμετροι Διεργασίας			Παράμετροι Διεργασίας		
λ	UCL		τ	$ssARL$	Διάγραμμα	λ	UCL		τ	$ssARL$	Διάγραμμα
$\mu_0 = 4$	0.3	5.5	0.15	119.41	DEWMA	$\mu_0 = 4$	0.3	5.63	0.15	118.51	DEWMA
$\rho_0 = 0.25$	0.3	5.5	0.1	76.39	DEWMA	$\rho_0 = 0.25$	0.3	5.63	0.1	76.63	DEWMA
$n = 20$						$n = 50$					
$\mu_0 = 8$	0.3	9.78	0.15	117.47	DEWMA	$\mu_0 = 8$	0.3	10.15	0.15	118.2	DEWMA
$\rho_0 = 0.25$	0.3	9.78	0.1	72.56	DEWMA	$\rho_0 = 0.25$	0.3	10.15	0.1	75.88	DEWMA
$n = 20$						$n = 50$					
$\mu_0 = 12$	0.3	13.73	0.15	117.85	DEWMA	$\mu_0 = 12$	0.3	14.48	0.15	120.49	DEWMA
$\rho_0 = 0.25$	0.3	13.73	0.1	71.51	DEWMA	$\rho_0 = 0.25$	0.3	14.48	0.1	73.65	DEWMA
$n = 20$						$n = 50$					
$\mu_0 = 4$	0.2	5.37	0.15	123.29	DEWMA	$\mu_0 = 4$	0.2	5.48	0.15	125.17	DEWMA
$\rho_0 = 0.50$	0.2	5.37	0.35	83.49	DEWMA	$\rho_0 = 0.50$	0.2	5.48	0.35	87.17	DEWMA
$n = 20$						$n = 50$					
$\mu_0 = 8$	0.2	9.63	0.15	118.83	DEWMA	$\mu_0 = 8$	0.2	9.97	0.15	122.03	DEWMA
$\rho_0 = 0.50$	0.2	9.63	0.35	81.56	DEWMA	$\rho_0 = 0.50$	0.2	9.97	0.35	84.42	DEWMA
$n = 20$						$n = 50$					
$\mu_0 = 12$	0.3	14.15	0.15	117.6	DEWMA	$\mu_0 = 12$	0.2	14.26	0.15	121.17	DEWMA
$\rho_0 = 0.50$	0.2	13.59	0.35	79.47	DEWMA	$\rho_0 = 0.50$	0.2	14.26	0.35	81.88	DEWMA
$n = 20$						$n = 50$					
$\mu_0 = 4$	0.1	5.05	0.1	140.16	DEWMA	$\mu_0 = 4$	0.1	5.14	0.1	144.9	DEWMA
$\rho_0 = 0.75$	0.1	5.05	0.2	134.74	DEWMA	$\rho_0 = 0.75$	0.1	5.14	0.2	135.85	DEWMA
$n = 20$						$n = 50$					
$\mu_0 = 8$	0.2	10.168	0.1	137.87	DEWMA	$\mu_0 = 8$	0.1	9.52	0.1	141.61	DEWMA
$\rho_0 = 0.75$	0.1	9.28	0.2	129.66	DEWMA	$\rho_0 = 0.75$	0.1	9.52	0.2	133	DEWMA
$n = 20$						$n = 50$					
$\mu_0 = 12$	0.1	13.26	0.1	136.24	DEWMA	$\mu_0 = 12$	0.1	13.76	0.1	139.86	DEWMA
$\rho_0 = 0.75$	0.1	13.26	0.2	123.08	DEWMA	$\rho_0 = 0.75$	0.1	13.76	0.2	134.34	DEWMA
$n = 20$						$n = 50$					

Σε αντίθεση με τα αποτελέσματα των Πινάκων 3.7-3.9, διαπιστώνουμε ότι το άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου DEWMA έχει καλύτερη απόδοση από το αντίστοιχο EWMA, όταν η παρουσία ειδικών αιτιών μεταβλητότητας επιφέρει αλλαγές μόνο στο ρ_0 . Επιπλέον, τα αποτελέσματα της αριθμητικής μελέτης δείχνουν ότι στην περίπτωση που η εντός ελέγχου αυτοσυσχέτιση είναι χαμηλού ή μεσαίου μεγέθους (π.χ. $\rho_0 = 0.25$ ή 0.5), τότε η προτεινόμενη τιμή για το λ είναι 0.3. Επίσης, όταν το ρ_0 αυξάνεται, προτείνεται μικρότερη τιμή για το λ , προκειμένου να επιτευχθεί αυξημένη ικανότητα ανίχνευσης, ενώ για $\rho_0 = 0.75$, προτείνεται $\lambda = 0.05$. Όπως αναφέραμε και παραπάνω (περίπτωση μετατοπίσεων μόνο στο μ_0), τα τελικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον συγκεκριμένο πίνακα, προέκυψαν μετά από σύγκριση των διαγραμμάτων EWMA και DEWMA, κατά την οποία παρατηρήθηκε διαφορά

στις τιμές *ssARL* μεταξύ των διαγραμμάτων, η οποία κυμαίνεται μεταξύ 10%-20%, ανάλογα με τη μετατόπιση και τις εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων της διεργασίας.

Στους Πίνακες 3.11-3.12 δίνονται τα αποτελέσματα για την περίπτωση ταυτόχρονων μετατοπίσεων στις τιμές των παραμέτρων μ_0 και ρ_0 . Οι μετατοπίσεις αυτές δίνονται στη μορφή (δ, τ) , στην αντίστοιχη στήλη. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι στην περίπτωση ταυτόχρονων μετατοπίσεων, το άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου DEWMA υπερέχει του αντίστοιχου διαγράμματος EWMA, στην περίπτωση μικρών αυξήσεων για το μ_0 . Από την άλλη, το άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου EWMA υπερέχει του αντίστοιχου διαγράμματος DEWMA, όταν το μ_0 αυξάνεται και το ρ_0 μειώνεται. Στην περίπτωση που και οι δύο παράμετροι μετατοπίζονται προς την ίδια κατεύθυνση (αύξηση), τότε το βέλτιστο διάγραμμα είναι το DEWMA, αφού επιτυγχάνει τη χαμηλότερη τιμή *ssARL*, σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις. Επίσης, προτού οδηγηθούμε στα τελικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στους Πίνακες 3.11-3.12, πραγματοποιήθηκε σύγκριση των διαγραμμάτων EWMA και DEWMA για κάθε μία από τις παραπάνω μετατοπίσεις. Η διαφορά που παρατηρήθηκε στις τιμές *ssARL* μεταξύ των δύο διαγραμμάτων είναι της τάξης του 5%-20%, ανάλογα με τις μετατοπίσεις των μ_0, ρ_0 .

Πίνακας 3.11: Προτεινόμενα άνω μονόπλευρα διαγράμματα,
ταυτόχρονη μεταβολή σε $\mu_0, \rho_0, n = 20$

Παράμετροι Διεργασίας	λ	UCL	δ, τ	$ssARL$	Διάγραμμα
$\mu_0 = 4$	0.3	5.5	(1.2,0.35)	26.66	DEWMA
$\rho_0 = 0.25$	0.1	4.562	(1.2,-0.10)	26.51	DEWMA
$n = 20$					
$\mu_0 = 8$	0.3	9.778	(1.2,0.35)	16.3	DEWMA
$\rho_0 = 0.25$	0.1	9.302	(1.2,-0.10)	14.35	EWMA
$n = 20$					
$\mu_0 = 12$	0.2	13.983	(1.2,0.35)	10.22	EWMA
$\rho_0 = 0.25$	0.2	13.983	(1.2,-0.10)	7.79	EWMA
$n = 20$					
$\mu_0 = 4$	0.2	5.366	(1.2,0.35)	40.55	DEWMA
$\rho_0 = 0.50$	0.05	4.352	(1.2,-0.10)	37.84	DEWMA
$n = 20$					
$\mu_0 = 8$	0.2	9.627	(1.2,0.35)	27.93	DEWMA
$\rho_0 = 0.50$	0.1	9.607	(1.2,-0.10)	21.06	EWMA
$n = 20$					
$\mu_0 = 12$	0.2	13.09	(1.2,0.35)	19.12	DEWMA
$\rho_0 = 0.50$	0.1	13.562	(1.2,-0.10)	11.58	EWMA
$n = 20$					
$\mu_0 = 4$	0.1	5.053	(1.2,0.20)	74.99	DEWMA
$\rho_0 = 0.75$	0.05	4.512	(1.2,-0.25)	52.91	DEWMA
$n = 20$					
$\mu_0 = 8$	0.1	9.276	(1.2,0.20)	55.17	DEWMA
$\rho_0 = 0.75$	0.05	9.304	(1.2,-0.25)	31.03	EWMA
$n = 20$					
$\mu_0 = 12$	0.1	13.259	(1.2,0.20)	40.64	DEWMA
$\rho_0 = 0.75$	0.1	13.99	(1.2,-0.25)	17.45	EWMA
$n = 20$					

Πίνακας 3.12: Προτεινόμενα άνω μονόπλευρα διαγράμματα,
ταυτόχρονη μεταβολή σε $\mu_0, \rho_0, n = 50$

Παράμετροι Διεργασίας	λ	UCL	δ, τ	$ssARL$	Διάγραμμα
$\mu_0 = 4$	0.3	5.629	(1.2,0.35)	28.31	DEWMA
$\rho_0 = 0.25$	0.05	4.702	(1.2,-0.10)	28.62	EWMA
$n = 50$					
$\mu_0 = 8$	0.3	10.152	(1.2,0.35)	19.65	DEWMA
$\rho_0 = 0.25$	0.05	8.936	(1.2,-0.10)	18.29	EWMA
$n = 50$					
$\mu_0 = 12$	0.3	14.476	(1.2,0.35)	15.35	DEWMA
$\rho_0 = 0.25$	0.1	13.81	(1.2,-0.10)	12.85	EWMA
$n = 50$					
$\mu_0 = 4$	0.2	5.484	(1.2,0.35)	43.64	DEWMA
$\rho_0 = 0.50$	0.05	4.375	(1.2,-0.10)	40.13	DEWMA
$n = 50$					
$\mu_0 = 8$	0.2	9.965	(1.2,0.35)	32.97	DEWMA
$\rho_0 = 0.50$	0.05	9.177	(1.2,-0.10)	25.09	EWMA
$n = 50$					
$\mu_0 = 12$	0.2	14.264	(1.2,0.35)	26.38	DEWMA
$\rho_0 = 0.50$	0.05	13.362	(1.2,-0.10)	18.75	EWMA
$n = 50$					
$\mu_0 = 4$	0.1	5.136	(1.2,0.25)	78.84	DEWMA
$\rho_0 = 0.75$	0.05	4.548	(1.2,-0.25)	58	DEWMA
$n = 50$					
$\mu_0 = 8$	0.1	9.518	(1.2,0.25)	63.6	DEWMA
$\rho_0 = 0.75$	0.05	8.742	(1.2,-0.25)	38.54	DEWMA
$n = 50$					
$\mu_0 = 12$	0.1	13.764	(1.2,0.25)	52.89	DEWMA
$\rho_0 = 0.75$	0.05	13.8	(1.2,-0.25)	27.93	EWMA
$n = 50$					

Στους Πίνακες B.1-B.6 στο Παράρτημα B δίνονται αντίστοιχα αποτελέσματα για το καλύτερο διάγραμμα, μεταξύ του κάτω μονόπλευρου DEWMA και του κάτω μονόπλευρου EWMA για μεταβολές μόνο στην παράμετρο μ_0 . Τα αποτελέσματα των Πινάκων B.1-B.6 δείχνουν ότι το διάγραμμα EWMA έχει την καλύτερη απόδοση σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις. Για το λ προτείνεται είτε η τιμή 0.20 είτε η τιμή 0.30 για μέτριες έως μεγάλες πτωτικές μετατοπίσεις της μέσης τιμής, ενώ για μικρές πτωτικές μετατοπίσεις της ίδιας παραμέτρου (έως 20% μείωση), η προτεινόμενη τιμή είναι $\lambda = 0.10$. Το διάγραμμα DEWMA υπερτερεί του διαγράμματος EWMA μόνο στην περίπτωση μετατόπισης $\delta = 0.9$ (αντιστοιχεί σε 10% μείωση του μ_0), για διεργασίες με ασθενή ή μέτρια συσχέτιση (π.χ. $\rho_0 = 0.25$ ή 0.5). Τέλος, τα πρωτογενή αποτελέσματα που προέκυψαν από τη σύγκριση των κάτω μονόπλευρων

διαγραμμάτων με μεταβολή μόνο στην παράμετρο μ_0 φανέρωσαν ότι η χρήση του διαγράμματος EWMA αντί του διαγράμματος DEWMA μπορεί να οδηγήσει ακόμη και σε μείωση κατά 50% της τιμής $ssARL$, ιδίως στην ανίχνευση μεγάλων μειώσεων.

Στους Πίνακες B.7-B.8 δίνεται το καλύτερο κάτω μονόπλευρο διάγραμμα, μεταξύ των DEWMA και EWMA, όταν έχει συμβεί ταυτόχρονη μετατόπιση στις τιμές των παραμέτρων μ_0 και ρ_0 . Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι η παράμετρος μ_0 μειώνεται κατά 20%, ενώ ταυτόχρονα σημειώνεται αύξηση ή μείωση στην ρ_0 . Ανάλογα με την περίπτωση των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων, για μικρές τιμές του μ_0 (π.χ. για $\mu_0 = 4$), οι Πίνακες B.1-B6 δείχνουν ότι το διάγραμμα DEWMA έχει καλύτερη απόδοση από το διάγραμμα EWMA. Αντίθετα, όταν έχουμε ταυτόχρονη μείωση στα μ_0 και ρ_0 , τότε το προτεινόμενο διάγραμμα είναι το EWMA. Αξίζει να αναφέρουμε πως όταν και οι δύο μετατοπίσεις είναι προς την ίδια κατεύθυνση (μείωση), το διάγραμμα EWMA επιτυγχάνει χαμηλότερη τιμή $ssARL$ από το διάγραμμα DEWMA για όλες σχεδόν τις περιπτώσεις και ως εκ τούτου προτείνεται το EWMA. Από την άλλη, το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου DEWMA υπερέρχει του αντίστοιχου διαγράμματος EWMA όταν οι μετατοπίσεις είναι προς την αντίθετη κατεύθυνση, δηλ. όταν έχει συμβεί μείωση στην τιμή του μ_0 και αύξηση στην τιμή του ρ_0 . Όπως και στην περίπτωση των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων, τα πρωτογενή αποτελέσματα της σύγκρισης των παραπάνω διαγραμμάτων έδειξαν ότι η διαφορά στις τιμές $ssARL$ μεταξύ των δύο διαγραμμάτων είναι το πολύ 20%, ανάλογα με τις μετατοπίσεις στις μ_0 , ρ_0 .

Επιπρόσθετα, αξίζει να αναφερθεί ότι τα αποτελέσματα της αριθμητικής μελέτης έδειξαν ότι και τα δύο κάτω μονόπλευρα διαγράμματα EWMA και DEWMA δεν είναι σε θέση να ανιχνεύσουν μείωση μόνο στο ρ_0 καθώς σε αυτές τις περιπτώσεις η τιμή $ssARL$ ήταν σημαντικά μεγαλύτερη της εντός ελέγχου τιμής $zsARL$. Σε αυτή την περίπτωση είναι πιο πιθανό το διάγραμμα να δώσει ένδειξη εσφαλμένου συναγερμού παρά να δώσει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας και ως εκ τούτου πρέπει να αναζητηθούν άλλες, πιο κατάλληλες τεχνικές ανίχνευσης των συγκεκριμένων μετατοπίσεων στη διεργασία. Στους Πίνακες 3.13-3.22 δίνεται το προτεινόμενο δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου, μεταξύ των DEWMA και EWMA. Έχουν εξεταστεί οι περιπτώσεις όπου λόγω της παρουσίας ειδικών αιτιών μεταβλητότητας έχει συμβεί αλλαγή μόνο στην παράμετρο μ_0 (Πίνακες 3.13-3.18), μόνο στην παράμετρο ρ_0 (Πίνακες 3.19-3.20) και ταυτόχρονη μεταβολή στις παραμέτρους μ_0 , ρ_0 (Πίνακες 3.21-3.22).

Πίνακας 3.13: Προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα,
μεταβολή μόνο στην παράμετρο μ_0 , $\rho_0 = 0.25$, $n = 20$

Παράμετροι Διεργασίας	λ	LCL	UCL	δ	$ssARL$	<i>Διάγραμμα</i>
$\mu_0 = 4$ $\rho_0 = 0.25$ $n = 20$	0.3	2.359	5.641	0.5	9.66	DEWMA
	0.1	3.289	4.711	0.8	33.87	DEWMA
	0.05	3.599	4.401	0.9	72.96	DEWMA
	0.2	2.789	5.11	1.1	67.21	DEWMA
	0.2	2.789	5.11	1.2	31.19	DEWMA
	0.2	2.789	5.11	1.5	9.78	DEWMA
$\mu_0 = 8$ $\rho_0 = 0.25$ $n = 20$	0.3	5.109	10.891	0.5	4.71	EWMA
	0.05	7.039	8.961	0.8	18.01	EWMA
	0.05	7.509	8.491	0.9	43.73	DEWMA
	0.05	7.509	8.491	1.1	44.14	DEWMA
	0.1	6.495	9.505	1.2	17.86	EWMA
	0.3	5.109	10.891	1.5	4.79	EWMA
$\mu_0 = 12$ $\rho_0 = 0.25$ $n = 20$	0.3	9.107	14.893	0.5	2.86	EWMA
	0.2	9.713	14.287	0.8	10.3	EWMA
	0.05	11.038	12.962	0.9	26.11	EWMA
	0.05	11.038	12.962	1.1	26.21	EWMA
	0.3	9.986	14.014	1.2	10.19	DEWMA
	0.3	9.107	14.893	1.5	2.76	EWMA

Πίνακας 3.14: Προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα,
μεταβολή μόνο στην παράμετρο μ_0 , $\rho_0 = 0.50$, $n = 20$

Παράμετροι Διεργασίας	λ	LCL	UCL	δ	$ssARL$	Διάγραμμα
$\mu_0 = 4$ $\rho_0 = 0.50$ $n = 20$	0.1	2.479	5.521	0.5	14.53	EWMA
	0.05	3.467	4.533	0.8	47.86	DEWMA
	0.05	3.467	4.533	0.9	96.53	DEWMA
	0.05	3.467	4.533	1.1	97.08	DEWMA
	0.05	3.007	4.993	1.2	48.61	EWMA
	0.1	2.479	5.521	1.5	15.01	EWMA
$\mu_0 = 8$ $\rho_0 = 0.50$ $n = 20$	0.2	5.255	10.745	0.5	7.21	EWMA
	0.05	6.78	9.22	0.8	26.27	EWMA
	0.05	7.346	8.654	0.9	60.36	EWMA
	0.05	7.346	8.654	1.1	60.83	EWMA
	0.05	6.78	9.22	1.2	26.3	EWMA
	0.3	4.617	11.383	1.5	7.36	EWMA
$\mu_0 = 12$ $\rho_0 = 0.50$ $n = 20$	0.3	8.618	15.382	0.5	4.23	EWMA
	0.1	10.131	13.869	0.8	15.4	DEWMA
	0.05	10.779	13.221	0.9	38.26	DEWMA
	0.05	10.779	13.221	1.1	38.53	EWMA
	0.1	10.131	13.869	1.2	15.23	EWMA
	0.3	8.618	15.382	1.5	4.06	EWMA

Πίνακας 3.15: Προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα,
μεταβολή μόνο στην παράμετρο μ_0 , $\rho_0 = 0.75$, $n = 20$

Παράμετροι Διεργασίας	λ	LCL	UCL	δ	$ssARL$	Διάγραμμα
$\mu_0 = 4$ $\rho_0 = 0.75$ $n = 20$	0.05	2.652	5.348	0.5	25	EWMA
	0.05	3.213	4.787	0.8	73.67	DEWMA
	0.05	3.213	4.787	0.9	128.09	DEWMA
	0.3	0.806	7.194	1.1	125.91	EWMA
	0.05	2.652	5.348	1.2	76.78	EWMA
	0.1	2.028	5.972	1.5	26.33	EWMA
$\mu_0 = 8$ $\rho_0 = 0.75$ $n = 20$	0.2	4.628	11.372	0.5	13.47	EWMA
	0.05	6.338	9.662	0.8	45.15	EWMA
	0.05	7.031	8.969	0.9	91.4	DEWMA
	0.05	7.031	8.969	1.1	91.02	DEWMA
	0.05	6.338	9.662	1.2	45.58	EWMA
	0.2	4.628	11.372	1.5	13.61	EWMA
$\mu_0 = 12$ $\rho_0 = 0.75$ $n = 20$	0.3	8.058	15.942	0.5	7.65	EWMA
	0.05	10.34	13.66	0.8	27.33	EWMA
	0.05	11.03	12.97	0.9	62.71	DEWMA
	0.05	11.03	12.97	1.1	61.88	DEWMA
	0.05	10.34	13.66	1.2	26.74	EWMA
	0.3	8.058	15.942	1.5	7.3	EWMA

Πίνακας 3.16: Προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα,
μεταβολή μόνο στην παράμετρο μ_0 , $\rho_0 = 0.25$, $n = 50$

Παράμετροι Διεργασίας	λ	<i>LCL</i>	<i>UCL</i>	δ	<i>ssARL</i>	Διάγραμμα
$\mu_0 = 4$ $\rho_0 = 0.25$ $n = 50$	0.2	2.704	5.296	0.5	10.6	DEWMA
	0.05	3.571	4.429	0.8	37.12	DEWMA
	0.05	3.571	4.429	0.9	77.97	DEWMA
	0.05	3.571	4.429	1.1	78.9	DEWMA
	0.05	3.158	4.842	1.2	36.73	EWMA
	0.2	1.997	6.003	1.5	10.94	EWMA
$\mu_0 = 8$ $\rho_0 = 0.25$ $n = 50$	0.2	5.286	10.714	0.5	6.06	EWMA
	0.05	6.861	9.139	0.8	22.26	EWMA
	0.05	7.42	8.58	0.9	52.12	DEWMA
	0.05	7.42	8.58	1.1	53.08	DEWMA
	0.05	6.861	9.139	1.2	22.67	EWMA
	0.3	4.554	11.446	1.5	6.22	EWMA
$\mu_0 = 12$ $\rho_0 = 0.25$ $n = 50$	0.3	7.994	16.006	0.5	4.16	EWMA
	0.1	9.926	14.074	0.8	16.08	EWMA
	0.05	11.324	12.676	0.9	39.76	DEWMA
	0.05	10.672	13.328	1.1	39.2	EWMA
	0.1	9.926	14.074	1.2	16	EWMA
	0.3	7.994	16.006	1.5	4.35	EWMA

Πίνακας 3.17: Προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα,
μεταβολή μόνο στην παράμετρο μ_0 , $\rho_0 = 0.50$, $n = 50$

Παράμετροι Διεργασίας	λ	LCL	UCL	δ	$ssARL$	Διάγραμμα
$\mu_0 = 4$ $\rho_0 = 0.50$ $n = 50$	0.05	2.937	5.063	0.5	16.04	EWMA
	0.05	3.429	4.571	0.8	50.32	DEWMA
	0.05	3.429	4.571	0.9	101.76	DEWMA
	0.3	1.038	6.962	1.1	101.73	EWMA
	0.05	2.937	5.063	1.2	51.94	EWMA
$\mu_0 = 8$ $\rho_0 = 0.50$ $n = 50$	0.2	1.595	6.405	1.5	16.43	EWMA
	0.3	5.019	10.981	0.5	9.26	DEWMA
	0.05	6.556	9.444	0.8	32.72	EWMA
	0.05	7.228	8.772	0.9	70.84	DEWMA
	0.05	7.228	8.772	1.1	72.94	DEWMA
$\mu_0 = 12$ $\rho_0 = 0.50$ $n = 50$	0.05	6.556	9.444	1.2	32.94	EWMA
	0.2	4.744	11.256	1.5	9.56	EWMA
	0.3	7.322	16.678	0.5	6.39	EWMA
	0.05	10.319	13.681	0.8	23.42	EWMA
	0.05	11.101	12.899	0.9	55.01	EWMA
$\mu_0 = 12$ $\rho_0 = 0.50$ $n = 50$	0.05	11.101	12.899	1.1	55.89	DEWMA
	0.05	10.319	13.681	1.2	23.88	DEWMA
	0.3	7.322	16.678	1.5	6.6	EWMA

Πίνακας 3.18: Προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα,
μεταβολή μόνο στην παράμετρο μ_0 , $\rho_0 = 0.75$, $n = 50$

Παράμετροι Διεργασίας	λ	LCL	UCL	δ	$ssARL$	Διάγραμμα
$\mu_0 = 4$ $\rho_0 = 0.75$ $n = 50$	0.05	2.558	5.442	0.5	27.3	EWMA
	0.05	3.157	4.843	0.8	78.91	DEWMA
	0.05	3.157	4.843	0.9	132.77	DEWMA
	0.3	0.574	7.426	1.1	122.61	EWMA
	0.3	0.574	7.426	1.2	77.96	EWMA
$\mu_0 = 8$ $\rho_0 = 0.75$ $n = 50$	0.3	0.574	7.426	1.5	28.19	EWMA
	0.1	5.122	10.878	0.5	16.55	EWMA
	0.05	6.859	9.141	0.8	53.67	DEWMA
	0.05	6.859	9.141	0.9	104.54	DEWMA
	0.05	6.859	9.141	1.1	104.86	DEWMA
$\mu_0 = 12$ $\rho_0 = 0.75$ $n = 50$	0.05	6.042	9.958	1.2	55.21	EWMA
	0.2	4.028	11.972	1.5	17.45	EWMA
	0.2	7.348	16.652	0.5	11.82	EWMA
	0.05	9.715	14.285	0.8	40.41	EWMA
	0.05	10.667	13.333	0.9	84.16	DEWMA
$\mu_0 = 12$ $\rho_0 = 0.75$ $n = 50$	0.05	10.667	13.333	1.1	86.13	DEWMA
	0.05	9.715	14.285	1.2	40.99	EWMA
	0.3	6.532	17.468	1.5	12.27	EWMA

Πίνακας 3.19: Προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα,
μεταβολή μόνο στην παράμετρο ρ_0 , $\rho_0 = 0.25$, $n = 20$

Παράμετροι Διεργασίας	λ	<i>LCL</i>	<i>UCL</i>	τ	<i>ssARL</i>	Διάγραμμα
$\mu_0 = 4$	0.2	2.789	5.11	0.15	85.4	DEWMA
$\rho_0 = 0.25$	0.2	2.789	5.11	0.35	45.05	DEWMA
$n = 20$	0.2	2.789	5.11	-0.1	246.08	DEWMA
$\mu_0 = 8$	0.3	5.988	10.012	0.15	96	DEWMA
$\rho_0 = 0.25$	0.3	5.988	10.012	0.35	48.38	DEWMA
$n = 20$	0.05	7.509	8.491	-0.1	249.25	DEWMA
$\mu_0 = 12$	0.3	9.986	14.014	0.15	95.97	DEWMA
$\rho_0 = 0.25$	0.3	9.986	14.014	0.35	47.92	DEWMA
$n = 20$	0.05	11.51	12.49	-0.1	240.59	DEWMA
$\mu_0 = 4$	0.2	2.446	5.554	0.15	92.79	DEWMA
$\rho_0 = 0.50$	0.2	2.446	5.554	0.35	45.71	DEWMA
$n = 20$	0.05	3.467	4.533	-0.1	259.95	DEWMA
$\mu_0 = 8$	0.2	6.09	9.91	0.15	92.24	DEWMA
$\rho_0 = 0.50$	0.2	6.09	9.91	0.35	45.77	DEWMA
$n = 20$	0.05	7.346	8.654	-0.1	258.58	DEWMA
$\mu_0 = 12$	0.2	10.09	13.91	0.15	92.49	DEWMA
$\rho_0 = 0.50$	0.2	10.09	13.91	0.35	46.25	DEWMA
$n = 20$	0.05	11.346	12.654	-0.1	259.63	DEWMA
$\mu_0 = 4$	0.1	2.659	5.341	0.1	99.77	DEWMA
$\rho_0 = 0.75$	0.05	3.213	4.787	0.2	64	DEWMA
$n = 20$	0.3	0.806	7.194	-0.25	541.67	EWMA
$\mu_0 = 8$	0.1	6.347	9.653	0.1	100.02	DEWMA
$\rho_0 = 0.75$	0.05	7.031	8.969	0.2	63.38	DEWMA
$n = 20$	0.3	4.06	11.94	-0.25	684.11	EWMA
$\mu_0 = 12$	0.1	10.347	13.653	0.1	102.33	DEWMA
$\rho_0 = 0.75$	0.05	11.03	12.97	0.2	64.79	DEWMA
$n = 20$	0.3	8.058	15.942	-0.25	711.77	EWMA

Πίνακας 3.20: Προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα,
μεταβολή μόνο στην παράμετρο ρ_0 , $\mu_0, \rho_0 = 0.25, n = 50$

Παράμετροι Διεργασίας	λ	LCL	UCL	τ	$ssARL$	Διάγραμμα
$\mu_0 = 4$	0.3	2.24	5.76	0.15	99.26	DEWMA
$\rho_0 = 0.25$	0.3	2.24	5.76	0.35	49.58	DEWMA
$n = 50$	0.05	3.571	4.429	-0.1	244.21	DEWMA
$\mu_0 = 8$	0.3	5.618	10.382	0.15	97.85	DEWMA
$\rho_0 = 0.25$	0.2	6.244	9.756	0.35	49.17	DEWMA
$n = 50$	0.05	7.42	8.58	-0.1	239.72	DEWMA
$\mu_0 = 12$	0.3	9.223	14.777	0.15	97.61	DEWMA
$\rho_0 = 0.25$	0.3	9.223	14.777	0.35	49.07	DEWMA
$n = 50$	0.05	11.324	12.676	-0.1	247.42	DEWMA
$\mu_0 = 4$	0.2	2.338	5.662	0.15	94.46	DEWMA
$\rho_0 = 0.50$	0.2	2.338	5.662	0.35	46.75	DEWMA
$n = 50$	0.05	3.429	4.571	-0.1	263.65	DEWMA
$\mu_0 = 8$	0.2	5.742	10.258	0.15	94.63	DEWMA
$\rho_0 = 0.50$	0.2	5.742	10.258	0.35	46.29	DEWMA
$n = 50$	0.05	7.228	8.772	-0.1	231.94	DEWMA
$\mu_0 = 12$	0.2	9.367	14.633	0.15	92.1	DEWMA
$\rho_0 = 0.50$	0.2	9.367	14.633	0.35	46.16	DEWMA
$n = 50$	0.05	11.101	12.899	-0.1	258.34	DEWMA
$\mu_0 = 4$	0.1	2.568	5.432	0.1	100.45	DEWMA
$\rho_0 = 0.75$	0.05	2.937	5.063	0.2	49.59	EWMA
$n = 50$	0.3	1.038	6.962	-0.25	272.93	EWMA
$\mu_0 = 8$	0.1	5.793	10.207	0.1	98.08	EWMA
$\rho_0 = 0.75$	0.05	6.556	9.444	0.2	49.61	EWMA
$n = 50$	0.3	3.995	12.005	-0.25	303.14	EWMA
$\mu_0 = 12$	0.1	9.421	14.579	0.1	99.96	EWMA
$\rho_0 = 0.75$	0.05	10.319	13.681	0.2	50.14	EWMA
$n = 50$	0.3	7.322	16.678	-0.25	308.65	EWMA

Πίνακας 3.21: Προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα,
ταυτόχρονη μεταβολή των παραμέτρων $\mu_0, \rho_0, \mu_0, \rho_0 = 0.25, n = 20$

Παράμετροι Διεργασίας	λ	LCL	UCL	δ, τ	$ssARL$	Διάγραμμα
$\mu_0=4$	0.2	2.789	5.11	(0.8,0.35)	28.87	DEWMA
$\rho_0=0.25$	0.2	2.789	5.11	(1.2,0.35)	26.07	DEWMA
$n=20$	0.1	3.289	4.711	(0.8,-0.10)	34.15	DEWMA
	0.2	2.789	5.11	(1.2,-0.10)	32.48	DEWMA
$\mu_0=8$	0.1	6.495	9.505	(0.8,0.35)	18.97	EWMA
$\rho_0=0.25$	0.3	5.988	10.012	(1.2,0.35)	18.85	DEWMA
$n=20$	0.05	7.039	8.961	(0.8,-0.10)	17.68	EWMA
	0.05	7.039	8.961	(1.2,-0.10)	17.86	EWMA
$\mu_0=12$	0.3	9.986	14.014	(0.8,0.35)	11.91	DEWMA
$\rho_0=0.25$	0.3	9.986	14.014	(1.2,0.35)	11.88	DEWMA
$n=20$	0.3	9.986	14.014	(0.8,-0.10)	10.02	DEWMA
	0.1	10.494	13.506	(1.2,-0.10)	9.9	EWMA
$\mu_0=4$	0.1	3.065	4.935	(0.8,0.35)	37.43	DEWMA
$\rho_0=0.50$	0.2	2.446	5.554	(1.2,0.35)	36.49	DEWMA
$n=20$	0.05	3.467	4.533	(0.8,-0.10)	46.92	DEWMA
	0.05	3.467	4.533	(1.2,-0.10)	49.78	DEWMA
$\mu_0=8$	0.2	6.09	9.91	(0.8,0.35)	29.3	DEWMA
$\rho_0=0.50$	0.2	6.09	9.91	(1.2,0.35)	28.86	DEWMA
$n=20$	0.05	6.78	9.22	(0.8,-0.10)	26.07	EWMA
	0.05	6.78	9.22	(1.2,-0.10)	25.96	EWMA
$\mu_0=12$	0.2	10.09	13.91	(0.8,0.35)	21.86	DEWMA
$\rho_0=0.50$	0.2	10.09	13.91	(1.2,0.35)	21.02	DEWMA
$n=20$	0.1	10.131	13.869	(0.8,-0.10)	14.87	EWMA
	0.1	10.131	13.869	(1.2,-0.10)	14.65	EWMA
$\mu_0=4$	0.05	3.213	4.787	(0.8,0.20)	58.02	DEWMA
$\rho_0=0.75$	0.1	2.659	5.341	(1.2,0.20)	58.91	DEWMA
$n=20$	0.05	3.213	4.787	(0.8,-0.25)	81.88	DEWMA
	0.05	3.213	4.787	(1.2,-0.25)	83.84	DEWMA
$\mu_0=8$	0.05	7.031	8.969	(0.8,0.20)	51.41	DEWMA
$\rho_0=0.75$	0.1	6.347	9.653	(1.2,0.20)	51.76	DEWMA
$n=20$	0.05	7.031	8.969	(0.8,-0.25)	42.44	DEWMA
	0.05	7.031	8.969	(1.2,-0.25)	43.36	DEWMA
$\mu_0=12$	0.1	10.347	13.653	(0.8,0.20)	42.74	DEWMA
$\rho_0=0.75$	0.1	10.347	13.653	(1.2,0.20)	41.9	DEWMA
$n=20$	0.05	10.34	13.66	(0.8,-0.25)	23.97	EWMA
	0.05	10.34	13.66	(1.2,-0.25)	23.57	EWMA

Πίνακας 3.22: Προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα,
ταυτόχρονη μεταβολή των παραμέτρων $\mu_0, \rho_0, \mu_0, \rho_0 = 0.25, n = 50$

Παράμετροι Διεργασίας	λ	LCL	UCL	δ, τ	$ssARL$	Διάγραμμα
$\mu_0=4$ $\rho_0=0.25$ $n=50$	0.2	2.704	5.296	(0.8,0.35)	31.86	DEWMA
	0.3	2.24	5.76	(1.2,0.35)	30.13	DEWMA
	0.05	3.571	4.429	(0.8,-0.10)	36.71	DEWMA
	0.05	3.158	4.842	(1.2,-0.10)	37.28	EWMA
$\mu_0=8$ $\rho_0=0.25$ $n=50$	0.2	6.244	9.756	(0.8,0.35)	22.44	DEWMA
	0.3	5.618	10.382	(1.2,0.35)	22.49	DEWMA
	0.1	6.968	9.032	(0.8,-0.10)	22.03	DEWMA
	0.05	6.861	9.139	(1.2,-0.10)	22.48	EWMA
$\mu_0=12$ $\rho_0=0.25$ $n=50$	0.2	9.954	14.046	(0.8,0.35)	17.16	DEWMA
	0.3	9.223	14.777	(1.2,0.35)	17.24	DEWMA
	0.1	9.926	14.074	(0.8,-0.10)	15.88	EWMA
	0.1	9.926	14.074	(1.2,-0.10)	15.7	EWMA
$\mu_0=4$ $\rho_0=0.50$ $n=50$	0.1	2.998	5.002	(0.8,0.35)	38.63	DEWMA
	0.2	2.338	5.662	(1.2,0.35)	38.04	DEWMA
	0.05	3.429	4.571	(0.8,-0.10)	50.61	DEWMA
	0.05	2.937	5.063	(1.2,-0.10)	54.17	EWMA
$\mu_0=8$ $\rho_0=0.50$ $n=50$	0.2	5.742	10.258	(0.8,0.35)	33.04	DEWMA
	0.2	5.742	10.258	(1.2,0.35)	32.57	DEWMA
	0.05	6.556	9.444	(0.8,-0.10)	32.48	EWMA
	0.05	6.556	9.444	(1.2,-0.10)	32.87	EWMA
$\mu_0=12$ $\rho_0=0.50$ $n=50$	0.2	9.367	14.633	(0.8,0.35)	27.66	DEWMA
	0.2	9.367	14.633	(1.2,0.35)	27.5	DEWMA
	0.05	6.556	9.444	(0.8,-0.10)	23.03	EWMA
	0.05	6.556	9.444	(1.2,-0.10)	23.62	EWMA
$\mu_0=4$ $\rho_0=0.75$ $n=50$	0.2	1.096	6.904	(0.8,0.20)	50.03	EWMA
	0.2	1.096	6.904	(1.2,0.20)	40.73	EWMA
	0.2	1.096	6.904	(0.8,-0.25)	61.49	EWMA
	0.2	1.096	6.904	(1.2,-0.25)	36.57	EWMA
$\mu_0=8$ $\rho_0=0.75$ $n=50$	0.05	6.859	9.141	(0.8,0.20)	54.66	DEWMA
	0.05	6.859	9.141	(1.2,0.20)	54.95	DEWMA
	0.05	6.859	9.141	(0.8,-0.25)	50.65	DEWMA
	0.05	6.859	9.141	(1.2,-0.25)	54.24	DEWMA
$\mu_0=12$ $\rho_0=0.75$ $n=50$	0.05	10.667	13.333	(0.8,0.20)	49.56	DEWMA
	0.1	9.722	14.278	(1.2,0.20)	51.03	DEWMA
	0.05	10.667	13.333	(0.8,-0.25)	37.62	DEWMA
	0.05	9.715	14.285	(1.2,-0.25)	38.83	EWMA

Από τα αποτελέσματα των Πινάκων 3.13-3.18 συμπεραίνουμε ότι το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου EWMA υπερτερεί του αντίστοιχου διαγράμματος DEWMA στην ανίχνευση μετατοπίσεων μόνο στο μ_0 , κυρίως σε μέτριες έως και μεγάλες μετατοπίσεις, είτε μειώσεις είτε αυξήσεις. Από την άλλη, το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου DEWMA υπερέρχει του αντίστοιχου διαγράμματος EWMA όταν το μ_0 είναι μικρό (π.χ. $\mu_0 = 4$) και υπάρχει μικρή μετατόπιση σε αυτό (π.χ. μείωση της τάξης του 10% ή αύξηση της τάξης του 10%). Γενικά, η προτεινόμενη τιμή λ για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου DEWMA είναι $\lambda = 0.05$, η οποία είναι μια καλή επιλογή, ειδικά αν δεν υπάρχει πρότερη γνώση ως προς τη μετατόπιση που θέλουμε να ανιχνεύσουμε. Άρα, σε πρακτικές εφαρμογές και ανάλογα με τη μετατόπιση που μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε, προτείνεται η χρήση ενός διαγράμματος ελέγχου EWMA (ή DEWMA) με $\lambda = 0.05$, διότι έχει την καλύτερη απόδοση για ένα μεγάλο εύρος μετατοπίσεων στο μ_0 .

Για την ανίχνευση μετατοπίσεων μόνο στο ρ_0 (Πίνακες 3.19-3.20), το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου DEWMA φαίνεται να υπερέρχει του αντίστοιχου διαγράμματος EWMA, σχεδόν σε όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις. Αν μας ενδιαφέρει η ανίχνευση αυξήσεων στο ρ_0 , η προτεινόμενη τιμή για το λ στο δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου DEWMA είναι 0.20 ή 0.30, ενώ για την περίπτωση μειώσεων, προτείνεται το $\lambda = 0.05$. Από την άλλη πλευρά, το διάγραμμα EWMA φαίνεται να έχει καλύτερη απόδοση μόνο όταν παρατηρείται υψηλή αυτοσυσχέτιση ($\rho_0 = 0.75$) και μεγάλο μέγεθος δείγματος ($n = 50$), με το προτεινόμενο λ να είναι 0.10 ή 0.05 (για αυξήσεις) και $\lambda = 0.30$ (για μειώσεις).

Τέλος, οι Πίνακες 3.21-3.22 δίνουν το βέλτιστο δίπλευρο διάγραμμα, όταν υπάρχει ταυτόχρονη μεταβολή και στις δύο παραμέτρους μ_0 , ρ_0 της διεργασίας. Τα αποτελέσματα της αριθμητικής ανάλυσης δείχνουν ότι το δίπλευρο διάγραμμα DEWMA υπερτερεί του αντίστοιχου διαγράμματος EWMA στις περισσότερες από τις εξεταζόμενες περιπτώσεις, ιδίως όταν υπάρχει αύξηση στο ρ_0 . Επίσης, στην περίπτωση που έχουμε ταυτόχρονη μείωση στις τιμές των μ_0 και ρ_0 , το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου DEWMA είναι αυτό που έχει την καλύτερη απόδοση. Αντίθετα, όταν έχουμε ταυτόχρονα αύξηση στο μ_0 και μείωση στο ρ_0 , τότε το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου EWMA είναι αυτό με την καλύτερη απόδοση.

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα της αριθμητικής μελέτης περί της απόδοσης του διαγράμματος ελέγχου DEWMA για διεργασίες BAR(1) προκύπτει ότι σε σύγκριση με το (σύνηθες) διάγραμμα ελέγχου EWMA, το δεύτερο έχει καλύτερη απόδοση όταν υπάρχει μετατόπιση μόνο στο μ_0 (είτε αύξηση, είτε μείωση). Η προτεινόμενη τιμή για την παράμετρο εξομάλυνσης λ , εξαρτάται από το μέγεθος της μετατόπισης. Γενικά όμως, ισχύει ο εμπειρικός

κανόνας ότι «μικρές» τιμές του λ έχουν καλύτερη απόδοση στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων. Αντίθετα, για την ανίχνευση αυξήσεων στο ρ_0 , προτείνεται το άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου DEWMA, με $\lambda = 0.10$ ή 0.20 .

Στην περίπτωση που υπάρχει ταυτόχρονη μεταβολή στις τιμές μ_0, ρ_0 των παραμέτρων της διεργασίας, δεν υπάρχει κάποια ξεκάθαρη επιλογή για την τιμή λ , αφού εξαρτάται σημαντικά από τη μετατόπιση που θέλουμε να ανιχνεύσουμε. Παρόλα αυτά, μπορούμε να προτείνουμε το διάγραμμα DEWMA για την ανίχνευση ταυτόχρονων αυξήσεων με τιμές για το λ τις 0.3 ή 0.2 . Επίσης, σε τέτοιου είδους μεταβολές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τιμή $\lambda = 0.1$ αν θέλουμε να ανιχνεύσουμε αυξήσεις μικρής τάξης στη μέση τιμή της διεργασίας. Από την άλλη πλευρά, αν μας ενδιαφέρει η ανίχνευση αυξήσεων για το ρ_0 και μειώσεων για το μ_0 προτείνουμε το διάγραμμα EWMA με τιμές $\lambda = 0.1$ ή 0.05 .

Σχετικά με την απόδοση των δίπλευρων διαγραμμάτων, προέκυψε ότι το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου DEWMA έχει την καλύτερη απόδοση στις περισσότερες από τις εξεταζόμενες περιπτώσεις μετατοπίσεων στις τιμές των παραμέτρων της διεργασίας. Από τα αποτελέσματα της αριθμητικής ανάλυσης προκύπτει ότι το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου DEWMA είναι το καλύτερο διάγραμμα όταν επιθυμούμε να ανιχνεύσουμε αυξήσεις στο ρ_0 , ανεξάρτητα της κατεύθυνσης της μεταβολής του μ_0 (δηλ. είτε έχει επέλθει αύξηση, είτε έχει επέλθει μείωση).

Τέλος, η επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων των μονόπλευρων διαγραμμάτων για διεργασίες BAR(1) (Πίνακες (3.7-3.12) και (Πίνακες A1-A8)), μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη χρήση των προγραμμάτων στην R, τα οποία είναι διαθέσιμα στο Παράρτημα Δ. Επίσης, τα αντίστοιχα προγράμματα για τα δίπλευρα διαγράμματα (Πίνακες (3.13-3.22)), δίνονται στο Παράρτημα Ε.

3.4 Ανακεφαλαίωση

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, αρχικά αναπτύχθηκαν και μελετήθηκαν μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου s -EWMA, τα οποία είναι κατάλληλα για την ανίχνευση μετατοπίσεων (αυξήσεων ή μειώσεων) του μέσου επιπέδου μία BAR(1) διεργασίας. Επίσης, τα προτεινόμενα διαγράμματα βασίζονται σε στατιστικές συναρτήσεις που λαμβάνουν ακέραιες τιμές και ως εκ τούτου δύναται να υπολογιστεί η απόδοσή τους με ακρίβεια, μέσω της τεχνικής των Μαρκοβιανών αλυσίδων.

Από τα αποτελέσματα της αριθμητικής μελέτης για το διάγραμμα s -EWMA, γίνεται σαφές ότι επιτυγχάνει εντός ελέγχου επιθυμητή απόδοση αρκετά κοντά στην επιθυμητή, ενώ για

μεγάλες τιμές του s ($s = 2$ ή $s = 4$) και μικρές τιμές για το λ έχει την βέλτιστη απόδοση. Το εύρος τιμών που προτείνεται για το λ , προκειμένου να επιτευχθεί η εντός ελέγχου επιθυμητή απόδοση για το μονόπλευρο διάγραμμα s -EWMA είναι $\lambda \in (0.05, 0.25)$.

Παρόλο που τα παραδοσιακά διαγράμματα ελέγχου EWMA είναι ευαίσθητα ως προς την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στη μέση τιμή της διεργασίας, εξετάσαμε αν η χρήση πιο εξελιγμένων διαγραμμάτων EWMA έχει καλύτερη απόδοση. Συγκεκριμένα, προτάθηκαν και μελετήθηκαν διαγράμματα ελέγχου τύπου DEWMA, τα οποία είναι διαγράμματα ελέγχου με μνήμη και ορίζονται με τη μίξη διαφορετικών (ή ίδιων) διαγραμμάτων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το διάγραμμα DEWMA δεν είναι παρά η εφαρμογή διπλής εκθετικής εξομάλυνσης στα αρχικά δεδομένα και η απεικόνιση στο διάγραμμα των τιμών που προκύπτουν. Από τα αποτελέσματα μιας εκτεταμένης αριθμητική μελέτης, διαπιστώθηκε ότι τα δίπλευρα διαγράμματα DEWMA έχουν καλύτερη απόδοση σε όλες σχεδόν τις εξεταζόμενες μετατοπίσεις των παραμέτρων της BAR(1) διεργασίας. Επίσης, τα άνω μονόπλευρα διαγράμματα DEWMA είναι κατάλληλα για την ανίχνευση αυξήσεων στο ρ_0 . Ωστόσο, στην περίπτωση μεταβολών μόνο της μέσης τιμής συνιστάται το άνω (αυξήσεις) και το κάτω (μειώσεις) μονόπλευρο διάγραμμα EWMA, ενώ για την ταυτόχρονη μεταβολή των δύο παραμέτρων, το διάγραμμα που προτείνεται εξαρτάται από το είδος της μετατόπισης.

Κεφάλαιο 4

Διαγράμματα Ελέγχου για διεργασίες Beta-BAR(1)

4.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο παρουσιάστηκαν διαγράμματα ελέγχου για διεργασίες που προέρχονται από το μοντέλο BAR(1), το οποίο όπως παρατηρήθηκε, αποτελεί ένα απλό και κατανοητό μοντέλο για την περιγραφή διωνυμικών δεδομένων στα οποία υπάρχει αυτοσυσχέτιση 1^{ης} τάξης. Στο παρόν Κεφάλαιο θα αναπτυχθούν και θα μελετηθούν άνω και κάτω μονόπλευρα διαγράμματα EWMA για την παρακολούθηση διεργασιών που προέρχονται από μία επέκταση του μοντέλου BAR(1), το BBAR(1). Όπως έχει ήδη αναφέρει στο Κεφάλαιο 2, το BBAR(1) μοντέλο, μπορεί να εφαρμοστεί πιο συχνά στην πράξη καθώς στις περισσότερες εφαρμογές απαιτείται η χρήση ενός κατάλληλου μοντέλου για να περιγράψει δεδομένα που παρουσιάζουν ετερογένεια ή η μεταβλητότητά τους αποκλίνει σημαντικά από την αντίστοιχη του διωνυμικού μοντέλου.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι τα διαγράμματα ελέγχου EWMA δεν έχουν εξεταστεί έως τώρα στη βιβλιογραφία για την παρακολούθηση BBAR(1) διεργασιών. Επομένως, η διερεύνηση του στατιστικού σχεδιασμού των προτεινόμενων διαγραμμάτων καθώς και ο υπολογισμός της απόδοσής τους για την ανίχνευση αυξήσεων αλλά και μειώσεων στο μέσο επίπεδο μίας διεργασίας τύπου BBAR(1) αποτελούν τους βασικούς σκοπούς αυτού του κεφαλαίου.

Τέλος, θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα μίας εκτεταμένης αριθμητικής μελέτης σχετικά με την απόδοση των άνω και κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων EWMA, όταν οι παρατηρήσεις προέρχονται από το μοντέλο BBAR(1).

4.2 Διαγράμματα EWMA για την παρακολούθηση BBAR(1) διεργασίας

Αναφορικά με την ανάπτυξη των διαγραμμάτων s -EWMA για την παρακολούθηση διεργασιών που προέρχονται από το BBAR(1) μοντέλο, θα ακολουθηθεί παρόμοια μεθοδολογία με αυτή που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο για τις διεργασίες BAR(1). Στόχος είναι τα προτεινόμενα διαγράμματα να είναι τέτοια ώστε να μπορούν να

ανιχνεύουν έγκαιρα και έγκυρα μεταβολές του μέσου επιπέδου της διεργασίας, δηλαδή από $\mu_{0,x}$ σε $\mu_{1,x} > \mu_{0,x}$ (για αυξήσεις) και από $\mu_{0,x}$ σε $\mu_{1,x} < \mu_{0,x}$ (για μειώσεις). Επίσης, ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται είναι αντίστοιχος με αυτόν που ορίστηκε στο Κεφάλαιο 3. Ειδικότερα, στην περίπτωση εντός ελέγχου και εκτός ελέγχου διεργασιών, θα συμβολίζονται οι τιμές των παραμέτρων του μοντέλου BBAR(1) με π_0, ρ_0, ϕ_0 και π_1, ρ_1, ϕ_1 , αντίστοιχα. Σχετικά με τον τρόπο που ορίζεται το μοντέλο BBAR(1) δείτε Κεφάλαιο 2 (Ορισμός 2.7).

4.2.1 Το Διάγραμμα Ελέγχου 1-EWMA

Στην ενότητα αυτή θα περιγραφεί ο τρόπος ανάπτυξης και λειτουργίας του διαγράμματος 1-EWMA. Η διαδικασία είναι αντίστοιχη με αυτή που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 3.2, με μόνη διαφορά το ότι οι παρατηρήσεις X_t προέρχονται από μια διεργασία BBAR(1) αντί της BAR(1). Στον Πίνακα 4.1 δίνονται τα βήματα της αλγοριθμικής διαδικασίας μέσω των οποίων μπορούν να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων λ, UCL_1 του άνω μονόπλευρου διαγράμματος 1-EWMA για διεργασίες BBAR(1) (δείτε επίσης Anastasopoulou and Rakitzis (2022a), Weiß (2011)). Αντίστοιχα είναι τα βήματα για την περίπτωση του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος 1-EWMA και για λόγους οικονομίας χώρου δεν παρουσιάζονται αναλυτικά.

Πίνακας 4.1: Διαδικασία Ανάπτυξης Άνω Μονόπλευρου Διαγράμματος Ελέγχου 1-EWMA

Βήμα 1.	Επιλέγουμε τις εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων π_0, ρ_0, ϕ_0 της διεργασίας BBAR(1) καθώς και την επιθυμητή τιμή ARL_0 για το $zsARL$.
Βήμα 2.	Επιλέγουμε μία αρχική ακέραιη τιμή UCL_1 για το άνω όριο ελέγχου, με $UCL_1 \geq \mu_{0,x}$, έτσι ώστε το αντίστοιχο άνω μονόπλευρο διάγραμμα Shewhart (περίπτωση $\lambda = 1$) να έχει $zsARL < ARL_0$.
Βήμα 3.	Μειώνουμε την τιμή λ (με βήμα 0.01) έτσι ώστε το $zsARL$ να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στην τιμή ARL_0 και με τον τρόπο αυτό προσδιορίζεται το ζεύγος τιμών (λ, UCL_1) . Η διαδικασία συνεχίζεται μειώνοντας περαιτέρω, με βήμα 1, την αρχική τιμή του $UCL_1 > \mu_{0,x}$ (δείτε Βήμα 2) και αναζητώντας στη συνέχεια μια νέα τιμή του λ , ώστε το εντός ελέγχου $zsARL$ να είναι όσο το δυνατόν κοντά στην επιθυμητή τιμή ARL_0 .

Από την εφαρμογή των βημάτων 1-3 του Πίνακα 4.1 θα προκύψει ένα σύνολο ζευγών (λ, UCL_1) , για τα οποία η εντός ελέγχου απόδοση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος 1-

EWMA θα είναι το *δυνατόν κοντά* στην επιθυμητή. Αυτό οφείλεται στη διακριτή φύση του μοντέλου BBAR(1) όπου, όπως και στην περίπτωση του μοντέλου BAR(1), δεν επιτρέπει να επιτευχθεί ακριβώς η επιθυμητή εντός ελέγχου τιμή για το εντός ελέγχου $zsARL$. Επίσης, το ζεύγος τιμών (λ, UCL_1) που θα επιλεγεί, θα πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες που αναφέρονται στην Ενότητα 3.2 του Κεφαλαίου 3.

4.2.2 Το Διάγραμμα Ελέγχου s -EWMA

Εκτός από το διάγραμμα 1-EWMA, θα παρουσιαστούν και τα αντίστοιχα αλγοριθμικά βήματα για τον στατιστικό σχεδιασμό του s -EWMA για διεργασίες BBAR(1), τα οποία είναι παρόμοια με αυτά που προτάθηκαν στο Κεφάλαιο 3 (δείτε Ενότητα 3.2) για το μοντέλο BAR(1). Άρα, για το άνω μονόπλευρο διάγραμμα s -EWMA αρκεί να προσδιοριστούν οι τιμές (s, λ, UCL_s) μέσω των παρακάτω βημάτων (δείτε επίσης Anastasopoulou and Rakitzis (2022a), Weiß (2011)). Αντίστοιχα είναι τα βήματα για την περίπτωση του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος s -EWMA και για λόγους οικονομίας χώρου δεν παρουσιάζονται αναλυτικά.

Πίνακας 4.2: Διαδικασία Ανάπτυξης Άνω Μονόπλευρου Διαγράμματος Ελέγχου s -EWMA

Βήμα 1.	Επιλέγουμε τις εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων π_0, ρ_0, ϕ_0 για μία διεργασία BBAR(1) καθώς και την επιθυμητή τιμή ARL_0 για το εντός ελέγχου $zsARL$. Επίσης επιλέγουμε την τιμή $s \in \{2,3,4, \dots\}$.
Βήμα 2.	Επιλέγουμε ως αρχικές τιμές, τις τιμές (λ, UCL_1) που προέκυψαν κατά την αντίστοιχη διαδικασία σχεδιασμού για το άνω μονόπλευρο διάγραμμα 1-EWMA. Για το δεδομένο s , προσδιορίζεται μία αρχική τιμή UCL_s ως άνω όριο ελέγχου, με $UCL_s = \frac{u}{s} \geq \mu_{0,X}$ ώστε το αντίστοιχο άνω μονόπλευρο διάγραμμα s -EWMA να έχει $zsARL < ARL_0$. Το u είναι κατάλληλος θετικός ακέραιος.
Βήμα 3.	Για τις δεδομένες τιμές των s και UCL_s προσδιορίζεται η τιμή λ ώστε το εντός ελέγχου $zsARL$ να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στην επιθυμητή τιμή ARL_0 . Με τον τρόπο αυτό προσδιορίζεται η τριάδα τιμών (s, λ, UCL_s) . Η διαδικασία συνεχίζεται περαιτέρω μειώνοντας, με βήμα 1, την αρχική τιμή του u (δείτε Βήμα 2), υπό τον περιορισμό ότι $UCL_s > \mu_{0,X}$, και αναζητώντας στη συνέχεια μια νέα τιμή του λ ώστε η εντός ελέγχου απόδοση του διαγράμματος να είναι το δυνατόν κοντά στην επιθυμητή.

Από την εφαρμογή των βημάτων 1-3 του Πίνακα 4.2 θα προκύψει ένα σύνολο από τριάδες (s, λ, UCL_s) , για τις οποίες η εντός ελέγχου απόδοση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος s -EWMA θα είναι το *δυνατόν κοντά* στην επιθυμητή. Για την επιλογή της βέλτιστης τριάδας, κατ' αντιστοιχία με την περίπτωση του διαγράμματος 1-EWMA, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες που αναφέρονται στην Ενότητα 3.2 του Κεφαλαίου 3.

4.2.3 Αριθμητική μελέτη διαγραμμάτων s -EWMA

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα μιας εκτεταμένης αριθμητικής μελέτης σχετικά με την απόδοση των διαγραμμάτων s -EWMA κατά την παρακολούθηση διεργασιών BBAR(1).

Σχετικά με τις εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων της διεργασίας BBAR(1), επιλέχθηκαν τα εξής σενάρια:

- $\mu_0 \in \{5, 10\}$
- $\rho_0 \in \{0.25, 0.50, 0.75\}$
- $\phi_0 \in \{0, 0.025, 0.05\}$
- $n \in \{20, 50\}$

Επίσης, η επιθυμητή εντός ελέγχου τιμή του ARL είναι 370.4, ίδια με αυτή που θεωρήθηκε στην περίπτωση του BAR(1) μοντέλου στο Κεφάλαιο 3. Στην περίπτωση που η διεργασία λειτουργεί παρουσία ειδικών αιτιών μεταβλητότητας (και άρα είναι εκτός ελέγχου), θεωρείται ότι επηρεάζεται μόνο η τιμή π_0 της παραμέτρου π και μεταβάλλεται σε $\pi_1 = \delta\pi_0$, $0 < \delta \neq 1$, με $\delta \in \{1.2, 1.4\}$ (αύξηση στο π_0) ή $\delta \in \{0.8, 0.6\}$ (μείωση στο π_0). Για την παράμετρο αυτοσυσχέτισης ρ καθώς και για την παράμετρο ϕ θεωρείται ότι παραμένουν αμετάβλητες από την παρουσία ειδικών αιτιών μεταβλητότητας και άρα θα ισχύει $\rho_1 = \rho_0$ και $\phi_1 = \phi_0$.

Επομένως, ενδιαφέρει να εξεταστεί η ικανότητα των μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου s -EWMA στην ανίχνευση αλλαγών της τάξης του 20% και του 40% στο εντός ελέγχου μέσο επίπεδο της διεργασίας BBAR(1). Ουσιαστικά, πρόκειται να ανιχνευθούν οι ίδιες αλλαγές με αυτές που ορίστηκαν στην περίπτωση του BAR(1). Η ουσιαστική διαφορά είναι πως το μοντέλο BBAR(1) έχει μεγαλύτερη μεταβλητότητα έναντι του BAR(1) και, όπως θα διαπιστωθεί στη συνέχεια, το γεγονός αυτό έχει σημαντική επίδραση στην απόδοση του διαγράμματος.

Στη συνέχεια, στους Πίνακες 4.3 έως 4.6 δίνονται οι εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων ϕ_0 , μ_0 , n και ρ_0 για τις διεργασίες BBAR(1) υπό μελέτη, μαζί με τις βέλτιστες τιμές (s, λ, UCL_s) (περίπτωση άνω μονόπλευρου διαγράμματος) και (s, λ, LCL_s) (περίπτωση κάτω

μονόπλευρου διαγράμματος) για τη ανίχνευση δεδομένης μετατόπισης δ . Συγκεκριμένα, στους Πίνακες 4.3 – 4.4, παρουσιάζεται η περίπτωση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος s -EWMA, ενώ στους Πίνακες 4.5 – 4.6 δίνεται η περίπτωση του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος s -EWMA. Σημειώνεται επίσης ότι η τιμή για το UCL_s δίνεται στη μορφή u/s ενώ αντίστοιχα, το $LCL_s = l/s$. Οι τιμές των u, l δίνονται στις αντίστοιχες στήλες.

Επιπρόσθετα, η εντός ελέγχου απόδοση για κάθε διάγραμμα δίνεται στη στήλη « $zsARL$ » και η εκτός ελέγχου απόδοση (τιμές $ssARL$) για $\mu_{1,X} = \delta\mu_{0,X}$ ($\delta \in \{1.2, 1.4\}$ ή $\delta \in \{0.8, 0.6\}$) δίνεται στη στήλη « $ssARL$ ».

Πίνακας 4.3: Τιμές (s, λ, UCL_s) και απόδοση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος s -EWMA, Διεργασία BBAR(1) με $\phi_0=0.025$

Παράμετροι Εντός Ελέγχου Διεργασίας				Μετατοπίσεις	Τιμές Παραμέτρων Διαγράμματος s -EWMA				Μέτρα Απόδοσης	
ϕ_0	μ_0	n	ρ_0	δ	s	λ	u	UCL_s	$zsARL$	$ssARL$
0.025	5	15	0.25	1.2	4	0.61	37	37/4	361.06	65.50
				1.4	4	0.61	37	37/4	361.06	19.40
			0.5	1.2	1	0.60	10	10	359.41	79.24
				1.4	1	0.60	10	10	359.41	26.65
			0.75	1.2	4	0.41	37	37/4	358.18	103.64
				1.4	4	0.41	37	37/4	385.18	41.16
		30	0.25	1.2	4	0.25	33	33/4	365.14	60.07
				1.4	4	0.25	33	33/4	365.14	19.73
			0.5	1.2	2	0.31	19	19/2	372.13	88.46
				1.4	2	0.31	19	19/2	372.13	32.94
			0.75	1.2	4	0.59	45	45/4	371.75	130.84
				1.4	4	0.59	45	45/4	371.75	59.26
	10	15	0.25	1.2	4	0.80	57	57/4	366.07	25.12
				1.4	4	0.80	57	57/4	366.07	4.13
			0.5	1.2	4	0.65	56	56/4	365.26	25.26
				1.4	4	0.65	56	56/4	365.26	5.43
			0.75	1.2	4	0.41	55	55/4	372.72	37.02
				1.4	4	0.41	55	57/4	372.72	10.00
		30	0.25	1.2	4	0.58	65	65/4	370.73	41.85
				1.4	4	0.58	65	65/4	370.73	10.72
			0.5	1.2	4	0.53	66	66/4	365.93	53.27
				1.4	4	0.53	66	66/4	365.93	15.56
			0.75	1.2	4	0.60	69	69/4	373.90	78.41
				1.4	4	0.60	69	69/4	373.90	27.44

Πίνακας 4.4: Τιμές (s, λ, UCL_s) και απόδοση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος s -EWMA, Διεργασία BBAR(1) με $\phi_0=0.05$

Παράμετροι Εντός Ελέγχου Διεργασίας				Μετατοπίσεις	Τιμές Παραμέτρων Διαγράμματος s -EWMA				Μέτρα Απόδοσης	
ϕ_0	μ_0	n	ρ_0		s	λ	u	UCL_s	$zsARL$	$ssARL$
0.05	5	15	0.25	1.2	4	0.53	37	37/4	398.44	71.91
				1.4	4	0.53	37	37/4	398.44	21.34
			0.5	1.2	2	0.7	21	21/2	366.92	95.37
				1.4	2	0.7	21	21/2	366.92	34.03
			0.75	1.2	4	0.62	41	41/4	371.7	119.21
				1.4	4	0.62	41	41/4	371.7	50.74
		30	0.25	1.2	4	0.54	45	45/4	372.73	108.1
				1.4	4	0.54	45	45/4	372.73	41.04
			0.5	1.2	4	0.62	49	49/4	379.84	132.89
				1.4	4	0.62	49	49/4	379.84	57.28
			0.75	1.2	4	0.58	49	49/4	369.66	150.91
				1.4	4	0.58	49	49/4	369.66	73.96
	10	15	0.25	1.2	4	0.13	47	47/4	373.92	11.97
				1.4	2	0.15	24	24/2	377.53	4.62
			0.5	1.2	4	0.67	57	57/4	349.83	30.64
				1.4	4	0.67	57	57/4	349.83	6.47
			0.75	1.2	4	0.59	57	57/4	373.97	47.69
				1.4	4	0.59	57	57/4	373.97	12.85
		30	0.25	1.2	4	0.74	73	73/4	360.95	61.52
				1.4	4	0.74	73	73/4	360.95	16.94
			0.5	1.2	4	0.16	56	56/4	364.22	42.69
				1.4	4	0.16	56	56/4	364.22	14.7
			0.75	1.2	4	0.6	73	73/4	374.48	93.23
				1.4	4	0.6	73	73/4	374.48	34.5

Πίνακας 4.5: Τιμές (s, λ, LCL_s) και απόδοση του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος s -EWMA, Διεργασία BBAR(1) με $\phi_0 = 0.025$

Παράμετροι Εντός Ελέγχου Διεργασίας			Τιμές Παραμέτρων Διαγράμματος s -EWMA					Μέτρα Απόδοσης		
ϕ_0	μ_0	n	ρ_0	s	λ	l	LCL_s	$zsARL$	$ssARL(0.8)$	$ssARL(0.6)$
0.025	5	15	0.25	4	0.86	2	2/4	358.43	83.96	24.73
			0.5	1	0.85	0	0	352.3	94.62	31.3
			0.75	4	0.36	5	5/4	386.76	122.62	41.93
		30	0.25	4	0.74	2	2/4	373.14	90.76	26.53
			0.5	4	0.37	5	5/4	384.39	111.56	31.94
			0.75	4	0.52	2	2/4	359.15	130.9	52.6
	10	15	0.25	4	0.63	22	22/4	369.72	23.15	5.16
			0.5	1	0.9	4	4	353.08	32	8.16
			0.75	1	0.5	5	5	372.04	70.8	17.88
		30	0.25	2	0.74	7	7/2	363.02	47.85	10.64
			0.5	4	0.69	14	14/4	357.92	57.5	14.83
			0.75	2	0.54	7	7/2	363.54	80.21	24.99

Πίνακας 4.6: Τιμές (s, λ, LCL_s) και απόδοση του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος s -EWMA, Διεργασία BBAR(1) με $\phi_0 = 0.05$

Παράμετροι Εντός Ελέγχου Διεργασίας			Τιμές Παραμέτρων Διαγράμματος s -EWMA					Μέτρα Απόδοσης		
ϕ_0	μ_0	n	ρ_0	s	λ	l	LCL_s	$zsARL$	$ssARL(0.8)$	$ssARL(0.6)$
0.05	5	15	0.25	2	0.76	1	1/2	355.15	79.91	23.25
			0.5	4	0.74	2	2/4	370.84	96.32	31.25
			0.75	4	0.61	3	3/4	355.01	121.13	48.2
		30	0.25	4	0.48	4	4/4	363.11	96.54	27.21
			0.5	4	0.51	2	2/4	364.58	109.52	36.61
			0.75	4	0.38	2	2/4	362.52	138.33	56.57
	10	15	0.25	4	0.8	18	18/4	370.33	28.94	6.31
			0.5	4	0.75	18	18/4	368.05	36.39	9.17
			0.75	4	0.66	18	18/4	368.82	53.45	16.16
		30	0.25	1	0.64	3	3	378.9	40.22	12.35
			0.5	4	0.53	14	14/4	365.52	66.35	17.4
			0.75	2	0.75	5	5/2	366.02	91.16	30.87

Με βάση τα αποτελέσματα των Πινάκων 4.3 – 4.6, διαπιστώνεται ότι για τιμές του $s > 1$ (δηλαδή για $s = 2$ ή $s = 4$), η εντός ελέγχου απόδοση του διαγράμματος είναι κοντά στην επιθυμητή τιμή $ARL_0 = 370.4$. Αν και ήταν αδύνατον να επιτευχθεί ακριβώς η τιμή 370.4 λόγω της διακριτής φύσης του μοντέλου BBAR(1), ωστόσο, για όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις ο λόγος $|zsARL - ARL_0|/ARL_0$ ήταν το πολύ 5%.

Αναφορικά με τον προσδιορισμό των παραμέτρων λ και UCL_s του διαγράμματος, για δεδομένη τιμή του s , παρατηρείται ότι καθώς μειώνεται η τιμή του UCL_s , μειώνεται ταυτόχρονα και η τιμή του λ . Αντίστοιχα, για τα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα, παρατηρείται ότι καθώς αυξάνεται η τιμή LCL_s , μειώνεται η τιμή λ , προκειμένου να επιτευχθεί η επιθυμητή εντός ελέγχου απόδοση.

Επιπλέον, σημειώνεται ότι η ύπαρξη υπερμεταβλητότητας στη διεργασία, απαιτεί μεγαλύτερες τιμές για το s και μικρότερες τιμές για το λ και για τα όρια ελέγχου, προκειμένου να επιτευχθεί η επιθυμητή εντός ελέγχου απόδοση. Για παράδειγμα, στην περίπτωση των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων (Πίνακας 4.4) και συγκεκριμένα για τη διεργασία BBAR(1) $(\phi_0, \mu_0, n, \rho_0) = (0.05, 10, 15, 0.25)$, ο βέλτιστος στατιστικός σχεδιασμός του διαγράμματος s -EWMA για δεδομένη μετατόπιση $\delta = 1.2$ είναι $(s, UCL_s, \lambda) = (4, 0.13, 47/4)$. Για την αντίστοιχη περίπτωση της BAR(1) διεργασίας (Κεφάλαιο 3, Πίνακας 3.3), δηλαδή για $(\phi_0, \mu_0, n, \rho_0) = (0, 10, 15, 0.25)$, το βέλτιστο άνω μονόπλευρο διάγραμμα s -EWMA δίνεται από τις εξής παραμέτρους $(s, \lambda, UCL_s) = (4, 0.56, 53/4)$. Επομένως, λόγω της παρουσίας υπερμεταβλητότητας στη διεργασία BBAR(1), το άνω μονόπλευρο διάγραμμα s -EWMA μείωσε την τιμή του UCL_s από $53/4$ (περίπτωση BAR(1)) σε $47/4$, όπως επίσης και την τιμή λ από 0.56 σε 0.13 προκειμένου να διατηρήσει την εντός ελέγχου απόδοση το δυνατόν πιο κοντά στην επιθυμητή. Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι η μείωση στις τιμές των συγκεκριμένων παραμέτρων αύξησε την ικανότητα ανίχνευσης στο διάγραμμα $(s, \lambda, UCL_s) = (4, 0.13, 47/4)$ της BBAR(1) διεργασίας καθώς σημείωσε μικρότερες τιμές $ssARL$ (Πίνακας 4.4) για τις δεδομένες μετατοπίσεις σε σχέση με το αντίστοιχο διάγραμμα s -EWMA της BAR(1) διεργασίας (Πίνακας 3.3).

Για να αναδειχθεί περαιτέρω η σημασία που έχει η κατάλληλη προσαρμογή των παραμέτρων του διαγράμματος s -EWMA στην ικανότητα ανίχνευσης αλλαγών όταν υπάρχει υπερμεταβλητότητα, θα δοθεί άλλο ένα παράδειγμα. Όπως παρατηρείται στον Πίνακα 4.4, το βέλτιστο διάγραμμα που προέκυψε για τη διεργασία BBAR(1) όταν $(\phi_0, \mu_0, n, \rho_0) = (0.05, 10, 15, 0.5)$ είναι το $(s, \lambda, UCL_s) = (4, 0.67, 57/4)$, για το οποίο επιτυγχάνεται τιμή $zsARL = 349.83$ και για δεδομένη μετατόπιση $\delta = 1.2$ σημειώνεται τιμή $ssARL = 30.64$. Από την άλλη πλευρά, το διάγραμμα που αντιστοιχεί στη διεργασία BAR(1) $(\phi_0, \mu_0, n, \rho_0) = (0, 10, 15, 0.5)$ είναι το $(s, \lambda, UCL_s) = (4, 0.51, 54/4)$. Επίσης, λαμβάνει τιμή $zsARL = 352.91$ ενώ για την ίδια μετατόπιση επιτυγχάνει χαμηλότερη τιμή $ssARL$ και συγκεκριμένα ίση με 19.05 . Στην συγκεκριμένη περίπτωση, γίνεται αντιληπτό ότι η υπερμεταβλητότητα επηρέασε την απόδοση του διαγράμματος s -EWMA ως προς την έγκαιρη ανίχνευση μετατοπίσεων και

ενδεχομένως αυτό να μπορούσε να ερμηνευτεί από τις τιμές των παραμέτρων λ, UCL_s , οι οποίες φαίνεται να είναι μεγαλύτερες από αυτές που αντιστοιχούν στο διάγραμμα s -EWMA της BAR(1) διεργασίας.

Τέλος, η επαλήθευση των αποτελεσμάτων των μονόπλευρων διαγραμμάτων για διεργασίες BBAR(1) (Πίνακες (4.3-4.6), μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη χρήση των προγραμμάτων στην R, τα οποία είναι διαθέσιμα στο Παράρτημα ΣΤ. Συγκεκριμένα, στο Παράρτημα ΣΤ1-ΣΤ2 δίνεται το πρόγραμμα στην R στο οποίο εφαρμόζεται η μέθοδος των Μαρκοβιανών αλυσίδων για τον υπολογισμό του $zsARL$ και του $ssARL$ στο άνω μονόπλευρο μονόπλευρο διάγραμμα s -EWMA ενώ στο Παράρτημα ΣΤ3-ΣΤ4 ο υπολογισμός των παραπάνω μέτρων γίνεται με χρήση προσομοίωσης Monte Carlo. Αντίστοιχα, τα αποτελέσματα για το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα των Πινάκων 4.5-4.6 επιβεβαιώνονται από το πρόγραμμα στην R και συγκεκριμένα με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων (Παράρτημα ΣΤ5-ΣΤ6) καθώς και μέσω προσομοίωσης (Παράρτημα ΣΤ7-ΣΤ8).

4.3 Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύχθηκαν και μελετήθηκαν μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου s -EWMA, τα οποία μπορούν να ανιχνεύσουν είτε αυξήσεις είτε μειώσεις στο μέσο επίπεδο μίας BBAR(1) διεργασίας. Τα αποτελέσματα μιας εκτεταμένης αριθμητικής μελέτης σχετικά με τον στατιστικό σχεδιασμό και την απόδοση των προτεινόμενων διαγραμμάτων s -EWMA έδειξαν ότι για μεγάλες τιμές του s και μικρές τιμές για το λ μπορεί να επιτευχθεί τιμή $zsARL$ το δυνατόν κοντά στην επιθυμητή.

Επιπλέον, η αριθμητική μελέτη φανέρωσε ότι η ύπαρξη υπερμεταβλητότητας επηρεάζει την ικανότητα του διαγράμματος s -EWMA στην ανίχνευση αλλαγών στις παραμέτρους της διεργασίας καθώς επίσης και την εντός ελέγχου απόδοσή του. Συγκεκριμένα, για τιμές $\phi_0 > 0$, δηλαδή στην περίπτωση του BBAR(1) μοντέλου με εντός ελέγχου τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων να είναι μ_0, n και ρ_0 , είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθεί μικρότερη τιμή για το λ σε σχέση με αυτή που σημειώθηκε στην περίπτωση του αντίστοιχου BAR(1) μοντέλου ($\phi_0 = 0$), έτσι ώστε η εντός ελέγχου απόδοση να διατηρηθεί στο επιθυμητό επίπεδο. Επίσης, αν θεωρηθούν δύο διεργασίες BAR(1) και BBAR(1) με τις ίδιες τιμές για τις παραμέτρους π_0 και ρ_0 και συγκρίσιμες τιμές $zsARL$, τότε για μία δεδομένη μετατόπιση δ στην τιμή της παραμέτρου π_0 , η τιμή $ssARL$ που αντιστοιχεί σε μια διεργασία BBAR(1) ενδέχεται να είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη τιμή $ssARL$ η οποία υπολογίζεται υπό το μοντέλο BAR(1) για τη διεργασία.

Επομένως εξάγεται το συμπέρασμα ότι η παρουσία υπερμεταβλητότητας καθιστά αναγκαία την επιλογή του μοντέλου που είναι το καταλληλότερο για την περιγραφή τέτοιου είδους δεδομένων. Υπενθυμίζεται πως το εντός ελέγχου μέσο επίπεδο μιας BAR(1) και μιας BBAR(1) διεργασίας είναι το ίδιο ($\mu_{0,x} = n\pi_0$) και άρα είναι σημαντική η επιλογή του μοντέλου με την καλύτερη προσαρμογή (μεταξύ των BAR(1) και BBAR(1)) ώστε στη συνέχεια να επιλεγούν οι κατάλληλες τιμές των παραμέτρων του διαγράμματος s -EWMA.

Κεφάλαιο 5

Διαγράμματα Ελέγχου για διεργασίες BINARCH(1)

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό προτείνονται και μελετώνται διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση διεργασιών που προέρχονται από ένα δημοφιλές μοντέλο χρονοσειρών με ακέραιες τιμές και πεπερασμένο εύρος τιμών και το οποίο ανήκει στην οικογένεια μοντέλων INGARCH. Συγκεκριμένα, πρόκειται για το μοντέλο BINARCH(1), το οποίο μπορεί να μοντελοποιήσει διωνυμικά δεδομένα που παρουσιάζουν πρώτης τάξης συσχέτιση και παράλληλα χαρακτηρίζονται από ετερογένεια ή υπερμεταβλητότητα.

Σε προηγούμενο κεφάλαια παρουσιάστηκαν διαγράμματα ελέγχου, διαφόρων τύπων, για την παρακολούθηση διεργασιών που μοντελοποιούνται σύμφωνα με μοντέλο χρονοσειρών με ακέραιες τιμές στο σύνολο $\{1, 2, \dots, n\}$. Όμως η περίπτωση παρακολούθησης διεργασιών τύπου BINARCH(1) με χρήση διαγραμμάτων ελέγχου δεν έχει μελετηθεί μέχρι τώρα στη σχετική βιβλιογραφία. Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι η ανάπτυξη και μελέτη μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart, EWMA και CUSUM καθώς και δίπλευρων διαγραμμάτων Shewhart και EWMA για την παρακολούθηση διεργασιών BINARCH(1). Εκτός από το στατιστικό σχεδιασμό των παραπάνω διαγραμμάτων, παρουσιάζονται και αριθμητικά αποτελέσματα σχετικά με την απόδοσή τους.

5.2 Μονόπλευρα Διαγράμματα Ελέγχου για Διεργασίες BINARCH(1)

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες των εξεταζόμενων μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση BINARCH(1) διεργασιών. Στόχος είναι να ανιχνεύεται γρήγορα και με ακρίβεια μια μεταβολή στο μέσο επίπεδο της συγκεκριμένης διαδικασίας. Για τον λόγο αυτό θα αναπτυχθούν και θα μελετηθούν αρχικά άνω και κάτω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και s -EWMA, για τα οποία θα δοθεί ο στατιστικός σχεδιασμός τους, τα αποτελέσματα μιας αριθμητικής μελέτης σχετικά με την απόδοσή τους καθώς και αριθμητικές συγκρίσεις. Επιπλέον, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα

αντίστοιχης αριθμητικής μελέτης σχετικά με τα μονόπλευρα διαγράμματα CUSUM και προτείνεται το διάγραμμα με την καλύτερη απόδοση για διάφορες μετατοπίσεις στο μέσο επίπεδο της διεργασίας.

5.2.1 Μονόπλευρα Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart για Διεργασίες BINARCH(1)

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart είναι τα συνήθη και πιο συχνά χρησιμοποιούμενα διαγράμματα για την παρακολούθηση μιας διεργασίας. Έστω ένα άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανίχνευση αλλαγών στο μέσο επίπεδο $\mu_{0,X}$ της διεργασίας. Η λειτουργία του είναι η εξής: Έστω ότι τιμές X_1, X_2, \dots από μια διεργασία BINARCH(1) απεικονίζονται σε αυτό και έστω επίσης UCL_{SH} να είναι το άνω όριο ελέγχου του διαγράμματος. Το διάγραμμα δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας ακριβώς στην t -οστη παρατήρηση αν $X_t \geq UCL_{SH}$.

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται και το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart. Προφανώς είναι κατάλληλο για να ανιχνεύσει μειώσεις στο μέσο επίπεδο $\mu_{0,X}$ της διεργασίας. Αν συμβολίσουμε με LCL_{SH} το κάτω όριο του διαγράμματος, τότε το διάγραμμα δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας ακριβώς στην t -οστη παρατήρηση αν $X_t \leq LCL_{SH}$.

5.2.2 Μονόπλευρα Διαγράμματα Ελέγχου EWMA για διεργασίες BINARCH(1)

Σε προηγούμενα κεφάλαια παρουσιάστηκε ο τρόπος λειτουργίας και οι ιδιότητες διαγραμμάτων ελέγχου τύπου EWMA, τα 1-EWMA και s -EWMA, για την παρακολούθηση διεργασιών τύπου BAR(1) (Κεφάλαιο 3) και BBAR(1) (Κεφάλαιο 4). Στη συνέχεια θα εξεταστούν τα ίδια διαγράμματα αλλά για την περίπτωση διεργασιών τύπου BINARCH(1).

Βασικός στόχος είναι τα προτεινόμενα διαγράμματα να είναι τέτοια ώστε να μπορούν να ανιχνεύουν έγκαιρα και έγκυρα μεταβολές στο μέσο επίπεδο της διεργασίας, δηλαδή από $\mu_{0,X}$ σε $\mu_{1,X} > \mu_{0,X}$ (για αυξήσεις) και από $\mu_{0,X}$ σε $\mu_{1,X} < \mu_{0,X}$ (για μειώσεις). Ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται είναι αντίστοιχος με αυτόν που ορίστηκε στο Κεφάλαιο 3. Ειδικότερα, στην περίπτωση εντός ελέγχου και εκτός ελέγχου διεργασιών, θα συμβολίζονται οι τιμές των παραμέτρων του μοντέλου BINARCH(1) με a_{00}, a_{01} και a_{10}, a_{11} , αντίστοιχα. Στο σημείο αυτό υπενθυμίζεται ότι το μοντέλο BINARCH(1) ορίζεται ως εξής:

Έστω μια χρονοσειρά $X_t, t \geq 1$, με ακέραιες τιμές και πεπερασμένο εύρος τιμών, τέτοια ώστε

$$X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots \sim \mathcal{B}(n, \alpha_t),$$

όπου $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_t = a_0 + (a_1/n)X_{t-1}$, με $a_0 > 0$, $a_1 \geq 0$ και $a_0 + a_1 < 1$. Αυτό σημαίνει ότι οι παράμετροι a_0 και a_1 είναι μη αρνητικοί αριθμοί μικρότεροι του 1 και το άθροισμά τους είναι αυστηρά μικρότερο του 1. Επιπλέον, για οποιαδήποτε δεδομένη τιμή του a_0 σε αυτό το

εύρος, το a_1 μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ 0 και $(1 - a_0)$. Με άλλα λόγια, το σύνολο των δυνατών τιμών για (a_0, a_1) είναι η περιοχή που ορίζεται από τον άξονα x , τον άξονα y και την ευθεία $a_1 = 1 - a_0$ στο διδιάστατο επίπεδο. Η περιοχή αυτή είναι ένα τρίγωνο με κορυφές στα $(0,0)$, $(1,0)$ και $(0,1)$ χωρίς να περιλαμβάνει την ευθεία $a_0 + a_1 = 1$. Επίσης, με $\mathcal{B}(n, \alpha_t)$ συμβολίζεται η διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και α_t . Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με το μοντέλο BINARCH(1), δείτε Ενότητα 2.7.

5.2.2.1 Το Διάγραμμα Ελέγχου 1-EWMA

Αναφορικά με τη διαδικασία που θα ακολουθηθεί για την περιγραφή του τρόπου ανάπτυξης και λειτουργίας του διαγράμματος 1-EWMA είναι αντίστοιχη με αυτή που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 3.2. Η διαφορά είναι ότι οι παρατηρήσεις X_t προέρχονται από μια διεργασία BINARCH(1) αντί της BAR(1).

Στον Πίνακα 5.1 δίνονται τα βήματα της αλγοριθμικής διαδικασίας για τον υπολογισμό των τιμών των παραμέτρων λ , UCL_1 του άνω μονόπλευρου διαγράμματος 1-EWMA για διεργασίες BINARCH(1) (δείτε επίσης Anastasopoulou and Rakitzis (2022a), Anastasopoulou and Rakitzis (2022b), Anastasopoulou and Rakitzis (2022c), Weiß (2011)). Με ανάλογο τρόπο, αφού γίνουν πρώτα κάποιες απαραίτητες τροποποιήσεις, είναι δυνατός ο υπολογισμός των τιμών των παραμέτρων λ , LCL_1 του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος 1-EWMA. Για λόγους οικονομίας χώρου δεν παρουσιάζονται αναλυτικά τα σχετικά βήματα.

Πίνακας 5.1: Διαδικασία Ανάπτυξης Άνω Μονόπλευρου Διαγράμματος Ελέγχου 1-EWMA

Βήμα 1.	Επιλέγουμε τις εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων a_{00}, a_{01} της διεργασίας BINARCH(1), το μέγεθος δείγματος n καθώς και την επιθυμητή τιμή ARL_0 για το $zsARL$.
Βήμα 2.	Επιλέγουμε μία αρχική τιμή UCL_1 ως άνω όριο ελέγχου του διαγράμματος, με $UCL_1 \geq \mu_{0,X}$, έτσι ώστε το αντίστοιχο άνω μονόπλευρο διάγραμμα Shewhart (περίπτωση $\lambda = 1$) να έχει $zsARL < ARL_0$.
Βήμα 3.	Μειώνουμε την τιμή λ (με βήμα 0.01) έτσι ώστε το $zsARL$ να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στην τιμή ARL_0 και με τον τρόπο αυτό προσδιορίζεται το ζεύγος τιμών (λ, UCL_1) . Η διαδικασία συνεχίζεται μειώνοντας περαιτέρω, με βήμα 1, την αρχική τιμή του $UCL_1 > \mu_{0,X}$ (δείτε Βήμα 2) και αναζητώντας στη συνέχεια μια νέα τιμή του λ , ώστε το εντός ελέγχου $zsARL$ να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στην επιθυμητή τιμή ARL_0 .

Αφού εφαρμοστούν τα βήματα 1-3 του Πίνακα 5.1 θα προκύψει ένα σύνολο ζευγών (λ, UCL_1) , για τα οποία η εντός ελέγχου απόδοση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος 1-EWMA θα είναι το *δυνατόν κοντά* στην επιθυμητή. Το ότι δεν μπορεί να επιτευχθεί ακριβώς η επιθυμητή τιμή για το $zsARL$, οφείλεται στη διακριτή φύση του μοντέλου BINARCH(1) (όπως και στην περίπτωση των μοντέλων BAR(1) και BBAR(1)). Ταυτόχρονα, το ζεύγος τιμών (λ, UCL_1) που θα επιλεγεί, θα πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες (i) και (ii) που αναφέρονται στην Ενότητα 3.2 του Κεφαλαίου 3.

5.2.2.2 Το Διάγραμμα Ελέγχου s -EWMA

Στην παρούσα ενότητα, παρουσιάζονται τα αντίστοιχα αλγοριθμικά βήματα για τον στατιστικό σχεδιασμό του διαγράμματος s -EWMA για διεργασίες BINARCH(1). Η συγκεκριμένη αλγοριθμική διαδικασία είναι αντίστοιχη με αυτή που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3 (Πίνακας 3.2) για την περίπτωση διεργασιών τύπου BAR(1) καθώς και με την αντίστοιχη μεθοδολογία που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 4 (Πίνακας 4.2) για την περίπτωση διεργασιών τύπου BBAR(1).

Επομένως, για το άνω μονόπλευρο διάγραμμα s -EWMA αρκεί να προσδιοριστούν οι τιμές (s, λ, UCL_s) . Η σχετική διαδικασία περιγράφεται παρακάτω (δείτε επίσης Anastasopoulou and Rakitzis (2022a), Anastasopoulou and Rakitzis (2022b), Anastasopoulou and Rakitzis (2022c), Weiß (2011)). Αντίστοιχα είναι τα βήματα για την περίπτωση του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος s -EWMA, μετά από κάποιες απαραίτητες τροποποιήσεις. Για λόγους οικονομίας χώρου δεν παρουσιάζονται αναλυτικά.

Πίνακας 5.2: Διαδικασία Ανάπτυξης Άνω Μονόπλευρου Διαγράμματος Ελέγχου s -EWMA

Βήμα 1.	Επιλέγουμε τις εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων a_{00}, a_{01} για μία διεργασία BINARCH(1), το μέγεθος δείγματος n καθώς και την επιθυμητή τιμή ARL_0 για το εντός ελέγχου $zsARL$. Επίσης επιλέγουμε την τιμή $s \in \{2,3,4, \dots\}$.
Βήμα 2.	Επιλέγουμε ως αρχικές τιμές, τις τιμές (λ, UCL_1) που προέκυψαν κατά την αντίστοιχη διαδικασία σχεδιασμού για το άνω μονόπλευρο διάγραμμα 1-EWMA. Για το δεδομένο s , προσδιορίζεται μία αρχική τιμή UCL_s για το άνω όριο ελέγχου του διαγράμματος, με $UCL_s = \frac{u}{s} \geq \mu_{0,X}$, έτσι ώστε το αντίστοιχο άνω μονόπλευρο διάγραμμα s -EWMA να έχει $zsARL < ARL_0$. Το u είναι ένας κατάλληλος θετικός ακέραιος.
Βήμα 3.	Για τις δεδομένες τιμές των s και UCL_s προσδιορίζεται η τιμή λ (με βήμα 0.01) ώστε το εντός ελέγχου $zsARL$ να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στην επιθυμητή τιμή ARL_0 . Με τον τρόπο αυτό προσδιορίζεται η τριάδα τιμών (s, λ, UCL_s) . Η διαδικασία συνεχίζεται μειώνοντας περαιτέρω, με βήμα 1, την αρχική τιμή του u (δείτε Βήμα 2), υπό τον περιορισμό ότι $UCL_s > \mu_{0,X}$, και αναζητώντας στη συνέχεια μια νέα τιμή του λ ώστε η εντός ελέγχου απόδοση του διαγράμματος να είναι το δυνατόν κοντά στην επιθυμητή.

Η υλοποίηση των παραπάνω αλγοριθμικών βημάτων 1-3 του Πίνακα 5.2 θα έχει ως αποτέλεσμα ένα σύνολο από τριάδες (s, λ, UCL_s) , για τις οποίες η εντός ελέγχου απόδοση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος s -EWMA θα είναι το *δυνατόν κοντά* στην επιθυμητή. Για την επιλογή της βέλτιστης τριάδας, κατ' αντιστοιχία με την περίπτωση του διαγράμματος 1-EWMA, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες (i) και (ii) που αναφέρονται στην Ενότητα 3.2 του Κεφαλαίου 3.

5.2.3 Αριθμητική μελέτη της απόδοσης των μονόπλευρων διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA

Στην παρούσα ενότητα δίνονται τα αποτελέσματα μιας εκτεταμένης αριθμητικής μελέτης σχετικά με την απόδοση των μονόπλευρων διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA για την παρακολούθηση διεργασιών BINARCH(1).

Σχετικά με τις εντός ελέγχου τιμές της παραμέτρου a_{00} θεωρήθηκαν οι περιπτώσεις $a_{00} \in \{0.05, 0.10, 0.15, 0.20\}$. Για την παράμετρο a_{01} , οι τιμές που επιλέχθηκαν ήταν τέτοιες ώστε

να ικανοποιείται η σχέση $a_{00} + a_{01} < 1$. Ταυτόχρονα, οι τιμές της παραμέτρου a_{01} είναι τέτοιες ώστε να εξετάζεται η περίπτωση μέτριας προς ασθενούς συσχέτισης (π.χ. $a_{01} = 0.2$) καθώς επίσης και μέτριας προς ισχυρής (π.χ. $a_{01} = 0.9$). Επίσης, για το μέγεθος του δείγματος, εξετάστηκαν δύο περιπτώσεις με το $n \in \{15, 30\}$. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι οι παραπάνω τιμές που επιλέχθηκαν για τις παραμέτρους a_{00} , a_{01} και n καλύπτουν ένα μεγάλο πλήθος εντός ελέγχου διεργασιών BINARCH(1) με ποικίλες τιμές για το μέσο επίπεδο κάθε διεργασίας (π.χ., το $\mu_{0,x}$ μπορεί να κυμαίνεται από 1.5 έως 20).

Στην περίπτωση που η διεργασία λειτουργεί παρουσία ειδικών αιτιών μεταβλητότητας (και άρα είναι εκτός ελέγχου), θεωρείται ότι επηρεάζεται μόνο μία από τις παραμέτρους a_{00} και a_{01} . Πιο συγκεκριμένα, η a_{00} μεταβάλλεται σε $a_{10} = \delta a_{00}$, $0 < \delta \neq 1$, με $\delta \in \{1.2, 1.4\}$ (αύξηση στο a_{00}) ή $\delta \in \{0.8, 0.6\}$ (μείωση στο a_{00}). Για την παράμετρο a_{01} θεωρείται ότι μεταβάλλεται σε $a_{11} = a_{01} + \delta'$, με $\delta' \in \{0.05, 0.10\}$ (αύξηση στο a_{01}) ή σε $a_{11} = a_{01} - \delta'$, με $\delta' \in \{0.05, 0.10\}$ (μείωση στο a_{01}). Επομένως, στόχος είναι να προταθούν τα βέλτιστα διαγράμματα ελέγχου EWMA για την ανίχνευση αυτών των μετατοπίσεων. Ως επιθυμητή τιμή για το ARL_0 επιλέχθηκε το 370.4.

Στους Πίνακες 5.3 έως 5.6 παρουσιάζονται οι εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων a_{00} , a_{01} , n και μ_0 για τις διεργασίες BINARCH(1) που πρόκειται να μελετηθούν μαζί με τις βέλτιστες τιμές (s, λ, UCL_s) (περίπτωση άνω μονόπλευρου διαγράμματος) για τη ανίχνευση δεδομένης μετατόπισης δ . Επίσης, στη στήλη « UCL_{SH} » δίνεται η τιμή του άνω ορίου ελέγχου για το διάγραμμα Shewhart, η οποία επιλέχτηκε με τέτοιο τρόπο ώστε να παρέχεται η πλησιέστερη δυνατή τιμή $zsARL$ στην επιθυμητή τιμή 370.4. Ειδικότερα, στους Πίνακες 5.3, 5.4, δίνονται οι βέλτιστοι στατιστικοί σχεδιασμοί των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s -EWMA και Shewhart όταν παρατηρείται μετατόπιση μόνο στην παράμετρο a_{00} , ενώ στους Πίνακες 5.5, 5.6 δίνεται η περίπτωση των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA όταν μεταβάλλεται μόνο η παράμετρος a_{01} . Επίσης, στις στήλες « $zsARL$ » και « $ssARL$ » δίνεται αντίστοιχα η εντός ελέγχου και η εκτός ελέγχου απόδοση κάθε διαγράμματος.

Πίνακας 5.3: Άνω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και *s*-EWMA, Διεργασία

BINARCH(1), Μετατόπιση μόνο στην a_{00}

Παράμετροι Εντός Ελέγχου Διεργασίας				Μετατοπίσεις	Τιμές Παραμέτρων				Μέτρα Απόδοσης			
					Shewhart		<i>s</i> -EWMA		Shewhart		<i>s</i> -EWMA	
μ_X	a_{00}	a_{01}	n	δ	UCL_{SH}	s	λ	UCL_s	$zsARL$	$ssARL$	$zsARL$	$ssARL$
1.5	0.05	0.5	15	1.2	7	4	0.25	4	475.63	246.26	353.73	160.16
1.5	0.05	0.5	15	1.4	7	4	0.25	4	475.63	140.63	353.73	83.18
3	0.05	0.5	30	1.2	10	4	0.07	4.5	398.78	164.56	360.28	86.64
3	0.05	0.5	30	1.4	10	4	0.07	4.5	398.78	79.67	360.28	37.03
2.5	0.05	0.7	15	1.2	10	4	0.19	6	521.37	275.14	364.61	171.6
2.5	0.05	0.7	15	1.4	10	4	0.19	6	521.37	158.39	364.61	93.09
5	0.05	0.7	30	1.2	15	4	0.09	8.25	485.79	202.31	388.99	115.86
5	0.05	0.7	30	1.4	15	4	0.09	8.25	485.79	98.26	388.99	51.63
3	0.05	0.75	15	1.2	11	4	0.12	6.25	444.3	236.92	369.86	161.66
3	0.05	0.75	15	1.4	11	4	0.12	6.25	443.3	137.69	369.86	87.43
6	0.05	0.75	30	1.2	17	4	0.11	10.25	458.68	192.26	353.87	118.28
6	0.05	0.75	30	1.4	17	4	0.11	10.25	458.68	94.09	353.87	53.62
1.875	0.1	0.2	15	1.2	6	4	0.45	4.5	125.38	55.8	369.44	110.34
1.875	0.1	0.2	15	1.4	6	4	0.45	4.5	125.38	29.15	369.44	44.36
3.75	0.1	0.2	30	1.2	10	4	0.45	7.25	317.75	93.34	366.19	73.27
3.75	0.1	0.2	30	1.4	10	4	0.45	7.25	317.75	36.1	366.19	24.2

Πίνακας 5.4: Άνω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και s -EWMA, Διεργασία BINARCH(1), Μετατόπιση μόνο στην a_{00} (συνέχεια)

Παράμετροι Εντός Ελέγχου Διεργασίας				Μετατοπίσεις	Τιμές Παραμέτρων				Μέτρα Απόδοσης			
					Shewhart		s -EWMA		Shewhart		s -EWMA	
μ_x	a_{00}	a_{01}	n	δ	UCL_{SH}	s	λ	UCL_s	$zsARL$	$ssARL$	$zsARL$	$ssARL$
2.5	0.1	0.4	15	1.2	8	4	0.25	5	324.24	130.41	352.42	99.23
2.5	0.1	0.4	15	1.4	8	4	0.25	5	324.24	61.88	352.42	39.72
5	0.1	0.4	30	1.2	12	4	0.24	8.25	229.67	70.62	376.11	66.69
5	0.1	0.4	30	1.4	12	4	0.24	8.25	229.67	28.63	376.11	22.56
3.75	0.1	0.6	15	1.2	10	4	0.36	8	195.5	84.03	364.48	120.2
3.75	0.1	0.6	15	1.4	10	4	0.36	8	195.5	42.23	364.48	51.97
7.5	0.1	0.6	30	1.2	17	4	0.38	13.5	418.37	114.9	363.53	84.54
7.5	0.1	0.6	30	1.4	17	4	0.38	13.5	418.37	42.58	363.53	29.92
3	0.15	0.25	15	1.2	8	4	0.13	4.5	183.92	65.32	362.44	53.9
3	0.15	0.25	15	1.4	8	4	0.13	4.5	183.92	28.82	362.44	19.46
3.75	0.15	0.4	15	1.2	10	4	0.09	5.25	497.64	151.51	353.16	53.14
3.75	0.15	0.4	15	1.4	10	4	0.09	5.25	497.64	58.11	353.16	20.44
7.5	0.15	0.4	30	1.2	16	4	0.1	9.75	492.69	97.82	369.26	32.79
7.5	0.15	0.4	30	1.4	16	4	0.1	9.75	492.69	29.37	369.26	12.44
5	0.15	0.55	15	1.2	12	2	0.09	7	539.08	155.21	350.21	58.87
5	0.15	0.55	15	1.4	12	2	0.09	7	539.08	56.73	350.21	22.88
10	0.15	0.55	30	1.2	19	4	0.28	15	278.78	58.89	350.96	46.63
10	0.15	0.55	30	1.4	19	4	0.28	15	278.78	19.39	350.96	14.87
6	0.15	0.625	15	1.2	13	4	0.27	10	371.59	107.46	378.45	77.95
6	0.15	0.625	15	1.4	13	4	0.27	10	371.59	39.94	378.45	26.97
12	0.15	0.625	30	1.2	22	4	0.15	16.25	401.07	72.99	364.74	40.85
12	0.15	0.625	30	1.4	22	4	0.15	16.25	401.07	21.83	364.74	14.29
5	0.2	0.4	15	1.2	11	4	0.06	6.25	269.87	79.92	371.65	38.83
5	0.2	0.4	15	1.4	11	4	0.06	6.25	269.87	26.36	371.66	15.92
10	0.2	0.4	30	1.2	18	4	0.43	15.25	210.1	38.08	357.45	37.1
10	0.2	0.4	30	1.4	18	4	0.43	15.25	210.1	11.73	357.45	10.43
6	0.2	0.5	15	1.2	12	4	0.22	9	186.29	51.27	366.6	51.35
6	0.2	0.5	15	1.4	12	4	0.22	9	186.29	19.15	366.6	16.55
12	0.2	0.5	30	1.2	21	4	0.31	17	332.72	49.85	352.48	32.45
12	0.2	0.5	30	1.4	21	4	0.31	17	3332.72	13.67	352.48	9.63
7.5	0.2	0.6	15	1.2	14	4	0.37	11.75	339.26	74.03	381.3	55.92
7.5	0.2	0.6	15	1.4	14	4	0.37	11.75	339.26	22.85	381.3	16.49
15	0.2	0.6	30	1.2	24	4	0.32	20.75	242.85	34.79	367.32	30.93
15	0.2	0.6	30	1.4	24	4	0.32	20.75	242.85	10.04	367.32	9.28
18.75	0.2	0.68	30	1.2	28	4	0.1	22.25	478.53	40.67	364.29	20.92
18.75	0.2	0.68	30	1.4	28	4	0.1	22.25	478.53	9.16	364.29	8.54

Πίνακας 5.5: Άνω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και s -EWMA, Διεργασία

BINARCH(1), Μετατόπιση μόνο στην a_{01}

Παράμετροι Εντός Ελέγχου Διεργασίας				Μετατοπίσεις	Τιμές Παραμέτρων				Μέτρα Απόδοσης			
					Shewhart		s -EWMA		Shewhart		s -EWMA	
μ_X	a_{00}	a_{01}	n	δ	UCL_{SH}	s	λ	UCL_s	$zsARL$	$ssARL$	$zsARL$	$ssARL$
1.5	0.05	0.5	15	0.05	7	4	0.13	3.25	475.63	255.05	373.48	163.12
1.5	0.05	0.5	15	0.1	7	4	0.13	3.25	475.63	142	373.48	84.95
3	0.05	0.5	30	0.05	10	4	0.07	4.5	398.78	191.67	361.75	125.51
3	0.05	0.5	30	0.1	10	4	0.07	4.5	398.78	97.56	361.75	58.43
2.5	0.05	0.7	15	0.05	10	4	0.03	4	521.37	197.01	354.3	83.32
2.5	0.05	0.7	15	0.1	10	4	0.03	4	521.37	83.19	354.3	43.66
5	0.05	0.7	30	0.05	15	4	0.19	9.75	485.79	150.44	374.88	100.61
5	0.05	0.7	30	0.1	15	4	0.19	9.75	485.79	56.36	374.88	39.87
3	0.05	0.75	15	0.05	11	4	0.39	8.5	444.3	148.37	356.51	114.01
3	0.05	0.75	15	0.1	11	4	0.39	8.5	444.3	58.53	356.51	47.28
6	0.05	0.75	30	0.05	17	4	0.15	11	458.68	119.29	356.89	81.81
6	0.05	0.75	30	0.1	17	4	0.15	11	458.68	41.33	356.89	31.07
1.875	0.1	0.2	15	0.05	6	4	0.1	3	125.38	88.03	379.75	158.74
1.875	0.1	0.2	15	0.1	6	4	0.1	3	125.38	60.57	379.75	83.55
3.75	0.1	0.2	30	0.05	10	4	0.3	6.5	317.75	186.11	367.6	146.9
3.75	0.1	0.2	30	0.1	10	4	0.3	6.5	317.75	109.56	367.6	69.75
2.5	0.1	0.4	15	0.05	8	4	0.13	4.25	324.24	177.2	378.79	140.95
2.5	0.1	0.4	15	0.1	8	4	0.13	4.25	324.24	99.51	378.79	67.43
5	0.1	0.4	30	0.05	12	4	0.18	7.75	229.67	11.31	362.6	113.76
5	0.1	0.4	30	0.1	12	4	0.18	7.75	229.67	58.58	362.6	47.48
3.75	0.1	0.6	15	0.05	10	4	0.24	7.25	195.5	88.42	387.44	118.7
3.75	0.1	0.6	15	0.1	10	4	0.24	7.25	195.5	43.47	387.44	48.26
7.5	0.1	0.6	30	0.05	17	4	0.23	12.25	418.37	128.55	387.39	87.9
7.5	0.1	0.6	30	0.1	17	4	0.23	12.25	418.37	46.83	387.39	32.38
3	0.15	0.25	15	0.05	8	4	0.17	4.75	183.92	113.3	354.66	134.57
3	0.15	0.25	15	0.1	8	4	0.17	4.75	183.92	70.39	354.66	62.73
3.75	0.15	0.4	15	0.05	10	4	0.09	5.25	497.64	234.47	354.83	106.23
3.75	0.15	0.4	15	0.1	10	4	0.09	5.25	497.64	113.81	354.83	56.99
7.5	0.15	0.4	30	0.05	16	4	0.1	9.75	492.69	189.03	364.42	79.29
7.5	0.15	0.4	30	0.1	16	4	0.1	9.75	492.69	77.75	364.42	31.14
5	0.15	0.55	15	0.05	12	2	0.09	7	539.08	189.83	350.21	84.7
5	0.15	0.55	15	0.1	12	2	0.09	7	539.08	72.33	350.21	34.24
10	0.15	0.55	30	0.05	19	4	0.12	13.25	278.78	85.15	381.88	64.05
10	0.15	0.55	30	0.1	19	4	0.12	13.25	278.78	31.21	381.88	22.59

Πίνακας 5.6: Άνω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και s -EWMA, Διεργασία BINARCH(1), Μετατόπιση μόνο στην a_{01} (συνέχεια)

Παράμετροι Εντός Ελέγχου Διεργασίας				Μετατοπίσεις	Τιμές Παραμέτρων				Μέτρα Απόδοσης			
					Shewhart		s -EWMA		Shewhart		s -EWMA	
μ_X	a_{00}	a_{01}	n	δ	UCL_{SH}	s	λ	UCL_s	$zsARL$	$ssARL$	$zsARL$	$ssARL$
6	0.15	0.625	15	0.05	13	4	0.24	9.75	371.59	112.11	362.63	78.43
6	0.15	0.625	15	0.1	13	4	0.24	9.75	371.59	39.05	362.63	27.26
12	0.15	0.625	30	0.05	22	4	0.12	15.75	401.07	85.59	370.33	50.27
12	0.15	0.625	30	0.1	22	4	0.12	15.75	401.07	25.18	370.33	17.5
5	0.2	0.4	15	0.05	11	4	0.13	7	269.87	125.09	378.12	98.26
5	0.2	0.4	15	0.1	11	4	0.13	7	269.87	60.29	378.12	38.71
10	0.2	0.4	30	0.05	18	4	0.36	14.75	210.1	80.65	353.98	84.99
10	0.2	0.4	30	0.1	18	4	0.36	14.75	210.1	34.15	353.98	29.59
6	0.2	0.5	15	0.05	12	4	0.19	8.75	186.29	76.64	357.84	81.99
6	0.2	0.5	15	0.1	12	4	0.19	8.75	186.29	34.25	357.84	30.07
12	0.2	0.5	30	0.05	21	4	0.13	15.25	332.72	92.23	385.8	55.89
12	0.2	0.5	30	0.1	21	4	0.13	15.25	332.72	30.74	385.8	19.05
7.5	0.2	0.6	15	0.05	14	4	0.32	11.5	339.26	91.75	365.79	65.78
7.5	0.2	0.6	15	0.1	14	4	0.32	11.5	339.26	28.98	365.79	20.53
15	0.2	0.6	30	0.05	24	4	0.24	20	242.85	49.96	364.7	43.36
15	0.2	0.6	30	0.1	24	4	0.24	20	242.85	15.1	364.7	13.23
18.75	0.2	0.68	30	0.05	28	4	0.13	22.75	478.53	42.19	375.75	23.81
18.75	0.2	0.68	30	0.1	28	4	0.13	22.75	478.53	9.18	375.75	8.73

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που καταγράφονται στους Πίνακες 5.3 έως 5.6, γίνεται αντιληπτό ότι τα διαγράμματα s -EWMA έχουν εντός ελέγχου απόδοση αρκετά κοντά στην επιθυμητή τιμή $ARL_0 = 370.4$. Όπως και την περίπτωση των διεργασιών τύπου BAR(1) και BBAR(1) που εξετάσαμε στα Κεφάλαια 3 και 4 αντίστοιχα, έτσι και στη περίπτωση διεργασιών τύπου BINARCH(1) είναι αδύνατον να επιτευχθεί ακριβώς η επιθυμητή τιμή της εντός ελέγχου απόδοσης λόγω της διακριτής φύσης του. Ωστόσο, για όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις ο λόγος $|zsARL - ARL_0|/ARL_0$ ήταν το πολύ 5% (δείτε επίσης Κεφάλαιο 3, Ενότητα 3.2.1), γεγονός που αποτελεί ένδειξη αυξημένης ευελιξίας στον στατιστικό σχεδιασμό των εν λόγω διαγραμμάτων σε σύγκριση με το διάγραμμα Shewhart.

Με την άμεση σύγκριση των αντίστοιχων τιμών $ssARL$ μεταξύ των διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA, για δεδομένη μετατόπιση, παρατηρείται μια βελτιστοποιημένη ικανότητα ανίχνευσης για το τελευταίο. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι για τιμές του $s > 1$, μπορεί να επιτευχθεί τιμή $zsARL$ αρκετά κοντά στην επιθυμητή. Μάλιστα, από τους Πίνακες 5.3-5.6 διαπιστώνεται ότι για τις περισσότερες από τις εξεταζόμενες περιπτώσεις, η τιμή $s = 4$, οδηγεί στον βέλτιστο στατιστικό σχεδιασμό των διαγραμμάτων. Πιο

συγκεκριμένα, όσον αφορά τον προσδιορισμό των παραμέτρων λ και UCL_s του διαγράμματος, για ένα δεδομένο s , καθώς μειώνεται η τιμή του UCL_s , μειώνεται και η τιμή του λ . Επιπλέον, το προτεινόμενο διάστημα για τις επιθυμητές τιμές του λ , ώστε να επιτευχθεί η εντός ελέγχου επιθυμητή απόδοση για το άνω μονόπλευρο διάγραμμα s -EWMA είναι το $[0.05, 0.45]$.

Στη συνέχεια, στους Πίνακες 5.7 έως 5.10 δίνονται οι εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων a_{00} , a_{01} , n και μ_0 για τις υπό μελέτη διεργασίες BINARCH(1), μαζί με τις βέλτιστες τιμές (s, λ, LCL_s) (περίπτωση κάτω μονόπλευρου διαγράμματος) για τη ανίχνευση δεδομένης μετατόπισης δ . Επίσης, στη στήλη « LCL_{SH} » δίνεται η τιμή του κάτω ορίου ελέγχου για το διάγραμμα Shewhart, η οποία επιλέχτηκε με τέτοιον τρόπο ώστε να παρέχεται η πλησιέστερη δυνατή τιμή z_{sARL} στην επιθυμητή τιμή 370.4. Συγκεκριμένα, στους Πίνακες 5.7 και 5.8, παρουσιάζεται η περίπτωση των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA όταν μεταβάλλεται μόνο η παράμετρος a_{00} , ενώ στους Πίνακες 5.9 και 5.10 δίνεται η περίπτωση των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA, όταν μεταβάλλεται μόνο η παράμετρος a_{01} .

Πίνακας 5.7: Κάτω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και *s*-EWMA, Διεργασία BINARCH(1), Μετατόπιση μόνο στην a_{00}

Παράμετροι Εντός Ελέγχου Διεργασίας				Μετατοπίσεις	Τιμές Παραμέτρων				Μέτρα Απόδοσης			
					Shewhart		<i>s</i> -EWMA		Shewhart		<i>s</i> -EWMA	
μ_0	a_{00}	a_{01}	n	δ	LCL_{SH}	s	λ	LCL_s	$zsARL$	$ssARL$	$zsARL$	$ssARL$
6	0.05	0.75	30	0.8	0	4	0.24	1.75	100.93	48.11	373.84	99.93
6	0.05	0.75	30	0.6	0	4	0.24	1.75	100.93	24.99	373.84	36.39
15	0.05	0.9	30	0.8	2	4	0.38	3.75	267.88	103.04	378.71	123.91
15	0.05	0.9	30	0.6	2	4	0.38	3.75	267.88	49.27	378.71	54.71
7.5	0.05	0.9	15	0.8	0	4	0.25	1	114.13	64.88	353.63	134.29
7.5	0.05	0.9	15	0.6	0	4	0.25	1	114.13	39.73	353.63	65.26
10	0.05	0.85	30	0.8	0	4	0.4	2	439.5	153.35	364.58	117.63
10	0.05	0.85	30	0.6	0	4	0.4	2	439.5	62.58	364.58	47.79
7.5	0.05	0.8	30	0.8	0	4	0.37	1.5	185.28	78.2	367.23	108.87
7.5	0.05	0.8	30	0.6	0	4	0.37	1.5	185.28	36.96	367.23	41.84
18.8	0.05	0.92	30	0.8	3	4	0.4	5.5	408.78	137.06	383.1	126.04
18.8	0.05	0.92	30	0.6	3	4	0.4	5.5	408.78	61.79	383.1	57.62
5	0.1	0.7	15	0.8	0	4	0.38	1	88.11	40.46	365.92	100.13
5	0.1	0.7	15	0.6	0	4	0.38	1	88.11	20.68	365.92	36.01
10	0.1	0.7	30	0.8	2	4	0.36	4	166.1	49.8	352.95	66.33
10	0.1	0.7	30	0.6	2	4	0.36	4	166.1	19.45	352.95	21.4
6	0.1	0.75	15	0.8	0	4	0.27	1.75	156.31	69.97	383.11	96.61
6	0.1	0.75	15	0.6	0	4	0.27	1.75	156.31	29.27	383.11	34.33
12	0.1	0.75	30	0.8	2	4	0.18	6.5	435.35	99.92	354.49	60.17
12	0.1	0.75	30	0.6	2	4	0.18	6.5	435.35	32.07	354.49	21.11

Πίνακας 5.8: Κάτω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και *s*-EWMA, Διεργασία

BINARCH(1), Μετατόπιση μόνο στην a_{00} (συνέχεια)

Παράμετροι Εντός Ελέγχου Διεργασίας				Μετατοπίσεις	Τιμές Παραμέτρων				Μέτρα Απόδοσης			
					Shewhart		<i>s</i> -EWMA		Shewhart		<i>s</i> -EWMA	
μ_0	a_{00}	a_{01}	n	δ	LCL_{SH}	s	λ	LCL_s	$zsARL$	$ssARL$	$zsARL$	$ssARL$
6.25	0.1	0.52	30	0.8	0	4	0.3	2.5	398.2	116.66	362.15	61.08
6.25	0.1	0.52	30	0.6	0	4	0.3	2.5	398.2	38.1	362.15	18.08
12	0.1	0.88	15	0.8	2	4	0.3	5.5	479.03	112.01	369.57	83.77
12	0.1	0.88	15	0.6	2	4	0.3	5.5	479.03	43.96	369.57	34.35
12	0.15	0.63	30	0.8	3	4	0.3	7	393.86	69.48	383.37	43.09
12	0.15	0.63	30	0.6	3	4	0.3	7	393.86	19.16	383.37	13.06
11.3	0.15	0.8	15	0.8	3	4	0.2	6	300.22	62.9	368.7	61.14
11.3	0.15	0.8	15	0.6	3	4	0.2	6	300.22	23.3	368.7	22.53
7.5	0.15	0.7	15	0.8	1	4	0.2	3.75	185.55	55.42	385.49	159.51
7.5	0.15	0.7	15	0.6	1	4	0.2	3.75	185.55	21.85	385.49	38.61
9	0.15	0.75	15	0.8	1	4	0.2	4.75	507.88	110.54	385.9	63.74
9	0.15	0.75	15	0.6	1	4	0.2	4.75	507.88	35.47	385.9	22.83
20	0.15	0.78	30	0.8	8	4	0.1	15.75	460.79	58.42	378.11	36.03
20	0.15	0.78	30	0.6	8	4	0.1	15.75	460.79	17.3	378.11	14.53
12.5	0.15	0.82	15	0.8	4	4	0.1	8.75	372.15	62.52	366.6	49.74
12.5	0.15	0.82	15	0.6	4	4	0.1	8.75	372.15	22.6	366.6	19.9
12	0.2	0.75	15	0.8	4	4	0.3	6.75	444.3	52.27	365.12	60.4
12	0.2	0.75	15	0.6	4	4	0.3	6.75	444.3	17.75	365.12	17.92
8	0.2	0.63	15	0.8	1	4	0.2	4.5	515.46	98.51	384.54	47.41
8	0.2	0.63	15	0.6	1	4	0.2	4.5	515.46	27.77	384.54	15.56
16	0.2	0.63	30	0.8	6	4	0.2	11.5	464.88	51.78	377.62	27.24
16	0.2	0.63	30	0.6	6	4	0.2	11.5	464.88	12.81	377.62	9.5
20	0.2	0.7	30	0.8	9	4	0.2	14	490.94	44.1	377.68	27.8
20	0.2	0.7	30	0.6	9	4	0.2	14	490.94	11.65	377.68	9.46
10	0.2	0.7	15	0.8	3	4	0.3	5.25	207.27	42.24	369.25	49.31
10	0.2	0.7	15	0.6	3	4	0.3	5.25	207.27	14.98	369.25	15.92
15	0.2	0.6	30	0.8	6	4	0.3	9.75	242.85	34.79	382.59	29.26
15	0.2	0.6	30	0.6	6	4	0.3	9.75	242.85	10.04	382.59	9.27

Πίνακας 5.9: Κάτω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και *s*-EWMA, Διεργασία

BINARCH(1), Μετατόπιση μόνο στην a_{01}

Παράμετροι Εντός Ελέγχου Διεργασίας				Μετατοπίσεις	Τιμές Παραμέτρων				Μέτρα Απόδοσης			
					Shewhart		<i>s</i> -EWMA		Shewhart		<i>s</i> -EWMA	
μ_0	a_{00}	a_{01}	n	δ	LCL_{SH}	s	λ	LCL_s	z_{sARL}	$ssARL$	z_{sARL}	$ssARL$
6	0.05	0.75	30	0.05	0	4	0.24	1.75	100.93	64.25	373.59	192.46
6	0.05	0.75	30	0.1	0	4	0.24	1.75	100.93	45.39	373.59	113.12
15	0.05	0.9	30	0.05	2	4	0.25	4.75	267.88	73.85	372.5	88.19
15	0.05	0.9	30	0.1	2	4	0.25	4.75	267.88	35.42	372.5	39.61
7.5	0.05	0.9	15	0.05	0	4	0.11	2.25	114.13	51.39	365.07	116.91
7.5	0.05	0.9	15	0.1	0	4	0.11	2.25	114.13	31.52	365.07	62.08
10	0.05	0.85	30	0.05	0	4	0.1	4.75	439.5	189.15	372.22	107.53
10	0.05	0.85	30	0.1	0	4	0.1	4.75	439.5	105.22	372.22	51.43
7.5	0.05	0.8	30	0.05	0	4	0.22	2.25	185.28	103.25	360.51	159.58
7.5	0.05	0.8	30	0.1	0	4	0.22	2.25	185.28	66.08	360.51	87.33
18.75	0.05	0.92	30	0.05	3	4	0.25	6.75	408.78	72.48	372.56	62.84
18.75	0.05	0.92	30	0.1	3	4	0.25	6.75	408.78	31.73	372.56	28.03
5	0.1	0.7	15	0.05	0	4	0.11	2.5	88.11	57.75	369.41	160.38
5	0.1	0.7	15	0.1	0	4	0.11	2.5	88.11	40.83	369.41	76.04
10	0.1	0.7	30	0.05	2	4	0.1	6.5	166.1	81.87	352.4	97.57
10	0.1	0.7	30	0.1	2	4	0.1	6.5	166.1	47.01	352.4	43.64
6	0.1	0.75	15	0.05	0	4	0.23	2	156.31	89.95	374.09	172.34
6	0.1	0.75	15	0.1	0	4	0.23	2	156.31	58.61	374.09	94.63
12	0.1	0.75	30	0.05	2	4	0.16	6.75	435.35	168.49	366.88	99.46
12	0.1	0.75	30	0.1	2	4	0.16	6.75	435.35	83.07	366.88	42.5
6.25	0.1	0.52	30	0.05	0	4	0.13	3.75	398.2	260.21	361.91	148.73
6.25	0.1	0.52	30	0.1	0	4	0.13	3.75	398.2	179.39	361.91	74.65
12	0.1	0.875	15	0.05	2	4	0.13	6.75	479.03	84.11	353.92	53.33
12	0.1	0.875	15	0.1	2	4	0.13	6.75	479.03	36.27	353.92	24.06
12	0.15	0.625	30	0.05	3	4	0.12	8.5	393.86	166.54	359.44	84.47
12	0.15	0.625	30	0.1	3	4	0.12	8.5	393.86	84.04	359.44	35.8
11.25	0.15	0.8	15	0.05	3	4	0.11	7.5	300.22	73.33	356.52	58.54
11.25	0.15	0.8	15	0.1	3	4	0.11	7.5	300.22	32.11	356.52	25.14
7.5	0.15	0.7	15	0.05	1	4	0.07	5.25	185.55	91.66	377.2	96.89
7.5	0.15	0.7	15	0.1	1	4	0.07	5.25	185.55	53.41	377.2	44.67
9	0.15	0.75	15	0.05	1	4	0.15	5	507.88	188.16	380.29	100.01
9	0.15	0.75	15	0.1	1	4	0.15	5	507.88	92.95	380.29	42.67
20	0.15	0.775	30	0.05	8	4	0.14	14.25	460.79	80.74	369.56	45.99
20	0.15	0.775	30	0.1	8	4	0.14	14.25	460.79	28.64	369.56	18.32

Πίνακας 5.10: Κάτω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και s -EWMA, Διεργασία BINARCH(1), Μετατόπιση μόνο στην a_{01} (συνέχεια)

Παράμετροι Εντός Ελέγχου Διεργασίας				Μετατοπίσεις	Τιμές Παραμέτρων				Μέτρα Απόδοσης			
					Shewhart		s -EWMA		Shewhart		s -EWMA	
μ_0	a_{00}	a_{01}	n	δ	LCL_{SH}	s	λ	LCL_s	$zsARL$	$ssARL$	$zsARL$	$ssARL$
12.5	0.15	0.82	15	0.05	4	4	0.11	8.75	372.15	61.84	366.6	45.07
12.5	0.15	0.82	15	0.1	4	4	0.11	8.75	372.15	25.03	366.6	19.46
12	0.2	0.75	15	0.05	4	4	0.05	10	444.3	88.61	365.76	42.41
12	0.2	0.75	15	0.1	4	4	0.05	10	444.3	34.44	365.76	19.62
8	0.2	0.625	15	0.05	1	4	0.2	4.5	515.46	235.86	376.08	123.3
8	0.2	0.625	15	0.1	1	4	0.2	4.5	515.46	127.21	376.08	56.11
16	0.2	0.625	30	0.05	6	4	0.15	11.75	464.88	140.57	367.15	66.93
16	0.2	0.625	30	0.1	6	4	0.15	11.75	464.88	57.77	367.15	24.84
20	0.2	0.7	30	0.05	9	4	0.1	16	490.94	91.88	371.79	40.96
20	0.2	0.7	30	0.1	9	4	0.1	16	490.94	31.49	371.79	16.82
10	0.2	0.7	15	0.05	3	4	0.09	7.25	207.27	72.24	365.05	69.17
10	0.2	0.7	15	0.1	3	4	0.09	7.25	207.27	34.8	365.05	29.22
15	0.2	0.6	30	0.05	6	4	0.21	10.25	242.85	86.87	373.66	80.95
15	0.2	0.6	30	0.1	6	4	0.21	10.25	242.85	39.89	373.66	31.15

Τα αποτελέσματα στους Πίνακες 5.7 έως 5.10 δείχνουν ότι για $s > 1$ (δηλ. για $s = 2$ ή 4) το εντός ελέγχου $zsARL$ του διαγράμματος ελέγχου s -EWMA είναι κοντά στην επιθυμητή τιμή ARL_0 . Όπως ήδη έχει αναφερθεί, λόγω της διακριτής φύσης του μοντέλου BINARCH(1), ήταν αδύνατο να επιτευχθεί ακριβώς η επιθυμητή τιμή ARL_0 . Ωστόσο, ο λόγος $|zsARL - ARL_0|/ARL_0$, στους Πίνακες 5.7 και 5.10 είναι το πολύ 5%, γεγονός που επιβεβαιώνει την υπεροχή του διαγράμματος s -EWMA έναντι του Shewhart.

Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι σε όλα τα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου s -EWMA διαπιστώνεται ότι (βλέπε Πίνακες 5.7, 5.10) για $s = 4$ η τιμή $zsARL$ είναι πολύ κοντά στην επιθυμητή τιμή 370.4. Από πρακτική άποψη, ο βέλτιστος στατιστικός σχεδιασμός των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου μπορεί να πραγματοποιηθεί για μεγάλες τιμές του s και μικρές τιμές για το λ , π.χ. στο διάστημα $[0.05, 0.25]$. Αναφορικά με την περίπτωση των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων Shewhart, αξίζει να αναφερθεί ότι στην περίπτωση $(\mu_0, a_{00}, a_{01}, n) = (5, 0.1, 0.7, 15)$ (βλέπε Πίνακα 5.7) η μέγιστη επιτεύξιμη τιμή για το $zsARL$ είναι κάτω από 100, όταν η επιθυμητή τιμή είναι 370.4. Αυτό σημαίνει ότι το διάγραμμα αυτό έχει μεγαλύτερη πιθανότητα εσφαλμένου συναγερού απ' όσο θα θέλαμε και άρα αναμένεται να υπάρχουν συχνότερες, μη απαραίτητες, διακοπές της διεργασίας.

Η επαλήθευση των αποτελεσμάτων των μονόπλευρων διαγραμμάτων EWMA για διεργασίες BINARCH(1) (Πίνακες 5.3-5.6 για αυξήσεις και Πίνακες 5.7-5.10 για μειώσεις), δύναται να πραγματοποιηθεί μέσω κατάλληλων προγραμμάτων στην R, τα οποία δίνονται στο Παράρτημα Z. Συγκεκριμένα, στο Παράρτημα Z1-Z2 δίνεται το πρόγραμμα στην R στο οποίο εφαρμόζεται η μέθοδος των Μαρκοβιανών αλυσίδων για τον υπολογισμό του $zsARL$ και του $ssARL$ στο άνω μονόπλευρο μονόπλευρο διάγραμμα s -EWMA, ενώ στο Παράρτημα Z3-Z4 ο υπολογισμός των παραπάνω μέτρων πραγματοποιείται με χρήση της προσομοίωσης Monte Carlo. Αντίστοιχα, τα αποτελέσματα για τα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα των Πινάκων 5.7-5.10 επιβεβαιώνονται από το πρόγραμμα στην R και συγκεκριμένα με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων (Παράρτημα Z5-Z6) καθώς και μέσω προσομοίωσης (Παράρτημα Z7-Z8).

5.2.4 Αριθμητική σύγκριση της απόδοσης των μονόπλευρων διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA

Στην ενότητα αυτή δίνονται αριθμητικές συγκρίσεις ανάμεσα στα μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και s -EWMA ($s \in \{1, 2, 4\}$) για διάφορες διεργασίες BINARCH(1). Η περίπτωση των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων παρουσιάζεται στους Πίνακες 5.11-5.14. Όταν η διεργασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου, η παράμετρος a_{00} μεταβάλλεται σε $a_{10} = \delta \cdot a_{00}$ με $\delta \in \{1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.7, 2.0\}$. Επίσης, η παράμετρος a_{01} μεταβάλλεται σε $a_{11} = a_{01} + \delta'$ με $\delta' \in \{0, 0.05, 0.07, 0.10, 0.13\}$. Επομένως για $(\delta, \delta') = (1, 0)$ η διεργασία βρίσκεται εντός στατιστικού ελέγχου. Στις στήλες « a_{00} », « a_{01} », « n », « μ_0 » δίνονται οι εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων της διεργασίας, ενώ οι γραμμές « UCL », « λ » αποτελούνται από τις τιμές των παραμέτρων του διαγράμματος.

Πίνακας 5.11: Σύγκριση των διαγραμμάτων Shewhart και *s*-EWMA για την ανίχνευση αυξήσεων σε BINARCH(1) διεργασία

μ_X	n	a_{00}	a_{01}	δ	δ'	Shewhart	1-EWMA	2-EWMA	4-EWMA
3	30	0.05	0.5	1	0	398.78	365.27	403.34	403.14
3.30				1.1	0	250.53(-37.18%)	206.28(-43.53%)	231.35(-42.64%)	209.26(-48.09%)
3.60				1.2	0	164.56(-58.73%)	125.57(-65.62%)	141.77(-64.85%)	120.07(-70.22%)
3.90				1.3	0	112.49(-71.79%)	81.28(-77.75%)	91.87(-77.22%)	74.81(-81.44%)
4.20				1.4	0	79.67(-80.02%)	55.57(-84.79%)	62.60(-84.48%)	50.07(-87.58%)
4.50				1.5	0	58.24(-85.40%)	39.86(-89.09%)	44.61(-88.94%)	35.63(-91.16%)
5.10				1.7	0	33.81(-91.52%)	23.14(-93.66%)	25.39(-93.71%)	20.86(-94.83%)
6.00				2	0	17.67(-95.57%)	12.83(-96.49%)	13.61(-96.63%)	12.02(-97.02%)
3.33				1	0.05	191.67(-51.94%)	148.22(-59.42%)	164.29(-59.27%)	149.49(-62.92%)
3.49				1	0.07	145.19(-63.59%)	108.28(-70.36%)	119.63(-70.34%)	106.98(-73.46%)
3.75				1	0.1	97.56(-75.54%)	70.67(-80.65%)	77.47(-80.79%)	68.55(-83.00%)
4.05				1	0.13	67.22(-83.14%)	48.47(-86.73%)	52.61(-86.96%)	46.69(-88.42%)
<i>UCL</i>						10	7	7	5.75
λ						1	0.27	0.35	0.18

Πίνακας 5.12: Σύγκριση των διαγραμμάτων Shewhart και *s*-EWMA για την ανίχνευση αυξήσεων σε BINARCH(1) διεργασία

μ_X	n	a_{00}	a_{01}	δ	δ'	Shewhart	1-EWMA	2-EWMA	4-EWMA
6	15	0.15	0.625	1	0	371.59	364.51	396.98	378.45
6.6				1.1	0	193.3(-47.98%)	167.74(-53.98%)	169.32(-57.35%)	159.21(-57.93%)
7.2				1.2	0	107.46(-71.08%)	86.31(-76.32%)	83.24(-79.03%)	77.95(-79.40%)
7.8				1.3	0	63.61(-82.88%)	48.98(-86.56%)	46.20(-88.36%)	43.39(-88.53%)
8.4				1.4	0	39.94(-89.25%)	30.36(-91.67%)	28.50(-92.82%)	26.97(-92.87%)
9				1.5	0	26.49(-92.87%)	20.32(-94.43%)	19.22(-95.16%)	18.36(-95.15%)
10.2				1.7	0	13.5(-96.37%)	10.97(-96.99%)	10.73(-97.30%)	10.43(-97.24%)
12				2	0	6.58(-98.23%)	6.01(-98.35%)	6.27(-98.42%)	6.18(-98.37%)
6.92				1	0.05	112.11(-69.83%)	89.53(-75.44%)	87.00(-78.08%)	82.6(-78.17%)
7.38				1	0.07	71.93(-80.64%)	56.07(-84.62%)	53.67(-86.48%)	51.21(-86.47%)
8.18				1	0.1	39.05(-89.49%)	30.68(-91.58%)	29.32(-92.61%)	28.28(-92.53%)
9.18				1	0.13	22.96(-93.82%)	18.78(-94.85%)	18.2(-95.42%)	17.74(-95.31%)
<i>UCL</i>						13	11	10.5	10
λ						1	0.38	0.31	0.27

Πίνακας 5.13: Σύγκριση των διαγραμμάτων Shewhart και *s*-EWMA για την ανίχνευση αυξήσεων σε BINARCH(1) διεργασία

μ_x	n	a_{00}	a_{01}	δ	δ'	Shewhart	1-EWMA	2-EWMA	4-EWMA
7.5	15	0.2	0.6	1	0	339.26	346.21	337.98	334.15
8.25				1.1	0	151.59(-55.19%)	133.18(-61.53%)	124.65(-63.12%)	115.56(-65.42%)
9.00				1.2	0	74.03(-78.11%)	59.64(-82.77%)	54.88(-83.76%)	49.64(-85.14%)
9.75				1.3	0	39.43(-88.34%)	30.63(-91.15%)	28.24(-91.64%)	25.62(-92.33%)
10.50				1.4	0	22.85(-93.24%)	17.79(-94.86%)	16.64(-95.08%)	15.39(-95.39%)
11.25				1.5	0	14.34(-95.76%)	11.50(-96.68%)	10.96(-96.76%)	10.41(-96.88%)
12.75				1.7	0	6.97(-97.94%)	6.15(-98.22%)	6.08(-98.20%)	6.09(-98.18%)
15.00				2	0	3.49(-98.97%)	3.59(-98.96%)	3.69(-98.91%)	3.89(-98.84%)
8.57				1	0.05	91.75(-72.88%)	73.52(-78.76%)	68.92(-79.61%)	63.33(-81.05%)
9.09				1	0.07	56.42(-83.32%)	43.89(-87.32%)	41.22(-87.80%)	37.88(-88.66%)
10.0				1	0.1	28.98(-91.43%)	22.74(-93.43%)	21.66(-93.59%)	20.25(-93.94%)
11.1				1	0.13	16.39(-95.15%)	13.49(-96.10%)	13.09(-96.13%)	12.57(-96.24%)
<i>UCL</i>						14	13	12	11.75
λ						1	0.51	0.42	0.33

Πίνακας 5.14: Σύγκριση των διαγραμμάτων Shewhart και *s*-EWMA για την ανίχνευση αυξήσεων σε BINARCH(1) διεργασία

μ_x	n	a_{00}	a_{01}	δ	δ'	Shewhart	1-EWMA	2-EWMA	4-EWMA
12	30	0.15	0.625	1	0	401.07	368.14	369.01	364.74
13.20				1.1	0	160.02(-60.10%)	125.64(-65.87%)	107.11(-70.97%)	100.18(-72.53%)
14.40				1.2	0	72.99(-81.80%)	53.46(-85.48%)	43.74(-88.15%)	40.85(-88.80%)
15.60				1.3	0	37.73(-90.59%)	27.40(-92.56%)	23.08(-93.75%)	22.02(-93.96%)
16.80				1.4	0	21.83(-94.56%)	16.37(-95.55%)	14.62(-96.04%)	14.29(-96.08%)
18.00				1.5	0	13.94(-96.52%)	11.01(-97.01%)	10.49(-97.16%)	10.45(-97.13%)
20.40				1.7	0	7.16(-98.21%)	6.38(-98.27%)	6.78(-98.16%)	6.91(-98.11%)
24.00				2	0	3.84(-99.04%)	4.02(-98.91%)	4.70(-98.73%)	4.83(-98.68%)
13.85				1	0.05	85.59(-78.66%)	63.54(-82.74%)	54.75(-85.16%)	52.12(-85.71%)
14.75				1	0.07	50.17(-87.49%)	37.21(-89.89%)	32.54(-91.18%)	31.31(-91.42%)
16.36				1	0.1	25.18(-93.72%)	19.58(-94.68%)	18.04(-95.11%)	17.73(-95.14%)
18.37				1	0.13	14.54(-96.37%)	12.12(-96.71%)	11.84(-96.79%)	11.85(-96.75%)
<i>UCL</i>						22	19	17	16.25
λ						1	0.38	0.19	0.15

Από τα αποτελέσματα της αριθμητικής σύγκρισης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων (Πίνακες 5.11- 5.14) γίνεται φανερό ότι τα διαγράμματα s -EWMA υπερτερούν των Shewhart, ενώ φαίνεται να βελτιώνεται η ευαισθησία τους για μικρές τιμές του λ και μεγάλες τιμές του s . Η αποτελεσματικότητα του διαγράμματος s -EWMA είναι εμφανής σε όλες τις περιπτώσεις στις οποίες επιτυγχάνει μικρότερη τιμή $ssARL$, σε σχέση με το Shewhart. Με άλλα λόγια, αυτό σημαίνει ότι το διάγραμμα s -EWMA ανιχνεύει ταχύτερα μία δεδομένη μετατόπιση.

Επιπλέον, οι τιμές που δίνονται σε παρένθεση προκύπτουν ως

$$100 \cdot (ssARL - zsARL)/zsARL\%$$

όπου η τιμή $zsARL$ είναι η εντός ελέγχου απόδοση για $(\delta, \delta') = (1, 0)$. Η ποσότητα αυτή έχει χρησιμοποιηθεί από τους Weiß and Testik (2011) (δείτε επίσης Li et al. (2019)) ως μέτρο απόδοσης μεταξύ των διαφόρων διαγραμμάτων ελέγχου. Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι για δεδομένες μετατοπίσεις (δ, δ') στις παραμέτρους της διεργασίας το εκτός ελέγχου $ssARL$ είναι μικρότερο από την εντός ελέγχου τιμή $zsARL$ (όπως είναι και το ζητούμενο ώστε να μπορεί το διάγραμμα να ανιχνεύει τη συγκεκριμένη αλλαγή) ενώ το ποσοστό δείχνει τον βαθμό μείωσης στην τιμή του ARL σε σύγκριση με την τιμή του όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Επομένως, όσο μεγαλύτερο είναι το ποσοστό (σε απόλυτη τιμή), τόσο καλύτερη είναι η απόδοση του διαγράμματος στην ανίχνευση δεδομένης μετατόπισης. Με βάση το συγκεκριμένο μέτρο απόδοσης, δεν είναι δύσκολο να διαπιστωθεί ότι για μικρές έως και μεσαίες μετατοπίσεις στην παράμετρο a_{00} ή στην a_{01} , το διάγραμμα 4-EWMA έχει την καλύτερη απόδοση μεταξύ των εξεταζόμενων διαγραμμάτων.

Έπεται λοιπόν ότι το διάγραμμα s -EWMA είναι κατάλληλο για την ανίχνευση μικρών έως και μεσαίων αυξήσεων στις παραμέτρους της BINARCH(1) διεργασίας με την ικανότητα του αυτή να βελτιστοποιείται για $s = 4$ (μεταξύ των τιμών $s \in \{1,2,4\}$).

Στη συνέχεια, ακολουθούν οι Πίνακες 5.15-5.18, στους οποίους εξετάζεται η περίπτωση των μειώσεων στις εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων μιας διεργασίας BINARCH(1). Συγκεκριμένα, θεωρείται ότι η παράμετρος a_{00} μεταβάλλεται σε $a_{10} = \delta \cdot a_{00}$ με $\delta \in \{1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.2\}$ καθώς επίσης και η a_{01} μειώνεται σε $a_{11} = a_{01} - \delta'$, με $\delta' \in \{1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.2\}$. Επίσης, στις στήλες « a_{00} », « a_{01} », « n », « μ_0 » δίνονται οι τιμές των παραμέτρων της εντός ελέγχου διεργασίας, ενώ οι γραμμές « LCL », « λ » αποτελούνται από τις τιμές των παραμέτρων του διαγράμματος.

Πίνακας 5.15: Σύγκριση των διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA για την ανίχνευση μειώσεων σε BINARCH(1) διεργασία

μ_x	n	a_{00}	a_{01}	δ	δ'	Shewhart	1-EWMA	2-EWMA	4-EWMA
18.75	30	0.05	0.92	1	0	408.78	372.98	409.45	403.22
16.88				0.9	0	227.67(-44.31%)	202.88(-45.61%)	216.65(-47.09%)	207.84(-48.45%)
15.0				0.8	0	137.06(-66.47%)	122.10(-67.26%)	128.19(-68.69%)	122.36(-69.65%)
13.13				0.7	0	89.06(-78.21%)	79.97(-78.56%)	83.05(-79.72%)	79.70(-80.23%)
11.25				0.6	0	61.79(-84.88%)	56.21(-84.93%)	58.00(-85.83%)	56.31(-86.03%)
9.38				0.5	0	45.32(-88.91%)	41.87(-88.77%)	43.07(-89.48%)	42.43(-89.48%)
7.50				0.4	0	34.80(-91.49%)	32.70(-91.23%)	33.61(-91.79%)	33.64(-91.66%)
3.75				0.2	0	22.84(-94.41%)	22.20(-94.05%)	22.89(-94.41%)	23.67(-94.13%)
11.54				1	0.05	72.48(-82.27%)	62.90(-83.14%)	65.33(-84.04%)	59.20(-85.32%)
8.33				1	0.1	31.73(-92.24%)	27.85(-92.53%)	28.73(-92.98%)	27.44(-93.19%)
6.52				1	0.15	18.78(-95.41%)	17.21(-95.39%)	17.99(-95.61%)	18.45(-95.42%)
5.36				1	0.2	12.85(-96.86%)	12.54(-96.64%)	13.37(-96.73%)	14.73(-96.35%)
<i>LCL</i>						3	6	7	9
λ						1	0.26	0.2	0.11

Πίνακας 5.16: Σύγκριση των διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA για την ανίχνευση μειώσεων σε BINARCH(1) διεργασία

μ_x	n	a_{00}	a_{01}	δ	δ'	Shewhart	1-EWMA	2-EWMA	4-EWMA
6.25	30	0.1	0.52	1	0	398.2	407.15	408.02	404
5.63				0.9	0	213.02(-46.50%)	175.69(-56.85%)	163.12(-60.02%)	148.19(-63.32%)
5.00				0.8	0	116.66(-70.70%)	82.26(-79.80%)	73.48(-81.99%)	63.93(-84.18%)
4.38				0.7	0	65.63(-83.52%)	42.02(-89.68%)	37.14(-90.90%)	32.10(-92.05%)
3.75				0.6	0	38.10(-90.43%)	23.48(-94.23%)	21.05(-94.84%)	18.51(-95.42%)
3.13				0.5	0	22.95(-94.24%)	14.33(-96.48%)	13.20(-96.76%)	12.00(-97.03%)
2.50				0.4	0	14.42(-96.38%)	9.51(-97.66%)	9.04(-97.78%)	8.54(-97.89%)
1.25				0.2	0	6.58(-98.35%)	5.17(-98.73%)	5.21(-98.72%)	5.30(-98.69%)
5.66				1	0.05	260.21(-34.65%)	250.2(-38.55%)	232.86(-42.93%)	214.69(-46.86%)
5.17				1	0.1	179.39(-54.95%)	163.22(-59.91%)	143.34(-64.87%)	125.08(-69.04%)
4.76				1	0.15	129.05(-67.59%)	111.79(-72.54%)	93.54(-77.07%)	78.35(-80.61%)
4.41				1	0.2	96.06(-75.88%)	79.73(-80.42%)	64.15(-84.28%)	52.24(-87.07%)
<i>LCL</i>						0	1	2	2.5
λ						1	0.62	0.41	0.32

Πίνακας 5.17: Σύγκριση των διαγραμμάτων Shewhart και *s*-EWMA για την ανίχνευση μειώσεων σε BINARCH(1) διεργασία

μ_x	n	a_{00}	a_{01}	δ	δ'	Shewhart	1-EWMA	2-EWMA	4-EWMA
12	30	0.15	0.625	1	0	393.86	409.7	408.19	393.26
10.80				0.9	0	156.66(-60.22%)	142.90(-65.12%)	142.90(-64.99%)	128.66(-67.28%)
9.60				0.8	0	69.48(-82.36%)	59.03(-85.59%)	59.03(-85.54%)	51.84(-86.82%)
8.40				0.7	0	34.49(-91.24%)	28.59(-93.02%)	28.59(-93.00%)	25.52(-93.51%)
7.20				0.6	0	19.16(-95.14%)	16.02(-96.09%)	16.02(-96.08%)	14.50(-96.31%)
6.00				0.5	0	11.82(-97.00%)	10.18(-97.52%)	10.18(-97.51%)	9.49(-97.59%)
4.80				0.4	0	8.00(-97.97%)	7.15(-98.25%)	7.15(-98.25%)	6.88(-98.25%)
2.40				0.2	0	4.54(-98.85%)	4.38(-98.93%)	4.38(-98.93%)	4.45(-98.87%)
10.59				1	0.05	166.54(-57.72%)	165.40(-59.63%)	160.10(-60.78%)	144.30(-63.31%)
9.47				1	0.1	84.04(-78.66%)	80.61(-80.32%)	76.45(-81.27%)	66.10(-83.19%)
8.57				1	0.15	48.16(-87.77%)	44.99(-89.02%)	42.10(-89.69%)	35.65(-90.93%)
7.83				1	0.2	30.31(-92.30%)	27.80(-93.21%)	28.54(-93.01%)	21.79(-94.46%)
<i>LCL</i>						3	4	4.5	5.5
λ						1	0.75	0.64	0.46

Πίνακας 5.18: Σύγκριση των διαγραμμάτων Shewhart και *s*-EWMA για την ανίχνευση μειώσεων σε BINARCH(1) διεργασία

μ_x	n	a_{00}	a_{01}	δ	δ'	Shewhart	1-EWMA	2-EWMA	4-EWMA
12.5	15	0.15	0.82	1	0	372.15	356.37	352.22	366.6
11.25				0.9	0	133.21(-64.21%)	124.91(-64.95%)	118.99(-66.22%)	109.98(-70.00%)
10.00				0.8	0	62.52(-83.20%)	58.41(-83.61%)	55.10(-84.36%)	49.74(-86.43%)
8.75				0.7	0	35.24(-90.53%)	33.07(-90.72%)	31.37(-91.09%)	29.04(-92.08%)
7.50				0.6	0	22.60(-93.93%)	21.39(-94.00%)	20.58(-94.16%)	19.90(-94.57%)
6.25				0.5	0	15.91(-95.72%)	15.23(-95.73%)	14.92(-95.76%)	15.11(-95.88%)
5.00				0.4	0	11.98(-96.78%)	11.61(-96.74%)	11.61(-96.70%)	12.27(-96.65%)
2.50				0.2	0	7.81(-97.90%)	7.77(-97.82%)	8.11(-97.70%)	9.16(-97.50%)
9.79				1	0.05	61.84(-83.38%)	58.01(-83.72%)	53.70(-84.75%)	45.07(-87.71%)
8.04				1	0.1	25.03(-93.27%)	23.51(-93.40%)	21.75(-93.82%)	19.46(-94.69%)
6.82				1	0.15	14.03(-96.23%)	13.35(-96.25%)	12.74(-96.38%)	12.72(-96.53%)
5.92				1	0.2	9.26(-97.51%)	9.01(-97.47%)	8.99(-97.45%)	9.85(-97.31%)
<i>LCL</i>						4	5	6.5	8.75
λ						1	0.51	0.31	0.11

Τα αποτελέσματα της αριθμητικής σύγκρισης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων επιβεβαιώνουν για άλλη μία φορά την υπεροχή των διαγραμμάτων *s*-EWMA έναντι των Shewhart.

Θα πρέπει επίσης να αναφερθεί ότι για δεδομένη μετατόπιση στην τιμή μιας εκ των δύο παραμέτρων της διεργασίας, δεν υπάρχουν σημαντικές διαφοροποιήσεις στις τιμές των ποσοστών μεταξύ των διαγραμμάτων 1-EWMA, 2-EWMA και 4-EWMA. Το πλεονέκτημα του 4-EWMA σε σχέση με τα άλλα δύο διαγράμματα EWMA είναι η ευελιξία του σχεδιασμού

του, η οποία επιτρέπει την επιλογή των τιμών των παραμέτρων σχεδιασμού του έτσι ώστε οι τιμές του $zsARL$ να είναι πολύ κοντά στην επιθυμητή. Ωστόσο, καθώς αυξάνεται το μέγεθος των μετατοπίσεων, το διάγραμμα Shewhart έχει συγκρίσιμη απόδοση με αυτές των διαγραμμάτων EWMA. Επομένως, δεδομένου της απλότητάς του σε εφαρμογή και ερμηνεία, προτείνεται η χρήση του σε αυτές τις περιπτώσεις.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι τόσο στην περίπτωση των αυξήσεων όσο και στην ανίχνευση των μειώσεων, οι παράμετροι του διαγράμματος s -EWMA καθορίστηκαν έτσι ώστε η απόδοση του να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στην εντός ελέγχου απόδοση του διαγράμματος Shewhart. Επομένως, η επιθυμητή τιμή ARL_0 στους Πίνακες 5.11-5.18 δεν είναι απαραίτητα ίση με 370.4.

5.2.5 Διαγράμματα Ελέγχου CUSUM για την παρακολούθηση διεργασιών BINARCH(1)

Εκτός από τα διαγράμματα EWMA, που αναπτύξαμε στην προηγούμενη ενότητα, είναι γνωστό ότι τα διαγράμματα CUSUM (Page (1954)) είναι και αυτά διαγράμματα ελέγχου με μνήμη και ως εκ τούτου είναι ευαίσθητα στην ανίχνευση μικρών και μεσαίων μετατοπίσεων στις τιμές των παραμέτρων μιας διεργασίας. Επομένως μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ανιχνεύουν αυτού του είδους τις αλλαγές ταχύτερα σε σύγκριση με τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η ανάπτυξη και η λειτουργία άνω και κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου τύπου CUSUM για την παρακολούθηση μιας διεργασίας τύπου BINARCH(1). Όπως έχει ήδη αναφερθεί, αυτό που κυρίως ενδιαφέρει είναι η ανίχνευση αυξήσεων στο μέσο επίπεδο της διεργασίας, δηλαδή αύξηση στην τιμή της $\mu_{0,x} = na_{00}/(1 - a_{01})$ καθώς μία τέτοια μεταβολή συνήθως σχετίζεται με την χειροτέρευση της διεργασίας. Ωστόσο, αν οι ειδικές αιτίες μεταβλητότητας επηρεάζουν τη διεργασία με τέτοιο τρόπο ώστε να επέλθει μείωση στην τιμή της $\mu_{0,x}$, αυτό σημαίνει ότι η διεργασία έχει βελτιωθεί. Στη συνέχεια θα μας απασχολήσουν και οι δύο αυτές περιπτώσεις.

5.2.5.1 Το Διάγραμμα Ελέγχου LR-CUSUM

Συνήθως σε ένα μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου CUSUM, το οποίο είναι κατάλληλο για την ανίχνευση αυξήσεων στο μέσο επίπεδο μιας διεργασίας, απεικονίζονται (για $t \geq 1$) τιμές της στατιστικής συνάρτησης

$$C_t^+ = \max\{0, C_{t-1}^+ + X_t - k\}, \quad C_0^+ = 0,$$

όπου k είναι η τιμή αναφοράς (*reference value*) του διαγράμματος. Το διάγραμμα δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας για πρώτη φορά όταν $C_t^+ \geq h$, όπου h είναι το διάστημα απόφασης

του διαγράμματος. Αντίστοιχα, σε ένα μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου CUSUM, το οποίο είναι κατάλληλο για την ανίχνευση μειώσεων στο μέσο επίπεδο μιας διεργασίας, απεικονίζονται (για $t \geq 1$) τιμές της στατιστικής συνάρτησης

$$C_t^- = \max\{0, C_{t-1}^- - X_t + k\}, \quad C_0^- = 0.$$

Ο κανόνας απόφασης είναι ανάλογος με την περίπτωση του διαγράμματος που βασίζεται στη στατιστική συνάρτηση C_t^+ (δείτε Anastasopoulou and Rakitzis (2021), Rakitzis et al. (2016)). Η παραπάνω μορφή του διαγράμματος CUSUM αναφέρεται και ως *benchmark CUSUM* (Weiß and Testik (2012)).

Εκτός όμως από το benchmark CUSUM, στη βιβλιογραφία έχει προταθεί και το διάγραμμα CUSUM το οποίο βασίζεται στο λόγο πιθανοφάνειας (*likelihood ratio CUSUM*, Weiß and Testik (2012)), το οποίο και παρουσιάζεται στη συνέχεια. Θα αναφερόμαστε στο συγκεκριμένο διάγραμμα ως το διάγραμμα ελέγχου LR-CUSUM και η ανάπτυξή του γίνεται ως εξής: Χρησιμοποιώντας τις πιθανότητες μετάβασης που δίνονται στο Κεφάλαιο 2 (εξίσωση (2.14)) σχηματίζεται η ακόλουθη στατιστική συνάρτηση $LR(a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11})$ για μια διαδικασία BINARCH(1):

$$\begin{aligned} LR(a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}) &= \frac{L(a_{10}, a_{11})}{L(a_{00}, a_{01})} \\ &= \frac{\binom{n}{x_t} \left(a_{10} + \frac{1}{n} a_{11} \cdot x_{t-1}\right)^{x_t} \left(1 - a_{10} - \frac{1}{n} a_{11} \cdot x_{t-1}\right)^{n-x_t}}{\binom{n}{x_t} \left(a_{00} + \frac{1}{n} a_{01} \cdot x_{t-1}\right)^{x_t} \left(1 - a_{00} - \frac{1}{n} a_{01} \cdot x_{t-1}\right)^{n-x_t}} \\ &= \left[\frac{a_{10} + \frac{1}{n} a_{11} \cdot x_{t-1}}{a_{00} + \frac{1}{n} a_{01} \cdot x_{t-1}} \right]^{x_t} \left[\frac{1 - a_{10} - \frac{1}{n} a_{11} \cdot x_{t-1}}{1 - a_{00} - \frac{1}{n} a_{01} \cdot x_{t-1}} \right]^{n-x_t} \end{aligned}$$

όπου a_{00}, a_{01} είναι οι εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων της διεργασίας και αντίστοιχα, a_{10}, a_{11} είναι οι εκτός ελέγχου τιμές αυτών.

Επομένως, αν lR_t είναι ο λογάριθμός του $LR(a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11})$, τότε

$$lR_t = x_t \cdot \log \left[\frac{a_{10} + \frac{1}{n} a_{11} \cdot x_{t-1}}{a_{00} + \frac{1}{n} a_{01} \cdot x_{t-1}} \right] + (n - x_t) \cdot \log \left[\frac{1 - a_{10} - \frac{1}{n} a_{11} \cdot x_{t-1}}{1 - a_{00} - \frac{1}{n} a_{01} \cdot x_{t-1}} \right], t \geq 2$$

και η στατιστική συνάρτηση του διαγράμματος ελέγχου LR-CUSUM είναι

$$C_t = \max\{0, C_{t-1} + lR_t\}$$

και δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο t -οστο δείγμα (με $t \geq 2$) αν $C_t \geq h$, όπου h είναι το όριο ελέγχου (διάστημα απόφασης) του διαγράμματος LR-CUSUM.

Έστω ότι η παρουσία ειδικών αιτιών μεταβλητότητας, αλλάζει τις παραμέτρους της διεργασίας ως εξής:

- Μεταβολή μόνο στην παράμετρο a_{00} : Από a_{00} σε $a_{10} = \delta^* a_{00}$, ($\delta^* > 1$, για αυξήσεις στο a_{00} ή $0 < \delta^* < 1$ για μειώσεις στο a_{00}). Τότε, η παραπάνω στατιστική συνάρτηση γίνεται

$$C_t = \max \left\{ C_{t-1} + X_t \cdot \log \left[\frac{\delta^* a_{00} + \frac{a_{01}}{n} X_{t-1}}{a_{00} + \frac{a_{01}}{n} X_{t-1}} \right] + (n - X_t) \cdot \log \left[\frac{1 - \delta^* a_{00} - \frac{a_{01}}{n} X_{t-1}}{1 - a_{00} - \frac{a_{01}}{n} X_{t-1}} \right] \right\},$$

- Μεταβολή μόνο στην παράμετρο a_{01} σε $a_{11} = a_{01} + \tau^*$ (για αυξήσεις στο a_{01}) ή $a_{01} - \tau^*$ (για μειώσεις στο a_{01}), όπου $\tau^* > 0$. Τότε, η παραπάνω στατιστική συνάρτηση γίνεται

$$C_t = \max \left\{ C_{t-1} + X_t \cdot \log \left[\frac{a_{00} + \frac{a_{01} + \tau^*}{n} X_{t-1}}{a_{00} + \frac{a_{01}}{n} X_{t-1}} \right] + (n - X_t) \cdot \log \left[\frac{1 - a_{00} - \frac{a_{01} + \tau^*}{n} X_{t-1}}{1 - a_{00} - \frac{a_{01}}{n} X_{t-1}} \right] \right\},$$

ή

$$C_t = \max \left\{ C_{t-1} + X_t \cdot \log \left[\frac{a_{00} + \frac{a_{01} - \tau^*}{n} X_{t-1}}{a_{00} + \frac{a_{01}}{n} X_{t-1}} \right] + (n - X_t) \cdot \log \left[\frac{1 - a_{00} - \frac{a_{01} - \tau^*}{n} X_{t-1}}{1 - a_{00} - \frac{a_{01}}{n} X_{t-1}} \right] \right\},$$

- Ταυτόχρονη αλλαγή και στις δύο παραμέτρους. Τότε, η παραπάνω στατιστική συνάρτηση γίνεται

$$C_t = \max \left\{ C_{t-1} + X_t \cdot \log \left[\frac{\delta^* a_{00} + \frac{a_{01} + \tau^*}{n} X_{t-1}}{a_{00} + \frac{a_{01}}{n} X_{t-1}} \right] + (n - X_t) \cdot \log \left[\frac{1 - \delta^* a_{00} - \frac{a_{01} + \tau^*}{n} X_{t-1}}{1 - a_{00} - \frac{a_{01}}{n} X_{t-1}} \right] \right\},$$

ή

$$C_t = \max \left\{ C_{t-1} + X_t \cdot \log \left[\frac{\delta^* a_{00} + \frac{a_{01} - \tau^*}{n} X_{t-1}}{a_{00} + \frac{a_{01}}{n} X_{t-1}} \right] + (n - X_t) \cdot \log \left[\frac{1 - \delta^* a_{00} - \frac{a_{01} - \tau^*}{n} X_{t-1}}{1 - a_{00} - \frac{a_{01}}{n} X_{t-1}} \right] \right\},$$

Ουσιαστικά, οι εκτός ελέγχου τιμές a_{10}, a_{11} των παραμέτρων της διεργασίας ορίστηκαν με βάση τις εντός ελέγχου τιμές a_{00}, a_{01} . Άρα, θα πρέπει να επιλεγθεί το είδος της μετατόπισης που ενδιαφέρει να ανιχνευθεί και στη συνέχεια να σχηματιστούν τα αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου LR-CUSUM.

5.2.5.2 Το Συνδυασμένο Διάγραμμα Ελέγχου CUSUM (Combined CUSUM)

Εκτός από το διάγραμμα LR-CUSUM που ορίστηκε προηγουμένως, προτείνεται επίσης η χρήση ενός συνδυασμένου διαγράμματος (*combined scheme*), το οποίο αποτελείται από δύο διαγράμματα LR-CUSUM που εκτελούνται ταυτόχρονα. Συγκεκριμένα, το Combined LR-CUSUM (ή cLR-CUSUM) αποτελείται από:

- ένα διάγραμμα LR-CUSUM το οποίο είναι κατάλληλο να ανιχνεύει αλλαγές μόνο στην παράμετρο a_{00} και

- ii. ένα διάγραμμα LR-CUSUM το οποίο μπορεί να εντοπίζει μεταβολές μόνο στην a_{01} .

Το Combined LR-CUSUM δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας για πρώτη φορά στο t -οστο δείγμα (με $t \geq 2$) αν $C_t \geq h_A$ ή $C_t \geq h_B$, όπου h_A και h_B είναι τα όρια ελέγχου για κάθε διάγραμμα του cLR-CUSUM, αντίστοιχα.

5.2.5.3 Στατιστικός σχεδιασμός του διαγράμματος LR-CUSUM

Για τον στατιστικό σχεδιασμό του διαγράμματος LR-CUSUM απαιτείται ο προσδιορισμός της τιμής του h (ή των h_A και h_B για το cLR-CUSUM), έτσι ώστε η εντός ελέγχου απόδοσή του να είναι *το δυνατόν κοντά* στην επιθυμητή.

Παρακάτω, στον Πίνακα 5.19 δίνονται τα βήματα της αλγοριθμικής διαδικασίας μέσω των οποίων είναι δυνατός ο υπολογισμός της παραμέτρου h του διαγράμματος LR-CUSUM για διεργασίες τύπου BINARCH(1), ώστε αυτό να έχει την επιθυμητή εντός ελέγχου απόδοση. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα παρακάτω βήματα ισχύουν για οποιοδήποτε είδος μετατόπισης (είτε αύξηση είτε μείωση) στις τιμές των παραμέτρων μιας διεργασίας BINARCH(1).

Πίνακας 5.19: Διαδικασία Ανάπτυξης Διαγράμματος Ελέγχου LR-CUSUM

Βήμα 1.	Επιλέγουμε τις εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων n , a_{00} , a_{01} της διεργασίας BINARCH(1) καθώς και την επιθυμητή τιμή ARL_0 για το $zsARL$.
Βήμα 2.	Επιλέγουμε τη μετατόπιση (δ^* , τ^*) στις τιμές των παραμέτρων της διεργασίας που μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε (π.χ. $a_{10} = \delta^* \cdot a_{00}$ με $0 < \delta^* \neq 1$ και $a_{11} = a_{01} + \tau^*$, με το τ^* να είναι τέτοιο ώστε $a_{10} + a_{11} < 1$)
Βήμα 3.	Προσδιορίζουμε την τιμή h έτσι ώστε η τιμή $zsARL$ να είναι <i>το δυνατόν κοντά</i> στην επιθυμητή τιμή ARL_0

5.2.5.4 Αριθμητική μελέτη της απόδοσης των διαγραμμάτων CUSUM

Στην παρούσα ενότητα, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα σχετικά με την απόδοση των διαγραμμάτων LR-CUSUM και cLR-CUSUM. Σχετικά με τις εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων, επιλέχθηκαν διάφοροι συνδυασμοί για τις τιμές (a_{00} , a_{01}) έτσι ώστε $a_{00} + a_{01} < 1$. Στην περίπτωση που η διαδικασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου τότε θεωρείται ότι μπορούν να μεταβληθούν και οι δύο παράμετροι της διεργασίας, είτε ταυτόχρονα είτε όχι. Συγκεκριμένα, θεωρούνται τα εξής σενάρια:

- Η παράμετρος a_{00} μεταβάλλεται σε $a_{10} = \delta \cdot a_{00}$ με $0 < \delta < 1$ (μείωση στην a_{00}) ή $\delta > 1$ (αύξηση στην a_{00}), με την προϋπόθεση ότι $a_{00} + a_{01} < 1$.

- Η παράμετρος a_{01} μεταβάλλεται σε $a_{10} = a_{01} + \tau$, (αύξηση στην a_{01}) ή σε $a_{10} = a_{01} - \tau$, (αύξηση στην a_{01}), όπου $\tau > 0$ και $a_{00} + a_{01} < 1$.

Στους Πίνακες 5.20 και 5.21 δίνονται οι τιμές $zsARL$ (όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου) και $ssARL$ (για διάφορες μετατοπίσεις στις παραμέτρους της διεργασίας) των διαγραμμάτων LR-CUSUM και cLR-CUSUM. Συγκεκριμένα, δίνονται αποτελέσματα για τις παρακάτω δύο διεργασίες: Στον Πίνακα 5.20 δίνεται η απόδοση των διαγραμμάτων όταν $(a_{00}, a_{01}, n) = (0.05, 0.5, 30)$ με $\mu_{0,X} = 3$ ενώ στον Πίνακα 5.21 οι εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων της διεργασίας είναι $(a_{00}, a_{01}, n) = (0.05, 0.92, 30)$ με $\mu_{0,X} = 18.75$. Οι εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων της διεργασίας δίνονται στις στήλες " a_{00} ", " a_{01} ", " n ", " μ_0 ". Επίσης, στη γραμμή h_A δίνεται η τιμή του h για τα υπό εξέταση διαγράμματα LR-CUSUM, ενώ τα h_A και h_B είναι τα όρια ελέγχου που χρησιμοποιούνται στο διάγραμμα cLR-CUSUM.

Επιπλέον, στις γραμμές " d_A^* ", " d_B^* ", " τ_A^* ", " τ_B^* " δίνονται οι μετατοπίσεις στις τιμές των παραμέτρων της διεργασίας, τις οποίες θέλουμε να ανιχνεύσουμε όσο πιο γρήγορα γίνεται. Ενδεικτικά, για την 1^η περίπτωση (Πίνακας 5.20), έχει επιλεγθεί μεταβολή (αύξηση) της τάξης του 20% στο a_{00} (δηλ. $\delta = 1.2$) και αύξηση κατά 0.1 στην τιμή της a_{01} (δηλ. $a_{10} = a_{01} + 0.1$). Αντίστοιχα, για τη 2^η περίπτωση (Πίνακας 5.21), έχει επιλεγθεί μεταβολή (μείωση) της τάξης του 20% στο a_{00} (δηλ. $\delta = 0.8$) και μείωση κατά 0.1 στην τιμή της a_{01} (δηλ. $a_{10} = a_{01} - 0.1$).

Για τον υπολογισμό της απόδοσης των διαγραμμάτων LR-CUSUM και cLR-CUSUM χρησιμοποιήθηκε Monte Carlo προσομοίωση (50000 επαναλήψεις).

Πίνακας 5.20: Σύγκριση των διαγραμμάτων LR-CUSUM και cLR-CUSUM στην ανίχνευση αυξήσεων

μ_X	n	a_{00}	a_{01}	δ	τ	LR-CUSUM			cLR-CUSUM
3	30	0.05	0.5	1	0	398.63	397.67	397.08	385.23
3.30				1.1	0	138.12	171.85	178	142.31
3.90				1.3	0	46.57	56.35	57.02	47.47
6.00				2	0	13.96	12.11	11.66	12.49
3.33				1	0.05	127.68	126.29	131.73	119.79
3.49				1	0.07	93.51	89.23	93.8	85.33
3.75				1	0.1	63.4	57.74	60.54	57.57
3.66				1.1	0.05	67.71	70.96	74.93	65.69
4.33				1.3	0.05	32.34	33.05	33.03	31.3
5.00				1.5	0.05	21.23	20.2	19.73	20.11
3.84				1.1	0.07	54.41	54.88	57.29	52.13
4.53				1.3	0.07	28.26	27.65	27.98	27.24
4.50				1.2	0.1	30.12	28.56	28.64	28.23
4.87				1.3	0.1	24.13	22.24	21.98	22.32
h_A						2.11	2.05	2.9	2.33
h_B									2.26
d_A^*						1.2	1	1.2	1.2
d_B^*									1
τ_A^*						0	0.1	0.1	0
τ_B^*									0.1

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που καταγράφονται στον Πίνακα 5.20, διαπιστώνουμε ότι τα διαγράμματα LR-CUSUM και cLR-CUSUM έχουν συγκρίσιμη εντός ελέγχου απόδοση. Το διάγραμμα cLR-CUSUM φαίνεται να έχει καλύτερη απόδοση στην περίπτωση ανίχνευσης ταυτόχρονων αυξήσεων στις παραμέτρους της διεργασίας BINARCH(1). Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι οι τιμές $ssARL$ του διαγράμματος cLR-CUSUM είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες του διαγράμματος LR-CUSUM στις περιπτώσεις που εξετάζεται η ταυτόχρονη αύξηση των παραμέτρων.

Τέλος, με βάση τα αποτελέσματα του Πίνακα 5.20 μπορούμε να προτείνουμε το διάγραμμα LR-CUSUM για την ανίχνευση αυξήσεων μόνο στην παράμετρο a_{00} και το cLR-CUSUM για ταυτόχρονες αυξήσεις των δύο παραμέτρων ή για αυξήσεις μόνο στην παράμετρο a_{01} της διεργασίας BINARCH(1).

Πίνακας 5.21: Σύγκριση των διαγραμμάτων LR-CUSUM και cLR-CUSUM για την ανίχνευση μειώσεων

μ_X	n	a_{00}	a_{01}	δ	τ	LR-CUSUM			cLR-CUSUM
18.75	30	0.05	0.92	1	0	407.41	410.33	408.17	410.53
16.88				0.9	0	179.77	234.32	242.27	197.94
15.00				0.8	0	105.08	144.66	149.92	118.77
13.13				0.7	0	71.79	95.35	98.02	79.06
11.54				1	0.05	49.19	69.19	82.44	55.00
8.33				1	0.1	26.64	27.47	30.26	26.52
6.52				1	0.15	18.61	17.05	16.42	16.97
10.38				0.9	0.05	39.85	51.29	57.63	43.74
9.23				0.8	0.05	33.55	39.82	42.88	35.85
8.08				0.7	0.05	28.34	32.46	33.22	29.9
h_A						1.69	4.22	4.34	2.01
h_B									4.47
d_A^*						0.8	1	0.8	0.8
d_B^*									1
τ_A^*						0	0.1	0.1	0
τ_B^*									0.1

Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 5.21, γίνεται αντιληπτό ότι τα διαγράμματα LR-CUSUM και cLR-CUSUM έχουν συγκρίσιμη εντός ελέγχου απόδοση. Επιπλέον το διάγραμμα LR-CUSUM είναι μία καλή επιλογή αν επιθυμούμε να ανιχνεύσουμε ταυτόχρονες ή μεμονωμένες μειώσεις στις τιμές των παραμέτρων της BINARCH(1) διεργασίας. Αντίθετα, το διάγραμμα cLR-CUSUM μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε μεσαίες μετατοπίσεις στην τιμή της a_{01} .

Τέλος, η επαλήθευση των αριθμητικών αποτελεσμάτων που δίνονται στο Πίνακες 5.20 και 5.21 μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω προγράμματος στην R με τη μέθοδο της προσομοίωσης, το οποίο δίνεται στο Παράστημα Η. Συγκεκριμένα, οι κώδικες για τον υπολογισμό της εντός και της εκτός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων LR-CUSUM και των cLR-CUSUM δίνονται στο Παράρτημα Η1-Η4. Αντίστοιχα, τα αποτελέσματα που δίνονται στον Πίνακα 5.21 μπορούν να επιβεβαιωθούν από τους κώδικες στο Παράρτημα Η5-Η8.

5.3 Δίπλευρα Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA για Διεργασίες BINARCH(1)

Στην παρούσα ενότητα εξετάζεται η ανάπτυξη και η μελέτη των δίπλευρων διαγραμμάτων Shewhart και s-EWMA, για την παρακολούθηση των διαδικασιών BINARCH(1). Τα δίπλευρα

διαγράμματα είναι χρήσιμα όταν ενδιαφέρει η ανίχνευση είτε αυξήσεων είτε μειώσεων στο μέσο επίπεδο της διαδικασίας, χωρίς να υπάρχει εκ των προτέρων γνώση για την κατεύθυνση της μετατόπισης (αν είναι προς τα πάνω ή προς τα κάτω).

Έστω ότι οι τιμές της στατιστικής συνάρτησης s -EWMA (εξίσωση (3.3), Ενότητα 3.2) απεικονίζονται σε ένα διάγραμμα με ένα άνω όριο ελέγχου UCL_s και ένα κάτω όριο ελέγχου LCL_s . Εφόσον οι τιμές $Q_t^{(s)} \in (LCL_s, UCL_s)$ η διαδικασία θεωρείται ως εντός ελέγχου, διαφορετικά το διάγραμμα δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας. Το συγκεκριμένο διάγραμμα θα αναφέρεται ως δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου s -EWMA.

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart, με δύο όρια ελέγχου LCL_{SH} , UCL_{SH} . Συγκεκριμένα, στο διάγραμμα απεικονίζονται τιμές X_t , $t \geq 1$, από μια διεργασία BINARCH(1) και όταν για πρώτη φορά $X_t \notin (LCL_{SH}, UCL_{SH})$, το διάγραμμα δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο t -οστό σημείο. Ο υπολογισμός της απόδοσης των δίπλευρων διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA (π.χ. υπολογισμός του ARL) μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων.

Αναφορικά με τον στατιστικό σχεδιασμό του δίπλευρου διαγράμματος s -EWMA για δεδομένη τιμή του s , απαιτείται ο προσδιορισμός των τιμών των παραμέτρων του (λ , LCL_s , UCL_s) έτσι ώστε η εντός ελέγχου τιμή του $zsARL$ να ισούται με την επιθυμητή τιμή ARL_0 . Είναι σαφές ότι δεν υπάρχει ένα μοναδικό σύνολο τιμών για τις παραμέτρους του διαγράμματος που να δίνει την επιθυμητή εντός ελέγχου απόδοση. Επιπλέον, σε ένα τέτοιο διάγραμμα, η ανίχνευση των μετατοπίσεων προς κάθε κατεύθυνση είναι εξίσου σημαντική. Επομένως, δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι παρουσιάζει ενδιαφέρον μία συγκεκριμένη μετατόπιση για την οποία μπορεί να βελτιστοποιηθεί το διάγραμμα και να την ανιχνεύσει έγκαιρα.

Για τον προσδιορισμό των ορίων ελέγχου των δίπλευρων διαγραμμάτων υποθέτουμε ότι λαμβάνουν ακέραιες τιμές, οι οποίες τοποθετούνται συμμετρικά της κεντρικής γραμμής (δηλ. πάνω και κάτω από αυτή). Η κεντρική γραμμή είναι περίπου ίση με την μέση τιμή της εντός ελέγχου διεργασίας και συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι είναι $CL = [\mu_{0,X}]$. Επομένως, η γενική μορφή των ορίων ελέγχου του δίπλευρου διαγράμματος s -EWMA είναι

$$LCL_s = CL - K, UCL_s = CL + K,$$

όπου $K \in \{1/s, 2/s, \dots\}$. Για $\lambda = 1$ και $s = 1$ προκύπτει το δίπλευρο διάγραμμα Shewhart.

Η διαδικασία προσδιορισμού των ορίων ελέγχου του δίπλευρου διαγράμματος s -EWMA είναι η εξής: Αρχικά, προσδιορίζονται οι τιμές των ορίων ελέγχου LCL_{SH} , UCL_{SH} για το δίπλευρο διάγραμμα Shewhart (δηλ. η τιμή του K όταν $\lambda = 1$) ώστε η εντός ελέγχου τιμή του $zsARL$ να είναι το δυνατόν κοντά στην επιθυμητή ARL_0 . Στη συνέχεια, για δεδομένη τιμή s

(π.χ. στο {1,2,4}) και για τιμές $\lambda \in \{0.99, 0.98, \dots, 0.05\}$ προσδιορίζεται η τιμή K ώστε η εντός ελέγχου απόδοση του δίπλευρου διαγράμματος s -EWMA να είναι η επιθυμητή.

5.3.1 Αριθμητική σύγκριση της απόδοσης των δίπλευρων διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA

Στην ενότητα αυτή δίνονται αριθμητικές συγκρίσεις μεταξύ των δίπλευρων διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA για διάφορες διεργασίες BINARCH(1). Τα αποτελέσματα δίνονται στους Πίνακες 5.22-5.23. Επίσης, όπως και στην περίπτωση της σύγκρισης των μονόπλευρων διαγραμμάτων, οι τιμές στις παρενθέσεις υπολογίζονται ως

$$100 \cdot (ssARL - zsARL)/zsARL\%$$

Συγκεκριμένα εξετάζονται οι εξής περιπτώσεις:

- Μετατοπίσεις μόνο στην παράμετρο a_{00} , με $\delta \in \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95\}$ οι οποίες οδηγούν σε εκτός ελέγχου διεργασία και συγκεκριμένα σε $\mu_{1,X} = n \cdot \delta \cdot \frac{a_{00}}{1-a_{01}} < \mu_{0,X}$.
- Μετατοπίσεις μόνο στην παράμετρο a_{00} , με $\delta \in \{1.05, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$ που οδηγούν σε εκτός ελέγχου διεργασία με $\mu_{1,X} = n \cdot \delta \cdot \frac{a_{00}}{1-a_{01}} > \mu_{0,X}$.
- Μετατοπίσεις μόνο στην παράμετρο a_{01} , με $a_{11} = a_{01} + \delta'$. Για $\delta' < 0$ υπάρχει μείωση στο μέσο επίπεδο της διαδικασίας, ενώ για $\delta' > 0$ υπάρχει αύξηση. Οι τιμές δ' έχουν επιλεγεί έτσι ώστε να μην παραβιάζεται η ανισότητα $a_{01} + a_{11} < 1$.

Πίνακας 5.22: Σύγκριση των δίπλευρων διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA, διεργασία

BINARCH(1), $a_{00} = 0.35$, $a_{01} = 0.25$, $n = 30$

n	a_{00}	a_{01}	μ_X	δ	δ'	Shewhart	1-EWMA	2-EWMA	4-EWMA
30	0.35	0.25	14	1	0	516.75	572.97	585.36	562.04
			7	0.5	0	5.03 (-99.03%)	4.14 (-99.28%)	4.08 (-99.30%)	5.21 (-99.07%)
			8.4	0.6	0	9.92 (-98.08%)	5.61 (-99.02%)	5.42 (-99.07%)	6.63 (-98.82%)
			11.2	0.8	0	71.73 (-86.12%)	19.53 (-96.59%)	17.32 (-97.04%)	16.09 (-97.14%)
			12.6	0.9	0	253.07 (-51.03%)	85.04 (-85.16%)	73.88 (-87.38%)	48.92 (-91.30%)
			13.3	0.95	0	438.1 (-15.22%)	260.57 (-54.52%)	240.01 (-59.00%)	154.97 (-72.43%)
			14.7	1.05	0	360.13 (-30.31%)	239.55 (-58.19%)	221.04 (-62.24%)	150 (-73.31%)
			15.4	1.1	0	195.26 (-62.21%)	79.81 (-86.07%)	69.95 (-88.05%)	48.24 (-91.42%)
			16.8	1.2	0	56.74 (-89.02%)	19.09 (-96.67%)	17.08 (-97.08%)	16.07 (-97.14%)
			19.6	1.4	0	8.91 (-98.28%)	5.63 (-99.02%)	5.45 (-99.07%)	6.66 (-98.82%)
			21	1.5	0	4.78 (-99.07%)	4.17 (-99.27%)	4.11 (-99.30%)	5.24 (-99.07%)
			11.05	1	-0.2	70.47 (-86.36%)	18.22 (-96.82%)	15.92 (-97.28%)	14.49 (-97.42%)
			12.35	1	-0.05	231.54 (-55.19%)	73.86 (-87.11%)	63.23 (-89.20%)	38.55 (-93.14%)
			13.13	1	-0.1	431.46 (-16.51%)	238.75 (-58.33%)	216.58 (-63.00%)	121.36 (-78.41%)
			15	1	0.05	251.37 (-51.36%)	121.43 (-78.81%)	108.66 (-81.44%)	78.7 (-86.00%)
			16.15	1	0.1	84.87 (-83.58%)	29.98 (-94.77%)	26.74 (-95.43%)	23.68 (-95.79%)
			19.09	1	0.2	12.46 (-97.59%)	7.32 (-98.72%)	7.03 (-98.80%)	8.17 (-98.55%)
<i>LCL</i>						7	11	11.5	12.25
<i>UCL</i>						21	17	16.5	15.75
λ						1	0.21	0.18	0.44

Πίνακας 5.23: Σύγκριση των δίπλευρων διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA, διεργασία

BINARCH(1), $a_{00} = 0.08$, $a_{01} = 0.85$, $n = 30$

n	a_{00}	a_{01}	μ_X	δ	δ'	Shewhart	1-EWMA	2-EWMA	4-EWMA
30	0.08	0.85	16	1	0	334.25	394.74	350.69	342.65
			8	0.5	0	28.56 (-91.46%)	31.78 (-91.95%)	26.46 (-92.45%)	26.19 (-92.36%)
			9.6	0.6	0	42.32 (-87.34%)	48.61 (-87.69%)	38.13 (-89.13%)	37.47 (-89.06%)
			12.8	0.8	0	117.33 (-64.90%)	158.67 (-59.80%)	109.1 (-68.89%)	106.28 (-68.98%)
			14.4	0.9	0	212.5 (-36.42%)	310.5 (-21.34%)	215.23 (-38.63%)	210.19 (-38.66%)
			15.2	0.95	0	277.85 (-16.87%)	384.81 (-2.52%)	291.59 (-16.85%)	285.16 (-16.78%)
			16.8	1.05	0	355.56 (-6.38%)	321.26 (-18.61%)	328.82 (-6.24%)	317.64 (-7.30%)
			17.6	1.1	0	320.78 (-4.03%)	232.77 (-41.03%)	256.44 (-26.88%)	245.39 (-28.38%)
			19.2	1.2	0	189.48 (-43.31%)	113.89 (-71.15%)	126.31 (-63.98%)	120.78 (-64.75%)
			22.4	1.4	0	56.41 (-83.12%)	37.08 (-90.61%)	39.35 (-88.78%)	38.23 (-88.84%)
			24.1	1.5	0	34.67 (-89.63%)	25.03 (-93.66%)	26.44 (-92.46%)	25.98 (-92.42%)
			12	1	-0.05	120.72 (-63.88%)	184.55 (-53.25%)	110.11 (-68.60%)	105.56 (-69.19%)
			13.333	1	-0.03	191.24 (-42.79%)	320.03 (-18.93%)	190.92 (-45.56%)	184.46 (-46.17%)
			14.118	1	-0.02	244.76 (-26.77%)	417.42 (-5.75%)	259.03 (-26.14%)	251.89 (-26.49%)
			18.462	1	0.02	182.26 (-45.47%)	122.42 (-68.99%)	131.4 (-62.53%)	126.35 (-63.13%)
			20	1	0.03	102.07 (-69.46%)	68.19 (-82.73%)	72.4 (-79.35%)	70.14 (-79.53%)
			24	1	0.05	35.48 (-89.39%)	28.21 (-92.85%)	29.42 (-91.61%)	29.08 (-91.51%)
<i>LCL</i>						4	7	7.5	7.75
<i>UCL</i>						28	25	24.5	24.25
λ						1	0.25	0.19	0.17

Από τα αποτελέσματα στους Πίνακες 5.22-5.23 έπεται ότι το δίπλευρο διάγραμμα s -EWMA υπερτερεί του αντίστοιχου διαγράμματος Shewhart, ειδικά για $s = 4$. Η βελτίωση είναι σαφής για μικρές μετατοπίσεις στο a_{00} (π.χ. για $0.9 \leq \delta \leq 1.5$). Επίσης, για μετατοπίσεις μόνο στην παράμετρο a_{01} , παρατηρείται ότι το διάγραμμα 4-EWMA έχει καλύτερη απόδοση στην ανίχνευση αυξήσεων (π.χ. για $\delta' > 0$). Ωστόσο, στην περίπτωση των μειώσεων, η απόδοσή του μπορεί να είναι συγκρίσιμη με την αντίστοιχη του διαγράμματος Shewhart (βλέπε Πίνακα 5.23, $\delta' \in \{-0.05, -0.03, -0.02\}$). Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να εξηγηθεί από την ύπαρξη ισχυρής συσχέτισης ($a_{01} = 0.85$) μεταξύ των μετρήσεων, η οποία ενδεχομένως να επηρεάζει την απόδοση των διαγραμμάτων s -EWMA. Μάλιστα, αυτό παρατηρήθηκε και στην τελευταία περίπτωση των μονόπλευρων διαγραμμάτων (βλέπε Πίνακα 5.18 με $a_{01} = 0.82$), όπου τα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και s -EWMA έχουν συγκρίσιμη απόδοση.

Τέλος, από τη σύγκριση των τριών διαγραμμάτων EWMA διαπιστώνεται ότι, εκτός από την περίπτωση μέτριων έως και μεγάλων μετατοπίσεων σε μια από τις δύο παραμέτρους της διεργασίας, το διάγραμμα 4-EWMA είναι αυτό με την καλύτερη απόδοση (μικρότερη τιμή $zsARL$).

Παρατήρηση 5.1.: Όπως έχει ήδη αναφερθεί, για δεδομένη τιμή του s , δεν υπάρχει μία μοναδική τριάδα παραμέτρων (λ, LCL_s, UCL_s) που να δίνει την επιθυμητή εντός ελέγχου απόδοση για το δίπλευρο διάγραμμα s -EWMA. Επομένως, σε πρακτικά προβλήματα, είναι απαραίτητο να εφαρμοστεί μια απλή αλλά αποτελεσματική διαδικασία για τον προσδιορισμό των τιμών LCL_s, UCL_s για μια προκαθορισμένη τιμή λ και για δεδομένο s .

Δεν είναι δύσκολο να επαληθευτεί ότι για μικρό μέγεθος δείγματος n καθώς και για μικρές τιμές $\mu_{0,X}$ της εντός ελέγχου διαδικασίας, η (υπό συνθήκη) διωνυμική κατανομή είναι λοξή (*skewed*). Επομένως, με τη χρήση συμμετρικών ορίων, τα προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα θα έχουν ARL -μεροληπτική απόδοση (*ARL-biased performance*, Pignatiello et al. (1995)), δηλαδή θα χρειαστεί περισσότερος χρόνος (κατά μέσο όρο) για να ανιχνευθούν κάποιες μετατοπίσεις στο μέσο επίπεδο της διεργασίας παρά να δοθεί ψευδής συναγερμός. Για παράδειγμα, στους Πίνακες 5.22 – 5.23, παρατηρείται ότι για μια μετατόπιση $(\delta, \delta') = (1, 0.5, 0)$ οι τιμές $ssARL$ του δίπλευρου διαγράμματος Shewhart είναι μεγαλύτερες από την αντίστοιχη τιμή $zsARL$.

Αξίζει πάντως να σημειωθεί πως για όλες τις εξεταζόμενες μετατοπίσεις στη $\mu_{0,X}$ το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου s -EWMA πετυχαίνει τη μέγιστη τιμή ARL όταν η διεργασία είναι

εντός ελέγχου. Ωστόσο, αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι τα εν λόγω διαγράμματα είναι (αμιγώς) *ARL-αμερόληπτα* (*purely ARL-unbiased*), αλλά ενδεχομένως τείνουν να είναι *σχεδόν ARL-αμερόληπτα* (*nearly ARL-unbiased*). Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με *ARL-αμερόληπτα* διαγράμματα ελέγχου για χρονοσειρές με ακέραιες τιμές παραπέμπουμε στις εργασίες των Morais et al. (2018), Paulino et al. (2019), Morais et al. (2021) και τις εκεί αναφορές.

Παρόλο που η χρήση συμμετρικών ορίων δεν οδηγεί πάντοτε σε δίπλευρα διαγράμματα τα οποία να είναι *ARL-αμερόληπτα*, τα αποτελέσματα της αριθμητικής μελέτης δείχνουν ότι τα προτεινόμενα δίπλευρα διαγράμματα *s-EWMA* είναι αποτελεσματικά (ειδικά για $s = 4$) όταν το εντός ελέγχου μέσο επίπεδο της διεργασίας και το μέγεθος του δείγματος είναι αρκετά μεγάλα. Εκτός αυτού, ο στατιστικός σχεδιασμός τους είναι αρκετά απλός, αφού για δεδομένες τιμές s , λ , χρειάζεται να προσδιοριστεί μόνο η τιμή του K .

5.4 Ανακεφαλαίωση

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, αρχικά αναπτύχθηκαν και μελετήθηκαν μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και *s-EWMA* για την ανίχνευση μετατοπίσεων (αυξήσεων ή μειώσεων) του μέσου επιπέδου μίας διεργασίας *BINARCH(1)*. Αναφορικά με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την αριθμητική μελέτη του στατιστικού σχεδιασμού και της απόδοσης των εν λόγω διαγραμμάτων διαπιστώθηκε ότι για μεγάλες τιμές του s (κυρίως για $s = 4$) και για μικρές τιμές του λ , δύναται να επιτευχθεί τιμή $zsARL$, για το *s-EWMA*, το δυνατόν κοντά στην επιθυμητή. Ειδικότερα, για τη γρήγορη ανίχνευση μικρών και μεσαίων μετατοπίσεων, είτε αυξήσεων είτε μειώσεων, στο μέσο επίπεδο της διεργασίας, προτείνεται η τιμή $s = 4$ με το $\lambda \in [0.05, 0.40]$. Οι αριθμητικές συγκρίσεις έδειξαν ότι το μονόπλευρο διάγραμμα *s-EWMA* έχει καλύτερη απόδοση από το αντίστοιχο Shewhart για την ανίχνευση μικρών έως και μεσαίων μετατοπίσεων στις παραμέτρους της *BINARCH(1)* διεργασίας με την ικανότητα του αυτή να βελτιστοποιείται για $s = 4$.

Εκτός από τα παραπάνω διαγράμματα ελέγχου, αναπτύχθηκαν και μελετήθηκαν δίπλευρα διαγράμματα Shewhart και *s-EWMA*, για την παρακολούθηση διεργασιών *BINARCH(1)*. Η συγκεκριμένη αριθμητική μελέτη έδειξε ότι το δίπλευρο διάγραμμα *s-EWMA* υπερτερεί του αντίστοιχου διαγράμματος Shewhart, ειδικά για $s = 4$. Επίσης, η βέλτιστη απόδοσή του γίνεται ακόμη περισσότερο αντιληπτή σε μικρές μετατοπίσεις της a_{00} (π.χ. για $0.9 \leq \delta \leq 1.5$). Ωστόσο, σε ορισμένες περιπτώσεις ανίχνευσης των μειώσεων, ειδικά όταν υπάρχει

υψηλή αυτοσυσχέτιση (υψηλές τιμές a_{01}), τα δίπλευρα διαγράμματα Shewhart και s -EWMA έχουν συγκρίσιμη απόδοση.

Εκτός των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA, στο παρόν κεφάλαιο αναπτύχθηκαν μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM για την παρακολούθηση μιας BINARCH(1) διεργασίας. Τα προτεινόμενα διαγράμματα βασίζονται στον λόγο πιθανοφάνειας και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την έγκυρη ανίχνευση αυξήσεων ή μειώσεων στο μέσο επίπεδο της διεργασίας. Εκτός από το προτεινόμενο διάγραμμα LR-CUSUM, προτάθηκε επίσης η χρήση ενός συνδυασμένου διαγράμματος, του cLR-CUSUM, στο οποίο συνδυάζονται δύο διαγράμματα LR-CUSUM που εκτελούνται ταυτόχρονα.

Τέλος, πραγματοποιήθηκε αριθμητική σύγκριση των προτεινόμενων διαγραμμάτων CUSUM για την ανίχνευση ταυτόχρονων μεταβολών (μόνο αυξήσεων ή μόνο μειώσεων) ή μεμονωμένων μεταβολών (μόνο αυξήσεων ή μόνο μειώσεων) στις τιμές των παραμέτρων μιας διεργασίας BINARCH(1). Τα αποτελέσματα της αριθμητικής μελέτης έδειξαν ότι το διάγραμμα LR-CUSUM είναι κατάλληλο όταν μας ενδιαφέρει η ανίχνευση αυξήσεων μόνο στις τιμές της παραμέτρου a_{00} ενώ το διάγραμμα cLR-CUSUM έχει την καλύτερη απόδοση όταν συμβαίνει ταυτόχρονη αύξηση στις τιμές των δύο παραμέτρων της διεργασίας ή μόνο στην περίπτωση αυξήσεων στις τιμές της παραμέτρου a_{01} . Αντίθετα, στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει η ανίχνευση μειώσεων στις τιμές των παραμέτρων μιας διεργασίας BINARCH(1) τότε το προτεινόμενο διάγραμμα είναι ένα κατάλληλα σχεδιασμένο διάγραμμα LR-CUSUM.

Κεφάλαιο 6

Αριθμητικές Συγκρίσεις & Εφαρμογές

6.1 Εισαγωγή

Εφόσον προηγήθηκε η παρουσίαση των προτεινόμενων διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση δεδομένων που προέρχονται από διεργασίες $BAR(1)$, $B\bar{B}AR(1)$ και $BINARCH(1)$, στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα των αριθμητικών συγκρίσεων. Συγκεκριμένα, συγκρίνονται τα διαγράμματα ελέγχου που αναπτύχθηκαν για κάθε μία από τις προαναφερθέντες διεργασίες με αντίστοιχα διαγράμματα τα οποία έχουν εμφανιστεί στην έως τώρα βιβλιογραφία.

Επιπλέον, εκτός από αριθμητικές συγκρίσεις, παρουσιάζονται και πρακτικές εφαρμογές των διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση διεργασιών που μοντελοποιούνται σύμφωνα με ένα μοντέλο χρονοσειρών με αέριες τιμές και πεπερασμένο πλήθος δυνατών τιμών. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τρία διαφορετικά σύνολα πραγματικών δεδομένων, εφαρμόζονται τα προτεινόμενα διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση $BAR(1)$, $B\bar{B}AR(1)$ και $BINARCH(1)$ διεργασιών. Τα σύνολα αυτά αφορούν προβλήματα παρακολούθησης διεργασιών από διαφορετικά επιστημονικά πεδία όπως η επιδημιολογία, τα οικονομικά και η πληροφορική. Στόχος είναι να αναδειχθεί η χρησιμότητα των μεθόδων που αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια σε πραγματικά προβλήματα.

6.2 Αριθμητικές Συγκρίσεις - Διαγράμματα Ελέγχου EWMA, Shewhart και CUSUM για Διεργασίες $BAR(1)$ και $B\bar{B}AR(1)$

Αρχικά, υπενθυμίζεται πως στην παρούσα διδακτορική διατριβή αναπτύχθηκαν και μελετήθηκαν διαγράμματα ελέγχου τύπου s -EWMA για την παρακολούθηση $BAR(1)$ και $B\bar{B}AR(1)$ διεργασιών. Οι Rakitzis et al. (2017b) ανέπτυξαν και μελέτησαν διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart και CUSUM για την παρακολούθηση διεργασιών του ίδιου τύπου. Στη συνέχεια, θα προχωρήσουμε με αριθμητικές συγκρίσεις μεταξύ των διαγραμμάτων s -EWMA, Shewhart και CUSUM για διεργασίες τύπου $BAR(1)$ αλλά και για διεργασίες τύπου $B\bar{B}AR(1)$.

Αναφορικά με τις διεργασίες τύπου $BAR(1)$, δίνονται ο Πίνακας 6.1 (περίπτωση άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων) και ο Πίνακας 6.2 (περίπτωση κάτω μονόπλευρων

διαγραμμάτων). Στις στήλες " ϕ_0 ", " $\mu_{0,x}$ ", " n " και " ρ_0 " δίνονται οι τιμές των παραμέτρων της διεργασίας όταν είναι εντός ελέγχου. Η περίπτωση $\phi_0 = 0$ αντιστοιχεί στην περίπτωση μιας διεργασίας BAR(1) ενώ για $\phi_0 \in (0,1)$, είναι η περίπτωση διεργασίας BBAR(1). Στις τέσσερις τελευταίες γραμμές των Πινάκων 6.1 και 6.2 δίνονται οι τιμές των παραμέτρων (π.χ. όριο ελέγχου) κάθε διαγράμματος.

Στην περίπτωση που η διεργασία λειτουργεί παρουσία ειδικών αιτιών μεταβλητότητας (και άρα είναι εκτός ελέγχου), υποθέτουμε ότι επηρεάζεται μόνο η $\mu_{0,x}$ και συγκεκριμένα, η αλλαγή από $\mu_{0,x}$ σε $\mu_{1,x}$ είναι της μορφής $\mu_{1,x} = \delta\mu_{0,x} = n(\delta\pi_0)$, δηλαδή σημειώνονται αλλαγές μόνο στην εντός ελέγχου τιμή της παραμέτρου π_0 . Για την περίπτωση αυξήσεων στο μέσο επίπεδο της διεργασίας υποθέτουμε ότι $\delta \in \{1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.7, 2.0\}$ ενώ στην περίπτωση μειώσεων το $\delta \in \{1.0, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.2\}$. Για κάθε μια από τις παραπάνω μετατοπίσεις δίνονται οι τιμές του *ARL*, για κάθε ένα από τα εξεταζόμενα μονόπλευρα διαγράμματα. Για την εντός ελέγχου απόδοση κάθε διαγράμματος χρησιμοποιείται το *zsARL* ενώ για την εκτός ελέγχου απόδοση χρησιμοποιείται το *ssARL*.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, δεν δύναται να επιτευχθεί ακριβώς η ίδια τιμή *zsARL* στα εξεταζόμενα διαγράμματα ελέγχου, λόγω της διακριτής φύσης του μοντέλου BAR(1). Ωστόσο, δεδομένου ότι η τιμή της εντός ελέγχου απόδοσης ποικίλλει, μεταξύ των διαφόρων διαγραμμάτων ελέγχου, η ερμηνεία θα πρέπει να γίνεται με προσοχή.

Πίνακας 6.1: Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, *s*-EWMA, CUSUM. Μοντέλο BAR(1), περίπτωση αυξήσεων

ϕ_0	μ_0	n	ρ_0	δ	Shewhart	1-EWMA	2-EWMA	4-EWMA	CUSUM
0	5	30	0.25	1	502.72	503.62	492.27	489.95	490.07
				1.1	223.27	204.62	135.39	134.48	159.42
				1.2	110.34	95.09	55.90	51.95	63.85
				1.3	59.68	49.60	30.95	25.86	30.89
				1.4	34.85	28.57	20.66	15.51	17.61
				1.5	21.74	17.91	15.46	10.59	11.45
				1.7	9.92	8.61	10.42	6.29	6.34
				2	4.13	4.09	7.20	3.93	3.78
<i>UCL</i>				12	11	15/2	31/4		
λ				1	0.78	0.18	0.24		
<i>h</i>								8	
<i>k</i>								7	

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Πίνακα 6.1., γίνεται σαφές ότι τα διαγράμματα ελέγχου τύπου s -EWMA υπερτερούν έναντι των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart. Η υπεροχή αυτή είναι προφανής στις περιπτώσεις όπου οι τιμές $ssARL$ του διαγράμματος s -EWMA είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες του διαγράμματος Shewhart. Επομένως, τα προτεινόμενα διαγράμματα ανιχνεύουν πιο έγκαιρα αυξήσεις στο μέσο επίπεδο της διεργασίας BAR(1) σε σχέση με τα διαγράμματα Shewhart. Μάλιστα, η απόδοση των διαγραμμάτων s -EWMA, φαίνεται να βελτιώνεται καθώς αυξάνει η τιμή του s . Είναι εμφανές ότι το 4-EWMA έχει καλύτερη απόδοση από τα 1-EWMA και 2-EWMA. Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός ότι με την αύξηση της τιμής του s , μειώνεται η τιμή της παραμέτρου εξομάλυνσης λ (ώστε η εντός ελέγχου απόδοση να διατηρείται στα επιθυμητά επίπεδα). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το διάγραμμα s -EWMA να μπορεί να ανιχνεύσει έγκαιρα μικρές ή και μεσαίες μετατοπίσεις της μέσης τιμής της διεργασίας και ως εκ τούτου να επιτυγχάνει καλύτερη απόδοση συγκριτικά με ένα διάγραμμα Shewhart.

Επιπρόσθετα, από τον Πίνακα 6.1, γίνεται αντιληπτό ότι τα προτεινόμενα διαγράμματα s -EWMA έχουν συγκρίσιμη απόδοση με τα διαγράμματα CUSUM. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, καθώς τα διαγράμματα CUSUM είναι και αυτά διαγράμματα ελέγχου με μνήμη με και άρα είναι ικανά στην ανίχνευση μικρών και μεσαίων μετατοπίσεων. Συγκεκριμένα, από τον Πίνακα 6.1, παρουσιάζεται μία οριακή υπεροχή των διαγραμμάτων s -EWMA έναντι των CUSUM, καθώς για τις περισσότερες από τις δεδομένες μετατοπίσεις τα προτεινόμενα διαγράμματα σημειώνουν μικρότερες τιμές $ssARL$. Ωστόσο για πολύ μικρές αυξήσεις στο μέσο επίπεδο της διεργασίας BAR(1) φαίνεται να είναι πιο αποδοτικό το διάγραμμα CUSUM.

Στη συνέχεια, στον επόμενο πίνακα ακολουθεί η αριθμητική σύγκριση των προτεινόμενων διαγραμμάτων s -EWMA με τα αντίστοιχα διαγράμματα Shewhart και CUSUM που αναπτύχθηκαν από τους Rakitzis et al. (2017b) για την ανίχνευση μειώσεων στο μέσο επίπεδο της BAR(1) διεργασίας.

Πίνακας 6.2: Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, *s*-EWMA, CUSUM. Μοντέλο

BAR(1), περίπτωση μειώσεων

ϕ_0	μ_0	n	ρ_0	δ	Shewhart	1-EWMA	2-EWMA	4-EWMA	CUSUM
0	10	30	0.5	1	332.96	352.21	353.77	370.63	339.04
				0.9	124.73	120.79	127.00	131.67	78.11
				0.8	53.59	45.59	46.46	47.72	27.16
				0.7	24.86	20.65	20.72	21.13	13.45
				0.6	14.27	11.09	11.06	11.24	8.50
				0.5	8.00	6.88	6.90	6.97	6.22
				0.4	5.32	4.80	4.83	4.88	4.97
				0.2	2.97	2.97	3.04	3.06	3.67
<i>LCL</i>					3	4	9/2	18/4	
λ					1	0.65	0.6	0.61	
<i>h</i>									14
<i>k</i>									8

Με βάση τα αποτελέσματα του Πίνακα 6.2, διαπιστώνεται ότι τα διαγράμματα *s*-EWMA είναι πιο ευαίσθητα στην ανίχνευση μειώσεων της μέσης τιμής της διεργασίας BAR(1) σε σχέση με τα αντίστοιχα διαγράμματα Shewhart. Συγκεκριμένα, παρατηρείται ότι η τιμή της εντός ελέγχου απόδοσης του διαγράμματος Shewhart είναι μικρότερη σε σύγκριση με την αντίστοιχη τιμή του διαγράμματος *s*-EWMA. Ταυτόχρονα, η τιμή *ssARL*, που επιτυγχάνει το διάγραμμα Shewhart σε μία δεδομένη μετατόπιση (μείωση) της μέσης τιμής της διεργασίας είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη τιμή *ssARL* του προτεινόμενου διαγράμματος *s*-EWMA. Επομένως, το διάγραμμα *s*-EWMA ανιχνεύει ταχύτερα τη δεδομένη μετατόπιση.

Επιπλέον, η αριθμητική σύγκριση μεταξύ των διαγραμμάτων *s*-EWMA και των διαγραμμάτων CUSUM για διεργασίες BAR(1) αποκαλύπτει ότι τα διαγράμματα CUSUM είναι πολύ ισχυρά διαγράμματα στην ανίχνευση μικρών και μέτριων μετατοπίσεων (μειώσεων) στο μέσο επίπεδο της διαδικασίας. Παρόλο αυτά, φαίνεται ότι για ορισμένες μικρές ή μεσαίες μετατοπίσεις τα εν λόγω διαγράμματα έχουν συγκρίσιμη απόδοση και ως εκ τούτου θα μπορούσε να ειπωθεί ότι το διάγραμμα *s*-EWMA αποτελεί μία καλή εναλλακτική επιλογή του διαγράμματος CUSUM για την έγκαιρη ανίχνευση τέτοιου είδους μετατοπίσεων στην μέση τιμή της BAR(1) διεργασίας.

Στην συνέχεια, ακολουθεί η αριθμητική σύγκριση ανάμεσα στα προτεινόμενα διαγράμματα *s*-EWMA και των διαγραμμάτων Shewhart και CUSUM, όταν τα δεδομένα προέρχονται από μία διεργασία BBAR(1). Συγκεκριμένα, στους Πίνακες 6.3 -6.5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της αριθμητικής σύγκρισης των παραπάνω διαγραμμάτων για την περίπτωση αυξήσεων.

Πίνακας 6.3: Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, s-EWMA, CUSUM. Μοντέλο

BBAR(1), $\phi_0 = 0.025$, περίπτωση αυξήσεων

ϕ_0	μ_0	n	ρ_0	δ	Shewhart	1-EWMA	2-EWMA	4-EWMA	CUSUM
0.025	5	15	0.75	1	393.26	320.84	379.95	385.18	390.13
				1.1	208.46	164.18	190.31	185.98	154.32
				1.2	119.57	95.28	107.32	103.64	77.85
				1.3	73.69	58.44	65.46	61.43	46.76
				1.4	48.39	37.75	41.3	41.16	31.99
				1.5	33.6	26.68	28.96	28.2	23.99
				1.7	18.6	15.41	16.46	16.36	16.01
				2	9.88	8.69	9.02	9.15	10.98
<i>UCL</i>					11	10	19/2	37/4	
λ					1	0.5	0.46	0.41	
h									30
k									6

Πίνακας 6.4: Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, s-EWMA, CUSUM. Μοντέλο

BBAR(1), $\phi_0 = 0.05$, περίπτωση αυξήσεων

ϕ_0	μ_0	n	ρ_0	δ	Shewhart	1-EWMA	2-EWMA	4-EWMA	CUSUM
0.05	5	30	0.5	1	385.96	369.19	348.06	378.34	385.29
				1.1	247.82	217.53	202.43	181.05	150.51
				1.2	163.98	135.21	124.8	99.72	74.55
				1.3	111.71	87.98	80.83	60.34	44.1
				1.4	78.25	59.71	54.75	39.53	29.82
				1.5	56.3	42.11	38.64	27.71	22.13
				1.7	31.42	23.22	21.44	15.75	14.48
				2	15.49	11.75	11.01	9.02	9.63
<i>UCL</i>					15	13	25/2	37/4	
λ					1	0.69	0.65	0.25	
h									34
k									6

Πίνακας 6.5: Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, *s*-EWMA, CUSUM. Μοντέλο

BBAR(1), $\phi_0 = 0.05$, περίπτωση αυξήσεων

ϕ_0	μ_0	n	ρ_0	δ	Shewhart	1-EWMA	2-EWMA	4-EWMA	CUSUM
0.05	10	30	0.75	1	345.27	367.46	351.5	360.94	362.1
				1.1	175.59	181.17	167.58	157.92	134.61
				1.2	96.96	96.88	89.34	79.83	65.11
				1.3	57.95	55.53	52.45	46.79	38.27
				1.4	37.23	33.71	33.51	30.08	25.96
				1.5	25.51	21.41	23.02	20.78	19.44
				1.7	14.04	9.49	12.9	12.2	13.05
				2	7.6	3.26	7.24	7.39	9.07
<i>UCL</i>					20	20	37/2	66/4	
λ					1	0.93	0.63	0.3	
<i>h</i>									44
<i>k</i>									12

Από τα αποτελέσματα των αριθμητικών συγκρίσεων μεταξύ των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων Shewhart, *s*-EWMA και CUSUM (Πίνακες 6.3 και 6.4) προκύπτει ότι τα διαγράμματα *s*-EWMA και CUSUM έχουν καλύτερη απόδοση σε σχέση με το Shewhart καθώς επιτυγχάνουν χαμηλότερες τιμές *ssARL* για τις δεδομένες μετατοπίσεις. Ειδικότερα, για τα διαγράμματα *s*-EWMA παρατηρήθηκε ότι για μεγάλες τιμές του *s* (π.χ. για $s = 4$) η τιμή του *ssARL* είναι μικρότερη από την αντίστοιχη τιμή όταν $s = 1$ ή 2. Επίσης, η σύγκριση των διαγραμμάτων δείχνει ότι τα διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM έχουν τη βέλτιστη απόδοση ως προς την ανίχνευση μικρών και μεσαίων μετατοπίσεων (αυξήσεων) στο μέσο επίπεδο της BBAR(1) διαδικασίας. Ωστόσο, από τα αποτελέσματα στους Πίνακες 6.3-6.5 φαίνεται πως τα προτεινόμενα διαγράμματα *s*-EWMA υπερείχαν ή τουλάχιστον είχαν συγκρίσιμη απόδοση με τα αντίστοιχα μονόπλευρα διαγράμματα CUSUM. Ειδικότερα, αυτό παρατηρήθηκε κυρίως για μέτριες έως και μεγάλες αυξήσεις της μέσης τιμής δηλαδή για $\delta > 1.5$.

Στη συνέχεια, ακολουθούν οι Πίνακες 6.6 και 6.7 στους οποίους δίνονται αριθμητικές συγκρίσεις μεταξύ των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, *s*-EWMA και CUSUM.

Πίνακας 6.6: Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, *s*-EWMA, CUSUM. ΜοντέλοBBAR(1), $\phi_0 = 0.025$, περίπτωση μειώσεων

ϕ_0	μ_0	n	ρ_0	δ	Shewhart	1-EWMA	2-EWMA	4-EWMA	CUSUM
0.025	10	30	0.25	1	378.38	392.1	363.02	373.38	388.22
				0.9	150.3	132.53	126.76	127.26	56.47
				0.8	64.34	50.04	47.85	48.41	20.13
				0.7	29.85	21.84	20.95	21.26	11.41
				0.6	15.09	11.02	10.64	10.79	7.93
				0.5	8.36	6.37	6.21	6.27	6.12
				0.4	5.07	4.15	4.08	4.10	5.02
				0.2	2.40	2.32	2.30	2.30	3.76
<i>LCL</i>					2	3	7/2	14/4	
λ					1	0.78	0.74	0.76	
<i>h</i>									24
<i>k</i>									9

Πίνακας 6.7: Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, *s*-EWMA, CUSUM. ΜοντέλοBBAR(1), $\phi_0 = 0.05$, περίπτωση μειώσεων

ϕ_0	μ_0	n	ρ_0	δ	Shewhart	1-EWMA	2-EWMA	4-EWMA	CUSUM
0.05	10	15	0.25	1	507.28	456.25	500.75	502.23	460.43
				0.9	143.14	107.49	113.72	115.49	43.23
				0.8	48.68	33.32	30.83	33.43	13.98
				0.7	19.79	13.48	12.17	13.25	7.88
				0.6	9.51	6.48	6.38	6.77	5.53
				0.5	5.32	4.16	4.08	4.18	4.31
				0.4	3.38	2.89	2.98	2.95	3.58
				0.2	1.82	1.8	2.01	1.9	2.74
<i>LCL</i>					3	4	10/2	19/4	
λ					1	0.79	0.59	0.69	
<i>h</i>									15
<i>k</i>									9

Από τα αποτελέσματα των Πινάκων 6.6 και 6.7 μπορούμε να καταλήξουμε σε παρόμοια συμπεράσματα σχετικά με την απόδοση των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων Shewhart, *s*-EWMA και CUSUM για διεργασίες BBAR(1). Συγκεκριμένα, τα διαγράμματα ελέγχου με μνήμη (π.χ. *s*-EWMA και CUSUM) υπερέρχουν έναντι των διαγραμμάτων Shewhart για σχεδόν όλες τις μετατοπίσεις στη $\mu_{0,x}$. Επιπλέον, το διάγραμμα ελέγχου τύπου CUSUM είναι καλύτερο του *s*-EWMA και μπορεί να ανιχνεύσει ταχύτερα μικρές και μεσαίες μετατοπίσεις της μέσης τιμής σε μια διεργασία τύπου BBAR(1). Ωστόσο, υπάρχουν συγκεκριμένες μετατοπίσεις όπου τα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα *s*-EWMA έχουν καλύτερη απόδοση από

τα αντίστοιχα μονόπλευρα διαγράμματα CUSUM. Αυτό συμβαίνει κυρίως στην ανίχνευση μέτριων έως και μεγάλων μειώσεων της μέσης τιμής δηλαδή για $\delta < 0.5$.

6.3 Αριθμητικές Συγκρίσεις - Διαγράμματα Ελέγχου EWMA, Shewhart και CUSUM για Διεργασίες BINARCH(1)

Εκτός από την περίπτωση των BAR(1) και BBAR(1) διεργασιών, έχουν επίσης αναπτυχθεί και μελετηθεί διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση δεδομένων που προέρχονται από μία BINARCH(1) διεργασία. Πιο συγκεκριμένα, στην παρούσα διδακτορική διατριβή έχουν προταθεί διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart, EWMA (τα s -EWMA) και CUSUM (τα LR-CUSUM και cLR-CUSUM). Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται αποτελέσματα αριθμητικών συγκρίσεων της απόδοσης των παραπάνω διαγραμμάτων ελέγχου για την περίπτωση διεργασιών τύπου BINARCH(1).

Στον Πίνακα 6.8 δίνονται αποτελέσματα σχετικά με την απόδοση των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, s -EWMA και CUSUM για διεργασίες BINARCH(1). Τα συγκεκριμένα διαγράμματα είναι κατάλληλα για την ανίχνευση αυξήσεων στο μέσο επίπεδο της διεργασίας. Αντίστοιχα αποτελέσματα για την περίπτωση των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων (και άρα κατάλληλα για την ανίχνευση μειώσεων στο μέσο επίπεδο της διεργασίας) δίνεται στον Πίνακα 6.9 .

Συγκεκριμένα, οι Πίνακες 6.8 και 6.9 περιέχουν τις τιμές της εντός ελέγχου απόδοσης των εξεταζόμενων διαγραμμάτων (τιμές $zsARL$) καθώς και τις τιμές $ssARL$ που επιτυγχάνουν για κάθε μετατόπιση στις παραμέτρους της διεργασίας. Επίσης, στις στήλες " a_{00} ", " a_{01} ", " n ", " μ_0 " δίνονται οι τιμές των παραμέτρων της διεργασίας όταν αυτή είναι εντός ελέγχου. Στη γραμμή h_A δίνεται η τιμή h του διαστήματος απόφασης για τα υπό εξέταση διαγράμματα LR-CUSUM. Αντίστοιχα, τα h_A και h_B είναι τα όρια ελέγχου που χρησιμοποιούνται στο διάγραμμα cLR-CUSUM. Επίσης, στις γραμμές " d_A^* ", " d_B^* ", " τ_A^* ", " τ_B^* " δίνονται οι τιμές των μετατοπίσεων που ενδιαφέρει να ανιχνευθούν το ταχύτερο δυνατό.

Οι τιμές των παραμέτρων κάθε διαγράμματος είναι τέτοιες ώστε η εντός ελέγχου απόδοσή τους να είναι συγκρίσιμες. Ειδικότερα, η εντός ελέγχου τιμή του $zsARL$ είναι το δυνατόν κοντά στην αντίστοιχη τιμή του διαγράμματος ελέγχου Shewhart.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της αριθμητικής σύγκρισης της απόδοσης των διαγραμμάτων Shewhart, s -EWMA και CUSUM για διαδικασίες BINARCH(1), διαπιστώνεται ότι τα προτεινόμενα διαγράμματα LR-CUSUM και cLR-CUSUM είναι πολύ ισχυρά διαγράμματα στην ανίχνευση μικρών και μεσαίων μετατοπίσεων στο μέσο επίπεδο της

διαδικασίας καθώς έχουν τη χαμηλότερη τιμή $ssARL$ για κάθε μετατόπιση των παραμέτρων της BINARCH(1) διεργασίας. Αυτό συμβαίνει και στην περίπτωση αυξήσεων (Πίνακας 6.8) αλλά και στην περίπτωση μειώσεων (Πίνακας 6.9). Επίσης τα διαγράμματα s -EWMA υπερέχουν των αντίστοιχων διαγραμμάτων Shewhart, ενώ φαίνεται να βελτιστοποιείται η απόδοσή τους για μεγάλες τιμές του s και τελικά για $s = 4$ να έχουν συγκρίσιμη απόδοση με τα αντίστοιχα διαγράμματα LR-CUSUM και cLR-CUSUM.

Από τα αποτελέσματα των Πινάκων 6.8 και 6.9 έπεται ότι το διάγραμμα με την καλύτερη απόδοση στην ανίχνευση αυξήσεων είναι το cLR-CUSUM ενώ για την περίπτωση μειώσεων είναι το LR-CUSUM. Αξίζει πάντως να αναφερθεί πως για τον προσδιορισμό των τιμών των παραμέτρων των προτεινόμενων διαγραμμάτων CUSUM απαιτείται γνώση (προσδιορισμός) των μετατοπίσεων στις παραμέτρους a_{00} , a_{01} που μας ενδιαφέρει να ανιχνευθούν το ταχύτερο δυνατό.

Πίνακας 6.8: Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, s-EWMA, LR-CUSUM και cLR-CUSUM.

Μοντέλο BINARCH(1), περίπτωση αυξήσεων

μ_0	n	a_{00}	a_{01}	δ	τ	Shewhart	1-EWMA	2-EWMA	4-EWMA	LR-CUSUM			cLR CUSUM
3	30	0.05	0.5	1	0	398.78	365.27	403.34	403.14	398.63	397.67	397.08	385.23
				1.1	0	250.53	206.28	231.35	209.26	138.12	171.85	178.00	142.31
				1.3	0	112.49	81.28	91.87	74.81	46.57	56.35	57.02	47.47
				2	0	17.67	12.83	13.61	12.02	13.96	12.11	11.66	12.49
				1	0.05	191.67	148.22	164.29	149.49	127.68	126.29	131.73	119.79
				1	0.07	145.19	108.28	119.63	106.98	93.51	89.23	93.80	85.33
				1	0.1	97.56	70.67	77.47	68.55	63.40	57.74	60.54	57.57
				1.1	0.05	126.66	92.48	101.97	88.55	67.71	70.96	74.93	65.69
				1.3	0.05	62.01	43.41	47.94	39.94	32.34	33.05	33.03	31.30
				1.5	0.05	35.13	24.42	26.60	22.18	21.23	20.20	19.73	20.11
				1.1	0.07	97.73	69.68	77.32	66.75	54.41	54.88	57.29	52.13
				1.3	0.07	49.8	35.25	38.19	32.04	28.26	27.65	27.98	27.24
				1.2	0.1	48.84	34.81	37.51	32.07	30.12	28.56	28.64	28.23
				1.3	0.1	36.43	26.17	27.96	24.12	24.13	22.24	21.98	22.32
				<i>UCL</i>						10	7	7	5.75
λ						1	0.27	0.35	0.18				
h_A										2.11	2.05	2.9	2.33
h_B													2.26
d_A^*										1.2	1	1.2	1.2
d_B^*													1
τ_A^*										0	0.1	0.1	0
τ_B^*													0.1

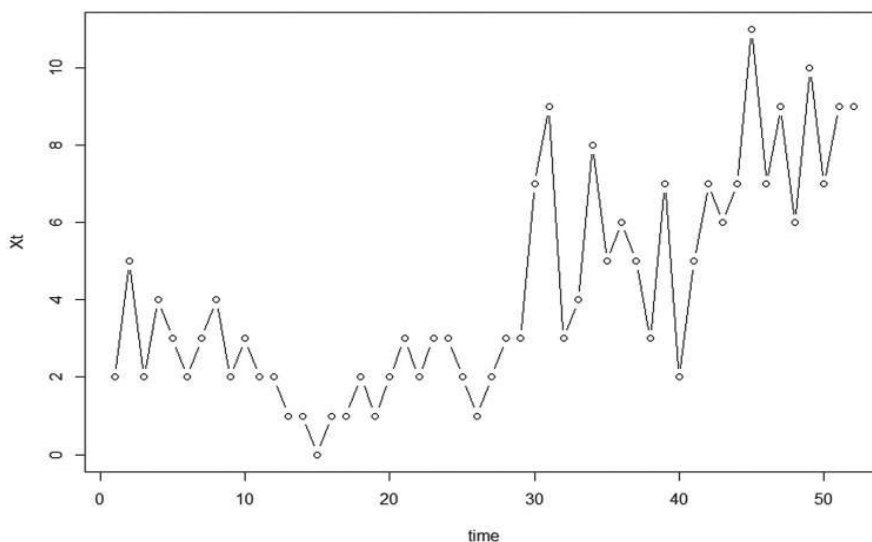
Πίνακας 6.9: Σύγκριση των διαγραμμάτων Shewhart, *s*-EWMA, CUSUM και Combined CUSUM για την ανίχνευση μειώσεων σε μία BINARCH(1) διεργασία

μ_0	n	a_{00}	a_{01}	δ	τ	Shewhart	1-EWMA	2-EWMA	4-EWMA	LR-CUSUM		cLR CUSUM	
18.8	30	0.1	0.9	1	0	408.78	372.98	409.45	405.09	407.41	410.33	408.17	410.53
				1	0	227.67	202.88	216.65	207.54	179.77	234.32	242.27	197.94
				1	0	137.06	122.1	128.19	123.30	105.08	144.66	149.92	118.77
				1	0	89.06	79.97	83.05	79.18	71.79	95.35	98.02	79.06
				1	0.1	72.48	62.90	65.33	59.37	49.19	69.19	82.44	55.00
				1	0.1	31.73	27.85	28.73	27.38	26.64	27.47	30.26	26.52
				1	0.2	18.78	17.21	17.99	18.45	18.61	17.05	16.42	16.97
				1	0.1	52.68	46.47	48.21	44.83	39.85	51.29	57.63	43.74
				1	0.1	39.99	36.10	36.79	35.36	33.55	39.82	42.88	35.85
				1	0.1	31.84	29.23	29.63	29.30	28.34	32.46	33.22	29.90
<i>LCL</i>						3	6	7	9				
λ						1	0.26	0.2	0.11				
h_A										1.69	4.22	4.34	2.01
h_B												4.47	
d_A^*										0.8	1	0.8	0.8
d_B^*												1	
τ_A^*										0	0.1	0.1	0
τ_B^*												0.1	

6.4 Εφαρμογές σε Πραγματικά Δεδομένα

6.4.1 Επιδημιολογικά δεδομένα

Στην παρούσα ενότητα, θα παρουσιαστεί μια εφαρμογή των προτεινόμενων διαγραμμάτων σε πραγματικά δεδομένα για την παρακολούθηση των διαδικασιών $\text{BAR}(1)$, $\text{BBAR}(1)$ και $\text{BINARCH}(1)$. Τα δεδομένα αυτά αναφέρονται στην περιφερειακή εξάπλωση μιας μόλυνσης στη Γερμανία μέσα σε ένα χρόνο. Ωστόσο, αντί να γίνει αναφορά στα 16 ομοσπονδιακά κράτη της Γερμανίας (τα οποία είναι πολύ ετερογενή από την άποψη του πληθυσμού), θα χρησιμοποιηθεί η ταξινόμηση σύμφωνα με τις περιφέρειες $n = 38$, όπως ορίζονται στη βάση δεδομένων *SurvStat*. Για επεξηγηματικούς σκοπούς, θα εξεταστεί μια συγκεκριμένη μόλυνση, δηλαδή οι μολύνσεις από τον hantavirus το έτος 2011 για $T = 52$ εβδομάδες. Επομένως, κάθε αριθμός X_t αντιπροσωπεύει τον αριθμό των περιοχών με μια νέα περίπτωση λοίμωξης από hantavirus την εβδομάδα t . Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με αυτό το σύνολο δεδομένων δείτε Weib and Pollett (2014) και Ristić et al. (2016). Στην Εικόνα 6.1 δίνεται η γραφική παράσταση των δεδομένων.



Εικόνα 6.1: Γραφική Παράσταση Δεδομένων Hantavirus

Οι τιμές των δεδομένων κυμαίνονται μεταξύ 0 και 11. Ο δειγματικός μέσος και η διακύμανση είναι $\bar{x} \approx 4,173$ και $s^2 \approx 7.793$, αντίστοιχα. Επιπλέον, ο διωνυμικός δείκτης μεταβλητότητας είναι $I_d = 2,098 > 1$, που σημαίνει ότι υπάρχει ένδειξη υπερμεταβλητότητας στα δεδομένα,

γεγονός που πρέπει να ληφθεί υπόψη. Επίσης, εύλογα μπορεί να θεωρηθεί ότι η πιθανότητα εμφάνισης ενός νέου περιστατικού λοίμωξης δεν είναι η ίδια σε όλες τις περιοχές, καθώς μπορεί να επηρεαστεί από διάφορους παράγοντες, μεταξύ των οποίων συμπεριλαμβάνονται και κοινωνικοοικονομικά κριτήρια.

Επιπρόσθετα, υπολογίζοντας την εμπειρική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης $\rho(1) = 0.634$ και ακολουθώντας τη μελέτη των Weiß and Pollett (2014), θα θεωρηθεί ως κατάλληλο μοντέλο για το συγκεκριμένο σύνολο δεδομένων ένα αυτοπαλίνδρομο μοντέλο πρώτης τάξης. Ωστόσο, θα πρέπει να αναφερθεί ότι οι Ristić et al. (2016) διαπίστωσαν ότι ένα μοντέλο τρίτης τάξης (δηλαδή ένα BAR(3)) έχει καλύτερη προσαρμογή σε αυτά τα δεδομένα, από το BAR(1). Είναι αυτονόητο ότι έχει ενδιαφέρον να αναλυθεί περαιτέρω αυτό το σύνολο δεδομένων με την προσαρμογή επίσης ενός διωνυμικού ή βήτα-διωνυμικού μοντέλου υψηλότερης τάξης και στη συνέχεια να προταθούν κατάλληλες μέθοδοι για την παρακολούθηση της διαδικασίας. Ωστόσο, ο λόγος για τον οποίο πραγματοποιείται αυτή η ανάλυση είναι για να εξεταστεί η απόδοση των προτεινόμενων διαγραμμάτων ελέγχου και ο τρόπος με τον οποίο μπορούν να εφαρμοστούν στην πράξη και ως εκ τούτου δεν θα εξεταστούν προς το παρόν πιο πολύπλοκα μοντέλα.

6.4.1.1 Εφαρμογή των διαγραμμάτων για παρακολούθηση BBAR(1) διεργασιών

Αρχικά, θα χρησιμοποιηθεί το παραπάνω σύνολο δεδομένων για να εξεταστούν τα προτεινόμενα διαγράμματα s -EWMA ως προς την παρακολούθηση των διαδικασιών BAR(1) και BBAR(1). Για τον λόγο αυτό, θα ακολουθήσει η εκτίμηση των παραμέτρων των μοντέλων BAR(1) και BBAR(1), η οποία θα πραγματοποιηθεί με τη μέθοδο της Μέγιστης Πιθανοφάνειας. Για την επιλογή του μοντέλου με την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα, θα χρησιμοποιηθούν τα κριτήρια AIC (*Akaike Information Criterion*) και BIC (*Bayesian Information Criterion*). Σύμφωνα με τον Akaike (1973), το κριτήριο AIC ορίζεται ως εξής:

$$AIC = -2lmax + k \cdot 2,$$

όπου $lmax$ είναι η μέγιστη τιμή της λογαριθμικής συνάρτησης της πιθανοφάνειας και το k δίνει τον αριθμό των παραμέτρων του μοντέλου. Αντίστοιχα η σχέση που δίνει το κριτήριο BIC σύμφωνα με τον Schwarz (1978) είναι η παρακάτω:

$$BIC = -2lmax + k \cdot \log(T),$$

όπου T είναι το πλήθος των διαθέσιμων μετρήσεων. Τα αποτελέσματα από την προσαρμογή των δύο μοντέλων στα δεδομένα δίνονται από τον Πίνακα 6.10.

Πίνακας 6.10: Προσαρμογή των μοντέλων BAR(1) και BBAR(1) στα δεδομένα Hantavirus

Μοντέλο	$\hat{\pi}$	$\hat{\rho}$	$\hat{\varphi}$	AIC	BIC
BAR(1)	0.111 (0.013)	0.529 (0.07)	-	227.029	230.931
BBAR(1)	0.112 (0.179)	0.564 (0.074)	0.029 (0.016)	217.929	223.782

Στον Πίνακα 6.10 παρέχονται οι εκτιμήσεις των παραμέτρων των δύο μοντέλων καθώς και τα τυπικά σφάλματά τους, τα οποία δίνονται στις αντίστοιχες παρενθέσεις. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι οι εκτιμήσεις για τις παραμέτρους του υποδείγματος BAR(1) συμπίπτουν με εκείνες που παρατίθενται στο πρώτο μέρος του Πίνακα 3 των Ristić et al. (2016), με τις διαφορές να οφείλονται στη στρογγυλοποίηση. Με βάση τα κριτήρια AIC και BIC διαπιστώνεται ότι το μοντέλο BBAR(1) είναι κατάλληλο για το συγκεκριμένο σύνολο δεδομένων, αφού οι τιμές των κριτηρίων AIC, BIC είναι μικρότερες για το υπόδειγμα αυτό. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι οι τιμές της χρονοσειράς X_t , $t = 1, 2, \dots$, προέρχονται από μια διαδικασία BBAR(1) και ότι οι τιμές των παραμέτρων του μοντέλου είναι ίσες με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις που δίνονται στον Πίνακα 6.10.

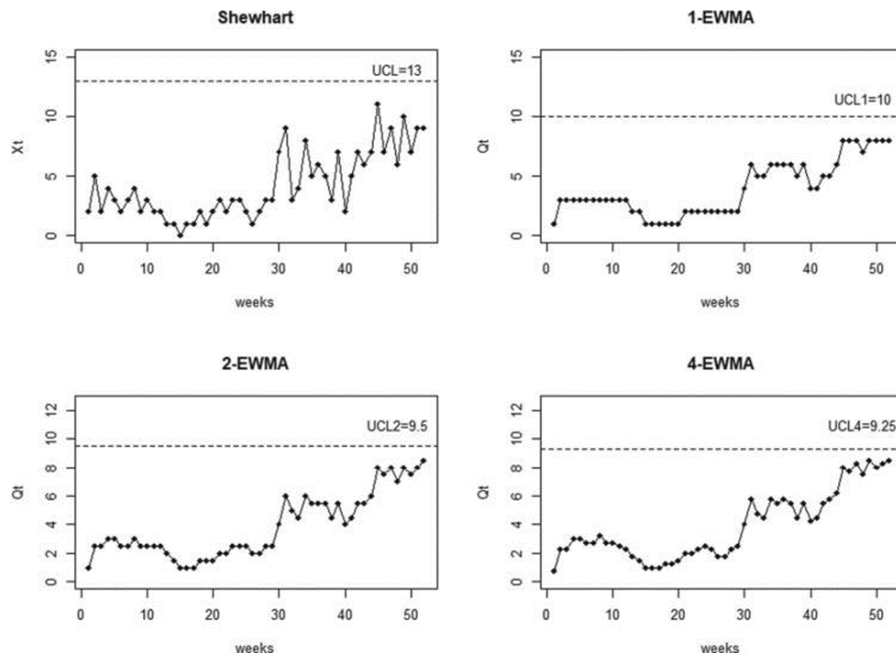
Ακολουθώντας τα βήματα που περιεγράφηκαν στο Κεφάλαιο 3 (Ενότητα 3.2), θα αναπτυχθούν μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart, s -EWMA, $s = 1, 2, 4$ και CUSUM για τη στατιστική παρακολούθηση της διαδικασίας BBAR(1). Για επεξηγηματικούς σκοπούς, επιλέγεται ως η επιθυμητή τιμή της εντός ελέγχου απόδοσης των διαγραμμάτων να είναι $ARL_0 = 370.4$ και οι τιμές των παραμέτρων για κάθε διάγραμμα να είναι τέτοιες ώστε να έχουν τιμή $zsARL$ όσο το δυνατόν κοντά στην επιθυμητή τιμή ARL_0 .

Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα, ξεκινώντας από την περίπτωση των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων. Συγκεκριμένα, για την παρακολούθηση της διεργασίας BBAR(1), θα χρησιμοποιηθούν τα εξής άνω μονόπλευρα διαγράμματα:

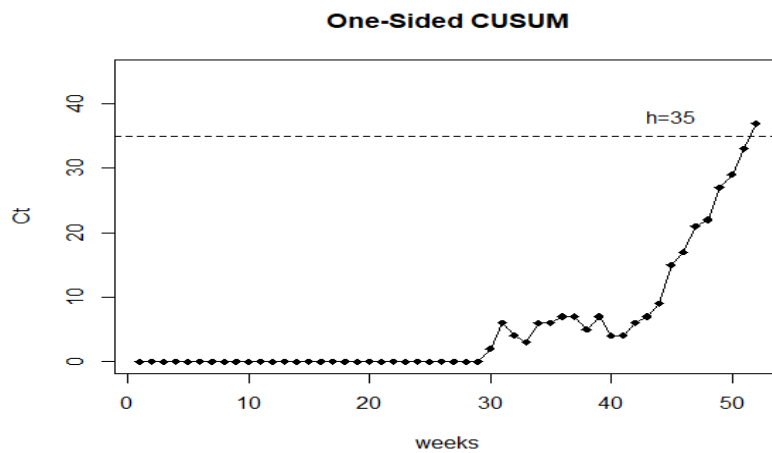
- Shewhart με $UCL = 13$ και $zsARL = 324.52$.
- CUSUM με $k = 5$, $h = 35$ και $zsARL = 378.75$.
- 1-EWMA με $(\lambda_1, UCL_1) = (0.43, 10)$ και $zsARL = 352.85$.

- 2-EWMA με $(\lambda_2, UCL_2) = (0.38, 19/2) = (0.38, 9.5)$ και $zsARL = 354.62$.
- 4-EWMA με $(\lambda_4, UCL_4) = (0.36, 37/4) = (0.36, 9.25)$ και $zsARL = 370.60$.

Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart και CUSUM είναι αυτά που αναπτύχθηκαν από τους Rakitzis et al. (2017b). Στις Εικόνες 6.2 και 6.3 δίνονται τα γραφήματα των παραπάνω άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων για τα δεδομένα hantavirus.



Εικόνα 6.2: Άνω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και s -EWMA για τα δεδομένα hantavirus



Εικόνα 6.3: Μονόπλευρο διάγραμμα CUSUM για τα δεδομένα hantavirus, περίπτωση αυξήσεων

Από τις Εικόνες 6.2 και 6.3 παρατηρείται μία ανοδική τάση κατά τις τελευταίες εβδομάδες του έτους. Συγκεκριμένα, η συμπεριφορά αυτή εντοπίζεται ακριβώς μετά την 30ή εβδομάδα και στη συνέχεια ακολουθεί μια σαφής ένδειξη αυξητικής τάσης στο μέσο εβδομαδιαίο αριθμό περιφερειών με τουλάχιστον ένα νέο κρούσμα από την 41^η εβδομάδα και μετά. Η μετατόπιση αυτή γίνεται αντιληπτή από όλα τα διαγράμματα. Από όλα τα διαγράμματα στις Εικόνες 6.2 και 6.3 μόνο το άνω μονόπλευρο CUSUM δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας την 52η εβδομάδα. Συγκεκριμένα, το 52^ο σημείο στην Εικόνα 6.3 ξεπερνά την τιμή h (διάστημα απόφασης). Τα σημεία σε όλα τα διαγράμματα s -EWMA της Εικόνας 6.2 είναι κάτω από την τιμή του αντίστοιχου άνω ορίου ελέγχου και άρα δε δίνουν ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας.

Στη συνέχεια, θα παρουσιαστεί η περίπτωση των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων για την παρακολούθηση της BBAR(1) διεργασίας. Συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιηθούν τα εξής κάτω μονόπλευρα διαγράμματα:

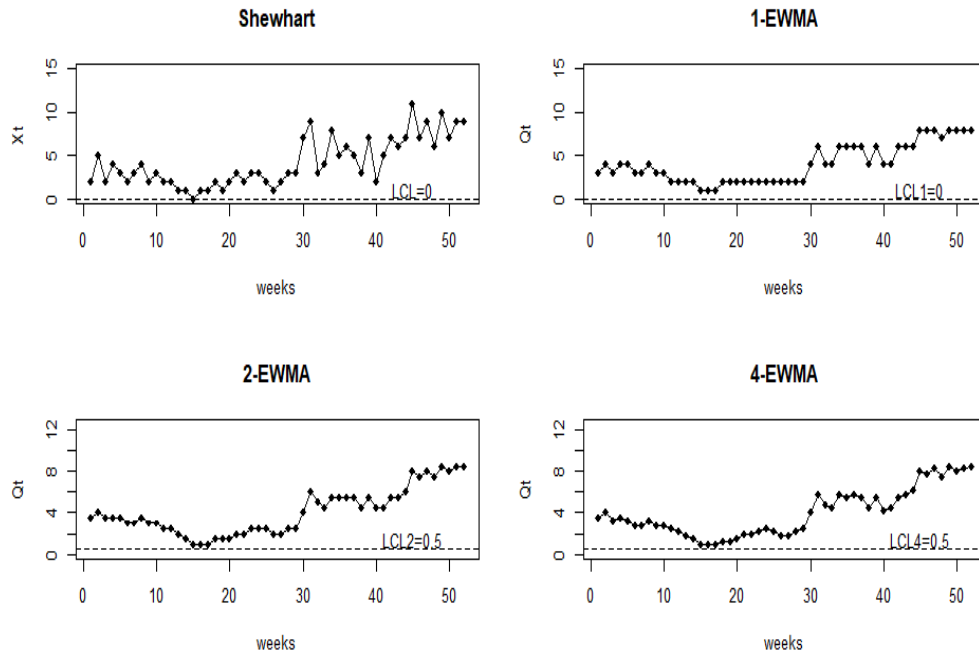
- Shewhart με $LCL = 0$ και $zsARL = 44.28$.
- CUSUM με $k = 4$, $h = 59$ και $zsARL = 366.34$.
- 1-EWMA με $(\lambda_1, LCL_1) = (0.5, 0)$ και $zsARL = 173.58$.
- 2-EWMA με $(\lambda_2, LCL_2) = (0.35, 1/2) = (0.35, 0.5)$ και $zsARL = 375.62$.
- 4-EWMA με $(\lambda_4, LCL_4) = (0.36, 2/4) = (0.36, 0.5)$ και $zsARL = 366.28$.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειωθεί ότι τόσο για το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα Shewhart, όσο και για το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα 1-EWMA, η εντός ελέγχου τιμή για το $zsARL$ που επιτυγχάνουν είναι σημαντικά πιο μικρή από την επιθυμητή. Επομένως, αναμένεται να έχουν υψηλό αριθμό εσφαλμένων συναγερωμών (αλλά και ταχύτερη ανίχνευση πιθανών αλλαγών στη διεργασία). Έτσι, η ερμηνεία τους θα πρέπει να γίνει με προσοχή, σε σύγκριση με τα υπόλοιπα διαγράμματα υπό εξέταση. Η εντός ελέγχου απόδοση των υπολοίπων διαγραμμάτων μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι πάρα πολύ κοντά στην επιθυμητή. Όπως και στην περίπτωση των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων, οι τιμές των παραμέτρων των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων Shewhart και CUSUM είναι αυτές που προτάθηκαν από τους Rakitzis et al. (2017b).

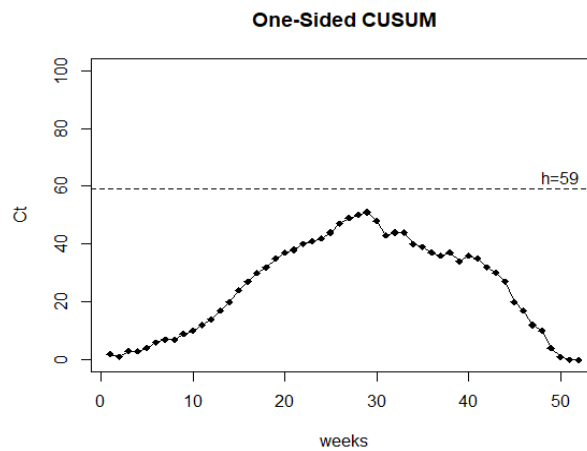
Στις Εικόνες 6.4 και 6.5 δίνονται οι εικόνες των παραπάνω κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων για τα δεδομένα hantavirus. Θα πρέπει να σημειωθεί πως ο τρόπος ορισμού του διαγράμματος CUSUM είναι

$$C_t = \max\{0, C_{t-1} - X_t + k\}, \quad C_0 = 0$$

και δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν $C_t \geq h$. Αν και είναι κατάλληλο για την ανίχνευση μειώσεων στο μέσο επίπεδο της διεργασίας, χρησιμοποιεί ένα άνω όριο ελέγχου h . Καταχρηστικά λοιπόν, θα αναφερόμαστε σε αυτό ως κάτω μονόπλευρο διάγραμμα.



Εικόνα 6.4: Κάτω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και s -EWMA για τα δεδομένα hantavirus



Εικόνα 6.5: Μονόπλευρο διάγραμμα CUSUM για τα δεδομένα hantavirus, περίπτωση μειώσεων.

Από τις Εικόνες 6.4 και 6.5, παρατηρείται αρχικά ότι το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα Shewhart δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στη 15^η εβδομάδα (αφού $X_{15} = 0$). Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τέτοιου είδους ενδείξεις πρέπει να ερμηνεύονται με προσοχή λόγω του ότι το *zSARL* απέχει σημαντικά από την επιθυμητή τιμή.

Επίσης, κατά τις πρώτες 29 εβδομάδες του έτους υπάρχει σαφής ένδειξη μείωσης της περιφερειακής εξάπλωσης της μόλυνσης από τον ιό hantavirus, καθώς το εύρος των τιμών κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου κυμαίνεται μεταξύ 0 και 5. Οι χαμηλές τιμές κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου προκαλούν μια διαταραχή που αποτυπώνεται από όλα τα διαγράμματα. Παρά ταύτα, κανένα από τα διαγράμματα (εκτός του Shewhart) δε δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας.

6.4.1.2 Εφαρμογή των διαγραμμάτων σε διεργασίες BINARCH(1)

Στην παρούσα ενότητα θα εφαρμοστούν τα προτεινόμενα διαγράμματα LR-CUSUM, cLR-CUSUM και *s*-EWMA στο ίδιο σετ δεδομένων για την παρακολούθηση των διαδικασιών BINARCH(1), καθώς το μοντέλο αυτό αποτελεί μία εναλλακτική επιλογή του BBAR(1) για την περιγραφή δεδομένων με παρουσία υπερμεταβλητότητας. Επομένως, θα προσαρμοστεί το υπόδειγμα BINARCH(1) στα δεδομένα Hantavirus εφαρμόζοντας τη μέθοδο της υπό συνθήκη μέγιστης πιθανοφάνειας (CML) (Δείτε Κεφάλαιο 2, Ενότητα 2.7). Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση `optim()` στην R, προκύπτουν οι ακόλουθες εκτιμήσεις των παραμέτρων του BINARCH(1) μοντέλου.

Πίνακας 6.11: Προσαρμογή του μοντέλου BINARCH(1) στα δεδομένα Hantavirus

Μοντέλο	a_{00}	a_{01}	AIC	BIC
BINARCH(1)	0.030 (0.011)	0.748 (0.108)	211.39	215.30

Στον Πίνακα 6.11 δίνονται οι εκτιμήσεις των παραμέτρων του μοντέλου καθώς και τα τυπικά σφάλματα αυτών στις αντίστοιχες παρενθέσεις. Επίσης, για λόγους σύγκρισης, δίνονται και οι τιμές των κριτηρίων AIC, BIC. Συγκρίνοντάς τες με τις αντίστοιχες τιμές στον Πίνακα 6.10, διαπιστώνουμε πως στα συγκεκριμένα δεδομένα, μεταξύ των τριών μοντέλων, την καλύτερη

προσαρμογή έχει το μοντέλο BINARCH(1). Άρα, σε πρακτικά προβλήματα, προτού προχωρήσει κανείς με την ανάπτυξη των διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση της διεργασίας θα πρέπει να διεξάγει μια ανάλογη διαδικασία επιλογής μοντέλου. Αφού επιλεγεί το μοντέλο με την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα, στη συνέχεια θα πρέπει να αναπτυχθούν τα επιθυμητά διαγράμματα ελέγχου με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο. Παρακάτω θα προχωρήσουμε με την ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου BINARCH(1) για την παρακολούθηση της διεργασίας.

Όπως και στην περίπτωση του μοντέλου BBAR(1), υποθέτουμε ότι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων του BINARCH(1) (δείτε Πίνακα 6.11) είναι οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων της διεργασίας, όταν αυτή βρίσκεται εντός ελέγχου. Επιπλέον, για την ανάπτυξη όλων των εξεταζόμενων διαγραμμάτων ελέγχου, χρησιμοποιήθηκε ενδεικτικά ως επιθυμητή τιμή για το $zsARL$ η τιμή $ARL_0 = 100$.

Ακολουθώντας τα βήματα που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 5 (Ενότητα 5.4) για τον προσδιορισμό των παραμέτρων του διαγράμματος (h_A για LR-CUSUM, h_A και h_B για cLR-CUSUM), τα μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου που θα χρησιμοποιηθούν για την παρακολούθηση της διεργασίας δίνονται παρακάτω:

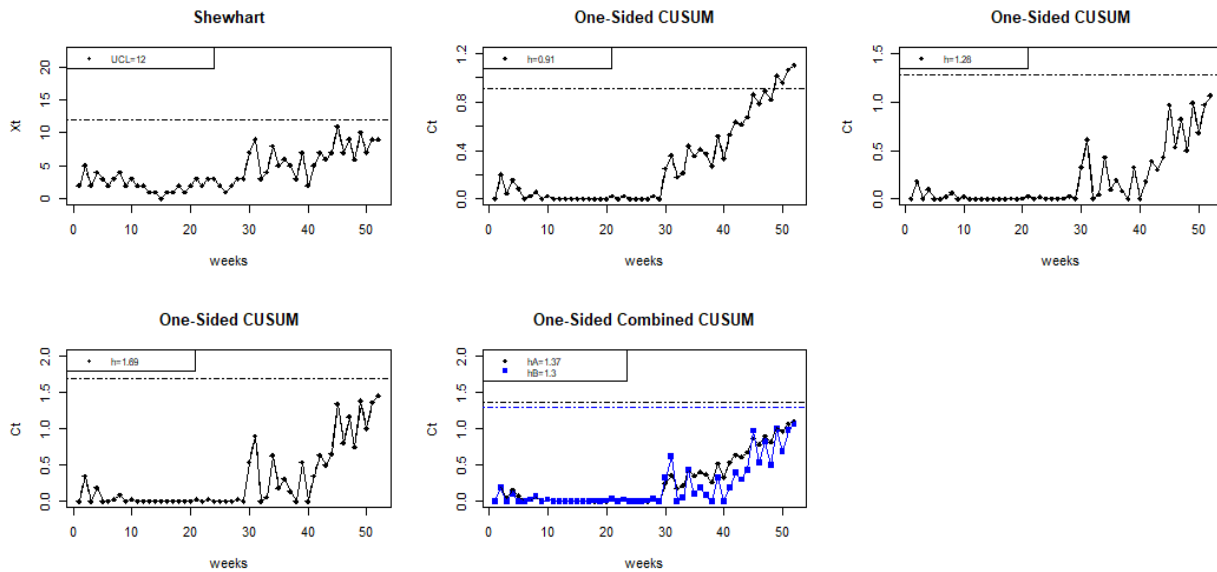
- Shewhart με $UCL = 12$ και $zsARL = 83.3$
- LR-CUSUM με $h_A = 0.91$ και $zsARL = 99.09$, για μετατοπίσεις $d_A^* = 1.2$ και $\tau_A^* = 0$
- LR-CUSUM με $h_A = 1.28$ και $zsARL = 100.78$, για μετατοπίσεις $d_A^* = 1$ και $\tau_A^* = 0.1$
- LR-CUSUM με $h_A = 1.69$ και $zsARL = 100.22$, για μετατοπίσεις $d_A^* = 1.2$ και $\tau_A^* = 0.1$
- cLR-CUSUM με $h_A = 1.37$, $h_B = 1.3$ και $zsARL = 99.19$, για μετατοπίσεις $d_A^* = 1.2$, $d_B^* = 1$, $\tau_A^* = 0$ και $\tau_B^* = 0.1$

Άμεσα διαπιστώνεται πως στα παραπάνω διαγράμματα το $zsARL$ είναι όσο το δυνατόν κοντά στο 100. Επίσης, με βάση την αλγοριθμική διαδικασία που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 5 (Ενότητα 5.3), είναι δυνατή η ανάπτυξη άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου s-EWMA για την παρακολούθηση της συγκεκριμένης BINARCH(1) διεργασίας με τιμή $zsARL$ όσο το δυνατόν κοντά στο 100. Συγκεκριμένα, τα διαγράμματα αυτά είναι:

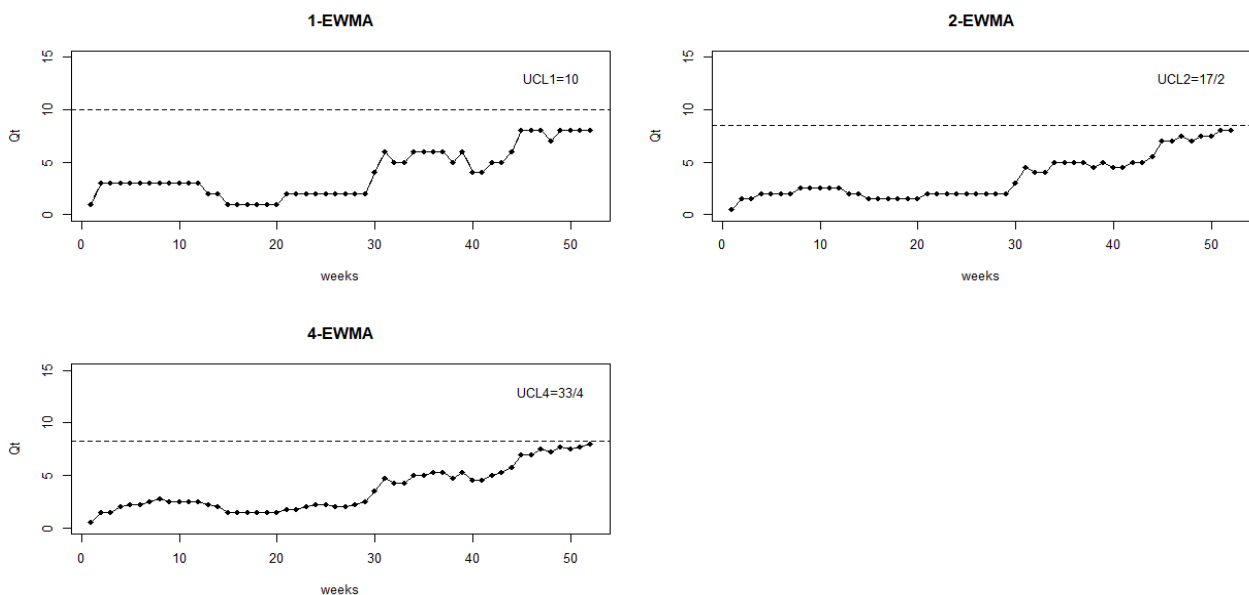
- 1-EWMA με $\lambda = 0.38$, $UCL_1 = 10$ και $zsARL = 99.94$
- 2-EWMA με $\lambda = 0.24$, $UCL_2 = \frac{17}{2} = 8.5$ και $zsARL = 99.41$

- 4-EWMA με $\lambda = 0.22$, $UCL_4 = \frac{33}{4} = 8.25$ και $zsARL = 96.93$

Στην Εικόνα 6.6, παρουσιάζονται οι εικόνες των μονόπλευρων διαγραμμάτων Shewhart, LR-CUSUM και cLR-CUSUM για τα δεδομένα hantavirus, ενώ στην Εικόνα 6.7 δίνονται τα αντίστοιχα άνω μονόπλευρα διαγράμματα s-EWMA.



Εικόνα 6.6: Μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart, LR-CUSUM και cLR-CUSUM για τα δεδομένα hantavirus. Περίπτωση αυξήσεων.



Εικόνα 6.7: Άνω μονόπλευρα διαγράμματα s-EWMA για τα δεδομένα Hantavirus

Από τις εικόνες των διαγραμμάτων συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια ανοδική τάση στο μέσο επίπεδο της διεργασίας, η οποία ξεκινά λίγο μετά την 30^η εβδομάδα, και γίνεται ακόμη πιο έντονη από την 41^η εβδομάδα και μετά. Η μετατόπιση αυτή γίνεται αντιληπτή από όλα τα διαγράμματα, ενώ μάλιστα το διάγραμμα CUSUM, το οποίο είναι κατάλληλο για την ανίχνευση αλλαγών μόνο στο α_{00} , δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας την 49^η εβδομάδα.

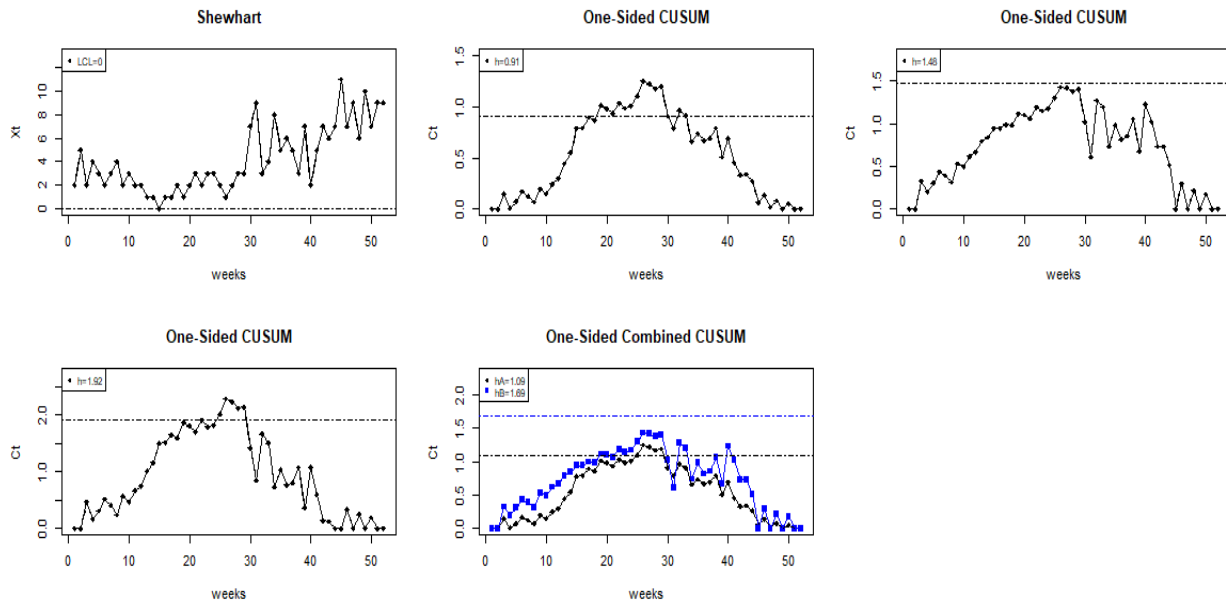
Στη συνέχεια, ακολουθείται η ίδια διαδικασία για την περίπτωση μονόπλευρων διαγραμμάτων για την ανίχνευση μειώσεων στο μέσο επίπεδο της διεργασίας. Συγκεκριμένα, τα διαγράμματα που θα χρησιμοποιηθούν είναι τα εξής:

- Shewhart με $LCL = 0$ και $zsARL = 36.91$
- LR-CUSUM με $h_A = 0.91$ και $zsARL = 100.16$, για μετατοπίσεις $d_A^* = 0.8$ και $\tau_A^* = 0$
- LR-CUSUM με $h_A = 1.48$ και $zsARL = 100.21$, για μετατοπίσεις $d_A^* = 1$ και $\tau_A^* = 0.1$
- LR-CUSUM με $h_A = 1.92$ και $zsARL = 100.80$, για μετατοπίσεις $d_A^* = 0.8$ και $\tau_A^* = 0.1$
- cLR-CUSUM με $h_A = 1.09$, $h_B = 1.69$ και $zsARL = 99.09$, για μετατοπίσεις $d_A^* = 0.8$, $d_B^* = 1$, $\tau_A^* = 0$ και $\tau_B^* = 0.1$

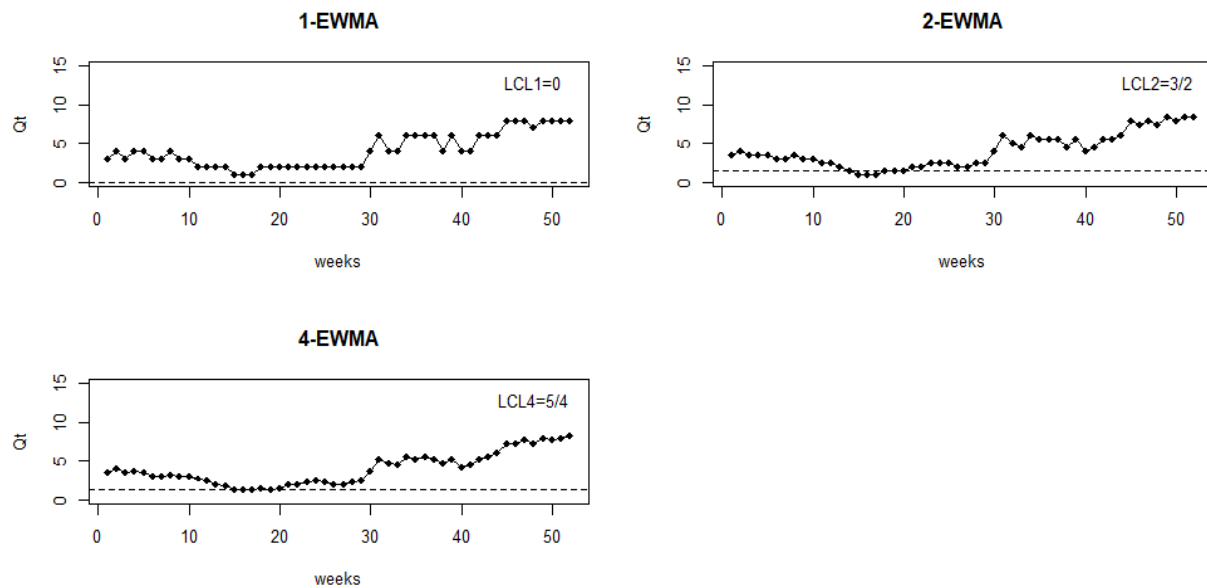
Εκτός των παραπάνω διαγραμμάτων, θα χρησιμοποιηθούν επιπλέον και τα παρακάτω κάτω μονόπλευρο διαγράμματα ελέγχου s -EWMA:

- 1-EWMA με $\lambda = 0.5$, $LCL_1 = 0$ και $zsARL = 127.94$
- 2-EWMA με $\lambda = 0.37$, $LCL_2 = 3/2 = 1.5$ και $zsARL = 107.36$
- 4-EWMA με $\lambda = 0.27$, $UCL_4 = 5/4 = 1.25$ και $zsARL = 108.82$

Οι εικόνες των μονόπλευρων διαγραμμάτων Shewhart, LR-CUSUM και cLR-CUSUM δίνονται στην Εικόνα 6.8 ενώ στην Εικόνα 6.9 δίνονται τα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα s -EWMA.



Εικόνα 6.8: Μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart, LR-CUSUM και cLR-CUSUM για τα δεδομένα hantavirus. Περίπτωση μειώσεων.



Εικόνα 6.9: Κάτω μονόπλευρα διαγράμματα s -EWMA για τα δεδομένα hantavirus

Με βάση τα αποτελέσματα που παρέχονται στις Εικόνες 6.8 και 6.9, παρατηρείται ότι τα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και 4-EWMA δίνουν ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας για

πρώτη φορά στο 15^ο σημείο (αφού $x_{15} = 0$), ενώ το διάγραμμα 2-EWMA δίνει ένδειξη για πρώτη φορά στο 14^ο σημείο αφού $Q_{14}^{(2)} = 1.5$. Επίσης, από τις εικόνες των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου CUSUM έχουμε ότι το διάγραμμα LR-CUSUM, το οποίο είναι κατάλληλο για την ανίχνευση αλλαγών μόνο στην παράμετρο α_{01} , δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας για πρώτη φορά στο 19^ο σημείο. Τέλος, το διάγραμμα cLR-CUSUM δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας για πρώτη φορά στο 25^ο σημείο.

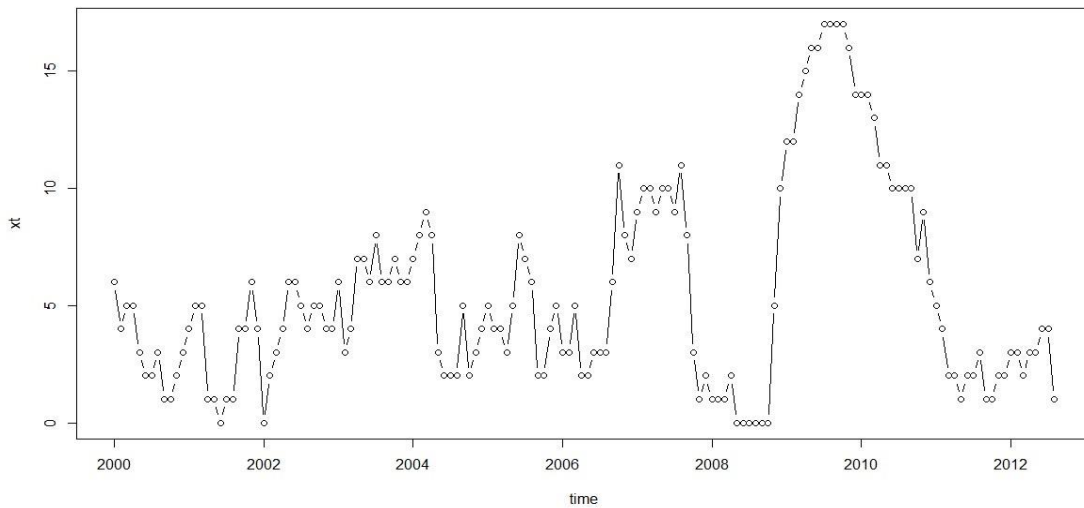
6.4.2 Εφαρμογές των διαγραμμάτων σε δεδομένα πληθωρισμού

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιαστεί μια εφαρμογή των προτεινόμενων διαγραμμάτων στην παρακολούθηση μιας διεργασίας που σχετίζεται με την επιστημονική περιοχή των οικονομικών. Συγκεκριμένα, πρόκειται να εξεταστούν τα μηνιαία στοιχεία του πληθωρισμού των μελών της Ευρωζώνης, από τον Ιανουάριο του 2000 έως τον Αύγουστο του 2012. Τα μηνιαία ποσοστά πληθωρισμού δημοσιεύονται από τη στατιστική υπηρεσία της Ευρωπαϊκής Ένωσης (Eurostat) και βρίσκονται στη διεύθυνση:

http://appsso.eurostat.ec.europa.eu/nui/show.do?wai=true&dataset=prc_hicp_manr

Στα διαθέσιμα στοιχεία περιλαμβάνεται ο μηνιαίος αριθμός των κρατών-μελών της Ευρωζώνης (μεταξύ $n = 17$) που παρουσιάζουν σταθερότητα τιμών, δηλαδή ο μηνιαίος ρυθμός πληθωρισμού είναι κάτω από 2%. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το συγκεκριμένο σύνολο δεδομένων δείτε Weiß and Kim (2014) και Rakitzis et al. (2017b).

Επομένως, κάθε αριθμός X_t αντιπροσωπεύει το πλήθος των καρτών μελών της Ευρωζώνης (από τις 17) που επιδεικνύουν χαμηλό πληθωρισμό τον μήνα t . Στη συνέχεια δίνεται η γραφική παράσταση των δεδομένων.



Εικόνα 6.10: Γραφική Παράσταση Δεδομένων πληθωρισμού

Από την γραφική παράσταση των δεδομένων στην Εικόνα 6.10 γίνεται φανερό ότι η χρονική περίοδος από τον Ιανουάριο του 2000 έως τον Δεκέμβριο του 2006 θεωρείται αρκετά σταθερή από την άποψη της σταθερότητας των τιμών, καθώς δεν υπήρξαν σοβαρά γεγονότα τα οποία θα μπορούσαν να επηρεάσουν την οικονομία των κρατών-μελών της Ευρωζώνης (ΕΖ). Ωστόσο, ενδέχεται να υπάρχουν ορισμένες χρονικοί περιόδοι στις οποίες τα κράτη-μέλη της Ευρωζώνης να παρουσιάζουν αποκλίσεις προς τις τιμές του πληθωρισμού. Το γεγονός αυτό μπορεί να αποδοθεί στην ανομοιογένεια των οικονομιών των κρατών μελών της ΕΖ εξ' αιτίας των δοκιμών και κοινωνικοοικονομικών διαφορών τους. Επίσης, είναι λογικό να θεωρηθεί ότι η πιθανότητα εμφάνισης χαμηλού πληθωρισμού δεν είναι η ίδια σε όλα τα κράτη-μέλη της ΕΕ, γεγονός που, μάλιστα, θεωρείται συχνά ως ένας από τους κύριους λόγους της κρίσης του ευρώ κατά τη δεκαετία 2009-2019.

Επομένως, στόχος αυτής της ενότητας αποτελεί η ανάπτυξη ενός κατάλληλου διαγράμματος ελέγχου για την παρακολούθηση του μηνιαίου αριθμού των καρτών-μελών της Ευρωζώνης με πληθωρισμό μικρότερο από 2%. Τέτοιου είδους τεχνικές κρίνονται σημαντικές αφού π.χ. η γρήγορη ανίχνευση αλλαγών μπορεί να οδηγήσει στην έγκαιρη ενημέρωση επίσημων αρχών (π.χ. η Ευρωπαϊκή Κεντρική Τράπεζα) ώστε να έχουν χρόνο να προετοιμαστούν και να παρέμβουν κατάλληλα, όπου χρειάζεται. Για παράδειγμα, η αύξηση του μηνιαίου αριθμού των μελών της Ευρωζώνης που έχουν πληθωρισμό κάτω του 2% αποτελεί ένδειξη οικονομικής σταθερότητας, ενώ η αύξηση αποτελεί ένδειξη αβεβαιότητας και πιθανώς σε μία τέτοια περίπτωση να χρειαστεί άμεση παρέμβαση από τις αρχές.

6.4.2.1 Εφαρμογή των διαγραμμάτων σε διεργασίες BINARCH(1)

Αρχικά, οι πρώτες 84 παρατηρήσεις (Ιανουάριος 2000-Δεκέμβριος 2006) θα αποτελέσουν το δείγμα Φάσης I. Στη συγκεκριμένη χρονική περίοδο δεν παρατηρήθηκαν σημαντικά συμβάντα που να επηρέασαν τις οικονομίες των κρατών-μελών της ΕΖ και άρα μπορεί να θεωρηθεί ως μια περίοδος σταθερότητας (εντός στατιστικού ελέγχου). Οι υπόλοιπες 68 παρατηρήσεις (Ιανουάριος 2007-Αύγουστος 2012) θα χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση Φάσης II. Ο δειγματικός μέσος και η διακύμανση για τις 84 πρώτες παρατηρήσεις είναι $\bar{x} \approx 4.1267$ και $s^2 \approx 4.866$ αντίστοιχα. Επίσης, ο διωνυμικός δείκτης μεταβλητότητας είναι $I_d = 1.522 > 1$, γεγονός που αποτελεί ένδειξη υπερμεταβλητότητας στα δεδομένα. Για τον λόγο αυτό, οι Weiß and Kim (2014) θεώρησαν το BBAR(1), ως καταλληλότερο μοντέλο από το BAR(1), προκειμένου να μοντελοποιηθούν τα δεδομένα με παρουσία αυτοσυσχέτισης καθώς και ετερογένειας μεταξύ των μονάδων.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την προσαρμογή των μοντέλων BAR(1), BBAR(1) και BINARCH(1) στα δεδομένα Φάσης I. Για την εκτίμηση των παραμέτρων κάθε μοντέλου χρησιμοποιείται η μέθοδος της μέγιστης (υπό συνθήκη) πιθανοφάνειας. Για την επιλογή του μοντέλου με την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα χρησιμοποιούνται τα κριτήρια AIC, BIC. Τα αποτελέσματα από την προσαρμογή των τριών μοντέλων στα δεδομένα δίνονται στον Πίνακα 6.12.

Πίνακας 6.12: Προσαρμογή των μοντέλων BAR(1), BBAR(1) και BINARCH(1) στα δεδομένα πληθωρισμού

Μοντέλο	$\hat{\pi}$	$\hat{\rho}$	$\hat{\phi}$	\hat{a}_{00}	\hat{a}_{01}	AIC	BIC
BAR(1)	0.255 (0.022)	0.578 (0.058)	-			327.3	332.1
BBAR(1)	0.255 (0.028)	0.621 (0.063)	0.037 (0.028)			322.5	329.8
BINARCH(1)				0.0792 (0.0212)	0.684 (0.084)	318.4	323.3

Στον Πίνακα 6.12 περιέχονται οι τιμές των εκτιμήσεων για τα μοντέλα BAR(1), BBAR(1) και BINARCH(1) καθώς και οι τυπικές αποκλίσεις αυτών στις αντίστοιχες παρενθέσεις. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τα μοντέλα BAR(1) και BBAR(1) συμπίπτουν με τις αντίστοιχες τιμές που δίνονται στην εργασία των Weiß and Kim

(2014) στον Πίνακα VI, με τις διαφορές να οφείλονται σε στρογγυλοποιήσεις. Με βάση τα στοιχεία του Πίνακα 6.12 διαπιστώνεται ότι το μοντέλο BINARCH(1) είναι αυτό με την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα, καθώς επιτυγχάνει την ελάχιστη τιμή για όλα τα εξεταζόμενα κριτήρια.

Στη συνέχεια, θα αναπτύξουμε άνω και κάτω μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart, EWMA και CUSUM για την παρακολούθηση της διεργασίας, υποθέτοντας πως αυτή μοντελοποιείται σύμφωνα με ένα BINARCH(1) υπόδειγμα. Επιπλέον, θα υποθέσουμε πως οι τιμές των παραμέτρων της διεργασίας, όταν αυτή είναι εντός ελέγχου, είναι ίσες με τις εκτιμήσεις των παραμέτρων του μοντέλου BINARCH(1) στον Πίνακα 6.12. Ενδεικτικά, για την εντός ελέγχου απόδοση κάθε διαγράμματος επιλέγουμε ως επιθυμητή τιμή την $ARL_0 = 370.4$.

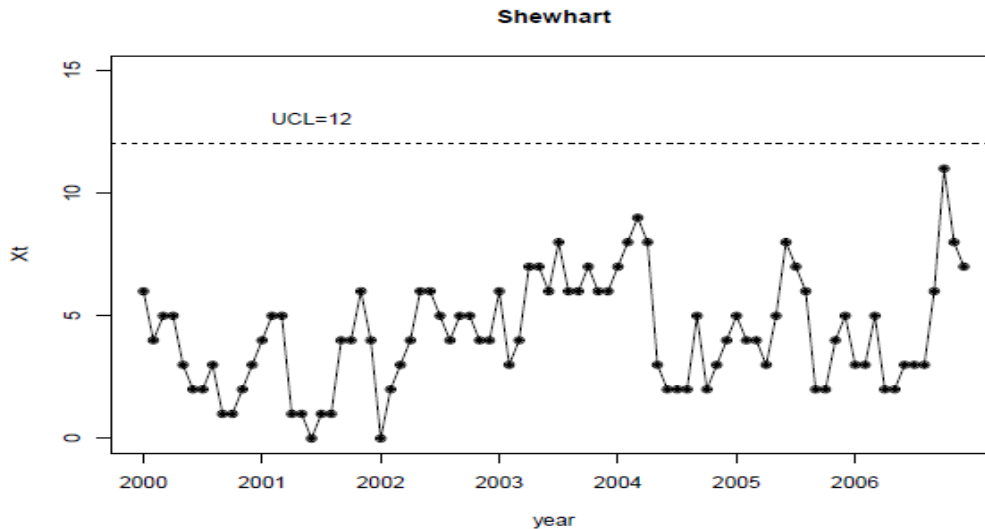
Ακολουθώντας τα βήματα που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 5 (Ενότητα 5.3) για τον προσδιορισμό των παραμέτρων $(s, \lambda, UCLs)$, για $s = 1, 2, 4$, προτείνονται τα ακόλουθα άνω μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου s -EWMA και Shewhart, με τιμή $zsARL$ όσο το δυνατόν κοντά στην επιθυμητή τιμή 370.4:

- Shewhart με $UCL = 12$ και $zsARL = 342.12$
- 1-EWMA με $(\lambda_1, UCL_1) = (0.4, 10)$ και $zsARL = 387.68$
- 2-EWMA με $(\lambda_2, UCL_2) = (0.27, 18/2) = (0.27, 9)$ και $zsARL = 380.40$,
- 4-EWMA με $(\lambda_4, UCL_4) = (0.24, 34/4) = (0.24, 8.5)$ και $zsARL = 383.45$.

Εκτός των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων τύπου Shewhart και CUSUM, θα χρησιμοποιηθούν και τα παρακάτω μονόπλευρα διαγράμματα τύπου CUSUM. Τα διαγράμματα αυτά είναι κατάλληλα για την ανίχνευση αυξήσεων στο μέσο επίπεδο της διεργασίας. Οι τιμές των παραμέτρων κάθε διαγράμματος επιλέχθηκαν ώστε η εντός ελέγχου τιμή του $zsARL$ να είναι όσο το δυνατόν κοντά στην επιθυμητή τιμή 370.4. Τα διαγράμματα αυτά είναι:

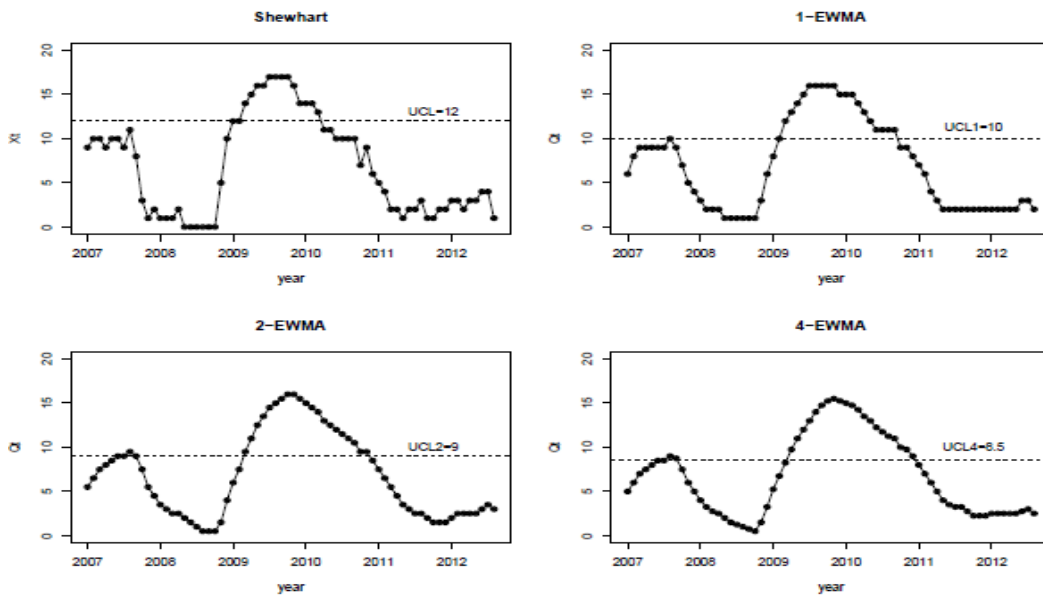
- LR-CUSUM με $h_A = 1.86$ και $zsARL = 370.43$, για μετατοπίσεις $d_A^* = 1.2$ και $\tau_A^* = 0$
- LR-CUSUM με $h_A = 2.35$ και $zsARL = 372.28$, για μετατοπίσεις $d_A^* = 1$ και $\tau_A^* = 0.1$
- LR-CUSUM με $h_A = 2.95$ και $zsARL = 368.52$, για μετατοπίσεις $d_A^* = 1.2$ και $\tau_A^* = 0.1$
- cLR-CUSUM με $h_A = 2.53$, $h_B = 2.43$ και $zsARL = 366.47$, για μετατοπίσεις $d_A^* = 1.2$, $d_B^* = 1$, $\tau_A^* = 0$ και $\tau_B^* = 0.1$

Στη συνέχεια, στην Εικόνα 6.11 δίνεται το άνω μονόπλευρο διάγραμμα Shewhart, το οποίο εφαρμόζεται στα δεδομένα της Φάσης I

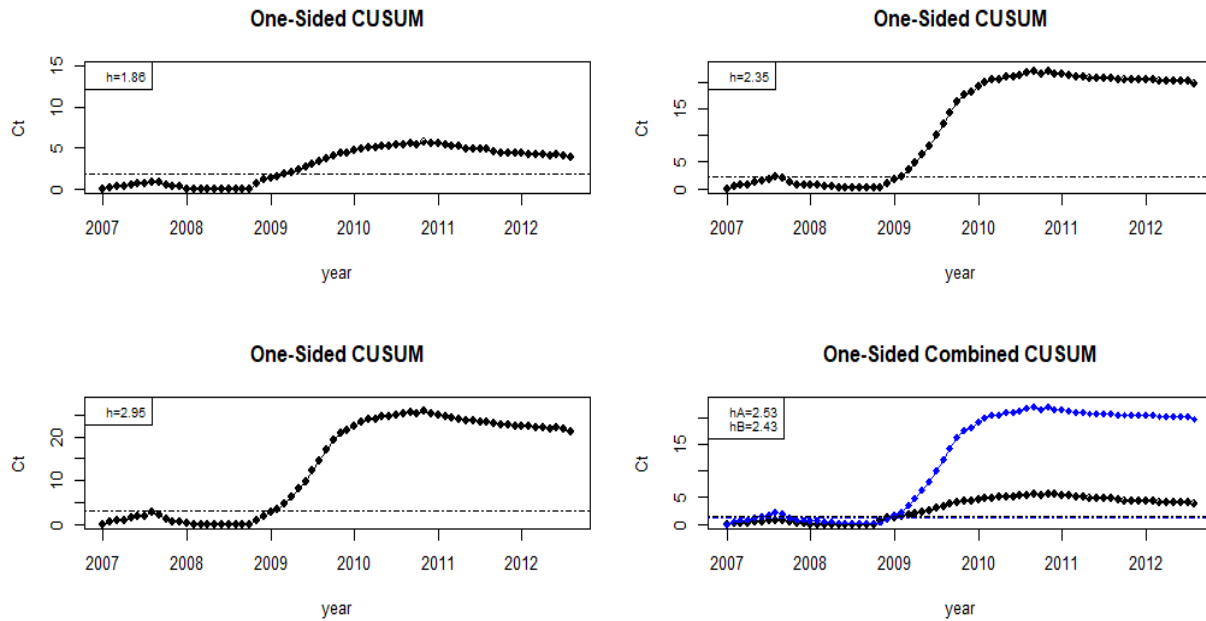


Εικόνα 6.11: Άνω μονόπλευρο διάγραμμα Shewhart για τα δεδομένα πληθωρισμού, Φάση I

Από την Εικόνα 6.11, παρατηρείται ότι δεν υπάρχει κάποια ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας. Επομένως, θα ακολουθήσει η ανάλυση Φάσης II για τις παρατηρήσεις από τον Ιανουάριο του 2007 έως τον Αύγουστο του 2012. Τα άνω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και s -EWMA για την ανάλυση της Φάσης II δίνονται στην Εικόνα 6.12, ενώ τα αντίστοιχα μονόπλευρα διαγράμματα LR-CUSUM και cLR-CUSUM της Φάσης II παρέχονται στην Εικόνα 6.13.



Εικόνα 6.12: Άνω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και s -EWMA για τα δεδομένα πληθωρισμού, Φάση II



Εικόνα 6.13: Μονόπλευρα διαγράμματα LR-CUSUM και cLR-CUSUM για τα δεδομένα πληθωρισμού, Φάση II

Σύμφωνα με την Εικόνα 6.12, γίνεται φανερό ότι εκτός από το διάγραμμα Shewhart, όλα τα διαγράμματα s -EWMA δίνουν ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας για πρώτη φορά στο δείγμα 8, δηλαδή στα μέσα του έτους 2008. Η επόμενη ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας σηματοδοτείται στο δείγμα 28, δηλαδή σχεδόν στις αρχές του έτους 2009. Σε αντίθεση με τα διαγράμματα s -EWMA, το άνω μονόπλευρο διάγραμμα cLR-CUSUM (Εικόνα 6.13) σηματοδοτεί πιο νωρίς ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας και συγκεκριμένα στο δείγμα 5, δηλαδή περίπου στα μέσα του 2007.

Αναφορικά με τη χρονική περίοδο μεταξύ Ιανουαρίου 2007 έως τον Αύγουστο του 2012 κυριαρχεί η διεθνής χρηματοπιστωτική κρίση του 2007-2008. Η ύφεση που ακολούθησε μείωσε τη συνολική ζήτηση και τις τιμές στην ΕΕ. Ως αποτέλεσμα, λίγα (ή κανένα) από τα 17 κράτη-μέλη έχουν σταθερά χαμηλούς μηνιαίους ρυθμούς πληθωρισμού. Παρ' όλα αυτά, υπάρχει ένα σημάδι βελτίωσης προς στο τέλος του 2008, όπου αυξάνεται ο αριθμός των μελών της ΕΖ με μηνιαίο πληθωρισμό μικρότερο του 2%. Η βελτίωση αυτή, γίνεται αντιληπτή από όλα τα διαγράμματα και εξηγεί την ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο δείγμα 28 (αρχές του έτους 2009).

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η χρήση διαγραμμάτων ελέγχου για την ανίχνευση μειώσεων στο μέσο επίπεδο της διεργασίας. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούνται τα ακόλουθα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου Shewhart και s -EWMA, με τιμή $zsARL$ όσο το δυνατόν κοντά στην επιθυμητή τιμή 370.4:

- Shewhart με $LCL = 0$ και $zsARL = 46.90$
- 1-EWMA με $(\lambda_1, LCL_1) = (0.51, 0)$ και $zsARL = 118.46$
- 2-EWMA με $(\lambda_2, LCL_2) = (0.38, 3/2) = (0.38, 1.5)$ και $zsARL = 318.38$
- 4-EWMA με $(\lambda_4, LCL_4) = (0.27, 6/4) = (0.27, 1.5)$ και $zsARL = 396.55$.

Λόγω της διακριτής φύσης των δεδομένων δεν ήταν δυνατό να επιτευχθεί η επιθυμητή εντός ελέγχου απόδοση. Ειδικά για την περίπτωση των διαγραμμάτων Shewhart και 1-EWMA η τιμή του εντός ελέγχου $zsARL$ είναι σημαντικά διαφορετική από την επιθυμητή.

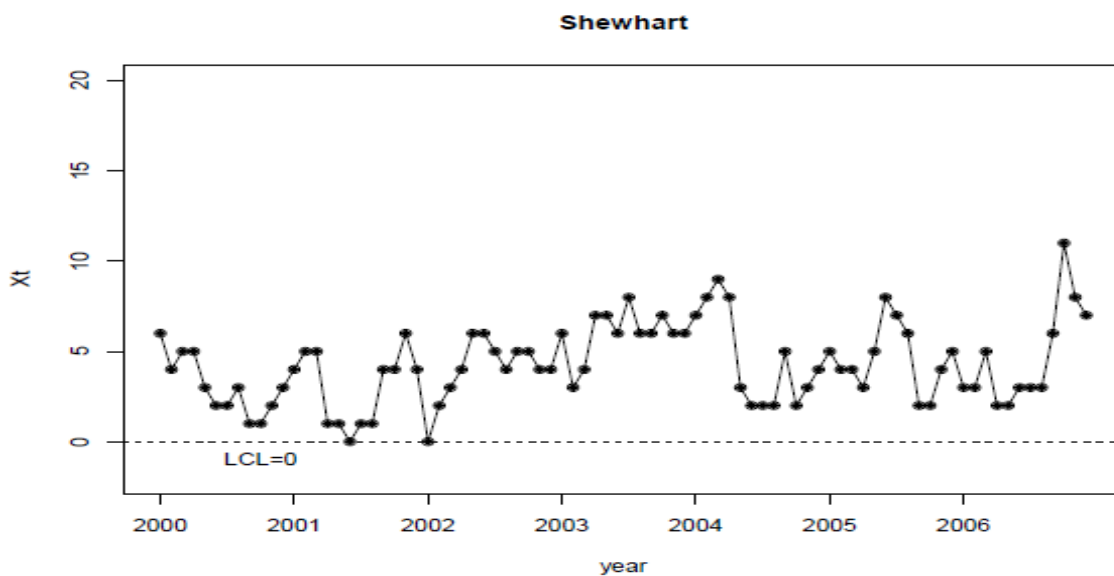
Επιπρόσθετα, εξετάζονται και τα μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου LR-CUSUM και cLR-CUSUM με τιμή $zsARL$ όσο το δυνατόν κοντά στην επιθυμητή τιμή 370.4. Τα διαγράμματα αυτά είναι κατάλληλα για την ανίχνευση μειώσεων στο μέσο επίπεδο της διεργασίας και οι τιμές των παραμέτρων τους δίνονται παρακάτω. Επίσης, οι τιμές των μετατοπίσεων στις παραμέτρους της

διεργασίας (δηλ. τα d_A^* , d_B^* , τ_A^* , τ_B^*) που έχουν επιλεγεί είναι ενδεικτικές και οποιαδήποτε άλλη τιμή μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

- LR-CUSUM με $h_A = 1.91$ και $zsARL = 373.32$, για μετατοπίσεις $d_A^* = 0.8$ και $\tau_A^* = 0$
- LR-CUSUM με $h_A = 2.49$ και $zsARL = 370.69$, για μετατοπίσεις $d_A^* = 1$ και $\tau_A^* = 0.1$
- LR-CUSUM με $h_A = 3.15$ και $zsARL = 369.02$, για μετατοπίσεις $d_A^* = 0.8$ και $\tau_A^* = 0.1$
- cLR-CUSUM με $h_A = 1.93$, $h_B = 4.04$ και $zsARL = 370.62$, για μετατοπίσεις $d_A^* = 0.8$, $d_B^* = 1$, $\tau_A^* = 0$ και $\tau_B^* = 0.1$

Αξίζει να παρατηρήσουμε πως η εντός ελέγχου απόδοση των παραπάνω διαγραμμάτων LR-CUSUM και cLR-CUSUM είναι πολύ κοντά στην επιθυμητή.

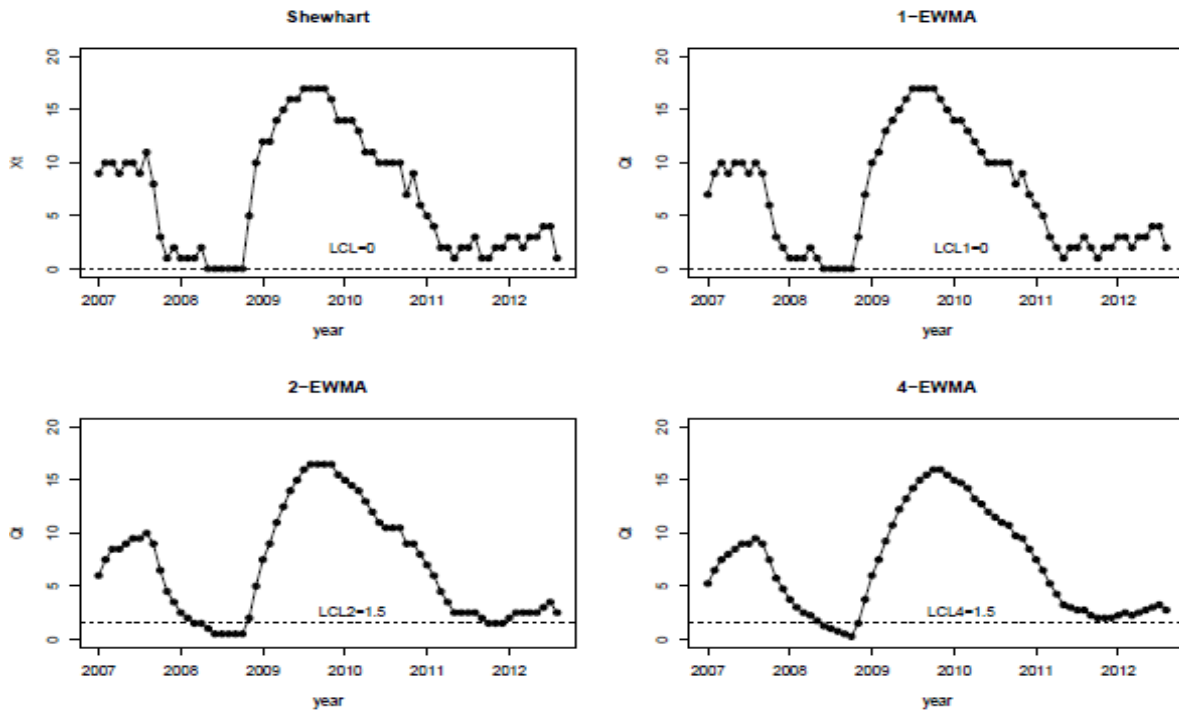
Στη συνέχεια, δίνεται το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα Shewhart για την ανάλυση της Φάσης I (Εικόνα 6.14).



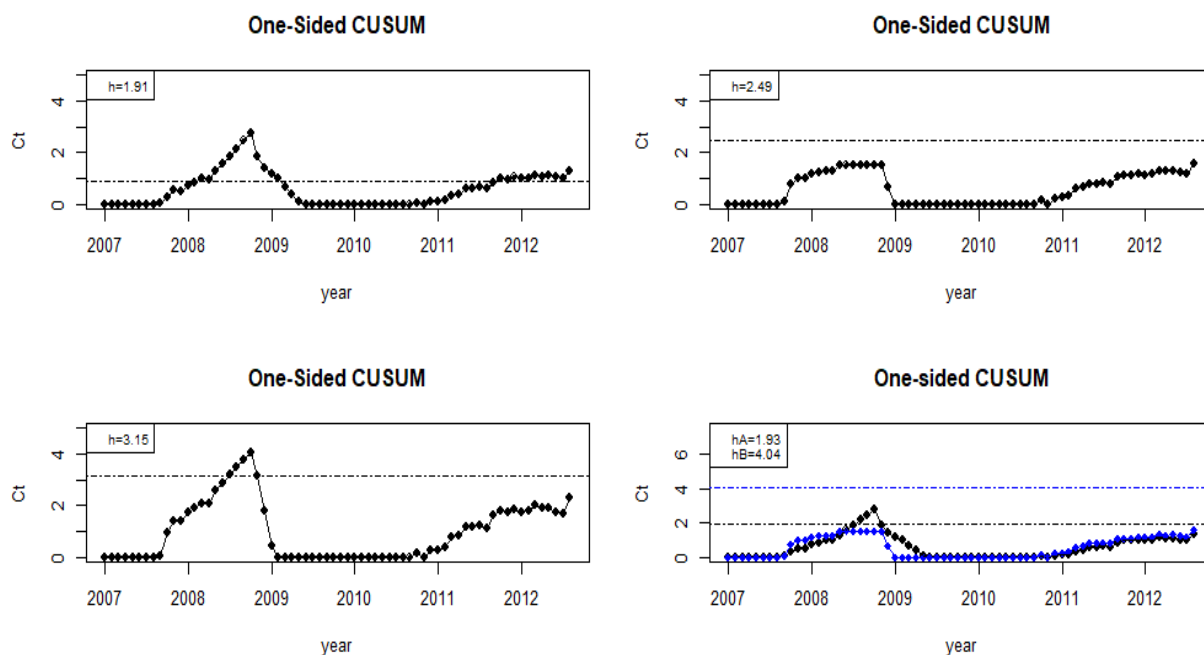
Εικόνα 6.14: Κάτω μονόπλευρο διάγραμμα Shewhart για τα δεδομένα πληθωρισμού, Φάση I

Από την Εικόνα 6.14, παρατηρούνται δύο ενδείξεις εκτός ελέγχου διεργασίας, στα σημεία 18 και 25, καθώς και οι δύο τιμές ισούνται με $LCL = 0$. Οι Rakitzis et al. (2017b) υπέθεσαν ότι οι συγκεκριμένες ενδείξεις αποτελούν ψευδούς συναγερμούς, οι οποίοι ενδεχομένως προέκυψαν λόγω και της χαμηλής τιμής του εντός ελέγχου $zsARL$ για το διάγραμμα Shewhart. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η συγκεκριμένη χρονική περίοδος μπορεί να θεωρηθεί ως μια περίοδος σταθερότητας

για τις οικονομίες της Ευρωζώνης. Επομένως, χωρίς να εξαιρέσουν κάποιο από τα σημεία (και χωρίς να αλλάξουν οι εκτιμήσεις των παραμέτρων) θα προχωρήσουμε με την ανάλυση Φάσης II, χρησιμοποιώντας τα προαναφερθέντα διαγράμματα Shewhart, s -EWMA, CUSUM και cLR-CUSUM για τα δεδομένα από τον Ιανουάριο του 2007 έως τον Αύγουστο του 2012. Οι εικόνες των διαγραμμάτων κατά την ανάλυση Φάσης II δίνονται στις Εικόνες 6.15 και 6.16.



Εικόνα 6.15: Κάτω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και s -EWMA για τα δεδομένα πληθωρισμού, Φάση II



Εικόνα 6.16: Μονόπλευρα διαγράμματα LR-CUSUM και cLR-CUSUM για τα δεδομένα πληθωρισμού, Φάση II

Στις Εικόνες 6.15-6.16, όλα τα εξεταζόμενα διαγράμματα δίνουν ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στα μέσα του 2008, εκτός από το διάγραμμα LR-CUSUM με μεταβολή μόνο στην παράμετρο α_{01} . Πάντως και στο συγκεκριμένο διάγραμμα γίνεται αντιληπτή η συγκεκριμένη διαταραχή. Λόγω της χρηματοπιστωτικής κρίσης αυτής της περιόδου, παρατηρείται μια πτωτική τάση στο μηνιαίο αριθμό κρατών-μελών της ΕΖ με πληθωρισμό κάτω του 2% καθώς πηγαίνουμε από το 2008 στο 2009, όπως επίσης και στο τέλος του 2010, η οποία γίνεται αντιληπτή και από όλα τα εξεταζόμενα διαγράμματα. Το γεγονός αυτό, αποτελεί ένδειξη χειροτέρευσης της διεργασίας και παρουσία οικονομικής αστάθειας στην ΕΖ, δεδομένου ότι πολύ λίγα (αν υπάρχουν) από τα κράτη-μέλη της έχουν μηνιαίο πληθωρισμό κάτω από 2%. Λόγω της αύξησης των τιμών των τροφίμων και της ενέργειας (τέλος του 2010), παρατηρήθηκε πτωτική τάση στον αριθμό των κρατών-μελών της ΕΖ με μηνιαίο πληθωρισμό κάτω του 2% στο τέλος του 2011. Επιπλέον, το διάγραμμα 2-EWMA δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο τέλος του 2011, όπου για μια περίοδο περίπου 10 μηνών, ο μηνιαίος αριθμός των μελών της ΕΖ με ρυθμό πληθωρισμού κάτω του 2% δεν υπερβαίνει το 5.

6.4.2.2 Εφαρμογή των διαγραμμάτων για παρακολούθηση BBAR(1) διεργασιών

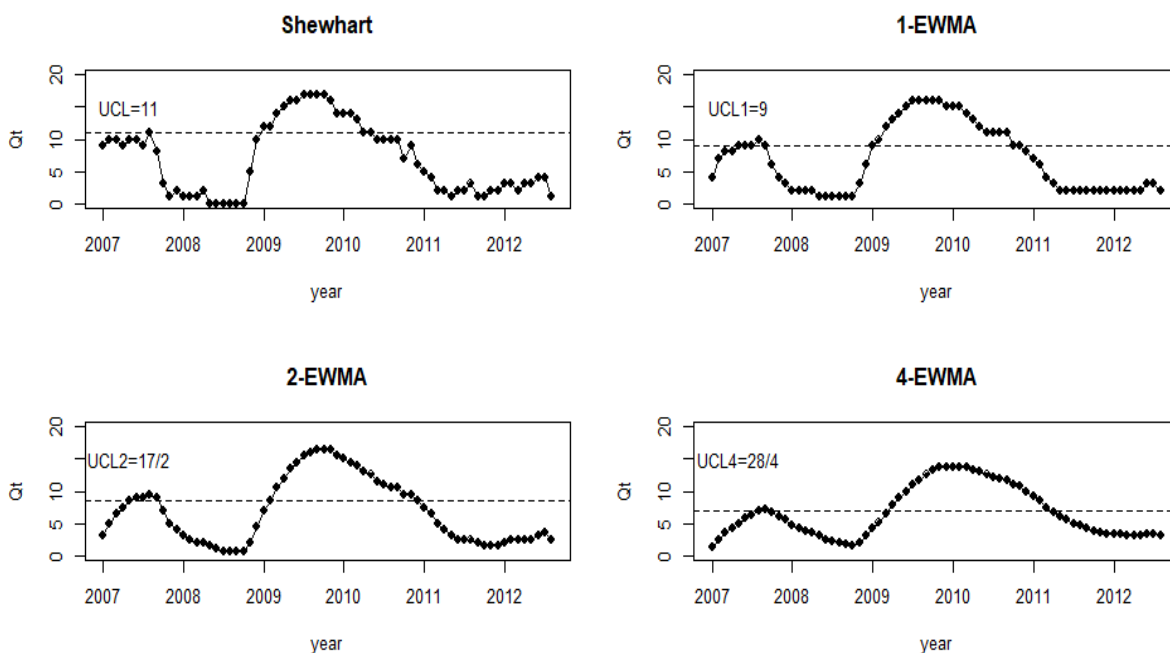
Όπως έχει ήδη αναφερθεί, είναι λογικό να θεωρήσει κανείς ότι τα κράτη μέλη της ΕΕ επιτυγχάνουν χαμηλό πληθωρισμό με διαφορετική πιθανότητα λόγω των διαφορών στη δομή και τον τρόπο λειτουργίας της οικονομίας σε καθένα από αυτά. Επομένως, σε μία τέτοια περίπτωση θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και το BBAR(1) μοντέλο για να περιγράψει τα συγκεκριμένα δεδομένα. Άλλωστε τα αποτελέσματα του Πίνακα 6.12 δείχνουν μικρές διαφορές στις τιμές των κριτηρίων AIC και BIC σε σχέση με το μοντέλο BINARCH(1).

Οι Weiß and Kim (2014), όπως και οι Rakitzis et al. (2017b), χρησιμοποίησαν το μοντέλο BBAR(1) για τη μοντελοποίηση αυτών των τιμών. Άρα, για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε και τα διαγράμματα των Rakitzis et al. (2017b) με τα προτεινόμενα διαγράμματα μέσα από μια πρακτική εφαρμογή, θα προχωρήσουμε με την ανάπτυξη και την εφαρμογή μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου s -EWMA, $s = 1,2,4$, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν για τη στατιστική παρακολούθηση της διεργασίας. Όπως έχει συμβεί στις εφαρμογές που παρουσιάστηκαν μέχρι τώρα, οι τιμές των παραμέτρων της διεργασίας είναι ίσες με τις εκτιμήσεις των παραμέτρων του μοντέλου BBAR(1) (δείτε Πίνακα 6.12). Επιπλέον, όπως και στην περίπτωση του μοντέλου BINARCH(1) και τον αντίστοιχων διαγραμμάτων ελέγχου, η επιθυμητή εντός ελέγχου τιμή για το $zsARL$ είναι $ARL_0 = 370,4$.

Για την παρακολούθηση της διεργασίας κατά την ανάλυση Φάσης II (περίοδος Ιανουάριος 2007 – Αύγουστος 2012) θα χρησιμοποιηθούν τα ακόλουθα άνω μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου:

- Shewhart με $UCL = 11$ και $zsARL = 354.091$
- 1-EWMA με $(\lambda_1, UCL_1) = (0.49, 9)$ και $zsARL = 360.95$
- 2-EWMA με $(\lambda_2, UCL_2) = (0.32, 17/2) = (0.32, 8.5)$ και $zsARL = 369.38$
- 4-EWMA με $(\lambda_4, UCL_4) = (0.14, 28/4) = (0.14, 7)$ και $zsARL = 383.72$

Οι εικόνες των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων για τα δεδομένα του πληθωρισμού, όταν αυτά μοντελοποιούνται ως μια διεργασία BBAR(1), παρουσιάζονται στην Εικόνα 6.17.



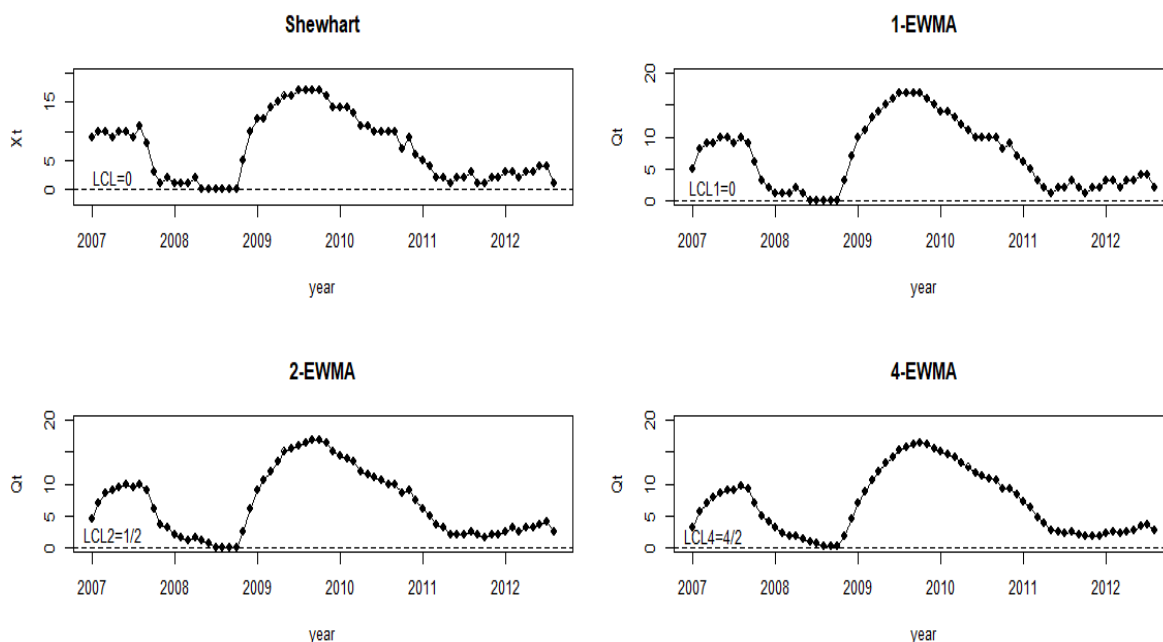
Εικόνα 6.17: Άνω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και s -EWMA για τα δεδομένα πληθωρισμού, Φάση II

Από την Εικόνα 6.17 γίνεται αντιληπτό ότι όλα τα εξεταζόμενα διαγράμματα s -EWMA δίνουν ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας για πρώτη φορά περίπου στα μέσα του έτους 2008. Επομένως διαπιστώνεται ότι η διεθνής χρηματοπιστωτική κρίση του 2007-2008 αποτυπώνεται σε όλα τα άνω μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου τόσο στην περίπτωση που η διεργασία μοντελοποιείται από το μοντέλο BINARCH(1) όσο και από το BBAR(1).

Αναφορικά με την περίπτωση των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων, θα χρησιμοποιηθούν τα παρακάτω διαγράμματα τύπου Shewhart και EWMA:

- Shewhart με $LCL = 0$ και $zsARL = 100.5$
- 1-EWMA με $(\lambda_1, LCL_1) = (0.51, 0)$ και $zsARL = 244.59$
- 2-EWMA με $(\lambda_2, LCL_2) = (0.5, 1/2) = (0.5, 0.5)$ και $zsARL = 390.65$
- 4-EWMA με $(\lambda_4, LCL_4) = (0.34, 4/2) = (0.34, 2)$ και $zsARL = 383.04$.

Οι εικόνες των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων για τα δεδομένα του πληθωρισμού, όταν αυτά μοντελοποιούνται ως μια διεργασία BBAR(1), παρουσιάζονται στην Εικόνα 6.18.



Εικόνα 6.18: Κάτω μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και s -EWMA για τα δεδομένα πληθωρισμού, Φάση II

Από την εικόνα των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων προκύπτει ότι η διαταραχή που προέκυψε από την χρηματοπιστωτική κρίση μεταξύ των ετών 2008 και 2009 αποτυπώνεται σε αυτά καθώς όλα δίνουν και ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας περίπου προς τα τέλη του 2008.

Στο σημείο αυτό, αξίζει να σημειωθεί ότι οι Rakitzis et al. (2017b) ανέλυσαν τα ίδια στοιχεία χρησιμοποιώντας τα μονόπλευρα διαγράμματα Shewhart και CUSUM για τις διαδικασίες BAR(1) και BBAR(1) και ως εκ τούτου θα είχε ενδιαφέρον να συγκριθούν τα αποτελέσματα της μελέτης τους με αυτά που παρουσιάζονται στην παρούσα διδακτορική διατριβή. Ξεκινώντας με την περίπτωση των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου για τη διεργασία BAR(1) (είτε τα Shewhart είτε τα CUSUM) δίνουν ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στα μέσα του έτους 2007, ενώ τα διαγράμματα στις διεργασίες BBAR(1) και BINARCH(1) δίνουν ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στις αρχές του έτους 2009. Το γεγονός ότι τα διαγράμματα για την περίπτωση διεργασίας τύπου BAR(1) δίνουν για πρώτη φορά ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας ταχύτερα από τα άλλα υπόλοιπα, μπορεί να οφείλεται στη μη σταθερότητα των τιμών για τη χρονική περίοδο 2008-2012. Ωστόσο, το BAR(1) μοντέλο δεν μπορεί να αποτυπώσει την εγγενή υπερ-

μεταβλητότητα των δεδομένων και αυτό αναγνωρίζεται από τα εν λόγω διαγράμματα ως παρουσία ειδικών αιτιών μεταβλητότητας.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, σε περιπτώσεις όπως αυτή, είναι πιο λογικό να χρησιμοποιείται ένα από τα μοντέλα BBAR(1) και BINARCH(1), επειδή είναι κατάλληλα για την περιγραφή της υπερμεταβλητότητας στα δεδομένα. Παρόλο που οι διαφορές στις αντίστοιχες τιμές AIC και BIC δεν είναι πολύ μεγάλες, το υπόδειγμα BINARCH(1) παρουσιάζει καλύτερη προσαρμογή και έχει μία παράμετρο λιγότερη από το μοντέλο BBAR(1).

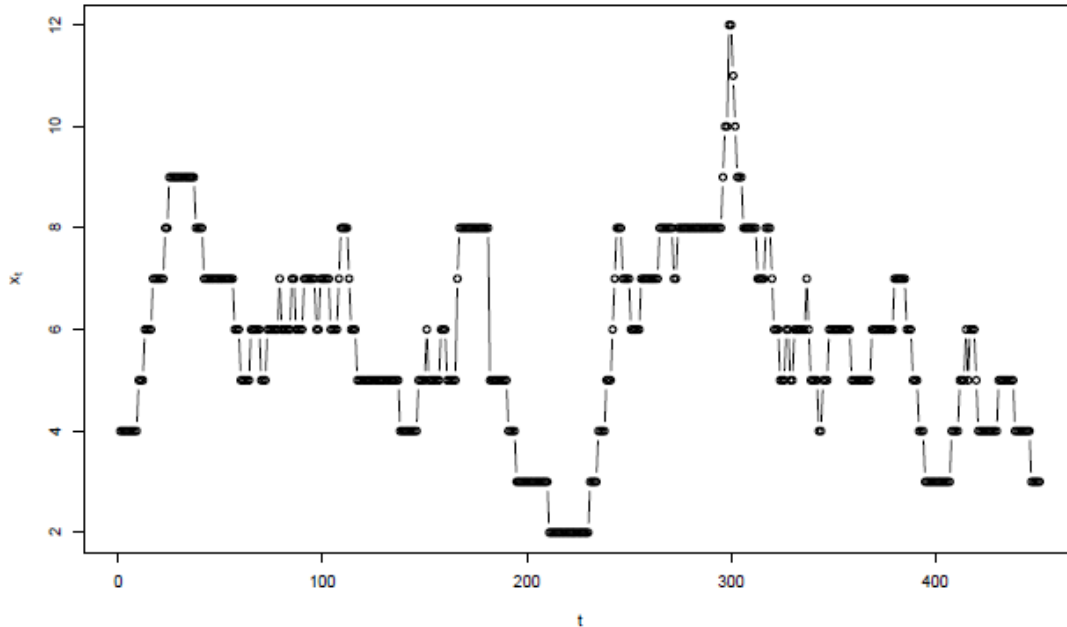
Με παρόμοιο τρόπο, για την περίπτωση των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου, τα διαγράμματα που αναπτύχθηκαν για διεργασίες BAR(1) και BBAR(1) δίνουν ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας για πρώτη φορά κατά τη διάρκεια του έτους 2008 καθώς και στο τέλος του 2011. Αντίθετα, το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα που βασίζεται στο υπόδειγμα BINARCH(1) δεν δίνει ένδειξη OOC στο τέλος του 2011. Επιπλέον, τα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα CUSUM για την παρακολούθηση της διεργασίας, όταν αυτή μοντελοποιείται ως μια BAR(1) διεργασία, δεν δίνουν ένδειξη OOC στο τέλος του έτους 2011. Αντίθετα, το διάγραμμα CUSUM το οποίο χρησιμοποίησαν οι Rakitzis et al. (2017b) για την περίπτωση διεργασίας BBAR(1) δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας (σχεδόν) την ίδια στιγμή με το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα 2-EWMA.

6.4.3 Εφαρμογές διαγραμμάτων ελέγχου EWMA και DEWMA για διεργασίες BAR(1) – Παρακολούθηση Πλήθους Συνδέσεων σε Σταθμούς Εργασίας

Στις προηγούμενες ενότητες παρουσιάστηκαν εφαρμογές των προτεινόμενων διαγραμμάτων ελέγχου σε δεδομένα στα οποία υπήρχε ξεκάθαρη ένδειξη παρουσίας υπερμεταβλητότητας σε αυτά. Λόγω αυτού, η μοντελοποίηση τους θα έπρεπε να γίνει είτε με ένα BBAR(1) μοντέλο ή με ένα BINARCH(1) μοντέλο. Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται μια εφαρμογή των διαγραμμάτων EWMA και DEWMA σε ένα σύνολο δεδομένων το οποίο μοντελοποιείται σύμφωνα με τον Weiß (2009c) με το μοντέλο BAR(1). Συνεπώς, σε αυτή την ενότητα θα εφαρμοστούν τα προτεινόμενα διαγράμματα ελέγχου EWMA και DEWMA για την παρακολούθηση μίας BAR(1) διεργασίας.

Τα διαθέσιμα δεδομένα (δείτε επίσης Weiß (2009c)) αφορούν ένα πρόβλημα παρακολούθησης των συνδέσεων σε σταθμούς εργασίας (workstations) ενός πανεπιστημίου. Στη διάθεσή μας έχουμε τον αριθμό των συνδέσεων (Log-ins) σε $n = 15$ σταθμούς εργασίας (π.χ. PCs), για το χρονικό διάστημα από τις 10:00 έως τις 17:30. Οι μετρήσεις συλλέγονται ανά λεπτό από το κέντρο υπολογιστών του Πανεπιστημίου του Würzburg, στη Γερμανία. Στην Εικόνα 6.19, δίνεται η

γραφική παράσταση της χρονοσειράς με δεδομένα για τις 3 Μαΐου 2005 και με τον συνολικό αριθμό αυτών των παρατηρήσεων να ισούται με $n = 451$.



Εικόνα 6.19: Γραφική Παράσταση πλήθους συνδέσεων

Για τη συγκεκριμένη ημέρα, είναι διαθέσιμος σε κάθε λεπτό t ο αριθμός των συνδέσεων που πραγματοποιείται στους 15 σταθμούς εργασίας του Πανεπιστημίου του Würzburg, από τις 10:00 έως τις 17:30.

6.4.3.1 Εφαρμογή των διαγραμμάτων για παρακολούθηση BAR(1) διεργασιών

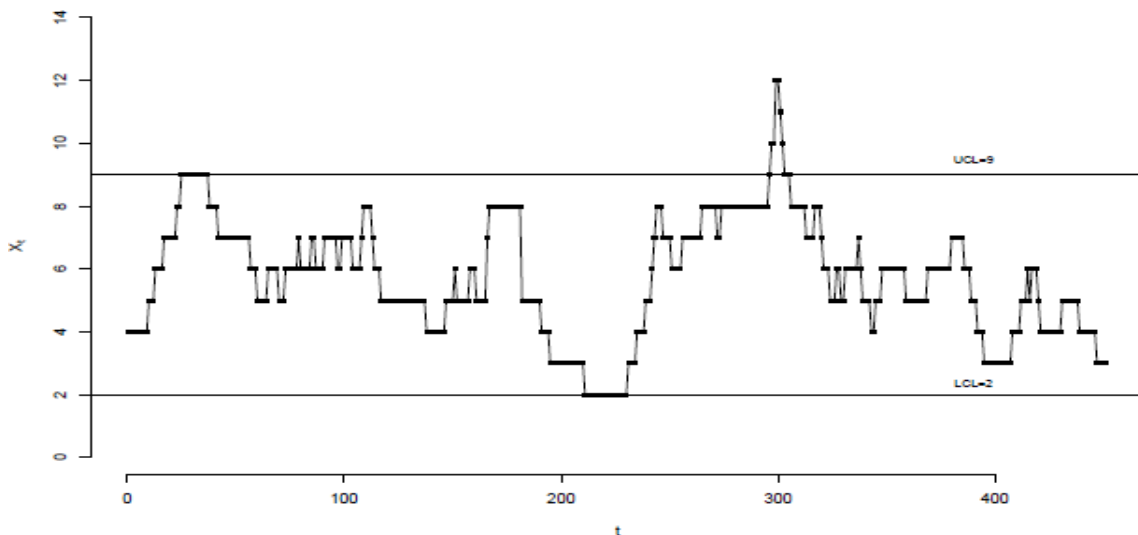
Αρχικά, τα διαθέσιμα δεδομένα είναι μετρήσεις, οι οποίες αποτελούν μια χρονοσειρά, η οποία μπορεί να λάβει τιμές στο $\{0,1, \dots, 15\}$ και ως εκ τούτου μπορεί να μοντελοποιηθεί μέσω ενός μοντέλου διακριτών χρονοσειρών, όπως για παράδειγμα με το BAR(1) μοντέλο. Επομένως, θα χρησιμοποιηθεί το παραπάνω σύνολο δεδομένων για να παρουσιαστεί η χρήση των διαγραμμάτων τύπου EWMA και DEWMA (δείτε Κεφάλαιο 3) στην παρακολούθηση της παραπάνω διεργασίας. Οι 451 τιμές που απεικονίζονται στην Εικόνα 6.19 θα αποτελέσουν το δείγμα της Φάσης I και μέσω αυτών θα εκτιμηθούν οι παράμετροι της διεργασίας BAR(1) καθώς και τα όρια ελέγχου για τα δίπλευρα διαγράμματα EWMA και DEWMA διαγράμματα.

Πίνακας 6.13: Προσαρμογή μοντέλου BAR(1) στα δεδομένα πλήθους συνδέσεων

Μοντέλο	$\hat{\pi}$	$\hat{\rho}$
BAR(1)	0.36482 (0.04306)	0.96822 (0.00355)

Στον Πίνακα 6.13 δίνονται οι τιμές των εκτιμήσεων για τις παραμέτρους του BAR(1) μοντέλου καθώς και τα τυπικά σφάλματα αυτών στις αντίστοιχες παρενθέσεις. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι οι συγκεκριμένες τιμές επαληθεύουν και τα αντίστοιχα αποτελέσματα της εργασίας του Weib (2009c). Για την ανάπτυξη των διαγραμμάτων υποθέτουμε ότι οι τιμές των παραμέτρων του μοντέλου BAR(1) είναι ίσες με τις εκτιμήσεις που δίνονται στον Πίνακα 6.13. Ως επιθυμητή τιμή για το εντός ελέγχου $zsARL$ των διαγραμμάτων χρησιμοποιείται, ενδεικτικά, η τιμή $ARL_0 = 370.4$.

Στην Εικόνα 6.20 δίνεται το δίπλευρο διάγραμμα Shewhart, το οποίο εφαρμόζεται στα δεδομένα της Φάσης I με όρια ελέγχου $LCL = 2$ και $UCL = 9$ και $zsARL \approx 360$.



Εικόνα 6.20: Δίπλευρο διάγραμμα Shewhart Φάσης I για τα δεδομένα πλήθους συνδέσεων, 3 Μαΐου 2005

Στο διάγραμμα ελέγχου της Εικόνας 6.20 υπάρχουν 6 τιμές που υπερβαίνουν το UCL , οι 297, 298, ..., 302. Ωστόσο, χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση προκειμένου να εξακριβωθεί εάν αυτές

οι ενδείξεις οφείλονται στην παρουσία ειδικών αιτιών μεταβλητότητας στη διαδικασία ή ότι πρόκειται για ψευδείς συναγερμούς. Στην περίπτωση που θεωρηθεί ότι πρόκειται για αληθινούς συναγερμούς, τότε οι συγκεκριμένες παρατηρήσεις πρέπει να αφαιρεθούν από τα δεδομένα.

Στη συνέχεια, θα υποθέσουμε ότι κατά τη λήψη των μετρήσεων η διεργασία λειτουργούσε παρουσία ειδικών αιτιών μεταβλητότητας. Επομένως, θα αφαιρεθούν οι παρατηρήσεις 297-302 και οι παράμετροι της διεργασίας θα εκτιμηθούν εκ νέου. Η εκτίμηση των παραμέτρων της διεργασίας χωρίς τις συγκεκριμένες τιμές γίνεται με χρήση της Τροποποιημένης Μεθόδου Εκτίμησης της Μέγιστης Πιθανοφάνειας (*Modified Maximum Likelihood Estimation*), η οποία προτάθηκε από τους Weiß and Testik (2015). Παρακάτω, στον Πίνακα 6.14 δίνονται οι εκτιμήσεις των παραμέτρων π και ρ από το πλήρες σύνολο δεδομένων καθώς και από τα δεδομένα χωρίς τις παρατηρήσεις 297-302. Στις παρενθέσεις δίνονται τα αντίστοιχα τυπικά σφάλματα.

Πίνακας 6.14: Εκτιμήσεις των παραμέτρων της διεργασίας π , ρ από τα δεδομένα της Φάσης I

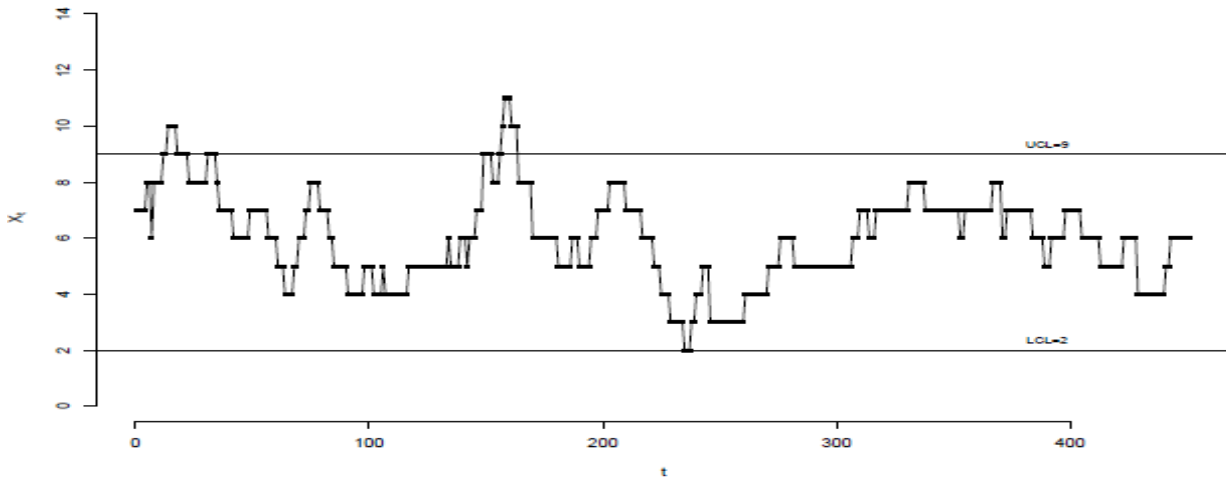
Εκτιμήσεις	Πλήρες σύνολο δεδομένων	Χωρίς τις παρατηρήσεις (297-302)
$\hat{\pi}$	0.36482 (0.04306)	0.36254(0.0442)
$\hat{\rho}$	0.96822 (0.00355)	0.97013 (0.00345)

Με βάση τα αποτελέσματα του Πίνακα 6.14, δεν παρατηρείται μεγάλη διαφορά στις εκτιμήσεις ανάμεσα στο πλήρες σύνολο δεδομένων και σε αυτό χωρίς τις παρατηρήσεις 297-302. Επομένως, θα συνεχιστεί η ανάλυση με τις εκτιμήσεις από το πλήρες σύνολο δεδομένων και με τα ίδια όρια ελέγχου, δηλαδή: $LCL = 2$, $UCL = 9$.

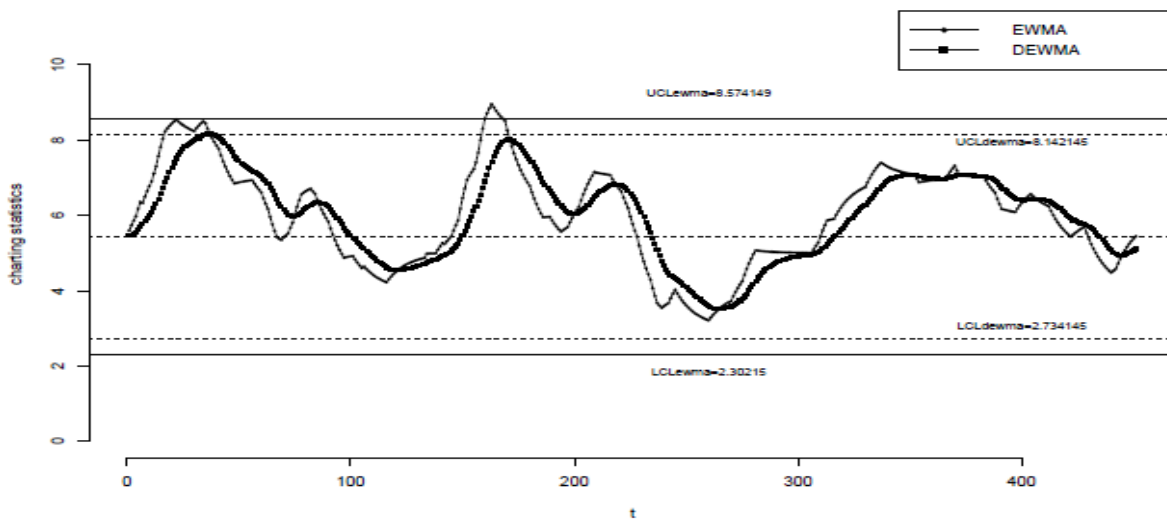
Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιηθούν τα δεδομένα καταγραφής του αριθμού των log-ins από τις 10 Μαΐου 2005 ως δεδομένα της Φάσης II και θα κατασκευαστεί και πάλι το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου Shewhart με όρια ελέγχου $LCL = 2$, $UCL = 9$, καθώς και τα δίπλευρα διαγράμματα EWMA και DEWMA. Επίσης, υποθέτουμε ότι οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων π και ρ που προέκυψαν από την ανάλυση της Φάσης I είναι οι πραγματικές εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων αυτής. Για την κατασκευή των διαγραμμάτων χρησιμοποιήθηκε, ενδεικτικά, η τιμή $\lambda = 0.10$. Αυτό συμβαίνει γιατί δεν υπάρχει κάποια πληροφορία ως προς το μέγεθος και το είδος της μετατόπισης που θέλουμε να ανιχνεύσουμε και επειδή τα διαγράμματα EWMA και DEWMA για $\lambda = 0.10$ έχουν την καλύτερη απόδοση για διαφόρους τύπους εκτός ελέγχου καταστάσεων. Εφαρμόζοντας τη διαδικασία για την ανάπτυξη των διαγραμμάτων EWMA και DEWMA (δείτε

Ενότητα 3.3) θα καθοριστούν τα όρια ελέγχου τους, έτσι ώστε η εντός ελέγχου απόδοσή τους να είναι συγκρίσιμη με εκείνη του διαγράμματος Shewhart.

Επομένως, τα διαγράμματα που θα χρησιμοποιηθούν είναι το δίπλευρο διάγραμμα EWMA, με $LCL_{ewma} = 2.30215$ και $UCL_{ewma} = 8.57414$ καθώς και το δίπλευρο διάγραμμα DEWMA με: $LCL_{dewma} = 2.73414$, $UCL_{dewma} = 8.14215$. Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, γίνεται αντιληπτό ότι τα όρια του διαγράμματος ελέγχου για το DEWMA είναι μικρότερα από τα αντίστοιχα όρια του EWMA, κάτι που γενικά ισχύει για τα διαγράμματα αυτά με κοινή τιμή για το λ . Στην Εικόνα 6.21 δίνεται το δίπλευρο διάγραμμα Shewhart, ενώ στην Εικόνα 6.22 παρέχονται τα δίπλευρα διαγράμματα EWMA και DEWMA.



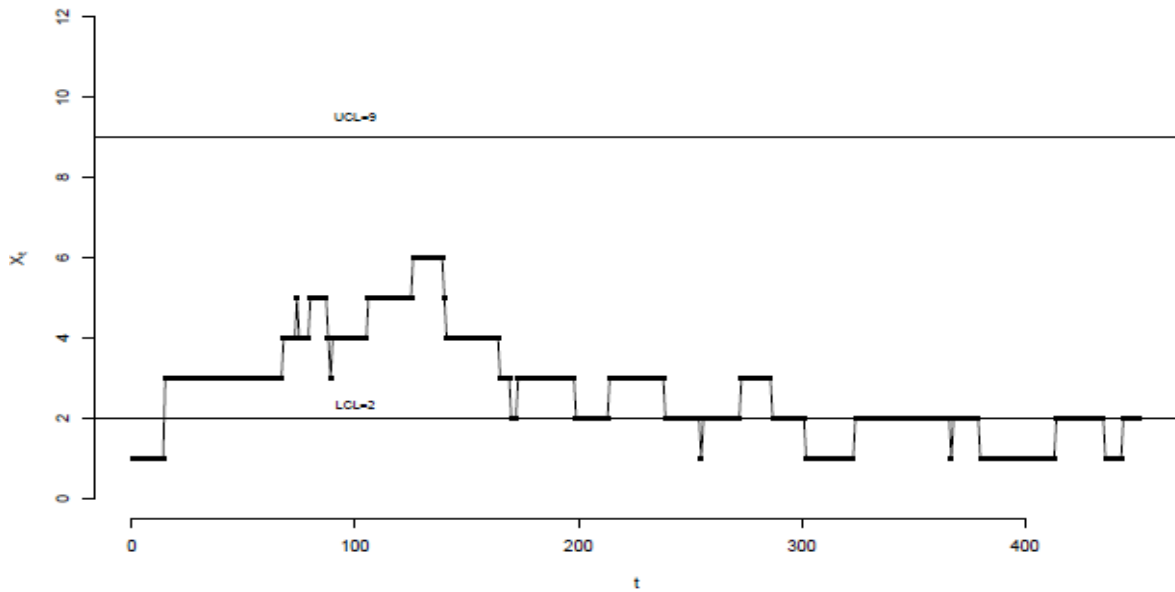
Εικόνα 6.21: Δίπλευρο διάγραμμα Shewhart Φάσης II για τα δεδομένα πλήθους συνδέσεων, 10 Μαΐου 2005



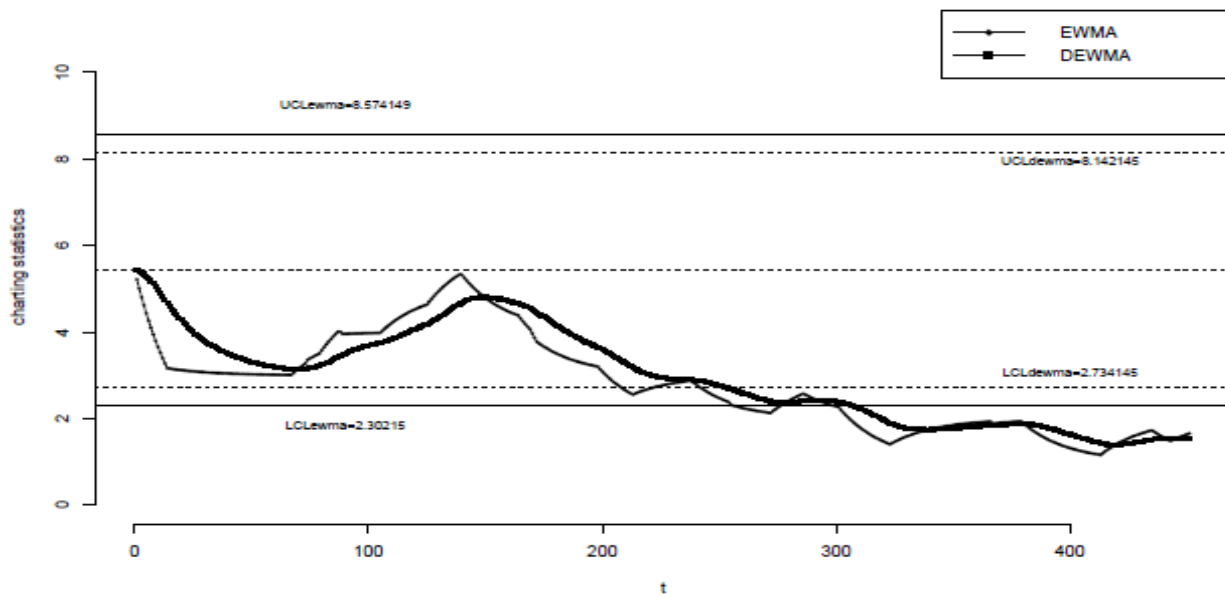
Εικόνα 6.22: Δίπλευρα διαγράμματα EWMA και DEWMA για τα δεδομένα πλήθους συνδέσεων, 10 Μαΐου 2005

Από την Εικόνα 6.21 παρατηρούμε ότι το δίπλευρο διάγραμμα Shewhart δίνει για πρώτη φορά ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας τη χρονική στιγμή $t = 15$, υποδεικνύοντας μια πιθανή αύξηση του μέσου αριθμού συνδέσεων, σε σύγκριση με την ημέρα της 3ης Μαΐου. Επίσης, από την Εικόνα 6.22 παρατηρείται ότι το δίπλευρο διάγραμμα DEWMA δίνει για πρώτη φορά ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας τη χρονική στιγμή $t = 35$, δηλαδή περίπου 20 λεπτά αργότερα από το διάγραμμα Shewhart. Επιπλέον, το δίπλευρο διάγραμμα EWMA δίνει για πρώτη φορά ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο δείγμα 161, ενώ την ίδια χρονική στιγμή δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας και το διάγραμμα Shewhart. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι ο Weiß (2009c) στην ανάλυσή του, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές ενδείξεις ότι η διαδικασία βρίσκεται εκτός ελέγχου. Ωστόσο, φαίνεται ότι εφόσον η εκτιμώμενη μέση τιμή της εντός ελέγχου διαδικασίας είναι $15 \cdot 036482 \approx 544$, υπάρχουν ενδείξεις για αυξημένη διακύμανση της διαδικασίας, κυρίως στο διάστημα που αφορά τις πρώτες 3-3,5 ώρες της ημέρας.

Στη συνέχεια, τα τρία διαγράμματα (Shewhart, EWMA και DEWMA) εφαρμόζονται και σε δεδομένα συνδέσεων τα οποία ελήφθησαν μια εβδομάδα αργότερα, δηλαδή στις 17 Μαΐου 2005. Συγκεκριμένα, το διάγραμμα Shewhart παρουσιάζεται στην Εικόνα 6.23, ενώ τόσο το διάγραμμα EWMA όσο και το διάγραμμα DEWMA δίνονται στην Εικόνα 6.24.



Εικόνα 6.23: Δίπλευρο διάγραμμα Shewhart Φάσης II για τα δεδομένα πλήθους συνδέσεων, 17 Μαΐου 2005



Εικόνα 6.24: Δίπλευρα διαγράμματα EWMA και DEWMA για τα δεδομένα πλήθους συνδέσεων, 17 Μαΐου 2005

Είναι σαφές ότι το διάγραμμα Shewhart δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας ακόμη από το πρώτο λεπτό, ενώ σχεδόν όλα τα σημεία βρίσκονται κάτω από το μέσο επίπεδο της διεργασίας. Ταυτόχρονα, γίνεται αντιληπτό ότι η μέση τιμή της διεργασίας έχει μειωθεί συγκριτικά με την προηγούμενη εβδομάδα, γεγονός το οποίο επιβεβαιώνεται και από τα διαγράμματα EWMA και DEWMA. Ωστόσο, το διάγραμμα EWMA δίνει για πρώτη φορά ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας τη χρονική στιγμή $t = 306$, δηλαδή σχεδόν 5 ώρες μετά την έναρξη της παρακολούθησης της διεργασίας, ενώ το διάγραμμα DEWMA δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή $t = 272$, περίπου 35 λεπτά νωρίτερα από το διάγραμμα EWMA (αλλά και πάλι, περίπου 4,5 ώρες από την έναρξη της παρακολούθησης της διεργασίας).

Σύμφωνα με τον Weiß (2009c), αυτή η (ασυνήθιστη) συμπεριφορά αποδίδεται στο γεγονός ότι αυτή ήταν η πρώτη ημέρα μετά από τριήμερη αργία (Σαββατοκύριακο και αργία) και συνήθως, δεν πραγματοποιούνται διαλέξεις εκείνη την ημέρα. Επίσης, να σημειωθεί ότι η μετατόπιση αυτή ήταν ξαφνική, διαρκής και μεγάλου μεγέθους. Επομένως, δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι τόσο τα διαγράμματα EWMA όσο και τα διαγράμματα DEWMA δεν αντιδρούν άμεσα σε αυτή τη μεταβολή της διαδικασίας.

6.5. Ανακεφαλαίωση

Ανακεφαλαιώνοντας, στο παρόν κεφάλαιο δόθηκαν αριθμητικές συγκρίσεις της απόδοσης των προτεινόμενων διαγραμμάτων με αντίστοιχα διαγράμματα που έχουν εμφανιστεί στην έως τώρα βιβλιογραφία, για διεργασίες BAR(1), BBAR(1) και BINARCH(1). Από τη σύγκριση της απόδοσης των διαγραμμάτων ελέγχου s -EWMA, Shewhart και CUSUM για διεργασίες BAR(1) και BBAR(1), παρατηρήθηκε ότι τα διαγράμματα s -EWMA έχουν σαφή υπεροχή έναντι των Shewhart τόσο στην ανίχνευση αυξήσεων όσο και μειώσεων στο μέσο επίπεδο μίας διεργασίας BAR(1) ή BBAR(1). Ταυτόχρονα, διαπιστώθηκε ότι τα διαγράμματα CUSUM είναι πολύ ισχυρά στην ανίχνευση μικρών και μεσαίων μετατοπίσεων (αυξήσεις ή μειώσεις) στη μέση τιμή μιας διεργασίας BAR(1) ή BBAR(1). Ωστόσο, για μεγάλες τιμές του s ($s = 4$), τα διαγράμματα s -EWMA έχουν συγκρίσιμη απόδοση με τα CUSUM, ειδικά όταν πρόκειται για την ανίχνευση μέτρων ή μεγάλων αυξήσεων (δηλαδή για $\delta > 1.5$) αλλά και μειώσεων (δηλαδή για $\delta < 1.5$) της μέσης τιμής. Επίσης, για την ανίχνευση αυξήσεων στο μέσο επίπεδο μιας διεργασίας BINARCH(1) διαπιστώθηκε ότι την καλύτερη απόδοση την έχει ένα διάγραμμα τύπου cLR-

CUSUM ενώ ένα κατάλληλα σχεδιασμένο διάγραμμα τύπου LR-CUSUM είναι αυτά που έχει την καλύτερη απόδοση στην ανίχνευση μειώσεων.

Επιπρόσθετα, τα προτεινόμενα διαγράμματα ελέγχου εφαρμόστηκαν σε πραγματικά δεδομένα και σε προβλήματα στατιστικής παρακολούθησης από τις επιστημονικές περιοχές της επιδημιολογίας, των οικονομικών και της διαχείρισης δικτύων υπολογιστών. Σε κάθε περίπτωση έγινε πρώτα η εφαρμογή κατάλληλων κριτηρίων ώστε να επιλεγεί το μοντέλο το οποίο προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα και στη συνέχεια αναπτύχθηκαν τα αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι τόσο τα επιδημιολογικά δεδομένα όσο και αυτά που αναφέρονταν στον μηνιαίο πληθωρισμό των μελών-κρατών της Ευρωζώνης παρουσίαζαν υπερμεταβλητότητα και ως εκ τούτου, έγινε ξεχωριστή ανάλυση με βάση τα μοντέλα $BBAR(1)$ και $BINARCH(1)$. Σε αυτές τις περιπτώσεις διαπιστώθηκε ότι τόσο τα διαγράμματα s -EWMA όσο και τα LR-CUSUM και cLR-CUSUM είχαν παρόμοια απόδοση αφού έδωσαν ενδείξεις εκτός ελέγχου διεργασίας την (σχεδόν) χρονική περίοδο.

Στο τελευταίο σύνολο δεδομένων, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από μια διεργασία τύπου $BAR(1)$, χρησιμοποιήθηκαν τα δίπλευρα διαγράμματα Shewhart, EWMA και DEWMA. Από την ανάλυση προέκυψε ότι τα διαγράμματα EWMA και DEWMA έχουν συγκρίσιμη απόδοση, αφού έδωσαν ενδείξεις εκτός ελέγχου διεργασίας την (ίδια) σχεδόν περίοδο. Παρά ταύτα, για το συγκεκριμένο σύνολο δεδομένων, διαπιστώθηκε ότι το διάγραμμα Shewhart είναι αυτό που δίνει νωρίτερα ενδείξεις (έναντι των διαγραμμάτων EWMA και DEWMA). Το γεγονός αυτό πιθανά οφείλεται στο είδος της μετατόπισης (απότομη/ξαφνική και μεγάλης τάξης).

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα & Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

7.1 Συμπεράσματα

Το αντικείμενο με το οποίο ασχολείται η παρούσα διδακτορική διατριβή είναι η ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου με μνήμη για την παρακολούθηση διεργασιών στις οποίες εμφανίζεται αυτοσυσχέτιση. Συγκεκριμένα, εστιάζει στην παρακολούθηση διεργασιών όπου τα διαθέσιμα δεδομένα δεν προκύπτουν ως μετρήσεις ενός χαρακτηριστικού αλλά προκύπτουν ως δεδομένα καταμετρήσεων ή ιδιοτήτων. Λόγω αυτής της διακριτής φύσης των δεδομένων, απαιτείται κατάλληλη τροποποίηση των ήδη διαθέσιμων τεχνικών που χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση συνεχών χαρακτηριστικών ή ακόμη και την ανάπτυξη νέων μεθόδων ώστε να είναι δυνατή η έγκυρη και έγκαιρη ανίχνευση αλλαγών στις παραμέτρους μιας τέτοιας διεργασίας. Η διαδικασία που ακολουθεί η παρούσα διδακτορική διατριβή σε μία τέτοια περίπτωση βασίζεται αρχικά στην επιλογή ενός κατάλληλου μοντέλου χρονολογικών σειρών με ακέραιες τιμές και στη συνέχεια προχωρά στην ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου με βάση το μοντέλο που επιλέχτηκε.

Αρχικά, στο Κεφάλαιο 1, παρουσιάζεται μία σύντομη ιστορική αναδρομή του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας καταγράφοντας με χρονολογική σειρά τα στάδια εξέλιξής του. Επίσης, αναλύονται οι παραπάνω βασικές έννοιες καθώς επίσης πραγματοποιείται μία επισκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας, στην οποία αναδεικνύονται ορισμένοι περιορισμοί καθώς και ερευνητικά κενά στη συγκεκριμένη επιστημονική περιοχή. Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 2, αναλύονται τρία υποδείγματα 1ης τάξης για τη μοντελοποίηση διακριτών χρονοσειρών με πεπερασμένο εύρος τιμών, για καθένα από τα οποία δίνονται οι βασικές ιδιότητές τους καθώς και οι μέθοδοι εκτίμησης των παραμέτρων τους. Συγκεκριμένα, εισάγονται οι βασικές έννοιες για τα μοντέλα $BAR(1)$, $BBAR(1)$ και $BINARCH(1)$, εκ των οποίων το πρώτο υπόδειγμα χρησιμοποιείται για την περιγραφή διωνυμικών δεδομένων στα οποία υπάρχει συσχέτιση 1ης τάξης, ενώ τα άλλα δύο μοντέλα αποτελούν γενίκευση του $BAR(1)$ και είναι κατάλληλα όταν παρατηρείται σημαντική απόκλιση της μεταβλητότητας των δεδομένων από την αντίστοιχη του διωνυμικού μοντέλου.

Βασικός σκοπός του συγκεκριμένου κεφαλαίου είναι η παρουσίαση των παραπάνω μοντέλων, για τα οποία στη συνέχεια αναπτύσσονται κατάλληλα διαγράμματα ελέγχου.

Το Κεφάλαιο 3 πραγματεύεται την ανάπτυξη και μελέτη μονόπλευρων διαγραμμάτων με μνήμη για την παρακολούθηση διεργασιών τύπου $BAR(1)$. Συγκεκριμένα, προτείνονται τα μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου s -EWMA, τα οποία βασίζονται σε στατιστικές συναρτήσεις που λαμβάνουν ακέραιες τιμές και ως εκ τούτου μπορεί να υπολογιστεί η απόδοσή τους με ακρίβεια, μέσω της τεχνικής των Μαρκοβιανών αλυσίδων. Αναφορικά με την απόδοση των προτεινόμενων διαγραμμάτων αξιολογείται με βάση τις τιμές του μέσου μήκους ροής ARL . Ειδικότερα, το $zsARL$ θεωρείται ως το κατάλληλο μέτρο απόδοσης όταν η διαδικασία βρίσκεται εντός ελέγχου, ενώ η απόδοση της εκτός ελέγχου διεργασίας αξιολογείται με βάση το $ssARL$. Τα αποτελέσματα της αριθμητικής ανάλυσης δείχνουν ότι τα διαγράμματα ελέγχου s -EWMA επιτυγχάνουν εντός ελέγχου απόδοση αρκετά κοντά στην επιθυμητή, ενώ φαίνεται να βελτιώνεται η απόδοσή τους για μεγάλες τιμές του s (π.χ. $s = 4$) και για μικρές τιμές του λ ($\lambda \in (0.05, 0.25)$). Παρόλο που τα εν λόγω διαγράμματα έχουν αποδειχθεί κατάλληλα για την ανίχνευση μικρών και μεσαίων μεταβολών στη μέση τιμή της διεργασίας, σημειώνεται αυξανόμενο ενδιαφέρον για την περαιτέρω βελτίωση της απόδοσής τους. Για τον λόγο αυτό στο Κεφάλαιο 3, αναπτύσσονται και μελετώνται μονόπλευρα και δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου DEWMA, τα οποία είναι διαγράμματα ελέγχου με μνήμη και ορίζονται με τη μίξη διαφορετικών (ή ίδιων) διαγραμμάτων. Προκειμένου, να διαπιστωθεί αν τελικά το DEWMA ανιχνεύει ταχύτερα (έναντι του EWMA) κάποιες συγκεκριμένες αλλαγές στις παραμέτρους της διεργασίας ή θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η συνήθης στατιστική συνάρτηση EWMA, διεξάγεται μία αριθμητική σύγκριση ανάμεσα στα προαναφερθέντα διαγράμματα. Τα αποτελέσματα, αποκαλύπτουν ότι τα δίπλευρα διαγράμματα DEWMA υπερέχουν των παραδοσιακών διαγραμμάτων EWMA για τις περισσότερες από τις εξεταζόμενες $BAR(1)$ διεργασίες. Σχετικά, με την απόδοση των μονόπλευρων διαγραμμάτων προτείνεται η εφαρμογή των διαγραμμάτων DEWMA για την ανίχνευση μεταβολών στην παράμετρο ρ_0 , ενώ όταν ενδιαφέρει η ανίχνευση μόνο της μέσης τιμής συνιστάται η χρήση του μονόπλευρου διαγράμματος EWMA. Θα πρέπει επίσης να αναφερθεί πως βασική διαφορά μεταξύ των διαγραμμάτων s -EWMA και των διαγραμμάτων EWMA/DEWMA είναι ο τρόπος υπολογισμού της απόδοσής τους: Η απόδοση των διαγραμμάτων s -EWMA μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια (με χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων) ενώ η απόδοση των διαγραμμάτων EWMA/DEWMA υπολογίζεται μέσω προσομοίωσης Monte Carlo.

Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 4 ακολουθεί η ανάπτυξη και μελέτη διαγραμμάτων ελέγχου s -EWMA για την παρακολούθηση δεδομένων που προέρχονται από διεργασίες BBAR(1). Βασικός στόχος του συγκεκριμένου Κεφαλαίου αποτελεί η διερεύνηση του στατιστικού σχεδιασμού των προτεινόμενων διαγραμμάτων καθώς και ο υπολογισμός της απόδοσής τους για την ανίχνευση αυξήσεων αλλά και μειώσεων στο μέσο επίπεδο μίας διεργασίας τύπου BBAR(1). Η αριθμητική μελέτη αποκαλύπτει ότι το διάγραμμα s -EWMA επιτυγχάνει τιμές $zsARL$ αρκετά κοντά στην επιθυμητή τιμή. Ωστόσο, παρατηρήθηκε ότι η παρουσία υπερμεταβλητότητας στα δεδομένα μπορεί να επηρεάσει την ικανότητα ανίχνευσης, καθώς και την εντός ελέγχου απόδοσή του. Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητη η κατάλληλη προσαρμογή των παραμέτρων του προκειμένου να διατηρήσει την εντός ελέγχου απόδοσή του στο επιθυμητό επίπεδο. Ειδικότερα, προτείνονται μεγάλες τιμές για το s ($s = 4$) και μικρές τιμές για τα όρια ελέγχου καθώς και για την παράμετρο εξομάλυνσης λ . Μάλιστα, για τις περισσότερες από τις εξεταζόμενες περιπτώσεις διαπιστώνεται ότι η απόδοση του διαγράμματος βελτιώνεται όσο αυξάνει η τιμή του s .

Στο Κεφάλαιο 5, προτείνονται και μελετώνται διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση διεργασιών που προέρχονται από μία άλλη επέκταση του BAR(1) μοντέλου, που είναι το υπόδειγμα BINARCH(1), το οποίο αποτελεί μία καλή επιλογή για τη μοντελοποίηση δεδομένων με υπερμεταβλητότητα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, τα εξεταζόμενα διαγράμματα είναι τα μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart, EWMA και CUSUM καθώς και τα δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA. Επίσης, παρέχεται ο στατιστικός τους σχεδιασμός καθώς και αριθμητικά αποτελέσματα σχετικά με την απόδοσή τους. Τα αποτελέσματα μιας εκτεταμένης αριθμητικής μελέτης σχετικά με τον στατιστικό σχεδιασμό και την απόδοση των μονόπλευρων διαγραμμάτων s -EWMA δείχνουν (σε γενικές γραμμές) ότι μεταξύ των διαγραμμάτων Shewhart και των s -EWMA, τα τελευταία έχουν καλύτερη απόδοση, ειδικά όταν πρόκειται για την ανίχνευση μετατοπίσεων (αυξήσεων ή μειώσεων) μικρού μεγέθους στις παραμέτρους της διεργασίας. Ωστόσο, παρατηρείται ότι απόδοση του διαγράμματος s -EWMA μπορεί να επηρεαστεί από την παρουσία ισχυρής συσχέτισης μεταξύ των μετρήσεων και σε αυτή την περίπτωση ενδέχεται τα δύο προτεινόμενα διαγράμματα να έχουν ακόμη και συγκρίσιμες αποδόσεις. Σε γενικές γραμμές, μεταξύ των μονόπλευρων διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA, προτείνεται η χρήση ενός διαγράμματος s -EWMA με $s = 4$ και $0.05 \leq \lambda \leq 0.40$ όταν ενδιαφέρει η ταχεία ανίχνευση μικρών ή μεσαίων μετατοπίσεων στις παραμέτρους μιας διεργασίας τύπου BINARCH(1). Επιπλέον, στο ίδιο κεφάλαιο αναπτύσσονται και μελετώνται

μονόπλευρα διαγράμματα τύπου CUSUM για δεδομένα που προέρχονται από το παραπάνω μοντέλο χρονοσειρών. Τα συγκεκριμένα διαγράμματα βασίζονται στον λόγο πιθανοφάνειας και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανίχνευση αυξήσεων ή μειώσεων στο μέσο επίπεδο μιας διεργασίας BINARCH(1). Εκτός από το προτεινόμενο διάγραμμα LR-CUSUM, προτείνεται και μελετάται επίσης η εφαρμογή ενός συνδυασμένου διαγράμματος, του cLR-CUSUM, στο οποίο συνδυάζονται δύο διαγράμματα LR-CUSUM που εκτελούνται ταυτόχρονα. Από την αριθμητική σύγκριση των εν λόγω διαγραμμάτων CUSUM, διαπιστώνεται ότι στην περίπτωση αυξήσεων στο μέσο επίπεδο της διεργασίας, το διάγραμμα με την καλύτερη απόδοση είναι το διάγραμμα LR-CUSUM το οποίο σχεδιάζεται ώστε να μπορεί να ανιχνεύσει αυξήσεις στην τιμή της παραμέτρου α_{00} . Επίσης το διάγραμμα cLR-CUSUM είναι το καλύτερο στην ανίχνευση ταυτόχρονων αυξήσεων στις τιμές των παραμέτρων α_{00} και α_{01} καθώς επίσης και στην ανίχνευση αυξήσεων μόνο στην παράμετρο α_{01} . Από την άλλη πλευρά, στην περίπτωση ανίχνευσης μειώσεων στο μέσο επίπεδο μιας διεργασίας τύπου BINARCH(1), προτείνεται η χρήση ενός κατάλληλα σχεδιασμένου διαγράμματος τύπου LR-CUSUM.

Εκτός από τα προαναφερθέντα μονόπλευρα διαγράμματα, στο Κεφάλαιο 5 προτείνονται και μελετώνται δίπλευρα διαγράμματα Shewhart και s -EWMA για διεργασίες BINARCH(1). Τα δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε περιπτώσεις που ενδιαφέρει η ανίχνευση είτε αυξήσεων είτε μειώσεων στο μέσο επίπεδο της διεργασίας, χωρίς να υπάρχει εκ των προτέρων γνώση για την κατεύθυνση της μετατόπισης. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της αριθμητικής σύγκρισης ανάμεσα στην απόδοση των προτεινόμενων διαγραμμάτων, διαπιστώνεται ότι το διάγραμμα s -EWMA υπερτερεί για άλλη μια φορά έναντι του αντίστοιχου διαγράμματος Shewhart, ειδικά για μικρές μετατοπίσεις της α_{00} (π.χ. για $0.9 \leq \delta \leq 1.5$). Γενικά, ανάμεσα στα εξεταζόμενα δίπλευρα διαγράμματα για μία BINARCH(1) διεργασία, προτείνεται το διάγραμμα 4-EWMA καθώς φαίνεται να σημειώνει τις μικρότερες τιμές $SSARL$ για τις περισσότερες από τις εξεταζόμενες μετατοπίσεις. Υπενθυμίζεται πως για το s εξετάστηκαν οι περιπτώσεις $s = 1, 2$ και 4 αφού θα θέλαμε η πολυπλοκότητα στο σχεδιασμό και τον υπολογισμό της απόδοσης των αντίστοιχων διαγραμμάτων s -EWMA να παραμένει σε φυσιολογικά επίπεδα. Άρα, τα αποτελέσματα δε γενικεύονται μεταξύ όλων των δυνατών τιμών για το s αλλά αφορούν μόνο τις τιμές που εξετάστηκαν στην παρούσα διδακτορική διατριβή.

Στο Κεφάλαιο 6 πραγματοποιείται αριθμητική σύγκριση των προτεινόμενων διαγραμμάτων για κάθε μία από τις διεργασίες που μελετήθηκαν ενώ παράλληλα συγκρίνεται η απόδοση τους με

υπάρχοντα διαγράμματα ελέγχου από προηγούμενες μελέτες. Συγκεκριμένα, η σύγκριση των μονόπλευρων διαγραμμάτων s -EWMA, Shewhart και CUSUM για διεργασίες BAR(1) και BBAR(1), αποκαλύπτει ότι τόσο τα άνω μονόπλευρα όσο και τα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα s -EWMA υπερέχουν των αντίστοιχων διαγραμμάτων Shewhart ως προς την ανίχνευση μετατοπίσεων σε μία διεργασία BAR(1) ή BBAR(1). Σχετικά με τα μονόπλευρα διαγράμματα CUSUM, φαίνεται να είναι πολύ ισχυρά ως προς την ανίχνευση μετατοπίσεων μικρής τάξης (αυξήσεις ή μειώσεις). Παρά ταύτα, για μεγάλες τιμές του s (π.χ. $s = 4$), τα προτεινόμενα διαγράμματα s -EWMA έχουν συγκρίσιμη απόδοση με τα αντίστοιχα μονόπλευρα διαγράμματα CUSUM των Rakitzis et al.(2017b), ειδικά όταν πρόκειται για την ανίχνευση μέτριων ή μεγάλων αυξήσεων (δηλαδή για $\delta > 1.5$) αλλά και μειώσεων (δηλαδή για $\delta < 1.5$) του μέσου επιπέδου της διεργασίας BAR(1) ή BBAR(1). Επίσης, η αριθμητική σύγκριση των προτεινόμενων διαγραμμάτων CUSUM για την περίπτωση διεργασιών τύπου BINARCH(1), οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το διάγραμμα cLR-CUSUM έχει την καλύτερη απόδοση στην ανίχνευση αυξήσεων, ενώ το LR-CUSUM προτείνεται για την περίπτωση που παρατηρείται μείωση στις παραμέτρους του μοντέλου BINARCH(1).

Εκτός των προαναφερθέντων αριθμητικών συγκρίσεων, στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάστηκε και η εφαρμογή των προτεινόμενων διαγραμμάτων ελέγχου στην παρακολούθηση πραγματικών διεργασιών, από τρία διαφορετικά πεδία της εφαρμοσμένης έρευνας (επιδημιολογία, οικονομικά και διαχείριση δικτύων) συνεισφέροντας στην ανάπτυξη των ερευνητικών περιοχών της βιοεπιτήρησης (*biosurveillance*), της χρηματοοικονομικής επιτήρησης (*financial monitoring*) και της παρακολούθησης δικτύων (*network monitoring*). Σε κάθε ένα από τα σύνολα δεδομένων, έγινε πρώτα επιλογή του μοντέλου (μεταξύ των BAR(1), BBAR(1), BINARCH(1)) που παρουσιάζει την καλύτερη προσαρμογή και στη συνέχεια αναπτύχθηκαν τα προτεινόμενα διαγράμματα ελέγχου, με βάση αυτό το μοντέλο. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το φαινόμενο της υπερμεταβλητότητας συναντάται συχνά σε πρακτικές εφαρμογές, γεγονός που επιβεβαιώνεται τόσο από τη διερεύνηση των επιδημιολογικών δεδομένων όσο και από αυτά που αναφέρονται στον μηνιαίο πληθωρισμό των μελών-κρατών της Ευρωζώνης. Επομένως, σε αυτές τις περιπτώσεις προτάθηκε η χρήση διαγραμμάτων ελέγχου τα οποία βασίζονται στα μοντέλα BBAR(1) και BINARCH(1). Από την εφαρμογή των διαγραμμάτων s -EWMA, LR-CUSUM και cLR-CUSUM διαπιστώνεται ότι τα συγκεκριμένα διαγράμματα έχουν αυξημένη ικανότητα ως προς την ανίχνευση των μεταβολών στο μέσο επίπεδο των διεργασιών. Σχετικά, με τα δεδομένα

που αφορούν συνδέσεις σε σταθμούς εργασίας, κρίνεται κατάλληλη η προσαρμογή του BAR(1) μοντέλου και ως εκ τούτου αναπτύσσονται δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart, EWMA και DEWMA για την παρακολούθηση της εν λόγω διεργασίας. Από την ανάλυση των δεδομένων διαπιστώθηκε πως το διάγραμμα με την ταχύτερη ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας είναι το διάγραμμα τύπου Shewhart και αυτό οφείλεται στο είδος της μετατόπισης (απότομη και μεγάλης τάξης).

Λαμβάνοντας υπόψη τα προτεινόμενα διαγράμματα, διαπιστώνεται ότι το κυριότερο πλεονέκτημα που έχουν είναι η απλή εφαρμογή τους και ταυτόχρονα η βέλτιστη απόδοση που επιτυγχάνουν συγκριτικά με τα παραδοσιακά διαγράμματα. Το γεγονός αυτό επιτρέπει την περαιτέρω γενίκευση τους και την κατασκευή πιο σύνθετων διαγραμμάτων ελέγχου. Τέλος, ένα πλεονέκτημα των διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA έναντι όλων των υπολοίπων διαγραμμάτων που προτάθηκαν και μελετήθηκαν στο πλαίσιο της παρούσας διδακτορικής διατριβής είναι ότι ο υπολογισμός της απόδοσής τους μπορεί να γίνει με ακρίβεια, μέσω της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων. Ολοκληρώνοντας τα συμπεράσματα, παρατίθεται ένας συνοπτικός πίνακας (Πίνακας 7.1) στον οποίο δίνεται το διάγραμμα ελέγχου με την καλύτερη απόδοση, για διάφορα είδη μετατοπίσεων στις παραμέτρους των BAR(1), BBAR(1) και BINARCH(1), μεταξύ αυτών που μελετήθηκαν στην παρούσα διδακτορική διατριβή.

Πίνακας 7.1: Προτεινόμενα διαγράμματα ελέγχου για διεργασίες BAR(1), BBAR(1) και BINARCH(1)

Διεργασία	Προτεινόμενο Διάγραμμα Ελέγχου	Είδος μετατόπισης
BAR(1)	Μονόπλευρο 4-EWMA	Μικρές ή μεσαίες μετατοπίσεις της μέσης τιμής της διεργασίας
BAR(1)	Άνω μονόπλευρο EWMA	α) Αύξηση μόνο στο μ_0 β) Αύξηση στο μ_0 και μείωση στο ρ_0
BAR(1)	Άνω μονόπλευρο DEWMA	α) Αύξηση μόνο στο ρ_0 β) Ταυτόχρονη μετατόπιση με μικρή αύξηση στο μ_0 γ) Ταυτόχρονη μετατόπιση (αύξηση σε μ_0 και ρ_0)
BAR(1)	Κάτω μονόπλευρο EWMA	α) Μεταβολή (μείωση) μόνο στο μ_0 β) Ταυτόχρονη μείωση
BAR(1)	Κάτω μονόπλευρο DEWMA	α) Ταυτόχρονη μετατόπιση και μικρές τιμές για το μ_0 β) Ταυτόχρονη μετατόπιση (αύξηση στο μ_0 και μείωση στο ρ_0) ή (μείωση στο μ_0 και αύξηση στο ρ_0)
BAR(1)	Δίπλευρο EWMA	α) Μέτριες ή μεγάλες μειώσεις στο μ_0 β) Αυξήσεις στο ρ_0 και μειώσεις στο μ_0
BAR(1)	Δίπλευρο DEWMA	α) Μικρή τιμή στο μ_0 (π.χ. $\mu_0 = 4$) και μικρή μετατόπιση σε αυτό β) Αυξήσεις ή μειώσεις στο ρ_0 γ) Ταυτόχρονη αύξηση σε μ_0, ρ_0 δ) Αυξήσεις ή μειώσεις στο ρ_0 και ύπαρξη υψηλής αυτοσυσχέτισης (π.χ. $\rho_0 = 0.75$), μεγάλο μέγεθος δείγματος
BBAR(1)	Μονόπλευρο 4-EWMA	Μικρές ή μεσαίες μετατοπίσεις στη μέση τιμή της διεργασίας
BINARCH(1)	Μονόπλευρο 4-EWMA	Μικρές ή μεσαίες μετατοπίσεις στη μέση τιμή της διεργασίας
BINARCH(1)	Μονόπλευρο LR-CUSUM	Μικρές ή μεσαίες μειώσεις στη μέση τιμή της διεργασίας
BINARCH(1)	Μονόπλευρο cLR-CUSUM	α) Αύξηση στο α_{01} β) Ταυτόχρονη αύξηση στα α_{00} και α_{01}
BINARCH(1)	Δίπλευρο 4-EWMA	Μικρές μετατοπίσεις στο α_{00}

7.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Η μελέτη των χρονοσειρών με ακέραιες τιμές παρουσιάζει έναν σημαντικό περιορισμό, καθώς δεν επιτρέπει την ανάπτυξη ενός διαγράμματος ελέγχου με την τιμή της εντός ελέγχου απόδοσής του να είναι ακριβώς ίση με την επιθυμητή. Προκειμένου να ξεπεραστεί αυτός ο περιορισμός, οι Paulino et al. (2019) έχουν αναπτύξει μία μεθοδολογία η οποία βασίζεται στη θεωρία των ομοιόμορφα ισχυρότατων αμερόληπτων ελέγχων (*Uniformly Most Powerful Unbiased Test*, UMPU) και στη χρήση πιθανοτήτων τυχαιοποίησης (*randomization probabilities*) ώστε η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού του διαγράμματος να διατηρείται στα επιθυμητά επίπεδα.

Εκτός από την ανάπτυξη των διαγραμμάτων *s*-EWMA, DEWMA, LR-CUSUM και cLR-CUSUM που παρουσιάζονται στην παρούσα διδακτορική διατριβή, έχει ενδιαφέρον σε μελλοντική έρευνα να αναπτυχθούν και να μελετηθούν και άλλες κατηγορίες σύνθετων διαγραμμάτων, όπως είναι η περίπτωση των διαγραμμάτων Mixture Cumulative Count (*MCCC-chart*) (Majeed et al. (2013)) προκειμένου να συγκριθούν με τα υπάρχοντα. Επίσης, η παρούσα έρευνα θα μπορούσε να επεκταθεί στην ανάπτυξη και άλλων τύπων διαγραμμάτων όπως τα συνδυασμένα ή σύνθετα διαγράμματα (*Combined or Composite charts*), τα οποία είναι σε θέση να ανιχνεύουν μετατοπίσεις προς οποιαδήποτε κατεύθυνση (προς τα πάνω ή προς τα κάτω) σε οποιαδήποτε από τις παραμέτρους της διεργασίας BAR(1), BBAR(1) ή BINARCH(1). Συγκεκριμένα, προτείνεται η ανάπτυξη διαγραμμάτων που δεν θα ανιχνεύουν μόνο τη μετατόπιση, αλλά θα παρέχουν σημαντικές πληροφορίες σχετικά με την παράμετρο ή τις παραμέτρους που έχουν μεταβληθεί. Επιπλέον, στην περίπτωση των προτεινόμενων διαγραμμάτων DEWMA, είναι σημαντικό να εξεταστεί ως προς την παρακολούθηση διεργασιών που παρουσιάζουν υπερμεταβλητότητα, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση του BBAR(1) ή BINARCH(1) μοντέλου. Αναμένεται ότι εκτός από την παρουσία αυτοσυσχέτισης στα δεδομένα, η υπερμεταβλητότητα θα επηρεάσει επίσης την απόδοση των διαγραμμάτων EWMA και DEWMA και ως εκ τούτου θα είναι απαραίτητες οι κατάλληλες προσαρμογές στις τιμές των παραμέτρων αυτών.

Ένα άλλο πρόβλημα που πρέπει να αντιμετωπιστεί είναι η *ARL*-μεροληπτική (*ARL-biased*) απόδοση ενός δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου. Το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται όταν η κατανομή της απεικονιζόμενης στατιστικής συνάρτησης δεν είναι συμμετρική (αν π.χ. το μέγεθος δείγματος ή/και η εντός ελέγχου μέση τιμή της διεργασίας δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλα). Απαιτείται ξεχωριστή μελέτη ώστε να αναπτυχθεί η γενική διαδικασία στατιστικού σχεδιασμού ενός

δίπλευρου *ARL*-αμερόληπτου (ή τουλάχιστον σχεδόν *ARL*-αμερόληπτου) διαγράμματος, είτε τύπου Shewhart είτε τύπου *s*-EWMA, για την παρακολούθηση κάποιας από τις διεργασίες υπό μελέτη (τις *BAR*(1), *BBAR*(1) και *BINARCH*(1)).

Τέλος, στην παρούσα διδακτορική διατριβή όλα τα διαγράμματα προτάθηκαν για χρήση κατά την ανάλυση Φάσης II. Όμως, σε πρακτικά προβλήματα, οι τιμές των παραμέτρων της διεργασίας δεν είναι γνωστές και πρέπει να εκτιμηθούν από ένα προκαταρκτικό δείγμα Φάσης I. Είναι γνωστό επίσης ότι η εκτίμηση των παραμέτρων της διεργασίας έχει σημαντική επίδραση στην απόδοση του διαγράμματος. Έτσι, απαιτείται ξεχωριστή μελέτη για την αξιολόγηση της επίδρασης που έχει η χρήση των εκτιμήσεων των τιμών των παραμέτρων στην απόδοση του διαγράμματος καθώς και ο προσδιορισμός του κατάλληλου μεγέθους δείγματος Φάσης I που πρέπει να ληφθεί από τη διεργασία.

Βιβλιογραφία

Ελληνική Βιβλιογραφία

- Αντζουλάκος, Δ. (2003). *Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Σημειώσεις Παραδόσεων*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Μπερσίμης, Σ., Ρακιτζής, Α., Σαχλάς, Α. (2021). *Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας*, Εκδόσεις Α. Τζιόλα & Υιοί Α.Ε, Θεσσαλονίκη.
- Ταγαράς, Γ. (2001). *Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας*, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, Θεσσαλονίκη.
- Χρυσ αφίνου, Ο. (2012). *Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελιζεις*. Εκδόσεις: Σοφία, Θεσσαλονίκη.

Ξένη βιβλιογραφία

- Adeoti, O. A., Malela-Majika, J. C. (2020). Double exponentially weighted moving average control chart with supplementary runs-rules. *Quality Technology & Quantitative Management*, **17**(2), 149-172.
- Akaike, H. (1973). Maximum likelihood identification of Gaussian autoregressive moving average models. *Biometrika*, **60**(2), 255-265.
- Albarracin, O. Y. E., Alencar, A. P., Lee Ho, L. (2018). CUSUM chart to monitor autocorrelated counts using negative binomial GARMA model. *Statistical Methods in Medical Research*, **27**(9), 2859-2871.
- Alevizakos, V., Koukouvinos C. (2019). A double exponentially weighted moving average control chart for monitoring COM-Poisson attributes. *Quality and Reliability Engineering International* **35**(7):2130–2151.
- Alevizakos, V., Koukouvinos, C. (2020). Monitoring of zero-inflated Poisson processes with EWMA and DEWMA control charts. *Quality and Reliability Engineering International*, **36**(1), 88-111.
- Alevizakos, V., Koukouvinos, C. (2021). Monitoring of zero-inflated binomial processes with a DEWMA control chart. *Journal of Applied Statistics*, **48**(7), 1319-1338.
- Allen, T. T. (2019). *Introduction to engineering statistics and lean six sigma: Statistical quality control and design of experiments and systems* **3**. London: Springer.

- Al-Osh, M. A., Alzaid, A. A. (1987). First-order integer-valued autoregressive (INAR (1)) process. *Journal of Time Series Analysis*, **8**(3), 261-275.
- Al-Osh, M. A., Alzaid, A. A. (1991). Binomial autoregressive moving average models. *Stochastic Models*, **7**(2), 261-282.
- Alwan, L. C. (1992). Effects of autocorrelation on control chart performance. *Communications in statistics-Theory and Methods*, **21**(4), 1025-1049.
- Alwan, L. C., Champ, C. W., Maragah, H. D. (1994). Study of average run lengths for supplementary runs rules in the presence of autocorrelation. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **23**(2), 373-391.
- Alwan, L. C., Roberts, H. V. (1988). Time-series modeling for statistical process control. *Journal of business & economic statistics*, **6**(1), 87-95.
- Alzaid, A., Al-Osh, M. (1988). First-order integer-valued autoregressive (INAR (1)) process: distributional and regression properties. *Statistica Neerlandica*, **42**(1), 53-61.
- Anastasopoulou, M., Rakitzis, A. C. (2021). CUSUM control charts for monitoring BINARCH(1) processes. *Proceedings. of the 33rd Greek Statistical Conference*, Larissa, Greece, 219-232.
- Anastasopoulou, M., Rakitzis, A. C. (2022a). EWMA control charts for monitoring correlated counts with finite range. *Journal of Applied Statistics*, **49**(3), 553-573.
- Anastasopoulou, M., Rakitzis, A. C. (2022b). Monitoring a BAR (1) Process with EWMA and DEWMA Control Charts. In *Control Charts and Machine Learning for Anomaly Detection in Manufacturing*, 77-103. Springer, Cham.
- Anastasopoulou, M., Rakitzis, A. C. (2022c). One-and two-sided monitoring schemes for BINARCH (1) processes. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **38**(2), 262-286.
- Bakouch, H. S., Ristić, M. M. (2010). Zero truncated Poisson integer-valued AR (1) model. *Metrika*, **72**, 265-280.
- Barreto-Souza, W. (2015). Zero-modified geometric INAR (1) process for modelling count time series with deflation or inflation of zeros. *Journal of Time Series Analysis*, **36**(6), 839-852.
- Benjamin, M. A., Rigby, R. A., Stasinopoulos, D. M. (2003). Generalized autoregressive moving average models. *Journal of the American Statistical association*, **98**(461), 214-223.
- Bersimis S, Sgora A, Psarakis S. (2018). The application of multivariate statistical process monitoring in non-industrial processes, *Quality Technology & Quantitative Management*, **15**, 526-54.9.

- Bourguignon, M., Vasconcellos, K. L. (2015). Improved estimation for Poisson INAR (1) models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **85**(12), 2425-2441.
- Bourke, P. D. (1991). Detecting a shift in fraction nonconforming using run-length control charts with 100% inspection. *Journal of Quality Technology*, **23**(3), 225-238.
- Bourke, P. D. (2001). Sample size and the binomial CUSUM control chart: the case of 100% inspection. *Metrika*, **53**(1), 51–70.
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M., Reinsel, G. C., Ljung, G. M. (2015). *Time series analysis: Forecasting and control* (5th ed). Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.
- Brook, D. A. E. D., Evans, D. (1972). An approach to the probability distribution of CUSUM run length. *Biometrika*, **59**(3), 539-549.
- Castagliola, P., Tran, K. P., Celano, G., Rakitzis, A. C., Maravelakis, P. E. (2019). An EWMA-type sign chart with exact run length properties. *Journal of Quality Technology*, **51**(1), 51-63.
- Champ, C. W., Woodall, W. H. (1987). Exact results for Shewhart control charts with supplementary runs rules. *Technometrics*, **29**(4), 393-399.
- Chang, T. C., Gan, F. F. (2001). Cumulative sum charts for high yield processes. *Statistica Sinica*, 791-805.
- Costa, A. R., Barbosa, C., Santos, G., Alves, M. R. (2019). Six sigma: Main metrics and r based software for training purposes and practical industrial quality control. *Quality Innovation Prosperity*, **23**(2), 83-100.
- Danaher, P. J., Hardie, B.G.S. (2005) Bacon with your eggs? Applications of a new bivariate beta-binomial distribution. *The American Statistician*, **59**(4), 282–286.
- Derman, C., Ross, S.M. (1997). *Statistical Aspects of Quality Control*. Academic Press, San Diego, CA, USA.
- Dodge, H. F., Romig, H. G. (1944) Sampling inspection tables: single and double sampling. *Wiley Publications in Statistics eng*.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, **50**, 987-1007.
- Ferland, R., Latour, A., Oraichi, D. (2006) Integer-valued GARCH processes. *Journal of Time Series Analysis* **27**(6), 923-942.

- Fernandes, F. H., Bourguignon, M., Ho, L. L. (2020). Control charts to monitor integer valued autoregressive process with inflation or deflation of zeros. *Journal of Statistics and Management Systems*, **23**(8), 1463-1484.
- Fokianos, K., Rahbek, A., Tjøstheim, D. (2009) Poisson autoregression. *Journal of the American Statistical Association* **104**(4), 1430-1439.
- Freeland, R. K., McCabe, B. P. (2004). Forecasting discrete valued low count time series. *International Journal of Forecasting*, **20**(3), 427-434.
- Gan, F. F. (1990). Monitoring observations generated from a binomial distribution using modified exponentially weighted moving average control chart. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **37**(1-2), 45-60.
- Gan, F. F. (1993). An optimal design of CUSUM control charts for binomial counts. *Journal of Applied Statistics*, **20**(4), 445-460.
- Gauran, I. I. M., Park, J., Lim, J., Park, D., Zylstra, J., Peterson, T., Kann, M., Spouge, J. L. (2018). Empirical null estimation using zero-inflated discrete mixture distributions and its application to protein domain data. *Biometrics*, **74**(2), 458-471.
- Gitlow, H., Gitlow, S., Oppenheim, A., Oppenheim, R. (1995) Quality Management Tools and Methods for Improvement, *Irwin Professional*, Burr Ridge, IL.
- Goetsch, D.L., Davis, S.B. (1997) Introduction to Total Quality: Quality Management for Production, Processing, and Services, 2nd ed., *Prentice Hall*, New Jersey.
- Gombay, E., Serban, D. (2009). Monitoring parameter change in AR (p) time series models. *Journal of Multivariate Analysis*, **100**(4), 715-725.
- Gomes, D., Castro, L. C. (2009). Generalized integer-valued random coefficient for a first order structure autoregressive (RCINAR) process. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**(12), 4088–4097.
- Griffiths, D. A. (1973). Maximum likelihood estimation for the beta-binomial distribution and an application to the household distribution of the total number of cases of a disease. *Biometrics*, **29**(4), 637–648.
- Haridy, S., Shamsuzzaman, M., Alsayouf, I., Mukherjee, A. (2020). An improved design of exponentially weighted moving average scheme for monitoring attributes. *International Journal of Production Research*, **58**(3), 931-946.

- Haridy, S., Wu, Z., Chen, S., Knoth, S. (2014). Binomial CUSUM chart with curtailment. *International Journal of Production Research*, **52**(15), 4646-4659.
- Haridy, S., Wu, Z., Yu, F. J., Shamsuzzaman, M. (2013). An optimisation design of the combined np-CUSUM scheme for attributes. *European Journal of Industrial Engineering*, **7**(1), 16-37.
- Harris, T. J., Ross, W. H. (1991). Statistical process control procedures for correlated observations. *The canadian journal of chemical engineering*, **69**(1), 48-57.
- He, S., Li, S., He, Z. (2014). A combination of CUSUM charts for monitoring a zero-inflated Poisson process. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **43**(10), 2482-2497.
- Hu, Q., Liu, L. (2021). Weighted score test based EWMA control charts for zero-inflated poisson models. *Computers & Industrial Engineering*, **152**, 106966.
- Hughes, G., Madden, L. V. (1993) Using the beta-binomial distribution to describe aggregated patterns of disease incidence. *Phytopathology*, **83**(7), 759–763.
- Huh, J., Kim, H., Lee, S. (2017). Monitoring parameter shift with Poisson integer-valued GARCH models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **87**(9), 1754-1766.
- Jazi, M. A., Jones, G., Lai, C. D. (2012). First-order integer valued AR processes with zero inflated Poisson innovations. *Journal of Time Series Analysis*, **33**(6), 954-963.
- Joe, H. (1996). Time series models with univariate margins in the convolution-closed infinitely divisible class. *Journal of Applied Probability* **33**(3), 664–677.
- Johnson, R. A., Bagshaw, M. (1974). The effect of serial correlation on the performance of CUSUM tests. *Technometrics*, **16**(1), 103-112.
- Jung, R. C., Ronning, G., Tremayne, A. R. (2005). Estimation in conditional first order autoregression with discrete support. *Statistical papers*, **46**(2), 195-224.
- Juran, J.M. (1988), *Juran on Planning for Quality*, Free Press, New York.
- Khoo, M. B., Teh, S. Y., Wu, Z. (2010). Monitoring process mean and variability with one double EWMA chart. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **39**(20), 3678-3694.
- Kim, H., Lee, S. (2019). Improved CUSUM monitoring of Markov counting process with frequent zeros. *Quality and Reliability Engineering International*, **35**(7), 2371-2394.
- Kim, H., Lee, S. (2021). On residual CUSUM statistic for PINAR (1) model in statistical design and diagnostic of control chart. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **50**(5), 1290-1314.

- Klein, M. (2000). Two alternatives to the Shewhart \bar{X} control chart. *Journal of Quality technology*, **32**(4), 427-431.
- Knoth, S., Schmid, W. (2004). Control charts for time series: A review. In H. J. Lenz & P. T. Wilrich (Eds.), *Frontiers in statistical quality control 7* (210–236). Heidelberg: Physica-Verlag.
- Lai, T. L. (1995). Sequential changepoint detection in quality control and dynamical systems. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, **57**(4), 613-644.
- Lee, S. M., Karrison, T., Nocon, R. S., Huang, E. (2018). Weighted zero-inflated Poisson mixed model with an application to Medicaid utilization data. *Communications for Statistical Applications and Methods*, **25**(2), 173-184.
- Li, C., Wang, D., Zhu, F. (2016). Effective control charts for monitoring the NGINAR (1) process. *Quality and Reliability Engineering International*, **32**(3), 877-888.
- Li, C., Wang, D., Zhu, F. (2019). Detecting mean increases in zero truncated INAR (1) processes. *International Journal of Production Research*, **57**(17), 5589-5603.
- Li, C., Wang, D., Zhu, F. (2019). Detecting mean increases in zero truncated INAR (1) processes. *International Journal of Production Research*, **57**(17), 5589-5603.
- Li, C., Zhang, H., Wang, D. (2022). Modelling and monitoring of INAR (1) process with geometrically inflated Poisson innovations. *Journal of Applied Statistics*, **49**(7), 1821-1847
- Li, G., Tan, K. K. R., Ng, S. H., Chua, D. H. (2018). A multilevel zero-inflated model for the study of copper hillocks growth in integrated circuits manufacturing. *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, **31**(3), 385-394.
- Lucas, J. M., Crosier, R. B. (1982). Fast initial response (FIR) for cumulative sum quality control schemes. *Technometrics*, **24**(3), 199-205.
- Mahmoud, M. A., Woodall, W. H. (2010). An evaluation of the double exponentially weighted moving average control chart. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, **39**(5), 933-949.
- Majeed, M. Y., Aslam, M., & Riaz, M. (2013). Mixture cumulative count control chart for mixture geometric process characteristics. *Quality & Quantity*, **47**, 2289-2307.
- McKenzie, E. (1985). Some simple models for discrete variate time series 1. *JAWRA Journal of the American Water Resources Association*, **21**(4), 645-650.
- Mckenzie, E. (1986) Autoregressive-moving-average processes with negative binomial and geometric marginal distributions. *Advances in Applied Probability*, **18**, 679-705.

- Mckenzie, E. (1988). Some ARMA models for dependent sequences of Poisson counts. *Advances in Applied Probability*, **2**(4), 822-835.
- Montgomery, D. C. (2020). *Introduction to statistical quality control*. John Wiley & Sons.
- Montgomery, D. C., Mastrangelo, C. M. (1991). Some statistical process control methods for autocorrelated data. *Journal of Quality Technology*, **23**(3), 179-193.
- Morais, M. C., Knoth, S., Cruz, C. J., Weiß, C. H. (2021). ARL-unbiased CUSUM schemes to monitor binomial counts. In *Frontiers in Statistical Quality Control 13* (pp. 77-98). Cham: Springer International Publishing.
- Morais, M. C., Knoth, S., Weiß, C. H. (2018). An ARL-unbiased thinning-based EWMA chart to monitor counts. *Sequential Analysis*, **37**(4), 487-510.
- Morais, M. C., Pacheco, A. (2006). Combined CUSUM–Shewhart schemes for binomial data. *Stochastics and Quality Control*, **21**(1), 43–57.
- Nastić, A. S. (2012). On shifted geometric INAR (1) models based on geometric counting series. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **41**(23), 4285-4301.
- Nelson, L. S. (1984). The Shewhart control chart—tests for special causes. *Journal of quality technology*, **16**(4), 237-239.
- Paulino, S., Morais, M. C., & Knoth, S. (2019). On ARL-unbiased c-charts for INAR (1) Poisson counts. *Statistical papers*, **60**, 1021-1038.
- Paulino, S., Morais, M. C., Knoth, S. (2019). On ARL-unbiased c-charts for INAR (1) Poisson counts. *Statistical papers*, **60**, 1021-1038.
- Pignatiello Jr, J. J., Acosta-Mejia, C. A., Rao, B. V. (1995, May). The performance of control charts for monitoring process dispersion. In *Proceedings of the 4th Industrial Engineering Research Conference* (pp. 320-328). Nashville, TN: Institute of Industrial Engineers.
- Prado, R., West, M. (2015). *Time Series: Modeling, Computation, and Inference*. New York: Chapman and Hall/CRC.
- Psarakis, S., Papaleonida, G. E. A. (2007). SPC procedures for monitoring autocorrelated processes. *Quality Technology & Quantitative Management*, **4**(4), 501-540.
- Qiu, P. (2013). *Introduction to statistical process control*. CRC press.
- R Core Team (2022). R: A language and environment for statistical computing. *Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing*. <https://www.r-project.org/>.

- Rakitzis, A. C., Castagliola, P., Maravelakis, P. E. (2016). A two-parameter general inflated Poisson distribution: properties and applications. *Statistical Methodology*, **29**, 32-50.
- Rakitzis, A. C., Weiß, C. H., Castagliola, P. (2017a). Control charts for monitoring correlated Poisson counts with an excessive number of zeros. *Quality and Reliability Engineering International*, **33**(2), 413-430.
- Rakitzis, A. C., Weiß, C. H., Castagliola, P. (2017b). Control charts for monitoring correlated counts with a finite range. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **33**(6), 733-749.
- Rakitzis, A.C., Maravelakis, P.E., Castagliola, P. (2016). CUSUM control charts for the monitoring of zero-inflated binomial processes. *Quality and Reliability Engineering International*, **32**(2), 465-483.
- Raza, M. A., Nawaz, T., Aslam, M., Bhatti, S. H., Sherwani, R. A. K. (2020). A new nonparametric double exponentially weighted moving average control chart. *Quality and Reliability Engineering International*, **36**(1), 68-87.
- Ristic, M., Weiß C.H., Janjic, A. (2016). A binomial integer-valued ARCH model, *The International Journal of Biostatistics*, **12**, 1-21.
- Roberts, S.W. (1959). Control chart tests based on geometric moving averages. *Technometrics*, **1**(3), 239–250.
- Ryan, T. P. (2011). *Statistical Methods for Quality Improvement*. John Wiley & Sons.
- Sales, L. O., Pinho, A. L., Vivacqua, C. A., Ho, L. L. (2020). Shewhart control chart for monitoring the mean of Poisson mixed integer autoregressive processes via Monte Carlo simulation. *Computers & Industrial Engineering*, **140**, 106245.
- Schipper, S., Schmid, W. (2001). Control charts for GARCH processes. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **47**(3), 2049-2060.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, 461-464.
- Scotto, M. G., Weiß, C. H., Gouveia, S. (2015). Thinning-based models in the analysis of integer-valued time series: a review. *Statistical Modelling*, **15**(6), 590-618.
- Shah, S., Shridhar, P., Gohil, D. (2010). Control chart: A statistical process control tool in pharmacy. *Asian Journal of Pharmaceutics (AJP)*, **4**(3).
- Shamma, S. E., Amin, R. W., Shamma, A. K. (1991). A double exponentially weighted moving average control procedure with variable sampling intervals. *Communications in Statistics-simulation and Computation*, **20**(2-3), 511-528.

- Shamma, S. E., Shamma, A. K. (1992). Development and evaluation of control charts using double exponentially weighted moving averages. *International Journal of Quality & Reliability Management*.
- Shewhart, W. (1939) *Statistical Method from the Viewpoint of Quality Control*, US Department of Agriculture.
- Shewhart, W. A. (1926). Quality control charts. *The Bell System Technical Journal*, 5(4), 593-603.
- Sinha, M.N., Willborn, W.W.O. (1985) *The Management of Quality Assurance*, Wiley, New York.
- Steutel, F. W., Harn, V. (1979). Discrete analogues of self-decomposability and stability. *The Annals of Probability*, 7(5), 893-899.
- Wardell, D. G., Moskowitz, H., & Plante, R. D. (1992). Control charts in the presence of data correlation. *Management Science*, 38(8), 1084-1105.
- Weiß, C. H. (2007). Controlling correlated processes of Poisson counts. *Quality and reliability engineering international*, 23(6), 741-754.
- Weiß, C. H. (2008). Thinning operations for modeling time series of counts—a survey. *AStA Advances in Statistical Analysis*, 92(3), 319-341.
- Weiß, C. H. (2009a). EWMA monitoring of correlated processes of Poisson counts. *Quality Technology & Quantitative Management*, 6(2), 137-153.
- Weiß, C. H. (2009b). Controlling jumps in correlated processes of Poisson counts. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 25(5), 551-564.
- Weiß, C. H. (2009c). Monitoring correlated processes with binomial marginal. *Journal of Applied Statistics*, 36(4), 399–414.
- Weiß, C. H. (2011). Detecting mean increases in Poisson INAR (1) processes with EWMA control charts. *Journal of Applied Statistics*, 38(2), 383-398.
- Weiß, C. H. (2015). SPC methods for time-dependent processes of counts—A literature review. *Cogent Mathematics*, 2(1), 1111116.
- Weiß, C. H. (2018). *An introduction to discrete-valued time series*. John Wiley & Sons.
- Weiß, C. H., & Testik, M. C. (2015). On the Phase I analysis for monitoring time-dependent count processes. *Iie Transactions*, 47(3), 294-306.
- Weiß, C. H., Atzmller, M. (2010). EWMA control charts for monitoring binary processes with applications to medical diagnosis data. *Quality and Reliability Engineering International*, 26(8), 795-805.

- Weiß, C. H., Feld, M. H. J., Mamode Khan, N., Sunecher, Y. (2019). INARMA modeling of count time series. *Stats*, **2**(2), 284-320.
- Weiß, C. H., Kim, H. Y. (2011). Binomial AR(1) processes: moments, cumulants, and estimation. *Statistics*, **47**(3), 494–510.
- Weiß, C. H., Kim, H. Y. (2013). Parameter estimation for binomial AR(1) models with applications in finance and industry. *Statistical Papers*, **54**, 563-590.
- Weiß, C. H., Kim, H. Y. (2014). Diagnosing and modeling extra-binomial variation for time-dependent counts. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **30**(5), 519–656.
- Weiß, C. H., Pollett, P. K. (2014). Binomial autoregressive processes with density-dependent thinning. *Journal of Time Series Analysis*, **35**(2), 115-132.
- Weiß, C. H., Testik, M. C. (2009). CUSUM monitoring of first-order integer-valued autoregressive processes of Poisson counts. *Journal of Quality Technology*, **41**(4), 389-400.
- Weiß, C. H., Testik, M. C. (2011). The Poisson INAR (1) CUSUM chart under overdispersion and estimation error. *Iie Transactions*, **43**(11), 805-818.
- Weiß, C. H., Testik, M. C. (2012). Detection of abrupt changes in count data time series: Cumulative sum derivations for INARCH (1) models. *Journal of Quality Technology*, **44**(3), 249-264.
- Weiß, C. H., Testik, M. C. (2015). Residuals-based CUSUM charts for Poisson INAR (1) processes. *Journal of Quality Technology*, **47**(1), 30-42.
- Western, Electric Company. (1956). *Statistical Quality Control Handbook*. Indianapolis, IN.
- Widrick, S. M., Mergen, E., Grant, D. (2002). Measuring the dimensions of quality in higher education. *Total Quality Management*, **13**(1), 123-131.
- Williams, D. A. (1975). 394: The analysis of binary responses from toxicological experiments involving reproduction and teratogenicity. *Biometrics*, 949-952.
- Woodall, W. H. (1997). Control charts based on attribute data: bibliography and review. *Journal of Quality Technology*, **29**(2), 172-183.
- Woodall, W. H. (2000). Controversies and contradictions in statistical process control. *Journal of Quality Technology*, **32**, 341–350.
- Woodall, W. H., Montgomery, D. C. (2014). Some current directions in the theory and application of statistical process monitoring. *Journal of Quality Technology*, **46**, 78–94.

- Wu, Z., Jiao, J., Liu, Y. (2008). A binomial CUSUM chart for detecting large shifts in fraction nonconforming. *Journal of Applied Statistics*, **35**(11), 1267–1276.
- Yeh, A. B., Mcgrath, R. N., Sembower, M. A., Shen, Q. (2008). EWMA control charts for monitoring high-yield processes based on non-transformed observations. *International Journal of Production Research*, **46**(20), 5679-5699.
- Yontay, P., Weiß, C. H., Testik, M. C., Pelin Bayindir, Z. (2013). A two-sided cumulative sum chart for first-order integer-valued autoregressive processes of poisson counts. *Quality and Reliability Engineering International*, **29**(1), 33-42.
- Yule, G.U. (1927) On a method of investigating periodicities in disturbed series with special reference to Wolfer's sunspot numbers. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 267.
- Zhang, L., Govindaraju, K., Lai, C. D., Bebbington, M. S. (2003). Poisson DEWMA control chart. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **32**(4), 1265-1283.
- Zhang, M., Nie, G., He, Z., Hou, X. (2014). The Poisson INAR (1) one-sided EWMA chart with estimated parameters. *International Journal of Production Research*, **52**(18), 5415-5431.
- Zhang, X., Kano, M., Tani, M., Mori, J., Harada, K. (2018). Defect data modeling and analysis for improving product quality and productivity in steel industry. In *Computer aided chemical engineering* (Vol. 44, pp. 2233-2238). Elsevier.
- Zheng, H., Basawa, IV., Datta, S. (2007) First-order random coefficient integer-valued autoregressive processes. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**(1):212–229.
- Zhu, F. (2012). Zero-inflated Poisson and negative binomial integer-valued GARCH models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **142**(4), 826-839.

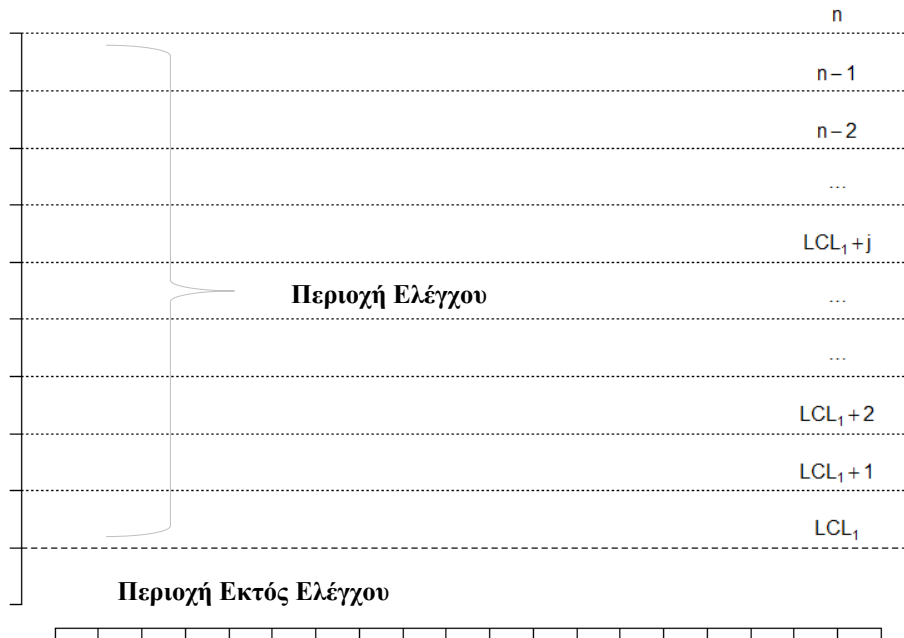
Παραρτήματα

Παράρτημα Α: Μεθοδολογία Μαρκοβιανών Αλυσίδων

Για την ανάπτυξη και μελέτη των διαγραμμάτων Shewhart και s -EWMA για διεργασίες τύπου $BAR(1)$, $BBAR(1)$ και $BINARCH(1)$ χρησιμοποιείται η μεθοδολογία των Μαρκοβιανών αλυσίδων, η οποία προτάθηκε από τους Brook and Evans (1972). Αρχικά, η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε στον υπολογισμό του μήκους ροής ενός διαγράμματος CUSUM. Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι η εξής: Η ακολουθία των σημείων που απεικονίζονται σε ένα διάγραμμα ελέγχου μοντελοποιείται σύμφωνα με μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου και πεπερασμένου χώρου καταστάσεων. Ειδικά, στην περίπτωση που οι τιμές που μπορεί να πάρει η στατιστική συνάρτηση στην οποία βασίζεται το διάγραμμα (π.χ. EWMA στατιστική ή CUSUM στατιστική) είναι διακριτές, τότε ορίζεται ένα πλήθος μεταβατικών καταστάσεων για την αλυσίδα και μια απορροφητική κατάσταση. Όταν η αλυσίδα εισέλθει σε αυτή, το διάγραμμα δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας.

Παρακάτω παρουσιάζεται ένα ενδεικτικό παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου στην περίπτωση του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος 1-EWMA. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τη μεθοδολογία των Μαρκοβιανών αλυσίδων δείτε Weiß (2011) και τις εκεί αναφορές.

Έστω κάτω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου όπως αυτό στην Εικόνα Α.1



Εικόνα Α.1: Περιοχή ελέγχου και περιοχή εκτός ελέγχου σε ένα κάτω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου s -EWMA.

Έστω η δείκτρια συνάρτηση $I_A(x)$ η οποία έχει την τιμή 1 αν $x \in A$, διαφορετικά έχει την τιμή 0. Αν $X_t, t \geq 1$, είναι μια στάσιμη διαδικασία (π.χ. μια εκ των BAR(1), BBAR(1) ή BINARCH(1)) και

$$Q_t = \text{round}(\lambda X_t + (1 - \lambda)Q_{t-1}), t \geq 1,$$

με $Q_0 = q_0 \in \{0,1, \dots\}$, $\lambda \in (0,1]$ η στατιστική συνάρτηση του διαγράμματος 1-EWMA, τότε, η (X_t, Q_t) , $t \geq 1$, είναι μια ομογενής διδιάστατη Μαρκοβιανή αλυσίδα με τιμές στο $\{0,1, \dots, n\} \times \mathbb{N}_0$. Οι πιθανότητες μετάβασης είναι (βλέπε Weiß (2009))

$$\begin{aligned} p(a, b|c, d) &= P(X_t = a, Q_t = b | X_{t-1} = c, Q_{t-1} = d) \\ &= I_{[b-0.5, b+0.5]}(\lambda a + (1 - \lambda)d) p_{a|c} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} p_1(a, b|q_0) &= P(X_1 = a, Q_1 = b | Q_0 = q_0) \\ &= I_{[b-0.5, b+0.5]}(\lambda a + (1 - \lambda)q_0) p_a \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

όπου $p_{a|c}$ είναι η πιθανότητα μετάβασης $P(X_t = a | X_{t-1} = c)$ του μοντέλου (π.χ. για το BAR(1) δίνονται στην εξίσωση (2.6)) ενώ $p_a = P(X_t = a)$ είναι η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας.

Όπως φαίνεται και στην Εικόνα Α.1, η περιοχή ελέγχου (*control region*) του διαγράμματος είναι το σύνολο $\{LCL + 1, LCL + 2, \dots, n\}$ και όσο οι τιμές Q_t είναι σε αυτό το σύνολο, η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου. Αν $Q_t \in \{0,1, \dots, LCL\}$ (περιοχή εκτός ελέγχου, *out-of-control region*), τότε η διεργασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου.

Άρα, ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης \mathbf{Q} της διδιάστατης Μαρκοβιανής αλυσίδας (X_t, Q_t) περιέχει τις πιθανότητες $p(a, b|c, d)$ όπου $a, c \in \{0,1, \dots, n\}$ και $b, d \in \mathcal{C} = \{LCL + 1, LCL + 2, \dots, n\}$. Η διάσταση του πίνακα είναι $(n - LCL)(n + 1) \times (n - LCL)(n + 1)$. Για παράδειγμα, αν $n = 5$, $LCL = 1$, τότε η διάσταση του \mathbf{Q} είναι 24×24 και η μορφή του είναι η εξής

$(X_{t-1}, Q_{t-1}) \backslash (X_t, Q_t)$	(0,2)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	...	(3,5)	(4,5)	(5,5)
(0,2)	$p(0,2 0,2)$	$p(1,2 0,2)$	$p(2,2 0,2)$	$p(3,2 0,2)$...	$p(3,5 0,2)$	$p(4,5 0,2)$	$p(5,5 0,2)$
(1,2)	$p(0,2 1,2)$	$p(1,2 1,2)$	$p(2,2 1,2)$	$p(3,2 1,2)$...	$p(3,5 1,2)$	$p(4,5 1,2)$	$p(5,5 1,2)$
(2,2)	$p(0,2 2,2)$	$p(1,2 2,2)$	$p(2,2 2,2)$	$p(3,2 2,2)$...	$p(3,5 2,2)$	$p(4,5 2,2)$	$p(5,5 2,2)$
(3,2)	$p(0,2 3,2)$	$p(1,2 3,2)$	$p(2,2 3,2)$	$p(3,2 3,2)$...	$p(3,5 3,2)$	$p(4,5 3,2)$	$p(5,5 3,2)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮
(3,5)	$p(0,2 3,5)$	$p(1,2 3,5)$	$p(2,2 3,5)$	$p(3,2 3,5)$...	$p(3,5 3,5)$	$p(4,5 3,5)$	$p(5,5 3,5)$
(4,5)	$p(0,2 4,5)$	$p(1,2 4,5)$	$p(2,2 4,5)$	$p(3,2 4,5)$...	$p(3,5 4,5)$	$p(4,5 4,5)$	$p(5,5 4,5)$
(5,5)	$p(0,2 5,5)$	$p(1,2 5,5)$	$p(2,2 5,5)$	$p(3,2 5,5)$...	$p(3,5 5,5)$	$p(4,5 5,5)$	$p(5,5 5,5)$

Με ανάλογο τρόπο (και αφού γίνουν οι απαραίτητες τροποποιήσεις) ορίζεται η περιοχή ελέγχου καθώς και η εκτός ελέγχου περιοχή, στην περίπτωση του άνω μονόπλευρου διαγράμματος 1-EWMA. Ο τρόπος ορισμού των καταστάσεων της αλυσίδας καθώς και η μορφή του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης είναι ανάλογη και για λόγους οικονομίας χώρου, δε δίνονται περισσότερες λεπτομέρειες.

Αν ξ είναι το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων, τα στοιχεία του είναι οι πιθανότητες $p_1(a, b|q_0)$. Άρα, ο υπολογισμός του μέσου μήκους ροής αρχικής κατάστασης (*zero-state ARL*) γίνεται μέσω της σχέσης

$$zsARL = 1 + \xi(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1}' \quad (\text{A.3})$$

Για τον υπολογισμό του μέσου μήκους ροής σταθερής κατάστασης (*steady-state ARL*) χρησιμοποιείται η σχέση (δείτε Weiß and Testik (2012))

$$ssARL = ((\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1}')' \cdot \frac{\mathbf{g}_0}{\mathbf{1}'\mathbf{g}_0} \quad (\text{A.4})$$

όπου \mathbf{g}_0 είναι το δεξιό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα \mathbf{Q}'_0 , δηλαδή του ανάστροφου του πίνακα \mathbf{Q}_0 , ο οποίος είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης όταν η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου. Επίσης, το διάνυσμα $\mathbf{g}_0/(\mathbf{1}'\mathbf{g}_0)$ είναι το κανονικοποιημένο διάνυσμα \mathbf{g}_0 .

Για τον υπολογισμό του *ARL* στην περίπτωση του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος ελέγχου *s-EWMA*, με $s \in \{2, 3, 4, \dots\}$, οι γενικοί τύποι παραμένουν οι ίδιοι. Αλλάζουν όμως οι πιθανότητες $p(a, b|c, d)$, $p_1(a, b|q_0)$ και πλέον γίνονται

$$p(a, b|c, d) = I_{[b-0.5/s, b+0.5/s]}(\lambda a + (1 - \lambda)d)p_{a|c} \quad (\text{A.5})$$

$$p_1(a, b|q_0) = I_{[b-0.5/s, b+0.5/s]}(\lambda a + (1 - \lambda)q_0)p_a \quad (\text{A.6})$$

Σε αυτή την περίπτωση, για το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου *s-EWMA*, η περιοχή ελέγχου είναι:

$$\mathcal{C}_s = \left\{ LCL_s + \frac{1}{s}, LCL_s + \frac{2}{s}, \dots, n - \frac{1}{s}, n \right\},$$

ενώ αν η στατιστική συνάρτηση $Q_t^{(s)}$ (δείτε Κεφάλαιο 3, εξίσωση (3.3)) λάβει κάποια τιμή στο σύνολο:

$$\left\{ 0, \frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \dots, LCL_s - \frac{1}{s}, LCL_s \right\},$$

(περιοχή εκτός ελέγχου), τότε το διάγραμμα δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας. Υπενθυμίζεται ότι το $LCL_s = l/s$, όπου l είναι μη αρνητικός ακέραιος.

Άρα, ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης \mathbf{Q} της διδιάστατης Μαρκοβιανής αλυσίδας $(N_t, Q_t^{(s)})$ περιέχει τις πιθανότητες $p(a, b|c, d)$, όπως αυτές ορίζονται στην εξίσωση (A.5), με $a, c \in \{0, 1, \dots, n\}$ και $b, d \in \mathcal{C}_s$. Πλέον η διάσταση του πίνακα είναι $(n \cdot s - l)(n + 1) \times (n \cdot s - l)(n + 1)$.

Για παράδειγμα, αν $s = 2, n = 5, LCL_2 = 3/2$, τότε η διάσταση του \mathbf{Q} είναι 42×42 και η μορφή του είναι η εξής

(X_t, Q_t) \ (X_{t-1}, Q_{t-1})	(0,2)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(0,2.5)	...	(3,5)	(4,5)	(5,5)
(0,2)	$p(0,2 0,2)$	$p(1,2 0,2)$	$p(2,2 0,2)$	$p(3,2 0,2)$	$p(4,2 0,2)$	$p(5,2 0,2)$	$p(0,2.5 0,2)$...	$p(3,5 0,2)$	$p(4,5 0,2)$	$p(5,5 0,2)$
(1,2)	$p(0,2 1,2)$	$p(1,2 1,2)$	$p(2,2 1,2)$	$p(3,2 1,2)$	$p(4,2 1,2)$	$p(5,2 1,2)$	$p(0,2.5 1,2)$...	$p(3,5 1,2)$	$p(4,5 1,2)$	$p(5,5 1,2)$
(2,2)	$p(0,2 2,2)$	$p(1,2 2,2)$	$p(2,2 2,2)$	$p(3,2 2,2)$	$p(4,2 2,2)$	$p(5,2 2,2)$	$p(0,2.5 2,2)$...	$p(3,5 2,2)$	$p(4,5 2,2)$	$p(5,5 2,2)$
(3,2)	$p(0,2 3,2)$	$p(1,2 3,2)$	$p(2,2 3,2)$	$p(3,2 3,2)$	$p(4,2 3,2)$	$p(5,2 3,2)$	$p(0,2.5 3,2)$...	$p(3,5 3,2)$	$p(4,5 3,2)$	$p(5,5 3,2)$
(4,2)	$p(0,2 4,2)$	$p(1,2 4,2)$	$p(2,2 4,2)$	$p(3,2 4,2)$	$p(4,2 4,2)$	$p(5,2 4,2)$	$p(0,2.5 4,2)$...	$p(3,5 4,2)$	$p(4,5 4,2)$	$p(5,5 4,2)$
(5,2)	$p(0,2 5,2)$	$p(1,2 5,2)$	$p(2,2 5,2)$	$p(3,2 5,2)$	$p(4,2 5,2)$	$p(5,2 5,2)$	$p(0,2.5 5,2)$...	$p(3,5 5,2)$	$p(4,5 5,2)$	$p(5,5 5,2)$
(0,2.5)	$p(0,2 0,2.5)$	$p(1,2 0,2.5)$	$p(2,2 0,2.5)$	$p(3,2 0,2.5)$	$p(4,2 0,2.5)$	$p(5,2 0,2.5)$	$p(0,2.5 0,2.5)$...	$p(3,5 0,2.5)$	$p(4,5 0,2.5)$	$p(5,5 0,2.5)$
(1,2.5)	$p(0,2 1,2.5)$	$p(1,2 1,2.5)$	$p(2,2 1,2.5)$	$p(3,2 1,2.5)$	$p(4,2 1,2.5)$	$p(5,2 1,2.5)$	$p(0,2.5 1,2.5)$...	$p(3,5 1,2.5)$	$p(4,5 1,2.5)$	$p(5,5 1,2.5)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
(4,4.5)	$p(0,2 4,4.5)$	$p(1,2 4,4.5)$	$p(2,2 4,4.5)$	$p(3,2 4,4.5)$	$p(4,2 4,4.5)$	$p(5,2 4,4.5)$	$p(0,2.5 4,4.5)$...	$p(3,5 4,4.5)$	$p(4,5 4,4.5)$	$p(5,5 4,4.5)$
(5,4.5)	$p(0,2 5,4.5)$	$p(1,2 5,4.5)$	$p(2,2 5,4.5)$	$p(3,2 5,4.5)$	$p(4,2 5,4.5)$	$p(5,2 5,4.5)$	$p(0,2.5 5,4.5)$...	$p(3,5 5,4.5)$	$p(4,5 5,4.5)$	$p(5,5 5,4.5)$
(0,5)	$p(0,2 0,5)$	$p(1,2 0,5)$	$p(2,2 0,5)$	$p(3,2 0,5)$	$p(4,2 0,5)$	$p(5,2 0,5)$	$p(0,2.5 0,5)$...	$p(3,5 0,5)$	$p(4,5 0,5)$	$p(5,5 0,5)$
(1,5)	$p(0,2 1,5)$	$p(1,2 1,5)$	$p(2,2 1,5)$	$p(3,2 1,5)$	$p(4,2 1,5)$	$p(5,2 1,5)$	$p(0,2.5 1,5)$...	$p(3,5 1,5)$	$p(4,5 1,5)$	$p(5,5 1,5)$
(2,5)	$p(0,2 2,5)$	$p(1,2 2,5)$	$p(2,2 2,5)$	$p(3,2 2,5)$	$p(4,2 2,5)$	$p(5,2 2,5)$	$p(0,2.5 2,5)$...	$p(3,5 2,5)$	$p(4,5 2,5)$	$p(5,5 2,5)$
(3,5)	$p(0,2 3,5)$	$p(1,2 3,5)$	$p(2,2 3,5)$	$p(3,2 3,5)$	$p(4,2 3,5)$	$p(5,2 3,5)$	$p(0,2.5 3,5)$...	$p(3,5 3,5)$	$p(4,5 3,5)$	$p(5,5 3,5)$
(4,5)	$p(0,2 4,5)$	$p(1,2 4,5)$	$p(2,2 4,5)$	$p(3,2 4,5)$	$p(4,2 4,5)$	$p(5,2 4,5)$	$p(0,2.5 4,5)$...	$p(3,5 4,5)$	$p(4,5 4,5)$	$p(5,5 4,5)$
(5,5)	$p(0,2 5,5)$	$p(1,2 5,5)$	$p(2,2 5,5)$	$p(3,2 5,5)$	$p(4,2 5,5)$	$p(5,2 5,5)$	$p(0,2.5 5,5)$...	$p(3,5 5,5)$	$p(4,5 5,5)$	$p(5,5 5,5)$

Επίσης το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων ξ έχει ως στοιχεία του τις πιθανότητες $p_1(a, b|q_0)$, όπως αυτές ορίζονται στην εξίσωση (A.6).

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται συνοπτικά η μεθοδολογία των Μαρκοβιανών αλυσίδων για τον υπολογισμό του ARL σε ένα δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου s -EWMA για την παρακολούθηση διεργασιών τύπου BINARCH(1) (αλλά και BAR(1) ή BBAR(1)). Έστω $s \in \{1, 2, \dots\}$ και $LCL_s = l/s, UCL_s = u/s$ τα όρια ελέγχου του διαγράμματος, όπου l, u μη αρνητικοί ακέραιοι με $0 \leq l < u \leq n$. Η περιοχή ελέγχου είναι

$$\mathcal{C}_s = \left\{ LCL_s + \frac{1}{s}, LCL_s + \frac{2}{s}, \dots, UCL_s - \frac{2}{s}, UCL_s - \frac{1}{s} \right\},$$

ενώ αν η στατιστική συνάρτηση $Q_t^{(s)}$ (δείτε Κεφάλαιο 3, εξίσωση (3.3)) λάβει κάποια τιμή στο σύνολο

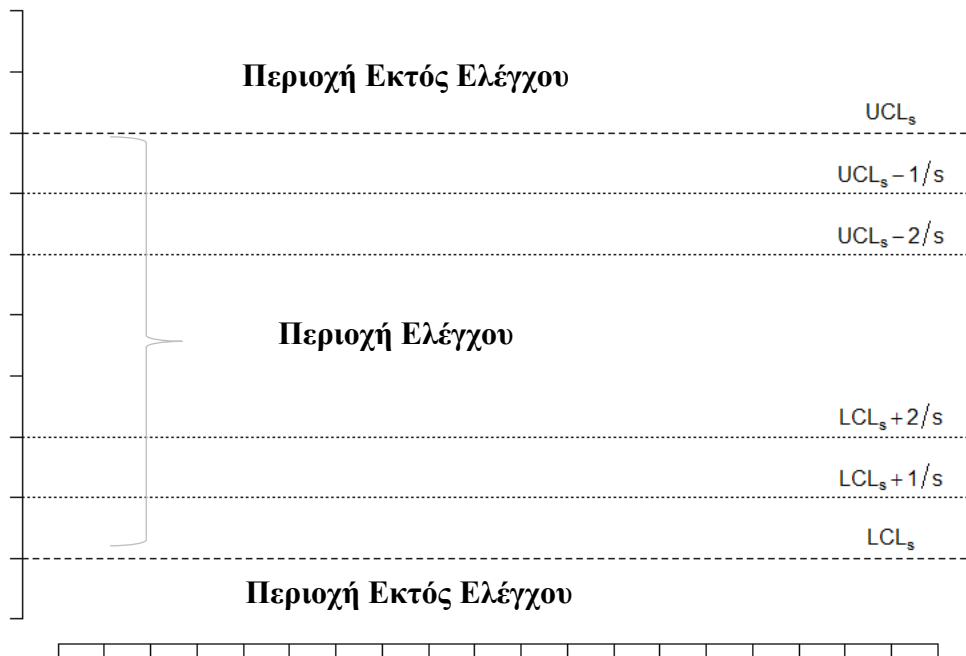
$$\left\{ 0, \frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \dots, LCL_s - \frac{1}{s}, LCL_s \right\} \cup \left\{ UCL_s, UCL_s + \frac{1}{s}, \dots, n \right\},$$

(περιοχή εκτός ελέγχου), τότε ο διάγραμμα δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας. Δείτε επίσης την Εικόνα A.2.

Άρα, ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης \mathbf{Q} της διδιάστατης Μαρκοβιανής αλυσίδας $(N_t, Q_t^{(s)})$ περιέχει τις πιθανότητες $p(a, b|c, d)$, όπως αυτές ορίστηκαν στην εξίσωση (A.5) με $a, c \in \{0, 1, \dots, n\}$ και $b, d \in \mathcal{C}_s$. Στην περίπτωση διεργασιών τύπου BINARCH(1) οι πιθανότητες $p_{a|c}$ δίνονται από την εξίσωση (2.14). Πλέον η διάσταση του πίνακα είναι $(u - l - 1)(n + 1) \times (u - l - 1)(n + 1)$. Για παράδειγμα, αν $s = 4$, $n = 10$, $LCL_4 = 2/4$, $UCL_4 = 7/4$, τότε η διάσταση του \mathbf{Q} είναι 44×44 και η γενική μορφή του είναι

(X_t, Q_t)	$(0, 0.75)$	$(1, 0.75)$	$(2, 0.75)$	$(3, 0.75)$	$(4, 0.75)$	$(5, 0.75)$	$(0, 1)$...	$(3, 1.5)$	$(4, 1.5)$	$(5, 1.5)$
$(0, 0.75)$	$p(0,0.75 0,0.75)$	$p(1,0.75 0,0.75)$	$p(2,0.75 0,0.75)$	$p(3,0.75 0,0.75)$	$p(4,0.75 0,0.75)$	$p(5,0.75 0,0.75)$	$p(0,1 0,0.75)$...	$p(3,1.5 0,0.75)$	$p(4,1.5 0,0.75)$	$p(5,1.5 0,0.75)$
$(1, 0.75)$	$p(0,0.75 1,0.75)$	$p(1,0.75 1,0.75)$	$p(2,0.75 1,0.75)$	$p(3,0.75 1,0.75)$	$p(4,0.75 1,0.75)$	$p(5,0.75 1,0.75)$	$p(0,1 1,0.75)$...	$p(3,1.5 1,0.75)$	$p(4,1.5 1,0.75)$	$p(5,1.5 1,0.75)$
$(2, 0.75)$	$p(0,0.75 2,0.75)$	$p(1,0.75 2,0.75)$	$p(2,0.75 2,0.75)$	$p(3,0.75 2,0.75)$	$p(4,0.75 2,0.75)$	$p(5,0.75 2,0.75)$	$p(0,1 2,0.75)$...	$p(3,1.5 2,0.75)$	$p(4,1.5 2,0.75)$	$p(5,1.5 2,0.75)$
$(3, 0.75)$	$p(0,0.75 3,0.75)$	$p(1,0.75 3,0.75)$	$p(2,0.75 3,0.75)$	$p(3,0.75 3,0.75)$	$p(4,0.75 3,0.75)$	$p(5,0.75 3,0.75)$	$p(0,1 3,0.75)$...	$p(3,1.5 3,0.75)$	$p(4,1.5 3,0.75)$	$p(5,1.5 3,0.75)$
$(4, 0.75)$	$p(0,0.75 4,0.75)$	$p(1,0.75 4,0.75)$	$p(2,0.75 4,0.75)$	$p(3,0.75 4,0.75)$	$p(4,0.75 4,0.75)$	$p(5,0.75 4,0.75)$	$p(0,1 4,0.75)$...	$p(3,1.5 4,0.75)$	$p(4,1.5 4,0.75)$	$p(5,1.5 4,0.75)$
$(5, 0.75)$	$p(0,0.75 5,0.75)$	$p(1,0.75 5,0.75)$	$p(2,0.75 5,0.75)$	$p(3,0.75 5,0.75)$	$p(4,0.75 5,0.75)$	$p(5,0.75 5,0.75)$	$p(0,1 5,0.75)$...	$p(3,1.5 5,0.75)$	$p(4,1.5 5,0.75)$	$p(5,1.5 5,0.75)$
$(0, 1)$	$p(0,0.75 0,1)$	$p(1,0.75 0,1)$	$p(2,0.75 0,1)$	$p(3,0.75 0,1)$	$p(4,0.75 0,1)$	$p(5,0.75 0,1)$	$p(0,1 0,1)$...	$p(3,1.5 0,1)$	$p(4,1.5 0,1)$	$p(5,1.5 0,1)$
$(1, 1)$	$p(0,0.75 1,1)$	$p(1,0.75 1,1)$	$p(2,0.75 1,1)$	$p(3,0.75 1,1)$	$p(4,0.75 1,1)$	$p(5,0.75 1,1)$	$p(0,1 1,1)$...	$p(3,1.5 1,1)$	$p(4,1.5 1,1)$	$p(5,1.5 1,1)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	\vdots
$(4, 1.25)$	$p(0,0.75 4,1.25)$	$p(1,0.75 4,1.25)$	$p(2,0.75 4,1.25)$	$p(3,0.75 4,1.25)$	$p(4,0.75 4,1.25)$	$p(5,0.75 4,1.25)$	$p(0,1 4,1.25)$...	$p(3,1.5 4,1.25)$	$p(4,1.5 4,1.25)$	$p(5,1.5 4,1.25)$
$(5, 1.25)$	$p(0,0.75 5,1.25)$	$p(1,0.75 5,1.25)$	$p(2,0.75 5,1.25)$	$p(3,0.75 5,1.25)$	$p(4,0.75 5,1.25)$	$p(5,0.75 5,1.25)$	$p(0,1 5,1.25)$...	$p(3,1.5 5,1.25)$	$p(4,1.5 5,1.25)$	$p(5,1.5 5,1.25)$
$(0, 1.5)$	$p(0,0.75 0,1.5)$	$p(1,0.75 0,1.5)$	$p(2,0.75 0,1.5)$	$p(3,0.75 0,1.5)$	$p(4,0.75 0,1.5)$	$p(5,0.75 0,1.5)$	$p(0,1 0,1.5)$...	$p(3,1.5 0,1.5)$	$p(4,1.5 0,1.5)$	$p(5,1.5 0,1.5)$
$(1, 1.5)$	$p(0,0.75 1,1.5)$	$p(1,0.75 1,1.5)$	$p(2,0.75 1,1.5)$	$p(3,0.75 1,1.5)$	$p(4,0.75 1,1.5)$	$p(5,0.75 1,1.5)$	$p(0,1 1,1.5)$...	$p(3,1.5 1,1.5)$	$p(4,1.5 1,1.5)$	$p(5,1.5 1,1.5)$
$(2, 1.5)$	$p(0,0.75 2,1.5)$	$p(1,0.75 2,1.5)$	$p(2,0.75 2,1.5)$	$p(3,0.75 2,1.5)$	$p(4,0.75 2,1.5)$	$p(5,0.75 2,1.5)$	$p(0,1 2,1.5)$...	$p(3,1.5 2,1.5)$	$p(4,1.5 2,1.5)$	$p(5,1.5 2,1.5)$
$(3, 1.5)$	$p(0,0.75 3,1.5)$	$p(1,0.75 3,1.5)$	$p(2,0.75 3,1.5)$	$p(3,0.75 3,1.5)$	$p(4,0.75 3,1.5)$	$p(5,0.75 3,1.5)$	$p(0,1 3,1.5)$...	$p(3,1.5 3,1.5)$	$p(4,1.5 3,1.5)$	$p(5,1.5 3,1.5)$
$(4, 1.5)$	$p(0,0.75 4,1.5)$	$p(1,0.75 4,1.5)$	$p(2,0.75 4,1.5)$	$p(3,0.75 4,1.5)$	$p(4,0.75 4,1.5)$	$p(5,0.75 4,1.5)$	$p(0,1 4,1.5)$...	$p(3,1.5 4,1.5)$	$p(4,1.5 4,1.5)$	$p(5,1.5 4,1.5)$
$(5, 1.5)$	$p(0,0.75 5,1.5)$	$p(1,0.75 5,1.5)$	$p(2,0.75 5,1.5)$	$p(3,0.75 5,1.5)$	$p(4,0.75 5,1.5)$	$p(5,0.75 5,1.5)$	$p(0,1 5,1.5)$...	$p(3,1.5 5,1.5)$	$p(4,1.5 5,1.5)$	$p(5,1.5 5,1.5)$

Επίσης το διάνυσμα των αρχικών πιθανοτήτων ξ έχει ως στοιχεία του τις πιθανότητες $p_1(a, b|q_0)$, όπως αυτές ορίστηκαν στην εξίσωση (A.6). Για τον υπολογισμό του $zsARL$ αλλά και του $ssARL$ χρησιμοποιούνται οι τύποι στις εξισώσεις (A.3) και (A.4)



Εικόνα Α.2: Περιοχή ελέγχου και περιοχή εκτός ελέγχου σε ένα δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου s -EWMA

Κλείνοντας θα πρέπει να αναφερθεί πως για $s = 1$ και $\lambda = 1$ προκύπτει ότι $Q_t = X_t$, δηλαδή ένα διάγραμμα ελέγχου Shewhart (είτε μονόπλευρο, είτε δίπλευρο) Ο υπολογισμός της απόδοσής του (δηλ. των $zsARL$ και $ssARL$) όταν η διεργασία είναι μια εκ των $BAR(1)$, $BBAR(1)$ ή $BINARCH(1)$ γίνεται με χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων. Περαιτέρω λεπτομέρειες αφήνονται στους αναγνώστες.

Παράρτημα Β: Προτεινόμενα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα για διεργασίες BAR(1)

Πίνακας Β1: Προτεινόμενα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα, μεταβολή μόνο στην παράμετρο $\mu_0, \rho_0 = 0.25, n = 20$

Παράμετροι Διεργασίας	λ	LCL	δ	$ssARL$	Διάγραμμα
$\mu_0 = 4$ $\rho_0 = 0.25$ $n = 20$	0.2	2.453	0.5	7.29	EWMA
	0.3	2.64	0.6	10.07	DEWMA
	0.2	3.008	0.7	15.14	DEWMA
	0.05	3.38	0.8	25	EWMA
	0.05	3.732	0.9	52.2	DEWMA
$\mu_0 = 8$ $\rho_0 = 0.25$ $n = 20$	0.3	5.458	0.5	3.94	EWMA
	0.3	5.458	0.6	5.43	EWMA
	0.2	6.013	0.7	8.18	EWMA
	0.1	6.728	0.8	14.02	EWMA
	0.05	7.227	0.9	32.51	EWMA
$\mu_0 = 12$ $\rho_0 = 0.25$ $n = 20$	0.3	9.346	0.5	2.65	EWMA
	0.3	9.346	0.6	3.41	EWMA
	0.3	9.346	0.7	4.91	EWMA
	0.2	9.944	0.8	8.56	EWMA
	0.1	10.698	0.9	20.72	EWMA

Πίνακας Β2: Προτεινόμενα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα, μεταβολή μόνο στην παράμετρο $\mu_0, \rho_0 = 0.50, n = 20$

Παράμετροι Διεργασίας	λ	LCL	δ	$ssARL$	Διάγραμμα
$\mu_0 = 4$ $\rho_0 = 0.50$ $n = 20$	0.2	2.178	0.5	10.79	EWMA
	0.1	2.771	0.6	14.76	EWMA
	0.1	2.771	0.7	21.48	EWMA
	0.05	3.228	0.8	34.39	EWMA
	0.05	3.643	0.9	67.4	DEWMA
$\mu_0 = 8$ $\rho_0 = 0.50$ $n = 20$	0.3	5.07	0.5	5.87	EWMA
	0.2	5.632	0.6	8.07	EWMA
	0.1	6.438	0.7	12.2	EWMA
	0.05	7.035	0.8	20.21	EWMA
	0.05	7.035	0.9	44.17	EWMA
$\mu_0 = 12$ $\rho_0 = 0.50$ $n = 20$	0.3	8.931	0.5	3.85	EWMA
	0.3	8.931	0.6	5.02	EWMA
	0.3	8.931	0.7	7.42	EWMA
	0.1	10.396	0.8	12.74	EWMA
	0.05	11.02	0.9	28.68	EWMA

Πίνακας Β3: Προτεινόμενα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα,
μεταβολή μόνο στην παράμετρο $\mu_0, \rho_0 = 0.75, n = 20$

Παράμετροι Διεργασίας	λ	LCL	δ	$ssARL$	Διάγραμμα
$\mu_0 = 4$ $\rho_0 = 0.75$ $n = 20$	0.1	2.434	0.5	18.59	EWMA
	0.1	2.434	0.6	25.01	EWMA
	0.05	2.981	0.7	34.78	EWMA
	0.05	2.981	0.8	52.63	EWMA
	0.05	3.48	0.9	88.89	DEWMA
$\mu_0 = 8$ $\rho_0 = 0.75$ $n = 20$	0.3	4.618	0.5	10.53	EWMA
	0.2	5.157	0.6	14.24	EWMA
	0.1	6.01	0.7	20.63	EWMA
	0.05	6.718	0.8	33.15	EWMA
	0.05	7.37	0.9	64.58	DEWMA
$\mu_0 = 12$ $\rho_0 = 0.75$ $n = 20$	0.3	8.468	0.5	6.77	EWMA
	0.3	8.468	0.6	8.85	EWMA
	0.2	9.06	0.7	13.16	EWMA
	0.1	9.957	0.8	21.68	EWMA
	0.05	10.701	0.9	45.67	EWMA

Πίνακας Β4: Προτεινόμενα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα,
μεταβολή μόνο στην παράμετρο $\mu_0, \rho_0 = 0.25, n = 50$

Παράμετροι Διεργασίας	λ	LCL	δ	$ssARL$	Διάγραμμα
$\mu_0 = 4$ $\rho_0 = 0.25$ $n = 50$	0.2	2.375	0.5	7.9	EWMA
	0.3	2.563	0.6	11	DEWMA
	0.2	2.947	0.7	16.36	DEWMA
	0.2	2.947	0.8	26.87	DEWMA
	0.05	3.712	0.9	55.5	DEWMA
$\mu_0 = 8$ $\rho_0 = 0.25$ $n = 50$	0.3	5.119	0.5	4.65	EWMA
	0.3	5.119	0.6	6.55	EWMA
	0.2	5.719	0.7	9.96	EWMA
	0.1	6.529	0.8	16.82	EWMA
	0.1	7.204	0.9	37.78	DEWMA
$\mu_0 = 12$ $\rho_0 = 0.25$ $n = 50$	0.3	8.554	0.5	3.46	EWMA
	0.3	8.554	0.6	4.66	EWMA
	0.2	9.303	0.7	7.05	EWMA
	0.1	10.267	0.8	12.41	EWMA
	0.05	10.944	0.9	29.13	EWMA

Πίνακας Β5: Προτεινόμενα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα,
μεταβολή μόνο στην παράμετρο $\mu_0, \rho_0 = 0.50, n = 50$

Παράμετροι Διεργασίας	λ	LCL	δ	$ssARL$	Διάγραμμα
$\mu_0 = 4$ $\rho_0 = 0.50$ $n = 50$	0.2	2.093	0.5	11.47	EWMA
	0.1	2.703	0.6	15.88	EWMA
	0.1	2.703	0.7	23.1	EWMA
	0.05	3.181	0.8	36.42	EWMA
	0.05	3.62	0.9	70.45	DEWMA
$\mu_0 = 8$ $\rho_0 = 0.50$ $n = 50$	0.3	4.668	0.5	6.98	EWMA
	0.2	5.307	0.6	9.66	EWMA
	0.1	6.196	0.7	14.57	EWMA
	0.05	6.878	0.8	24.09	EWMA
	0.05	6.878	0.9	50.19	EWMA
$\mu_0 = 12$ $\rho_0 = 0.50$ $n = 50$	0.3	8.031	0.5	5.12	EWMA
	0.2	8.8	0.6	6.99	EWMA
	0.2	8.8	0.7	10.54	EWMA
	0.1	9.88	0.8	17.98	EWMA
	0.1	10.781	0.9	39.64	DEWMA

Πίνακας Β6: Προτεινόμενα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα,
μεταβολή μόνο στην παράμετρο $\mu_0, \rho_0 = 0.75, n = 50$

Παράμετροι Διεργασίας	λ	LCL	δ	$ssARL$	Διάγραμμα
$\mu_0 = 4$ $\rho_0 = 0.75$ $n = 50$	0.3	8.031	0.5	19.88	EWMA
	0.2	8.8	0.6	26.51	EWMA
	0.2	8.8	0.7	36.44	EWMA
	0.1	9.88	0.8	55.16	EWMA
	0.05	3.445	0.9	93.75	DEWMA
$\mu_0 = 8$ $\rho_0 = 0.75$ $n = 50$	0.2	4.756	0.5	12.5	EWMA
	0.1	5.704	0.6	16.94	EWMA
	0.05	6.509	0.7	24.61	EWMA
	0.05	6.509	0.8	38.38	EWMA
	0.05	7.25	0.9	71.92	DEWMA
$\mu_0 = 12$ $\rho_0 = 0.75$ $n = 50$	0.3	7.427	0.5	9.24	EWMA
	0.2	8.147	0.6	12.62	EWMA
	0.1	9.284	0.7	17.94	EWMA
	0.05	10.248	0.8	29.47	EWMA
	0.05	11.126	0.9	59.53	DEWMA

Πίνακας Β7: Προτεινόμενα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα,
ταυτόχρονη μεταβολή στις παραμέτρους $\mu_0, \rho_0, n = 20$

Παράμετροι Διεργασίας	λ	LCL	δ, τ	$ssARL$	Διάγραμμα
$\mu_0 = 4$	0.05	3.38	(0.8,- 0.10)	25.06	EWMA
$\rho_0 = 0.25$ $n = 20$	0.3	2.64	(0.8,0.35)	23.71	DEWMA
$\mu_0 = 8$	0.1	6.728	(0.8,- 0.10)	13.82	EWMA
$\rho_0 = 0.25$ $n = 20$	0.3	6.266	(0.8,0.35)	15.75	DEWMA
$\mu_0 = 12$	0.2	9.944	(0.8,- 0.10)	8.42	EWMA
$\rho_0 = 0.25$ $n = 20$	0.3	10.221	(0.8,0.35)	10.71	DEWMA
$\mu_0 = 4$	0.05	3.228	(0.8,- 0.10)	35.06	EWMA
$\rho_0 = 0.50$ $n = 20$	0.2	2.743	(0.8,0.35)	34.49	DEWMA
$\mu_0 = 8$	0.1	6.438	(0.8,- 0.10)	19.88	EWMA
$\rho_0 = 0.50$ $n = 20$	0.1	6.438	(0.8,0.35)	21.52	EWMA
$\mu_0 = 12$	0.1	10.396	(0.8,- 0.10)	12.07	EWMA
$\rho_0 = 0.50$ $n = 20$	0.1	10.396	(0.8,0.35)	14.19	EWMA
$\mu_0 = 40$	0.05	3.48	(0.8,- 0.25)	51.49	DEWMA
$\rho_0 = 0.75$ $n = 20$	0.1	2.998	(0.8,0.20)	67.63	DEWMA
$\mu_0 = 8$	0.05	6.718	(0.8,- 0.25)	29.94	EWMA
$\rho_0 = 0.75$ $n = 20$	0.1	6.739	(0.8,0.20)	54.1	DEWMA
$\mu_0 = 12$	0.1	9.957	(0.8,- 0.25)	17.94	EWMA
$\rho_0 = 0.75$ $n = 20$	0.05	10.701	(0.8,0.20)	41.75	EWMA

Πίνακας Β8: Προτεινόμενα κάτω μονόπλευρα διαγράμματα,
ταυτόχρονη μεταβολή στις παραμέτρους $\mu_0, \rho_0, n = 50$

Παράμετροι Διεργασίας	λ	LCL	δ, τ	$ssARL$	Διάγραμμα
$\mu_0 = 4$	0.1	3.413	(0.8,-0.10)	26.81	DEWMA
$\rho_0 = 0.25$	0.3	2.563	(0.8,0.35)	24.71	DEWMA
$n = 50$					
$\mu_0 = 8$	0.1	6.529	(0.8,-0.10)	16.97	EWMA
$\rho_0 = 0.25$	0.3	6.005	(0.8,0.35)	17.84	DEWMA
$n = 50$					
$\mu_0 = 12$	0.1	10.267	(0.8,-0.10)	12.27	EWMA
$\rho_0 = 0.25$	0.3	9.639	(0.8,0.35)	14.09	DEWMA
$n = 50$					
$\mu_0 = 4$	0.05	3.181	(0.8,-0.10)	37.48	EWMA
$\rho_0 = 0.50$	0.1	2.703	(0.8,0.35)	35.75	EWMA
$n = 50$					
$\mu_0 = 8$	0.05	6.878	(0.8,-0.10)	23.8	EWMA
$\rho_0 = 0.50$	0.1	6.196	(0.8,0.35)	24.99	EWMA
$n = 50$					
$\mu_0 = 12$	0.1	9.88	(0.8,-0.10)	17.45	EWMA
$\rho_0 = 0.50$	0.1	9.88	(0.8,0.35)	19.27	EWMA
$n = 50$					
$\mu_0 = 40$	0.05	3.445	(0.8,-0.25)	54.16	DEWMA
$\rho_0 = 0.75$	0.1	2.922	(0.8,0.20)	68.91	DEWMA
$n = 50$					
$\mu_0 = 8$	0.05	6.509	(0.8,-0.25)	37.11	EWMA
$\rho_0 = 0.75$	0.1	6.525	(0.8,0.20)	58.86	DEWMA
$n = 50$					
$\mu_0 = 12$	0.05	10.248	(0.8,-0.25)	26.66	EWMA
$\rho_0 = 0.75$	0.1	10.273	(0.8,0.20)	50.97	DEWMA
$n = 50$					

Παράρτημα Γ: Μονόπλευρα Διαγράμματα s-EWMA για διεργασίες BAR(1)

Γ1: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BAR(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων

```
# Markov Chain method for ARL calculation of the s-EWMA chart
# Case of BAR(1) model
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)
n<-15 # sample size
mu0<-5 # IC process mean
u<-28; # u value
pp0<-mu0/n # probability p0
rho0<-0.25 # parameter rho0
beta0<-pp0*(1-rho0) # parameter beta
alpha0<-beta0+rho0 # parameter alpha
lam<-0.16 # lambda value
s<-4 #s value
UCL<-u/s # control limit UCLs
q0<-0 # q0 value
# construction of the transition probability matrix Q
nmax<-ceiling((1/lam)*(UCL-(1/(2*s))))-1)
ulist<-seq(0,UCL-1/s,by=1/s)
nlist<-0:nmax
x1<-rep(ulist,length(nlist))
x2<-rep(nlist,each=length(ulist))
A0<-cbind(x1,x2)
# Construction of the Transition Probabilities Matrix P
# Step 1: Define the transition probabilities
Q0elk<-function(i,j,k){
  choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*((alpha0)^k)*((1-alpha0)^(i-
k))*((beta0)^(j-k))*((1-beta0)^(n-i+k-j))
}
##
Q0el<-function(i,j){
  ks<-(max(0,i+j-n)):min(i,j)
  sum(Q0elk(i,j,ks))
}
pabcd<-function(a,b,c,d){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*d)*Q0el(c,a)
}
plabcd<-function(a,b){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*q0)*dbinom(a,n,pp0)
}
dim1<-(dim(A0)[1])
# determine the initial probabilities vector
```

```

vec1<-c()
for(j in 1:dim1){
  vec1[j]<-plabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]])
}
# determine the transition probability matrix Q - IC case
Q0<-matrix(0,ncol=dim1,nrow=dim1)
for(j in 1:dim1){
  for(i in 1:dim1){
    Q0[i,j]<-
pabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]],A0[i,][[2]],A0[i,][[1]])
  }
}
# calculation of the IC zsARL
ARL0<-1+vec1%%solve(diag(dim1)-Q0)%%rep(1,dim1)
# print the results
cat("s:",s," n:",n," mu0:",mu0," u:",u," ARL0:",ARL0,"\n")

```

Γ2: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BAR(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων

```

# Markov Chain method for ssARL calculation of the s-EWMA chart
# Case of BAR(1) model
##### ssARL calculation ##### (OOC case)
n<-15 # sample size
mu0<-5 #IC process mean
delta1<-1.2 #shift in mu
mu1<-delta1*mu0 #OOC process mean
pp0<-mu0/n #IC probability p0
pp1<-mu1/n #OOC probability p1
rho0<-0.25 #IC parameter rho0
delta2<-1 # shift in rho
rho1<-delta2*rho0 #OOC parameter rho1
beta0<-pp0*(1-rho0) #IC parameter beta
beta1<-pp1*(1-rho1) #OOC parameter beta
alpha0<-beta0+rho0 #IC parameter alpha0
alpha1<-beta1+rho1 #OOC parameter alpha1
u<-7 #u value
lam<-0.16 # smoothing parameter
s<-1 #s value
UCL<-u/s #control limit UCLs
q0<-0 #q0 value
#construction of the transition probability matrix P
nmax<-ceiling((1/lam)*(UCL-(1/(2*s)))-1)
ulist<-seq(0,UCL-1/s,by=1/s)
nlist<-0:nmax
x1<-rep(ulist,length(nlist))
x2<-rep(nlist,each=length(ulist))

```

```

A0<-cbind(x1,x2)
# Step 1: Define the transition probabilities
Q0elk<-function(i,j,k){
  choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*((alpha0)^k)*((1-alpha0)^(i-
k))*((beta0)^(j-k))*((1-beta0)^(n-i+k-j))}
##
Q0el<-function(i,j){
  ks<-(max(0,i+j-n):(min(i,j)))
  sum(Q0elk(i,j,ks))
}
pabcd<-function(a,b,c,d){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*d)*Q0el(c,a)
}
plabcd<-function(a,b){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*q0)*dbinom(a,n,pp0)
}
dim1<-(dim(A0)[1])
# determine the initial probabilities vector
vec1<-c()
for(j in 1:dim1){
  vec1[j]<-plabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]])
}
# determine the transition probability matrix Q - IC case
Q0<-matrix(0,ncol=dim1,nrow=dim1)
for(j in 1:dim1){
  for(i in 1:dim1){
    Q0[i,j]<-
pabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]],A0[i,][[2]],A0[i,][[1]])
  }
}
# calculation of the IC zsARL
ARL0<-1+vec1%%solve(diag(dim1)-Q0)%%rep(1,dim1)
# evaluation of the steady-state vector
wvec<-Re(eigen(t(Q0), symmetric=FALSE)$vectors[,1])
wvec2<-wvec/(sum(wvec))
##### steady-state ARL calculation##### (OoC case)
# Construction of the Transition Probabilities Matrix P1
# Step 1: Define the transition probabilities
Q1elk<-function(i,j,k){
  choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*((alpha1)^k)*((1-alpha1)^(i-
k))*((beta1)^(j-k))*((1-beta1)^(n-i+k-j))}
##
Q1el<-function(i,j){
  ks<-(max(0,i+j-n):(min(i,j)))
  sum(Q1elk(i,j,ks))
}

```

```

}
pabcdout<-function(a,b,c,d){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*d)*Q1el(c,a)
}
plabcdout<-function(a,b){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*q0)*dbinom(a,n,pp1)
}
####
veclout<-c()
for(j in 1:dim1){
  veclout[j]<-plabcdout(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]])
}
# determine the transition probability matrix Q1 - OOC case
Q1<-matrix(0,ncol=dim1,nrow=dim1)
for(j in 1:dim1){
  for(i in 1:dim1){
    Q1[i,j]<-
pabcdout(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]],A0[i,][[2]],A0[i,][[1]])
  }
}
#calculation of the ssARL
ARL1<-1+veclout%%solve(diag(dim1)-Q1)%%rep(1,dim1)
muvec1<-solve(diag(dim1)-Q1)%%rep(1,dim1)
ssARL<-wvec2%%muvec1
# print the results
cat("s:",s," n:",n," mu0:",mu0," mu1:",mu1," u:",u," ARL0:",ARL0
    ," ARL1:",ARL1," ssARL:",ssARL,"\n")

```

Γ3: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BAR(1) με προσομοίωση

```

# Simulation study s-EWMA for BAR(1)
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)
n<-15 # sample size
mu0<-10 #IC process mean
pp0<-mu0/n #IC probability p0
rho0<-0.5 #IC parameter rho0
beta0<-pp0*(1-rho0) #IC parameter beta
alpha0<-beta0+rho0 #IC parameter alpha0
lambda<-0.8 #smoothing parameter
s<-2 #s value
u<-27/s # control limit UCLs
q0<-0 #qo value
listRL<-c()
sims<-100000

```

```

for(l in 1:sims){

  N0<-rbinom(1,n,pp0)
  Q0<-q0
  j<-1
  while(TRUE){
    N1<-rbinom(1,N0,alpha0)+rbinom(1,n-N0,beta0)
    Q1<-(1/s)*round((lambda*N1+(1-lambda)*Q0)/(1/s))
    if(Q1>u){listRL[l]<-j;break}
    else{j<-(j+1);N0<-N1;Q0<-Q1}
  }
# calculation of the IC zsARL
# print the results
mean(listRL)
sd(listRL)/sqrt(sims)

```

Γ4: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BAR(1) με προσομοίωση

```

# Simulation study s-EWMA for BAR(1)
##### ssARL calculation ##### (OOC case)
n<-30 # sample size
mu0X<-10 #IC process mean
pp0<-mu0X/n #IC probability p0
rho0<-0.75 #IC parameter rho0
beta0<-pp0*(1-rho0) #IC parameter beta
alpha0<-beta0+rho0 #IC parameter alpha0
s<-1 #s value
u<-15 #u value
lambda<-0.87 #smoothing parameter
UCL<-u/s ##control limit UCLs
#### OOC settings
ds<-1.4 #shift in mu0X
mulX<-ds*mu0X #OOC process mean
pi1<-mulX/n #OOC probability p1
rho1<-rho0 #OOC parameter rho1
beta1<-pi1*(1-rho1) #OOC parameter beta
alpha1<-beta1+rho1 #OOC parameter alpha1
q0<-0 #q0 value
##### steady-state ARL calculation##### (OoC case)
listRL<-c()
#simulation
sims<-100000
for(l in 1:sims){
  N0<-rbinom(1,n,pp0)
  Q0<-q0
  N1<-rbinom(1,N0,alpha0)+rbinom(1,n-N0,beta0)

```

```

Q1<-(1/s)*round((lambda*N1+(1-lambda)*Q0)/(1/s))
j<-1
while(Q1<=UCL&j<=200){
j<-(j+1);N0<-N1;Q0<-Q1
N1<-rbinom(1,N0,alpha0)+rbinom(1,n-N0,beta0)
Q1<-(1/s)*round((lambda*N1+(1-lambda)*Q0)/(1/s))
}
if(j>200){
js<-j
N0s<-N1;
Q0s<-Q1;
N1s<-rbinom(1,N0s,alpha1)+rbinom(1,n-N0s,beta1)
Q1s<-(1/s)*round((lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s)/(1/s))
while(Q1s<=UCL){
js<-(js+1);N0s<-N1s;Q0s<-Q1s
N1s<-rbinom(1,N0s,alpha1)+rbinom(1,n-N0s,beta1)
Q1s<-(1/s)*round((lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s)/(1/s))
}
listRL[1]<-js
}
else{next}
}
LR1<-length(na.exclude(listRL))
#calculation of the ssARL
ARL1<-mean(na.exclude(listRL)-200)
SDRL1<-sd(na.exclude(listRL)-200)
sel<-sd(na.exclude(listRL)-200)/sqrt(length(na.exclude(listRL)))
# print the results
cat(" s:",s," n:",n," mu0X:",mu0X," rho0:",rho0," shift:",ds,"
lambda:",lambda," UCL:",u/s," ARL:",ARL1," SDRL:",SDRL1,"
s.e:",sel," Length:",LR1,"\n")

```

Γ5: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BAR(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων

```

# Markov Chain method for ARL calculation of the s-EWMA chart
# Case of BAR(1) model
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)
n<-15 # sample size
mu0<-5 # IC process mean
pp0<-mu0/n # probability p0
rho0<-0.75 # parameter rho0
beta0<-pp0*(1-rho0) # parameter beta
alpha0<-beta0+rho0 # parameter alpha
lambda<-0.22 # lambda value
u<-6 # u value
q0<-0 # q0 value

```



```

s<-4 #s value
LCL<-u/s # control limit UCLs
# construction of the transition probability matrix Q
nmin<-0
ulist<-seq(LCL+1/s,n,by=1/s)
ulist
nlist<-nmin:n
nlist
x1<-rep(ulist,length(nlist))
x2<-rep(nlist,each=length(ulist))
A0<-cbind(x1,x2)
# Step 1: Define the transition probabilities
Q0elk<-function(l,k,m){
  choose(l,m)*choose(n-l,k-m)*
  ((alpha0)^m)*((1-alpha0)^(l-m))*((beta0)^(k-m))*((1-
beta0)^(n-l+m-k))
}
#
Q0el<-function(l,k){
  ms<-(max(0,k+l-n):(min(k,l)))
  sum(Q0elk(l,k,ms))
}
pabcd<-function(a,b,c,d){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lambda*a+(1-lambda)*d)*Q0el(c,a)
}
plabcd<-function(a,b){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  (IA(lambda*a+(1-lambda)*q0))*dbinom(a,n,pp0)
}
dim1<-(dim(A0)[1])
# determine the initial probabilities vector
vec1<-c()
for(j in 1:dim1){
  vec1[j]<-plabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]])
}
# determine the transition probability matrix Q - IC case
Q0<-matrix(0,ncol=dim1,nrow=dim1)
for(j in 1:dim1){
  for(i in 1:dim1){
    Q0[i,j]<-
pabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]],A0[i,][[2]],A0[i,][[1]])
  }
}
# calculation of the IC zsARL
ARL0<-1+vec1%%solve(diag(dim1)-Q0)%%rep(1,dim1)
# print the IC zsARL

```

ARL0

Γ6: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BAR(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων

```
# Markov Chain method for ssARL calculation of the s-EWMA chart
# Case of BAR(1) model
##### ssARL calculation ##### (OOC case)
n<-15 # sample size
mu0<-5 #IC process mean
delta1<-0.6 #shift in mu
mu1<-delta1*mu0 #OOC process mean
pp0<-mu0/n #IC probability p0
pp1<-mu1/n #OOC probability p1
rho0<-0.75 #IC parameter rho0
delta2<-1 # shift in rho
rho1<-delta2*rho0 #OOC parameter rho1
beta0<-pp0*(1-rho0) #IC parameter beta
beta1<-pp1*(1-rho1) #OOC parameter beta
alpha0<-beta0+rho0 #IC parameter alpha0
alpha1<-beta1+rho1 #OOC parameter alpha1
u<-6 # u value, LCL=u/s
lam<-0.22 # smoothing parameter
s<-4 #s value
LCL<-u/s # control limit
q0<-0 #qo value
#construction of the transition probability matrix P
nmin<-0
ulist<-seq(LCL+1/s,n,by=1/s)
ulist
nlist<-nmin:n
nlist
x1<-rep(ulist,length(nlist))
x2<-rep(nlist,each=length(ulist))
A0<-cbind(x1,x2)
# Step 1: Define the transition probabilities
Q0elk<-function(i,j,k){
  choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*((alpha0)^k)*((1-alpha0)^(i-
k))*((beta0)^(j-k))*((1-beta0)^(n-i+k-j))
}
##
Q0el<-function(i,j){
  ks<-(max(0,i+j-n):(min(i,j)))
  sum(Q0elk(i,j,ks))
}
# construction of the transition probability matrix Q
pabcd<-function(a,b,c,d){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
```

```

    IA(lam*a+(1-lam)*d)*Q0el(c,a)
  }
plabcd<-function(a,b){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*q0)*dbinom(a,n,pp0)
}
dim1<-(dim(A0)[1])
# determine the initial probabilities vector
vec1<-c()
for(j in 1:dim1){
  vec1[j]<-plabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]])
}
#vec1
# determine the transition probability matrix Q - IC case
Q0<-matrix(0,ncol=dim1,nrow=dim1)
for(j in 1:dim1){
  for(i in 1:dim1){
    Q0[i,j]<-
pabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]],A0[i,][[2]],A0[i,][[1]])
  }}
# calculation of the IC zsARL
ARL0<-1+vec1%%solve(diag(dim1)-Q0)%%rep(1,dim1)
# evaluation of the steady-state vector
wvec<-Re(eigen(t(Q0), symmetric=FALSE)$vectors[,1])
wvec2<-wvec/(sum(wvec))

##### steady-state ARL calculation##### (OoC case)
# Construction of the Transition Probabilities Matrix P1
# Step 1: Define the transition probabilities
Q1elk<-function(i,j,k){
  choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*((alpha1)^k)*((1-alpha1)^(i-
k))*((beta1)^(j-k))*((1-beta1)^(n-i+k-j))
}
##
Q1el<-function(i,j){
  ks<-(max(0,i+j-n):(min(i,j)))
  sum(Q1elk(i,j,ks))
}
# Calculate the steady-state probability vector
pabcdout<-function(a,b,c,d){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*d)*Q1el(c,a)
}
plabcdout<-function(a,b){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*q0)*dbinom(a,n,pp1)
}

```

```

####
veclout<-c()
for(j in 1:dim1){
  veclout[j]<-plabcdout(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]])
}
# determine the transition probability matrix Q1 - OOC case
Q1<-matrix(0,ncol=dim1,nrow=dim1)
for(j in 1:dim1){
  for(i in 1:dim1){
    Q1[i,j]<-
pabcdout(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]],A0[i,][[2]],A0[i,][[1]])
  }
}
#calculation of the ssARL
ARL1<-1+veclout%%solve(diag(dim1)-Q1)%%rep(1,dim1)
muvecl<-solve(diag(dim1)-Q1)%%rep(1,dim1)
ssARL<-wvec2%%muvecl
# print the results
cat("s:",s," n:",n," mu0:",mu0," mu1:",mu1," u:",u," ARL0:",ARL0
    ," ARL1:",ARL1," ssARL:",ssARL,"\n")

```

Γ7: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BAR(1) με προσομοίωση

```

# Simulation study s-EWMA for BAR(1)
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)
n<-15# sample size
mu0<-5# IC process mean
pp0<-mu0/n # probability p0
rho0<-0.5 # parameter rho0
beta0<-pp0*(1-rho0) # parameter beta
alpha0<-beta0+rho0 # parameter alpha
s<-1 #s value
u<-2 #u value
lambda<-0.55 # lambda value
LCL<-u/s # control limit LCLs
q0<-0 #q0 value
# IC zsARL calculation
#Simulation
listRL<-c()
sims<-3000
for(l in 1:sims){

  N0<-rbinom(1,n,pp0)
  Q0<-q0
  j<-1
  while(TRUE){

```

```

    N1<-rbinom(1,N0,alpha0)+rbinom(1,n-N0,beta0)
    Q1<-(1/s)*round((lambda*N1+(1-lambda)*Q0)/(1/s))
    if(Q1<LCL){listRL[l]<-j;break}
    else{j<-(j+1);N0<-N1;Q0<-Q1}
  }
}
# calculation of the IC zsARL
ARL0<-mean(listRL)
se<-sd(listRL)/sqrt(sims)
# print the results
cat(n,mu0,rho0,s,lambda,LCL,ARL0,se,"\n")

```

Γ8: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BAR(1) με προσομοίωση

```

# Simulation study s-EWMA for BAR(1)
##### ssARL calculation ##### (OOC case)
n<-15 # sample size
mu0X<-5 #IC process mean
pp0<-mu0X/n #IC probability p0
rho0<-0.5 #IC parameter rho0
beta0<-pp0*(1-rho0) #IC parameter beta
alpha0<-beta0+rho0 #IC parameter alpha0
s<-2 #s value
l1<-2 # #control limit LCLs=u/s
lambda<-0.7 ##smoothing parameter
#### OOC settings
ds<-0.8 #shift in mu0X
mulX<-ds*mu0X #OOC process mean
pi1<-mulX/n #OOC probability p1
rho1<-rho0 #OOC parameter rho1
beta1<-pi1*(1-rho1) #OOC parameter beta
alpha1<-beta1+rho1 #OOC parameter alpha1
q0<-0 #q0 value
##### steady-state ARL calculation##### (OoC case)
listRL<-c()
#simulation
sims<-100000
for(l in 1:sims){
  N0<-rbinom(1,n,pp0)
  Q0<-q0
  N1<-rbinom(1,N0,alpha0)+rbinom(1,n-N0,beta0)
  Q1<-(1/s)*round((lambda*N1+(1-lambda)*Q0)/(1/s))
  j<-1
  while(Q1>=l1&j<=200){
    j<-(j+1);N0<-N1;Q0<-Q1
    N1<-rbinom(1,N0,alpha0)+rbinom(1,n-N0,beta0)

```

```

Q1<-(1/s)*round((lambda*N1+(1-lambda)*Q0)/(1/s))
}
if(j>200){
  js<-j
  N0s<-N1;
  Q0s<-Q1;
  N1s<-rbinom(1,N0s,alpha1)+rbinom(1,n-N0s,beta1)
  Q1s<-(1/s)*round((lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s)/(1/s))
  while(Q1s>=l1){
    js<-(js+1);N0s<-N1s;Q0s<-Q1s
    N1s<-rbinom(1,N0s,alpha1)+rbinom(1,n-N0s,beta1)
  }
  Q1s<-(1/s)*round((lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s)/(1/s))
  listRL[l]<-js
}
else{next}
}
LR1<-length(na.exclude(listRL))
#calculation of the ssARL
ARL1<-mean(na.exclude(listRL)-200)
SDRL1<-sd(na.exclude(listRL)-200)
se1<-sd(na.exclude(listRL)-200)/sqrt(length(na.exclude(listRL)))
# print the results
cat(" n:",n," mu0X:",mu0X," rho0:",rho0," shift:",ds," s:",s,"
lambda:",lambda," LCL:",l1," ARL:",ARL1," SDRL:",SDRL1,"
s.e:",se1," Length:",LR1,"\n")

```

Παράρτημα Δ: Μονόπλευρα Διαγράμματα EWMA και DEWMA για διεργασίες BAR(1)

Δ1. Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων DEWMA για διεργασίες BAR(1)

```
# Simulation study DEWMA for BAR(1)
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)
mu0X<-12 # IC process mean
n<-50 # sample size
rho0<-0.75 #IC parameter rho0
lambda<-0.3 #smoothing parameter
for(jj1 in seq(3.894,9.16,by=0.002)){
  UCL<-mu0X+jj1#control limit UCL
  pii0<-mu0X/n #IC probability p0
  beta0<-pii0*(1-rho0) #IC parameter beta
  alpha0<-beta0+rho0 #IC parameter alpha0
#Simulation
  listRL<-vector()
  it<-100000
  for(i in 1:it){
    Z0<-floor(mu0X)
    Y0<-Z0
    j<-1
    X0<-rbinom(1,n,pii0)
    x<-(rbinom(1,X0,alpha0)+rbinom(1,n-X0,beta0))
    Z1<-lambda*x+(1-lambda)*Z0
    Y1<-lambda*Z1+(1-lambda)*Y0
    while(Y1<=UCL){
      j<-j+1;
      Z0<-Z1
      X0<-x
      x<-(rbinom(1,X0,alpha0)+rbinom(1,n-X0,beta0))
      Z1<-lambda*x+(1-lambda)*Z0
      Y0<-Y1
      Y1<-lambda*Z1+(1-lambda)*Y0
    }
    listRL[i]<-j
  }
# calculation of the IC zsARL
  ARL<-mean(listRL)
# print the results
  if(ARL>100&ARL<1000){
    cat(" n:",n," rho0:",rho0," mu0:",mu0X,"
lambda:",lambda,jj1," UCL:",UCL," ARL:",mean(listRL),"
SDRL",sd(listRL)," se",sd(listRL)/sqrt(it),"\\n")
  }else{
```

```

    if(ARL>800){break}
  }}

```

Δ2. Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων DEWMA για διεργασίες BAR(1)

```

# Simulation study DEWMA for BAR(1)
##### ssARL calculation ##### (OOC case)
n<-50 #sample size
mu0X<-12 #IC process mean
pp0<-mu0X/n #IC probability p0
rho0<-0.75 #IC parameter rho0
beta0<-pp0*(1-rho0) #IC parameter beta
alpha0<-beta0+rho0 #IC parameter alpha0
UCL<-15.9 #u value
lambda<-0.3 #smoothing parameter
#### OOC settings
ds<-1.2 #ds: shift in mu0X
mulX<-ds*mu0X #OOC process mean
pii1<-mulX/n # mu0X=n*pii0
rho1<-rho0 #OOC probability p1
beta1<-pii1*(1-rho1) #OOC parameter beta
alpha1<-beta1+rho1 #OOC parameter alpha1
listRL<-c()
##### steady-state ARL calculation##### (OoC case)
#simulation
sims<-100000
for(l in 1:sims){
  N0<-rbinom(1,n,pp0)
  Q0<-mu0X
  N1<-rbinom(1,N0,alpha0)+rbinom(1,n-N0,beta0)
  Q1<-lambda*N1+(1-lambda)*Q0
  Y0<-Q0
  Y1<-lambda*Q1+(1-lambda)*Y0
  j<-1
  while(Y1<=UCL&j<=200){
    j<-(j+1);
    N0<-N1;
    N1<-rbinom(1,N0,alpha0)+rbinom(1,n-N0,beta0)
    Q0<-Q1;
    Q1<-lambda*N1+(1-lambda)*Q0
    Y0<-Y1
    Y1<-lambda*Q1+(1-lambda)*Y0
  }
  if(j>200){
    js<-j
    N0s<-N1;
    N1s<-rbinom(1,N0s,alpha1)+rbinom(1,n-N0s,beta1)

```



```

Q0s<-Q1;
Q1s<-lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s
Y0s<-Y1
Y1s<-lambda*Q1s+(1-lambda)*Y0s
while(Y1s<=UCL){
  js<-(js+1);
  N0s<-N1s;
  N1s<-rbinom(1,N0s,alpha1)+rbinom(1,n-N0s,beta1)
  Q0s<-Q1s
  Q1s<-lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s
  Y0s<-Y1s
  Y1s<-lambda*Q1s+(1-lambda)*Y0s
}
listRL[1]<-js
}
else{next}
}
LR1<-length(na.exclude(listRL))
#Calculation of the ssARL
ARL1<-mean(na.exclude(listRL)-200)
SDRL1<-sd(na.exclude(listRL)-200)
sel<-sd(na.exclude(listRL)-
200)/sqrt(length(na.exclude(listRL)))
# print the results
cat(" n:",n," mu0X:",mu0X," rho0:",rho0," shift:",ds,"
lambda:",lambda," UCL:",UCL," ARL:",ARL1," SDRL:",SDRL1,"
s.e:",sel," Length:",LR1,"\n")

```

Δ3. Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων EWMA για διεργασίες BAR(1)

```

# Simulation study EWMA for BAR(1)
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)
mu0X<-12 #IC process mean
n<-50 # sample size
rho0<-0.75 #IC parameter rho0
lambda<-0.3 #smoothing parameter
for(jj1 in seq(4.92,6.25,by=0.002)){
  UCL<-mu0X+jj1 #control limit
  pii0<-mu0X/n #IC probability p0
  beta0<-pii0*(1-rho0) #IC parameter beta
  alpha0<-beta0+rho0 #IC parameter alpha0
  listRL<-vector()
#Simulation
  it<-100000
  for(i in 1:it){

```

```

Z0<-floor(mu0X)
j<-1
X0<-rbinom(1,n,pii0)
x<-(rbinom(1,X0,alpha0)+rbinom(1,n-X0,beta0))
Z1<-lambda*x+(1-lambda)*Z0
while(Z1<=UCL){
  j<-j+1;
  Z0<-Z1
  X0<-x
  x<-(rbinom(1,X0,alpha0)+rbinom(1,n-X0,beta0))
  Z1<-lambda*x+(1-lambda)*Z0
}
listRL[i]<-j
}
# calculation of the IC zsARL
ARL<-mean(listRL)
# print the results
if(ARL>100&ARL<1000){
  cat(" n:",n," rho0:",rho0," mu0:",mu0X,"
lambda:",lambda,jj1," UCL:",UCL," ARL:",mean(listRL),"
SDRL",sd(listRL)," se",sd(listRL)/sqrt(it),"\\n")
}
}

```

Δ4. Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων EWMA για διεργασίες BAR(1)

```

# Simulation study EWMA for BAR(1)
##### ssARL calculation ##### (OOC case)
n<-50 # sample size
mu0X<-12 #IC process mean
pp0<-mu0X/n #IC probability p0
rho0<-0.75 #IC parameter rho0
beta0<-pp0*(1-rho0) #IC parameter beta
alpha0<-beta0+rho0 #IC parameter alpha0
UCL<-16.942 #control limit
lambda<-0.3 #smoothing parameter
#### OOC settings
ds<-1.2 #shift in mu0X
mulX<-ds*mu0X # OOC process mean
pii1<-mulX/n # #OOC parameter phi1
rho1<-rho0 ##OOC parameter rho1
beta1<-pii1*(1-rho1) #OOC parameter beta
alpha1<-beta1+rho1 #OOC parameter alpha1
#simulation
listRL<-c()
sims<-100000

```

```

for(l in 1:sims){
  N0<-rbinom(1,n,pp0)
  Q0<-mu0X
  N1<-rbinom(1,N0,alpha0)+rbinom(1,n-N0,beta0)
  Q1<-lambda*N1+(1-lambda)*Q0
  j<-1
  while(Q1<=UCL&j<=200){
    j<-(j+1);
    N0<-N1;
    N1<-rbinom(1,N0,alpha0)+rbinom(1,n-N0,beta0)
    Q0<-Q1;
    Q1<-lambda*N1+(1-lambda)*Q0
  }
  if(j>200){
    js<-j
    N0s<-N1;
    N1s<-rbinom(1,N0s,alpha1)+rbinom(1,n-N0s,beta1)
    Q0s<-Q1;
    Q1s<-lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s
    while(Q1s<=UCL){
      js<-(js+1);
      N0s<-N1s;
      N1s<-rbinom(1,N0s,alpha1)+rbinom(1,n-N0s,beta1)
      Q0s<-Q1s
      Q1s<-lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s
    }
    listRL[l]<-js
  }
  else{next}
}
LR1<-length(na.exclude(listRL))
# calculation of the ssARL
ARL1<-mean(na.exclude(listRL)-200)
SDRL1<-sd(na.exclude(listRL)-200)
se1<-sd(na.exclude(listRL)-
200)/sqrt(length(na.exclude(listRL)))
# print the results
cat(" n:",n," mu0X:",mu0X," rho0:",rho0," shift:",ds,"
lambda:",lambda," UCL:",UCL," ARL:",ARL1," SDRL:",SDRL1,"
s.e:",se1," Length:",LR1,"\n")

```

Δ5. Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων DEWMA για διεργασίες BAR(1)

```

# Simulation study DEWMA for BAR(1)
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)
mu0X<-5 # IC process mean

```

```

n<-30 # sample size
rho0<-0.25 # parameter rho0
lambda<-0.10 # lambda value
for(jj1 in seq(0.90,1.16,by=0.02)){
  LCL<-mu0X-jj1 # control limit LCL
  pii0<-mu0X/n # probability p0
  beta0<-pii0*(1-rho0) # parameter beta
  alpha0<-beta0+rho0 # parameter alpha
  #simulation
  listRL<-vector()
  it<-100000
  for(i in 1:it){
    Z0<-floor(mu0X)
    Y0<-Z0
    j<-1
    X0<-rbinom(1,n,pii0)
    x<-(rbinom(1,X0,alpha0)+rbinom(1,n-X0,beta0))
    Z1<-lambda*x+(1-lambda)*Z0
    Y1<-lambda*Z1+(1-lambda)*Y0
    while(Y1>=LCL){
      j<-j+1;
      Z0<-Z1
      X0<-x
      x<-(rbinom(1,X0,alpha0)+rbinom(1,n-X0,beta0))
      Z1<-lambda*x+(1-lambda)*Z0
      Y0<-Y1
      Y1<-lambda*Z1+(1-lambda)*Y0
    }
    listRL[i]<-j
  }
  # calculation of the IC zsARL
  ARL<-mean(listRL)
  # print the results
  if(ARL>100&ARL<1000){
    cat(" n:",n," rho0:",rho0," mu0:",mu0X,"
lambda:",lambda,jj1," LCL:",LCL," ARL:",mean(listRL),"
SDRL",sd(listRL)," se",sd(listRL)/sqrt(it),"\\n")
  }else{
    if(ARL>800){break}
  }
}

```

Δ6. Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων DEWMA για διεργασίες BAR(1)

```

# Simulation study DEWMA for BAR(1)
##### ssARL calculation ##### (OOC case)

```

```

n<-20 # sample size
mu0X<-4 #IC process mean
pp0<-mu0X/n #IC probability p0
rho0<-0.25 #IC parameter rho0
beta0<-pp0*(1-rho0) #IC parameter beta
alpha0<-beta0+rho0 #IC parameter alpha0
LCL<-3.732 #control limit LCL
lambda<-0.05 #smoothing parameter
#### OOC settings
ds<-0.5 #shift in mu0X
mulX<-ds*mu0X # OOC process mean
pii1<-mulX/n # mu0X=n*pii0
rho1<-rho0 #OOC parameter rho1
beta1<-pii1*(1-rho1) #OOC parameter beta
alpha1<-beta1+rho1 #OOC parameter alpha1
#simulation
listRL<-c()
sims<-100000
for(l in 1:sims){
  N0<-rbinom(1,n,pp0)
  Q0<-mu0X
  N1<-rbinom(1,N0,alpha0)+rbinom(1,n-N0,beta0)
  Q1<-lambda*N1+(1-lambda)*Q0
  Y0<-Q0
  Y1<-lambda*Q1+(1-lambda)*Y0
  j<-1
  while(Y1>=LCL&j<=200){
    j<-(j+1);
    N0<-N1;
    N1<-rbinom(1,N0,alpha0)+rbinom(1,n-N0,beta0)
    Q0<-Q1;
    Q1<-lambda*N1+(1-lambda)*Q0
    Y0<-Y1
    Y1<-lambda*Q1+(1-lambda)*Y0
  }
  if(j>200){
    js<-j
    N0s<-N1;
    N1s<-rbinom(1,N0s,alpha1)+rbinom(1,n-N0s,beta1)
    Q0s<-Q1;
    Q1s<-lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s
    Y0s<-Y1
    Y1s<-lambda*Q1s+(1-lambda)*Y0s
    while(Y1s>=LCL){
      js<-(js+1);
      N0s<-N1s;
      N1s<-rbinom(1,N0s,alpha1)+rbinom(1,n-N0s,beta1)

```

```

        Q0s<-Q1s
        Q1s<-lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s
        Y0s<-Y1s
        Y1s<-lambda*Q1s+(1-lambda)*Y0s
    }
    listRL[1]<-js
}
else{next}
}
LR1<-length(na.exclude(listRL))
# calculation of the ssARL
ARL1<-mean(na.exclude(listRL)-200)
SDRL1<-sd(na.exclude(listRL)-200)
se1<-sd(na.exclude(listRL)-
200)/sqrt(length(na.exclude(listRL)))
# print the results
cat(" n:",n," mu0X:",mu0X," rho0:",rho0," shift:",ds,"
lambda:",lambda," LCL:",LCL," ARL:",ARL1," SDRL:",SDRL1,"
s.e:",se1," Length:",LR1,"\n")

```

Δ7. Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων

EWMA για διεργασίες BAR(1)

```

# Simulation study EWMA for BAR(1)
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)
mu0X<-12 # IC process mean
n<-50 # sample size
rho0<-0.75 # parameter rho0
lambda<-0.3 # lambda value
for(jj1 in seq(4.571,7.949,by=0.002)){
  LCL<-mu0X-jj1 # control limit LCL
  pii0<-mu0X/n # probability p0
  beta0<-pii0*(1-rho0) # parameter beta
  alpha0<-beta0+rho0 # parameter alpha
  #simulation
  listRL<-vector()
  it<-100000
  for(i in 1:it){
    Z0<-floor(mu0X)
    j<-1
    X0<-rbinom(1,n,pii0)
    x<-(rbinom(1,X0,alpha0)+rbinom(1,n-X0,beta0))
    Z1<-lambda*x+(1-lambda)*Z0
    while(Z1>=LCL){
      j<-j+1;
      Z0<-Z1
      X0<-x
      x<-(rbinom(1,X0,alpha0)+rbinom(1,n-X0,beta0))
    }
  }
}

```

```

        Z1<-lambda*x+(1-lambda)*Z0
    }
    listRL[i]<-j
}
# calculation of the IC zsARL
ARL<-mean(listRL)
# print the results
if(ARL>100&ARL<1000){
    cat(" n:",n," rho0:",rho0," mu0:",mu0X,"
lambda:",lambda,jj1," LCL:",LCL," ARL:",mean(listRL),"
SDRL",sd(listRL)," se",sd(listRL)/sqrt(it),"\\n")
}
}

```

Δ8. Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων EWMA για διεργασίες BAR(1)

```

# Simulation study EWMA for BAR(1)
##### ssARL calculation ##### (OOC case)
n<-50 # sample size
mu0X<-4 # IC process mean
pp0<-mu0X/n # probability p0
rho0<-0.25 # parameter rho0
beta0<-pp0*(1-rho0) # parameter beta
alpha0<-beta0+rho0 # parameter alpha
LCL<-1.974 # control limit LCL
lambda<-0.3 # lambda value
#### OOC settings
ds<-0.8 #shift in mu0X
mulX<-ds*mu0X # OOC process mean
pii1<-mulX/n # OOC probability p1
rho1<-rho0+0.35 #OOC parameter rho1
beta1<-pii1*(1-rho1) #OOC parameter beta
alpha1<-beta1+rho1 #OOC parameter alpha
#simulation
listRL<-c()
sims<-100000
for(l in 1:sims){
    N0<-rbinom(1,n,pp0)
    Q0<-mu0X
    N1<-rbinom(1,N0,alpha0)+rbinom(1,n-N0,beta0)
    Q1<-lambda*N1+(1-lambda)*Q0
    j<-1
    while(Q1>=LCL&j<=200){
        j<-(j+1);
        N0<-N1;
        N1<-rbinom(1,N0,alpha0)+rbinom(1,n-N0,beta0)
    }
}

```

```

    Q0<-Q1;
    Q1<-lambda*N1+(1-lambda)*Q0
  }
  if(j>200){
    js<-j
    N0s<-N1;
    N1s<-rbinom(1,N0s,alpha1)+rbinom(1,n-N0s,beta1)
    Q0s<-Q1;
    Q1s<-lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s
    while(Q1s>=LCL){
      js<-(js+1);
      N0s<-N1s;
      N1s<-rbinom(1,N0s,alpha1)+rbinom(1,n-N0s,beta1)
      Q0s<-Q1s
      Q1s<-lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s
    }
    listRL[l]<-js
  }
  else{next}
}
LR1<-length(na.exclude(listRL))
# calculation of the ssARL
ARL1<-mean(na.exclude(listRL)-200)
SDRL1<-sd(na.exclude(listRL)-200)
sel<-sd(na.exclude(listRL)-
200)/sqrt(length(na.exclude(listRL)))
# print the results
cat(" n:",n," mu0X:",mu0X," rho0:",rho0," shift:",ds,"
lambda:",lambda," LCL:",LCL," ARL:",ARL1," SDRL:",SDRL1,"
s.e.:",sel," Length:",LR1,"\n")
#####

```

Παράρτημα Ε: Δίπλευρα Διαγράμματα EWMA και DEWMA για διεργασίες BAR(1)

Ε1. Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των δίπλευρων διαγραμμάτων DEWMA για διεργασίες BAR(1)

```

###Simulation study DEWMA for BAR(1)###
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)
mu0X<-5 #IC process mean
n<-30 #sample size
rho0<-0.25 #IC parameter rho0
lambda<-0.10 #smoothing parameter
for(jj1 in seq(0.90,1.16,by=0.02)){
UCL<-mu0X+jj1#upper control limit, UCL

```



```

LCL<-mu0X-jj1 #lower control limit, LCL
pii0<-mu0X/n #IC probability p0
beta0<-pii0*(1-rho0) #IC parameter beta
alpha0<-beta0+rho0 #IC parameter alpha0
#simulation
listRL<-vector()
it<-100000
for(i in 1:it){
Z0<-floor(mu0X)#initial value
Y0<-Z0
j<-1
X0<-rbinom(1,n,pii0)
x<-(rbinom(1,X0,alpha0)+rbinom(1,n-X0,beta0))
Z1<-lambda*x+(1-lambda)*Z0
Y1<-lambda*Z1+(1-lambda)*Y0
while(Y1<=UCL&Y1>=LCL){
j<-j+1;
Z0<-Z1
X0<-x
x<-(rbinom(1,X0,alpha0)+rbinom(1,n-X0,beta0))
Z1<-lambda*x+(1-lambda)*Z0
Y0<-Y1
Y1<-lambda*Z1+(1-lambda)*Y0
}
listRL[i]<-j
}
#calculation of the zsARL
ARL<-mean(listRL)
# print the results
if(ARL>100&ARL<1000){
cat(" n:",n," rho0:",rho0," mu0:",mu0X," lambda:",lambda,jj1,"
LCL:",LCL," UCL:",UCL," ARL:",mean(listRL)," SDRL",sd(listRL),"
se",sd(listRL)/sqrt(it),"\\n")
}else{
if(ARL>800){break}
}}

```

E2. Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των δίπλευρων διαγραμμάτων DEWMA για διεργασίες BAR(1)

```

###Simulation study DEWMA for BAR(1)###
##### ssARL calculation ##### (OOC case)
n<-30 # sample size
mu0X<-5 #IC process mean
pp0<-mu0X/n #IC probability p0
rho0<-0.25 #IC parameter rho0
beta0<-pp0*(1-rho0) #IC parameter beta
alpha0<-beta0+rho0 #IC parameter alpha0

```

```

UCL<-5.92 #upper control limit, UCL
LCL<-4.08 #lower control limit, LCL
lambda<-0.10 # smoothing parameter
#### OOC settings
for(ds in seq(0.5,1.5,by=0.1)){
  mulX<-ds*mu0X # OOC process mean, ds: shift in mu0X
  pii1<-mulX/n # OOC probability p1
  rho1<-rho0 #OOC parameter rho1
  beta1<-pii1*(1-rho1) #OOC parameter beta
  alpha1<-beta1+rho1 #OOC parameter alpha1
#simulation
  listRL<-c()
  sims<-100000
  for(l in 1:sims){
    N0<-rbinom(1,n,pp0)
    Q0<-mu0X
    N1<-rbinom(1,N0,alpha0)+rbinom(1,n-N0,beta0)
    Q1<-lambda*N1+(1-lambda)*Q0
    Y0<-Q0
    Y1<-lambda*Q1+(1-lambda)*Y0
    j<-1
    while(Y1<=UCL&Y1>=LCL&j<=200){
      j<-(j+1);
      N0<-N1;
      N1<-rbinom(1,N0,alpha0)+rbinom(1,n-N0,beta0)
      Q0<-Q1;
      Q1<-lambda*N1+(1-lambda)*Q0
      Y0<-Y1
      Y1<-lambda*Q1+(1-lambda)*Y0
    }
    if(j>200){
      js<-j
      N0s<-N1;
      N1s<-rbinom(1,N0s,alpha1)+rbinom(1,n-N0s,beta1)
      Q0s<-Q1;
      Q1s<-lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s
      Y0s<-Y1
      Y1s<-lambda*Q1s+(1-lambda)*Y0s
      while(Y1s>=LCL&Y1s<=UCL){
        js<-(js+1);
        N0s<-N1s;
        N1s<-rbinom(1,N0s,alpha1)+rbinom(1,n-N0s,beta1)
        Q0s<-Q1s
        Q1s<-lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s
        Y0s<-Y1s
        Y1s<-lambda*Q1s+(1-lambda)*Y0s
      }
    }
  }
}

```

```

        listRL[1]<-js
    }
    else{next}
}
LR1<-length(na.exclude(listRL))
#calculation of the ssARL
ARL1<-mean(na.exclude(listRL)-200)
SDRL1<-sd(na.exclude(listRL)-200)
se1<-sd(na.exclude(listRL)-
200)/sqrt(length(na.exclude(listRL)))
# print the results
cat(" n:",n," mu0X:",mu0X," rho0:",rho0," shift:",ds,"
lambda:",lambda," LCL:",LCL," UCL:",UCL," ARL:",ARL1,"
SDRL:",SDRL1," s.e.:",se1," Length:",LR1,"\n")
}

```

E3. Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των δίπλευρων διαγραμμάτων EWMA για διεργασίες BAR(1)

```

###Simulation study EWMA for BAR(1)##
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)
mu0X<-5 #IC process mean
n<-30 #sample size
rho0<-0.25 #IC parameter rho0
lambda<-0.10 #smoothing parameter
for(jj1 in seq(0.05,2.25,by=0.05)){
    UCL<-mu0X+jj1 #upper control limit, UCL
    LCL<-mu0X-jj1 #lower control limit, LCL
    pii0<-mu0X/n #IC probability p0
    beta0<-pii0*(1-rho0) #IC parameter beta
    alpha0<-beta0+rho0 #IC parameter alpha0
#simulation
listRL<-vector()
it<-100000
for(i in 1:it){
    Z0<-floor(mu0X)
    j<-1
    X0<-rbinom(1,n,pii0)
    x<-(rbinom(1,X0,alpha0)+rbinom(1,n-X0,beta0))
    Z1<-lambda*x+(1-lambda)*Z0
    while(Z1<=UCL&Z1>=LCL){
        j<-j+1;
        Z0<-Z1
        X0<-x
        x<-(rbinom(1,X0,alpha0)+rbinom(1,n-X0,beta0))
        Z1<-lambda*x+(1-lambda)*Z0
    }
}

```

```

    listRL[i]<-j
  }
#calculation of the zsARL
  ARL<-mean(listRL)
# print the results
  if(ARL>100&ARL<1000){
    cat(" n:",n," rho0:",rho0," mu0:",mu0X,"
lambda:",lambda,jj1," LCL:",LCL," UCL:",UCL,"
ARL:",mean(listRL)," SDRL",sd(listRL),"
se",sd(listRL)/sqrt(it),"\\n")
  }
}

```

E4. Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των δίπλευρων διαγραμμάτων EWMA για διεργασίες BAR(1)

```

###Simulation study EWMA for BAR(1)###
##### ssARL calculation ##### (OOC case)
n<-30 #sample size
mu0X<-5 #IC process mean
pp0<-mu0X/n #IC probability p0
rho0<-0.25 #IC parameter rho0
beta0<-pp0*(1-rho0) #IC parameter beta
alpha0<-beta0+rho0 #IC parameter alpha0
UCL<-6.55 #upper control limit, UCL
LCL<-3.45 #lower control limit, LCL
lambda<-0.10 #smoothing parameter
### OOC settings
for(ds in seq(0.5,1.5,by=0.1)){
  mu1X<-ds*mu0X # OOC process mean, ds: shift in mu0X
  pii1<-mu1X/n # mu0X=n*pii0 #OOC parameter phil
  rho1<-rho0 #OOC parameter rho1
  beta1<-pii1*(1-rho1) #OOC parameter beta
  alpha1<-beta1+rho1#OOC parameter alpha1
#simulation
  listRL<-c()
  sims<-100000
  for(l in 1:sims){
    N0<-rbinom(1,n,pp0)
    Q0<-mu0X
    N1<-rbinom(1,N0,alpha0)+rbinom(1,n-N0,beta0)
    Q1<-lambda*N1+(1-lambda)*Q0
    j<-1
    while(Q1<=UCL&Q1>=LCL&j<=200){
      j<-(j+1);
      N0<-N1;
      N1<-rbinom(1,N0,alpha0)+rbinom(1,n-N0,beta0)

```

```

    Q0<-Q1;
    Q1<-lambda*N1+(1-lambda)*Q0}
if(j>200){
  js<-j
  N0s<-N1;
  N1s<-rbinom(1,N0s,alpha1)+rbinom(1,n-N0s,beta1)
  Q0s<-Q1;
  Q1s<-lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s
  while(Q1s>=LCL&Q1s<=UCL){
    js<-(js+1);
    N0s<-N1s;
    N1s<-rbinom(1,N0s,alpha1)+rbinom(1,n-N0s,beta1)
    Q0s<-Q1s
    Q1s<-lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s
  }
  listRL[1]<-js
}
else{next}
}
LR1<-length(na.exclude(listRL))
#calculation of the ssARL
ARL1<-mean(na.exclude(listRL)-200)
SDRL1<-sd(na.exclude(listRL)-200)
se1<-sd(na.exclude(listRL)-
200)/sqrt(length(na.exclude(listRL)))
# print the results
cat(" n:",n," mu0X:",mu0X," rho0:",rho0," shift:",ds,"
lambda:",lambda," LCL:",LCL," UCL:",UCL," ARL:",ARL1,"
SDRL:",SDRL1," s.e.:",se1," Length:",LR1,"\n")
}

```

Παράρτημα ΣΤ Προτεινόμενα μονόπλευρα διαγράμματα s-EWMA για διεργασίες BBAR(1)

ΣΤ1: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BBAR(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων

```
# Markov Chain method for ARL calculation of the s-EWMA chart
# Case of BBAR(1) model
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)
n<-30 # sample size
mu0<-5 # IC process mean
pp0<-mu0/n # probability p0
rho0<-0.25 # parameter rho0
phi0<-0.025 # parameter phi0
beta0<-pp0*(1-rho0) # parameter beta
alpha0<-beta0+rho0 # parameter alpha
# Construction of the Transition Probabilities Matrix P
# Step 1: Define the transition probabilities
Q0elk<-function(i,j,k){
  #choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*((alpha0)^k)*((1-alpha0)^(i-
k))*((beta0)^(j-k))*((1-beta0)^(n-i+k-j))
  choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*(beta0*(k+((1-
phi0)*alpha0)/phi0,i-k+((1-phi0)*(1-alpha0))/phi0)/beta0(((1-
phi0)*alpha0)/phi0,((1-phi0)*(1-alpha0))/phi0))*beta0*(j-k+((1-
phi0)*beta0)/phi0,n-i-j+k+((1-phi0)*(1-beta0))/phi0)/beta0(((1-
phi0)*beta0)/phi0,((1-phi0)*(1-beta0))/phi0))
}
#####
Q0el<-function(i,j){
  ks<-(max(0,i+j-n):(min(i,j)))
  sum(Q0elk(i,j,ks))
}
# Step 2: Fill Matrix entries
N0Max<-n
Pt<-matrix(0,nrow=(N0Max+1),ncol=(N0Max+1))
for(l in 0:N0Max){
  for(k in 0:N0Max){
    Pt[l+1,k+1]<-Q0el(l,k)
  }
}
# Calculate the steady-state probability vector
pvec<-Re(eigen(t(Pt), symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec<-pvec/(sum(pvec))

# IC zsARL calculation
u<-13; # u value
lam<-0.99999 # lambda value
```

```

s<-1 # s value
UCL<-u/s # control limit UCLs
q0<-0 # q0 value
# construction of the transition probability matrix Q
nmax<-ceiling((1/lam)*(UCL-(1/(2*s))))-1)
ulist<-seq(0,UCL-1/s,by=1/s)
nlist<-0:nmax
x1<-rep(ulist,length(nlist))
x2<-rep(nlist,each=length(ulist))
A0<-cbind(x1,x2)
pabcd<-function(a,b,c,d){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*d)*Q0el(c,a)
}
plabcd<-function(a,b){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*q0)*pvec[a+1]
}
dim1<-(dim(A0)[1])
# determine the initial probabilities vector
vec1<-c()
for(j in 1:dim1){
  vec1[j]<-plabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]])
}
# determine the transition probability matrix Q - IC case
Q0<-matrix(0,ncol=dim1,nrow=dim1)
for(j in 1:dim1){
  for(i in 1:dim1){
    Q0[i,j]<-
pabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]],A0[i,][[2]],A0[i,][[1]])
  }
}
# calculation of the IC zsARL
ARL0<-1+vec1%%solve(diag(dim1)-Q0)%*%rep(1,dim1)
# print the results
cat("s:",s," n:",n," mu0:",mu0," u:",u," ARL0:",ARL0,"\n")

```

ΣΤ2: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BBAR(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων

```

# Markov Chain method for ssARL calculation of the s-EWMA chart
# Case of BBAR(1) model
##### ssARL calculation ##### (OOC case)
n<-30# sample size
mu0<-5 #IC process mean
delta1<-1.4 #shift in mu
mu1<-delta1*mu0 #OOC process mean

```

```

pp0<-mu0/n #IC probability p0
pp1<-mu1/n #OOC probability p1
rho0<-0.5 #IC parameter rho0
phi0<-0.05 #IC parameter phi0
delta2<-1 #shift in rho
delta3<-1 #shift in phi0
rho1<-delta2*rho0 #OOC parameter rho1
phi1<-delta3*phi0 #OOC parameter phi1
beta0<-pp0*(1-rho0) #IC parameter beta
beta1<-pp1*(1-rho1) #OOC parameter beta
alpha0<-beta0+rho0 #IC parameter alpha0
alpha1<-beta1+rho1 #OOC parameter alpha1
u<-25 #u value
lam<-0.65 #smoothing parameter
s<-2 #s value
UCL<-u/s #control limit UCLs
q0<-0 #q0 value
#construction of the transition probability matrix P
nmax<-ceiling((1/lam)*(UCL-(1/(2*s))))-1)
ulist<-seq(0,UCL-1/s,by=1/s)
nlist<-0:nmax
x1<-rep(ulist,length(nlist))
x2<-rep(nlist,each=length(ulist))
A0<-cbind(x1,x2)
# Step 1: Define the transition probabilities
Q0elk<-function(i,j,k){
  #choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*((alpha0)^k)*((1-alpha0)^(i-
k))*((beta0)^(j-k))*((1-beta0)^(n-i+k-j))
  choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*(beta0*(k+((1-phi0)*alpha0)/phi0,i-
k+((1-phi0)*(1-alpha0))/phi0)/beta0(((1-phi0)*alpha0)/phi0,((1-
phi0)*(1-alpha0))/phi0))*beta0*(j-k+((1-phi0)*beta0)/phi0,n-i-
j+k+((1-phi0)*(1-beta0))/phi0)/beta0(((1-phi0)*beta0)/phi0,((1-
phi0)*(1-beta0))/phi0))
}
#####
Q0el<-function(i,j){
  ks<-(max(0,i+j-n):(min(i,j)))
  sum(Q0elk(i,j,ks))
}
# Step 2: Fill Matrix entries
NOMax<-n
Pt<-matrix(0,nrow=(NOMax+1),ncol=(NOMax+1))
for(l in 0:NOMax){
  for(k in 0:NOMax){
    Pt[l+1,k+1]<-Q0el(l,k)
  }
}

```



```

# Calculate the steady-state probability vector
pvec<-Re(eigen(t(Pt), symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec<-pvec/(sum(pvec))
# construction of the transition probability matrix Q
pabcd<-function(a,b,c,d){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*d)*Q0e1(c,a)
}
plabcd<-function(a,b){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*q0)*pvec[a+1]
}
dim1<-(dim(A0)[1])
# determine the initial probabilities vector
vec1<-c()
for(j in 1:dim1){
  vec1[j]<-plabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]])
}
# determine the transition probability matrix Q - IC case
Q0<-matrix(0,ncol=dim1,nrow=dim1)
for(j in 1:dim1){
  for(i in 1:dim1){
    Q0[i,j]<-
pabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]],A0[i,][[2]],A0[i,][[1]])
  }
}
# calculation of the IC zsARL
ARL0<-1+vec1%%solve(diag(dim1)-Q0)%%rep(1,dim1)
#cat("s:",s," n:",n," mu0:",mu0," u:",u," ARL0:",ARL0,"\n")
# evaluation of the steady-state vector
wvec<-Re(eigen(t(Q0), symmetric=FALSE)$vectors[,1])
wvec2<-wvec/(sum(wvec))
##### steady-state ARL calculation##### (OoC case)
# Construction of the Transition Probabilities Matrix P1
# Step 1: Define the transition probabilities
Q1elk<-function(i,j,k){
  #choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*((alpha1)^k)*((1-alpha1)^(i-
k))*((beta1)^(j-k))*((1-beta1)^(n-i+k-j))
  choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*(beta(k+((1-phi1)*alpha1)/phi1,i-
k+((1-phi1)*(1-alpha1))/phi1)/beta(((1-phi1)*alpha1)/phi1,((1-
phi1)*(1-alpha1))/phi1))*((beta(j-k+((1-phi1)*beta1)/phi1,n-i-
j+k+((1-phi1)*(1-beta1))/phi1)/beta(((1-phi1)*beta1)/phi1,((1-
phi1)*(1-beta1))/phi1))
}
#####
Q1el<-function(i,j){
  ks<-(max(0,i+j-n):(min(i,j)))

```

```

    sum(Q1elk(i,j,ks))
}
#step2: Fill Matrix entries
N0Max<-n
P1t<-matrix(0,nrow=(N0Max+1),ncol=(N0Max+1))
for(l in 0:N0Max){
  for(k in 0:N0Max){
    P1t[l+1,k+1]<-Q1el(l,k)
  }
}
# Calculate the steady-state probability vector
plvec<-Re(eigen(t(P1t), symmetric=FALSE)$vectors[,1])
plvec<-plvec/(sum(plvec))
pabcdout<-function(a,b,c,d){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*d)*Q1el(c,a)
}
plabcdout<-function(a,b){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*q0)*plvec[a+1]
}
####
veclout<-c()
for(j in 1:dim1){
  veclout[j]<-plabcdout(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]])
}
# determine the transition probability matrix Q1 - OOC case
Q1<-matrix(0,ncol=dim1,nrow=dim1)
for(j in 1:dim1){
  for(i in 1:dim1){
    Q1[i,j]<-
pabcdout(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]],A0[i,][[2]],A0[i,][[1]])
  }
}
#calculation of the ssARL
ARL1<-1+veclout%%solve(diag(dim1)-Q1)%*%rep(1,dim1)
muvec1<-solve(diag(dim1)-Q1)%*%rep(1,dim1)
ssARL<-wvec2%%muvec1
# print the results
cat("s:",s," n:",n," mu0:",mu0," mu1:",mu1," u:",u," ARL0:",ARL0
    ," ARL1:",ARL1," ssARL:",ssARL,"\n")

```

ΣΤ3: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BBAR(1) με προσομοίωση

```

# Simulation study s-EWMA for BBAR(1)
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)

```

```

library(VGAM)
sewmasimUbetaBAR1<-function(n,mu0,rho0,phi0,s,lambda,u,sims){
  pp0<-mu0/n # probability p0
  beta0<-pp0*(1-rho0) # parameter beta
  alpha0<-beta0+rho0 # parameter alpha
# Construction of the Transition Probabilities Matrix P
# Step 1: Define the transition probabilities
  Q0elk<-function(i,j,k){
    #choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*((alpha0)^k)*((1-alpha0)^(i-
k))*((beta0)^(j-k))*((1-beta0)^(n-i+k-j))
    choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*(beta(k+((1-
phi0)*alpha0)/phi0,i-k+((1-phi0)*(1-alpha0))/phi0)/beta(((1-
phi0)*alpha0)/phi0,((1-phi0)*(1-alpha0))/phi0))*beta(j-k+((1-
phi0)*beta0)/phi0,n-i-j+k+((1-phi0)*(1-beta0))/phi0)/beta(((1-
phi0)*beta0)/phi0,((1-phi0)*(1-beta0))/phi0))
  }
  #####
  Q0el<-function(i,j){
    ks<-(max(0,i+j-n):(min(i,j)))
    sum(Q0elk(i,j,ks))
  }
# Step 2: Fill Matrix entries
  N0Max<-n
  Pt<-matrix(0,nrow=(N0Max+1),ncol=(N0Max+1))
  for(l in 0:N0Max){
    for(k in 0:N0Max){
      Pt[l+1,k+1]<-Q0el(l,k)
    }
  }
# Calculate the steady-state probability vector
  pvec<-Re(eigen(t(Pt), symmetric=FALSE)$vectors[,1])
  pvec<-pvec/(sum(pvec))
# IC zsARL calculation
  UCL<-u/s # control limit UCLs
  q0<-0 # q0 value
#Simulation
  listRL<-c()
  for(l in 1:sims){
    N0<-sample(0:n,1,replace=FALSE,prob=pvec)
    Q0<-q0
    j<-1
    while(TRUE){
      N1<-(rbetabinom(1,N0,alpha0,phi0)+rbetabinom(1,n-
N0,beta0,phi0))
      Q1<-(1/s)*round((lambda*N1+(1-lambda)*Q0)/(1/s))
      if(Q1>UCL){listRL[l]<-j;break}
      else{j<-(j+1);N0<-N1;Q0<-Q1}
    }
  }
}

```

```

    }
  }
# calculation of the IC zsARL
ARL0<-mean(listRL)
se<-sd(listRL)/sqrt(sims)
# print the results
  cat(n,mu0,rho0,phi0,s,lambda,UCL,ARL0,se,"\n")
}
sewmasimUbetaBAR1(n=15,mu0=10,rho0=0.25,phi0=0.05,s=4,lambda=0.0
7,u=44,sims=100000)

```

ΣΤ4: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BBAR(1) με προσομοίωση

```

# Simulation study s-EWMA for BBAR(1)
##### ssARL calculation ##### (OOC case)
library(VGAM)
# define a function for the OOC calculations
sewmasimUbetaBAR1OOC<-
function(n,mu0,rho0,phi0,s,ds,lambda,u,sims){
  pp0<-mu0/n #IC probability p0
  beta0<-pp0*(1-rho0) #IC parameter beta
  alpha0<-beta0+rho0 #IC parameter alpha
  mu1X<-ds*mu0 #OOC process mean
  pii1<-mu1X/n # mu0X=n*pii0 #OOC probability p1
  rho1<-rho0 #OOC parameter rho1
  phi1<-phi0 #OOC parameter phi1
  beta1<-pii1*(1-rho1) #OOC parameter beta
  alpha1<-beta1+rho1 #OOC parameter alpha
#construction of the transition probability matrix P
# Step 1: Define the transition probabilities
  Q0elk<-function(i,j,k){
    #choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*((alpha0)^k)*((1-alpha0)^(i-
k))*((beta0)^(j-k))*((1-beta0)^(n-i+k-j))
    choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*(beta(k+((1-
phi0)*alpha0)/phi0,i-k+((1-phi0)*(1-alpha0))/phi0)/beta(((1-
phi0)*alpha0)/phi0,((1-phi0)*(1-alpha0))/phi0))* (beta(j-k+((1-
phi0)*beta0)/phi0,n-i-j+k+((1-phi0)*(1-beta0))/phi0)/beta(((1-
phi0)*beta0)/phi0,((1-phi0)*(1-beta0))/phi0))
  }
#####
  Q0el<-function(i,j){
    ks<-(max(0,i+j-n):(min(i,j)))
    sum(Q0elk(i,j,ks))
  }
# Step 2: Fill Matrix entries
  N0Max<-n

```

```

Pt<-matrix(0,nrow=(N0Max+1),ncol=(N0Max+1))
for(l in 0:N0Max){
  for(k in 0:N0Max){
    Pt[l+1,k+1]<-Q0el(l,k)
  }
}
# Calculate the steady-state probability vector
pvec<-Re(eigen(t(Pt), symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec<-pvec/(sum(pvec))
##### steady-state ARL calculation##### (OoC case)
q0<-0
listRL<-c()

for(l in 1:sims){
  N0<-sample(0:n,1,replace=FALSE,prob=pvec)
  Q0<-q0
  N1<-rbetabinom(1,N0,alpha0,phi0)+rbetabinom(1,n-
N0,beta0,phi0)
  Q1<-(1/s)*round((lambda*N0+(1-lambda)*Q0)/(1/s))
  j<-1
  while(Q1<=(u/s)&j<=200){
    j<-(j+1);N0<-N1;Q0<-Q1
    N1<-rbetabinom(1,N0,alpha0,phi0)+rbetabinom(1,n-
N0,beta0,phi0)
    Q1<-(1/s)*round((lambda*N0+(1-lambda)*Q0)/(1/s))
  }
  if(j>200){
    js<-j
    N0s<-N1;
    Q0s<-Q1;
    N1s<-rbetabinom(1,N0s,alpha1,phi1)+rbetabinom(1,n-
N0s,beta1,phi1)
    Q1s<-(1/s)*round((lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s)/(1/s))
    while(Q1s<=(u/s)){
      js<-(js+1);N0s<-N1s;Q0s<-Q1s
      N1s<-rbetabinom(1,N0s,alpha1,phi1)+rbetabinom(1,n-
N0s,beta1,phi1)
      Q1s<-(1/s)*round((lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s)/(1/s))
    }
    listRL[l]<-js
  }
  else{next}
}
LR1<-length(na.exclude(listRL))
#calculation of the ssARL
ARL1<-mean(na.exclude(listRL)-200)
SDRL1<-sd(na.exclude(listRL)-200)

```

```

sel<-sd(na.exclude(listRL)-
200)/sqrt(length(na.exclude(listRL)))
# print the results
cat(" n:",n," mu0:",mu0," rho0:",rho0," phi0:",phi0,"
shift:",ds," lambda:",lambda," UCL:",u/s," ARL:",ARL1,"
SDRL:",SDRL1," s.e:",sel," Length:",LR1,"\n")
}
### apply the function for the OOC calculations)
sewmasimUbetaBAR1OOC(n=15,mu0=10,rho0=0.25,phi0=0.05,
s=4,ds=1.4,lambda=0.07,u=44,sims=100000)

```

ΣΤ5: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BBAR(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων

```

# Markov Chain method for ARL calculation of the s-EWMA chart
# Case of BBAR(1) model
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)
n<-15# sample size
mu0<-10# IC process mean
pp0<-mu0/n# probability p0
rho0<-0.75# parameter rho0
phi0<-0.05# parameter phi0
beta0<-pp0*(1-rho0) # parameter beta
alpha0<-beta0+rho0# parameter alpha
u<-18; # u value
lambda<-0.8 # lambda value
s<-4 #s value
LCL<-u/s # control limit LCLs
q0<-0 # q0 value
# Construction of the Transition Probabilities Matrix P
# Step 1: Define the transition probabilities
Q0elk<-function(i,j,k){
  #choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*((alpha0)^k)*((1-alpha0)^(i-
k))*((beta0)^(j-k))*((1-beta0)^(n-i+k-j))
  choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*(beta0*(k+((1-
phi0)*alpha0)/phi0,i-k+((1-phi0)*(1-alpha0))/phi0)/beta0(((1-
phi0)*alpha0)/phi0,((1-phi0)*(1-alpha0))/phi0))*beta0*(j-k+((1-
phi0)*beta0)/phi0,n-i-j+k+((1-phi0)*(1-beta0))/phi0)/beta0(((1-
phi0)*beta0)/phi0,((1-phi0)*(1-beta0))/phi0))
}
#####
Q0el<-function(i,j){
  ks<-(max(0,i+j-n):(min(i,j)))
  sum(Q0elk(i,j,ks))
}
# Step 2: Fill Matrix entries
N0Max<-n

```

```

Pt<-matrix(0,nrow=(N0Max+1),ncol=(N0Max+1))
for(l in 0:N0Max){
  for(k in 0:N0Max){
    Pt[l+1,k+1]<-Q0el(l,k)
  }
}
# Calculate the steady-state probability vector
pvec<-Re(eigen(t(Pt), symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec<-pvec/(sum(pvec))
#####
# construction of the transition probability matrix Q
nmin<-0
ulist<-seq(LCL+1/s,n,by=1/s)
nlist<-nmin:n
x1<-rep(ulist,length(nlist))
x2<-rep(nlist,each=length(ulist))
A0<-cbind(x1,x2)
pabcd<-function(a,b,c,d){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lambda*a+(1-lambda)*d)*Q0el(c,a)
}
plabcd<-function(a,b){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lambda*a+(1-lambda)*q0)*pvec[a+1]
}
dim1<-(dim(A0)[1])
# determine the initial probabilities vector
vec1<-c()
for(j in 1:dim1){
  vec1[j]<-plabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]])
}
# determine the transition probability matrix Q - IC case
Q0<-matrix(0,ncol=dim1,nrow=dim1)
for(j in 1:dim1){
  for(i in 1:dim1){
    Q0[i,j]<-
pabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]],A0[i,][[2]],A0[i,][[1]])
  }
}
# calculation of the IC zsARL
ARL0<-1+vec1%%solve(diag(dim1)-Q0)%%rep(1,dim1)
# print the results
cat(" lambda:",lambda," s:",s," n:",n," phi0:",phi0,"
rho0:",rho0," mu0:",mu0," u:",u," ARL0:",ARL0," diff:",abs(ARL0-
370.4),"\\n")

```

ΣΤ6: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BBAR(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων

```

# Markov Chain method for ssARL calculation of the s-EWMA chart
# Case of BBAR(1) model
##### ssARL calculation ##### (OOC case)
n<-15 #sample size
mu0<-5 #IC process mean
delta1<-0.8 #shift in mean
mul<-delta1*mu0#OOC process mean
pp0<-mu0/n #IC probability p0
pp1<-mul/n #OOC probability p1
rho0<-0.75 #IC parameter rho0
phi0<-0.025#IC parameter phi0
delta2<-1 # shift in rho
delta3<-1 # shift in phi0
rho1<-delta2*rho0 #OOC parameter rho1
phi1<-delta3*phi0 #OOC parameter phi1
beta0<-pp0*(1-rho0) #IC parameter beta
beta1<-pp1*(1-rho1) #OOC parameter beta
alpha0<-beta0+rho0 #IC parameter alpha0
alpha1<-beta1+rho1 #OOC parameter alpha1
u<-3 #u value
lambda<-0.3 # smoothing parameter
s<-2 #s value
LCL<-u/s #control limit LCLs
q0<-0 #q0 value
#construction of the transition probability matrix P
# Step 1: Define the transition probabilities
Q0elk<-function(i,j,k){
  #choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*((alpha0)^k)*((1-alpha0)^(i-
k))*((beta0)^(j-k))*((1-beta0)^(n-i+k-j))
  choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*(beta(k+((1-phi0)*alpha0)/phi0,i-
k+((1-phi0)*(1-alpha0))/phi0)/beta(((1-phi0)*alpha0)/phi0,((1-
phi0)*(1-alpha0))/phi0))*(beta(j-k+((1-phi0)*beta0)/phi0,n-i-
j+k+((1-phi0)*(1-beta0))/phi0)/beta(((1-phi0)*beta0)/phi0,((1-
phi0)*(1-beta0))/phi0))
}
#####
Q0el<-function(i,j){
  ks<-(max(0,i+j-n):(min(i,j)))
  sum(Q0elk(i,j,ks))
}
# Step 2: Fill Matrix entries
NOMax<-n
Pt<-matrix(0,nrow=(NOMax+1),ncol=(NOMax+1))
for(l in 0:NOMax){
  for(k in 0:NOMax){

```



```

        Pt[l+1,k+1]<-Q0el(l,k)
    }
}
# Calculate the steady-state probability vector
pvec<-Re(eigen(t(Pt), symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec<-pvec/(sum(pvec))
xs1<-0:n
plot(xs1,pvec,type="h")
#####
nmin<-0
ulist<-seq(LCL+1/s,n,by=1/s)
ulist
nlist<-nmin:n
nlist
x1<-rep(ulist,length(nlist))
x2<-rep(nlist,each=length(ulist))
A0<-cbind(x1,x2)
# construction of the transition probability matrix Q
pabcd<-function(a,b,c,d){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lambda*a+(1-lambda)*d)*Q0el(c,a)
}
plabcd<-function(a,b){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lambda*a+(1-lambda)*q0)*pvec[a+1]
}
# determine the initial probabilities vector
dim1<-(dim(A0)[1])
vec1<-c()
for(j in 1:dim1){
  vec1[j]<-plabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]])
}
#vec1
# determine the transition probability matrix Q - IC case
Q0<-matrix(0,ncol=dim1,nrow=dim1)
for(j in 1:dim1){
  for(i in 1:dim1){
    Q0[i,j]<-
pabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]],A0[i,][[2]],A0[i,][[1]])
  }}
# calculation of the IC zsARL
ARL0<-1+vec1%*%solve(diag(dim1)-Q0)%*%rep(1,dim1)
# evaluation of the steady-state vector
wvec<-Re(eigen(t(Q0), symmetric=FALSE)$vectors[,1])
wvec2<-wvec/(sum(wvec))

##### steady-state ARL calculation#### (OoC case)

```

```

# Construction of the Transition Probabilities Matrix P1
# Step 1: Define the transition probabilities
Q1elk<-function(i,j,k){
  #choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*((alpha1)^k)*((1-alpha1)^(i-
k))*((beta1)^(j-k))*((1-beta1)^(n-i+k-j))
  choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*(beta(k+((1-phi1)*alpha1)/phi1,i-
k+((1-phi1)*(1-alpha1))/phi1)/beta(((1-phi1)*alpha1)/phi1,((1-
phi1)*(1-alpha1))/phi1))*beta(j-k+((1-phi1)*beta1)/phi1,n-i-
j+k+((1-phi1)*(1-beta1))/phi1)/beta(((1-phi1)*beta1)/phi1,((1-
phi1)*(1-beta1))/phi1))
}
Q1el<-function(i,j){
  ks<-(max(0,i+j-n):(min(i,j)))
  sum(Q1elk(i,j,ks))
}
#step2: Fill Matrix entries
NOMax<-n
Plt<-matrix(0,nrow=(NOMax+1),ncol=(NOMax+1))
for(l in 0:NOMax){
  for(k in 0:NOMax){
    Plt[l+1,k+1]<-Q1el(l,k)
  }
}
# Calculate the steady-state probability vector
plvec<-Re(eigen(t(Plt), symmetric=FALSE)$vectors[,1])
plvec<-plvec/(sum(plvec))
pabcdout<-function(a,b,c,d){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*d)*Q1el(c,a)
}
plabcdout<-function(a,b){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*q0)*plvec[a+1]
}
####
veclout<-c()
for(j in 1:dim1){
  veclout[j]<-plabcdout(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]])
}
# determine the transition probability matrix Q1 - OOC case
Q1<-matrix(0,ncol=dim1,nrow=dim1)
for(j in 1:dim1){
  for(i in 1:dim1){
    Q1[i,j]<-
pabcdout(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]],A0[i,][[2]],A0[i,][[1]])
  }
}

```

```

#calculation of the ssARL
ARL1<-1+vec1out%%solve(diag(dim1)-Q1)%%rep(1,dim1)
muvec1<-solve(diag(dim1)-Q1)%%rep(1,dim1)
ssARL<-wvec2%%muvec1
# print the results
cat("s:",s," n:",n," mu0:",mu0," mu1:",mu1," u:",u,
    " ARL0:",ARL0," ARL1:",ARL1," ssARL:",ssARL,"\n")

```

ΣΤ7: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BBAR(1) με προσομοίωση

```

# Simulation study s-EWMA for BBAR(1)
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)
library(VGAM)
sewmasimLbBAR1<-function(n,mu0,rho0,phi0,s,lambda,l1,sims){
  pp0<-mu0/n # probability p0
  beta0<-pp0*(1-rho0) # parameter beta
  alpha0<-beta0+rho0 # parameter alpha
  # Construction of the Transition Probabilities Matrix P
  # Step 1: Define the transition probabilities
  Q0elk<-function(i,j,k){
    #choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*((alpha0)^k)*((1-alpha0)^(i-
k))*((beta0)^(j-k))*((1-beta0)^(n-i+k-j))
    choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*(beta0*(k+((1-
phi0)*alpha0)/phi0,i-k+((1-phi0)*(1-alpha0))/phi0)/beta0(((1-
phi0)*alpha0)/phi0,((1-phi0)*(1-alpha0))/phi0))*beta0*(j-k+((1-
phi0)*beta0)/phi0,n-i-j+k+((1-phi0)*(1-beta0))/phi0)/beta0(((1-
phi0)*beta0)/phi0,((1-phi0)*(1-beta0))/phi0))
  }
  #####
  Q0el<-function(i,j){
    ks<-(max(0,i+j-n):(min(i,j)))
    sum(Q0elk(i,j,ks))
  }
  # Step 2: Fill Matrix entries
  NOMax<-n
  Pt<-matrix(0,nrow=(NOMax+1),ncol=(NOMax+1))
  for(l in 0:NOMax){
    for(k in 0:NOMax){
      Pt[l+1,k+1]<-Q0el(l,k)
    }
  }
  # Calculate the steady-state probability vector
  pvec<-Re(eigen(t(Pt), symmetric=FALSE)$vectors[,1])
  pvec<-pvec/(sum(pvec))
  # IC zsARL calculation
  LCL<-l1/s

```

```

q0<-0
# Simulation
listRL<-c()
for(l in 1:sims){
  N0<-sample(0:n,1,replace=FALSE,prob=pvec)
  Q0<-q0
  j<-1
  while(TRUE){
    N1<-(rbetabinom(1,N0,alpha0,phi0)+rbetabinom(1,n-
N0,beta0,phi0))
    Q1<-(1/s)*round((lambda*N1+(1-lambda)*Q0)/(1/s))
    if(Q1<LCL){listRL[l]<-j;break}
    else{j<-(j+1);N0<-N1;Q0<-Q1}
  }
}
# calculation of the IC zsARL
ARL0<-mean(listRL)
se<-sd(listRL)/sqrt(sims)
# print the results
cat(n,mu0,rho0,phi0,s,lambda,LCL,ARL0,se,"\n")
}
sewmasimLbBAR1(n=15,mu0=5,rho0=0.25,phi0=0.025,s=4,lambda=0.86,l
l=3,sims=100000)

```

ΣΤ8: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BBAR(1) με προσομοίωση

```

# Simulation study s-EWMA for BBAR(1)
##### ssARL calculation ##### (OOC case)
library(VGAM)
n<-15 #sample size
mu0<-5 #IC process mean
pp0<-mu0/n #IC probability p0
rho0<-0.25 #IC parameter rho0
beta0<-pp0*(1-rho0) #IC parameter beta
alpha0<-beta0+rho0 #IC parameter alpha0
phi0<-0.025 #IC parameter phi0
ds<-0.8 #shift in process mean
mulX<-ds*mu0 #OOC process mean
pii1<-mulX/n # mu0X=n*pii0 #OOC probability p1
rho1<-rho0 #OOC parameter rho1
phi1<-phi0 #OOC parameter phi1
beta1<-pii1*(1-rho1) #OOC parameter beta
alpha1<-beta1+rho1 #OOC parameter alpha
LCL<-3 #l value
s<-4 #s value
l1<-LCL/s #control limit LCLs

```

```

lambda<-0.86 # smoothing parameter
#construction of the transition probability matrix P
# Step 1: Define the transition probabilities
Q0elk<-function(i,j,k){
  #choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*((alpha0)^k)*((1-alpha0)^(i-
k))*((beta0)^(j-k))*((1-beta0)^(n-i+k-j))
  choose(i,k)*choose(n-i,j-k)*(beta(k+((1-phi0)*alpha0)/phi0,i-
k+((1-phi0)*(1-alpha0))/phi0)/beta(((1-phi0)*alpha0)/phi0,((1-
phi0)*(1-alpha0))/phi0))*beta(j-k+((1-phi0)*beta0)/phi0,n-i-
j+k+((1-phi0)*(1-beta0))/phi0)/beta(((1-phi0)*beta0)/phi0,((1-
phi0)*(1-beta0))/phi0))
}
#####
Q0el<-function(i,j){
  ks<-(max(0,i+j-n):(min(i,j)))
  sum(Q0elk(i,j,ks))
}
# Step 2: Fill Matrix entries
N0Max<-n
Pt<-matrix(0,nrow=(N0Max+1),ncol=(N0Max+1))
for(l in 0:N0Max){
  for(k in 0:N0Max){
    Pt[l+1,k+1]<-Q0el(l,k)
  }
}
# Calculate the steady-state probability vector
pvec<-Re(eigen(t(Pt), symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec<-pvec/(sum(pvec))
##### steady-state ARL calculation##### (OoC case)
q0<-0
listRL<-c()
sims<-10000
for(l in 1:sims){
  N0<-sample(0:n,1,replace=FALSE,prob=pvec)
  Q0<-q0
  N1<-rbetabinom(1,N0,alpha0,phi0)+rbetabinom(1,n-N0,beta0,phi0)
  Q1<-(1/s)*round((lambda*N1+(1-lambda)*Q0)/(1/s))
  j<-1
  while(Q1>=11&j<=200){
    j<-(j+1);N0<-N1;Q0<-Q1
    N1<-rbetabinom(1,N0,alpha0,phi0)+rbetabinom(1,n-
N0,beta0,phi0)
    Q1<-(1/s)*round((lambda*N1+(1-lambda)*Q0)/(1/s))
  }
  if(j>200){
    js<-j
    N0s<-N1;

```

```

    Q0s<-Q1;
    N1s<-rbetabinom(1,N0s,alpha1,phi1)+rbetabinom(1,n-
N0s,beta1,phi1)
    Q1s<-(1/s)*round((lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s)/(1/s))
    while(Q1s>=l1){
        js<-(js+1);N0s<-N1s;Q0s<-Q1s
        N1s<-rbetabinom(1,N0s,alpha1,phi1)+rbetabinom(1,n-
N0s,beta1,phi1)
        Q1s<-(1/s)*round((lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s)/(1/s))
    }
    listRL[l]<-js
}
else{next}
}
LR1<-length(na.exclude(listRL))
#calculation of the ssARL
ARL1<-mean(na.exclude(listRL)-200)
SDRL1<-sd(na.exclude(listRL)-200)
sel<-sd(na.exclude(listRL)-200)/sqrt(length(na.exclude(listRL)))
# print the results
cat(" n:",n," mu0:",mu0," rho0:",rho0," phi0:",phi0,"
shift:",ds," s:",s,
    " lambda:",lambda," LCL:",l1," ARL:",ARL1," SDRL:",SDRL1,"
s.e:",sel," Length:",LR1,"\n")

```

Παράρτημα Z: Προτεινόμενα μονόπλευρα διαγράμματα s-EWMA για διεργασίες BINARCH(1)

Z1: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BINARCH(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων

```
# Markov Chain method for ARL calculation of the s-EWMA chart
# Case of BINARCH(1)
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)
a00<-0.1; # parameter a00
a01<-0.2; # parameter a01
n<-30; # sample size
u<-29; # u value
lam<-0.45; # lambda value
s<-4; # s value
mu0<-(n*a00)/(1-a01) # IC process mean
# Construction of the Transition Probabilities Matrix P
# Step 1: Define the transition probabilities
myfun1<-function(x1,x2){
  choose(n,x2)*((a00+a01*x1/n)^x2)*((1-a00-a01*x1/n)^(n-x2))
}
P0<-matrix(0,ncol=(n+1),nrow=(n+1))
for(i in 0:n){
  for(j in 0:n){
    P0[i+1,j+1]<-myfun1(i,j)
  }
}
# Calculate the steady-state probability vector
pvec<-Re(eigen(t(P0),symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec<-pvec/sum(pvec)
xs1<-0:n
plot(xs1,pvec,type="h")
points(xs1,pvec,pch=18)
# construction of the transition probability matrix Q
UCL<-u/s # control limit UCLs
q0<-0 # q0 value
nmax<-ceiling((1/lam)*(UCL-(1/(2*s))))-1)
ulist<-seq(0,UCL-1/s,by=1/s)
nlist<-0:nmax
tau1<-rep(ulist,length(nlist))
tau2<-rep(nlist,each=length(ulist))
A0<-cbind(tau1,tau2)
pabcd<-function(a,b,c,d){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*d)*myfun1(c,a)
}
```

```

plabcd<-function(a,b){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*q0)*pvec[a+1]
}
# determine the initial probabilities vector
dim1<-(dim(A0)[1])
vec1<-c()
for(j in 1:dim1){
  vec1[j]<-plabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]])
}
# determine the transition probability matrix Q - IC case
Q0<-matrix(0,ncol=dim1,nrow=dim1)
for(j in 1:dim1){
  for(i in 1:dim1){
    Q0[i,j]<-
pabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]],A0[i,][[2]],A0[i,][[1]])
  }
}
# calculation of the IC zsARL
ARL0<-1+vec1%%solve(diag(dim1)-Q0)%%rep(1,dim1)
zsARL0<-ARL0[1,1]
#print zsARL
zsARL0

```

Z2: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BINARCH(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων

```

# Markov Chain method for ssARL calculation of the s-EWMA chart
# Case of BINARCH(1) model
a00<-0.1; # parameter a00
a01<-0.2; # parameter a01
n<-30; # sample size
u<-29; # u value
lam<-0.45; # lambda value
s<-4; # s value
mu0<-(n*a00)/(1-a01) # IC process mean
# Construction of the Transition Probabilities Matrix P
# Step 1: Define the transition probabilities
myfun1<-function(x1,x2){
  choose(n,x2)*((a00+a01*x1/n)^x2)*((1-a00-a01*x1/n)^(n-x2))
}
P0<-matrix(0,ncol=(n+1),nrow=(n+1))
for(i in 0:n){
  for(j in 0:n){
    P0[i+1,j+1]<-myfun1(i,j)
  }
}

```



```

# Calculate the steady-state probability vector
pvec<-Re(eigen(t(P0),symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec<-pvec/sum(pvec)
xs1<-0:n
plot(xs1,pvec,type="h")
points(xs1,pvec,pch=18)
# construction of the transition probability matrix Q
UCL<-u/s # control limit UCLs
q0<-0 # q0 value
nmax<-ceiling((1/lam)*(UCL-(1/(2*s)))-1)
ulist<-seq(0,UCL-1/s,by=1/s)
nlist<-0:nmax
taul<-rep(ulist,length(nlist))
tau2<-rep(nlist,each=length(ulist))
A0<-cbind(taul,tau2)
pabcd<-function(a,b,c,d){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*d)*myfun1(c,a)
}
plabcd<-function(a,b){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*q0)*pvec[a+1]
}
# determine the initial probabilities vector
dim1<-(dim(A0)[1])
vec1<-c()
for(j in 1:dim1){
  vec1[j]<-plabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]])
}
# determine the transition probability matrix Q - IC case
Q0<-matrix(0,ncol=dim1,nrow=dim1)
for(j in 1:dim1){
  for(i in 1:dim1){
    Q0[i,j]<-
pabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]],A0[i,][[2]],A0[i,][[1]])
  }
}
# calculation of the IC zsARL
ARL0<-1+vec1%%solve(diag(dim1)-Q0)%%rep(1,dim1)
zsARL0<-ARL0[1,1]
##### ssARL calculation ##### (OOC case)
# Construction of the Transition Probabilities Matrix P1
a10<-1.5*a00 # shift in a00
a11<-1.0*a01 # shift in a11. Here, I did not consider a shift
mul<-(n*a10)/(1-a11) #OOC process mean
# Step 1: Define the transition probabilities
myfun2<-function(x1,x2){

```

```

    choose(n,x2)*((a10+a11*x1/n)^x2)*((1-a10-a11*x1/n)^(n-x2))
  }
P1<-matrix(0,ncol=(n+1),nrow=(n+1))
for(i in 0:n){
  for(j in 0:n){
    P1[i+1,j+1]<-myfun2(i,j)
  }
}
# Calculate the steady-state probability vector
pvec1<-Re(eigen(t(P1),symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec1<-pvec1/sum(pvec1)
pabcdout<-function(a,b,c,d){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*d)*myfun2(c,a)
}
plabcdout<-function(a,b){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*q0)*pvec1[a+1]
}

Q1<-matrix(0,ncol=dim1,nrow=dim1)
for(j in 1:dim1){
  for(i in 1:dim1){
    Q1[i,j]<-
pabcdout(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]],A0[i,][[2]],A0[i,][[1]])
  }
}
####
veclout<-c()
for(j in 1:dim1){
  veclout[j]<-plabcdout(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]])
}

# steady-state vector
wvec<-Re(eigen(t(Q0),symmetric=FALSE)$vectors[,1])
wvec<-wvec/sum(wvec)
#calculation of the ssARL

zsARL1<-1+veclout%%solve(diag(dim1)-Q1)%%rep(1,dim1)
zsARL1<-zsARL1[1,1]
#####
ssARL1<-wvec%%solve(diag(dim1)-Q1)%%rep(1,dim1)
ssARL1<-ssARL1[1,1]
# print the results
cat("s:",s," n:",n," mu0:",mu0," mu1:",mu1," u:",u,"
ARL0:",zsARL0," ARL1:",zsARL1," ssARL:",ssARL1,"\n")

```

Z3: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση

```

# Simulation study s-EWMA for BINARCH(1)
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)
library(VGAM)
## define a function for the IC calculations
simBINARCH1Uewma<-function(n,a00,a01,lambda,u,s,sims){
  mu0<-(n*a00)/(1-a01)#IC process mean
# Construction of the Transition Probabilities Matrix P
# Step 1: Define the transition probabilities
myfun1<-function(x1,x2){
  choose(n,x2)*((a00+a01*x1/n)^x2)*((1-a00-a01*x1/n)^(n-x2))
}
# Step 2: Fill Matrix entries
P0<-matrix(0,ncol=(n+1),nrow=(n+1))
for(i in 0:n){
  for(j in 0:n){
    P0[i+1,j+1]<-myfun1(i,j)
  }
}
# Calculate the steady-state probability vector
pvec<-Re(eigen(t(P0),symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec<-pvec/sum(pvec)
# IC zsARL calculation
UCL<-u/s #control limit UCLs
q0<-floor(mu0)#q0 value
# Simulation
listRL<-c()
#sims<-10000
for(l in 1:sims){
  N0<-sample(0:n,1,replace=FALSE,prob=pvec)
  Q0<-q0
  j<-1
  while(TRUE){
    N1<-rbinom(1,n,a00+a01*N0/n)
    Q1<-(1/s)*round((lambda*N1+(1-lambda)*Q0)/(1/s))
    if(Q1>UCL){listRL[l]<-j;break}
    else{j<-(j+1);N0<-N1;Q0<-Q1}
  }
}
# calculation of the IC zsARL
ARL0<-mean(listRL)
se<-sd(listRL)/sqrt(sims)
# print the results
cat(n,a00,a01,s,lambda,UCL,ARL0,se,"\n")
}
## apply the function for the IC calculations

```

```
simBINARCH1Uewma (n=30, a00=0.20, a01=0.68, lambda=0.13,
                  u=90, s=4, sims=100000)
```

Z4: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση

```
# Simulation study s-EWMA for BINARCH(1)
##### ssARL calculation ##### (OOC case)
n<-30 #sample size
a00<-0.20 #IC parameter a00
a01<-0.68 #IC parameter a01
mu0X<-n*a00/(1-a01) #IC process mean
a10<-1*a00 # OOC parameter a10
a11<-a01+0.1 #OOC parameter a11
mu1X<-n*a10/(1-a11) #OOC process mean
u<-90 # u value
s<-4 #s value
UCL<-u/s #control limit UCLs
lambda<-0.13 # smoothing parameter
q0<-floor(mu0X)#q0 value
##### steady-state ARL calculation##### (OoC case)
#Simulation
listRL<-vector()
it<-100000
for(l1 in 1:it){
X00<-rbinom(1,n,0.5)
list1<-c()
list1[1]<-X00
for(i2 in 2:500){
  list1[i2]<-rbinom(1,n,a00+a01*X00/n)
  X00<-list1[i2]
}
list1<-list1[101:500]
MAX0<-length(list1)
N0<-list1[MAX0]
Q0<-q0
N1<-rbinom(1,n,a00+a01*N0/n)
Q1<-(1/s)*round((lambda*N1+(1-lambda)*Q0)/(1/s))
j<-1
while(Q1<=u&j<=200){
  j<-(j+1);N0<-N1;Q0<-Q1
  N1<-rbinom(1,n,a00+a01*N0/n)
  Q1<-(1/s)*round((lambda*N1+(1-lambda)*Q0)/(1/s))
}
if(j>200){
  js<-j
  N0s<-N1;
```

```

Q0s<-Q1;
  N1s<-rbinom(1,n,a10+a11*N0s/n)
  Q1s<-(1/s)*round((lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s)/(1/s))
while(Q1s<=(u/s)){
  js<-(js+1);N0s<-N1s;Q0s<-Q1s
  N1s<-rbinom(1,n,a10+a11*N0s/n)
  Q1s<-(1/s)*round((lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s)/(1/s))
}
listRL[l1]<-js
}
else{next}
}
LR1<-length(na.exclude(listRL))
#calculation of the ssARL
ARL1<-mean(na.exclude(listRL)-200)
SDRL1<-sd(na.exclude(listRL)-200)
se1<-sd(na.exclude(listRL)-200)/sqrt(length(na.exclude(listRL)))

```

```

# print the results
cat(" n:",n," mu0:",mu0X," mu1:",mu1X," a00:",a00," a01:",a01,
    " a10:",a10," a11:",a11," lambda:",lambda," UCL:",u/s,
    " ARL:",ARL1," SDRL:",SDRL1," s.e:",se1,
    " Length:",LR1,"\n")

```

Z5: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BINARCH(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων

```

#Markov Chain method for ARL calculation of the s-EWMA chart
# Case of BINARCH(1)
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)
a00<-0.15; # parameter a00
a01<-0.625; # parameter a01
n<-30; #sample size
u<-3; # u value
lam<-1; # lambda value
s<-1; # s value
mu0<-(n*a00)/(1-a01) # IC process mean
# Construction of the Transition Probabilities Matrix P
# Step 1: Define the transition probabilities
myfun1<-function(x1,x2){
  choose(n,x2)*((a00+a01*x1/n)^x2)*((1-a00-a01*x1/n)^(n-x2))
}
P0<-matrix(0,ncol=(n+1),nrow=(n+1))
for(i in 0:n){
  for(j in 0:n){
    P0[i+1,j+1]<-myfun1(i,j)
  }
}
# Calculate the steady-state probability vector
pvec<-Re(eigen(t(P0),symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec<-pvec/sum(pvec)
xs1<-0:n
plot(xs1,pvec,type="h")
points(xs1,pvec,pch=18)
# IC zsARL calculation
LCL<-u/s # control limit LCLs
q0<-0 # q0 value
# construction of the transition probability matrix Q
nmin<-0
ulist<-seq(LCL+1/s,n,by=1/s)
nlist<-nmin:n
tau1<-rep(ulist,length(nlist))
tau2<-rep(nlist,each=length(ulist))
A0<-cbind(tau1,tau2)
pabcd<-function(a,b,c,d){

```

```

IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
IA(lam*a+(1-lam)*d)*myfun1(c,a)
}
plabcd<-function(a,b){
IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
IA(lam*a+(1-lam)*q0)*pvec[a+1]
}
dim1<-(dim(A0)[1])
# determine the initial probabilities vector
vec1<-c()
for(j in 1:dim1){
vec1[j]<-plabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]])
}
# determine the transition probability matrix Q - IC case
Q0<-matrix(0,ncol=dim1,nrow=dim1)
for(j in 1:dim1){
for(i in 1:dim1){
Q0[i,j]<-
pabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]],A0[i,][[2]],A0[i,][[1]])
}
}
# calculation of the IC zsARL
ARL0<-1+vec1%%solve(diag(dim1)-Q0)%%rep(1,dim1)
zsARL0<-ARL0[1,1]
# print the result
zsARL0

```

Z6: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BINARCH(1) με τη χρήση της μεθόδου των Μαρκοβιανών αλυσίδων

```

# Markov Chain method for ssARL calculation of the s-EWMA chart
# Case of BINARCH(1) model
##### ssARL calculation ##### (OOC case)
a00<-0.05; #IC parameter a00
a01<-0.85; #IC parameter a01
n<-30; #sample size
u<-2; # u value
s<-2; #s value
LCL<-u/s # control limit LCLs
lam<-0.65; # smoothing parameter
q0<-0 #q0 value
mu0<-(n*a00)/(1-a01) #IC process mean
#construction of the transition probability matrix P
# Step 1: Define the transition probabilities
myfun1<-function(x1,x2){
choose(n,x2)*((a00+a01*x1/n)^x2)*((1-a00-a01*x1/n)^(n-x2))
}

```

```

P0<-matrix(0,ncol=(n+1),nrow=(n+1))
for(i in 0:n){
  for(j in 0:n){
    P0[i+1,j+1]<-myfun1(i,j)
  }
}
# Calculate the steady-state probability vector
pvec<-Re(eigen(t(P0),symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec<-pvec/sum(pvec)
xs1<-0:n
plot(xs1,pvec,type="h")
points(xs1,pvec,pch=18)
#####
nmin<-0
ulist<-seq(LCL+1/s,n,by=1/s)
nlist<-nmin:n
tau1<-rep(ulist,length(nlist))
tau2<-rep(nlist,each=length(ulist))
A0<-cbind(tau1,tau2)
# construction of the transition probability matrix Q
pabcd<-function(a,b,c,d){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*d)*myfun1(c,a)
}
plabcd<-function(a,b){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*q0)*pvec[a+1]
}
dim1<-(dim(A0)[1])
# determine the initial probabilities vector
vec1<-c()
for(j in 1:dim1){
  vec1[j]<-plabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]])
}
# determine the transition probability matrix Q - IC case
Q0<-matrix(0,ncol=dim1,nrow=dim1)
for(j in 1:dim1){
  for(i in 1:dim1){
    Q0[i,j]<-
pabcd(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]],A0[i,][[2]],A0[i,][[1]])
  }
}
# calculation of the IC zsARL
ARL0<-1+vec1%%solve(diag(dim1)-Q0)%%rep(1,dim1)
zsARL0<-ARL0[1,1]
##### steady-state ARL calculation##### (OoC case)
a10<-1*a00 # shift in a00. Here, I did not consider a shift

```



```

a11<-a01-0.05 # shift in a11.
mul<-(n*a10)/(1-a11)#OOC process mean
# Step 1: Define the transition probabilities
myfun2<-function(x1,x2){
  choose(n,x2)*((a10+a11*x1/n)^x2)*((1-a10-a11*x1/n)^(n-x2))
}
# Step2: Fill Matrix entries
P1<-matrix(0,ncol=(n+1),nrow=(n+1))
for(i in 0:n){
  for(j in 0:n){
    P1[i+1,j+1]<-myfun2(i,j)
  }
}
# Calculate the steady-state probability vector
pvec1<-Re(eigen(t(P1),symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec1<-pvec1/sum(pvec1)
pabcdout<-function(a,b,c,d){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*d)*myfun2(c,a)
}
plabcdout<-function(a,b){
  IA<-function(x){ifelse(b-(0.5/s)<=x&b+(0.5/s)>x,1,0)}
  IA(lam*a+(1-lam)*q0)*pvec1[a+1]
}
# determine the transition probability matrix Q1 - OOC case
Q1<-matrix(0,ncol=dim1,nrow=dim1)
for(j in 1:dim1){
  for(i in 1:dim1){
    Q1[i,j]<-
pabcdout(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]],A0[i,][[2]],A0[i,][[1]])
  }
}
veclout<-c()
for(j in 1:dim1){
  veclout[j]<-plabcdout(A0[j,][[2]],A0[j,][[1]])
}
# steady-state vector
wvec<-Re(eigen(t(Q0),symmetric=FALSE)$vectors[,1])
wvec<-wvec/sum(wvec)
#calculation of the ssARL
zsARL1<-1+veclout%%solve(diag(dim1)-Q1)%%rep(1,dim1)
zsARL1<-zsARL1[1,1]
ssARL1<-wvec%%solve(diag(dim1)-Q1)%%rep(1,dim1)
ssARL1<-ssARL1[1,1]
# print the results
cat("s:",s," n:",n," mu0:",mu0," mu1:",mu1," u:",u,
    " ARL0:",zsARL0," ARL1:",zsARL1," ssARL:",ssARL1,"\n")

```

Z7: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση

```
# Simulation study s-EWMA for BINARCH(1)
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)
library(VGAM)
## define a function for the IC calculations
simBINARCH1Uewma<-function(n,a00,a01,lambda,u,s,sims){
  UCL<-u/s #control limit LCLs
  mu0<-(n*a00)/(1-a01)#IC process mean
  q0<-floor(mu0)#value of q0
# Construction of the Transition Probabilities Matrix P
# Step 1: Define the transition probabilities
myfun1<-function(x1,x2){
  choose(n,x2)*((a00+a01*x1/n)^x2)*((1-a00-a01*x1/n)^(n-x2))
}
# Step 2: Fill Matrix entries
P0<-matrix(0,ncol=(n+1),nrow=(n+1))
for(i in 0:n){
  for(j in 0:n){
    P0[i+1,j+1]<-myfun1(i,j)
  }
}
# Calculate the steady-state probability vector
pvec<-Re(eigen(t(P0),symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec<-pvec/sum(pvec)
listRL<-c()
# Simulation
for(l in 1:sims){
  N0<-sample(0:n,1,replace=FALSE,prob=pvec)
  Q0<-q0
  j<-1
  while(TRUE){
    N1<-rbinom(1,n,a00+a01*N0/n)
    Q1<-(1/s)*round((lambda*N1+(1-lambda)*Q0)/(1/s))
    if(Q1<UCL){listRL[l]<-j;break}
    else{j<-(j+1);N0<-N1;Q0<-Q1}
  }
}
# calculation of the IC zsARL
ARL0<-mean(listRL)
se<-sd(listRL)/sqrt(sims)
# print the results
cat(n,a00,a01,s,lambda,UCL,ARL0,se,"\n")}
## apply the function for the IC calculations
simBINARCH1Uewma(n=30,a00=0.20,a01=0.60,lambda=0.21,
```

```
u=42,s=4,sims=100000)
```

Z8: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων s-EWMA για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση

```
# Simulation study s-EWMA for BINARCH(1)
##### ssARL calculation ##### (OOC case)
n<-30 #sample size
a00<-0.20 #IC parameter a00
a01<-0.60 #IC parameter a01
mu0X<-n*a00/(1-a01) #IC process mean
a10<-1*a00 #OOC parameter a10
a11<-a01-0.1 #OOC parameter a11
mu1X<-n*a10/(1-a11) #OOC process mean
u<-42 # u value
s<-4 #s value
LCL<-u/s #control limit LCLs
lambda<-0.21 # smoothing parameter
q0<-floor(mu0X)#q0 value
##### steady-state ARL calculation##### (OoC case)
#Simulation
listRL<-vector()
it<-100000
for(l1 in 1:it){
  X00<-rbinom(1,n,0.5)
  list1<-c()
  list1[1]<-X00
  for(i2 in 2:500){
    list1[i2]<-rbinom(1,n,a00+a01*X00/n)
    X00<-list1[i2]
  }
  list1<-list1[101:500]
  MAX0<-length(list1)
  N0<-list1[MAX0]
  Q0<-q0
  N1<-rbinom(1,n,a00+a01*N0/n)
  Q1<-(1/s)*round((lambda*N1+(1-lambda)*Q0)/(1/s))
  j<-1
  while(Q1>=LCL&j<=200){
    j<-(j+1);N0<-N1;Q0<-Q1
    N1<-rbinom(1,n,a00+a01*N0/n)
    Q1<-(1/s)*round((lambda*N1+(1-lambda)*Q0)/(1/s))
  }
  if(j>200){
    js<-j
    N0s<-N1;
    Q0s<-Q1;
    N1s<-rbinom(1,n,a10+a11*N0s/n)
```

```

    Q1s<-(1/s)*round((lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s)/(1/s))
while(Q1s>=(u/s)){
    js<-(js+1);N0s<-N1s;Q0s<-Q1s
    N1s<-rbinom(1,n,a10+a11*N0s/n)
    #Q1s<-round(lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s)
    Q1s<-(1/s)*round((lambda*N1s+(1-lambda)*Q0s)/(1/s))
}
listRL[l1]<-js
}
else{next}
}
LR1<-length(na.exclude(listRL))
#calculation of the ssARL
ARL1<-mean(na.exclude(listRL)-200)
SDRL1<-sd(na.exclude(listRL)-200)
sel<-sd(na.exclude(listRL)-200)/sqrt(length(na.exclude(listRL)))
# print the results
cat(" n:",n," mu0:",mu0X," mu1:",mu1X," a00:",a00,
    " a01:",a01," a10:",a10," a11:",a11," lambda:",lambda,
    " LCL:",u/s," ARL:",ARL1," SDRL:",SDRL1," s.e.:",sel,
    " Length:",LR1,"\n")

```

Παράρτημα Η: Προτεινόμενα μονόπλευρα διαγράμματα CUSUM για διεργασίες BINARCH(1)

H1: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων CUSUM για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση

```

# Simulation study CUSUM for BINARCH(1)
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)
library(VGAM)
n<-30#sample size
a00<-0.05#IC parameter a00
a01<-0.5 #IC parameter a01
delta<-1.2 # shift in a00
tau<-0.0 # shift in a01
a10<-delta*a00 #OOC parameter a10
a11<-a01+tau #OOC parameter a11
mu0<-(n*a00)/(1-a01) #IC process mean
mu1<-(n*a10)/(1-a11) #OOC process mean
# Construction of the Transition Probabilities Matrix P
# Step 1: Define the transition probabilities
myfun1<-function(x1,x2){
  choose(n,x2)*((a00+a01*x1/n)^x2)*((1-a00-a01*x1/n)^(n-x2))
}
# Step 2: Fill Matrix entries
P0<-matrix(0,ncol=(n+1),nrow=(n+1))

```

```

for(i in 0:n){
  for(j in 0:n){
    P0[i+1,j+1]<-myfun1(i,j)
  }
}
# Calculate the steady-state probability vector
pvec<-Re(eigen(t(P0),symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec<-pvec/sum(pvec)
# IC zsARL calculation
# Simulation
for(h in seq(2.02,3.2,by=0.01)){
sims<-50000
listRL<-c()
for(l in 1:sims){
  N0<-sample(0:n,1,replace=FALSE,prob=pvec)
  C0U<-0
  j<-1
  while(TRUE){
    N1<-rbinom(1,n,a00+a01*N0/n)
    K1<-N1*log((a10+a11*N0/n)/(a00+a01*N0/n))+(n-N1)*log((1-a10-
a11*N0/n)/(1-a00-a01*N0/n))
    C1U<-max(0,C0U+K1) # Ct=max(0,Ct-1+Kt)
    if(C1U>=h){listRL[l]<-j;break}
    else{j<-(j+1);N0<-N1;C0U<-C1U}}
# calculation of the IC zsARL
ARL0<-mean(listRL)
SDRL0<-sd(listRL)
se<-sd(listRL)/sqrt(sims)
# print the results
cat(n,a00,a01,a10,a11,mu0,mu1,h,ARL0,SDRL0,se,"\n")}

```

H2: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων CUSUM για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση

```

# Simulation study CUSUM for BINARCH(1)
##### ssARL calculation ##### (OOC case)
n<-30 #sample size
a00<-0.05 #IC parameter a00
a01<-0.50 #IC parameter a01
mu0X<-n*a00/(1-a01) #IC process mean
deltaFIX<-1.2
a10FIX<-deltaFIX*a00 #fixed shift in a00
tauFIX<-0.0
a11FIX<-a01+tauFIX #fixed shift in a11
h<-2.08 # control limit
for(delta in c(1,1.1,1.2,1.3,1.5,2.0)){
for(tau in c(0,0.05,0.07,0.10)){

```

```

a10<-delta*a00 #OOC parameter a10
a11<-a01+tau #OOC parameter a11
mulX<-n*a10/(1-a11) #OOC process mean
# Construction of the Transition Probabilities Matrix P
# Step 1: Define the transition probabilities
myfun1<-function(x1,x2){
  choose(n,x2)*((a00+a01*x1/n)^x2)*((1-a00-a01*x1/n)^(n-x2))
}
P0<-matrix(0,ncol=(n+1),nrow=(n+1))
for(i in 0:n){
  for(j in 0:n){
    P0[i+1,j+1]<-myfun1(i,j)
  }
}
# Calculate the steady-state probability vector
pvec<-Re(eigen(t(P0),symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec<-pvec/sum(pvec)
##### steady-state ARL calculation##### (OoC case)
#Simulation
listRL<-vector()
it<-5000
for(l1 in 1:it){
N0<-sample(0:n,1,replace=FALSE,prob=pvec)
C0U<-0
N1<-rbinom(1,n,a00+a01*N0/n)
K1<-N1*log((a10FIX+a11FIX*N0/n)/(a00+a01*N0/n))+(n-N1)*log((1-
a10FIX-a11FIX*N0/n)/(1-a00-a01*N0/n))
C1U<-max(0,C0U+K1)
j<-1
while(C1U<h&j<=200){
  j<-(j+1);N0<-N1;C0U<-C1U
  N1<-rbinom(1,n,a00+a01*N0/n)
  K1<-N1*log((a10FIX+a11FIX*N0/n)/(a00+a01*N0/n))+(n-N1)*log((1-
a10FIX-a11FIX*N0/n)/(1-a00-a01*N0/n))
  C1U<-max(0,C0U+K1)
}
if(j>200){
  js<-j
  N0s<-N1;
  C0Us<-C1U;
  N1s<-rbinom(1,n,a10+a11*N0s/n)
  K1s<-N1s*log((a10FIX+a11FIX*N0s/n)/(a00+a01*N0s/n))+(n-
N1s)*log((1-a10FIX-a11FIX*N0s/n)/(1-a00-a01*N0s/n))
  C1Us<-max(0,C0Us+K1s)
  while(C1Us<h){
    js<-(js+1);N0s<-N1s;C0Us<-C1Us
  }
}
}

```

```

N1s<-rbinom(1,n,a10+a11*N0s/n)

K1s<-N1s*log((a10FIX+a11FIX*N0s/n)/(a00+a01*N0s/n))+(n-
N1s)*log((1-a10FIX-a11FIX*N0s/n)/(1-a00-a01*N0s/n))
C1Us<-max(0,C0Us+K1s)
}
listRL[l1]<-js
}
else{next}
}
LR1<-length(na.exclude(listRL))
#calculation of the ssARL
ARL1<-mean(na.exclude(listRL)-200)
SDRL1<-sd(na.exclude(listRL)-200)
sel<-sd(na.exclude(listRL)-200)/sqrt(length(na.exclude(listRL)))
# print the results
cat(" n:",n," mu0:",mu0X," mu1:",mu1X," a00:",a00,
    " a01:",a01," a10:",a10," a11:",a11," d:",delta,
    " tau:",tau," H:",h," ARL:",ARL1," SDRL:",SDRL1,
    " s.e.:",sel," Length:",LR1,"\n")}}

```

H3: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων Combined CUSUM για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση

```

# Simulation study Combined CUSUM for BINARCH(1)
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)
library(VGAM)
n<-30 #sample size
a00<-0.05 #IC parameter a00
a01<-0.5 #IC parameter a01
##### for 1st CUSUM
deltaA<-1.2 # fixed shift in a00
tauA<-0.0 # fixed shift in a01
##### for 2nd CUSUM
deltaB<-1.0 # fixed shift in a00
tauB<-0.1 # fixed shift in a01
#### below, fixed values in OOC parameters for 1st CUSUM
a10A<-deltaA*a00
a11A<-a01+tauA
##### below, fixed values in OOC parameters for 2nd CUSUM
a10B<-deltaB*a00
a11B<-a01+tauB
mu0<-(n*a00)/(1-a01) #IC process mean
mu1A<-(n*a10A)/(1-a11A) #OOC process mean, 1st CUSUM
mu1B<-(n*a10B)/(1-a11B) #OOC process mean, 2nd CUSUM
# Construction of the Transition Probabilities Matrix P
# Step 1: Define the transition probabilities

```

```

myfun1<-function(x1,x2){
  choose(n,x2)*((a00+a01*x1/n)^x2)*((1-a00-a01*x1/n)^(n-x2))
}
# Step 2: Fill Matrix entries
P0<-matrix(0,ncol=(n+1),nrow=(n+1))
for(i in 0:n){
  for(j in 0:n){
    P0[i+1,j+1]<-myfun1(i,j)
  }
}
# Calculate the steady-state probability vector
pvec<-Re(eigen(t(P0),symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec<-pvec/sum(pvec)
# IC zsARL calculation
# Simulation
for(js in seq(0.01,1,by=0.05)){
hA<-2.12+js # control limit for 1st CUSUM
hB<-2.05+js
sims<-50000
listRL<-c()
for(l in 1:sims){
  N0<-sample(0:n,1,replace=FALSE,prob=pvec)
  COUA<-0 # initial value 1st CUSUM
  COUB<-0 # initial value 2nd CUSUM

  j<-1
  while(TRUE){
    N1<-rbinom(1,n,a00+a01*N0/n)
    # below 1st CUSUM
    K1A<-N1*log((a10A+a11A*N0/n)/(a00+a01*N0/n))+(n-N1)*log((1-
a10A-a11A*N0/n)/(1-a00-a01*N0/n))
    C1UA<-max(0,COUA+K1A)
    # below 2nd CUSUM
    K1B<-N1*log((a10B+a11B*N0/n)/(a00+a01*N0/n))+(n-N1)*log((1-
a10B-a11B*N0/n)/(1-a00-a01*N0/n))
    C1UB<-max(0,COUB+K1B)

    if(C1UA>=hA|C1UB>=hB){listRL[l]<-j;break}
    # if(Q1L<=LCL){listRL[l]<-j;break}
    else{j<-(j+1);N0<-N1;COUA<-C1UA;COUB<-C1UB}
  }
}
# calculation of the IC zsARL
ARL0<-mean(listRL)
SDRL0<-sd(listRL)
se<-sd(listRL)/sqrt(sims)
# print the results

```



```

cat(" n:",n," a00:",a00," a01:",a01," a10A:",a10A,
    " a11A:",a11A," a10B:",a10B," a11B:",a11B," mu0:",mu0,
    " mu1A:",mu1A," mu1B:",mu1B," hA:",hA," hB:",hB,
    " ARL0:",ARL0," SDRL0:",SDRL0," se:",se,"\n")

```

**H4: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων
 Combined CUSUM για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση**

```

# Simulation study Combined CUSUM for BINARCH(1)
##### ssARL calculation ##### (OOC case)
n<-30 #sample size
a00<-0.05 #IC parameter a00
a01<-0.50 #IC parameter a01
mu0X<-n*a00/(1-a01) #IC process mean
deltaFIXA<-1.2
tauFIXA<-0.0
hA<-2.33 # control limit 1st CUSUM
#####
deltaFIXB<-1.0
tauFIXB<-0.1
hB<-2.26 # control limit 2nd CUSUM
# below fixed values a10, a11 for lRt, 1st CUSUM
a10FIXA<-deltaFIXA*a00 # shift in a00
a11FIXA<-a01+tauFIXA # shift in a11.
# below fixed values a10, a11 for lRt, 2nd CUSUM
a10FIXB<-deltaFIXB*a00 # shift in a00
a11FIXB<-a01+tauFIXB # shift in a11.
for(delta in c(1,1.1,1.2,1.3,1.5,2.0)){
for(tau in c(0,0.05,0.07,0.10)){
a10<-delta*a00 # shift in a00
a11<-a01+tau # shift in a11.
mu1X<-n*a10/(1-a11) #OOC process mean
# Construction of the Transition Probabilities Matrix P
# Step 1: Define the transition probabilities
myfun1<-function(x1,x2){
  choose(n,x2)*((a00+a01*x1/n)^x2)*((1-a00-a01*x1/n)^(n-x2))
}
P0<-matrix(0,ncol=(n+1),nrow=(n+1))
for(i in 0:n){
  for(j in 0:n){
    P0[i+1,j+1]<-myfun1(i,j)
  }
}
# Calculate the steady-state probability vector
pvec<-Re(eigen(t(P0),symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec<-pvec/sum(pvec)
##### steady-state ARL calculation##### (OoC case)

```

```

#Simulation
listRL<-vector()
it<-2000
for(l1 in 1:it){
N0<-sample(0:n,1,replace=FALSE,prob=pvec)
C0UA<-0
C0UB<-0
N1<-rbinom(1,n,a00+a01*N0/n)
# below 1st CUSUM
K1A<-N1*log((a10FIXA+a11FIXA*N0/n)/(a00+a01*N0/n))+(n-
N1)*log((1-a10FIXA-a11FIXA*N0/n)/(1-a00-a01*N0/n))
C1UA<-max(0,C0UA+K1A)
# below 2nd CUSUM
K1B<-N1*log((a10FIXB+a11FIXB*N0/n)/(a00+a01*N0/n))+(n-
N1)*log((1-a10FIXB-a11FIXB*N0/n)/(1-a00-a01*N0/n))
C1UB<-max(0,C0UB+K1B)
#####
j<-1
while(C1UA<hA&C1UB<hB&j<=200){
  j<-(j+1);N0<-N1;C0UA<-C1UA;C0UB<-C1UB
  N1<-rbinom(1,n,a00+a01*N0/n)
  ### 1st CUSUM
  K1A<-N1*log((a10FIXA+a11FIXA*N0/n)/(a00+a01*N0/n))+(n-
N1)*log((1-a10FIXA-a11FIXA*N0/n)/(1-a00-a01*N0/n))
  C1UA<-max(0,C0UA+K1A)
  ### 2nd CUSUM
  K1B<-N1*log((a10FIXB+a11FIXB*N0/n)/(a00+a01*N0/n))+(n-
N1)*log((1-a10FIXB-a11FIXB*N0/n)/(1-a00-a01*N0/n))
  C1UB<-max(0,C0UB+K1B)
}
if(j>200){
  js<-j
  N0s<-N1;
  C0UAs<-C1UA;
  C0UBs<-C1UB;
  N1s<-rbinom(1,n,a10+a11*N0s/n)
  ## below 1st CUSUM
  K1As<-N1s*log((a10FIXA+a11FIXA*N0s/n)/(a00+a01*N0s/n))+(n-
N1s)*log((1-a10FIXA-a11FIXA*N0s/n)/(1-a00-a01*N0s/n))
  C1UAs<-max(0,C0UAs+K1As)
  ## below 2nd CUSUM
  K1Bs<-N1s*log((a10FIXB+a11FIXB*N0s/n)/(a00+a01*N0s/n))+(n-
N1s)*log((1-a10FIXB-a11FIXB*N0s/n)/(1-a00-a01*N0s/n))
  C1UBs<-max(0,C0UBs+K1Bs)
  #####
  while(C1UAs<hA&C1UBs<hB){

```

```

js<-(js+1);N0s<-N1s;COUAs<-C1UAs;COUBs<-C1UBs

N1s<-rbinom(1,n,a10+a11*N0s/n)

K1As<-N1s*log((a10FIXA+a11FIXA*N0s/n)/(a00+a01*N0s/n))+(n-
N1s)*log((1-a10FIXA-a11FIXA*N0s/n)/(1-a00-a01*N0s/n))
C1UAs<-max(0,COUAs+K1As)

K1Bs<-N1s*log((a10FIXB+a11FIXB*N0s/n)/(a00+a01*N0s/n))+(n-
N1s)*log((1-a10FIXB-a11FIXB*N0s/n)/(1-a00-a01*N0s/n))
C1UBs<-max(0,COUBs+K1Bs)
}
listRL[l1]<-js
}
else{next}
}

LR1<-length(na.exclude(listRL))
#calculation of the ssARL
ARL1<-mean(na.exclude(listRL)-200)
SDRL1<-sd(na.exclude(listRL)-200)
sel<-sd(na.exclude(listRL)-200)/sqrt(length(na.exclude(listRL)))
# print the results
cat(" n:",n," mu0:",mu0X," mu1:",mu1X," a00:",a00,
    " a01:",a01," a10:",a10," a11:",a11," d1:",deltaFIXA,
    " tau1:",tauFIXA," d2:",deltaFIXB," tau1:",tauFIXB,
    " Ha:",hA," Hb:",hB," ARL:",ARL1," SDRL:",SDRL1,
    " s.e:",sel," Length:",LR1,"\n")})}

```

H5: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων CUSUM για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση

```

# Simulation study CUSUM for BINARCH(1)
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)
library(VGAM)
n<-30 #sample size
a00<-0.05 #IC parameter a00
a01<-0.92 #IC parameter a01
delta<-0.8 # shift in a00
tau<-0.0 # shift in a01
a10<-delta*a00 #OOC parameter a10
a11<-a01-tau #OOC parameter a11
mu0<-(n*a00)/(1-a01) #IC process mean
mu1<-(n*a10)/(1-a11) #OOC process mean
# Construction of the Transition Probabilities Matrix P
# Step 1: Define the transition probabilities
myfun1<-function(x1,x2){

```

```

    choose(n,x2)*((a00+a01*x1/n)^x2)*((1-a00-a01*x1/n)^(n-x2))
}
# Step 2: Fill Matrix entries
P0<-matrix(0,ncol=(n+1),nrow=(n+1))
for(i in 0:n){
  for(j in 0:n){
    P0[i+1,j+1]<-myfun1(i,j)
  }
}
# Calculate the steady-state probability vector
pvec<-Re(eigen(t(P0),symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec<-pvec/sum(pvec) # marginal IC distribution
# design
for(h in seq(1.61,1.7,by=0.01)){
# IC zsARL calculation
# Simulation
sims<-5000
listRL<-c()
for(l in 1:sims){
  N0<-sample(0:n,1,replace=FALSE,prob=pvec)
  C0U<-0 # initial value
  j<-1
  while(TRUE){
    N1<-rbinom(1,n,a00+a01*N0/n)

    K1<-N1*log((a10+a11*N0/n)/(a00+a01*N0/n))+(n-N1)*log((1-a10-
a11*N0/n)/(1-a00-a01*N0/n))
    C1U<-max(0,C0U+K1) # Ct=max(0,Ct-1+Kt)
    if(C1U>=h){listRL[l]<-j;break}
    else{j<-(j+1);N0<-N1;C0U<-C1U}
  }
}
# calculation of the IC zsARL
ARL0<-mean(listRL)
SDRL0<-sd(listRL)
se<-sd(listRL)/sqrt(sims)
# print the results
cat(" n:",n," a00:",a00," a01:",a01," a10:",a10," a11:",a11,
    " mu0:",mu0, " mu1:",mu1, " h:",h, " ARL0:",ARL0,
    " SDRL0:",SDRL0, " se:",se,"\n")
}

```

Η6: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων CUSUM για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση

```

# Simulation study CUSUM for BINARCH(1)
##### ssARL calculation ##### (OOC case)
n<-30 #sample size

```

```

a00<-0.05 #IC parameter a00
a01<-0.92 #IC parameter a01
mu0X<-n*a00/(1-a01) # IC process mean
deltaFIX<-0.8
a10FIX<-deltaFIX*a00 #fixed shift in a00
tauFIX<-0.0
a11FIX<-a01-tauFIX #fixed shift in a11
h<-1.69 # control limit
for(delta in c(1,0.9,0.8,0.7,0.6,0.5,0.4,0.2)){
for(tau in c(0,0.05,0.10,0.15,0.20)){
a10<-delta*a00 # shift in a00
a11<-a01-tau # shift in a11
mu1X<-n*a10/(1-a11) #OOC process mean
# Construction of the Transition Probabilities Matrix P
# Step 1: Define the transition probabilities
myfun1<-function(x1,x2){
  choose(n,x2)*((a00+a01*x1/n)^x2)*((1-a00-a01*x1/n)^(n-x2))
}
P0<-matrix(0,ncol=(n+1),nrow=(n+1))
for(i in 0:n){
  for(j in 0:n){
    P0[i+1,j+1]<-myfun1(i,j)
  }
}
# Calculate the steady-state probability vector
pvec<-Re(eigen(t(P0),symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec<-pvec/sum(pvec)
##### steady-state ARL calculation#### (OoC case)
#Simulation
listRL<-vector()
it<-5000
for(l1 in 1:it){
N0<-sample(0:n,1,replace=FALSE,prob=pvec)
C0U<-0
N1<-rbinom(1,n,a00+a01*N0/n)
K1<-N1*log((a10FIX+a11FIX*N0/n)/(a00+a01*N0/n))+(n-N1)*log((1-
a10FIX-a11FIX*N0/n)/(1-a00-a01*N0/n))
C1U<-max(0,C0U+K1)
j<-1
while(C1U<h&j<=200){
  j<-(j+1);N0<-N1;C0U<-C1U
  N1<-rbinom(1,n,a00+a01*N0/n)
  K1<-N1*log((a10FIX+a11FIX*N0/n)/(a00+a01*N0/n))+(n-N1)*log((1-
a10FIX-a11FIX*N0/n)/(1-a00-a01*N0/n))
  C1U<-max(0,C0U+K1)
}
if(j>200){

```

```

js<-j
N0s<-N1;
C0Us<-C1U;

N1s<-rbinom(1,n,a10+a11*N0s/n)
K1s<-N1s*log((a10FIX+a11FIX*N0s/n)/(a00+a01*N0s/n))+(n-
N1s)*log((1-a10FIX-a11FIX*N0s/n)/(1-a00-a01*N0s/n))
C1Us<-max(0,C0Us+K1s)
while(C1Us<h){

  js<-(js+1);N0s<-N1s;C0Us<-C1Us

  N1s<-rbinom(1,n,a10+a11*N0s/n)

  K1s<-N1s*log((a10FIX+a11FIX*N0s/n)/(a00+a01*N0s/n))+(n-
N1s)*log((1-a10FIX-a11FIX*N0s/n)/(1-a00-a01*N0s/n))
  C1Us<-max(0,C0Us+K1s)
}
listRL[l1]<-js
}
else{next}
}
LR1<-length(na.exclude(listRL))
#calculation of the ssARL
ARL1<-mean(na.exclude(listRL)-200)
SDRL1<-sd(na.exclude(listRL)-200)
sel<-sd(na.exclude(listRL)-200)/sqrt(length(na.exclude(listRL)))
# print the results
cat(" n:",n," mu0:",mu0X," mu1:",mu1X," a00:",a00,
    " a01:",a01," a10:",a10," a11:",a11," d:",delta,
    " tau:",tau," H:",h," ARL:",ARL1," SDRL:",SDRL1,
    " s.e:",sel," Length:",LR1,"\n")}}

```

H7: Υπολογισμός της εντός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων

Combined CUSUM για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση

```

# Simulation study Combined CUSUM for BINARCH(1)
##### zero-state ARL calculation ##### (IC case)
library(VGAM)
n<-30 #sample size
a00<-0.05 #IC parameter a00
a01<-0.92 #IC parameter a01
##### for 1st CUSUM
deltaA<-0.8 # fixed shift in a00
tauA<-0.0 # fixed shift in a01
##### for 2nd CUSUM
deltaB<-1.0 # fixed shift in a00

```

```

tauB<-0.1 # fixed shift in a01
#### below, fixed values in lRt for 1st CUSUM
a10A<-deltaA*a00
a11A<-a01-tauA
#### below, fixed values in lRt for 2nd CUSUM
a10B<-deltaB*a00
a11B<-a01-tauB
mu0<-(n*a00)/(1-a01) #IC process mean
mu1A<-(n*a10A)/(1-a11A) #OOC process mean, 1st CUSUM
mu1B<-(n*a10B)/(1-a11B) #OOC process mean, 2nd CUSUM
# Construction of the Transition Probabilities Matrix P
# Step 1: Define the transition probabilities
myfun1<-function(x1,x2){
  choose(n,x2)*((a00+a01*x1/n)^x2)*((1-a00-a01*x1/n)^(n-x2))
}
# Step 2: Fill Matrix entries
P0<-matrix(0,ncol=(n+1),nrow=(n+1))
for(i in 0:n){
  for(j in 0:n){
    P0[i+1,j+1]<-myfun1(i,j)
  }
}
# Calculate the steady-state probability vector
pvec<-Re(eigen(t(P0),symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec<-pvec/sum(pvec)
# IC zsARL calculation
# Simulation
for(js in seq(0.01,1,by=0.05)){
hA<-1.69+js # control limit for 1st CUSUM
hB<-4.15+js # control limit for 2nd CUSUM
sims<-5000
listRL<-c()
for(l in 1:sims){
  N0<-sample(0:n,1,replace=FALSE,prob=pvec)
  C0UA<-0 # initial value 1st CUSUM
  C0UB<-0 # initial value 2nd CUSUM
  j<-1
  while(TRUE){
    N1<-rbinom(1,n,a00+a01*N0/n)
    #### below 1st CUSUM
    K1A<-N1*log((a10A+a11A*N0/n)/(a00+a01*N0/n))+(n-N1)*log((1-
a10A-a11A*N0/n)/(1-a00-a01*N0/n))
    C1UA<-max(0,C0UA+K1A)
    #### below 2nd CUSUM
    K1B<-N1*log((a10B+a11B*N0/n)/(a00+a01*N0/n))+(n-N1)*log((1-
a10B-a11B*N0/n)/(1-a00-a01*N0/n))
    C1UB<-max(0,C0UB+K1B)

```

```

        if(C1UA>=hA|C1UB>=hB){listRL[1]<-j;break}
        else{j<-(j+1);N0<-N1;C0UA<-C1UA;C0UB<-C1UB}
    }}
# calculation of the IC zsARL
ARL0<-mean(listRL)
SDRL0<-sd(listRL)
se<-sd(listRL)/sqrt(sims)
# print the results
cat(" n:",n," a00:",a00," a01:",a01," a10A:",a10A,
    " a11A:",a11A," a10B:",a10B," a11B:",a11B," mu0:",mu0,
    " mu1A:",mu1A," mu1B:",mu1B," hA:",hA," hB:",hB,
    " ARL0:",ARL0," SDRL0:",SDRL0," se:",se,"\n")

```

H8: Υπολογισμός της εκτός ελέγχου απόδοσης των κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων Combined CUSUM για διεργασίες BINARCH(1) με προσομοίωση

```

# Simulation study Combined CUSUM for BINARCH(1)
##### ssARL calculation ##### (OOC case)
n<-30#sample size
a00<-0.05 #IC parameter a00
a01<-0.92 #IC parameter a01
mu0X<-n*a00/(1-a01) #IC process mean
deltaFIXA<-0.8
tauFIXA<-0.0
hA<-2.0 # control limit 1st CUSUM
deltaFIXB<-1.0;tauFIXB<-0.1
hB<-4.46 # control limit 2nd CUSUM
# below fixed values a10, a11 for lRt, 1st CUSUM
a10FIXA<-deltaFIXA*a00 # shift in a00
a11FIXA<-a01-tauFIXA # shift in a11.
#below fixed values a10, a11 for lRt, 2nd CUSUM
a10FIXB<-deltaFIXB*a00 # shift in a00
a11FIXB<-a01-tauFIXB # shift in a11.
for(delta in c(1,0.9,0.8,0.7,0.5,0.3)){
for(tau in c(0,0.05,0.10,0.20)){
a10<-delta*a00 # shift in a00
a11<-a01-tau # shift in a11.
mu1X<-n*a10/(1-a11) #OOC process mean
# Construction of the Transition Probabilities Matrix P
# Step 1: Define the transition probabilities
myfun1<-function(x1,x2){
    choose(n,x2)*((a00+a01*x1/n)^x2)*((1-a00-a01*x1/n)^(n-x2))}
P0<-matrix(0,ncol=(n+1),nrow=(n+1))
for(i in 0:n){
    for(j in 0:n){
        P0[i+1,j+1]<-myfun1(i,j)}}
# Calculate the steady-state probability vector

```



```

pvec<-Re(eigen(t(P0), symmetric=FALSE)$vectors[,1])
pvec<-pvec/sum(pvec)
##### steady-state ARL calculation##### (OoC case)
#Simulation
listRL<-vector()
it<-5000
for(l1 in 1:it){
N0<-sample(0:n,1,replace=FALSE,prob=pvec)
C0UA<-0
C0UB<-0
N1<-rbinom(1,n,a00+a01*N0/n)
# below 1st CUSUM
K1A<-N1*log((a10FIXA+a11FIXA*N0/n)/(a00+a01*N0/n))+(n-
N1)*log((1-a10FIXA-a11FIXA*N0/n)/(1-a00-a01*N0/n))
C1UA<-max(0,C0UA+K1A)
# below 2nd CUSUM
K1B<-N1*log((a10FIXB+a11FIXB*N0/n)/(a00+a01*N0/n))+(n-
N1)*log((1-a10FIXB-a11FIXB*N0/n)/(1-a00-a01*N0/n))
C1UB<-max(0,C0UB+K1B)
#####
j<-1
while(C1UA<hA&C1UB<hB&j<=200){
  j<-(j+1);N0<-N1;C0UA<-C1UA;C0UB<-C1UB
  N1<-rbinom(1,n,a00+a01*N0/n)
  ### 1st CUSUM
  K1A<-N1*log((a10FIXA+a11FIXA*N0/n)/(a00+a01*N0/n))+(n-
N1)*log((1-a10FIXA-a11FIXA*N0/n)/(1-a00-a01*N0/n))
  C1UA<-max(0,C0UA+K1A)
  ### 2nd CUSUM
  K1B<-N1*log((a10FIXB+a11FIXB*N0/n)/(a00+a01*N0/n))+(n-
N1)*log((1-a10FIXB-a11FIXB*N0/n)/(1-a00-a01*N0/n))
  C1UB<-max(0,C0UB+K1B)}
if(j>200){
  js<-j;N0s<-N1;C0UAs<-C1UA;C0UBs<-C1UB;
  N1s<-rbinom(1,n,a10+a11*N0s/n)
  ## below 1st CUSUM
  K1As<-N1s*log((a10FIXA+a11FIXA*N0s/n)/(a00+a01*N0s/n))+(n-
N1s)*log((1-a10FIXA-a11FIXA*N0s/n)/(1-a00-a01*N0s/n))
  C1UAs<-max(0,C0UAs+K1As)
  ## below 2nd CUSUM
  K1Bs<-N1s*log((a10FIXB+a11FIXB*N0s/n)/(a00+a01*N0s/n))+(n-
N1s)*log((1-a10FIXB-a11FIXB*N0s/n)/(1-a00-a01*N0s/n))
  C1UBs<-max(0,C0UBs+K1Bs)
#####
while(C1UAs<hA&C1UBs<hB){
  js<-(js+1);N0s<-N1s;C0UAs<-C1UAs;C0UBs<-C1UBs
  N1s<-rbinom(1,n,a10+a11*N0s/n)
}
}
}

```

```

      K1As<-N1s*log((a10FIXA+a11FIXA*N0s/n)/(a00+a01*N0s/n))+(n-
N1s)*log((1-a10FIXA-a11FIXA*N0s/n)/(1-a00-a01*N0s/n))
      C1UAs<-max(0,COUAs+K1As)
      K1Bs<-N1s*log((a10FIXB+a11FIXB*N0s/n)/(a00+a01*N0s/n))+(n-
N1s)*log((1-a10FIXB-a11FIXB*N0s/n)/(1-a00-a01*N0s/n))
      C1UBs<-max(0,COUBs+K1Bs)}
      listRL[l1]<-js}
else{next}}
LR1<-length(na.exclude(listRL))
#calculation of the ssARL
ARL1<-mean(na.exclude(listRL)-200)
SDRL1<-sd(na.exclude(listRL)-200)
sel<-sd(na.exclude(listRL)-200)/sqrt(length(na.exclude(listRL)))
# print the results
cat(" n:",n," mu0:",mu0X," mu1:",mu1X," a00:",a00," a01:",a01,
    " a10:",a10," a11:",a11," d1:",deltaFIXA," tau1:",tauFIXA,
    " d2:",deltaFIXB," tau1:",tauFIXB," Ha:",hA," Hb:",hB,
    " ARL:",ARL1," SDRL:",SDRL1," s.e.:",sel,
    " Length:",LR1,"\n")}}

```