Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Μαθηματικών

- Πτυχιακή Εργασία -

Άννα Δεληγιάννη

Α.Μ. : 3112019048

ΣΑΜΟΣ 2023

Επιβλέπων καθηγητής : Μιχαήλ Ανούσης

Ανάλυση **Fourier** σε Πεπερασμένες Αβελιανές Ομάδες

Άννα Δεληγιάννη

Ιανουάριος 2023

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου κο Μιχαήλ Ανούση κυρίως για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, και την υπομονή που έκανε κατά τη διάρκεια υλοποίησης της πτυχιακής εργασίας. Όπως επίσης και για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση του, για την επίλυση διάφορων θεμάτων.

Θα ήθελα επίσης να απευθύνω τις ευχαριστίες μου στους γονείς μου, οι οποίοι στήριξαν τις σπουδές μου με διάφορους τρόπους, φροντίζοντας για την καλύτερη δυνατή μόρφωση μου.

Πρόλογος

Ο **μετασχηματισμός Fourier** είναι μια σημαντική μαθηματική έννοια και η μελέτη του είναι αντικείμενο της Αρμονικης Ανάλυσης. Σχετίζεται με την θεωρία αναπαραστάσεων οομάδων και έχει εφαρμογές σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών και των θετικών επιστημών, όπως στις Διαφορικές Εξισώσεις και στην Επεξεργασία Σήματος.

Περιεχόμενα

1 Θεμελιώδεις Έννοιες **7**
- 1.1 Βασικές Έννοιες Θεωρίας Ομάδων 7
- 1.2 Αποτελέσματα της Θεωρίας Ομάδων 9

2 Γραμμική Άλγεβρα **13**
- 2.1 Εσωτερικό Γινόμενο στο Χώρο 13
- 2.2 Γραμμικά Συναρτησοειδή και Δυϊκός Χώρος 16
- 2.3 Γραμμικοί Τελεστές 18

3 Χαρακτήρες Πεπερασμένων Ομάδων **21**
- 3.1 Ορισμοί και Ιδιότητες Χαρακτήρων 21
- 3.2 Σχέσεις Ορθογωνιότητας 25

4 Μετασχηματισμός Fourier **27**
- 4.1 Ορισμοί και Ιδιότητες 27
- 4.2 Μετασχηματισμός Fourier Περιοδικών Συναρτήσεων 30
- 4.3 Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier 30
- 4.4 Τύπος Αντιστροφής 31

5 Συνέλιξη, και Αρχή της Αβεβαιότητας **33**
- 5.1 Συνέλιξη 33
- 5.2 Αρχή της Αβεβαιότητας (The Uncertainty Principle) 36

Κεφάλαιο 1

Θεμελιώδεις Έννοιες

1.1 Βασικές Έννοιες Θεωρίας Ομάδων

Η δομή της Ομάδας είναι αναμφίβολα από τις βασικότερες και ευρύτερα μελετημένες αλγεβρικές δομές. Θα παίξει δε κεντρικό ρόλο στη μελέτη που ακολουθεί.

Ορισμός 1. *Μια πράξη (binary operation) $*$, σε ένα σύνολο K είναι μια απεικόνιση $\phi : K \times K \to K$. Δηλαδή ένα ζεύγος στοιχείων του K αντιστοιχίζεται σε ένα στοιχείο του K. Γράφουμε $a*b$.*

Χαρακτηριστικά σύμβολα της πράξης είναι: $\times$,$+$,$*$,$\star$

Επειδή $(a,b) \neq (b,a)$ μπορεί να έχουμε $a * b \neq b * a$. Αν ισχύει ότι $a * b = b * a$ για κάθε ζεύγος, η πράξη θα καλείται μεταθετική (commutative) ή αβελιανή (abelian).

Μία σημαντική ιδιότητα είναι η προσεταιριστικότητα.

Ορισμός 2. *Μια πράξη $*$ σε ένα σύνολο K καλείται προσεταιριστική (associative), αν ισχύει $a * (b * c) = (a * b) * c$ για κάθε τριάδα a,b,c.*

Ορισμός 3. *Ομάδα $\langle G, * \rangle$ είναι ένα σύνολο G, μαζί με μία πράξη $*$ στο G τέτοια, ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:*

1. *Η πράξη $*$ στο G είναι προσεταιριστική.*

2. *Υπάρχει ένα στοιχείο e στο G τέτοιο, ώστε $e * x = x * e = x$ για κάθε $x \in G$. (Αυτό το στοιχείο e λέγεται* ***ταυτοτικό στοιχείο*** *για την $*$ στο G.)*

3. *Για κάθε a στο G,υπάρχει ένα στοιχείο a' στο G με την ιδιότητα $a' * a = a * a' = e$. (Το στοιχείο a' λέγεται* ***αντίστροφο του*** *a* ***ως προς την πράξη*** *$*$.)*

Θεώρημα 4. *Αν G είναι μια ομάδα με πράξη την $*$, τότε* ***ο αριστερός και δεξιός νόμος διαγραφής*** *ισχύουν στη G, δηλαδή, αν $a * b = a * c$ τότε b=c, και αν $b * a = c * a$ τότε a=c, για όλα τα a,b,$c \in G$.*

Ορισμός 5. *Μια ομάδα G λέγεται* ***αβελιανή*** *ή* ***μεταθετική*** *αν η πράξη $*$ είναι αντιμεταθετική.*

Παράδειγμα 6. *Το σύνολο $\mathbb{Z}$ με πράξη την $+$ είναι ομάδα. Όλες οι συνθήκες του ορισμού ικανοποιούνται. Η ομάδα είναι αβελιανή.*

Ορισμός 7. *Η τάξη μιας πεπερασμένης ομάδας είναι το πλήθος των στοιχείων της. Ομάδες οι οποίες περιέχουν άπειρο πλήθος στοιχείων ονομάζονται* ***ομάδες με άπειρη τάξη****. Συχνά θα συμβολίζουμε την τάξη μιας ομάδας G ως $|G|$. Εάν το x είναι ένα στοιχείο της ομάδας και $x^n = e$ για κάποιο θετικό ακέραιο αριθμό n, τότε θα λέμε πως* ***το*** *x* ***είναι πεπαρασμένης τάξης****, ονομάζοντας* ***τάξη του*** *x τον ελάχιστο θετικό ακέραιο αριθμό m, για τον οποίο ισχύει $x^m = e$. Διαφορετικά, θα λέμε ότι το x* ***έχει άπειρη τάξη****.*

Ορισμός 8. *Μια* ***υποομάδα*** *μιας ομάδας G είναι ένα υποσύνολο της G, το οποίο, είναι ομάδα εφοδιασμένο με την ίδια πράξη της G και το ίδιο ουδέτερο. Όταν H είναι μια υποομάδα της G, τότε θα γράφουμε $H < G$.*

Παράδειγμα 9.

1. *$\mathbb{Z} < \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} < \mathbb{R}$ και $\mathbb{R} < \mathbb{C}$.*

2. *Το σύνολο $\{0,2,4\}$ αποτελεί μια υποομάδα της $\mathbb{Z}_6$.*

Ορισμός 10. *Μια ομάδα καλείται* ***κυκλική*** *όταν μπορεί να παραχθεί από ένα στοιχείο.*

Παράδειγμα 11. *Τόσο το 1 όσο και το -1 παράγουν τη $\mathbb{Z}$, δηλαδή η $\mathbb{Z}$ εφοδιασμένη με την πρόσθεση είναι μια άπειρη κυκλική ομάδα.*

Υποθέτουμε ότι G είναι μια πεπερασμένη ομάδα και x είναι ένα στοιχείο της G. Η απεικόνιση $f_x : G \to G$ που ορίζεται ως $f_x(g) = xg$ είναι μια ***μετάθεση*** *της G.*

Ορισμός 12. *(Homomorphism). Έστω G_1 και G_2 ομάδες. Μια απεικόνιση $\varphi : G_1 \to G_2$ λέγεται* ***ομομορφισμός*** *αν για κάθε a, $b \in G_1$ ισχυεί $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.*

Ορισμός 13. *(Isomorphism). Ένας ομομορφισμός $\varphi : G_1 \to G_2$ που είναι 1 - 1 και επί της G_2 λέγεται* ***ισομορφισμός****. Συμβολίζουμε $G_1 \cong G_2$.*

Θεώρημα 14 (Cayley). *Κάθε ομάδα είναι ισόμορφη με μια ομάδα μεταθέσεων.*

1.2 Αποτελέσματα της Θεωρίας Ομάδων

Στο σημείο αυτό θα δούμε ότι υπάρχουν ως προς ισομορφισμό, μόνο μία άπειρη κυκλική ομάδα και μία πεπερασμένη κυκλική ομάδα τάξης n, η $\mathbb{Z}$ και η $\mathbb{Z}_n$.

Θεώρημα 15. *Υποθέτουμε ότι G είναι μια κυκλική ομάδα.*

1. *$G \cong \mathbb{Z}$ αν G είναι άπειρη,*

2. *$G \cong \mathbb{Z}_n$ αν G είναι πεπερασμένη και $n = \mid G \mid$.*

Αν G_1,...,G_m είναι ομάδες και

$$G = G_1 \times, \ldots, \times G_m = \{(g_1,\ldots,g_m) \mid g_j \in G_j \},$$

η G είναι ομάδα με πράξη και αντίστροφο που ορίζονται κατά συντεταγμένες, δηλαδή ,

$$(g_1,\ldots,g_m)(g_1',\ldots,g_m')=(g_1\, g_1',\ldots,g_m g_m'),$$

$$(g_1,\ldots,g_m)^{-1} = ({g_1}^{-1},\ldots,\, {g_m}^{-1}).$$

Η G ονομάζεται ευθύ γινόμενο των $G_1, \ldots, G_m$. Αν $G_j = A$ για κάθε j γράφουμε $G = A^m$.

Θεώρημα 16. ***(Θεμελιώδες θεώρημα πεπερασμένων Αβελιανών ομάδων)***
Αν G είναι μία μη τετριμμένη πεπερασμένη Αβελιανή ομάδα, τότε υπάρχουν διακεκριμένοι θετικοί ακέραιοι s και $n_1,\ldots,n_s$ όπου $n_j \geq 2$, τέτοιοι ώστε $n_j \mid n_{j+1}$ για $j = 1,\ldots,s-1$ και

$$G \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_s}$$

Οι $n_1,\ldots,n_s$ λέγονται αναλλοίωτες της G.

Θεώρημα 17. ***(Θεμελιώδες θεώρημα πεπερασμένων Αβελιανών ομάδων, δεύτερη μορφή)***
Αν G μη τετριμμένη πεπερασμένη Αβελιανή ομάδα, τότε

$$G \cong \mathbb{Z}_{q_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{q_t},$$

όπου $q_1,\ldots,q_t$ είναι δυνάμεις πρώτων (όχι απαραίτητα διακριτές). Επίσης, οι αριθμοί $q_1,\ldots,q_t$ είναι μοναδικά ορισμένοι.

Παράδειγμα 18. *Οι δώδεκα συμμετρίες της ισόπλευρης εξαγωνικής πλάκας αποτελούν ομάδα. Για κάθε ακέραιο $n \geq 3$ μπορούμε να κατασκευάσουμε μια πλάκα με n ισομηκείς πλευρές. Έτσι, δημιουργούμε μια οικογένεια ομάδων συμμετρίας, οι οποίες καλούνται* ***Διεδρικές ομάδες****. Οι διεδρικές ομάδες D_n είναι ορισμένες σε ένα σύνολο με σύμβολα $a^s b^t$, όπου $s = 0,1$ και $t = 0,\ldots,n-1$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι επόμενες σχέσεις :*

1. $a^s b^t = a^{s'} b^{t'}$ *αν και μόνο αν* $s = s'$ *και* $t = t'$,
2. $a^2 = b^n = 1$,
3. $ab = b^{-1}a$.

Αυτές οι σχέσεις υποδηλώνουν ότι η D_n είναι (μη αβελιανή) ομάδα με τάξη $2n$.

Παράδειγμα 19. *Η τάξη της D_3 ισούται με το έξι. Υπάρχουν δύο στοιχεία τάξης 3 (είναι a,a^2) και τρια στοιχεία τάξης 2 (είναι τα b,ab,a^2b).*

$D_3 =< a, b | a^3 = 1, b^2 = 1, bab = a^2 >$. *Ο πίνακας πολλαπλασιασμού της D_3 είναι ο ακόλουθος.*

$*$	1	a	a^2	b	ab	a^2b
1	1	a	a^2	b	ab	a^2b
a	a	a^2	1	ab	a^2b	b
a^2	a^2	1	a	a^2b	b	ab
b	b	a^2b	ab	1	a^2	a
ab	ab	b	a^2b	a	1	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^2	a	1

Κεφάλαιο 2

Γραμμική Άλγεβρα

2.1 Εσωτερικό Γινόμενο στο Χώρο

Ορισμός 20. *Καλούμε* ***εσωτερικό γινόμενο*** *σε ένα μιγαδικό γραμμικό χώρο V μια απεικόνιση της μορφής*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

η οποία για κάθε x, y, $z \in V$ και $c \in \mathbb{C}$, έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ *(Συζυγής συμμετρία),*
2. $\langle x, x \rangle > 0$ *αν* $x \neq 0$ *(Θετικά ορισμένο),*
3. $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$
4. $\langle cx + y, z \rangle = c \, \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Παράδειγμα 21. *Ο μιγαδικός ευκλείδειος χώρος* $\mathbb{C}^n$ *).*

$$\langle x, y \rangle = \textstyle\sum_{j=1}^{n} x_j \, \bar{y}_j,$$

Όπου $x = (x_1,\ldots,x_n)$ *και* $y = (y_1,\ldots,y_n)$ *είναι διανύσματα του* $\mathbb{C}^n$.

Υποθέτουμε ότι V είναι ένας μιγαδικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Το μέτρο ή νόρμα (norm) ενός διανύσματος x με $x \in V$, ορίζεται ως $\|\, x \,\|$ και είναι ο αριθμός $\sqrt{\langle x, x \rangle}$. Λέμε ότι η νόρμα $\|\cdot\|$ παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Δύο διανύσματα x και y στο V λέγονται ορθογώνια ή κάθετα ($x \perp y$) αν $\langle x, y \rangle = 0$. Ένα διάνυσμα λέγεται μοναδιαίο όταν το μέτρο του είναι 1.

Ένα υποσύνολο του A του V λέγεται ορθοκανικό αν κάθε διάνυσμα στο A είναι μοναδιαίο και κάθε διάνυσμα στο A είναι κάθετο σε κάθε άλλο διάνυσμα του A. Άν, επιπλέον το A είναι βάση στο V, τότε λέμε ότι είναι μια ορθοκανονική βάση.

Στη συνέχεια θα δούμε μία πολύ χρήσιμη ανισότητα η οποία μας εξασφαλίζει ότι η απόλυτη τιμή του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων δεν είναι ποτέ μεγαλύτερη από το γινόμενο των μέτρων των διανυσμάτων. Η ανισότητα που μόλις αναφέραμε είναι γνωστή ως ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Θεώρημα 22. *Υποθέτουμε ότι V είναι ένας μιγαδικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Για οποιοδήποτε x, $y \in V$, έχουμε*

1. *(Ανισότητα Bessel) Αν $\{ e_j \mid j = 1, \ldots, k \}$ είναι ένα ορθοκανονικό υποσύνολο στο V, τότε*

   $$\textstyle\sum_{j=1}^{k} |<x, e_j>|^2 \leq ||\ x\ ||^2$$

   η ισότητα ισχυεί αν και μόνο αν το $x = \sum_{j=1}^{k} \langle x, e_j \rangle\, e_j$.

2. *(Ανισότητα Cauchy-Schwarz) $|\langle x, y \rangle| \leq ||\ x\ ||\ ||\ y\ ||$, επιπλέον, αν $y \neq 0$, τότε η ισότητα ισχυεί αν και μόνο αν $x = cy$, όπου $c = \langle x, y \rangle / ||y||^2$.*

3. *(Τριγωνική ανισότητα) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$. Επιπλέον, αν $y \neq 0$, τότε η ισότητα ισχυεί αν και μόνο αν $x = cy$ για κάποια μη μηδενική σταθερά c.*

4. *(Πυθαγόρειο θεώρημα) $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ αν $x \perp y$.*

5. *(Νόμος παραλληλογράμμου) $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$.*

Απόδειξη. 1. Έχουμε

$$0 \leq ||x - \sum_{s=1}^{k} \langle x, e_s \rangle\, e_s||^2 =$$

$$||x||^2 - \sum_{s=1}^{k} |\, \langle x, e_s \rangle\, |^2$$

2. Η ανισότητα Cauchy-Schwarz ισχυεί τετριμμένα αν $y = 0$. Για $y \neq 0$ είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας Bessel, για το ορθοκανονικό σύνολο, $\{ y \ / \ ||y|| \}$.

3. Κάνοντας χρήση της ανισότητας Cauchy- Schwarz θα αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα.
Το πραγματικό μέρος στους μιγαδικούς συμβολίζεται ως Rez.

$$||x+y||^2 \leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2Re\,\langle x,y\rangle \tag{2.1}$$

$$\leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2|\,\langle x,y\rangle\,| \text{ (ισχυεί από } Rez \leq |z|) \tag{2.2}$$

$$\leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x||\;||y|| \text{ (από ανισότητα } Cauchy - Schwarz) \tag{2.3}$$

$$= (||x|| + ||y||)^2. \tag{2.4}$$

Αν $y \neq 0$, τότε $||x + y|| = ||x|| + ||y||$ αν και μόνο αν έχουμε την ισότητα από το 2.2 και 4.8 ή, ισοδύναμα, $Re\,\langle x,y\rangle = \langle x,y\rangle = ||x||\;||y||$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με $x = cy$, όπου $c = \langle x,y\rangle/||y||^2 \geq 0$.

Το πυθαγόρειο θεώρημα και ο νόμος των παραλληλογράμμων προκύπτουν από την σχέση 2.1.

4. Άν $\langle x,y\rangle = 0$ είναι δηλαδή ορθογώνια τότε $||x + y\,||^2 = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2$.

5. $||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$
$||x-y||^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$
$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$.

$\square$

Η ανισότητα του Bessel μπορεί να εκφραστεί και με την γεωμετρική ερμηνεία. Δεδομένου ότι το άθροισμα $\sum_{j=1}^{k} \langle x, r_j\rangle\ e_j$ είναι η ορθογώνια προβολή του x στον υπόχωρο που παράγεται από ορθοκανονικά διανύσματα e_j, $j = 1,\ldots,k$ και από την ανισότητα του Bessel, το μέτρο οποιουδήποτε διανύσματος x είναι πάντα μεγαλύτερο από το μέτρο της ορθογώνιας προβολής σε οποιοδήποτε υπόχωρο πεπερασμένης διαστάσεως, εκτός εάν ο υπόχωρος περιέχει το x, οπότε το x και η ορθογώνια προβολή του ταυτίζονται.

Έστω $\Lambda : V \to W$ ένας γραμμικός τελεστής, όπου W είναι ένας μιγαδικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ο τελεστής Λ είναι ένας τελεστής στο V αν $W = V$, είναι γραμμικό συναρτησοειδές αν $W = \mathbb{C}$, και ισομετρικός αν είναι ένα προς ένα, επί, και διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο.

$$\langle \Lambda(x), \Lambda(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

για $x,\ y \in V$. Έτσι είναι εύκολο να επαλυθεύσουμε ότι το αντίστροφο μιας ισομετρίας είναι ισομετρία. Δύο μιγαδικοί χώροι με εσωτερικό γινόμενο V και W λέγονται ισομετρικοί αν υπάρχει ισομετρία μεταξύ τους. Από τη σκοπιά της Συναρτησιακής ανάλυσης, δύο τέτοιοι χώροι ταυτίζονται: έχουν την ίδια γραμμική και τοπολογική δομή, αφού τα σημεία τους βρίσκονται σε ένα προς ένα αντιστοιχία που διατηρεί τις αποστάσεις και τη γραμμική δομή του χώρου.

2.2 Γραμμικά Συναρτησοειδή και Δυϊκός Χώρος

Υποθέτουμε ότι V είναι ένας μιγαδικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, πεπερασμένης διαστάσεως. Το σύνολο V^* των γραμμικών απεικονίσεων από το V στο $\mathbb{C}$ είναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος με καλά ορισμένη την πρόσθεση κατά σημείο και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Δηλαδή, για $f,\ g \in V^*$ και $c \in \mathbb{C}$, το άθροισμα $f + g$ των f και g, και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός cf, της f με το c, ορίζονται ως

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$cf(x) = c\ (\ f(x)\ )$$

για κάθε $x \in V$. Ο διανυσματκός χώρος V^* ονομάζεται **δυϊκός χώρος** *του V. Τα στοιχεία του V^* λέγονται και γραμμικά συναρτησοειδή.*

Για $y \in V$, ορίζουμε την απεικόνιση $l_y : V \to \mathbb{C}$ με $l_y(x) = \langle x, y \rangle$. Τότε $l_y \in V^*$. Το παραπάνω, συμβαίνει αν V είναι πεπερασμένης διάστασης. Το επόμενο θεώρημα είναι το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz.

Θεώρημα 23. *Έστω V ένας πεπερασμένης διάστασης μιγαδικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Η απεικόνιση $l : V \to \mathbb{C}$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές αν και μόνο αν υπάρχει μοναδικό y στο V τέτοιο ώστε $l(x) = \langle x, y \rangle$ για κάθε $x \in V$.*

Απόδειξη. Έστω $n = dimV$ και έστω $\{b_j\}_j^n$ να είναι μία ορθοκανονική βάση στο V. Άν $x \in V$, τότε το x μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο ως

$$x{=}\sum_{j=1}^{n} \langle x, y\rangle\ b_j.$$

Από την γραμμικότητα του l, έχουμε ότι

$$l(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, b_j\rangle\ l(b_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left\langle x, \bar{l}(b_j)b_j\right\rangle = \left\langle x, \sum_{j=1}^{n} \bar{l}(b_j)bj\right\rangle = \langle x, y\rangle,$$

όπου $y = \sum_{j=1}^{n} \bar{l}(b_j)\ b_j$. Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα, υποθέτουμε ότι υπάρχει $y' \in V$ τέτοιο ώστε $l(x) = \langle x, y'\rangle$ για κάθε $x \in V$. Έχουμε ότι $\langle x, y - y'\rangle = 0$ για κάθε $\vec{x} \in V$, όπου $y - y' = 0$ άρα $y = y'$.

□

Από το θεώρημα, βλέπουμε ότι υπάρχει μία ένας προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στα V και V^*, έτσι παίρνουμε ότι $u \leftrightarrow l_u$, όπου $l_u(x) = \langle x, u\rangle$ για κάθε $x \in V$. Έχουμε ότι

$$l_{cu} = \bar{c}l_u \text{ και } l_{u+u'} = l_u + l_{u'}, \tag{2.5}$$

για κάθε u, $u' \in V$ και $c \in \mathbb{C}$. Το εσωτερικό γινόμενο του V^* ορίζεται μέσω του εσωτερικού γινομένου του V,

$$\langle l_u, l_{u'}\rangle = \overline{\langle u, u'\rangle}. \tag{2.6}$$

Συνεπώς, η σχέση $||l_u|| = ||u||$ ισχύει για κάθε $u \in V$.

Για κάθε $u \in V$, το γραμμικό συναρτησοειδές l_u, καλείται ***δυϊκό*** *του u και συμβολίζεται u^*.*

Υποθέτουμε ότι $n = dimV$ και $E = \{e_j \mid j = 1,\ldots,n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του V. Έχουμε για $u \in V$

$$u = \sum_{j=1}^{n} \langle u, e_j\rangle\ e_j \in V,$$

και από το 4.10 έχουμε

$$u^* = \sum_{j=1}^{n} \overline{\langle u, e_j\rangle}\ e_j^*.$$

Με αυτόν τον τρόπο έχουμε το σύνολο $\{e_j^* \mid j = 1,\ldots,n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του V^* και καλείται ***δυϊκή βάση*** *της $\{\epsilon_j \mid j = 1,\ldots,n\}$*

2.3 Γραμμικοί Τελεστές

Έστω S να είναι ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο και έστω V_s να είναι ένα σύνολο όλων των μιγαδικών συναρτήσεων ορισμένων στο S. Τότε ο V_S έιναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος και γίνεται χώρος με εσωτερικό γινόμενο με το εσωτερικό γινόμενο ορισμένο ως

$$\langle f, g\rangle = \textstyle\sum_{s\in S} f(s)\bar{g}(s).$$

Για κάθε $s \in S$, έστω $\delta_s : S \to \mathbb{C}$ να είναι μία απεικόνιση, η οποία ορίζεται ως

$$\delta_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } s = t, \\ 0 & \text{αν } s \neq t. \end{cases}$$

Το σύνολο $\Delta_S = \{\ \delta_s \mid s \in S\ \}$ είναι μία ορθοκανονική βάση στο V_s, ονομάζεται ***κανονική βάση****. Εφόσον S είναι πεπερασμένο σύνολο, V_S είναι πεπερασμένης διάστασης μιγαδικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Δεδομένου, ότι $V_S \backsimeq \mathbb{C}^n$, όπου $n = |S|$, το S μπορεί να χρησιμοποιείται κι ως σύνολο δεικτών για κάθε βάση του V_S.*

Αν το $B_S = \{\ B_s \mid s \in S\ \}$ είναι ορθοκανονική βάση του V_S. κάθε $x \in V_S$ μπορεί να γραφεί μοναδικά ως

$$x = \textstyle\sum_{s\in S} \langle x, B_s\rangle\ B_s = \sum_{s\in S} B_s\ {B_s}^*(x),$$

Ο ταυτοτικός τελεστής V_S μπορεί να εκφραστεί μοναδικά κάνοντας χρήση της βάσης B_S και της δυϊκής βάσης B_S^* ως

$$I = \sum_{s\in S} B_s B_s^* \tag{2.7}$$

Από την δυϊκή βάση Δ_S^* έχουμε,

$$B_s^* = \textstyle\sum_{t\in S} \langle B_s^*, \delta t^*\rangle\ \delta_t^* = \sum_{t\in S} \langle \delta_t, B_s\rangle\ \delta_t^*,$$

και

$$I = \textstyle\sum_{s,t\in S} \langle \delta_t, B_s\rangle\ B_s\delta_t^*.$$

Έπεται ότι η εικόνα για κάθε $x \in V_S$ μέσω οποιοδήποτε γραμμικού τελεστή Λ του V_S δίνεται από τη σχέση

$$\Lambda(x) = \sum_{s,t\in S} \langle \delta_t, B_s\rangle\, \Lambda(B_s)\delta_t^*(x). \tag{2.8}$$

Επίσης για σταθερό $s \in S$, από τη σχέση 2.7 έχουμε,

$$B_s = \sum_{t \in S} B_t B_t^*(B_s) = \sum_{t \in S} \delta_s(t) B_t. \tag{2.9}$$

Ορίζουμε τον γραμμικό τελεστή F του V_S που ορίζεται $F(B_s) = \delta_s$ για κάθε $s \in S$.

Το επόμενο θεώρημα ακολουθεί τον ορισμό του F και την εξίσωση 2.8.

Θεώρημα 24. *Υποθέτουμε τα ακόλουθα*

- *S είνα ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο*
- *$\Delta_S = \{ \delta_s \mid s \in S \}$ και $B_S = \{ B_s \mid s \in S \}$ είναι δύο ορθοκανονικές βάσεις του V_S, όπου Δ_S είναι η κανονική βάση ;*
- *F είναιο γραμμικός τελεστής του V_s τέτοιος ώστε $F(B_s) = \delta_s$ για κάθε $s \in S$*

Τότε

- *$F = \sum_{s,t \in S} \langle \delta_t, B_s \rangle \, \delta_s \delta_t^*$,*
- *F είναι ισομετρία, και*
- *$Ff(s) = \langle f, B_s \rangle$, για κάθε $f \in V_s$. (Ff αντί $F(f)$.)*

Ο μιγαδικός αριθμός $\langle f, B_s \rangle$ ονομάζεται σ-συντελεστής του f στην ορθοκανονική βάση B_s.

Κεφάλαιο 3

Χαρακτήρες Πεπερασμένων Ομάδων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε στοιχεία από την θεωρία χαρακτήρων των πεπερασμένων Αβελιανών ομάδων. Θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathbb{C}^*$ για να δηλώσουμε την πολλαπλασιαστική ομάδα μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών.

3.1 Ορισμοί και Ιδιότητες Χαρακτήρων

Ορισμός 25. *Ένας χαρακτήρας μιας ομάδας G είναι ένας ομομορφισμός από το G στην πολλαπλασιαστική ομάδα των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών. Δηλαδή, ένας χαρακτήρας του G είναι μια απεικόνιση $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ που ικανοποιεί την εξίσωση $\chi(ab) = \chi(a)\,\chi(b)$ για κάθε a, $b \in G$. Ένας χαρακτήρας χ ονομάζεται τετριμμένος αν $\chi(g) = 1$ για κάθε $g \in G$.*

Από αυτόν τον ορισμό προκύπτει ότι : Κάθε ομάδα έχει έναν χαρακτήρα, δηλαδή, τον τετριμμένο χαρακτήρα. Ο τετριμμένος χαρακτήρας μιας ομάδας συχνά ορίζεται ως χ_T.

Έστω χ και χ' χαρακτήρες της G. Το γινόμενο κατά σημείο του χ και του χ' ορίζεται μέσω του $\chi\chi'(g) = \chi(g)\chi'(g)$.

Θεώρημα 26. *Οι χαρακτήρες μιας αυθαίρετης ομάδας G σχηματίζουν μια Αβελιανή ομάδα, με το σημειακό γινόμενο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι χ, χ', και χ'' είναι χαρακτήρες της G. Παρακάτω θα επαληθεύσουμε τις ακόλουθες ιδιότητες που ορίζουν μία Αβελιανή ομάδα:

- Το σημειακό γινόμενο $\chi\chi'$ είναι ένας χαρακτήρας G,
- $\chi\chi' = \chi'\chi$. (μεταθετικότητα)
- $(\chi\chi')\chi'' = \chi(\chi'\chi'')$. (προσεταιριστικότητα)
- $\chi\chi_T = \chi$. (ύπαρξη ουδετέρου)
- Για κάθε χ, υπάρχει χαρακτήρας χ^{-1} (μοναδικός) τέτοιο ώστε $\chi\chi^{-1} = \chi_T$ (υπάρχει αντίστροφο).

Οι πρώτες 4 ιδιότητες είναι άμεσες. Για την τελευταίο, έστω $\chi^{-1} : G \to \mathbb{C}^*$ να είναι η απεικόνιση που ορίζεται, για κάθε $g \in G$,

$$\chi^{-1}(g) = \chi(g^{-1}).$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι χ^{-1} είναι ένας χαρακτήρας του G και $\chi\chi^{-1} = \chi_T$.

□

Η ομάδα των χαρακτήρων του G συμβολίζεται $\hat{G}$ και ονομάζεται ομάδα των χαρακτήρων ή δυϊκή ομάδα της G.

*Υποθέτουμε ότι $h : G_1 \to G_2$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων και χ είναι ένας χαρακτήρας της G_2. Το **pullback** του χ από το h, συμβολίζεται ως $h^\star\chi$, είναι ορισμένο από το $h^\star\chi = \chi \circ h$, η σύνθεση του χ και h. Από τη σύνθεση δύο ομομορφισμών έχουμε πάλι ομομορφισμό, δηλαδή, σημαίνει ότι το pullback του χαρακτήρα από το G_2 είναι χαρακτήρας του G_1. Συνεπώς, υπάρχει ένας προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στην ομάδα των χαρακτήρων και δύο ισομορφικών ομάδων.*

Θεώρημα 27. *Οι ισομορφικές ομάδες έχουν ισομορφικές ομάδες χαρακτήρων. Δηλαδή, αν G_1 και G_2 είναι ομάδες και $G_1 \cong G_2$, τότε $\hat{G_1} \cong \hat{G_2}$.*

1

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $h : G_1 \to G_2$ είναι ένας ισομορφισμός και χ_2 είναι ένας χαρακτήρας του G_2. Παρακάτω έχουμε ένα διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\chi_1"'] & G_2 \arrow[d, "\chi_2"] \\ & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

Να σημειώσουμε ότι το pullback $\chi_2\ o\ h$ του χ_2 είναι ένας χαρακτήρας του G_1. Αντίστροφα, κάθε χαρακτήρας χ_1 του G_1 είναι ένα pullback κάποιου χαρακτήρα χ_2 του G_2 (δηλαδή έχουμε $\chi_2 = \chi_1\ o\ h^{-1}$). Έτσι η απεικόνιση $h^\star : \hat{G}_2 \to \hat{G}_1$ είναι επί. Τώρα θα δείξουμε ότι $h^\star$ είναι ισομορφισμός μέσω δύο βημάτων:

- **Ομομορφισμός** (homomorphism): Αν χ_2, $\chi_2' \in \hat{G}_2$, τότε έχουμε,

$$h^\star(\chi_2\chi_2') = (h^\star\chi_2)(h^\star\chi_2').$$

- **Πυρήνας** (kernel): $\ker(h^*) = \{\text{ταυτοτικός}\}$ για $j = 1{,}2$. Άν $h^\star\chi_2 = \chi_{T_1}$, τότε
$\chi_2\ o\ h(g_1) = 1$ για κάθε $g_1 \in G_1$. Δηλαδή, ισχυεί ότι $\chi_2 = \chi_{T_2}$. Όμοια δείχνουμε για τον $(h^{-1})^*$

□

*Στη συνέχεια θα ορίσουμε το **ταvυστικό γιvόμεvο** χαρακτήρων. Υποθέτουμε ότι G_1 και G_2 είναι ομάδες και χ_1 και χ_2 είναι χαρακτήρες των G_1 και G_2 , αντίστοιχα.*
Το τανυστικό γινόμενο των χ_1 και χ_2 είναι η απεικόνιση $\chi_1 \otimes \chi_2 :$ $G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}^*$

$$\chi_1 \otimes \chi_2(g_1, g_2) = \chi(g_1)\chi_2(g_2). \tag{3.1}$$

Το τανυστικό γινόμενο $\chi_1 \otimes \chi_2$ είναι ένας χαρακτήρας του $G_1 \times G_2$.

Θεώρημα 28. *Υποθέτουμε ότι G_1 και G_2 είναι ομάδες. Τότε χ είναι ένας χαρακτήρας των $G_1 \times G_2$ αν και μόνο αν $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$, για κάποια $\chi_1 \in \hat{G}_1$ και $\chi_2 \in \hat{G}_2$.*

Απόδειξη. Το μόνο που χρειάζεται να δείξουμε είναι ότι αν χ είναι ένας χαρακτήρας των $G_1 \times G_2$, τότε υπάρχουν χαρακτήρες χ_1 της G_1 και χ_2 της G_2 τέτοιο ώστε $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$. Από τον μονομορφισμό ι_1: $G_1 \hookrightarrow G_1 \times G_2$ παίρνουμε $\iota_1(g_1) = (g_1, 1)$ είναι ένας ομομορφισμός, το **pullback** του χ στο ι_1 είναι ένας χαρακτήρας του G_1. Παρόμοια, το **pullback** του χ στο ι_2 είναι ένας χαρακτήρας του G_2. Έτσι αν $\chi_1 = \iota_1^\star\chi$ και $\chi_2 = \iota_2^\star\chi$, τότε βλέπουμε ότι $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$.

□

Πόρισμα 29. *Άν G_1 και G_2 είναι ομάδες, τότε*

$$\widehat{G_1 \times G_2} = \hat{G}_1 \otimes \hat{G}_2.$$

Ας υποθέσουμε ότι χ είναι ένας χαρακτήρας του G και το g είναι ένα στοιχείο του G με πεπερασμένη τάξη k. Εφόσον $\chi(g)^k = \chi(g^k) = \chi(1) = 1$, σημαίνει ότι ένας χαρακτήρας απεικονίζει στοιχεία πεπερασμένης τάξης στις ρίζες της μονάδας. Ειδικότερα, αν G είναι ομάδα και n είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε $g^n = 1$ για κάθε $g \in G$, τότε ένας χαρακτήρας απεικονίζει τα στοιχεία του G σε νιοστές ρίζες της μονάδας. Το πεδίο τιμών ενός χαρακτήρα περιέχεται συνεπώς στο σύνολο $U_n = \{\xi_n^k \mid \xi_n = e^{2pi/n},\ 0 \leq k < n\}$, που είναι μία κυκλική υποομάδα του $\mathbb{C}^*$ έχοντας τον ξ_n ως γεννήτορα. Τότε, αν $\chi \in \hat{G}$, τότε $|\chi(g)| = 1$ για κάθε $g \in G$. Έχουμε $\bar{\chi}(g) = \overline{\chi(g)} = \frac{1}{\chi(g)} = \chi(g^{-1}) = \chi^{-1}(g)$, και άρα

$$\bar{\chi} = \chi^{-1}. \tag{3.2}$$

Οι χαρακτήρες της U_n είναι εύκολο να βρεθούν. Ας υποθέσουμε ότι το g είναι γεννήτορας της U_n και $h : U_n \to U_n$ είναι ένας ομομορφισμός. Άν $h(g)$ είναι γνωστό, τότε, αφού $h(g^k) = h(g)^k$, $h(g)^k$ το $h(u)$ είναι προσδιορισμένο για κάθε $u \in U_n$. Η επιλογή για το $h(u)$ προσδιορίζει το h μοναδικά. Αφού η ομάδα U_n έχει n στοιχεία, υπάρχουν n επιλογές για το $h(g)$. Έτσι, η δυϊκή ομάδας $\hat{U}_n$ έχει n στοιχεία, $|\hat{U}_n| = n$. Επίσης, η ταυτοτική συνάρτηση στη U_n είναι στοιχείο της $\hat{U}_n$ τάξης n, και άρα η η δυϊκή ομάδα $\hat{U}_n$ είναι κυκλική. Με αποτέλεσμα, οι ομάδες U_n και $\hat{U}_n$, να είναι κυκλικές με n στοιχεία. Στο παρακάτω θεώρημα θα το συνοψίσουμε.

Θεώρημα 30. *Άν n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε $\mathbb{Z}_n \cong \hat{\mathbb{Z}}_n$.*

Πόρισμα 31. *Άν G είναι πεπερασμένη Αβελιανή ομάδα, τότε $G \cong \hat{G}$.*

Απόδειξη. Προκύπτει από το Θεμελιώδες Θεώρημα των πεπερασμένων Αβελιανών ομάδων, το Θεώρημα 30 και το Πόρισμα 29.

□

Παράδειγμα 32. *Για $a \in \mathbb{Z}_n$, έστω $\chi_a : \mathbb{Z}_n \to U_n$ η a*

$$\chi_a(b) = \xi_n^{ab}. \tag{3.3}$$

τότε για b_1, $b_2 \in \mathbb{Z}_n$ έχουμε

$$\chi_a(b_1 + b_2) = \xi_n^{a(b_1+b_2)} = \xi_n^{ab_1}\, \xi_n^{ab_2} = \chi_a(b_1)\, \chi_a(b_2).$$

Έτσι χ_a είναι χαρακτήρας του $\mathbb{Z}_n$.

Επιπλέον, $\chi_a = \chi_b$ αν και μόνο αν $a = b$.

3.2 Σχέσεις Ορθογωνιότητας

Έστω G μία πεπερασμένη Αβελιανή ομάδα.

- *Αν χ_s και χ_t είναι χαρακτήρες του G, τότε*

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} \chi_s(k)\bar{\chi}_t(k) = \begin{cases} n & \text{αν } s = t, \\ 0 & \text{αν } s \neq t. \end{cases}$$

- *Αν χ_k είναι χαρακτήρας του G, τότε*

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} \bar{\chi}_k(s)\chi_k(t) = \begin{cases} n & \text{αν } s = t, \\ 0 & \text{αν } s \neq t. \end{cases}$$

Επίσης

- $\sum_{k=1}^{n} \chi_l(k) = \begin{cases} n & \text{αν } l = 1, \\ 0 & \text{αν } l \neq 1. \end{cases}$
- $\sum_{k=1}^{n} \chi_k(l) = \begin{cases} n & \text{αν } l = 1, \\ 0 & \text{αν } l \neq 1. \end{cases}$

Άρα το σύνολο

$$B_G = \frac{1}{\sqrt{|G|}}\bar{G} = \{\frac{1}{\sqrt{|G|}}\chi | \chi \in \bar{G}\} \tag{3.4}$$

είναι ένα ορθοκανονικό υποσύνολο του μιγαδικού χώρου με εσωτερικό γινόμενο V_G. Αφού $|G_G| = dimV_G$, έχουμε:

Θεώρημα 33. *Το σύνολο B_G είναι μία ορθοκανονική βάση του V_G.*

- *Αφού $|G| = |B_G|$, η ομάδα G μπορεί να χρησιμεύσει ως σύνολο δεικτών του B_G.*
  Γενικά, θα γράφουμε $\hat{G} = \{ \ \chi_g \mid g \in G \ \}$ και

  $$B_G = \{B_g \mid g \in G, \text{ όπου } B_g = (1/\sqrt{|G|})\ \chi_g\}.$$

  Κάθε $f \in V_G$ μπορεί να εκφραστεί μοναδικά ως εξής

$$f = \sum_{g \in G} \langle f, B_g \rangle\, B_g \tag{3.5}$$

- *Ονομάζουμε το B_G βάση χαρακτήρων του V_G. Για κάθε $B_g \in B_G$, έχουμε*

  $$B_g(xy) = \sqrt{|G|}B_g(x)B_g(y)$$

  για κάθε x, $y \in G$.

Κεφάλαιο 4

Μετασχηματισμός Fourier

4.1 Ορισμοί και Ιδιότητες

Υποθέτουμε ότι G είναι ένα πεπερασμένη Αβελιανή ομάδα, V_G όπως στην παράγραφο 2.3, $\Delta_G = \{\delta_g |\ g \in G\}$ και $B_G = \{B_g |\ g \in G\}$ είναι η κανονική βάση και η βάση χαρακτήρων αντίστοιχα. Από το 3.5, κάθε B_g μπορεί να γραφεί μοναδικά ως

$$B_g = \sum_{s\,\in\,G} \langle B_g, B_s \rangle\, B_s = \sum_{s\,\in\,G} \delta_g(s) B_s.$$

Ορισμός 34. *Ο μετασχηματισμός Fourier στην ομάδα G είναι ο γραμμικός τελεστής στον χώρο V_G που αντιστοιχίζει το B_g στο δ_g για κάθε $g \in G$.*

Ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης στον V_G συμβολίζεται είτε ως Ff ή ως $\hat{f}$. Από θεώρημα που είδαμε στην ενότητα 2.3, μπορούμε εκφράσουμε τον μετασχηματισμό Fourier ως

$$F = \sum_{s,t\,\in\,G} \langle \delta_t, B_s \rangle\, \delta_s \delta_t^*. \tag{4.1}$$

Παρακάτω θα δούμε τις ιδιότητες: Έστω f, f_1 και f_2 συναρτήσεις με μιγαδικές τιμές που ορίζονται στο G.

– *Ο μετασχηματισμός Fourierείναι ισομετρία, δηλαδή $\langle f_1, f_2 \rangle = \left\langle \hat{f}_1, \hat{f}_2 \right\rangle$. (Γνωστό ως θεώρημα Plancherel .)*[1] *Ειδικότερα, $||f|| = ||\hat{f}||$.*

[1] Το θεώρημα Plancherel είναι αποτέλεσμα της αρμονικής ανάλυσης, που αποδείχθηκε το 1910 από τον Plancherel. Δηλώνει ότι το ολοκλήρωμα του τετραγώνου συντελεστή μίας συνάρτησης είναι ίσο με το ολοκλήρωμα του τετραγώνου μέτρο του φάσματος συχνοτήτων του.

– $\hat{f}$ *είναι μία συνάρτηση με μιγαδικές τιμές ορισμένη στο* G *της οποίας η τιμή στο* g *είναι ο* g *- συντελεστής της* f *στη βάση* B_G*, δηλαδή* $\hat{f}(g) = \langle f, B_g \rangle$.

Η εξίσωση 4.1 *είναι η γενική έκφραση για τον τελεστή* F *ως προς τις βάσεις* Δ_G, B_G*. Για παράδειγμα, αν* $f \in V_G$*, έχουμε*

$$\hat{f} = \sum_{g \in G} \langle f, B_g \rangle \, \delta_g. \tag{4.2}$$

Παράδειγμα 35. *Υποθέτουμε ότι* $G = \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_m}$ *και* f *είναι μία συνάρτηση με μιγαδικές τιμές στο* G*. Τότε, την τιμή της* $\hat{f}$ *σε ένα σημείο* x *της* G *την παίρνουμε από τον παρακάτω τύπο*

$$\hat{f}(x) = \langle f, B_x \rangle = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \langle f, \chi_x \rangle = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{y \in G} f(y) \hat{\chi}_x(y).$$

Και από το γεγονός ότι $|G| = n_1 \ldots n_m$ *έχουμε*

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{n_1 \ldots n_m}} \sum_{y \in G} e^{-2pi(x_1 y_1/n_1 + \cdots + x_m y_m/n_m)} f(y). \tag{4.3}$$

Ειδικότερα, αν $n_j = n$ *για κάθε* j*, τότε*

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{n^m}} \sum_{y \in \mathbb{Z}_n^m} e^{\frac{-2pi}{n} xy} f(y). \tag{4.4}$$

Παράδειγμα 36. *Έχουμε το σύνολο* $n = 2$ *από το* 4.4*. Αφού* $e^{pi} = -1$*, έχουμε*

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{y \in \mathbb{Z}_2^m} (-1)^{xy} f(y)$$

για κάθε $x \in \mathbb{Z}_2^m$.
Υπάρχουν άμεσες συνέπειες της εξίσωσης 4.3

1. *Για* $a \in G = \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_m}$*, η μεταφορά κατά* a *είναι ένας τελεστής* τ_a *του* V_G *που ορίζεται ως* $f \mapsto \tau_a f$*, όπου* $\tau_a f(x) = f(x + a)$*. Έχουμε*

$$\widehat{\tau_a f} = \chi_a \hat{f} \text{ και } \widehat{\chi_a f} = \tau_{-a} \hat{f}, \tag{4.5}$$

Για την ειδική περίπτωση $n_1 = \cdots = n_m = 2$*, έχουμε*

$$\widehat{\tau_a f(x)} = (-1)^{ax} \hat{f}(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{Z}_2^m$*, όπου* $a \in \mathbb{Z}_2^m$.

2. *Υποθέτουμε ότι $u \in \mathbb{Z}_n$ είναι αντιστρέψιμο. Η διαστολή κατά u είναι ένας τελεστής d_u στο $V_{\mathbb{Z}_n}$ που ορίζεται $f \mapsto d_u f$, όπου $d_u f(x) = f(ux)$. Έχουμε*
$$\widehat{d_u f} = d_{u^{-1}} \hat{f}. \tag{4.6}$$

3. *Η εξίσωση $\hat{\hat{f}}(x) = \bar{\bar{f}}(-x)$ ισχυεί για κάθε $x \in G$*

Συμβολίζουμε
$$\operatorname{supp}(f) = \{g \in G | f(g) \neq 0\}.$$

Θεώρημα 37. *Ας υποθέσουμε ότι G είναι μία πεπερασμένη Αβελιανή ομάδα και f είναι μία συνάρτηση με μιγαδικές τιμές στο G. Η f είναι μη μηδενική σταθερά αν και μόνον αν $\operatorname{supp}(\hat{f}) = \{1\}$. Επιπλέον, αν $f = c$ είναι μία σταθερά (μηδενική ή μη μηδενική),τότε*
$$\hat{c} = c\sqrt{|G|}\delta_1.$$

Απόδειξη. Έχουμε
$$\hat{c} = c\hat{1} = c\sqrt{|G|}\frac{\hat{1}}{\sqrt{|G|}} = c\sqrt{|G|}\hat{B}_1 = c\sqrt{|G|}\delta_1.$$

Αντίστροφα, αν $supp(\hat{f}) = \{1\}$, τότε $\hat{f} = c\sqrt{|G|}\delta_1$ για μη μηδενική σταθερά c, παίρνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier4.4 και έχουμε
$$f = c\sqrt{|G|}B_1 = c.$$

□

Από το παραπάνω θεώρημα έχουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της ομοιόμορφης κατανομής στο G, δίνεται από το $p(g) = 1/|G|$.
Επίσης έχουμε

Θεώρημα 38. *Άν f είναι μία συνάρτηση με μιγαδικές τιμές που ορίζεται στην $G = \mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \cdots \times \mathbb{Z}_{n_m}$, τότε*
$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$$

Πόρισμα 39. *Για κάθε $x \in G = \mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \cdots \times \mathbb{Z}_{n_m}$, έχουμε $\hat{\delta}_x = \bar{B}_x = B_{-x}$, όπου $-x$ είναι ο αντίστρφος του x στο G.*

4.2 Μετασχηματισμός Fourier Περιοδικών Συναρτήσεων

Έστω G να είναι η ομάδα $\mathbb{Z}$. Μία συνάρτηση με μιγαδική τιμή ορισμένη στο G καλείται περιοδική αν υπάρχει ακέραιος $\sigma \in G$ έτσι ώστε $f(\sigma + x) = f(x)$ για κάθε $x \in G$. Το μικρότερο τέτοιο σ ονομάζεται ***περίοδος*** *της f. Άν σ είναι περίοδος της f, τότε το υποσύνολο $\{1, \ldots, \sigma\}$ του G ονομάζεται θεμελιώδες σύνολο της f.*

Ας υποθέσουμε ότι $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ είναι περιοδική συνάρτησημε περίοδο σ. Άν $f_\sigma : \mathbb{Z}_\sigma \to \mathbb{C}$ είναι μία συνάρτηση ορισμένη από το $f_a(k) = f(k)$, τότε f είναι ***περιοδική επέκταση*** *του f_σ στο $\mathbb{Z}$. Ο μετασχηματισμός Fourier της f ορίζεται από το $\hat{f}(k) = \hat{f}_\sigma(\tilde{k})$, όπου $\tilde{k}$ είναι η προβολή του k στο $\mathbb{Z}_\sigma$, $\tilde{k} \in \mathbb{Z}_\sigma$ και $k \equiv \tilde{k}(mod\sigma)$. Για οποιοδήποτε $j \in \mathbb{Z}$,*

$$\hat{f}(j) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sum_{k=0}^{\sigma-1} e^{-\frac{2pi}{\sigma}\tilde{j}k} f_\sigma(k).$$

Αφού $e^{-\frac{2pi}{\sigma}j}k = e^{-\frac{2pi}{\sigma}\tilde{j}k}$ και $f(k) = f_\sigma(k)$ για $k = 0, \ldots, \sigma - 1$, έτσι μπορούμε να γράψουμε την προηγούμενη εξίσωση ως

$$\hat{f}(j) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sum_{k=0}^{\sigma-1} e^{-\frac{2pi}{\sigma}jk} f(k). \tag{4.7}$$

Για την περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ με περίοδο σ, ισχύει,

$$\widehat{\tau_a f} = \chi_a \hat{f} \quad \text{και} \quad \widehat{\chi_a f} = \tau_{-a} \hat{f}, \tag{4.8}$$

και άρα ο μετασχηματισμός Fourier για οποιαδήποτε περιοδική συνάρτηση που ορίζεται στο $\mathbb{Z}$ είναι πάλι περιοδική συνάρτηση με την ίδια περίοδο.

4.3 Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

Ως ισομετρία, ο μετασχηματισμός Fourier έχει μοναδικό αντίστροφο που ονομάζεται αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier και συμβολίζεται είτε με F^{-1} ή $f \to \check{f}$. Αφού η αντίστροφη μιας ισομετρίας είναι πάλι ισομετρία, έχουμε

$$\langle f_1, f_2 \rangle =< \check{f}_1, \check{f}_2 >$$

για κάθε $f_1, f_2 \in V_G$ και $||f|| = ||\check{f}||$ για κάθε $f \in V_G$.

Από τον ορισμό του αντιστρόφου, $\check{\delta}_g = B_g$ *για κάθε* $g \in G$*. Το αποτέλεσμα μας δίνει τη δυνατότητα να εκφράσουμε το* $\check{f}$ *χρησιμοποιώντας την* f*. Έχουμε*

$$f = \sum_{g \in G} \langle f, \delta_g \rangle \, \delta_g \tag{4.9}$$

$$\check{f} = \sum_{g \in G} \langle f, \delta_g \rangle \, B_g. \tag{4.10}$$

4.4 Τύπος Αντιστροφής

Ο επόμενος στόχος μας είναι να βρούμε τον τύπο του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier , δηλαδή τον τύπο που εκφράζει τα f *χρησιμοποιώντας την* $\hat{f}$*. Έστω* G *μία πεπερασμένη Αβελιανή ομάδα και* f *μία συνάρτηση με μιγαδικές τιμές ορισμένη στο* G*. Επειδή*

$$f = \sum_{g \in G} \langle f, B_g \rangle \, B_g$$

και $\langle f, B_G \rangle = \left\langle \hat{f}, \delta_g \right\rangle$*, έχουμε*

$$f = \sum_{g \in G} \left\langle \hat{f}, \delta_g \right\rangle B_g.$$

Η εξίσωση καλείται τύπος αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier .

Παράδειγμα 40. *Ας υποθέσουμε ότι* $G = \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_m}$ *και* f *είναι μία συνάρτηση με μιγαδικές τιμές ορισμένη στο* G*. Για* $x \in G$*, από τον αντίστροφο τύπο έχουμε*

$$f(x) = \sum_{y \in G} \hat{f}(y) B_y(x) = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{y \in G} \hat{f}(y) \chi_y(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n_1 \dots n_m}} \sum_{y \in G} e^{2pi(x_1 y_1/n_1 + \cdots + x_m y_m/n_m)} \hat{f}(y).$$

Κεφάλαιο 5

Συνέλιξη, και Αρχή της Αβεβαιότητας

5.1 Συνέλιξη

Ορισμός 41. *Ας υποθέσουμε ότι G είναι πεπερασμένη Αβελιανή ομάδα και f_1 και f_2 συναρτήσεις με μιγαδικές τιμές ορισμένες στο G. Η συνέλιξη των f_1 και f_2 ορίζεται στο G από την παρακάτω σχέση*

$$f_1 * f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{g \in G} f_1(xg^{-1}) f_2(g).$$

Λήμμα 42. *Ας υποθέσουμε ότι G είναι πεπερασμένη Αβελιανή ομάδα.*

1. *Για κάθε $s, t \in G$, $B_s * B_t = \begin{cases} B_s & \text{αν } s = t, \\ 0 & \text{αν } s \neq t. \end{cases}$*
   Συνεπώς, B_s και B_t μετατίθενται, $B_s * B_t = B_t * B_s$.

2. *$(B_r * B_s) * B_t = B_r * (B_s * B_t)$ για κάθε $r, s, t \in G$.*

Απόδειξη. 1. Για κάθε $x \in G$,

$$B_s * B_t(x) = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{g \in G} B_s(xg^{-1}) B_t(g)$$

$$= B_s(x) \sum_{g \in G} B_s(g^{-1}) B_t(g)$$

$$= B_s(x) \sum_{g \in G} \bar{B}_s(g) B_t(g)$$

$$= B_s(x) < B_t, B_s >$$

$$= \begin{cases} \mathrm{B}_s(x) & \text{αν } s = t, \\ 0 & \text{αν } s \neq t. \end{cases}$$

2. Από την (1) έχουμε ότι

$$(B_r * B_s) * B_t = B_r * (B_s * B_t) = \begin{cases} B_s & \text{αν } r = s = t, \\ 0 & \text{άλλο .} \end{cases}$$

□

Μερικές ιδιότητες της συνέλιξης παρατίθενται στο ακόλουθο θεώρημα, οι περισσότερες από τις οποίες είναι συνέπειες του λήμματος.

Θεώρημα 43. *Ας υποθέσουμε ότι G είναι πεπερασμένη Αβελιανή ομάδα και f, f_1, και f_2 να είναι συναρτήσεις με μιγαδικές τιμές ορισμένες στην G. Τότε*

1. $f * (cf_1 + f_2) = c(f_1 * f_2) + (f_1 * f_2)$ *για κάθε* $c \in \mathbb{C}$.
2. $$f_1 * f_2 = \sum_{g \in G} \hat{f}_1(g)\hat{f}_2(g)B_g.$$
   Συνεπώς,
   $supp(\hat{f}_1) \cap supp(\hat{f}_2) = \varnothing$ *αν και μόνο αν* $f_1 * f_2 = 0$.
3. $(f_1 * f_2)\hat{} = \hat{f}_1\hat{f}_2$.
4. $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ *(μεταθετικότητα).*
5. $(f * f_2) * f_2 = f * (f_1 * f_2)$ *(προσεταιριστικότητα).*
6. $f * \delta = f$, *επιπλέον, αν* $supp(\hat{f}) = G$, *τότε* δ *είναι μοναδικά ορισμένο (ύπαρξη ταυτοτικού στοιχείου).*
7. *Αν* $supp(\hat{f}) = G$, *τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση* ϕ *με μιγαδικές τιμές στο* G *έτσι ώστε* $\phi * f = \delta$ *(ύπαρξη αντιστρόφου).*

Απόδειξη. 1. Ισχύει από τον ορισμό.

2. Προκύπτει από τον τύπο του αντιστρόφου, από την σχέση (1) και από το λήμμα 42.
3. Προκύπτει από την σχέση (2).

4. Ισχυεί από την σχέση (1) και από το λήμμα (1).

5. Προκύπτει από την σχέση (1) και από το λήμμα (2).

6. Προκύπτει από την σχέση (2).

7. Προκύπτει από την σχέση (2).

□

Από το θεώρημα το (1) δείχνει ότι, για σταθερό $h \in V_G$, η απεκόνιση $C_h : V_G \to V_G$ που ορίζεται από $C_h(f) = h * f$ είναι γραμμική, έτσι προσδιορίζεται πλήρως μόλις γίνουν γνωστές οι τιμές της σε μία βάση. Λέγεται τελεστής συνέλιξης ως προς το h και από την σχέση (2) του θεωρήματος έχουμε

$$C_h(B_g) = \hat{h}(g) B_g. \tag{5.1}$$

Από την εξίσωση αυτή έχουμε πολλές συνέπειες, τις οποίες θα δούμε στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 44. *Ας υποθέσουμε ότι G είναι πεπερασμένη Αβελιανή ομάδα.*

1. *Αν h είναι μία συνάρτηση με μιγαδικές τιμές ορισμένη στο G, τότε οι συναρτήσεις της βάση χαρακτήρων B_G είναι ιδιοδιανύσματα του C_h. Το ιδιοδιάνυσμα B_g αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\hat{h}(g)$.*

2. *Έστω T να είναι ο γραμμικός τελεστής του V_G. Τότε T μετατίθεται με το τ_a για κάθε $a \in G$ αν και μόνο αν $T = C_h$ για κάποιο $h \in V_G$.*

*Ένας χώρος Banach X ονομάζεται **άλγεβρα Banach** αν είναι εφοδιασμένος με έναν πολλαπλασιασμό έτσι ώστε, για $x, y, z \in$ και $c \in \mathbb{C}$, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:*

1. $||xy|| \leq ||x|| \, ||y||$,

2. $x(yz) = (xy)z$ *(προσεταιριστικότητα)*,

3. $x(y+z) = xy + xz, (x+y)z = xz + yz$ *(επιμεριστική), και*

4. $(cx)y = x(cy) = c(xy)$.

Ο χώρος V_G, εφοδιασμένος με την συνέλιξη είναι άλγεβρα Banach. Πράγματι, έστω f_1 και f_2 να είναι συναρτήσεις με μιγαδικές τιμές ορισμένες στο G. Έχουμε

$$||f_1 * f_2||^2 = ||\widehat{f_1 * f_2}||^2 = ||\hat{f}_1\hat{f}_2||^2 = \sum_{g\in G}|\hat{f}_1(g)|^2|\hat{f}_2(g)|^2$$

.

$$\leq \sum_{g\in g}|\hat{f}_1(g)|^2\sum_{g\in G}|\hat{f}_2(g)|^2 = ||\hat{f}_1||^2\ ||\hat{f}_2||^2 = ||f_1||^2||f_2||^2$$

και άρα

$$||f_1 * f_2|| \leq ||f_1||\ ||f_2||.$$

Οι άλλες ιδιότητες είναι άμεσες.
Μια απεικόνιση $\gamma : V_G \to \mathbb{C}$ *έτσι ώστε*

$$\gamma(cf_1 + f_2) = c\gamma(f_1) + \gamma(f_2) \quad \textit{και} \quad \gamma(f_1 * f_2) = \gamma(f_1)\gamma(f_2)$$

για κάθε $f_1, f_2 \in V_G$ *και* $c \in \mathbb{C}$ *λέγεται ομομορφισμός.*

Θεώρημα 45. *Αν* γ *είναι μη μηδενικός ομομορφισμός* $\gamma : V_G \to \mathbb{C}$, *τότε υπάρχει μοναδικό* $x \in G$ *έτσι ώστε* $\gamma(f) = \hat{f}(x)$ *για κάθε* $f \in V_G$. *Αντίστροφα, για κάθε* $x \in G$, *η απεικόνιση* $\gamma : V_G \to \mathbb{C}$ *που ορίζεται* $\gamma(f) = \hat{f}(x)$ *είναι μη μηδενικός ομομορφισμός του* V_G.

Πόρισμα 46. *Υπάρχουν τόσοι Το πλήθος των μη μη μηδενικών ομομορφισμών της* V_G *είναι* $|G|$.

5.2 Αρχή της Αβεβαιότητας (The Uncertainty Principle)

Η αρχή της απροσδιοριστίας ή διαφορετικά αρχή της αβεβαιότητας είναι βασικό αξίωμα της κβαντικής μηχανικής που διατυπώθηκε για πρώτη φορά το 1927 από τον Βέρνερ Χάιζενμπεργκ (Werner Heisenberg, 1901 - 1976). Σύμφωνα με την αρχή της απροσδιοριστίας είναι αδύνατο να μετρηθεί ταυτόχρονα και με ακρίβεια, ούτε πρακτικά, ούτε και θεωρητικά η θέση και η ταχύτητα, ή ορμή, ενός σωματίου. Μία έκφραση λέει ότι είναι αδύνατο να εντοπιστούν ταυτόχρονα μία συνάρτηση και ο μετασχηματισμός Fourier της. Θα δούμε μία εκδοχή της αρχής της αβεβαιότητας για συναρτήσεις που ορίζονται σε πεπερασμένες Αβελιανές ομάδες.

Θεώρημα 47. *(Αρχή της Αβεβαιότητας). Έστω* G *μία πεπερασμένη Αβελιανή ομάδα και* f *να είναι συνάρτηση με μιγαδικές τιμές ορισμένη στο* G. *Άν*

f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν, τότε

$$|G| \leq |\text{supp}(f)||\text{supp}(\hat{f})|.$$

Επιπλέον, αν η f είναι σταθερά τότε ισχύει η ισότητα.

Απόδειξη. Σε αυτή την απόδειξη, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέγιστη τιμή του $|f|$, δηλαδή, $||f||_\infty$.

$$||f||_\infty = max\{|f(g)| : g \in G\}.$$

Αφού για κάθε $x \in G$, από τον τύπο της αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier έχουμε

$$f(x) = \sum_{g \in G} \hat{f}(g) B_g(x),$$

και αφού $|B_g(x)| = 1/\sqrt{|G|}$, από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{g \in G} |\hat{f}(g)| = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \left\langle |\hat{f}|, 1_{\text{supp}(\hat{f})} \right\rangle,$$

όπου $1_{\text{supp}(\hat{f})}$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $\text{supp}(\hat{f})$. Από την ανισότητα $Cauchy - Schwarz$ έχουμε,

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{|G|}} ||\hat{f}|| \sqrt{|\text{supp}(\hat{f})|},$$

και άρα

$$||f||_\infty \leq \frac{1}{|G|} ||\hat{f}|| \sqrt{|\text{supp}(\hat{f})|} = \frac{1}{\sqrt{|G|}} ||f|| \sqrt{|\text{supp}(\hat{f})|}$$

ή, ισοδύναμα,

$$||f||_\infty^2 |G| \leq ||f||^2 |\text{supp}(\hat{f})|.$$

Αφού

$$||f||^2 = \sum_{g \in G} |f(g)|^2 \leq ||f||_\infty^2 |\text{supp}(f)|,$$

έχουμε

$$||f||_\infty^2 |G| \leq ||f||^2 |\text{supp}(\hat{f})| \leq ||f||_\infty^2 |\text{supp}(f)||\text{supp}(\hat{f})|. \tag{5.2}$$

και άρα

$$|G| \leq |\text{supp}(f)||\text{supp}(\hat{f})|.$$

Άν f είναι μη μηδενική σταθερή συνάρτηση, τότε $|supp(f)| = |G|$. Από το θεώρημα 37 έπεται ότι $|\text{supp}(\hat{f})| = 1$. Έτσι έχουμε ότι $|G| = |\text{supp}(f)||\text{supp}(\hat{f})|$. $\square$

Από την αρχή της αβεβαιότητας προκύπτει ότι f και $\hat{f}$ δεν μπορούν να εντοπιστούν σε αυθαίρετα μικρά υποσύνολα του G ταυτόχρονα.

Βιβλιογραφία

[1] *Αθανάσιος Ι. Πάπιστας: Μαθήματα Θεωρίας Ομάδων, Kallipos (2015).*

[2] *John B.Fraleigh: Εισαγωγή στην άλγεβρα, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, μετάφραση Α.Γιαννόπουλος (2009).*

[3] *Α.Γιαννόπουλος: Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης, Πανεπιστήμιο Κρήτης (2003).*

[4] *Bao Luong: Fourier Analysis on Finite Abelian Groups, University of Maryland (2009).*

[5] *J. Murphy: A Course in Harmonic Analysis, Missouri University of Science and Technology.*