

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΣΗ ΟΧΗΜΑΤΩΝ ΜΕ
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΖΕΛΚΑΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΣ ΘΕΟΔΟΣΗΣ

ΣΑΜΟΣ 2023

Στους γονείς μου, Θεσσαλονικιά και Θανάση

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω πρωτίστως τους γονείς μου, που με στήριξαν σε όλα τα χρόνια της ακαδημαϊκής μου πορείας και συνέβαλλαν με την αμέριστη στήριξη τους να ολοκληρώσω το μεταπτυχιακό μου, «Σπουδές στα Μαθηματικά» του Πανεπιστημίου Αιγαίου, καθώς και τον κύριο Θεοδόση Δημητράκο για την καθοδήγηση που μου παρείχε και το ενδιαφέρον που μου έδειξε ώστε να φέρω εις πέρας την παρούσα μεταπτυχιακή εργασία. Ούσα πρώτη μου εργασία, ο πολύτιμος χρόνος που μου αφιέρωσε και η άψογη συνεργασία μας έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην εκπόνηση της. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής τον κ. Χρήστο Νικολόπουλο και τον κ. Βασίλειο Κουκουλογιάννη, που δέχτηκαν να αφιερώσουν κάποιο από τον πολύτιμο χρόνο τους για την αξιολόγηση της εργασίας. Τέλος, ευχαριστώ τον θεωρητικό φυσικό και ξάδελφο μου Στέφανο Αμαζόπουλο, για τις πολύωρες συζητήσεις μας πάνω στην εργασία.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετώνται διάφορα στοχαστικά προβλήματα βέλτιστης δρομολόγησης οχημάτων, τα οποία προκύπτουν σε καθημερινές εφαρμογές όπως η δρομολόγηση σχολικών λεωφορείων, οι υπηρεσίες έκτακτης ανάγκης και οι παραδόσεις κατ' οίκον. Περιλαμβάνει την εύρεση βέλτιστων διαδρομών για τα οχήματα ώστε να ελαχιστοποιούνται το κόστος και ο χρόνος. Αρχικά γίνεται μια αναφορά σε κάποια σημαντικά εργαλεία της Στοχαστικής Μοντελοποίησης τα οποία θα μας βοηθήσουν στην κατανόηση των επόμενων κεφαλαίων.

Έχοντας αυτό το υπόβαθρο, αναλύουμε το πρόβλημα της βέλτιστης δρομολόγησης ενός οχήματος με στοχαστικές απαιτήσεις για τις περιπτώσεις ενός προϊόντος με διακριτές και συνεχείς απαιτήσεις και δυο συναφών προϊόντων με διακριτές και συνεχείς απαιτήσεις. Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε τα στοχαστικά προβλήματα δρομολόγησης: ενός οχήματος για την βέλτιστη παράδοση δυο παρόμοιων προϊόντων με διακριτές απαιτήσεις και ενός οχήματος δυο τμημάτων για τη βέλτιστη παράδοση νέων και την παραλαβή παλιών προϊόντων με συνεχείς απαιτήσεις. Σε όλα τα παραπάνω στοχαστικά προβλήματα η βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης έχει μια συγκεκριμένη δομή που βασίζεται σε ένα σύνολο κρίσιμων ποσοτήτων για κάθε πελάτη και γι'αυτό θα κατασκευάσουμε αλγορίθμους για τον υπολογισμό τους. Για την ολοκλήρωση αυτών των κεφαλαίων παραθέτουμε κάποια αριθμητικά παραδείγματα.

Κλείνοντας, ασχολούμαστε με το κομμάτι των στοχαστικών προβλημάτων δρομολόγησης με χρονικά παράθυρα. Το πρώτο πρόβλημα είναι ένα στοχαστικό πρόβλημα παραλαβής και παράδοσης με αυστηρά χρονικά παράθυρα, ενώ το δεύτερο είναι ένα στοχαστικό αποθεματικό πρόβλημα δρομολόγησης συνεχούς χρόνου με χρονικά παράθυρα. Και τα δυο προβλήματα περιγράφονται αναλυτικά, ενώ για το πρώτο πρόβλημα παρέχουμε και μια προσέγγιση της λύσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. Μια εισαγωγή στα Μαρκοβιανά μοντέλα αποφάσεων

1.1	Εισαγωγή	7
1.2	Μοντέλα πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα	8
1.3	Παραδείγματα στοχαστικών μοντέλων πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα	11
1.4	Μοντέλα άπειρου χρονικού ορίζοντα	16
1.5	Παραδείγματα στοχαστικών μοντέλων άπειρου χρονικού ορίζοντα	19
1.6	Μέσο κόστος σε μοντέλα άπειρου χρονικού ορίζοντα	25

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Βέλτιστη δρομολόγηση ενός οχήματος

2.1	Εισαγωγή	33
2.2	Το πρόβλημα με διακριτές απαιτήσεις	34
2.3	Αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού	43
2.4	Αριθμητικό Παράδειγμα	44
2.5	Περίληψη των αποτελεσμάτων και θέμα για μελλοντική έρευνα	46

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Βέλτιστη δρομολόγηση ενός οχήματος δυο παρόμοιων προϊόντων

3.1	Εισαγωγή	47
3.2	Το πρόβλημα με διακριτές απαιτήσεις	51
3.3	Αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού	59
3.4	Αριθμητικό Παράδειγμα	61
3.5	Το πρόβλημα χωρίς οι πελάτες να εξυπηρετούνται με συγκεκριμένη σειρά	66
3.6	Περίληψη των αποτελεσμάτων και θέμα για μελλοντική έρευνα	69

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Βέλτιστη δρομολόγηση ενός οχήματος με ταυτόχρονες παραλαβές και παραδόσεις

4.1	Εισαγωγή	70
4.2	Το πρόβλημα με συνεχείς απαιτήσεις	72
4.3	Διακριτοποίηση του χώρου καταστάσεων	79
4.4	Αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού	80
4.5	Αριθμητικό Παράδειγμα	82
4.6	Περίληψη των αποτελεσμάτων και θέμα για μελλοντική έρευνα	85

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. Στοχαστικά προβλήματα δρομολόγησης με χρονικά παράθυρα

5.1	Εισαγωγή	86
5.2	Βιβλιογραφική ανασκόπηση	89
5.3	Το πρόβλημα PDPHTW-STDTT	93

5.4	Προσέγγιση της λύσης	97
5.5	Το πρόβλημα CTSIRPT	101
5.6	Συμπεράσματα και κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα	106
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ		107

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΜΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

1.1 Εισαγωγή

Στις αρχές του 20ου αιώνα ο Ρώσος Μαθηματικός Α. Α. Μαρκον στην προσπάθειά του να ερμηνεύσει την «αβεβαιότητα» στην εναλλαγή φωνηέντων και συμφώνων γραμμάτων στο ποίημα «Onegin» του Pushkin εισήγαγε τη θεωρία των Μαρκοβιανών διαδικασιών.

Ο Bellman, το 1957 εισήγαγε τη θεωρία του δυναμικού προγραμματισμού. Ανέπτυξε μία αναδρομική διαδικασία η οποία υπολογίζει βέλτιστες τιμές συναρτήσεων κέρδους ή κόστους μέσω μιας κατάλληλης συναρτησιακής εξίσωσης. Ο δυναμικός προγραμματισμός χρησιμοποιείται σε προβλήματα πεπερασμένου ή άπειρου χρονικού ορίζοντα στα οποία μία στοχαστική διαδικασία ελέγχεται από μία ακολουθία ενεργειών. Ο κύριος στόχος είναι η εύρεση ενός κανόνα επιλογής των ενεργειών που ελέγχει τη διαδικασία με το βέλτιστο τρόπο. Οι Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων εισήχθησαν από τον Bellman και ήταν αποτέλεσμα του συνδυασμού της θεωρίας των Μαρκοβιανών διαδικασιών και του δυναμικού προγραμματισμού. Κατά τη διάρκεια των τελευταίων τεσσάρων δεκαετιών αποτελούν το αντικείμενο της έρευνας πολλών ερευνητών. Έχουν βρει εφαρμογή σε διάφορα πεδία της επιστήμης, όπως για παράδειγμα στην Επιχειρησιακή Έρευνα, στη Βιολογία, στην Οικολογία και στην Πληροφορική. Ειδικότερα, έχουν αποδειχθεί πολύ χρήσιμες σε προβλήματα βέλτιστου ελέγχου αποθεμάτων, βέλτιστου ελέγχου ουρών αναμονής και βιολογικών πληθυσμών, βέλτιστης συντήρησης και αντικατάστασης μηχανημάτων, βέλτιστης διαχείρισης δικτύων και τηλεπικοινωνιών.

Θεωρούμε συστήματα τα οποία εξελίσσονται στην πορεία του χρόνου και έχουν ως κύριο χαρακτηριστικό της εξέλιξής τους, την «τυχειότητα». Τέτοια συστήματα καλούνται στοχαστικά δυναμικά συστήματα.

Το υπόλοιπο του κεφαλαίου οργανώνεται ως εξής. Στην Ενότητα 2 παρουσιάζουμε βασικά στοιχεία της θεωρίας του στοχαστικού δυναμικού προγραμματισμού εισάγοντας τις Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων σε διακριτό χρόνο. Στην Ενότητα 3 περιγράφουμε και αναλύουμε τρία παραδείγματα στοχαστικών μοντέλων πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα. Στην Ενότητα 4 εισάγουμε την εξίσωση βελτιστοποίησης για μοντέλα άπειρου χρονικού ορίζοντα και περιγράφουμε τον αλγόριθμο βελτίωσης των πολιτικών και τον αλγόριθμο με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων. Στην Ενότητα 5 περιγράφουμε και αναλύουμε τρία παραδείγματα στοχαστικών μοντέλων άπειρου χρονικού ορίζοντα. Στην Ενότητα 6 προσθέτουμε την εξίσωση βελτιστοποίησης για το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του μακροπρόθεσμου αναμενόμενου μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου, περιγράφουμε τους δυο αλγορίθμους για το πρόβλημα

της ελαχιστοποίησης του μακροπρόθεσμου αναμενόμενου μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου. Τέλος παραθέτουμε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα τους μαζί με ένα παράδειγμα στοχαστικού μοντέλου για το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του μακροπρόθεσμου αναμενόμενου μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου.

1.2 Μοντέλα πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα

Έστω μία στοχαστική διαδικασία $X_n, n = 0, 1, \dots$ όπου η τυχαία μεταβλητή X_n αναπαριστά την κατάσταση ενός συστήματος τη χρονική στιγμή n . Το σύνολο των καταστάσεων του συστήματος είναι πεπερασμένο ή απείρως αριθμήσιμο. Υποθέτουμε ότι είναι το σύνολο των μη-αρνητικών ακεραίων αριθμών $0, 1, 2, \dots$. Το σύστημα επιθεωρείται τις χρονικές στιγμές $t = 0, 1, 2, \dots$ οι οποίες θεωρούμε ότι ισαπέχουν μεταξύ τους. Η κατάσταση του συστήματος παρατηρείται σε κάθε χρονική στιγμή επιθεώρησης και μία ενέργεια επιλέγεται από ένα σύνολο εναλλακτικών ενεργειών. Αν υπάρχει ένας σταθερός ακεραίος αριθμός $N \geq 1$ τέτοιος ώστε οι ενέργειες για τον έλεγχο του συστήματος να επιλέγονται τις χρονικές στιγμές $0, 1, 2, \dots, N - 1$ και η διαδικασία να σταματά τη χρονική στιγμή N , τότε λέμε ότι μελετάμε ένα σύστημα πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα $N + 1$ βημάτων. Διαφορετικά, αν το σύνολο των χρονικών στιγμών επιλογής ενέργειας είναι άπειρο, λέμε ότι μελετάμε ένα σύστημα σε άπειρο χρονικό ορίζοντα. Στην παρούσα ενότητα, θα περιορίσουμε τη μελέτη μας σε συστήματα πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα.

Έστω ότι παρατηρούμε την εν εξελίξει στοχαστική διαδικασία $X_n, n = 0, 1, \dots$, κατά τις χρονικές στιγμές $t = 0, t = 1, \dots, t = N - 1, t = N$. Έστω ότι σε κάποια χρονική στιγμή επιθεώρησης t , το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i και η ενέργεια a επιλέγεται από ένα σύνολο εναλλακτικών ενεργειών $A(i)$. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $A(i)$ για κάθε κατάσταση i είναι πεπερασμένο.

Το σύστημα που περιγράψαμε είναι μία Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων σε διακριτό χρόνο αν:

- (a) Υπάρχει ένα κόστος $C(i, a)$ το οποίο εξαρτάται μόνο από την κατάσταση i και την ενέργεια a ως οικονομική συνέπεια της επιλογής της ενέργειας a τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i .
- (b) Την επόμενη χρονική στιγμή η κατάσταση του συστήματος είναι η κατάσταση j με πιθανότητα $p_{ij}(a)$ η οποία εξαρτάται μόνο από τις καταστάσεις i, j και την ενέργεια a .

Ο όρος «Μαρκοβιανή» δικαιολογείται από το γεγονός ότι το κόστος $C(i, a)$ και η πιθανότητα μετάβασης $p_{ij}(a)$ εξαρτώνται από το «παρελθόν» της διαδικασίας μόνο μέσω της τρέχουσας κατάστασης i της διαδικασίας και της ενέργειας a που επιλέγεται στην κατάσταση i .

Μια πολιτική π είναι ένας οποιοσδήποτε κανόνας επιλογής ενεργειών κατά τις χρονικές στιγμές επιθεώρησης του συστήματος. Η χρονική στιγμή λήψης μια ενέργειας a όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i καλείται χρονική στιγμή λήψης απόφασης. Υπάρχουν διάφορα είδη πολιτικών, εμείς όμως θα αρκестούμε στις στάσιμες πολιτικές σύμφωνα με τις οποίες η επιλογή μια ενέργειας σε κάθε χρονική στιγμή $t = 0, 1, \dots$ εξαρτάται μόνο από την κατάσταση της διαδικασίας αυτή την χρονική στιγμή. Επομένως μια στάσιμη πολιτική π^* καθορίζεται πλήρως από μια ακολουθία $\{\pi_i^*\}$, $i = 0, 1, \dots$ όπου $\pi_i^* \in A(i)$ είναι η ενέργεια που επιλέγεται οποτεδήποτε η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση i σε μια χρονική στιγμή επιλογής ενέργειας. Για κάθε αρχική κατάσταση της διαδικασίας i , αναζητούμε εκείνη την πολιτική π^* η οποία ελαχιστοποιεί μια προκαθορισμένη συνάρτηση κόστους. Αυτή η συνάρτηση καθορίζει το κριτήριο βελτιστοποίησης του προβλήματος.

Έστω ότι παρατηρούμε μια εν εξελίξει διαδικασία κατά τις χρονικές στιγμές $t = 1, t = 2, \dots, t = N + 1$. Υποθέτουμε ότι, αν σε κάποια χρονική στιγμή, η διαδικασία βρίσκεται, για παράδειγμα, στην κατάσταση i , μπορούμε να επιλέξουμε μία ενέργεια $a \in A(i)$ και υπό την επίδραση αυτής της ενέργειας, η κατάσταση της διαδικασίας την επόμενη χρονική στιγμή, είναι η κατάσταση j με πιθανότητα $p_{ij}(a)$. Αυτή η μετάβαση επιφέρει ένα κόστος, η μέση τιμή του οποίου είναι ίση με $C(i, a)$. Το σύνολο $A(i)$ των ενεργειών θεωρείται πεπερασμένο.

Το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει είναι να βρούμε εκείνη την πολιτική που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο κόστος που λαμβάνεται από τη χρονική στιγμή $t = 1$ μέχρι και την χρονική στιγμή $t = N + 1$. Ορίζουμε $V(i, t)$, $t = 1, 2, \dots, N + 1$ να είναι το ελάχιστο κόστος από τη χρονική στιγμή t μέχρι και τη χρονική στιγμή $N + 1$, αν το σύστημα κατά τη χρονική στιγμή t βρίσκεται στην κατάσταση i .

Προφανώς αν $t = N + 1$: $V(i, N + 1) = 0$ (Οριακή συνθήκη).

Αν $t = N$,

$$V(i, N) = \min_{a \in A(i)} C(i, a) \quad (1.1)$$

δηλαδή, τη χρονική στιγμή $t = N$, η βέλτιστη πολιτική επιλέγει εκείνη την ενέργεια που ελαχιστοποιεί το δεξιό μέλος της (1.1).

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t το σύστημα βρίσκεται σε μια κατάσταση i και επιλέγεται η ενέργεια a , τότε λαμβάνουμε ένα κόστος $C(i, a)$ και η επόμενη κατάσταση είναι η j με πιθανότητα $p_{ij}(a)$. Για να ελαχιστοποιήσουμε το συνολικό αναμενόμενο κόστος το καλύτερο που μπορούμε να πετύχουμε υπό την έννοια του αναμενόμενου κόστους είναι τη χρονική στιγμή t να επιλέξουμε εκείνη την ενέργεια a που ελαχιστοποιεί την ακόλουθη ποσότητα: $C(i, a) + \sum_j p_{ij}(a)V(j, t + 1)$.

Εφόσον $V(i, t)$ είναι ότι καλύτερο μπορούμε να πετύχουμε, γράφουμε ότι:

$$V(i, t) = \min_{a \in A(i)} \left\{ C(i, a) + \sum_j p_{ij}(a) V(j, t + 1) \right\} \quad (1.2)$$

Η (1.2) είναι γνωστή ως εξίσωση του δυναμικού προγραμματισμού ή εξίσωση βελτιστοποίησης και παρέχει μια μέθοδο υπολογισμού της ποσότητας $V(i, 1)$ αναδρομικά (με την τεχνική της προς τα πίσω επαγωγής). Αρχικά υπολογίζουμε την ποσότητα $V(i, N)$ από την (1.1), κατόπιν θέτουμε $t = N - 1$ στην (1.2) και υπολογίζουμε την ποσότητα $V(i, N - 1)$. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία $(N - 2)$ φορές βρίσκουμε την ποσότητα $V(i, 1)$.

Η βέλτιστη πολιτική είναι η ακόλουθη: Όταν η διαδικασία βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = N, N - 1, \dots, 1$ στην κατάσταση i , τότε επιλέγεται η ενέργεια που ελαχιστοποιεί το δεξιό μέλος της (1.2).

Παρατηρήσεις

- (i) Αντί για αναμενόμενο κόστος $C(i, a)$ μπορεί να έχουμε αναμενόμενο κέρδος $R(i, a)$, τότε μεγιστοποιούμε το συνολικό αναμενόμενο κέρδος και η εξίσωση γράφεται:

$$V(i, t) = \max_{a \in A(i)} \left\{ R(i, a) + \sum_j p_{ij}(a) V(j, t + 1) \right\}.$$

- (ii) Για κάθε κατάσταση i μπορεί το $A(i)$ να είναι άπειρο σύνολο.
- (iii) Συχνά η επόμενη κατάσταση j , δεν εξαρτάται από τη πιθανότητα $p_{ij}(a)$ αλλά από μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ ή από μια συνάρτηση μάζας πιθανότητας $P(x)$.
- (iv) Έστω $V_k(i)$, $0 \leq k \leq N$ το ελάχιστο αναμενόμενο κόστος (ή το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος) αν η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση i και απομένουν k χρονικές περίοδοι μέχρι τη χρονική στιγμή $N + 1$:

$$V_k(i) = \min_{a \in A(i)} \left\{ C(i, a) + \sum_j p_{ij}(a) V_{k-1}(j) \right\}, k = 1, \dots, k = N,$$

με $V_0(i) = 0$ (Οριακή συνθήκη)

και

$$V_k(i) = \max_{a \in A(i)} \left\{ R(i, a) + \sum_j p_{ij}(a) V_{k-1}(j) \right\}, k = 1, \dots, k = N$$

με $V_0(i) = 0$ (Οριακή συνθήκη).

- (v) Τα μοντέλα που περιγράψαμε είναι στοχαστικά. Αν, για κάθε ενέργεια a και για κάθε κατάσταση i ισχύει ότι $p_{ij}(a) = 0$, για $j \neq j_0$ και $p_{ij_0}(a) = 1$ για κάποια κατάσταση j_0 τότε τα μοντέλα γίνονται ντετερμινιστικά.

1.3 Παραδείγματα στοχαστικών μοντέλων πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα

Παράδειγμα 1.1 (Ένα μοντέλο σχετιζόμενο με ένα τυχερό παιχνίδι). Ένας παίκτης μπορεί να στοιχηματίσει οποιαδήποτε μη-αρνητική ποσότητα από την περιουσία του και κερδίζει ή χάνει αυτήν την ποσότητα με πιθανότητες p και $q = 1 - p$, αντίστοιχα. Ο παίκτης έχει δικαίωμα να στοιχηματίσει n φορές και ο στόχος του είναι να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη τιμή του λογαρίθμου της τελικής περιουσίας του. Το πρόβλημα είναι η εύρεση της βέλτιστης πολιτικής που πρέπει να ακολουθήσει.

Λύση. Έστω $V_n(x)$ η μέγιστη αναμενόμενη τιμή του λογαρίθμου της τελικής περιουσίας του παίκτη, αν η περιουσία του είναι ίση με x και έχει δικαίωμα να πάρει μέρος σε n στοιχήματα. Ως ενέργεια του παίκτη θεωρούμε το ποσοστό α της περιουσίας που στοιχηματίζει. Η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού είναι:

$$V_n(x) = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{pV_{n-1}(x + \alpha x) + qV_{n-1}(x - \alpha x)\} \quad (1.3)$$

με $V_0(x) = \log x$ (Οριακή συνθήκη).

Αν $p \leq \frac{1}{2}$, τότε $V_n(x) = \log(x)$ και η βέλτιστη πολιτική είναι ο παίκτης να στοιχηματίζει πάντοτε μηδέν ευρώ. Θα δείξουμε τον ισχυρισμό επαγωγικά. Προφανώς για $n = 0$ ισχύει. Έστω ότι $V_{n-1}(x) = \log(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Τότε: } V_n(x) &= \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{p \log[x(1 + \alpha)] + q \log[x(1 - \alpha)]\} \\ &= \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{p \log(x) + p \log(1 + \alpha) + q \log(x) + q \log(1 - \alpha)\} \\ &= \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{(p + q) \log(x) + p \log(1 + \alpha) + q \log(1 - \alpha)\} \\ &= \log(x) + \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{p \log(1 + \alpha) + q \log(1 - \alpha)\}. \end{aligned}$$

Έστω $f(\alpha) = p \log(1 + \alpha) + q \log(1 - \alpha)$. Είναι $f'(\alpha) = \frac{p - q - \alpha}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} \leq 0$. Άρα η $f(\alpha)$ είναι φθίνουσα ως προς α στο διάστημα $[0, 1]$. Επομένως η μέγιστη τιμή της $f(\alpha)$ επιτυγχάνεται όταν $\alpha = 0$ και συνεπώς $V_n(x) = \log(x)$.

Αν $p > \frac{1}{2}$, τότε $V_n(x) = nC + \log(x)$ και η βέλτιστη πολιτική είναι ο παίκτης να στοιχηματίζει πάντοτε $(p - q)\%$ της περιουσίας του (αυτής που διαθέτει κάθε φορά). Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $V_0(x) = \log(x)$ και (1.3) για $n = 1$, έχουμε:

$$V_1(x) = \log(x) + \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{p \log(1 + \alpha) + q \log(1 - \alpha)\}. \quad (1.4)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε Απειροστικό Λογισμό συμπεραίνουμε ότι η μεγίστη τιμή στην (1.4) επιτυγχάνεται

$$\begin{aligned} \text{όταν } \alpha &= p - q. \text{ Έτσι } V_1(x) = \log(x) + p \log(1 + p - q) + q \log(1 - p + q) \\ &= \log(x) + p \log(1 + p + p - 1) + q \log(1 - 1 + q + q) \\ &= \log(x) + p \log(2p) + q \log(2q) \\ &= \log(x) + p[\log(2) + \log(p)] + q[\log(2) + \log(q)] \\ &= \log(x) + (p + q) \log(2) + p \log(p) + q \log(q) \\ &= \log(x) + \log(2) + p \log(p) + q \log(q). \end{aligned}$$

Συνεπώς $V_1(x) = \log(x) + C$, όπου $C = \log(2) + p \log(p) + q \log(q)$. Από την (1.3) για $n = 2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} V_2(x) &= \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{pV_1(x + \alpha x) + qV_1(x - \alpha x)\} \text{ και από πριν ισχύει } V_1(x) = \log(x) + C, \text{ οπότε } V_2(x) = \\ &= \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{p[\log(x + \alpha x) + C] + q[\log(x - \alpha x) + C]\} \text{ ή } V_2(x) = C + \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{p \log(x + \alpha x) + \\ & q \log(x - \alpha x)\}. \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση με την (1.4) βλέπουμε ότι η βέλτιστη ενέργεια που πρέπει να επιλέξει ο παίκτης είναι να στοιχηματίσει πάλι $(p - q)\%$ της τελικής περιουσίας του. Έτσι προκύπτει ότι:

$$V_2(x) = C + p \log[x + (p - q)x] + q \log[x - (p - q)x] \text{ ή}$$

$$V_2(x) = C + \log(x) + p \log(1 + p - q) + q \log(1 - p + q) \text{ ή}$$

$$V_2(x) = C + \log(x) + C \text{ ή } V_2(x) = 2C + \log(x).$$

Επαγωγικά, μπορεί να δειχτεί ότι:

$$V_n(x) = nC + \log(x).$$

Παράδειγμα 1.2 (Βέλτιστη παραγωγικότητα ενός συνεταιρισμού). Ένας αγροτικός συνεταιρισμός έχει στην διάθεση του ένα μεγάλο αγρό. Η παραγωγικότητα του αγρού ελέγχεται κάθε χρόνο και κατατάσσεται σε μια από τις παρακάτω καταστάσεις, 1: αρίστη, 2: καλή, 3: μέτρια, 4: κακή. Η κατάσταση του αγρού το επόμενο έτος εξαρτάται από την κατάσταση του φέτος, μέσω του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P(1) = (p_{ij}(1)) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Η παραγωγικότητα του αγρού μπορεί να βελτιωθεί με τη χρησιμοποίηση λιπασμάτων. Συγκεκριμένα, αν στην αρχή του έτους, ο αγρός λιπανθεί, τότε ο προηγούμενος πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης γίνεται:

$$P(2) = (p_{ij}(2)) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.45 & 0.1 & 0.05 \\ 0.35 & 0.4 & 0.15 & 0.1 \\ 0.15 & 0.2 & 0.45 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Οι αντίστοιχοι πίνακες αμοιβής είναι:

$$R(1) = (r_{ij}(1)) = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad R(2) = (r_{ij}(2)) = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Μας απασχολεί το πρόβλημα της εύρεσης εκείνης της πολιτικής η οποία για οποιαδήποτε αρχική κατάσταση του αγρού μεγιστοποιεί το συνολικό αναμενόμενο κέρδος.

Λύση. Έστω $I = \{1,2,3,4\}$ ο χώρος καταστάσεων και $A = \{1,2\}$ ο χώρος ενεργειών όπου 1: μη-λίπανση, 2: λίπανση. Τα κέρδη $R(i, \alpha)$ υπολογίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$R(i, \alpha) = \sum_{j=1}^4 p_{ij}(\alpha) r_{ij}(\alpha), \quad i = 1,2,3,4 \text{ και } \alpha = 1,2.$$

Έστω $V(i, t)$, $t = 1,2,3,4,5$ το μέγιστο κέρδος από την αρχή του έτους t μέχρι και την αρχή του έτους 5, αν η κατάσταση του αγρού κατά το έτος t είναι η κατάσταση i . Αυτή η ποσότητα βρίσκεται αναδρομικά χρησιμοποιώντας την εξίσωση του δυναμικού προγραμματισμού:

$$V(i, t) = \max_{\alpha \in \{1,2\}} \left\{ R(i, \alpha) + \sum_{j=1}^4 p_{ij}(\alpha) V(j, t + 1) \right\}, i = 1,2,3,4, t = 1,2,3,4$$

και $V(i, 5) = 0, i = 1,2,3,4$.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα καθώς και οι ενέργειες που επιλέγονται από τη βέλτιστη πολιτική παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα για τις διάφορες τιμές του t .

Για $t = 1$:

i	α	$R(i, \alpha)$	$V(i, t)$
1	1	3.6	9.35
	2*	6.3	16.62
2	1	2.1	6.38
	2*	3.65	13.01
3	1	1	3.04
	2*	1.45	7.6
4	1	-2	-3.24
	2*	-2.2	0.3

Για $t = 2$:

i	α	$R(i, \alpha)$	$V(i, t)$
1	1	3.6	7.19
	2*	6.3	13.4
2	1	2.1	4.57
	2*	3.65	9.99
3	1	1	1.56
	2*	1.45	5.32
4	1	-2	-4.25
	2*	-2.2	-1.24

Για $t = 3$:

i	α	$R(i, \alpha)$	$V(i, t)$
1	1	3.6	5.28
	2*	6.3	8.95
2	1	2.1	2.95
	2*	3.65	7.33
3	1	1	0.72
	2*	1.45	3.37
4	1	-2	-4
	2*	-2.2	-2.25

Για $t = 4$:

i	α	$R(i, \alpha)$	$V(i, t)$
1	1	3.6	3.6
	2*	6.3	6.3
2	1	2.1	2.1
	2*	3.65	3.65
3	1	1	1
	2*	1.45	1.45
4	1*	-2	-2
	2	-2.2	-2.2

Επομένως, για τη μεγιστοποίηση του αναμενόμενου συνολικού κέρδους, ο αγρός πρέπει να λιπανθεί τα τρία πρώτα έτη, ανεξάρτητα από την κατάσταση του, ενώ στο τέταρτο έτος αυτό δεν πρέπει να γίνει μόνο στην περίπτωση κατά την οποία η κατάσταση του αγρού είναι κακή. Το αντίστοιχο μέγιστο κέρδος είναι ίσο με 16.62, 13.01, 7.6 ή 0.3, ανάλογα με το αν στην αρχή του πρώτου έτους η παραγωγικότητα του αγρού είναι άριστη, καλή, μέτρια ή κακή, αντίστοιχα.

1.4 Μοντέλα άπειρου χρονικού ορίζοντα

Θεωρούμε ότι παρατηρούμε μία εν εξελίξει διαδικασία κατά τις χρονικές στιγμές $t = 0, 1, \dots$ και ότι υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός B τέτοιος ώστε, για κάθε ενέργεια $a \in A(i)$ και κάθε κατάσταση i της διαδικασίας, ισχύει ότι: $|C(i, a)| < B$. Το συνολικό αναμενόμενο αποπληθωρισμένο κόστος $V_\pi(i)$ σε άπειρο χρονικό ορίζοντα, υπό τον έλεγχο της πολιτικής π , αν η αρχική κατάσταση της διαδικασίας είναι η κατάσταση i , ορίζεται ως εξής:

$$V_\pi(i) = E_\pi \left[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t C(X_t, a_t) | X_0 = i \right],$$

όπου η σταθερά α ανήκει στο διάστημα $(0,1)$ και καλείται αποπληθωριστικός παράγοντας. Με E_π συμβολίζουμε τη δεσμευόμενη τιμή δοθείσης της πολιτικής π .

Το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει είναι να βρούμε εκείνη την πολιτική που ελαχιστοποιεί το συνολικό αναμενόμενο αποπληθωρισμένο κόστος, για κάθε αρχική κατάσταση της διαδικασίας.

Μια πολιτική π^* καλείται α -βέλτιστη αν $V_{\pi^*}(i) = \inf_{\pi} V_\pi(i)$ για όλα τα $i \geq 0$. Έστω $V_\alpha(i) = \inf_{\pi} V_\pi(i)$.

Συνεπώς μια πολιτική π^* λέγεται α -βέλτιστη αν $V_{\pi^*}(i) = V_\alpha(i)$ για όλα τα $i \geq 0$. Η παρακάτω εξίσωση είναι γνωστή ως εξίσωση βελτιστοποίησης για μοντέλα άπειρου χρονικού ορίζοντα:

$$V_\alpha(i) = \min_{a \in A(i)} \left\{ C(i, a) + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(a) V_\alpha(j) \right\}, i \geq 0. \quad (1.5)$$

Θεώρημα 1 Έστω f_α η στάσιμη πολιτική η οποία, όταν η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση i , επιλέγει την ενέργεια εκείνη τέτοια ώστε:

$$C(i, f_\alpha(i)) + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(f_\alpha(i)) V_\alpha(j) = \min_{a \in A(i)} \left\{ C(i, a) + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(a) V_\alpha(j) \right\}, i \geq 0.$$

Τότε $V_{f_\alpha}(i) = V_\alpha(i)$ για κάθε $i \geq 0$ και συνεπώς η πολιτική f_α είναι α -βέλτιστη.

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα προκύπτει η ύπαρξη μιας στάσιμης α -βέλτιστης πολιτικής που προσδιορίζεται από την Εξίσωση (1.5). Συνεπώς, αν μπορούμε να βρούμε το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο αποπληθωρισμένο κόστος $V_\alpha(i)$, $i \geq 0$, τότε η στάσιμη πολιτική η οποία, όταν η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση i επιλέγει εκείνη την ενέργεια που ελαχιστοποιεί την παράσταση

$$C(i, a) + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(a) V_\alpha(j) \text{ είναι } \alpha - \text{βέλτιστη.}$$

Παρατηρήσεις

- (i) Αν το σύνολο των καταστάσεων της διαδικασίας είναι πεπερασμένο (έστω ότι είναι το σύνολο $\{1,2, \dots, n\}$), ο αλγόριθμος βελτίωσης των πολιτικών λειτουργεί ως εξής: Επιλέγουμε μια αρχική στάσιμη πολιτική f . Υπολογίζουμε τις ποσότητες $V_f(i)$, $i = 1,2, \dots, n$ λύνοντας το παρακάτω γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους:

$$V_f(i) = C(i, f(i)) + \alpha \sum_{j=0}^n p_{ij}(f(i))V_f(j), i = 1,2, \dots, n.$$

Κατόπιν βρίσκουμε τη στάσιμη πολιτική f^* η οποία, όταν η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση i , επιλέγει την ενέργεια $a \in A(i)$ που ελαχιστοποιεί την παράσταση :

$$C(i, a) + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(a)V_f(j).$$

Μετά βρίσκουμε τις ποσότητες $V_{f^*}(i)$, $i = 1,2, \dots, n$ για να βελτιώσουμε την πολιτική f^* κ.ο.κ. Επειδή ο αριθμός των δυνατών στάσιμων πολιτικών είναι πεπερασμένος, διότι ο αριθμός των καταστάσεων είναι πεπερασμένος, τελικά θα φτάσουμε σε μία στάσιμη πολιτική για την οποία δεν υπάρχει «γνήσια» βελτίωση. Αυτή είναι η α -βέλτιστη στάσιμη πολιτική.

- (ii) Αντί της ελαχιστοποίησης του συνολικού αναμενόμενου αποπληθωρισμένου κόστους, μπορεί να μας ενδιαφέρει η μεγιστοποίηση του συνολικού αναμενόμενου αποπληθωρισμένου κέρδους. Σε αυτή την περίπτωση, η εξίσωση βελτιστοποίησης γίνεται:

$$V_{\alpha}(i) = \max_{a \in A(i)} \left\{ R(i, a) + \alpha \sum_{j=0}^n p_{ij}(a)V_{\alpha}(j) \right\}, i \geq 0,$$

όπου $R(i, a)$ είναι το αναμενόμενο κέρδος, όταν βρισκόμαστε στην κατάσταση i και λαμβάνουμε την ενέργεια a .

- (iii) Έστω ότι σε ένα πρόβλημα άπειρου χρονικού ορίζοντα το πλήθος των καταστάσεων είναι ίσο με n και το πλήθος των δυνατών ενεργειών είναι ίσο με m , τότε το πλήθος των στάσιμων πολιτικών είναι ίσο με: $m * m * \dots * m = m^n$

Στο παρόν εδάφιο θα περιγράψουμε σε βήματα: (α) τον αλγόριθμο βελτίωσης των πολιτικών και (β) τον αλγόριθμο με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων, για μία διαδικασία με χώρο καταστάσεων το σύνολο $\{0,1, \dots, n\}$.

Αλγόριθμος βελτίωσης των πολιτικών

Έναρξη Ως αρχική πολιτική επιλέγουμε εκείνη (την f_1) που ελαχιστοποιεί τα αναμενόμενα κόστη $C(i, a)$ για κάθε κατάσταση i της διαδικασίας.

Βήμα 1 Για αυτήν την πολιτική, υπολογίζουμε τις $V_{f_1}(i), i = 0,1, \dots, n$ λύνοντας το παρακάτω σύστημα:

$$V_{f_1}(i) = C(i, f_1(i)) + \alpha \sum_{j=0}^n p_{ij}(f_1(i)) V_{f_1}(j), i = 0,1, \dots, n.$$

Βήμα 2 Για κάθε κατάσταση i της διαδικασίας, επιλέγουμε την ενέργεια a που ελαχιστοποιεί την παράσταση:

$$C(i, a) + \alpha \sum_{j=0}^n p_{ij}(a) V_{f_1}(j).$$

Η νέα στάσιμη πολιτική f_2 λαμβάνεται επιλέγοντας $f_2(i) = a_i$ για κάθε κατάσταση i της διαδικασίας.

Βήμα 3 Αν $f_1 = f_2$, ο αλγόριθμος σταματά. Διαφορετικά, επιστρέφουμε στο Βήμα 1 με την πολιτική f_1 να αντικαθίσταται από την πολιτική f_2 .

Ο αλγόριθμος βελτίωσης των πολιτικών απαιτεί σε κάθε επανάληψή του, την επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων με διάσταση ίση με τη διάσταση του χώρου καταστάσεων της διαδικασίας για την οποία επιλύεται. Το γεγονός αυτό επιβαρύνει υπολογιστικά τους αλγορίθμους βελτίωσης των πολιτικών και τους κάνει λιγότερο ελκυστικούς σε προβλήματα δυναμικού προγραμματισμού με μεγάλο χώρο καταστάσεων. Ένας εναλλακτικός αλγόριθμος αποφεύγει την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων και χρησιμοποιεί έναν αναδρομικό τρόπο επίλυσης των προβλημάτων που βασίζεται στο δυναμικό προγραμματισμό. Αυτός ο αλγόριθμος υπολογίζει αναδρομικά για $n = 0,1, \dots$ τη συνάρτηση $V_{n,\alpha}(i)$ από τον τύπο :

$$V_{n,\alpha}(i) = \min_{a \in A(i)} \left\{ C(i, a) + \alpha \sum_{j=0}^n p_{ij}(a) V_{n-1,\alpha}(j) \right\}, i \geq 0.$$

Η ποσότητα $V_{n,\alpha}(i)$ μπορεί να θεωρηθεί ως το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο αποπληθωρισμένο κόστος όταν απομένουν n χρονικές περιόδοι για το τέλος της διαδικασίας.

Αλγόριθμος με την μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων

Έναρξη Επιλέγουμε $V_{0,\alpha}(i)$ με $0 \leq V_{0,\alpha}(i) \leq \min_a C(i, a)$, για κάθε κατάσταση i της διαδικασίας.

Βήμα 1 Υπολογίζουμε τη συνάρτηση $V_{n,\alpha}(i)$ για κάθε κατάσταση i της διαδικασίας, από τον τύπο:

$$V_{n,\alpha}(i) = \min_{a \in A(i)} \left\{ C(i, a) + \alpha \sum_{j=0}^n p_{ij}(a) V_{n-1,\alpha}(j) \right\}, i \geq 0$$

και καθορίζουμε την πολιτική της οποίας οι ενέργειες ελαχιστοποιούν το δεξί μέλος της συνάρτησης $V_{n,\alpha}(i), i \geq 0$.

Βήμα 2 Ο αλγόριθμος σταματά όταν $|V_{n,\alpha}(i) - V_{n-1,\alpha}(i)| < \varepsilon$, όπου ε καλείται όριο ανοχής και είναι ένας προκαθορισμένος πολύ μικρός αριθμός (π.χ. $\varepsilon = 10^{-3}$).

Βήμα 3 Θέτουμε $n := n + 1$ και μεταβαίνουμε στο Βήμα 1.

1.5 Παραδείγματα στοχαστικών μοντέλων άπειρου χρονικού ορίζοντα

Παράδειγμα 1.3 (Ένα μοντέλο για την συντήρηση-αντικατάσταση ενός μηχανήματος). Στην αρχή κάθε μήνα, ένα μηχάνημα εξετάζεται και ταξινομείται σε μια από τις παρακάτω καταστάσεις.

Κατάσταση	Ερμηνεία
0	άριστη κατάσταση (σαν καινούργιο)
1	δουλεύει έχοντας πάθει μικρή βλάβη
2	δουλεύει έχοντας πάθει μεγάλη βλάβη
3	δε δουλεύει

Αφού παρατηρήσουμε την κατάσταση στην οποία βρίσκεται το μηχάνημα, πρέπει να αποφασίσουμε αν θα το αντικαταστήσουμε με ένα καινούργιο μηχάνημα (Ενέργεια 1), αν θα το επισκευάσουμε (Ενέργεια 2), ή αν δεν θα επέμβουμε (Ενέργεια 3). Όμως στην κατάσταση 0 μόνο η ενέργεια 3 είναι επιτρεπτή και στην κατάσταση 3 μόνο οι ενέργειες 1,2 είναι επιτρεπτές. Αν ληφθεί η ενέργεια 3, όταν το μηχάνημα είναι στις

καταστάσεις 0,1,2, τότε έχουμε ένα μηνιαίο κόστος λειτουργίας του μηχανήματος ίσο με 100, 200 και 500, αντίστοιχα. Επιπλέον, το μηχάνημα θα μεταβεί στην κατάσταση j στην αρχή του επόμενου μήνα με πιθανότητα ίση με $p_{ij}(3)$, $i = 0,1,2$. Αν ληφθεί η ενέργεια 2, όταν το μηχάνημα είναι στις καταστάσεις 1,2,3, το μηχάνημα επισκευάζεται στιγμιαία και έχουμε ένα κόστος επισκευής του μηχανήματος ίσο με 900,1300 και 2000, αντίστοιχα. Επιπλέον, το μηχάνημα θα μεταβεί στην κατάσταση j στην αρχή του επόμενου μήνα με πιθανότητα ίση με $p_{ij}(2)$, $i = 1,2,3$. Αν ληφθεί η ενέργεια 1, όταν το μηχάνημα είναι στις καταστάσεις 1,2,3, το μηχάνημα αντικαθίσταται ακαριαία από ένα καινούργιο μηχάνημα και έχουμε ένα κόστος αντικατάστασης του μηχανήματος ίσο με 2100, 2600 και 3100, αντίστοιχα. Επιπλέον, το μηχάνημα θα μεταβεί στην κατάσταση j στην αρχή του επόμενου μήνα με πιθανότητα ίση με $p_{ij}(1) = p_{0j}(3)$, $i = 1,2,3$. Οι ποσότητες $C(i, a)$ και $p_{ij}(a)$ για αυτό το πρόβλημα δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

i	a	$C(i, a)$	$p_{i0}(a)$	$p_{i1}(a)$	$p_{i2}(a)$	$p_{i3}(a)$
0	3	100	0.75	0.2	0.05	0
1	1	2100	0.75	0.2	0.05	0
	2	900	0.85	0.15	0	0
	3	200	0	0.7	0.25	0.05
2	1	2600	0.75	0.2	0.05	0
	2	1300	0.15	0.8	0.05	0
	3	500	0	0	0.8	0.2
3	1	3100	0.75	0.2	0.05	0
	2	2000	0.1	0.8	0.1	0

Χρησιμοποιείστε τον αλγόριθμο βελτίωσης των πολιτικών για την εύρεση της 0.9-βελτιστής πολιτικής.

Λύση. Ξεκινάμε από την πολιτική που ελαχιστοποιεί τις ποσότητες $C(i, a)$. Αυτή η είναι η $f_1(0) = 3$, $f_1(1) = 3$, $f_1(2) = 3$, $f_1(3) = 2$. Για να βρούμε το κόστος $V_{f_1}(i)$, $i = 0,1,2,3$ λύνουμε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων:

$$V_{f_1}(0) = 100 + 0.9[0.75V_{f_1}(0) + 0.2V_{f_1}(1) + 0.05V_{f_1}(2)]$$

$$V_{f_1}(1) = 200 + 0.9[0.7V_{f_1}(1) + 0.25V_{f_1}(2) + 0.05V_{f_1}(3)]$$

$$V_{f_1}(2) = 500 + 0.9[0.8V_{f_1}(2) + 0.2V_{f_1}(3)]$$

$$V_{f_1}(3) = 2000 + 0.9[0.1V_{f_1}(0) + 0.8V_{f_1}(1) + 0.1V_{f_1}(2)]$$

Η λύση του συστήματος είναι: $V_{f_1}(0) = 3848.88, V_{f_1}(1) = 4915.93, V_{f_1}(2) = 5911.51, V_{f_1}(3) = 6417.9$.

Για τις καταστάσεις $i \in \{1,2,3\}$ βρίσκουμε την ενέργεια $a \in \{1,2,3\}$ που ελαχιστοποιεί την παράσταση:

$$C(i, a) + 0.9 \sum_{j=0}^3 p_{ij}(a) V_{f_1}(j).$$

Οι υπολογισμοί γίνονται στους παρακάτω πίνακες:

Κατάσταση 1

Ενέργεια a

$$C(1, a) + 0.9 \sum_{j=0}^3 p_{1j}(a) V_{f_1}(j).$$

1	5848.87
2*	4808.04
3	4915.93

Κατάσταση 2

Ενέργεια a

$$C(2, a) + 0.9 \sum_{j=0}^3 p_{2j}(a) V_{f_1}(j).$$

1	6348.87
2*	5625.08
3	5911.5

Κατάσταση 3

Ενέργεια a

$$C(3, a) + 0.9 \sum_{j=0}^3 p_{3j}(a) V_{f_1}(j).$$

1	6848.87
2*	6417.9

Άρα η βελτιωμένη στάσιμη πολιτική είναι η πολιτική f_2 , όπου $f_2(0) = 3, f_2(1) = 2, f_2(2) = 2, f_2(3) = 2$.

Παρατηρούμε ότι $f_2 \neq f_1$. Για να βρούμε το κόστος $V_{f_2}(i)$, $i = 0,1,2,3$, που αντιστοιχεί στην πολιτική f_2 , λύνουμε το σύστημα:

$$V_{f_2}(0) = 100 + 0.9[0.75V_{f_2}(0) + 0.2V_{f_2}(1) + 0.05V_{f_2}(2)]$$

$$V_{f_2}(1) = 200 + 0.9[0.85V_{f_2}(0) + 0.15V_{f_2}(1)]$$

$$V_{f_2}(2) = 1300 + 0.9[0.15V_{f_2}(0) + 0.8V_{f_2}(1) + 0.05V_{f_2}(2)]$$

$$V_{f_2}(3) = 2000 + 0.9[0.15V_{f_2}(0) + 0.8V_{f_2}(1) + 0.1V_{f_2}(2)]$$

Η λύση του συστήματος είναι: $V_{f_2}(0) = 2965.3, V_{f_2}(1) = 3662.95, V_{f_2}(2) = 4542.03, V_{f_2}(3) = 5312.98$.

Για τις καταστάσεις $i \in \{1,2,3\}$ βρίσκουμε την ενέργεια $a \in \{1,2,3\}$ που ελαχιστοποιεί την παράσταση:

$$C(i, a) + 0.9 \sum_{j=0}^3 p_{ij}(a)V_{f_2}(j).$$

Οι υπολογισμοί γίνονται στους παρακάτω πίνακες:

Κατάσταση 1

Ενέργεια a	$C(1, a) + 0.9 \sum_{j=0}^3 p_{1j}(a)V_{f_2}(j).$
1	4965.23
2*	3662.95
3	3768.69

Κατάσταση 2

Ενέργεια a	$C(2, a) + 0.9 \sum_{j=0}^3 p_{2j}(a)V_{f_2}(j).$
1	5465.29
2*	4542.03
3	4726.59

Κατάσταση 3

Ενέργεια a

$$C(3, \alpha) + 0.9 \sum_{j=0}^3 p_{3j}(\alpha) V_{f_2}(j).$$

1	5965.29
2*	5312.98

Άρα η βελτιωμένη στάσιμη πολιτική είναι η πολιτική f_3 , όπου $f_3(0) = 3$, $f_3(1) = 2$, $f_3(2) = 2$, $f_2(3) = 2$. Παρατηρούμε ότι $f_2 = f_3$, οπότε η πολιτική f_2 είναι 0.9-βελτιστη. Συνεπώς, αν και υπάρχουν $1*3*3*2=18$ διαφορετικές στάσιμες πολιτικές, ο αλγόριθμος βελτίωσης των στάσιμων πολιτικών φτάνει σε βέλτιστη πολιτική μετά από δυο μόνο επαναλήψεις.

Παράδειγμα 1.4 (Ένα μοντέλο για τον έλεγχο ποιότητας παραγωγής). Θεωρούμε μια μηχανή η οποία μπορεί να βρίσκεται σε μια από τις τρεις καταστάσεις, καλή ή μέτρια ή κακή. Ας υποθέσουμε ότι η μηχανή παράγει ένα τεμάχιο ενός προϊόντος στην αρχή κάθε ημέρας. Το παραγόμενο τεμάχιο είναι είτε καλό (αν η μηχανή είναι σε καλή κατάσταση) είτε μέτριο (αν η μηχανή είναι σε μέτρια κατάσταση) είτε κακό (αν η μηχανή είναι σε κακή κατάσταση). Επιπλέον υποθέτουμε ότι μετά την παραγωγή του τεμαχίου υπάρχει η επιλογή ή όχι της επιθεώρησής του. Έστω $I = \{1,2,3\}$ ο χώρος καταστάσεων όπου 1: καλή, 2: μέτρια, 3: κακή και $A = \{1,2\}$ ο χώρος ενεργειών όπου 1: επιθεώρηση, 2: μη-επιθεώρηση. Για κάθε κατάσταση i της διαδικασίας μπορούμε να επιλέξουμε μια ενέργεια $a \in A$ και υπό την επίδραση αυτής της ενέργειας, η επόμενη κατάσταση της διαδικασίας θα είναι η κατάσταση j με πιθανότητα μετάβασης $p_{ij}(a)$. Αυτή η μετάβαση επιφέρει ένα κέρδος $R(i, a)$. Επίσης η σταθερά $\alpha \in (0,1)$ ονομάζεται αποπληθωριστικός παράγοντας. Οι εξισώσεις βελτιστοποίησης του προβλήματος είναι:

$$V_\alpha(1) = \max\{1 + (p_1 - p_2)V_\alpha(1) + 0.7V_\alpha(2), 2 + (p_4 - p_2/2)V_\alpha(1) + 0.55V_\alpha(2)\}$$

$$V_\alpha(2) = \max\{3 + p_2V_\alpha(1) + 0.3V_\alpha(2), 1 + p_5V_\alpha(1) + 0.45V_\alpha(2)\}$$

$$V_\alpha(3) = \max\{1 + 0.35V_\alpha(1) + (p_3 + p_5)V_\alpha(2), 0.35V_\alpha(1) + 0.6V_\alpha(2)\}$$

όπου, $V_\alpha(i)$, $i = 1,2,3$ είναι τα μέγιστα αναμενόμενα κέρδη στις καταστάσεις $i = 1,2,3$ και p_k , $k = 1,2, \dots, 5$ είναι οι παράμετροι των πιθανοτήτων μετάβασης. Επιπλέον τα αριστερά μέλη μέσα στα άγκιστρα αντιστοιχούν στην Ενέργεια 1 ενώ τα δεξιά μέλη αντιστοιχούν στην Ενέργεια 2. Χρησιμοποιείστε τον αλγόριθμο βελτίωσης των πολιτικών για να υπολογίσετε τις ποσότητες $V_f(i)$, $i = 1,2,3$ όπου f είναι η στάσιμη πολιτική τέτοια ώστε: $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3) = 1$.

Λύση. Αρχικά θα βρούμε την τιμή του αποπληθωριστικού παράγοντα α και τις ποσότητες $p_k, k = 1, 2, \dots, 5$.

Η εξίσωση βελτιστοποίησης γίνεται:

$$V_\alpha(i) = \max_{a \in \{1,2\}} \left\{ R(i, a) + \alpha \sum_{j=1}^3 p_{ij}(a) V_\alpha(j) \right\}, i = 1, 2, 3$$

και από τις εξισώσεις της υπόθεσης καταλήγουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:

$$R(1,1) = 1, R(1,2) = 2, R(2,1) = 3, R(2,2) = 1, R(3,1) = 1, R(3,2) = 0,$$

$$\alpha p_{11}(1) = p_1 - p_2, \alpha p_{12}(1) = 0.7, \alpha p_{13}(1) = 0, \alpha p_{11}(2) = p_4 - p_2/2, \alpha p_{12}(2) = 0, \alpha p_{13}(2) = 0.55,$$

$$\alpha p_{21}(1) = p_2, \alpha p_{22}(1) = 0.3, \alpha p_{23}(1) = 0, \alpha p_{21}(2) = p_5, \alpha p_{22}(2) = 0, \alpha p_{23}(2) = 0.45,$$

$$\alpha p_{31}(1) = 0.35, \alpha p_{32}(1) = p_3 + p_5, \alpha p_{33}(1) = 0, \alpha p_{31}(2) = 0.35, \alpha p_{32}(2) = 0, \alpha p_{33}(2) = 0.6.$$

Συνεπώς οι πίνακες πιθανοτήτων μεταβάσεις είναι:

$$p_{ij}(1) = \begin{pmatrix} \frac{p_1 - p_2}{\alpha} & \frac{0.7}{\alpha} & 0 \\ \frac{p_2}{\alpha} & \frac{0.3}{\alpha} & 0 \\ \frac{0.35}{\alpha} & \frac{p_3 + p_5}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad p_{ij}(2) = \begin{pmatrix} \frac{p_4 - p_2/2}{\alpha} & 0 & \frac{0.55}{\alpha} \\ \frac{p_5}{\alpha} & 0 & \frac{0.45}{\alpha} \\ \frac{0.35}{\alpha} & 0 & \frac{0.6}{\alpha} \end{pmatrix}$$

Επειδή οι πίνακες είναι στοχαστικοί πρέπει να ισχύει:

$$\frac{p_1 - p_2}{\alpha} + \frac{0.7}{\alpha} = 1 \quad \frac{p_4 - p_2/2}{\alpha} + \frac{0.55}{\alpha} = 1$$

$$\frac{p_2}{\alpha} + \frac{0.3}{\alpha} = 1 \quad \frac{p_5}{\alpha} + \frac{0.45}{\alpha} = 1$$

$$\frac{0.35}{\alpha} + \frac{p_3 + p_5}{\alpha} = 1 \quad \frac{0.35}{\alpha} + \frac{0.6}{\alpha} = 1$$

Για να βρούμε τις ποσότητες $p_k, k = 1, 2, \dots, 5$ και α λύνουμε το παρακάτω σύστημα των γραμμικών εξισώσεων:

$$p_1 - p_2 - \alpha = -0.7$$

$$p_2 - \alpha = -0.3$$

$$p_3 + p_5 - \alpha = -0.35$$

$$p_4 - p_2/2 - \alpha = -0.55$$

$$p_5 - \alpha = -0.45$$

$$\alpha = 0.95$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η τιμή του αποπληθωριστικού παράγοντα και οι παράμετροι των πιθανοτήτων μετάβασης είναι: $\alpha = 0.95$, $p_1 = 0.9$, $p_2 = 0.65$, $p_3 = 0.1$, $p_4 = 0.725$, $p_5 = 0.5$. Τώρα θα υπολογίσουμε τις ποσότητες $V_f(i)$, $i = 1, 2, 3$. Ξεκινάμε από την πολιτική που μας δίνεται, η οποία είναι η $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3) = 1$. Για να βρούμε τις ποσότητες $V_f(i)$, $i = 0, 1, 2, 3$ λύνουμε το παρακάτω σύστημα των γραμμικών εξισώσεων:

$$V_f(1) = 2 + 0.95 \left(\frac{0.725 - 0.65/2}{0.95} V_f(1) + \frac{0.55}{0.95} V_f(3) \right)$$

$$V_f(2) = 3 + 0.95 \left(\frac{0.65}{0.95} V_f(1) + \frac{0.3}{0.95} V_f(2) \right)$$

$$V_f(3) = 1 + 0.95 \left(\frac{0.35}{0.95} V_f(1) + \frac{0.1 + 0.5}{0.95} V_f(2) \right)$$

Η λύση του συστήματος είναι: $V_f(1) = 39.22$, $V_f(2) = 40.7$, $V_f(3) = 39.15$.

1.6 Μέσο κόστος σε μοντέλα άπειρου χρονικού ορίζοντα

Το μακροπρόθεσμο αναμενόμενο μέσο κόστος $g(i, \pi)$ ανά μονάδα χρόνου, υπό τον έλεγχο της πολιτικής π , δοθέντος ότι η αρχική κατάσταση της διαδικασίας είναι η κατάσταση i , ορίζεται ως εξής:

$$g(i, \pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_\pi [\sum_{j=0}^{n-1} C(X_j, a_j) | X_0 = i]}{n}$$

Για κάθε κατάσταση i της διαδικασίας, μια πολιτική π^* είναι βέλτιστη αν: $g(i, \pi^*) = \min_{\pi} g(i, \pi)$, $i \geq 0$. Σε αντίθεση με το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του συνολικού αναμενόμενου αποπληθωρισμένου κόστους, στο πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του μακροπρόθεσμου αναμενόμενου μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου, η ύπαρξη μίας βέλτιστης πολιτικής δεν είναι βέβαιη. Υπάρχουν προβλήματα ελέγχου μίας

στοχαστικής διαδικασίας στα οποία η βέλτιστη πολιτική είτε δεν υπάρχει είτε κι αν ακόμη υπάρχει δεν είναι μία στάσιμη πολιτική. Παραδείγματα τέτοιων περιπτώσεων αναφέρονται στις σελίδες 141-144 του Ross S.M. (1992) και στις σελίδες 128-132 του Ross S.M. (1983). Πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με το θέμα της κατασκευής κατάλληλων υποθέσεων οι οποίες εξασφαλίζουν την ύπαρξη μίας βέλτιστης στάσιμης πολιτικής. Στο Κεφάλαιο 7 του Sennott L.I. (1999), γίνεται μία αναλυτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων σχετικά με το θέμα αυτό με αρκετές αναφορές σε προηγούμενες εργασίες. Στο παρόν εδάφιο υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας θετικός αριθμός M τέτοιος ώστε για κάθε ενέργεια a και κάθε κατάσταση i της διαδικασίας, ισχύει ότι: $|C(i, a)| < M$. Το Θεώρημα 2 παρέχει μία ικανή συνθήκη για την ύπαρξη μίας βέλτιστης στάσιμης πολιτικής. Η απόδειξη του θεωρήματος βρίσκεται στη σελίδα 144 του Ross S.M. (1992).

Θεώρημα 2 Έστω ότι υπάρχει μια άνω φραγμένη ακολουθία αριθμών $\{h_i\}$, $i \geq 0$ και μια σταθερά g έτσι ώστε:

$$h_i = \min_{a \in A(i)} \left\{ C(i, a) - g + \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(a) h_j \right\}, i \geq 0. \quad (1.6)$$

Τότε υπάρχει μια βέλτιστη στάσιμη πολιτική $f = \{f_i\}$, $i \geq 0$ η οποία, οποτεδήποτε η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση i , επιλέγει εκείνη την ενέργεια $a = f_i$ που ελαχιστοποιεί το δεξί μέλος της εξίσωσης (1.6). Επιπλέον η σταθερά g είναι ίση με $g(i, f)$, $i \geq 0$ όπου $f = \{f_i\}$, $i \geq 0$.

Η εξίσωση (1.6) είναι γνωστή ως εξίσωση βελτιστοποίησης για το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του μακροπρόθεσμου αναμενόμενου μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου. Οι τιμές $\{h_i\}$, $i \geq 0$ είναι γνωστές ως οι σχετικές τιμές της βέλτιστης στάσιμης πολιτικής.

Στο παρόν εδάφιο θα περιγράψουμε σε βήματα: (α) τον αλγόριθμο βελτίωσης των πολιτικών και (β) τον αλγόριθμο με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων, για το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του μακροπρόθεσμου αναμενόμενου μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου μίας διαδικασίας με χώρο καταστάσεων το σύνολο $\{0, 1, \dots, n\}$.

Αλγόριθμος βελτίωσης των πολιτικών

Έναρξη Επιλέγουμε μια αρχική πολιτική $R^{(1)}$.

Βήμα 1 Για αυτήν την πολιτική, υπολογίζουμε τη μοναδική λύση $\{g(R^{(1)}), h_i(R^{(1)})\}$, $i = 0, 1, \dots, n$ λύνοντας το παρακάτω σύστημα:

$$h_i(R^{(1)}) = C(i, R^{(1)}) - g + \sum_{j=0}^n p_{ij}(R^{(1)})h_j(R^{(1)}), i = 0, 1, \dots, n.$$

$$h_s(R^{(1)}) = 0 \text{ (Εξίσωση κανονικοποίησης)}$$

όπου s είναι μια αυθαίρετη επιλεγμένη κατάσταση (ως συνήθως $s = n$) της διαδικασίας.

Βήμα 2 Για κάθε κατάσταση i της διαδικασίας, επιλέγουμε την ενέργεια a που ελαχιστοποιεί την παράσταση:

$$C(i, a) - g(R^{(1)}) + \sum_{j=0}^n p_{ij}(a)h_j(R^{(1)}).$$

Η νέα στάσιμη πολιτική $R^{(2)}$ λαμβάνεται επιλέγοντας $R_i^{(2)} = a$, για κάθε κατάσταση i της διαδικασίας.

Βήμα 3 Αν $R^{(1)} = R^{(2)}$, ο αλγόριθμος σταματά. Διαφορετικά, επιστρέφουμε στο Βήμα 1 με την πολιτική $R^{(1)}$ να αντικαθίσταται από την πολιτική $R^{(2)}$.

Ένας εναλλακτικός αλγόριθμος αποφεύγει την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων και χρησιμοποιεί έναν αναδρομικό τρόπο επίλυσης των προβλημάτων που βασίζεται στο δυναμικό προγραμματισμό. Αυτός ο αλγόριθμος υπολογίζει αναδρομικά για $n = 0, 1, \dots$ τη συνάρτηση $V_{n,\alpha}(i)$ από τον τύπο:

$$V_n(i) = \min_{a \in A(i)} \left\{ C(i, a) + \sum_{j=0}^n p_{ij}(a)V_{n-1}(j) \right\}, i \geq 0.$$

Η ποσότητα $V_n(i)$ μπορεί να θεωρηθεί ως το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος όταν απομένουν n χρονικές περιόδους για το τέλος της διαδικασίας.

Αλγόριθμος με την μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων

Έναρξη Επιλέγουμε $V_0(i)$ με $0 \leq V_0(i) \leq \min_a C(i, a)$, για κάθε κατάσταση i της διαδικασίας.

Βήμα 1 Υπολογίζουμε τη συνάρτηση $V_n(i)$ για κάθε κατάσταση i της διαδικασίας, από τον τύπο:

$$V_{n,\alpha}(i) = \min_{a \in A(i)} \left\{ C(i, a) + \sum_{j=0}^n p_{ij}(a)V_{n-1}(j) \right\}, i \geq 0$$

και καθορίζουμε την πολιτική της οποίας οι ενέργειες ελαχιστοποιούν το δεξί μέλος της συνάρτησης $V_n(i), i \geq 0$.

Βήμα 2 Υπολογίζουμε τα φράγματα M_n, m_n από τους παρακάτω τύπους: $M_n = \max_j \{V_n(j) - V_{n-1}(j)\}$ και $m_n = \min_j \{V_n(j) - V_{n-1}(j)\}$, $n = 1, 2, \dots$. Ο αλγόριθμος σταματά με την πολιτική $R(n)$, όταν $0 \leq M_n - m_n \leq \varepsilon m_n$, όπου ε καλείται όριο ανοχής και είναι ένας προκαθορισμένος πολύ μικρός αριθμός (π.χ. $\varepsilon = 10^{-3}$).

Βήμα 3 Θέτουμε $n := n + 1$ και μεταβαίνουμε στο Βήμα 1.

Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των δυο αλγορίθμων

Πλεονεκτήματα του αλγορίθμου βελτίωσης των πολιτικών:

- (1) Παρουσιάζει σημαντική βελτίωση από τις πρώτες επαναλήψεις.
- (2) Είναι ένας ευασθηής αλγόριθμος.
- (3) Ο αριθμός των επαναλήψεων του αλγορίθμου είναι ανεξάρτητος του αριθμού των καταστάσεων του υπό εξέταση μοντέλου.

Μειονεκτήματα του αλγορίθμου βελτίωσης των πολιτικών:

- (1) Είναι αρκετά δύσκολο να υλοποιηθεί αλγοριθμικά διότι σε κάθε επανάληψη του απαιτείται η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος.
- (2) Σε μοντέλα με μεγάλους χώρους καταστάσεων είναι δύσκολη η υλοποίηση του αλγορίθμου.

Πλεονεκτήματα του αλγορίθμου των διαδοχικών προσεγγίσεων:

- (1) Ενδείκνυται σε μοντέλα με μεγάλους χώρους καταστάσεων.
- (2) Είναι πολύ πιο εύκολα υλοποιήσιμος αλγοριθμικά.

Μειονεκτήματα του αλγορίθμου των διαδοχικών προσεγγίσεων:

- (1) Δεν έχει την ευστάθεια του αλγορίθμου βελτίωσης των πολιτικών.
- (2) Το όριο ανοχής ε και η συνάρτηση $V_0(i)$, $i \geq 0$ επηρεάζουν τον αριθμό των απαιτούμενων επαναλήψεων του αλγορίθμου.
- (3) Ο αριθμός των επαναλήψεων του αλγορίθμου εξαρτάται από το υπό-εξέταση πρόβλημα και συνήθως αυξάνεται όταν αυξάνεται ο αριθμός των καταστάσεων της διαδικασίας.

Παράδειγμα 1.5 (Ένα μοντέλο για την επιδείνωση ενός μηχανήματος). Έστω ένα μηχάνημα το οποίο επιδεινώνεται με την πάροδο του χρόνου και επιθεωρείται στην αρχή κάθε ημέρας. Το μηχάνημα μετά από κάθε επιθεώρηση του, βρίσκεται σε μια από τις καταστάσεις $i \in \{1, \dots, N\}$, όπου κάθε κατάσταση i αναπαριστά το βαθμό επιδείνωσης και θεωρείται καλύτερη από την κατάσταση $i + 1$. Αν η παρούσα κατάσταση του μηχανήματος είναι η κατάσταση i και ο ελεγκτής δεν επεμβαίνει στη λειτουργία του μηχανήματος, τότε στην αρχή της επόμενης ημέρας το μηχάνημα μεταβαίνει στην κατάσταση j με πιθανότητα q_{ij} . Υποθέτουμε ότι, όταν το μηχάνημα βρίσκεται σε μια κατάσταση i , τότε δεν μπορεί να επιδιορθωθεί από μόνο του, δηλαδή ισχύει ότι $q_{ij} = 0$, για $j < i$ και για κάθε κατάσταση i , $\sum_{j \geq 1} q_{ij} = 1$. Στην κατάσταση $i = N$ το μηχάνημα δυσλειτουργεί και απαιτείται μια επισκευή του η οποία διαρκεί τρεις ημέρες. Μετά την ολοκλήρωση της επισκευής του, το μηχάνημα μεταβαίνει στην κατάσταση 1. Στην κατάσταση 1 θεωρούμε ότι η μόνη επιτρεπτή ενέργεια για το μηχάνημα είναι η μη-επέμβαση του ελεγκτή. Στις ενδιάμεσες καταστάσεις i , $1 < i < N$, μπορούμε να επιλέξουμε είτε να θέσουμε σε λειτουργία μια προληπτική συντήρηση του μηχανήματος είτε να μην επέμβουμε στη λειτουργία του μηχανήματος. Η προληπτική συντήρηση διαρκεί μια ημέρα και μετά την συντήρηση το μηχάνημα μεταβαίνει στην αμέσως προηγούμενη κατάσταση $i - 1$. Το κόστος για την προληπτική συντήρηση του μηχανήματος είναι ίσο με $i + 1$ για κάθε ημέρα που το μηχάνημα βρίσκεται στην κατάσταση i και επιλέγεται η προληπτική συντήρηση. Το κόστος για μια επισκευή του μηχανήματος είναι ίσο με $2i + 1$ για κάθε ημέρα που το μηχάνημα βρίσκεται στην κατάσταση i και βρίσκεται υπό επισκευή. Το κόστος λειτουργίας του μηχανήματος είναι ίσο με $i/2$ για κάθε ημέρα που το μηχάνημα βρίσκεται στην κατάσταση i και ο ελεγκτής δεν επεμβαίνει στη λειτουργία του. Αρχικά, αφού ορίσετε με σαφήνεια κάθε ποσότητα που θα χρησιμοποιήσετε, να διατυπωθεί το πρόβλημα της εύρεσης της πολιτικής που ελαχιστοποιεί το μακροπρόθεσμο αναμενόμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου. Επιπλέον για $N = 5$ και για (q_{ij}) τέτοια ώστε:

$$(q_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.05 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

να βρείτε την βέλτιστη πολιτική χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο βελτίωσης των πολιτικών και ως αρχική πολιτική την $R^{(1)} = (0,0,1,1,2,2,2)$, όπου με 0 συμβολίζουμε τη μη-επέμβαση του ελεγκτή στη λειτουργία του μηχανήματος, με 1 συμβολίζουμε την προληπτική συντήρηση του μηχανήματος και με 2 συμβολίζουμε την επισκευή του.

Λύση. Επειδή η επισκευή του μηχανήματος όταν βρίσκεται στην κατάσταση N διαρκεί τρεις ημέρες και σε ένα Μαρκοβιανό μοντέλο αποφάσεων σε διακριτό χρόνο, η κατάσταση πρέπει να ορίζεται στην αρχή κάθε ημέρας, θα πρέπει να εισάγουμε μία βοηθητική κατάσταση για την περίπτωση κατά την οποία η επισκευή του μηχανήματος βρίσκεται σε εξέλιξη στην αρχή κάποιας ημέρας κατά την οποία το μηχάνημα βρίσκεται στην κατάσταση N . Έτσι, ο χώρος των καταστάσεων είναι: $S = \{1,2, \dots, N, N+1, N+2\}$ και ο χώρος των ενεργειών για κάθε κατάσταση i της διαδικασίας είναι: $A(1) = 0$, $A(i) = \{0,1\}$, $1 \leq i < N$ και $A(N) = A(N+1) = A(N+2) = 2$. Οι πιθανότητες μετάβασης $p_{ij}(a)$ είναι: $p_{ij}(0) = q_{ij}$, $1 \leq i < N$, $i \leq j$, $p_{i,i-1}(1) = 1$, $1 < i < N$ και $p_{N,N+1}(2) = p_{N+1,N+2}(2) = p_{N+2,1}(2) = 1$. Οι υπόλοιπες πιθανότητες μετάβασης είναι $p_{ij}(a) = 0$. Επίσης τα κόστη $C(i,a)$ για κάθε κατάσταση i και ενέργεια a είναι: $C(i,0) = i/2$, $1 \leq i < N$, $C(i,1) = i+1$, $1 < i < N$ και $C(i,2) = 2i+1$, $i = N, N+1, N+2$. Τώρα, για $N = 5$ ο χώρος καταστάσεων γίνεται: $S = \{1,2, \dots, 7\}$ και οι πιθανότητες επιδείνωσης του μηχανήματος q_{ij} δίνονται από τον παραπάνω πίνακα. Τέλος, οι πιθανότητες μετάβασης για τις ενέργειες $a = 1,2$ είναι: $p_{21}(1) = p_{32}(1) = p_{43}(1) = 1$, $p_{56}(2) = p_{67}(2) = p_{71}(2) = 1$ και οι υπόλοιπες πιθανότητες μετάβασης είναι $p_{ij}(a) = 0$. Ο αλγόριθμος βελτίωσης των πολιτικών ξεκινά με την πολιτική $R^{(1)}$ της οποίας οι ενέργειες είναι: $R_1^{(1)} = R_2^{(1)} = 0$, $R_3^{(1)} = R_4^{(1)} = 1$, $R_5^{(1)} = R_6^{(1)} = R_7^{(1)} = 2$.

Το μέσο κόστος $g(R^{(1)})$ και οι σχετικές τιμές $h_i(R^{(1)})$ μπορούν να υπολογιστούν ως η μοναδική λύση του συστήματος των παρακάτω γραμμικών εξισώσεων:

$$h_1(R^{(1)}) = 0.5 - g + 0.75h_1(R^{(1)}) + 0.2h_2(R^{(1)}) + 0.05h_3(R^{(1)})$$

$$h_2(R^{(1)}) = 1 - g + 0.5h_2(R^{(1)}) + 0.2h_3(R^{(1)}) + 0.2h_4(R^{(1)}) + 0.1h_5(R^{(1)})$$

$$h_3(R^{(1)}) = 4 - g + h_2(R^{(1)})$$

$$h_4(R^{(1)}) = 5 - g + h_3(R^{(1)})$$

$$h_5(R^{(1)}) = 11 - g + h_6(R^{(1)})$$

$$h_6(R^{(1)}) = 13 - g + h_7(R^{(1)})$$

$$h_7(R^{(1)}) = 15 - g + h_1(R^{(1)})$$

$h_7(R^{(1)}) = 0$, όπου η κατάσταση $s = 7$ επιλέγεται για την εξίσωση κανονικοποίησης.

Οι λύσεις αυτών των γραμμικών εξισώσεων δίνουν:

$h_1(R^{(1)}) = -11.64, h_2(R^{(1)}) = -0.36, h_3(R^{(1)}) = 0.28, h_4(R^{(1)}) = 1.93, h_5(R^{(1)}) = 17.29, h_6(R^{(1)}) = 9.64, h_7(R^{(1)}) = 0, g(R^{(1)}) = 3.35$. Επειδή μόνο στις ενδιάμεσες καταστάσεις $i \in \{2,3,4\}$ μπορούμε να επιλέξουμε την ενέργεια που ελαχιστοποιεί την παράσταση: $C(i, a) - g(R^{(1)}) + \sum_{j=1}^7 p_{ij}(a)h_j(R^{(1)})$, θα ασχοληθούμε μόνο σε αυτές τις καταστάσεις. Οι υπολογισμοί γίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Κατάσταση i	Ενέργεια a	$C(i, a) - g(R^{(1)}) + \sum_{j=1}^7 p_{ij}(a)h_j(R^{(1)})$
2	0	-0.36
	$\mathbf{1}^*$	-11.99
3	0	3.09
	$\mathbf{1}^*$	0.29
4	0	11.33
	$\mathbf{1}^*$	1.93

Από τον παραπάνω πίνακα λαμβάνουμε τη νέα πολιτική $R^{(2)}$ της οποίας οι ενέργειες είναι:

$$R_1^{(2)} = 0, R_2^{(2)} = R_3^{(2)} = R_4^{(2)} = 1, R_5^{(2)} = R_6^{(2)} = R_7^{(2)} = 2.$$

Παρατηρούμε ότι $R^{(2)} \neq R^{(1)}$. Για να βρούμε το μέσο κόστος $g(R^{(2)})$ και τις σχετικές τιμές $h_i(R^{(2)})$ θα λύσουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα:

$$h_1(R^{(2)}) = 0.5 - g + 0.75h_1(R^{(2)}) + 0.2h_2(R^{(2)}) + 0.05h_3(R^{(2)})$$

$$h_2(R^{(2)}) = 3 - g + h_1(R^{(2)})$$

$$h_3(R^{(2)}) = 4 - g + h_2(R^{(2)})$$

$$h_4(R^{(2)}) = 5 - g + h_3(R^{(2)})$$

$$h_5(R^{(2)}) = 11 - g + h_6(R^{(2)})$$

$$h_6(R^{(2)}) = 13 - g + h_7(R^{(2)})$$

$$h_7(R^{(2)}) = 15 - g + h_1(R^{(2)}), \quad h_7(R^{(2)}) = 0.$$

Η λύση του συστήματος δίνει: $h_1(R^{(2)}) = -13.88, (R^{(2)}) = -12, h_3(R^{(2)}) = -9.11, h_4(R^{(2)}) = -5.23, h_5(R^{(2)}) = 21.76, h_6(R^{(2)}) = 11.88, h_7(R^{(2)}) = 0, g(R^{(2)}) = 1.11$. Επειδή μόνο στις ενδιάμεσες καταστάσεις $i \in \{2,3,4\}$ μπορούμε να επιλέξουμε την ενέργεια που ελαχιστοποιεί την παράσταση: $C(i, a) - g(R^{(2)}) + \sum_{j=1}^7 p_{ij}(a)h_j(R^{(2)})$, θα ασχοληθούμε μόνο σε αυτές τις καταστάσεις. Οι υπολογισμοί γίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Κατάσταση i	Ενέργεια a	$C(i, a) - g(R^{(2)}) + \sum_{j=1}^7 p_{ij}(a)h_j(R^{(2)})$
2	0	-6.82
	1*	-11.99
3	0	-0.03
	1*	-9.11
4	0	14.55
	1*	-5.22

Από τον παραπάνω πίνακα λαμβάνουμε τη νέα πολιτική $R^{(3)}$ της οποίας οι ενέργειες είναι: $R_1^{(3)} = 0, R_2^{(3)} R_3^{(3)} = R_4^{(3)} = 1, R_5^{(3)} = R_6^{(3)} = R_7^{(3)} = 2$. Παρατηρούμε ότι $R^{(3)} = R^{(2)}$. Συνεπώς, η πολιτική $R^{(2)}$ είναι η βέλτιστη ως προς την ελαχιστοποίηση του μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου. Εν κατακλείδι, αν και υπάρχουν $1*2*2*2*1*1*1=8$ διαφορετικές στάσιμες πολιτικές, ο αλγόριθμος βελτίωσης των πολιτικών φτάνει σε βέλτιστη πολιτική μετά από δυο μόνο επαναλήψεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΣΗ ΕΝΟΣ ΟΧΗΜΑΤΟΣ

2.1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως πρόβλημα βέλτιστης δρομολόγησης ενός οχήματος (Single Vehicle Routing Problem (SVRP)) και προσδιορίζει τη βέλτιστη διαδρομή ενός οχήματος το οποίο ξεκινά από μία αποθήκη και διανέμει ένα προϊόν σε n πελάτες σύμφωνα με μία προκαθορισμένη σειρά. Είναι μία μορφή του περίφημου προβλήματος του περιπλανώμενου πωλητή (Travelling Salesman Problem (TSP)) σύμφωνα με το οποίο ένας πωλητής έχει πελάτες σε N πόλεις και δεδομένων των αποστάσεων μεταξύ των πόλεων ο πωλητής ξεκινώντας από μία πόλη, έστω την πόλη 0, επιθυμεί να επιστρέψει σε αυτήν επισκεπτόμενος κάθε άλλη πόλη, ακριβώς μία φορά, με τρόπο που η συνολική διαδρομή του να είναι η ελάχιστη δυνατή. Η βασική διαφορά αυτού του προβλήματος σε σύγκριση με το κλασσικό πρόβλημα ελάχιστης διαδρομής, είναι ότι σε κάθε βήμα πρέπει να γνωρίζουμε όχι μόνο την πόλη στην οποία βρίσκεται ο πωλητής, αλλά επιπλέον και το σύνολο των πόλεων από τις οποίες έχει περάσει, αφού πρέπει να επισκεφθεί όλες τις πόλεις από μία φορά.

Έστω ένα σύνολο κορυφών $V = \{0, 1, \dots, n\}$, όπου η κορυφή 0 αναπαριστά την αποθήκη και οι κορυφές $1, 2, \dots, n$ αντιστοιχούν στους πελάτες. Το σύνολο $A = \{(i, i+1), (i+1, 0) : i \in V - \{n\}\}$ περιέχει τα τόξα που συνδέουν τους πελάτες κατά μήκος της διαδρομής $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n$, καθώς και όλους τους πελάτες με την αποθήκη. Το κόστος της διαδρομής για κάθε τόξο $(i, j) \in A$ είναι ίσο με $c_{ij} > 0$. Τα κόστη $c_{ij}, (i, j) \in A$, ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα, δηλαδή ισχύει ότι $c_{ij} < c_{ik} + c_{kj}$. Το όχημα πρέπει να εξυπηρετήσει όλους τους πελάτες σύμφωνα με μια προκαθορισμένη σειρά $1, 2, \dots, n$. Αρχικά, το όχημα βρίσκεται στην αποθήκη και μετά από την εξυπηρέτηση όλων των πελατών επιστρέφει στην αποθήκη. Έστω $d_i, i = 1, 2, \dots, n$ η ζήτηση του πελάτη i για ένα συγκεκριμένο προϊόν. Θεωρούμε ότι οι απαιτήσεις $d_i, i = 1, 2, \dots, n$ σε προϊόν του κάθε πελάτη i είναι διακριτές ή συνεχείς ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Το υπόλοιπο του κεφαλαίου οργανώνεται ως εξής. Στην Ενότητα 2 το πρόβλημα προσδιορίζεται και αναλύεται για τις περιπτώσεις ενός προϊόντος με διακριτές και συνεχείς απαιτήσεις και δυο συναφών προϊόντων με διακριτές και συνεχείς απαιτήσεις. Στην Ενότητα 3 παρουσιάζουμε τους δυο αλγορίθμους για τον υπολογισμό των κρίσιμων ποσοτήτων στις περιπτώσεις των διακριτών και των συνεχών απαιτήσεων. Στην Ενότητα 4 παραθέτουμε δυο αριθμητικά παραδείγματα για τις περιπτώσεις των διακριτών και των συνεχών απαιτήσεων.

2.2 Το πρόβλημα με στοχαστικές απαιτήσεις

Στο παρόν εδάφιο, θα ασχοληθούμε με τις διακριτές απαιτήσεις $d_i, i = 1, 2, \dots, n$ με γνωστές συναρτήσεις μάζας πιθανότητας $P_i(x) = P_i(d_i = x)$, τέτοιες ώστε $P_i(x) = 0$, όταν $x = Q + 1, x = Q + 2, \dots$ όπου Q είναι η χωρητικότητα του οχήματος. Μετά την εξυπηρέτηση του κάθε πελάτη, το όχημα έχει δύο επιλογές: (α) να ταξιδέψει προς τον επόμενο πελάτη ή (β) να επιστρέψει στην αποθήκη για να ανανεώσει το απόθεμά του και να συνεχίσει τη διαδρομή του. Θεωρούμε ότι η ζήτηση κάθε πελάτη γίνεται γνωστή λίγο πριν την εξυπηρέτηση του πελάτη. Το πρόβλημα είναι η εύρεση εκείνης της πολιτικής που ελαχιστοποιεί το συνολικό αναμενόμενο κόστος. Ένα ρεαλιστικό παράδειγμα αυτού του μοντέλου μπορεί να είναι η περίπτωση κατά την οποία ένα όχημα διανέμει τεμάχια αναψυκτικών σε συγκεκριμένα περίπτερα. Η ζήτηση σε τεμάχια αναψυκτικών από το κάθε περίπτερο μπορεί να θεωρηθεί στοχαστική, διότι όταν γίνεται η παραγγελία των τεμαχίων αναψυκτικού από το κάθε περίπτερο δεν είναι γνωστός ο αριθμός των τεμαχίων αναψυκτικού που θα πουληθεί στους καταναλωτές από το κάθε περίπτερο στο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί ανάμεσα στην παραγγελία και στη διανομή των τεμαχίων αναψυκτικού από το όχημα. Έστω $V_i(q), q \in \{0, 1, \dots, Q\}$, το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος από τον πελάτη i μέχρι το τέλος της διαδρομής, αν ο πελάτης i έχει εξυπηρετηθεί και η ποσότητα του προϊόντος που έχει απομείνει στο όχημα είναι ίση με q . Αυτή η ποσότητα ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση του δυναμικού προγραμματισμού:

$$V_i(q) = \min\{H_i(q), H_i^*\}, i = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (2.1)$$

όπου,

$$H_i(q) = c_{i,i+1} + \sum_{x=0}^q V_{i+1}(q-x)P_{i+1}(x) + \sum_{x=q+1}^Q [2c_{i+1,0} + V_{i+1}(Q+q+1-x)]P_{i+1}(x), \quad (2.2)$$

αν το όχημα ταξιδέψει κατευθείαν προς τον επόμενο πελάτη $i + 1$

και

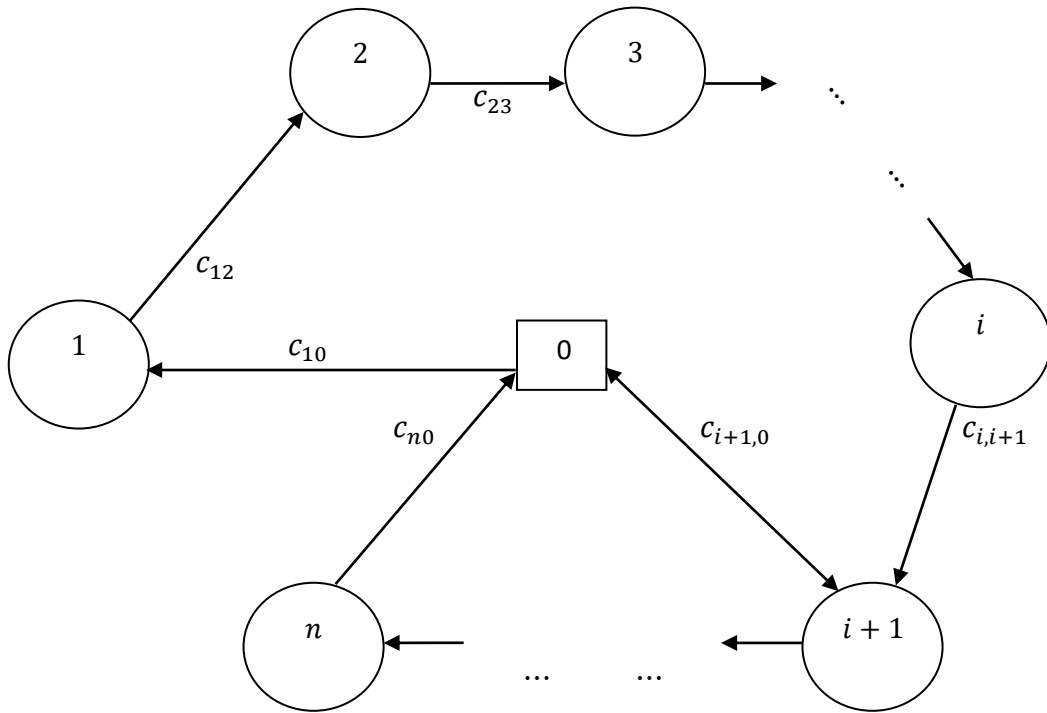
$$H_i^* = c_{i0} + c_{0,i+1} + \sum_{x=0}^Q V_{i+1}(Q-x)P_{i+1}(x), \quad (2.3)$$

αν το όχημα επιστρέψει στην αποθήκη έτσι ώστε να ανανεώσει το απόθεμά του και στην συνέχεια να εξυπηρετήσει τον πελάτη $i + 1$.

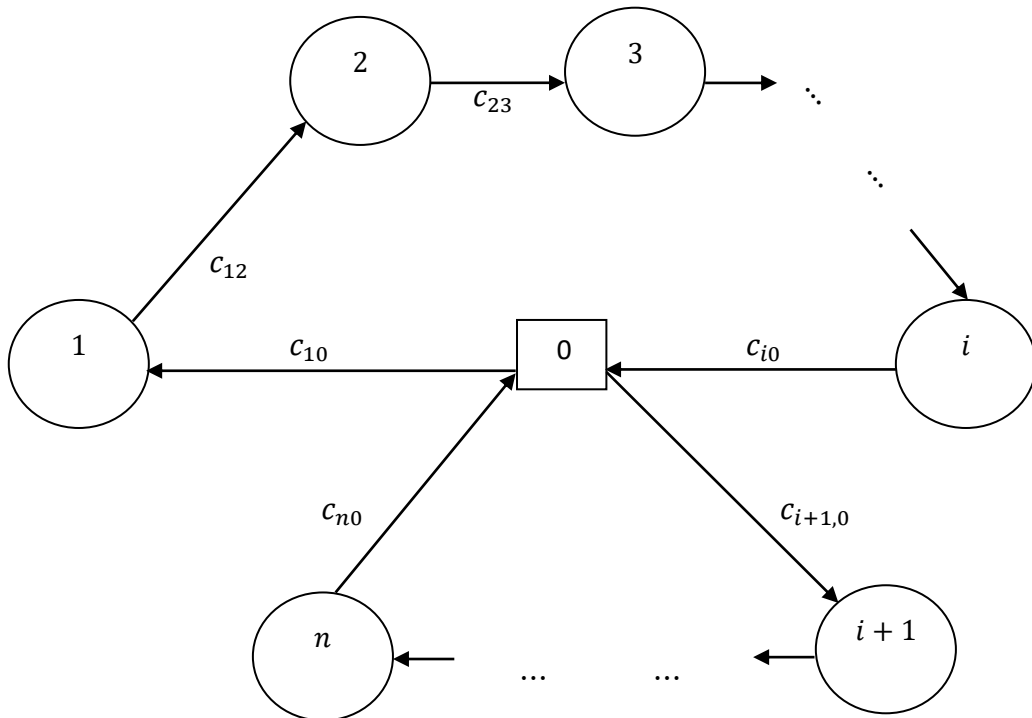
Η οριακή συνθήκη είναι:

$$V_n(q) = c_{n0}, q \in \{0, 1, \dots, Q\}.$$

Στα παρακάτω σχήματα, Σχήμα 1 και Σχήμα 2 παρουσιάζουμε το οδικό δίκτυο για την $H_i(q)$ και για την H_i^* , αντίστοιχα.



Σχήμα 1. Το οδικό δίκτυο για την $H_i(q)$.



Σχήμα 2. Το οδικό δίκτυο για την H_i^* .

Αν $H_i^* < H_i(q)$, τότε η βέλτιστη απόφαση είναι η επιστροφή του οχήματος στην αποθήκη έτσι ώστε το όχημα να ανανεώσει το απόθεμα του και εν συνεχεία να εξυπηρετήσει τον πελάτη $i + 1$. Αν $H_i(q) \leq H_i^*$, η βέλτιστη απόφαση είναι τέτοια ώστε το όχημα να ταξιδέψει κατευθείαν προς τον επόμενο πελάτη $i + 1$. Σε αυτή την περίπτωση, αν η ζήτηση x του πελάτη είναι μεγαλύτερη από q , τότε το όχημα τροφοδοτεί τον πελάτη $i + 1$ με τον αριθμό τεμαχίων q , επιστρέφει στην αποθήκη για να ανανεώσει το απόθεμα του και εν συνεχεία επιστρέφει στον πελάτη $i + 1$ για να τον τροφοδοτήσει με τον υπόλοιπο αριθμό τεμαχίων $x - q$. Επίσης αν η ζήτηση x του πελάτη είναι μικρότερη από q τότε το όχημα τροφοδοτεί άμεσα τον πελάτη $i + 1$ με τον αριθμό τεμαχίων x . Σύμφωνα με την ακόλουθη Πρόταση 1, για κάθε πελάτη $i, 1 \leq i \leq n - 1$, υπάρχει μια κρίσιμη ποσότητα h_i τέτοια ώστε, η βέλτιστη απόφαση για το όχημα είναι να ταξιδέψει κατευθείαν προς τον πελάτη $i + 1$ αν και μόνο αν ο αριθμός των τεμαχίων q που έχει απομείνει στο όχημα μετά από την εξυπηρέτηση του πελάτη i είναι μεγαλύτερη ή ίση με h_i . Το αποτέλεσμα του Λήμματος 1 που ακολουθεί, θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη της Πρότασης 1.

Λήμμα 1. $V_i(q) \leq V_i(Q) + 2c_{0i}, i = 1, 2, \dots, n - 1, q \in \{0, 1, \dots, Q\}$.

Απόδειξη. Από τις εξισώσεις (2.1) και (2.3) έχουμε ότι:

$$V_i(q) \leq c_{i0} + c_{0,i+1} + \sum_{x=0}^q V_{i+1}(Q-x)P_{i+1}(x). \quad (2.4)$$

Από την εξίσωση (2.2) προκύπτει ότι:

$$H_i(Q) = c_{i,i+1} + \sum_{x=0}^Q V_{i+1}(Q-x)P_{i+1}(x)$$

και επειδή τα κόστη c_{ij} ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα ισχύει $H_i(Q) < H_i^*$.

Τώρα από την εξίσωση (2.1) έχουμε:

$$V_i(Q) = c_{i,i+1} + \sum_{x=0}^Q V_{i+1}(Q-x)P_{i+1}(x). \quad (2.5)$$

Από τις εξισώσεις (2.4) και (2.5) έχουμε ότι:

$$V_i(q) \leq c_{i0} + c_{0,i+1} + V_i(Q) - c_{i,i+1} \leq c_{i0} + c_{0i} + c_{i,i+1} + V_i(Q) - c_{i,i+1} = 2c_{i0} + V_i(Q) \Rightarrow$$

$$V_i(q) \leq V_i(Q) + 2c_{0i}. \quad \blacksquare$$

Πρόταση 1. Έστω ότι $H_n(q) = c_{n0}$, $q \in \{0, 1, \dots, Q\}$. Οι συναρτήσεις $H_i(q)$ και $V_i(q)$ είναι φθίνουσες ως προς q , $i = 1, 2, \dots, n$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την πρόταση με επαγωγή ως προς i . Για $i = n$ οι ποσότητες $H_n(q)$ και $V_n(q)$ είναι σταθερές ως προς q . Έστω ότι για $i \leq n - 1$ οι ποσότητες $H_{i+1}(q)$ και $V_{i+1}(q)$ είναι φθίνουσες ως προς q . Θα δείξουμε ότι οι ποσότητες $H_i(q)$ και $V_i(q)$ είναι φθίνουσες ως προς q . Έστω ότι $0 \leq q_1 < q_2 \leq Q$. Η διαφορά $H_i(q_1) - H_i(q_2)$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned}
H_i(q_1) - H_i(q_2) &= \sum_{x=q_1+1}^Q [2c_{i+1,0} + V_{i+1}(q_1 + 1 + Q - x)]P_{i+1}(x) + \sum_{x=0}^{q_1} V_{i+1}(q_1 - x)P_{i+1}(x) \\
&\quad - \sum_{x=q_2+1}^Q [2c_{i+1,0} + V_{i+1}(q_2 + 1 + Q - x)]P_{i+1}(x) - \sum_{x=0}^{q_2} V_{i+1}(q_2 - x)P_{i+1}(x) \\
&= \sum_{x=q_1+1}^{q_2} [2c_{i+1,0} + V_{i+1}(q_1 + 1 + Q - x)]P_{i+1}(x) + \sum_{x=q_2+1}^Q [2c_{i+1,0} + V_{i+1}(q_1 + 1 + Q - x)]P_{i+1}(x) \\
&\quad + \sum_{x=0}^{q_1} V_{i+1}(q_1 - x)P_{i+1}(x) - \sum_{x=q_2+1}^Q [2c_{i+1,0} + V_{i+1}(q_2 + 1 + Q - x)]P_{i+1}(x) \\
&\quad - \sum_{x=0}^{q_1} V_{i+1}(q_2 - x)P_{i+1}(x) - \sum_{x=q_1+1}^{q_2} V_{i+1}(q_2 - x)P_{i+1}(x).
\end{aligned}$$

Από την μονοτονία της $V_{i+1}(q)$ ως προς q , προκύπτει ότι:

$$\sum_{x=q_2+1}^Q [2c_{i+1,0} + V_{i+1}(q_1 + 1 + Q - x)]P_{i+1}(x) \geq \sum_{x=q_2+1}^Q [2c_{i+1,0} + V_{i+1}(q_2 + 1 + Q - x)]P_{i+1}(x)$$

και

$$\sum_{x=0}^{q_1} V_{i+1}(q_1 - x)P_{i+1}(x) \geq \sum_{x=0}^{q_1} V_{i+1}(q_2 - x)P_{i+1}(x).$$

Από τις παραπάνω ανισότητες, συμπεραίνουμε ότι η ανισότητα $H_i(q_1) \geq H_i(q_2)$ ισχύει αν

$$\sum_{x=q_1+1}^{q_2} [2c_{i+1,0} + V_{i+1}(q_1 + 1 + Q - x) - V_{i+1}(q_2 - x)]P_{i+1}(x) \geq 0.$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$q_1 + 1 \leq x \leq q_2 \Rightarrow q_1 + 1 + Q - x \leq Q \text{ και επειδή η } V_{i+1}(q) \text{ είναι φθίνουσα ως προς } q:$$

$$V_{i+1}(q_1 + 1 + Q - x) \geq V_{i+1}(Q) \Rightarrow$$

$$\sum_{x=q_1+1}^{q_2} [2c_{i+1,0} + V_{i+1}(q_1 + 1 + Q - x) - V_{i+1}(q_2 - x)]P_{i+1}(x)$$

$$\geq \sum_{x=q_1+1}^{q_2} [2c_{i+1,0} + V_{i+1}(Q) - V_{i+1}(q_2 - x)]P_{i+1}(x) \geq 0,$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από τα παρακάτω.

Από το Λήμμα 1 για $i := i + 1$ και $q = q_2 - x$ έχουμε:

$$V_{i+1}(q_2 - x) \leq V_{i+1}(Q) + 2c_{i+1,0} \Rightarrow 2c_{i+1,0} + V_{i+1}(Q) - V_{i+1}(q_2 - x) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{x=q_1+1}^{q_2} [2c_{i+1,0} + V_{i+1}(Q) - V_{i+1}(q_2 - x)]P_{i+1}(x) \geq 0.$$

Άρα καταλήξαμε στο γεγονός ότι $\forall q_1, q_2 \in \{0, 1, \dots, Q\} : q_1 \leq q_2 \Rightarrow H_i(q_1) \geq H_i(q_2)$. Οπότε η συνάρτηση $H_i(q)$ είναι φθίνουσα ως προς q . Από την εξίσωση (2.1), συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $V_i(q)$ είναι φθίνουσα ως προς q διότι η H_i^* δεν εξαρτάται από την ποσότητα q . Η απόδειξη της πρότασης είναι πλήρης. ■

Για κάθε $i = 1, 2, \dots, n - 1$, ισχύει ότι:

$$c_{i,i+1} < c_{i0} + c_{0,i+1} \Rightarrow c_{i,i+1} + \sum_{x=0}^Q V_{i+1}(Q - x)P_{i+1}(x) < c_{i0} + c_{0,i+1} + \sum_{x=0}^Q V_{i+1}(Q - x)P_{i+1}(x) \Rightarrow$$

$$H_i(Q) < H_i^*$$

και

$$c_{i,i+1} + 2c_{i+1,0} = c_{i,i+1} + c_{i+1,0} + c_{0,i+1} > c_{i0} + c_{0,i+1} \Rightarrow$$

$$c_{i,i+1} + \sum_{x=0}^Q [2c_{i+1,0} + V_{i+1}(Q-x)]P_{i+1}(x) > c_{i0} + c_{0,i+1} + \sum_{x=0}^Q V_{i+1}(Q-x)P_{i+1}(x) \Rightarrow$$

$$H_i(0) > H_i^* .$$

Από την Πρόταση 1 προκύπτει ότι, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n-1$ υπάρχει μια κρίσιμη ποσότητα $h_i \in \{1, 2, \dots, Q-1\}$ τέτοια ώστε $H_i(h_i) = H_i^*$. Η βέλτιστη πολιτική επιλέγει εκείνη την ενέργεια σύμφωνα με την οποία το όχημα ταξιδεύει κατευθείαν προς τον επόμενο πελάτη $i+1$ αν $q \geq h_i$, ενώ αντιθέτως επιλέγει εκείνη την ενέργεια σύμφωνα με την οποία το όχημα επιστρέφει στην αποθήκη για να ανανεώσει το απόθεμά του, αν $q < h_i$. Οι κρίσιμες ποσότητες $h_i, i = 1, \dots, n-1$ μπορούν να υπολογιστούν, υπολογίζοντας αριθμητικά τα αθροίσματα στις εξισώσεις (2.2) και (2.3). Το ελάχιστο αναμενόμενο κόστος υπολογίζεται στα σημεία $x = 0, 1, \dots, Q$.

Στην περίπτωση των συνεχών απαιτήσεων θεωρούμε ότι οι απαιτήσεις $d_i, i = 1, 2, \dots, n$ είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με γνωστές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_i(x) = f_i(d_i = x)$, τέτοιες ώστε $f_i(x) = 0$, όταν $x \geq Q$, όπου Q είναι η χωρητικότητα του οχήματος. Μετά την εξυπηρέτηση του κάθε πελάτη, το όχημα έχει δύο επιλογές: (α) να ταξιδέψει προς τον επόμενο πελάτη ή (β) να επιστρέψει στην αποθήκη για να ανανεώσει το απόθεμά του και να συνεχίσει τη διαδρομή του. Θεωρούμε ότι η ζήτηση κάθε πελάτη γίνεται γνωστή λίγο πριν την εξυπηρέτηση του πελάτη. Το πρόβλημα είναι η εύρεση εκείνης της πολιτικής που ελαχιστοποιεί το συνολικό αναμενόμενο κόστος. Ένα ρεαλιστικό παράδειγμα αυτού του μοντέλου μπορεί να είναι η περίπτωση κατά την οποία ένα όχημα διανέμει πετρέλαιο σε συγκεκριμένα βενζινάδικα. Η ζήτηση σε πετρέλαιο από το κάθε βενζινάδικο μπορεί να θεωρηθεί στοχαστική διότι όταν γίνεται η παραγγελία του πετρελαίου από το κάθε βενζινάδικο δεν είναι γνωστή η ποσότητα του πετρελαίου που θα πουληθεί στους καταναλωτές από το κάθε βενζινάδικο στο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί ανάμεσα στην παραγγελία και στη διανομή του πετρελαίου από το όχημα. Έστω $V_i(q), q \in [0, Q]$, το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος από τον πελάτη i μέχρι το τέλος της διαδρομής, αν ο πελάτης i έχει εξυπηρετηθεί και η ποσότητα του προϊόντος που έχει απομείνει στο όχημα είναι ίση με q . Αυτή η ποσότητα ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση του δυναμικού προγραμματισμού:

$$V_i(q) = \min\{H_i(q), H_i^*\}, i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.6)$$

όπου,

$$H_i(q) = c_{i,i+1} + \int_q^Q [2c_{i+1,0} + V_{i+1}(q+Q-x)]f_{i+1}(x)dx + \int_0^q V_{i+1}(q-x)f_{i+1}(x)dx, \quad (2.7)$$

αν το όχημα ταξιδέψει κατευθείαν προς τον επόμενο πελάτη $i + 1$

και

$$H_i^* = c_{i0} + c_{0,i+1} + \int_0^Q V_{i+1}(Q - x) f_{i+1}(x) dx, \quad (2.8)$$

αν το όχημα επιστρέψει στην αποθήκη έτσι ώστε να ανανεώσει το απόθεμα του και στην συνέχεια να εξυπηρετήσει τον πελάτη $i + 1$.

Η οριακή συνθήκη είναι:

$$V_n(q) = c_{n0}, q \in [0, Q].$$

Αν $H_i^* < H_i(q)$, τότε η βέλτιστη απόφαση είναι η επιστροφή του οχήματος στην αποθήκη έτσι ώστε το όχημα να ανανεώσει το απόθεμα του και εν συνεχεία να εξυπηρετήσει τον πελάτη $i + 1$. Αν $H_i(q) \leq H_i^*$, η βέλτιστη απόφαση είναι τέτοια ώστε το όχημα να ταξιδέψει κατευθείαν προς τον επόμενο πελάτη $i + 1$. Σε αυτή την περίπτωση, αν η ζήτηση x του πελάτη είναι μεγαλύτερη από q , τότε το όχημα τροφοδοτεί τον πελάτη $i + 1$ με την ποσότητα q , επιστρέφει στην αποθήκη για να ανανεώσει το απόθεμα του και εν συνεχεία επιστρέφει στον πελάτη $i + 1$ για να τον τροφοδοτήσει με την υπόλοιπη ποσότητα $x - q$. Επίσης αν η ζήτηση x του πελάτη είναι μικρότερη από q τότε το όχημα τροφοδοτεί άμεσα τον πελάτη $i + 1$ με τον αριθμό τεμαχίων x . Σύμφωνα με την Πρόταση 1, για κάθε πελάτη $i, 1 \leq i \leq n - 1$, υπάρχει μια κρίσιμη ποσότητα h_i τέτοια ώστε, η βέλτιστη απόφαση για το όχημα είναι να ταξιδέψει κατευθείαν προς τον πελάτη $i + 1$ αν και μόνο αν η ποσότητα q που έχει απομείνει στο όχημα μετά από την εξυπηρέτηση του πελάτη i είναι μεγαλύτερη ή ίση με h_i .

Για κάθε $i = 1, 2, \dots, n - 1$, ισχύει ότι $H_i(Q) < H_i^*$ και $H_i(0) > H_i^*$, διότι τα κόστη c_{ij} ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα. Από την Πρόταση 1 προκύπτει ότι, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n - 1$ υπάρχει μια κρίσιμη ποσότητα $h_i \in (0, Q)$ τέτοια ώστε $H_i(h_i) = H_i^*$. Η βέλτιστη πολιτική επιλέγει εκείνη την ενέργεια σύμφωνα με την οποία το όχημα ταξιδεύει κατευθείαν προς τον επόμενο πελάτη $i + 1$ αν $q \geq h_i$, ενώ αντιθέτως επιλέγει εκείνη την ενέργεια σύμφωνα με την οποία το όχημα επιστρέφει στην αποθήκη για να ανανεώσει το απόθεμά του, αν $q < h_i$. Οι κρίσιμες ποσότητες $h_i, i = 1, \dots, n - 1$ μπορούν να υπολογιστούν, κατά προσέγγιση, διαιρώντας το διάστημα $[0, Q]$ σε μικρά υπό-διαστήματα μήκους ξ και υπολογίζοντας αριθμητικά τα ολοκληρώματα στις εξισώσεις (2.7) και (2.8). Το ελάχιστο αναμενόμενο κόστος υπολογίζεται στα σημεία $j\xi, j = 0, \dots, Q/\xi$.

Στην περίπτωση των διακριτών και συνεχών απαιτήσεων θεωρούμε ότι έχουμε δυο συναφή προϊόντα και το όχημα αποτελείται από δύο τμήματα, τμήμα 1 και τμήμα 2, με πεπερασμένες χωρητικότητες Q_0 και Q_1 , αντίστοιχα. Οι απαιτήσεις $d_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές με γνωστές συναρτήσεις μάζας πιθανότητας $P_i(x_0) = P_i(d_i^{(0)} = x_0)$, τέτοιες ώστε $P_i(x_0) = 0$, όταν $x_0 = Q_0 + 1, x_0 = Q_0 + 2, \dots$ όπου Q_0 είναι η χωρητικότητα του οχήματος για το προϊόν με διακριτές απαιτήσεις. Επίσης οι απαιτήσεις $d_i^{(1)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με γνωστές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_i(x_1) = f_i(d_i^{(1)} = x_1)$, τέτοιες ώστε $f_i(x_1) = 0$, όταν $x_1 \geq Q_1$, όπου Q_1 είναι η χωρητικότητα του οχήματος για το προϊόν με συνεχείς απαιτήσεις. Θεωρούμε ότι έχουμε μια αποθήκη με δυο τμήματα, τμήμα 1 και τμήμα 2 για τα αντίστοιχα προϊόντα με τις διακριτές και συνεχείς απαιτήσεις, μηδενικού κόστους διαδρομής ανάμεσα τους. Επίσης όταν το όχημα επιστρέφει σε ένα τμήμα της αποθήκης για να ανανεώσει το απόθεμα του δεν είναι σίγουρο εάν θα μεταβεί στο άλλο τμήμα. Μετά την εξυπηρέτηση του κάθε πελάτη, το όχημα έχει δύο επιλογές: (α) να ταξιδέψει προς τον επόμενο πελάτη ή (β) να επιστρέψει στην αποθήκη για να ανανεώσει το απόθεμά του και να συνεχίσει τη διαδρομή του. Θεωρούμε ότι οι ζητήσεις κάθε πελάτη γίνονται γνωστές λίγο πριν την εξυπηρέτηση του πελάτη. Το πρόβλημα είναι η εύρεση εκείνης της πολιτικής που ελαχιστοποιεί το συνολικό αναμενόμενο κόστος. Ένα ρεαλιστικό παράδειγμα αυτού του μοντέλου μπορεί να είναι η περίπτωση κατά την οποία ένα όχημα διανέμει αμμοχάλικο και τεμάχια τσιμέντου σε συγκεκριμένα καταστήματα οικοδομικών υλικών. Οι ζητήσεις σε αμμοχάλικο και τεμάχια τσιμέντου από το κάθε καταστήματα οικοδομικών υλικών μπορούν να θεωρηθούν στοχαστικές διότι όταν γίνεται η παραγγελία των αμμοχάλικων και τεμαχίων τσιμέντου από το κάθε καταστήματα οικοδομικών υλικών δεν είναι γνωστή η ποσότητα των αμμοχάλικων και τεμαχίων τσιμέντου που θα πουληθεί στους καταναλωτές από το κάθε καταστήματα οικοδομικών υλικών στο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί ανάμεσα στην παραγγελία και στη διανομή των αμμοχάλικων και τεμαχίων τσιμέντου από το όχημα. Έστω $V_i(q_0, q_1)$, $q_0 \in \{0, 1, \dots, Q_0\}$, $q_1 \in [0, Q_1]$ το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος από τον πελάτη i μέχρι το τέλος της διαδρομής, αν ο πελάτης i έχει εξυπηρετηθεί, η ποσότητα του προϊόντος με διακριτές απαιτήσεις που έχει απομείνει στο όχημα είναι ίση με q_0 και η ποσότητα του προϊόντος με συνεχείς απαιτήσεις που έχει απομείνει στο όχημα είναι ίση με q_1 . Αυτή η ποσότητα ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση του δυναμικού προγραμματισμού:

$$V_i(q_0, q_1) = \min\{H_i(q_0, q_1), H_i^*\}, i = 1, 2, \dots, n - 1$$

όπου,

$$H_i(q_0, q_1) = c_{i,i+1} + \sum_{x_0=q_0+1}^{Q_0} \left[\int_{q_1}^{Q_1} [2c_{i+1,0} + V_{i+1}(q_0 + 1 + Q_0 - x_0, q_1 + Q_1 - x_1)] f_{i+1}(x_1) dx_1 \right] P_{i+1}(x_0)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{x_0=q_0+1}^{Q_0} \left[\int_0^{q_1} [2c_{i+1,0} + V_{i+1}(q_0 + 1 + Q_0 - x_0, q_1 - x_1)] f_{i+1}(x_1) dx_1 \right] P_{i+1}(x_0) \\
& + \sum_{x_0=0}^{q_0} \left[\int_{q_1}^{Q_1} [2c_{i+1,0} + V_{i+1}(q_0 - x_0, q_1 + Q_1 - x_1)] f_{i+1}(x_1) dx_1 \right] P_{i+1}(x_0) \\
& + \sum_{x_0=0}^{q_0} \left[\int_0^{q_1} V_{i+1}(q_0 - x_0, q_1 - x_1) f_{i+1}(x_1) dx_1 \right] P_{i+1}(x_0)
\end{aligned}$$

αν το όχημα ταξιδεύει κατευθείαν προς τον επόμενο πελάτη $i + 1$

και

$$H_i^* = c_{i0} + c_{0,i+1} + \sum_{x_0=0}^{Q_0} \left[\int_0^{Q_1} V_{i+1}(Q_0 - x_0, Q_1 - x_1) f_{i+1}(x_1) dx_1 \right] P_{i+1}(x_0)$$

αν το όχημα επιστρέφει στην αποθήκη (τμήμα 1 και τμήμα 2) έτσι ώστε να ανανεώσει τα αποθέματα του και στην συνέχεια να εξυπηρετήσει τον πελάτη $i + 1$.

Η οριακή συνθήκη είναι:

$$V_n(q_0, q_1) = c_{n0}, q_0 \in \{0, 1, \dots, Q_0\}, q_1 \in [0, Q_1].$$

Αν $H_i^* < H_i(q_0, q_1)$, τότε η βέλτιστη απόφαση είναι η επιστροφή του οχήματος στην αποθήκη έτσι ώστε το όχημα να ανανεώσει τα αποθέματα του και εν συνεχεία να εξυπηρετήσει τον πελάτη $i + 1$. Αν $H_i(q_0, q_1) \leq H_i^*$, τότε η βέλτιστη απόφαση είναι το όχημα να ταξιδεύει κατευθείαν προς τον επόμενο πελάτη $i + 1$. Σε αυτή την περίπτωση, αν οι ζητήσεις x_0, x_1 του πελάτη είναι μεγαλύτερες από q_0, q_1 αντίστοιχα, τότε το όχημα τροφοδοτεί τον πελάτη $i + 1$ με τις ποσότητες q_0, q_1 επιστρέφει στην αποθήκη (τμήμα 1 και τμήμα 2) για να ανανεώσει τα αποθέματα του και εν συνεχεία επιστρέφει στον πελάτη $i + 1$ για να τον τροφοδοτήσει με τις υπόλοιπες ποσότητες: $x_0 - q_0, x_1 - q_1$. Αν όμως $x_0 > q_0$ και $x_1 < q_1$ τότε το όχημα τροφοδοτεί τον πελάτη $i + 1$ με τις ποσότητες q_0, x_1 επιστρέφει στην αποθήκη (τμήμα 1) για να ανανεώσει το απόθεμα του και εν συνεχεία επιστρέφει στον πελάτη $i + 1$ για να τον τροφοδοτήσει με την υπόλοιπη ποσότητα $x_0 - q_0$. Ομοίως για την περίπτωση όπου $x_0 < q_0$ και $x_1 > q_1$. Τέλος, εάν οι ζητήσεις x_0, x_1 του πελάτη είναι μικρότερες από q_0, q_1 αντίστοιχα τότε το όχημα τροφοδοτεί άμεσα τον πελάτη $i + 1$ με τις ποσότητες x_0, x_1 .

2.3 Οι αλγόριθμοι για τον υπολογισμό των κρίσιμων ποσοτήτων

Στην περίπτωση των διακριτών απαιτήσεων

Θέτουμε $V_n(x) = c_{0n}$, $x = 0, \dots, Q$.

Για $i = n - 1, \dots, 1$ υπολογίζουμε τις ποσότητες $V_i(0)$ και $V_i(Q)$:

$$V_i(0) = H_i^* = c_{i0} + c_{0,i+1} + \sum_{x=0}^{Q-1} V_{i+1}(Q-x)P_{i+1}(x),$$

$$V_i(Q) = H_i(Q) = c_{i,i+1} + \sum_{x=0}^Q V_{i+1}(Q-x)P_{i+1}(x)$$

και για $x = Q - 1, Q - 2, \dots, 0$ υπολογίζουμε την ποσότητα $H_i(x)$:

$$H_i(x) = c_{i,i+1} + \sum_{y=x}^{Q-1} [2c_{i+1,0} + V_{i+1}(x+Q-y)]P_{i+1}(y) + \sum_{y=0}^{x-1} V_{i+1}(x-y)P_{i+1}(y),$$

μέχρι να ισχύει $H_i(x) > V_i(0)$. Η κρίσιμη ποσότητα h_i είναι ίση με $x^* + 1$, όπου x^* είναι η μέγιστη τιμή των $\{0, \dots, Q - 1\}$ που ικανοποιούν την παραπάνω ανισότητα. Για $x = 1, \dots, x^*$, $V_i(x) = V_i(0)$ και για $x = x^* + 1, \dots, Q - 1$, $V_i(x) = H_i(x)$.

Στην περίπτωση των συνεχών απαιτήσεων

Θέτουμε $V_n(j\xi) = c_{0n}$, $j = 0, \dots, Q/\xi$.

Για $i = n - 1, \dots, 1$ υπολογίζουμε τις ποσότητες $V_i(0)$ και $V_i(Q)$:

$$V_i(0) = H_i^* = c_{i0} + c_{0,i+1} + \sum_{j=0}^{Q/\xi-1} V_{i+1}(Q-j\xi)f_{i+1}(j\xi)\xi,$$

$$V_i(Q) = H_i(Q) = c_{i,i+1} + \sum_{j=0}^{Q/\xi} V_{i+1}(Q-j\xi)f_{i+1}(j\xi)\xi$$

και για $j = Q/\xi - 1, Q/\xi - 2, \dots, 0$ υπολογίζουμε την ποσότητα $H_i(j\xi)$:

$$H_i(j\xi) = c_{i,i+1} + \sum_{r=j}^{Q/\xi-1} [2c_{i+1,0} + V_{i+1}(j\xi + Q - r\xi)]f_{i+1}(r\xi)\xi + \sum_{r=0}^{j-1} V_{i+1}(j\xi - r\xi)f_{i+1}(r\xi)\xi,$$

μέχρι να ισχύει $H_i(j\xi) > V_i(0)$. Η κρίσιμη ποσότητα h_i είναι ίση με $(j^* + 1)\xi$, όπου j^* είναι η μέγιστη τιμή των $\{0, \dots, Q/\xi - 1\}$ που ικανοποιούν την παραπάνω ανισότητα. Για $j = 1, \dots, j^*\xi$, $V_i(j\xi) = V_i(0)$ και για $j = (j^* + 1)\xi, \dots, Q/\xi - 1$, $V_i(j\xi) = H_i(j\xi)$.

2.4 Αριθμητικά παραδείγματα

Παράδειγμα 2.1 (Βέλτιστη δρομολόγηση ενός οχήματος που διανέμει αναψυκτικά). Υποθέτουμε ότι η χωρητικότητα του οχήματος σε τεμάχια αναψυκτικών είναι $Q = 20$ και ο αριθμός των περιπτέρων είναι $n = 20$. Οι απαιτήσεις d_i , $i = 1, \dots, 20$ των περιπτέρων είναι ανεξάρτητες διακριτές τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανομημένες στο σύνολο $\{0, 1, \dots, 20\}$. Δηλαδή οι συναρτήσεις μάζας πιθανότητας είναι οι

$$\text{εξής: } P_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{21}, & x = 0, 1, \dots, 20 \\ 0, & x = 21, 22, \dots \end{cases}$$

Έστω ότι τα κόστη της διαδρομής ανάμεσα στην αποθήκη (κορυφή 0) και τις κορυφές $1, \dots, 20$ είναι:

$$c_{0,1} = 25, c_{0,2} = 20, c_{0,3} = 15, c_{0,4} = 22, c_{0,5} = 18, c_{0,6} = 12, c_{0,7} = 17, c_{0,8} = 20, c_{0,9} = 18, c_{0,10} = 13, \\ c_{0,11} = 15, c_{0,12} = 13, c_{0,13} = 19, c_{0,14} = 23, c_{0,15} = 22, c_{0,16} = 20, c_{0,17} = 18, c_{0,18} = 14, c_{0,19} = 16 \text{ και} \\ c_{0,20} = 18.$$

Τα κόστη της διαδρομής ανάμεσα στις κορυφές i και $i + 1$, $i = 1, \dots, 19$ είναι:

$$c_{1,2} = 18, c_{2,3} = 12, c_{3,4} = 16, c_{4,5} = 20, c_{5,6} = 14, c_{6,7} = 13, c_{7,8} = 10, c_{8,9} = 15, c_{9,10} = 19, c_{10,11} = 16, \\ c_{11,12} = 12, c_{12,13} = 14, c_{13,14} = 11, c_{14,15} = 15, c_{15,16} = 12, c_{16,17} = 10, c_{17,18} = 11, c_{18,19} = 12 \text{ και} \\ c_{19,20} = 13.$$

Οι κρίσιμες ποσότητες που λαμβάνονται από τον αλγόριθμο είναι:

$$h_1 = 7, h_2 = 5, h_3 = 11, h_4 = 10, h_5 = 8, h_6 = 11, h_7 = 7, h_8 = 8, h_9 = 12, h_{10} = 13, h_{11} = 9, \\ h_{12} = 11, h_{13} = 7, h_{14} = 7, h_{15} = 6, h_{16} = 5, h_{17} = 6, h_{18} = 10 \text{ και } h_{19} = 9.$$

Τέλος το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος ισούται με 589.2375.

Παράδειγμα 2.2 (Βέλτιστη δρομολόγηση ενός οχήματος που διανέμει πετρέλαιο). Υποθέτουμε ότι η χωρητικότητα του οχήματος σε λίτρα πετρελαίου είναι $Q = 20$ και ο αριθμός των βενζινάδικων είναι $n = 20$. Οι απαιτήσεις $d_i, i = 1, \dots, 20$ των βενζινάδικων είναι ανεξάρτητες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανομημένες στο διάστημα $[0, 20]$. Δηλαδή οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας είναι οι

$$\text{εξής: } f_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & x \in (0, 20) \\ 0, & x \geq 20 \end{cases}$$

Επιλέγουμε $\xi = 0.05$ έτσι ώστε το διάστημα $[0, Q]$ να διαιρείται σε $Q/\xi = 400$ μικρά υπό-διαστήματα μήκους ξ . Έστω ότι τα κόστη της διαδρομής είναι ίδια με το προηγούμενο παράδειγμα.

Οι κρίσιμες ποσότητες που λαμβάνονται από τον αλγόριθμο είναι:

$$h_1 = 6.55, h_2 = 4.7, h_3 = 10.5, h_4 = 8.9, h_5 = 6.7, h_6 = 10.6, h_7 = 6.55, h_8 = 7.25, h_9 = 10.8, \\ h_{10} = 12.05, h_{11} = 7.7, h_{12} = 10.55, h_{13} = 6.55, h_{14} = 6.4, h_{15} = 5.05, h_{16} = 4.45, h_{17} = 5, h_{18} = 8.75 \\ \text{και } h_{19} = 8.35.$$

Επίσης το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος ισούται με 585.3005.

Τώρα επιλέγουμε $\xi = 0.0005$ έτσι ώστε το διάστημα $[0, Q]$ να διαιρείται σε $Q/\xi = 40000$ μικρά υπό-διαστήματα μήκους ξ . Οι κρίσιμες ποσότητες που λαμβάνονται από τον αλγόριθμο είναι:

$$h_1 = 6.5, h_2 = 4.667, h_3 = 10.455, h_4 = 8.889, h_5 = 6.667, h_6 = 10.5885, h_7 = 6.5, h_8 = 7.2225, h_9 = \\ 10.7695, h_{10} = 12, h_{11} = 7.6925, h_{12} = 10.5265, h_{13} = 6.522, h_{14} = 6.364, h_{15} = 5.0005, h_{16} = \\ 4.4445, h_{17} = 5, h_{18} = 8.75 \text{ και } h_{19} = 8.3335.$$

Επίσης το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος ισούται με 585.7119.

Παρατήρηση Όπως ήταν αναμενόμενο για μικρότερες τιμές του ξ υπάρχει μεγαλύτερη βελτίωση της ακρίβειας των κρίσιμων ποσοτήτων και του ελάχιστου συνολικού αναμενόμενου κόστους.

2.5 Περίληψη των αποτελεσμάτων και θέμα για μελλοντική έρευνα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετήθηκε ένα στοχαστικό πρόβλημα δρομολόγησης ενός οχήματος στο οποίο (i) οι πελάτες εξυπηρετούνται σύμφωνα με μια προκαθορισμένη σειρά, (ii) η ζήτηση κάθε πελάτη είναι στοχαστική, (iii) η πραγματική ζήτηση κάθε πελάτη αποκαλύπτονται αμέσως μόλις το όχημα φτάσει στην τοποθεσία του πελάτη. Το πρόβλημα προσδιορίζεται και αναλύεται για τις περιπτώσεις ενός προϊόντος με διακριτές και συνεχείς απαιτήσεις και δυο συναφών προϊόντων με διακριτές και συνεχείς απαιτήσεις. Το συνολικό κόστος αποτελείται από τα έξοδα ταξιδιού μεταξύ των διαδοχικών πελατών και μεταξύ των πελατών και της αποθήκης. Επιλέξαμε ως χρονικές στιγμές λήψης απόφασης για τη δρομολόγηση του οχήματος, τις χρονικές στιγμές στις οποίες το όχημα επισκέπτεται για πρώτη φορά κάθε πελάτη και έχει παραδοθεί η μέγιστη δυνατή ποσότητα του προϊόντος. Αυτή η επιλογή χρονικών στιγμών λήψης απόφασης καθιστά δυνατή την διαμόρφωση ενός δυναμικού προγραμματισμού για τον καθορισμό της πολιτικής δρομολόγησης που ελαχιστοποιεί το συνολικό αναμενόμενο κόστος για την εξυπηρέτηση όλων των πελατών. Αποδείξαμε ότι, για κάθε πελάτη, για τις περιπτώσεις ενός προϊόντος με διακριτές και συνεχείς απαιτήσεις, η βέλτιστη πολιτική έχει μια συγκεκριμένη δομή που βασίζεται σε ένα σύνολο κρίσιμων ποσοτήτων. Αυτό το αποτέλεσμα μας δίνει τη δυνατότητα να σχεδιάσουμε δυο αλγορίθμους δυναμικού προγραμματισμού για τον υπολογισμό των κρίσιμων ποσοτήτων στις περιπτώσεις των διακριτών και των συνεχών απαιτήσεων. Τέλος παραθέτουμε δυο αριθμητικά παραδείγματα για τις περιπτώσεις των διακριτών και των συνεχών απαιτήσεων.

Ένα πιθανό θέμα για μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να είναι η μελέτη του προβλήματος για την περίπτωση των δυο συναφών προϊόντων με διακριτές και συνεχείς απαιτήσεις. Δηλαδή να αποδειχτεί ότι για κάθε πελάτη, η βέλτιστη πολιτική έχει μια συγκεκριμένη δομή που βασίζεται σε ένα σύνολο κρίσιμων ποσοτήτων. Επίσης με τον σχεδιασμό ενός αλγορίθμου δυναμικού προγραμματισμού για τον υπολογισμό των κρίσιμων ποσοτήτων, θα μπορούμε να παράγουμε και αριθμητικά αποτελέσματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΣΗ ΕΝΟΣ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΠΑΡΟΜΟΙΩΝ ΠΡΟΙΟΝΤΩΝ

3.1 Εισαγωγή

Ένα πολύ γνωστό πρόβλημα στην επιχειρησιακή έρευνα είναι το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων (Vehicle Routing Problem (VRP)). Το περιεχόμενο του VRP είναι αυτό της παράδοσης προϊόντων που βρίσκονται σε μια κεντρική αποθήκη, σε πελάτες που είναι διάσπαρτοι σε μια γεωγραφική έκταση και έχουν παραγγείλει αυτά τα προϊόντα. Ένα όχημα ή πολλά οχήματα ξεκινούν τις διαδρομές τους από την αποθήκη και επισκέπτονται τους πελάτες προκειμένου να ικανοποιήσουν τις παραγγελίες τους. Μετά την εξυπηρέτηση όλων των πελατών τα οχήματα επιστρέφουν στην αποθήκη. Ο στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μεταφοράς για την εξυπηρέτηση των πελατών. Το VRP έχει μελετηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία της βελτιστοποίησης τα τελευταία εξήντα χρόνια. Διάφορες παραλλαγές του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων έχουν εξεταστεί, όπως:

- (i) Το VRP με χρονικά παράθυρα (Cortés et al. (2014)) στα οποία οι πελάτες εξυπηρετούνται μέσα σε προκαθορισμένα χρονικά παράθυρα. Τα χρονικά παράθυρα ορίζονται ως αυστηρά όταν δεν επιτρέπεται η παράδοση εκτός του χρονικού διαστήματος. Από την άλλη πλευρά, τα χαλαρά χρονικά παράθυρα επιτρέπουν παραδόσεις εκτός του χρονικού διαστήματος με ένα κόστος ποινής.
- (ii) Το χωρητικό VRP με ή χωρίς χρονικά παράθυρα (Laporte et al. (2002), Syrighas and Crispin (2017)) στα οποία τα οχήματα έχουν περιορισμένη μεταφορική ικανότητα των προϊόντων που πρέπει να παραδοθούν.
- (iii) Το VRP όπου οι πελάτες χωρίζονται σε παραδοτέοι πελάτες, οι οποίοι απαιτούν να παραδώσουν μια δεδομένη ποσότητα προϊόντος και πελάτες παραλαβής, που απαιτούν να παραλάβουν μια δεδομένη ποσότητα προϊόντος (Goetschalckx and Jacobs-Blecha (1989), Bellosso et al. (2017)).
- (iv) Το VRP με παραλαβή και παράδοση (Tasan and Gen (2012), Zhang et al. (2012)), στο οποίο κάθε πελάτης σχετίζεται με δύο ποσότητες που αντιπροσωπεύουν τις απαιτήσεις των προϊόντων που πρόκειται να παραδοθούν και να παραληφθούν.

- (v) Το VRP με πολλαπλές διαδρομές (Olivera and Viera (2007)), στο οποίο κάθε όχημα μπορεί να προγραμματιστεί για περισσότερες από μια διαδρομές, εφόσον αυτές αντιστοιχούν στη μέγιστη επιτρεπόμενη απόσταση κατά τη διάρκεια της εργάσιμης ημέρας.
- (vi) Το ανοιχτό VRP (Derigs and Reuter (2009)) στο οποίο τα οχήματα δεν υποχρεούνται να επιστρέψουν στην αποθήκη μετά την εξυπηρέτηση των πελατών.
- (vii) Το VRP με πολλαπλά τμήματα (Derigs et al. (2011)) στα οποία κάθε τμήμα των οχημάτων είναι κατάλληλο μόνο για ένα προϊόν.

Το VRP είναι ένα NP-hard πρόβλημα (πρόβλημα τουλάχιστον τόσο «δύσκολο» όσο οποιοδήποτε πρόβλημα της κλάσης NP (πολυωνυμική επιβεβαίωση λύσης ή μη-ντετερμινιστική πολυωνυμική πολυπλοκότητα χρόνου)) που σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να επιλυθεί ακριβώς με αλγόριθμους (για παράδειγμα branch-and-bound, branch-and-cut, branch-and-cut-and-price μέθοδοι) που οδηγούν στη βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης (Gauvin et al. (2014), Dayarian et al. (2015)). Επίσης, έχουν αναπτυχθεί σε πολλές περιπτώσεις ευρετικές και μεταευρετικές τεχνικές επίλυσης προβλημάτων (tabu search, simulated annealing, genetic algorithms, colony optimization) (Kriticos and Ioannou (2013), Segerstedt (2014)). Αν και αυτές οι τεχνικές επίλυσης δεν εγγυώνται τη βέλτιστη απόδοση, στην πράξη αποδίδουν καλύτερα αποτελέσματα. Επιπλέον, οι υβριδικές μέθοδοι στο VRP χρησιμοποιούν συνδυασμό ευρετικών, μεταευρετικών ή ακριβών αλγορίθμων. Αξίζει να σημειωθεί ότι μεγάλο μέρος της έρευνας σχετίζεται με το στοχαστικό VRP (Gendreau et al. (1996), Haugland et al. (2007), Nguyen et al. (2016)) που περιέχει στοχαστικά στοιχεία, όπως οι απαιτήσεις των πελατών, οι χρόνοι διαδρομής του οχήματος και οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών. Πρόσφατες έρευνες σχετικά με το VRP έχουν δοθεί από τους Pillac et al. (2013), Toth and Vigo (2014) και Psaraftis et al. (2016).

Τα τελευταία είκοσι χρόνια έχουν μελετηθεί διάφορα προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων με χωρητικότητα στα οποία ένα μεμονωμένο όχημα ξεκινά τη διαδρομή του από μια αποθήκη και εξυπηρετεί N πελάτες σύμφωνα με μια προκαθορισμένη σειρά. Για αυτά τα προβλήματα έχουν δοθεί κατάλληλες διατυπώσεις δυναμικού προγραμματισμού και αποδείχθηκε ότι η βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης έχει μια συγκεκριμένη δομή που βασίζεται σε ένα σύνολο κρίσιμων ποσοτήτων για κάθε πελάτη. Παρακάτω παρουσιάζουμε αυτές τις μελέτες. Στην Ενότητα 3 των Yang et al. (2000) οι απαιτήσεις των πελατών θεωρήθηκαν διακριτές τυχαίες μεταβλητές με γνωστές συναρτήσεις μάζας πιθανότητας. Αποδείχθηκε ότι, για κάθε πελάτη, η βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης χαρακτηρίζεται από μια κρίσιμη ποσότητα. Εάν μετά την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης ενός πελάτη η υπόλοιπη ποσότητα προϊόντων στο όχημα είναι μεγαλύτερη ή ίση από την κρίσιμη ποσότητα, τότε το όχημα ταξιδεύει προς τον επόμενο πελάτη. Διαφορετικά, επιστρέφει στην αποθήκη για να ανανεώσει το απόθεμα του και εν συνεχεία να εξυπηρετήσει

τον επόμενο πελάτη. Στους Kyriakidis and Dimitrakos (2008) αποδείχθηκε ένα ανάλογο αποτέλεσμα για την περίπτωση όπου οι απαιτήσεις του κάθε πελάτη είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με γνωστές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας. Οι Tsimimpas et al. (2008) υπέθεσαν ότι οι απαιτήσεις των πελατών είναι ντετερμινιστικές και διερεύνησαν:

- (i) Την περίπτωση παραδόσεων πολλαπλών προϊόντων όταν κάθε προϊόν αποθηκεύεται στο δικό του τμήμα στο όχημα.
- (ii) Την περίπτωση παραδόσεων πολλαπλών προϊόντων όταν όλα τα προϊόντα αποθηκεύονται μαζί στο ενιαίο τμήμα του οχήματος.
- (iii) Την περίπτωση κατά την οποία το όχημα παραλαμβάνει και παραδίδει ένα μόνο προϊόν σε κάθε πελάτη.

Σε κάθε περίπτωση η βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης βρέθηκε με την εφαρμογή ενός κατάλληλου αλγόριθμου δυναμικού προγραμματισμού. Οι Tatarakis and Minis (2009) μελέτησαν τις περιπτώσεις (i), (ii) και οι Minis and Tatarakis (2011) μελέτησαν την περίπτωση (iii) όταν οι απαιτήσεις των πελατών είναι διακριτοί τυχαίοι αριθμοί. Σε αυτές τις μελέτες προέκυψαν δομικά αποτελέσματα για τις βέλτιστες πολιτικές δρομολόγησης που γενικεύτηκαν από τους Pandelis et al. (2012, 2013a, 2013b). Στις τρεις τελευταίες εργασίες μελετήθηκαν και τα αντίστοιχα προβλήματα άπειρου χρονικού ορίζοντα όπου η εξυπηρέτηση των πελατών δεν σταματά όταν έχει εξυπηρετηθεί ο τελευταίος πελάτης αλλά συνεχίζεται επ' αόριστον με την ίδια παραγγελία πελατών. Οι Kyriakidis and Dimitrakos (2013) υπέθεσαν ότι επιβάλλεται ποινή εάν η απαίτηση ενός πελάτη δεν ικανοποιηθεί ή εάν ικανοποιηθεί μερικώς. Αποδείχθηκε ότι, για κάθε πελάτη, η βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης έχει μια συγκεκριμένη δομή που βασίζεται σε ένα σύνολο τριών κρίσιμων ποσοτήτων. Οι Dimitrakos and Kyriakidis (2015) επέκτειναν τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τους Pandelis et al. (2013b) στην περίπτωση που οι απαιτήσεις των πελατών για ένα υλικό είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές αντί για διακριτές. Στην Ενότητα 4 των Zhang et al. (2016) διερευνήθηκε ένα πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με προκαθορισμένη σειρά εξυπηρέτησης πελατών, στοχαστικές διακριτές απαιτήσεις, χρονικά πλαίσια και αποδείχθηκε ότι, για κάθε πελάτη, η βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης έχει μια συγκεκριμένη δομή που βασίζεται σε ένα σύνολο κρίσιμων ποσοτήτων. Οι Dikas et al. (2016) εξέτασαν ένα πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με προκαθορισμένη σειρά εξυπηρέτησης πελατών, ντετερμινιστικές απαιτήσεις πελατών και δύο αποθήκες ανανέωσης φορτίου, οι οποίες μπορεί να είναι περιορισμένης χωρητικότητας. Ένας αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού αναπτύχθηκε για την απλούστερη περίπτωση και αλγόριθμοι επίσημανσης ή ένας αλγόριθμος ευρετικού διαμερισμού αναπτύχθηκαν για τις πιο σύνθετες περιπτώσεις. Οι ρεαλιστικές εφαρμογές αυτών των προβλημάτων περιγράφονται στις παραπάνω εργασίες.

Στο παρόν κεφάλαιο, μελετάμε ένα άλλο πρόβλημα υπό την παραδοχή ότι οι πελάτες εξυπηρετούνται σύμφωνα με μια προκαθορισμένη σειρά. Υποθέτουμε ότι το όχημα διανέμει δύο παρόμοια αλλά όχι πανομοιότυπα προϊόντα που παραδίδονται στους πελάτες σύμφωνα με τις προτιμήσεις τους. Εάν λείπει το προϊόν που προτιμά ο πελάτης, είναι δυνατή η παράδοση του άλλου προϊόντος. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ένα κόστος ποινής που μπορεί να οφείλεται σε κάποια μείωση της τιμής του προϊόντος που παραδίδεται ή σε κάποια απώλεια πελατείας. Υποθέτουμε ότι ένα όχημα ξεκινά τη διαδρομή του από μια αποθήκη φορτωμένο στην πλήρη χωρητικότητα του με αντικείμενα δύο όμοιων αλλά όχι πανομοιότυπων προϊόντων και εξυπηρετεί N πελάτες σύμφωνα με μια προκαθορισμένη σειρά $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow N$. Η πιθανότητα να προτιμά ένα συγκεκριμένο προϊόν είναι γνωστή και η ποσότητα που απαιτεί κάθε πελάτης είναι μια τυχαία μεταβλητή με γνωστή κατανομή. Οι πραγματικές προτιμήσεις και απαιτήσεις των πελατών γίνονται γνωστές μόνο όταν ένα όχημα φτάσει στις εγκαταστάσεις τους. Εάν υπάρχει έλλειψη του προτιμώμενου προϊόντος, η ζήτηση του πελάτη μπορεί να ικανοποιηθεί με την παράδοση του προϊόντος που δεν προτιμάται. Το όχημα μπορεί να διακόψει τη διαδρομή του επιστρέφοντας στην αποθήκη για να ανανεώσει τα αποθέματα του με ποσότητες και των δύο προϊόντων. Το συνολικό κόστος για την εξυπηρέτηση όλων των πελατών αποτελείται από: έξοδα μετακίνησης μεταξύ των διαδοχικών πελατών, έξοδα μετακίνησης μεταξύ των πελατών και της αποθήκης, έξοδα ποινής. Η υπόθεση ότι οι πελάτες εξυπηρετούνται σύμφωνα με μια προκαθορισμένη σειρά και μια κατάλληλη επιλογή περιόδου λήψης αποφάσεων μας επιτρέπουν να αναπτύξουμε έναν αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού για τον προσδιορισμό της βέλτιστης πολιτικής δρομολόγησης του οχήματος. Αποδεικνύεται ότι η βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης έχει μια συγκεκριμένη δομή που βασίζεται σε ένα σύνολο κρίσιμων ποσοτήτων. Αυτός ο χαρακτηρισμός μας δίνει τη δυνατότητα να σχεδιάσουμε έναν αποτελεσματικό αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού που οδηγεί στη βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης και απαιτεί λιγότερους υπολογισμούς από τον αρχικό αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού.

Μια πρακτική εφαρμογή του προβλήματος θα μπορούσε να είναι η παράδοση δύο παρόμοιων υλικών ή αγαθών σε ασθενείς σε εγκαταστάσεις υγειονομικής περίθαλψης (Dikas et al. (2016)). Για παράδειγμα, το προσωπικό της μονάδας υγειονομικής περίθαλψης μπορεί να διανέμει δύο παρόμοια λευκά είδη ή δύο παρόμοια ιατρικά υλικά ή δύο παρόμοια γεύματα στους ασθενείς. Η εξυπηρέτηση γίνεται σύμφωνα με προκαθορισμένη σειρά, συνήθως δωμάτιο με δωμάτιο. Το προσωπικό μπορεί να διακόψει τη διαδρομή για να επιστρέψει στην αποθήκη ώστε να ανανεώσει τα αποθέματα του στα καρότσια μεταφοράς. Μια άλλη πρακτική εφαρμογή του προτεινόμενου μοντέλου είναι η διανομή δύο παρόμοιων τύπων πυρομαχικών (π.χ. σφαίρες, βλήματα) σε στρατιωτικές μονάδες. Για λόγους ασφαλείας ή περιορισμούς διοίκησης, το όχημα που μεταφέρει στρατιωτικό εξοπλισμό μπορεί να ακολουθήσει μια προκαθορισμένη σειρά προκειμένου να παραδώσει τα πυρομαχικά σε στρατιωτικές μονάδες. Ο καθορισμός της βέλτιστης πολιτικής δρομολόγησης θα μειώσει το συνολικό κόστος μεταφοράς.

Το υπόλοιπο του κεφαλαίου οργανώνεται ως εξής. Στην Ενότητα 2 το πρόβλημα προσδιορίζεται και αναλύεται για την περίπτωση όπου οι απαιτήσεις των πελατών είναι τυχαίες διακριτές μεταβλητές. Δίνεται μια διατύπωση δυναμικού προγραμματισμού για τον προσδιορισμό της βέλτιστης πολιτικής δρομολόγησης του οχήματος και παρουσιάζεται η δομή της βέλτιστης πολιτικής. Στην Ενότητα 3 εισάγεται ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού. Στην Ενότητα 4 τα θεωρητικά αποτελέσματα επεξηγούνται με ένα αριθμητικό παράδειγμα. Στην Ενότητα 5 εξετάζουμε το γενικότερο πρόβλημα χωρίς την υπόθεση ότι οι πελάτες εξυπηρετούνται σύμφωνα με μια προκαθορισμένη σειρά. Στην τελευταία ενότητα δίνουμε μια περίληψη των βασικών αποτελεσμάτων της εργασίας και ένα θέμα για μελλοντική έρευνα.

3.2 Το πρόβλημα με διακριτές απαιτήσεις

Υποθέτουμε ότι ένα όχημα ξεκινά τη διαδρομή του από μια αποθήκη και επισκέπτεται N πελάτες προκειμένου να τους παραδώσει δύο παρόμοια αλλά όχι πανομοιότυπα προϊόντα. Ονομάζουμε αυτά τα προϊόντα, προϊόν 1 και προϊόν 2. Ένα τεμάχιο του προϊόντος 1 έχει το ίδιο μέγεθος με ένα τεμάχιο του προϊόντος 2. Για παράδειγμα, ένα τεμάχιο του προϊόντος 1 θα μπορούσε να είναι ένα μπουκάλι γάλα Α και ένα τεμάχιο του προϊόντος 2 θα μπορούσε να είναι ένα μπουκάλι γάλα Β με το ίδιο μέγεθος. Οι πελάτες εξυπηρετούνται σύμφωνα με μια προκαθορισμένη σειρά $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow N$. Αυτό σημαίνει ότι ο πελάτης 1 πρέπει πρώτα να εξυπηρετηθεί, μετά ο πελάτης 2, μετά ο πελάτης 3 και ούτω καθεξής. Μετά την εξυπηρέτηση όλων των πελατών, το όχημα επιστρέφει στην αποθήκη. Ας υποθέσουμε ότι:

- (i) Η χωρητικότητα του οχήματος είναι πεπερασμένη και ισούται με Q τεμάχια του προϊόντος 1 ή του προϊόντος 2.
- (ii) Οι απαιτήσεις σε προϊόν του κάθε πελάτη $j \in \{1, \dots, N\}$ είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές $\xi_j \in \{0, \dots, Q\}$ με γνωστές συναρτήσεις μάζας πιθανότητας.
- (iii) Ο πελάτης $j \in \{1, \dots, N\}$ προτιμά το προϊόν 1 με γνωστή πιθανότητα p_j ή προϊόν 2 με πιθανότητα $1 - p_j$.
- (iv) Η αποθήκη περιέχει αρκετά τεμάχια και των δύο προϊόντων για να ικανοποιήσει τις απαιτήσεις όλων των πελατών σύμφωνα με τις προτιμήσεις τους.
- (v) Η πραγματική ζήτηση και η προτίμηση του κάθε πελάτη γίνονται γνωστές μόνο όταν το όχημα φτάσει στην τοποθεσία του πελάτη $j \in \{1, \dots, N\}$.

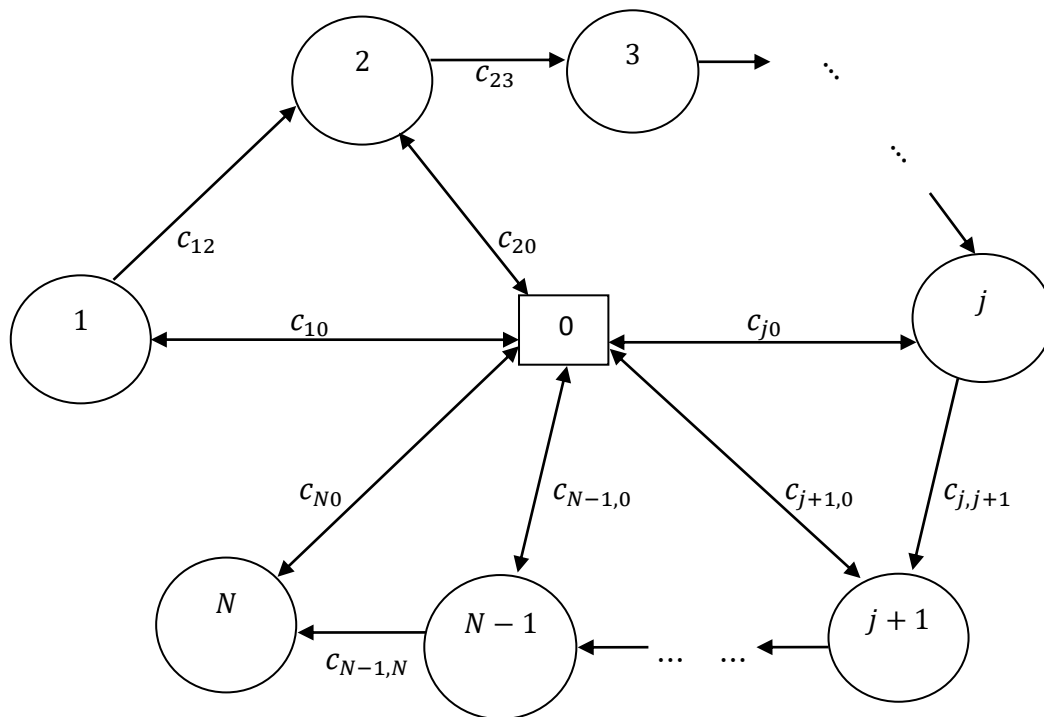
(vi) Εάν κατά την άφιξη το όχημα δεν περιέχει αρκετά τεμάχια του προϊόντος που προτιμά ο πελάτης $j \in \{1, \dots, N\}$, επιτρέπεται η παράδοση τεμαχίων του προϊόντος που δεν προτιμά. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ένα κόστος ποινής ίσο με π_j ανά είδος που δεν προτιμάται.

Έστω $c_{j,j+1}$ το κόστος διαδρομής από τον πελάτη j στον πελάτη $j+1$ και έστω c_{j0} , c_{0j} το κόστος διαδρομής από τον πελάτη j στην αποθήκη και το κόστος διαδρομής από την αποθήκη στον πελάτη j , αντίστοιχα. Αυτά τα κόστη μπορούν να θεωρηθούν ως τα κόστη των απαιτούμενων καυσίμων που χρειάζεται το όχημα για να καλύψει τις αποστάσεις μεταξύ των διαδοχικών πελατών και τις αποστάσεις μεταξύ των πελατών και της αποθήκης. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι πληρούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$c_{j0} = c_{0j}, j = 1, \dots, N \text{ (συμμετρική ιδιότητα)}$$

και

$$c_{0j} + c_{j,j+1} \geq c_{0,j+1}, j = 1, \dots, N - 1 \text{ (τριγωνική ιδιότητα)}$$



Σχήμα 3. Το οδικό δίκτυο.

Ας υποθέσουμε ότι το όχημα φτάνει στην τοποθεσία του πελάτη $j \in \{1, \dots, N\}$. Η πραγματική ζήτηση και προτίμηση του πελάτη γίνονται γνωστές και παραδίδεται η μέγιστη δυνατή ποσότητα του προτιμώμενου προϊόντος. Έστω (z_1, z_2) η κατάσταση της διαδικασίας μετά την πρώτη επίσκεψη στον πελάτη j , όπου

$z_i, i = 1, 2$, είναι ο αριθμός των τεμαχίων του προϊόντος i που παραμένουν στο όχημα μετά την πρώτη επίσκεψη στον πελάτη j και αφού έχει εξυπηρετηθεί σύμφωνα με την προτίμηση του. Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $0 \leq z_1 \leq Q, 0 \leq z_2 \leq Q, 0 \leq z_1 + z_2 \leq Q$.

Σε αυτή την περίπτωση ο πελάτης j έχει εξυπηρετηθεί πλήρως σύμφωνα με την προτίμηση του.

Περίπτωση 2: $-Q \leq z_1 \leq 0, 0 \leq z_2 \leq Q$.

Σε αυτή την περίπτωση ο πελάτης j προτιμά το προϊόν 1 και το όχημα δεν έχει να του δώσει $-z_1$ τεμάχια του προϊόντος 1. Διαχωρίζουμε αυτήν την περίπτωση στην Περίπτωση 2α όταν $z_2 < -z_1$ και στην Περίπτωση 2β όταν $-z_1 \leq z_2$. Στην Περίπτωση 2α κάποιο μέρος της ζήτησης του πελάτη μπορεί να ικανοποιηθεί, παραδίδοντας του έως και z_2 τεμάχια του προϊόντος 2. Στην περίπτωση 2β, ολόκληρη η ζήτηση του πελάτη μπορεί να ικανοποιηθεί παραδίδοντας του $-z_1$ τεμάχια του προϊόντος 2.

Περίπτωση 3: $0 \leq z_1 \leq Q, -Q \leq z_2 \leq 0$.

Σε αυτή την περίπτωση ο πελάτης j προτιμά το προϊόν 2 και το όχημα δεν έχει να του δώσει $-z_2$ τεμάχια του προϊόντος 2. Διαχωρίζουμε αυτήν την περίπτωση στην Περίπτωση 3α όταν $z_1 < -z_2$ και στην Περίπτωση 3β όταν $-z_2 \leq z_1$. Στην Περίπτωση 3α κάποιο μέρος της ζήτησης του πελάτη μπορεί να ικανοποιηθεί, παραδίδοντας του έως και z_1 τεμάχια του προϊόντος 2. Στην Περίπτωση 3β, ολόκληρη η ζήτηση του πελάτη μπορεί να ικανοποιηθεί παραδίδοντας του $-z_2$ τεμάχια του προϊόντος 2.

Υποθέτουμε ότι $j \in \{1, \dots, N - 1\}$.

Στην Περίπτωση 1 οι πιθανές ενέργειες είναι η Ενέργεια 1 και η Ενέργεια $2_\theta, \theta \in \{0, \dots, Q\}$. Η Ενέργεια 1 σημαίνει ότι το όχημα ταξιδεύει κατευθείαν προς τον επόμενο πελάτη $j + 1$ και η Ενέργεια 2_θ σημαίνει ότι το όχημα επιστρέφει στην αποθήκη, ανανεώνει το απόθεμα του με θ τεμάχια του προϊόντος 1 και $Q - \theta$ τεμάχια του προϊόντος 2 και εν συνεχεία εξυπηρετεί τον πελάτη $j + 1$.

Στην Περίπτωση 2α οι πιθανές ενέργειες είναι οι Ενέργεια $3_{(\theta_1, \theta)}, \theta_1 \in \{0, \dots, z_2\}, \theta \in \{0, \dots, Q + z_1 + \theta_1\}$ και Ενέργεια $4_\theta, \theta \in \{0, \dots, Q\}$. Η Ενέργεια $3_{(\theta_1, \theta)}$ σημαίνει ότι το όχημα παραδίδει θ_1 τεμάχια του προϊόντος 2 (που δεν προτιμάται) στον πελάτη j , ταξιδεύει προς την αποθήκη για να ανανεώσει το απόθεμα του με $\theta - z_1 - \theta_1$ τεμάχια του προϊόντος 1 και $Q + z_1 + \theta_1 - \theta$ τεμάχια του προϊόντος 2, επιστρέφει στον πελάτη j για να παραδώσει τα $-z_1 - \theta_1$ οφειλόμενα τεμάχια του προϊόντος 1 και εν συνεχεία ταξιδεύει προς τον πελάτη $j + 1$ με θ τεμάχια του προϊόντος 1 και $Q + z_1 + \theta_1 - \theta$ τεμάχια του προϊόντος 2. Σημειώστε ότι εάν επιλεγεί η Ενέργεια $3_{(0, \theta)}, \theta \in \{0, \dots, Q + z_1\}$ τότε το όχημα δεν παραδίδει στο πελάτη j οποιοδήποτε τεμάχιο του προϊόντος 2, ενώ εάν επιλεγεί η Ενέργεια $3_{(z_2, \theta)}, \theta \in \{0, \dots, Q + z_1 + z_2\}$ τότε το

όχημα παραδίδει στον πελάτη j όλα τα υπόλοιπα τεμάχια του προϊόντος 2. Η ενέργεια 4_θ σημαίνει ότι το όχημα πηγαίνει στην αποθήκη για να ανανεώσει το απόθεμα του με $-z_1$ τεμάχια του προϊόντος 1, επιστρέφει στον πελάτη j για να παραδώσει $-z_1$ οφειλόμενα τεμάχια του προϊόντος 1, κάνει ένα δεύτερο ταξίδι στην αποθήκη για να ξαναγεμίσει με θ τεμάχια του προϊόντος 1 και $Q - \theta$ τεμάχια του προϊόντος 2 και μετά πηγαίνει στον πελάτη $j + 1$. Στην Περίπτωση 2β οι πιθανές ενέργειες είναι η Ενέργεια 5, η Ενέργεια $6_\theta, \theta \in \{0, \dots, Q\}$, η Ενέργεια $7_{(\theta_1, \theta)}, \theta_1 \in \{0, \dots, -z_1 - 1\}, \theta \in \{0, \dots, Q + z_1 + \theta_1\}$ και η Ενέργεια $4_\theta, \theta \in \{0, \dots, Q\}$. Η Ενέργεια 5 σημαίνει ότι το όχημα παραδίδει $-z_1$ τεμάχια του προϊόντος 2 (που δεν προτιμάται) στον πελάτη j και προχωρά στον πελάτη $j + 1$. Η Ενέργεια 6_θ σημαίνει ότι το όχημα παραδίδει $-z_1$ τεμάχια του προϊόντος 2 (που δεν προτιμάται) στον πελάτη j , πηγαίνει στην αποθήκη για να ανανεώσει το απόθεμα του με θ τεμάχια του προϊόντος 1 και $Q - \theta$ τεμάχια του προϊόντος 2 και μετά πηγαίνει στον πελάτη $j + 1$. Η Ενέργεια $7_{(\theta_1, \theta)}$ σημαίνει ότι το όχημα παραδίδει θ_1 τεμάχια του προϊόντος 2 (που δεν προτιμάται) στον πελάτη j , πηγαίνει στην αποθήκη για ανανέωση το απόθεμα του με $\theta - z_1 - \theta_1$ τεμάχια του προϊόντος 1 και $Q + z_1 + \theta_1 - \theta$ τεμάχια του προϊόντος 2, επιστρέφει στον πελάτη j για να παραδώσει $-z_1 - \theta_1$ οφειλόμενα τεμάχια του προϊόντος 1 και στη συνέχεια προχωρά στον πελάτη $j + 1$ με θ τεμάχια του προϊόντος 1 και $Q + z_1 + \theta_1 - \theta$ τεμάχια του προϊόντος 2. Σημειώστε ότι εάν επιλεγεί η Ενέργεια $7_{(0, \theta)}, \theta \in \{0, \dots, Q + z_1\}$, τότε το όχημα δεν παραδίδει στον πελάτη j κανένα τεμάχιο του προϊόντος 2. Οι ενέργειες $3_{(\theta_1, \theta)}$ και $7_{(\theta_1, \theta)}$ προκαλούν ένα κόστος ποινής ίσο με $\pi_j \theta_1$ ενώ οι Ενέργειες 5 και 6_θ προκαλούν ένα κόστος ποινής ίσο με $-\pi_j z_1$. Υποτίθεται ότι εάν επιλεγεί η Ενέργεια $3_{(\theta_1, \theta)}$ ή η Ενέργεια 4_θ ή η Ενέργεια $7_{(\theta_1, \theta)}$, δεν υπάρχει επιπλέον ζήτηση όταν το όχημα επιστρέψει στον πελάτη j , δηλαδή το ξ_j παραμένει αμετάβλητο.

Υποθέτουμε ότι $j = N$.

Στην Περίπτωση 1 η μόνη δυνατή ενέργεια για το όχημα είναι να επιστρέψει στην αποθήκη για να τερματίσει τη διαδρομή του. Στην Περίπτωση 2α, η μόνη δυνατή ενέργεια είναι η Ενέργεια 8 που σημαίνει ότι το όχημα πηγαίνει στην αποθήκη για να ανανεώσει το απόθεμα του με $-z_1$ τεμάχια του προϊόντος 1, επιστρέφει στον πελάτη N για να παραδώσει $-z_1$ οφειλόμενα τεμάχια του προϊόντος 1 και μετά ταξιδεύει ξανά προς την αποθήκη για να τερματίσει τη διαδρομή. Στην Περίπτωση 2β, οι πιθανές ενέργειες είναι η Ενέργεια 8 και η Ενέργεια 9. Η Ενέργεια 9 σημαίνει ότι το όχημα παραδίδει $-z_1$ τεμάχια του προϊόντος 2 (που δεν προτιμάται) στον πελάτη N και μετά πηγαίνει στην αποθήκη για να τερματίσει τη διαδρομή του. Εάν επιλεγεί η Ενέργεια 9, προκύπτει κόστος ποινής ίσο με $-\pi_N z_1$. Υποτίθεται ότι εάν επιλεγεί η Ενέργεια 8, δεν υπάρχει επιπλέον ζήτηση όταν το όχημα επιστρέψει στον πελάτη N , δηλαδή το ξ_N παραμένει αναλλοίωτο. Σημειώστε ότι στην Περίπτωση 3α και στην Περίπτωση 3β για $j \in \{1, \dots, N\}$ οι δυνατές ενέργειες είναι οι ίδιες όπως στην Περίπτωση 2α και στην Περίπτωση 2β, λαμβάνοντας υπόψη ότι υπάρχει έλλειψη για τεμάχια του προϊόντος 2 αντί του προϊόντος 1. Στόχος μας είναι να καθορίσουμε τη βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης του οχήματος που εξυπηρετεί όλους τους πελάτες. Αυτή η πολιτική δρομολόγησης

ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο συνολικό κόστος από την αρχή της διαδρομής μέχρι το τέλος της. Το συνολικό κόστος αποτελείται από τα έξοδα ταξιδιού μεταξύ των διαδοχικών πελατών, μεταξύ των πελατών και της αποθήκης και τα κόστη ποινής που επιβάλλονται όταν παραδίδονται στους πελάτες είδη του προϊόντος που δεν προτιμώνται. Η βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης μπορεί να βρεθεί με την εφαρμογή ενός κατάλληλου αλγόριθμου δυναμικού προγραμματισμού.

Εξισώσεις δυναμικού προγραμματισμού

Έστω $f_j(z_1, z_2)$ το ελάχιστο αναμενόμενο κόστος από την πρώτη επίσκεψη του οχήματος στον πελάτη $j \in \{1, \dots, N\}$ μέχρι το τέλος της διαδρομής όπου (z_1, z_2) είναι η κατάσταση της διαδικασίας που έχει οριστεί παραπάνω. Για $j \in \{1, \dots, N-1\}$ δίνουμε παρακάτω τις εξισώσεις δυναμικού προγραμματισμού (3.1) – (3.3) για την Περίπτωση 1, την Περίπτωση 2α και την Περίπτωση 2β. Για την Περίπτωση 3α και την Περίπτωση 3β οι εξισώσεις δυναμικού προγραμματισμού είναι ίδιες με τις (3.2) και (3.3) αν εναλλάξουμε τα z_1 και z_2 .

Αν $0 \leq z_1 \leq Q, 0 \leq z_2 \leq Q, 0 \leq z_1 + z_2 \leq Q$, τότε:

$$f_j(z_1, z_2) = \min\{A_j(z_1, z_2), B_j\}, \quad (3.1)$$

όπου,

$$A_j(z_1, z_2) = c_{j,j+1} + p_{j+1}E f_{j+1}(z_1 - \xi_{j+1}, z_2) + (1 - p_{j+1})E f_{j+1}(z_1, z_2 - \xi_{j+1}),$$

$$B_j = c_{j0} + c_{0,j+1} + \min_{0 \leq \theta \leq Q} [p_{j+1}E f_{j+1}(\theta - \xi_{j+1}, Q - \theta) + (1 - p_{j+1})E f_{j+1}(\theta, Q - \theta - \xi_{j+1})].$$

Αν $-Q \leq z_1 \leq 0, 0 \leq z_2 \leq Q, z_2 < -z_1$, τότε:

$$f_j(z_1, z_2) = \min\{C_j(z_1, z_2), D_j\}, \quad (3.2)$$

όπου,

$$\begin{aligned} C_j(z_1, z_2) = & 2c_{j0} + c_{j,j+1} \\ & + \min_{(\theta_1, \theta): 0 \leq \theta_1 \leq z_2, 0 \leq \theta \leq Q + z_1 + \theta_1} [\pi_j \theta_1 + p_{j+1}E f_{j+1}(\theta - \xi_{j+1}, Q + z_1 + \theta_1 - \theta) \\ & + (1 - p_{j+1})E f_{j+1}(\theta, Q + z_1 + \theta_1 - \theta - \xi_{j+1})], \end{aligned}$$

$$D_j = 3c_{j0} + c_{j,j+1} + \min_{0 \leq \theta \leq Q} [p_{j+1}E f_{j+1}(\theta - \xi_{j+1}, Q - \theta) + (1 - p_{j+1})E f_{j+1}(\theta, Q - \theta - \xi_{j+1})].$$

Αν $-Q \leq z_1 \leq 0, 0 \leq z_2 \leq Q, -z_1 \leq z_2$, τότε:

$$f_j(z_1, z_2) = \min\{E_j(z_1, z_2), F_j(z_1), G_j(z_1), D_j\} \quad (3.3)$$

όπου,

$$E_j(z_1, z_2) = -\pi_j z_1 + c_{j,j+1} + p_{j+1} E f_{j+1}(-\xi_{j+1}, z_1 + z_2) + (1 - p_{j+1}) E f_{j+1}(0, z_1 + z_2 - \xi_{j+1}),$$

$$F_j(z_1) = -\pi_j z_1 + c_{j0} + c_{j,j+1} + \min_{0 \leq \theta \leq Q} [p_{j+1} E f_{j+1}(\theta - \xi_{j+1}, Q - \theta) + (1 - p_{j+1}) E f_{j+1}(\theta, Q - \theta - \xi_{j+1})],$$

$$\begin{aligned} G_j(z_1) &= 2c_{j0} + c_{j,j+1} \\ &+ \min_{(\theta_1, \theta): 0 \leq \theta_1 < -z_1, 0 \leq \theta \leq Q + z_1 + \theta_1} [\pi_j \theta_1 + p_{j+1} E f_{j+1}(\theta - \xi_{j+1}, Q + z_1 + \theta_1 - \theta) \\ &+ (1 - p_{j+1}) E f_{j+1}(\theta, Q + z_1 + \theta_1 - \theta - \xi_{j+1})]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Οι οριακές συνθήκες δίνονται παρακάτω για την Περίπτωση 1, την Περίπτωση 2α και την Περίπτωση 2β. Για την Περίπτωση 3α και την Περίπτωση 3β οι οριακές συνθήκες είναι ίδιες με αυτές για την Περίπτωση 2α και την Περίπτωση 2β αν εναλλάξουμε τα z_1 και z_2 .

Αν $0 \leq z_1 \leq Q, 0 \leq z_2 \leq Q, 0 \leq z_1 + z_2 \leq Q$, τότε:

$$f_N(z_1, z_2) = c_{N0}. \quad (3.5)$$

Αν $-Q \leq z_1 \leq 0, 0 \leq z_2 \leq Q, z_2 < -z_1$, τότε:

$$f_N(z_1, z_2) = 3c_{N0}. \quad (3.6)$$

Αν $-Q \leq z_1 \leq 0, 0 \leq z_2 \leq Q, -z_1 \leq z_2$, τότε:

$$f_N(z_1, z_2) = \{3c_{N0}, c_{N0} - \pi_N z_1\}. \quad (3.7)$$

Το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος κατά τη διάρκεια ενός κύκλου εξυπηρέτησης είναι ίσο με

$$f_0 = c_{01} + \min_{0 \leq z \leq Q} [p_1 E f_1(z - \xi_1, Q - z) + (1 - p_1) E f_1(z, Q - \theta - \xi_1)].$$

Στις παραπάνω εξισώσεις λαμβάνονται οι αναμενόμενες τιμές σε σχέση με τις τυχαίες μεταβλητές ξ_j , $j = 1, \dots, N$. Οι όροι $A_j(z_1, z_2)$ και B_j στη δεξιά πλευρά της (3.1) αντιστοιχούν στην Ενέργεια 1 και στην Ενέργεια 2 $_{\theta}$, $\theta \in \{0, \dots, Q\}$, αντίστοιχα. Οι όροι $C_j(z_1, z_2)$ και D_j στη δεξιά πλευρά της (3.2) αντιστοιχούν στην Ενέργεια 3 $_{(\theta_1, \theta)}$, $\theta_1 \in \{0, \dots, z_2\}$, $\theta \in \{0, \dots, Q + z_1 + \theta_1\}$ και στην Ενέργεια 4 $_{\theta}$, $\theta \in \{0, \dots, Q\}$, αντίστοιχα. Οι όροι $E_j(z_1, z_2), F_j(z_1), G_j(z_1), D_j$ στη δεξιά πλευρά της (3.3) αντιστοιχούν στην Ενέργεια 5,

στην Ενέργεια $6_\theta, \theta \in \{0, \dots, Q\}$, στην Ενέργεια $7_{(\theta_1, \theta)}, \theta_1 \in \{0, \dots, -z_1 - 1\}, \theta \in \{0, \dots, Q + z_1 + \theta_1\}$, στην Ενέργεια $4_\theta, \theta \in \{0, \dots, Q\}$, αντίστοιχα. Οι όροι στα άγκιστρα της (3.7) αντιστοιχούν στη Ενέργεια 8 και στην Ενέργεια 9, αντίστοιχα. Το παρακάτω Λήμμα 2 θα χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη του Θεωρήματος 3 που περιγράφει τη δομή της βέλτιστης πολιτικής δρομολόγησης.

Η δομή της βέλτιστης πολιτικής

Λήμμα 2. Οι συναρτήσεις $f_j(z_1, z_2), j = 1, \dots, N$, είναι φθίνουσες ως προς z_1 και z_2 .

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο j . Από τις (3.5), (3.6), (3.7) έχουμε ότι η $f_N(z_1, z_2)$ είναι φθίνουσα ως προς z_1 και z_2 . Υποθέτοντας ότι η $f_{j+1}(z_1, z_2)$ είναι φθίνουσα ως προς z_1 και z_2 , θα δείξουμε ότι η $f_j(z_1, z_2)$ είναι φθίνουσα ως προς z_1 και z_2 . Θα περιοριστούμε στην Περίπτωση 1 και στην Περίπτωση 2, αφού η Περίπτωση 3 είναι παρόμοια με την Περίπτωση 2. Θεωρούμε ότι το $z_1 \in \{-Q, \dots, Q\}$ είναι σταθερό. Λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση της επαγωγής, προκύπτει από τις (3.1), (3.2), (3.3) ότι, για να αποδειχθεί ότι η $f_j(z_1, z_2)$ είναι φθίνουσα ως προς z_2 , αρκεί να δείξουμε ότι $f_j(-z_2, z_2) \leq f_j(-z_2, z_2 - 1)$, $z_2 \in \{1, \dots, Q\}$. Στην $f_j(-z_2, z_2 - 1)$ έχουμε $z_1 = -z_2, z_2 \in \{1, \dots, Q\}$. Άρα ισχύει $1 \leq z_2 \leq Q \Rightarrow -Q \leq -z_2 < 0$ και $z_2 - 1 < z_2 \Rightarrow z_2 - 1 < -(-z_2)$, οπότε βρισκόμαστε στην Περίπτωση 2α. Συνεπώς $f_j(-z_2, z_2 - 1) = \min\{C_j(-z_2, z_2 - 1), D_j\}$. Στην $f_j(-z_2, z_2)$ έχουμε $z_1 = -z_2, z_2 \in \{1, \dots, Q\}$. Άρα ισχύει $-Q \leq z_1 < 0$ και $z_1 = -z_2 \Rightarrow -z_1 = z_2 \Rightarrow -z_1 \leq z_2$, οπότε βρισκόμαστε στην Περίπτωση 2β. Συνεπώς $f_j(-z_2, z_2) = \min\{E_j(-z_2, z_2), F_j(-z_2), G_j(-z_2), D_j\}$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση της επαγωγής και την τριγωνική ανισότητα καταλήγουμε στο ότι $f_j(-z_2, z_2) = G_j(-z_2)$ και $f_j(-z_2, z_2 - 1) = C_j(-z_2, z_2 - 1)$. Δηλαδή, αρκεί να δείξουμε ότι $G_j(-z_2) \leq C_j(-z_2, z_2 - 1), z_2 \in \{1, \dots, Q - 1\}$, που ισχύει ως ισότητα. Θεωρούμε τώρα ότι το $z_2 \in \{0, \dots, Q\}$ είναι σταθερό. Λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση της επαγωγής, προκύπτει από τις (3.1), (3.2), (3.3) ότι, για να αποδειχθεί ότι η $f_j(z_1, z_2)$ είναι φθίνουσα ως προς z_1 , αρκεί να δείξουμε ότι:

$$G_j(z_1 + 1) \leq G_j(z_1), \quad -Q \leq z_1 < -1, \quad (3.8)$$

$$f_j(0, z_2) \leq f_j(-1, z_2), \quad 1 \leq z_2 \leq Q, \quad (3.9)$$

$$f_j(0, 0) \leq f_j(-1, 0), \quad (3.10)$$

$$f_j(z_1, -z_1) \leq f_j(z_1 - 1, -z_1), \quad -Q + 1 \leq z_1 \leq -1. \quad (3.11)$$

Για να αποδειχθεί η (3.8), λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση της επαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι $H(-z_1 - 1, \theta) \geq H(-z_1 - 2, \theta), \theta \in \{0, \dots, -z_1 - 1\}$, όπου $H(\theta_1, \theta), 0 \leq \theta_1 < -z_1, 0 \leq \theta \leq Q + z_1 + \theta_1$,

είναι η ποσότητα στις αγκύλες στη δεξιά πλευρά του (3.4). Μπορεί εύκολα να ελεγχθεί ότι ισχύει η τελευταία ανισότητα.

Στην $f_j(0, z_2)$ έχουμε $z_1 = 0$ και $1 \leq z_2 \leq Q$ άρα βρισκόμαστε στην Περίπτωση 1. Συνεπώς $f_j(0, z_2) = \min\{A_j(0, z_2), B_j\}$. Στην $f_j(-1, z_2)$ έχουμε $z_1 = -1 < 0$, $1 \leq z_2 \leq Q$ και $-z_1 \leq z_2$ άρα βρισκόμαστε στην Περίπτωση 2β. Συνεπώς $f_j(-1, z_2) = \min\{E_j(-1, z_2), F_j(-1), G_j(-1), D_j\}$. Οπότε η (3.9) είναι ισοδύναμη με $\min\{A_j(0, z_2), B_j\} \leq \min\{E_j(-1, z_2), F_j(-1), G_j(-1), D_j\}$, $1 \leq z_2 \leq Q$. Η παραπάνω ανισότητα ισχύει εφόσον $A_j(0, z_2) \leq E_j(-1, z_2)$, $B_j \leq F_j(-1)$, $B_j \leq G_j(-1)$, $B_j \leq D_j$.

Στην $f_j(0, 0)$ έχουμε $z_1 = z_2 = 0$ άρα βρισκόμαστε στην Περίπτωση 1. Συνεπώς $f_j(0, 0) = \min\{A_j(0, 0), B_j\}$. Στην $f_j(-1, 0)$ έχουμε $z_1 = -1 < 0$, $z_2 = 0$ και $z_2 < -z_1$ άρα βρισκόμαστε στην Περίπτωση 2α. Συνεπώς $f_j(-1, 0) = \min\{C_j(-1, 0), D_j\}$. Οπότε η (3.10) είναι ισοδύναμη με $\min\{A_j(0, 0), B_j\} \leq \min\{C_j(-1, 0), D_j\}$. Η παραπάνω ανισότητα ισχύει εφόσον $B_j \leq C_j(-1, 0)$, $B_j \leq D_j$.

Στην $f_j(z_1, -z_1)$ έχουμε $-Q + 1 \leq z_1 \leq -1$, $z_2 = -z_1 \Rightarrow 1 \leq z_2 \leq Q - 1$ και $-z_1 = z_2 \Rightarrow -z_1 \leq z_2$ άρα βρισκόμαστε στην Περίπτωση 2β. Συνεπώς $f_j(z_1, -z_1) = \min\{E_j(z_1, -z_1), F_j(z_1), G_j(z_1), D_j\}$. Στην $f_j(z_1 - 1, -z_1)$ έχουμε $-Q \leq z_1 - 1 \leq -2$, $z_2 = -(z_1 - 1) \Rightarrow 2 \leq z_2 \leq Q$ και $-z_1 < -z_1 + 1 \Rightarrow -z_1 < -(z_1 - 1)$ άρα βρισκόμαστε στην Περίπτωση 2α. Συνεπώς $f_j(z_1 - 1, -z_1) = \min\{C_j(z_1 - 1, -z_1), D_j\}$. Οπότε η (3.11) είναι ισοδύναμη με $\min\{E_j(z_1, -z_1), F_j(z_1), G_j(z_1), D_j\} \leq \min\{C_j(z_1 - 1, -z_1), D_j\}$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση της επαγωγής, την τριγωνική ανισότητα καταλήγουμε στο ότι ισχύει $G_j(z_1) \leq C_j(z_1 - 1, -z_1)$, οπότε ισχύει και η προηγούμενη ανισότητα. ■

Θεώρημα 3. Για κάθε πελάτη $j \in \{1, \dots, N - 1\}$ η δομή της βέλτιστης πολιτικής περιγράφεται στις ακόλουθες πέντε περιπτώσεις:

- (i) Για $z_1 \in \{0, \dots, Q\}$ υπάρχει ένας κρίσιμος ακέραιος $s_1(z_1) \geq 0$ τέτοιος ώστε αν $z_2 \in \{s_1(z_1), \dots, Q - z_1\}$ η βέλτιστη ενέργεια είναι η Ενέργεια 1, ενώ αν $z_2 \in \{0, \dots, s_1(z_1) - 1\}$ η βέλτιστη ενέργεια είναι η Ενέργεια 2_θ για κάποιο $\theta \in \{0, \dots, Q\}$. Επιπλέον, η $s_1(z_1)$ είναι φθίνουσα ως προς στο z_1 .
- (ii) Για $z_2 \in \{0, \dots, Q - 1\}$ υπάρχει ένας κρίσιμος ακέραιος $s_2(z_2) \in \{-Q, \dots, -z_2 - 1\}$ τέτοιος ώστε αν $z_1 \in \{s_2(z_2), \dots, -z_2 - 1\}$ η βέλτιστη ενέργεια είναι η Ενέργεια $3_{(\theta_1, \theta)}$ για κάποιο $\theta_1 \in \{0, \dots, z_2\}$ και κάποιο $\theta \in \{0, \dots, Q + z_1 + \theta_1\}$, ενώ αν $z_1 \in \{-Q, \dots, s_2(z_2) - 1\}$ η βέλτιστη ενέργεια είναι η Ενέργεια 4_θ για κάποιο $\theta \in \{0, \dots, Q\}$. Επιπλέον, η $s_2(z_2)$ είναι φθίνουσα ως προς στο z_2 .

- (iii) Για $z_2 \in \{1, \dots, Q\}$ υπάρχει ένας κρίσιμος ακέραιος $s_3(z_2) \in \{-z_2, \dots, -1\}$ τέτοιος ώστε αν $z_1 \in \{s_3(z_2), \dots, -1\}$ η βέλτιστη ενέργεια είναι η Ενέργεια 5 ή Ενέργεια 6_θ για κάποιο $\theta \in \{0, \dots, Q\}$ ή Ενέργεια $7_{(\theta_1, \theta)}$ για κάποιο $\theta_1 \in \{0, \dots, -z_1 - 1\}$ και κάποιο $\theta \in \{0, \dots, Q + z_1 + \theta_1\}$, ενώ αν $z_1 \in \{-z_2, \dots, s_3(z_2) - 1\}$ η βέλτιστη ενέργεια είναι η Ενέργεια 4_θ για κάποιο $\theta \in \{0, \dots, Q\}$. Επιπλέον, η $s_3(z_2)$ είναι φθίνουσα ως προς στο z_2 .
- (iv) Για $z_1 \in \{0, \dots, Q - 1\}$ υπάρχει ένας κρίσιμος ακέραιος $s_4(z_1) \in \{-Q, \dots, -z_1 - 1\}$ τέτοιος ώστε αν $z_2 \in \{s_4(z_1), \dots, -z_1 - 1\}$ η βέλτιστη ενέργεια είναι η Ενέργεια $3_{(\theta_1, \theta)}$ για κάποιο $\theta_1 \in \{0, \dots, z_1\}$ και κάποιο $\theta \in \{0, \dots, Q + z_2 + \theta_1\}$, ενώ αν $z_2 \in \{-Q, \dots, s_4(z_1) - 1\}$ η βέλτιστη ενέργεια είναι η Ενέργεια 4_θ για κάποιο $\theta \in \{0, \dots, Q\}$. Επιπλέον, η $s_4(z_1)$ είναι φθίνουσα ως προς στο z_1 .
- (v) Για $z_1 \in \{1, \dots, Q\}$ υπάρχει ένας κρίσιμος ακέραιος $s_5(z_1) \in \{-z_1, \dots, -1\}$ τέτοιος ώστε αν $z_2 \in \{s_5(z_1), \dots, -1\}$ η βέλτιστη ενέργεια είναι η Ενέργεια 5 ή Ενέργεια 6_θ για κάποιο $\theta \in \{0, \dots, Q\}$ ή Ενέργεια $7_{(\theta_1, \theta)}$ για κάποιο $\theta_1 \in \{0, \dots, -z_2 - 1\}$ και κάποιο $\theta \in \{0, \dots, Q + z_2 + \theta_1\}$, ενώ αν $z_2 \in \{-z_1, \dots, s_5(z_1) - 1\}$ η βέλτιστη ενέργεια είναι η Ενέργεια 4_θ για κάποιο $\theta \in \{0, \dots, Q\}$. Επιπλέον, η $s_5(z_1)$ είναι φθίνουσα ως προς στο z_1 .

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2 προκύπτει ότι η $A_j(z_1, z_2)$ είναι φθίνουσα ως προς z_1 και z_2 . Η περίπτωση (i) είναι άμεση συνέπεια αυτού του αποτελέσματος. Από το Λήμμα 2 προκύπτει ότι η $C_j(z_1, z_2)$ είναι φθίνουσα ως προς z_1 . Επίσης, μπορεί να δηχθεί ότι η $C_j(z_1, z_2)$ είναι φθίνουσα ως προς z_2 . Η περίπτωση (ii) είναι άμεση συνέπεια αυτών των αποτελεσμάτων. Από το Λήμμα 2 προκύπτει ότι η $E_j(z_1, z_2)$ είναι φθίνουσα ως προς z_1 και z_2 . Στην απόδειξη του Λήμματος 2 έχει δηχθεί ότι η $G_j(z_1)$ είναι φθίνουσα ως προς z_1 . Επίσης, μπορεί να δηχθεί ότι η $F_j(z_1)$ είναι φθίνουσα ως προς z_1 . Η περίπτωση (iii) είναι άμεση συνέπεια αυτών των αποτελεσμάτων. Οι περιπτώσεις (iv) και (v) μπορούν να αποδειχθούν με παρόμοιο τρόπο όπως στις περιπτώσεις (ii) και (iii), αντίστοιχα. ■

3.3 Αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού

Η βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης, δηλαδή οι κρίσιμοι ακέραιοι αριθμοί $s_1(z_1), z_1 \in \{0, \dots, Q\}$, $s_2(z_2), z_2 \in \{0, \dots, Q - 1\}$, $s_3(z_2), z_2 \in \{1, \dots, Q\}$, $s_4(z_1), z_1 \in \{0, \dots, Q - 1\}$, $s_5(z_1), z_1 \in \{1, \dots, Q\}$, για κάθε $j \in \{1, \dots, N - 1\}$, μπορεί να βρεθεί από έναν αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού, ο οποίος λαμβάνει υπόψη τη δομή της βέλτιστης πολιτικής δρομολόγησης όπως δίνεται στο Θεώρημα 3. Το μέρος αυτού του αλγορίθμου που υπολογίζει τους κρίσιμους ακέραιους αριθμούς $s_1(z_1), z_1 \in \{0, \dots, Q\}$, $s_2(z_2),$

$z_2 \in \{0, \dots, Q-1\}$, $s_3(z_2), z_2 \in \{1, \dots, Q\}$ παρουσιάζεται παρακάτω. Ο πλήρης αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού περιλαμβάνει τον υπολογισμό των κρίσιμων ακεραίων $s_4(z_1), z_1 \in \{0, \dots, Q-1\}$ και $s_5(z_1), z_1 \in \{1, \dots, Q\}$ που είναι παρόμοιος με τον υπολογισμό των κρίσιμων ακεραίων $s_2(z_2), z_2 \in \{0, \dots, Q-1\}$ και $s_3(z_2), z_2 \in \{1, \dots, Q\}$, αντίστοιχα.

Αλγόριθμος για τον προσδιορισμό των κρίσιμων ακεραίων $s_1(z_1), z_1 \in \{0, \dots, Q\}$, $s_2(z_2), z_2 \in \{0, \dots, Q-1\}$, $s_3(z_2), z_2 \in \{1, \dots, Q\}$.

Βήμα 0:

Θέτω $f_N(z_1, z_2) = c_{N0}$, αν $z_1, z_2 \in \{0, \dots, Q\}, z_1 + z_2 \leq Q$,

$f_N(z_1, z_2) = 3c_{N0}$, αν $z_1 \in \{-Q, \dots, -1\}, z_2 \in \{0, \dots, Q\}, z_2 < -z_1$,

$f_N(z_1, z_2) = \{3c_{N0}, c_{N0} - \pi_N z_1\}$, αν $z_1 \in \{-Q, \dots, -1\}, z_2 \in \{0, \dots, Q\}, -z_1 \leq z_2$.

Θέτω $j = N - 1$.

Βήμα 1 (Προσδιορισμός των κρίσιμων ακεραίων $s_1(z_1), z_1 \in \{0, \dots, Q\}$):

Υπολογίζω B_j .

Για $z_1 = 0, \dots, Q$ κάντε το εξής:

Για $z_2 = Q - z_1, Q - z_1 - 1, \dots$ υπολογίζω $A_j(z_1, z_2)$ μέχρι $A_j(z_1, z_2) > B_j$

ή $z_2 = -1$.

Θέτω $s_1(z_1) = z_2 + 1$.

Θέτω $f_j(z_1, z_2) = A_j(z_1, z_2), z_2 \in \{s_1(z_1), \dots, Q - z_1\}$ και $f_j(z_1, z_2) = B_j, z_1 \in \{0, \dots, s_1(z_1) - 1\}$.

Βήμα 2 (Προσδιορισμός των κρίσιμων ακεραίων $s_2(z_2), z_2 \in \{0, \dots, Q-1\}$):

$D_j = 2c_{j0} + B_j$.

Για $z_2 = 0, \dots, Q-1$ κάντε το εξής:

Για $z_1 = -z_2 - 1, -z_2 - 2, \dots$ υπολογίζω $C_j(z_1, z_2)$ μέχρι $C_j(z_1, z_2) > D_j$

ή $z_1 = -Q - 1$.

Θέτω $s_2(z_2) = z_1 + 1$.

Θέτω $f_j(z_1, z_2) = C_j(z_1, z_2)$, $z_1 \in \{s_2(z_2), \dots, -z_2 - 1\}$ και $f_j(z_1, z_2) = D_j$, $z_1 \in \{-Q, \dots, s_2(z_2) - 1\}$.

Βήμα 3 (Προσδιορισμός των κρίσιμων ακεραίων $s_3(z_2)$, $z_2 \in \{1, \dots, Q\}$):

Για $z_2 = 1, \dots, Q$ κάντε το εξής:

Για $z_1 = -1, -2, \dots$ υπολογίζω $E_j(z_1, z_2), F_j(z_1), G_j(z_1)$ μέχρι $\min\{E_j(z_1, z_2), F_j(z_1), G_j(z_1)\} > D_j$

ή $z_1 = -z_2 - 1$.

Θέτω $s_3(z_2) = z_1 + 1$.

Θέτω $f_j(z_1, z_2) = \min\{E_j(z_1, z_2), F_j(z_1), G_j(z_1)\}$, $z_1 \in \{s_3(z_2), \dots, -1\}$

και $f_j(z_1, z_2) = D_j$, $z_1 \in \{-z_2, \dots, s_3(z_2) - 1\}$.

Βήμα 4:

Θέτω $j = j - 1$. Αν $j \geq 1$ μεταβείτε στο Βήμα 1, αλλιώς σταματήστε.

Ο παραπάνω αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού βασίζεται στη δομή της βέλτιστης πολιτικής δρομολόγησης που περιγράφεται στο Θεώρημα 3. Η πολυπλοκότητα αυτού του αλγορίθμου μπορεί να υπολογιστεί λαμβάνοντας υπόψη τον Ορισμό 7.1 στο Sipser (2013) και διαπιστώνεται ότι είναι $O(NQ^3)$. Είναι πιο αποτελεσματικός από τον αρχικό αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού, καθώς απαιτεί λιγότερους υπολογισμούς. Για παράδειγμα, για $j = 1, \dots, N - 1$, οι ποσότητες $A_j(z_1, z_2)$, $z_2 \in \{0, \dots, s_1(z_1) - 2\}$, για $z_1 \in \{0, \dots, Q\}$ δεν υπολογίζονται, ενώ αυτές οι ποσότητες υπολογίζονται στον αρχικό αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού. Στην Ενότητα 4 θα συγκρίνουμε τους χρόνους υπολογισμών αυτών των αλγορίθμων σε ένα αριθμητικό παράδειγμα.

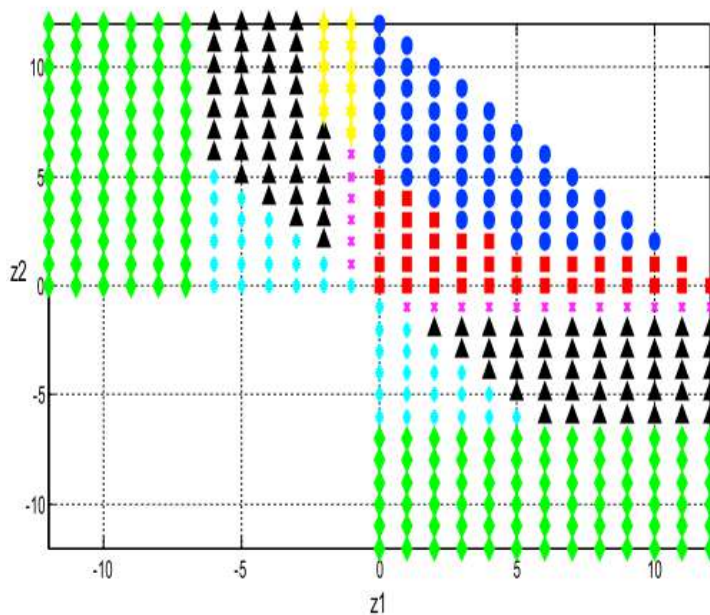
3.4 Αριθμητικό Παράδειγμα

Στο ακόλουθο αριθμητικό παράδειγμα, εφαρμόσαμε τον αρχικό αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού και τον αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού εκτελώντας τα αντίστοιχα προγράμματα Matlab σε προσωπικό υπολογιστή εξοπλισμένο με επεξεργαστή Intel Core i5-4460, επεξεργαστή 3.2 GHz και 16 GB RAM. Στο Παράδειγμα 3.1 υποθέτουμε ότι οι απαιτήσεις των πελατών για τα προϊόντα είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές. Αυτό το παράδειγμα επιβεβαιώνει τα δομικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο Θεώρημα 3.

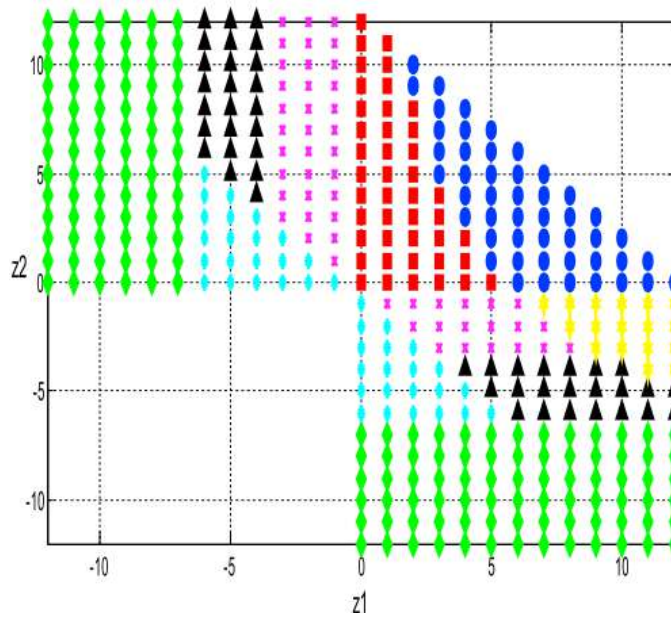
Παράδειγμα 3.1 Υποθέτουμε ότι η χωρητικότητα του οχήματος είναι $Q = 12$ και ο αριθμός των πελατών είναι $N = 8$. Τα κόστη της διαδρομής ανάμεσα στους πελάτες j και $j + 1$, $j \in \{1, \dots, 7\}$ είναι: $c_{12} = 10, c_{23} = 12, c_{34} = 10, c_{45} = 14, c_{56} = 12, c_{67} = 15, c_{78} = 12$. Τα κόστη της διαδρομής ανάμεσα στους πελάτες j , $j \in \{1, \dots, 8\}$ και την αποθήκη είναι: $c_{10} = 12, c_{20} = 11, c_{30} = 9, c_{40} = 10, c_{50} = 13, c_{60} = 11, c_{70} = 14, c_{80} = 9$. Σημειώστε ότι αυτά τα κόστη ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα. Υποθέτουμε ότι τα κόστη ποινής π_1, \dots, π_8 που προκύπτουν όταν ένα τεμάχιο του μη-προτιμώμενου προϊόντος παραδίδεται στους πελάτες $1, \dots, 8$ αντί του προτιμώμενου, είναι στοιχεία του διανύσματος γραμμής $\pi = (4, 3, 6, 5, 3, 5, 4, 6)$. Επίσης, θεωρούμε ότι η ζήτηση ξ_j κάθε πελάτη $j \in \{1, \dots, 8\}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την διωνυμική κατανομή $Bin(Q, 0.4)$, δηλαδή:

$$P(\xi_j = x) = \binom{Q}{x} 0.4^x 0.6^{Q-x}, x = 0, \dots, Q.$$

Σημειώστε ότι η διωνυμική κατανομή έχει χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση των απαιτήσεων σε προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων, για παράδειγμα στους Golden and Yee (1979) και στους Haugland et al. (2007). Υποθέτουμε ότι οι πιθανότητες p_1, \dots, p_8 ότι οι πελάτες $1, \dots, 8$ προτιμούν το προϊόν 1 είναι στοιχεία του διανύσματος γραμμής $p = (0.6, 0.7, 0.5, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 0.4)$. Στα παρακάτω σχήματα, Σχήμα 4 και Σχήμα 5 παρουσιάζουμε τις βέλτιστες αποφάσεις για τους πελάτες 3 και 6, αντίστοιχα.



Σχήμα 4. Οι βέλτιστες αποφάσεις για τον πελάτη 3.



Σχήμα 5. Οι βέλτιστες αποφάσεις για τον πελάτη 6.

Αν $0 \leq z_1 \leq Q, 0 \leq z_2 \leq Q, 0 \leq z_1 + z_2 \leq Q$, η ενέργεια της απευθείας μετάβασης στον επόμενο πελάτη (Ενέργεια 1), που αντιστοιχεί στην ποσότητα $A_j(z_1, z_2)$ συμβολίζεται με μπλε και η ενέργεια της μετάβασης στην αποθήκη για ανεφοδιασμό με τεμάχια προϊόντων θ και $Q - \theta$ και στη συνέχεια να μεταβεί στον επόμενο πελάτη (Ενέργεια 2_θ), που αντιστοιχεί στην ποσότητα B_j συμβολίζεται με κόκκινο. Αν $-Q \leq z_1 < 0, 0 \leq z_2 \leq Q$, ή αν $0 \leq z_1 \leq Q, -Q \leq z_2 < 0$ και αν $z_2 < -z_1$ ή αν $z_1 < -z_2$ χρησιμοποιούμε το κυανό χρώμα για την Ενέργεια $3_{(\theta_1, \theta)}$ (ή Ενέργεια $3_{(\theta_2, \theta)}$, όπου θ_2 είναι ο αριθμός των τεμαχίων του μη-προτιμώμενου προϊόντος 1 που παραδίδονται) που αντιστοιχεί στην ποσότητα $C_j(z_1, z_2)$ και πράσινο για την Ενέργεια 4_θ που αντιστοιχεί στην ποσότητα D_j . Αν $z_2 \geq -z_1$ ή $z_1 \geq -z_2$, χρησιμοποιούμε το κίτρινο χρώμα για την Ενέργεια 5, που αντιστοιχεί στην ποσότητα $E_j(z_1, z_2)$, το φούξια για την Ενέργεια 6_θ , που αντιστοιχεί στην ποσότητα $F_j(z_1)$ (ή $F_j(z_2)$) και το μαύρο για την Ενέργεια $7_{(\theta_1, \theta)}$ (ή την Ενέργεια $7_{(\theta_2, \theta)}$ όπου θ_2 είναι ο αριθμός των τεμαχίων του μη-προτιμώμενου προϊόντος 1 που παραδίδονται) που αντιστοιχούν στην ποσότητα $G_j(z_1)$ (ή $G_j(z_2)$).

Η τιμή του ελάχιστου συνολικού αναμενόμενου κόστους f_0 βρέθηκε να είναι περίπου ίση με 165.61. Ο χρόνος υπολογισμού του αλγόριθμου δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού είναι 0.625 δευτερόλεπτα. Είναι σημαντικά μικρότερος από τον χρόνο υπολογισμού του αρχικού αλγόριθμου δυναμικού προγραμματισμού που είναι 3.062 δευτερόλεπτα.

Και οι δύο αλγόριθμοι μας επιτρέπουν να προσδιορίσουμε τις βέλτιστες τιμές του θ_1 (ή θ_2) και θ όταν οι βέλτιστες ενέργειες είναι οι Ενέργειες $3_{(\theta_1, \theta)}$ ή $(3_{(\theta_2, \theta)})$ και $7_{(\theta_1, \theta)}$ ή $(7_{(\theta_2, \theta)})$ και τη βέλτιστη τιμή του θ

όταν οι βέλτιστες ενέργειες είναι οι Ενέργειες $2_{\theta}, 4_{\theta}$ και 6_{θ} . Για παράδειγμα, για τον πελάτη 3, εάν η κατάσταση είναι $(z_1, z_2) = (2, -5)$, τότε η βέλτιστη ενέργεια για το όχημα είναι η Ενέργεια $3_{(\theta_2, \theta)}$ με $\theta_2 = 2$ και $\theta = 7$. Σύμφωνα με αυτήν την ενέργεια, το όχημα παραδίδει $\theta_2 = 2$ τεμάχια του μη-προτιμώμενου προϊόντος 1 στον πελάτη 3, πηγαίνει στην αποθήκη για να ανανεώσει το απόθεμα του με $\theta - z_2 - \theta_2 = 7 - (-5) - 2 = 10$ τεμάχια του προϊόντος 2 και $Q + z_2 + \theta_2 - \theta = 12 - 5 + 2 - 7 = 2$ τεμάχια του προϊόντος 1, επιστρέφει στον πελάτη 3 για να του παραδώσει τα $-z_2 - \theta_2 = -(-5) - 2 = 3$ οφειλόμενα τεμάχια του προϊόντος 2 και εν συνεχεία ταξιδεύει προς τον πελάτη 4 με $\theta = 7$ τεμάχια του προϊόντος 2 και 2 τεμάχια του προϊόντος 1. Εάν, πάλι για τον πελάτη 3, η κατάσταση είναι $(z_1, z_2) = (-4, 6)$, τότε η βέλτιστη ενέργεια για το όχημα είναι η Ενέργεια $7_{(\theta_1, \theta)}$ με $\theta_1 = 3$ και $\theta = 8$. Σύμφωνα με αυτή την ενέργεια, το όχημα παραδίδει $\theta_1 = 3$ τεμάχια του μη-προτιμώμενου προϊόντος 2 στον πελάτη 3, πηγαίνει στην αποθήκη για να ανανεώσει το απόθεμα του με $\theta - z_1 - \theta_1 = 8 - (-4) - 3 = 9$ τεμάχια του προϊόντος 1 και $Q + z_1 + \theta_1 - \theta = 12 - 4 + 3 - 8 = 3$ τεμάχια του προϊόντος 2, επιστρέφει στον πελάτη 3 για να του παραδώσει το $-z_1 - \theta_1 = -(-4) - 3 = 1$ οφειλόμενο τεμάχιο του προϊόντος 1 και εν συνεχεία ταξιδεύει προς τον πελάτη 4 με $\theta = 8$ τεμάχια του προϊόντος 1 και 3 τεμάχια του προϊόντος 2. Για τον πελάτη 6, εάν η κατάσταση είναι $(z_1, z_2) = (2, 2)$, τότε η βέλτιστη ενέργεια για το όχημα είναι η Ενέργεια 2_{θ} με $\theta = 7$. Σύμφωνα με την ενέργεια αυτή, το όχημα πηγαίνει στην αποθήκη, ανανεώνει το απόθεμα του με $\theta = 7$ τεμάχια του προϊόντος 1 και $Q - \theta = 12 - 7 = 5$ τεμάχια του προϊόντος 2 και εν συνεχεία ταξιδεύει προς τον πελάτη 7. Στον παρακάτω Πίνακα 1, για τον πελάτη 6 και για ορισμένες καταστάσεις (z_1, z_2) για τις οποίες η βέλτιστη ενέργεια είναι η Ενέργεια $3_{(\theta_2, \theta)}$ παρουσιάζονται οι βέλτιστες τιμές των θ_2 και θ . Στον παρακάτω Πίνακα 2, για τον πελάτη 6 και για ορισμένες καταστάσεις (z_1, z_2) για τις οποίες η βέλτιστη ενέργεια είναι η Ενέργεια $7_{(\theta_2, \theta)}$ παρουσιάζονται οι βέλτιστες τιμές των θ_2 και θ .

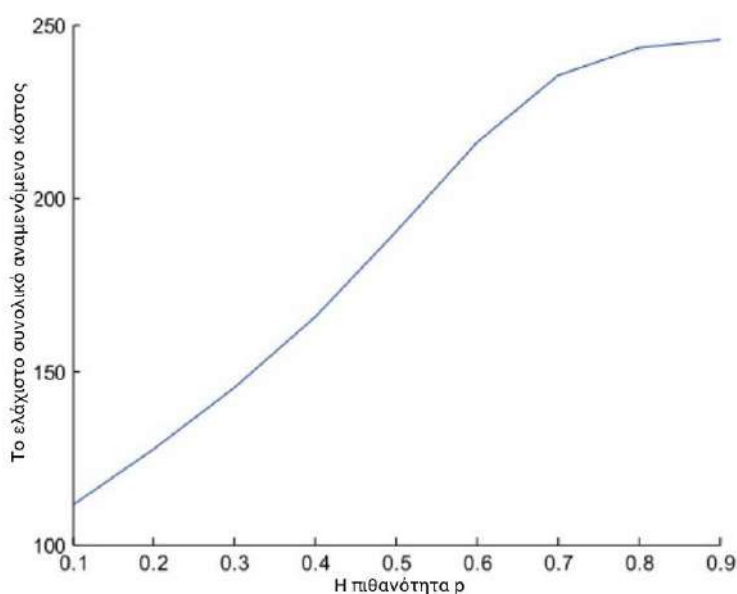
Πίνακας 1

Καταστάσεις (z_1, z_2)	Βέλτιστη τιμή του θ_2	Βέλτιστη τιμή του θ
$(1, -4)$	1	8
$(2, -3)$	2	9
$(3, -5)$	3	7
$(3, -4)$	3	8
$(4, -5)$	4	7

Πίνακας 2

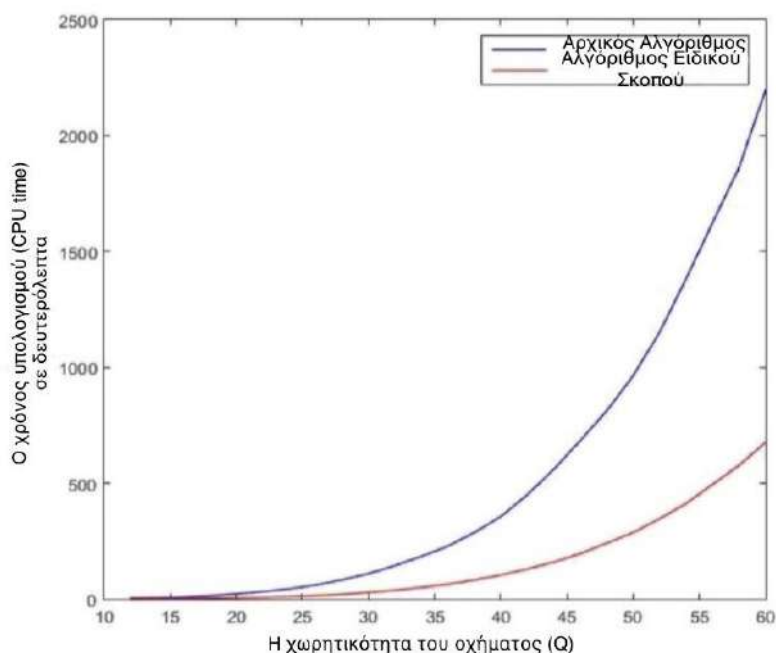
Καταστάσεις (z_1, z_2)	Βέλτιστη τιμή του θ_2	Βέλτιστη τιμή του θ
(7, -6)	5	6
(7, -5)	4	7
(8, -4)	3	8
(9, -6)	5	6
(10, -6)	5	6

Στο παρακάτω Σχήμα 6, παρουσιάζουμε την γραφική παράσταση που δείχνει τη διακύμανση στο ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος f_0 καθώς η πιθανότητα p της διωνυμικής κατανομής $Bin(Q, p)$ για τη ζήτηση ξ_j κάθε πελάτη j παίρνει τιμές στο σύνολο $\{0.1, \dots, 0.9\}$. Βλέπουμε ότι καθώς το p παίρνει τιμές στο σύνολο $\{0.1, \dots, 0.6\}$ το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος αυξάνεται σχετικά γρήγορα και περίπου γραμμικά. Όταν το p παίρνει τιμές στο σύνολο $\{0.7, 0.8, 0.9\}$ το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος αυξάνεται σχετικά αργά.



Σχήμα 6. Τα ελάχιστα συνολικά αναμενόμενα κόστη καθώς το p ποικίλλει.

Στο παρακάτω Σχήμα 7, παρουσιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις που δείχνουν τη διακύμανση των χρόνων υπολογισμού, εκφραζόμενη σε δευτερόλεπτα, που απαιτείται από τον αρχικό δυναμικό προγραμματισμό και τον αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού καθώς το Q μεταβάλλεται στο σύνολο $\{12, \dots, 60\}$. Παρατηρούμε ότι, καθώς το Q αυξάνεται, οι χρόνοι υπολογισμού και για τους δύο αλγορίθμους αυξάνονται μη-γραμμικά. Για τον αλγόριθμο ειδικού σκοπού η μορφή της γραφικής παράστασης επαληθεύει ότι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $O(NQ^3)$. Ο χρόνος υπολογισμού που απαιτείται από τον αλγόριθμο ειδικού σκοπού είναι σημαντικά μικρότερος από τον χρόνο υπολογισμού που απαιτείται από τον αρχικό αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού ειδικά για υψηλές τιμές του Q .



Σχήμα 7. Οι χρόνοι υπολογισμού των αλγορίθμων καθώς το Q ποικίλλει.

3.5 Το πρόβλημα χωρίς οι πελάτες να εξυπηρετούνται με συγκεκριμένη σειρά

Τροποποιούμε το πρόβλημα που εισαγάγαμε στην Ενότητα 1 υποθέτοντας ότι οι πελάτες δεν εξυπηρετούνται σύμφωνα με μια προκαθορισμένη σειρά. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν $N!$ διαφορετικές σειρές πελατών που μπορεί να ακολουθήσει το όχημα. Για κάθε σειρά χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού μπορούμε να βρούμε τη βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης και το αντίστοιχο ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος και στη συνέχεια συγκρίνοντας αυτά τα ελάχιστα κόστη μπορούμε να προσδιορίσουμε τη βέλτιστη σειρά πελατών που επιτυγχάνει το συνολικό ελάχιστο κόστος. Τα αριθμητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι, εάν οι απαιτήσεις των πελατών είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές, είναι δυνατό να βρεθεί η βέλτιστη σειρά πελατών για τιμές του N έως 8. Ως επεξήγηση δίνουμε παρακάτω ένα αριθμητικό παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.2 Υποθέτουμε ότι η χωρητικότητα του οχήματος είναι $Q = 6$ και ο αριθμός των πελατών $N \in \{3,4,5,6,7,8\}$. Τα κόστη διαδρομής c_{ij} ανάμεσα στους πελάτες $i, j \in \{1, \dots, 8\}$ και τα κόστη διαδρομής c_{i0} ανάμεσα στους πελάτες $i \in \{1, \dots, 8\}$ και την αποθήκη δίνονται από τον ακόλουθο συμμετρικό πίνακα $C = (c_{ij}), i, j = 0, \dots, 8$.

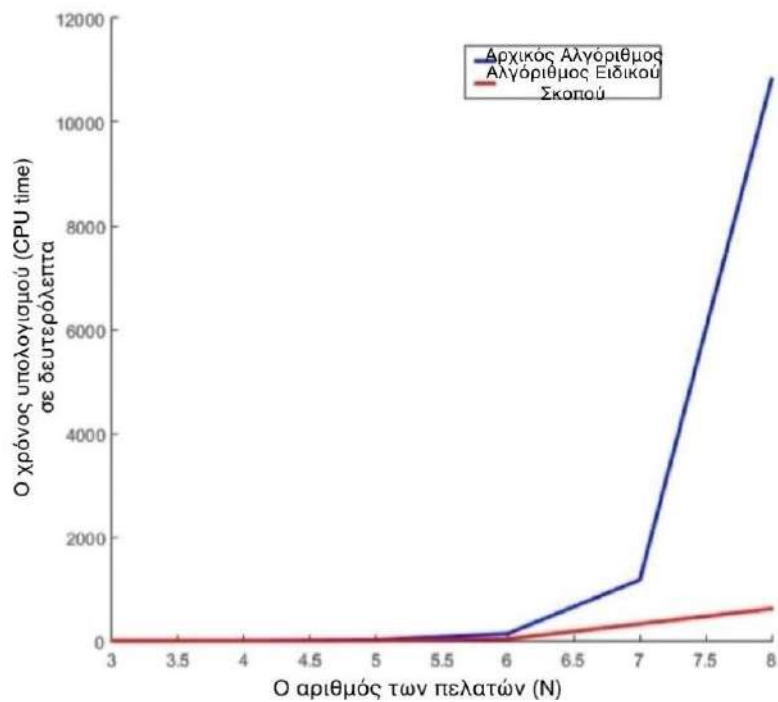
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 18 & 21 & 15 & 14 & 22 & 17 & 13 & 13 \\ 18 & 0 & 12 & 10 & 9 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 21 & 12 & 0 & 12 & 11 & 12 & 10 & 11 & 10 \\ 15 & 10 & 12 & 0 & 10 & 11 & 12 & 13 & 12 \\ 14 & 9 & 11 & 10 & 0 & 12 & 15 & 17 & 10 \\ 22 & 9 & 12 & 11 & 12 & 0 & 13 & 12 & 10 \\ 17 & 10 & 10 & 12 & 15 & 13 & 0 & 11 & 13 \\ 13 & 11 & 11 & 13 & 17 & 12 & 11 & 0 & 12 \\ 13 & 12 & 10 & 12 & 10 & 10 & 13 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Σημειώστε ότι αυτά τα κόστη ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα. Υποθέτουμε ότι τα κόστη ποινής π_1, \dots, π_8 που προκύπτουν όταν ένα τεμάχιο του μη-προτιμώμενου προϊόντος παραδίδεται στους πελάτες $1, \dots, 8$ αντί του προτιμώμενου, είναι στοιχεία του διανύσματος γραμμής $\pi = (3, 4, 3, 10, 4, 10, 1, 2)$. Επίσης, θεωρούμε ότι η ζήτηση ξ_j κάθε πελάτη $j \in \{1, \dots, 8\}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την διωνυμική κατανομή $Bin(Q, 0.4)$ και ότι οι πιθανότητες p_1, \dots, p_8 ότι οι πελάτες $1, \dots, 8$ προτιμούν το προϊόν 1 είναι στοιχεία του διανύσματος γραμμής $p = (0.4, 0.2, 0.3, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.5)$. Για $N \in \{3, \dots, 8\}$ θεωρούμε το δίκτυο που αποτελείται από τους πελάτες $1, \dots, N$. Στον παρακάτω Πίνακα 3 παρουσιάζουμε για $N \in \{3, \dots, 8\}$ τον αριθμό $N!$ όλων των πιθανών σειρών πελατών, το ελάχιστο αναμενόμενο κόστος μεταξύ όλων των σειρών πελατών, τη βέλτιστη σειρά πελατών, τον απαιτούμενο χρόνο υπολογισμού σε δευτερόλεπτα (Χρόνος 1) εάν χρησιμοποιείται ο αρχικός αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού και τον απαιτούμενο χρόνο υπολογισμού σε δευτερόλεπτα (Χρόνος 2) εάν χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού.

Πίνακας 3

N	$N!$	Ελάχιστο Κόστος	Βέλτιστη Σειρά	Χρόνος 1	Χρόνος 2
3	6	80.50	2,1,3	0.56	0.23
4	24	100.64	4,1,2,3	2.83	0.84
5	120	127.53	1,5,3,2,4	18.44	5.05
6	720	152.48	6,2,3,5,1,4	139.15	38.23
7	5040	169.25	6,2,7,5,1,4,3	1173.90	324.83
8	40320	187.93	6,2,8,5,3,4,1,7	10825.91	617.20

Στο παρακάτω Σχήμα 8, παρουσιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις που δείχνουν τη διακύμανση των χρόνων υπολογισμού, εκφραζόμενη σε δευτερόλεπτα, που απαιτείται από τον αρχικό δυναμικό προγραμματισμό και τον αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού καθώς το N μεταβάλλεται στο σύνολο $\{3, \dots, 8\}$. Παρατηρούμε ότι, καθώς το N αυξάνεται, φαίνεται ότι και οι δύο χρόνοι υπολογισμού αυξάνονται εκθετικά. Ο απαιτούμενος χρόνος υπολογισμού εάν χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού είναι σημαντικά μικρότερος από τον απαιτούμενο χρόνο υπολογισμού εάν χρησιμοποιείται ο αρχικός αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού.



Σχήμα 8. Οι χρόνοι υπολογισμού των αλγορίθμων καθώς το N ποικίλλει.

3.6 Περίληψη των αποτελεσμάτων και θέμα για μελλοντική έρευνα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετήθηκε ένα στοχαστικό πρόβλημα δρομολόγησης ενός οχήματος με πεπερασμένη χωρητικότητα στο οποίο (i) οι πελάτες εξυπηρετούνται σύμφωνα με μια προκαθορισμένη σειρά, (ii) το όχημα παραδίδει στους πελάτες δύο παρόμοια αλλά όχι πανομοιότυπα προϊόντα, (iii) η προτίμηση προϊόντος και η ζήτηση κάθε πελάτη είναι στοχαστική, (iv) η πραγματική προτίμηση και η πραγματική ζήτηση κάθε πελάτη αποκαλύπτονται αμέσως μόλις το όχημα φτάσει στην τοποθεσία του πελάτη, (v) οι απαιτήσεις σε προϊόν του κάθε πελάτη είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές. Το συνολικό κόστος αποτελείται από τα έξοδα ταξιδιού μεταξύ των διαδοχικών πελατών, μεταξύ των πελατών και της αποθήκης και τα κόστη ποινής που επιβάλλονται όταν παραδίδονται στους πελάτες είδη του προϊόντος που δεν προτιμώνται. Επιλέξαμε ως χρονικές στιγμές λήψης απόφασης για τη δρομολόγηση του οχήματος, τις χρονικές στιγμές στις οποίες το όχημα επισκέπτεται για πρώτη φορά κάθε πελάτη και έχει παραδοθεί η μέγιστη δυνατή ποσότητα του προτιμώμενου προϊόντος. Αυτή η επιλογή χρονικών στιγμών λήψης απόφασης καθιστά δυνατή την διαμόρφωση ενός δυναμικού προγραμματισμού για τον καθορισμό της πολιτικής δρομολόγησης που ελαχιστοποιεί το συνολικό αναμενόμενο κόστος για την εξυπηρέτηση όλων των πελατών. Η βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης έχει μια συγκεκριμένη δομή που βασίζεται σε ένα σύνολο κρίσιμων ποσοτήτων. Αυτό το αποτέλεσμα μας δίνει τη δυνατότητα να σχεδιάσουμε έναν αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού που είναι πολύ πιο αποτελεσματικός από τον αρχικό. Επίσης, από το Σχήμα 6 του αριθμητικού παραδείγματος παρατηρούμε ότι καθώς η πιθανότητα p της διωνυμικής κατανομής παίρνει μικρές και μέτριες τιμές το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος αυξάνεται σχετικά γρήγορα και περίπου γραμμικά, ενώ όταν η πιθανότητα p παίρνει μεγάλες τιμές το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος αυξάνεται σχετικά αργά. Τέλος, εάν η παραπάνω υπόθεση (i) δεν ισχύει, είναι δυνατό να υπολογιστεί η βέλτιστη πολιτική δρομολόγησης για μέτριες τιμές του αριθμού των πελατών.

Ένα πιθανό θέμα για μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να είναι η μελέτη ενός περισσότερου γενικού προβλήματος όπου το όχημα παραδίδει $K \geq 2$ παρόμοια αλλά όχι πανομοιότυπα προϊόντα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΣΗ ΕΝΟΣ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΕΣ ΠΑΡΑΛΑΒΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΟΣΕΙΣ

4.1 Εισαγωγή

Ένα πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων που έχει αποτελέσει αντικείμενο σημαντικής έρευνας είναι το πρόβλημα της εύρεσης της βέλτιστης δρομολόγησης ενός οχήματος με πεπερασμένη χωρητικότητα, το οποίο ξεκινά τη διαδρομή του από μια αποθήκη και εξυπηρετεί N πελάτες σύμφωνα με μια προκαθορισμένη σειρά. Κατά τη διάρκεια της διαδρομής του, το όχημα μπορεί να επιστρέψει στην αποθήκη για ανεφοδιασμό ή για εκφόρτωση. Έχουν αναλυθεί διάφορες εκδοχές αυτού του προβλήματος. Σε ορισμένες εκδοχές του προβλήματος αυτού (Dikas et al. (2016), Tsirimpas et al. (2008)) οι απαιτήσεις των πελατών θεωρήθηκαν ντετερμινιστικές και σε ορισμένες άλλες εκδοχές (Dimitrakos and Kyriakidis (2015), Kyriakidis and Dimitrakos (2019), Kyriakidis et al. (2019), Pandelis et al. (2012, 2013a), Tatarakis and Minis (2009), Yang et al. (2000), Yee and Golden (1980), Zhang et al. (2016), Zhu and Sheu (2018)) οι απαιτήσεις των πελατών θεωρήθηκαν στοχαστικές. Η παραδοχή ότι οι πελάτες εξυπηρετούνται σύμφωνα με μια συγκεκριμένη σειρά καθιστά δυνατή την ανάπτυξη κατάλληλων διατυπώσεων δυναμικού προγραμματισμού για τα εν λόγω προβλήματα. Σε ορισμένα προβλήματα (Kyriakidis et al. (2019), Pandelis et al. (2013a)) οι χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το όχημα φτάνει για πρώτη φορά στη τοποθεσία του κάθε πελάτη επιλέχθηκαν ως χρονικές στιγμές απόφασης για την επιλογή κάποιας ενέργειας, ενώ, σε ορισμένα άλλα προβλήματα (Pandelis et al. (2012), Tatarakis and Minis (2009), Yang et al. (2000), Yee and Golden (1980)) οι ενέργειες επιλέγονται μόλις εξυπηρετηθεί ένας πελάτης. Στα περισσότερα από αυτά τα προβλήματα αποδείχθηκε ότι η βέλτιστη πολιτική ανεφοδιασμού, για κάθε πελάτη, έχει μια συγκεκριμένη δομή που βασίζεται σε ένα σύνολο κρίσιμων ποσοτήτων. Για παράδειγμα (Ενότητα 3 των Yang et al. (2000)), αν το εναπομένον φορτίο στο όχημα μετά την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης ενός πελάτη υπερβαίνει ένα κρίσιμο επίπεδο, τότε η βέλτιστη ενέργεια είναι να ταξιδέψει προς τον επόμενο πελάτη, ενώ, αν είναι μικρότερο από το κρίσιμο επίπεδο, τότε η βέλτιστη ενέργεια είναι η επιστροφή στην αποθήκη για ανεφοδιασμό και στη συνέχεια να ταξιδέψει προς τον επόμενο πελάτη. Λαμβάνοντας υπόψη τη δομή της βέλτιστης πολιτικής ανεφοδιασμού, σε πολλές περιπτώσεις (Dimitrakos and Kyriakidis (2015)) είναι δυνατό να σχεδιαστεί ένας γρήγορος αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού που λειτουργεί μόνο στις πολιτικές ανεφοδιασμού που έχουν την ειδική δομή και οδηγεί στη βέλτιστη πολιτική ανεφοδιασμού. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην πρόσφατη βιβλιογραφία υπάρχει ένας σημαντικός αριθμός εργασιών που εξετάζουν προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστικές απαιτήσεις και πολιτικές ανεφοδιασμού (Bertazzi and Secomandi

(2018a, 2018b), Florio et al. (2018), Louveaux and Juan-José Salazar-González (2018), Salavati-Khoshghal et al. (2019)).

Ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε σε προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων με μια προκαθορισμένη σειρά εξυπηρέτησης πελατών και κατανεμημένο φορτίο. Οι Tzirimpas et al. (2008) υπέθεσαν ότι οι απαιτήσεις των παραγγελθέντων πελατών είναι ντετερμινιστικές και διερεύνησαν την περίπτωση παραδόσεων πολλαπλών προϊόντων εάν κάθε προϊόν αποθηκεύεται στο δικό του τμήμα στο όχημα. Η βέλτιστη πολιτική αναπλήρωσης βρέθηκε με την εφαρμογή ενός κατάλληλου αλγορίθμου δυναμικού προγραμματισμού. Οι Tatarakis and Minis (2009) διερεύνησαν το παραπάνω πρόβλημα όταν οι απαιτήσεις των παραγγελθέντων πελατών είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές. Όταν το όχημα έχει δύο τμήματα, προέκυψε ένα δομικό αποτέλεσμα για τη βέλτιστη πολιτική ανεφοδιασμού. Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύτηκε από τους Pandelis et al. (2012) για την περίπτωση κατά την οποία το όχημα έχει $K \geq 2$ τμήματα. Στο παρόν κεφάλαιο, θεωρούμε ένα όχημα που έχει δύο τμήματα με πεπερασμένη χωρητικότητα και επισκέπτεται N πελάτες σύμφωνα με μια προκαθορισμένη ακολουθία $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow N$. Τα νέα (ή φρέσκα ή χρήσιμα) και τα παλιά (ή ληγμένα ή άχρηστα) προϊόντα τοποθετούνται στο τμήμα 1 και στο τμήμα 2, αντίστοιχα. Το όχημα ξεκινά τη διαδρομή του από μια αποθήκη. Κατά τη διάρκεια της διαδρομής του, νέα προϊόντα παραδίδονται στους πελάτες και παλιά προϊόντα συλλέγονται από αυτούς. Υποθέτουμε ότι, για κάθε πελάτη, η ποσότητα που παραδίδεται και η ποσότητα που συλλέγεται είναι τυχαίες μεταβλητές με γνωστή κοινή κατανομή. Οι πραγματικές ποσότητες που παραδίδονται και παραλαμβάνονται αποκαλύπτονται μόνο όταν το όχημα φτάνει στη θέση του πελάτη. Το όχημα μπορεί να διακόψει τη διαδρομή του και να επιστρέψει στην αποθήκη για να εφοδιαστεί με νέα προϊόντα και να ξεφορτώσει τα παλιά προϊόντα. Το συνολικό κόστος για την εξυπηρέτηση όλων των πελατών αποτελείται από το κόστος μετακίνησης μεταξύ διαδοχικών πελατών και το κόστος μετακίνησης μεταξύ πελατών και αποθήκης. Επιλέγοντας κατάλληλες χρονικές στιγμές λήψης απόφασης, είναι δυνατή η κατασκευή ενός αλγορίθμου δυναμικού προγραμματισμού που υπολογίζει το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος και καθορίζει τις βέλτιστες ενέργειες για τη δρομολόγηση του οχήματος. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι, για κάθε πελάτη, η βέλτιστη πολιτική αναπλήρωσης έχει μια συγκεκριμένη δομή που βασίζεται σε ένα σύνολο κρίσιμων ποσοτήτων, δηλαδή η επιλογή των βέλτιστων ενεργειών εξαρτάται από ορισμένους κρίσιμους αριθμούς. Αυτή η δομική ιδιότητα της βέλτιστης πολιτικής αναπλήρωσης μας επιτρέπει να σχεδιάσουμε έναν αποτελεσματικό αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού που περιορίζεται σε πολιτικές αναπλήρωσης με αυτή τη δομή.

Μια πρακτική εφαρμογή αυτού του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων θα μπορούσε να είναι η δρομολόγηση ενός οχήματος που επισκέπτεται N καταστήματα προκειμένου να παραδώσει και να παραλάβει φρέσκο και ληγμένο γάλα (ή παγωτό ή λαχανικά ή φρούτα). Το όχημα χωρίζεται σε δύο τμήματα. Τα μπουκάλια με το φρέσκο γάλα τοποθετούνται στο πρώτο τμήμα σε χαμηλή θερμοκρασία, ενώ τα μπουκάλια με το ληγμένο γάλα τοποθετούνται στο δεύτερο τμήμα σε κανονική θερμοκρασία.

Το υπόλοιπο του κεφαλαίου οργανώνεται ως εξής. Στην Ενότητα 2 δίνουμε μια διατύπωση δυναμικού προγραμματισμού του προβλήματος όταν οι ποσότητες που δίνονται και εισπράττονται από κάθε πελάτη είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και αποδεικνύεται ότι η βέλτιστη πολιτική ανεφοδιασμού έχει μια συγκεκριμένη δομή που βασίζεται σε ένα σύνολο κρίσιμων ποσοτήτων. Στην Ενότητα 3 διακριτοποιείται ο χώρος καταστάσεων. Στην Ενότητα 4 εισάγεται ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού. Στην Ενότητα 5 τα θεωρητικά αποτελέσματα επεξηγούνται με ένα αριθμητικό παράδειγμα. Στην τελευταία ενότητα δίνουμε μια περίληψη των βασικών αποτελεσμάτων της εργασίας και ένα θέμα για μελλοντική έρευνα.

4.2 Το πρόβλημα με συνεχείς απαιτήσεις

Έστω ένα σύνολο κορυφών $V = \{0, 1, \dots, N\}$, όπου η κορυφή 0 αναπαριστά την αποθήκη και οι κορυφές $1, 2, \dots, N$ αντιστοιχούν στους πελάτες. Το όχημα ξεκινά τη διαδρομή του από την αποθήκη και εξυπηρετεί τους πελάτες σύμφωνα με την ακολουθία $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow N$. Το όχημα αποτελείται από δύο τμήματα, τμήμα 1 και τμήμα 2, με πεπερασμένες χωρητικότητες Q_1 και Q_2 , αντίστοιχα. Το όχημα παραδίδει νέα (ή φρέσκη ή χρήσιμη) ποσότητα ενός προϊόντος στους πελάτες και συλλέγει παλιά (ή ληγμένη ή άχρηστη) ποσότητα του ίδιου ή διαφορετικού προϊόντος. Υποθέτουμε ότι (i) οι ποσότητες που παραδίδονται τοποθετούνται στο τμήμα 1, (ii) οι ποσότητες που συλλέγονται τοποθετούνται στο τμήμα 2, (iii) οι ποσότητες που παραδίδονται έχουν το ίδιο μέγεθος, (iv) οι ποσότητες που συλλέγονται έχουν το ίδιο μέγεθος, (v) το μέγεθος των ποσοτήτων που παραδίδονται μπορεί να διαφέρει από το μέγεθος των ποσοτήτων που συλλέγονται. Ένα ρεαλιστικό παράδειγμα με συνεχείς απαιτήσεις θα μπορούσε να είναι η παράδοση και η παραλαβή ασβέστη και βότσαλου που τοποθετούνται σε κατάλληλα τμήματα του οχήματος. Έστω $c_{j,j+1}$ το κόστος διαδρομής από τον πελάτη j στον πελάτη $j + 1$ και έστω c_{j0}, c_{0j} το κόστος διαδρομής από τον πελάτη j στην αποθήκη και το κόστος διαδρομής από την αποθήκη στον πελάτη j , αντίστοιχα. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι πληρούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$c_{j0} = c_{0j}, j = 1, \dots, N \text{ (συμμετρική ιδιότητα)}$$

και

$$c_{0j} + c_{j,j+1} \geq c_{0,j+1}, j = 1, \dots, N - 1 \text{ (τριγωνική ιδιότητα)}$$

Το συνολικό κόστος αποτελείται από το κόστος ταξιδιού μεταξύ των διαδοχικών πελατών και μεταξύ των πελατών και της αποθήκης. Το πρόβλημα είναι να βρεθεί η πολιτική ανανέωσης αποθεμάτων που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο συνολικό κόστος για την εξυπηρέτηση όλων των πελατών.

Υποθέτουμε ότι, για κάθε πελάτη $j \in \{1, \dots, N\}$ η ποσότητα $\xi_j \in [0, Q_1]$ των νέων προϊόντων που

ζητούνται είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή και η ποσότητα $\psi_j \in [0, Q_2]$ των παλαιών προϊόντων που επιστρέφονται είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή. Η από κοινού κατανομή των ξ_j και ψ_j είναι γνωστή. Η πραγματική ποσότητα των νέων προϊόντων που ζητάει κάθε πελάτης και η πραγματική ποσότητα των παλαιών προϊόντων που επιστρέφει κάθε πελάτης γνωστοποιούνται μόνο όταν το όχημα φτάνει στην τοποθεσία του πελάτη. Το όχημα μπορεί να διακόψει τη διαδρομή του και να επιστρέψει στην αποθήκη για να γεμίσει το τμήμα 1 με νέα ποσότητα και να ξεφορτώσει την παλιά ποσότητα που είναι αποθηκευμένη στο τμήμα 2. Μετά την εξυπηρέτηση του τελευταίου πελάτη N , το όχημα επιστρέφει στην αποθήκη και τερματίζει τη διαδρομή του. Η πραγματική ποσότητα των νέων προϊόντων που ζητούνται και η πραγματική ποσότητα των παλαιών προϊόντων που επιστρέφονται γίνονται γνωστές. Έστω (q, s) η κατάσταση της διαδικασίας μετά την πρώτη επίσκεψη στον πελάτη j και αφού έχει παραδοθεί η μέγιστη δυνατή ποσότητα νέων προϊόντων και έχει συλλεχτεί η μέγιστη δυνατή ποσότητα παλαιών προϊόντων. Ο αριθμός q είναι η ποσότητα των νέων προϊόντων που παραμένουν στο τμήμα 1 και ο αριθμός s είναι ο κενός χώρος στο τμήμα 2, δηλαδή ο αριθμός των παλαιών προϊόντων που μπορούν να τοποθετηθούν στο τμήμα 2. Οι αρνητικές τιμές των q και s υποδηλώνουν ανικανοποίητη παράδοση νέων προϊόντων και έλλειψη κενού χώρου στο τμήμα 2 για τα παλιά προϊόντα, αντίστοιχα. Υπάρχουν τέσσερις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $0 \leq q \leq Q_1, 0 \leq s \leq Q_2$.

Σε αυτή την περίπτωση ο πελάτης j έχει εξυπηρετηθεί πλήρως, παραμένουν q νέα προϊόντα στο τμήμα 1 και υπάρχει κενός χώρος για s παλιά προϊόντα στο τμήμα 2.

Περίπτωση 2: $-Q_1 \leq q < 0, 0 \leq s \leq Q_2$.

Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει ανικανοποίητη παράδοση $-q$ νέων προϊόντων και υπάρχει κενός χώρος για s παλιά προϊόντα στο τμήμα 2.

Περίπτωση 3: $0 \leq q \leq Q_1, -Q_2 \leq s < 0$.

Σε αυτή την περίπτωση q νέα προϊόντα παραμένουν στο τμήμα 1 και υπάρχει έλλειψη κενού χώρου για $-s$ παλιά προϊόντα στο τμήμα 2.

Περίπτωση 4: $-Q_1 \leq q < 0, -Q_2 \leq s < 0$.

Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει ανικανοποίητη παράδοση $-q$ νέων προϊόντων και υπάρχει έλλειψη κενού χώρου για $-s$ παλιά προϊόντα στο τμήμα 2.

Υποθέτουμε ότι $j \in \{1, \dots, N - 1\}$.

Στην Περίπτωση 1 οι πιθανές ενέργειες είναι η Ενέργεια 1 και η Ενέργεια 2. Η Ενέργεια 1 σημαίνει ότι το όχημα ταξιδεύει κατευθείαν προς τον επόμενο πελάτη $j + 1$ και η Ενέργεια 2 σημαίνει ότι το όχημα

επιστρέφει στην αποθήκη για να ανεφοδιάσει το τμήμα 1 με $Q_1 - q$ νέα προϊόντα και να ξεφορτώσει όλα τα παλιά προϊόντα από το τμήμα 2 και εν συνεχεία εξυπηρετεί τον πελάτη $j + 1$.

Στην Περίπτωση 2 οι πιθανές ενέργειες είναι η Ενέργεια 3 και η Ενέργεια 4. Η Ενέργεια 3 σημαίνει ότι το όχημα ταξιδεύει προς την αποθήκη για να ανεφοδιάσει το τμήμα 1 με Q_1 νέα προϊόντα και να ξεφορτώσει όλα τα s παλιά προϊόντα από το τμήμα 2, επιστρέφει στον πελάτη j για να παραδώσει τα $-q$ οφειλόμενα νέα προϊόντα και εν συνεχεία εξυπηρετεί τον πελάτη $j + 1$. Η Ενέργεια 4 σημαίνει ότι το όχημα ταξιδεύει προς την αποθήκη για να ανεφοδιάσει το τμήμα 1 με $-q$ νέα προϊόντα και να ξεφορτώσει όλα τα s παλιά προϊόντα από το τμήμα 2, επιστρέφει στον πελάτη j για να παραδώσει τα $-q$ οφειλόμενα νέα προϊόντα, κάνει ένα δεύτερο ταξίδι προς την αποθήκη για να ανεφοδιάσει το τμήμα 1 με Q_1 νέα προϊόντα και εν συνεχεία εξυπηρετεί τον πελάτη $j + 1$.

Στην Περίπτωση 3 οι πιθανές ενέργειες είναι η Ενέργεια 4 και η Ενέργεια 5. Η Ενέργεια 4 (σε αυτή την περίπτωση) σημαίνει ότι το όχημα πηγαίνει στην αποθήκη για να ξεφορτώσει τα Q_2 παλιά προϊόντα από το τμήμα 2 και να γεμίσει το τμήμα 1 με Q_1 νέα προϊόντα, επιστρέφει στον πελάτη j για να φορτώσει στο τμήμα 2 τα οφειλόμενα $-s$ παλιά προϊόντα, κάνει ένα δεύτερο ταξίδι προς την αποθήκη για να ξεφορτώσει όλα τα παλιά προϊόντα από το τμήμα 2 και εν συνεχεία εξυπηρετεί τον πελάτη $j + 1$. Η Ενέργεια 5 σημαίνει ότι το όχημα ταξιδεύει προς την αποθήκη για να ξεφορτώσει τα Q_2 παλιά προϊόντα από το τμήμα 2 και να ανεφοδιάσει πλήρως το τμήμα 1 με νέα προϊόντα, επιστρέφει στον πελάτη j για να φορτώσει τα εναπομείναντα $-s$ παλιά προϊόντα στο τμήμα 2 και εν συνεχεία εξυπηρετεί τον πελάτη $j + 1$.

Στην Περίπτωση 4 οι πιθανές ενέργειες είναι η Ενέργεια 4 και η Ενέργεια 6. Ενέργεια 4 (σε αυτή την περίπτωση) σημαίνει ότι το όχημα πηγαίνει στην αποθήκη για να ανεφοδιάσει το τμήμα 1 με $-q$ νέα προϊόντα και να ξεφορτώσει όλα τα παλιά προϊόντα από το τμήμα 2, επιστρέφει στον πελάτη j για να παραδώσει τα $-q$ οφειλόμενα νέα προϊόντα και να φορτώσει στο τμήμα 2 τα $-s$ υπόλοιπα παλαιά προϊόντα, κάνει ένα δεύτερο ταξίδι προς την αποθήκη για να ανεφοδιάσει πλήρως το τμήμα 1 με νέα προϊόντα και να ξεφορτώσει όλα τα παλιά προϊόντα από το τμήμα 2 και εν συνεχεία εξυπηρετεί τον πελάτη $j + 1$. Η Ενέργεια 6 σημαίνει ότι το όχημα πηγαίνει στην αποθήκη για να ανεφοδιάσει το τμήμα 1 με Q_1 νέα προϊόντα και να ξεφορτώσει όλα τα παλιά προϊόντα από το τμήμα 2, επιστρέφει στον πελάτη j για να παραδώσει τα $-q$ οφειλόμενα νέα προϊόντα και να παραλάβει τα $-s$ υπόλοιπα παλαιά προϊόντα και εν συνεχεία εξυπηρετεί τον πελάτη $j + 1$. Θεωρείται ότι αν επιλεγεί η Ενέργεια $a \in \{3, 4, 5, 6\}$, δεν υπάρχει επιπλέον ζήτηση για νέα προϊόντα που πρέπει να παραδοθούν ή επιπλέον παλαιά προϊόντα που πρέπει να συλλεχθούν όταν το όχημα επιστρέφει στον πελάτη j , δηλαδή τα ξ_j και ψ_j παραμένουν αμετάβλητα.

Υποθέτουμε ότι $j = N$.

Στην Περίπτωση 1 η μόνη δυνατή ενέργεια για το όχημα είναι να επιστρέφει στην αποθήκη για να

τερματίσει τη διαδρομή του. Στις Περιπτώσεις 2-4 η μόνη δυνατή ενέργεια είναι να μεταβεί στην αποθήκη για να ανεφοδιάσει το τμήμα 1 με την οφειλόμενη ποσότητα νέων προϊόντων ή/και να αδειάσει το τμήμα 2, επιστρέφει στον πελάτη N για να παραδώσει την οφειλόμενη ποσότητα νέων προϊόντων ή/και να παραλάβει την υπόλοιπη ποσότητα παλαιών προϊόντων και στη συνέχεια επιστρέφει στην αποθήκη για να τερματίσει τη διαδρομή του.

Εξισώσεις δυναμικού προγραμματισμού

Είναι δυνατόν να κατασκευαστεί ένας κατάλληλος αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού για τον προσδιορισμό της βέλτιστης πολιτικής αναπλήρωσης. Έστω $f_j(q, s)$ το ελάχιστο αναμενόμενο κόστος από την πρώτη επίσκεψη του οχήματος στον πελάτη $j \in \{1, \dots, N\}$ μέχρι το τέλος της διαδρομής όπου (q, s) είναι η κατάσταση της διαδικασίας που έχει οριστεί παραπάνω. Για $j \in \{1, \dots, N - 1\}$ δίνουμε παρακάτω τις εξισώσεις δυναμικού προγραμματισμού (4.1) – (4.4) που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις 1-4.

Αν $0 \leq q \leq Q_1, 0 \leq s \leq Q_2$, τότε:

$$f_j(q, s) = \min\{A_j(q, s), B_j\}, \quad (4.1)$$

όπου,

$$A_j(q, s) = c_{j,j+1} + E f_{j+1}(q - \xi_{j+1}, s - \psi_{j+1}),$$

$$B_j = c_{j0} + c_{0,j+1} + E f_{j+1}(Q_1 - \xi_{j+1}, Q_2 - \psi_{j+1}).$$

Αν $-Q_1 \leq q < 0, 0 \leq s \leq Q_2$, τότε:

$$f_j(q, s) = 2c_{j0} + \min\{C_j(q), B_j\}, \quad (4.2)$$

όπου,

$$C_j(q) = c_{j,j+1} + E f_{j+1}(Q_1 + q - \xi_{j+1}, Q_2 - \psi_{j+1}).$$

Αν $0 \leq q \leq Q_1, -Q_2 \leq s < 0$, τότε:

$$f_j(q, s) = 2c_{j0} + \min\{D_j(s), B_j\}, \quad (4.3)$$

όπου,

$$D_j(s) = c_{j,j+1} + E f_{j+1}(Q_1 - \xi_{j+1}, Q_2 + s - \psi_{j+1}).$$

Αν $-Q_1 \leq q < 0, -Q_2 \leq s < 0$, τότε:

$$f_j(q, s) = 2c_{j0} + \min\{E_j(q, s), B_j\}, \quad (4.4)$$

όπου,

$$E_j(q, s) = c_{j,j+1} + Ef_{j+1}(Q_1 + q - \xi_{j+1}, Q_2 + s - \psi_{j+1}).$$

Η οριακή συνθήκη δίνεται από τα ακόλουθη εξίσωση:

$$f_N(q, s) = c_{N0} + 1(q^- + s^- < 0) \cdot 2c_{N0}, \quad (4.5)$$

όπου 1 είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση, $q^- = \min\{q, 0\}$ και $s^- = \min\{s, 0\}$.

Το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος κατά τη διάρκεια ενός κύκλου εξυπηρέτησης είναι ίσο με

$$f_0 = c_{01} + Ef_1(Q_1 - \xi_1, Q_2 - \psi_1).$$

Στις παραπάνω εξισώσεις λαμβάνονται οι αναμενόμενες τιμές σε σχέση με τις τυχαίες μεταβλητές ξ_j, ψ_j , $j = 1, \dots, N$. Οι όροι $A_j(q, s)$ και B_j στη δεξιά πλευρά της (4.1) αντιστοιχούν στην Ενέργεια 1 και στην Ενέργεια 2, αντίστοιχα. Οι όροι $C_j(q)$ και B_j στη δεξιά πλευρά της (4.2) αντιστοιχούν στην Ενέργεια 3 και στην Ενέργεια 4, αντίστοιχα. Οι όροι $D_j(s)$ και B_j στη δεξιά πλευρά της (4.3) αντιστοιχούν στην Ενέργεια 5 και στην Ενέργεια 4, αντίστοιχα. Οι όροι $E_j(q, s)$ και B_j στη δεξιά πλευρά της (4.4) αντιστοιχούν στην Ενέργεια 6 και στην Ενέργεια 4, αντίστοιχα. Το παρακάτω Λήμμα 3 θα χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη του Θεωρήματος 4 που περιγράφει τη δομή της βέλτιστης πολιτικής ανανέωσης των αποθεμάτων.

Η δομή της βέλτιστης πολιτικής αναπλήρωσης

Λήμμα 3. Οι συναρτήσεις $f_j(q, s), j = 1, \dots, N$, είναι φθίνουσες ως προς q και s .

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο j . Από την (4.5) έχουμε ότι η $f_N(q, s)$ είναι φθίνουσα ως προς q και s . Υποθέτοντας ότι η $f_{j+1}(q, s)$ είναι φθίνουσα ως προς q και s , θα δείξουμε ότι η $f_j(q, s)$ είναι φθίνουσα ως προς q και s . Λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση της επαγωγής, προκύπτει από τις (4.1) – (4.4) ότι, για να αποδειχθεί ότι η $f_j(q, s)$ είναι φθίνουσα ως προς q και s , αρκεί να δείξουμε ότι:

$$f_j(0, s) \leq f_j(-1, s), 0 \leq s \leq Q_2, \quad (4.6)$$

$$f_j(q, 0) \leq f_j(q, -1), 0 \leq q \leq Q_1, \quad (4.7)$$

$$f_j(0, s) \leq f_j(-1, s), -Q_2 \leq s \leq -1, \quad (4.8)$$

$$f_j(q, 0) \leq f_j(q, -1), -Q_1 \leq q \leq -1. \quad (4.9)$$

Από την (4.1) και την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\begin{aligned} f_j(0, s) &\leq c_{j_0} + c_{0,j+1} + E f_{j+1}(Q_1 - \xi_{j+1}, Q_2 - \psi_{j+1}) \leq 2c_{j_0} + c_{j,j+1} + E f_{j+1}(Q_1 - \xi_{j+1}, Q_2 - \psi_{j+1}) \\ &= H_j \end{aligned} \quad (4.10)$$

Σημειώστε ότι:

$$H_j - 2c_{j_0} - C_j(-1) = E f_{j+1}(Q_1 - \xi_{j+1}, Q_2 - \psi_{j+1}) - E f_{j+1}(Q_1 - 1 - \xi_{j+1}, Q_2 - \psi_{j+1}) \leq 0, \quad (4.11)$$

όπου η παραπάνω ανισότητα προκύπτει από την επαγωγική υπόθεση. Από τις (4.10) και (4.11) έχουμε ότι:

$$f_j(0, s) \leq H_j \leq 2c_{j_0} + C_j(-1). \quad (4.12)$$

Από την (4.1) προκύπτει άμεσα ότι:

$$f_j(0, s) \leq B_j \leq 2c_{j_0} + B_j. \quad (4.13)$$

Από τις (4.12) και (4.13) έχουμε $f_j(0, s) \leq 2c_{j_0} + \min\{C_j(-1), B_j\}$, η οποία είναι ισοδύναμη με την (4.6).

Η (4.7) είναι ισοδύναμη την

$$\begin{aligned} \min\{A_j(q, 0), B_j\} \leq 2c_{j_0} + \min\{D_j(-1), B_j\} &\Leftrightarrow \min\{c_{j,j+1} + E f_{j+1}(q - \xi_{j+1}, -\psi_{j+1}), B_j\} \leq \\ 2c_{j_0} + \min\{c_{j,j+1} + E f_{j+1}(Q_1 - \xi_{j+1}, Q_2 - 1 - \psi_{j+1}), B_j\}. \end{aligned}$$

Η παραπάνω ανισότητα ισχύει αν:

$$\begin{aligned} B_j \leq 2c_{j_0} + c_{j,j+1} + E f_{j+1}(Q_1 - \xi_{j+1}, Q_2 - 1 - \psi_{j+1}) &\Leftrightarrow \\ c_{0,j+1} + E f_{j+1}(Q_1 - \xi_{j+1}, Q_2 - \psi_{j+1}) \leq c_{j_0} + c_{j,j+1} + E f_{j+1}(Q_1 - \xi_{j+1}, Q_2 - 1 - \psi_{j+1}), \end{aligned}$$

η οποία σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής και την τριγωνική ανισότητα, είναι αληθής.

Η (4.8) είναι ισοδύναμη την

$$\begin{aligned} \min\{D_j(s), B_j\} \leq \min\{E_j(-1, s), B_j\} &\Leftrightarrow \\ \min\{c_{j,j+1} + E f_{j+1}(Q_1 - \xi_{j+1}, Q_2 + s - \psi_{j+1}), B_j\} &\leq \\ \min\{c_{j,j+1} + E f_{j+1}(Q_1 - 1 - \xi_{j+1}, Q_2 + s - \psi_{j+1}), B_j\}. \end{aligned}$$

Βάσει της επαγωγικής υπόθεσης, η παραπάνω ανισότητα είναι αληθής.

Η (4.9) είναι ισοδύναμη την

$$\min\{C_j(q), B_j\} \leq \min\{E_j(q, -1), B_j\} \Leftrightarrow$$

$$\min\{c_{j,j+1} + Ef_{j+1}(Q_1 + q - \xi_{j+1}, Q_2 - \psi_{j+1}), B_j\} \leq$$

$$\min\{c_{j,j+1} + Ef_{j+1}(Q_1 + q - \xi_{j+1}, Q_2 - 1 - \psi_{j+1}), B_j\}.$$

Βάση της επαγωγικής υπόθεσης, η παραπάνω ανισότητα είναι αληθής. ■

Θεώρημα 4. Για κάθε πελάτη $j \in \{1, \dots, N - 1\}$ η δομή της βέλτιστης πολιτικής περιγράφεται στις ακόλουθες τέσσερις περιπτώσεις:

- (i) Για κάθε $q \in [0, Q_1]$, υπάρχει μια κρίσιμη ποσότητα $k_{1j} \in [0, Q_2]$, ώστε να είναι βέλτιστη για το όχημα να προχωρήσει στον πελάτη $j + 1$ αν και μόνο αν $s \geq k_{1j}(q)$. Επιπλέον, η $k_{1j}(q)$ είναι φθίνουσα ως προς q .
- (ii) Υπάρχει μια κρίσιμη ποσότητα $s_j \leq 0$, ώστε να είναι βέλτιστη για το όχημα να κάνει δύο ταξίδια προς την αποθήκη όταν $q \in [0, Q_1]$ και $s \leq s_j$.
- (iii) Υπάρχει μια κρίσιμη ποσότητα $q_j \leq 0$, ώστε να είναι βέλτιστη για το όχημα να κάνει δύο ταξίδια προς την αποθήκη όταν $s \in [0, Q_2]$ και $q \leq q_j$.
- (iv) Για κάθε $s \in [-Q_2, 0)$, υπάρχει μια κρίσιμη ποσότητα $k_{2j}(s) < 0$, ώστε να είναι βέλτιστο για το όχημα να κάνει δύο ταξίδια προς την αποθήκη αν και μόνο αν $q \leq k_{2j}(s)$. Επιπλέον, η $k_{2j}(s)$ είναι φθίνουσα ως προς s .

Απόδειξη. Από το Λήμμα 3 προκύπτει ότι η $A_j(q, s)$ είναι φθίνουσα ως προς q και s . Η περίπτωση (i) είναι άμεση συνέπεια αυτού του αποτελέσματος. Από το Λήμμα 3 προκύπτει ότι οι $C_j(q)$ και $D_j(s)$ είναι φθίνουσες ως προς q και s , αντίστοιχα. Οι περιπτώσεις (ii) και (iii) είναι άμεσες συνέπειες του αυτού του αποτελέσματος. Από το Λήμμα 3 προκύπτει ότι η $E_j(q, s)$ είναι φθίνουσα ως προς q και s . Η περίπτωση (iv) είναι άμεση συνέπεια του αυτού του αποτελέσματος. ■

4.3 Διακριτοποίηση του χώρου καταστάσεων

Ο χώρος καταστάσεων μετά την πρώτη επίσκεψη στον πελάτη j και αφού η μέγιστη δυνατή ποσότητα νέων προϊόντων έχει παραδοθεί και η μέγιστη δυνατή ποσότητα παλιών προϊόντων έχει συλλεχθεί είναι το σύνολο:

$$S = \{(q, s): q \in [-Q_1, Q_1], s \in [-Q_2, Q_2]\}.$$

Η διακριτοποίηση του χώρου καταστάσεων είναι απαραίτητη για την υλοποίηση του αλγορίθμου δυναμικού προγραμματισμού. Έστω ρ ένας σχετικά μικρός αριθμός (π.χ. $\rho = 0.05$ ή $\rho = 0.01$). Διακριτοποιούμε το S περιορίζοντας την προσοχή μας μόνο στα σημεία του που ανήκουν στο σύνολο:

$$S' = \{(k\rho, l\rho): k = -Q_1/\rho, \dots, Q_1/\rho, l = -Q_2/\rho, \dots, Q_2/\rho\}.$$

Το ελάχιστο αναμενόμενο κόστος $f_N(k\rho, l\rho), (k\rho, l\rho) \in S'$, βρίσκεται χρησιμοποιώντας την (4.5) με $q = k\rho, s = l\rho$. Το ελάχιστο αναμενόμενο κόστος $f_j(k\rho, l\rho), (k\rho, l\rho) \in S'$ και οι αντίστοιχες βέλτιστες αποφάσεις βρίσκονται αναδρομικά, για $j = N - 1, N - 2, \dots, 1$, χρησιμοποιώντας τις (4.1) – (4.4). Τα αναμενόμενα κόστη για κάθε ενέργεια υπολογίζονται κατά προσέγγιση. Για παράδειγμα, η ποσότητα $E_j(k\rho, l\rho)$, στην Περίπτωση 4, για $-Q_1/\rho \leq k < 0$ και $-Q_2/\rho \leq l < 0$, υπολογίζεται προσεγγιστικά ως εξής:

$$E_j(k\rho, l\rho) = c_{j,j+1} + \sum_{x=0}^{Q_1/\rho-1} \sum_{y=0}^{Q_2/\rho-1} f_{j+1}(Q_1 + k\rho - x\rho, Q_2 + l\rho - y\rho) h_{j+1}(x\rho, y\rho) \rho^2,$$

όπου h_{j+1} είναι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ξ_{j+1} και ψ_{j+1} .

Η βέλτιστη πολιτική αναπλήρωσης, δηλαδή οι κρίσιμοι αριθμοί $k_{1j}(k\rho), k = 0, \dots, Q_1/\rho, k_{2j}(l\rho), l = 0, \dots, Q_2/\rho, q_j$ και s_j για κάθε πελάτη $j \in \{1, \dots, N - 1\}$ μπορεί να βρεθεί από έναν αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού, που λαμβάνει υπόψη του τη δομή της βέλτιστης πολιτικής ανανέωσης των αποθεμάτων όπως δίνεται στο θεώρημα 4.

4.4 Αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού

Η βέλτιστη πολιτική αναπλήρωσης, δηλαδή οι κρίσιμοι αριθμοί $k_{1j}(k\rho), k = 0, \dots, Q_1/\rho, k_{2j}(l\rho), l = 0, \dots, Q_2/\rho, q_j$ και s_j για κάθε πελάτη $j \in \{1, \dots, N - 1\}$ μπορεί να βρεθεί από έναν αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού, που λαμβάνει υπόψη του τη δομή της βέλτιστης πολιτικής ανανέωσης των αποθεμάτων όπως δίνεται στο θεώρημα 4.

Αλγόριθμος για τον προσδιορισμό των κρίσιμων αριθμών $k_{1j}(k\rho), k = 0, \dots, Q_1/\rho, k_{2j}(l\rho), l = -Q_2/\rho, \dots, -1, q_j$ και s_j για κάθε πελάτη $j \in \{1, \dots, N - 1\}$.

Βήμα 0:

Θέτω $f_N(k\rho, l\rho) = c_{N0} + 1((k\rho)^- + (l\rho)^-) \cdot 2c_{N0}, |k\rho| \leq Q_1, |l\rho| \leq Q_2$.

Θέτω $j = N - 1$.

Βήμα 1 (Προσδιορισμός των κρίσιμων αριθμών $k_{1j}(k\rho), k = 0, \dots, Q_1/\rho$):

Υπολογίζω B_j .

Για $k = 0, \dots, Q_1/\rho$ κάντε το εξής:

Για $l = Q_2/\rho, Q_2/\rho - 1, \dots, 0$ υπολογίζω $A_j(k\rho, l\rho)$ μέχρι $A_j(k\rho, l\rho) > B_j$

ή $l\rho = -\rho$.

Θέτω $k_{1j}(k\rho) = l\rho + \rho$.

Θέτω $f_j(k\rho, l\rho) = B_j$, για $l \in \{0, \dots, k_{1j}(k\rho)/\rho - 1\}$

και $f_j(k\rho, l\rho) = A_j(k\rho, l\rho)$, για $l \in \{k_{1j}(k\rho)/\rho, \dots, Q_2/\rho\}$.

Βήμα 2 (Προσδιορισμός των κρίσιμων αριθμών $k_{2j}(l\rho), l = -Q_2/\rho, \dots, -1$):

Για $l = -1, -2, \dots, -Q_2/\rho$ κάντε το εξής:

Για $k = -Q_1/\rho, -Q_1/\rho + 1, \dots$ υπολόγισε $E_j(k\rho, l\rho)$ μέχρι $E_j(k\rho, l\rho) < B_j$

ή $k\rho = 0$.

Θέτω $k_{2j}(l\rho) = k\rho - \rho$.

Θέτω $f_j(k\rho, l\rho) = 2c_{j0} + B_j, k \in \{-Q_2/\rho, \dots, k_{2j}(l\rho)/\rho\}$

και $f_j(k\rho, l\rho) = 2c_{j0} + E_j(k\rho, l\rho), k \in \{k_{2j}(l\rho)/\rho - 1, \dots, -1\}$.

Βήμα 3 (Προσδιορισμός των κρίσιμων αριθμών q_j):

Για $k = -Q_1/\rho, -Q_1/\rho + 1, \dots$ υπολόγισε $C_j(k\rho)$ μέχρι $C_j(k\rho) < B_j$

ή $k\rho = 0$.

Θέτω $q_j = k\rho$.

Θέτω $f_j(k\rho, l\rho) = 2c_{j0} + B_j$, για $k \in \{-Q_1/\rho, \dots, q_j/\rho - 1\}$ και $l \in \{0, \dots, Q_2/\rho\}$

και $f_j(k\rho, l\rho) = 2c_{j0} + C_j(k\rho)$, για $k \in \{p_j/\rho, \dots, -1\}$ και $l \in \{0, \dots, Q_2/\rho\}$.

Βήμα 4 (Προσδιορισμός των κρίσιμων αριθμών s_j):

Για $l = -Q_2/\rho, -Q_2/\rho + 1, \dots$ υπολόγισε $D_j(l\rho)$ μέχρι $D_j(l\rho) < B_j$

ή $l\rho = 0$.

Θέτω $s_j = l\rho$.

Θέτω $f_j(k\rho, l\rho) = 2c_{j0} + B_j$, για $l \in \{-Q_2/\rho, \dots, s_j/\rho - 1\}$ και $k \in \{0, \dots, Q_1/\rho\}$

και $f_j(k\rho, l\rho) = 2c_{j0} + D_j(l\rho)$, για $l \in \{s_j/\rho, \dots, -1\}$ και $k \in \{0, \dots, Q_1/\rho\}$.

Βήμα 5:

Θέτω $j = j - 1$. Αν $j \geq 1$ μεταβείτε στο Βήμα 1, αλλιώς σταματήστε.

Ο παραπάνω αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού βασίζεται στη δομή της βέλτιστης πολιτικής ανανέωσης των αποθεμάτων που περιγράφεται στο Θεώρημα 4. Η πολυπλοκότητα αυτού του αλγορίθμου είναι $O(N[Q_1/\rho]^2 \cdot [Q_2/\rho]^2)$. Είναι πιο αποτελεσματικός από τον αρχικό αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού, καθώς απαιτεί λιγότερους υπολογισμούς. Για παράδειγμα, για $j = 1, \dots, N - 1$, οι ποσότητες $E_j(k\rho, l\rho)$, για k τέτοια ώστε $-Q_1/\rho \leq k < k_{2j}(l\rho)/\rho$ και για l τέτοια ώστε $-1 \leq l \leq -Q_2/\rho$ δεν υπολογίζονται, ενώ αυτές οι ποσότητες υπολογίζονται στον αρχικό αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού. Στην Ενότητα 5 θα συγκρίνουμε τους χρόνους υπολογισμών αυτών των αλγορίθμων σε ένα αριθμητικό παράδειγμα.

4.5 Αριθμητικό Παράδειγμα

Στο ακόλουθο αριθμητικό παράδειγμα, εφαρμόσαμε τον αρχικό αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού και τον αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού εκτελώντας τα αντίστοιχα προγράμματα στο Matlab σε προσωπικό υπολογιστή εξοπλισμένο με Intel Core i5-3230 M, επεξεργαστή 2.6 GHz και 4 GB μνήμης RAM. Στο Παράδειγμα 4.1 υποθέτουμε ότι οι απαιτήσεις για νέα προϊόντα που αποθηκεύονται στο διαμέρισμα 1 του οχήματος και οι ποσότητες των παλαιών προϊόντων που τοποθετούνται στο διαμέρισμα 2 του οχήματος είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Αυτό το παράδειγμα επιβεβαιώνει τα δομικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο Θεώρημα 4.

Παράδειγμα 4.1 Ας υποθέσουμε ότι $N = 9$. Οι χωρητικότητες των διαμερίσματος 1 και 2 είναι $Q_1 = 8$ και $Q_2 = 7$, αντίστοιχα. Τα κόστη της διαδρομής ανάμεσα στους πελάτες j και $j + 1$, $j \in \{1, \dots, 8\}$ είναι: $c_{12} = 21, c_{23} = 16, c_{34} = 23, c_{45} = 15, c_{56} = 20, c_{67} = 16, c_{78} = 24, c_{89} = 19$. Τα κόστη της διαδρομής ανάμεσα στους πελάτες j , $j \in \{1, \dots, 9\}$ και την αποθήκη είναι: $c_{10} = 15, c_{20} = 18, c_{30} = 14, c_{40} = 19, c_{50} = 17, c_{60} = 14, c_{70} = 18, c_{80} = 21, c_{90} = 17$. Σημειώστε ότι αυτά τα κόστη ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα. Υποθέτουμε επίσης ότι, για κάθε πελάτη $j \in \{1, \dots, 9\}$, η ζήτηση ξ_j για νέα προϊόντα, που παραδίδονται, και η ποσότητα ψ_j των παλαιών προϊόντων, που επιστρέφονται, είναι ανεξάρτητες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν αποκομμένες κανονικές κατανομές στα διαστήματα $[0, Q_1]$ και $[0, Q_2]$, αντίστοιχα. Για κάθε πελάτη $j \in \{1, \dots, 9\}$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\varphi_j(x)$ της ζήτησης για νέα προϊόντα δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_j(x) = [F(Q_1) - F(0)]^{-1} \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\},$$

$$x \in [0, Q_1], \mu_1 \in \mathbb{R}, \sigma_1^2 > 0$$

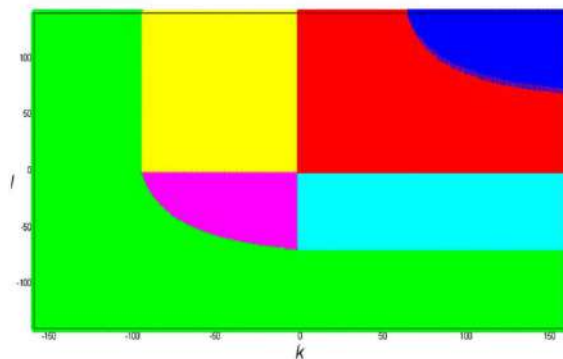
και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\theta_j(x)$ των επιστρεφόμενων παλαιών προϊόντων δίνεται από:

$$\theta_j(x) = [F(Q_2) - F(0)]^{-1} \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\},$$

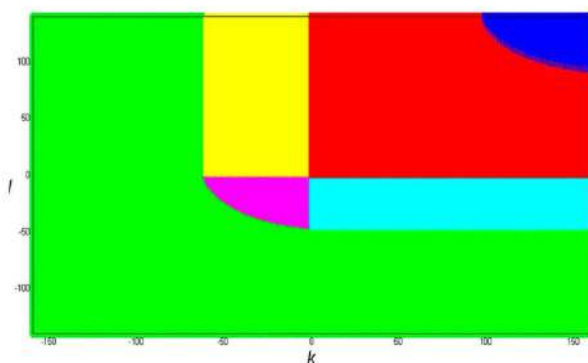
$$x \in [0, Q_2], \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_2^2 > 0$$

όπου $F(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left\{ -\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\} dt$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της κανονικής κατανομής με παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma^2 > 0$. Επιλέγουμε $\mu_1 = 6, \sigma_1 = 4$ και $\mu_2 = 5, \sigma_2 = 2$.

Στα παρακάτω σχήματα, Σχήμα 9 και Σχήμα 10, παρουσιάζουμε τις βέλτιστες αποφάσεις για τους πελάτες 4 και 7, αντίστοιχα.



Σχήμα 9. Οι βέλτιστες αποφάσεις για τον πελάτη 4.



Σχήμα 10. Οι βέλτιστες αποφάσεις για τον πελάτη 7.

Εάν $q \in [0, Q_1]$, $s \in [0, Q_2]$, η Ενέργεια 1 χρωματίζεται με μπλε χρώμα και η Ενέργεια 2 με κόκκινο χρώμα. Εάν $q \in [-Q_1, 0)$, $s \in [0, Q_2]$, η Ενέργεια 3 χρωματίζεται με κίτρινο χρώμα και η Ενέργεια 4 χρωματίζεται με πράσινο χρώμα. Εάν $q \in [0, Q_1]$, $s \in [-Q_2, 0)$, η Ενέργεια 5 χρωματίζεται με κυανό χρώμα και η Ενέργεια 4 με πράσινο. Εάν $q \in [-Q_1, 0)$, $s \in [-Q_2, 0)$, η Ενέργεια 6 χρωματίζεται με φούξια και η Ενέργεια 4 χρωματίζεται με πράσινο. Επιλέγουμε $\rho = 0.05$ έτσι ώστε ο διακριτοποιημένος χώρος καταστάσεων S' για κάθε πελάτη $j \in \{1, \dots, 9\}$ είναι το σύνολο $\{(k * 0,05, l * 0,05) : k = -160, \dots, 160, l = -140, \dots, 140\}$.

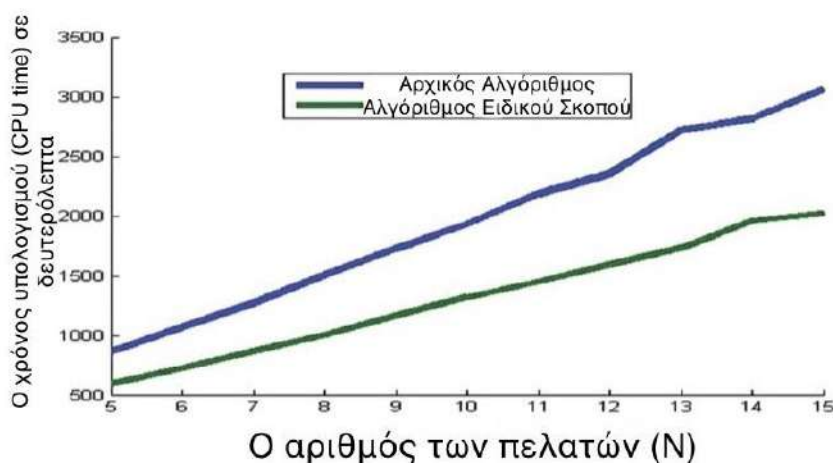
Τα Σχήματα 9 και 10 επιβεβαιώνουν τα δομικά αποτελέσματα σχετικά με τη βέλτιστη πολιτική αναπλήρωσης που δόθηκαν στο θεώρημα 4. Η τιμή του ελάχιστου συνολικού αναμενόμενου κόστους f_0 βρέθηκε να είναι περίπου ίση με 317.7. Ο χρόνος υπολογισμού του αλγόριθμου δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού είναι περίπου ίσος με 1165 δευτερόλεπτα. Είναι σημαντικά μικρότερος από τον χρόνο υπολογισμού του αρχικού αλγόριθμου δυναμικού προγραμματισμού που είναι περίπου ίσος με 1729 δευτερόλεπτα.

Στον παρακάτω Πίνακα 4, για τους πελάτες $j \in \{5, 6, 7, 8\}$, παρουσιάζουμε τις κρίσιμες ποσότητες q_j και s_j .

Πίνακας 4

Πελάτης	Κρίσιμη ποσότητα q_j	Κρίσιμη ποσότητα s_j
5	-3.65	-2.8
6	-3.6	-2.7
7	-3.1	-2.4
8	-3.65	-2.65

Υποθέτουμε τώρα ότι ο αριθμός των πελατών N παίρνει τιμές στο σύνολο $\{5, 6, \dots, 15\}$. Για κάθε τιμή του N , έστω $c_{i,i+1} = 16, i \in \{1, \dots, N - 1\}, c_{i0} = 18$, εάν το i είναι περιττό και $c_{i0} = 14$, αν το i είναι άρτιο. Στο παρακάτω Σχήμα 11, παρουσιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις που δείχνουν τη διακύμανση των χρόνων υπολογισμού, εκφραζόμενη σε δευτερόλεπτα, που απαιτείται από τον αρχικό δυναμικό προγραμματισμό και τον αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού καθώς το N μεταβάλλεται στο σύνολο $\{5, 6, \dots, 15\}$. Παρατηρούμε ότι, καθώς αυξάνεται το N , οι απαιτούμενοι υπολογιστικοί χρόνοι και για τους δύο αλγορίθμους αυξάνονται περίπου γραμμικά. Ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται από τον αλγόριθμο ειδικού σκοπού είναι σημαντικά μικρότερος από τον υπολογιστικό χρόνο που απαιτεί ο αρχικός δυναμικός αλγόριθμος. Η διαφορά μεταξύ των χρόνων υπολογισμού αυξάνεται καθώς το N αυξάνεται.



Σχήμα 11. Οι χρόνοι υπολογισμού των αλγορίθμων καθώς το N ποικίλλει.

4.6 Περίληψη των αποτελεσμάτων και θέμα για μελλοντική έρευνα

Στο παρόν κεφάλαιο μελετήθηκε ένα στοχαστικό πρόβλημα δρομολόγησης ενός οχήματος με πεπερασμένη χωρητικότητα και κατανεμημένο φορτίο στο οποίο (i) οι πελάτες εξυπηρετούνται σύμφωνα με μια προκαθορισμένη σειρά, (ii) το όχημα παραδίδει σε κάθε πελάτη μια ποσότητα νέων (ή φρέσκων ή χρήσιμων) προϊόντων και συλλέγει μια ποσότητα παλιών (ή ληγμένων ή άχρηστων) προϊόντων, (iii) οι ποσότητες που παραδίδονται και συλλέγονται είναι στοχαστικές (οι πραγματικές ποσότητες αποκαλύπτονται όταν το όχημα επισκέπτεται κάθε πελάτη), (iv) το νέα και τα παλιά προϊόντα τοποθετούνται σε δύο διαφορετικά διαμερίσματα του οχήματος, (v) η ποσότητα των νέων προϊόντων που ζητούνται και η ποσότητα των παλαιών προϊόντων που επιστρέφονται είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Ορίσαμε έξι διαφορετικές ενέργειες που μπορούν να επιλεγούν όταν το όχημα φτάνει στην τοποθεσία κάθε πελάτη. Η δομή κόστους του προβλήματος περιλαμβάνει το κόστος ταξιδιού μεταξύ διαδοχικών πελατών και το κόστος ταξιδιού μεταξύ των πελατών και της αποθήκης. Δόθηκε ένας στοχαστικός αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού που οδηγεί στη πολιτική ανεφοδιασμού που ελαχιστοποιεί το συνολικό αναμενόμενο κόστος για την εξυπηρέτηση όλων των πελατών. Αποδείξαμε ότι, για κάθε πελάτη, η βέλτιστη πολιτική αναπλήρωσης αποθεμάτων έχει μια συγκεκριμένη δομή που βασίζεται σε ένα σύνολο κρίσιμων ποσοτήτων. Σύμφωνα με αυτό το δομικό αποτέλεσμα, το σύνολο όλων των πιθανών καταστάσεων που αντιστοιχούν σε κάθε πελάτη χωρίζεται σε οκτώ ξένα υποσύνολα. Η βέλτιστη πολιτική ανανέωσης αποθεμάτων προβλέπει την ίδια ενέργεια σε όλες τις καταστάσεις του κάθε υποσυνόλου. Τέλος, από το αριθμητικό παράδειγμα παρατήρησα ότι καθώς αυξάνεται το N , ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται από τον αλγόριθμο ειδικού σκοπού είναι σημαντικά μικρότερος από τον υπολογιστικό χρόνο που απαιτεί ο αρχικός δυναμικός αλγόριθμος.

Ένα θέμα για μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να είναι η μελέτη ενός περισσότερο γενικού προβλήματος όπου το όχημα $K + L \geq 2$ τμημάτων, παραδίδει K προϊόντα με συνεχείς απαιτήσεις και παραλαμβάνει L προϊόντα με διακριτές απαιτήσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΜΕ ΧΡΟΝΙΚΑ ΠΑΡΑΘΥΡΑ

5.1 Εισαγωγή

Στο πρώτο μέρος του παρόντος κεφαλαίου (Ενότητες 5.3 και 5.4) εξετάζουμε ένα στοχαστικό πρόβλημα παραλαβής και παράδοσης με αυστηρά χρονικά παράθυρα. Το πρόβλημα παραλαβής και παράδοσης (PDP) είναι ένα εκτενώς μελετημένο πρόβλημα δρομολόγησης. Τα αιτήματα των πελατών αποτελούνται από δύο μέρη: μια παραλαβή σε μια τοποθεσία και μια παράδοση σε μια άλλη. Το πρόβλημα παραλαβής και παράδοσης έχει ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών, συμπεριλαμβανομένων των υπηρεσιών διαμοιρασμού διαδρομών (Wang et al. (2016)) και των υπηρεσιών παράδοσης γευμάτων (Aziez et al. (2020)). Στις υπηρεσίες παραλαβής και παράδοσης, ένας σημαντικός παράγοντας που επηρεάζει την ικανοποίηση των πελατών είναι η ακρίβεια της υπηρεσίας. Οι Nguyen et al. (2019) αναφέρουν ότι η δυνατότητα εκτέλεσης της υπηρεσίας παράδοσης εντός ενός συγκεκριμένου χρονικού παραθύρου είναι ένα από τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά στη λήψη αποφάσεων από τους πελάτες, δεδομένων των πολλαπλών επιλογών υπηρεσιών. Για τις υπηρεσίες διαμοιρασμού διαδρομών και λεωφορείων, η ακρίβεια είναι σημαντική για την ικανοποίηση των επιβατών. Στις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες εφαρμογές παράδοσης γευμάτων, όπως η Uber Eats και η Meituan, οι πελάτες μπορούν να ζητήσουν επιστροφή χρημάτων ή να ακυρώσουν την παραγγελία εάν η υπηρεσία είναι μεταγενέστερη μιας συγκεκριμένης ώρας. Ως εκ τούτου, οι εταιρείες πρέπει να εκτελούν την υπηρεσία εγκαίρως και αξιόπιστα.

Σε ένα σημαντικό μέρος της βιβλιογραφίας για τη δρομολόγηση οχημάτων, οι χρόνοι διαδρομής μεταξύ ορισμένων πελατών θεωρούνται ντετερμινιστικοί. Οι περισσότερες από τις υπάρχουσες εργασίες που μελετούν τους στοχαστικούς χρόνους ταξιδιού υιοθετούν την υπόθεση ότι τα χρονικά παράθυρα είναι χαλαρά, που σημαίνει ότι τα χρονικά παράθυρα μπορούν να παραβιάζονται με κάποιο κόστος ποινής στην αντικειμενική συνάρτηση. Σε κάθε πελάτη, επιβάλλεται ένα κόστος ποινής ανάλογα με το πώς πόσο νωρίς ή αργά φτάνει το όχημα. Εάν ένα όχημα φτάσει νωρίς, μπορεί να ξεκινήσει την εξυπηρέτησή του αμέσως. Ένας περιορισμός της παραπάνω μεθόδου είναι ότι είναι ανέφικτη η μέτρηση του κόστους των καθυστερημένων παραδόσεων και να καθορίσει τέτοια συνάρτηση κόστους ποινής με όρους χρημάτων σε πραγματικές εφαρμογές. Το κόστος μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερο από την επιστροφή χρημάτων, διότι τέτοιες καθυστερημένες παραδόσεις θα μπορούσαν να επηρεάσουν τις μελλοντικές πωλήσεις. Μια εναλλακτική μέθοδος είναι να υποθέσουμε ότι τα χρονικά παράθυρα είναι αυστηρά. Υπό τον καθορισμό αυστηρών χρονικών παραθύρων, ένα όχημα πρέπει να περιμένει μέχρι την έναρξη ενός χρονικού παραθύρου

για να ξεκινήσει την υπηρεσία του, εάν φτάσει νωρίς. Αυτό είναι σύνηθες για τις επιβατικές υπηρεσίες, καθώς μπορεί να μην είναι διαθέσιμες πριν από την προγραμματισμένη ώρα παραλαβής τους. Αφιξη αργότερα από το τέλος της ώρας έχει ως αποτέλεσμα την αποτυχία εξυπηρέτησης ολόκληρης της διαδρομής. Σε σύγκριση με την υπόθεση του χαλαρού χρονικού παραθύρου, η υπόθεση του αυστηρού χρονικού παραθύρου μπορεί να αξιολογήσει την αξιοπιστία της υπηρεσίας με την πιθανότητα ικανοποίησης χρονικών παραθύρων. Στο παρόν μέρος του κεφαλαίου, υποθέτουμε ότι τα χρονικά παράθυρα είναι αυστηρά και εισάγουμε την έννοια του επιπέδου εξυπηρέτησης, το οποίο υποδηλώνει την επιθυμητή πιθανότητα ότι η παράδοση θα είναι έγκαιρη. Καθώς οι πελάτες μπορεί να έχουν διαφορετικές απαιτήσεις και προσδοκίες για την ακρίβεια, υποθέτουμε ότι κάθε κόμβος συνδέεται με ένα επίπεδο εξυπηρέτησης κόμβου. Υποθέτουμε επίσης ένα παγκόσμιο επίπεδο εξυπηρέτησης που μετρά την αξιοπιστία της λύσης της συνολικής δρομολόγησης. Το παγκόσμιο επίπεδο εξυπηρέτησης είναι ένας άμεσος δείκτης για τον πάροχο υπηρεσιών ώστε να αξιολογεί τη συνολική αξιοπιστία της υπηρεσίας του. Οι ακριβείς ορισμοί αυτών των όρων παρουσιάζονται στις επόμενες ενότητες του κεφαλαίου.

Εξετάζουμε ένα πρόβλημα παραλαβής και παράδοσης με αυστηρά χρονικά παράθυρα λαμβάνοντας υπόψη τους στοχαστικούς και χρονικά εξαρτώμενους χρόνους ταξιδιού (PDPHTW-STDTT). Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι ταξιδιού μεταξύ των τοποθεσιών των πελατών ακολουθούν μια συγκεκριμένη κατανομή πιθανότητας και η κατανομή μπορεί να εξαρτάται από τον χρόνο έναρξης του ταξιδιού. Η κατανομή θεωρείται γνωστή και μπορεί να προκύψει από ιστορικά δεδομένα. Κάθε πελάτης θεωρείται ότι είναι συνδεδεμένος με ένα σκληρό χρονικό παράθυρο και το επιθυμητό επίπεδο εξυπηρέτησης του κόμβου. Υπάρχει ένα επιθυμητό συνολικό επίπεδο εξυπηρέτησης. Χρησιμοποιώντας μια περιορισμένη σε πιθανότητες προσέγγιση, στοχεύουμε στην παροχή μιας δρομολόγησης που ικανοποιεί τα επιθυμητά επίπεδα εξυπηρέτησης με το ελάχιστο λειτουργικό κόστος.

Προτείνουμε μια μέθοδο εκτίμησης του χρόνου άφιξης με βάση τις εργασίες των Julia et al. (2006) και Ehmke et al. (2015). Διαφορετικά από τη μέθοδο ευρετικής λύσης που προτείνεται από τους Ehmke et al. (2015), η δική μας λύση είναι μια ακριβής μέθοδος επίλυσης που βασίζεται στη μέθοδο branch-cut-and-price. Προτείνουμε μια διαμέριση συνόλου του PDPHTW-STDTT που περιλαμβάνει έναν περιορισμό πιθανότητας επιτυχίας διαδρομής. Δεδομένου ότι είναι αναποτελεσματικό και δεν είναι πρακτικό να απαριθμηθούν όλες οι πιθανές διαδρομές στο πρόβλημα τιμολόγησης, αναπτύσσεται ένας αλγόριθμος επισήμανσης για την εξάλειψη των λιγότερο υποσχόμενων διαδρομών για να επιταχυνθεί η διαδικασία επίλυσης.

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου (Ενότητα 5.5) εξετάζουμε ένα στοχαστικό πρόβλημα δρομολόγησης αποθεμάτων συνεχούς χρόνου με χρονικά παράθυρα. Στην πράξη, τα πολλαπλά λογιστικά προβλήματα βελτιστοποίησης δεν μπορούν να επιλυθούν αποτελεσματικά. Η υλικοτεχνική υποδομή που σχετίζεται με την απογραφή και τη δρομολόγηση είναι ιδιαίτερα δύσκολη. Θεωρήστε μια αλυσίδα εφοδιασμού στην οποία

ο στόχος είναι να ελαχιστοποιήσει του μακροπρόθεσμου κόστους ενός δικτύου διανομής που αποτελείται από ένα σύνολο καταστημάτων που εξυπηρετούνται από μια κεντρική εγκατάσταση. Ο συντονισμός και των δύο αποφάσεων απογραφής και δρομολόγησης είναι ζωτικής σημασίας για τη σωστή λειτουργία και την κατανομή των πόρων για τις εταιρείες αυτές. Για να αντιμετωπίσουν αυτή την κατάσταση, πολλές εταιρείες υιοθετούν ένα σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων από προμηθευτές για την κεντρική δημιουργία και διαχείριση όλων των σχεδίων αναπλήρωσης και διανομής. Το σύστημα αυτό θα πρέπει να χρησιμοποιείται σε μεγάλο βαθμό, διότι η εφαρμογή ενός συστήματος διαχείρισης αποθεμάτων από τον προμηθευτή μπορεί να μειώσει σημαντικά τη συνολική εφοδιαστική (Lee and Whang (2008)).

Εξετάζουμε ένα τέτοιο σύστημα και το μοντελοποιούμε ως το πρόβλημα δρομολόγησης αποθεμάτων (IRP) για ένα προϊόν, το οποίο παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στη θεμελιώδη εργασία (Bell et al. (1983)). Στις περισσότερες πραγματικές καταστάσεις, η ζήτηση που παρατηρείται στα καταστήματα είναι αβέβαιη. Επομένως, εξετάζουμε μια στοχαστική παραλλαγή του προβλήματος, αλλά με ένα είδος προϊόντος. Παρουσιάζουμε το στοχαστικό IRP συνεχούς χρόνου με χρονικά παράθυρα (CTSIRPTW), όπου, ένα νέο χαρακτηριστικό του προβλήματος είναι ότι το σύστημα εξελίσσεται συνεχώς με την πάροδο του χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι, κατά μήκος κάθε περιόδου, το προϊόν καταναλώνεται συνεχώς από το απόθεμα των πελατών. Η κατανάλωση προϊόντος σε συνεχή χρόνο είναι ένα χαρακτηριστικό που εισήχθη πρόσφατα στη βιβλιογραφία του IRP (Lagos et al. (2020)), ωστόσο, δεν αποτελεί νέο χαρακτηριστικό σε άρθρα σχετικά με τη διαχείριση αποθεμάτων. Η εξάντληση αποθεμάτων σε συνεχή χρόνο μοιάζει με τις πιο διαδεδομένες καταστάσεις του πραγματικού κόσμου και, χάρη στην αυξανόμενη εφαρμογή αισθητήρων για τη μέτρηση των επιπέδων αποθεμάτων σε πραγματικό χρόνο, το πρόβλημα αποκτά ολοένα και μεγαλύτερη σημασία. Ως συνέπεια της θεώρησης ενός ρυθμού κατανάλωσης σε συνεχή χρόνο, οι χρόνοι παράδοσης πρέπει να προγραμματίζονται προσεκτικά και οι ποσότητες που παραδίδονται επηρεάζουν έντονα το συνολικό κόστος της αλυσίδας εφοδιασμού. Αυτή είναι μια σημαντική διαφορά σε σχέση με την πλειονότητα της βιβλιογραφίας του IRP, στην οποία, ακόμη και αν ο ορίζοντας προγραμματισμού χωρίζεται σε ένα σύνολο περιόδων, η κατανάλωση του προϊόντος στους πωλητές πραγματοποιείται στο τέλος της περιόδου και είναι μια στιγμιαία ενέργεια. Στοχεύουμε στον αποτελεσματικό προγραμματισμό των χρόνων και των ποσοτήτων παράδοσης, ώστε να αποφύγουμε τις πιθανές καταστάσεις εξάντλησης αποθεμάτων που μπορεί να προκαλέσει η συνεχής κατανάλωση του προϊόντος.

Οι κύριες συνεισφορές του κεφαλαίου συνοψίζονται ως εξής:

1. Ορίζουμε το πρόβλημα παραλαβής και παράδοσης με αυστηρά χρονικά παράθυρα λαμβάνοντας υπόψη τους στοχαστικούς και χρονικά εξαρτώμενους χρόνους ταξιδιού και προτείνουμε ένα μοντέλο περιορισμένης πιθανότητας για το πρόβλημα.

2. Παρουσιάζουμε το στοχαστικό πρόβλημα δρομολόγησης αποθεμάτων συνεχούς χρόνου με χρονικά παράθυρα, όπου ένα χαρακτηριστικό του προβλήματος είναι ότι, κατά μήκος κάθε περιόδου, το προϊόν καταναλώνεται συνεχώς από το απόθεμα των πελατών.

Το υπόλοιπο του κεφαλαίου οργανώνεται ως εξής. Στην Ενότητα 2 παρουσιάζεται μια ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας. Στην Ενότητα 3 ορίζεται το πρόβλημα PDPHTW-STDTT και παρουσιάζονται οι μέθοδοι για την εκτίμηση των χρόνων άφιξης και για την εκτίμηση της πιθανότητας επιτυχής διαδρομής. Στην Ενότητα 4, περιγράφεται μια μέθοδος επίλυσης παρέχοντας τη διατύπωση του προβλήματος με διαμέριση συνόλου. Στην Ενότητα 5 ορίζεται το πρόβλημα CTSIRPTW και διατυπώνεται ως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης δύο σταδίων. Στην τελευταία ενότητα δίνουμε συμπεράσματα και κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα.

5.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Στην εργασία μας υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου ταξιδιού είναι γνωστή, δεδομένου ότι υπάρχει αρκετή εργασία που μελετά την κατανομή των χρόνων ταξιδιού σε αστικές περιοχές με τη χρήση ιστορικών δεδομένων (Yazici et al. (2012)), και οι πληροφορίες είναι επίσης διαθέσιμες από διαδικτυακές βάσεις δεδομένων. Ως εκ τούτου, η δική μας εργασία εμπίπτει στην κατηγορία των προβλημάτων στοχαστικής δρομολόγησης οχημάτων (SVRP), και η ακόλουθη βιβλιογραφική ανασκόπηση θα επικεντρωθεί στον τρόπο αντιμετώπισης των χρονικών παραθύρων στο πλαίσιο του SVRP. Πρόσφατες έρευνες σχετικά με το SVRP μπορούν να βρεθούν στις εργασίες των Ogola et al. (2017, 2018).

Στην πλειονότητα της βιβλιογραφίας που μελετά το SVRP με χρονικά παράθυρα, θεωρείται ότι τα χρονικά παράθυρα είναι χαλαρά. Τα χαλαρά χρονικά παράθυρα συνεπάγονται ότι τα οχήματα που φθάνουν νωρίτερα από την έναρξη των χρονικών παραθύρων δεν χρειάζεται να περιμένουν, ενώ οι πρώιμες και οι καθυστερημένες αφίξεις θα οδηγήσουν σε κόστος ποινής. Οι Ando and Taniguchi (2006) μελέτησαν το VRPTW με αβέβαιους χρόνους ταξιδιού. Οι καθυστερημένες αφίξεις δημιουργούν ένα κόστος ποινής ανάλογο με το μήκος του χρόνου καθυστέρησης. Ο στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους, συμπεριλαμβανομένου του λειτουργικού κόστους και των ποινών. Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιείται ένας γενετικός αλγόριθμος. Οι Li et al. (2010) διερεύνησαν το VRPTW με στοχαστικούς χρόνους ταξιδιού και εξυπηρέτησης. Η μία από τις δύο προτεινόμενες διατυπώσεις υποθέτει χαλαρά χρονικά παράθυρα και δίνεται ένα μοντέλο στοχαστικού προγραμματισμού με διατύπωση πόρων. Μια ευρετική μέθοδος tabu-search-based επιλύει το πρόβλημα. Οι Taş et al. (2013, 2014a, 2014b) μελέτησαν προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστικούς χρόνους ταξιδιού, συμπεριλαμβανομένων χαλαρών χρονικών

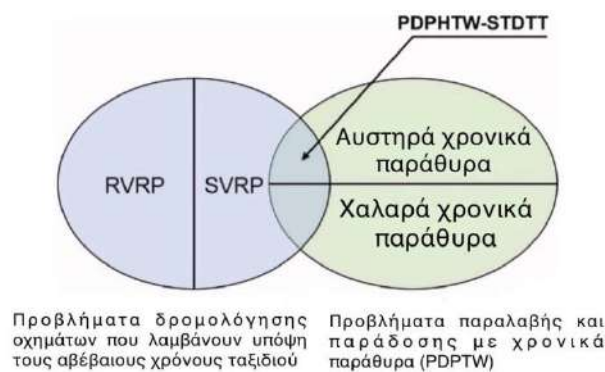
παραθύρων, τόσο υπό χρονικά ανεξάρτητες όσο και υπό χρονικά εξαρτώμενες ρυθμίσεις. Η αντικειμενική συνάρτηση είναι η ελαχιστοποίηση ενός συνολικού σταθμισμένου κόστους, το οποίο περιλαμβάνει την ποινή για την καθυστέρηση και την πρωιμότητα. Προτείνεται μια μέθοδος για την εκτίμηση της προσδοκίας και της διακύμανσης των χρόνων άφιξης. Στο Taş et al. (2013, 2014a), τα προβλήματα επιλύονται με μια ευρετική μέθοδο tabu-search. Στο Taş et al. (2014b), προτείνεται μια μέθοδος επίλυσης που βασίζεται στη δημιουργία στηλών και στη λύση branch-and-price.

Λίγες εργασίες μελέτησαν το SVRP με αυστηρά χρονικά παράθυρα, οι οποίες είναι οι πιο στενά συνδεδεμένες με την εργασία μας. Σε αυτές τις εργασίες, το βασικό σημείο είναι η εγγύηση ενός συγκεκριμένου επιπέδου εξυπηρέτησης σε κάθε πελάτη. Μια σημαντική πρόκληση είναι να αντιμετωπιστεί η αποκοπή των κατανομών πιθανότητας των χρόνων άφιξης που προκαλείται από τα αυστηρά χρονικά παράθυρα, καθώς τα οχήματα πρέπει να περιμένουν την έναρξη του χρονικού παραθύρου για να ξεκινήσουν την εξυπηρέτηση. Προτείνονται διάφορες μέθοδοι για την εκτίμηση των κατανομών πιθανότητας των χρόνων άφιξης μετά την αποκοπή. Η εργασία των Jula et al. (2006) είναι μία από τις πρώτες προσπάθειες που διερευνούν την επίδραση των αυστηρών χρονικών παραθύρων. Τόσο οι χρόνοι ταξιδιού όσο και οι χρόνοι εξυπηρέτησης θεωρούνται στοχαστικοί. Ένα ανάπτυγμα σειράς Taylor προσεγγίζει τη μέση τιμή και τη διακύμανση του χρόνου άφιξης σε κάθε πελάτη. Η μέθοδος εκτίμησης αντιμετωπίζει μη σταθερές κατανομές χρόνου ταξιδιού που μεταβάλλονται στο χρόνο. Τα όρια Chebyshev και Chernoff καθορίζουν αν μια διαδρομή πληροί το απαιτούμενο επίπεδο εξυπηρέτησης. Το προτεινόμενο πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα ταξιδιωτικού πωλητή που περιλαμβάνει μόνο ένα όχημα. Οι Li et al. (2010) πρότειναν επίσης μια διατύπωση προγραμματισμού με περιορισμούς τύχης για το VRP με στοχαστικούς χρόνους ταξιδιού, η οποία διαφέρει από την παραπάνω διατύπωση. Στο μοντέλο προγραμματισμού με περιορισμένη πιθανότητα, το επίπεδο εξυπηρέτησης σε κάθε πελάτη είναι εγγυημένο. Η πιθανότητα επιτυχίας της διαδρομής προκύπτει απευθείας από προσομοιώσεις Monte Carlo χωρίς σαφείς εκφράσεις εκτίμησης. Οι Ehmke et al. (2015) μελέτησαν ένα VRP με στοχαστικούς χρόνους ταξιδιού και αυστηρά χρονικά παράθυρα. Χρησιμοποιώντας τη θεωρία ακραίων τιμών, οι συγγραφείς πρότειναν μια διαφορετική μέθοδο εκτίμησης για την προσέγγιση της μέσης τιμής και της διακύμανσης των χρόνων άφιξης. Κατά την εκτίμηση της πιθανότητας επιτυχίας της διαδρομής μετά την εκτίμηση της μέσης τιμής και της διακύμανσης των χρόνων άφιξης, γίνεται προσέγγιση με την υπόθεση ότι οι κατανομές των χρόνων άφιξης είναι κανονικές. Οι συγγραφείς όρισαν τον έλεγχο της δυνατότητας υλοποίησης της διαδρομής για την επίλυση του προβλήματος και το ενσωμάτωσαν σε υπάρχουσες ευρετικές μεθόδους, όπως tabu-search. Για να δείξουν την αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης μεθόδου, η έννοια της καθυστέρησης ορίζεται για την αξιολόγηση της αξιοπιστίας μιας διαδρομής. Οι Miranda and Conceição (2016) πρότειναν μια μέθοδο για την προσέγγιση της συνάρτησης κατανομής των χρόνων άφιξης χρησιμοποιώντας συναρτήσεις συνέλιξης. Μια μεταευρετική μέθοδος προτείνεται για την επίλυση του VRP με στοχαστικούς χρόνους ταξιδιού. Οι συγγραφείς διεξήγαγαν αριθμητικά πειράματα σε περιπτώσεις με έως και 100 πελάτες. Οι Gutierrez et al.

(2018) επέκτειναν τη μέθοδο εκτίμησης των χρόνων άφιξης των Ehmke et al. (2015) ενσωματώνοντας στοχαστικούς χρόνους εξυπηρέτησης. Ορίζονται πολλά διαφορετικά επίπεδα εμπιστοσύνης και προτείνεται ένας αλγόριθμος μνήμης πολλαπλών πληθυσμών.

Όσο αφορά τη μέθοδο επίλυσης, η εργασία μας υιοθετεί το πλαίσιο branch-cut-and-price, το οποίο είναι μια ακριβής μέθοδος επίλυσης. Οι αναγνώστες που ενδιαφέρονται για τη μέθοδο branch-cut-and-price σε εφαρμογές VRP παραπέμπονται στην έρευνα των Costa et al. (2019). Μελετάμε το πρόβλημα παραλαβής και παράδοσης πιο περιοριστικά από το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων, επειδή το PDP απαιτεί ο κόμβος παραλαβής και ο κόμβος παράδοσης να εξυπηρετούνται από το ίδιο όχημα. Ως εκ τούτου, η διαδικασία επίλυσης branch-cut-and-price του PDP διαφέρει σε κάποιο βαθμό από την έκδοση του VRP. Οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες παραπέμπονται στην εργασία των Ropke and Cordeau (2009), η οποία παρέχει μια λεπτομερή μέθοδο επίλυσης branch-cut-and-price για το PDPTW.

Το παρακάτω Σχήμα 12 συνοψίζει τη θέση του προτεινόμενου προβλήματος στη βιβλιογραφία και τη σχέση του με παρόμοια προβλήματα. Η προτεινόμενη μέθοδος ανήκει επίσης στα χρονικά εξαρτώμενα προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων (TDVRP). Η εργασία μας συνεισφέρει στη βιβλιογραφία και διαφέρει από τις άλλες εργασίες που μελετούν στοχαστικούς χρόνους ταξιδιού VRP με αυστηρά χρονικά παράθυρα με τους εξής τρόπους. Πρώτον, η εργασία μας ενσωματώνει χρόνους ταξιδιού που εξαρτώνται από το χρόνο. Δεύτερον, από όσο γνωρίζουμε, είμαστε οι πρώτοι που προτείνουμε μια ακριβή μέθοδο λύσης προτείνοντας έναν αλγόριθμο επισήμανσης με πιθανοτικές πληροφορίες.



Σχήμα 12. Η θέση του προτεινόμενου προβλήματος στη βιβλιογραφία.

Το CTSIRPTW με το οποίο ασχολούμαστε στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου, ανήκει στην ομάδα των IRP, η προέλευση των οποίων ανάγεται στους Bell et al. (1983) και στόχος ήταν η αυτοματοποίηση της διαδικασίας παράδοσης υγρών αερίων για την εταιρεία Air Product. Μετά τη δημοσίευση της θεμελιώδης εργασίας, το ενδιαφέρον για την IRP αυξήθηκε σημαντικά και παρουσιάστηκαν νέες παραλλαγές που

σχετίζονται με τις διάφορες παραμέτρους της. Διατίθενται εκτενείς ανασκοπήσεις της βιβλιογραφίας της IRP στους Bertazzi and Speranza (2008), Coelho et al. (2014) και στους Andersson et al. (2010). Καθώς ο σκοπός του παρόντος κεφαλαίου δεν είναι να παρέχει μια εξαντλητική ανασκόπηση της βιβλιογραφίας IRP, παρέχουμε μια ανασκόπηση των εργασιών IRP που μοιράζονται μερικά από τα πιο απαιτητικά και παρόμοια χαρακτηριστικά με το παρόν άρθρο.

Το νεότερο χαρακτηριστικό του προβλήματος είναι η κατανάλωση προϊόντων σε συνεχή χρόνο. Αυτό το χαρακτηριστικό εισήχθη για πρώτη φορά στους Lagos et al. (2020). Σε αυτό το άρθρο, οι συγγραφείς εξετάζουν μια παραλλαγή της IRP σε συνεχή χρόνο, όπου οι μέγιστες ποσότητες που μπορούν να παραδοθούν σε κάθε πελάτη εξαρτώνται από το επίπεδο αποθεμάτων του πελάτη τη στιγμή που πραγματοποιούνται οι παραδόσεις. Για την επίλυση της παραλλαγής του IRP σε συνεχή χρόνο, οι συγγραφείς χρησιμοποιούν έναν δυναμικό αλγόριθμο ανακάλυψης για να διακριτοποιήσουν τον ορίζοντα προγραμματισμού και να επιλύσουν μια μικρή ακολουθία ακέραιων προγραμμάτων. Ωστόσο, σε αντίθεση με το πρόβλημα που παρουσιάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο, οι απαιτήσεις των πελατών θεωρούνται ντετερμινιστικές, ο ορίζοντας προγραμματισμού είναι μία μόνο περίοδος και δεν εξετάζονται οι πιθανές καταστάσεις εξάντλησης αποθεμάτων. Ένα ντετερμινιστικό IRP συνεχούς χρόνου, επεκτείνεται σε ορίζοντα προγραμματισμού πολλαπλών περιόδων και στο πρόβλημα λαμβάνονται υπόψη οι καταστάσεις εξάντλησης αποθεμάτων και τα χρονικά παράθυρα, που παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στο συνέδριο OR το 2017 (Alarcon et al (2018)) και δημοσιεύθηκε πρόσφατα στο Alarcon et al. (2020).

Όσον αφορά τη στοχαστική παραλλαγή του προβλήματος, και, περισσότερο ειδικότερα, στη βιβλιογραφία που αφορά το IRP με στοχαστικές απαιτήσεις, τα τελευταία χρόνια διαπιστώνουμε ένα αυξανόμενο ερευνητικό ενδιαφέρον. Στην εργασία που παρουσιάζουμε, οι πελάτες αντιμετωπίζουν μια στοχαστική ζήτηση κάθε περίοδο και ο πωλητής πρέπει να ενσωματώσει αυτές τις πληροφορίες για να δημιουργήσει αποτελεσματικά σχέδια παράδοσης που μειώνουν το συνολικό κόστος. Στις εργασίες Juan et al. (2014), Gruler et al. (2020), οι συγγραφείς εισήγαγαν δύο προσομοιωτικές προσεγγίσεις για το στοχαστικό IRP, με εξαντλήσεις αποθεμάτων, για μία και πολλαπλές περιόδους αντίστοιχα. Αυτές οι προσομοιωτικές προσεγγίσεις λύσεων συνδυάζουν μια ευρετική μέθοδο με προσομοίωση των στοχαστικών απαιτήσεων για την επίλυση των υπό εξέταση προβλημάτων. Στην εργασία των Liu and Lee (2011), εξετάζεται μια στοχαστική παραλλαγή του IRP με χρονικά παράθυρα και εφαρμόζεται μια ευρετική μέθοδος δύο σταδίων για την επίλυση του προβλήματος. Στο Minkoff (1993), οι συγγραφείς διατύπωσαν το στοχαστικό IRP (SIRP) ως μια Μαρκοβιανή διαδικασία απόφασης με άπειρο ορίζοντα και πρότειναν μια ευρετική διαδικασία για τη μείωση της πολυπλοκότητάς του.

5.3 Το πρόβλημα PDPHTW-STDTT

Ένα στοχαστικό μοντέλο παραλαβής και παράδοσης με αυστηρά χρονικά παράθυρα είναι η πρόσφατη εργασία των Wang et al. (2023). Σε αυτήν την ενότητα, εισάγουμε πρώτα τον ορισμό του προβλήματος παραλαβής και παράδοσης με αυστηρά χρονικά παράθυρα λαμβάνοντας υπόψη τους στοχαστικούς και χρονικά εξαρτώμενους χρόνους ταξιδιού. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η μέθοδος για την εκτίμηση των μέσων όρων και των αποκλίσεων των χρόνων άφιξης. Τέλος, παρουσιάζουμε τον τρόπο με τον οποίο εκτιμάται η πιθανότητα επιτυχίας της διαδρομής.

Περιγραφή του προβλήματος

Έστω $G = (N, A)$ ένας κατευθυνόμενος γράφος, όπου $N = \{0, 1, \dots, 2n + 1\}$ είναι το σύνολο των κόμβων και $A = \{(i, j) | i, j \in N\}$ είναι το σύνολο των τόξων. Οι κόμβοι 0 και $2n+1$ αντιπροσωπεύουν τις αποθήκες προέλευσης και προορισμού των οχημάτων. Το σύνολο $N_P = \{1, \dots, n\} \in N$ αντιπροσωπεύει το σύνολο των κόμβων παραλαβής και $N_D = \{n + 1, \dots, 2n\} \in N$ αντιπροσωπεύει το σύνολο των κόμβων παράδοσης. Υπάρχει ένα σύνολο από n αιτήματα. Κάθε αίτημα i συνδέεται με έναν κόμβο παραλαβής i και έναν κόμβο παράδοσης $n + i$. Για κάθε αίτημα, ο κόμβος παραλαβής πρέπει να επισκέπτεται πριν από τον κόμβο παράδοσης και οι δύο κόμβοι πρέπει να επισκέπτονται από το ίδιο όχημα. Κάθε κόμβος πρέπει να επισκεφθεί μόνο μία φορά.

Θεωρούμε ένα πρόβλημα παραλαβής και παράδοσης με χωρητικότητα, όπου κάθε αίτημα σχετίζεται με ένα μέγεθος φορτίου, q_i . Ο κόμβος παραλαβής i έχει φορτίο q_i και ο κόμβος παράδοσης $n + i$ έχει φορτίο $-q_i$ (αποβίβαση). Εφόσον δεν υπάρχει απόθεμα στην αποθήκη, $q_0 = q_{2n+1} = 0$. Κάθε κόμβος $i \in N_P \cup N_D$ έχει ένα χρονικό παράθυρο $[e_i, l_i]$, όπου e_i είναι η αρχή του χρονικού παραθύρου και l_i είναι το τέλος του χρονικού παραθύρου. Το όχημα που φτάνει νωρίτερα από το e_i πρέπει να περιμένει μέχρι το e_i για να ξεκινήσει την εξυπηρέτησή του στον κόμβο i . Το d_{ij} δηλώνει την απόσταση μεταξύ του κόμβου i και του κόμβου j . Ένα κόστος ταξιδιού c_{ij} συνδέεται με κάθε τόξο $(i, j) \in A$. Για λόγους απλότητας, υποθέτουμε ότι το κόστος ταξιδιού είναι ανάλογο της απόστασης ταξιδιού και $c_{ij} = d_{ij}$ στο παρόν κεφάλαιο.

Υπάρχει ένας στόλος πανομοιότυπων οχημάτων, το καθένα με μέγιστη χωρητικότητα Q . Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει περιορισμός στον αριθμό των χρησιμοποιούμενων οχημάτων. Ωστόσο, ένα σταθερό κόστος C_{fixed} καταβάλλεται όταν χρησιμοποιείται ένα όχημα. Όλα τα οχήματα αναχωρούν από την αποθήκη την ώρα 0 και τερματίζουν τη διαδρομή στην αποθήκη.

Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι διαδρομής μεταξύ των κόμβων και οι χρόνοι εξυπηρέτησης στους κόμβους είναι στοχαστικοί. Ο χρόνος διαδρομής σε κάθε τόξο $(i, j) \in A$ είναι μια Γκαουσιανή τυχαία διαδικασία $X_{ij}(t)$,

δηλαδή η τυχαία μεταβλητή $X_{ij}(t)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή, με το t να αντιπροσωπεύει τον χρόνο κατά τον οποίο το όχημα εισέρχεται στο τόξο (i,j) . Υποθέτουμε ότι ο μέσος όρος του $X_{ij}(t)$, $E[X_{ij}(t)]$ εξαρτάται από το χρόνο, ενώ η διακύμανση του $X_{ij}(t)$, $Var[X_{ij}]$ είναι ανεξάρτητη από το χρόνο και ανάλογη με το μήκος του τόξου, d_{ij} . Ακολουθώντας τον συμβολισμό των Ehmke et al. (2015), ορίζουμε έναν συντελεστή μεταβολής c_v , έτσι ώστε $Var[X_{ij}] = c_v d_{ij}$. Υποθέτουμε ότι η στοχαστικότητα υπάρχει μόνο στους χρόνους ταξιδιού αλλά όχι στις επιλογές διαδρομής. Επόμενος, υπάρχει μόνο ένα μονοπάτι μεταξύ οποιωνδήποτε δυο κορυφών.

Θεωρούμε ότι οι χρόνοι ταξιδιού μεταξύ δυο κόμβων σε οποιαδήποτε συγκεκριμένη χρονική στιγμή t είναι ανεξάρτητοι. Οι περισσότερες από τις βιβλιογραφικές που μελετά τους χρονικά εξαρτώμενους χρόνους διαδρομής ικανοποιεί την ιδιότητα "first in, first out" (FIFO). Η ιδιότητα FIFO υπό ντετερμινιστικούς χρόνους ταξιδιού δηλώνει ότι εάν δύο οχήματα διασχίζουν το ίδιο τόξο, αυτό που φεύγει πρώτο θα φτάσει πρώτο. Το μεγαλύτερο μέρος της βιβλιογραφίας υιοθετεί ένα μοντέλο step-wise προφίλ ταχύτητας και ικανοποιεί την αρχή FIFO που προτάθηκε από τους Ichoua et al. (2003). Ωστόσο, όταν πρόκειται για στοχαστικούς και χρονικά εξαρτώμενους χρόνους διαδρομής, η ιδιότητα FIFO δεν μπορεί να διασφαλιστεί σε επίπεδο ενός οχήματος λόγω της αβεβαιότητας των χρόνων διαδρομής.

Παρόλα αυτά, με βάση πραγματικές παρατηρήσεις και εμπειρίες, κατά μέσο όρο, τα οχήματα που φεύγουν νωρίς θα φτάνουν νωρίς. Επομένως, η FIFO ιδιότητα θα πρέπει να ισχύει σε μακροοικονομικό επίπεδο, που σημαίνει ότι το $E[X_{ij}(t)]$ ικανοποιεί την αρχή FIFO. Υποθέτουμε ότι το $E[X_{ij}(t)]$ προκύπτει από το μοντέλο προφίλ ταχύτητας που αναφέρθηκε παραπάνω. Το μοντέλο προφίλ ταχύτητας υποθέτει ότι ο ορίζοντας προγραμματισμού διαιρείται σε k διαστήματα και η ταχύτητα του οχήματος είναι σταθερή σε κάθε ένα από τα διαστήματα. Κάθε τόξο $(i,j) \in A$ συνδέεται με ένα προφίλ ταχύτητας που αποτελείται από μια σταθερή ταχύτητα για κάθε διάστημα. Υποθέτουμε ότι όλα τα τόξα έχουν το ίδιο προφίλ ταχύτητας, πράγμα που σημαίνει ότι οι ταχύτητες σε όλα τα τόξα είναι ίδιες σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Η $E[X_{ij}(t)]$ που προκύπτει με την παραπάνω μέθοδο είναι μια γραμμική συνάρτηση κατά τμήματα. Λεπτομέρειες σχετικά με την ιδιότητα FIFO και τον ορισμό του προφίλ ταχύτητας μπορείτε να βρείτε στους Ichoua et al. (2003) και Sun et al. (2018a). Σημειώνουμε ότι η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί να αντιμετωπίσει πιο περίπλοκες υποθέσεις χρόνου διαδρομής όπου οι ταχύτητες διαδρομής διαφέρουν σε διαφορετικά τόξα ή οι χρόνοι διαδρομής ακολουθούν ένα πιο περίπλοκο μεταβαλλόμενο μοτίβο. Για λόγους απλότητας, υιοθετούμε την απλουστευμένη παραδοχή παραπάνω.

Ο χρόνος εξυπηρέτησης σε κάθε κόμβο είναι μια τυχαία μεταβλητή που είναι ανεξάρτητη από το χρόνο. Ο χρόνος εξυπηρέτησης S_i στον κόμβο i έχει μέση τιμή $E[S_i]$ και διακύμανση $Var[S_i]$. Θεωρείται ότι το S_i ακολουθεί κανονική κατανομή. Μόλις ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση, το όχημα αρχίζει να ταξιδεύει προς τον επόμενο κόμβο της διαδρομής.

Μια διαδρομή r ορίζεται από μια ακολουθία κόμβων $r = (v_0, v_1, \dots, v_m, v_{m+1})$, όπου $v_1, \dots, v_m \in N_P \cup N_D$ και v_0, v_{m+1} αντιπροσωπεύουν την αποθήκη. Ορίζουμε έναν κόμβο ως επιτυχημένο εάν το όχημα φτάνει στον κόμβο εντός του χρονικού παραθύρου. Η πιθανότητα επιτυχίας του κόμβου ορίζεται από την πιθανότητα ένας κόμβος σε μια διαδρομή να είναι επιτυχής όταν του δίνεται η διαδρομή και όλες οι απαραίτητες κατανομές. Ορίζουμε ότι μια διαδρομή είναι επιτυχής εάν το όχημα φτάνει σε κάθε κόμβο της διαδρομής εντός των χρονικών παραθύρων. Πιθανότητα επιτυχίας διαδρομής είναι η πιθανότητα να είναι επιτυχής μια συγκεκριμένη διαδρομή όταν δίνονται όλες οι απαραίτητες κατανομές. Κάθε κόμβος $i \in N_P \cup N_D$ σχετίζεται με ένα επίπεδο εξυπηρέτησης κόμβου θ_i ($0 \leq \theta_i < 1$), που υποδηλώνει την επιθυμητή πιθανότητα επιτυχίας του κόμβου. Ορίζουμε επίσης ένα συνολικό επίπεδο εξυπηρέτησης θ ($0 \leq \theta < 1$), που υποδεικνύει την επιθυμητή πιθανότητα να είναι επιτυχείς όλες οι διαδρομές. Ο στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους όταν ικανοποιούνται τα επίπεδα εξυπηρέτησης του κόμβου και το συνολικό επίπεδο εξυπηρέτησης.

Εκτίμηση των χρόνων άφιξης

Στη βιβλιογραφική μας ανασκόπηση αναφέρονται διάφορες μέθοδοι για την εκτίμηση των χρόνων άφιξης υπό την παραδοχή του στοχαστικού χρόνου ταξιδιού και των αυστηρών χρονικών παραθύρων. Υιοθετούμε τη μέθοδο που προτάθηκε από τους Jula et al. (2006), λόγω της ικανότητάς της να αντιμετωπίζει χρονικά εξαρτώμενους χρόνους ταξιδιού. Επιπλέον, αυτή η μέθοδος εκτίμησης καθιστά πιο πρακτική τη δημιουργία κανόνων κυριαρχίας για τον προτεινόμενο αλγόριθμο επισήμανσης, που παρουσιάζεται στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου.

Η βασική ιδέα της μεθόδου των Jula et al. (2006) είναι η επαναληπτική εκτίμηση της πρώτης και της δεύτερης στιγμής των χρόνων άφιξης. Έστω A_i^r ο χρόνος άφιξης στον κόμβο i στη διαδρομή r και D_i^r ο χρόνος αναχώρησης μετά την εξυπηρέτηση του κόμβου i στη διαδρομή r . Οι μέσοι όροι και οι διακυμάνσεις των $X_{ij}(t)$ και S_i είναι γνωστοί. Όταν το όχημα ταξιδεύει από τον κόμβο i στον κόμβο j , οι παρακάτω εκφράσεις δίνουν τους μέσους και τις αποκλίσεις των χρόνων άφιξης και αναχώρησης στον κόμβο j . Οι εκτιμήσεις των μέσων όρων και των αποκλίσεων των χρόνων άφιξης και αναχώρησης όλων των κόμβων μιας διαδρομής μπορούν να προκύψουν επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία. Όπως και στους Jula et al. (2006), μπορούν να προκύψουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$E[A_i^r] \approx E[D_i^r] + E[X_{ij}(E[D_i^r])] \quad (5.1)$$

$$Var[A_i^r] \approx \{1 + E'[X_{ij}(E[D_i^r])]\}^2 Var[D_i^r] + Var[X_{ij}] \quad (5.2)$$

$$E(D_i^r) = g_i(E[A_i^r]) + E[S_j] \quad (5.3)$$

$$Var(D_i^r) \approx \frac{1}{4} \left(\int_{E[A_i^r] - \sigma[A_i^r]}^{E[A_i^r] + \sigma[A_i^r]} g_j'(x) dx \right)^2 + Var[S_j] \quad (5.4)$$

$$g_j(t) = \begin{cases} e_j, & \text{αν } t \leq e_j \\ t, & \text{αν } e_j < t \leq l_j \\ M(t - l_j) + l_j, & \text{αν } t > l_j \end{cases} \quad (5.5)$$

$$g_j'(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t \leq e_j \\ 1 & \text{αν } e_j < t \leq l_j \\ M & \text{αν } t > l_j \end{cases} \quad (5.6)$$

όπου $E'[X_{ij}(t)]$ είναι η παράγωγος του $E[X_{ij}(t)]$ ως προς t και $\sigma[A_j^r]$ είναι η τυπική απόκλιση του A_j^r . Οι (5.5) και (5.6) δείχνουν ότι η $g_j(t)$ είναι μια γραμμική συνάρτηση που μοντελοποιεί την επίδραση του αυστηρού χρονικού παραθύρου στον κόμβο j και η $g_j'(t)$ είναι η παράγωγος του $g_j(t)$ ως προς το t . Το M αντιπροσωπεύει έναν πολύ μεγάλο αριθμό.

Εκτίμηση της πιθανότητας επιτυχίας διαδρομής

Δεδομένου του μέσου όρου και της διακύμανσης του χρόνου άφιξης σε έναν κόμβο, μπορεί να εκτιμηθεί η πιθανότητα επιτυχίας του κόμβου. Υιοθετούμε τη μέθοδο εκτίμησης των Ehmke et al. (2015) που υποθέτει ότι οι χρόνοι άφιξης προσαρμόζονται με μια κανονική κατανομή. Σημειώστε ότι η πραγματική κατανομή των χρόνων άφιξης μπορεί να είναι ασύμμετρη λόγω των αυστηρών χρονικών παραθύρων και η πραγματική κατανομή δεν μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια. Συνεπώς, η πιθανότητα επιτυχίας του κόμβου i στη διαδρομή r , που συμβολίζεται με P_i^r , εκτιμάται ως εξής:

$$P_i^r = P(A_i^r \leq l_i) \approx \Phi \left(\frac{l_i - E[A_i^r]}{\sqrt{Var[A_i^r]}} \right) \quad (5.7)$$

όπου $\Phi(\cdot)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση της κανονικής κατανομής.

Η εκτιμώμενη πιθανότητα επιτυχίας της διαδρομής P^r είναι το γινόμενο των πιθανοτήτων επιτυχίας των κόμβων της διαδρομής και δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$P^r = \prod_{i \in r} P_i^r \quad (5.8)$$

Μια διαδρομή θεωρείται εφικτή όταν ικανοποιούνται όλα τα επίπεδα εξυπηρέτησης των κόμβων της διαδρομής και όλοι οι περιορισμοί του προβλήματος παραλαβής και παράδοσης. Έστω \mathcal{R} το σύνολο όλων των εφικτών διαδρομών. Έστω $\mathcal{R}_{chosen} = \{r^1, r^2, \dots, r^k\}$ το σύνολο των διαδρομών που επιλέγονται στη λύση δρομολόγησης. Η συνολική πιθανότητα επιτυχίας P_{global} είναι η πιθανότητα όλες οι επιλεγμένες

διαδρομές να είναι επιτυχείς. Για να ικανοποιούνται τα επιθυμητά επίπεδα εξυπηρέτησης των κόμβων και το επιθυμητό συνολικό επίπεδο εξυπηρέτησης, έχουμε τους ακόλουθους περιορισμούς:

$$P_i^r \geq \theta_i, \forall r \in \mathcal{R}_{chosen}, \forall i \in r \quad (5.9)$$

$$P_{global} = \prod_{r \in \mathcal{R}_{chosen}} P^r \geq \theta \quad (5.10)$$

όπου θ_i είναι το επίπεδο εξυπηρέτησης του κόμβου i και θ είναι το συνολικό επίπεδο εξυπηρέτησης. Η έκφραση (5.9) δηλώνει ότι η πιθανότητα επιτυχίας κάθε κόμβου ικανοποιεί το επίπεδο εξυπηρέτησης του κόμβου. Η έκφραση (5.10) δηλώνει ότι η συνολική πιθανότητα επιτυχίας ικανοποιεί το συνολικό επίπεδο εξυπηρέτησης.

5.4 Προσέγγιση της λύσης

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται μια μέθοδος επίλυσης για το PDPHTW-STDTT με βάση τη μέθοδο branch-cut-and-price. Αρχικά, παρέχουμε τη διατύπωση του προβλήματος με διαμέριση συνόλου. Στη συνέχεια, δίνουμε έμφαση στον τρόπο δημιουργίας στηλών (τεχνική που χρησιμοποιείται στη μαθηματική βελτιστοποίηση για την επίλυση προβλημάτων με μεγάλο αριθμό μεταβλητών ή περιορισμών) και ορίζουμε ετικέτες για την επίλυση του προβλήματος κοστολόγησης.

Διατύπωση διαμέρισης συνόλου

Ορίζουμε το κόστος μιας διαδρομής $r = (v_0, v_1, \dots, v_m, v_{m+1})$ ως $c_r = C_{fixed} + \sum_{i=0}^m c_{v_i v_{i+1}}$. Έστω ότι η παράμετρος a_{ir} δηλώνει αν γίνεται επίσκεψη στον κόμβο i μέσω της διαδρομής r . $a_{ir} = 1$ αν η διαδρομή r επισκέπτεται τον κόμβο i , διαφορετικά $a_{ir} = 0$. Η δυαδική μεταβλητή x_r υποδεικνύει εάν η διαδρομή r έχει επιλεγεί στη λύση.

Το PDPHTW-STDTT μπορεί να σχηματιστεί με την ακόλουθη διατύπωση διαμέρισης συνόλου.

$$\text{minimize } \sum_{r \in \mathcal{R}} c_r x_r \quad (5.11)$$

έτσι ώστε:

$$\sum_{r \in \mathcal{R}} a_{ir} x_r = 1, \forall i \in N_p \quad (5.12)$$

$$\sum_{r \in \mathcal{R}} x_r \ln(P^r) \geq \ln(\theta) \quad (5.13)$$

$$x_r \in \{0,1\}, \forall r \in \mathcal{R} \quad (5.14)$$

Η αντικειμενική συνάρτηση (5.11) ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος, συμπεριλαμβανομένου του σταθερού κόστους του οχήματος και του τόξου. Ο περιορισμός (5.12) υποδεικνύει ότι κάθε κόμβος παραλαβής επισκέπτεται ακριβώς μία φορά. Καθώς αντιστοιχίζουμε έναν κόμβο παραλαβής με τον αντίστοιχο κόμβο παράδοσης στις διαδρομές, κάθε κόμβος παράδοσης εγγυάται ότι θα επισκεφθείτε ακριβώς μία φορά. Ο περιορισμός (5.13) εξασφαλίζει την ικανοποίηση του συνολικού επιπέδου εξυπηρέτησης.

(5.12): $\sum_{r \in \mathcal{R}} a_{ir} x_r = 1, \forall i \in N_P$ επεξήγηση:

$$a_{iv_0} x_{v_0} + \dots + a_{iv_{m+1}} x_{v_{m+1}} = 1 \quad \forall i \in N_P$$

$$\text{Για } i = 3: a_{3v_0} x_{v_0} + \dots + a_{3v_{m+1}} x_{v_{m+1}} = 1$$

Αφού $a_{3r} x_r \in \{0,1\}, \forall r \in \mathcal{R}$ τότε για να ισχύει η παραπάνω σχέση πρέπει να υπάρχει ακριβώς ένα ζεύγος $a_{3r} x_r$ για το οποίο ισχύει $a_{3r} x_r = 1$. Έστω $a_{3v_2} x_{v_2} = 1$ άρα ο κόμβος παραλαβής 3 επισκέπτεται μια φορά. Ομοίως και για τους υπόλοιπους κόμβους παραλαβής. Συνεπώς, κάθε κόμβος παραλαβής επισκέπτεται ακριβώς μία φορά.

(5.13): $\sum_{r \in \mathcal{R}} x_r \ln(P^r) \geq \ln(\theta)$ επεξήγηση:

Από την (5.10) με τη λήψη του λογαρίθμου και των δύο πλευρών της, προκύπτει ότι:

$$\ln\left(\prod_{r \in \mathcal{R}_{chosen}} P^r\right) \geq \ln(\theta) \Rightarrow \ln\left(P^{r^1 \dots P^{r^k}}\right) \geq \ln(\theta) \Rightarrow \ln(P^{r^1}) + \dots + \ln(P^{r^k}) \geq \ln(\theta) \Rightarrow$$

$$\sum_{r \in \mathcal{R}_{chosen}} \ln(P^r) \geq \ln(\theta) \Rightarrow \sum_{r \in \mathcal{R}} x_r \ln(P^r) \geq \ln(\theta).$$

Δημιουργία στηλών

Το σύνολο όλων των εφικτών διαδρομών είναι μεγάλο και δεν μπορεί να απαριθμηθεί ρητά. Χρησιμοποιούμε μια μέθοδο δημιουργίας στηλών (Desaulniers et al. 2006) για την επαναληπτική δημιουργία διαδρομών. Μόνο ένα υποσύνολο του \mathcal{R} διατηρείται στο γραμμικό πρόγραμμα. Σε κάθε επανάληψη επιλύεται μια χαλάρωση του περιορισμένου κύριου προβλήματος (RMP), δημιουργώντας τους δυαδικούς πολλαπλασιαστές των περιορισμών (5.12) και (5.13), $\pi_i (\forall i \in N_P)$ και λ αντίστοιχα. Στη συνέχεια, ο αλγόριθμος κοστολόγησης καλείται να βρει διαδρομές με αρνητικό μειωμένο κόστος, οι οποίες προστίθενται στο υποσύνολο του \mathcal{R} στο RMP. Η επανάληψη σταματά όταν δεν βρεθεί τέτοια διαδρομή. Το υποσύνολο του \mathcal{R} αρχικοποιείται με το σύνολο των δρομολογίων που επισκέπτονται μόνο ένα ζεύγος κόμβων παραλαβής και παράδοσης.

Το μειωμένο κόστος \bar{c}_r μιας διαδρομής $r \in \mathcal{R}$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\bar{c}_r = c_r - \sum_{i \in N_P} a_{ir} \pi_i + \ln(P^r) \lambda \quad (5.15)$$

$$= C_{fixed} + \sum_{i=0}^m c_{v_i v_{i+1}} - \sum_{i \in N_P} a_{ir} \pi_i + \sum_{r \in \mathcal{R}} \ln(P_i^r) \lambda \quad (5.16)$$

Ορισμός ετικετών

Ο αλγόριθμος κοστολόγησης βρίσκει διαδρομές με αρνητικό μειωμένο κόστος (5.15). Το πρόβλημα κοστολόγησης είναι μια παραλλαγή των προβλημάτων συντομότερης διαδρομής με περιορισμούς πόρων (ESPPRC, Irnich and Desaulniers (2005)) και επιλύεται κυρίως με έναν αλγόριθμο επισήμανσης (Righini and Salani (2008)). Η βασική ιδέα του αλγορίθμου επισήμανσης είναι η αναπαράσταση κάθε μερικής διαδρομής που ξεκινά από τον κόμβο 0 και καταλήγει σε οποιονδήποτε κόμβο i με μια ετικέτα L . Η ετικέτα περιέχει πληροφορίες σχετικά με τη διαδρομή, συμπεριλαμβανομένου του τρέχοντος φορτίου του οχήματος, τα καθήκοντα παράδοσης που πρέπει να ολοκληρωθούν, του συσσωρευμένου μειωμένου κόστους, των χρόνων άφιξης, των εκτιμήσεων πιθανότητας κ.τ.λ. που αναφέρονται στην Ενότητα 3.

Μια μερική διαδρομή $r^k = (v_0, v_1, \dots, v_m)$ είναι μια διαδρομή που δεν καταλήγει απαραίτητα στον προορισμό. Καθώς ο αριθμός των μερικών διαδρομών μπορεί να γίνει μεγάλος στον αλγόριθμο επισήμανσης, χρησιμοποιούμε τον εκθέτη k για τη διάκρισή τους. Κάθε μερική διαδρομή r^k συνδέεται με μια ετικέτα L^k .

$$L^k = [\mathcal{N}(L^k), \mathcal{M}(L^k), \mathcal{Q}(L^k), \mathcal{C}(L^k), E_A(L^k), V_A(L^k), E_D(L^k), V_D(L^k), Prob(L^k), \mathcal{O}(L^k), \mathcal{U}(L^k), \pi(L^k)].$$

Τα στοιχεία του L^k εξηγούνται παρακάτω:

- $\mathcal{N}(L^k)$ είναι ο τελευταίος κόμβος που επισκέφθηκε στη μερική διαδρομή r^k .
- $\mathcal{M}(L^k)$ είναι η μερική διαδρομή r^k , η οποία περιέχει όλους τους κόμβους που επισκέφθηκε με τη σειρά που τους επισκέφθηκε.
- $\mathcal{Q}(L^k)$ είναι το φορτίο του οχήματος μετά την επίσκεψη στον κόμβο $\mathcal{N}(L^k)$.
- $\mathcal{C}(L^k)$ είναι το συσσωρευμένο κόστος κατά μήκος της μερικής διαδρομής r^k μετά την επίσκεψη στον κόμβο $\mathcal{N}(L^k)$, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη το σταθερό κόστος.
- Για τις απαραίτητες πληροφορίες για την εκτίμηση των χρόνων άφιξης και των πιθανοτήτων επιτυχίας διαδρομής,

$E_A(L^k), V_A(L^k)$ είναι η εκτιμώμενη μέση τιμή και η διακύμανση του χρόνου άφιξης στον κόμβο $\mathcal{N}(L^k)$.

$E_D(L^k), V_D(L^k)$ είναι η εκτιμώμενη μέση τιμή και η διακύμανση του χρόνου αναχώρησης από τον κόμβο $\mathcal{N}(L^k)$.

$Prob(L^k)$ είναι η εκτιμώμενη πιθανότητα επιτυχίας της μερικής διαδρομής r^k .

- $\mathcal{O}(L^k) \subseteq N_P$ είναι το σύνολο των κόμβων παραλαβής που έχουν επισκεφθεί στη μερική διαδρομή r^k , των οποίων οι αντίστοιχοι κόμβοι παράδοσης δεν έχουν επισκεφθεί.
- $\mathcal{U}(L^k) \subseteq N_P$ είναι το σύνολο των μη προσιτών αιτημάτων. Ένας κόμβος i λέγεται ότι είναι απρόσιτος εάν:
 1. ο κόμβος i έχει ήδη επισκεφθεί στη μερική διαδρομή r^k (οπότε δεν θα επισκεφθεί ξανά) ή
 2. πηγαίνοντας απευθείας από τον τρέχον κόμβο $\mathcal{N}(L^k)$ στον κόμβο παραλαβής i δεν μπορεί να ικανοποιηθεί τα επίπεδα εξυπηρέτησης, τα οποία είναι $Prob(L^k) \cdot P_i^{r^k \oplus i} < \theta_i$ ή $Prob(L^k) \cdot P_i^{r^k \oplus i} < \theta$. Εδώ, το $r^k \oplus i$ αντιπροσωπεύει τη νέα μερική διαδρομή μετά την επέκταση της μερικής διαδρομής r^k στον κόμβο i .
- $\pi(L^k)$ είναι το άθροισμα των δυαδικών τιμών που συνδέονται με τον περιορισμό (5.12) στη μερική διαδρομή r^k .

5.5 Το πρόβλημα CTSIRPTW

Ένα εναλλακτικό στοχαστικό μοντέλο με χρονικά παράθυρα είναι η πρόσφατη εργασία των Ortega and Doerner (2023). Σε αυτήν την ενότητα, περιγράφουμε το στοχαστικό αποθεματικό πρόβλημα δρομολόγησης συνεχούς χρόνου με χρονικά παράθυρα. Στη συνέχεια, το πρόβλημα διατυπώνεται ως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης δύο σταδίων, όπου το πρόβλημα του πρώτου σταδίου υπόκειται σε διάφορα σύνολα περιορισμών που εξασφαλίζουν σωστό χρόνο, δρομολόγηση και ροή εμπορευμάτων. Τέλος, παρουσιάζουμε το πρόβλημα του δεύτερου σταδίου σε δυο ομάδες περιορισμών. Η πρώτη ομάδα αφορά τη διαχείριση των εμπορευμάτων και των αποθεμάτων για την πραγματοποίηση της ζήτησης. Η δεύτερη ομάδα αφορά την κατανάλωση προϊόντων από τους πελάτες σε συνεχή χρόνο.

Περιγραφή του προβλήματος

Θεωρούμε έναν πεπερασμένο ορίζοντα προγραμματισμού, με $p \in P$ περιόδους μήκους T , και ένα πλήρες κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, A)$, με $V = 0, 1, \dots, n$, όπου ο κόμβος 0 συμβολίζει την αποθήκη, $V' = 1, \dots, n$ το σύνολο των πελατών και $A = \{(i, j) | i, j \in V\}$ είναι το σύνολο των τόξων. Ο πεπερασμένος ορίζοντας προγραμματισμού αναφέρεται σε ένα περιορισμένο χρονικό πλαίσιο εντός του οποίου λαμβάνει χώρα μια διαδικασία προγραμματισμού ή λήψης αποφάσεων. Σε αυτό το πλαίσιο, το p αντιπροσωπεύει τον αριθμό των περιόδων στον ορίζοντα σχεδιασμού και το T αντιπροσωπεύει τη διάρκεια κάθε περιόδου. Κάθε τόξο $(i, j) \in A$ έχει σχετικό κόστος c_{ij} και χρόνο t_{ij} , και τα δυο έχουν μη αρνητικές τιμές. Κάθε θέση πελάτη $i \in V'$, χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο χρονικών παραθύρων a_i^p, b_i^p , που αντιπροσωπεύει τις ώρες έναρξης και λήξης κατά τις οποίες ο πελάτης μπορεί να εξυπηρετηθεί σε κάθε περίοδο p , ένα αρχικό επίπεδο αποθεμάτων I_i^0 και μια χωρητικότητα αποθεμάτων C_i , έναν χρόνο εξυπηρέτησης s_i και ένα σύνολο τυχαίων απαιτήσεων $\xi(i, p)$ που ακολουθούν γνωστές στοχαστικές κατανομές για κάθε περίοδο p . Θεωρούμε ότι οι απαιτήσεις των πελατών καταναλώνονται συνεχώς κατά τη διάρκεια των περιόδων. Τέλος, θεωρείται ένας πεπερασμένος και ομοιογενής στόλος οχημάτων, $k \in K$, με χωρητικότητα Q .

Το CTSIRPTW είναι ένα NP-δύσκολο πρόβλημα, καθώς είναι μια στοχαστική επέκταση του VRP με χρονικά παράθυρα, όταν εξετάζουμε μια μόνο περίοδο (το VRPTW είναι ένα NP-δύσκολο πρόβλημα Savelsbergh (1985)). Στις εξισώσεις (5.17) – (5.34), παρουσιάζουμε μια μαθηματική διατύπωση για το πρόβλημα. Η μαθηματική διατύπωση χρησιμοποιεί διαφορετικές ομάδες μεταβλητών απόφασης. Κάθε δυαδική μεταβλητή x_{ij}^{kp} παίρνει τη τιμή 1 αν και μόνο αν η ακμή (i, j) διασχίζεται από το όχημα k κατά την περίοδο p , και κάθε δυαδική μεταβλητή y_i^{kp} υποδεικνύει εάν ο πελάτης i επισκέπτεται το όχημα k κατά την περίοδο p . Οι συνεχείς μεταβλητές t_i^{kp} , \bar{t}_i και \underline{t}_i , σχετίζονται με τη χρονική διαχείριση του προβλήματος. Το πρώτο σύνολο μεταβλητών αντιπροσωπεύει τον χρόνο άφιξης κάθε οχήματος k σε έναν πελάτη i κατά την

περίοδο p . Το δεύτερο και το τρίτο σύνολο, αφορούν τον ελάχιστο και τον μέγιστο χρόνο άφιξης σε κάθε πελάτη i αντίστοιχα. Τέλος, έχουμε τέσσερις πρόσθετες ομάδες συνεχών μεταβλητών απόφασης που μοντελοποιούν τη ροή εμπορευμάτων του προβλήματος. Η πρώτη ομάδα μεταβλητών q_i^{kp} δίνει την ποσότητα του εμπορεύματος που παραδίδεται από κάθε όχημα k την περίοδο p σε κάθε πελάτη i . Δεύτερον, το I_i^p δείχνει τα επίπεδα αποθεμάτων κάθε πελάτη i στο τέλος κάθε περιόδου p . Τρίτον, το Δ_i αντιπροσωπεύει τη διαφορά μεταξύ του αρχικού και του τελικού επιπέδου αποθεμάτων κάθε πελάτη i , εάν το αρχικό απόθεμα είναι υψηλότερο από το τελικό απόθεμα. Χρησιμοποιούμε το Δ_i για να δημιουργήσουμε έναν ψευδο-κυλιόμενο ορίζοντα και να αποφύγουμε τα κενά τελικά αποθέματα. Ο ψευδο-κυλιόμενος ορίζοντας, γνωστός και ως κυλιόμενος ορίζοντας με σταθερό μήκος ορίζοντας, είναι μια προσέγγιση που χρησιμοποιείται σε προβλήματα σχεδιασμού και λήψης αποφάσεων για τον χειρισμό πολύπλοκων και δυναμικών συστημάτων. Περιλαμβάνει τη διαίρεση του συνολικού ορίζοντα σχεδιασμού σε μικρότερους υπο-ορίζοντες ή χρονικά διαστήματα σταθερού μήκους. Κάθε φορά που η διαφορά μεταξύ των τελικών και των αρχικών επιπέδων αποθεμάτων είναι αρνητική, τιμωρούμε αυτή τη διαφορά ως χαμένες πωλήσεις στην αντικειμενική συνάρτηση. Αυτός ο στόχος βοηθά τον κεντρικό προμηθευτή να δημιουργήσει έναν ψευδο-κυλιόμενο ορίζοντα και αποφεύγει να έχουν οι πελάτες άδεια αποθέματα στο τέλος του ορίζοντα προγραμματισμού. Τέταρτον, το o_i^p αντιπροσωπεύει το ποσό των χαμένων πωλήσεων στον πελάτη i κατά την περίοδο p , λόγω καταστάσεων εξάντλησης αποθεμάτων. Ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται στη μαθηματική διατύπωση συνοψίζεται στον παρακάτω Πίνακα 5.

Πίνακας 5

Σύνολα δεδομένων	V V' K P	σύνολο κόμβων σύνολο πελατών σύνολο οχημάτων σύνολο περιόδων
Δεδομένα και παράμετροι	c_{ij} t_{ij} a_i^p, b_i^p C_i I_i^0 s_i Q T L	κόστος ταξιδιού για το τόξο (i,j) χρόνος ταξιδιού για το τόξο (i,j) χρονικά παράθυρα του πελάτη i στην περίοδο p χωρητικότητα αποθεμάτων του πελάτη i αρχικό επίπεδο αποθεμάτων του πελάτη i στην ψευδο-περίοδο 0 χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη i χωρητικότητα οχήματος διάρκεια της περιόδου ποινή ανά μονάδα χαμένων πωλήσεων και μειωμένου αποθέματος
Στοχαστικά δεδομένα	$\xi(i,p)$ $d(i,p)$	στοχαστική κατανομή της κατανάλωσης προϊόντων του πελάτη i κατά την περίοδο p δειγματοληπτική πραγματοποίηση της ζήτησης του πελάτη i κατά την περίοδο p που δίνεται από τη στοχαστική κατανομή $\xi(i,p)$
Μεταβλητές απόφασης	x_{ij}^{kp} x y_i^{kp} I_i^p t_i^{kp} $\underline{t}_i, \bar{t}_i$ $\underline{t}_i, \bar{t}_i$ Δ_i Δ q_i^{kp} o_i^p e	χρήση του τόξου (i,j) από το όχημα k κατά την περίοδο p σύνολο όλων των μεταβλητών x_{ij}^{kp} επίσκεψη στον πελάτη i κατά την περίοδο p επίπεδο αποθεμάτων του πελάτη i στο τέλος της περιόδου p χρόνος άφιξης του οχήματος k στον πελάτη i κατά την περίοδο p πρώτος και τελευταίος χρόνος άφιξης στον πελάτη i σύνολο όλων των μεταβλητών $\underline{t}_i, \bar{t}_i$ αντίστοιχα μείωση του τελικού αποθέματος του πελάτη i σύνολο όλων των μεταβλητών Δ_i ποσότητα που παραδόθηκε στον πελάτη i από το όχημα k κατά την περίοδο p απώλεια ποσότητας λόγω έλλειψης αποθεμάτων του πελάτη i κατά την περίοδο p σύνολο όλων των μεταβλητών e_i^p

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω συμβολισμό, μπορούμε να διατυπώσουμε το CTSIRPTW. Το πρόβλημα διατυπώνεται ως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης δύο σταδίων, όπου η στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του σταθερού και του αναμενόμενου κόστους που προκύπτει όταν λαμβάνονται υπόψη οι στοχαστικές απαιτήσεις (5.17).

$$\text{minimize } f(x, \bar{t}, \underline{t}) + E|\tilde{G}(\tilde{y}_s, \tilde{t}_s, \tilde{\xi}_s)| \quad (5.17)$$

Η συνάρτηση $f(x, \bar{t}, \underline{t})$ αξιολογεί το κόστος για το πρώτο στάδιο των αποφάσεων. Το συνολικό κόστος δρομολόγησης που προκύπτει από την εξυπηρέτηση των πελατών και την ποινή που επιβάλλεται ανάλογα με τη διαφορά μεταξύ της πρώτης και της τελευταίας παράδοσης σε έναν πελάτη υπολογίζονται σε αυτό το πρώτο στάδιο, δημιουργώντας ένα σταθερό σχέδιο παράδοσης για τον ορίζοντα προγραμματισμού. Ορίζουμε το $f(x, \bar{t}, \underline{t})$ ως εξής:

$$f(x, \bar{t}, \underline{t}) = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} \sum_{p \in P} c_{ij} x_{ij}^{kp} + \alpha \sum_{i \in V'} (\bar{t}_i - \underline{t}_i) \quad (5.18)$$

Ο παράγοντας αντίδρασης α που αναφέρεται στην παραπάνω εξίσωση, είναι μια παράμετρος που χρησιμοποιείται συνήθως στους αλγόριθμους προσομοιωμένης ανόπτησης. Η προσομοιωμένη ανόπτηση είναι ένας μεταερευτικός αλγόριθμος βελτιστοποίησης εμπνευσμένος από τη διαδικασία ανόπτησης στη μεταλλουργία. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί μια πιθανολογική προσέγγιση για τη διερεύνηση του χώρου λύσεων και τη σταδιακή σύγκλιση προς μια βέλτιστη λύση. Στην προσομοιωμένη ανόπτηση, ο παράγοντας αντίδρασης α ελέγχει τον ρυθμό με τον οποίο ο αλγόριθμος μεταβαίνει από την εξερεύνηση (σφαιρική αναζήτηση) στην αξιοποίηση (τοπική αναζήτηση) κατά τη διάρκεια της διαδικασίας βελτιστοποίησης. Συνήθως χρησιμοποιείται στο κριτήριο αποδοχής για να καθορίσει αν μια νέα λύση θα πρέπει να γίνει αποδεκτή ή να απορριφθεί. Η τιμή του α κυμαίνεται συνήθως μεταξύ 0 και 1. Υψηλότερες τιμές του α οδηγούν σε μια πιο διερευνητική συμπεριφορά, επιτρέποντας μεγαλύτερη πιθανότητα αποδοχής χειρότερων λύσεων και διευκολύνοντας μια ευρύτερη αναζήτηση στο χώρο των λύσεων. Καθώς το α πλησιάζει το 0, ο αλγόριθμος γίνεται πιο αξιοποιήσιμος, εστιάζοντας στη βελτίωση και τη σύγκλιση προς την τρέχουσα καλύτερη λύση. Η επιλογή της κατάλληλης τιμής για το α εξαρτάται από το πρόβλημα που επιλύεται και την επιθυμητή ισορροπία μεταξύ εξερεύνησης και εκμετάλλευσης. Συχνά απαιτείται πειραματισμός και ρύθμιση για την εύρεση της βέλτιστης τιμής που οδηγεί σε καλή σύγκλιση και ποιότητα λύσεων για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα.

Τότε, $\tilde{G}(\tilde{y}_s, \tilde{t}_s, \tilde{\xi}_s)$ είναι η βέλτιστη τιμή του προβλήματος του δεύτερου σταδίου όταν αποκαλύπτονται οι πραγματικές απαιτήσεις των πελατών.

Το πρόβλημα του πρώτου σταδίου υπόκειται σε διάφορα σύνολα περιορισμών που εξασφαλίζουν σωστό χρόνο, δρομολόγηση και ροή εμπορευμάτων. Όλοι οι περιορισμοί του πρώτου σταδίου, εξυπηρετούν αυτόν

τον σκοπό, εξασφαλίζοντας ένα σταθερό πρόγραμμα δρομολόγησης και παράδοσης για όλες τις πραγματοποιήσεις της ζήτησης. Οι δυο πρώτοι περιορισμοί, εγγυώνται ότι κάθε πελάτης μπορεί να επισκεφθεί το πολύ ένα όχημα σε κάθε περίοδο και ότι κάθε όχημα μπορεί να επισκεφθεί κάθε πελάτη σε κάθε περίοδο. Οι τρεις επόμενοι είναι περιορισμοί διατήρησης ροής που περιγράφουν κάθε μεμονωμένη διαδρομή και οι πέντε τελευταίοι εξασφαλίζουν τη σκοπιμότητα του χρονοδιαγράμματος. Περιλαμβάνουμε δύο παραμέτρους Big-M (M_1 και M_2), που σχετίζονται με τη χρονική διαχείριση του συνόλου του προβλήματος και είναι ίσες με το μήκος της περιόδου. Στη μαθηματική βελτιστοποίηση, ιδίως στον γραμμικό προγραμματισμό, η μέθοδος Big-M είναι μια τεχνική που χρησιμοποιείται για τον χειρισμό περιορισμών με δυαδικές ή ακέραιες μεταβλητές. Η μέθοδος εισάγει δύο μεγάλες θετικές σταθερές, που συχνά αναφέρονται ως παράμετροι Big-M, για να μετατρέψει τους περιορισμούς σε γραμμικές ανισότητες. Οι τιμές των M_1 και M_2 εξαρτώνται από το εκάστοτε πρόβλημα και πρέπει να επιλέγονται προσεκτικά. Θα πρέπει να είναι αρκετά μεγάλες ώστε να εξασφαλίζουν ότι οι εισαγόμενες μεταβλητές έχουν περιορισμένη επιρροή στη λύση, αλλά όχι τόσο μεγάλες ώστε να προκαλούν αριθμητικά προβλήματα ή να οδηγούν σε υπερβολικά συντηρητική λύση. Πιο αναλυτικά, ο τρίτος από το τέλος περιορισμός εξασφαλίζει ότι κάθε όχημα πρέπει να επιστρέψει στην αποθήκη πριν ή τη στιγμή που λήγει η τρέχουσα περίοδος, ενώ οι δυο τελευταίοι ορίζουν τον ελάχιστο και τον μέγιστο χρόνο άφιξης κάθε οχήματος k σε κάθε πελάτη i , κατά μήκος όλων των περιόδων p .

Με δεδομένες τις αποφάσεις \tilde{y}_s, \tilde{t}_s του πρώτου σταδίου που καθορίζουν ποιον πελάτη πρέπει να επισκεφθούμε σε κάθε περίοδο και το χρόνο αυτών των επισκέψεων, οι πραγματοποιήσεις της ζήτησης $\tilde{\xi}_s$ οδηγούν σε ένα πρόβλημα αποθεμάτων με εξαντλήσεις αποθεμάτων. Υπολογίζουμε τους άλλους συντελεστές κόστους, όπως αυτούς που προκαλούνται από καταστάσεις εξάντλησης αποθεμάτων, και τη διαφορά μεταξύ του αρχικού και του τελικού επιπέδου αποθεμάτων σε κάθε πελάτη, όταν η διαφορά αυτή είναι θετική. Ο στόχος του προβλήματος βελτιστοποίησης του δεύτερου σταδίου ορίζεται στη συνέχεια ως εξής:

$$\tilde{G}(\tilde{y}_s, \tilde{t}_s, \tilde{\xi}_s) = \min \sum_{i \in V'} \sum_{p \in P} L o_i^p + \sum_{i \in V'} L \Delta_i \quad (5.19)$$

Η πρώτη ομάδα περιορισμών του προβλήματος του δεύτερου σταδίου αφορά τη διαχείριση των εμπορευμάτων και των αποθεμάτων για την πραγματοποίηση της ζήτησης. Η πραγματοποίηση των απαιτήσεων είναι ένα στοχαστικό γεγονός που λαμβάνει χώρα στο δεύτερο στάδιο της μαθηματικής διατύπωσης δύο σταδίων. Οι απαιτήσεις αποκαλύπτονται στο τέλος του ορίζοντα προγραμματισμού. Στη συνέχεια, όταν λάβουμε αυτές τις απαιτήσεις, υπολογίζεται ο πλήρης υπολογισμός των αποθεμάτων και των χαμένων πωλήσεων, θεωρώντας ότι η κατανάλωση των απαιτήσεων είναι γραμμική εντός των χρονικών περιόδων. Ο πρώτος περιορισμός εξασφαλίζει ότι τηρείται η μέγιστη χωρητικότητα του οχήματος, ενώ ο δεύτερος υποδεικνύει ότι ένας πελάτης δεν μπορεί να λάβει οποιοδήποτε ποσό από ένα όχημα εάν δεν τον

έχει επισκεφθεί το εν λόγω όχημα σε μια περίοδο. Η παράμετρος Big-M (M_3) σε αυτούς τους περιορισμούς είναι ίση με τη χωρητικότητα του οχήματος. Ο τρίτος περιορισμός καθορίζει τα επίπεδα αποθεμάτων κάθε πελάτη στο τέλος κάθε περιόδου για ένα δείγμα πραγματοποίησης της ζήτησης. Οι δυο επόμενοι περιορισμοί απαγορεύουν τα επίπεδα αποθεμάτων να είναι αρνητικά ή να υπερβαίνουν την χωρητικότητα αποθέματος του πελάτη. Με τους δυο τελευταίους περιορισμούς, υπολογίζουμε τη διαφορά μεταξύ του αρχικού και του τελικού αποθέματος του κάθε πελάτη όταν η διαφορά είναι θετική.

Η δεύτερη ομάδα περιορισμών του προβλήματος του δεύτερου σταδίου αφορά την κατανάλωση προϊόντων σε συνεχή χρόνο από την πλευρά των πελατών. Ο πρώτος περιορισμός διασφαλίζει ότι κατά την ώρα άφιξης οποιουδήποτε οχήματος σε έναν πελάτη, το επίπεδο αποθέματος είναι μη αρνητικό. Κάθε φορά που συμβαίνει μια έλλειψη αποθέματος, υπολογίζεται η ποσότητα που δεν υπάρχει σε απόθεμα. Ο δεύτερος περιορισμός ενεργεί με τον αντίθετο τρόπο, για να αποφεύγονται τα υπερβολικά επίπεδα αποθεμάτων.

Τέλος, στους τέσσερις επόμενους περιορισμούς, ορίζουμε το πεδίο εφαρμογής κάθε μεταβλητής του προβλήματος.

Στο δεύτερο στάδιο του προβλήματος, δημιουργούνται τυχαίες απαιτήσεις για κάθε περίοδο και πελάτη. Η ζήτηση αυτή θεωρείται ότι είναι γραμμική και συνεχής κατά μήκος των περιόδων. Ως εκ τούτου, κάθε φορά που ένας πελάτης δεν διαθέτει επαρκές απόθεμα για να ικανοποιηθεί το ποσό της ζήτησης σε μια περίοδο, υπολογίζουμε αυτό το ποσό και το τιμωρούμε στην αντικειμενική συνάρτηση. Αυτή η τιμωρία αποσκοπεί στην αναπαράσταση του πραγματικού περιβάλλοντος και βοηθά στην απόκτηση μιας ισχυρής λύσης που μπορεί να ελαχιστοποιήσει το συνολικό αναμενόμενο κόστος. Εκτός από την προτεινόμενη μαθηματική διατύπωση, αξιολογούμε την επίδραση των ενεργειών επιστροφής στην αποθήκη για ανανέωση των αποθεμάτων σε προϊόν για τη μείωση του κόστους που σχετίζεται με τις χαμένες πωλήσεις και τα τελικά επίπεδα αποθεμάτων.

5.6 Συμπεράσματα και κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα

Το πρώτο μέρος του κεφαλαίου μελετά το πρόβλημα παραλαβής και παράδοσης με σκληρά χρονικά παράθυρα, λαμβάνοντας υπόψη στοχαστικούς και χρονικά εξαρτώμενους χρόνους ταξιδιού. Επικεντρωνόμαστε στην ικανοποίηση των προσδοκιών των πελατών σχετικά με την ακρίβεια της παράδοσης, η οποία υπολογίζεται με βάση τις πιθανότητες επιτυχίας των κόμβων και τη συνολική πιθανότητα επιτυχίας. Παρουσιάζουμε μια μέθοδο εκτίμησης για τους χρόνους άφιξης και τις πιθανότητες επιτυχίας υπό στοχαστικούς χρόνους ταξιδιού και εξυπηρέτησης. Στις περισσότερες περιπτώσεις, οι εκτιμώμενες πιθανότητες επιτυχίας παρέχουν ένα κατώτερο όριο για τις πραγματικές πιθανότητες επιτυχίας. Προτείνεται μια προσέγγιση λύσης βασισμένη στη μέθοδο branch-cut-and-price. Αρχικά, παρέχουμε τη διατύπωση του προβλήματος με διαμέριση συνόλου. Στη συνέχεια, δίνουμε έμφαση στον τρόπο δημιουργίας στηλών και ορίζουμε ετικέτες για την επίλυση του προβλήματος κοστολόγησης. Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου παρουσιάζουμε το CTSIRPTW, το οποίο ανήκει στην οικογένεια των IRP. Το πρόβλημα περιλαμβάνει ένα πρόσφατο χαρακτηριστικό της βιβλιογραφίας, δηλαδή την κατανάλωση προϊόντων σε συνεχή χρόνο. Σε αυτή την ομάδα προβλημάτων, η χρήση του προϊόντος σε κάθε πελάτη είναι συνεχής εντός των περιόδων και η δημιουργία κακών σχεδίων παράδοσης μπορεί να έχει αντίκτυπο σε πρόσθετο κόστος που σχετίζεται με καταστάσεις έλλειψης αποθεμάτων. Επιπλέον, οι πελάτες έχουν διαφορετικές ώρες λειτουργίας και διαφορετικά χρονικά παράθυρα, και η συνέπεια στους χρόνους παράδοσης βελτιώνει την ποιότητα των υπηρεσιών και την ικανοποίηση των πελατών, η οποία αποτελεί βασικό παράγοντα σε μια ανταγωνιστική αγορά. Παρουσιάζουμε μια μαθηματική διατύπωση δύο σταδίων για το CTSIRPTW, όπου το πρώτο στάδιο υπόκειται σε διάφορα σύνολα περιορισμών που εξασφαλίζουν σωστό χρόνο, δρομολόγηση και ροή εμπορευμάτων. Το δεύτερο στάδιο χωρίζεται σε δυο ομάδες περιορισμών, όπου η πρώτη ομάδα αφορά τη διαχείριση των εμπορευμάτων και των αποθεμάτων για την πραγματοποίηση της ζήτησης και η δεύτερη ομάδα αφορά την κατανάλωση προϊόντων από τους πελάτες σε συνεχή χρόνο.

Μια πιθανή κατεύθυνση για μελλοντική έρευνα σε σχέση με το PDPHTW-STDTT είναι η ενσωμάτωση προσομοιώσεων Monte Carlo στη φάση κατασκευής της διαδρομής, δηλαδή στον αλγόριθμο κοστολόγησης, έτσι ώστε να μειωθεί το σφάλμα εκτίμησης. Ένα θέμα για μελλοντική έρευνα όσο αναφορά το CTSIRPTW θα μπορούσε να είναι η δυνατότητα συστημάτων διανομής πολλαπλών τμημάτων, στα οποία ένας κεντρικός πωλητής προμηθεύει διαφορετικά κέντρα ενδιάμεσης αποθήκευσης και οι πελάτες αναπληρώνονται από αυτά τα κέντρα αποθήκευσης.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Alarcon, E.J., Schilde, M., Doerner, K.F., 2020. Matheuristic search techniques for the consistent inventory routing problem with time windows and split deliveries. *Oper. Res. Perspect.* 7.
- Alarcon, E.J., Schilde, M., Malicki, S., Doerner, K.F., 2018. Consistent inventory routing with split deliveries. In: *Operation Research Proceedings 2017*. pp. 395–401.
- Andersson, H., Hoff, A., Christiansen, M., Hasle, G., Lokketangen, A., 2010. Industrial aspects and literature survey: Combined inventory management and routing. *Comput. Oper. Res.* 37 (9), 1515–1536.
- Ando, N., Taniguchi, E., 2006. Travel time reliability in vehicle routing and scheduling with time windows. *Netw. Spat. Econ.* 6 (3), 293–311.
- Aziez, I., Côté, J.-F., Coelho, L.C., 2020. Exact algorithms for the multi-pickup and delivery problem with time windows. *European J. Oper. Res.* 284 (3), 906–919.
- Bell, W.J., Dalberto, L.M., Fisher, M.L., Greenfield, A.J., Jaikumar, R., Kedia, P., Mack, R.G., Prutzman, P.J., 1983. Improving the distribution of industrial gases with an on-line computerized routing and scheduling optimizer. *Interfaces* 13 (6), 4–23.
- Belloso, J., Juan, A.A., Martinez, E., Faulin, J., 2017. A biased-randomized metaheuristic for the vehicle routing problem with clustered and mixed backhauls. *Networks* 69, 241–255.
- Bertazzi, L., & Secomandi, N. (2018a). Worst-case benefit of restocking for the vehicle routing problem with stochastic demands. Available at SSRN 3246339.
- Bertazzi, L., & Secomandi, N. (2018b). Faster rollout search for the vehicle routing problem with stochastic demands and restocking. *European Journal of Operational Research*, 270, 487–497.
- Bertazzi, L., Speranza, M.G., 2008. Inventory routing. In: Golden, B., Raghavan, R., Wasil, E. (Eds.), *the Vehicle Routing Problem Latest Advances and New Challenges*, Operations Research/Computer Science Interfaces Series. Vol. 43, Springer, Berlin, pp. 49–72.
- Coelho, L.C., Cordeau, J.-F., Laporte, G., 2014. Thirty years of inventory routing. *Tranp. Sci.* 48 (1), 1–19.
- Cortés, C.E., Gendreau, M., Rousseau, R.L., Souyris, S., Weintraub, A., 2014. Branch-and-price and constraint programming for solving a real-life technician dispatching problem. *Eur. J. Oper. Res.* 238, 300–312.
- Costa, L., Contardo, C., Desaulniers, G., 2019. Exact branch-price-and-cut algorithms for vehicle routing. *Transp. Sci.* 53 (4), 946–985.
- Dayarian, I., Crainic, T.G., Gendreau, M., Rei, W., 2015. A branch-and-price approach for a multi-period vehicle routing problem. *Comput. Oper. Res.* 55, 167–184.
- Derigs, U., Gottlieb, J., Kalkoff, J., Piesche, M., Rothlauf, F., Vogel, U., 2011. Vehicle routing with compartments: applications, modelling and heuristics. *OR Spectrum* 33, 885–914.

- Derigs, U., Reuter, K., 2009. A simple and efficient tabu search heuristic for solving the open vehicle routing problem. *J. Oper. Res. Soc.* 60, 1658–1669.
- Desaulniers, G., Desrosiers, J., Solomon, M.M., 2006. *Column Generation*. Vol. 5, Springer Science & Business Media.
- Dikas, G., Minis, I., Mamasis, K., 2016. Single vehicle routing with predefined client sequence and multiple warehouse returns: the case of two warehouses. *Cent. Eur. J. Oper. Res.* 24, 709–730.
- Dimitrakos, T.D., Kyriakidis, E.G., 2015. A single vehicle routing problem with pickups and deliveries, continuous random demands and predefined customer order. *Eur. J. Oper. Res.* 244, 990–993.
- Ehmke, J.F., Campbell, A.M., Urban, T.L., 2015. Ensuring service levels in routing problems with time windows and stochastic travel times. *European J. Oper. Res.* 240 (2), 539–550.
- Florio, A. M., Hartl, R. F., & Minner, S. (2018). Optimal a priori tour and restocking policy for the single-vehicle routing problem with stochastic demands. *European Journal of Operational Research*.
- Gauvin, C., Desaulniers, G., Gendreau, M., 2014. A branch-cut-and-price algorithm for the vehicle routing problem with stochastic demands. *Comput. Oper. Res.* 50, 141–153.
- Gendreau, M., Laporte, G., Seguin, R., 1996. Stochastic vehicle routing. *Eur. J. Oper. Res.* 88, 3–12.
- Goetschalckx, M., Jacobs-Blecha, C., 1989. The vehicle routing problem with backhauls. *Eur. J. Oper. Res.* 42, 39–51.
- Golden, B.L., Yee, J.R., 1979. A framework for probabilistic vehicle routing. *AIIE Trans.* 11, 109–112.
- Gruler, A., Panadero, J., de Armas, J., Perez, J.A.M., Juan, A.A., 2020. A variable neighborhood search simheuristic for the multiperiod inventory routing problem with stochastic demands. *Int. Trans. Oper. Res.* 27 (1), 314–335.
- Gutierrez, A., Dieulle, L., Labadie, N., Velasco, N., 2018. A multi-population algorithm to solve the VRP with stochastic service and travel times. *Comput. Ind. Eng.* 125, 144–156.
- Haugland, D., Ho, S.C., Laporte, G., 2007. Designing delivery districts for the vehicle routing problem with stochastic demands. *Eur. J. Oper. Res.* 180, 997–1010.
- Ichoua, S., Gendreau, M., Potvin, J.-Y., 2003. Vehicle dispatching with time-dependent travel times. *European J. Oper. Res.* 144 (2), 379–396.
- Irnich, S., Desaulniers, G., 2005. Shortest path problems with resource constraints. In: *Column Generation*. Springer, pp. 33–65.
- Juan, A.A., Grasman, S.E., Caceres-Cruz, J., Bektas, T., 2014. A simheuristic algorithm for the single-period stochastic inventory-routing problem with stock-outs. *Simul. Model. Practice Theory* 46, 40–52.
- Jula, H., Dessouky, M., Ioannou, P.A., 2006. Truck route planning in nonstationary stochastic networks with time windows at customer locations. *IEEE Trans. Intell. Transp. Syst.* 7 (1), 51–62.

- Karamatsoukis, C.C., Kyriakidis, E.G., & Dimitrakos, T.D. (2020). Two-compartment stochastic single vehicle routing problems with simultaneous pickups and deliveries from N ordered customers. *International Journal of Systems Science: Operations & Logistics*, 8(2), 185-203.
- Kriticos, M.N., Ioannou, G., 2013. The heterogeneous fleet vehicle routing problem with overloads and time windows. *Int. J. Prod. Econ.* 144, 68–75.
- Kyriakidis, E.G., & Dimitrakos, T.D. (2019). Stochastic single vehicle routing problem with ordered customers and partial fulfillment of demands. *International Journal of Systems Science: Operations & Logistics*, 6(3), 285–299.
- Kyriakidis, E.G., Dimitrakos, T.D., & Karamatsoukis, C.C. (2019). Optimal delivery of two similar products to N ordered customers with product preferences. *International Journal of Production Economics*, 209, 194–204.
- Kyriakidis, E.G., Dimitrakos, T.D., 2013. A vehicle routing problem with a predefined customer sequence, stochastic demands and penalties for unsatisfied demands. In: *Proceedings of 5th International Conference on Applied Operational Research. Lecture Notes in Management Science*, vol. 5, pp. 10–17.
- Kyriakidis, E.G., Dimitrakos, T.D., 2008. Single vehicle routing problem with a predefined customer sequence and stochastic continuous demands. *Math. Sci.* 33, 148–152.
- Lagos, F., Boland, N., Savelsbergh, M.W.P., 2020. The continuous-time inventory routing problem. *Transp. Sci.* 54 (2), 299–564.
- Laporte, G., Louveaux, F.V., Van Hamme, L., 2002. An integer L-shaped algorithm for the capacitated vehicle routing problem with stochastic demands. *Oper. Res.* 50, 415–423.
- Lee, H.L., Whang, S., 2008. The whose, where and how of inventory control design. *Supply Chain Manag. Review* 12 (8), 22–29.
- Li, X., Tian, P., Leung, S.C., 2010. Vehicle routing problems with time windows and stochastic travel and service times: Models and algorithm. *Int. J. Prod. Econ.* 125 (1), 137–145
- Liu, S.-C., Lee, W.-T., 2011. A heuristic method for the inventory routing problem with time windows. *Expert Syst. Appl.* 38 (10), 13223–13231.
- Louveaux, F. V., & Juan-José Salazar-González, J.-J. (2018). Exact approach for the vehicle routing problem with stochastic demands and preventive returns. *Transportation Science*, 52(6), 1–16. *Articles in Advance*.
- Minis, I., Tatarakis, A., 2011. Stochastic single vehicle routing problem with delivery and pickup and a predefined customer sequence. *Eur. J. Oper. Res.* 213, 37–51.
- Minkoff, A.S., 1993. A Markov decision model and decomposition heuristic for dynamic vehicle dispatching. *Oper. Res.* 41 (1), 77–90.
- Miranda, D.M., Conceição, S.V., 2016. The vehicle routing problem with hard time windows and stochastic travel and service time. *Expert Syst. Appl.* 64, 104–116.
- Nguyen, D.H., De Leeuw, S., Dullaert, W., Foubert, B.P., 2019. What is the right delivery option for you? Consumer preferences for delivery attributes in online retailing. *J. Bus. Logist.* 40 (4), 299–321.

- Nguyen, V.A., Jiang, J., Ng, K.M., Teo, K.M., 2016. Satisfying measure approach for vehicle routing problem with time windows under uncertainty. *Eur. J. Oper. Res.* 248, 404–414.
- Olivera, A., Viera, O., 2007. Adaptive memory programming for the vehicle routing problem with multiple trips. *Comput. Oper. Res.* 34, 28–47.
- Ortega, E.J.A., Doerner, K.F., 2023. A sampling-based matheuristic for the continuous-time stochastic inventory routing problem with time-windows. *Compt. Oper. Res.* 152, 106129.
- Oyola, J., Arntzen, H., Woodruff, D.L., 2018. The stochastic vehicle routing problem, a literature review, part I: models. *EURO J. Transp. Logist.* 7 (3), 193–221.
- Oyola, J., Arntzen, H., Woodruff, D.L., 2017. The stochastic vehicle routing problem, a literature review, part II: solution methods. *EURO J. Transp. Logist.* 6 (4), 349–388.
- Pandelis, D.G., Karamatsoukis, C.C., Kyriakidis, E.G., 2013a. Single vehicle routing problems with a predefined customer order, unified load and stochastic discrete demands. *Probab. Eng. Inf. Sci.* 27 (1), 1–23.
- Pandelis, D.G., Karamatsoukis, C.C., Kyriakidis, E.G., 2013b. Finite and infinite-horizon single vehicle routing problems with a predefined customer sequence and pickup and delivery. *Eur. J. Oper. Res.* 231, 577–586.
- Pandelis, D.G., Kyriakidis, E.G., Dimitrakos, T.D., 2012. Single vehicle routing problems with a predefined customer sequence, compartmentalized load and stochastic demands. *Eur. J. Oper. Res.* 217, 324–332.
- Pillac, V., Gendreau, M., Gueret, C., Megaglia, A., 2013. A review of dynamic vehicle routing problems. *Eur. J. Oper. Res.* 225, 1–11.
- Psaraftis, H.N., Wen, M., Kontovas, C.A., 2016. Dynamic vehicle routing problems: three decades and counting. *Networks* 67, 3–31.
- Righini, G., Salani, M., 2008. New dynamic programming algorithms for the resource constrained elementary shortest path problem. *Netw.: Int. J.* 51 (3), 155–170.
- Ropke, S., Cordeau, J.-F., 2009. Branch and cut and price for the pickup and delivery problem with time windows. *Transp. Sci.* 43 (3), 267–286.
- Ross S.M. (1992) *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Dover, New York.
- Ross S.M. (1983) *Introduction to Stochastic Dynamic Programming*, Academic Press, New York.
- Salavati-Khoshghal, M. S., Gendreau, M., Jabali, O., & Rei, W. (2019). An exact algorithm to solve the vehicle routing problem with stochastic demands under an optimal restocking policy. *European Journal of Operational Research*, 273, 175–189.
- Savelsbergh, M.W.P., 1985. Local search in routing problems with time windows. *Ann. Oper. Res.* 4, 285–305.
- Segerstedt, A., 2014. A simple heuristic for vehicle routing-A variant of Clarke and Wright's saving method. *Int. J. Prod. Econ.* 157, 74–79.

- Sennott L.I. (1999) *Stochastic Dynamic Programming and the Control of Queueing Systems*, Wiley, New York.
- Sipser, M., 2013. *Introduction to the Theory of Computation*, third ed. Cengage Learning, Boston.
- Sun, P., Veelenturf, L.P., Dabia, S., Van Woensel, T., 2018a. The time-dependent capacitated profitable tour problem with time windows and precedence constraints. *European J. Oper. Res.* 264 (3), 1058–1073.
- Syrichas, A., Crispin, A., 2017. Large-scale vehicle routing problems: quantum Annealing, tunings and results. *Comput. Oper. Res.* 87, 52–62.
- Taş, D., Dellaert, N., Van Woensel, T., De Kok, T., 2014a. The time-dependent vehicle routing problem with soft time windows and stochastic travel times. *Transp. Res. C* 48, 66–83.
- Taş, D., Gendreau, M., Dellaert, N., Van Woensel, T., De Kok, A., 2014b. Vehicle routing with soft time windows and stochastic travel times: A column generation and branch-and-price solution approach. *European J. Oper. Res.* 236 (3), 789–799.
- Taş, D., Dellaert, N., Van Woensel, T., De Kok, T., 2013. Vehicle routing problem with stochastic travel times including soft time windows and service costs. *Comput. Oper. Res.* 40 (1), 214–224.
- Tasan, A.S., Gen, M.A., 2012. A genetic algorithm based approach to vehicle routing problem with simultaneous pick-up and deliveries. *Comput. Ind. Eng.* 62, 755–761.
- Tatarakis, A., Minis, I., 2009. Stochastic single vehicle routing with a predefined customer sequence and multiple depot returns. *Eur. J. Oper. Res.* 197, 557–571
- Toth, P., Vigo, D. (Eds.), 2014. *The Vehicle Routing Problem. Problems, Methods, and Applications*, second ed. MOS-SIAM, Philadelphia, PA.
- Tsirimpas, P., Tatarakis, A., Minis, I., Kyriakidis, E.G., 2008. Single vehicle routing with a predefined customer sequence and multiple depot returns. *Eur. J. Oper. Res.* 187, 483–495.
- Wang, X., Dessouky, M., Ordonez, F., 2016. A pickup and delivery problem for ridesharing considering congestion. *Transp. Lett.* 8 (5), 259–269.
- Wang, Z., Ioannou, P., Dessouky, M., Woensel, T.V., 2023. Pickup and delivery problem with hard time windows considering stochastic and time-dependent travel times. *EURO J. Transp. Logist.* 12, 100099.
- Yang, W.-H., Mathur, K., Ballou, R.H., 2000. Stochastic vehicle routing problem with restocking. *Transport. Sci.* 34, 99–112.
- Yazici, M.A., Kamga, C., Mouskos, K.C., 2012. Analysis of travel time reliability in new york city based on day-of-week and time-of-day periods. *Transp. Res. Rec.* 2308 (1), 83–95.
- Yee, J. R., & Golden, B. I. (1980). A note on determining operating strategies for probabilistic vehicle routing. *Naval Research Logistics Quarterly*, 27, 159–163.
- Zhang, J., Lam, W.H.K., Chen, B.Y., 2016. On-time delivery probabilistic models for the vehicle routing problem with stochastic demands and time windows. *Eur. J. Oper. Res.* 249, 144–154.

Zhang, T., Chaovalitwongse, W.A., Zhang, Y., 2012. Scatter search for the stochastic travel-time vehicle routing problem with simultaneous pick-ups and deliveries. *Comput. Oper. Res.* 39 (10), 2277–2290.

Zhu, L., & Sheu, J.-B. (2018). Failure-specific cooperative recourse strategy for simultaneous pickup and delivery problem with stochastic demands. *European Journal of Operational Research*, 271, 896–912.