ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ:

«ΠΑΙΔΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΚΑΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΥΛΙΚΟ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

που εκπονήθηκε από την

ΠΑΡΧΑΡΙΔΟΥ ΣΟΦΙΑ

ΑΜ: 4232021026

Θέμα: «Ανάλυση των μαθηματικών προβλημάτων στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια της Δ', Ε' και ΣΤ' τάξης του Δημοτικού σχολείου»

Θέμα: "Analysis of mathematical problems in Greek textbooks of fourth, fifth and sixth of primary school"

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Σουλτάνα Καφούση	Καθηγήτρια	ΠΑΝΕΣΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟ	Επιβλέπουσα
Φραγκίσκος Καλαβάσης	Καθηγητής	ΠΑΝΕΣΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟ	Μέλος τριμελούς επιτροπής
Χρυσάνθη Σκουμπουρδή	Καθηγήτρια	ΠΑΝΕΣΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟ	Μέλος τριμελούς επιτροπής

ΡΟΔΟΣ, 2023

Η έγκριση της παρούσης Διπλωματικής Εργασίας στο πλαίσιο του Π.Μ.Σ. «Παιδικό βιβλίο και Παιδαγωγικό υλικό» του Τμήματος Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού του Πανεπιστημίου Αιγαίου δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων της συγγραφέως.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση της εργασίας αυτής, δεν θα μπορούσα παρά να ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπουσα καθηγήτρια της διπλωματικής μου εργασίας, κυρία Σουλτάνα Καφούση, για την άψογη συνεργασία μας, την πολύτιμη καθοδήγησή της, την υπομονή, την κατανόηση και την συμπαράστασή της. Τις ευχαριστίες μου εκφράζω και στον καθηγητή κ. Φραγκίσκο Καλαβάση και την καθηγήτρια κ. Χρυσάνθη Σκουμπουρδή, που δέχτηκαν να είναι μέλη της τριμελούς επιτροπής αξιολόγησης της διπλωματικής εργασίας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, που είναι δίπλα μου σε κάθε μου βήμα αλλά και κάθε φίλη και φίλο μου ξεχωριστά που με βοήθησε ψυχολογικά και πρακτικά ώστε να ολοκληρωθεί αυτή η εργασία.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα σχολικά εγχειρίδια είναι ένας από τους παράγοντες που επηρεάζουν την διδακτική πράξη. Ως εκ τούτου, η ανάλυση τους, ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια παρουσιάζει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον. Συγκεκριμένα για το μάθημα των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση μετά τη δεκαετία του ’80, η επίλυση προβλημάτων έχει την πρωτοκαθεδρία στην διαμόρφωση της διδασκαλίας των σχολικών εγχειριδίων για την εκμάθηση των μαθηματικών. Ο τρόπος που παρουσιάζεται το περιεχόμενο, οι τύποι προβλημάτων που συναντώνται και η μέθοδος διδασκαλίας που προωθείται, αποτελούν στοιχεία που καθορίζουν τις ευκαιρίες μάθησης, που τα σχολικά εγχειρίδια, μαζί με άλλους παράγοντες (πεποιθήσεις και μέθοδοι διδασκαλίας των δασκάλων, πεποιθήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά και τον εαυτό τους σε σχέση με τα μαθηματικά) επηρεάζουν την διδακτική πράξη.

Η εργασία αυτή πραγματεύεται την ανάλυση του περιεχόμενου των σχολικών εγχειρίδιων των μαθηματικών τις Δ΄, Ε΄, και ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού σχολείου στην Ελλάδα, ως προς το πώς χρησιμοποιείται η επίλυση προβλήματος σε αυτά και πώς και σε ποιο βαθμό εκπροσωπούνται οι γενικές στρατηγικές επίλυσης, όπως τις παρουσίασε ο Ούγγρος μαθηματικός Pólya καθώς και οι ευρετικές. Στο πρώτο κεφάλαιο, δίνονται οι ορισμοί της έννοιας «πρόβλημα» και «επίλυση προβλήματος», παρουσιάζονται οι τύποι των προβλημάτων που συναντώνται στην βιβλιογραφία, καθώς και οι στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων και οι ευρετικές. Τέλος, αναλύεται ο ρόλος του σχολικού εγχειριδίου στην μαθηματική εκπαίδευση, καθώς και προηγούμενες έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί. Το δεύτερο κεφάλαιο, αναφέρεται στον σχεδιασμό της έρευνας και τα ερευνητικά ερωτήματα που τη συνοδεύουν, όπως επίσης και το πλαίσιο της ανάλυσης της. Στο τρίτο κεφάλαιο, παρατίθενται τα αποτελέσματα της έρευνας και στο τέταρτο, τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξε αυτή.

Τα αποτελέσματα καταδεικνύουν πως τα παραδοσιακά προβλήματα κυριαρχούν στα σχολικά εγχειρίδια αυτών των τάξεων, άλλοτε με προβλήματα σχετιζόμενα με την καθημερινή ζωή και άλλοτε με καθαρά μαθηματικό πλαίσιο. Στα στάδια της επίλυσης κυριαρχεί το στάδιο της εκτέλεσης και οι ευρετικές που χρησιμοποιούνται είναι αυτές που προτείνονται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, σε σχετικά όμως μικρό ποσοστό. Τα συμπεράσματα της έρευνας μπορούν να οδηγήσουν στην βελτίωση της συγγραφής των σχολικών εγχειριδίων και των ευκαιριών μάθησης που αυτά προσφέρουν.

Λέξεις κλειδιά: επίλυση προβλημάτων, στρατηγικές του Pólya, ευρετικές, σχολικά εγχειρίδια, πρωτοβάθμια εκπαίδευση

ABSTRACT

School textbooks are one of the factors that influence the teaching practice. Therefore, their analysis especially in recent years is of great research interest. Specifically for the mathematics course in primary education after the 1980s, problem solving takes precedence in shaping the teaching of school textbooks for learning mathematics. The way the content is presented, the types of problems encountered and the teaching method promoted are elements that determine the learning opportunities that school textbooks, along with other factors (teachers' teaching beliefs and methods, students' beliefs about mathematics and about themselves in relation to mathematics) influence the teaching practice.

This paper deals with the analysis of the content of mathematics textbooks in the 4th, 5th, and 6th grades of the Primary school in Greece, in terms of how problem solving is used in them and how and to what extent general solving strategies are represented, as well as heuristics. In the first chapter, the definitions of the concept "problem" and "problem solving" are given, the types of problems encountered in the literature are presented, as well as the problem solving strategies and heuristics proposed by Pólya for teaching solving problems. Finally, the role of the textbook in mathematics education is analyzed, as well as previous research that has been carried out. The second chapter refers to the design of the research and the research questions that accompany it, as well as the context of its analysis. In the third chapter the results of the research are listed and in the fourth the conclusions that this research reached.

The results demonstrate that traditional problems dominate the textbooks of these classes, sometimes with problems related to everyday life and sometimes with a purely mathematical context. In the stages of Pólya's problem solving the implementation stage dominates and the heuristics used are those proposed in the Analytical Curriculum, in a proportionally small percentage. The conclusions of the research can lead to the improvement of the writing of school textbooks and the learning opportunities they offer.

Keywords: problem solving, Pólya's strategies, heuristics, textbooks, primary education

Πίνακας περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Περίληψη

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται ανάλυση των εννοιών «πρόβλημα», «επίλυση προβλήματος» και «κατασκευή προβλήματος», σε σχέση με τη χρήση τους στη διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών. Παρουσιάζονται οι γενικές στρατηγικές επίλυσης και οι ευρετικές, όπως τις πρότεινε ο Pólya και παρατίθενται κάποιες σχετικές έρευνες. Τέλος, αναλύεται ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων, οι ευκαιρίες μάθησης που αυτά δημιουργούν και η σχέση τους με τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών.

1.1 Εισαγωγή

Τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν το πιο σημαντικό εργαλείο για τη μαθηματική εκπαίδευση (Fan, Zhu & Miao, 2013; Pepin & Haggerty, 2001) και η επίλυση προβλήματος καταλαμβάνει κυρίαρχη θέση σε αυτά. Πολλοί ερευνητές συμφωνούν, πως η διδασκαλία καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τα σχολικά εγχειρίδια, διότι οι εκπαιδευτικοί τα χρησιμοποιούν πολύ συχνά, ως αποκλειστικό μέσο για την οργάνωση της διδασκαλίας τους, ακολουθώντας το περιεχόμενο και τη σειρά με την οποία παρουσιάζεται η ύλη (Vincent & Stacey, 2008), ενώ ταυτοχρόνως, οι μαθητές τα χρησιμοποιούν, ως εργαλείο για να έρθουν σε επαφή με τα μαθηματικά, καθώς οι εργασίες που επιλύουν είναι αυτές που βρίσκονται στο σχολικό εγχειρίδιο (Boesen et al., 2014). Η ανάλυση τους έχει απασχολήσει ιδιαίτερα την ερευνητική κοινότητα, με το μεγαλύτερο όγκο της έρευνας, σχετικά με την επίλυση προβλημάτων να εντοπίζεται στην δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση (Suseelan at al., 2022). Η ανάλυση τους εξετάζεται κυρίως, ως προς τις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρουν, με στόχο την βελτίωση τους και συγχρόνως της βελτίωσης της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Τα προβλήματα, όπως και η επίλυση προβλήματος και πιο πρόσφατα η κατασκευή προβλήματος, έχουν κεντρικό ρόλο στα Προγράμματα Σπουδών των περισσοτέρων χωρών. Ο τρόπος και ο βαθμός χρήσης τους στα σχολικά εγχειρίδια, ως αντικείμενα μάθησης και ως τρόπος διδασκαλίας, έχουν αποτελέσει αντικείμενα πολλών ερευνών. Η διδασκαλία μέσω της επίλυσης προβλημάτων, ως μια διαδικασία που στοχεύει στην μαθηματική κατανόηση και όχι στην στείρα απομνημόνευση κανόνων και εννοιών, προωθείται από τη μαθηματική κοινότητα, μέσω της διερεύνησης σε ομάδες ανοιχτών, μη ρουτίνας προβλημάτων, που καλλιεργούν τον συλλογισμό, την επιχειρηματολογία και τον κοινωνικό χαρακτήρα των μαθηματικών.

1.2 Ο ορισμός του όρου «πρόβλημα» στα μαθηματικά

Ο όρος πρόβλημα σύμφωνα με το λεξικό του Τριανταφυλλίδη (1998), χρησιμοποιείται για να προσδιορίσει: 1)«ένα (σύνθετο, πολύπλοκο) ερώτημα/ζήτημα, στο οποίο επιζητείται και επιχειρείται να δοθεί απάντηση με επιστημονικό τρόπο, με επιστημονική μέθοδο», 2) ένα «ερώτημα, ζήτημα που ορισμένα στοιχεία του είναι γνωστά, και με βάση αυτά ζητείται η εύρεση άλλων, άγνωστων με μαθηματικές ή με άλλες επιστημονικές μεθόδους», 3) μια «δύσκολη, περίπλοκη κατάσταση, υπόθεση, θέμα που πρέπει να αντιμετωπιστεί, που επιζητεί λύση, διευθέτηση», 4)μια «δυσκολία, δυσχέρεια που δημιουργεί αρνητικές καταστάσεις, δυσλειτουργίες» (Πύλη για την ελληνική γλώσσα).

Στην καθημερινή μας ζωή, ερχόμαστε αντιμέτωποι με ένα πλήθος προβλημάτων, που καλούμαστε να επιλύσουμε (προσωπικά, οικονομικά, εργασιακά κ.ά.). Όπως αναφέρει ο Duncker, (1945, στο Lester, 2013), ένα πρόβλημα προκύπτει, όταν ένα έμβιο ον έχει έναν στόχο αλλά δεν γνωρίζει πώς πρέπει να επιτευχθεί αυτός ο στόχος. Η λέξη πρόβλημα χρησιμοποιείται κατ’ αυτόν τον ορισμό, σε κάθε είδους πρόβλημα που το άτομο μπορεί να εμπλακεί. Στα μαθηματικά, ο όρος πρόβλημα αποκτά μια ξεχωριστή ερμηνεία. Ιδιαίτερα όταν γίνεται λόγος για προβλήματα στα σχολικά εγχειρίδια, απαιτείται ειδική ερμηνεία του όρου αυτού.

Μέχρι και σήμερα, δεν έχουν δοθεί καθολικά αποδεκτοί ορισμοί για τους όρους «πρόβλημα», και κατ’ επέκταση «επίλυση προβλήματος», με αποτέλεσμα να εντοπίζονται αναρίθμητοι ορισμοί στην βιβλιογραφία (English & Gainsburg, 2016). Καθώς η έννοια του προβλήματος, παίρνει διαφορετική διάσταση στα μαθηματικά και καθώς κάθε ερευνητής χρησιμοποιεί διαφορετικό ορισμό ανάλογα με τους σκοπούς της έρευνας του, προτείνονται διάφοροι ορισμοί για την έννοια του μαθηματικού προβλήματος.

Θα πρέπει αρχικά να αναφερθεί, πως ένα πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί μαθηματικό, αν στην αναζήτηση της απάντησης εμπλέκονται μαθηματικές έννοιες και αρχές (Μαμωνά-Downs, Παπαδόπουλος, 2017). Σύμφωνα με τον ορισμό των Blum & Niss (1991), ως πρόβλημα μπορεί να οριστεί μια κατάσταση στην οποία υπάρχουν συγκεκριμένες ανοιχτές ερωτήσεις, οι οποίες «προκαλούν διανοητικά κάποιον, που δεν διαθέτει έτοιμες μεθόδους/διαδικασίες/αλγορίθμους κτλ., επαρκείς για να απαντήσουν στο ερώτημα». Οι ίδιοι εντοπίζουν δυο κατηγορίες μαθηματικών προβλημάτων στην μαθηματική επιστήμη. Στην πρώτη ανήκουν τα εφαρμοσμένα μαθηματικά προβλήματα, τα οποία ξεκινούν από τον πραγματικό/υπαρκτό/μη μαθηματικό κόσμο ή κάποια άλλη επιστήμη και χρησιμοποιούν μαθηματικές διαδικασίες στην επίλυση τους και στην δεύτερη ανήκουν τα καθαρά μαθηματικά προβλήματα, που ανήκουν στο αμιγώς μαθηματικό σύμπαν.

Ένα πρόβλημα του πραγματικού κόσμου, μπορεί να λυθεί με μαθηματικό τρόπο, αν αυτό μαθηματικοποιηθεί. Με τον όρο μαθηματικοποίηση, εννοείται η διατύπωση ενός προβλήματος με μαθηματικούς όρους (Blum& Niss, 1991). Με βάση αυτόν τον ορισμό, το πρόβλημα του υπαρκτού κόσμου, τυποποιείται μαθηματικά (μαθηματικό μοντέλο), λύνεται με μαθηματικές πράξεις και έτσι οδηγούμαστε σταδιακά στη λύση του υπαρκτού προβλήματος. Η μοντελοποίηση, όπως ονομάζεται συνολικά η παραπάνω διαδικασία είναι μια σημαντική διαδικασία, που μπορεί να καθορίσει την διαδικασία επίλυσης που γίνεται από το λύτη.

Ως προς τον ορισμό του προβλήματος στα μαθηματικά, ο Kantowski (1980, στο Pehkonen at al, 2013), ορίζει αυτό, ως μια κατάσταση, όπου το άτομο, πρέπει να συνδυάσει νέες πληροφορίες (γι’ αυτό) με ένα καινούργιο (γι’ αυτό) τρόπο ώστε να φτάσει στην λύση του. Ή όπως το τοποθετούν οι Mamona–Downs & Downs (2013), ως «οποιοδήποτε μαθηματικό έργο που δεν είναι διαδικαστικό ή ο μαθητής δεν γνωρίζει εξαρχής, πώς θα προχωρήσει στην επίλυση του». Σύμφωνα με αυτούς τους ορισμούς, το τι θα αποτελέσει πρόβλημα ορίζει, η απουσία γνωστής μεθόδου/αλγορίθμου από το λύτη, ώστε να οδηγηθεί άμεσα στην λύση του.

Καθώς στα σχολικά εγχειρίδια γίνεται συχνά χρήση προβλημάτων ή ασκήσεων για διδακτικούς σκοπούς, είναι σημαντική η διάκριση μεταξύ προβλήματος και άσκησης όταν ασχολούμαστε με την μελέτη τους. Ο Schoenfeld (1992), δηλώνει ρητά πως ο όρος «πρόβλημα» μπορεί να έχει διαφορετικές σημασίες. Ο ίδιος αναφερόμενος στα μαθηματικά έργα, τα χωρίζει σε έργα ρουτίνας (routine tasks) ή ασκήσεις (exercises) και σε προβλήματα μη ρουτίνας (non routine problems). Η διαφοροποίηση μεταξύ αυτών είναι η ύπαρξη ή μη, σχεδίου λύσης από τον λύτη. Εάν δηλαδή κάποιος γνωρίζει τον τρόπο με τον οποίο θα προσεγγίσει το πρόβλημα, τότε αυτό αποτελεί άσκηση και όχι πρόβλημα. Η άσκηση δηλαδή, αποτελεί ένα ερώτημα που κάποιος γνωρίζει άμεσα πως θα φτάσει στην λύση του (Μαμωνά-Downs, Παπαδόπουλος, 2017) και μέσα σε αυτή την συνθήκη αποτελεί μια μαθηματική κατάσταση, όπου μέσω της εκγύμνασης και της πρακτικής προωθείται η ενδυνάμωση μιας προηγούμενα κατεκτημένης μαθηματικής γνώσης (Schoenfeld, 1992, στο Μαμωνά- Downs, Παπαδόπουλος, 2017).

Ο Schoenfeld, υπογραμμίζει δύο ακόμα παραμέτρους, ώστε να διαφοροποιήσει την άσκηση από το πρόβλημα. Στην άσκηση, οι λύτες καθώς έχουν έτοιμη την μέθοδο που θα ακολουθήσουν για την επίλυση της, αυτή απαιτεί σύντομο χρονικό διάστημα για να επιλυθεί και ταυτοχρόνως, η επίλυση της φανερώνει την καλή γνώση μόνο ενός πολύ συγκεκριμένου και μικρού τμήματος του γνωστικού αντικειμένου (Schoenfeld, 1988, στο Μαμωνά-Downs, Παπαδόπουλος, 2017). Σε αντίθεση, το πρόβλημα, στο οποίο ο λύτης αγνοεί τη μέθοδο με την οποία θα οδηγηθεί στην επίλυση του, απαιτεί περισσότερο χρόνο και προσπάθεια, καθώς «απαιτεί ανάκληση προϋπάρχουσας γνώσης (η οποία μάλιστα πολλές φορές παραμένει αδρανής), καθώς και αναλυτικές και συνθετικές δυνατότητες διαχείρισης της γνώσης αυτής στο πλαίσιο της συγκεκριμένης κατάστασης» (Mamona-Downs, 2002, στο Μαμωνά- Downs, Παπαδόπουλος, 2017). Στην άσκηση λοιπόν, ο μαθητής εφαρμόζει γνώσεις, που έχει προηγουμένως διδαχθεί, χωρίς να χρειάζεται να τις αναθεωρήσει, να τις τροποποιήσει ή να τις απορρίψει προκειμένου να παράγει νέες γνώσεις.

Ο Pólya (1991) αναφέρει ότι, ένα πρόβλημα εμφανίζεται, όταν δεν είναι φανερός ο τρόπος επίτευξης ενός στόχου και προτείνει τον χωρισμό των προβλημάτων σε δυο κατηγορίες: α) στα προβλήματα «εύρεσης»(αγνώστων), αυτά δηλαδή που έχουν στο κυρίως μέρος το ζητούμενο (ή άγνωστο), τα δεδομένα και την/τις συνθήκη/ες και β)τα προβλήματα «απόδειξης», στα οποία τα βασικά μέρη αποτελούν, μια υπόθεση/ισχυρισμός και ένα συμπέρασμα που αποδεικνύει αν ο ισχυρισμός αυτός ισχύει ή όχι. Στα πρώτα, ο σκοπός είναι να βρεθεί ο άγνωστος, το ζητούμενο δηλαδή, που ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος με βάση τα δεδομένα του. Στα δεύτερα, η λύση του προβλήματος ολοκληρώνεται με την εύρεση των μαθηματικών αντικειμένων, που ικανοποιούν την/τις συνθήκη/ες του προβλήματος. Σκοπός του λύτη είναι να ερευνήσει, αν ένας μαθηματικός ισχυρισμός είναι αληθής ή όχι και η εργασία του έχει τελειώσει μόνο όταν αποδείξει με βεβαιότητα, πως ο ισχυρισμός ισχύει ή δεν είναι αληθής (Μαμωνά-Downs, Παπαδόπουλος, 2017).

Όμως, όπως αναφέρει ο Schoenfeld (1987, στο Pehkonen, 1997α) το τι αποτελεί πρόβλημα για τον καθένα είναι κάτι σχετικό, καθώς ένα πρόβλημα για κάποιον μπορεί εύκολα να επιλυθεί, ενώ για κάποιον άλλο η εύρεση της λύσης του, δεν του είναι γνωστή. Άρα, η δυσκολία που θα συναντήσει κανείς στην επίλυση του προβλήματος, καθορίζει τι είναι πρόβλημα. Η έννοια του προβλήματος δηλαδή, κατ' αυτόν τον τρόπο είναι συνδεδεμένη με το άτομο και το χρόνο. Σε μεταγενέστερο χρόνο, το ίδιο άτομο, αν συναντήσει το ίδιο πρόβλημα, δεν θα του είναι δύσκολο να φτάσει στη λύση του και άρα δεν θα αποτελεί για αυτό πρόβλημα.

Με τον όρο πρόβλημα στην παρούσα εργασία, καθώς πρόκειται για ανάλυση σχολικών εγχειριδίων, θα εννοείται κάθε μαθηματικό έργο, που απαιτεί μια λύση, ασχέτως της δυσκολίας που προκαλεί στον λύτη, καθώς δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε το βαθμό δυσκολίας, που συναντά ο κάθε μαθητής στην προσπάθεια του να λύσει το προσφερόμενο πρόβλημα, ούτε και τον χρόνο και τον τρόπο με τον οποίο το πρόβλημα χρησιμοποιείται από τον εκπαιδευτικό κατά την διδασκαλία.

1.3 Τύποι προβλημάτων

Οι τύποι των προβλημάτων που χρησιμοποιούνται από τα σχολικά εγχειρίδια, όπως και ο βαθμός έκθεσης των μαθητών σε αυτά, φαίνεται πως σχετίζονται με τις επιδόσεις τους στα μαθηματικά (Zhu & Fan, 2006). Υπάρχουν πολλοί τύποι προβλημάτων στην βιβλιογραφία. Ο Xin (2007), υποστηρίζει πως τα χαρακτηριστικά του προβλήματος ή της εργασίας διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην διαδικασία επίλυσης των λεκτικών προβλημάτων. Τα λεκτικά προβλήματα λαμβάνουν μεγάλο μέρος στα σχολικά εγχειρίδια. Ως λεκτικό πρόβλημα μπορεί να οριστεί, «[…]ένα κείμενο (που συνήθως περιέχει ποσοτικές πληροφορίες) που περιγράφει μια κατάσταση που θεωρείται γνωστή στον αναγνώστη και θέτει ένα ποσοτικό ερώτημα, η απάντηση στο οποίο μπορεί να προκύψει με μαθηματικές πράξεις που εκτελούνται πάνω στα δεδομένα που παρέχονται στο κείμενο» (Greer, Verschaffel, & De Corte, 2002, στο Verschaffel at al, 2020). Με τον όρο χαρακτηριστικά, εννοούνται οι παράγοντες εκείνοι, που σχετίζονται με τη φύση του προβλήματος και περιλαμβάνουν, το μαθηματικό περιεχόμενο, τη δομή, την ύπαρξη πλαισίου και την σύνταξη τους. Επίσης, οι τύποι των ασκήσεων που παρέχονται από τα σχολικά εγχειρίδια στους μαθητές, σχετίζονται με τις ευκαιρίες μάθησης τους και καθώς οι εκπαιδευτικοί δεν αναμένεται να αναπτύξουν δικές τους ασκήσεις αλλά να βασιστούν σε αυτές, πράγμα το οποίο συμβαίνει (Schmidt et al, 2022), η εξέταση τους κρίνεται σημαντική.

Ακολουθώντας την ταξινόμηση που έχουν προτείνει οι Zhu & Fan (2006), για την ανάλυση σχολικών εγχειριδίων, τα προβλήματα μπορούν να ταξινομηθούν στις εξής γενικές κατηγορίες:

1. ρουτίνας- μη ρουτίνας (routine-non routine)
2. παραδοσιακά- μη παραδοσιακά (traditional-nontraditional)
3. ανοικτού τύπου- κλειστού τύπου (open ended- close ended)
4. εφαρμογής- μη εφαρμογής (application- non-application)
5. ενός βήματος -πολλών βημάτων (single step-multiple step)
6. με επαρκή δεδομένα- πλεονάζοντα δεδομένα -ανεπαρκή δεδομένα (sufficient information-extra information-insufficient information)
7. καθαρή μαθηματική μορφή- λεκτική μορφή-Οπτική μορφή-Συνδυασμένη μορφή (in pure mathematical form-in verbal form-in visual form-in a combined form)

1.3.1 Ρουτίνας- μη ρουτίνας (Routine-non routine)

Ο Schoenfeld (1985), όπως και άλλοι ερευνητές, προτείνει για τη διδασκαλία των Μαθηματικών την διάκριση των προβλημάτων σε δύο κατηγορίες, τα προβλήματα ρουτίνας και τα πρωτότυπα. Στην πρώτη κατηγορία συμπεριλαμβάνει εκείνες τις ασκήσεις που αποσκοπούν στην ανάπτυξη τεχνικών, ενώ στα πρωτότυπα προβλήματα, αυτά που απαιτούν από τους μαθητές την εφεύρεση και την δοκιμή δικών τους στρατηγικών κατά την επίλυση τους, που ξεπερνούν τις τυποποιημένες αλγοριθμικές πράξεις (English, 1997). Οι Woodward et al. (2012) ονομάζουν επίσης, προβλήματα ρουτίνας, αυτά τα προβλήματα τα οποία για την επίλυση τους απαιτούν από τους μαθητές να εφαρμόσουν μεθόδους που τους είναι οικείες, καθώς τις έχουν ήδη διδαχτεί και προβλήματα μη ρουτίνας, αυτά για τα οποία δεν υπάρχει μια προκαθορισμένη μέθοδος που μπορεί να εφαρμοστεί ή μια συγκεκριμένη διαδρομή που να προτείνετε ή να δίνεται από οδηγίες και προηγούμενα παραδείγματα.

Στη δεύτερη κατηγορία, των πρωτότυπων ή ασυνήθιστων ή μη ρουτίνας προβλημάτων, ανήκουν τα ανοιχτά προβλήματα. Τα προβλήματα μη ρουτίνας απαιτούν συλλογισμό και δεξιότητες σκέψης ανωτέρας τάξης που δεν περιορίζεται στις διαδικαστικές δεξιότητες (Kolovou et al., 2009). Ωστόσο, οι Zhu & Fan (2006) θεωρούν, πως η ανάπτυξη των δεξιοτήτων των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων ρουτίνας, αξίζουν εξίσου να περιλαμβάνονται στην διδασκαλία των μαθηματικών, καθώς στην καθημερινή τους ζωή, οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με πολλά προβλήματα ρουτίνας.

1.3.2 Παραδοσιακά- μη παραδοσιακά (Traditional-nontraditional)

Οι Zhu & Fan (2006), στην κατηγορία μη παραδοσιακά προβλήματα κατηγοριοποιούν τέσσερα είδη προβλημάτων. Τα προβλήματα γρίφων (puzzle problems), τα προβλήματα έργου (project problems), τα προβλήματα ημερολόγιου (journal problems) και την κατασκευή προβλημάτων (problem posing). Τα προβλήματα έργου αποτελούν εργασίες ή σειρές εργασιών που απαιτούν αρκετό χρόνο για να ολοκληρωθούν (ημέρες ή και εβδομάδες) και συμπεριλαμβάνουν τουλάχιστον μία από τις ακόλουθες διαδικασίες: συλλογή δεδομένων, αναζήτηση αναφορών, παρατήρηση, αναγνώριση, μέτρηση, ανάλυση, προσδιορισμό μοτίβων ή/και σχέσεων, γραφική παράσταση και επικοινωνία. Στα προβλήματα ημερολογίου, οι μαθητές καλούνται να καταγράψουν τις εμπειρίες, τις απόψεις, τις ερωτήσεις τους και την προσωπική τους αντίληψη γι’ αυτό που έχουν διδαχθεί. Αυτές οι εργασίες προσφέρουν πληροφορίες στους εκπαιδευτικούς για την διδασκαλία και για την μάθηση των μαθητών. Η κατασκευή προβλημάτων, ορίζεται από αυτούς τους ερευνητές, ως η διατύπωση ερωτήσεων σε μορφή προβλήματος, από τους μαθητές μέσα από τα παρεχόμενα δεδομένα. Όλα τα υπόλοιπα προβλήματα κατηγοριοποιούνται ως παραδοσιακά.

Ειδικότερα, ο όρος κατασκευή προβλήματος (problem posing) αναφέρεται αφενός στην κατασκευή καινούργιων προβλημάτων και αφετέρου στην παραλλαγή δοσμένων προβλημάτων και γίνεται ιδιαίτερη αναφορά σε αυτήν την κατηγορία προβλημάτων, καθώς τα τελευταία χρόνια γίνονται προσπάθειες η κατασκευή προβλήματος να αποτελέσει μέρος ή μεγαλύτερο μέρος των σχολικών μαθηματικών. Πολλά εθνικά προγράμματα σπουδών έχουν επιστήσει την προσοχή τους σε αυτό το κομμάτι, υποστηρίζοντας την αξία της κατασκευής προβλημάτων στην καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης των μαθητών (Chinese National Ministry of Education, Office of School Teaching Materials and Institute of Curriculum and Teaching Materials, 1986; Hashimoto, 1987; Ministry of Education of China, 2011; National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 1989; Van den Brink, 1987, στο Cai at al. 2015). Παρόλα αυτά οι έρευνες διαπιστώνουν πως η εισαγωγή της κατασκευής προβλημάτων στα σχολικά εγχειρίδια είναι περιορισμένη (π.χ. Cai & Jiang, 2017).

Το Εθνικό Συμβούλιο καθηγητών Μαθηματικών (NCTM, 1989) υπογράμμισε την ανάγκη να δοθούν περισσότερες ευκαιρίες στους μαθητές να εξερευνήσουν και να διατυπώσουν ερωτήσεις που προκύπτουν μέσα από προβληματικές καταστάσεις. Σύμφωνα με αυτούς, η διατύπωση και η αναγνώριση προβλημάτων από τους ίδιους τους μαθητές αποτελεί την καρδιά αυτού που αποκαλείται «κάνω μαθηματικά». Επίσης, στο NCTM (2000) προτάθηκε η κατασκευή προβλήματος, να προωθείται μέσω προβλημάτων που προκύπτουν από την εμπειρία των ίδιων των μαθητών (Stickles, 2011, στο Cai at al, 2015). Τα προγράμματα σπουδών της Κίνας, έχουν ακολουθήσει αυτήν την πρόταση και έχουν εισάγει στο πρόγραμμα σπουδών και των εννέα τάξεων της υποχρεωτική τους εκπαίδευσης την χρήση της κατασκευής προβλήματος (Κέντρο Ανάπτυξης Υλικού Προγράμματος Σπουδών Βασικής Εκπαίδευσης, κινεζικό Υπουργείο Παιδείας, 2003 (Basic Education Curriculum Material Development Center, Chinese Ministry of Education, 2003).

Στο ελληνικό Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών**,** (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) η διατύπωση προβλημάτων από καταστάσεις της πραγματικής ζωής, συνδέεται με την επίλυση προβλημάτων. Με βάση αυτό, τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται στο σχολικό εγχειρίδιο όλων των τάξεων του δημοτικού θα «πρέπει να είναι τέτοια ώστε να δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές να εξερευνούν μία κατάσταση, να κατασκευάζουν ερωτήσεις και προβλήματα με βάση συγκεκριμένα δεδομένα, να διατυπώνουν πολλαπλά το ίδιο πρόβλημα, να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις, να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή και να εξοικειώνονται με τις νέες τεχνολογίες» με στόχο οι μαθητές «να ανακαλύπτουν και κατασκευάζουν ατομικά ή συλλογικά νέες έννοιες, εφαρμόζουν και σταθεροποιούν τις ήδη αποκτημένες γνώσεις, ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις και αναπτύσσουν μεθοδολογικές ικανότητες για την επίλυση προβλημάτων» (σελ.250).

Σύμφωνα με έρευνες που έχουν γίνει (Cai & Cifarelli, 2005; English, 1998; Silver, 1994, 1997; Singer & Moscovici, 2008, στο Singer at al., 2013) η κατασκευή προβλήματος δεν βελτιώνει μόνο τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων αλλά και την ευρύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και της μαθηματικής σκέψης, τις στάσεις και την εμπιστοσύνη των μαθητών για τα μαθηματικά (Singer at al., 2013).

1.3.3 Ανοικτού τύπου- κλειστού τύπου (open ended-close ended)

Έναν ευρύ χωρισμό των προβλημάτων αποτελεί η κατηγορία «ανοιχτά» και «κλειστά» προβλήματα (Pehkonen, 1997α). Στον χώρο της μαθηματικής επιστήμης ανοιχτό πρόβλημα θεωρείται αυτό που δεν έχει ακόμα επιλυθεί, δεν έχει «κλείσει» (Silver at al., 1995, στο Μαμωνά-Downs, Παπαδόπουλος, 2017) δηλαδή, δεν έχει βρεθεί ακόμα η λύση του. Ένα τέτοιο πρόβλημα αποτελεί η εικασία του Goldbach και μέχρι το 1993 «Το τελευταίο θεώρημα του Fermat», η «Υπόθεση του Riemann», η ακολουθία Fibonacci, η εικασία των δίδυμων πρώτων αριθμών, καθώς και άλλα.

Στην έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών οι όροι αυτοί χρησιμοποιούνται με διαφορετικές σημασίες. Ο όρος ανοιχτό πρόβλημα (open problem) παραπέμπει σε ένα πρόβλημα έρευνας το οποίο δεν έχει μία μόνο ερμηνεία, δεν δεσμεύει τους μαθητές προς μία συγκεκριμένη μέθοδο επίλυσης και/ή δεν έχει μία μόνο λύση. Αντίθετα με τα προβλήματα ρουτίνας που χρησιμοποιούνται στη σχολική τάξη, το ανοιχτό πρόβλημα είναι ένα ασυνήθιστο πρόβλημα, στο οποίο η επιλογή των δεδομένων, οι υποθέσεις η στρατηγική επίλυσης και τα αποτελέσματα είναι ανοιχτά. Δηλαδή οι μαθητές οφείλουν να κάνουν επιλογές καθ’ όλη τη διάρκεια της διαδικασίας (Cifarelli & Cai, 2005). Πιο συγκεκριμένα ο Pehkonen, (1997α), πρότεινε, την χρήση του όρου «ανοιχτά προβλήματα» για όλους τους διαφορετικούς τύπους προβλημάτων, που έχουν προταθεί από τους ερευνητές ως τέτοια. Οπότε στα προβλήματα ανοιχτού τύπου συμπεριλαμβάνει:

- Προβλήματα έρευνας (investigations)
- Κατασκευή προβλημάτων (problem posing)
- Καταστάσεις της πραγματικής ζωής (real-life situations)
- Έργα (projects)
- Προβλήματα πεδίου ή ακολουθίες προβλημάτων (problem fields or problem sequences)
- Προβλήματα χωρίς ερωτήσεις (problems without question)
- Παραλλαγές προβλημάτων (‘’what-if’’ method)

Σύμφωνα με τον ορισμό που δίνει, ένα πρόβλημα ορίζεται ως ανοιχτό, όταν η αρχική κατάσταση και/ ή ο στόχος του είναι ανοιχτά. Με βάση αυτόν τον ορισμό προκύπτουν τρία είδη ανοιχτών προβλημάτων (open problems) και ένα με ανοιχτό στόχο (open-ended),(σχήμα 1). Σε αντίθετη περίπτωση έχουμε ένα κλειστό πρόβλημα. Με βάση αυτόν τον διαχωρισμό, τα περισσότερα προβλήματα στο σχολείο είναι κλειστά προβλήματα ή ασκήσεις.

Οι τρεις κατηγορίες ανοιχτών προβλημάτων που προκύπτουν μπορούν να οριστούν:

- σε σχέση με την ερμηνεία της κατάστασης που περιγράφουν
- σε σχέση με τις διαφορετικές προσεγγίσεις που θα ακολουθήσει κανείς κατά την επίλυση τους και
- σε σχέση με τις διαφορετικές λύσεις/απαντήσεις που επιδέχονται,(Μαμωνά-Downs, Παπαδόπουλος ,2017).

Η χρήση των ανοιχτών προβλημάτων στην εκπαίδευση έχει υποστηριχθεί από τους ερευνητές, ιδιαίτερα όταν η διδασκαλία γίνεται μέσω της επίλυσης προβλημάτων. Μάλιστα, η χρήση των ανοιχτών προβλημάτων, με τη μέθοδο της «ανοιχτής προσέγγισης» που αναπτύχθηκε στην Ιαπωνία, τη δεκαετία του 1970, από την ερευνητική ομάδα του Shimada S. (1971), μελετήθηκε και διαδόθηκε στην Αμερική, από τον Cock-croft (1982), λόγω των θετικών αποτελεσμάτων της, όπως και σε άλλες χώρες (Pehkonen, 1997α).

Η χρήση κάποιων τύπων ανοιχτών προβλημάτων στην διδασκαλία, διαδόθηκε και ερευνήθηκε τις δεκαετίες του 80-90 σε πολλές χώρες (π.χ. Nohda, 1988; Pehkonen, 1989; Silver & Cai, 1996, στο Pehkonen, 1997α), ενώ τα ανοιχτά προβλήματα έχουν χρησιμοποιηθεί κατά κύριο λόγο σε διεθνείς αξιολογήσεις (TIMMS και PISA) για την σύγκριση των επιδόσεων των μαθηματικών δεξιοτήτων των μαθητών. Η παρουσία τους, ωστόσο, στα σχολικά εγχειρίδια είναι περιορισμένη, παρόλο που πολλά προγράμματα σπουδών σε πολλές χώρες, προτείνουν την χρήση τους και πολλοί ερευνητές έχουν υποστηρίξει την αξία τους (London, 2007; Pehkonen, 1997α).

Οι ερευνητές που ασχολούνται με την μαθηματική επίλυση προβλημάτων, προκρίνουν τη χρήση ανοιχτών προβλημάτων, καθώς αυτά αναπτύσσουν δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων και συλλογισμού, οι οποίες βρίσκουν εφαρμογή σε προβλήματα της καθημερινής ζωής και αναπτύσσουν την δημιουργικότητά τους (Cai, 2003; London, 2007; Pehkonen, 1997β). Αντίθετα, τα λεκτικά προβλήματα που χρησιμοποιούνται στα σχολικά εγχειρίδια συνήθως, καλλιεργούν την απομνημόνευση μια έννοιας ή διαδικασίας και την αναπαραγωγή της, καθώς και την πεποίθηση στους μαθητές πως τα προβλήματα λύνονται με την εφαρμογή μιας πράξης.

Σε σχέση με το στόχο / Σε σχέση με την αρχική κατάσταση	ΚΛΕΙΣΤΑ (όπως ορίστηκε παραπάνω)	ΑΝΟΙΧΤΑ
ΚΛΕΙΣΤΑ (όπως ορίστηκε παραπάνω)	ΚΛΕΙΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ	Προβλήματα με ανοιχτό στόχο Προβλήματα από καταστάσεις της καθημερινής ζωής Προβλήματα έρευνας Προβλήματα πεδίου Παραλλαγές προβλημάτων
ΑΝΟΙΧΤΑ	Προβλήματα της καθημερινής ζωής Παραλλαγές προβλημάτων	Προβλήματα από καταστάσεις της καθημερινής ζωής Παραλλαγές προβλημάτων Προβλήματα έρευνας Κατασκευή προβλημάτων

Σχήμα 1. Η ταξινόμηση των προβλημάτων σε σχέση με την αρχική κατάσταση και τον τελικό στόχο (Pehkonen, 1997α)

1.3.4 Εφαρμογής- μη εφαρμογής (Application-non application problem)

Πολλά από τα προβλήματα που συναντώνται στα σχολικά εγχειρίδια καλούνται «λεκτικά προβλήματα». Τα λεκτικά προβλήματα που έχουν στοιχεία από την πραγματική ζωή και που μπορεί να συναντήσουν οι λύτες στην καθημερινότητα τους, εντοπίζονται στην βιβλιογραφία με πολλές ονομασίες, όπως προβλήματα πλαισίου, πλαισιωμένα προβλήματα, ρεαλιστικά προβλήματα, προβλήματα πραγματικού κόσμου, αυθεντικά προβλήματα ή μοντελοποίησης (Verschaffel et al., 2020).

Με βάση τον ορισμό του OECD (2013), έργα με βάση το πλαίσιο, ορίζονται τα μαθηματικά προβλήματα, τα οποία παρουσιάζονται μέσα σε μια κατάσταση, η οποία αναφέρεται σε πραγματικό ή φανταστικό περιβάλλον, το οποίο περιλαμβάνει προσωπικές, επαγγελματικές, επιστημονικές και δημόσιες πληροφορίες, οικείες στο μαθητή.

Οι Blum & Niss (1991) ονομάζουν εφαρμοσμένα μαθηματικά προβλήματα (applied mathematical problems) αυτά που η κατάσταση ή το ερώτημα που θέτουν ανήκουν στον πραγματικό κόσμο, όχι δηλαδή στην επιστήμη των μαθηματικών, αλλά μπορούν να λυθούν με μαθηματικό τρόπο. Τα προβλήματα αυτά διαφέρουν από τα αμιγώς μαθηματικά προβλήματα (purely mathematical problems), καθώς προέρχονται είτε από άλλους κλάδους της επιστήμης, είτε από την καθημερινή ζωή, είτε από οποιαδήποτε άλλο τομέα του υπαρκτού κόσμου.

Κατά τη διαδικασία επίλυσης εφαρμοσμένων προβλημάτων, ιδανικά δημιουργείται ένα «μοντέλο κατάστασης» (Verschaffel et al., 2020) όπου αναπαριστώνται τα βασικά στοιχεία και οι σχέσεις της κατάστασης του προβλήματος και έπειτα ακολουθεί η κατασκευή ενός μαθηματικού μοντέλου. Η διαδικασία αυτή συνολικά ονομάζεται μοντελοποίηση, ενώ η μαθηματικοποίηση αναφέρεται στην διαδικασία που το πραγματικό μοντέλο μεταφράζεται σε μαθηματικά (Blum & Niss, 1991). Μελέτες έχουν φανερώσει πως πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες σε τέτοιου είδους προβλήματα, καθώς δυσκολεύονται να διακρίνουν τις χρήσιμες από τις περιττές πληροφορίες, όπως και να εντοπίσουν τις μαθηματικές διαδικασίες που χρειάζονται για την λύση τέτοιων προβλημάτων (Verschaffel et al., 2000, στο Verschaffel et al., 2020).

Στην διδασκαλία δεν χρησιμοποιούνται συχνά εφαρμοσμένα μαθηματικά προβλήματα αυτού του τύπου αλλά μαθηματικά προβλήματα που παρουσιάζονται με λέξεις που ανήκουν στον πραγματικό κόσμο ή σε μια άλλη επιστήμη ή έτοιμα μαθηματικά μοντέλα που αναφέρονται σε πραγματικές καταστάσεις με μαθηματικό περιεχόμενο (Blum & Niss, 1991). Κατά τους Blum & Niss (1991) τα προβλήματα που αναφέρονται με κάποιο τρόπο στον πραγματικό κόσμο θεωρούνται ως εφαρμογές (applications).

Σύμφωνα με την Kaizer (2017, στο Verschaffel et al., 2020) τα λεκτικά προβλήματα δεν αποτυπώνουν ένα πρόβλημα ή ένα ερώτημα που έχει εφαρμογή στον πραγματικό κόσμο, καθώς η λύση του είναι σημαντική μόνο στα πλαίσια της διδακτικής διαδικασίας. Αντίθετα, τα προβλήματα της πραγματικής ζωής ή μαθηματικής μοντελοποίησης, όπως τα ονομάζει, προϋποθέτουν υποθέσεις από το λύτη, για την εφαρμογή τους στο πλαίσιο της πραγματικότητας, καθώς και την αξιολόγηση/επικύρωση της λύσης, ως προς το πραγματικό πλαίσιο, που δημιούργησε το πρόβλημα. Για άλλους ερευνητές, όπως οι Verschaffel et al. (2014) παρόλο που αναγνωρίζουν την ύπαρξη διαφοράς μεταξύ ενός κατασκευασμένου σχολικού προβλήματος και ενός αυθεντικού προβλήματος, θεωρούν πως τα λεκτικά προβλήματα, αν σχεδιαστούν και χρησιμοποιηθούν κατάλληλα μέσα στο σχολικό πλαίσιο, μπορούν να λειτουργήσουν ως «ακριβείς και πολύτιμες προσομοιώσεις» των αυθεντικών μαθηματικών προβλημάτων μοντελοποίησης που συναντάμε στην πραγματική ζωή. Οι Blum & Niss, (1991) θεωρούν πως τα λεκτικά προβλήματα δίνουν μια «στρεβλή εικόνα της πραγματικότητας», προκειμένου να εξυπηρετηθούν διδακτικοί σκοποί.

Για τον Verschaffel (2000, στο Verschaffel et al., 2020) παρόλο που τα λεκτικά προβλήματα δεν αποτελούν πάντα ένα πραγματικό πρόβλημα, θεωρούνται πως είναι μαθηματικά προβλήματα «par excellence». Σε έρευνα που πραγματοποίησε ο ΟΟΣΑ (2018), στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών δεκαεννέα χωρών, τα λεκτικά προβλήματα κατηγοριοποιηθήκαν σε απλά λεκτικά προβλήματα και «σε υψηλότερης τάξης πραγματικές εφαρμογές». Τα λεκτικά προβλήματα σε δύο ελληνικά σχολικά εγχειρίδια του γυμνασίου που εξετάστηκαν, καταλάμβαναν το 28,18% των προβλημάτων (281 προβλήματα) και μόλις το 0,3% αυτών, δηλαδή 3 προβλήματα αποτελούσαν εφαρμογές υψηλής τάξης του πραγματικού κόσμου (Schmidt at al, 2022). Τα ποσοστά αυτά που παρατηρήθηκαν και στις υπόλοιπες 18 χώρες, οδήγησαν στο συμπέρασμα πως οι ευκαιρίες μάθησης που προσφέρονται από τα σχολικά εγχειρίδια για τον μαθηματικό γραμματισμό είναι έντονα ελλιπείς (Schmidt at al, 2022).

Προβλήματα εφαρμογής λοιπόν, σε αυτήν την εργασία, θα θεωρούνται αυτά που σχετίζονται με κάποιο τρόπο στην καθημερινή ζωή και τον πραγματικό κόσμο, υπόκεινται δηλαδή σε ένα πλαίσιο. Αυτά μπορούν να χωριστούν σε αυθεντικά και σε φανταστικά-τεχνητά. Στα δεύτερα, ενώ τα δεδομένα είναι παρμένα από την πραγματική ζωή, οι συνθήκες είναι φανταστικές, δηλαδή τεχνητά κατασκευασμένες από τους εκάστοτε συγγραφείς του εγχειριδίου. Αυτή η παράμετρος δεν θα εξεταστεί στην παρούσα έρευνα. Μη εφαρμογής, θα θεωρούνται τα προβλήματα που δεν περικλείονται από ένα πλαίσιο που συνδέεται με την καθημερινή ζωή.

1.3.5 Ενός βήματος – πολλών βημάτων (Single step/ Multiple-step)

Κατά τους Zhu & Fan (2006), τα προβλήματα ταξινομούνται σε ενός βήματος και πολλών βημάτων. Όπου ενός βήματος, ορίζονται αυτά τα προβλήματα που χρειάζονται μία πράξη για την επίλυσή τους και πολλών βημάτων, αυτά που απαιτούν τουλάχιστον δύο είδη πράξεων για την επίλυση τους. Συχνά στην επίλυση προβλημάτων απαιτείται η ίδια αριθμητική πράξη πολλές φορές. Στα προβλήματα πολλαπλασιασμού των φυσικών αριθμών για παράδειγμα, απαιτείται η ίδια αριθμητική πράξη πολλές φορές, αλλά το πρόβλημα θεωρείται ενός βήματος.

1.3.6 Με επαρκή δεδομένα- ανεπαρκή δεδομένα – πλεονάζοντα δεδομένα (Sufficient Data Problems, Insufficient Data Problems, and Extraneous Data Problems)

Οι Zhu & Fan (2006), για την ταξινόμηση των προβλημάτων στα σχολικά εγχειρίδια, ορίζουν τα προβλήματα που παρέχουν περισσότερα δεδομένα από ότι χρειάζονται για την επίλυση τους, προβλήματα με πλεονάζοντα δεδομένα. Στην αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή οι πληροφορίες που δίνονται δεν είναι επαρκείς, ώστε να οδηγήσουν στην λύση του, ούτε είναι δυνατό από τον λύτη να υποθέσει και να συμπληρώσει τις πληροφορίες αυτές, τότε έχουμε ένα πρόβλημα με ανεπαρκή δεδομένα. Τα προβλήματα που προσφέρουν όσα ζητούμενα χρειάζονται στον λύτη θεωρούνται προβλήματα με επαρκή δεδομένα.

1.3.7 Καθαρή μαθηματική μορφή -λεκτική μορφή- Οπτική μορφή-Συνδυασμένη μορφή (Problems in a Purely Mathematical Form, Problems in a Verbal Form, Problems in a Visual Form, and Problems in a Combined Form)

Οι μορφές παρουσίασης/εκφώνησης του προβλήματος, δηλαδή το πώς παρουσιάζονται τα δεδομένα σε ένα πρόβλημα, καθορίζει τον διαχωρισμό τους σε προβλήματα με καθαρά μαθηματική μορφή, λεκτική, οπτική και συνδυασμένη μορφή. Στα προβλήματα με καθαρή μαθηματική μορφή, η εκφώνηση περιλαμβάνει μόνο μαθηματικά σύμβολα/εκφράσεις. Στα προβλήματα που διατυπώνονται με λεκτική μορφή, οι πληροφορίες δίνονται μέσω του γλωσσικού κώδικα και στα προβλήματα που αναπαριστώνται σε οπτική μορφή, οι πληροφορίες παρέχονται μέσω οπτικών αναπαραστάσεων (γραφημάτων, πινάκων, χαρτών, εικόνων, διαγραμμάτων κτλ.). Όταν οι τρόποι αυτοί συνδυάζονται τα προβλήματα κατηγοριοποιούνται ως συνδυαστικά (Zhu & Fan, 2006).

Για την εξάσκηση στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, οι ερευνητές προτιμούν πιο σύνθετα προβλήματα, είτε πολλαπλών βημάτων, είτε με ελλιπή ή πλεονάζοντα στοιχεία καθώς και προβλήματα μη ρουτίνας, δηλαδή προβλήματα που απαιτούν εκτός από αλγοριθμικές δεξιότητες και γνώσεις του αντικειμένου, ευρετικές και μεταγνωστικές δεξιότητες (Verschaffel et al.,2000, στο Verschaffel et al.,2020).

1.4 Η επίλυση προβλήματος στην μαθηματική εκπαίδευση

Για να εξετάσουμε την επίλυση προβλήματος θα πρέπει πρώτα να διερευνήσουμε τους διάφορους ορισμούς που υπάρχουν στην βιβλιογραφία, καθώς και τον ρόλο που διαδραματίζει στην εκπαιδευτική διαδικασία και τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιείται μέσα σε αυτή. Σύμφωνα με τους Schroeder και Lester (1989), η επίλυση προβλήματος μπορεί να εισαχθεί στη διδασκαλία με τρεις τρόπους, καθώς μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο διδασκαλίας, μέσο εύρεσης αποτελεσμάτων αλλά και μέσο διδασκαλίας. Σχετικά με την διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος έχουν προταθεί ποικίλα μοντέλα από τους ερευνητές, ανάμεσα σε αυτά και το μοντέλο του Pólya, το οποίο αποτελεί αντικείμενο αυτής της εργασίας και περιγράφεται αναλυτικά παρακάτω.

1.4.1 Ο ορισμός της επίλυσης προβλήματος (problem solving- PS)

Ο Gagne (1980) πίστευε ότι «το κεντρικό σημείο της εκπαίδευσης είναι να διδάξει στους ανθρώπους να σκέφτονται, να χρησιμοποιούν τις λογικές τους δυνάμεις, να γίνουν καλύτεροι λύτες προβλημάτων» (Jonassen, 2000).

Στην βιβλιογραφία ο όρος πρόβλημα και επίλυση προβλήματος ακολουθούν ο ένας τον άλλο, καθώς το πώς ορίζεται ο πρώτος, καθορίζει και πώς θα οριστεί ο δεύτερος. Ο όρος επίλυση προβλήματος μπορεί να αλλάξει, ανάλογα με τον επιστημονικό κλάδο που τον μελετά αλλά ακόμα και μέσα στην μαθηματική επιστήμη. Η επίλυση προβλήματος λοιπόν, αν και έχει απασχολήσει ιδιαίτερα την έρευνα σχετικά με τα μαθηματικά, όπως και τον σχεδιασμό των Προγραμμάτων Σπουδών σε όλο τον κόσμο, δεν έχει έναν καθολικά αποδεκτό ορισμό. Οι έρευνες άλλοτε δίνουν έμφαση στην ίδια την επίλυση προβλημάτων και άλλοτε δίνουν έμφαση στις εφαρμογές, που μέσω παιδαγωγικών μεθόδων στοχεύουν στην κατανόηση μαθηματικών καταστάσεων και συχνά διαφέρουν από χώρα σε χώρα (Reis & Törner, 2007). Η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων μέσα στην τάξη παρόλο που αποτελεί κύριο στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης, κατά τους Lester & Cai (2016) δεν έχει ακόμα επιτευχθεί.

Η επίλυση προβλήματος σε έναν αρκετά γενικό ορισμό, περιγράφεται ως, οι ενέργειες που κάνει κάποιος, όταν δεν γνωρίζει τι να κάνει (Showder, 1985, στο Cifareli & Cai, 2005). Οι ορισμοί που μας έχουν προσφέρει οι ερευνητές (Duncker, 1945; Skinner, 1996; Newell &Simon, 1972; Kahney, 1993) σχετικά με το πρόβλημα, στη γνωστική/Gestalt, τη Μάθηση/S-R,την επεξεργασία Πληροφοριών/Υπολογιστών και την Ψυχομετρική Ανάλυση/Συνιστωσών, συμφωνούν ως προς την ύπαρξη ενός ατόμου, που δεν είναι άμεσα ικανό να φτάσει σε ένα στόχο και ως εκ τούτου η επίλυση προβλήματος είναι αυτό που κάνει κάποιος για να φτάσει σε ένα στόχο (Lester, 2013).

Ο Ούγγρος μαθηματικός Pólya (2001) που ασχολήθηκε ενδελεχώς με τα μαθηματικά προβλήματα, ορίζει την επίλυση προβλήματος, ως την εύρεση ενός τρόπου ώστε να αποφευχθεί μια δυσκολία, να προσπελαθεί ένα εμπόδιο ή να επιτευχθεί ένα στόχος που αρχικά δεν είναι εφικτός. Ο Pólya ασχολήθηκε ιδιαίτερα με την περιγραφή της διαδικασίας της επίλυσης προβλημάτων, δηλαδή την «ακολουθία συλλογισμών που μπορούν να μας βοηθήσουν» να φτάσουμε στη λύση (Μαμωνά-Downs, Παπαδόπουλος, 2017).

Άλλοι ερευνητές, όπως οι Blum & Niss, (1991) και Lithner (2008), εξετάζουν την επίλυση προβλήματος σε σχέση με την έλλειψη ενός σχεδίου από τον λύτη για την επίλυση μιας εργασίας, κατά την οποία ο λύτης πρέπει να κάνει μια προσπάθεια για να φτάσει στη λύση που δεν περιορίζεται σε διαδικαστικές πράξεις αλλά είναι μια γνωστική πρόκληση, κατά την οποία ο ίδιος πρέπει να την βρίσκει αρκετά σημαντική, ώστε να ασχοληθεί μαζί της. Σε αυτόν τον ορισμό τονίζεται το ενδιαφέρον, ως καίριος παράγοντας που παρακινεί το λύτη να ασχοληθεί με το πρόβλημα.

Οι ερευνητές της PISA (2003) υπογραμμίζουν ότι η επίλυση προβλημάτων θα πρέπει να γίνεται σε προβλήματα της πραγματικής ζωής από διάφορες επιστήμες. Υιοθετούν τον ορισμό που θέλει την επίλυση προβλήματος, ως «την ικανότητα ενός ατόμου να χρησιμοποιεί γνωστικές διαδικασίες για να αντιμετωπίζει και να επιλύει πραγματικές, διαθεματικές καταστάσεις, όπου η λύση δεν είναι άμεσα προφανής και όπου οι τομείς γραμματισμού ή οι τομείς του αναλυτικού προγράμματος που μπορεί να είναι εφαρμόσιμοι δεν ανήκουν σε ένα μόνο τομέα των μαθηματικών, της επιστήμης ή της ανάγνωσης»(OECD, 2003, στο Kolovou at al., 2009), δηλαδή επικεντρώνονται στο πλαίσιο των προβλημάτων. Ενώ οι ερευνητές της TIMMS δίνουν έμφαση στην χρήση προβλημάτων μη ρουτίνας στην επίλυση προβλημάτων, που απαιτούν περισσότερες γνωστικές δεξιότητες από αυτές που απαιτούν τα προβλήματα ρουτίνας, ακόμα και σε περίπτωση που αυτές έχουν προηγουμένως διδαχθεί.

Κατά τους Schoenfeld (1985) και Niss (2003) η απλή εφαρμογή λύσεων σε ασκήσεις ρουτίνας, διαφέρει από την κατασκευή λύσεων σε προβλήματα, που η μέθοδος επίλυσης της δεν είναι από πριν γνωστή. Σύμφωνα με αυτούς, η πρώτη δεν αποτελεί επίλυση προβλήματος, ούτε και συμβάλει στην ανάπτυξη της, καθώς υπάρχει διαφορά μεταξύ της κατασκευής και της μίμησης λύσεων (Jäder at al., 2020). Η επίλυση προβλημάτων μη ρουτίνας απαιτεί την κατασκευή μέρος της λύσης και όχι απλή εφαρμογή αλγορίθμων. Γι' αυτό και η επίλυση προβλημάτων έχει συνδεθεί από πολλούς ερευνητές με τα μη ρουτίνας προβλήματα. Όπως είχε παρατηρήσει ο Jonassen (2000), εξετάζοντας την επίλυση προβλημάτων, οι μαθητές σπανίως έρχονται σε επαφή με σημαντικά προβλήματα κατά τη σχολική τους εμπειρία, καθώς καλούνται να επιλύσουν μόνο καλά δομημένα προβλήματα (ιστορίες) που δεν συνάδουν με αυτά που θα αντιμετωπίσουν στην πραγματική τους ζωή.

Σε πιο σύγχρονους ορισμούς, η επίλυση προβλήματος αντιμετωπίζεται ως «μια επιχείρηση συνεργατικής διερεύνησης όπου ισχύουν πολλαπλές προσεγγίσεις. Δεν πρόκειται μόνο για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος, το οποίο έχει μια συγκεκριμένη απάντηση ή εφαρμογή στον πραγματικό κόσμο, αλλά μάλλον πρόκειται για μια διερεύνηση που μπορεί να έχει πολλαπλές προσεγγίσεις και όπου οι μαθητές μπορούν να κάνουν πολλαπλές παρατηρήσεις»(Hegedus, 2013, στο English & Gainsburg, 2016).

Στην παρούσα εργασία, αφού έχουμε ορίσει πως πρόβλημα είναι κάθε μαθηματικό έργο που απαιτεί μια λύση, ασχέτως της δυσκολίας που προκαλεί στον λύτη, η επίλυση προβλήματος είναι η ενασχόληση με μαθηματικά προβλήματα (NCTM, 2000).

1.4.2 Ο ρόλος της «επίλυση προβλήματος» στη διδασκαλία

Το περιεχόμενο των σχολικών μαθηματικών και ο τρόπος που διδάσκονται τα μαθηματικά αποτελούν δύο βασικούς πυλώνες αλλά όχι τους μοναδικούς στη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι γνώσεις και οι πεποιθήσεις των δασκάλων, όπως και των μαθητών επηρεάζουν εξίσου το αποτέλεσμα της διδασκαλίας. Η χρήση προβλημάτων που προκαλούν το ενδιαφέρον των μαθητών φαίνεται να είναι καθοριστικός παράγοντας για την ενεργή ενασχόληση τους με τα μαθηματικά, καθώς «Η αποτελεσματική διδασκαλία των μαθηματικών απαιτεί κατανόηση του τι γνωρίζουν οι μαθητές και οι μαθήτριες, τι χρειάζεται να μάθουν και στη συνέχεια εξασφάλιση της πρόκλησης και της υποστήριξης να το μάθουν» (NCTM, 2000, στο Van de Walle, 2007). Παρόλο που τα μαθηματικά είναι ίδια σε όλο τον κόσμο, η διδασκαλία τους αποτελεί θέμα κουλτούρας (η οργάνωση του εκπαιδευτικού συστήματος, το τι αποτελεί στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης κ.α.) της κάθε χώρας (Reis & Törner, 2007). Ο τρόπος λοιπόν, με τον οποίο θα ενταχθεί η επίλυση προβλημάτων στην διδασκαλία αποτελεί κρίσιμη επιλογή.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον δόθηκε για πρώτη φορά, στην επίλυση προβλήματος στο Διεθνές Συνέδριο για τη Μαθηματική Εκπαίδευση (ICME-5), ενώ στο (ICME-10) οργανώθηκε Ομάδα Συζήτησης (DG14) για πρώτη φορά που ασχολήθηκε αποκλειστικά με τα σχολικά εγχειρίδια, αναδεικνύοντας τη σημασία του σχολικού εγχειρίδιου κατά τη διδασκαλία. Έκτοτε έχουν διεξαχθεί αρκετές έρευνες σχετικά με την επίλυση προβλήματος και τον τρόπο που αποτυπώνεται στα σχολικά εγχειρίδια.

Καθώς η κατανόηση των μαθηματικών θεωρείται σήμερα στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών και όχι η μιμητική μάθηση κανόνων και εννοιών, η επίλυση προβλημάτων έχει αποτελέσει κεντρικό άξονα των προγραμμάτων σπουδών των μαθηματικών. Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων έχει τη δύναμη να προσφέρει μαθηματική κατανόηση, καθώς μπορεί να προκαλέσει μαθηματικό συλλογισμό (Lithner, 2008) και γι’ αυτό έχει αποκτήσει κεντρικό ρόλο στη διδασκαλία. Το είδος των προβλημάτων αλλά και η μέθοδος της διδασκαλίας διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο σε αυτή την διαδικασία.

Για την αξία της χρήσης της επίλυσης προβλημάτων με τη χρήση ευρετικών στην διδασκαλία και γενικά για τον τρόπο που διδάσκονται τα μαθηματικά επιχειρηματολόγησε ο Schoenfeld (1985, στο Schoenfeld, 2013), καθώς παρατήρησε στις μελέτες του ότι:

- Σε ένα μάθημα επίλυσης προβλημάτων είναι δυνατόν οι μαθητές να μάθουν να χρησιμοποιούν μια ποικιλία των στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων.
- Η ρητή διδασκαλία ευρετικών μεθόδων μπορεί ή θα μπορούσε να συνεισφέρει στην επίδοση των μαθητών σχετικά με την επίλυση προβλημάτων.
- Σε ένα μάθημα επίλυσης προβλημάτων όπου δίνεται βάση στην διδασκαλία της κατανόησης και της ανάλυσης, μπορεί να αναπτυχθεί η αντίληψη και η επίδοση.
- Τα μαθήματα όπου δίνεται προσοχή στις μεταγνωστικές δεξιότητες, μπορούν να επιδράσουν σημαντικά στη συμπεριφορά των μαθητών στο επίπεδο ελέγχου.

- Η διαμόρφωση της μαθηματικής συμπεριφοράς των μαθητών επηρεάζεται από τον τρόπο που διδάσκουμε μαθηματικά, αλλά και μέσα από την εμπειρία τους που αποκτούν ενώ κάνουν μαθηματικά.

Η επίλυση προβλημάτων, συμπεριλαμβάνεται ανάμεσα στα πέντε στάνταρ για τη διδασκαλία των μαθηματικών, από το NCTM, μαζί με «το συλλογισμό και απόδειξη», «την επικοινωνία», «τις συνδέσεις» και «τις αναπαραστάσεις». Η επίτευξη ανάπτυξης καινούργιων μαθηματικών γνώσεων/ιδεών προτείνεται να γίνεται, μέσω της επίλυσης προβλημάτων, ώστε τα παιδιά να είναι ικανά:

- να οικοδομούν νέες μαθηματικές γνώσεις
- να λύνουν μαθηματικά προβλήματα και προβλήματα κάθε γνωστικής περιοχής
- να είναι σε θέση να εφαρμόσουν και να προσαρμόσουν μια ποικιλία κατάλληλων στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων
- να μπορούν να ελέγχουν και να εξετάζουν την ίδια την διαδικασία επίλυσης (NCTM,2000).

Διερευνώντας τους λόγους για τους οποίους, έχει δοθεί βαρύτητα στην επίλυση προβλήματος στην μαθηματική εκπαίδευση, ο Pehkonen (1997β) αναφέρει τέσσερις κατηγορίες που αιτιολογούν αυτήν την επιλογή. Η επίλυση προβλήματος:

- αναπτύσσει γενικές δεξιότητες σκέψης
- προάγει την δημιουργικότητα
- αποτελεί μέρος της μαθηματικής εφαρμογής
- παρακινεί τους μαθητές να μάθουν μαθηματικά.

1.4.3 Η χρήση της επίλυσης προβλημάτων στη διδασκαλία

Η επίλυση προβλημάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί με διαφορετικούς τρόπους στην διδασκαλία των μαθηματικών, επιδιώκοντας κάθε φορά διαφορετικούς στόχους. Οι Schroeder και Lester (1989) έχουν διακρίνει τρεις τρόπους, σχετικά με το πώς η επίλυση προβλημάτων μπορεί να εισαχθεί στην διδασκαλία των μαθηματικών:

1. Διδασκαλία σχετικά με τη μέθοδο της επίλυσης προβλημάτων, όπου η διδασκαλία διαμορφώνεται με βάση το μοντέλο των τεσσάρων σταδίων επίλυσης του Polya. Οι μαθητές εξασκούνται στο τρόπο σκέψης, που χρησιμοποιούν κατά τον Polya οι έμπειροι λύτες

μαθηματικών προβλημάτων, ώστε να συνειδητοποιήσουν τη δική τους πορεία σκέψης, όταν λύνουν ένα πρόβλημα. Επίσης, προτείνει τη χρήση ευρετικών, τις οποίες μπορούν να επιλέγουν κατά την διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Ο τρόπος με τον οποίο θα φτάσουμε στη λύση του προβλήματος, είναι ο στόχος σε αυτή την περίπτωση, με άλλα λόγια «η μελέτη αυτών καθαυτών των νοητικών διεργασιών που ενέχονται στην επίλυση προβλήματος» (Μαμωνά-Downs, Παπαδόπουλος, 2017). Ο Pehkonen (1997β) σε άρθρο του για τη δημιουργικότητα στη μαθηματική εκπαίδευση, υποστηρίζει πως θα πρέπει να προσέξουμε, ώστε η διδασκαλία των στρατηγικών και των ευρετικών να μην γίνει ένα ακόμα αντικείμενο της διδασκαλίας, όπου διδάσκονται κανόνες που περιορίζουν τη δημιουργικότητα του εγκεφάλου. Θέτει με αυτό τον τρόπο τον μαθητή στο κέντρο της διδασκαλίας, όπου μόνος του διαμορφώνει τις δικές του μεθόδους επίλυσης προβλημάτων.

2.<u>Διδασκαλία της επίλυσης προβλημάτων.</u> Σε αυτήν την περίπτωση το ενδιαφέρον της διδασκαλίας επικεντρώνεται στο πώς οι μαθηματικές γνώσεις θα εφαρμοστούν στην λύση προβλημάτων ρουτίνας και μη ρουτίνας, δηλαδή τα προβλήματα χρησιμοποιούνται ως ασκήσεις εφαρμογής. Έτσι, αν και ο κύριος σκοπός είναι η διδασκαλία των μαθηματικών, δίνεται ιδιαίτερη σημασία στο πώς αυτή η γνώση μπορεί να εφαρμοστεί και να μεταφερθεί και έξω από το πεδίο των μαθηματικών. Επιτελείται, δηλαδή, αυτό που οι Μαμωνά-Downs, Παπαδόπουλος (2017) ονομάζουν «εύρεση νέων αποτελεσμάτων στα πλαίσια μιας μαθηματικής θεωρίας». Η επίλυση προβλήματος εννοείται εδώ, ως γνωστικό πεδίο, όπου η χρήση της σχετίζεται με το περιεχόμενο και οδηγεί στην εύρεση νέων μαθηματικών αποτελεσμάτων.

<u>3.Διδασκαλία μέσω της επίλυσης προβλημάτων.</u> Σε αυτήν την περίπτωση ο σκοπός της διδασκαλίας δεν είναι μόνο η επίλυση προβλημάτων αλλά η μάθηση μέσω της επίλυσης προβλημάτων. Η κατανόηση μαθηματικών εννοιών αποτελεί τον κύριο στόχο (Μαμωνά-Downs, Παπαδόπουλος, 2017). Η χρήση της επίλυσης προβλήματος για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών όπως ορίζεται εδώ, σημαίνει τη χρήση μη τετριμμένων προβλημάτων, μέσα σε τέτοια πλαίσια που θα επιτρέψουν τους μαθητές να συλλάβουν και να αντιληφθούν νέες μαθηματικές έννοιες, καθώς προσπαθούν να οδηγηθούν στην επίλυση τους. Ο ρόλος του δασκάλου σε αυτή την περίπτωση, αναδιαμορφώνεται και ανατρέπεται η παραδοσιακή διδασκαλία μέσω της μετάδοσης γνώσεων (Μαμωνά-Downs, Παπαδόπουλος, 2017).

Στην πράξη αυτό σημαίνει, πως πρώτα παρουσιάζεται μια προβληματική κατάσταση στους μαθητές και μέσω αυτής, στη συνέχεια, αναπτύσσονται οι μαθηματικές έννοιες και τεχνικές, ως λογικές απαντήσεις σε λογικά προβλήματα. Το αντίθετο δηλαδή, από ότι συμβαίνει στην παραδοσιακή διδασκαλία, όπου πρώτα παρουσιάζονται από τον εκπαιδευτικό οι μαθηματικές έννοιες και στη συνέχεια το πρόβλημα, στο οποίο γίνεται η εφαρμογή όσων έχουν παρουσιαστεί στους μαθητές. Αυτός, ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας παρόλο που έχει επικριθεί συναντάται ακόμα ως τρόπος διδασκαλίας (Pechkonen, 1997β).

Η τοποθέτηση λοιπόν, του προβλήματος, πριν ή μετά από την επίδειξη των μεθόδων/ εννοιών καθορίζει τι είδους διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος, υποστηρίζεται από το σχολικό εγχειρίδιο. Σε ένα εγχειρίδιο δηλαδή, που πρώτα παρουσιάζεται το πρόβλημα, το οποίο γίνεται μέσο, ώστε να παρουσιαστούν οι γνώσεις που χρειάζονται για την επίλυση του, υποστηρίζει τη διδασκαλία μέσω της επίλυσης προβλήματος, ενώ ένα εγχειρίδιο που πρώτα παρουσιάζει τις μαθηματικές γνώσεις και στη συνεχεία δίνει ένα πρόβλημα για να γίνει εφαρμογή των μαθηματικών γνώσεων, υποστηρίζει τη διδασκαλία για την επίλυση προβλήματος.

Οι στόχοι σε κάθε χρήση της επίλυσης είναι διαφορετικοί. Στην πρώτη περίπτωση στόχο αποτελεί, το να λύνουν οι μαθητές προβλήματα, στην δεύτερη περίπτωση η εδραίωση των νέων μαθηματικών γνώσεων των μαθητών, αποτελεί τον στόχο της εισαγωγής του στο πρόγραμμα σπουδών, ενώ στην τρίτη περίπτωση, ο στόχος είναι η χρήση της επίλυσης προβλήματος ως διδακτική μέθοδος, όπου η γνώση αναδύεται κατά τη διάρκεια λύσης προβλημάτων. Το αν οι εκπαιδευτικοί επιλέγουν την παραδοσιακή μέθοδο διδασκαλίας ή την κονστρουκτιβιστική, καθώς και οι στόχοι που θέτουν για την διδασκαλία επηρεάζουν την διδασκαλία τους και κατ' επέκταση τη μάθηση των μαθητών (Lester,2013).

Οι Schroeder & Lester (1989) υποστηρίζουν, πως κανένας τρόπος δεν πρέπει να υπερέχει των άλλων, όμως ο τρίτος τρόπος, όταν εφαρμόζεται σε προγράμματα σπουδών, μπορεί να αναπτύξει ανώτερες μαθηματικές δεξιότητες στους μαθητές, μέσα σε ένα πλαίσιο διερεύνησης. Βέβαια, κατά τους Mamona-Downs & Downs (2005) η επικρατέστερη χρήση της επίλυσης προβλημάτων στις σχολικές βαθμίδες, της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, είναι η χρήση αυτής «ως τρόπος διδασκαλίας μαθηματικών γνώσεων ή εννοιών»(Μαμωνά-Downs, Παπαδόπουλος, 2017).

1.4.4 Μοντέλα της επίλυσης προβλημάτων

Οι Rott, Specht, Knipping (2021), εξετάζοντας τα μοντέλα της επίλυσης προβλημάτων, διακρίνουν δύο βασικούς τύπους, γύρω από τους οποίους οργανώνονται τα υπόλοιπα μοντέλα της επίλυση προβλήματος (problem solving –PS). Ο πρώτος είναι ο διαισθητικός-δημιουργικός τύπος, που προέρχεται από την ενδοσκοπική αναστοχαστική σκέψη του Poincaré (1908) και ο δεύτερος, ο λογικός τύπος, όπως το ανέπτυξε ο Dewey (1910). Με βάση τον πρώτο τύπο οι Hadamard (1945) και Wallas (1926) ανέπτυξαν ένα μοντέλο τεσσάρων φάσεων με έμφαση στις υποσυνείδητες δραστηριότητες: 1)προετοιμασία (preparation), 2)επώαση (incubation), 3)φωτισμός (illumination), 4)επαλήθευση (verification). Στο δεύτερο τύπο, ο Dewey πρότεινε πέντε στάδια: 1)αντιμετώπιση ενός προβλήματος, 2)προσδιορισμός της φύσης του, 3)προσέγγιση πιθανών λύσεων, 4)ανάπτυξη λογικών συνεπειών της προσέγγισης κα 5) αποδοχή η απόρριψη της ιδέας με πειράματα. Το μοντέλο των τεσσάρων σταδίων του Pólya σύμφωνα με τον Neuhaus (2002) ακολουθεί το λογικό τύπο του Dewey, όπως και τα περισσότερα μοντέλα (Rott, Specht, Knipping, 2021).

Οι Rott, Specht, Knipping (2021), εξέτασαν τα μοντέλα της επίλυσης προβλημάτων του Dewey (1910), του Pólya (1945), του Schoenfeld (1985), των Mason et al. (1982), των Wilson et al. (1993) και των Yimer and Ellerton (2010). Σύμφωνα με τους παραπάνω ερευνητές, τα διάφορα μοντέλα ακολουθούν το μοντέλο του Pólya, προτείνοντας διαφοροποιήσεις και στις φάσεις και στην γραμμικότητα των διαδικασιών. Στην συνέχεια παρουσιάζεται το μοντέλο του Pólya, που χρησιμοποιήθηκε και στην παρούσα έρευνα.

1.4.4.1 Το μοντέλο της «επίλυσης προβλημάτων» του Pólya

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι ερευνητές έχουν προτείνει διάφορα στάδια για την επίλυση προβλήματος. Οι συγγραφείς αυτοί προτείνουν στρατηγικές χρήσιμες για την επίλυση προβλημάτων. Ο Pólya ήταν ο πρώτος που με το έργο του “How to Solve it”, έδωσε στην μαθηματική κοινότητα ένα εργαλείο για την διδασκαλία της διαδικασίας, της επίλυσης προβλημάτων. Τα τέσσερα στάδια του Pólya, όπως και η συλλογή ευρετικών που προτείνει διδάσκονται σύμφωνα με τους Schroeder & Lester (1989), όταν η διδασκαλία επικεντρώνεται στην μέθοδο επίλυσης προβλημάτων. Όπως αναφέρει ο Cai (2003), η ικανότητα των μαθητών να επιλύουν μαθηματικά προβλήματα εξαρτάται από την κατανόηση, την επιλογή και την εφαρμογή γενικών γνωστικών στρατηγικών, όπως και στρατηγικών που αφορούν το συγκεκριμένο αντικείμενο.

Για την επίλυση ενός προβλήματος, ο Pólya στο βιβλίο του «How to Solve it», προσφέρει ένα θεωρητικό πλαίσιο, στο οποίο περιγράφει τα εργαλεία και τις τεχνικές, τις Ευρετικές (Heuristics), ώστε να βελτιωθεί η ικανότητα των μαθητών να λύνουν προβλήματα. Οι ευρετικές δηλαδή, είναι στρατηγικές που βοηθούν το άτομο να οδηγηθεί μέσα από διάφορες προσπάθειες στη λύση ενός προβλήματος. Ο λύτης σύμφωνα με τις στρατηγικές που προτείνει ο Pólya, πρέπει πρώτα να κατανοήσει το πρόβλημα, το οποίο συνήθως περιγράφεται με λέξεις, να βρει και να προτείνει μαθηματικές προτάσεις, να εκτελέσει τους μαθηματικούς υπολογισμούς και τέλος να ελέγξει τη λογικότητα της απάντησης του.

Τα στάδια επίλυσης προβλήματος, όπως τα ανέλυσε και τα συστηματοποίησε ο Pólya (1991) διακρίνονται σε τέσσερα ιεραρχικά στάδια, και περιγράφουν την πορεία προς τη λύση του προβλήματος:

- **ΣΤΑΔΙΟ 1^{Ο}**

  Κατανόηση του προβλήματος

  Στο στάδιο αυτό ο μαθητής θα πρέπει να είναι ικανός να επαναλάβει και να διατυπώσει το πρόβλημα με ευχέρεια, να επισημάνει τα κύρια μέρη του προβλήματος, το ζητούμενο, τα δεδομένα και την συνθήκη. Για να βοηθηθεί σε αυτό το στάδιο μπορεί να κάνει ένα σχήμα, να διαχωρίσει και ή να καταγράψει τα διάφορα μέρη της συνθήκης. Να χρησιμοποιήσει τον κατάλληλο συμβολισμό.

  Οι ερωτήσεις που θα τον βοηθήσουν σε αυτό το στάδιο είναι σύμφωνα με τις υποδείξεις του Pólya :

  - Ποιο είναι το ζητούμενο;
  - Ποια τα δεδομένα;
  - Ποια η συνθήκη;
  - Είναι δυνατόν να ικανοποιήσουμε την συνθήκη;
  - Είναι η συνθήκη επαρκής/ ανεπαρκής/ πλεοναστική/ αντιφατική για να κατανοήσετε το ζητούμενο;

- **ΣΤΑΔΙΟ 2^{ο}**

  Επινόηση ενός σχεδίου

Αυτό το στάδιο είναι το σημαντικότερο καθώς ο μαθητής καλείται να συλλάβει την ιδέα ενός σχεδίου για την επίλυση του προβλήματος. Σε αυτό το στάδιο ο μαθητής παρακινείται να εντοπίσει αν έχει ξανασυναντήσει κάποιο παρόμοιο πρόβλημα, ένα θεώρημα ή ένα αποτέλεσμα που μπορεί να χρησιμοποιήσει. Ο μαθητής για να ξεκινήσει μπορεί να λύσει μέρος του προβλήματος ή να δημιουργήσει ένα πιο προσιτό σε αυτόν πρόβλημα, παραλλάσσοντας το πρόβλημα, κάνοντας υποθέσεις και εξετάζοντας ενδελεχώς τα δεδομένα, την συνθήκη, το ζητούμενο.

Ερωτήσεις που καθοδηγούν τους μαθητές μπορεί να είναι:

- Γνωρίζετε ένα σχετικό πρόβλημα;
- Μήπως έχετε δει το ίδιο πρόβλημα με μια λίγο διαφορετική μορφή;
- Γνωρίζετε κάποιο θεώρημα που θα μπορούσε να είναι χρήσιμο;
- Μπορείτε να σκεφτείτε ένα γνωστό πρόβλημα που να έχει ίδιο ή παρόμοιο ζητούμενο με το δικό σας;
- Θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα ή τη μέθοδο του;
- Μήπως πρέπει να εισάγεται μερικά βοηθητικά στοιχεία, ώστε να μπορέσετε να χρησιμοποιήσετε το βοηθητικό πρόβλημα;
- Θα μπορούσατε να ξαναδιατυπώσετε το πρόβλημα;
- Θα μπορούσατε να φανταστείτε ένα πιο προσιτό πρόβλημα;
- Θα μπορούσατε να φανταστείτε ένα πιο γενικό/ειδικό/ ανάλογο πρόβλημα;
- Θα μπορούσατε να λύσετε ένα μέρος του προβλήματος;
- Μπορείτε να κρατήσετε ένα μέρος της συνθήκης και να παραλείψετε τα υπόλοιπα;
- Χρησιμοποιήσατε όλα τα δεδομένα;
- Χρησιμοποιήσατε ολόκληρη τη συνθήκη;
- Λάβατε υπόψη σας όλες τις βασικές έννοιες που συμπεριλαμβάνονται στο πρόβλημα;

- **ΣΤΑΔΙΟ 3ο**

  Εκτέλεση του σχεδίου

  Σε αυτό το στάδιο, που αποτελεί την εκτέλεση του σχεδίου που έχει εκπονηθεί από τον μαθητή, το σημαντικότερο είναι να ελέγχει ο μαθητής τις λεπτομέρειες και τα βήματα του, ώστε να οδηγηθεί σε ορθά αποτελέσματα. Κάθε βήμα πρέπει να ελέγχεται και να αποδεικνύεται και αυτό απαιτεί υπομονή και προσπάθεια.

  Σε αυτό το στάδιο οι ερωτήσεις που θα μπορούσαν να γίνουν είναι:

- Ελέγξατε κάθε βήμα κατά την εκτέλεση του σχεδίου επίλυσης;
- Φαίνεται καθαρά ότι κάθε βήμα είναι σωστό;
- Μπορείτε να αποδείξετε ότι είναι σωστό;

- **ΣΤΑΔΙΟ 4^{Ο}**

  Ανασκόπηση της λύσης

  Το στάδιο αυτό αποτελεί ανασκόπηση της διαδικασίας επίλυσης που ακολούθησε ο μαθητής και τον έλεγχο του αποτελέσματος και των επιχειρημάτων του. Είναι αρκετά ωφέλιμο ο μαθητής να συνειδητοποιήσει τις ενέργειες που ακολούθησε και να εξετάσει τι απέδωσε και τι όχι. Μέσω αυτής της πρακτικής ο μαθητής θα είναι ικανός να προβλέψει την στρατηγική που θα ακολουθήσει σε μελλοντικά προβλήματα.

  Οι ερωτήσεις που προτείνονται σε αυτό το στάδιο είναι οι εξής:
  - Μπορείτε να ελέγξετε το αποτέλεσμα;
  - Μπορείτε να ελέγξετε τα επιχειρήματα;
  - Μπορείτε να φτάσετε στο αποτέλεσμα με διαφορετικό τρόπο;
  - Μπορείτε να το δείτε με μια ματιά;
  - Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα ή τη μέθοδο, για κάποιο άλλο πρόβλημα;

  (Polya, 1991)

Ο Pólya λοιπόν, προτείνει συγκεκριμένες ερωτήσεις-υποδείξεις που μπορεί να κάνει ο εκπαιδευτικός στους μαθητές του σε κάθε στάδιο, προκειμένου να κατευθύνει τη σκέψη τους, ώστε να φτάσουν στην επίλυση του προβλήματος, μέχρις ότου να αυτοματοποιηθεί αυτός ο τρόπος σκέψης από αυτούς. Διευκρινίζει μάλιστα, όπως και άλλοι μαθηματικοί και ερευνητές, που ασχολούνται με τη διδακτική των μαθηματικών, πως ένα πρόβλημα δεν αρκεί απλά να γίνει κατανοητό από τον μαθητή, δηλαδή να είναι η γλώσσα του κατανοητή αλλά και να είναι ενδιαφέρον για αυτόν, ώστε να θέλει να προσπαθήσει να βρει τη λύση του.

Το μοντέλο του Pólya έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές, κάποιοι από αυτούς ασχολήθηκαν με τις ικανότητες που καλλιεργούνται, μέσω της επίλυσης προβλημάτων (Mason at al., 1982; Schoenfeld, 1985; Lester & Kehle, 2003, στο Cai, 2003).

1.4.5 Η χρήση των ευρετικών στην επίλυση προβλημάτων

Όπως αναφέρει ο Pólya (1991) «σκοπός της Ευρετικής είναι η μελέτη των μεθόδων και των κανόνων της ανακάλυψης και της επινόησης» και αποδίδει την γέννηση των πρώτων προσπαθειών κατασκευής ενός συστήματος ευρετικής σε δύο μαθηματικούς και φιλόσοφους τον Ντεκάρτ (Descartes) και τον Λάιμπνιτζ (Leibnitz) καθώς και στο έργο του Μπολετζάνο (Bernard Bolzano). Σύμφωνα με τον ίδιο «η μοντέρνα ευρετική αποσκοπεί στο να κατανοήσει τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, ειδικά τις νοερές διεργασίες που τυπικά είναι χρήσιμες σ' αυτή τη διαδικασία. Η μελέτη της ευρετικής έχει πρακτικούς σκοπούς: η καλύτερη κατανόηση των νοερών διεργασιών που είναι τυπικά χρήσιμες στην επίλυση προβλήματος μπορεί να επηρεάσει θετικά τη διδασκαλία, ιδιαίτερα τη διδασκαλία των Μαθηματικών» Pólya (1971, στο Μαμωνά-Dows, Παπαδόπουλος, 2017).

Οι ευρετικές λοιπόν είναι ο όρος που χρησιμοποιεί ο Pólya στο βιβλίο του «How to Solve it» και είναι εργαλεία της μαθηματικής σκέψης, που στόχο έχουν να διευκολύνουν τους μαθητές στην επίλυση προβλημάτων. Οι κυριότερες από τις ευρετικές που αναφέρει ο Pólya μπορούν να περιγραφούν ως εξής:

- Άλλαξε την απτική σου γωνία (change your point of view)
- Απλοποίησε το πρόβλημα (simplify the problem)
- Σκέψου ένα παρόμοιο πρόβλημα (think of a relate it problem)
- Δούλεψε από πίσω προς τα εμπρός (work backwards)
- Λύσε μέρος του προβλήματος (solve part of the problem)
- Εκτίμησε και έλεγξε (guess and check)
- Κάνε μια οπτικοποίηση (make a visualization)
- Φτιάξε ένα συστηματικό κατάλογο (make a systematic table)
- Ψάξε για ένα μοτίβο (look for a pattern), (Kongelf, 2012)

Το National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) προτείνει τη χρήση εννέα (9) ευρετικών. Αυτές είναι:

- η κατασκευή ενός σχεδίου (draw a picture)
- η εύρεση ενός μοτίβου (find a pattern)
- η συστηματική εικασία, ο έλεγχος και η αναθεώρηση (guess, test, revise)
- η εφαρμογή με πραγματικά υλικά (act it out)

- ο σχεδιασμός ενός πίνακα ή γραφήματος (make a table or graph)
- η εργασία σε ένα απλούστερο πρόβλημα (work a simpler problem)
- η εργασία με αντίστροφα βήματα (work backwards)
- η δημιουργία μια οργανωμένης λίστας (make an organized list)
- και η επιλογή μιας διαδικασίας (choose an operation)

Οι Fan& Zhu (2007) χρησιμοποίησαν δεκαεπτά (17) ευρετικές στην ανάλυση των σχολικών εγχειρίδιων που πραγματοποίησαν. Αυτές είναι:

- Εφάρμοσε με πραγματικά υλικά (Act it out)
- Άλλαξε την οπτική σου γωνία (Change your point of view)
- Σχεδίασε ένα διάγραμμα (Draw a diagram)
- Μάντεψε και έλεγξε (Guess and check)
- Κάνε λογικούς συλλογισμούς (Logical reasoning)
- Ψάξε για ένα μοτίβο (Look for a pattern)
- Κάνε μια συστηματική λίστα (Make a systematic list)
- Φτιάξε έναν πίνακα (Make a table)
- Κάνε υποθέσεις (Make suppositions)
- Αναδιατύπωσε το πρόβλημα (Restate the problem)
- Απλοποίησε το πρόβλημα (Simplify the problem)
- Λύσε ένα μέρος του προβλήματος (Solve part of the problem)
- Σκέψου ένα παρόμοιο πρόβλημα (Think of a related problem)
- Χρησιμοποίησε ένα μοντέλο (Use a model)
- Χρησιμοποίησε μια εξίσωση (Use an equation)
- Χρησιμοποίησε την έννοια πριν-μετά (Use before-after concept)
- Δούλεψε με αντίστροφα βήματα (Work backwards)

Υπάρχουν λοιπόν, όπως φαίνεται από τις παραπάνω λίστες ευρετικών, πολλές ευρετικές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση προβλημάτων. Οι ευρετικές μπορούν να οριστούν σε διάφορα επίπεδα εξειδίκευσης. Όσο πιο εξειδικευμένες είναι τόσο πιο αποτελεσματικές μπορούν να γίνουν, όμως ταυτόχρονα αυτό περιορίζει το πεδίο εφαρμογής τους (Verschaffel at al., 2020). Οι ερευνητές συνήθως χρησιμοποιούν στις έρευνες τους, τις ευρετικές που προτείνονται από τα Αναλυτικά Προγράμματα των χωρών, των οποίων τα σχολικά εγχειρίδια εξετάζουν (π.χ. Fan & Zhu, 2007; Kongelf, 2012), για τον λόγο αυτό και δεν θα εξεταστούν σε αυτήν την εργασία όλες οι ευρετικές που προτείνονται από την βιβλιογραφία.

Ένα στοιχείο που αποτελεί σημαντικό λόγο της διδασκαλίας των στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων είναι πως δεν αναφέρονται αποκλειστικά σε ένα μόνο πεδίο αλλά μπορούν να εφαρμοστούν σε κάθε θεματική περιοχή (Pólya, 1991), έχουν δηλαδή το στοιχείο της μεταφερσιμότητας της γνώσης, καθώς μπορούν να αξιοποιηθούν στην επίλυση προβλημάτων των ατόμων σε διάφορες περιπτώσεις και ποικίλα πεδία. Όμως, όπως αναφέρουν οι English & Gainsburg (2016), η μεταφορά της μάθησης από ένα πλαίσιο σε άλλο έχει αμφισβητηθεί. Ο Pehkonen (1997β) διευκρινίζει, πως η διδασκαλία των στρατηγικών και των ευρετικών δεν πρέπει να γίνει ένα αντικείμενο διδασκαλίας κανόνων, γιατί έτσι περιορίζεται η δημιουργικότητα των μαθητών, οι οποίοι θα πρέπει να δημιουργούν μόνοι τους τις μεθόδους επίλυσης προβλημάτων.

Οι ευρετικές όπως και οι γενικές στρατηγικές επίλυσης έχουν υιοθετηθεί σε πολλά εθνικά προγράμματα σπουδών αλλά σύμφωνα με τους English & Gainsburg (2016), οι στρατηγικές και οι ευρετικές δεν επέφεραν τα αναμενόμενα αποτελέσματα στην επίλυση προβλημάτων, είτε επειδή παρουσιάστηκαν ως μια «συλλογή ξεχωριστών οντοτήτων» που οι μαθητές έπρεπε να εφαρμόσουν, χωρίς να κατανοούν τη χρήση τους (English & Sriraman, 2010; Lester, 2013), είτε γιατί δεν χρησιμοποιήθηκαν στην επίλυση αυθεντικών προβλημάτων αλλά ενσωματώθηκαν στα σχολικά εγχειρίδια με τέτοιο τρόπο που μετατράπηκαν σε διαδικαστικούς αλγορίθμους (Stanic & Kilpatrick, 1989).

1.4.6 Η «επίλυση προβλήματος» σε Προγράμματα Σπουδών

Τα Αναλυτικά Προγράμματα εκφράζουν την εκπαιδευτική φιλοσοφία κάθε χώρας και σύμφωνα με αυτά παράγονται και χρησιμοποιούνται τα διάφορα μέσα διδασκαλίας, ενώ συχνά καθορίζουν την μορφή της διδασκαλίας και την αποτελεσματικότητα της (Καψάλης & Χαραλάμπους, 2008). Ως αποτέλεσμα, τα σχολικά εγχειρίδια συγγράφονται και χρησιμοποιούνται με βάση τα Αναλυτικά Προγράμματα, αποτελώντας τα εργαλεία με τα οποία η φιλοσοφία αυτών, εκφράζεται σε διδακτική πράξη στις σχολικές τάξεις (Καψάλης & Χαραλάμπους, 2008). Η ανάπτυξη των επιστημών και η συνεχής έρευνα που οδηγούν στην ανάπτυξη νέων θεωριών, μοντέλων και μεθόδων μάθησης, σε συνδυασμό με το συνεχώς μεταβαλλόμενο κοινωνικό, οικονομικό και τεχνολογικό σύμπαν, απαιτούν τη συχνή αναθεώρηση των Αναλυτικών προγραμμάτων και συνακόλουθα των σχολικών εγχειριδίων. Όπως αναφέρουν οι Cai & Jiang (2017) το πρόγραμμα σπουδών έχει θεωρηθεί ένας ισχυρός παράγοντας για τις διδακτικές αλλαγές που συμβαίνουν, σε σχέση με τις διαρκώς μεταβαλλόμενες κοινωνικές απαιτήσεις προς το εκάστοτε εκπαιδευτικό σύστημα.

Στην Κίνα το εκπαιδευτικό σύστημα είναι αρκετά συγκεντρωτικό, όπως και της Ελλάδας, καθώς τα σχολικά εγχειρίδια είναι εγκεκριμένα και ακολουθούν το εθνικό πρόγραμμα σπουδών. Σε αυτά, τα προβλήματα παρουσιάζονται με σαφή τρόπο, διδάσκεται η διαδικασία επίλυσης προβλημάτων και χρησιμοποιείται μεγάλη ποικιλία από ευρετικές.

Στην Ιαπωνία, η επίλυση προβλημάτων έχει κεντρικό ρόλο στο επίσημο πρόγραμμα σπουδών, καθώς και η σύνδεση αυτών με την καθημερινή ζωή. Στοιχείο που όμως απουσιάζει από τα σχολικά εγχειρίδια. Έτσι ο δάσκαλος έχει την ευθύνη επιλογής και παρουσίασης των πραγματικών προβλημάτων που θα χρησιμοποιήσει στην τάξη του (Κολέζα, 2017). Το ίδιο φαινόμενο παρατηρείται και στην Γερμανία όπου τα προβλήματα δεν έχουν σημαντικό ρόλο στην εισαγωγή και διδασκαλία μαθηματικών εννοιών και μεθόδων επίλυσης, ούτε και στοχεύουν στην απόκτηση δεξιοτήτων για επίλυση προβλημάτων στην καθημερινή ζωή (Κολέζα, 2017).

Στη χώρα μας τα προγράμματα σπουδών μέχρι το 1997 παρέμειναν παραδοσιακά, και μόλις το 2003 ανανεώθηκαν (Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ., 2003) παρουσιάζοντας έναν πιο ευέλικτο χαρακτήρα, όπου η μάθηση έπαψε να έχει στόχο την συσσώρευση γνώσεων και επαναπροσδιορίστηκε, ως δημιουργική καλλιέργεια πολυδιάστατης κατάκτησης της γνώσης, μέσω βιωματικών και συλλογικών δραστηριοτήτων (Νταράδημος, 2015). Σύμφωνα με τα Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ. του 2003, συγγράφηκαν και κυκλοφόρησαν το 2006-7 τα νέα σχολικά εγχειρίδια για το Δημοτικό. Σήμερα βρισκόμαστε στα πρόθυρα άλλης μιας εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης, η οποία έχει ξεκινήσει με την αναθεώρηση των Προγραμμάτων Σπουδών που ξεκίνησε το 2020 και ολοκληρώθηκε το 2021, ενώ έχει προκηρυχτεί η συγγραφή και έκδοση νέων σχολικών εγχειριδίων.

Στο ελληνικό Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003), όπως και στα προγράμματα σπουδών πολλών χωρών, η επίλυση προβλημάτων κατέχει κεντρικό ρόλο και αποτελεί βασικό στόχο των αναλυτικών προγραμμάτων των μαθηματικών. Η επίλυση προβλημάτων αποτελεί επίσης, κυρίαρχη επιδίωξη των εθνικών πρότυπων και σε άλλες χώρες όπως, National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 1989, 1991; American Association for the Advancement of Science (AAAS), 1993; Ministry of National Education (MoNE), 2013; National Council of Teachers of English (NCTE), 1996. Τα στοιχεία αυτά, αποδεικνύουν την ιδιαίτερη βαρύτητα, που δόθηκε στην επίλυση προβλημάτων στο χώρο της επιστήμης των Μαθηματικών αλλά και της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Σύμφωνα με τον Halmos (1980, στο Schoenfeld, 2013) η επίλυση προβλήματος αποτελεί την καρδιά των μαθηματικών. Κεντρικό ρόλο στην διδασκαλία των μαθηματικών απέκτησε την δεκαετία '80, όταν το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) συνέστησε την οργάνωση των προγραμμάτων σπουδών των μαθηματικών, γύρω από την επίλυση προβλημάτων (English & Gainsburg, 2016). Η επίλυση προβλημάτων θεωρείται ως μια από τις βασικές ικανότητες που θα πρέπει να αναπτυχθεί στους μαθητές μέχρι και σήμερα.

Σύμφωνα με το ελληνικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των μαθηματικών (1997) τα προγράμματα σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού, οφείλουν να χρησιμοποιούν την επίλυση προβλημάτων, ώστε οι μαθητές να αναπτύξουν «βασικές μαθηματικές γνώσεις και ικανότητες… και επιστημονικό τρόπο σκέψης και αντιμετώπισης πραγματικών καταστάσεων.»(σελ. 4). Με τον όρο επιστημονική σκέψη εννοείται «..κυρίως ταυτόχρονη ανάπτυξη της ικανότητας για εξερεύνηση και αξιολόγηση, για φαντασία και κριτική σκέψη.»(σελ. 4).

Επίσης, «Η διαδικασία επίλυσης προβλημάτων προσφέρεται ως το πλέον κατάλληλο πεδίο για την καλλιέργεια αυτών των ικανοτήτων. Κατά τη διάρκεια της επίλυσης προβλημάτων, της μοντελοποίησης πραγματικών καταστάσεων και της προοδευτικής μάθησης της διαδικασίας απόδειξης, οι μαθητές συνειδητοποιούν σταδιακά ότι δουλεύω πάνω σε μια μαθηματική δραστηριότητα σημαίνει κυρίως: προσδιορίζω το πρόβλημα, εικάζω για το αποτέλεσμα, πειραματίζομαι με τη βοήθεια παραδειγμάτων, συνθέτω ένα συλλογισμό, διατυπώνω μια λύση, ελέγχω τα αποτελέσματα και αξιολογώ την ορθότητά τους σε συνάρτηση με το αρχικό πρόβλημα. Γι' αυτό το λόγο η επίλυση προβλημάτων πρέπει να αποτελεί το κέντρο του ενδιαφέροντος ενός Π.Σ. των Μαθηματικών, όχι απαραίτητα ως ανεξάρτητη θεματική περιοχή, αλλά ως βασικός άξονας γύρω από τον οποίο θα οργανωθεί η διδασκαλία των βασικών μαθηματικών εννοιών. Στις πρώτες βαθμίδες της εκπαίδευσης, η θεματολογία των προβλημάτων θα προκύπτει από τις άμεσες εμπειρίες των μαθητών, ενώ σταδιακά τα προβλήματα θα γίνονται πιο σύνθετα και θα σχετίζονται τόσο με πραγματικές καταστάσεις όσο και με καθαρά μαθηματικά θέματα» (σελ. 4).

Σύμφωνα με το ελληνικό Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Πρόγραμμα Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) του 2000, των μαθηματικών για το Δημοτικό, η επίλυση προβλημάτων συμπεριλαμβάνεται στους γνωστικούς άξονες όλων των τάξεων και στους γενικούς στόχους αναφέρεται ότι με τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων οι μαθητές πρέπει να (σελ.250):

- εξερευνούν μία κατάσταση
- κατασκευάζουν ερωτήσεις και προβλήματα με βάση συγκεκριμένα δεδομένα
- διατυπώνουν διαφορετικά το ίδιο πρόβλημα
- αναγνωρίζουν και περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις
- ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις
- χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή και εξοικειώνονται με τις νέες τεχνολογίες

Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ.) για τα μαθηματικά αναφέρονται οι εξής στόχοι στις τάξεις Δ', Ε΄ και ΣΤ΄(σελ. 263, 267, 268, 271, 272):

- Να ενεργοποιούν, να εφαρμόζουν και να σταθεροποιούν τις ήδη αποκτημένες γνώσεις, για τη διατήρηση της συνέχειας και για την ομαλή μμετάβαση στις νέες έννοιες.
- Να εργάζονται ατομικά ή ομαδικά χωρίς καθοδήγηση για μια στερεότυπη λύση.
- Να ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις σχετικές με τις έννοιες της τάξης αυτής.
- Να κάνουν δοκιμές και επαληθεύσεις.
- Να ξεχωρίζουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος και να επιλέγουν τα αναγκαία δεδομένα για την επίλυσή του.
- Να επιχειρηματολογούν ως προς την αλήθεια μιας λύσης.
- Να παρουσιάζουν στους συμμαθητές τους με σαφήνεια την απάντησή τους, η οποία περιλαμβάνει τη στρατηγική επίλυσης και το αποτέλεσμα.
- Να βρίσκουν ενδιάμεσα ερωτήματα που υποβοηθούν την πορεία προς τη λύση.
- Να θέτουν δικά τους ερωτήματα και παρόμοια προβλήματα.
- Να αυτο-αξιολογούνται στις γνώσεις κα ικανότητες που απέκτησαν ώστε να γίνεται ανατροφοδότηση στη μαθησιακή διαδικασία.

Στις δυο τελευταίες τάξεις προστίθεται στα παραπάνω και ο στόχος:

- Να τους δίνεται η ευκαιρία να χρησιμοποιούν τον Η/Υ με ανάλογα προγράμματα π.χ. SketchPad, Cabri, Logo, Word, Excel, Paint κ.λπ. για την ευχερέστερη αντιμετώπιση των προβλημάτων.

Ως ενδεικτικές δραστηριότητες προτείνονται στις τάξεις Δ',Ε' και ΣΤ' (σελ. 263, 267, 268, 271, 272) οι ακόλουθες:

- Αναγνώριση προβλημάτων παρόμοιων ή ανάλογων με ένα δοσμένο πρόβλημα.
- Έλεγχος των διαδικασιών επίλυσης προβλήματος.
- Σκέψη πάνω στις δικές τους στρατηγικές επίλυσης προβλήματος.
- Ευρετικές στρατηγικές επίλυσης προβλήματος, όπως: σχεδιάζω έναν πίνακα, ένα διάγραμμα ή μια γραφική παράσταση, δοκιμάζω απλούστερους αριθμούς και εργάζομαι με ειδικές περιπτώσεις
- Βρίσκω ένα μοντέλο (Ε'-ΣΤ')
- Εκτιμώ και ελέγχω (Ε'-ΣΤ')
- Ενδεικτικές διαθεματικές δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος αναφέρονται στον κάθε επιμέρους άξονα.

Επίσης, στο ελληνικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (Ε.Π.Π.Σ.) των μαθηματικών του 1997 και στο Δ.Ε.Π.Π.Σ. του 2003, προτείνονται κάποιες από τις ευρετικές που είχε προτείνει ο Polya και υιοθετούνται τα πέντε επιχειρήματα που συγκεντρωτικά αναφέρουν οι Blum & Niss (1991), για την εισαγωγή της μοντελοποίησης και της επίλυσης προβλημάτων εφαρμογής, στην διδασκαλία των μαθηματικών, σε όλη την υποχρεωτική εκπαίδευση. Τα πέντε επιχειρήματα που αναφέρει οι Blum & Niss (1991) αναφέρονται συνοπτικά. Σύμφωνα με:

- Το διαμορφωτικό επιχείρημα, μέσω της μοντελοποίησης και της επίλυσης προβλημάτων καλλιεργούνται στους μαθητές στάσεις και γενικές δεξιότητες, σχετικές με τις ικανότητες διερεύνησης και δημιουργίας και επίλυσης προβλημάτων, όπως και αυτοπεποίθηση και εμπιστοσύνη στον εαυτό τους.
- Το επιχείρημα της κριτικής ικανότητας, μέσω της μοντελοποίησης και της επίλυσης προβλημάτων, προωθείται η ικανότητα των μαθητών να στέκονται κριτικά σε κοινωνικά προβλήματα και τις λύσεις τους.
- Το επιχείρημα της χρησιμότητας, υποστηρίζεται η ανάγκη εξάσκησης των μαθητών σε προβλήματα έξω από τον καθαρά μαθηματικό χώρο, ώστε να είναι προετοιμασμένοι για την πραγματική ζωή.
- Το επιχείρημα της «εικόνας των μαθηματικών», υπογραμμίζεται η δυνατότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης να καλλιεργεί μια ολοκληρωμένη εικόνα των

μαθηματικών, η οποία δεν περιορίζεται στον χώρο της επιστήμης αλλά έχει θέση μέσα στην κοινωνία και τον πολιτισμό.

- το επιχείρημα της προώθησης της μάθησης των μαθηματικών, μέσω της μοντελοποίησης και της επίλυσης προβλημάτων, καλλιεργείται η μάθηση εννοιών, μεθόδων και αποτελεσμάτων, που παρέχουν κίνητρα και συνάφεια για τις μαθηματικές σπουδές, ενώ ταυτοχρόνως καλλιεργείται η μαθηματική σκέψη στους μαθητές που τους επιτρέπει να χρησιμοποιούν τις μαθηματικές τους γνώσεις και έξω από τον κόσμο των μαθηματικών (Blum & Niss, 1991).

Τα παραπάνω συνάδουν με την αντίληψη πως τα μαθηματικά δεν προορίζονται μόνο γι' αυτούς που έχουν κλίση ή θα ακολουθήσουν μαθηματική καριέρα αλλά για όλους τους μαθητές, για να τα χρησιμοποιήσουν σε κάθε τομέα της ζωής τους και γι' αυτό δεν πρέπει να περιορίζονται μέσα στο καθαρά μαθηματικό πλαίσιο, που δεν ευνοεί και δεν προωθεί την χρήση τους σε καταστάσεις της πραγματικής ζωής και άλλων επιστημονικών κλάδων. Επίσης, η γνώση μαθηματικών διαδικασιών, όπως η επίλυση προβλήματος και όχι η απλή και στείρα απομνημόνευση μαθηματικών γεγονότων, επιβάλλεται στον ταχέως μεταβαλλόμενο κόσμο.

Στα νέα σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιούνται από το 2007 και έπειτα, προωθείται το ανακαλυπτικό μοντέλο μάθησης, που θέτει τον μαθητή στο κέντρο της διδασκαλίας και η διδασκαλία αφορά όχι μόνο τις γνώσεις αλλά και τις διαδικασίες μάθησης. Στο μοντέλο αυτό, οι στόχοι της διδασκαλίας επιτυγχάνονται μέσα από την αντιμετώπιση δραστηριοτήτων και προβλημάτων, όπου μέσω της επεξεργασίας αυτών ερευνούν, αιτιολογούν, αντιπαρέρχονται, κάνουν εκτιμήσεις λύσεων, επιχειρηματολογούν για τις λύσεις που προτείνουν και εκφράζονται σε μαθηματική γλώσσα (Κλιάπης & Κασσώτη, 2005, στο Κλιάπης & Κασσώτη, 2017).

1.5 Ο ρόλος του σχολικού εγχειριδίου των μαθηματικών

Τα σχολικό εγχειρίδιο αποτελεί το μέσο διδασκαλίας του εκάστοτε γνωστικού αντικειμένου, καθώς μέσα από αυτό επικοινωνείται η γνώση μεταξύ του εκπαιδευτικού και των μαθητών μέσα στις σχολικές τάξεις . Ο όρος σχολικό εγχειρίδιο (textbook) έχει επικρατήσει ανάμεσα σε άλλους, όπως σχολικό βιβλίο ή διδακτικό βιβλίο, καθώς σε αυτά περιλαμβάνονται: το σχολικό ή διδακτικό βιβλίο, το βιβλίο εργασίας των μαθητών, το βιβλίο των εκπαιδευτικών και οποιαδήποτε βοήθημα, μη εγκεκριμένο από του υπουργείο, χρησιμοποιείται μέσα στην σχολική τάξη (Ξωχέλλης, 2005, στο Μπούρας, Τριανταφύλλου, 2012) και έτσι θα αναφέρεται στην παρούσα εργασία.

Στην ελληνική εκπαίδευση το περιεχόμενο και η ουσία του γνωστικού αντικειμένου καθορίζεται από το σχολικό εγχειρίδιο, καθώς κάθε μάθημα εκπροσωπείται αποκλειστικά από ένα εγχειρίδιο (Ι.Π.Ε.Μ., 2009). Το σχολικό εγχειρίδιο αποτελεί το μέσο με το οποίο οι εκπαιδευτικοί σχεδιάζουν και παραδίδουν το μάθημα τους, αναθέτουν ασκήσεις από αυτό στο σχολείο αλλά και για το σπίτι. Σύμφωνα με πολλούς ερευνητές, στα σχολικά εγχειρίδια αποτυπώνεται το τι μαθαίνουν οι μαθητές και τι διδάσκουν οι εκπαιδευτικοί (Reys at al., 2004; Pepin, 2008). Οι ευκαιρίες για μάθηση δηλαδή, που δημιουργεί το σχολικό εγχειρίδιο συνδυάζονται και αλληλοεξαρτώνται με τον τρόπο χρήσης του από τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς (Rezat & Strässer, 2015; Shield & Dole, 2013; Valverde et al.,2002, στο O'Keefee, 2013). Το σχολικό εγχειρίδιο αποτελεί σημαντικό συστατικό της επιτυχημένης διδασκαλίας, καθώς δεν περιέχει μόνο την ύλη του μαθήματος που διδάσκεται μέσω αυτού αλλά και υποδεικνύει ένα τρόπο διδασκαλίας και καθορίζει τι είναι αξιόλογο να διδαχθεί.

Πιο αναλυτικά για το ρόλο των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών στην διδακτική πράξη η Κολέζα (2017) αναφέρει πως αυτά:

- προσδιορίζουν το περιεχόμενο της διδασκαλίας, καθώς έννοιες και θέματα που δεν συμπεριλαμβάνονται σε αυτά δεν διδάσκονται στις σχολικές τάξεις, αποτελώντας με αυτό τον κύριο οδηγό για το τι πρέπει να διδαχθεί.
- Οργανώνουν το μαθηματικό περιεχόμενο της διδασκαλίας, καθώς αυτή συνήθως ακολουθεί την οργάνωση του σχολικού εγχειριδίου.
- Υποκινούν τον εκπαιδευτικό να τροποποιήσει τη διδασκαλία του λειτουργώντας ως πηγή ιδεών για τον τρόπο διδασκαλίας του περιεχομένου τους.
- Μεταφέρουν μια θέση για τη σημασία των φράσεων «Τι είναι μαθηματικά» και «ξέρω μαθηματικά».
- Ορίζουν τις εργασίες για το σπίτι.
- Καθορίζουν τι θα αξιολογηθεί έμμεσα και τι άμεσα.
- Επικοινωνούν στους γονείς τι συμβαίνει μέσα στην τάξη.
- Αποτελούν ιστορικές καταγραφές του περιεχομένου της Μαθηματικής εκπαίδευσης.
- Καθορίζουν τι αξιολογείται ως σημαντική γνώση τη δεδομένη χρονική στιγμή.
- Εκπροσωπούν την εικόνα του κοινωνικό -πολιτισμικού επιπέδου της χώρας.

Επίσης, το σχολικό εγχειρίδιο αποτελεί το εργαλείο, που μαζί με τη διδασκαλία υλοποιεί τις επιλογές του αναλυτικού προγράμματος (Χασάπης, 2008) ή είναι ο διαμεσολαβητής μεταξύ της πρόθεσης του αναλυτικού προγράμματος και της διδασκαλίας στην τάξη (Valverde et al., 2002, στο Pepin, 2008). Βέβαια έρευνες έχουν συχνά εντοπίσει μη συνάφεια μεταξύ των προγραμμάτων σπουδών και των σχολικών εγχειριδιών (Johansson, 2005).

Στην Ελλάδα, το σχολικό εγχειρίδιο αποτελεί την ουσία του γνωστικού αντικείμενου που διδάσκεται και από την πλευρά του διδάσκοντα (ως οδηγός οργάνωσης της διδασκαλίας) και από την πλευρά του μαθητή καθώς είναι το μέσο με το οποίο έρχεται σε επαφή. Έρευνες σε διάφορες χώρες, αποκαλύπτουν πως μαθητές και εκπαιδευτικοί αξιολογούν τι είναι σημαντικό σε σχέση με τα μαθηματικά, από το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων (Vincent & Stacey, 2008; Schmidt el al., 2012). Στην Ελλάδα το τι πρέπει να διδαχθεί καθορίζεται από το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών και από την ύλη που πρέπει να εξεταστεί.

Σύμφωνα με τον Apple (1986, στο Fan at al., 2013) «το σχολικό εγχειρίδιο είναι αυτό που καθορίζει ένα μεγάλο μέρος των υλικών συνθηκών για τη διδασκαλία και τη μάθηση στην τάξεις …και συχνά… ορίζει τι είναι ελίτ και η νόμιμη κουλτούρα που πρέπει να μεταδοθεί». Η δυναμική του σχολικού εγχειριδίου αποτυπώνεται και καθορίζεται και από τον τρόπο που εκπαιδευτικοί το χρησιμοποιούν. Συμφώνα με τους Reys at al. (2003) το μαθηματικό περιεχόμενο που δεν περιλαμβάνεται στον σχολικό εγχειρίδιο, δεν διδάσκεται συνήθως από τους εκπαιδευτικούς, ενώ πολύ συχνά οι διδακτικές τους προσεγγίσεις καθορίζονται από αυτό. Σε έρευνα στα ελληνικά σχολεία, παρατηρήθηκε πως οι εκπαιδευτικοί οργανώνουν τη διδασκαλία τους με βάση τη δομή και το περιεχόμενο του σχολικού εγχειριδίου σε όλη τη διάρκεια του μαθήματος, από την παρουσίαση της νέας έννοιας/ενότητας, την εξάσκηση πάνω στις ασκήσεις και τα προβλήματα, τον έλεγχο της προϋπάρχουσας γνώσης και την εκτέλεση και ανάθεση εργασιών (Χασάπης, 2008).

Σύμφωνα με την Pepin (2008) «τα σχολικά εγχειρίδια είναι σπουδαία μέσα διδασκαλίας και επηρεάζουν οτιδήποτε συμβαίνει στη σχολική τάξη». Σε έρευνα της στα σχολικά εγχειρίδια της Γαλλίας, της Αγγλίας και της Γερμανίας, διαπίστωσε πως αυτά, μπορούν δυνητικά να προσφέρουν περισσότερες ευκαιρίες μάθησης, από ότι προσφέρουν οι εκπαιδευτικοί και ταυτοχρόνως αποτελούν το ανώτερο φράγμα των μαθησιακών ευκαιριών που προσφέρονται στους μαθητές. Αυτό υποστηρίζουν και οι Fan & Kaeley (2000), οι οποίοι από την έρευνα τους διαπίστωσαν πως τα σχολικά εγχειρίδια επηρεάζουν τις παιδαγωγικές μεθόδους και το στυλ διδασκαλίας που επιλέγουν οι εκπαιδευτικοί, καθώς τα διαφοροποιούν ανάλογα με τις κατευθύνσεις των εγχειριδίων που χρησιμοποιούν. Ο Brown (2001, στο Newton & Newton, 2007) από την άλλη υποστηρίζει πως κανένα εκπαιδευτικό υλικό δεν είναι πλήρες χωρίς τον εκπαιδευτικό, ενώ ένας καταρτισμένος και έμπειρος εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιήσει κατάλληλα ακόμα και ένα ελλιπές σχολικό εγχειρίδιο. Αυτή την θέση έρχεται να συμπληρώσουν έρευνες που αποτυπώνουν πως λιγότερο έμπειροι ή αρχάριοι εκπαιδευτικοί, διαρθρώνουν τη διδασκαλία τους αποκλειστικά βασιζόμενοι στο σχολικό εγχειρίδιο, το οποίο χρησιμοποιούν ως κύρια ή και μοναδική πηγή (Κολέζα, 2017). Όπως αναφέρει η Mesa (2004) τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν πηγή δυνητικής μάθησης, καθώς η διδακτική πρακτική με την οποία μαθαίνουν οι μαθητές, εξαρτάται από το υπάρχον σχολικό πλαίσιο (εκπαιδευτικοί, συμμαθητές, εκπαιδευτικό υλικό).

Ο ρόλος, οι πεποιθήσεις και οι παιδαγωγικές επιλογές των εκπαιδευτικών στην εκπαιδευτική διαδικασία έχουν διερευνηθεί από πολλούς μελετητές. Αν και ο τρόπος χρήσης των σχολικών εγχειρίδιων θεωρείται ιδιαίτερα σημαντικός παράγοντας, όταν θέλουμε να διερευνήσουμε το πώς μαθαίνουν οι μαθητές, η ανάλυση του περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων είναι εξίσου απαραίτητη (Mesa, 2004). Οι Shield & Dole (2013) υποστηρίζουν πως η ανάλυση σχολικών εγχειριδίων, προσφέρει σημαντικά αποτελέσματα που βοηθούν συζητήσεις σχετικά με τη διδασκαλία αλλά και τον σχεδιασμό σχολικών εγχειριδίων. Όπως αναφέρουν οι Robittaile & Travers (1992), τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών διαδραματίζουν μεγαλύτερο ρόλο στην διδασκαλία των μαθηματικών μέσα στην τάξη σε σχέση με τα εγχειρίδια των υπόλοιπων μαθημάτων, καθώς οργανώνουν τη διδασκαλία, καθορίζοντας το περιεχόμενο και την αλληλουχία των μαθημάτων (Χασάπης, 2008).

Τα σχολικά εγχειρίδια εξετάζονται συχνά για τις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρουν. Σύμφωνα με τον Folden (2002, στο Kolovou at al. 2009) η ευκαιρία μάθησης (Opportunity to Learn – OTL), ορίστηκε από τον Husen (1967) ως το «κατά πόσον οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να μελετήσουν ένα συγκεκριμένο θέμα ή να μάθουν πως να επιλύουν ένα συγκεκριμένο τύπο προβλήματος που παρουσιάζεται στο τεστ». Δηλαδή το κατά πόσο οι μαθητές εκτίθενται στη μάθηση ενός αντικειμένου. Η χρήση διαφορετικών σχολικών εγχειριδίων δημιουργεί διαφορετικές ευκαιρίες μάθησης (Haggarty & Pepin, 2002), καθώς τα σχολικά εγχειρίδια ανάλογα με το μαθηματικό περιεχόμενο τους και τις δραστηριότητες που περιέχουν, καθορίζουν τις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρονται στους μαθητές

Kolovou at al. (2009), ιδιαίτερα καθώς οι έρευνες αποτυπώνουν την συστηματική χρήση αυτών από τους εκπαιδευτικούς (Reys, Reys & Chavez, 2004). Βέβαια, οι εκπαιδευτικοί δεν χρησιμοποιούν πάντα τις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρονται στα σχολικά εγχειρίδια και δεν τις εφαρμόζουν με τον προτεινόμενο τρόπο (Bieda, 2010, στο Cai & Cirillo, 2013).

1.6 Ενδεικτικές έρευνες για τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών και την επίλυση προβλήματος

Τα σχολικά εγχειρίδια ως πεδίο έρευνας απασχόλησαν για πρώτη φορά την εκπαιδευτική και επιστημονική κοινότητα τις τελευταίες δεκαετίες. Σε σχέση με τη μαθηματική εκπαίδευση το έντονο ενδιαφέρων των ερευνητών αποτυπώνεται στην ανάλυση των σχολικών εγχειρίδιων και περαιτέρω υλικού των αναλυτικών προγραμμάτων, περισσότερων από 40 χωρών στην Τρίτη Διεθνή Μελέτη Μαθηματικών και Επιστημών (TIMSS) το 1995 και το 2004, στο 10^{o} Διεθνές Συνέδριο για την Μαθηματική Εκπαίδευση (ICME -10), όπου δημιουργήθηκε Ομάδα Συζήτησης με αντικείμενο τα σχολικά εγχειρίδια (DG14).

Μερίδα των ερευνητών υποστηρίζουν πως η ανάλυση των σχολικών εγχειρίδιων μπορεί να εξηγήσει τις διαφορές που παρατηρούνται στις επιδόσεις των μαθητών στις διεθνείς συγκριτικές μελέτες (Wijaya, at al., 2015; Xin, 2007; Fan & Zhu, 2007; Zhu & Fan, 2006; Kolovou at al., 2009; Jäder, Lithner & Sidenvall, 2020) και γι αυτό η έρευνα στο πεδίο αυτό είναι μεγάλη.

Καθώς, η ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών έχει προχωρήσει τις τελευταίες δεκαετίες, οι Fan at al. (2013) διεξήγαν μια συγκεντρωτική έρευνα και ανέλυσαν ένα μεγάλο ποσοστό επιστημονικών άρθρων και μελετών που ασχολούνται με τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών, ως προς το αντικείμενο μελέτης τους. Η έρευνα, η οποία έχει εστιάσει κυρίως σε αγγλόφωνα άρθρα και δημοσιεύσεις σε επιστημονικά περιοδικά, φανέρωσε πως το 63% των εργασιών/ερευνών που πραγματοποιήθηκαν από το 1980 και μέχρι το 2013, αφορούσαν την ανάλυση σχολικών εγχειριδίων, με το 29% αυτού του ποσοστού να εστιάζει στη σύγκριση σχολικών εγχειριδίων διαφόρων χωρών και βαθμίδων, το 25% στη χρήση των σχολικών εγχειριδίων και το 12% σε άλλες περιοχές, όπως τα ηλεκτρονικά εγχειρίδια και τη σχέση μεταξύ σχολικών εγχειριδίων και των επιδόσεων των μαθητών. Η ανάλυση λοιπόν των σχολικών εγχειριδίων μπορεί να περιλαμβάνει είτε την ανάλυση ενός σχολικού εγχειριδίου ή μιας σειράς, είτε να περιλαμβάνει τη σύγκριση σχολικών εγχειριδίων της ίδιας χώρας ή διαφόρων χωρών, με στόχο να συγκριθούν οι ομοιότητες και οι διαφορές τους.

Η Κολέζα (2017) προτείνει για την ανάλυση των μαθηματικών εγχειριδίων δύο βασικούς άξονες. Ο πρώτος άξονας σχετίζεται με το περιεχόμενο και ο δεύτερος με τον τρόπο εφαρμογής στην τάξη. Ο άξονας του περιεχομένου μπορεί να αναλυθεί σε τέσσερις διαστάσεις:

- Την *μαθηματική διάσταση*, στην οποία ελέγχεται το περιεχόμενο ως προς την ορθότητα και την πληρότητα των μαθηματικών που περιλαμβάνει.
- Την *γνωστική διάσταση*, στην οποία εξετάζονται οι μαθηματικές δεξιότητες που προωθούνται.
- Την *διδακτική διάσταση*, στην οποία ερευνώνται τα εργαλεία της διδακτικής που καθορίζουν το περιεχόμενο.
- Την *παιδαγωγική διάσταση*, στην οποία διερευνώνται τα γλωσσικά, πολιτισμικά και κοινωνιολογικά στοιχεία του κειμένου.

Οι Rezat & Strässer (2015) εξετάζοντας τις έρευνες που έχουν γίνει στις σκανδιναβικές χώρες σχετικά με τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών, εντοπίζουν τρεις τομείς ανάλυσης σχετικά με αυτά:

1) τις έρευνες που εξετάζουν τις επιρροές των σχολικών εγχειριδίων,

2) τις έρευνες που εστιάζουν στα ίδια τα σχολικά εγχειρίδια και

3) τις έρευνες σχετικά με τη χρήση των σχολικών εγχειριδίων και των επιπτώσεων τους.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται έρευνες που έχουν εστιάσει στην ανάλυση του περιεχομένου σχολικών εγχειριδίων σε σχέση με την επίλυση προβλήματος.

Στην έρευνα των Wijaya, at al. (2015) στα σχολικά εγχειρίδια της Ινδονησίας, σε σχέση με την επίλυση προβλημάτων, διερευνήθηκαν οι ευκαιρίες μάθησης που προσφέρονται σε αυτά, σε σχέση με την ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων βασισμένων σε πλαίσιο. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα τους, μόνο το 10% των εργασιών σχετίζονται με το πλαίσιο, ενώ το 85% των εργασιών προσφέρουν όλες τις αναγκαίες πληροφορίες για την επίλυση των εργασιών, χωρίς να δίνουν περιθώρια διερεύνησης στους μαθητές. Συμπερασματικά κατέληξαν, πως η έλλειψη ευκαιριών μάθησης στα σχολικά εγχειρίδια της

Ινδονησίας, επηρεάζει την απόδοση των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων και σχετίζεται με το πλαίσιο.

Σε μια άλλη συγκριτική έρευνα, ο Xin (2007), ερεύνησε τις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρουν τα σχολικά εγχειρίδια μιας κινεζικής και μις αμερικανικής σειράς μαθηματικών σχολικών εγχειριδίων, μελετώντας τις επιδόσεις των μαθητών στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων. Επίσης, ανέλυσε την κατανομή των διαφόρων τύπων λεκτικών προβλημάτων και πως αυτοί σχετίζονται με τις επιδόσεις των μαθητών. Τα αποτελέσματα έδειξαν, πως οι επιδόσεις των μαθητών υπερτερούν σε κάποιους τύπους προβλημάτων, σε αντίθεση με άλλους και καθώς αυτό σχετίζεται με τον τρόπο κατανομής των προβλημάτων στις δύο σειρές σχολικών εγχειριδίων, διαπιστώνεται ένας συσχετισμός μεταξύ των επιδόσεων των μαθητών και του σχεδιασμού των σχολικών εγχειριδίων.

Οι Fan & Zhu (2007) εξέτασαν και συνέκριναν κάποιες σειρές από τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, της Κίνας, της Σιγκαπούρης και των ΗΠΑ, σε σχέση με το πώς αναπαριστούν τις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων σε δύο επίπεδα: γενικές στρατηγικές και ειδικές στρατηγικές. Στις γενικές στρατηγικές χρησιμοποίησαν το μοντέλο τεσσάρων σταδίων επίλυσης προβλημάτων του Pólya και στις ειδικές στρατηγικές χρησιμοποίησαν 17 ευρετικές για την επίλυση προβλημάτων. Σύμφωνα με αυτούς ο τρόπος αναπαράστασης των προβλημάτων και των διαδικασιών επίλυσης στα σχολικά εγχειρίδια επηρεάζουν τη διδασκαλία, την μάθηση και τις ικανότητες των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων. Σε σχέση με την μοντελοποίηση των τεσσάρων σταδίων, στα σχολικά εγχειρίδια της Κίνας και των ΗΠΑ ήταν πιο σαφής, χαρακτηρίζοντας ρητά το κάθε στάδιο σε αντίθεση με της Σιγκαπούρης που χρησιμοποιήθηκε μόνο ο όρος «έλεγχος» που αντιπροσώπευε το τέταρτο στάδιο. Σύμφωνα με τους συγγραφείς, η χρήση των όρων σε κάθε στάδιο διευκολύνει τους μαθητές να διακρίνουν ευκολότερα τα τέσσερα στάδια που χρησιμοποιούνται κατά την επίλυση προβλήματος. Ως προς τις ευρετικές, το ποσοστό χρήσης τους και στις τρεις σειρές ήταν ιδιαίτερα χαμηλό, (Κίνα:14,2%, Σιγκαπούρη:14,2%, ΗΠΑ:25,5%) γεγονός που οφείλεται σύμφωνα με τους συγγραφείς στην ύπαρξη πολλών προβλημάτων ρουτίνας, του ενός βήματος, τα οποία παρουσιάζουν ευκολία στην διαδικασία επίλυσης που δεν απαιτεί τη χρήση ευρετικών. Τέλος, εντόπισαν μια αναντιστοιχία μεταξύ των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών και των σχολικών εγχειριδίων.

Σε προηγούμενη μελέτη τους οι Zhu & Fan (2006) ανέλυσαν και συνέκριναν κάποια από τα σχολικά εγχειρίδια της Κίνας και των ΗΠΑ ως προς τους τύπους των προβλημάτων που χρησιμοποιούν. Η έρευνα έδειξε πως το 96% των προβλημάτων και στις δύο χώρες ανήκαν στα παραδοσιακά και προβλήματα ρουτίνας, ενώ το 93% των προβλημάτων ήταν κλειστού τύπου και πάνω από το 92% των προβλημάτων δεν σχετίζονταν με πραγματικές καταστάσεις. Επίσης, παρατήρησαν πως στα αμερικάνικα σχολικά εγχειρίδια τα περισσότερα προβλήματα ήταν εφαρμογής, αυθεντικά και προβλήματα με οπτικές πληροφορίες. Σε αντίθεση, τα κινέζικα σχολικά εγχειρίδια έδιναν περισσότερη βαρύτητα στα προβλήματα πολλών βημάτων για την επίλυση προβλημάτων.

Σε μια συγκεντρωτική ανάλυση σχολικών εγχειριδίων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μεταξύ δώδεκα χωρών, σχετικά με τις εργασίες που προσφέρονται στα σχολικά εγχειρίδια, που πραγματοποίησαν οι Jäder, Lithner & Sidenvall (2020) αποτυπώθηκε, πως το μεγαλύτερο μέρος των εργασιών αποτελούν ασκήσεις που αποσκοπούν στην εξάσκηση των μαθητών σε γνωστούς αλγορίθμους, καθώς η μέθοδος επίλυση τους, προσφέρεται σε κάποιο σημείο του σχολικού εγχειριδίου. Σημαντικό στοιχείο αποτέλεσε, πως αυτό ισχύει για τα σχολικά εγχειρίδια, των περισσότερων χωρών παρ’ όλες τις υποδείξεις του προγράμματος σπουδών των χωρών αυτών.

Η έρευνα του Kongelf (2012) στα νορβηγικά σχολικά εγχειρίδια της κατώτερης δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, σχετικά με τις ευρετικές που χρησιμοποιούνται σε έξι σειρές σχολικών εγχειριδίων της ένατης τάξης, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι παρόλο που οι ευρετικές χρησιμοποιούνται σε αυτά, η μη ρητή αναφορά στην επίλυση προβλήματος από αυτά καθιστά τυχαία την χρήση τους, ενώ η απουσία ρητής καθοδήγησης για την χρήση τους καθιστά δύσκολη την διδασκαλία τους και την αφομοίωση τους από τους μαθητές.

Η Kolovou και οι συνεργάτες της (2009) αναγνωρίζουν τη σημασία των προγραμμάτων σπουδών και των σχολικών εγχειριδίων που τα εκπροσωπούν σε σχέση με τη διδασκαλία που προωθούν και τις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρουν. Διερεύνησαν την φύση των προβλημάτων που προσφέρονται στα σχολικά εγχειρίδια της τετάρτης τάξης των σχολείων της Ολλανδίας, σχετικά με το αν αυτά προσφέρουν ευκαιρίες επίλυσης μη ρουτίνας προβλημάτων. Διαπίστωσαν πως και οι έξι σειρές σχολικών εγχειριδίων που χρησιμοποιούνται από τα σχολεία της Ολλανδίας, έχουν πολύ χαμηλά ποσοστά εργασιών ανοιχτού τύπου, στοιχείο που αποτυπώνει την διάσταση μεταξύ του προγράμματος σπουδών και των σχολικών εγχειριδίων. Κατέληξαν πως η απουσία προβλημάτων μη ρουτίνας από τα σχολικά εγχειρίδια, φανερώνει την έλλειψη ευκαιριών μάθησης στη διδασκαλία της επίλυσης προβλημάτων, που δεν απαιτούν μόνο διαδικαστικές ικανότητες, στα δημοτικά σχολεία της χώρας.

1.7 Συζήτηση

Η επίλυση προβλημάτων κατέχει σημαντικό ρόλο στην διδασκαλία των μαθηματικών, αφενός ως αντικείμενο διδασκαλίας με κεντρικό ρόλο στα προγράμματα σπουδών και αφετέρου ως μέσο διδασκαλίας μαθηματικών εννοιών. Οι στρατηγικές επίλυσης και οι ευρετικές χρησιμοποιούνται εδώ και χρόνια στα σχολικά εγχειρίδια με στόχο την βελτίωση των ικανοτήτων των μαθητών να επιλύουν προβλήματα και μέρος της βιβλιογραφίας επικροτεί τη χρήση τους. Επίσης, η χρήση ανοιχτών, με πολλά βήματα, μη παραδοσιακών προβλημάτων, με εφαρμογή στην καθημερινή ζωή έχει υποστηριχθεί από τη βιβλιογραφία, καθώς και η ανάγκη εξάσκησης των μαθητών σε τέτοιους είδους προβλήματα. Σύμφωνα με έρευνες, η μη έκθεση και εξάσκηση των μαθητών σε συγκεκριμένους τύπους προβλημάτων, αιτιολογεί την δυσκολία τους κατά την επίλυση τους. Τα θέματα αυτά δεν έχουν αποτελέσει αντικείμενο έρευνας στη χώρα μας για τα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού.

Καθώς το σχολικό εγχειρίδιο είναι άρρηκτα συνδεδεμένο με την σχολική μάθηση των μαθηματικών, αφού αποτελεί το βασικότερο εργαλείο των εκπαιδευτικών κατά την εκπαιδευτική διαδικασία αλλά και το μέσο με το οποίο εργάζονται κατά κύριο λόγο οι μαθητές, η ανάγκη ανάλυσης του περιεχομένου του έχει θεωρηθεί σημαντική, χωρίς να παραγνωρίζονται άλλοι παράγοντες που συντελούν στο διδακτικό αποτέλεσμα. Οι ευκαιρίες μάθησης, που προωθούνται από τα σχολικά εγχειρίδια έχουν θεωρηθεί σημαντικές και έχουν ερευνηθεί από πολλούς μελετητές ποικιλοτρόπως στο εξωτερικό. Επίσης, καθώς έχει παρατηρηθεί συχνά απόκλιση μεταξύ των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών και των σχολικών εγχειρίδιων, κρίνεται σημαντικό να εξετάσουμε τη συχνότητα ύπαρξης και των τρόπων χρήσης των στρατηγικών και ερευτικών στα σχολικά εγχειρίδια, καθώς και είδος των προβλημάτων τα οποία αυτά προσφέρουν, σε σχέση με τα Α.Π.Σ. και Δ.Ε.Π.Π.Σ. στην χώρα μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2:
ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

2.1 Προβληματική της έρευνας

Ο κεντρικός ρόλος των σχολικών εγχειριδίων στην διδακτική πράξη έχει πολλαπλώς ερευνηθεί και υποστηριχθεί από την ερευνητική κοινότητα (π.χ. Haggarty & Pepin, 2002; Mesa, 2004; Newton & Newton, 2007). Επίσης, η χρήση προβλημάτων στην διδασκαλία των μαθηματικών έχει υιοθετηθεί από τα περισσότερα προγράμματα σπουδών και μεγάλο μέρος των σχολικών εγχειριδίων καλύπτεται από προβλήματα. Έχει υποστηριχτεί πως οι τύποι των προβλημάτων και ο βαθμός έκθεσης των μαθητών σε αυτά, σχετίζονται με τις επιδόσεις των μαθητών στα μαθηματικά (Zhu & Fan, 2006). Συγχρόνως, η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων έχει λάβει μεγάλη προσοχή μετά τα τέλη της δεκαετίας του 1970 και η αναγνώριση της αξίας της είναι φανερή από την χρήση της στα σχολικά εγχειρίδια πολλών χωρών και το πλήθος των ερευνών πάνω σε αυτή που επιβεβαιώνουν τον ρόλο της στη διδασκαλία των μαθηματικών (π.χ. Reiss & Torner, 2007; Lester, 1994; Lester, 2013; Pehkonen, Naveri & Laine, 2013). Σύμφωνα με έρευνες έχει εντοπιστεί υψηλή συσχέτιση στις επιδόσεις των μαθητών κατά την επίλυση προβλημάτων, όπως και μεταξύ των στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων (Cai & Jiang, 2016).

Η έκθεση των μαθητών σε ποικιλία προβλημάτων και στρατηγικών επίλυσης και η διδασκαλία μέσω της επίλυσης προβλημάτων υποστηρίζεται και από το Δ.Ε.Π.Π.Σ. της χώρας μας.

Οι στρατηγικές και οι ευρετικές που προτείνει στο έργο του ο Pólya σχετικά με την επίλυση προβλημάτων, αν και έχουν αμφισβητηθεί από κάποιους ερευνητές ως προς την αποτελεσματικότητα τους (π.χ. Wilson, 1967; Smith, 1973, στο Kongelf, 2012), όπως έχουν φανερώσει άλλες εμπειρικές έρευνες, η κατάλληλη διδασκαλία τους, ωφελεί την ανάπτυξη των δεξιοτήτων των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων (Charles & Lester 1984; Hembree 1992; Higgins 1997; Lee 1982; Oladunni 1998; Schoenfeld 1979, στο Fan & Zhu, 2007). Ωστόσο, αν και η αναγνώριση της σημαντικότητας της χρήσης της επίλυσης προβλήματος κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, οδήγησε στην χρήση τους στο σχεδιασμό και την ανάπτυξη του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών, πολλές έρευνες έχουν εντοπίσει διάσταση μεταξύ των σχολικών εγχειριδίων και των προγραμμάτων σπουδών των χωρών (π.χ. Fan & Zhu, 2007).

Με βάση όλα τα παραπάνω και λόγω της απουσίας έρευνας που να εξετάζει αυτές τις παραμέτρους στα σχολικά εγχειρίδια στον ελληνικό χώρο, θεωρείται σημαντικό να διερευνηθούν οι τύποι προβλημάτων με τους οποίους έρχονται σε επαφή οι μαθητές μέσω των σχολικών εγχειριδίων, όπως και οι στρατηγικές και ευρετικές που προωθούνται μέσω αυτών για την επίλυση προβλημάτων.

2.2 Σκοπός της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Τα σχολικά εγχειρίδια όπως αναλύθηκε παραπάνω διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στην εκπαιδευτική διαδικασία. Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, το κάθε μάθημα εκπροσωπείται από ένα σχολικό εγχειρίδιο, το οποίο αποτελεί συνήθως το κύριο μέσο της διδασκαλίας και συχνά οτιδήποτε δεν περιέχεται σε αυτό δεν διδάσκεται στην τάξη. Επίσης, σε πολλές έρευνες οι επιδόσεις των μαθητών, έχουν συνδεθεί με το περιεχόμενο αλλά και την χρήση του σχολικού εγχειρίδιου, ως προς τις ευκαιρίες μάθησης που δύναται να προσφέρει. Η ανάλυση του, λοιπόν, μπορεί να συμβάλει στην βελτίωση των διδακτικών εγχειρίδιων στο μέλλον.

Ειδικότερα η παρούσα εργασία ασχολείται με την ανάλυση των έργων των σχολικών εγχειριδίων «Βιβλίο Μαθητή» των τάξεων Δ’, Ε’ και ΣΤ’ του Δημοτικού. Ο σκοπός της έρευνας αυτής είναι να αναλυθούν τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών, της Δ’, Ε’ και ΣΤ’ Δημοτικού, σε σχέση με τους τύπους των προβλημάτων που εκπροσωπούνται σε αυτά, τα στάδια επίλυσης προβλήματος του Pólya που χρησιμοποιούνται σε αυτά κατά την διδασκαλία και τις ευρετικές που προτείνονται από αυτά.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που προκύπτουν είναι τα εξής:

- Ποιοι τύποι προβλημάτων υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ’, Ε’ και ΣΤ΄ Δημοτικού, με βάση την κατηγοριοποίηση των προβλημάτων που προτείνουν οι Zhu & Fan (2006);
- Ποια από τα στάδια επίλυσης προβλημάτων του Pólya εμφανίζονται στα έργα που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ’, Ε’ και ΣΤ’ τάξης του Δημοτικού;

- Ποιες ευρετικές εμφανίζονται κατά την επίλυση προβλημάτων στα έργα που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ', Ε' και ΣΤ' τάξης του Δημοτικού;

2.3 Δείγμα της έρευνας

Το δείγμα της έρευνας αποτελούν οι επανεκδόσεις των σχολικών εγχειριδίων «Βιβλίο Μαθητή» των Μαθηματικών, των τάξεων Δ', Ε' και ΣΤ' της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης του έτους 2022. Επιλέχτηκαν τα σχολικά εγχειρίδια των τριών αυτών τάξεων, καθώς υπήρχε σχετική με τα έργα έρευνα στα σχολικά εγχειρίδια της Α' , Β' και Γ' τάξης του δημοτικού, από την κ. Χατζηζαχαρία Ανεζούλα, με θέμα: «Μια συγκριτική ανάλυση των ελληνικών σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών της Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξης του Δημοτικού σχολείου». Τα εγχειρίδια αυτά, όπως και όλα τα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια εκδίδονται από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ» στη Αθήνα. Τα σχολικά εγχειρίδια αυτά χρησιμοποιούνται καθολικά και αποκλειστικά σε όλα τα σχολεία της χώρας.

Συγκεκριμένα τα έργα που αναλύονται περιέχονται στα εξής σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης:

- Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α.,Δ., Σαίτης, Α., Μαθηματικά Δ' Δημοτικού, Βιβλίο Μαθητή, Έκδοση 2022, Ι.Τ.Υ.Ε. Διόφαντος
- Βρυώνης, Κ., Δουκάκης, Σ., Καρακώστα, Β., Μπαραλής, Γ., Σταύρου, Ι., Μαθηματικά Ε' Δημοτικού, Βιβλίο Μαθητή α' τεύχος, Έκδοση 2022 & β' τεύχος, Έκδοση 2022, Ι.Τ.Υ.Ε. Διόφαντος
- Κασσώτη, Ο., Κλίαπης, Π., Οικονόμου, Θ., Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού, Βιβλίο Μαθητή, Έκδοση 2022, Ι.Τ.Υ.Ε. Διόφαντος

2.4 Μέθοδος της έρευνας

Προκείμενου να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα και καθώς η παρούσα εργασία έχει στόχο να εξετάσει το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών, των τριών τελευταίων τάξεων του Δημοτικού, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της «ανάλυσης περιεχομένου». Η ανάλυση σχολικών εγχειριδίων, σύμφωνα με τους Fan, Zhu & Miao

(2013), μπορεί να περιλαμβάνει, αφενός την ανάλυση ενός μεμονωμένου εγχειριδίου ή μιας σειράς σχολικών εγχειριδίων και αφετέρου την ανάλυση διαφορετικών σειρών εγχειριδίων της ίδιας χώρας και συχνότερα διαφορετικών χωρών, με σκοπό να διερευνηθούν ομοιότητες και διαφορές μεταξύ τους. Η δεύτερη περίπτωση ονομάζεται συγκριτική ανάλυση σχολικών εγχειριδίων (Fan, Zhu & Miao, 2013). Στην παρούσα εργασία το κάθε σχολικό εγχειρίδιο εξετάστηκε μεμονωμένα και στην συνέχεια εξετάστηκαν συγκριτικά τα αποτελέσματα και των τριών σχολικών εγχειριδίων.

Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο (1.7.1) η ανάλυση περιεχομένου αποτελεί «μια ερευνητική τεχνική για την εξαγωγή επαναλήψιμων και έγκυρων συμπερασμάτων από κείμενα (ή άλλο νοηματικό υλικό) στα πλαίσια της χρήσης τους» Krippendorff (2013, στο Rezat Strässer, 2015). Η ανάλυση περιεχομένου χρησιμοποιείται παραδοσιακά στην «εξέταση έντυπων κειμένων, εγγράφων και στοιχείων των μέσων μαζικής ενημέρωσης» (Bryman, 2008, στο Kongelf, 2012) και είναι «μια ερευνητική τεχνική για την αντικειμενική, συστηματική και ποσοτική περιγραφή του πρόδηλου περιεχομένου της επικοινωνίας» (Bryman, 2008, στο Kongelf, 2012). Η αντικειμενικότητα εξασφαλίζεται με την ύπαρξη προκαθορισμένων κανόνων, που ορίζουν τον διαχωρισμό τον ακατέργαστων δεδομένων σε κατηγορίες και η συστηματικότητα συνεπάγεται τη συνέπεια στην εφαρμογή των κανόνων. Και οι δύο αυτοί παράγοντες έχουν στόχο να περιορίσουν τις προσωπικές προκαταλήψεις των εκάστοτε ερευνητών. Η τήρηση αυτών των δύο παραμέτρων, σημαίνει πως εξετάζοντας οποιοσδήποτε τα ίδια δεδομένα, εφαρμόζοντας τους ίδιους κανόνες, θα καταλήξει στα ίδια συμπεράσματα (Kongelf, 2012).

Η μέθοδος αυτή θεωρείται κατάλληλη για την ανάλυση εγχειριδίων αλλά όπως κάθε ερευνητική μέθοδος, έχει πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Ως προς τα πλεονεκτήματα, ο Kongelf (2012) υπογραμμίζει την αντικειμενικότητα και την διαφάνεια της μεθόδου, ενώ στα μειονεκτήματα αναφέρει την ανάγκη να ελέγχονται τα εγχειρίδια που αναλύονται, ως προς την αυθεντικότητα, την αξιοπιστία και την αντιπροσωπευτικότητα τους. Η κωδικοποίηση των δεδομένων, καθώς και η λεπτομερής περιγραφή του δείγματος της έρευνας, εξασφαλίζουν την διαφάνεια και την αντικειμενικότητα της μεθόδου. Τα σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιούνται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση της Ελλάδας, εκδίδονται και διανέμονται στα σχολεία της χώρας από το Ι.Τ.Υ.Ε. ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ, οπότε δεν τίθεται υπό διαπραγμάτευση η αυθεντικότητα και η αξιοπιστία τους όπως και η αντιπροσωπευτικότητα τους, αφού αποτελούν τα μόνα εγκεκριμένα σχολικά εγχειρίδια.

Μια ανάλυση περιεχομένου μπορεί να είναι ποσοτική ή ποιοτική. Στην πρώτη περίπτωση γίνεται συστηματική αριθμητική καταμέτρηση προκαθορισμένων δεδομένων, η οποία ακολουθείται από στατιστική ανάλυση, ενώ η ποιοτική ανάλυση ορίζεται «ως μια προσέγγιση εμπειρικής, μεθοδολογικά ελεγχόμενης ανάλυσης κειμένων στο πλαίσιο της επικοινωνίας τους, ακολουθώντας κανόνες ανάλυσης περιεχομένου και μοντέλα βήμα προς βήμα, χωρίς βιαστική ποσοτικοποίηση» (Rezat Strässer, 2015). Η παρούσα εργασία αποτελεί μια ποιοτική ανάλυση περιεχομένου.

2.5 Συλλογή δεδομένων

Η συλλογή δεδομένων πραγματοποιήθηκε σε όλα τα κεφάλαια των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών των τριών τελευταίων τάξεων (Δ', Ε΄,ΣΤ') του Δημοτικού, στα οποία αναλύθηκαν όλες οι ερωτήσεις, οι ασκήσεις και τα προβλήματα, τα οποία θα αποκαλούνται στην παρούσα εργασία «έργα». Αναλύθηκαν όλα τα έργα που περιέχονται στο «Βιβλίο του μαθητή» των τάξεων αυτών σε όλα τα κεφάλαια και ξεχωριστά κατηγοριοποιήθηκαν τα έργα στα επαναληπτικά κεφάλαια αυτών. Τα έργα εξετάστηκαν και ως προς τους τύπους των προβλημάτων που αντιπροσωπεύουν και ως προς τις ευρετικές και τις στρατηγικές επίλυσης που προωθούν.

Ως μονάδα ανάλυσης της παρούσας έρευνας θεωρείται κάθε έργο με τα υποερωτήματά του, που βρίσκεται στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών των τριών τελευταίων τάξεων του Δημοτικού.

Συγκεκριμένα καταμετρήθηκαν και αναλύθηκαν σε κάθε σχολικό εγχειρίδιο τα εξής κεφάλαια:

ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ
Μαθηματικά Δ' Δημοτικού (Βιβλίο Μαθητή)	56
Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού (επαναληπτικά κεφάλαια)	9
Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού (Βιβλίο Μαθητή α'& β' τεύχος)	52
Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού (επαναληπτικά κεφάλαια)	8

Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού (Βιβλίο Μαθητή)	71
Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού (επαναληπτικά κεφάλαια)	6
Σύνολο:	202

Προκειμένου να γίνει η καταγραφή των έργων που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών των τριών τελευταίων τάξεων, ως προς τους τύπους των προβλημάτων που χρησιμοποιούνται σε αυτά, τις γενικές στρατηγικές και τις ευρετικές, εξετάστηκε διεξοδικά κάθε σχολικό εγχειρίδιο ξεχωριστά.

2.6. Πλαίσιο ανάλυσης δεδομένων

Για την διεξαγωγή της ανάλυσης περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων των τριών τελευταίων τάξεων του Δημοτικού, διαμορφώθηκε ένα πλαίσιο ανάλυσης, με βάση το οποίο έγινε η κωδικοποίηση των δεδομένων, ώστε να εξασφαλιστεί η αντικειμενικότητα και η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων.

Για την διερεύνηση του πρώτου ερωτήματος, «Ποιοι τύποι προβλημάτων υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ', Ε' και ΣΤ΄ Δημοτικού, με βάση την κατηγοριοποίηση των προβλημάτων που προτείνουν οι Zhu & Fan (2006);» χρησιμοποιήθηκε το πλαίσιο ανάλυσης, σχετικά με τους τύπους των προβλημάτων που προτείνουν οι Zhu & Fan (2006) για την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων. Σχετικά με τον ορισμό του προβλήματος, για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας και καθώς πρόκειται για ανάλυση σχολικών εγχειριδίων, θεωρήθηκε κατάλληλος ο ορισμός του προβλήματος, ως κάθε κατάσταση που επιζητά μια απάντηση/απόφαση, ασχέτως της δυσκολίας που προκαλεί στο δυνητικό λύτη. Σύμφωνα με τα παραπάνω, τα έργα που συμπεριλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια μπορούν να κατηγοριοποιηθούν με βάση τις εξής επτά κατηγορίες:

1. Προβλήματα ρουτίνας-μη ρουτίνας (Routine problems versus non routine problems)
2. Παραδοσιακά-μη παραδοσιακά προβλήματα (Traditional problems versus non-traditional problems)
3. Ανοικτά -κλειστά προβλήματα (Open-ended problems versus close ended problems)

4. Προβλήματα εφαρμογής- μη εφαρμογής (Application problems versus non-application)
5. Προβλήματα ενός βήματος- πολλαπλών βημάτων (Single step problems, multiple step problems)
6. Προβλήματα με επαρκή δεδομένα-ανεπαρκή δεδομένα πλεονάζοντα δεδομένα (Sufficient data problems, insufficient data problems and extraneous data problems)
7. Προβλήματα με καθαρή μαθηματική μορφή- λεκτική μορφή- οπτική μορφή- συνδυαστική μορφή (Problems in a pure mathematical form, problems in verbal form, problems in visual form and problems in a combined form)

Από αυτές τις κατηγορίες κρίθηκε, πως θα ήταν ωφέλιμο να διερευνηθούν τα έργα που συναντώνται στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών των τριών τελευταίων τάξεων του Δημοτικού, ως προς τις τρεις από τις επτά κατηγορίες, καθώς αυτές οι κατηγορίες ανταποκρίνονται στις αξιώσεις που έχει το ελληνικό Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών, για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Στο Δ.Ε.Π.Π.Σ. (1997), των Μαθηματικών, οι γενικοί στόχοι για τον άξονα γνωστικού περιεχομένου «επίλυση προβλήματος» σε όλες τις τάξεις του Δημοτικού είναι οι μαθητές να: «εξερευνούν μία κατάσταση, κατασκευάζουν ερωτήσεις και προβλήματα με βάση συγκεκριμένα δεδομένα, διατυπώνουν διαφορετικά το ίδιο πρόβλημα, αναγνωρίζουν και περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις, ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις, χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή και εξοικειώνονται με τις νέες τεχνολογίες.» (σελ.250).

Λαμβάνοντας υπόψη την βιβλιογραφία και τις αναφορές του Δ.Ε.Π.Π.Σ. (1997), οι τρεις κατηγορίες που επιλέχθηκαν είναι:

1. <u>Παραδοσιακά-μη παραδοσιακά προβλήματα</u> (Traditional versus non- traditional).
   Στην κατηγορία παραδοσιακά προβλήματα όπως αναφέρθηκε στο θεωρητικό πλαίσιο, ανήκουν όλοι οι τύποι προβλημάτων που δεν ανήκουν στις τέσσερις κατηγορίες που συμπεριλαμβάνονται στα μη παραδοσιακά προβλήματα, δηλαδή τα προβλήματα έργου (project), τα προβλήματα γρίφων (puzzle problems), τα ημερολόγια (Journal task) και η κατασκευή προβλήματος (problem- posing problems). Η κατηγορία αυτή κρίνεται σημαντική γιατί χωρίζει τα προβλήματα σε δύο μεγάλες ομάδες. Ως μη παραδοσιακά προβλήματα ταξινομούνται προβλήματα που θεωρούνται ανοιχτά. Η σημασία της χρήσης των ανοιχτών προβλημάτων στην διδασκαλία των μαθηματικών έχει διαπιστωθεί από τους ερευνητές και επισημαίνεται και στο Δ.Ε.Π.Π.Σ. του 1997. Τα

ανοιχτά προβλήματα καλλιεργούν ανώτερες δεξιότητες και γι’ αυτό κρίνεται χρήσιμο να διερευνηθεί η αναλογία της χρήσης στου στα σχολικά εγχειρίδια, σε σχέση με τα παραδοσιακά προβλήματα.

2. Προβλήματα εφαρμογής-μη εφαρμογής (Application versus non- application).
   Ως προβλήματα εφαρμογής, σε αυτήν την εργασία θα καλούνται όλα τα προβλήματα που σχετίζονται με οποιονδήποτε τρόπο με μία κατάσταση της καθημερινής ζωής και τον πραγματικό κόσμο, υπόκεινται δηλαδή σε ένα πλαίσιο. Ως μη εφαρμογής, θα χαρακτηρίζονται τα προβλήματα που δεν σχετίζονται με την πραγματική ζωή αλλά με τον καθαρά μαθηματικό κόσμο. Η χρήση των προβλημάτων εφαρμογής έχει στόχο να προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών, ώστε να ασχοληθούν με τα μαθηματικά αλλά και να συνειδητοποιήσουν την χρησιμότητα τους στην πραγματική τους ζωή. Η χρήση τέτοιων προβλημάτων υποστηρίζεται και από την βιβλιογραφία και από τα προγράμματα σπουδών των περισσοτέρων χωρών.

3. Προβλήματα σε μαθηματική- λεκτική- οπτική-συνδυαστική μορφή (Problems in a pure mathematical form, problems in verbal form, problems in visual form and problems in a combined form).
   Η κατηγορία αυτή διαφέρει από τις προηγούμενες δύο, γιατί σχετίζεται με την μορφή στην οποία παρουσιάζονται τα δεδομένα του προβλήματος. Όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία, οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να αναγνωρίζουν και να αποκωδικοποιούν και οπτικά σύμβολα και μαθηματικά σύμβολα/εκφράσεις, εκτός από τον γλωσσικό κώδικα. Η εξοικείωση των μαθητών με αυτούς τους κώδικες αποτελεί μέρος της μαθηματικής τους γνώσης. Επίσης, η δυνατότητα ή μη επίλυσης ενός προβλήματος ξεκινά από τη δυνατότητα ανάγνωσης και κατανόησης της εκφώνησης του. Εάν ο λύτης δεν γνωρίζει τον γλωσσικό/ οπτικό/ μαθηματικό κώδικα στον οποίο εκφωνείται το πρόβλημα, δεν θα είναι ικανός να προχωρήσει στην κατανόηση του, τον εντοπισμό του ζητούμενου και κατ’ επέκταση στην επίλυση του.

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει πως κατηγοριοποιούνται τα προβλήματα και επεξηγεί ποια είδη προβλημάτων περιλαμβάνει η κάθε κατηγορία, ώστε να συλλεχθούν τα δεδομένα για το πρώτο ερευνητικό ερώτημα.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ	ΕΙΔΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ
ΜΗ ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΑ	Προβλήματα γρίφων (Puzzle problems) Προβλήματα έργου (Project) Προβλήματα ημερολογίου (Journal task) Κατασκευή προβλήματος (Problem -posing problem)
ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΑ	Ότι δεν περιλαμβάνεται στα μη παραδοσιακά
ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ	Προβλήματα που σχετίζονται με την καθημερινή ζωή και τον πραγματικό κόσμο
ΜΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ	Προβλήματα που δεν περικλείονται από κάποιο πλαίσιο/ μαθηματικά προβλήματα
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	Η εκφώνηση του προβλήματος περιλαμβάνει μόνο μαθηματικά σύμβολα/ εκφράσεις ή αναφέρεται μόνο σε μαθηματικά αντικείμενα (π.χ. πράξεις)
ΛΕΚΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	Η εκφώνηση του προβλήματος περιλαμβάνει λέξεις
ΟΠΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	Η εκφώνηση του προβλήματος γίνεται μόνο με οπτικά μέσα (γραφήματα, πίνακες, χάρτες, εικόνες, διαγράμματα)
ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	Όταν η εκφώνηση συνδυάζει τουλάχιστον δύο από τους παραπάνω τρόπους

Πίνακας 1. Περιγραφή των τύπων των προβλημάτων

Κάθε πρόβλημα, εξετάστηκε σε σχέση με καθεμία από τις τρεις ταξινομήσεις και κωδικοποιήθηκε σε μία κατηγορία από το κάθε είδος. Ενδεικτικά παρουσιάζονται παρακάτω προβλήματα από την κάθε κατηγορία, που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια της Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού.

Παράδειγμα 1 : Παραδοσιακό πρόβλημα, εφαρμογής, σε συνδυαστική μορφή

Εικόνα 1 :Βιβλίο μαθητή Δ' τάξη, κεφάλαιο 18, σελ.46

Παράδειγμα 2: Μη παραδοσιακό πρόβλημα, εφαρμογής, συνδυαστική μορφή

Εικόνα 2. Βιβλίο μαθητή, Δ' τάξη, Κεφάλαιο 46, σελ.114

Παράδειγμα 3: <u>Εφαρμογής,</u> παραδοσιακό, λεκτική μορφή

Δραστηριότητα 1η

Σε ένα κουτί με μπισκότα αναγράφεται:
«35 μπισκότα, σε χωριστές αεροστεγείς συσκευασίες»

- Πόσες ίδιες χωριστές συσκευασίες νομίζεις ότι έχει το κουτί;
  ....
- Πόσα μπισκότα έχει κάθε χωριστή συσκευασία;
  ....
- Υπάρχουν άλλες περιπτώσεις; ....
  ....

Εικόνα 3. Βιβλίο μαθητή, ΣΤ΄ τάξη, Κεφάλαιο 12, σελ. 31

Παράδειγμα 4: <u>Μη εφαρμογής</u>, παραδοσιακό, μαθηματική μορφή

Δραστηριότητα 1η

Συμπλήρωσε τα γινόμενα στον παρακάτω πίνακα:

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3											
4											
6											

- Τι είναι για το 3 οι αριθμοί στη γραμμή του; ....
- Υπάρχουν κοινοί αριθμοί στις τρεις γραμμές; .... Αν ναι, κύκλωσέ τους.
- Τι είναι οι αριθμοί που κύκλωσες για το 3, το 4 και το 6;
  ....
- Ποιος είναι ο μικρότερος; ....

Δραστηριότητα 2η

Εικόνα 4. Βιβλίο μαθητή, ΣΤ΄τάξη, Κεφάλαιο 16, σελ. 39

Παράδειγμα 5: Παραδοσιακό πρόβλημα, μη εφαρμογής, <u>μαθηματική μορφή</u>

2. Χρησιμοποιούμε την αριθμομηχανή τσέπης, για να υπολογίσουμε τα γινόμενα:

α. 2,85 x **10** = ... β. 2,85 x **100** = ... γ. 2,85 x **1.000** = ...

δ. 2,85 x **0,1** = ... ε. 2,85 x **0,01** = ... στ. 2,85 x **0,001** = ...

Εικόνα 5. Βιβλίο μαθητή, Ε΄ τάξη, β΄ τεύχος, Κεφάλαιο 29, σελ. 17

Παράδειγμα 6: Παραδοσιακό, εφαρμογής, <u>λεκτική μορφή</u>

2) Μια μεγάλη καλλιεργήσιμη έκταση στο θεσσαλικό κάμπο έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου και περίμετρο 4.492 μ. Η μία του διάσταση έχει μήκος 1.496 μ. Πόσο μήκος έχει η άλλη του διάσταση; Φτιάχνω ένα πρόχειρο σχεδιάγραμμα για να με βοηθήσει στην επίλυση του προβλήματος.

Εικόνα 6: Βιβλίο μαθητή Δ' τάξη, Κεφάλαιο 38, σελ. 95

Παράδειγμα 7 : Παραδοσιακό πρόβλημα, εφαρμογής, <u>συνδυαστική μορφή</u>

Δραστηριότητα 2η *«Οι αποστάσεις στις Κυκλάδες»*

ΟΙ ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ (ΣΕ ΜΙΛΙΑ) ΤΩΝ ΓΥΡΩ ΝΗΣΙΩΝ ΑΠΟ ΤΟ ΛΙΜΑΝΙ ΤΗΣ ΣΥΡΟΥ								
Πάρος	Νάξος	Κύθνος	Τήνος	Μύκονος	Σίφνος	Σέριφος	Κέα	Άνδρος
25,2	30,3	40,5	12,2	19,1	41,3	37,5	33,8	51,2

Ενώ στον χάρτη η Σύρος φαίνεται να βρίσκεται στο κέντρο των νησιών, οι αποστάσεις ανάμεσα στα λιμάνια διαφέρουν, όπως φαίνεται και στον πίνακα.

- Ποιο είναι το πιο μακρινό και ποιο το πιο κοντινό νησί, σύμφωνα με τα στοιχεία του πίνακα; ....
- Η Σέριφος ή η Κύθνος φαίνεται να είναι πιο κοντά στη Σύρο στον χάρτη;
- Αφού εξετάσετε τα στοιχεία του πίνακα, απαντήστε στο ίδιο ερώτημα.
- Διατάξτε τα λιμάνια από το κοντινότερο προς το πιο μακρινό:

....

....

Εικόνα 7. Βιβλίο μαθητή, ΣΤ' τάξη, Κεφάλαιο 4, σελ. 15

Παράδειγμα 8: Παραδοσιακό πρόβλημα, εφαρμογής, <u>οπτική μορφή</u>

Εικόνα 8. Βιβλίο μαθητή, β' τεύχος, Ε΄ τάξη, Κεφάλαιο 31, σελ. 21

Για να απαντηθούν τα επόμενα δύο ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας αυτής, διαμορφώθηκαν τα κατάλληλα πλαίσια ανάλυσης.

Πιο συγκεκριμένα για το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο των τεσσάρων σταδίων επίλυσης προβλήματος του Pólya, που θα ονομάζουμε σε αυτή την εργασία γενικές στρατηγικές και χρησιμοποιείται συχνότερα στη διδασκαλία των μαθηματικών, σε σχέση με άλλα μοντέλα, όπως για παράδειγμα στις ΗΠΑ και την Σιγκαπούρη (Fan & Zhu, 2007). Αν και δεν γίνεται ρητή αναφορά των τεσσάρων σταδίων του Pólya στα ελληνικά Δ.Ε.Π.Π.Σ. και Α.Π.Σ., στα σχολικά εγχειρίδια τα στάδια αυτά εντοπίζονται αναλυτικά, κυρίως στα κεφάλαια όπου διδάσκεται η επίλυση προβλήματος. Τα στάδια αυτά όπως αναφέρονται στο βιβλίο του Pólya «How to solve it» περιγράφονται στον παρακάτω πίνακα.

ΣΤΑΔΙΑ POLYA	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΤΑΔΙΩΝ
Κατανόηση του προβλήματος	Εντοπισμός τον δεδομένων και των ζητουμένων του προβλήματος, αφομοίωση του προβλήματος. Επαναδιατύπωση του προβλήματος αν είναι απαραίτητο.
	Κατάρτιση ενός γενικού σχεδίου και επιλογή των σχετικών ευρετικών μεθόδων

Επινόηση ενός σχεδίου	που θα μπορούσαν να είναι χρήσιμες για την επίλυση του προβλήματος.
Εκτέλεση του σχεδίου	Εκτέλεση του σχεδίου που εκπονήθηκε κατά το προηγούμενο στάδιο. Συστηματικός έλεγχος κάθε βήματος, ώστε να βρεθεί η σωστή λύση.
Ανασκόπηση λύσης	Έλεγχος της ορθότητας της λύσης, αναστοχασμός σχετικά με τις βασικές ιδέες και διαδικασίες επίλυσης του προβλήματος. Γενίκευση ή επέκταση των μεθόδων ή/και των αποτελεσμάτων.

Πίνακας 2. Κατάλογος και περιγραφή των σταδίων του Pólya

Εκτός από τα τις γενικές στρατηγικές ο Pólya προτείνει και την χρήση ευρετικών για την επίλυση προβλημάτων. Στο ελληνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών των μαθηματικών για την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, προτείνονται οι πρώτες έξι ευρετικές, που παρατίθενται στον πίνακα 3. Αυτές είναι: «σχεδιάζω έναν πίνακα, σχεδιάζω ένα διάγραμμα ή μια γραφική παράσταση, δοκιμάζω απλούστερους αριθμούς», «εργάζομαι με ειδικές περιπτώσεις», «βρίσκω ένα μοντέλο», «εκτιμώ και ελέγχω» και αναφέρονται ρητά στις «ενδεικτικές δραστηριότητες» κάθε τάξης, στη θεματική ενότητα «επίλυση προβλήματος» στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών των μαθηματικών (βλ. εικόνα 9).

Οι ευρετικές ένα (1) (σχεδιάζω ένα πίνακα) έως τέσσερα (4) (εργάζομαι με ειδικές περιπτώσεις) προτείνονται στην Δ΄ Δημοτικού, ενώ στην Ε' και στην ΣΤ΄ τάξη, προστίθενται οι ευρετικές (5)(βρίσκω ένα μοντέλο) και (6)(εκτιμώ και ελέγχω). Λόγω της γενικότητας της τέταρτης ευρετικής (εργάσου με ειδικές περιπτώσεις) και επειδή δεν δίνονται περαιτέρω εξηγήσεις ή παραδείγματα, κρίνεται σκόπιμο να μην χρησιμοποιηθεί στον κατάλογο των ευρετικών αυτής της έρευνας.

ΤΑΞΗ Δ΄

Στόχοι	Θεματικές Ενότητες (διατιθέμενος χρόνος)	Ενδεικτικές δραστηριότητες
Πριν από τους άξονες: 1. Αριθμοί και πράξεις 2. Μετρήσεις 3. Γεωμετρία, 4. Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων γίνονται επαναληπτικές δραστηριότητες και αυτο-αξιολόγηση, ώστε οι μαθητές: Να ενεργοποιούν, να εφαρμόζουν και να σταθεροποιούν τις ήδη αποκτημένες γνώσεις, για τη διατήρηση της συνέχειας και για την ομαλή μετάβαση στις νέες έννοιες. Να εργάζονται ατομικά ή ομαδικά χωρίς καθοδήγηση για μια στερεότυπη λύση. Να ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις σχετικές με τις έννοιες της τάξης αυτής. Να κάνουν δοκιμές και επαληθεύσεις	*Επίλυση προβλήματος* Επίλυση προβλημάτων *(18 ώρες)*	Αναγνώριση προβλημάτων παρόμοιων ή ανάλογων με ένα δοσμένο πρόβλημα. Έλεγχος των διαδικασιών επίλυσης προβλήματος. Σκέψη πάνω στις δικές τους στρατηγικές επίλυσης προβλήματος. Ευρετικές στρατηγικές επίλυσης προβλήματος, όπως: σχεδιάζω έναν πίνακα, ένα διάγραμμα ή μια γραφική παράσταση δοκιμάζω απλούστερους αριθμούς και εργάζομαι με ειδικές περιπτώσεις Ενδεικτικές διαθεματικές δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος αναφέρονται παρακάτω στον κάθε επιμέρους άξονα.

ΤΑΞΗ Ε΄

Στόχοι	Θεματικές Ενότητες (διατιθέμενος χρόνος)	Ενδεικτικές δραστηριότητες
Πριν από τους άξονες: 1. Αριθμοί και πράξεις 2. Μετρήσεις 3. Γεωμετρία, 4. Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων, γίνονται επαναληπτικές δραστηριότητες και αυτο- αξιολόγηση, ώστε οι μαθητές: Να ενεργοποιούν, να εφαρμόζουν και να σταθεροποιούν τις ήδη αποκτημένες γνώσεις, για τη διατήρηση της συνέχειας και για την ομαλή μετάβαση στις νέες έννοιες. Να εργάζονται ατομικά ή ομαδικά χωρίς καθοδήγηση για μια στερεότυπη λύση. Να ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις σχετικές με τις έννοιες της τάξης αυτής. Να κάνουν δοκιμές και επαληθεύσεις. Να ξεχωρίζουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος και να επιλέγουν τα αναγκαία δεδομένα για την	*Επίλυση προβλήματος* Επίλυση προβλημάτων *(26 ώρες)*	Αναγνώριση προβλημάτων παρόμοιων ή ανάλογων με ένα δοσμένο πρόβλημα. Έλεγχος των διαδικασιών επίλυσης προβλήματος. Σκέψη πάνω στις δικές τους στρατηγικές επίλυσης προβλήματος. Ευρετικές στρατηγικές επίλυσης προβλήματος, όπως: Σχεδιάζω έναν πίνακα, ένα διάγραμμα ή μια γραφική παράσταση Δοκιμάζω απλούστερους αριθμούς και εργάζομαι με ειδικές περιπτώσεις Βρίσκω ένα μοντέλο. Εκτιμώ και ελέγχω. Ενδεικτικές διαθεματικές δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος αναφέρονται παρακάτω στον κάθε επιμέρους άξονα.

ΤΑΞΗ ΣΤ΄

Στόχοι	Θεματικές Ενότητες (διατιθέμενος χρόνος)	Ενδεικτικές δραστηριότητες
Πριν από τους άξονες: 1. Αριθμοί και πράξεις 2. Μετρήσεις 3. Γεωμετρία, 4. Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων - Στατιστική 5. Λόγοι αναλογίες 6. Εξισώσεις, γίνονται επαναληπτικές δραστηριότητες και αυτο- αξιολόγηση, ώστε οι μαθητές: Να ενεργοποιούν, να εφαρμόζουν και να σταθεροποιούν τις ήδη αποκτημένες γνώσεις, για τη διατήρηση της συνέχειας	*Επίλυση προβλήματος* Επίλυση προβλημάτων *(24 ώρες)*	Αναγνώριση προβλημάτων παρόμοιων ή ανάλογων με ένα δοσμένο πρόβλημα. Έλεγχος των διαδικασιών επίλυσης προβλήματος. Σκέψη πάνω στις δικές τους στρατηγικές επίλυσης προβλήματος. Ευρετικές στρατηγικές επίλυσης προβλήματος, όπως:

και για την ομαλή μετάβαση στις νέες έννοιες. Να εργάζονται ατομικά ή ομαδικά χωρίς καθοδήγηση για μια στερεότυπη λύση. Να ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις σχετικές με τις έννοιες της τάξης αυτής. Να κάνουν δοκιμές και επαληθεύσεις. Να ξεχωρίζουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος και να επιλέγουν τα αναγκαία δεδομένα για την επίλυσή του. Να επιχειρηματολογούν ως προς την αλήθεια μιας λύσης. Να παρουσιάζουν στους συμμαθητές τους με σαφήνεια την απάντησή τους, η οποία περιλαμβάνει τη στρατηγική επίλυσης και το αποτέλεσμα. Να προβλέπουν την απάντηση του προβλήματος και διατυπώνουν υποθέσεις σχετικά με την ύπαρξη ή όχι μιας ή περισσότερων λύσεων. Να βρίσκουν ενδιάμεσα ερωτήματα που υποβοηθούν την πορεία προς τη λύση. Να θέτουν δικά τους ερωτήματα και παρόμοια προβλήματα.		Σχεδιάζω έναν πίνακα, ένα διάγραμμα ή μια γραφική παράσταση Δοκιμάζω απλούστερους αριθμούς και εργάζομαι με ειδικές περιπτώσεις. Βρίσκω ένα μοντέλο. Εκτιμώ και ελέγχω. Ενδεικτικές διαθεματικές δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος αναφέρονται παρακάτω στον κάθε επιμέρους άξονα. Εν

Εικόνα 9. Ευρετικές στο ελληνικό Α.Π.Σ., σελ.263-4,267-8,271-2

Με βάση και το θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας αυτής σχετικά με τις ευρετικές που παρουσιάζονται από το NCTM και τους Fan & Zhu (2007) και επειδή είναι εξίσου σημαντικό να εντοπιστεί και ποιες ευρετικές δεν χρησιμοποιούνται στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια, ο πίνακας 3 περιγράφει ποιες ευρετικές αναζητήθηκαν στα σχολικά εγχειρίδια με τα οποία ασχολείται η παρούσα έρευνα.

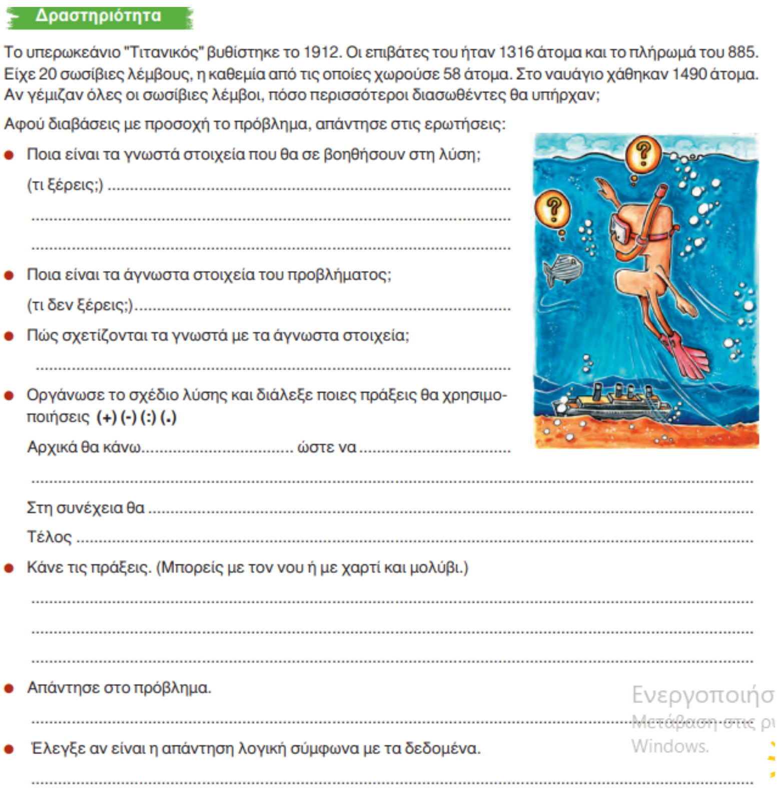
Ευρετικές	Περιγραφή
1.Σχεδιάζω ένα πίνακα	1.Δημιουργία ενός πίνακα για την οργάνωση των δεδομένων και μετέπειτα για την χρήση τους στην επίλυση
2.Σχεδιάζω ένα διάγραμμα ή μια γραφική παράσταση	2.Δημιουργία ενός διαγράμματος ή γραφικής παράστασης για την οπτική αναπαράσταση των δεδομένων
3.Δοκιμάζω με απλούστερους τρόπους	3.Αλλαγή των αριθμών με μικρότερους χωρίς να μεταβάλλεται το πρόβλημα
4.Βρίσκω ένα μοντέλο	4.Δημιουργία οπτικών αναπαραστάσεων (π.χ. αριθμογραμμές, εξίσωση, συμβολικές εκφράσεις κ.ά.) για την μοντελοποίηση των πληροφοριών σχετικά με τις ποσότητες ή τις σχέσεις που εμπλέκονται στο πρόβλημα
5.Εκτιμώ και ελέγχω	5.Διατύπωση μιας λογικής εικασίας για την απάντηση και έλεγχος του αποτελέσματος για να φανεί αν δουλεύει και επανάληψη μέχρι να βρεθεί η λύση
6.Βρίσκω ένα μοτίβο	6.Προσδιορισμός μοτίβων στα δεδομένα με την προσεκτική παρατήρηση σχημάτων, αριθμών κτλ. στο πρόβλημα
7.Εφαρμόζω με πραγματικά υλικά	7.Αναπαράσταση των δεδομένων με πραγματικά αντικείμενα ή ανθρώπους
8.Εργάζομαι με αντίστροφα βήματα	8.Προσέγγιση από τις λύσεις προς τα πίσω για να διερευνηθεί ποιες προϋποθέσεις πρέπει τελικά να πληρούν
9.Δημιουργώ μια οργανωμένη λίστα	9.Δημιουργία ενός καταλόγου με όλες τις πιθανές λύσεις για μια κατάσταση, ώστε να οδηγηθείς στη λύση

10.Αναδιατυπώνω το πρόβλημα	10.Επαναδιατύπωση του προβλήματος, ώστε η διατύπωση να γίνει οικεία και προσιτή
11.Σκέφτομαι ένα παρόμοιο πρόβλημα	11.Χρήση μεθόδων/αποτελεσμάτων ενός σχετικού προβλήματος ή ανάκληση ενός σχετικού προβλήματος που έχει επιλυθεί στο παρελθόν, προκειμένου να λυθεί το πρόβλημα

Πίνακας 3. Κατάλογος ευρετικών μεθόδων

Παρακάτω παρατίθενται ενδεικτικά παραδείγματα των γενικών στρατηγικών και των ευρετικών που χρησιμοποιούνται από τα σχολικά εγχειρίδια της Δ’ Ε’ και ΣΤ’ Δημοτικού.

Παράδειγμα 10: Τέσσερα στάδια


Δραστηριότητα

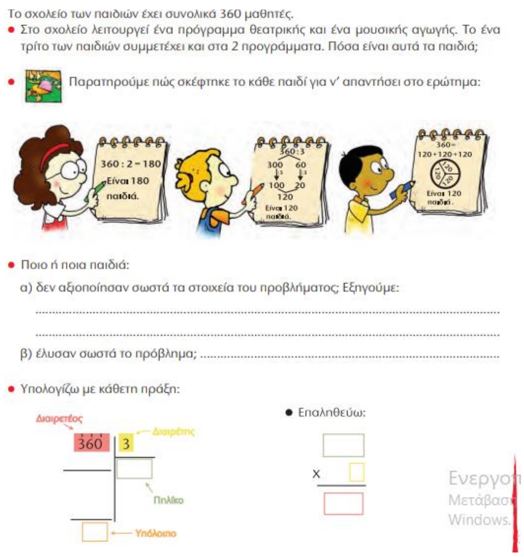
Το υπερωκεάνιο "Τιτανικός" βυθίστηκε το 1912. Οι επιβάτες του ήταν 1316 άτομα και το πλήρωμά του 885. Είχε 20 σωσίβιες λέμβους, η καθεμία από τις οποίες χωρούσε 58 άτομα. Στο ναυάγιο χάθηκαν 1490 άτομα. Αν γέμιζαν όλες οι σωσίβιες λέμβοι, πόσο περισσότεροι διασωθέντες θα υπήρχαν;

Αφού διαβάσεις με προσοχή το πρόβλημα, απάντησε στις ερωτήσεις:

- Ποια είναι τα γνωστά στοιχεία που θα σε βοηθήσουν στη λύση;
  (τι ξέρεις;) ....
- Ποια είναι τα άγνωστα στοιχεία του προβλήματος;
  (τι δεν ξέρεις;) ....
- Πώς σχετίζονται τα γνωστά με τα άγνωστα στοιχεία;
  ....
- Οργάνωσε το σχέδιο λύσης και διάλεξε ποιες πράξεις θα χρησιμοποιήσεις (+) (-) (:) (.)
  Αρχικά θα κάνω.................. ώστε να ....
  Στη συνέχεια θα ....
  Τέλος ....
- Κάνε τις πράξεις. (Μπορείς με τον νου ή με χαρτί και μολύβι.)
  ....
- Απάντησε στο πρόβλημα.
  ....
- Έλεγξε αν είναι η απάντηση λογική σύμφωνα με τα δεδομένα.
  ....

Εικόνα 10: Βιβλίο μαθητή, ΣΤ΄ τάξη, Κεφάλαιο 9, σελ. 25

Παράδειγμα 11: Δύο στάδια (εκτέλεση σχεδίου και ανασκόπηση λύσης)


Το σχολείο των παιδιών έχει συνολικά 360 μαθητές.

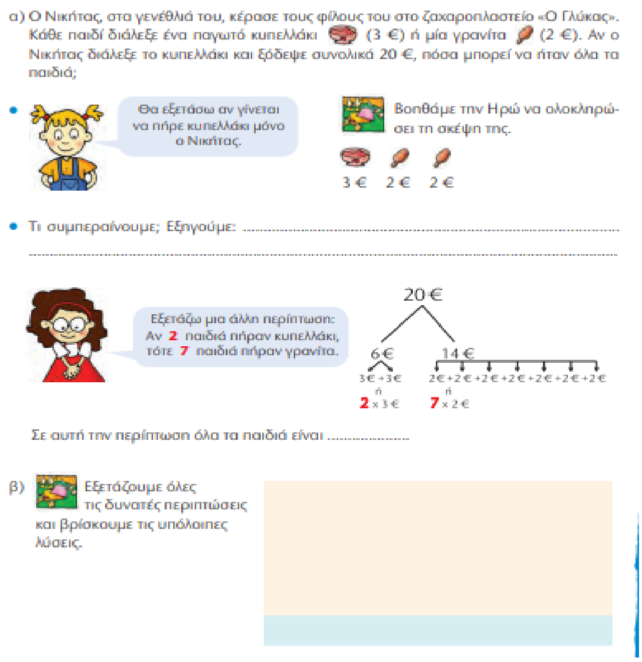
- Στο σχολείο λειτουργεί ένα πρόγραμμα θεατρικής και ένα μουσικής αγωγής. Το ένα τρίτο των παιδιών συμμετέχει και στα 2 προγράμματα. Πόσα είναι αυτά τα παιδιά;
- Παρατηρούμε πώς σκέφτηκε το κάθε παιδί για ν' απαντήσει στο ερώτημα:

- Ποιο ή ποια παιδιά:
  α) δεν αξιοποίησαν σωστά τα στοιχεία του προβλήματος; Εξηγούμε:
  ....
  ....
  β) έλυσαν σωστά το πρόβλημα; ....
- Υπολογίζω με κάθετη πράξη:

Εικόνα 11.Βιβλίο μαθητή, Δ' τάξη,Κεφαλαιο 12, σελ.32

Παράδειγμα 12: Ένα στάδιο (εκτέλεση σχεδίου)

Ευρετικές: Βρίσκω ένα μοντέλο και δημιουργώ μια οργανωμένη λίστα


α) Ο Νικήτας, στα γενέθλιά του, κέρασε τους φίλους του στο ζαχαροπλαστείο «Ο Γλύκας». Κάθε παιδί διάλεξε ένα παγωτό κυπελλάκι (3 €) ή μία γρανίτα (2 €). Αν ο Νικήτας διάλεξε το κυπελλάκι και ξόδεψε συνολικά 20 €, πόσα μπορεί να ήταν όλα τα παιδιά;

- Τι συμπεραίνουμε; Εξηγούμε: ....

Σε αυτή την περίπτωση όλα τα παιδιά είναι ....

β) Εξετάζουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις και βρίσκουμε τις υπόλοιπες λύσεις.

Εικόνα 12. Βιβλίο μαθητή, Δ' Τάξη, Κεφάλαιο 14, σελ.36

Παράδειγμα 13: Ένα στάδιο (κατανόηση)

Εργασία

Στο ζαχαροπλαστείο «Ο ΓΛΥΚΑΣ» έφτιαξαν 15 δωδεκάδες από σοκολατάκια φουντουκιού και τριπλάσια ποσότητα από σοκολατάκια αμυγδάλου. Στη συνέχεια τα συσκεύασαν ανάμεικτα σε 20 ακριβώς ίδια πακέτα.
Πόσα σοκολατάκια από κάθε είδος περιέχει το κάθε πακέτο;

- Διαβάζουμε προσεκτικά τις παρακάτω προτάσεις και σημειώνουμε **Σ** (σωστό) ή **Λ** (λάθος).
  - α) Στον «ΓΛΥΚΑ» έφτιαξαν 15 x 12 = 180 σοκολατάκια φουντουκιού. ☐
  - β) Στον «ΓΛΥΚΑ» έφτιαξαν 3 x 15 = 45 σοκολατάκια αμυγδάλου. ☐
  - γ) Για να λύσουμε το πρόβλημα πρέπει να υπολογίσουμε πόσα ήταν τα πακέτα. ☐
  - δ) Το ζητούμενο του προβλήματος είναι πόσα σοκολατάκια έχει κάθε πακέτο. ☐
- Αξιοποιούμε τα δεδομένα του παρακάτω προβλήματος, για να διατυπώσουμε τα απαραίτητα **ενδιάμεσα** ερωτήματα:

Στο ζαχαροπλαστείο «Ο ΓΛΥΚΑΣ» έφτιαξαν **15 δωδεκάδες από σοκολατάκια φουντουκιού** και **τριπλάσια ποσότητα από σοκολατάκια αμυγδάλου**. Στη συνέχεια τα συσκεύασαν ανάμεικτα σε **20 ακριβώς ίδια πακέτα**.
Πόσα σοκολατάκια από κάθε είδος περιείχε το κάθε πακέτο;

....
....

....
....

Τι συμπεραίνουμε από την πληροφορία ότι τα πακέτα ήταν ακριβώς ίδια;

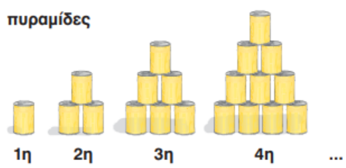
Εικόνα 13. Βιβλίο μαθητή, Δ΄ τάξη, Κεφάλαιο 14, σελ.37

Παράδειγμα 14: Ένα στάδιο (εκτέλεση)

Ευρετικές: βρίσκω ένα μοντέλο, φτιάχνω ένα πίνακα,

2. Ο Αντρέι και ο Νίκος βάζουν 28 τενεκεδάκια σε σειρές και φτιάχνουν πυραμίδες. Αν τοποθετούν τα τενεκεδάκια τους με τον τρόπο που δείχνει η διπλανή εικόνα, έχουν τόσα ακριβώς τενεκεδάκια, ώστε η πυραμίδα τους να έχει συνολικά 7 σειρές;

α. Παρατηρούμε την εικόνα και συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα.



Πυραμίδα	1η	2η	3η	4η	...	7η
Πλήθος σειρών	1	2	3		...	
Πλήθος από τενεκεδάκια	1	1+2	1+2+3		...	

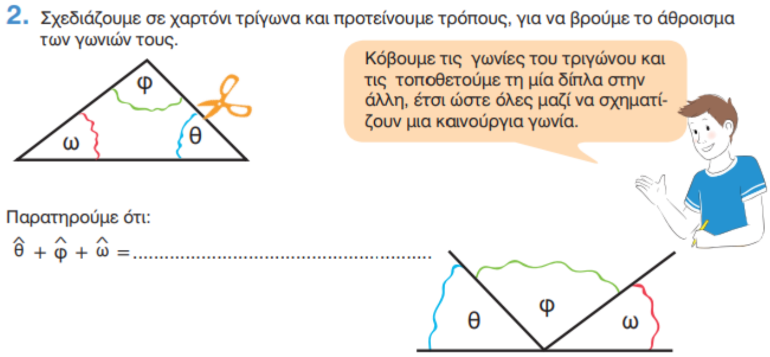
β. Πόσα τενεκεδάκια θα χρειαστούν ο Αντρέι και ο Νίκος, για να φτιάξουν:

5 σειρές:....... , 6 σειρές:......, 7 σειρές:........

Εικόνα 14. Βιβλίο μαθητή, Ε΄ τάξη, β’ τεύχος, Κεφάλαιο 34, σελ. 31

Παράδειγμα 15: Ένα στάδιο (εκτέλεση)

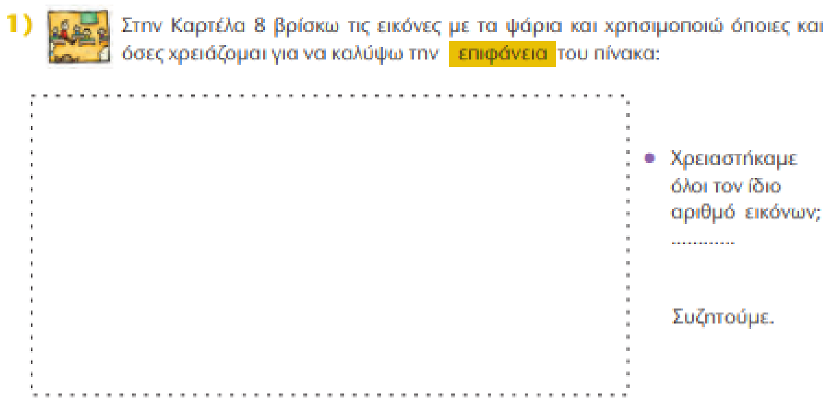
Ευρετική: εφαρμόζω με πραγματικά υλικά



Εικόνα 15. Βιβλίο μαθητή, Ε' τάξη, β' τεύχος, Κεφάλαιο 40, **σ**ελ.47

Παράδειγμα 16: Δύο στάδια (εκτέλεση και ανασκόπηση)

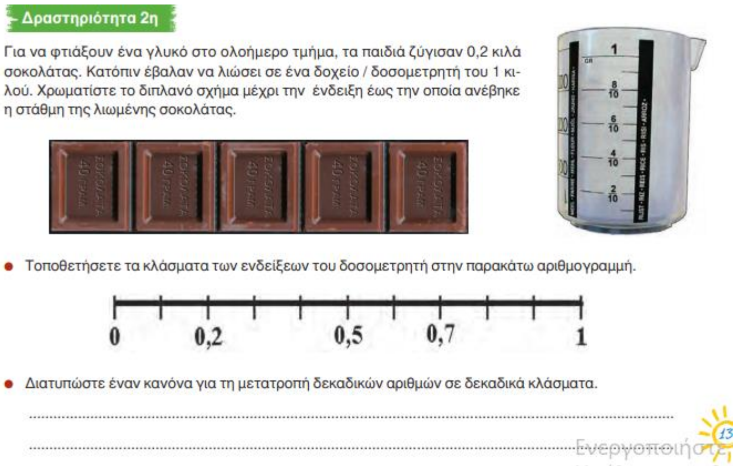
Ευρετική: εφαρμόζω με πραγματικά υλικά



Εικόνα 16. Βιβλίο μαθητή, Δ΄ τάξη, Κεφάλαιο 30, σελ. 77

Παράδειγμα 17: Δύο στάδια (εκτέλεση και ανασκόπηση)

Ευρετικές: Βρίσκω ένα μοντέλο


Δραστηριότητα 2η

Για να φτιάξουν ένα γλυκό στο ολοήμερο τμήμα, τα παιδιά ζύγισαν 0,2 κιλά σοκολάτας. Κατόπιν έβαλαν να λιώσει σε ένα δοχείο / δοσομετρητή του 1 κιλού. Χρωματίστε το διπλανό σχήμα μέχρι την ένδειξη έως την οποία ανέβηκε η στάθμη της λιωμένης σοκολάτας.

- Τοποθετήστε τα κλάσματα των ενδείξεων του δοσομετρητή στην παρακάτω αριθμογραμμή.

0 0,2 0,5 0,7 1

- Διατυπώστε έναν κανόνα για τη μετατροπή δεκαδικών αριθμών σε δεκαδικά κλάσματα.

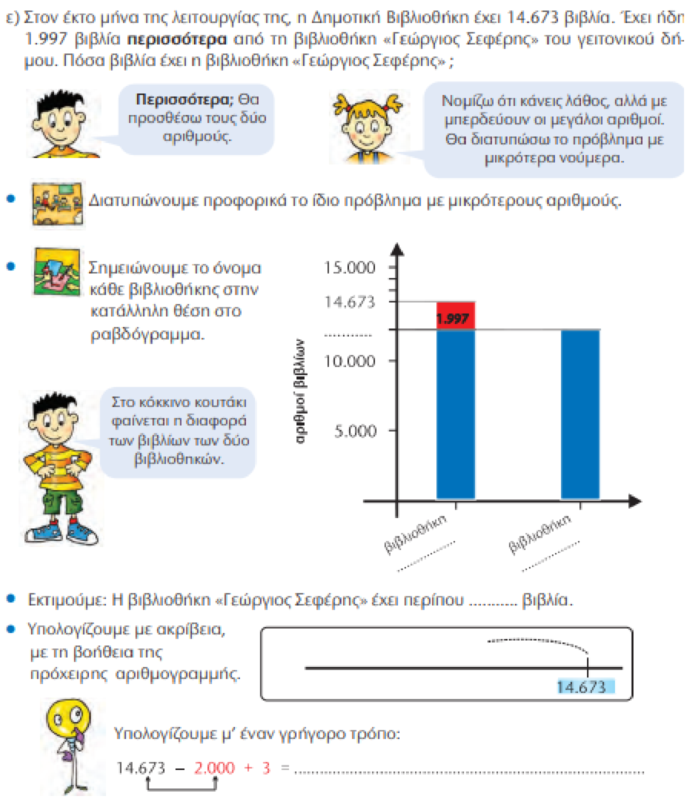
....

....

Εικόνα 17: Βιβλίο μαθητή, ΣΤ' τάξη, Κεφάλαιο 3, σελ.13

Παράδειγμα 18: Δύο στάδια (κατανόηση, εκτέλεση)

Ευρετικές: απλοποίηση προβλήματος, φτιάχνω ένα μοντέλο (αριθμογραμμη)


ε) Στον έκτο μήνα της λειτουργίας της, η Δημοτική Βιβλιοθήκη έχει 14.673 βιβλία. Έχει ήδη 1.997 βιβλία **περισσότερα** από τη βιβλιοθήκη «Γεώργιος Σεφέρης» του γειτονικού δήμου. Πόσα βιβλία έχει η βιβλιοθήκη «Γεώργιος Σεφέρης»;

- Διατυπώνουμε προφορικά το ίδιο πρόβλημα με μικρότερους αριθμούς.
- Σημειώνουμε το όνομα κάθε βιβλιοθήκης στην κατάλληλη θέση στο ραβδόγραμμα.

- Εκτιμούμε: Η βιβλιοθήκη «Γεώργιος Σεφέρης» έχει περίπου .... βιβλία.
- Υπολογίζουμε με ακρίβεια, με τη βοήθεια της πρόχειρης αριθμογραμμής.

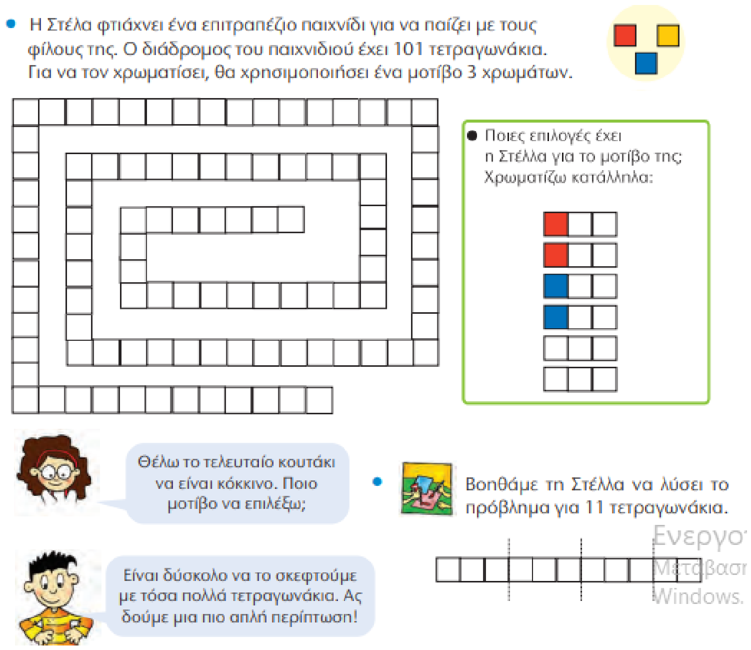
Υπολογίζουμε μ' έναν γρήγορο τρόπο:

14.673 − 2.000 + 3 = ...

Εικόνα 18. Βιβλίο μαθητή, Δ' τάξη, Κεφάλαιο 35, σελ. 89

Παραδειγμα 19: Δύο στάδια(κατανόηση, επινόηση ενός σχεδίου)

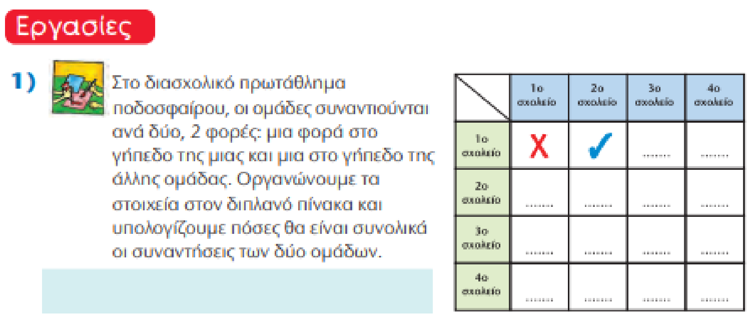
Ευρετικές: βρίσκω ένα μοτίβο, φτιάχνω μια συστηματικη λίστα, απλοποιώ το πρόβλημα



Εικόνα 19: Βιβλίο μαθητή, Δ' τάξη, κεφάλαιο 38, σελ.94

Παράδειγμα 20: Δύο στάδια (επινόηση ενός σχεδίου και εκτέλεση)

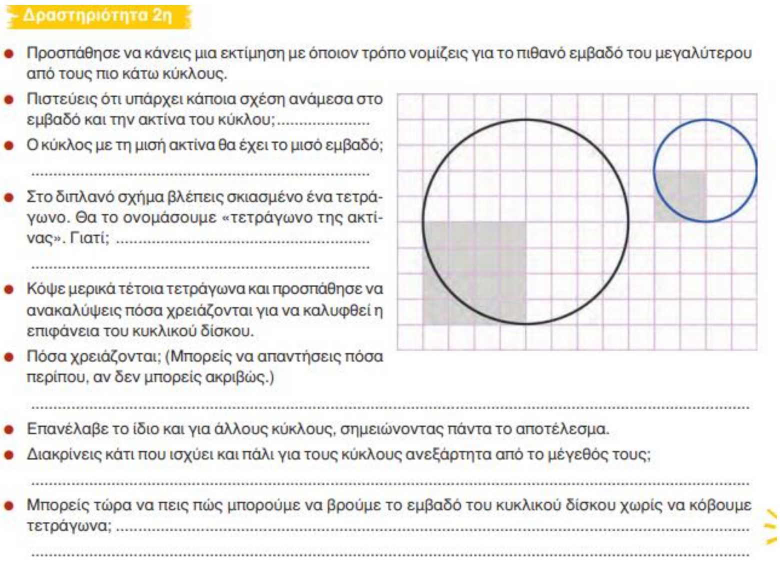
Ευρετική: Φτιάχνω ένα πίνακα



Εικόνα 20. Βιβλίο μαθητή, Δ' τάξη, Κεφάλαιο 38,σελ. 95

Παράδειγμα 21: Τρία στάδια (επινόηση ενός σχεδίου, εκτέλεση, ανασκόπηση)

Ευρετικές: εφαρμόζω με πραγματικά υλικά, εκτιμώ και ελέγχω



Δραστηριότητα 2η

- Προσπάθησε να κάνεις μια εκτίμηση με όποιον τρόπο νομίζεις για το πιθανό εμβαδό του μεγαλύτερου από τους πιο κάτω κύκλους.
- Πιστεύεις ότι υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στο εμβαδό και την ακτίνα του κύκλου; ....
- Ο κύκλος με τη μισή ακτίνα θα έχει το μισό εμβαδό;
....
- Στο διπλανό σχήμα βλέπεις σκιασμένο ένα τετράγωνο. Θα το ονομάσουμε «τετράγωνο της ακτίνας». Γιατί; ....
....
- Κόψε μερικά τέτοια τετράγωνα και προσπάθησε να ανακαλύψεις πόσα χρειάζονται για να καλυφθεί η επιφάνεια του κυκλικού δίσκου.
- Πόσα χρειάζονται; (Μπορείς να απαντήσεις πόσα περίπου, αν δεν μπορείς ακριβώς.)
....
- Επανέλαβε το ίδιο και για άλλους κύκλους, σημειώνοντας πάντα το αποτέλεσμα.
- Διακρίνεις κάτι που ισχύει και πάλι για τους κύκλους ανεξάρτητα από το μέγεθός τους;
....
- Μπορείς τώρα να πεις πώς μπορούμε να βρούμε το εμβαδό του κυκλικού δίσκου χωρίς να κόβουμε τετράγωνα; ....
....

Εικόνα 21. Βιβλίο μαθητή, ΣΤ΄ τάξη, Κεφάλαιο 65, σελ. 155

Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων στηρίζεται σε μεθόδους της περιγραφικής στατιστικής (διαγράμματα και πίνακες συχνοτήτων).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3:
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η έκθεση των αποτελεσμάτων της έρευνας. Αρχικά παρουσιάζονται τα δεδομένα για το σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ τάξης Δημοτικού, στη συνέχεια της Ε΄ τάξης και στο τέλος της ΣΤ' τάξης. Ακολούθως, παρουσιάζονται συγκριτικά τα αποτελέσματα με τη χρήση γραφημάτων και πινάκων, για την παραστατική απεικόνιση των αποτελεσμάτων. Για κάθε τάξη στην πρώτη ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τους τύπους των προβλημάτων που εντοπίστηκαν, στη συνέχεια τα αποτελέσματα για τα στάδια επίλυσης προβλήματος του Pólya και ακολούθως τα αποτελέσματα για τις ευρετικές. Στο τέλος, γίνεται σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων και των τριών σχολικών εγχειριδίων.

3.2 Σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ Δημοτικού, Βιβλίο Μαθητή:

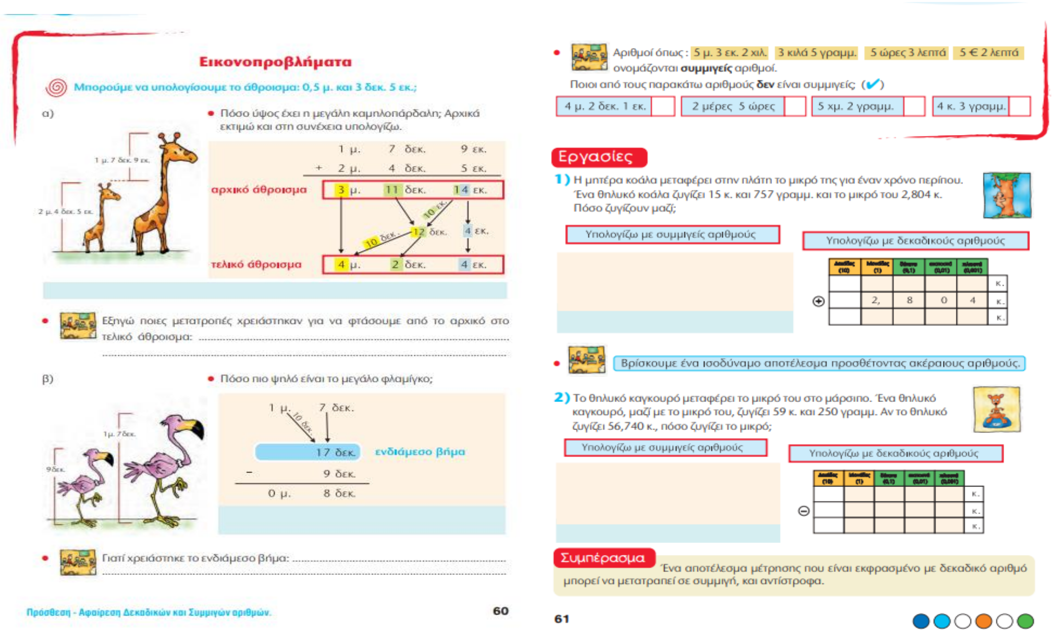
3.2.1 Δομή του σχολικού εγχειριδίου της Δ΄ τάξης

Το σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ τάξης Δημοτικού αποτελείται από ένα τεύχος, που περιέχει 56 κεφάλαια, τα οποία είναι χωρισμένα σε τρεις περιόδους διδασκαλίας και σε κάθε περίοδο υπάρχουν τρία επαναληπτικά κεφάλαια, δηλαδή στο σύνολο υπάρχουν εννέα επαναληπτικά κεφάλαια. Η δομή του βιβλίου επεξηγείται αναλυτικά στις δύο πρώτες σελίδες του σχολικού εγχειριδίου και ακολουθεί ο πίνακας περιεχομένων. Το κάθε κεφάλαιο αναπτύσσεται σε ένα δισέλιδο. Τα κεφάλαια διαρθρώνονται ως εξής: πρώτα τίθεται μια ερώτηση Αφόρμησης, ακολουθούν οι Δραστηριότητες Ανακάλυψης, έπειτα η/οι Εργασία/ες και η ενότητα ολοκληρώνεται με το Συμπέρασμα, δηλαδή το διδακτικό φαινόμενο που διδάσκεται.

Στο κάτω μέρος της σελίδας υπάρχουν έξι κύκλοι, όσοι και οι άξονες περιεχομένου και στο κάθε κεφάλαιο είναι χρωματισμένοι οι άξονες περιεχομένου, που περιλαμβάνονται σε αυτό. Οι άξονες περιεχομένου είναι έξι (6) και ο καθένας συμβολίζεται με ένα χρώμα:

1. οι αριθμοί (μωβ)
2. οι αριθμοί και πράξεις (γαλάζιο)
3. η γεωμετρία (μουσταρδί)
4. οι μετρήσεις (πορτοκαλί)
5. η στατιστική(κόκκινο)
6. και τα προβλήματα (πράσινο)

Σύμφωνα με αυτήν την σήμανση, που προσφέρεται από τους συγγραφείς, στα 49 από τα 56 κεφάλαια υπάρχει ενασχόληση με προβλήματα, δηλαδή τα προβλήματα χρησιμοποιούνται για την διδασκαλία μαθηματικών εννοιών. Ενώ, στον πίνακα περιεχομένων, το κάθε κεφάλαιο συμβολίζεται μ' έναν αριθμό, το χρώμα του οποίου συμβολίζει τον άξονα του περιεχομένου, στον οποίο αναφέρεται το κεφάλαιο. Σύμφωνα με τον διαχωρισμό αυτό, με τον άξονα «Προβλήματα», ασχολούνται 11 από τα 56 κεφάλαια, όπου τα προβλήματα αποτελούν το αντικείμενο διδασκαλίας. Στην Εικόνα 20, φαίνεται η δομή ενός μαθήματος, η οποία χρησιμοποιείται σε όλο το σχολικό εγχειρίδιο.



Εικόνα 22. Παράδειγμα της δομής ενός Κεφαλαίου, Βιβλίο Μαθητή, Δ' τάξη, σελ. 60-61

3.2.2 Τα προβλήματα στο Βιβλίο Μαθητή της Δ΄ τάξης Δημοτικού

Στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ τάξης καταμετρήθηκαν 58 έργα, που χαρακτηρίζονται από τους συγγραφείς ως Δραστηριότητες Ανακάλυψης, 116 έργα που χαρακτηρίζονται ως Εργασίες και 40 έργα στα Επαναληπτικά κεφάλαια. Συνολικά δηλαδή, καταμετρήθηκαν 214 έργα. Τα έργα που χρησιμοποιούνται είτε στις Δραστηριότητες Ανακάλυψης, είτε στις εργασίες και έχουν στόχο να διδάξουν κάποια μαθηματική έννοια, χρησιμοποιούν τα προβλήματα ως μέσο διδασκαλίας.

Όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα το μεγαλύτερο μέρος των προβλημάτων ταξινομήθηκαν ως Παραδοσιακά (92%), Εφαρμογής (64%), σε Συνδυαστική μορφή (66%).

ΕΡΓΑ/ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΒΙΒΛΙΟ ΜΑΘΗΤΗ Δ΄ΤΑΞΗ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΑΚΑΛΥΨΗΣ	ΕΡΓΑΣΙΕΣ	ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ	ΣΥΝΟΛΟ
ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΑ	52	109	35	196
ΜΗ ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΑ	6	7	5	18
ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ	49	63	26	138
ΜΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ	9	53	14	76

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	0	11	5	16
ΛΕΚΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	3	23	13	39
ΟΠΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	5	12	0	17
ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	50	70	22	142
ΣΥΝΟΛΟ	58	116	40	214

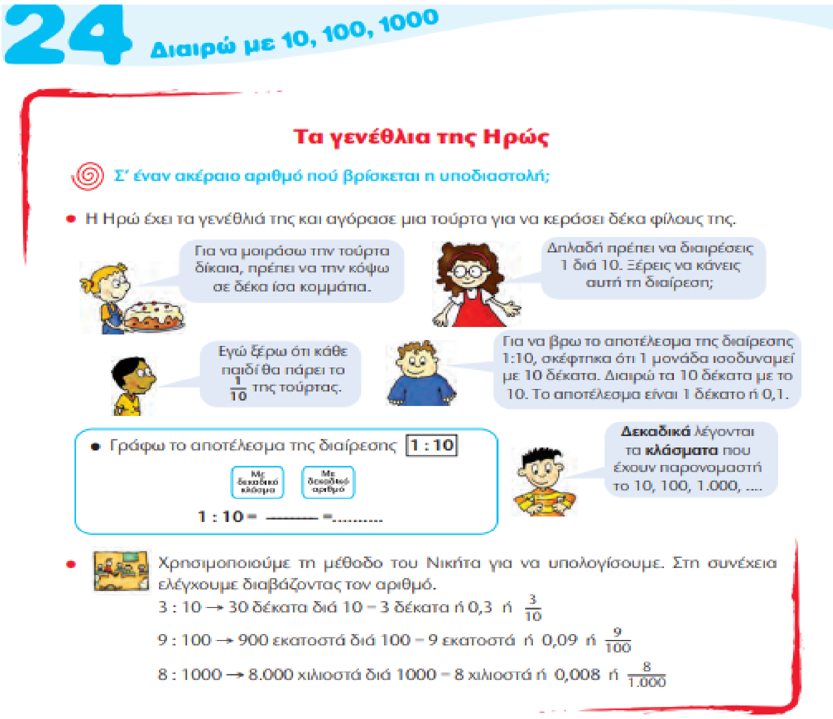
Πίνακας 4. Τύποι έργων/προβλημάτων, Βιβλίο Μαθητή, Δ΄ τάξη

3.2.3. Τύποι προβλημάτων

3.2.3.1.Παραδοσιακά- Μη Παραδοσιακά προβλήματα

Τα Παραδοσιακά προβλήματα κυριαρχούν στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ τάξης, καθώς καταμετρήθηκαν 196 Παραδοσιακά προβλήματα (92%) και 18 Μη Παραδοσιακά προβλήματα (8%), στο Βιβλίο Μαθητή (βλέπε, Γράφημα 1). Στα Μη Παραδοσιακά εντοπίστηκαν, δώδεκα (12) προβλήματα Κατασκευής Προβλημάτων (Problem Posing), δύο (2) Προβλήματα Έργου (Project) και τρία (3) Προβλήματα Γρίφοι (Puzzle) και ένα (1) Πρόβλημα Ημερολογίου (Journal Problem), όπως φαίνεται στον Γράφημα 1. Αν και υπάρχουν έργα που παρουσιάζουν Προβλήματα Έργου, καθώς δεν ζητάνε από τα παιδιά να διεξάγουν τα ίδια μια έρευνα, δεν καταμετρήθηκαν ως Μη Παραδοσιακά.

Γράφημα 1. Παραδοσιακά- Μη παραδοσιακά προβλήματα, Βιβλίο Μαθητή, Δ' τάξη



24 Διαιρώ με 10, 100, 1000

Τα γενέθλια της Ηρώς

Σ' έναν ακέραιο αριθμό πού βρίσκεται η υποδιαστολή;

- Η Ηρώ έχει τα γενέθλιά της και αγόρασε μια τούρτα για να κεράσει δέκα φίλους της.

- Γράφω το αποτέλεσμα της διαίρεσης $\boxed{1:10}$

Με δεκαδικό κλάσμα | Με δεκαδικό αριθμό

1 : 10 = ——— =..........

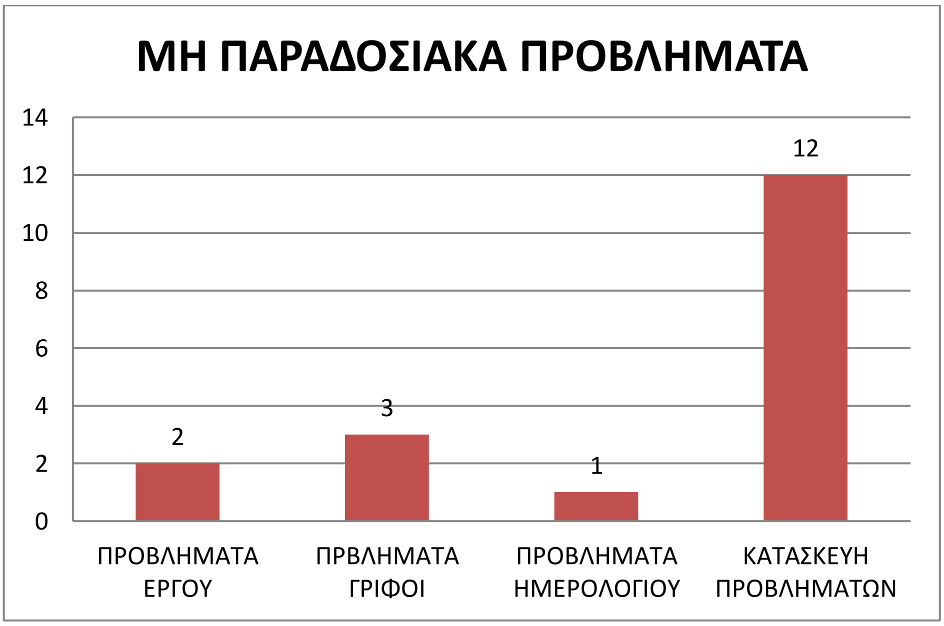
- Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του Νικήτα για να υπολογίσουμε. Στη συνέχεια ελέγχουμε διαβάζοντας τον αριθμό.

3 : 10 → 30 δέκατα διά 10 = 3 δέκατα ή 0,3 ή $\frac{3}{10}$

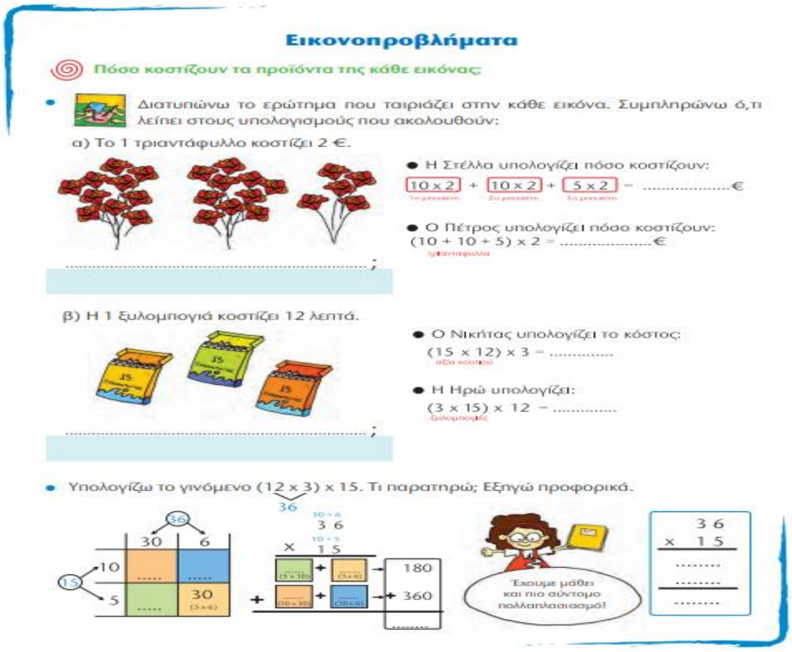
9 : 100 → 900 εκατοστά διά 100 = 9 εκατοστά ή 0,09 ή $\frac{9}{100}$

8 : 1000 → 8.000 χιλιοστά διά 1000 = 8 χιλιοστά ή 0,008 ή $\frac{8}{1.000}$

Εικόνα 23. Παράδειγμα Παραδοσιακού προβλήματος, Βιβλίο Μαθητή, Δ' τάξη, σελ.62



Γράφημα 2. Μη παραδοσιακά προβλήματα, Βιβλίο Μαθητή, Δ΄ τάξη



Εικονοπροβλήματα

Πόσο κοστίζουν τα προϊόντα της κάθε εικόνας;

- Διατυπώνω το ερώτημα που ταιριάζει στην κάθε εικόνα. Συμπληρώνω ό,τι λείπει στους υπολογισμούς που ακολουθούν:

α) Το 1 τριαντάφυλλο κοστίζει 2 €.

....;

- Η Στέλλα υπολογίζει πόσο κοστίζουν:
  $\boxed{10 \times 2} + \boxed{10 \times 2} + \boxed{5 \times 2} =$ ....€
- Ο Πέτρος υπολογίζει πόσο κοστίζουν:
  $(10 + 10 + 5) \times 2 =$ ....€

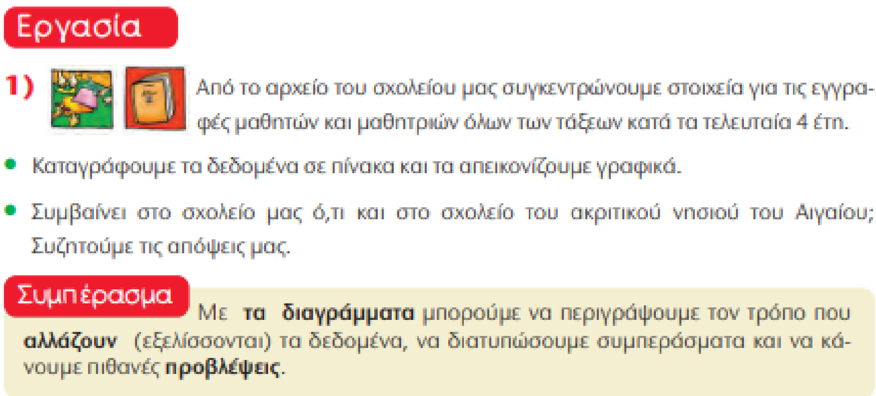
β) Η 1 ξυλομπογιά κοστίζει 12 λεπτά.

....;

- Ο Νικήτας υπολογίζει το κόστος:
  $(15 \times 12) \times 3 =$ ....
- Η Ηρώ υπολογίζει:
  $(3 \times 15) \times 12 =$ ....

- Υπολογίζω το γινόμενο $(\underbrace{12 \times 3}_{36}) \times 15$. Τι παρατηρώ; Εξηγώ προφορικά.

Εικόνα 24.Μη Παραδοσιακό πρόβλημα (Κατασκευή Προβλήματος), Βιβλίο Μαθητή, σελ.28



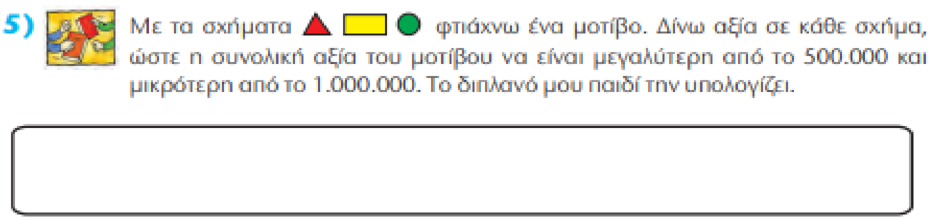
Εργασία

1) Από το αρχείο του σχολείου μας συγκεντρώνουμε στοιχεία για τις εγγραφές μαθητών και μαθητριών όλων των τάξεων κατά τα τελευταία 4 έτη.

- Καταγράφουμε τα δεδομένα σε πίνακα και τα απεικονίζουμε γραφικά.
- Συμβαίνει στο σχολείο μας ό,τι και στο σχολείο του ακριτικού νησιού του Αιγαίου; Συζητούμε τις απόψεις μας.

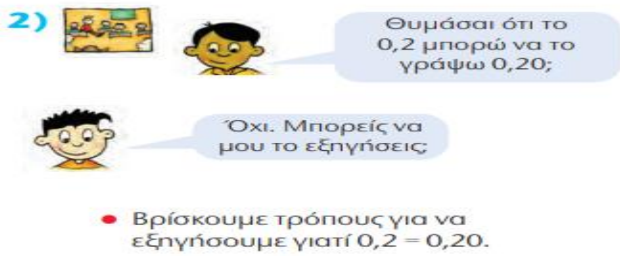
Συμπέρασμα Με **τα διαγράμματα** μπορούμε να περιγράψουμε τον τρόπο που **αλλάζουν** (εξελίσσονται) τα δεδομένα, να διατυπώσουμε συμπεράσματα και να κάνουμε πιθανές **προβλέψεις**.

Εικόνα 25. Μη Παραδοσιακό Έργο (Πρόβλημα Έργου), Βιβλίο Μαθητή, σελ. 139



5) Με τα σχήματα ▲ ▭ ● φτιάχνω ένα μοτίβο. Δίνω αξία σε κάθε σχήμα, ώστε η συνολική αξία του μοτίβου να είναι μεγαλύτερη από το 500.000 και μικρότερη από το 1.000.000. Το διπλανό μου παιδί την υπολογίζει.

Εικόνα 26.Μη Παραδοσιακό Έργο (Γρίφος), Βιβλίο Μαθητή, σελ. 129



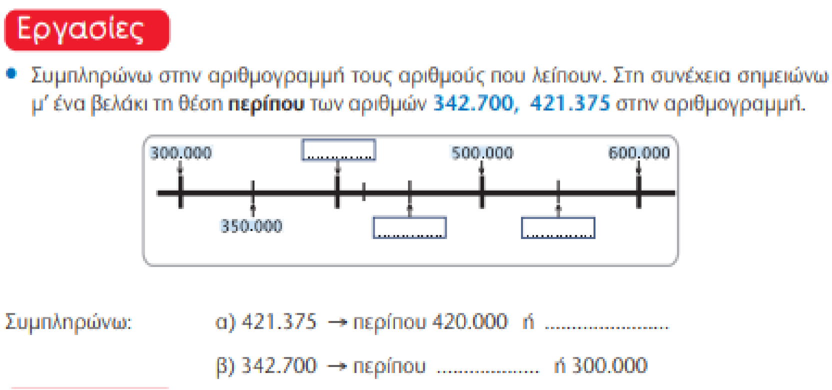
Εικόνα 27. Μη Παραδοσιακό Έργο (Πρόβλημα Ημερολογίου), Βιβλίο Μαθητή, σελ. 51

3.2.3.2. Προβλήματα Εφαρμογής - Μη Εφαρμογής

Όπως φαίνεται και στο Γράφημα 3, το μεγαλύτερο μέρος των προβλημάτων του σχολικού εγχειρίδιου της Δ΄ τάξης έχουν ένα πλαίσιο που σχετίζεται με την καθημερινή ζωή. Από τα 214 έργα που καταμετρήθηκαν, τα 138 (64%) είναι Εφαρμογής και τα 76 (36%) Μη Εφαρμογής.

Γράφημα 3. Προβλήματα Εφαρμογής-Μη εφαρμογής, Βιβλίο Μαθητή, Δ' τάξη

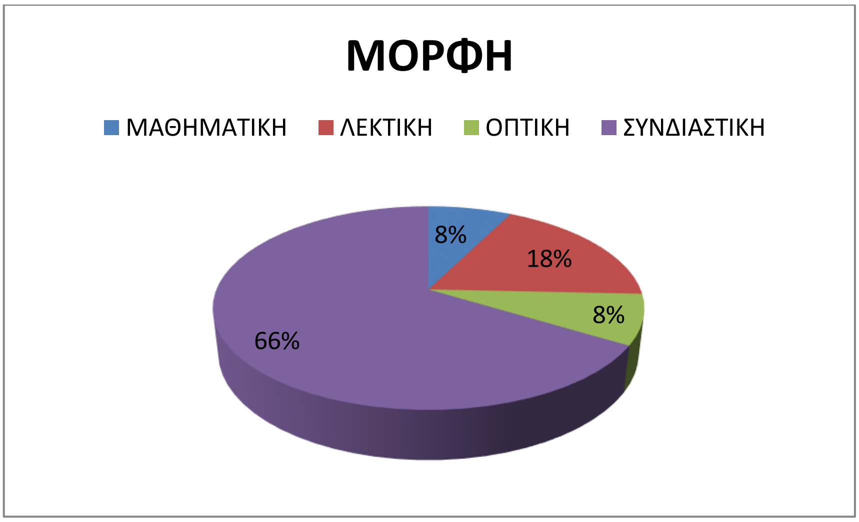
Εικόνα 28. Πρόβλημα Εφαρμογής, Βιβλίο Μαθητή, σελ. 110



Εικόνα 29. Πρόβλημα Μη Εφαρμογής, Βιβλίο Μαθητή, σελ. 121

3.2.3.3.Προβλήματα σε Μαθηματική- Λεκτική- Οπτική- Συνδυαστική Μορφή

Στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ' τάξης από τα 214 έργα, στα 142 (66%) χρησιμοποιούνταν δύο τουλάχιστον τρόποι για την παρουσίαση των δεδομένων. Οι εικόνες, οι πίνακες και τα σχέδια σε συνδυασμό με λεκτικό κείμενο κυριαρχούν στην μορφή παρουσίασης των δεδομένων των προβλημάτων. Οι εικόνες είναι ελκυστικές για τους μαθητές αλλά έχει παρατηρηθεί μια δυσκολία μετάβασης εκ μέρους των μαθητών από τον ένα κώδικα στον άλλο (Gagatsis at al.,1999, στο Γρόσδος, 2010) ενώ μπορούν και να αποπροσανατολίσουν ή να δυσκολέψουν τους μαθητές, όπως φανέρωσε η έρευνα των Δεληγιάννη, Γαγάτση, Κουκκούφη, 2003, στο Γρόσδος (2010) σε μαθητές της Γ' δημοτικού, όπου οι πληροφοριακές εικόνες επηρέασαν αρνητικά την επίδοση των μαθητών. Οι υπόλοιπες μορφές παρουσίασης έχουν πολύ χαμηλά ποσοστά, όπως φαίνεται στο Γράφημα 4. Από το σύνολο των προβλημάτων, τα 16 (8%) παρουσιάζονται σε Μαθηματική μορφή, δηλαδή αποκλειστικά με μαθηματικά σύμβολα και εκφράσεις, τα 17 (8%) σε Οπτική μορφή, δηλαδή με εικόνες, πίνακες, σχεδιαγράμματα και 39 (18%) σε Λεκτική μορφή.



Γράφημα 4. Μορφή παρουσίασης του προβλήματος, Βιβλίο Μαθητή, Δ' τάξη

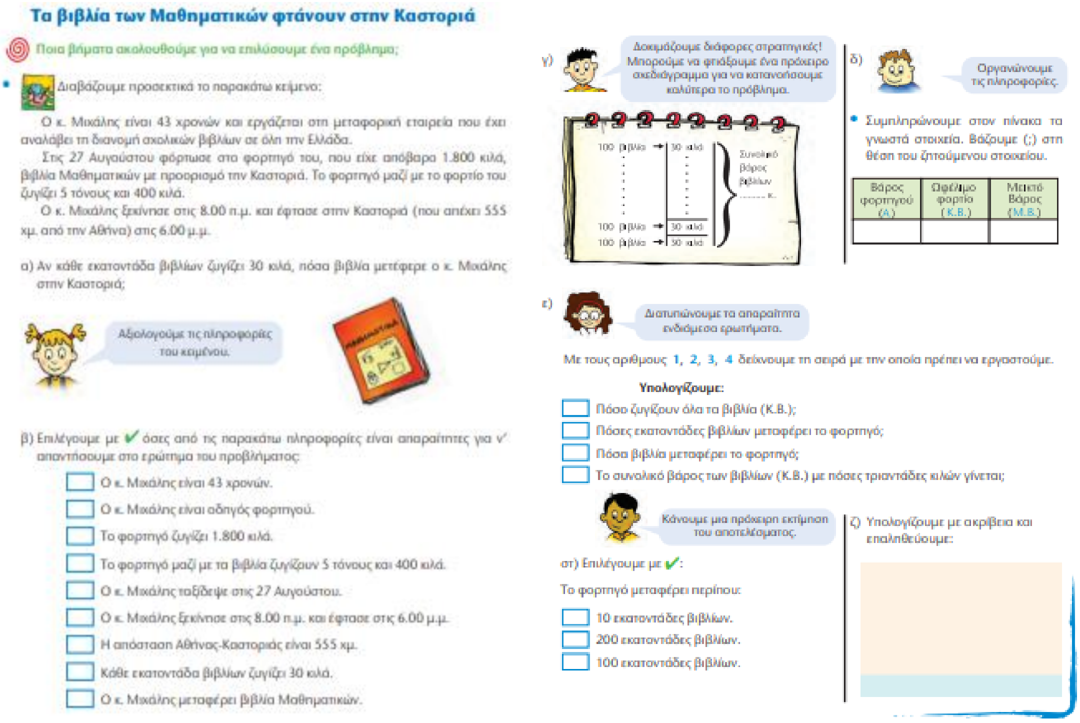
3.2.4 Στάδια Επίλυσης Προβλήματος

Οι διαδικασίες επίλυσης προβλήματος εξετάστηκαν στις Δραστηριότητες Ανακάλυψης και στις Εργασίες, όπου δηλαδή, παρουσιαζόταν μια διαδικασία επίλυσης. Στην έρευνα των Fan & Zhu (2007), οι ερευνητές εξέτασαν τα λυμένα προβλήματα που λειτουργούσαν ως παραδείγματα, και εξέτασαν ποια στάδια επίλυσης παρουσίαζαν. Στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ τάξης, ακολουθείται το ανακαλυπτικό μοντέλο διδασκαλίας, δηλαδή δεν υπάρχουν εξ' ολοκλήρου λυμένα προβλήματα, που να λειτουργούν ως παραδείγματα, αλλά μέσω των προβλημάτων και των ερωτήσεων οι μαθητές, οδηγούνται στην ανακάλυψη της γνώσης. Στο Βιβλίο του Μαθητή, που εξετάστηκε στην παρούσα εργασία και στις Δραστηριότητες Ανακάλυψης και στις Εργασίες , στα περισσότερα έργα οι μαθητές καθοδηγούνται για το πώς θα εργαστούν, δηλαδή το στάδιο της επινόησης σχεδίου δίνεται εξ' ολοκλήρου ή δίνονται οδηγίες από το βιβλίο και οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ή να εκτελέσουν πράξεις. Οπότε στην ουσία οι μαθητές στα περισσότερα έργα, συμμετέχουν στο στάδιο της Εκτέλεσης. Τα στάδια της Επινόησης Σχεδίου και της Εκτέλεσης κυριαρχούν, ενώ τα στάδια της Κατανόησης και της Ανασκόπησης συναντώνται πιο σπάνια.

Για να γίνει εφικτή η κωδικοποίηση των έργων, στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ' τάξης, εξετάστηκε επίσης, εάν καλούνταν να συμμετέχουν οι μαθητές στην επινόηση σχεδίου ή αν το στάδιο της επινόησης σχεδίου προσφερόταν έτοιμο από το σχολικό εγχειρίδιο.

Σε κάποιες Δραστηριότητες Ανακάλυψης και Εργασίες παρουσιάζεται το στάδιο της Επινόησης Σχεδίου και οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν κενά ή να εκτελέσουν τις πράξεις. Σε κάποιες δίνονται σαφείς οδηγίες τι πρέπει να κάνουν οι μαθητές, π.χ. «Βρίσκουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις συμπληρώνοντας τον παρακάτω πίνακα», σελ. 20 Σε άλλες εργασίες απλά δίνεται ένα πρόβλημα και τα παιδιά καλούνται να το λύσουν με βάσει όσα έμαθαν πιο πριν στο κεφάλαιο αυτό. Η κατηγοριοποίηση των έργων ήταν αρκετά δύσκολη, γιατί στα έργα που αναλύθηκαν, μέσω των προβλημάτων και μέσω ερωτήσεων οι μαθητές καθοδηγούνταν, ώστε να ανακαλύψουν ή εξασκηθούν σε μια μαθηματική έννοια. Οπότε στα στάδια επίλυσης δεν προσφερόταν ρητά, όπως γίνεται συνήθως σε λυμένες ασκήσεις.

Τα στάδια επίλυσης προβλήματος του Pólya, διδάσκονται στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ τάξης στο Κεφάλαιο 45, με τίτλο «Διαχειρίζομαι σύνθετα προβλήματα» σελ.112-3.



Τα βιβλία των Μαθηματικών φτάνουν στην Καστοριά

Ποια βήματα ακολουθούμε για να επιλύσουμε ένα πρόβλημα;

- Διαβάζουμε προσεκτικά το παρακάτω κείμενο:

Ο κ. Μιχάλης είναι 43 χρονών και εργάζεται στη μεταφορική εταιρεία που έχει αναλάβει τη διανομή σχολικών βιβλίων σε όλη την Ελλάδα.

Στις 27 Αυγούστου φόρτωσε στο φορτηγό του, που είχε απόβαρο 1.800 κιλά, βιβλία Μαθηματικών με προορισμό την Καστοριά. Το φορτηγό μαζί με το φορτίο του ζυγίζει 5 τόνους και 400 κιλά.

Ο κ. Μιχάλης ξεκίνησε στις 8.00 π.μ. και έφτασε στην Καστοριά (που απέχει 555 χμ. από την Αθήνα) στις 6.00 μ.μ.

α) Αν κάθε εκατοντάδα βιβλίων ζυγίζει 30 κιλά, πόσα βιβλία μετέφερε ο κ. Μιχάλης στην Καστοριά;

Αξιολογούμε τις πληροφορίες του κειμένου.

β) Επιλέγουμε με ✔ όσες από τις παρακάτω πληροφορίες είναι απαραίτητες για ν' απαντήσουμε στο ερώτημα του προβλήματος:

- [ ] Ο κ. Μιχάλης είναι 43 χρονών.
- [ ] Ο κ. Μιχάλης είναι οδηγός φορτηγού.
- [ ] Το φορτηγό ζυγίζει 1.800 κιλά.
- [ ] Το φορτηγό μαζί με τα βιβλία ζυγίζουν 5 τόνους και 400 κιλά.
- [ ] Ο κ. Μιχάλης ταξίδεψε στις 27 Αυγούστου.
- [ ] Ο κ. Μιχάλης ξεκίνησε στις 8.00 π.μ. και έφτασε στις 6.00 μ.μ.
- [ ] Η απόσταση Αθήνας-Καστοριάς είναι 555 χμ.
- [ ] Κάθε εκατοντάδα βιβλίων ζυγίζει 30 κιλά.
- [ ] Ο κ. Μιχάλης μεταφέρει βιβλία Μαθηματικών.

γ) Δοκιμάζουμε διάφορες στρατηγικές! Μπορούμε να φτιάξουμε ένα πρόχειρο σχεδιάγραμμα για να κατανοήσουμε καλύτερα το πρόβλημα.

δ) Οργανώνουμε τις πληροφορίες.

- Συμπληρώνουμε στον πίνακα τα γνωστά στοιχεία. Βάζουμε (;) στη θέση του ζητούμενου στοιχείου.

Βάρος φορτηγού (Α)	Ωφέλιμο φορτίο (Κ.Β.)	Μεικτό Βάρος (Μ.Β.)

ε) Διατυπώνουμε τα απαραίτητα ενδιάμεσα ερωτήματα.

Με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 δείχνουμε τη σειρά με την οποία πρέπει να εργαστούμε.

Υπολογίζουμε:

- [ ] Πόσο ζυγίζουν όλα τα βιβλία (Κ.Β.);
- [ ] Πόσες εκατοντάδες βιβλίων μεταφέρει το φορτηγό;
- [ ] Πόσα βιβλία μεταφέρει το φορτηγό;
- [ ] Το συνολικό βάρος των βιβλίων (Κ.Β.) με πόσες τριαντάδες κιλών γίνεται;

Κάνουμε μια πρόχειρη εκτίμηση του αποτελέσματος.

στ) Επιλέγουμε με ✔:

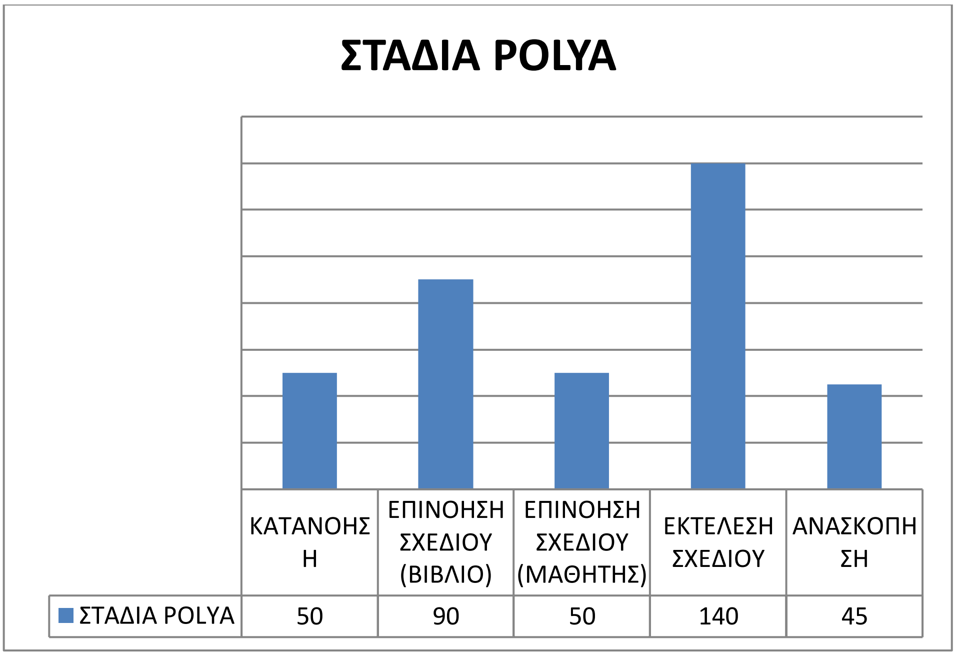
Το φορτηγό μεταφέρει περίπου:

- [ ] 10 εκατοντάδες βιβλίων.
- [ ] 200 εκατοντάδες βιβλίων.
- [ ] 100 εκατοντάδες βιβλίων.

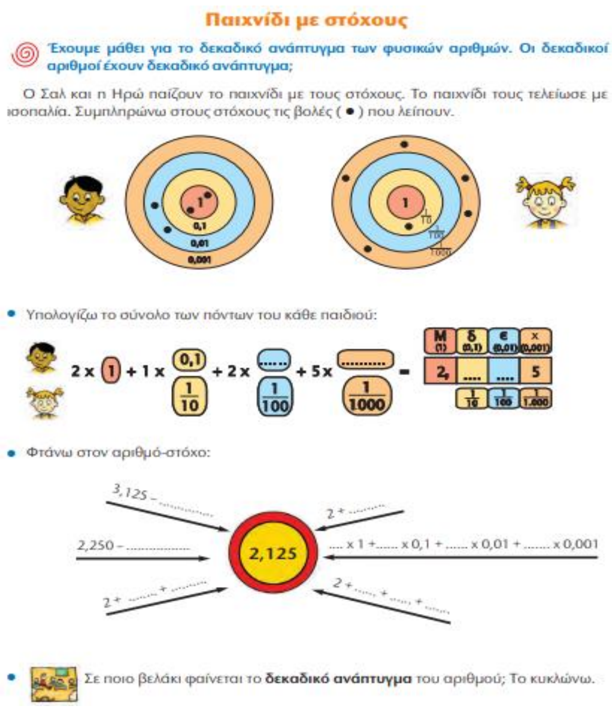
ζ) Υπολογίζουμε με ακρίβεια και επαληθεύουμε:

Εικόνα 30. Στάδια του Pólya, Βιβλίο Μαθητή, σελ. 112-113

Όπως φαίνεται και στην Εικόνα 30, μέσω των Ηρώων του βιβλίου, δίνονται ρητά οι οδηγίες στους μαθητές για το πώς πρέπει να δουλέψουν. Συνολικά στα 174 έργα (Δραστηριότητες Ανακάλυψης και Εργασίες), το στάδιο της Κατανόησης εντοπίστηκε σε 50 έργα (34%), το στάδιο της Επινόησης Σχεδίου σε 90 έργα (61%) δινόταν έτοιμο από το σχολικό εγχειρίδιο, ενώ σε 50 έργα (34%) οι μαθητές καλούνταν να επινοήσουν ένα συνήθως απλοϊκό σχέδιο επίλυσης, είτε να εφαρμόσουν ένα σχέδιο επίλυσης που είχαν προηγουμένως διδαχθεί. Το στάδιο της Εκτέλεσης, εντοπίστηκε σε 140 (95%) έργα ενώ το στάδιο της Ανασκόπησης σε 45 έργα (31%). Στις Δραστηριότητες Ανακάλυψης το στάδιο της Επινόησης Σχεδίου προτεινόταν κυρίως από το βιβλίο, ώστε να διδαχθεί στους μαθητές, ενώ στις Εργασίες ζητούνταν από τους μαθητές να επινοήσουν σχέδια επίλυσης παρόμοια με αυτά που είχαν προηγουμένως διδαχθεί.



Γράφημα 5. Στάδια του Pólya, Βιβλίο Μαθητή, Δ΄ τάξη



Παιχνίδι με στόχους

Έχουμε μάθει για το δεκαδικό ανάπτυγμα των φυσικών αριθμών. Οι δεκαδικοί αριθμοί έχουν δεκαδικό ανάπτυγμα;

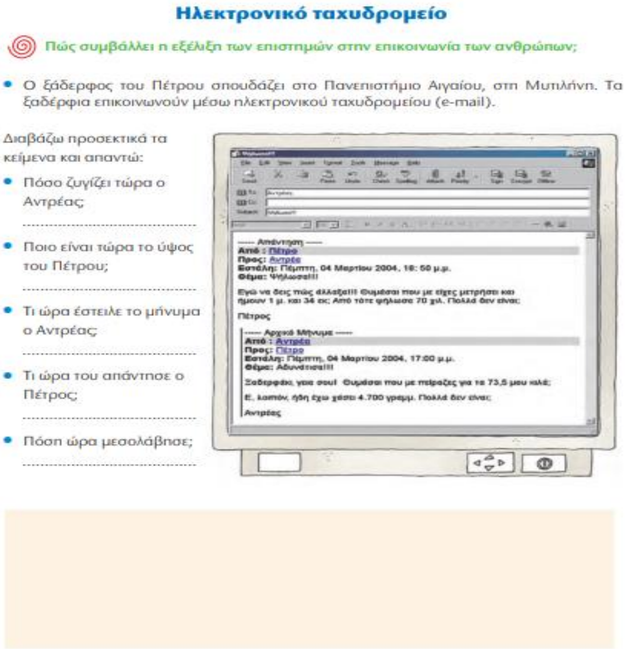
Ο Σαλ και η Ηρώ παίζουν το παιχνίδι με τους στόχους. Το παιχνίδι τους τελείωσε με ισοπαλία. Συμπληρώνω στους στόχους τις βολές (•) που λείπουν.

- Υπολογίζω το σύνολο των πόντων του κάθε παιδιού:

- Φτάνω στον αριθμό-στόχο:

- Σε ποιο βελάκι φαίνεται το **δεκαδικό ανάπτυγμα** του αριθμού; Το κυκλώνω.

Εικόνα 31. Δρ. Ανακ., Στάδια: Επινόηση Σχεδίου (βιβλίο), Εκτέλεση, Ανασκόπηση, σελ.58


Ηλεκτρονικό ταχυδρομείο

Πώς συμβάλλει η εξέλιξη των επιστημών στην επικοινωνία των ανθρώπων;

- Ο ξάδερφος του Πέτρου σπουδάζει στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου, στη Μυτιλήνη. Τα ξαδέρφια επικοινωνούν μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου (e-mail).

Διαβάζω προσεκτικά τα κείμενα και απαντώ:

- Πόσο ζυγίζει τώρα ο Αντρέας; ....
- Ποιο είναι τώρα το ύψος του Πέτρου; ....
- Τι ώρα έστειλε το μήνυμα ο Αντρέας; ....
- Τι ώρα του απάντησε ο Πέτρος; ....
- Πόση ώρα μεσολάβησε; ....

----- Απάντηση -----
Από : Πέτρο
Προς: Αντρέα
Εστάλη: Πέμπτη, 04 Μαρτίου 2004, 18: 50 μ.μ.
Θέμα: Ψήλωσα!!!

Εγώ να δεις πώς άλλαξα!!! Θυμάσαι που με είχες μετρήσει και ήμουν 1 μ. και 34 εκ; Από τότε ψήλωσα 70 χιλ. Πολλά δεν είναι;

Πέτρος

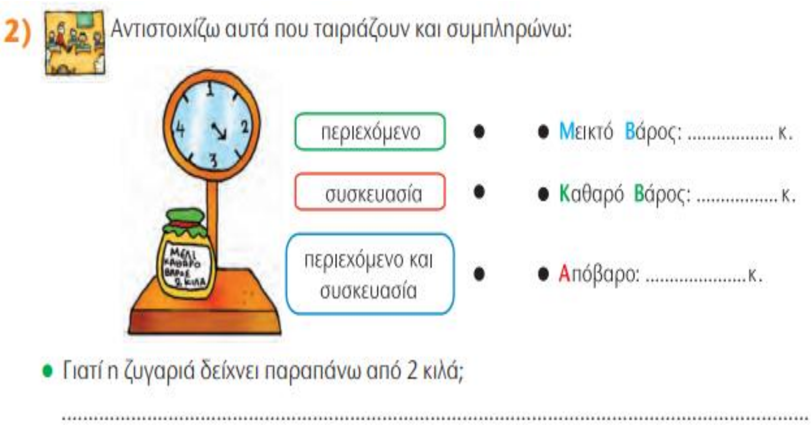
----- Αρχικό Μήνυμα -----
Από : Αντρέα
Προς: Πέτρο
Εστάλη: Πέμπτη, 04 Μαρτίου 2004, 17:00 μ.μ.
Θέμα: Αδυνάτισα!!!

Ξαδερφάκι, γεια σου! Θυμάσαι που με πείραζες για τα 73,5 μου κιλά;

Ε, λοιπόν, ήδη έχω χάσει 4.700 γραμμ. Πολλά δεν είναι;

Αντρέας

Εικόνα 32. Δρ. Ανακ., Στάδια: Επινόηση Σχεδίου (μαθητής), Εκτέλεση, σελ. 64

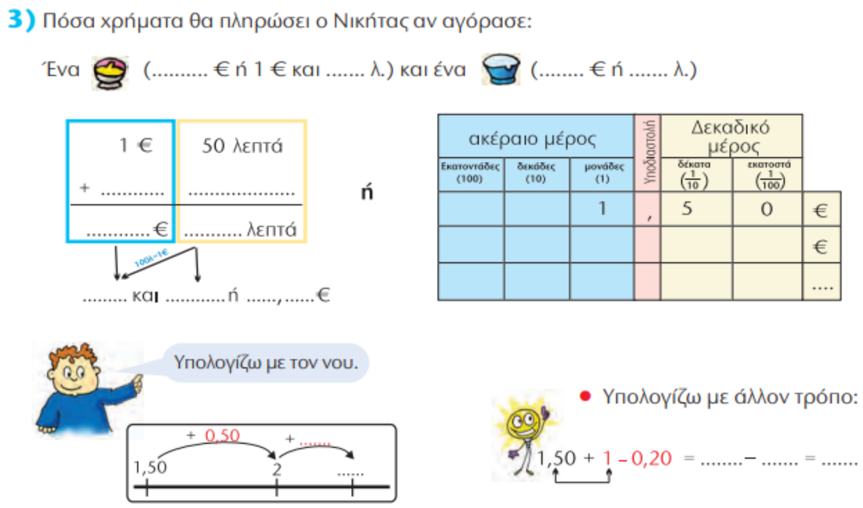

2) Αντιστοιχίζω αυτά που ταιριάζουν και συμπληρώνω:

- περιεχόμενο •   • Μεικτό Βάρος: .... κ.
- συσκευασία •   • Καθαρό Βάρος: .... κ.
- περιεχόμενο και συσκευασία •   • Απόβαρο: .... κ.

- Γιατί η ζυγαριά δείχνει παραπάνω από 2 κιλά;

....

Εικόνα 33. Εργασία, Στάδια: Επινόηση Σχεδίου (μαθητής), Εκτέλεση, σελ. 47



Εικόνα 34. Εργασία, Στάδια: Επινόηση Σχεδίου (Βιβλίο), Εκτέλεση, σελ. 49

3.2.5 Ευρετικές

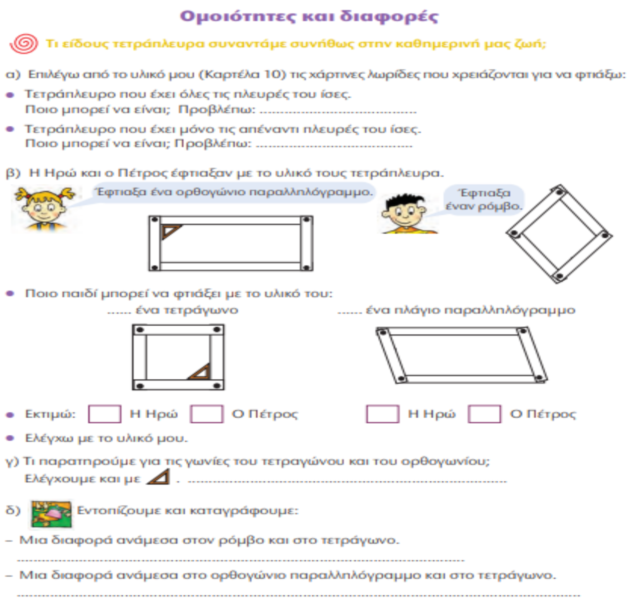
Οι ευρετικές που προτείνονται από το Δ.Ε.Π.Π.Σ. για την Δ’ τάξη είναι:

1. Σχεδιάζω ένα πίνακα
2. Σχεδιάζω ένα διάγραμμα ή μια γραφική παράσταση
3. Δοκιμάζω απλούστερους τρόπους
4. Εργάζομαι με ειδικές περιπτώσεις

Η τελευταία ευρετική αφαιρέθηκε λόγω ασάφειας στην κατανόηση της. Οι ευρετικές αυτές στο μεγαλύτερο μέρος των έργων υπάρχουν δοσμένες από το βιβλίο. Δηλαδή, οι πίνακες, τα διαγράμματα και οι γραφικές παραστάσεις δίνονται έτοιμα και οι μαθητές καλούνται να τα συμπληρώσουν. Εκτός από τις ευρετικές που προτείνονται από Δ.Ε.Π.Π.Σ., εντοπίστηκαν και οι ευρετικές «Εκτιμώ και ελέγχω», «Βρίσκω ένα μοτίβο», «Εφαρμόζω με πραγματικά υλικά» «Φτιάχνω μια οργανωμένη λίστα». Βέβαια τα μοτίβα, εντοπίστηκαν στο κεφάλαιο της γεωμετρίας που διδάσκει μοτίβα και τα περισσότερα παραδείγματα της ευρετικής «Εφαρμόζω με πραγματικά υλικά» στις ενότητες για μέτρηση μήκους/ βάρους/αξία θέσης ψηφίου.

Στα 214 έργα που εξετάστηκαν εντοπίστηκαν 89 έργα (41%) στα οποία χρησιμοποιούνταν κάποια ευρετική. Συνολικά βρέθηκαν 120 ευρετικές. Στα Κεφάλαια 7-10-14-25-38-43-44-45-

46-49, που σύμφωνα με τους άξονες περιεχομένου ασχολούνται με τη διδασκαλία προβλημάτων, μέσω προβλημάτων διδάσκονται ρητά κάποιες γενικές στρατηγικές και ευρετικές. Στο Κεφάλαιο 14 εστιάζει στα «Ενδιάμεσα ερωτήματα», το Κεφάλαιο 38 στην «Οργάνωση πληροφοριών» και την «Απλοποίηση του προβλήματος», ενώ το Κεφάλαιο 49 στην ευρετική «Εκτιμώ και ελέγχω».



Ομοιότητες και διαφορές

Τι είδους τετράπλευρα συναντάμε συνήθως στην καθημερινή μας ζωή;

α) Επιλέγω από το υλικό μου (Καρτέλα 10) τις χάρτινες λωρίδες που χρειάζονται για να φτιάξω:

- Τετράπλευρο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
  Ποιο μπορεί να είναι; Προβλέπω: ....
- Τετράπλευρο που έχει μόνο τις απέναντι πλευρές του ίσες.
  Ποιο μπορεί να είναι; Προβλέπω: ....

β) Η Ηρώ και ο Πέτρος έφτιαξαν με το υλικό τους τετράπλευρα.

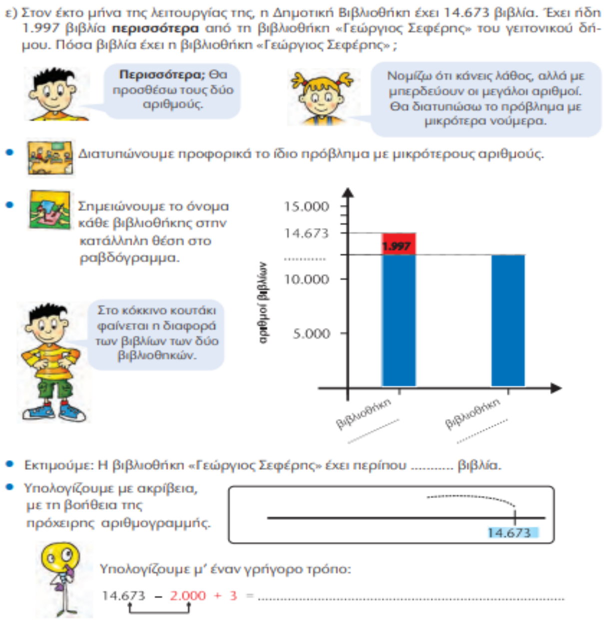
- Ποιο παιδί μπορεί να φτιάξει με το υλικό του:
  ...... ένα τετράγωνο ...... ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο
- Εκτιμώ: ☐ Η Ηρώ ☐ Ο Πέτρος ☐ Η Ηρώ ☐ Ο Πέτρος
- Ελέγχω με το υλικό μου.

γ) Τι παρατηρούμε για τις γωνίες του τετραγώνου και του ορθογωνίου;
Ελέγχουμε και με . ...

δ) Εντοπίζουμε και καταγράφουμε:

– Μια διαφορά ανάμεσα στον ρόμβο και στο τετράγωνο.
....
– Μια διαφορά ανάμεσα στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και στο τετράγωνο.
....

Εικόνα 35. Ευρετικές: Εφαρμόζω με πραγματικά υλικά, Εκτιμώ και ελέγχω, σελ.80


ε) Στον έκτο μήνα της λειτουργίας της, η Δημοτική Βιβλιοθήκη έχει 14.673 βιβλία. Έχει ήδη 1.997 βιβλία **περισσότερα** από τη βιβλιοθήκη «Γεώργιος Σεφέρης» του γειτονικού δήμου. Πόσα βιβλία έχει η βιβλιοθήκη «Γεώργιος Σεφέρης» ;

Περισσότερα; Θα προσθέσω τους δύο αριθμούς.

Νομίζω ότι κάνεις λάθος, αλλά με μπερδεύουν οι μεγάλοι αριθμοί. Θα διατυπώσω το πρόβλημα με μικρότερα νούμερα.

- Διατυπώνουμε προφορικά το ίδιο πρόβλημα με μικρότερους αριθμούς.
- Σημειώνουμε το όνομα κάθε βιβλιοθήκης στην κατάλληλη θέση στο ραβδόγραμμα.

Στο κόκκινο κουτάκι φαίνεται η διαφορά των βιβλίων των δύο βιβλιοθηκών.

- Εκτιμούμε: Η βιβλιοθήκη «Γεώργιος Σεφέρης» έχει περίπου .... βιβλία.
- Υπολογίζουμε με ακρίβεια, με τη βοήθεια της πρόχειρης αριθμογραμμής.

Υπολογίζουμε μ' έναν γρήγορο τρόπο:

14.673 – 2.000 + 3 = ...

Εικόνα 36. Ευρετικές: Απλοποιώ το πρόβλημα, Εκτιμώ και ελέγχω, Χρησιμοποιώ ένα μοντέλο, σελ.89


Ποιο είναι το πρώτο βήμα που πρέπει να κάνω για ν' απαντήσω σε ένα ερώτημα;

Παρατηρούμε προσεκτικά τις εικόνες και αξιοποιούμε κατάλληλα τις πληροφορίες.

α) Ο πατέρας της Ηρώς έχει αγοράσει και έχει πληρώσει εισιτήρια για τον εαυτό του κα γι' άλλα 4 άτομα. Μπορούμε να γνωρίζουμε με βεβαιότητα πόσα χρήματα πλήρωσε; Αν ναι, τα υπολογίζουμε. Αν όχι, εξηγούμε γιατί.

....

Υπάρχουν διαφορετικές περιπτώσεις! Π.χ. 2 ενήλικες και 3 παιδιά.

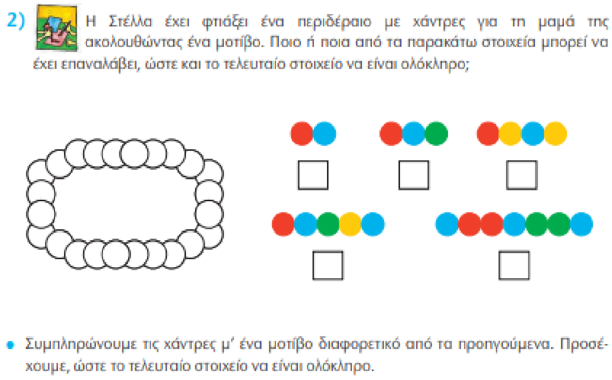
- Βρίσκουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις συμπληρώνοντας τον παρακάτω πίνακα.

Ενήλικες	1	2		......
Παιδιά		3		......
Σύνολο	5	5		......

- Σε ποια περίπτωση θα είχε πληρώσει ο πατέρας της Ηρώς τα περισσότερα χρήματα; Σε ποια τα λιγότερα; Συζητάμε.

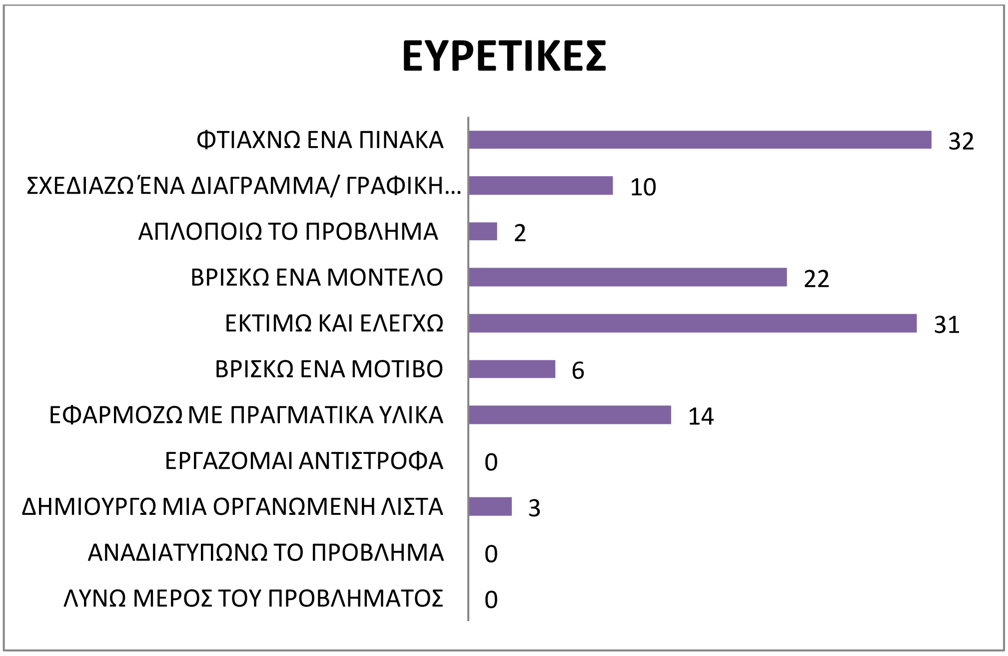
β) Μπορούμε να υπολογίσουμε πόση ώρα μεσολαβεί από τη λήξη της απογευματινής παράστασης ως την έναρξη της βραδινής; Αν ναι, την υπολογίζουμε. Αν όχι, εξηγούμε γιατί. (Το πρόχειρο σχεδιάγραμμα μάς βοηθά.)

Εικόνα37. Ευρετικές: Δημιουργώ μια οργανωμένη λίστα, Σχεδιάζω ένα πίνακα, Χρησιμοποιώ ένα μοντέλο, σελ. 20



Εικόνα 38. Ευρετική: Βρίσκω ένα μοτίβο, σελ.100

Όπως γίνεται φανερό από το παρακάτω γράφημα οι ευρετικές που εντοπίστηκαν στα 89 από τα 214 έργα (41%) του σχολικού εγχειριδίου της Δ΄ τάξης, είναι 120 συνολικά και αυτό γιατί σε κάποια έργα χρησιμοποιήθηκαν παραπάνω από μία ευρετικές. Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε πως το ποσοστό χρήσης των ευρετικών είναι σχετικά μικρό, καθώς όπως φαίνεται και στα παραπάνω παραδείγματα, συχνά το είδος των έργων δεν απαιτεί την χρήση ευρετικών. Οι ευρετικές που χρησιμοποιήθηκαν σε μεγαλύτερο ποσοστό ήταν η ευρετική «φτιάχνω ένα πίνακα» (26%), «εκτιμώ και ελέγχω» (26%) και «βρίσκω ένα μοντέλο»(18%). Η περιορισμένη χρήση των ευρετικών, υποδηλώνει τον τύπο των προβλημάτων που το σχολικό εγχειρίδιο χρησιμοποιεί και στο μεγαλύτερο μέρος του.



Γράφημα 6. Ευρετικές, Βιβλίο Μαθητή, Δ΄ τάξη

3.3 Σχολικό εγχειρίδιο της Ε΄ Δημοτικού, Βιβλίο Μαθητή:

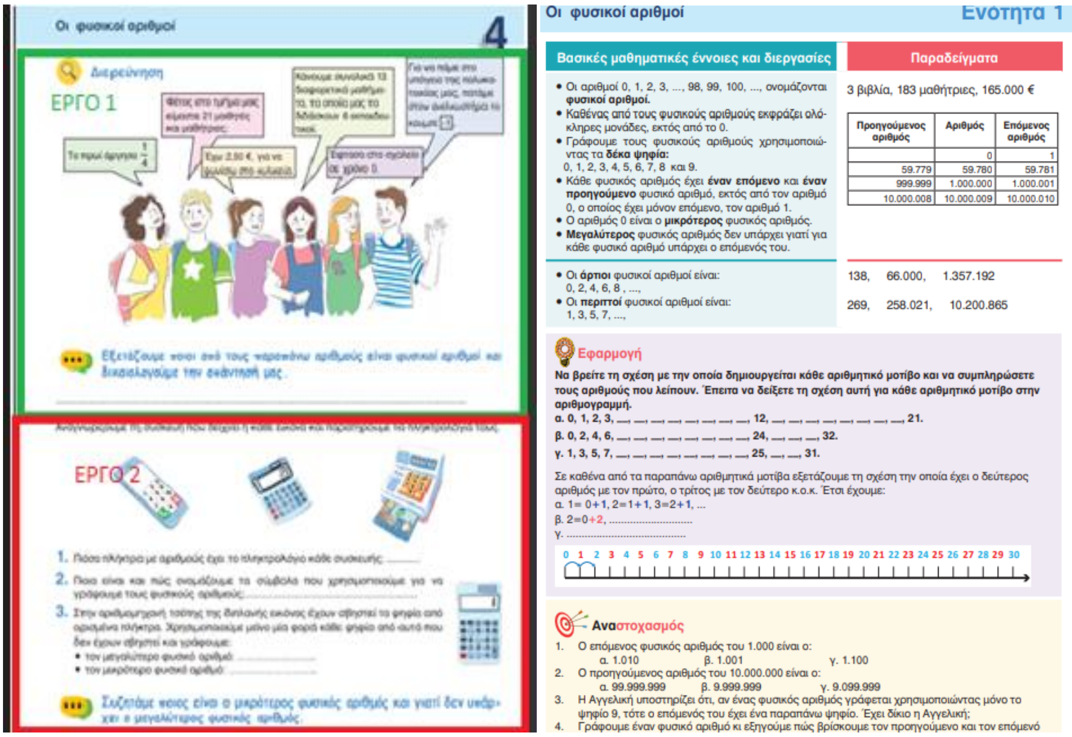
3.3.1 Δομή του σχολικού εγχειριδίου της Ε΄ τάξης

Στην Ε΄ τάξη το σχολικό εγχειρίδιο του μαθητή περιλαμβάνει δύο ξεχωριστά τεύχη. Το α’ τεύχος περιέχει 4 ενότητες και συνολικά 24 κεφάλαια. Τα δύο πρώτα κεφάλαια αφιερώνονται στην επανάληψη όσων έχουν διδαχθεί στην Δ’ τάξη. Το τρίτο κεφάλαιο, όπου ουσιαστικά ξεκινάει η καινούργια ύλη της τάξης, έχει τίτλο «Πώς λύνουμε ένα πρόβλημα» (σελ.11), όπου τα τέσσερα στάδια του Pólya για την επίλυση προβλημάτων, αποτελούν το αντικείμενο διδασκαλίας και παρουσιάζονται ρητά και αναλυτικά. Το β’ τεύχος, που αποτελεί συνέχεια, περιέχει άλλες 4 ενότητες και 28 κεφάλαια. Συνολικά και στα δύο τεύχη υπάρχουν 8 ενότητες με 52 κεφάλαια, όπου τα προβλήματα χρησιμοποιούνται για την διδασκαλία μαθηματικών εννοιών.

Κάθε κεφάλαιο αναπτύσσεται σε δύο σελίδες και διαρθρώνεται ως εξής: ξεκινά με τις δραστηριότητες Διερεύνησης, η οποία καλύπτει πάντα όλη την πρώτη σελίδα, όπου υπάρχουν ερωτήσεις, άλλοτε αριθμημένες άλλοτε όχι. Στην αρχή, ενδιάμεσα ή στο τέλος των ερωτήσεων υπάρχουν προτάσεις που προτρέπουν τα παιδιά σε διάλογο «Συζητάμε ποιος είναι…», «Εξετάζουμε…» και είναι χρωματισμένες με γαλάζιο χρώμα, οι οποίες λειτουργούν άλλοτε ως ανασκόπηση και άλλοτε ως αφόρμηση, αυτού που διδάσκεται. Ως εκ τούτου, ο χωρισμός των έργων έγινε μα βάση το περιεχόμενο των ερωτήσεων και των προτάσεων προς συζήτηση, δηλαδή ένα έργο αποτελούσαν οι ερωτήσεις που αναφέρονταν στην ίδια εκφώνηση, είτε αυτές είναι αριθμημένες είτε όχι. Για παράδειγμα στη σελίδα 13 του α’ τεύχους, οι πέντε δραστηριότητες που υπάρχουν στην σελίδα, καταμετρήθηκαν ως δύο έργα και όχι ως πέντε, όπως θα μπορούσε να υποθέσει κανείς από την αρίθμηση που υπάρχει (βλέπε, εικόνα 39).

Στη δεύτερη σελίδα, παρουσιάζεται πάντα η θεωρία του μαθήματος, «Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες» και δίπλα δίνονται τα «Παραδείγματα» αυτών των εννοιών. Στην συνέχεια, ακολουθούν οι «Εφαρμογές» και η ενότητα τελειώνει με τον «Αναστοχασμό». Οι «Εφαρμογές» έχουν την θέση ασκήσεων εμπέδωσης, που είτε είναι λυμένες εξ’ ολοκλήρου, είτε παρουσιάζεται η συλλογιστική (επινόηση σχεδίου) για τη λύση του προβλήματος και οι μαθητές οφείλουν να διαβάσουν την συλλογιστική και να λύσουν τους δοσμένους ή μη αλγόριθμους ή να συμπληρώσουν κάποια λέξη ή κάποιο κανόνα. Οι δραστηριότητες

«Αναστοχασμού», περιλαμβάνουν ερωτήσεις/ασκήσεις κατανόησης της θεωρίας, που έχουν διδαχθεί στο εκάστοτε κεφάλαιο. Οι συνολικά οκτώ ενότητες των δύο τευχών συνοδεύονται από οκτώ επαναληπτικά κεφαλαία, όπου οι συγγραφείς έχουν χωρίσει τα έργα σε «Ασκήσεις» και «Προβλήματα» προς επίλυση, στα δεύτερα προσφέρονται προς επίλυση, λεκτικά προβλήματα.



Εικόνα 39. Παράδειγμα της δομής ενός Κεφαλαίου, Βιβλίο Μαθητή, Ε΄ τάξη, α' τεύχος, σελ. 13-14 (με πράσινο χρώμα πλαισιώνεται το έργο 1 και με κόκκινο το έργο 2)

3.3.2 Τα προβλήματα στο Βιβλίο Μαθητή της Ε΄ τάξης Δημοτικού

Στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε' τάξης (α' & β' τεύχος) καταμετρήθηκαν συνολικά 359 προβλήματα. Από αυτά, στα χαρακτηρισμένα από τους συγγραφείς ως δραστηριότητες «Διερεύνησης», καταμετρήθηκαν 85 προβλήματα, ως δραστηριότητες «Εφαρμογής» 65 προβλήματα, ως δραστηριότητες «Αναστοχασμού» 151 προβλήματα και στα επαναληπτικά κεφάλαια βρέθηκαν 58 προβλήματα. Τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται ως δραστηριότητες Διερεύνησης, έχουν στόχο να διδάξουν κάποια μαθηματική έννοια και χρησιμοποιούν τα προβλήματα ως μέσο διδασκαλίας.

Όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα το μεγαλύτερο μέρος των προβλημάτων ταξινομήθηκαν ως Παραδοσιακά (93%), Μη Εφαρμογής (61%), σε Λεκτική μορφή (38%).

ΕΡΓΑ/ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΟ Α' & Β' ΤΕΥΧΟΣ Ε' ΤΑΞΗ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ	ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΑΣΤΟΧΑΣΜΟΥ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ	ΣΥΝΟΛΟ
ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΑ	79	63	143	51	336
ΜΗ ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΑ	6	2	8	7	23
ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ	56	22	34	27	139
ΜΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ	29	43	117	31	220
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	12	28	63	16	119
ΛΕΚΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	15	15	88	19	137
ΟΠΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	5	0	0	0	5
ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	53	22	0	23	98
ΣΥΝΟΛΟ ΕΡΓΩΝ	85	65	151	58	359

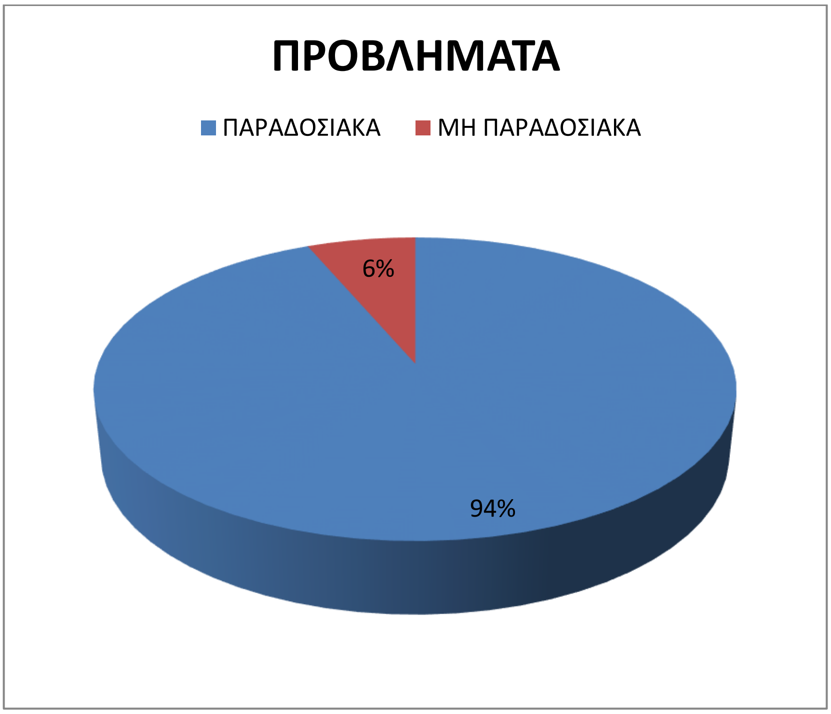
Πίνακας 5. Τύποι έργων/προβλημάτων, Βιβλίο Μαθητή, Ε΄ τάξη

3.3.3. Τύποι προβλημάτων

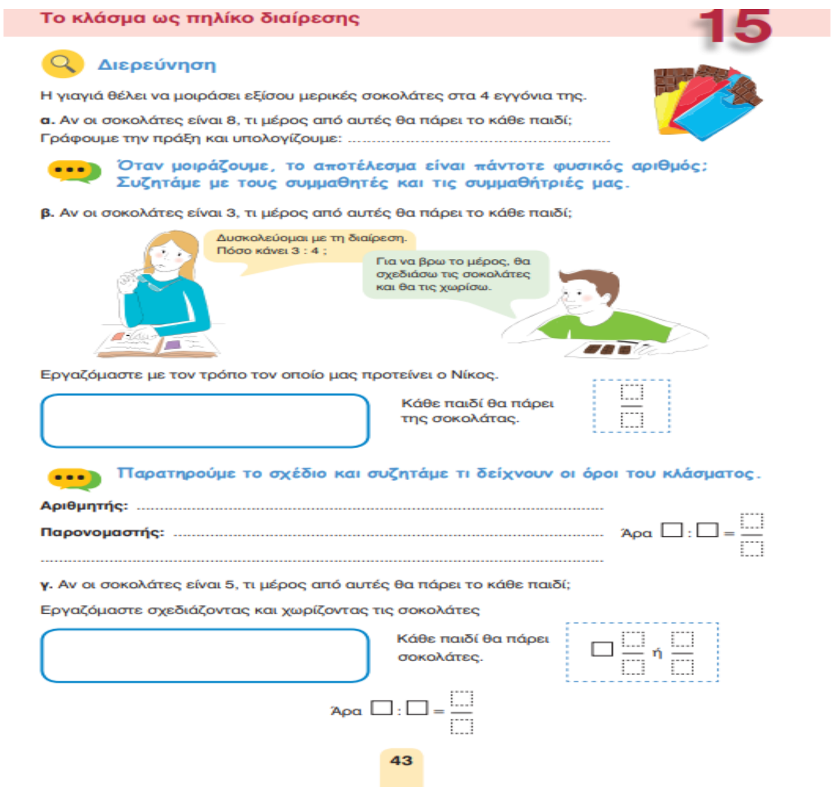
3.3.3.1.Παραδοσιακά- Μη παραδοσιακά προβλήματα

Με βάση την εξέταση του σχολικού εγχειριδίου της Ε΄ τάξης του Δημοτικού, το μεγαλύτερο μέρος των προβλημάτων που χρησιμοποιούνται σε αυτό είναι Παραδοσιακά. Όπως φαίνεται και στο Γράφημα 7, το 94% (N=336) των προβλημάτων είναι Παραδοσιακά, ενώ το 6% (N=23) των προβλημάτων είναι Μη Παραδοσιακά. Πιο αναλυτικά, εντοπίστηκαν πέντε (5) έργα που ζητούσαν την Κατασκευή Προβλήματος (Problem Posing), δώδεκα (12)

Προβλήματα Γρίφοι (Puzzle Problem), τέσσερα (4) Πρόβλημα Έργου (Project Problem) και δύο (2) Προβλήματα Ημερολογίου (Journal Problems).



Γράφημα 7. *Παραδοσιακά- Μη παραδοσιακά προβλήματα, Βιβλίο Μαθητή, Ε' τάξη*



Το κλάσμα ως πηλίκο διαίρεσης 15

Διερεύνηση

Η γιαγιά θέλει να μοιράσει εξίσου μερικές σοκολάτες στα 4 εγγόνια της.

α. Αν οι σοκολάτες είναι 8, τι μέρος από αυτές θα πάρει το κάθε παιδί;
Γράφουμε την πράξη και υπολογίζουμε: ....

Όταν μοιράζουμε, το αποτέλεσμα είναι πάντοτε φυσικός αριθμός; Συζητάμε με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές μας.

β. Αν οι σοκολάτες είναι 3, τι μέρος από αυτές θα πάρει το κάθε παιδί;

Δυσκολεύομαι με τη διαίρεση. Πόσο κάνει 3 : 4 ;

Για να βρω το μέρος, θα σχεδιάσω τις σοκολάτες και θα τις χωρίσω.

Εργαζόμαστε με τον τρόπο τον οποίο μας προτείνει ο Νίκος.

Κάθε παιδί θα πάρει $\frac{\square}{\square}$ της σοκολάτας.

Παρατηρούμε το σχέδιο και συζητάμε τι δείχνουν οι όροι του κλάσματος.

Αριθμητής: ....

Παρονομαστής: .... Άρα $\square : \square = \frac{\square}{\square}$

....

γ. Αν οι σοκολάτες είναι 5, τι μέρος από αυτές θα πάρει το κάθε παιδί;

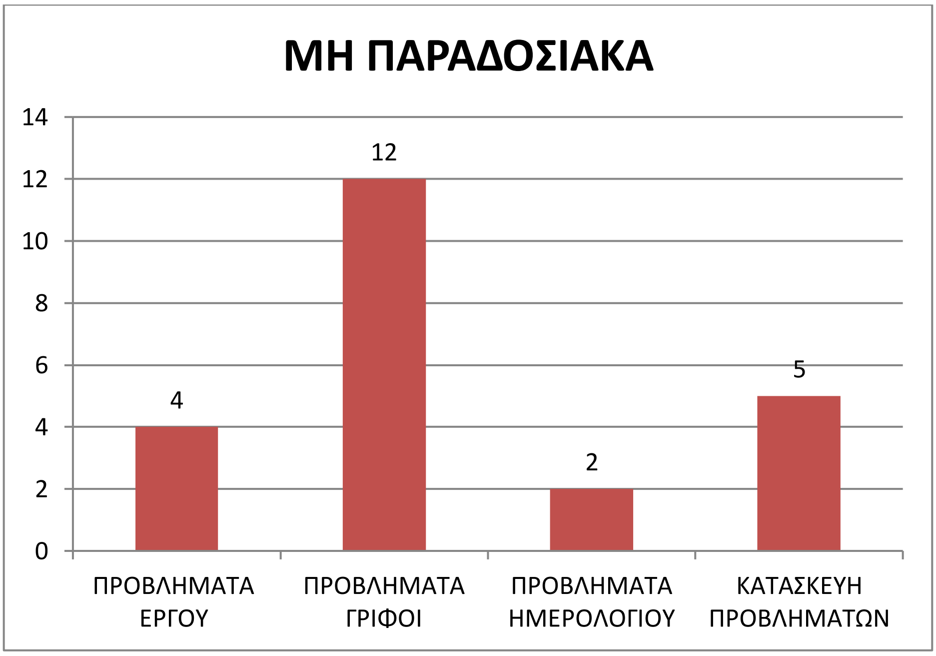
Εργαζόμαστε σχεδιάζοντας και χωρίζοντας τις σοκολάτες

Κάθε παιδί θα πάρει $\square\frac{\square}{\square}$ ή $\frac{\square}{\square}$ σοκολάτες.

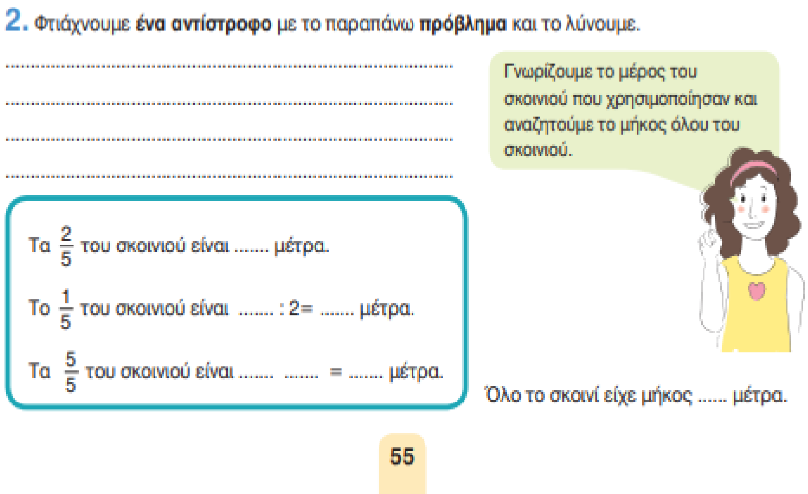
Άρα $\square : \square = \frac{\square}{\square}$

43

Εικόνα 40. Παράδειγμα Παραδοσιακού προβλήματος, Βιβλίο Μαθητή, α' τεύχος, σελ. 43



Γράφημα 8.Μη παραδοσιακά προβλήματα, Βιβλίο Μαθητή, Ε΄ τάξη



2. Φτιάχνουμε **ένα αντίστροφο** με το παραπάνω **πρόβλημα** και το λύνουμε.

....

....

....

....

Τα $\frac{2}{5}$ του σκοινιού είναι .... μέτρα.

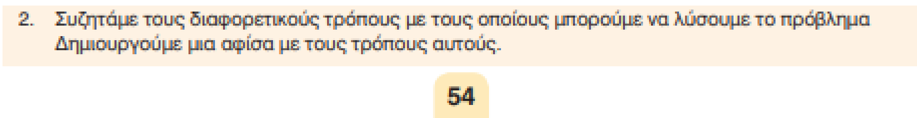
Το $\frac{1}{5}$ του σκοινιού είναι .... : 2= .... μέτρα.

Τα $\frac{5}{5}$ του σκοινιού είναι .... = ... μέτρα.

Όλο το σκοινί είχε μήκος ...... μέτρα.

55

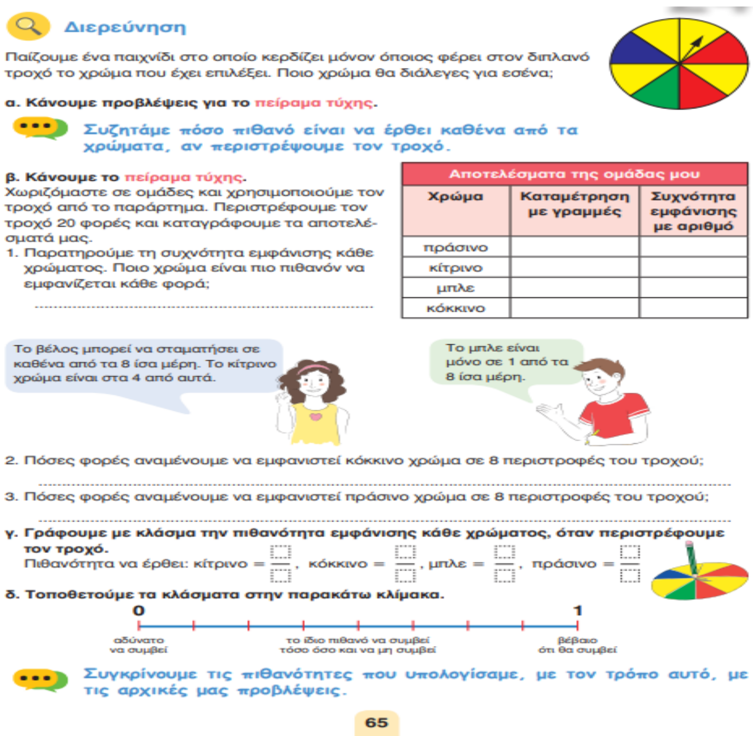
Εικόνα 41. Μη Παραδοσιακά: Κατασκευή Προβλήματος, Βιβλίο Μαθητή, α' τεύχος, σελ. 55



2. Συζητάμε τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα Δημιουργούμε μια αφίσα με τους τρόπους αυτούς.

54

Εικόνα42. Μη Παραδοσιακά: Πρόβλημα Ημερολογίου, Βιβλίο Μαθητή, α’ τεύχος, σελ.54



Διερεύνηση

Παίζουμε ένα παιχνίδι στο οποίο κερδίζει μόνον όποιος φέρει στον διπλανό τροχό το χρώμα που έχει επιλέξει. Ποιο χρώμα θα διάλεγες για εσένα;

α. Κάνουμε προβλέψεις για το πείραμα τύχης.

Συζητάμε πόσο πιθανό είναι να έρθει καθένα από τα χρώματα, αν περιστρέψουμε τον τροχό.

β. Κάνουμε το πείραμα τύχης.
Χωριζόμαστε σε ομάδες και χρησιμοποιούμε τον τροχό από το παράρτημα. Περιστρέφουμε τον τροχό 20 φορές και καταγράφουμε τα αποτελέσματά μας.

1. Παρατηρούμε τη συχνότητα εμφάνισης κάθε χρώματος. Ποιο χρώμα είναι πιο πιθανόν να εμφανίζεται κάθε φορά;

....

Αποτελέσματα της ομάδας μου		
Χρώμα	Καταμέτρηση με γραμμές	Συχνότητα εμφάνισης με αριθμό
πράσινο		
κίτρινο		
μπλε		
κόκκινο		

2. Πόσες φορές αναμένουμε να εμφανιστεί κόκκινο χρώμα σε 8 περιστροφές του τροχού;

....

3. Πόσες φορές αναμένουμε να εμφανιστεί πράσινο χρώμα σε 8 περιστροφές του τροχού;

....

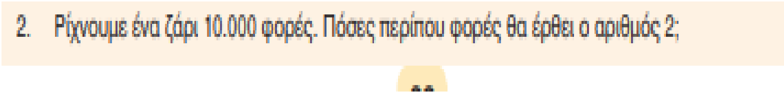
γ. Γράφουμε με κλάσμα την πιθανότητα εμφάνισης κάθε χρώματος, όταν περιστρέφουμε τον τροχό.
Πιθανότητα να έρθει: κίτρινο = $\frac{\square}{\square}$, κόκκινο = $\frac{\square}{\square}$, μπλε = $\frac{\square}{\square}$, πράσινο = $\frac{\square}{\square}$

δ. Τοποθετούμε τα κλάσματα στην παρακάτω κλίμακα.

Συγκρίνουμε τις πιθανότητες που υπολογίσαμε, με τον τρόπο αυτό, με τις αρχικές μας προβλέψεις.

65

Εικόνα43. Μη Παραδοσιακά: Πρόβλημα Έργου, Βιβλίο Μαθητή, α' τεύχος, σελ.65


2. Ρίχνουμε ένα ζάρι 10.000 φορές. Πόσες περίπου φορές θα έρθει ο αριθμός 2;

Εικόνα44. Μη Παραδοσιακά: Πρόβλημα Γρίφου, Βιβλίο Μαθητή, α' τεύχος, σελ.66

3.3.3.2. Προβλήματα Εφαρμογής- Μη εφαρμογής

Σε σχέση με το πλαίσιο των προβλημάτων, δηλαδή αν τα προβλήματα αναφέρονται με κάποιο τρόπο στην πραγματική ζωή ή έχουν καθαρά μαθηματικό πλαίσιο, στα 359 προβλήματα στο Βιβλίο Μαθητή της Ε΄ τάξης, τα 139 αναφέρονταν με κάποιο τρόπο στην πραγματική ζωή, ενώ τα 219 είχαν καθαρά μαθηματικό πλαίσιο (61%). Βέβαια θα πρέπει να σημειωθεί, πως τα προβλήματα στο μεγαλύτερο μέρος τους, χρησιμοποιούνταν για να διδάξουν μαθηματικές έννοιες. Ως εκ τούτου, αν και το πλαίσιο το προβλημάτων αναφερόταν σε πραγματικά αντικείμενα, το πλαίσιο αυτό ήταν τεχνητό, με κύριο στόχο να προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών, μέσω οικείων αντικειμένων και συνθηκών. Αν και τα προβλήματα που καταμετρήθηκαν ως εφαρμογής, περιέχουν πραγματικά αντικείμενα και ζητήματα της καθημερινής ζωής, αυτά είναι τεχνητά κατασκευασμένα στο μεγαλύτερο μέρος τους, ώστε να εξυπηρετήσουν τις ανάγκες της διδασκαλίας. Οι μαθητές μπορούν εύκολα να επιλύσουν τα προβλήματα αυτά με βάση τα δεδομένα του κειμένου, χωρίς να χρειάζεται να σκεφτούν την σύνδεση με την πραγματική κατάσταση.

Το μεγαλύτερο μέρος των προβλημάτων Μη Εφαρμογής εντοπίστηκαν στις δραστηριότητες Αναστοχασμού, 117 από τα 151 (77%) προβλήματα, των δραστηριοτήτων Εφαρμογής, 43 από τα 65 προβλήματα (66%) και των επαναληπτικών κεφαλαίων, 31 από τα 58 προβλήματα (53%). Δηλαδή μόνο στις δραστηριότητες Διερεύνησης, τα προβλήματα Εφαρμογής υπερτερούσαν των προβλημάτων Μη Εφαρμογής, καθώς από τα 85 προβλήματα, τα 56 ήταν Εφαρμογής (66%) και τα 29 Μη Εφαρμογής (34%). Παρόλο που η ανάγκη ενασχόλησης των μαθητών με προβλήματα πλαισιωμένα από στοιχεία της πραγματικότητας υπογραμμίζεται από Α.Π.Σ. των μαθηματικών για το Δημοτικό, φαίνεται πως αυτό δεν υιοθετείται στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε΄ τάξης.

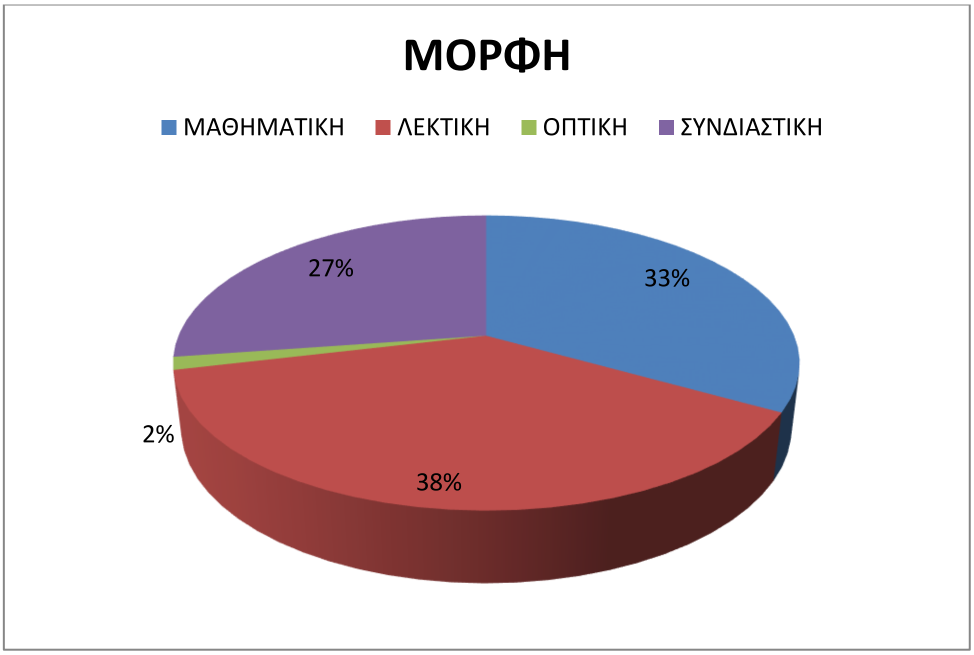
Πλαίσιο Προβλημάτων	Δραστηριότητες Διερεύνησης	Εφαρμογές	Δραστηριότητες Αναστοχασμού	Δραστηριότητες στα Επαναληπτικά
Εφαρμογής	66%	34%	23%	47%
Μη εφαρμογής	34%	66%	77%	53%

Πίνακας 6. Προβλήματα Εφαρμογής - Μη εφαρμογής

Γράφημα 9. Προβλήματα Εφαρμογής-Μη εφαρμογής, Βιβλίο Μαθητή, Ε’ τάξη

3.3.3.3. Προβλήματα σε Μαθηματική- Λεκτική- Οπτική- Συνδυαστική Μορφή

Στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε’ τάξης, τα προβλήματα παρουσιάζονται στο μεγαλύτερο τους μέρος σε Λεκτική μορφή (38%), δηλαδή 137 από τα 359 έργα. Ακολουθούν τα προβλήματα που παρουσιάζονται σε Μαθηματική μορφή (33%), δηλαδή 119 από τα 359 προβλήματα, ενώ σε Συνδυαστική μορφή υπάρχουν 98 προβλήματα (27%) και 5 προβλήματα σε Οπτική μορφή (2%). Όπως γίνεται φανερό, τα δεδομένα των προβλημάτων παρουσιάζονται με ποικίλους τρόπους, ώστε να εξασκηθούν οι μαθητές σε όλες τις μορφές παρουσίασης των δεδομένων, αν και τα προβλήματα σε οπτική μορφή είναι ελάχιστα.



Γράφημα 10. Μορφή παρουσίασης προβλημάτων, Βιβλίο Μαθητή, Ε' τάξη

Διερεύνηση

1. Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται οι πέντε μεγαλύτερες πόλεις της Ελλάδας και οι αριθμοί των κατοίκων τους με βάση την απογραφή του 2011:
   - με ακρίβεια και
   - μετά τη στρογγυλοποίηση.

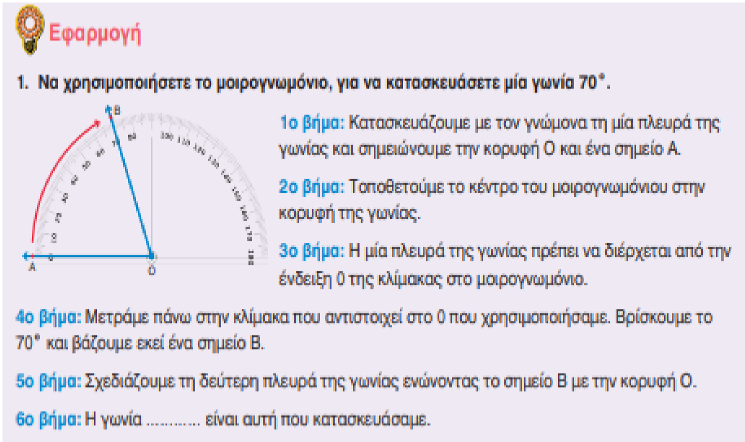
Πόλεις	Πλήθος κατοίκων με ακρίβεια	Πλήθος κατοίκων μετά τη στρογγυλοποίηση
Αθήνα	3.218.218	3.218.000
Θεσσαλονίκη	1.012.597	1.013.000
Πάτρα	168.202	168.000
Ηράκλειο	153.653	154.000
Λάρισα	144.651	145.000

Συγκρίνουμε τους αριθμούς που δείχνουν το πλήθος των κατοίκων κάθε πόλης πριν από τη στρογγυλοποίηση και μετά τη στρογγυλοποίηση.

Ποια ψηφία και σε ποια θέση έχουν αλλάξει σε κάθε αριθμό;

Συζητάμε σε ποια θέση κάθε αριθμού έχει γίνει η στρογγυλοποίηση.

Εικόνα 45. Συνδυαστική μορφή, Βιβλίο Μαθητή, α' τεύχος, σελ. 19



Εφαρμογή

1. Να χρησιμοποιήσετε το μοιρογνωμόνιο, για να κατασκευάσετε μία γωνία 70°.

1ο βήμα: Κατασκευάζουμε με τον γνώμονα τη μία πλευρά της γωνίας και σημειώνουμε την κορυφή Ο και ένα σημείο Α.

2ο βήμα: Τοποθετούμε το κέντρο του μοιρογνωμόνιου στην κορυφή της γωνίας.

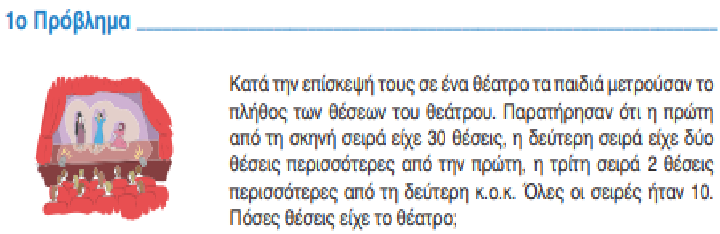
3ο βήμα: Η μία πλευρά της γωνίας πρέπει να διέρχεται από την ένδειξη 0 της κλίμακας στο μοιρογνωμόνιο.

4ο βήμα: Μετράμε πάνω στην κλίμακα που αντιστοιχεί στο 0 που χρησιμοποιήσαμε. Βρίσκουμε το 70° και βάζουμε εκεί ένα σημείο Β.

5ο βήμα: Σχεδιάζουμε τη δεύτερη πλευρά της γωνίας ενώνοντας το σημείο Β με την κορυφή Ο.

6ο βήμα: Η γωνία .... είναι αυτή που κατασκευάσαμε.

Εικόνα 46. Μαθηματική μορφή, Βιβλίο Μαθητή, β' τεύχος, σελ. 46



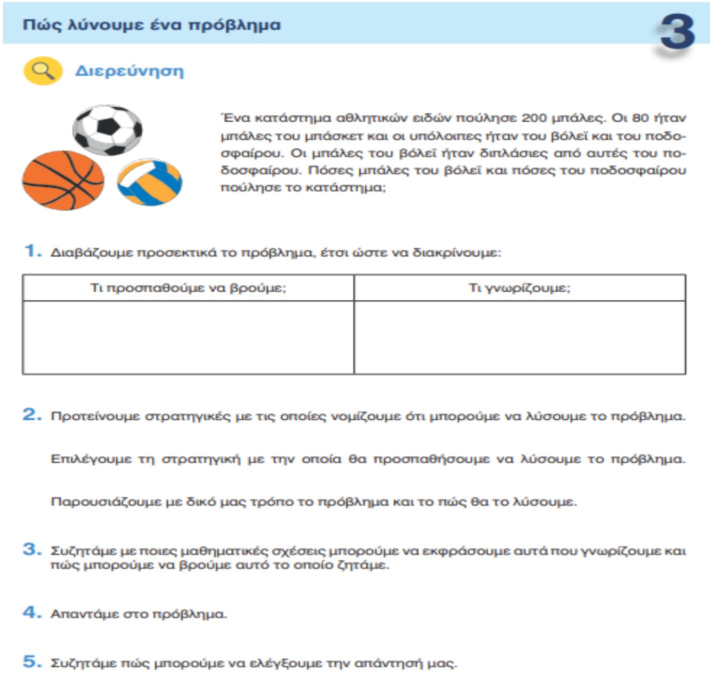
1ο Πρόβλημα

Κατά την επίσκεψή τους σε ένα θέατρο τα παιδιά μετρούσαν το πλήθος των θέσεων του θεάτρου. Παρατήρησαν ότι η πρώτη από τη σκηνή σειρά είχε 30 θέσεις, η δεύτερη σειρά είχε δύο θέσεις περισσότερες από την πρώτη, η τρίτη σειρά 2 θέσεις περισσότερες από τη δεύτερη κ.ο.κ. Όλες οι σειρές ήταν 10. Πόσες θέσεις είχε το θέατρο;

Εικόνα 47. Λεκτική μορφή, Βιβλίο Μαθητή, β' τεύχος, σελ. 36

3.3.4. Στάδια Επίλυσης Προβλήματος

Στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε΄ τάξης τα στάδια επίλυσης προβλήματος αποτελούν το αντικείμενο της διδασκαλίας στο πρώτο μάθημα. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 17, παρουσιάζεται αναλυτικά ο τρόπος με τον οποίο επιλύουμε ένα πρόβλημα με βάση αυτά τα στάδια. Στο υπόλοιπο σχολικό εγχειρίδιο τα προβλήματα χρησιμοποιούνται για την διδασκαλία μαθηματικών εννοιών, αν και τα στάδια δεν παρουσιάζονται ρητά στους μαθητές, ούτε ακολουθούνται πάντα από το βιβλίο.



Πώς λύνουμε ένα πρόβλημα 3

Διερεύνηση

Ένα κατάστημα αθλητικών ειδών πούλησε 200 μπάλες. Οι 80 ήταν μπάλες του μπάσκετ και οι υπόλοιπες ήταν του βόλεϊ και του ποδοσφαίρου. Οι μπάλες του βόλεϊ ήταν διπλάσιες από αυτές του ποδοσφαίρου. Πόσες μπάλες του βόλεϊ και πόσες του ποδοσφαίρου πούλησε το κατάστημα;

1. Διαβάζουμε προσεκτικά το πρόβλημα, έτσι ώστε να διακρίνουμε:

Τι προσπαθούμε να βρούμε;	Τι γνωρίζουμε;

2. Προτείνουμε στρατηγικές με τις οποίες νομίζουμε ότι μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα.

   Επιλέγουμε τη στρατηγική με την οποία θα προσπαθήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα.

   Παρουσιάζουμε με δικό μας τρόπο το πρόβλημα και το πώς θα το λύσουμε.

3. Συζητάμε με ποιες μαθηματικές σχέσεις μπορούμε να εκφράσουμε αυτά που γνωρίζουμε και πώς μπορούμε να βρούμε αυτό το οποίο ζητάμε.

4. Απαντάμε στο πρόβλημα.

5. Συζητάμε πώς μπορούμε να ελέγξουμε την απάντησή μας.

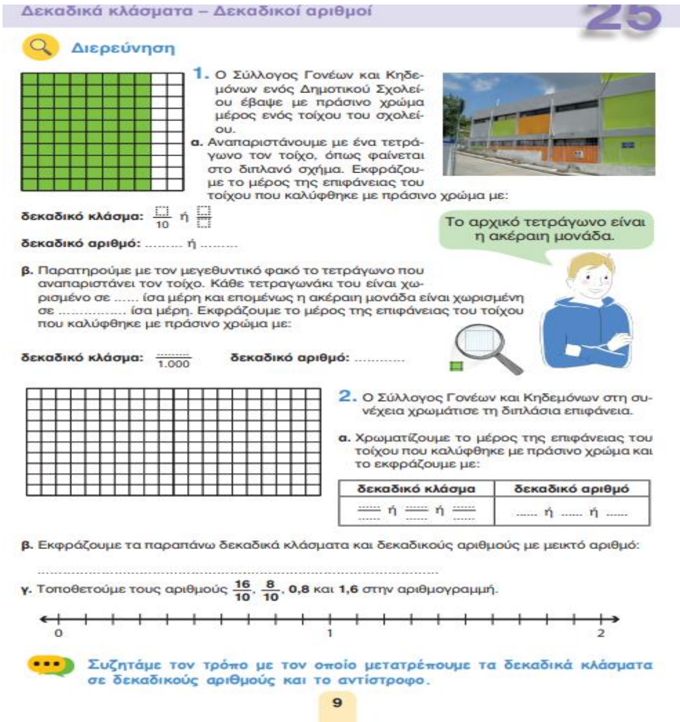
Εικόνα 48. Τέσσερα Στάδια του Pólya, Βιβλίο Μαθητή, α' τεύχος,σελ.11

Τα Στάδια Επίλυσης Προβλήματος, όπως και οι Ευρετικές αναζητήθηκαν στα έργα στις δραστηριότητες Διερεύνησης και στις Εφαρμογές. Οι δραστηριότητες Αναστοχασμού δεν καταμετρήθηκαν σε αυτό το στάδιο της έρευνας, γιατί δεν περιέχουν κάποια διαδικασία επίλυσης, ούτε και τα έργα στα επαναληπτικά κεφάλαια.

Για να γίνει εφικτή η κωδικοποίηση των έργων σε σχέση με τα στάδια του Pólya, στις δραστηριότητες Διερεύνησης εξετάστηκε το τι προκαλούν οι ερωτήσεις στους μαθητές να κάνουν ή τι προσφέρουν στους μαθητές, ενώ στις Εφαρμογές εξετάστηκε ποια στάδια επίλυσης παρουσιάζονται από το βιβλίο. Πιο αναλυτικά, στα έργα Διερεύνησης εξετάστηκε αν οι ερωτήσεις που συνοδεύουν το πρόβλημα, έχουν στόχο οι μαθητές να κατανοήσουν το πρόβλημα, να επινοήσουν και να εκτελέσουν ένα σχέδιο και να ελέγξουν το αποτέλεσμα του, ενώ στα έργα στις Εφαρμογές, εξετάστηκε ποια στάδια επίλυσης παρουσιάζουν οι δοσμένες απαντήσεις.

Για παράδειγμα, όπως φαίνεται στην εικόνα 47, η δραστηριότητα Διερεύνησης μετρήθηκε ως δύο έργα, στο πρώτο έργο παρουσιάζεται το στάδιο της Επινόησης Σχεδίου και οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν τα κενά και τις πράξεις (στάδιο της Εκτέλεσης), στο δεύτερο έργο δίνεται πάλι το στάδιο της Επινόησης Σχεδίου και το στάδιο της Εκτέλεσης ζητείται από τους μαθητές, ενώ στο τέλος η ερώτηση «Συζητάμε τον τρόπο με τον οποίο …

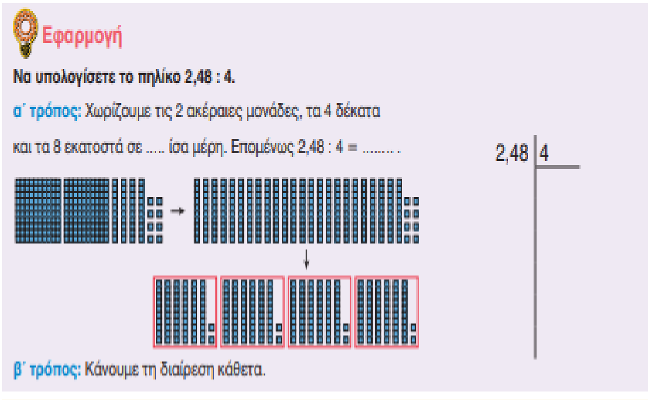
αντίστροφο» (σελ. 9) αποτελεί το στάδιο της Ανασκόπησης της μαθηματικής έννοιας που έχουν διδαχθεί προηγουμένως. Στην Εικόνα 48, η δραστηριότητα Διερεύνησης αποτελεί ένα έργο, στο οποίο το στάδιο της Επινόησης Σχεδίου δεν προσφέρεται από το σχολείο αλλά καλούνται να το βρουν οι μαθητές, όπως και το στάδιο της Εκτέλεσης του σχεδίου.



Εικόνα 49. Παράδειγμα ανάλυσης δρ. Διερεύνησης, Βιβλίο Μαθητή, Ε΄ τάξη, β’ τεύχος, σελ.9

Εικόνα 50. Παράδειγμα ανάλυσης δρ. Διερεύνησης, Βιβλίο Μαθητή, β’ τεύχος, σελ. 39

Στην Εικόνα 51, η δραστηριότητα Εφαρμογής αποτελεί ένα έργο, όπου το στάδιο της Επινόησης Σχεδίου προσφέρεται από το βιβλίο και οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν τις πράξεις (Εκτέλεση Σχεδίου). Αντίθετα στην Εικόνα 50, τα στάδια της Επινόησης Σχεδίου και της Εκτέλεσης παρουσιάζονται από το βιβλίο. Στην Εικόνα 53, η δραστηριότητα Εφαρμογής αποτελεί ένα έργο, στο οποίο το στάδιο της Επινόησης Σχεδίου και της Εκτέλεσης δεν προσφέρεται από το βιβλίο αλλά ζητείται από τους μαθητές.



Εφαρμογή

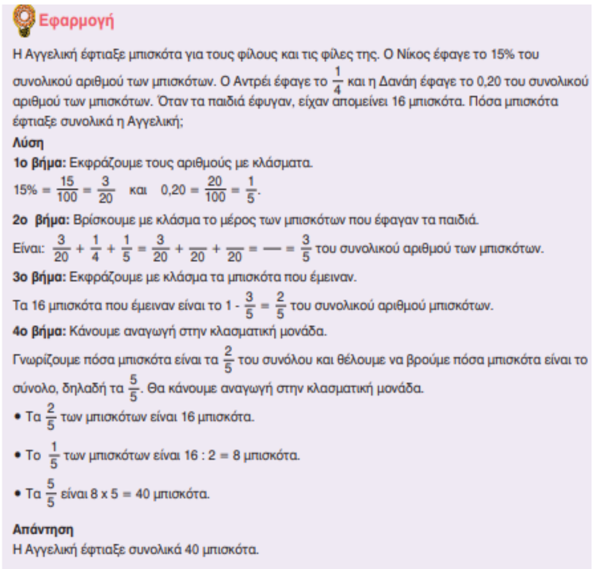
Να υπολογίσετε το πηλίκο 2,48 : 4.

α΄ τρόπος: Χωρίζουμε τις 2 ακέραιες μονάδες, τα 4 δέκατα και τα 8 εκατοστά σε ..... ίσα μέρη. Επομένως 2,48 : 4 = ...

2,48 | 4

β΄ τρόπος: Κάνουμε τη διαίρεση κάθετα.

Εικόνα 51. Δρ. Εφαρμογής, Στάδια: Επινόηση Σχεδίου, Εκτέλεση, Βιβλίο Μαθητή, β' τεύχος, σελ .20



Εφαρμογή

Η Αγγελική έφτιαξε μπισκότα για τους φίλους και τις φίλες της. Ο Νίκος έφαγε το 15% του συνολικού αριθμού των μπισκότων. Ο Αντρέι έφαγε το $\frac{1}{4}$ και η Δανάη έφαγε το 0,20 του συνολικού αριθμού των μπισκότων. Όταν τα παιδιά έφυγαν, είχαν απομείνει 16 μπισκότα. Πόσα μπισκότα έφτιαξε συνολικά η Αγγελική;

Λύση

1ο βήμα: Εκφράζουμε τους αριθμούς με κλάσματα.

$15\% = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$ και $0,20 = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$.

2ο βήμα: Βρίσκουμε με κλάσμα το μέρος των μπισκότων που έφαγαν τα παιδιά.

Είναι: $\frac{3}{20} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{3}{20} + \frac{\quad}{20} + \frac{\quad}{20} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{3}{5}$ του συνολικού αριθμού των μπισκότων.

3ο βήμα: Εκφράζουμε με κλάσμα τα μπισκότα που έμειναν.

Τα 16 μπισκότα που έμειναν είναι το $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ του συνολικού αριθμού μπισκότων.

4ο βήμα: Κάνουμε αναγωγή στην κλασματική μονάδα.

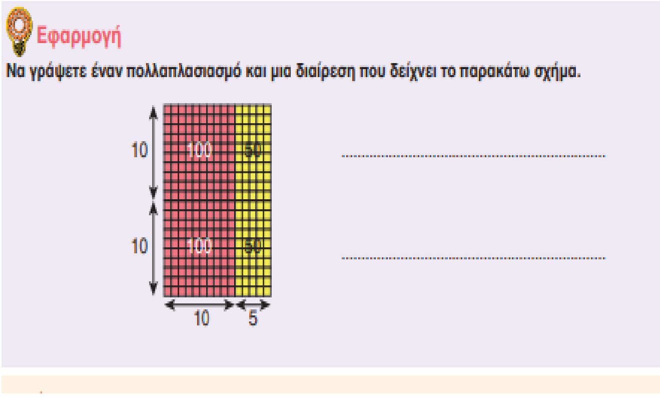
Γνωρίζουμε πόσα μπισκότα είναι τα $\frac{2}{5}$ του συνόλου και θέλουμε να βρούμε πόσα μπισκότα είναι το σύνολο, δηλαδή τα $\frac{5}{5}$. Θα κάνουμε αναγωγή στην κλασματική μονάδα.

- Τα $\frac{2}{5}$ των μπισκότων είναι 16 μπισκότα.
- Το $\frac{1}{5}$ των μπισκότων είναι 16 : 2 = 8 μπισκότα.
- Τα $\frac{5}{5}$ είναι 8 x 5 = 40 μπισκότα.

Απάντηση

Η Αγγελική έφτιαξε συνολικά 40 μπισκότα.

Εικόνα 52. Δρ. Εφαρμογής, Στάδια: Επινόηση Σχεδίου, Εκτέλεση, Βιβλίο Μαθητή, β' τεύχος, σελ.24



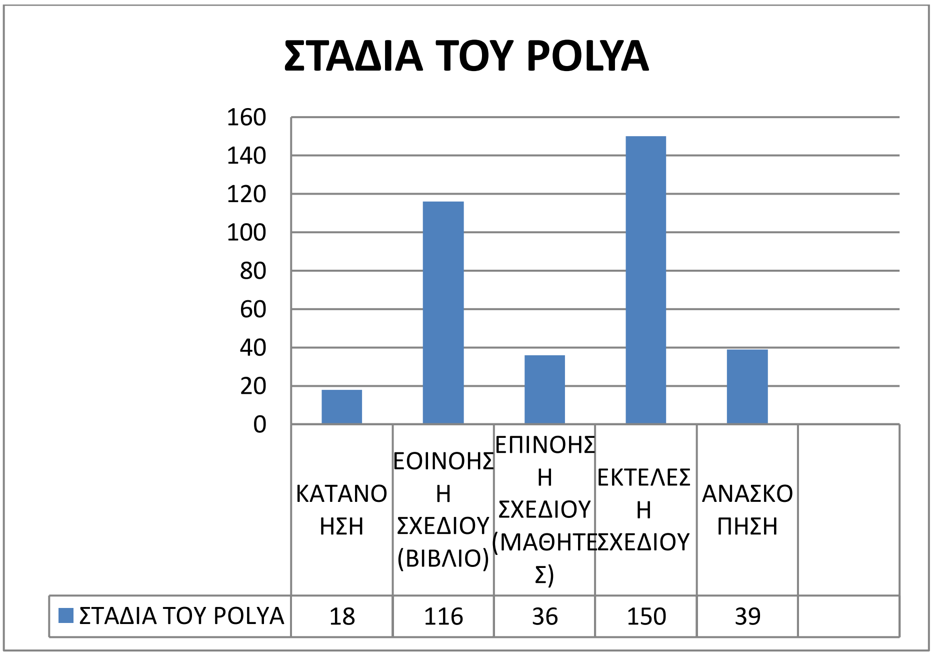
Εικόνα 53. Δρ. Εφαρμογής, Στάδια: Επινόηση Σχεδίου, Εκτέλεση, Βιβλίο Μαθητή, α’ τεύχος, σελ. 30

Με βάση αυτή τη λογική, από τις 85 δραστηριότητες Διερεύνησης το στάδιο της «Επινόησης Σχεδίου» παρουσιάζεται από το βιβλίο σε 58 έργα, ενώ οι μαθητές καλούνται να το επινοήσουν σε 27 έργα. Το στάδιο της Εκτέλεσης Σχεδίου, εκτελείται από τους μαθητές σε 134 έργα. Στις δραστηριότητες των Εφαρμογών, δηλαδή 65 έργα συνολικά, το στάδιο της Επινόησης Σχεδίου καλούνται να επινοήσουν οι μαθητές σε 9 έργα, ενώ στα υπόλοιπα 56 παρουσιάζεται από το βιβλίο, ενώ το στάδιο της Εκτέλεσης Σχεδίου παρουσιάζεται εξ’ ολοκλήρου λυμένο σε 13 έργα, σε 9 καλούνται να κάνουν την εκτέλεση εξ’ ολοκλήρου οι μαθητές, ενώ στα υπόλοιπα 43 οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν αποτελέσματα δοσμένων αλγορίθμων. Συνολικά, το στάδιο της Επινόησης Σχεδίου, δινόταν από το βιβλίο σε ποσοστό 77%, ενώ καλούνταν να το επινοήσουν οι μαθητές σε ποσοστό 24%. Το στάδιο της Εκτέλεσης εντοπίζεται σε όλα τα έργα, είτε εξ ολοκλήρου λυμένο, είτε εν μέρει λυμένο, είτε καλούνται οι μαθητές να το εκτελέσουν (95%), στο υπόλοιπο 5%, τα έργα δεν περιλαμβάνουν το στάδιο αυτό.

Το στάδιο της Κατανόησης, εντοπίστηκε σε 16 από τα 85 έργα στις δραστηριότητες Διερεύνησης και σε 2 έργα από τα 65, στις δραστηριότητες Εφαρμογής, συνολικά το στάδιο της Κατανόησης, εντοπίστηκε σε ποσοστό 12%. Το στάδιο της Ανασκόπησης, στις δραστηριότητες Διερεύνησης, εντοπίστηκε σε 34 έργα ενώ στις δραστηριότητες Εφαρμογής σε 5 έργα, συνολικά το στάδιο της Ανασκόπησης εντοπίστηκε σε ποσοστό 26%.

Στάδια επίλυσης	Δραστηριότητες Διερεύνησης	Εφαρμογές
Κατανόηση	19%	3%
Επινόηση σχεδίου (μαθητές)	68%	14%
Επινόηση σχεδίου (βιβλίο)	32%	86%
Εκτέλεση (μαθητές)	88%	80%
Ανασκόπηση	40%	7%

Πίνακας 7. Στάδια του Pólya, Βιβλίο Μαθητή, α’-β’ τεύχος, Ε΄ τάξη



Γράφημα 11. Στάδια του Pólya, Βιβλίο Μαθητή, α’-β’ τεύχος, Ε΄ τάξη

3.3.5. Ευρετικές

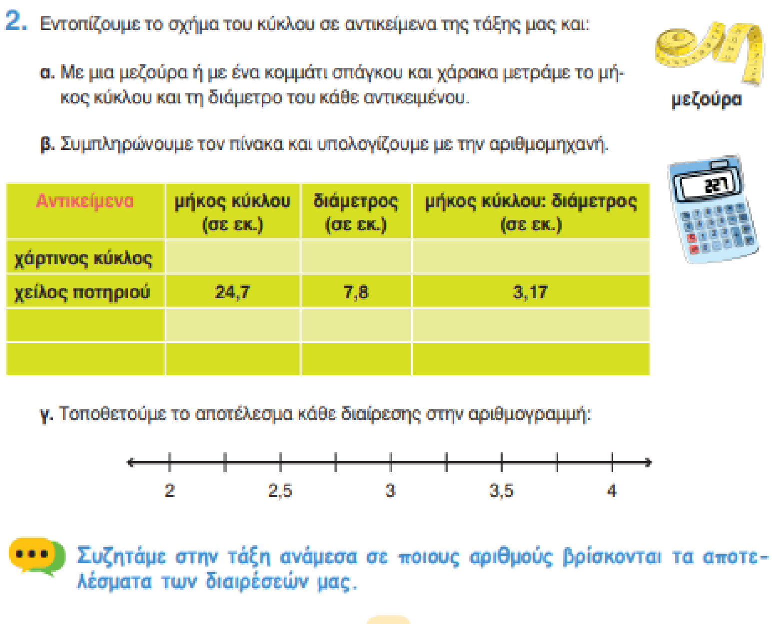
Οι Ευρετικές που προτείνονται από Δ.Ε.Π.Π.Σ. για την Ε΄ τάξη είναι:

1. Σχεδιάζω έναν πίνακα
2. Σχεδιάζω ένα διάγραμμα ή μια γραφική παράσταση
3. Δοκιμάζω με απλούστερους αριθμούς

4. Βρίσκω ένα μοντέλο
5. Εκτιμώ και ελέγχω

Ευρετικές εντοπίστηκαν στις δραστηριότητες Διερεύνησης και στις Εφαρμογές αλλά και σε επτά έργα στα επαναληπτικά κεφάλαια. Σε σχέση με τις Ευρετικές, θα πρέπει να σημειωθεί πως στις δραστηριότητες Διερεύνησης και στις Εφαρμογές, δίνονται στους μαθητές κυρίως έτοιμοι πίνακες και αριθμογραμμές και οι μαθητές καλούνται να τους συμπληρώσουν, χωρίς να είναι ξεκάθαρο σε αυτούς, ότι αποτελούν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων.

Για παράδειγμα στην Εικόνα 52, για να γίνει αντιληπτό το σχήμα του κύκλου και να εξασκηθούν οι μαθητές στο να υπολογίζουν το μήκος και τη διάμετρο του, καλούνται να μετρήσουν αντικείμενα της τάξης τους, το οποίο αποτελεί την ευρετική «Εφαρμόζω με πραγματικά υλικά» και συνέχεια καλούνται να συμπληρώσουν έναν πίνακα, το οποίο αποτελεί την ευρετική «Φτιάχνω ένα πίνακα», ενώ στη συνέχεια η συμπλήρωση της αριθμογραμμής με τα αποτελέσματα βοηθάει στην ανασκόπηση που ζητάει η τελευταία ερώτηση, οπότε δεν προσμετράτε σαν ευρετική. Στην εικόνα 53, η συμπλήρωση των αριθμών αποτελεί την ευρετική «Χρησιμοποιώ ένα μοντέλο» καθώς βοηθά στην επινόηση του σχεδίου από τους μαθητές.


2. Εντοπίζουμε το σχήμα του κύκλου σε αντικείμενα της τάξης μας και:

α. Με μια μεζούρα ή με ένα κομμάτι σπάγκου και χάρακα μετράμε το μήκος κύκλου και τη διάμετρο του κάθε αντικειμένου.

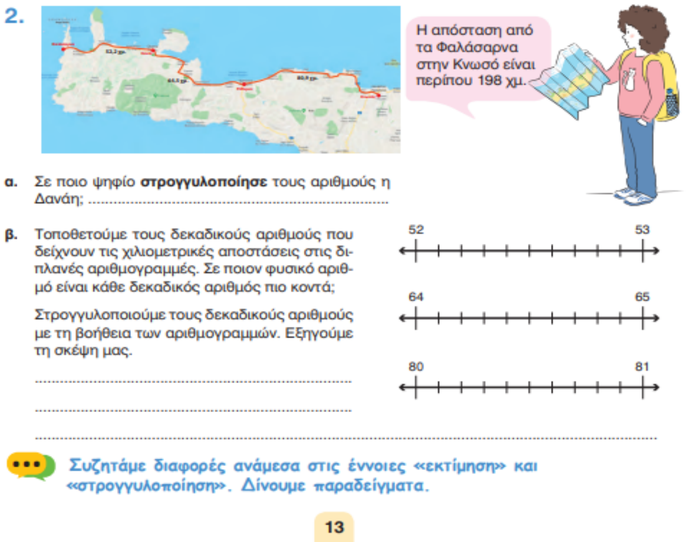
β. Συμπληρώνουμε τον πίνακα και υπολογίζουμε με την αριθμομηχανή.

Αντικείμενα	μήκος κύκλου (σε εκ.)	διάμετρος (σε εκ.)	μήκος κύκλου: διάμετρος (σε εκ.)
χάρτινος κύκλος			
χείλος ποτηριού	24,7	7,8	3,17

γ. Τοποθετούμε το αποτέλεσμα κάθε διαίρεσης στην αριθμογραμμή:

Συζητάμε στην τάξη ανάμεσα σε ποιους αριθμούς βρίσκονται τα αποτελέσματα των διαιρέσεών μας.

Εικόνα 54. Ευρετικές: Εφαρμόζω με πραγματικά υλικά, Φτιάχνω ένα πίνακα, Βιβλίο Μαθητή, β' τεύχος, σελ.55


2.

Η απόσταση από τα Φαλάσαρνα στην Κνωσό είναι περίπου 198 χμ.

α. Σε ποιο ψηφίο **στρογγυλοποίησε** τους αριθμούς η Δανάη; ....

β. Τοποθετούμε τους δεκαδικούς αριθμούς που δείχνουν τις χιλιομετρικές αποστάσεις στις διπλανές αριθμογραμμές. Σε ποιον φυσικό αριθμό είναι κάθε δεκαδικός αριθμός πιο κοντά;

Στρογγυλοποιούμε τους δεκαδικούς αριθμούς με τη βοήθεια των αριθμογραμμών. Εξηγούμε τη σκέψη μας.

....

....

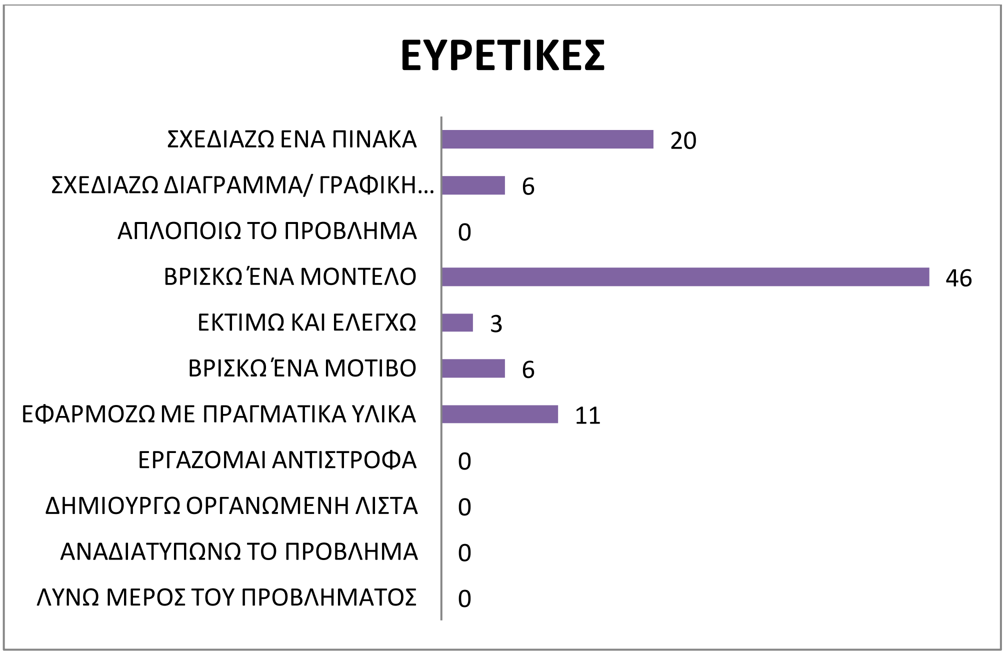
....

Συζητάμε διαφορές ανάμεσα στις έννοιες «εκτίμηση» και «στρογγυλοποίηση». Δίνουμε παραδείγματα.

13

Εικόνα 55. Ευρετική: Χρησιμοποιώ ένα μοντέλο, Βιβλίο Μαθητή, β' τεύχος, σελ. 13

Στα 208 έργα που εξετάστηκαν στις δραστηριότητες Ανακάλυψης (85), στις Εφαρμογές (65) και έργα στα Επαναληπτικά κεφάλαια (58), σε 70 από αυτά χρησιμοποιήθηκαν ή προτάθηκε η χρήση κάποιας ευρετικής. Δηλαδή, στο 34% των έργων συνολικά εντοπίστηκε μια ή περισσότερες ευρετικές. Οι ευρετικές που χρησιμοποιήθηκαν στο σχολικό εγχειρίδιο ήταν αυτές που προτείνονταν από το Δ.Ε.Π.Π.Σ. για την Ε΄ τάξη και ακόμη η ευρετική «Εφαρμόζω με πραγματικά υλικά». Συνολικά εντοπίστηκαν 92 ευρετικές, καθώς σε κάποια έργα προτείνονταν πάνω από μια ευρετικές και από αυτές, η ευρετική «Βρίσκω ένα μοντέλο» χρησιμοποιήθηκε σε μεγαλύτερο ποσοστό (50%) και το αναπαραστατικό μοντέλο που εντοπίστηκε σε μεγαλύτερη συχνότητα ήταν οι αριθμογραμμές. Η ευρετική «Φτιάχνω ένα πίνακα» εντοπίστηκε σε ποσοστό 21%,οι ευρετικές «Βρίσκω ένα μοτίβο» και «Σχεδιάζω μια γραφική παράσταση» εντοπίστηκαν σε ποσοστό 7% η καθεμία, η ευρετική «Εκτιμώ και ελέγχω» σε ποσοστό 3% και η ευρετική.

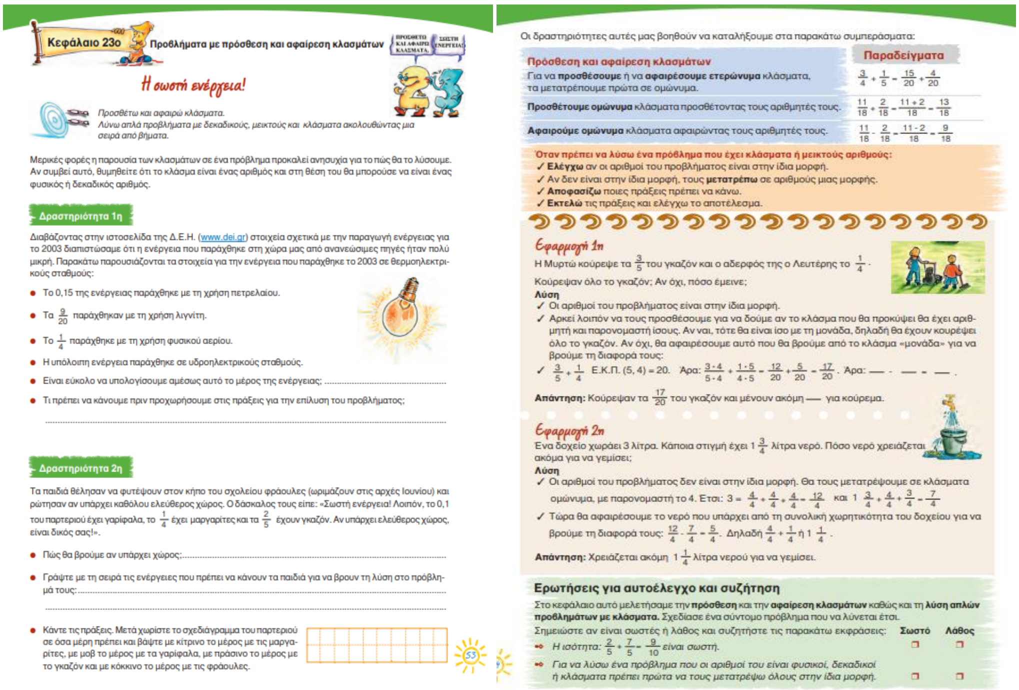


Γράφημα 12. Ευρετικές, Βιβλίο Μαθητή, α’-β’ τεύχος, Ε΄ τάξη

3.4 Σχολικό εγχειρίδιο της ΣΤ΄ Δημοτικού, Βιβλίο Μαθητή:

3.4.1 Δομή του σχολικού εγχειριδίου της ΣΤ΄ τάξης

Το σχολικό εγχειρίδιο της ΣΤ τάξης είναι χωρισμένο σε 6 θεματικές ενότητες και 71 κεφάλαια. Οι θεματικές ενότητες είναι: αριθμοί και πράξεις (24 κεφάλαια) εξισώσεις (5 κεφάλαια), λόγοι-αναλογίες (14 κεφάλαια), συλλογή και επεξεργασία δεδομένων (4 κεφάλαια), μετρήσεις- μοτίβα (7 κεφάλαια), γεωμετρία (16 κεφάλαια). Το κάθε κεφάλαιο διαρθρώνεται ως εξής: δίνονται οι διδακτικοί στόχοι, προσφέρονται 1 ή 2 δραστηριότητες Ανακάλυψης, ακολουθεί η παράθεση των ορισμών των εννοιών που διδάσκονται, ακολουθούν 1 ή 2 Εφαρμογές και το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με ερωτήσεις για Αυτοέλεγχο και Συζήτηση.



Κεφάλαιο 23ο Προβλήματα με πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

ΠΡΟΣΘΕΤΩ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΩ ΚΛΑΣΜΑΤΑ. ΣΩΣΤΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ!

Η σωστή ενέργεια!

Προσθέτω και αφαιρώ κλάσματα.
Λύνω απλά προβλήματα με δεκαδικούς, μεικτούς και κλάσματα ακολουθώντας μια σειρά από βήματα.

Μερικές φορές η παρουσία των κλασμάτων σε ένα πρόβλημα προκαλεί ανησυχία για το πώς θα το λύσουμε. Αν συμβεί αυτό, θυμηθείτε ότι το κλάσμα είναι ένας αριθμός και στη θέση του θα μπορούσε να είναι ένας φυσικός ή δεκαδικός αριθμός.

Δραστηριότητα 1η

Διαβάζοντας στην ιστοσελίδα της Δ.Ε.Η. (www.dei.gr) στοιχεία σχετικά με την παραγωγή ενέργειας για το 2003 διαπιστώσαμε ότι η ενέργεια που παράχθηκε στη χώρα μας από ανανεώσιμες πηγές ήταν πολύ μικρή. Παρακάτω παρουσιάζονται τα στοιχεία για την ενέργεια που παράχθηκε το 2003 σε θερμοηλεκτρικούς σταθμούς:

- Το 0,15 της ενέργειας παράχθηκε με τη χρήση πετρελαίου.
- Τα $\frac{9}{20}$ παράχθηκαν με τη χρήση λιγνίτη.
- Το $\frac{1}{4}$ παράχθηκε με τη χρήση φυσικού αερίου.
- Η υπόλοιπη ενέργεια παράχθηκε σε υδροηλεκτρικούς σταθμούς.
- Είναι εύκολο να υπολογίσουμε αμέσως αυτό το μέρος της ενέργειας; ....
- Τι πρέπει να κάνουμε πριν προχωρήσουμε στις πράξεις για την επίλυση του προβλήματος; ....

Δραστηριότητα 2η

Τα παιδιά θέλησαν να φυτέψουν στον κήπο του σχολείου φράουλες (ωριμάζουν στις αρχές Ιουνίου) και ρώτησαν αν υπάρχει καθόλου ελεύθερος χώρος. Ο δάσκαλος τους είπε: «Σωστή ενέργεια! Λοιπόν, το 0,1 του παρτεριού έχει γαρίφαλα, το $\frac{1}{4}$ έχει μαργαρίτες και τα $\frac{2}{5}$ έχουν γκαζόν. Αν υπάρχει ελεύθερος χώρος, είναι δικός σας!».

- Πώς θα βρούμε αν υπάρχει χώρος;..........
- Γράψτε με τη σειρά τις ενέργειες που πρέπει να κάνουν τα παιδιά για να βρουν τη λύση στο πρόβλημά τους:..........
- Κάντε τις πράξεις. Μετά χωρίστε το σχεδιάγραμμα του παρτεριού σε όσα μέρη πρέπει και βάψτε με κίτρινο το μέρος με τις μαργαρίτες, με μοβ το μέρος με τα γαρίφαλα, με πράσινο το μέρος με το γκαζόν και με κόκκινο το μέρος με τις φράουλες.

53

Οι δραστηριότητες αυτές μας βοηθούν να καταλήξουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:

Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων	Παραδείγματα
Για να **προσθέσουμε** ή να **αφαιρέσουμε ετερώνυμα** κλάσματα, τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα.	$\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{15}{20}+\frac{4}{20}$
Προσθέτουμε ομώνυμα κλάσματα προσθέτοντας τους αριθμητές τους.	$\frac{11}{18}+\frac{2}{18}=\frac{11+2}{18}=\frac{13}{18}$
Αφαιρούμε ομώνυμα κλάσματα αφαιρώντας τους αριθμητές τους.	$\frac{11}{18}-\frac{2}{18}=\frac{11-2}{18}=\frac{9}{18}$

Όταν πρέπει να λύσω ένα πρόβλημα που έχει κλάσματα ή μεικτούς αριθμούς:
✓ **Ελέγχω** αν οι αριθμοί του προβλήματος είναι στην ίδια μορφή.
✓ Αν δεν είναι στην ίδια μορφή, τους **μετατρέπω** σε αριθμούς μιας μορφής.
✓ **Αποφασίζω** ποιες πράξεις πρέπει να κάνω.
✓ **Εκτελώ** τις πράξεις και ελέγχω το αποτέλεσμα.

Εφαρμογή 1η

Η Μυρτώ κούρεψε τα $\frac{3}{5}$ του γκαζόν και ο αδερφός της ο Λευτέρης το $\frac{1}{4}$.
Κούρεψαν όλο το γκαζόν; Αν όχι, πόσο έμεινε;

Λύση
✓ Οι αριθμοί του προβλήματος είναι στην ίδια μορφή.
✓ Αρκεί λοιπόν να τους προσθέσουμε για να δούμε αν το κλάσμα που θα προκύψει θα έχει αριθμητή και παρονομαστή ίσους. Αν ναι, τότε θα είναι ίσο με τη μονάδα, δηλαδή θα έχουν κουρέψει όλο το γκαζόν. Αν όχι, θα αφαιρέσουμε αυτό που θα βρούμε από το κλάσμα «μονάδα» για να βρούμε τη διαφορά τους:
✓ $\frac{3}{5}+\frac{1}{4}$ Ε.Κ.Π. (5, 4) = 20. Άρα: $\frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4}+\frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5}=\frac{12}{20}+\frac{5}{20}=\frac{17}{20}$. Άρα: — - — = — .

Απάντηση: Κούρεψαν τα $\frac{17}{20}$ του γκαζόν και μένουν ακόμη — για κούρεμα.

Εφαρμογή 2η

Ένα δοχείο χωράει 3 λίτρα. Κάποια στιγμή έχει $1\frac{3}{4}$ λίτρα νερό. Πόσο νερό χρειάζεται ακόμα για να γεμίσει;

Λύση
✓ Οι αριθμοί του προβλήματος δεν είναι στην ίδια μορφή. Θα τους μετατρέψουμε σε κλάσματα ομώνυμα, με παρονομαστή το 4. Έτσι: $3=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{4}{4}=\frac{12}{4}$ και $1\frac{3}{4}=\frac{4}{4}+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$
✓ Τώρα θα αφαιρέσουμε το νερό που υπάρχει από τη συνολική χωρητικότητα του δοχείου για να βρούμε τη διαφορά τους: $\frac{12}{4}-\frac{7}{4}=\frac{5}{4}$. Δηλαδή $\frac{4}{4}+\frac{1}{4}$ ή $1\frac{1}{4}$.

Απάντηση: Χρειάζεται ακόμη $1\frac{1}{4}$ λίτρα νερού για να γεμίσει.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε την **πρόσθεση** και την **αφαίρεση κλασμάτων** καθώς και τη **λύση απλών προβλημάτων με κλάσματα.** Σχεδίασε ένα σύντομο πρόβλημα που να λύνεται έτσι.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις: **Σωστό** **Λάθος**
- *Η ισότητα: $\frac{2}{5}+\frac{7}{5}=\frac{9}{10}$ είναι σωστή.* ☐ ☐
- *Για να λύσω ένα πρόβλημα που οι αριθμοί του είναι φυσικοί, δεκαδικοί ή κλάσματα πρέπει πρώτα να τους μετατρέψω όλους στην ίδια μορφή.* ☐ ☐

Εικόνα 56. Δομή στο Βιβλίο Μαθητή, ΣΤ΄ τάξη, σελ. 53-54

3.4.2 Τα προβλήματα στο Βιβλίο Μαθητή της ΣΤ΄ τάξης Δημοτικού

Στο σχολικό εγχειρίδιο της ΣΤ' τάξης καταμετρήθηκαν και ταξινομήθηκαν 137 προβλήματα στο κυρίως μέρος του μαθήματος, που είναι χαρακτηρισμένες ως Δραστηριότητες, 122 προβλήματα που αποτελούν τις Εφαρμογές, δηλαδή εξ' ολοκλήρου λυμένες ασκήσεις που υποδεικνύουν στους μαθητές τον τρόπο λύσης του προβλήματος, 142 προβλήματα αποτελούν τις Ερωτήσεις για Αυτοέλεγχο και Συζήτηση και 18 προβλήματα βρέθηκαν στα κεφάλαια ανακεφαλαίωσης. Συνολικά δηλαδή, εξετάστηκαν 419 προβλήματα, τα οποία στο μεγαλύτερο μέρος τους είναι Παραδοσιακά (98%), Εφαρμογής (51%), σε Μαθηματική μορφή (41%).

Πιο αναλυτικά, όπως φαίνεται στον Πίνακα 8, οι «Δραστηριότητες» στο σχολικό εγχειρίδιο της ΣΤ΄ τάξης αποτελούν εξ' ολοκλήρου Παραδοσιακά προβλήματα, εκτός μίας, επί τον πλείστον Εφαρμογής και παρουσιάζονται κυρίως σε Συνδυαστική μορφή. Παρόλο που κάποια προβλήματα παρουσιάζουν αποτελέσματα από Προβλήματα Έργου, δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα που να ζητά από τους μαθητές να διεξάγουν ένα Πρόβλημα Έργου και ως εκ τούτου αυτά τα προβλήματα ταξινομήθηκαν ως Παραδοσιακά. Στις δραστηριότητες Εφαρμογής, δηλαδή τις λυμένες δραστηριότητες, επίσης όλα τα προβλήματα ήταν

Παραδοσιακά, στο μεγαλύτερο ποσοστό Εφαρμογής και παρουσιάζονταν κυρίως, σε Λεκτική μορφή.

Τα περισσότερα προβλήματα Μη Εφαρμογής εντοπίστηκαν στις δραστηριότητες των Ερωτήσεων για Αυτοέλεγχο και Συζήτηση, όπου όλα τα προβλήματα ήταν Μη Εφαρμογής (εκτός από δύο) και παρουσιάζονταν σε Μαθηματική μορφή (εκτός από δύο), γεγονός που άλλαξε πολύ τα αποτελέσματα, σχετικά με το πλαίσιο και τη μορφή παρουσίασης των δεδομένων. Σε αυτές τις ερωτήσεις στόχος ήταν να εντοπιστεί, αν οι μαθητές έχουν κατανοήσει την μαθηματική έννοια που διδάχτηκαν προηγουμένως, δίνοντας παραδείγματα και απαντώντας σε ερωτήσεις Σωστού-Λάθους. Στα επαναληπτικά κεφάλαια, εντοπίστηκαν τα περισσότερα Μη Παραδοσιακά προβλήματα, δηλαδή τα έξι από τα συνολικά εννιά του σχολικού εγχειριδίου και τα περισσότερα ήταν Εφαρμογής σε Λεκτική μορφή.

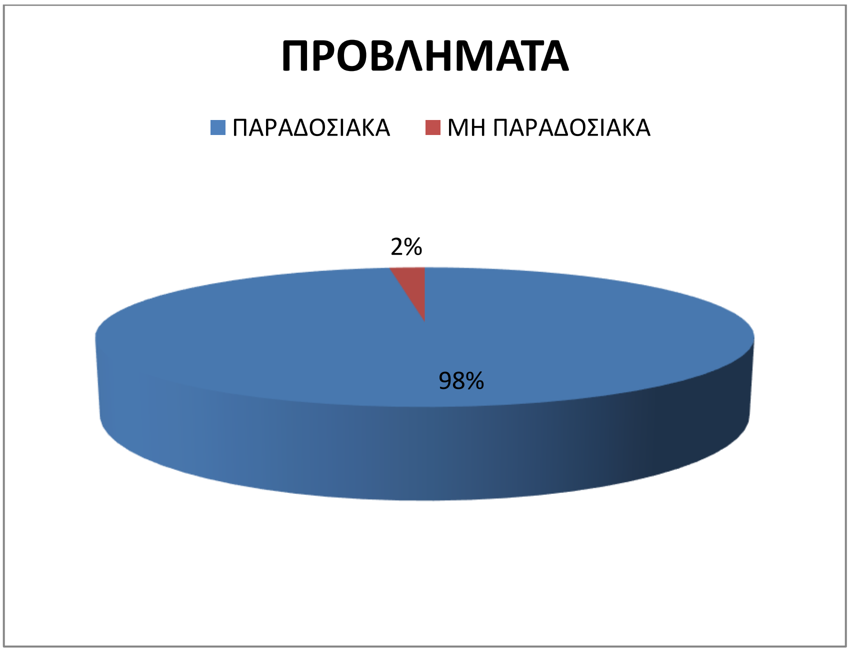
ΕΡΓΑ/ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΒΙΒΛΙΟ ΜΑΘΗΤΗ ΣΤ’ ΤΑΞΗ	**ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ**	**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**	**ΑΥΤΟΕΛΕΓΧΟ**	**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ**	**ΣΥΝΟΛΟ**
ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΑ	136	122	140	12	410
ΜΗ ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΑ	1	0	2	6	9
ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ	112	89	2	11	214
ΜΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ	25	33	140	6	204
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	3	23	140	0	166
ΛΕΚΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	48	67	2	13	130
ΟΠΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	0	0	0	0	0
ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	86	32	0	5	123
ΣΥΝΟΛΟ	137	122	142	18	419

Πίνακας 8. Τύποι προβλημάτων/έργων, Βιβλίο Μαθητή, ΣΤ΄ τάξη

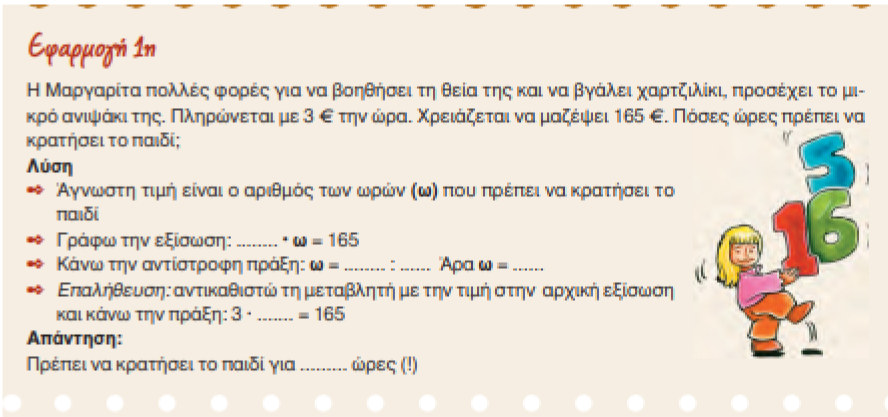
3.4.3. Τύποι προβλημάτων

3.4.3.1. Παραδοσιακά- Μη παραδοσιακά προβλήματα

Με βάση την εξέταση του σχολικού εγχειριδίου της ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού, το μεγαλύτερο μέρος των προβλημάτων που χρησιμοποιούνται σε αυτό αποτελούν Παραδοσιακά προβλήματα. Όπως φαίνεται και στο Γράφημα 13, το 98% (N=410) των προβλημάτων είναι Παραδοσιακά προβλήματα, ενώ το 2% (N=9) των προβλημάτων είναι Μη Παραδοσιακά. Πιο αναλυτικά, εντοπίστηκαν πέντε (5) προβλήματα που ζητούσαν την Κατασκευή προβλήματος (Problem Posing), τα τρία από αυτά εντοπίστηκαν στα προβλήματα στα Επαναληπτικά κεφάλαια και δύο στις Ερωτήσεις για Αυτοέλεγχο και Συζήτηση. Δύο (2) Προβλήματα Γρίφοι (Puzzle Problem) εντοπίστηκαν συνολικά, το ένα στα στις Δραστηριότητες και το δεύτερο στα Επαναληπτικά κεφάλαια. Ένα (1) Πρόβλημα Έργου (Project Problem) και ένα (1) Πρόβλημα Ημερολογίου (Journal Problem) εντοπίστηκαν στα επαναληπτικά κεφάλαια (Γράφημα 14).



Γράφημα 13. Παραδοσιακά- Μη παραδοσιακά προβλήματα, Βιβλίο Μαθητή, ΣΤ’ τάξη


Εφαρμογή 1η

Η Μαργαρίτα πολλές φορές για να βοηθήσει τη θεία της και να βγάλει χαρτζιλίκι, προσέχει το μικρό ανιψάκι της. Πληρώνεται με 3 € την ώρα. Χρειάζεται να μαζέψει 165 €. Πόσες ώρες πρέπει να κρατήσει το παιδί;

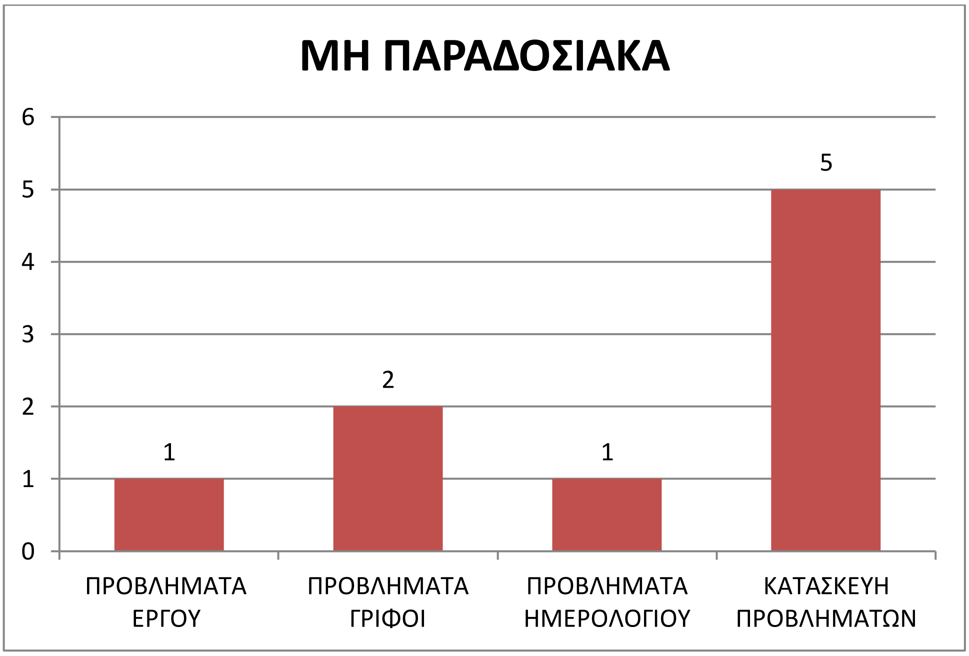
Λύση

- Άγνωστη τιμή είναι ο αριθμός των ωρών **(ω)** που πρέπει να κρατήσει το παιδί
- Γράφω την εξίσωση: .... · **ω** = 165
- Κάνω την αντίστροφη πράξη: **ω** = ... : ...... Άρα **ω** = ...
- *Επαλήθευση:* αντικαθιστώ τη μεταβλητή με την τιμή στην αρχική εξίσωση και κάνω την πράξη: 3 · .... = 165

Απάντηση:

Πρέπει να κρατήσει το παιδί για .... ώρες (!)

Εικόνα 57. Παραδοσιακό πρόβλημα, Βιβλίο Μαθητή, σελ.68



Γράφημα 14. Μη παραδοσιακά προβλήματα, Βιβλίο Μαθητή, ΣΤ΄ τάξη

Πρόβλημα

Να γράψετε με την ομάδα σου ένα πρόβλημα χρησιμοποιώντας τα κλάσματα $\frac{3}{4}$ και $\frac{1}{5}$ και να το λύσετε.

....

....

....

....

....

....

....

Λύση

Απάντηση: ....

Εικόνα 58. Πρόβλημα Κατασκευής, Βιβλίο Μαθητή, σελ. 58

1ο Πρόβλημα

Τι είδους γράφημα θα χρησιμοποιούσες για να καταγράψεις την αλλαγή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια της ημέρας; Κάνε μια καταγραφή και παρουσίασέ τη με γράφημα. Επίσης βρες τον μέσο όρο της θερμοκρασίας για τη συγκεκριμένη ημέρα.

Λύση - Απάντηση:

133

Εικόνα 59. Πρόβλημα Έργου, Βιβλίο Μαθητή, σελ.133

Δραστηριότητα 2η

Από τα αρχαία ακόμη χρόνια οι άνθρωποι έδωσαν ιδιαίτερη προσοχή στους πολλαπλασιασμούς στους οποίους όλοι οι παράγοντες ήταν ίδιοι. Στον Πάπυρο του Αχμές (αρχαίο μαθηματικό αιγυπτιακό χειρόγραφο που ο Ριντ μετέφερε στη Βρετανία) διαβάζουμε το παρακάτω πρόβλημα:

Υπάρχουν εφτά σπίτια. Σε κάθε σπίτι ζουν εφτά γάτες. Κάθε γάτα έφαγε εφτά ποντίκια. Κάθε ποντίκι, αν ζούσε, θα έχει φάει εφτά στάχυα. Κάθε στάχυ που φυτεύεται παράγει εφτά κούπες σιτάρι. Πόσο περισσότερες κούπες σιτάρι θα παραχθούν χάρη στις γάτες κατά την επόμενη σοδειά ;

- Γράψτε τη διαδικασία που θα ακολουθήσετε για να λύσετε το «πρόβλημα»:

  ....

  ....

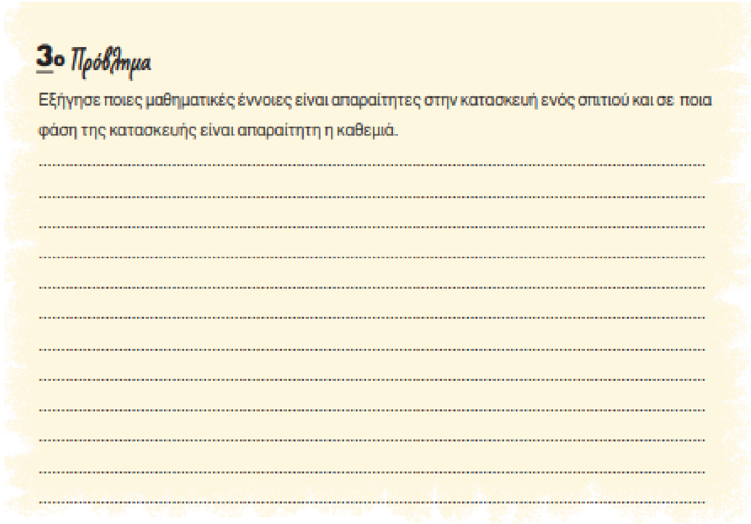
  ....

- Πιστεύετε ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι δάσκαλοι έβαλαν το πρόβλημα αυτό μόνο για να βρεθεί η ποσότητα του σιταριού; ....

  ....

  ....

Εικόνα 60. Πρόβλημα Γρίφου, Βιβλίο Μαθητή, σελ.41


3ο Πρόβλημα

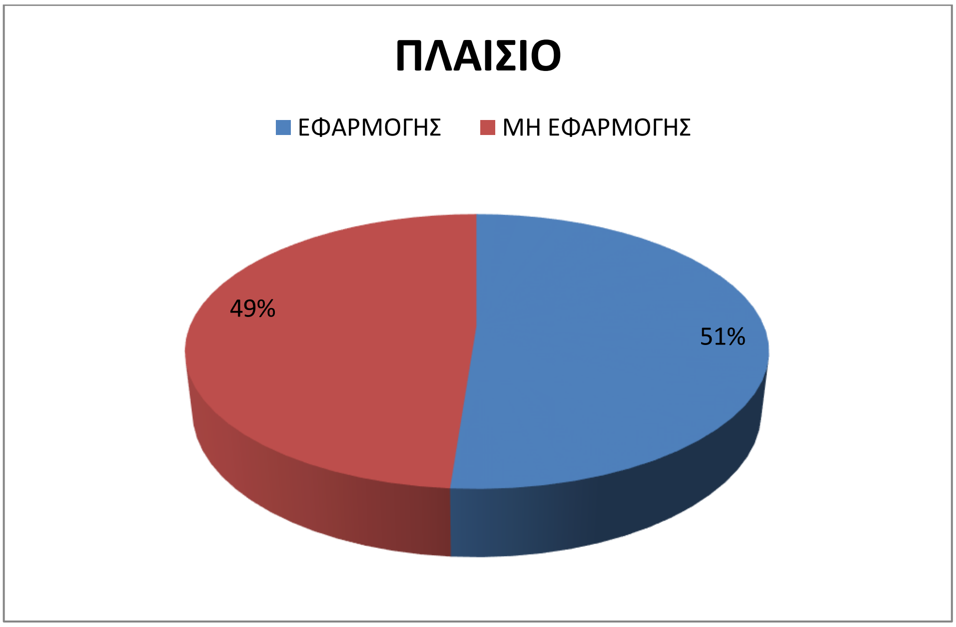
Εξήγησε ποιες μαθηματικές έννοιες είναι απαραίτητες στην κατασκευή ενός σπιτιού και σε ποια φάση της κατασκευής είναι απαραίτητη η καθεμιά.

Εικόνα 61. Πρόβλημα Ημερολογίου, Βιβλίο Μαθητή, σελ. 170

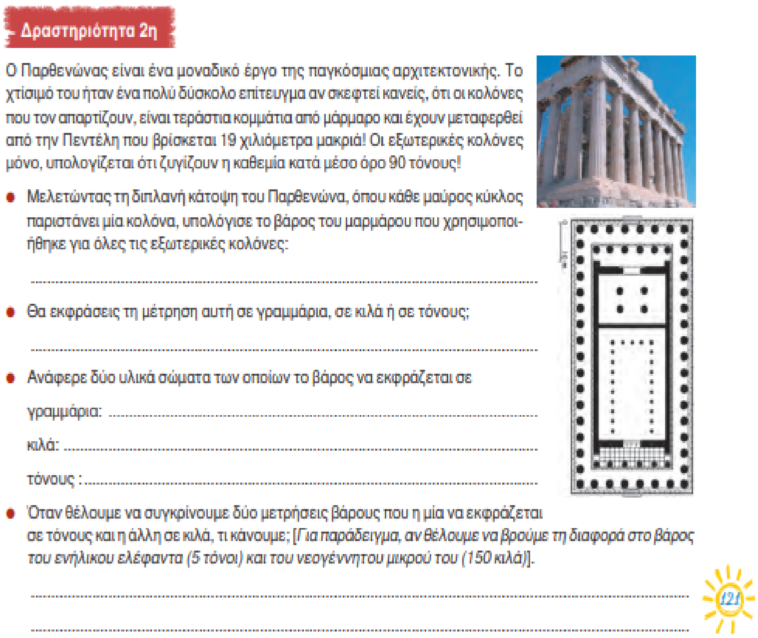
3.4.3.2. Προβλήματα Εφαρμογής- Μη εφαρμογής

Τα περισσότερα προβλήματα στο σχολικό εγχειρίδιο της ΣΤ' τάξης είναι Εφαρμογής, καθώς αναφέρονται με κάποιο τρόπο σε θέματα της καθημερινής ζωής. Στις Δραστηριότητες, στις Εφαρμογές και στα Επαναληπτικά κεφάλαια, στις περισσότερες δραστηριότητες, εκτός από της Γεωμετρίας, τα προβλήματα έχουν κάποιο πλαίσιο που αναφέρεται στην πραγματικότητα. Αντίθετα, από προβλήματα Μη Εφαρμογής αποτελούνται όλες οι δραστηριότητες στις Ερωτήσεις για Αυτοέλεγχο και Συζήτηση, όπου δίνεται βαρύτητα στον έλεγχο της κατανόησης της μαθηματικής έννοιας που διδάχθηκε, όπου οι μαθητές καλούνται να εξηγήσουν μαθηματικούς όρους/εκφράσεις/έννοιες μέσω παραδειγμάτων και ασκήσεων Σωστού-Λάθους.

Ένα εξαιρέσουμε τις Ερωτήσεις για Αυτοέλεγχο και Συζήτηση (142 προβλήματα), από τα υπόλοιπα 277 προβλήματα, τα 212 είναι Εφαρμογής, δηλαδή το 77% των προβλημάτων, αναφέρονται με κάποιο τρόπο στην πραγματικότητα. Αυτό σημαίνει πως τα περισσότερα προβλήματα που χρησιμοποιούνται στο σχολικό εγχειρίδιο, έχουν ένα πλαίσιο που αναφέρεται με κάποιο τρόπο στην πραγματική ζωή (είτε πραγματικά αντικείμενα είτε καταστάσεις). Με τα προβλήματα στις Ερωτήσεις για Αυτοέλεγχο και Συζήτηση, το ποσοστό αυτό μεταβάλλεται, και τα προβλήματα Μη Εφαρμογής και εφαρμογής βρίσκονται σχεδόν σε ίδιο αριθμό (51% έργα Εφαρμογής και 49% προβλήματα Μη Εφαρμογής).



Γράφημα 15. Προβλήματα Εφαρμογής-Μη εφαρμογής, Βιβλίο Μαθητή, ΣΤ’ τάξη



Δραστηριότητα 2η

Ο Παρθενώνας είναι ένα μοναδικό έργο της παγκόσμιας αρχιτεκτονικής. Το χτίσιμό του ήταν ένα πολύ δύσκολο επίτευγμα αν σκεφτεί κανείς, ότι οι κολόνες που τον απαρτίζουν, είναι τεράστια κομμάτια από μάρμαρο και έχουν μεταφερθεί από την Πεντέλη που βρίσκεται 19 χιλιόμετρα μακριά! Οι εξωτερικές κολόνες μόνο, υπολογίζεται ότι ζυγίζουν η καθεμία κατά μέσο όρο 90 τόνους!

- Μελετώντας τη διπλανή κάτοψη του Παρθενώνα, όπου κάθε μαύρος κύκλος παριστάνει μία κολόνα, υπολόγισε το βάρος του μαρμάρου που χρησιμοποιήθηκε για όλες τις εξωτερικές κολόνες:

  ....

- Θα εκφράσεις τη μέτρηση αυτή σε γραμμάρια, σε κιλά ή σε τόνους;

  ....

- Ανάφερε δύο υλικά σώματα των οποίων το βάρος να εκφράζεται σε

  γραμμάρια: ....

  κιλά: ....

  τόνους : ....

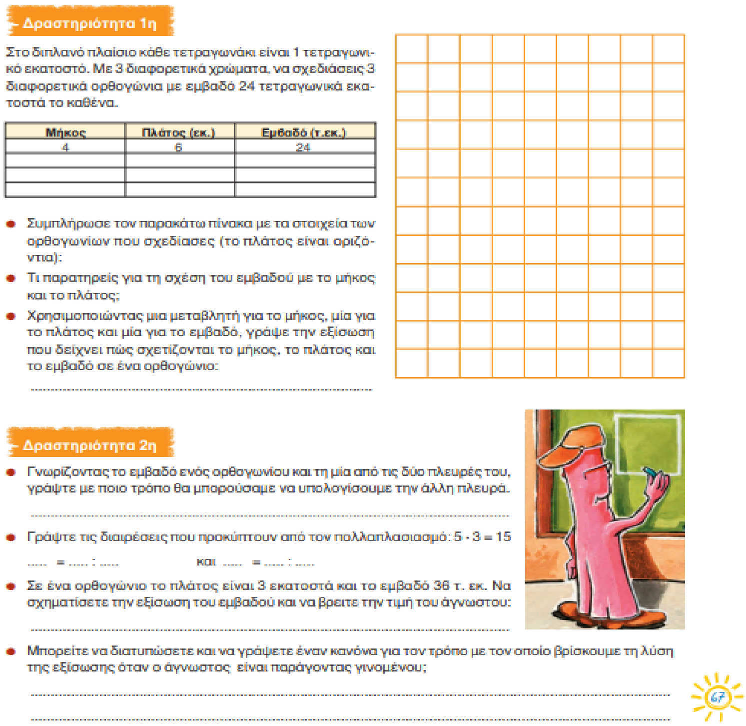
- Όταν θέλουμε να συγκρίνουμε δύο μετρήσεις βάρους που η μία να εκφράζεται σε τόνους και η άλλη σε κιλά, τι κάνουμε; [*Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε τη διαφορά στο βάρος του ενήλικου ελέφαντα (5 τόνοι) και του νεογέννητου μικρού του (150 κιλά)*].

  ....

  ....

121

Εικόνα 62. Πρόβλημα Εφαρμογής, Βιβλίο Μαθητή, σελ. 121



Δραστηριότητα 1η

Στο διπλανό πλαίσιο κάθε τετραγωνάκι είναι 1 τετραγωνικό εκατοστό. Με 3 διαφορετικά χρώματα, να σχεδιάσεις 3 διαφορετικά ορθογώνια με εμβαδό 24 τετραγωνικά εκατοστά το καθένα.

Μήκος	Πλάτος (εκ.)	Εμβαδό (τ.εκ.)
4	6	24

- Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα με τα στοιχεία των ορθογωνίων που σχεδίασες (το πλάτος είναι οριζόντια):
- Τι παρατηρείς για τη σχέση του εμβαδού με το μήκος και το πλάτος;
- Χρησιμοποιώντας μια μεταβλητή για το μήκος, μία για το πλάτος και μία για το εμβαδό, γράψε την εξίσωση που δείχνει πώς σχετίζονται το μήκος, το πλάτος και το εμβαδό σε ένα ορθογώνιο:

....

Δραστηριότητα 2η

- Γνωρίζοντας το εμβαδό ενός ορθογωνίου και τη μία από τις δύο πλευρές του, γράψτε με ποιο τρόπο θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την άλλη πλευρά.

....

- Γράψτε τις διαιρέσεις που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό: 5 · 3 = 15

..... = ... : .....   και ..... = ... : .....

- Σε ένα ορθογώνιο το πλάτος είναι 3 εκατοστά και το εμβαδό 36 τ. εκ. Να σχηματίσετε την εξίσωση του εμβαδού και να βρειτε την τιμή του άγνωστου:

....

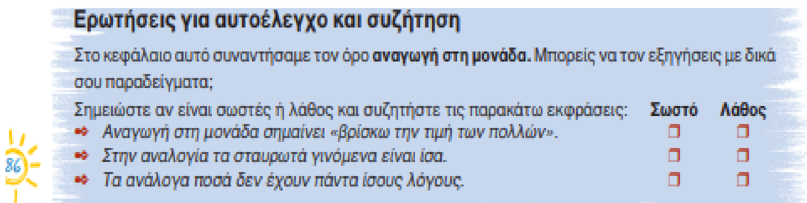
- Μπορείτε να διατυπώσετε και να γράψετε έναν κανόνα για τον τρόπο με τον οποίο βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης όταν ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου;

....

....

67

Εικόνα 63. Πρόβλημα Μη εφαρμογής, Βιβλίο Μαθητή, σελ. 67



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **αναγωγή στη μονάδα.** Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις: **Σωστό** **Λάθος**

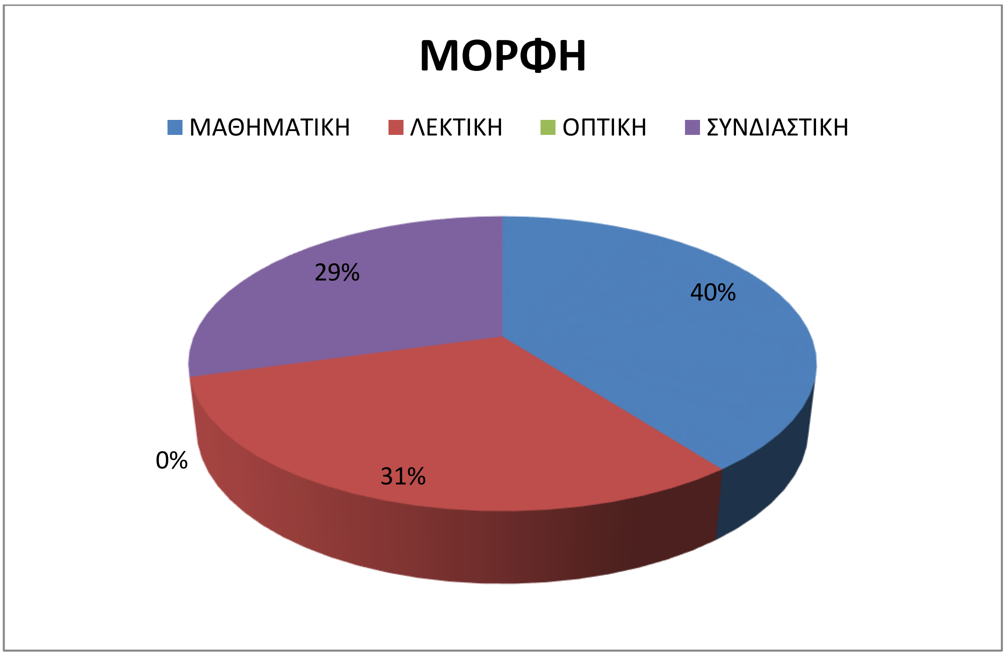
- *Αναγωγή στη μονάδα σημαίνει «βρίσκω την τιμή των πολλών».* ☐ ☐
- *Στην αναλογία τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα.* ☐ ☐
- *Τα ανάλογα ποσά δεν έχουν πάντα ίσους λόγους.* ☐ ☐

86

Εικόνα 64. Πρόβλημα Μη εφαρμογής, Βιβλίο Μαθητή, σελ.86

3.4.3.3. Προβλήματα σε Μαθηματική- Λεκτική- Οπτική- Συνδυαστική Μορφή

Σε σχέση με την παρουσίαση των δεδομένων, τα 166 προβλήματα (40%) παρουσιάστηκαν σε Μαθηματική μορφή, τα 130 (31%) σε Λεκτική μορφή και τα 123 (29%), σε Συνδυαστική μορφή, καθώς χρησιμοποιήθηκαν πάνω από δύο τρόποι για την διατύπωση και αναπαράσταση τους. Ο κυρίαρχος συνδυασμός ήταν λέξεις με πίνακες ή σχήματα ή εικόνες. Όπως φαίνεται, καθώς εξελίσσονται οι τάξεις, οι οπτικές αναπαραστάσεις μειώνονται κατά την αναπαράσταση των δεδομένων του προβλήματος και χρησιμοποιούνται κυρίως λεκτικά προβλήματα.

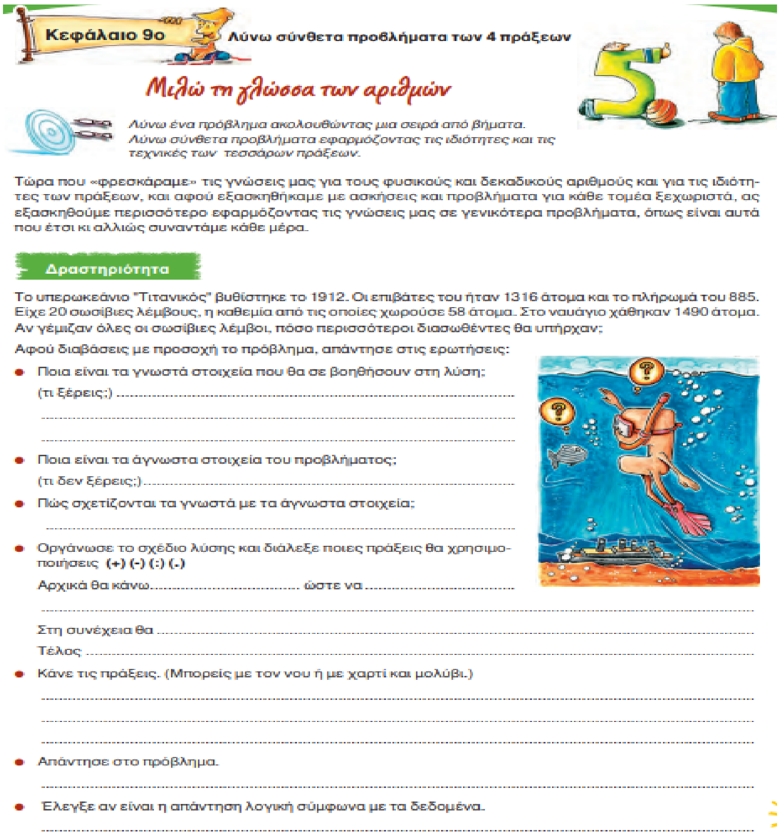


Γράφημα 16. Μορφή παρουσίασης προβλημάτων, Βιβλίο Μαθητή, ΣΤ' τάξη

3.4.4. Στάδια Επίλυσης Προβλήματος

Τα στάδια επίλυσης του Pólya διερευνήθηκαν στις Δραστηριότητες και στις Εφαρμογές, δηλαδή, σε 259 έργα. Τα στάδια επίλυσης προβλήματος του Pólya, αποτελούν αντικείμενο διδασκαλίας στο κεφάλαιο 9 «Λύνω σύνθετα προβλήματα των 4 πράξεων» (σελ. 25), όπου κάθε στάδιο αντιπροσωπεύεται από τις ανάλογες ερωτήσεις. Ο τίτλος του κεφαλαίου φανερώνει την πεποίθηση των συγγραφέων, πως τα στάδια επίλυσης χρησιμοποιούνται σε σύνθετα προβλήματα, γι' αυτό και το πρόβλημα σε αυτό το κεφάλαιο διαφοροποιείται (έχει πλεονάζοντα στοιχεία και απαιτεί πολλά βήματα), ως προς το είδος από τα προβλήματα στις υπόλοιπες ενότητες. Αυτό είναι και το μόνο έργο, όπου τα τέσσερα στάδια επίλυσης προβλήματος διδάσκονται ρητά στους μαθητές. Στα υπόλοιπα κεφάλαια, όπου γίνεται διδασκαλία, μέσω της επίλυσης προβλήματος και όχι της επίλυσης προβλήματος, τα στάδια ταξινομήθηκαν με βάση, το τι προκαλούν οι ερωτήσεις στους μαθητές, δηλαδή αν το κάθε επιμέρους ερώτημα είχε σκοπό, ο μαθητής να κατανοήσει τα δεδομένα ή να επινοήσει ένα σχέδιο ή να εκτελέσει ένα σχέδιο ή την ανασκόπηση της λύσης/διαδικασίας. Όπως και στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε' τάξης, στις δραστηριότητες των

Εφαρμογών, όπου είναι δοσμένες οι λύσεις των προβλημάτων, διερευνήθηκε ποια στάδια παρουσιάζονται.



Κεφάλαιο 9ο Λύνω σύνθετα προβλήματα των 4 πράξεων

Μιλώ τη γλώσσα των αριθμών

Λύνω ένα πρόβλημα ακολουθώντας μια σειρά από βήματα.
Λύνω σύνθετα προβλήματα εφαρμόζοντας τις ιδιότητες και τις τεχνικές των τεσσάρων πράξεων.

Τώρα που «φρεσκάραμε» τις γνώσεις μας για τους φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς και για τις ιδιότητες των πράξεων, και αφού εξασκηθήκαμε με ασκήσεις και προβλήματα για κάθε τομέα ξεχωριστά, ας εξασκηθούμε περισσότερο εφαρμόζοντας τις γνώσεις μας σε γενικότερα προβλήματα, όπως είναι αυτά που έτσι κι αλλιώς συναντάμε κάθε μέρα.

Δραστηριότητα

Το υπερωκεάνιο "Τιτανικός" βυθίστηκε το 1912. Οι επιβάτες του ήταν 1316 άτομα και το πλήρωμά του 885. Είχε 20 σωσίβιες λέμβους, η καθεμία από τις οποίες χωρούσε 58 άτομα. Στο ναυάγιο χάθηκαν 1490 άτομα. Αν γέμιζαν όλες οι σωσίβιες λέμβοι, πόσο περισσότεροι διασωθέντες θα υπήρχαν;

Αφού διαβάσεις με προσοχή το πρόβλημα, απάντησε στις ερωτήσεις:

- Ποια είναι τα γνωστά στοιχεία που θα σε βοηθήσουν στη λύση;
  (τι ξέρεις;) ....
- Ποια είναι τα άγνωστα στοιχεία του προβλήματος;
  (τι δεν ξέρεις;) ....
- Πώς σχετίζονται τα γνωστά με τα άγνωστα στοιχεία;
  ....
- Οργάνωσε το σχέδιο λύσης και διάλεξε ποιες πράξεις θα χρησιμοποιήσεις (+) (-) (:) (.)
  Αρχικά θα κάνω.......... ώστε να ....
  Στη συνέχεια θα ....
  Τέλος ....
- Κάνε τις πράξεις. (Μπορείς με τον νου ή με χαρτί και μολύβι.)
  ....
- Απάντησε στο πρόβλημα.
  ....
- Έλεγξε αν είναι η απάντηση λογική σύμφωνα με τα δεδομένα.
  ....

Εικόνα 65. Τέσσερα στάδια επίλυσης προβλήματος, Βιβλίο Μαθητή, σελ.25

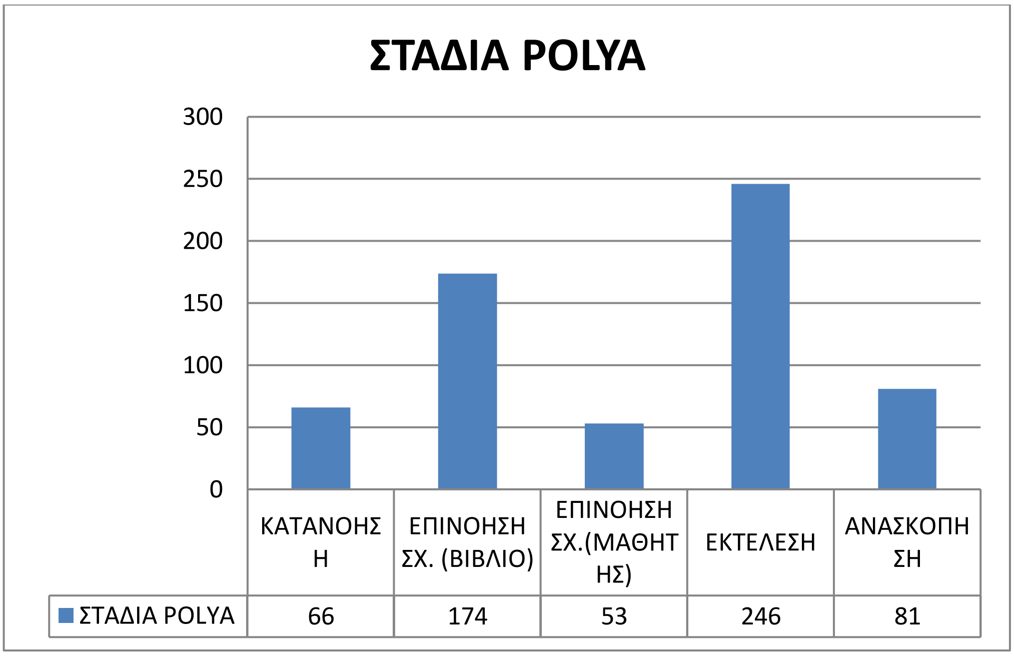
Το στάδιο που εντοπίστηκε σχεδόν σε όλα τα έργα στις Δραστηριότητες είναι αυτό της Εκτέλεσης Σχεδίου (124 έργα). Στις Δραστηριότητες οι μαθητές ήταν αυτοί από τους οποίους ζητούνταν η Εκτέλεση, ενώ σε όλες τις Εφαρμογές δινόταν είτε εξ' ολοκλήρου λυμένο το πρόβλημα (44 έργα), είτε οι μαθητές καλούνταν να συμπληρώσουν έτοιμους αλγορίθμους (78 έργα). Συνολικά στο 78% των έργων, οι μαθητές συμμετέχουν στο στάδιο της εκτέλεσης και το 17% των έργων δίνουν εξ' ολοκλήρου λυμένο το πρόβλημα. Στις Δραστηριότητες σε 54 έργα, η Επινόηση σχεδίου προτείνεται από το βιβλίο και σε 53 οι μαθητές καλούνταν να επινοήσουν ένα σχέδιο επίλυσης, ενώ σε όλα τα έργα των Εφαρμογών η Επινόηση σχεδίου προσφέρεται από το βιβλίο (122 έργα). Συνολικά το στάδιο της Επινόησης σχεδίου προσφέρεται από το βιβλίο σε 174 έργα (67%) και σε 53 έργα (20%)

καλούνται οι μαθητές να επινοήσουν ένα σχέδιο. Συνήθως, τα έργα στα οποία καλούνται οι μαθητές να επινοήσουν, κάποιο σχέδιο, αυτό είτε προηγουμένως έχει διδαχθεί, είτε είναι κάποιο απλοϊκό πρόβλημα.

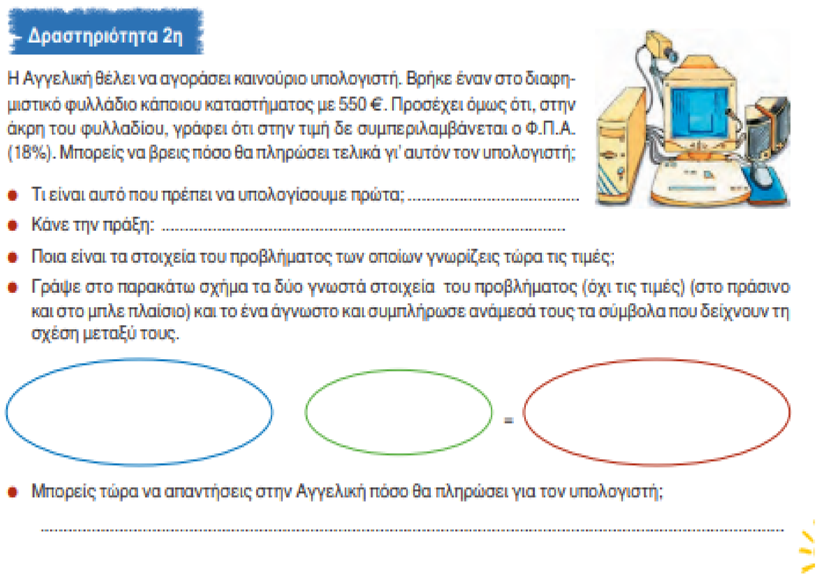
Το στάδιο της Κατανόησης εντοπίστηκε συνολικά σε 66 έργα (25%), εκ των οποίων τα 9 ήταν σε έργα των Εφαρμογών και τα υπόλοιπα 57 σε έργα στις Δραστηριότητες. Το στάδιο της Ανασκόπησης εντοπίστηκε συνολικά σε 81 έργα (31%), εκ των οποίων 7 στα έργα Εφαρμογής και τα υπόλοιπα 74 σε έργα στις Δραστηριότητες. Είναι άξιο προσοχής πως στα λυμένα έργα (Εφαρμογές), τα οποία λειτουργούν ως παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων για τους μαθητές τα στάδια της Κατανόησης και της Ανασκόπησης περιλαμβανόταν σε πολύ μικρό αριθμό έργων.

Στάδια επίλυσης	Δραστηριότητες	Εφαρμογές	Σύνολο
Κατανόηση	42%	7%	25%
Επινόηση σχεδίου (μαθητής)	50%	0%	20%
Επινόηση σχεδίου (βιβλίο)	50%	100%	67%
Εκτέλεση (μαθητής)	100%	64%	78%
Εκτέλεση (βιβλίο)		36%	17%
Ανασκόπηση	54%	6%	31%

Πίνακας 9. Στάδια του Pólya, Βιβλίο Μαθητή, ΣΤ΄ τάξη



Γράφημα 17. Στάδια του Pólya (Δραστηριότητες και Εφαρμογές), Βιβλίο Μαθητή, ΣΤ΄ τάξη



Δραστηριότητα 2η

Η Αγγελική θέλει να αγοράσει καινούριο υπολογιστή. Βρήκε έναν στο διαφημιστικό φυλλάδιο κάποιου καταστήματος με 550 €. Προσέχει όμως ότι, στην άκρη του φυλλαδίου, γράφει ότι στην τιμή δε συμπεριλαμβάνεται ο Φ.Π.Α. (18%). Μπορείς να βρεις πόσο θα πληρώσει τελικά γι' αυτόν τον υπολογιστή;

- Τι είναι αυτό που πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα; ....
- Κάνε την πράξη: ....
- Ποια είναι τα στοιχεία του προβλήματος των οποίων γνωρίζεις τώρα τις τιμές;
- Γράψε στο παρακάτω σχήμα τα δύο γνωστά στοιχεία του προβλήματος (όχι τις τιμές) (στο πράσινο και στο μπλε πλαίσιο) και το ένα άγνωστο και συμπλήρωσε ανάμεσά τους τα σύμβολα που δείχνουν τη σχέση μεταξύ τους.

=

- Μπορείς τώρα να απαντήσεις στην Αγγελική πόσο θα πληρώσει για τον υπολογιστή;

....

Εικόνα 66. Στάδιο: Κατανόηση, επινόηση σχεδίου(βιβλίο), εκτέλεση, Βιβλίο Μαθητή,σελ.99

Δραστηριότητα 1η

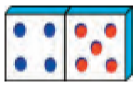
Η σχολική ομάδα μπάσκετ θέλει να προμηθευτεί αθλητικά μπλουζάκια. Βρήκαν ότι σε προσφορά τα 2 μπλουζάκια κοστίζουν 12 €. Πόσο θα κοστίσουν τα μπλουζάκια για όλη την ομάδα που αποτελείται από 8 παίκτες;

- Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος μπορώ εύκολα να υπολογίσω πόσο κάνουν τα 8 μπλουζάκια;
- Ξέροντας όμως την τιμή των 2 (πολλών) τι μπορώ να βρω;
- Πώς μπορώ μετά να βρω την τιμή των 8;
- Κάνε τις πράξεις στις κενές σειρές που ακολουθούν:
- ....
- ....
- ....

Εικόνα 67. Στάδια: Κατανόηση, Επινόηση σχεδίου (βιβλίο)& Εκτέλεση, Βιβλίο Μαθητή, σελ.85

Δραστηριότητα 1η

Σε ένα παιχνίδι ντόμινο βρίσκεται στα χέρια σου η διπλανή κάρτα.

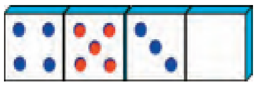


- Ποιο είναι το άθροισμα των σημείων της;..
- Με πόσους τρόπους μπορούμε να οδηγηθούμε στο άθροισμα;
- Τι παρατηρείς;...

Τι παρατηρείς στη δεύτερη κάρτα για το άθροισμα με το 0;

....

....



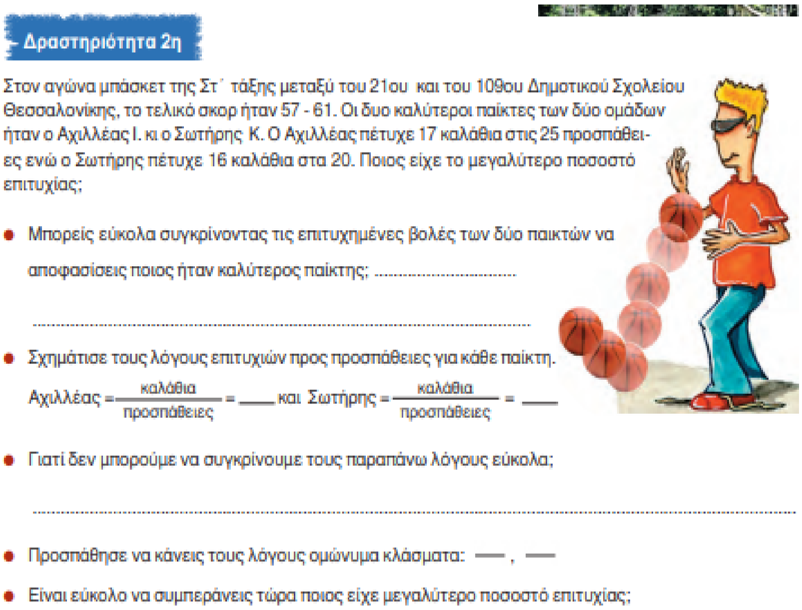
Αν έχεις να προσθέσεις τις δύο αυτές κάρτες μαζί, να περιγράψεις τους τρόπους με τους οποίους μπορείς να το κάνεις:

....

....

....

Εικόνα 68. Στάδια: Επινόηση σχεδίου (μαθητής) & Εκτέλεση, Βιβλίο Μαθητή, σελ.17



Δραστηριότητα 2η

Στον αγώνα μπάσκετ της Στ΄ τάξης μεταξύ του 21ου και του 109ου Δημοτικού Σχολείου Θεσσαλονίκης, το τελικό σκορ ήταν 57 - 61. Οι δυο καλύτεροι παίκτες των δύο ομάδων ήταν ο Αχιλλέας Ι. κι ο Σωτήρης Κ. Ο Αχιλλέας πέτυχε 17 καλάθια στις 25 προσπάθειες ενώ ο Σωτήρης πέτυχε 16 καλάθια στα 20. Ποιος είχε το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας;

- Μπορείς εύκολα συγκρίνοντας τις επιτυχημένες βολές των δύο παικτών να αποφασίσεις ποιος ήταν καλύτερος παίκτης; ....

  ....

- Σχημάτισε τους λόγους επιτυχιών προς προσπάθειες για κάθε παίκτη.

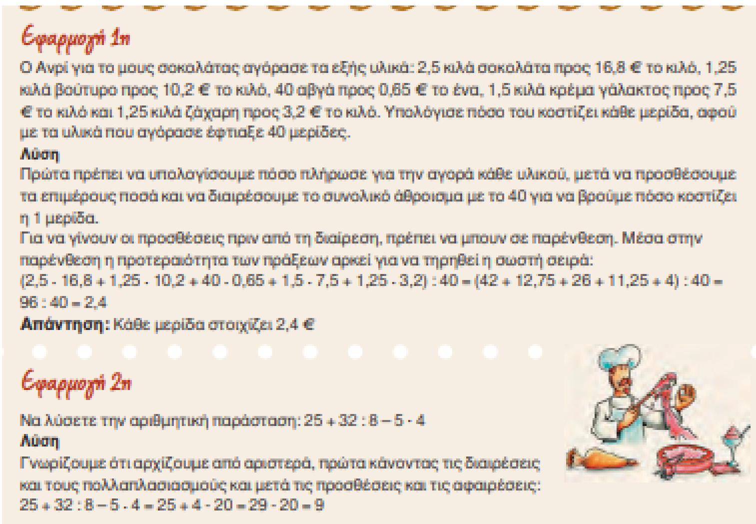
  Αχιλλέας = $\frac{\text{καλάθια}}{\text{προσπάθειες}}$ = ___ και Σωτήρης = $\frac{\text{καλάθια}}{\text{προσπάθειες}}$ = ___

- Γιατί δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τους παραπάνω λόγους εύκολα;

  ....

- Προσπάθησε να κάνεις τους λόγους ομώνυμα κλάσματα: —, —
- Είναι εύκολο να συμπεράνεις τώρα ποιος είχε μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας;

Εικόνα 69. Στάδια: Κατανόηση & Επινόηση σχεδίου(βιβλίο) & Εκτέλεση, Βιβλίο Μαθητή, σελ. 95



Εφαρμογή 1η

Ο Ανρί για το μους σοκολάτας αγόρασε τα εξής υλικά: 2,5 κιλά σοκολάτα προς 16,8 € το κιλό, 1,25 κιλά βούτυρο προς 10,2 € το κιλό, 40 αβγά προς 0,65 € το ένα, 1,5 κιλά κρέμα γάλακτος προς 7,5 € το κιλό και 1,25 κιλά ζάχαρη προς 3,2 € το κιλό. Υπολόγισε πόσο του κοστίζει κάθε μερίδα, αφού με τα υλικά που αγόρασε έφτιαξε 40 μερίδες.

Λύση

Πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε πόσο πλήρωσε για την αγορά κάθε υλικού, μετά να προσθέσουμε τα επιμέρους ποσά και να διαιρέσουμε το συνολικό άθροισμα με το 40 για να βρούμε πόσο κοστίζει η 1 μερίδα.

Για να γίνουν οι προσθέσεις πριν από τη διαίρεση, πρέπει να μπουν σε παρένθεση. Μέσα στην παρένθεση η προτεραιότητα των πράξεων αρκεί για να τηρηθεί η σωστή σειρά:

$(2{,}5 \cdot 16{,}8 + 1{,}25 \cdot 10{,}2 + 40 \cdot 0{,}65 + 1{,}5 \cdot 7{,}5 + 1{,}25 \cdot 3{,}2) : 40 = (42 + 12{,}75 + 26 + 11{,}25 + 4) : 40 = 96 : 40 = 2{,}4$

Απάντηση: Κάθε μερίδα στοιχίζει 2,4 €

Εφαρμογή 2η

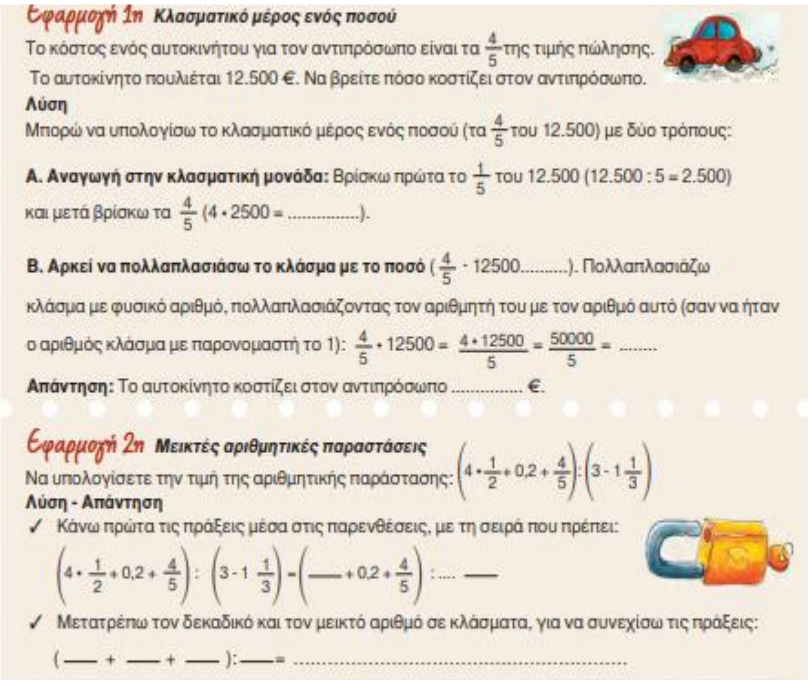
Να λύσετε την αριθμητική παράσταση: $25 + 32 : 8 - 5 \cdot 4$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι αρχίζουμε από αριστερά, πρώτα κάνοντας τις διαιρέσεις και τους πολλαπλασιασμούς και μετά τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις:

$25 + 32 : 8 - 5 \cdot 4 = 25 + 4 - 20 = 29 - 20 = 9$

Εικόνα 70. Στάδια: Επινόηση σχεδίου & Εκτέλεση (Λυμένα εξ’ ολοκλήρου), Βιβλίο Μαθητή, σελ.24



Εφαρμογή 1η **Κλασματικό μέρος ενός ποσού**

Το κόστος ενός αυτοκινήτου για τον αντιπρόσωπο είναι τα $\frac{4}{5}$ της τιμής πώλησης. Το αυτοκίνητο πουλιέται 12.500 €. Να βρείτε πόσο κοστίζει στον αντιπρόσωπο.

Λύση

Μπορώ να υπολογίσω το κλασματικό μέρος ενός ποσού (τα $\frac{4}{5}$ του 12.500) με δύο τρόπους:

Α. Αναγωγή στην κλασματική μονάδα: Βρίσκω πρώτα το $\frac{1}{5}$ του 12.500 (12.500 : 5 = 2.500) και μετά βρίσκω τα $\frac{4}{5}$ (4 • 2500 = ...).

Β. Αρκεί να πολλαπλασιάσω το κλάσμα με το ποσό ($\frac{4}{5}$ · 12500..........). Πολλαπλασιάζω κλάσμα με φυσικό αριθμό, πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή του με τον αριθμό αυτό (σαν να ήταν ο αριθμός κλάσμα με παρονομαστή το 1): $\frac{4}{5} \cdot 12500 = \frac{4 \cdot 12500}{5} = \frac{50000}{5} =$ ....

Απάντηση: Το αυτοκίνητο κοστίζει στον αντιπρόσωπο .... €.

Εφαρμογή 2η **Μεικτές αριθμητικές παραστάσεις**

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης: $\left(4 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}2 + \frac{4}{5}\right) : \left(3 - 1\frac{1}{3}\right)$

Λύση - Απάντηση

✓ Κάνω πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις, με τη σειρά που πρέπει:

$\left(4 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}2 + \frac{4}{5}\right) : \left(3 - 1\frac{1}{3}\right) = \left(\text{—} + 0{,}2 + \frac{4}{5}\right) : \text{....} \ \text{—}$

✓ Μετατρέπω τον δεκαδικό και τον μεικτό αριθμό σε κλάσματα, για να συνεχίσω τις πράξεις:

(— + — + —) : — = ...

Εικόνα 71. Στάδια: Επινόηση σχεδίου (βιβλίο) & Εκτέλεση (μαθητής), Βιβλίο Μαθητή, σελ. 56

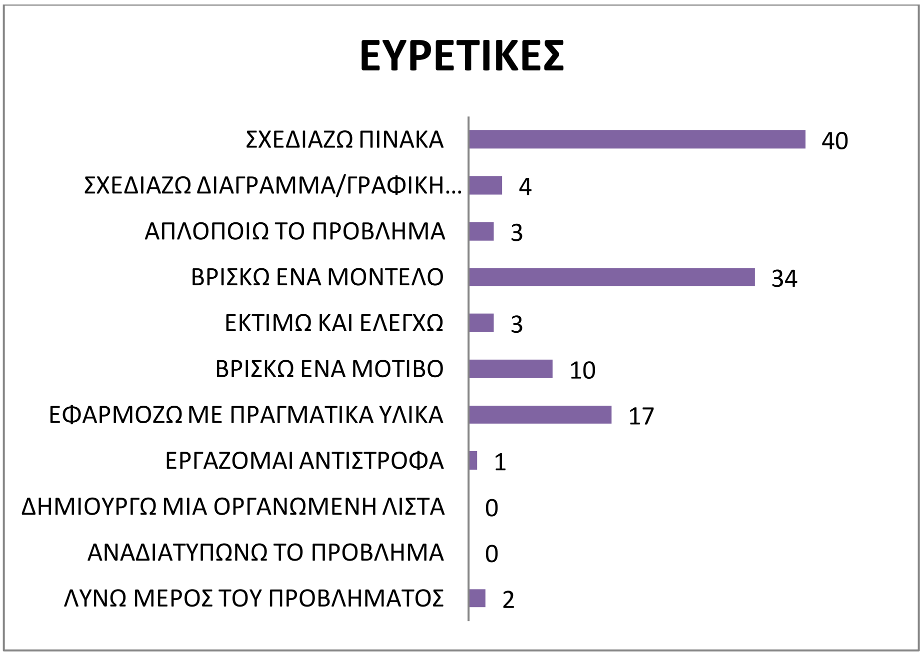
3.4.5. Ευρετικές

Οι ευρετικές που προτείνονται από Δ.Ε.Π.Π.Σ. για την ΣΤ΄ τάξη είναι:

1. Σχεδιάζω έναν πίνακα
2. Σχεδιάζω ένα διάγραμμα ή μια γραφική παράσταση
3. Δοκιμάζω με απλούστερους αριθμούς
4. Βρίσκω ένα μοντέλο
5. Εκτιμώ και ελέγχω

Στις Δραστηριότητες, σε κανένα έργο δεν ζητήθηκε ρητά από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν κάποια ευρετική, παρά μόνο σε μία: «Να σχεδιάσεις στο διπλανό σκίτσο το μέρος του ολόκληρου κέικ που έφαγες»,(σελ.55), κεφάλαιο 24 «Προβλήματα με πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων», ενώ στα υπόλοιπα οι ευρετικές προτείνονται με έμμεσο τρόπο και τα αναπαραστατικά μοντέλα δίνονται έτοιμα και οι μαθητές καλούνται να τα συμπληρώσουν. Σε όλα τα υπόλοιπα έργα λοιπόν, καταμετρήθηκαν ως ευρετικές εκφράσεις όπως, «Συμπλήρωσε τον πίνακα», όπου οι πίνακες με τα δεδομένα υπήρχαν ήδη και οι μαθητές καλούνταν συμπληρώσουν την συλλογιστική που υποδεικνυόταν.

Από τα 259 έργα (137Δραστηριότητες και 122 Εφαρμογές), στα 85 έργα εντοπίστηκε η χρήση κάποιας ευρετικής, δηλαδή σε ποσοστό 33% και συνολικά βρέθηκαν 114 ευρετικές, καθώς σε κάποια προβλήματα χρησιμοποίηθηκε παραπάνω από μια ευρετική. Η ευρετική «Σχεδιάζω ένα πίνακα» (36%) χρησιμοποιήθηκε περισσότερο, όπως και η ευρετική «Βρίσκω ένα μοντέλο» (30%). Η ευρετική «Σχεδιάζω ένα διάγραμμα/γραφική παράσταση» (4%), «Απλοποιώ το πρόβλημα» και «Εκτιμώ και ελέγχω» (3%) και «Βρίσκω ένα μοτίβο» (9%). Εκτός από τις ευρετικές που προτείνονται από το Δ.Ε.Π.Π.Σ. για την ΣΤ' τάξη, χρησιμοποιήθηκε και η ευρετική «Εφαρμόζω με πραγματικα υλικά» (15%), κυρίως στα κεφάλαια της γεωμετρίας και «Λύνω μέρος του προβλήματος» (1%).



Γράφημα 18. Ευρετικές, Βιβλίο Μαθητή, ΣΤ΄ τάξη

Δραστηριότητα 2η

Στο ζαχαροπλαστείο του Ανρί ετοιμάζουν συσκευασίες με διάφορα γλυκά. Μια μέρα έχουν 40 τρουφάκια, 48 εκλέρ και 32 καριόκες. Μοιράζουν τα γλυκά με τέτοιον τρόπο, ώστε όλα τα κουτιά να είναι ίδια μεταξύ τους, να είναι όσο το δυνατό περισσότερα και να μην περισσεύει κανένα γλυκό. Πώς τα μοίρασαν;

- Αν είχαν να μοιράσουν μόνο τα 40 τρουφάκια, σε πόσα **ίδια** κουτιά θα μπορούσαν να τα μοιράσουν; ....
- Συμπληρώστε: *σε 2 (από 20 γλυκά), ή σε 4*..........
- Υπολογίστε το ίδιο για τα 48 εκλέρ; *σε* ....
- Βρείτε το ίδιο για τις 32 καριόκες; *σε* ....
- Υπογραμμίστε τους αριθμούς των κουτιών που είναι κοινοί (ίδιοι) και στις 3 σειρές.
- Αν χρησιμοποιήσουν μόνο 2 ίδια κουτιά στα οποία θα βάλουν όλα τα γλυκά, γράψτε πόσα γλυκά από κάθε είδος θα περιέχει το καθένα: ....
- Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός ίδιων κουτιών που μπορούν να γεμίσουν με γλυκά από κάθε είδος; ....
- Πόσα γλυκά από κάθε είδος θα έχει κάθε κουτί σ' αυτή την περίπτωση?
  Θα περιέχει: ....

Εικόνα 72. Ευρετική, «Λύνω μέρος του προβλήματος», Βιβλίο Μαθητή, ΣΤ΄ τάξη, σελ.31

Δραστηριότητα 2η

Στο αγροτικό ιατρείο του χωριού ο παιδίατρος έρχεται ημέρα Δευτέρα κάθε 2 εβδομάδες και η οφθαλμίατρος την ίδια μέρα, κάθε 3 εβδομάδες. Αν κάποια Δευτέρα βρέθηκαν μαζί στο ιατρείο πότε θα βρεθούν ξανά μαζί;

- Μετά την αρχική τους συνάντηση, σε πόσες εβδομάδες θα πάει ξανά ο παιδίατρος; ....
- Σε πόσες εβδομάδες θα πάει ξανά η οφθαλμίατρος; ....
- Αν αριθμήσουμε τις εβδομάδες μετά τη συνάντηση για να σημειώσουμε τις επισκέψεις των γιατρών, συνέχισε συμπληρώνοντας τον πίνακα: ....
- Ποιος είναι ο αριθμός που αντιστοιχεί στην εβδομάδα που ψάχνουμε; ....

Εβδομάδα *(μετά την α΄ συνάντηση)*	1η	2η	3η	4η	5η	6η
Παιδίατρος *(επίσκεψη ανά 2 εβδομάδες)*	–	✓				
Οφθαλμίατρος *(επίσκεψη ανά 3 εβδομάδες)*	–	–				

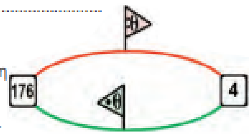
- Μπορείς να διακρίνεις από τον πίνακα ποια ιδιότητα έχει ο αριθμός της εβδομάδας κοινής επίσκεψης; Εξήγησε: ....
- Πότε θα είναι η 3η κοινή συνάντηση; ....

Εικόνα 73. Ευρετικές, «Σχεδιάζω ένα πίνακα», «Βρίσκω ένα μοτίβο», Βιβλίο Μαθητή, ΣΤ τάξη, σελ.39

Δραστηριότητα 2η

Σε πόσες θήκες (θ) μπορούμε να μοιράσουμε τα 176 αυγά της φάρμας όταν κάθε θήκη χωράει 4 αυγά;

- Γράψε την εξίσωση του προβλήματος:
  ....
- Στο διπλανό σχήμα η κόκκινη γραμμή ή η πράσινη δείχνει το μοίρασμα των αυγών σε θήκες τεσσάρων θέσεων; ....
  Με ποια πράξη μπορείς να υπολογίσεις πόσες θήκες χρειάζονται; ....
- Υπολόγισε τις θήκες που χρειάζονται: ....
- Υπολόγισε με τον ίδιο τρόπο την τιμή του άγνωστου στην εξίσωση που έγραψες:
  ....



- Μπορείτε να διατυπώσετε και να γράψετε έναν κανόνα για τον τρόπο με τον οποίο βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης όταν ο άγνωστος είναι διαιρέτης; ....
  ....
- Παρατηρώντας το σχήμα να περιγράψετε στην ομάδα σας τι μας λέει η εξίσωση της πράσινης γραμμής, να τη γράψετε και να υπολογίσετε την τιμή του άγνωστου: ....
  ....
- Αν αντικαταστήσεις τον άγνωστο με την τιμή που βρήκες, επαληθεύονται και οι δυο εξισώσεις;
  ....

Εικόνα 74. Ευρετική, «Βρίσκω ένα μοντέλο», Βιβλίο Μαθητή, ΣΤ΄ τάξη, σελ.51

Δραστηριότητα 2η

- Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα. Για κάθε αντικείμενο διάλεξε την κατάλληλη υποδιαίρεση του τετραγωνικού μέτρου. Πρώτα κάνε μια εκτίμηση κάθε επιφάνειας με τον νου και μετά υπολόγισέ την ακριβώς μετρώντας τις διαστάσεις.

Αντικείμενο	Μονάδα μέτρησης (τ.εκ., τ.δεκ., τ.μ.)	Εκτίμηση με τον νου	Υπολογισμός με μέτρηση
Η σελίδα του βιβλίου			
Η επιφάνεια του θρανίου			
Ο πίνακας της τάξης			
Το πάτωμα της τάξης			

- Αν θέλεις να συγκρίνεις τους αριθμούς που εκφράζουν εμβαδό ή να κάνεις πράξεις ανάμεσά τους τι θα πρέπει να προσέξεις; ....

Εικόνα 75. Ευρετικές, «Εκτιμώ και ελέγχω», «Φτιάχνω ένα πίνακα», «Εφαρμόζω με πραγματικά υλικά», Βιβλίο Μαθητή, τάξη ΣΤ΄, σελ. 147

3.5. Συγκριτικά αποτελέσματα των τριών σχολικών εγχειριδίων Δ’, Ε’ και ΣΤ’ Δημοτικού

Τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ’ και ΣΤ’ τάξης αποτελούνται από ένα τεύχος, ενώ της Ε’ από το α’ και β’ τεύχος. Στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ’ τάξης καταμετρήθηκαν 214 έργα, στης Ε' 359 και στης ΣΤ΄ 419 έργα, παρατηρείται δηλαδή μια αυξητική τάση στον αριθμό των έργων ανά τάξη. Τα σχολικά εγχειρίδια αυτών των τριών τάξεων έχουν γραφτεί από διαφορετικές συγγραφικές ομάδες και αυτό είναι φανερό στην δομή τους και στον τρόπο διάρθρωσης των κεφαλαίων τους. Μόνο το σχολικό εγχειρίδιο της Δ' τάξης περιλαμβάνει πίνακα που επεξηγεί τη δομή του βιβλίου, ενώ τα άλλα δύο έχουν μόνο πίνακες περιεχομένου. Το σχολικό εγχειρίδιο της Δ' τάξης είναι χωρισμένο σε τρεις Περιόδους και περιλαμβάνει συνολικά 56 Κεφάλαια και 9 Επαναληπτικά κεφάλαια. Το σχολικό εγχειρίδιο της Ε' τάξης περιλαμβάνει 4 ενότητες στο α' τεύχος και 4 ενότητες στο β' τεύχος, συνολικά 52 Κεφάλαια και 8 επαναληπτικά κεφάλαια. Το σχολικό εγχειρίδιο της ΣΤ' τάξης περιλαμβάνει 6 Θεματικές ενότητες και συνολικά 71 κεφάλαια και 5 κεφάλαια Ανακεφαλαίωσης.

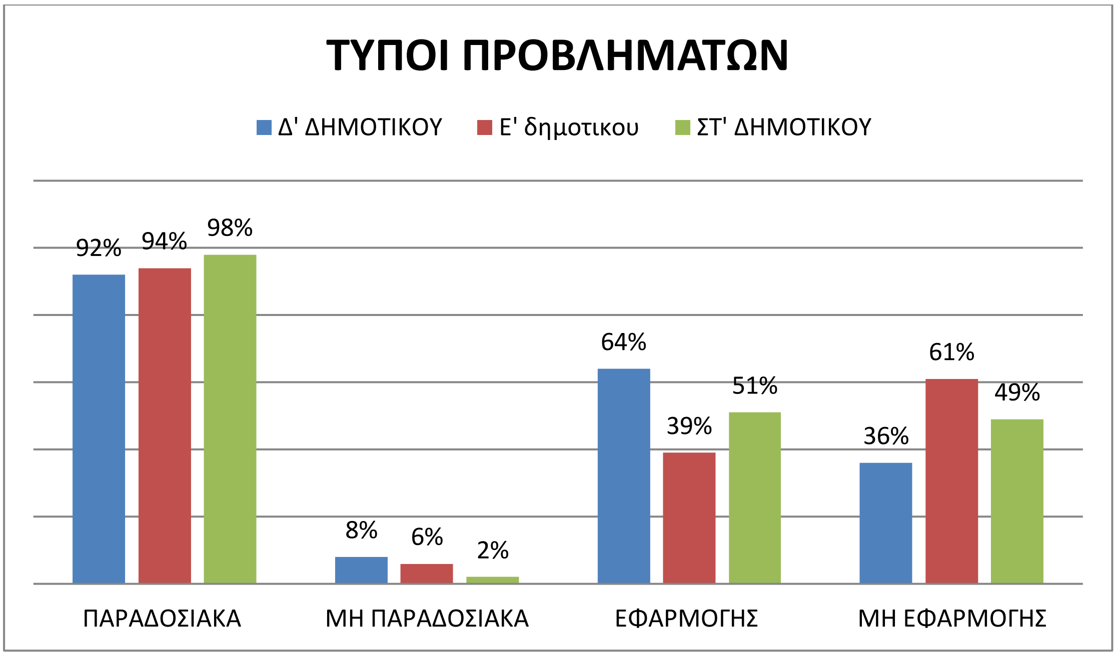
Και στα τρία σχολικά εγχειρίδια το κάθε μάθημα διαρθρώνεται σε ένα δισέλιδο. Στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ το μάθημα ξεκινά με μια «Ερώτηση Αφόρμησης», ακολουθούν οι «Δραστηριότητες Ανακάλυψης», οι «Εργασίες» και το μάθημα ολοκληρώνεται με το «Συμπέρασμα». Στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε' το μάθημα ξεκινά με τις δραστηριότητες Διερεύνησης, ακολουθούν πίνακες με τις «Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες» και τα «Παραδείγματα» τους, έπονται οι «Εφαρμογές» και το μάθημα ολοκληρώνεται με τον «Αναστοχασμό». Στο σχολικό εγχειρίδιο της ΣΤ' τάξης το μάθημα ξεκινά με τους «Στόχους του μαθήματος», ακολουθούν οι «Δραστηριότητες», μέσα σε πίνακες δίνεται η θεωρία, που συνοδεύεται από παραδείγματα, έπονται οι «Εφαρμογές» και το μάθημα ολοκληρώνεται με τις «Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση». Στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ τάξης, δηλαδή λείπουν οι εφαρμογές και οι ερωτήσεις ανασκόπησης, πιθανώς οι συγγραφική του ομάδα έδωσε περισσότερο βάση στην εξάσκηση των μαθητών σε εργασίες και λιγότερο στον έλεγχο της εκμάθηση εννοιών, μέσω ερωτήσεων ανασκόπησης. Η ύπαρξη ή μη λυμένων ασκήσεων σχετίζεται πιθανώς με το είδος της διδασκαλίας που το σχολικό εγχειρίδιο εμμέσως προτείνει καθώς και την θεώρηση των συγγραφέων για τον τρόπο που οι μαθητές μαθαίνουν .

Και τα τρία σχολικά εγχειρίδια ακολουθούν το μοντέλο της ανακαλυπτικής μάθησης αλλά ως προς τη διάρθρωση των δραστηριοτήτων των κεφαλαίων, το σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ διαφέρει με αυτά της Ε΄ και της ΣΤ΄. Ακόμη, και στα τρία σχολικά εγχειρίδια ακολουθείται η διδασκαλία μέσω της επίλυσης προβλημάτων για την μάθηση μαθηματικών εννοιών. Επίσης, η επίλυση μέσω των τεσσάρων σταδίων του Pólya, αποτελεί αντικείμενο διδασκαλίας και στα τρία σχολικά εγχειρίδια, όπως και οι ευερετικές.

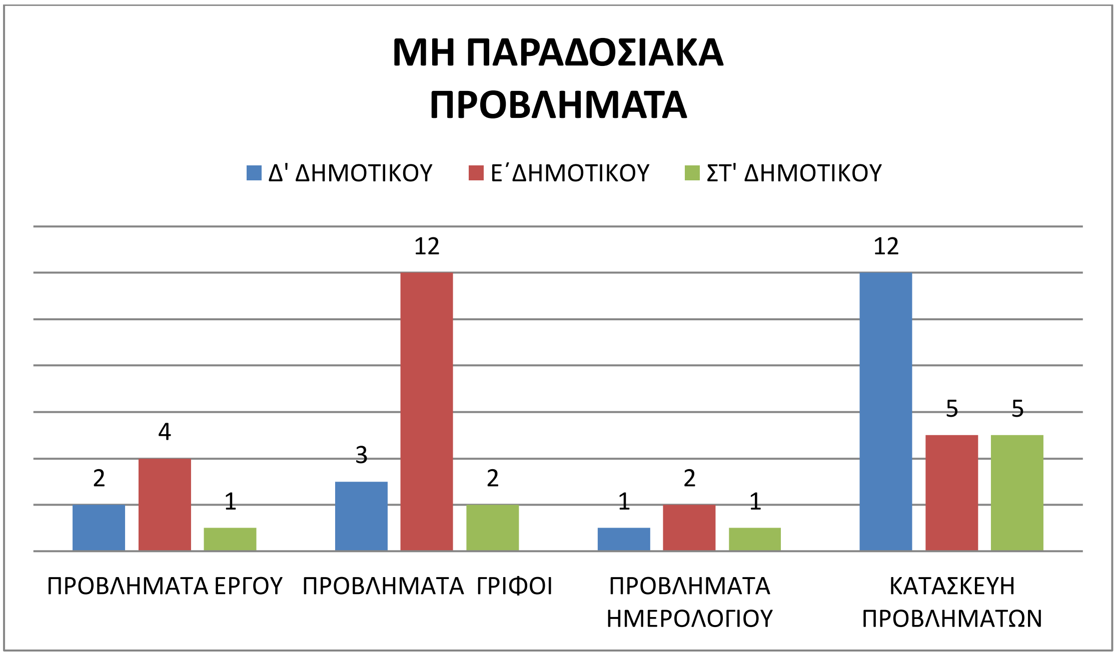
3.5.1. Τύποι προβλημάτων

Όπως φαίνεται και στο Γράφημα 19, αν και το σύνολο των προβλημάτων είναι διαφορετικό σε κάθε σχολικό εγχειρίδιο και στα τρία σχολικά εγχειρίδια, υπερέχουν με σημαντική διαφορά τα Παραδοσιακά προβλήματα (92% στην Δ' τάξη, 94% στην Ε' τάξη, 98% στην ΣΤ΄ τάξη), έναντι των Μη παραδοσιακών (8% στην Δ' τάξη, 6% στην Ε΄ τάξη, 2% στην ΣΤ' τάξη). Μάλιστα στην ΣΤ΄ τάξη συναντάμε τον μικρότερο αριθμό Μη Παραδοσιακών προβλημάτων. Στα Μη Παραδοσιακά προβλήματα, η Κατασκευή Προβλημάτων (Problem Posing) υπερέχει και στα τρία σχολικά εγχειρίδια (12 στην Δ', 5 στην Ε΄ και στην ΣΤ') ενώ τα Προβλήματα Ημερολογίου (Journal Problems) έχουν την μικρότερη παρουσία (1 στην Δ΄, 2 στην Ε΄ και 1 στην ΣΤ΄, όπως φαίνεται και στο Γράφημα 20.

Σε σχέση με το πλαίσιο των προβλημάτων, στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ Δημοτικού τα προβλήματα Εφαρμογής υπερτερούν σε σχέση με τα προβλήματα Μη Εφαρμογής, με ποσοστό 64%. Στην Ε' τάξη μόνο στις δραστηριότητες Διερεύνησης εντοπίστηκαν περισσότερα προβλήματα Εφαρμογής, καθώς και στις Εφαρμογές και στις δραστηριότητες Αναστοχασμού και στα επαναληπτικά κεφάλαια τα προβλήματα Μη Εφαρμογής υπερτερούν. Έτσι, συνολικά στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε' τάξης, χρησιμοποιούνται κυρίως προβλήματα που δεν έχουν κάποιο πλαίσιο που σχετίζεται με την καθημερινότητα, καθώς το 61% είναι προβλήματα Μη Εφαρμογής. Στο σχολικό εγχειρίδιο της ΣΤ΄ τάξης τα προβλήματα είναι σχεδόν κατά το ήμισυ Εφαρμογής (51%), γεγονός που επηρεάζεται από τα προβλήματα στις Ερωτήσεις για Αυτοέλεγχο και Συζήτηση, όπου και τα 142 προβλήματα ήταν Μη Εφαρμογής.



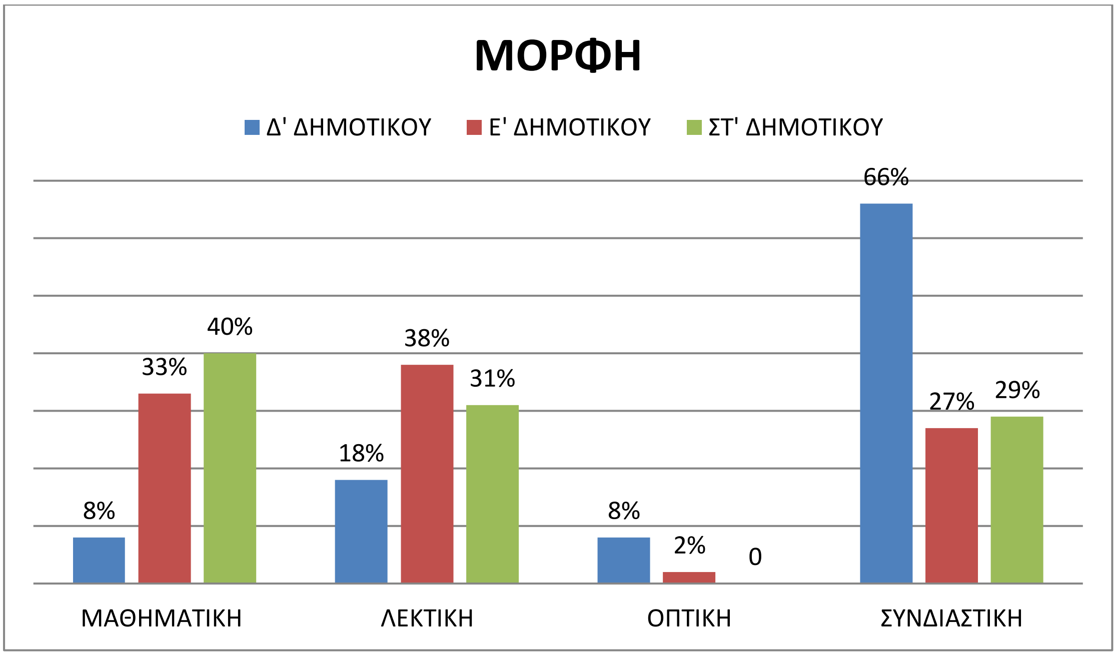
Γράφημα 19. Παραδοσιακά – Μη Παραδοσιακά προβλήματα



Γράφημα 20. Μη Παραδοσιακά προβλήματα

Σχετικά με την μορφή παρουσίασης των δεδομένων των προβλημάτων, η Συνδυαστική μορφή υπερέχει με μεγάλη διαφορά (66%) στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ', ενώ στα σχολικά εγχειρίδια της Ε' και ΣΤ΄ τάξης, η μορφή αυτή συναντάται σε ποσοστό 27% και 28%

αντίστοιχα. Τα μικρότερα ποσοστά και στα τρία σχολικά εγχειρίδια καταλαμβάνει η Οπτική μορφή, παρουσίασης των δεδομένων (8% στην Δ’ τάξη, 2% στην Ε’ τάξη και 0% στην ΣΤ΄ τάξη). Η Λεκτική και Μαθηματική μορφή, βρίσκονται σχεδόν στα ίδια ποσοστά στην Ε’(38% Λεκτική, 33% Μαθηματική) και ΣΤ’ τάξη (31% λεκτική 40% Μαθηματική), ενώ στην Δ΄ τάξη τα ποσοστά αυτά είναι πιο χαμηλά (18% Λεκτική, 8% Μαθηματική). Φαίνεται πως στις δύο τελευταίες τάξεις του Δημοτικού, οι οπτικές αναπαραστάσεις (εικόνες, σχέδια κ.α.), που συναντάμε στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ’ τάξης, περιορίζονται, πιθανώς λόγω της ηλικιακής ομάδας των μαθητών. Βέβαια και στα δύο αυτά σχολικά εγχειρίδια, τα προβλήματα συνοδεύονται συχνά από εικόνες, που έχουν μόνο διακοσμητική θέση.



Γράφημα 21. Μορφή παρουσίασης προβλημάτων στα τρία σχολικά εγχειρίδια

3.5.2. Στάδια επίλυσης προβλήματος

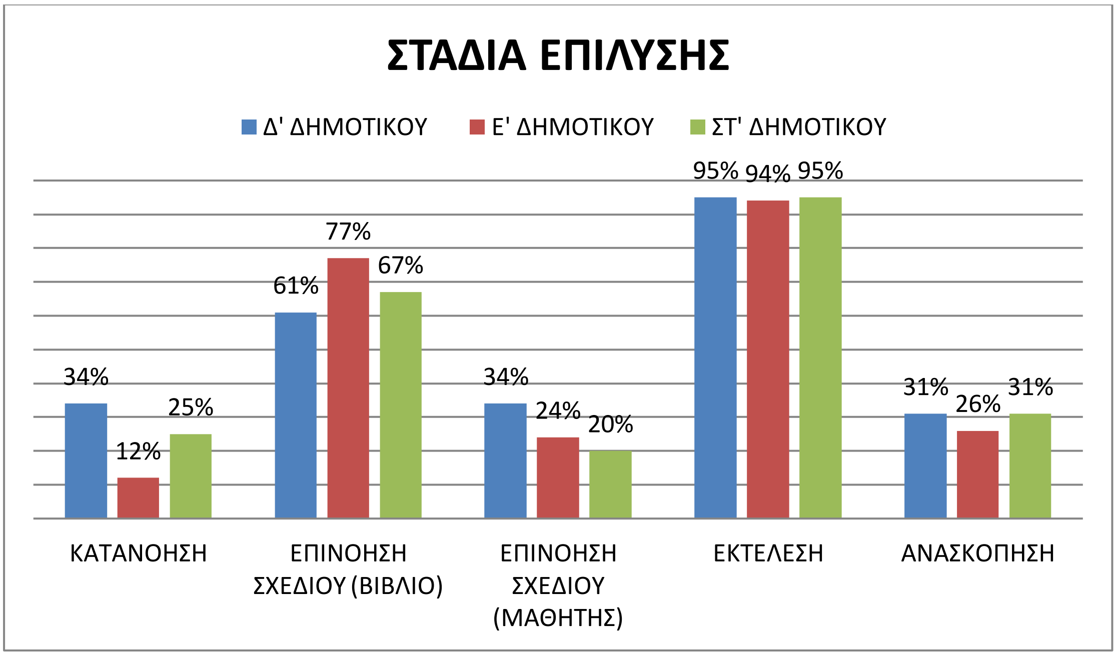
Η ανάλυση των έργων σχετικά με τα στάδια επίλυσης προβλήματος του Pólya στα σχολικά εγχειρίδια των τριών τελευταίων τάξεων του Δημοτικού, παρουσίασε μια δυσκολία, καθώς η δομή του κάθε εγχειριδίου ήταν διαφορετική. Συγκεκριμένα το σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ τάξης, δεν περιείχε καθόλου λυμένα προβλήματα με την μορφή των Εφαρμογών που είχαν τα άλλα δύο σχολικά εγχειρίδια, ούτε και δραστηριότητες που αποσκοπούσαν στην ανασκόπηση του μαθήματος. Οπότε οι «Δραστηριότητες Ανακάλυψης» στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ’ τάξης, όπως και οι δραστηριότητες «Διερεύνησης» στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε΄ τάξης και στις «Δραστηριότητες» στο σχολικό εγχειρίδιο της ΣΤ’ τάξης, που αποτελούν το κυρίως μάθημα σε κάθε σχολικό εγχειρίδιο αντίστοιχα και διαρθρώνονται πάνω σε ερωτήσεις και σε όχι σε εξ’ ολοκλήρου λυμένα προβλήματα, δημιούργησαν την ανάγκη για τον διαχωρισμό του σταδίου της Επινόησης Σχεδίου, σε δύο κατηγορίες, την Επινόησης Σχεδίου που προσφέρει το βιβλίο και την Επινόηση Σχεδίου που καλούνται να σκεφτούν οι μαθητές, ώστε να είναι πιο σαφής, ή συμμετοχή των μαθητών στην επινόηση σχεδίου και όχι μόνο η ύπαρξη του στο σχολικό εγχειρίδιο, στοιχείο που πιθανώς μπορεί να διερευνηθεί περαιτέρω σε μια άλλη έρευνα.

Τα τέσσερα στάδια επίλυσης του Pólya, υπάρχουν και στα τρία σχολικά εγχειρίδια, ως αντικείμενο διδασκαλίας. Επίσης, και στα τρία σχολικά εγχειρίδια, η διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών γίνεται μέσω επίλυσης προβλημάτων. Ως εκ τούτου, θα περίμενε κανείς πως όλα τα στάδια θα εκπροσωπούνταν στα τρία αυτά σχολικά εγχειρίδια. Όπως φαίνεται όμως και από το Γράφημα 21, τα στάδια της Επινόησης σχεδίου και της Εκτέλεσης Σχεδίου, εκπροσωπούνται σε μεγαλύτερο βαθμό και στα τρία σχολικά εγχειρίδια. Το στάδιο της Εκτέλεσης Σχεδίου εκπροσωπείται σε μεγαλύτερο βαθμό (95% στην Δ΄ τάξη, 94% στην Ε΄ τάξη, 95% στην ΣΤ΄ τάξη) και στα τρία σχολικά εγχειρίδια.

Το στάδιο της Επινόησης Σχεδίου, που παρουσιάζεται έτοιμο από το βιβλίο εκπροσωπείται επίσης σε μεγάλο ποσοστό και στα τρία σχολικά εγχειρίδια (61% στην Δ΄ τάξη, 77% στην Ε’ τάξη, 67% στην ΣΤ΄ τάξη).Το στάδιο της Επινόησης Σχεδίου που καλούνται να επινοήσουν οι μαθητές, εκπροσωπείται επίσης στο ίδιο περίπου ποσοστό και στα τρία σχολικά εγχειρίδια (34% στην Δ΄ τάξη, 24% στην Ε’ τάξη, 20% στην ΣΤ΄ τάξη). Οι μαθητές σε αυτό το στάδιο είτε συμμετείχαν στην επινόηση απλοϊκών σχεδίων επίλυσης, είτε εξασκούνταν σε κάποια στρατηγική που είχαν προηγουμένως διδαχθεί.

Τα στάδια της Κατανόησης και της Ανασκόπησης εκπροσωπούνται και στα τρία σχολικά εγχειρίδια σχεδόν στον ίδιο βαθμό, με το στάδιο της Ανασκόπησης να έχει λίγο μεγαλύτερο ποσοστό εμφάνισης (31% στην Δ’ τάξη, 26% στην Ε’ τάξη, 31% στην ΣΤ’ τάξη). Στο στάδιο της Κατανόησης, στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε΄ τάξης, εντοπίστηκε το χαμηλότερο ποσοστό εκπροσώπησης (34% στην Δ’ τάξη, 12% στην Ε’ τάξη, 25% στην ΣΤ’ τάξη). Αν και τα δύο αυτά στάδια είναι εξίσου σημαντικά στην διαδικασίας επίλυσης προβλημάτων, φαίνεται πως δεν δίνεται η ανάλογη προσοχή από τα σχολικά εγχειρίδια.

Τέλος, στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ’ τάξης τα στάδια επίλυσης προβλήματος διδάσκονται με πιο ρητό τρόπο από τα άλλα δύο σχολικά εγχειρίδια.



Γράφημα 22. Τα στάδια της επίλυσης προβλήματος στα τρία σχολικά εγχειρίδια

3.5.3. Ευρετικές

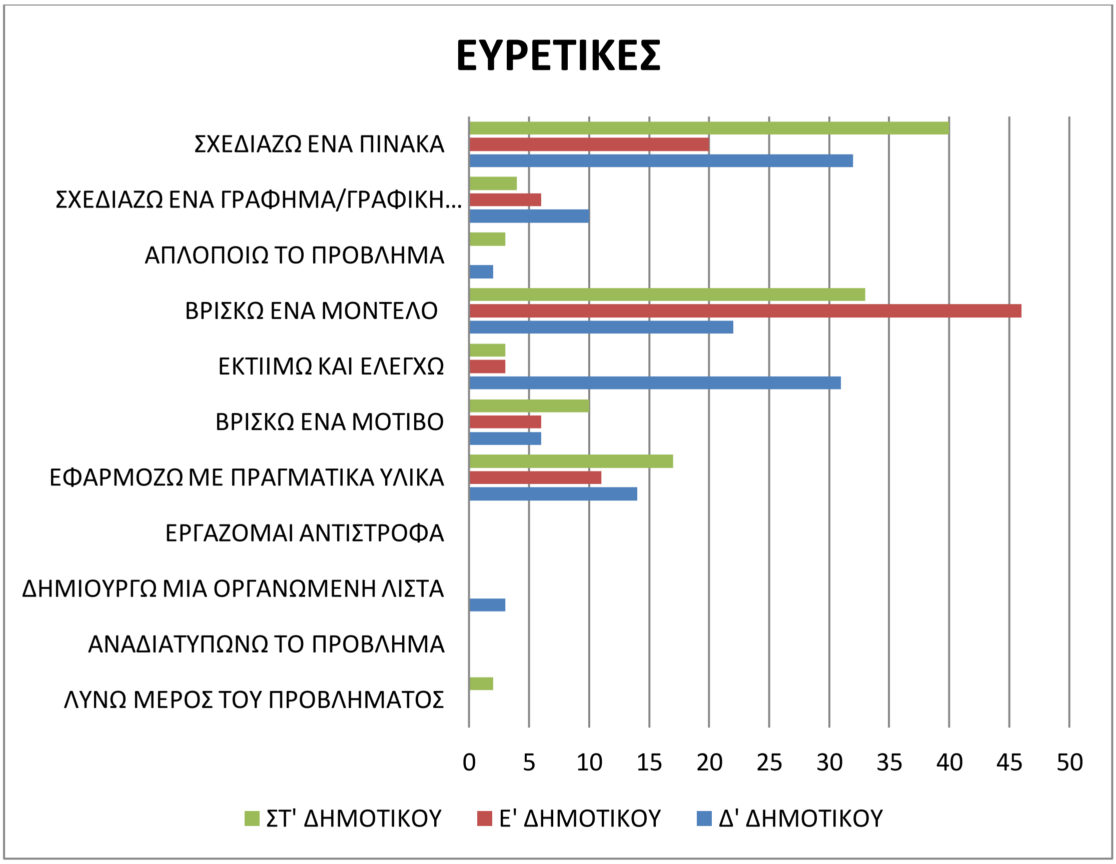
Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω στα σχολικά εγχειρίδια της Δ’, Ε’ και ΣΤ΄ Δημοτικού χρησιμοποιήθηκαν οι ευρετικές που προτείνονται από το Δ.Ε.Π.Π.Σ. για κάθε τάξη, δηλαδή οι ευρετικές «σχεδιάζω ένα πίνακα», «σχεδιάζω ένα διάγραμμα/γραφική παράσταση», «απλοποιώ το πρόβλημα», «βρίσκω ένα μοντέλο» και «εκτιμώ και ελέγχω». Όπως φαίνεται και στον πίνακα 10 και στα τρία σχολικά εγχειρίδια οι ευρετικές χρησιμοποιούνται περίπου με την ίδια συχνότητα (42%-Δ’, 34%-Ε’, 33%-ΣΤ’), με το σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ τάξης να έχει τις περισσότερες ευρετικές. Επίσης, η χρήση των ευρετικών, στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ τάξης εξηγούνταν πιο αναλυτικά και με πιο ρητό τρόπο, ενώ στης Ε΄ ζητούνταν με ρητό τρόπο αλλά χωρίς να εξηγείται η χρήση τους.

Όπως φαίνεται στο Γράφημα 23 οι ευρετικές «Σχεδιάζω ένα πίνακα» και «Βρίσκω ένα μοντέλο» συναντήθηκαν σε μεγαλύτερο βαθμό, 28% και 31% αντίστοιχα. Βέβαια, οι πίνακες και οι αριθμογραμμές στα περισσότερα έργα δίνονταν έτοιμα και οι μαθητές καλούνταν να τα συμπληρώσουν. Ακόμη, η ευρετική «Βρίσκω ένα μοτίβο» χρησιμοποιήθηκε σε όλα τα εγχειρίδια κυρίως στο κεφάλαιο της γεωμετρίας, που αναφερόταν στη διδασκαλία των μοτίβων, όπως και τα διαγράμματα/γραφικές αναπαραστάσεις, που αποτελούσαν αντικείμενο διδασκαλίας. Τέλος, οι ευρετικές «Εφαρμόζω με πραγματικά υλικά» και «Βρίσκω ένα μοτίβο» εμφανίστηκαν και στα τρία σχολικά εγχειρίδια ενώ δεν αναφέρονται στο Δ.Ε.Π.Π.Σ. Μια έρευνα στα αντίστοιχα τετράδια εργασιών μπορεί να δώσει μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για το θέμα.

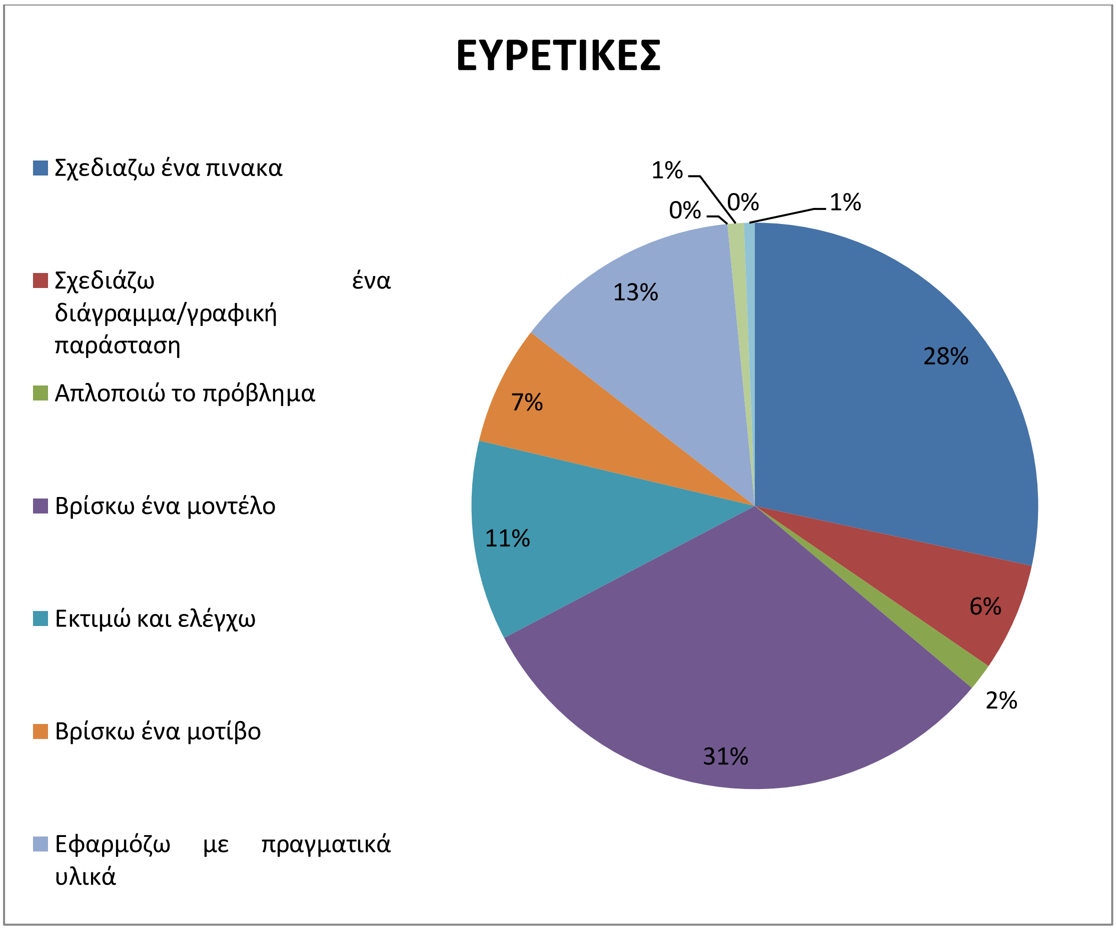
Αυτό που ήταν άξιο προσοχής στα σχολικά εγχειρίδια της Ε' και ΣΤ΄(στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ' τάξης δεν υπήρχαν λυμένες δραστηριότητες) ήταν, πως οι ευρετικές προτείνονταν στις δραστηριότητες στο κυρίως μάθημα, ενώ στις εφαρμογές, δηλαδή τις λυμένες ασκήσεις, που λειτουργούν ως παραδείγματα, εντοπίστηκε σε μικρότερο βαθμό η χρήση ευρετικών (48% στις δραστηριότητες Διερεύνησης έναντι 38% στις Εφαρμογές στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε' τάξη και 29% στις Δραστηριότητες έναντι 17% στις Εφαρμογές στο σχολικό εγχειρίδιο της ΣΤ').

	ΣΥΝΟΛΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ	**ΣΥΝΟΛΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΕΥΡΕΤΙΚΕΣ**	**ΠΟΣΟΣΤΟ**
Δ' ΤΑΞΗ	214	89	42%
Ε' ΤΑΞΗ	208	70	34%
ΣΤ΄ΤΑΞΗ	259	85	33%

Πίνακας 10. Ποσοστά ευρετικών στο σύνολο των προβλημάτων ανά τάξη



Γράφημα 23. Οι ευρετικές συγκριτικά στα τρία σχολικά εγχειρίδια



Γράφημα 24. Το σύνολο των ευρετικών που εντοπίστηκαν σε ποσοστά

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4:
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

4.1 Εισαγωγή

Τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στην διδασκαλία του μαθήματος των μαθηματικών. Καθώς τα τελευταία χρόνια στην διδασκαλία των μαθηματικών, η στροφή στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών έχει οδηγήσει στην απομάκρυνση από την μιμητική μάθηση μαθηματικών κανόνων και η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων έχει τεθεί στο επίκεντρο αυτής της αλλαγής, τα είδη των προβλημάτων που χρησιμοποιούνται στα σχολικά εγχειρίδια, έχουν τεθεί στο επίκεντρο της προσοχής των ερευνητών, όπως και ο τρόπος που χρησιμοποιείται και διδάσκεται η επίλυση προβλήματος. Όπως αναφέρουν οι Fan & Zhu (2007), οι τρόποι αναπαράστασης των διαφόρων τύπων προβλημάτων που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια αλλά και οι τρόποι αναπαράστασης των διαδικασιών επίλυσης προβλημάτων, επιδρούν στην διδασκαλία και σχετίζονται με τις ικανότητες που αναπτύσσουν οι μαθητές στην επίλυση προβλήματος.

Σε αυτή την εργασία εφαρμόστηκε η μέθοδος της ανάλυσης περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων, η οποία αν και από μόνη της δεν μπορεί να προσφέρει γενικευμένα συμπεράσματα για την διδασκαλία των μαθηματικών, σε συνδυασμό και με άλλου τύπου έρευνες, μπορεί να συνεισφέρει στην βελτίωση των σχολικών εγχειρίδιων και στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Για να εξεταστούν οι τύποι των προβλημάτων που χρησιμοποιούνται στα τρία σχολικά εγχειρίδια των μαθητικών, χρησιμοποιήθηκε το πλαίσιο ανάλυσης που ανέπτυξαν οι Fan & Zhu (2000) και Zhu & Fan (2006) σχετικά με την ανάλυση σχολικών εγχειριδίων, οι οποίοι ταξινόμησαν τα προβλήματα σε επτά κατηγορίες. Από αυτές εξετάστηκαν οι τρεις, δηλαδή ο διαχωρισμός των προβλημάτων σε Παραδοσιακά- Μη παραδοσιακά, Εφαρμογής- Μη εφαρμογής και σχετικά με το αν παρουσιάζονται σε καθαρή Μαθηματική/ Λεκτική/ Οπτική ή Συνδυασμένη μορφή. Οι κατηγορίες αυτές επιλέχθηκαν λόγω της σημασίας που δίνεται από την βιβλιογραφία και το ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών σε αυτές.

Σχετικά με την εξέταση των σταδίων επίλυσης προβλήματος και τις ευρετικές χρησιμοποιήθηκε το πλαίσιο ανάλυσης του Pólya και των Fan & Zhu (2007), όμως επειδή δεν εξετάστηκαν μόνο τα προβλήματα στα οποία δινόταν οι λύσεις αλλά και τα προβλήματα, που χρησιμοποιούνταν, στο κυρίως μάθημα, η κωδικοποίηση προσαρμόστηκε, ώστε να διερευνηθεί αυτό που καλούνταν οι μαθητές να πράξουν σε κάθε έργο. Για την εξέταση των ευρετικών χρησιμοποιήθηκε επίσης το πλαίσιο ανάλυσης των Fan& Zhu (2007), όμως επειδή στο ελληνικό Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.), οι ευρετικές που προτείνονταν ήταν λιγότερες, εξετάστηκαν αυτές και μέρος από τις ευρετικές που προτείνουν οι Fan& Zhu (2007), συνολικά δηλαδή αναζητήθηκε η ύπαρξη έντεκα ευρετικών. Οι ευρετικές αυτές ήταν: «σχεδιάζω ένα πίνακα», «σχεδιάζω ένα διάγραμμα/ γραφική παράσταση», «απλοποιώ το πρόβλημα», «βρίσκω ένα μοντέλο», «εκτιμώ και ελέγχω», «βρίσκω ένα μοτίβο», «εφαρμόζω με πραγματικά υλικά», «εργάζομαι αντίστροφα», «δημιουργώ μια οργανωμένη λίστα», «αναδιατυπώνω το πρόβλημα» και «λύνω μέρος του προβλήματος».

Τα ερευνητικά ερωτήματα που καλείται αυτή η εργασία να απαντήσει είναι τα εξής:

- Ποιοι τύποι προβλημάτων υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ’, Ε’ και ΣΤ΄ Δημοτικού, με βάση την κατηγοριοποίηση των προβλημάτων που προτείνουν οι Zhu & Fan (2006);
- Ποια από τα στάδια επίλυσης προβλημάτων του Pólya εμφανίζονται στα προβλήματα που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ’, Ε’ και ΣΤ’ τάξης του Δημοτικού;
- Ποιες ευρετικές εμφανίζονται κατά την επίλυση προβλημάτων στα έργα που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ’, Ε’ και ΣΤ’ τάξης του Δημοτικού;

4.2. Απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα

Στη ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι απαντήσεις σε αντιστοιχία με τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν σε αυτή την εργασία.

Ερευνητικό ερώτημα 1: Ποιοι τύποι προβλημάτων υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ’, Ε’ και ΣΤ΄ Δημοτικού, με βάση την κατηγοριοποίηση των προβλημάτων που προτείνουν οι Zhu & Fan (2006);

Όπως διαπιστώθηκε από την εξέταση των τριών σχολικών εγχειρίδιων της Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης (Βιβλίο του μαθητή) και στα τρία σχολικά εγχειρίδια τα προβλήματα στον μεγαλύτερο ποσοστό ήταν Παραδοσιακά. Το μικρότερο ποσοστό Μη παραδοσιακών προβλημάτων παρουσίασε το σχολικό εγχειρίδιο της ΣΤ΄ τάξης (2%) ενώ το μεγαλύτερο της Δ΄ τάξης (8%), ενώ της Ε' είχε ποσοστό 7%. Από τα Μη παραδοσιακά προβλήματα, το είδος που εντοπίστηκε σε μεγαλύτερη συχνότητα στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε' τάξης ήταν οι Γρίφοι, ενώ στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ' τάξης, η Κατασκευή προβλημάτων.

Τα Μη παραδοσιακά προβλήματα, τα οποία μπορούν να κατηγοριοποιηθούν και ως ανοιχτά προβλήματα (Pehkonen, 1997α) προτείνονται από το ελληνικό Δ.Ε.Π.Π.Σ. για τα μαθηματικά για την διδασκαλία προβλημάτων, όπως και από την βιβλιογραφία για την ανάπτυξη δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων και συλλογισμού (Cai, 2003). Ειδικότερα για την Κατασκευή προβλημάτων, έχει υποστηριχθεί πως αποτελεί δείχτη υψηλής ποιότητας μαθηματικών και ως εκ τούτου, θα πρέπει να συμπεριληφθεί στα Προγράμματα Σπουδών (Cai at al., 2015). Αν και, η Κατασκευή προβλήματος εντοπίστηκε και στα τρία σχολικά εγχειρίδια, γεγονός που συνάδει με τις κατευθύνσεις που θέτει το ελληνικό Δ.Ε.Π.Π.Σ., το ποσοστό χρήσης της, ήταν ιδιαίτερα μικρό σε όλες τις τάξεις. Δηλαδή, στην Δ' τάξη εντοπίστηκαν 12 προβλήματα κατασκευής, ενώ στην Ε΄ και στην ΣΤ΄ εντοπίστηκαν 5 προβλήματα κατασκευής στο κάθε σχολικό εγχειρίδιο. Εκτός από τα προβλήματα Γρίφων, τα οποία εντοπίστηκαν σε μεγαλύτερο αριθμό, στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε' τάξης (12 από τα 359 προβλήματα), οι άλλοι δύο τύποι Μη παραδοσιακών προβλημάτων, δηλαδή τα προβλήματα Έργου και τα προβλήματα Ημερολογίου, εντοπίστηκαν σε πολύ μικρό αριθμό (από 1 έως 4, στο κάθε σχολικό εγχειρίδιο).

Σε παρόμοια αποτελέσματα κατέληξαν και οι Fan & Zhu (2007) στην έρευνα τους σε αμερικάνικα και κινέζικα σχολικά εγχειρίδια, όπου πάνω από το 96% των προβλημάτων στις σειρές των σχολικών εγχειρίδιων των δύο χωρών, που εξετάστηκαν, ήταν παραδοσιακά, ενώ σχετικά με τα μη παραδοσιακά προβλήματα, τα αμερικάνικα υπερείχαν καθώς χρησιμοποιούσαν και τους τέσσερις τύπους μη παραδοσιακών προβλημάτων, σε αντίθεση με τα κινέζικα που χρησιμοποιούσαν μόνο δυο (κατασκευή προβλημάτων και προβλήματα γρίφων).

Σε σχέση με το πλαίσιο των προβλημάτων, τα τρία σχολικά εγχειρίδια παρουσίασαν διακυμάνσεις. Το σχολικό εγχειρίδιο της Δ' τάξης περιελάμβανε τα περισσότερα προβλήματα Εφαρμογής (64%), στο σχολικό εγχειρίδιο της ΣΤ' τα μισά προβλήματα ήταν

Εφαρμογής, ενώ στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε΄ τάξης τα προβλήματα Μη εφαρμογής εντοπίστηκαν σε μεγαλύτερο ποσοστό (61%). Βέβαια θα πρέπει να σημειωθεί πώς τα σχολικά εγχειρίδια της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης έχουν διαφορετική δομή από αυτό της Δ’ τάξης. Δηλαδή, στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ’ τάξης δεν υπάρχουν Εφαρμογές και Δραστηριότητες Ανασκόπησης, ενώ της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης έχουν. Αυτό αναφέρεται, γιατί τα περισσότερα προβλήματα Μη εφαρμογής, εντοπίστηκαν στα προβλήματα των Ερωτήσεων για αυτοέλεγχο και στις δραστηριότητες Ανασκόπησης, αυτών των δύο τάξεων και μόνο στης Ε΄ τάξης και στις δραστηριότητες των Εφαρμογών. Δηλαδή, παρατηρήθηκε μια ανομοιογένεια μέσα στα προβλήματα αυτών των δύο σχολικών εγχειριδίων, σχετικά με την ύπαρξη πλαισίου.

Επίσης, θα πρέπει να σημειωθεί πως στην παρούσα εργασία δεν εξετάστηκε αν το πλαίσιο της καθημερινότητας στο οποίο αναφέρονται τα προβλήματα είναι τεχνητά κατασκευασμένο για τις ανάγκες της διδασκαλίας ή αυθεντικό αλλά περιορίστηκε στο αν αναφέρονται με οποιοδήποτε τρόπο σε πραγματικά αντικείμενα και καταστάσεις, όποτε πιθανώς σε μια πιο ειδική ανάλυση τα προβλήματα αυτών των σχολικών εγχειριδίων να παρουσίαζαν άλλα αποτελέσματα. Παρόλο λοιπόν που προκρίνεται από το Δ.Ε.Π.Π.Σ. η χρήση προβλημάτων, των οποίων το πλαίσιο αναφέρεται στην καθημερινή ζωή, στα σχολικά εγχειρίδια εντοπίστηκαν αρκετά προβλήματα με μαθηματικό πλαίσιο, κυρίως στις δύο τελευταίες τάξης του Δημοτικού.

Σε σχέση με την ύπαρξη πλαισίου στην έρευνα των Fan & Zhu (2007), τα αμερικάνικα σχολικά εγχειρίδια περιείχαν σε μεγαλύτερο βαθμό προβλήματα πλαισιωμένα από πραγματικές καταστάσεις (το ένα τέταρτο των προβλημάτων), σε σχέση με τα κινέζικα που περιείχαν πολύ μικρότερο αριθμό (449 από τα 6850 προβλήματα ήταν εφαρμογής), αν και συνολικά οι σειρές σχολικών εγχειρίδιων και των δύο χωρών είχαν σχετικά μικρό αριθμό προβλημάτων Εφαρμογής, στοιχείο που παρατηρήθηκε και στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια των δύο τελευταίων τάξεων του δημοτικού, που εξετάστηκαν σε αυτήν την έρευνα.

Σε σχέση με την μορφή παρουσίασης των δεδομένων των προβλημάτων και πάλι το σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ τάξης παρουσίασε διαφοροποιήσεις από τα άλλα δύο. Η μορφή παρουσίασης των δεδομένων, δηλαδή ο τρόπος εκφώνησης των δεδομένων του προβλήματος, στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ τάξης, γινόταν στο μεγαλύτερο ποσοστό (66%) με τον συνδυασμό τουλάχιστον δύο τρόπων, δηλαδή σε Συνδυαστική μορφή, ενώ στα άλλα δύο σχολικά εγχειρίδια τα προβλήματα κατανεμήθηκαν σχεδόν με τα ίδια ποσοστά μεταξύ της Λεκτικής και Μαθηματικής μορφής και λιγότερα σε Συνδυαστική μορφή (8%). Σε Οπτική μορφή παρουσιαστήκαν σε ένα μικρό ποσοστό τα προβλήματα στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ τάξης, ενώ στα άλλα δύο το ποσοστό ήταν ελάχιστο, 2% στην Ε΄ τάξη και μηδενικό στην ΣΤ΄ τάξη. Το γεγονός ότι στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ τα προβλήματα εκτός από λεκτικό κείμενο συνοδεύονταν και από οπτικές αναπαραστάσεις, γεγονός που δεν εντοπίστηκε στον ίδιο βαθμό στα εγχειρίδια των δύο τελευταίων τάξεων, συνδέεται πιθανώς με την ηλικία των μαθητών και τα τρία επίπεδα οργάνωσης του J. Bruner, τα οποία προτείνει το ελληνικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών του 1997, για την οργάνωση των δραστηριοτήτων στο μάθημα των μαθηματικών στο Δημοτικό (βλ. σελ.12). Η χρήση των αναπαραστατικών μέσων και η συσχέτιση τους με την επίλυση προβλημάτων θα μπορούσε να αποτελέσει το αντικείμενο μιας άλλης εργασίας.

Συμπερασματικά, καθώς στους γενικούς στόχους σχετικά με την επίλυση προβλήματος σε όλες τις τάξεις του Δημοτικού, το Δ.Ε.Π.Π.Σ. για το μάθημα των μαθηματικών αναφέρει: «Οι μαθητές εξερευνούν μία κατάσταση, κατασκευάζουν ερωτήσεις και προβλήματα με βάση συγκεκριμένα δεδομένα, διατυπώνουν διαφορετικά το ίδιο πρόβλημα, αναγνωρίζουν και περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις, ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις, χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή και εξοικειώνονται με τις νέες τεχνολογίες.» (σελ. 250), θα μπορούσε να ειπωθεί, πως οι ευκαιρίες μάθησης που προσφέρουν τα σχολικά εγχειρίδια των τριών αυτών τάξεων θα μπορούσαν να είναι περισσότερες. Σύμφωνα με αυτές τις κατευθύνσεις και τα αποτελέσματα από την ανάλυση των τριών σχολικών εγχειριδίων, θα μπορούσαμε να πούμε, πως αν και στα σχολικά εγχειρίδια ακολουθούνται αυτές οι προτάσεις, θα μπορούσαν να εμπλουτιστούν σημαντικά με περισσότερα είδη ανοιχτών προβλημάτων, με πλαίσιο που να αναφέρεται στην πραγματική ζωή και γενικότερα με περισσότερους τύπους προβλημάτων. Καθώς το τι περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τα Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, και καθώς η αναθεώρηση των Προγραμμάτων Σπουδών έχει θεωρηθεί αποτελεσματικός τρόπος για την βελτίωση της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθητών, ώστε να ανταποκρίνεται στις συνεχώς μεταβαλλόμενες απαιτήσεις του σύγχρονου κόσμου (Cai & Cirillo, 2013), η αναθεώρηση του ελληνικού Προγράμματος Σπουδών, είναι μια θετική εξέλιξη, που θα πρέπει να διερευνηθεί.

Ερευνητικό ερώτημα 2: Ποια από τα στάδια επίλυσης προβλημάτων του Pólya εμφανίζονται στα προβλήματα που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ', Ε' και ΣΤ' τάξης του Δημοτικού;

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της εξέτασης των σχολικών εγχειριδίων της Δ' Ε' και ΣΤ' τάξης, σχετικά με τα τέσσερα στάδια επίλυσης του Pólya, το στάδιο της Εκτέλεσης σχεδίου ήταν αυτό που ζητούνταν κυρίως από τους μαθητές να πράξουν και στα τρία σχολικά εγχειρίδια (95%), δηλαδή να λύσουν έτοιμους αλγόριθμους. Και στα τρία σχολικά εγχειρίδια το στάδιο της Επινόησης σχεδίου προσφερόταν από το βιβλίο (61%-77%) και σε ένα μικρό ποσοστό οι μαθητές καλούνταν να «επινοήσουν» κάποιο σχέδιο, συνήθως απλοϊκό ή που είχαν προηγουμένως διδαχθεί. Η διαφορά μεταξύ των σχολικών εγχειρίδιων ήταν πως στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ τάξης τα στάδια επίλυσης προβλήματος, αποτελούν αντικείμενο αρκετών μαθημάτων και μάλιστα επεξηγούνται πιο ξεκάθαρα και εφαρμόζονται συχνότερα μέσα στα προβλήματα, πιθανώς λόγω της μικρότερης ηλικίας των μαθητών.

Τα στάδια της Κατανόησης και της Ανασκόπησης εντοπίστηκαν σχεδόν στον ίδιο βαθμό και στα τρία σχολικά εγχειρίδια, με το σχολικό εγχειρίδιο της Ε΄ τάξης να έχει τα μικρότερα ποσοστά (12%-34% Κατανόηση, 26%-31% Ανασκόπηση). Σχετικά με τα λυμένα προβλήματα που δίνονταν από το βιβλίο, δηλαδή τις δραστηριότητες στις Εφαρμογές, οι οποίες δεν υπήρχαν στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ' τάξης αλλά μόνο στις Ε΄ και ΣΤ', σε αυτές τα στάδια που εντοπίστηκαν ήταν της Επινόησης σχεδίου και της Εκτέλεσης και σε πολύ μικρό ποσοστό τα άλλα δύο στάδια. Δηλαδή εντοπίζεται μια απόκλιση μεταξύ αυτού που διδάσκεται και αυτού που πραγματοποιείται, αφού οι μαθητές διδάσκονται τα τέσσερα στάδια επίλυσης του Pólya και στη συνέχεια αυτά εφαρμόζονται μερικώς στα λυμένα παραδείγματα που τους δίνονται. Πιθανώς, αυτό σχετίζεται με τους τύπους που το σχολικό εγχειρίδιο περιέχει, καθώς η χρήση των τεσσάρων σταδίων επίλυσης προβλήματος του Pólya, έχει συνδεθεί με πιο σύνθετα προβλήματα.

Αν και, στο ελληνικό Δ.Ε.Ε.Π.Σ. αναφέρεται πως η ενασχόληση με μια μαθηματική δραστηριότητα σημαίνει: «προσδιορίζω το πρόβλημα, εικάζω για το αποτέλεσμα, πειραματίζομαι με τη βοήθεια παραδειγμάτων, συνθέτω ένα συλλογισμό, διατυπώνω μια λύση, ελέγχω τα αποτελέσματα και αξιολογώ την ορθότητά τους σε συνάρτηση με το αρχικό πρόβλημα» (σελ. 4), το στάδιο της ανασκόπησης εντοπίστηκε σε σχετικά μικρό ποσοστό έργων και στα τρία σχολικά εγχειρίδια. Κάτι αντίστοιχο παρατήρησαν και οι Fan & Zhu (2007) στην έρευνα τους στα σχολικά εγχειρίδια της Σιγκαπούρης, της Κίνας και των ΗΠΑ, όπου το στάδιο της ανασκόπησης παρόλο που προτείνονταν από Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών των χωρών αυτών, συναντήθηκε σε μικρό βαθμό στα σχολικά τους εγχειρίδια.

Ερευνητικό ερώτημα 3. Ποιες ευρετικές εμφανίζονται κατά την επίλυση προβλημάτων στα έργα που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ', Ε' και ΣΤ' τάξης του Δημοτικού;

Από την εξέταση των τριών σχολικών εγχειριδίων διαπιστώθηκε πως τα ποσοστά χρήσης των ευρετικών σε αυτά ήταν μικρά, καθώς σε 214 έργα της Δ΄ τάξης, τα 89 πρότειναν την χρήση κάποιας ευρετικής (42%), στα 208 έργα της Ε' τάξης, τα 70 πρότειναν την χρήση κάποιας ευρετικής (34%) και στα 259 έργα της ΣΤ΄ τάξης, τα 85 πρότειναν κάποια ευρετική (33%). Η ύπαρξη κυρίως παραδοσιακών προβλημάτων στα τρία σχολικά εγχειρίδια, πιθανώς σχετίζεται με τον περιορισμένο αριθμό ευρετικών που χρησιμοποιήθηκαν, καθώς αυτά λύνονταν και χωρίς την χρήση κάποιας ευρετικής.

Όπως αποτυπώνεται από τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας, οι συγγραφείς των σχολικών εγχειρίδιων των μαθηματικών, εφάρμοσαν στα σχολικά εγχειρίδια τις ευρετικές που προτείνονταν από το ελληνικό Δ.Ε.Π.Π.Σ. για τα μαθηματικά. Και στα τρία σχολικά εγχειρίδια εντοπίστηκαν 7 από τις 11 ευρετικές, από τις οποίες οι ευρετικές «σχεδιάζω ένα πίνακα», «βρίσκω ένα μοντέλο» και «εκτιμώ και ελέγχω» χρησιμοποιήθηκαν πιο συχνά. Αν συγκρίνουμε τα αποτελέσματα αυτά με τα αποτελέσματα της έρευνας των Fan & Zhu (2007), γίνεται φανερό πως τα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια χρησιμοποιούν τις λιγότερες ευρετικές, σε σχέση με τα σχολικά εγχειρίδια της Κίνας, στα οποία εντοπίστηκαν 11 ευρετικές, ενώ 14 εντοπίστηκαν στα σχολικά εγχειρίδια των ΗΠΑ και 16 στης Σιγκαπούρης.

Οι ευρετικές διδάσκονται με έμμεσο τρόπο, κατά την επίλυση του προβλήματος και δεν υπάρχουν πίνακες ή κατάλογοι με ευρετικές, στα οποία οι μαθητές μπορούν να ανατρέξουν. Στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ τάξης, στα κεφάλαια που ασχολούνται με την διαχείριση προβλημάτων, αναφέρονται με ρητό τρόπο ορισμένες ευρετικές, ενώ τα μοτίβα και τα σχεδιαγράμματα αποτελούν αντικείμενα διδασκαλίας και στα τρία σχολικά εγχειρίδια, ενώ στης ΣΤ' προστίθενται και οι εξισώσεις.

Οι ευρετικές όπως και η επίλυση προβλημάτων, έχουν ερευνηθεί κυρίως στα εγχειρίδια της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Fan & Zhu, 2007, Fan & Zhu, 2000, Kongelf, 2012) γεγονός που συνδέεται πιθανώς με την δήλωση του Pólya πως αυτές απαιτούν «ένα βαθμό μαθηματικής ωριμότητας» (Kongelf, 2012). Όμως, όπως αναφέρει ο ίδιος ερευνητής, αν και απλοποιημένες σε σχέση με τις ευρετικές που προτείνει ο Pólya, οι μαθητές θα πρέπει να έρχονται σε επαφή με τις ευρετικές καθ' όλη την διάρκεια της μαθηματικής τους εκπαίδευσης (Kongelf, 2012). Ως εκ τούτου, φαίνεται σημαντικό ότι το ελληνικό πρόγραμμα σπουδών προτείνει την χρήση ευρετικών, αν και περιορίζεται σε έξι από τις πιο συχνές ευρετικές για τη χρήση στα σχολικά εγχειρίδια της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης, ενώ η συχνότητα χρήσης τους και ποιες ευρετικές είναι «χρησιμότερες» θα πρέπει να διερευνηθεί περαιτέρω.

4.3. Περιορισμοί της έρευνας

Η παρούσα εργασία εξέτασε μόνο τα σχολικά εγχειρίδια της Δ΄, Ε' και ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού, γεγονός που αποτελεί περιορισμό της έρευνας. Η ανάλυση των σχολικών εγχειρίδιών και των άλλων τριών τάξεων, δηλαδή της Α΄, Β΄ και Γ΄ Δημοτικού, κυρίως ως προς τους τύπους των προβλημάτων που χρησιμοποιούν, θα έδινε μια πιο σφαιρική εικόνα για τα σχολικά εγχειρίδια της πρωτοβάθμιας. Επίσης, μια πιο ολοκληρωμένη οπτική για τα είδη των προβλημάτων που χρησιμοποιούνται στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του Δημοτικού, θα πρόσφερε η ανάλυση και των τετραδίων εργασιών που συνοδεύουν τα βιβλία των μαθητών σε κάθε τάξη. Μάλιστα η διερεύνηση όλων των τύπων των προβλημάτων που προτείνουν στην ανάλυση τους οι Fan & Zhu (2000) και λόγω της εστίασης και στα στάδια επίλυσης προβλήματος στην παρούσα εργασία δεν εξετάστηκαν όλα, θα μπορούσε να οδηγήσει σε πιο γενικευμένα και ασφαλή συμπεράσματα. Τέλος, τα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας δεν μπορούν να γενικευτούν αν δεν ερευνηθεί και ο τρόπος διδασκαλίας των σχολικών εγχειρίδιων που εξετάστηκαν και η στάση των μαθητών προς αυτά.

4.4. Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Παρόλο που υπάρχει μια γενικότερη τάση για την έρευνα στα σχολικά εγχειρίδια, στην χώρα μας δεν εντοπίστηκαν έρευνες που να αναλύουν και να συγκρίνουν τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών σε σχέση με τα είδη των προβλημάτων και τα στάδια επίλυσης προβλήματος, παρόλο που το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών αναφέρεται σε αυτά και τα σχολικά εγχειρίδια τα χρησιμοποιούν. Ως αποτέλεσμα, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν τα πλαίσια ανάλυσης της παρούσας εργασίας, για να πραγματοποιηθούν ανάλογες έρευνες στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Πρωτοβάθμιας και της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Επίσης, θα μπορούσαν να πραγματοποιηθούν έρευνες για να διερευνηθεί η συσχέτιση των ευκαιριών μάθησης που προσφέρουν τα σχολικά εγχειρίδια, που εξετάστηκαν και οι επιδόσεις των μαθητών στην επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά.

Τέλος, αν και μέσω της ανάλυσης των προβλημάτων που περιλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια, συγκεντρώνονται πληροφορίες για τα είδη των ευκαιριών μάθησης που προσφέρονται στους μαθητές, οι διδακτικές επιλογές και πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών στην διαμόρφωση αυτών διαδραματίζουν σημαίνοντα ρόλο (Cai & Cirillo, 2013) και γι’ αυτό η διερεύνηση τους μπορεί να προσφέρει μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για το θέμα αυτό.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Γρόσδος, Σ. (2010). "Μαθηματικός γραμματισμός και Οπτικός γραμματισμός: Η συμβολή των εικόνων στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων", *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 160, 98-118.
2. Καψάλης, Α. & Χαραλάμπους, Δ. (2008). *Σχολικά εγχειρίδια. Θεσμική και σύγχρονη προβληματική.* Νέα αναθεωρημένη έκδοση. Αθήνα: Μεταίχμιο.
3. Κλιάπης, Π. & Κασσώτη, Ο. (2017). Οι μαθηματικές γνώσεις των μαθητών της ΣΤ' Δημοτικού το 1998 και το 2015. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, 9*,11-26.
4. Κολέζα, Ε. (2017). *Θεωρία και Πράξη στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.
5. Μαμωνά- Downs, Γ. & Παπαδόπουλος, Ι. (2017). *Επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά.* Αθήνα: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
6. Μπούρας, Α. & Τριανταφύλου, Ε. (2012). Τα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού σχολείου βοηθούν τους μαθητές να μαθαίνουν πώς να μαθαίνουν: Οι απόψεις των εκπαιδευτικών. *Πρακτικά του Ελληνικού Ινστιτούτου Εφαρμοσμένης Παιδαγωγικής και Εκπαίδευσης , 6ο Πανελλήνιο Συνέδριο.*
7. Νταραδήμος, Λ. (2015). *Η μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο μέσα από τη σύγκριση των σχολικών βιβλίων των Μαθηματικών της ΣΤ΄ Δημοτικού και της Α΄ Γυμνασίου.* Μεταπτυχιακή διατριβή στο πλαίσιο του Διαπανεπιστημιακού- 100 Διατμηματικού προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών «Διδακτική και μεθοδολογία των Μαθηματικών. [http://www.math.uoa.gr/me/dipl/2014-15/dipl_Ntaradimos.pdf
8. Χασάπης, Δ. (2008). Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών: ένα πρόβλημα υπό διαρκή διερεύνηση. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.), *Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών, 7ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, 11-20. Θεσσαλονίκη.
9. ΦΕΚ 303 Β (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών. (Δ.Ε.Π.Π.Σ) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) Δημοτικού.*
10. Pepin, B. (2008). Μια διεθνής σύγκριση των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών και της χρήσης τους από τους εκπαιδευτικούς – ποια εικόνα των μαθηματικών παρουσιάζουν στους μαθητές τα σχολικά βιβλία στην Αγγλία, Γαλλία και Γερμανία. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.) *Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών, 7ο διήμερο*

*διαλόγου για διδασκαλία των μαθηματικών 15 & 16 Μαρτίου 2008 (*21-54). Θεσσαλονίκη.
11. Pólya, G. (1991). *Πώς να το λύσω*. Αθήνα: Ινστιτούτο του Βιβλίου- Καρδαμίτσα.

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to the other subjects-state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 37-68.
2. Boesen, J., Helenius, O., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Lithner, J., Palm, T., Palmberg, B., et al. (2014). Developing mathematical competence: From the intended to the enacted curriculum. *The Journal of Mathematical Behavior, 33*(1), 72–87.
3. Cai, J. (2003). Singaporean students' mathematical thinking in problem solving and problem posing: An exploratory study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34.*
4. Cai, J., & Cirillo, M. (2013). What do we know about reasoning and proving? Opportunities and missing opportunities from curriculum analyses. *International Journal of Educational Research 64*(9).
5. Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem- Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. In: Singer, F., F. Ellerton, N., Cai, J. (eds), *Mathematical Problem Posing*. *Research in Mathematics Education.* Springer, New York, NY.
   DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_1
6. Cai, J., & Jiang, C. (2017). An Analysis of Problem-Posing Tasks in Chinese and US Elementary Mathematics Textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*, 1521-1540.
7. Cifarelli, V. V., & Cai, J. (2005). The evolution of mathematical explorations in open-ended problem solving situations. *Journal of Mathematical Behavior, 24,* 302-324.
8. English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children’s problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics, 34*, 183-217.

9. English, L., & Gainsburg, J. (2016). Problem Solving in a 21st century mathematics curriculum. In English L., D., Kirshner, D. (Eds), : *Handbook of international research in mathematics education [3rd edition]* (313-335). Routledge, United States of America.
10. English, L., & Sriraman, B. (2010). Problem Solving for the 21st Century. In: Sriraman, B., English, L. (eds), *Theories of Mathematics Education. Advances in Mathematics Education.* Springer, Berlin, Heidelberg.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2_27
11. Fan, L., & Kaeley, G. S. (2000). The influence of textbooks on teaching strategies: An empirical study. *Mid-Western Educational Researcher, 13*(4), 2–9.
12. Fan, L., & Zhu, Y. (2000). Problem solving in Singaporean secondary mathematics textbooks. *The Mathematics Educator*, 5(1/2), 117–141.
13. Fan, L., & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 61–75.
14. Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. ZDM—*The International Journal on Mathematics Education*, *45*(5), 633–646.
15. Haggarty, L. & Pepin, B. (2002). An Investigation of Mathematics Textbooks and their Use in English, French and German Classrooms: who gets an opportunity to learn what*?* . *British Educational Research Journal 28*(4), 566-590.
16. Jäder,J., Lithner J.,& Sidenvall J. (2020). Mathematical problem solving in textbooks from twelve countries. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(7), 1120-1136.
DOI: 10.1080/0020739X.2019.1656826
17. Jonassen, D. H. (2000). Toward a Design Theory of Problem Solving. *Educational Technology Research and Development, 48*(4), 63–85.
18. Johansson, M. (2005). Mathematics textbooks: the link between the intended and the implemented curriculum? *Paper presented at the Eight International Conference of the Mathematics Education into the 21st Century Project: Reform, Revolution and Paradigm Shifts in Mathematics Education,* Johor Bahru, Malaysia.
19. Kongelf, T. R. (2012). What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway? *Nordic Studies in Mathematics Education*, 16(4), 5–44.

20. Kolovou, A., Van den Heuvel-Panhuizen M., & Bakker, A. (2009). Non-routine problem solving tasks in primary school mathematics textbooks: A needle in a haystack. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 8*(2), 31-68.
21. Lester, Fr. (1994). Musings about Mathematical Problem-Solving Research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education.*
22. Lester, F. K., Jr. (2013). Thoughts about research on mathematical problem- solving Instruction. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1-2), 245-278.
23. Lester, F.K. & Cai, J. (2016). Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from 30 Years of Research. In: Felmer, P., Pehkonen, E., Kilpatrick, J. (eds), *Posing and Solving Mathematical Problems*. *Research in Mathematics Education.* DOI:https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_8
24. Lithner, J. (2008). Are search framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255–276.
25. London, R. (2007). What is essential in mathematics education: A holistic view point. *MSOR Connections 7*(1), 30-34.
26. Mamona- Downs, J., Downs, M. (2013). Problem solving and its elements in forming proof. *The Mathematics Enthusiast 10*(1), 137-162.
27. Mesa, V. (2004). Characterizing Practices Associated with Functions in Middle School Textbooks: An Empirical Approach. *Educational Studies in Mathematics, 56,* 255-286. DOI: https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000040409.63571.56
28. Newton, D. P., & Newton, L. D. (2007). Could elementary mathematics textbooks help give attention to reasons in the classroom? *Educational Studies in Mathematics, 64*(1), 69–84.
29. O'Keeffe, L. (2013). A Framework for Textbook Analysis. *International Review of Contemporary Learning Research.*
30. Pehkonen, E. (1997α). *Use of Open-Ended Problems in Mathematics Classroom.* Research Report, 176.
31. Pehkonen, E. (1997β). The state-of- art in mathematical creativity. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik 29,* 63-67.
32. Pehkonen, E., Naveri, L. & Laine, A. (2013). On Teaching Problem Solving in School Mathematics. *Center of Educational Policy Studies Journal, 3*(4), 9-23.

33. Pepin, B., & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, *33*,158-175.

DOI: https://doi.org/10.1007/BF02656616

34. Reiss, Kr. & Törner, G. (2007). Problem solving in the mathematics classroom: The German perspective. *ZDM - International Journal on Mathematics Education, 39,* 431-441.

35. Reys, B., Reys, R., & Chavez, O. (2004). Why Mathematics Textbooks Matter. *Educational Leadership, 61.*

36. Reys, R., Reys, B., Lapan, R., Holliday, G., & Wasman, D. (2003), Assessing the impact of standards-based middle grades mathematics curriculum materials on student achievement*, Journal for Research in Mathematics Education, 34*(1), 74-95.

37. Rezat, S., & Sträßer, R. (2015). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. *Nordic Studies in Mathematics Education 20,* 247-266.

38. Rott, B., Specht, B., & Knipping, C. (2021). A descriptive phase model of problem-solving processes. *ZDM Mathematics Education 53,* 737-752.

39. Schmidt, W., Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (2012). Measuring content through textbooks: The cumulative effect of middle-school tracking. In: *From text to 'lived' resources: Mathematics curriculum materials and teacher development* (pp. 143–160). Dordrecht, Netherlands: Springer Science & Business Media B.V.

40. Schmidt, W., Houang, R., Sullivan & W., Cogan, L. (2022). When practice meets policy in mathematics education: A19 country/jurisdiction case study. *OECD Education Working Papers 268.*

41. Schoenfeld, A.H. (2013). Reflections on Problem Solving Theory and Practice. *The Mathematics Enthusiast, 10* (1), Art 3. DOI: https://doi.org/10.54870/1551-3440.1258

42. Schroeder, T. L., & Lester, F. K., Jr. (1989). Developing Understanding in mathematics via problem solving. In P.R. Trafton [Ed], *New directions for elementary school mathematics, 1989, Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp 31-42). Reston, VA: NCTM.

43. Shield, M., & Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics, 82*(2), 183–199. DOI: 10.1007/s10649-012-9415-9

44. Singer, F.M., Ellerton, N., Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions*. Educational Studies in Mathematics, 83*, 1-7.

45. Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1989). Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In R. Charles & E. Silver (Eds.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving* (pp. 1-22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

46. Suseelan, M., Chew, C.M., & Chin, H. (2022). Research on mathematics problem solving in elementary education conducted from 1969 to 2021: A bibliometric review*. International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology 10*(4), 1003- 1029.

47. Valverde, G.A., Bianchi, L.J., Wolfe, R.G., Scmidt, W.H. & Houng, R.T. (2002). *According to the Book- Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

48. Van de Walle, J. A., (2007). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally* [6th ed]. Boston, Pearson/Allyn and Bacon.

49. Verschafel, L., Depaepe, F., & Van Dooren, W. (2014). Word problems in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 641–645). Dordrecht: Springer.

50. Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Dooren, W. V. (2020). Word problems in mathematics education: a survey. *ZDM Mathematics Education, 52*, 1-16.

51. Vincent, J., & Stacey, K. (2008). Do mathematics textbooks cultivate shallow teaching? Applying the TIMSS Video Study criteria to Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Mathematics Education Research Journal, 20*, 82-107.
DOI: http://doi.org/10.1007/BF03217470

52. Wijaya, Ariyadi & van den Heuvel-Panhuizen, Marja & Doorman, Michiel. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics.*

53. Woodward, J., Beckmann, S., Driscoll, M., Franke, M., Herzig, P., Jitendra, A., Koedinger, K. R., & Ogbuehi, P. (2012). *Improving mathematical problem solving in grades 4 through 8*: *A practice guide* (NCEE 2012-4055). Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education.

54. Xin, Y. P. (2007). Word problem solving tasks in textbooks and their relation to student performance. *Journal of Educational Research, 100*(6), 347–359.

55. Zhu, Y., Fan, L. (2006). Focus on the Representation of Problem Types in Intended Curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*(4), 609–626.