ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Σχολή Ανθρωπιστικών Επιστημών

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Τίτλος

«Πολυδιάστατη Προσέγγιση της δημιουργικότητας στη μάθηση της γεωμετρίας: Ο ρόλος της κατανόησης γεωμετρικού σχήματος, της χωρικής ικανότητας και των δυναμικών περιβαλλόντων στην παραγωγή πολλαπλών λύσεων»

Γρίδος Παναγιώτης

Α.Μ: 4122018004

Ρόδος, Δεκέμβριος 2023

Εξεταστική Επιτροπή

Αυγερινός Ευγένιος	Καθηγητής Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστημίου Αιγαίου	Επιβλέπων
Φιλιππάκης Μιχαήλ	Καθηγητής Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων Πανεπιστήμιο Πειραιώς	Μέλος Συμβουλευτικής Επιτροπής
Αθανασιάδου - Κόττα Ευαγγελία	Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστήμιο Αθηνών	Μέλος Συμβουλευτικής Επιτροπής
Γαγάτσης Αθανάσιος	Ομότιμος Καθηγητής Τμήμα Επιστημών της Αγωγής Πανεπιστήμιο Κύπρου	Μέλος Εξεταστικής Επιτροπής
Σκουμιός Μιχαήλ	Καθηγητής Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστημίου Αιγαίου	Μέλος Εξεταστικής Επιτροπής
Φωκίδης Εμμανουήλ	Αναπληρωτής Καθηγητής Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστημίου Αιγαίου	Μέλος Εξεταστικής Επιτροπής
Τραντάς Πέτρος	Επίκουρος Καθηγητής Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστημίου Αιγαίου	Μέλος Εξεταστικής Επιτροπής

Υπεύθυνη Δήλωση Υποψήφιου Διδάκτορα

Είμαι ο αποκλειστικός συγγραφέας της υποβληθείσας Διδακτορικής Διατριβής με τίτλο:

«Πολυδιάστατη Προσέγγιση της Μαθηματικής Δημιουργικότητας κατά τη Μάθηση της Γεωμετρίας: Ο Ρόλος της Κατανόησης Γεωμετρικού Σχήματος, της Χωρικής Ικανότητας, των Αναπαραστάσεων και της Χρήσης Βοηθητικών Κατασκευών στην Ανάπτυξη της»

Η συγκεκριμένη Διατριβή είναι πρωτότυπη και εκπονήθηκε αποκλειστικά για την απόκτηση του Διδακτορικού διπλώματος του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης. Κάθε βοήθεια, την οποία είχα για την προετοιμασία της, αναγνωρίζεται πλήρως και αναφέρεται επακριβώς στη διατριβή. Επίσης, επακριβώς αναφέρω στη διατριβή τις πηγές, τις οποίες χρησιμοποίησα και μνημονεύω επώνυμα τα δεδομένα ή τις ιδέες που αποτελούν προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας άλλων, ακόμη κι εάν η συμπερίληψη τους στην παρούσα εργασία υπήρξε έμμεση ή παραφρασμένη. Γενικότερα, βεβαιώνω ότι κατά την εκπόνηση της Διδακτορικής Διατριβής έχω τηρήσει απαρέγκλιτα όσα ο νόμος ορίζει περί διανοητικής ιδιοκτησίας και έχω συμμορφωθεί πλήρως με τα προβλεπόμενα στο νόμο περί προστασίας προσωπικών δεδομένων και τις αρχές Ακαδημαϊκής Δεοντολογίας.

Ο ΔΗΛΩΝ

ΓΡΙΔΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

e-mail: p.gridos@aegean.gr

Αφιερώνεται ,

Στους γονείς μου Αντώνη και Ζωή.

Περίληψη

Ένας από τους σημαντικότερους στόχους της σημερινής εκπαίδευσης στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι η απελευθέρωση της σκέψης και η ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών. Για να γίνει αυτό πρέπει πρώτα να κατανοήσουμε ποιοι παράγοντες σχετίζονται με τη μαθηματική δημιουργικότητα. Ο σκοπός της διατριβής είναι η διερεύνηση της μαθηματικής δημιουργικότητας μέσα από μια γνωστική και αντιληπτική προσέγγιση στο πεδίο της γεωμετρία. Η διερεύνηση γίνεται σε τέσσερις άξονες: (α) εξετάζεται η επίδραση του τύπου σύλληψης γεωμετρικού σχήματος που ενεργοποιούν οι μαθητές στην παραγωγή πολλαπλών λύσεων, την κατασκευή γεωμετρικού προβλήματος και τη μαθηματική δημιουργικότητα, (β) εξετάζεται πώς η αναγκαιότητα κατασκευής επιπλέον βοηθητικών κατασκευών στο δοθέν σχήμα επηρεάζει την παραγωγή πολλαπλών λύσεων και τις μεταβλητές της δημιουργικότητας, (γ) εξετάζεται πώς η χωρική ικανότητα συνδέεται με τη μαθηματική δημιουργικότητα κατά την παραγωγή πολλαπλών λύσεων, και (δ) εξετάζεται πώς ο τύπος αναπαραστάσεων που ενεργοποιούν οι μαθητές επηρεάζει τη μαθηματική τους δημιουργικότητα. Δείγμα της έρευνας αποτελούν 486 μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης από τις τάξεις Γ΄ Γυμνασίου, Α΄Λυκείου, Β΄ Λυκείου και στη συνέχεια επιχειρείται μια πρώτη προσέγγιση των συνιστωσών της έρευνας σε 14 μαθητές προσχολικής ηλικίας. Η συλλογή των δεδομένων έγινε μέσω γραπτών δοκιμίων και μέσω ποιοτικών συνεντεύξεων. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων δείχνει ότι ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται το γεωμετρικό σχήμα και η ικανότητα τους να το επεξεργαστούν, η χωρικής τους ικανότητα, η ικανότητα τους να φέρνουν βοηθητικές κατασκευές σε ένα γεωμετρικό σχήμα και ο τρόπος με τον οποίο μπορούν να χειριστούν αναπαραστάσεις αποτελεί σημαντικό παράγοντα πρόβλεψης της μαθηματικής τους δημιουργικότητας.

Λέξεις Κλειδιά: Μαθηματική Παιδεία, Γεωμετρία, Μαθηματική Δημιουργικότητα, Κατανόηση Γεωμετρικού Σχήματος, Χωρική Ικανότητα, Αναπαραστάσεις, Βοηθητικές Κατασκευές.

Abstract

One of the most important goals of today's education in teaching mathematics is the liberation of thinking and the development of students' mathematical creativity. To do this we must first understand what factors are associated with mathematical creativity. The purpose of the thesis is to investigate mathematical creativity through a cognitive and perceptual approach in the field of geometry. The investigation is carried out in four axes: (a) examines the influence of geometrical figure apprehension on the production of multiple solutions, on problem posing and mathematical creativity, (b) examines how the necessity to construct auxiliary lines in the given figure, promote the production of multiple solutions and the variables of creativity, (c) examines how spatial ability relates to mathematical creativity when generating multiple solutions, and (d) examines how the type of representations students activate affects their mathematical creativity. The sample of the research is 486 secondary education students of high school and then a first approximation of the research components to 14 preschool students is attempted. Data collection was done through written tests and through qualitative interviews. The analysis of the results shows that the way students perceive the geometric figure and their ability to process it, their spatial ability, their ability to construct auxiliary lines to a geometric shape and the way they can handle representations is an important predictor of their mathematical creativity.

Key Words: Mathematics Education, Geometry, Mathematical Creativity, Geometrical Figure Apprehension, Spatial Ability, Representations, Auxiliary Lines.

Ευχαριστίες

Ήρθε και για μένα η στιγμή της ολοκλήρωσης της διδακτορικής μου διατριβής. Νιώθω ιδιαίτερα τυχερός, καθώς κατά τη διάρκεια εκπόνησης της είχα την τύχη και τη χαρά να γνωρίσω ξεχωριστούς επιστήμονες και ανθρώπους. Αν και τα λόγια δεν είναι ποτέ αρκετά για να εκφράσουν την ευγνωμοσύνη και τη συγκίνηση, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά και από καρδιάς:

Τον επιβλέπων καθηγητή μου Δρ. Αυγερινό Ευγένιο, ο οποίος στάθηκε δίπλα μου και με ενέπνευσε σε όλα τα στάδια της διδακτορικής μου διατριβής. Τον άνθρωπο που πίστεψε σε μένα από την αρχή συνεργασίας μας και με δίδαξε σημαντικά πράγματα για τη μαθηματική παιδεία και τις δυσκολίες αυτής σε όλους τους τομείς. Η καθοδήγηση του, η οποία ήταν κλειδί για την ολοκλήρωση της διατριβής, υπήρξε ελαστικά αυστηρή και πιεστικά υπομονετική.

Τον Δρ. Γαγάτση Αθανάσιο για όλα όσα έμαθα από αυτόν για την επιστήμη της διδακτικής των μαθηματικών κατά την διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος της Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, για την διαρκή υποστήριξη του κατά την εκπόνηση της Διδακτορικής μου διατριβής, για τις πολύτιμες συμβουλές του αλλά και για τις ευχάριστες συζητήσεις που είχαμε καθ΄ όλη την διάρκεια της συνεργασίας μας. Τον άνθρωπο που στάθηκε πραγματικός μέντορας κατά τα πρώτα δειλά μου βήματα στην έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Τον Δρ. Φιλιππάκη Μιχαήλ και την Δρ. Κόττα – Αθανασιάδου Ευαγγελία για τη συμμετοχή τους στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή και για τις πολύτιμες συμβουλές τους κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διδακτορικής διατριβής.

Τους Δρ. Σκουμιό Μιχαήλ, Δρ. Φωκίδη Εμμανουήλ και Δρ. Τριαντά Πέτρο για τη συμμετοχή τους στην εξεταστική επιτροπή.

Την Δρ. Μαμωνά – Downs Ιωάννα, για την όμορφη συνεργασία και τις πολύτιμες παρατηρήσεις της κατά τη διάρκεια εκπόνησης ερευνητικού προγράμματος, το οποίο αποτελεί μέρος της διδακτορικής διατριβής.

Την Δρ. Δεληγιάννη Ελένη και την Δρ. Ηλία Ιλιάδα, συνεργάτιδες από το Πανεπιστήμιο Κύπρου, για την όμορφη και αγνή συνεργασία όλα αυτά τα χρόνια.

Την Δρ. Βλάχου Ρόζα, για την προσοδοφόρα συνεργασία μας και τις ατελείωτες ώρες συζητήσεων για θέματα διδακτικής μαθηματικών.

Ευχαριστίες για χρηματοδοτήσεις

1. «Μέρος της διατριβής συγχρηματοδοτήθηκε από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση» στο πλαίσιο της Πράξης "Πολυδιάστατη προσέγγιση της Μαθηματικής δημιουργικότητας (mathematical creativity) ως εργαλείο για μάθηση και χρήση της Γεωμετρίας με εφαρμογές στη διδασκαλία των κλασμάτων και την επίλυση και θέση προβλήματος κατά την μετάβαση από την Πρωτοβάθμια στην Δευτεροβάθμια εκπαίδευση" (MIS 5050336)».

2. Η διατριβή χρηματοδοτήθηκε με τρεις ετήσιες υποτροφίες με ακαδημαϊκά κριτήρια από το ίδρυμα "The A.G. Leventis Foundation, Zürich, Switzerland".

Πίνακας περιεχομένων

Επισκόπηση Κεφαλαίων

Η παρούσα διατριβή αποτελείται από 5 κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο αναλύονται οι λόγοι και τα κίνητρα για την έναρξη της έρευνας, η συμβολή της στην επιστημονική κοινότητα, καθώς και μια εισαγωγή στις έννοιες με τις οποίες ασχολείται η διατριβή.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται αναλυτικά το θεωρητικό πλαίσιο πάνω στο οποίο στηρίζεται η διατριβή. Πιο συγκεκριμένα, ερευνήθηκαν τα κυριότερα επιστημονικά περιοδικά της διεθνούς βιβλιογραφίας προκειμένου να μελετηθούν και να καταγραφούν τα αποτελέσματα των ερευνών που έχουν δημοσιευθεί τα τελευταία χρόνια με θέματα: (α) την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας κατά την επίλυση προβλημάτων πολλαπλών λύσεων, ανοιχτών προβλημάτων και κατά την κατασκευή προβλημάτων, (β) τη χρήση θεωριών και μοντέλων στην έρευνα της διδακτική της γεωμετρίας, (γ) το ρόλο των αναπαραστάσεων, της χωρικής ικανότητας, της κατανόησης γεωμετρικού σχήματος και του μαθηματικού χώρου εργασίας κατά τη μάθηση της γεωμετρίας.

Το τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζει τη μεθοδολογία της έρευνας, το σκοπό, τα ερευνητικά ερωτήματα, καθώς και τα εργαλεία υλοποίησης και ανάλυσης της έρευνας. Συνοπτικά, το ερευνητικό πλαίσιο της εργασίας διήρκησε τρία χρόνια, έλαβε χώρα στην Ελλάδα και πήραν μέρος συνολικά 500 συμμετέχοντες. Η επιλογή του δείγματος ήταν απογραφική, στρωματοποιημένη και συμπτωματική, ανάλογα με τους σκοπούς και τις ανάγκες της εκάστοτε έρευνας. Η διατριβή αποτελείται από τέσσερις διαφορετικές έρευνες, οι οποίες ακολούθησαν είτε ποιοτική είτε ποσοτική προσέγγιση. Αναφορικά με τις μεθόδους συλλογής δεδομένων, χρησιμοποιήθηκαν ερωτηματολόγια και δοκίμια που συντάχθηκαν από τον ερευνητή και κατέληξαν στην τελική τους μορφή μετά από πιλοτικές έρευνες και έλεγχο εγκυρότητας από ειδικούς στο χώρο της έρευνας της διδακτικής των μαθηματικών. Επίσης, έγιναν διδασκαλίες, ημιδομημένες συνεντεύξεις, παρατήρηση.

Το τέταρτο κεφάλαιο αποτελεί τα αποτελέσματα των ερευνών και χωρίζεται σε τέσσερις επιμέρους παραγράφους. Πιο συγκεκριμένα, η πρώτη παράγραφος παρουσιάζει τα αποτελέσματα από τη διερεύνηση του κατά πόσο η μαθηματική δημιουργικότητα (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία) μαθητών Λυκείου σχετίζεται με τον τρόπο με τον οποίο κατανοούν τα σχήματα. Η δεύτερη παράγραφος παρουσιάζει τα αποτελέσματα από τη διερεύνηση της σχέσης μεταξύ της ανάπτυξης της μαθηματικής δημιουργικότητας κατά τη μάθηση της γεωμετρίας και της χωρικής ικανότητας μαθητών Γυμνασίου. Η τέταρτη παράγραφος παρουσιάζει τα αποτελέσματα από τη διερεύνηση της ανάπτυξης της μαθηματικής δημιουργικότητας και τη σχέση της με τον αν δίνεται ή όχι το γεωμετρικό σχήμα στην εκφώνηση της άσκησης καθώς και πως η κατανόηση γεωμετρικού σχήματος μπορεί να συμβάλει στην ανάπτυξη των διαστάσεων της δημιουργικότητας σε μαθητές Λυκείου. Επιπλέον, στόχος αυτής της μελέτης είναι να περιγράψει τη φύση του γεωμετρικού χώρου εργασίας που λαμβάνει μέρος σε ένα πρόβλημα πολλαπλών λύσεων γεωμετρίας. Τέλος, η τέταρτη παράγραφος παρουσιάζει τα αποτελέσματα από το πώς η μαθηματική δημιουργική σκέψη (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία) μαθητών προσχολικής, μεταβάλλεται ύστερα από παρεμβατικό πρόγραμμα τριών μηνών το οποίο στοχεύει στην ανάπτυξη της κατανόησης γεωμετρικού σχήματος των μαθητών και της χωρικής τους ικανότητας.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται ομαδοποιημένα τα συμπεράσματα της ερευνητικής αυτής μελέτης και δίνονται οι εκπαιδευτικές εφαρμογές και οι μελλοντικές κατευθύνσεις της έρευνας.

1 Εισαγωγή

Ο 21ος αιώνας χαρακτηρίζεται από μια εκθετική ανάπτυξη της καινοτομίας σε όλους τους τομείς της ζωής που συνδέονται με την τεχνολογική πρόοδο και την επιστημονική πρόοδο. Κατά συνέπεια, η ανάπτυξη δεξιοτήτων του 21ου αιώνα (Pellegrino & Hilton, 2012) είναι ένας από τους κύριους στόχους της σχολικής εκπαίδευσης, συμπεριλαμβανομένης της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η σημασία της προώθησης της μαθηματικής δημιουργικότητας στους μαθητές των σχολείων αναγνωρίζεται από πολλές έρευνες και εκπαιδευτικούς οργανισμούς όπως η Εθνική Ακαδημία Επιστήμης (NAC, Pellegrino & Hilton, 2012), το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών στις ΗΠΑ (NCTM, 2000), και το OECD (2021), που τονίζουν τη σημασία ανάπτυξης της μαθηματικής δημιουργικότητας και της ευελιξίας των μαθητών σε διάφορα επίπεδα ικανοτήτων, σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης.

Τα τελευταία χρόνια, παρατηρείται μια όλο και μεγαλύτερη ανάγκη ανάπτυξης της σκέψης των ατόμων ώστε να προσφέρουν δημιουργικές και καινοτόμες λύσεις σε προβλήματα που αντιμετωπίζει η κοινωνία σήμερα. Η δημιουργικότητα είναι ένα σημαντικό χαρακτηριστικό, προσωπικό και κοινωνικό, που δίνει ώθηση στην ανθρώπινη πρόοδο και εξέλιξη (Leikin & Pitta – Pantazi, 2013). Η αξία αυτή της δημιουργικής σκέψης στον άνθρωπο έχει αναγνωριστεί και από διεθνείς κυβερνητικούς και εκπαιδευτικούς οργανισμούς, όπως το European Parliament and the Council (2006) και το National Council of Teachers of Mathematics (2010), οι οποίοι τονίζουν τη σημασία ανάπτυξης της ικανότητας των μαθητών, όλων των εκπαιδευτικών βαθμίδων, να σκέφτονται δημιουργικά και ευέλικτα για τις μαθηματικές έννοιες και ιδέες. Από αυτήν την οπτική η δημιουργικότητα αποτελεί αναπόσπαστο μέρος των μαθηματικών (Brunkalla, 2009) και έχει προταθεί ως ένα από τα βασικά συστατικά που θα συμπεριληφθούν στην εκπαίδευση των Μαθηματικών, αφού "η ουσία των Μαθηματικών είναι να σκέφτεται κάποιος δημιουργικά" (Mann, 2006, σελ. 239).

Όμως, η δημιουργικότητα επειδή είναι μια πολύπλοκη διεργασία και δύσκολα μπορεί να αναλυθεί, για να μπορέσει να επιτευχθεί πρέπει να γίνει αποδόμηση της σε επιμέρους κομμάτια. Στο πεδίο της διδακτικής των Μαθηματικών, οι έρευνες που έχουν γίνει για την δημιουργικότητα εστιάζονται κυρίως: (α) στα στάδια της δημιουργικής διαδικασίας, (β) στο προιόν που παράγεται, (γ) στην προσωπικότητα των δημιουργικών ατόμων και (δ) στις γνωστικές διαδικασίες που μετέχουν σε δημιουργικές δραστηριότητες. Η διατριβή αυτή εστιάζεται στις γνωστικές διαδικασίες οι οποίες απαιτούνται στις δημιουργικές Γεωμετρικές δραστηριότητες, εξετάζοντας τη μαθηματική δημιουργικότητα που εμφανίζουν οι μαθητές μέσα από μια αντιληπτική προσέγγιση. Πιο συγκεκριμένα, στόχος της διατριβής είναι να παρουσιάσει ότι η δημιουργική διαδικασία στη Γεωμετρία μπορεί να σχετίζεται με τον χωρικό συλλογισμό των μαθητών και κυρίως τον διαφορετικό τρόπο που αντιλαμβάνονται οι μαθητές τα σχήματα (Duval, 1995; 2017). Για τους σκοπούς της έρευνας, η μαθηματική δημιουργικότητα στη γεωμετρία συνδέεται με την επίλυση προβλημάτων πολλαπλών λύσεων (π.χ. Levav-Waynberg & Leikin, 2012) και την κατασκευή προβλημάτων (π.χ. Silver, 1997) και εξετάζεται η επίδραση της κατανόησης γεωμετρικού σχήματος, των βοηθητικών κατασκευών, των αναπαραστάσεων και της χωρικής ικανότητας στην ανάπτυξη των μεταβλητών της μαθηματικής δημιουργικότητας: ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία (Torrance, 1994).

Είναι γνωστό ότι για να αποδείξουμε μία γεωμετρική πρόταση πρώτα σχεδιάζουμε το σχήμα και μετά με τη βοήθεια της κατάλληλης μεθοδολογίας και των θεωρημάτων προσπαθούμε να αποδείξουμε το ζητούμενο. Υπάρχουν όμως πολλές ασκήσεις, στις οποίες το σχήμα όπως σχεδιάστηκε από την εκφώνηση της άσκησης δεν είναι αρκετό για την επίλυση. Στις ασκήσεις αυτές προβάλλει η ανάγκη να χαράξουμε κάποια βοηθητική ευθεία (auxiliary line). Βοηθητική λέγεται κάθε ευθεία που χαράζουμε με δική μας πρωτοβουλία.

Για να χαράξουμε κάποια βοηθητική γραμμή προσπαθούμε να βρούμε τι θα έπρεπε να υπάρχει στο σχήμα ώστε να πετύχουμε την επίλυση. Με την κατάλληλη βοηθητική γραμμή προσπαθούμε να δημιουργήσουμε αυτό που μας χρειάζεται. Κάθε φορά που φέρνουμε μια βοηθητική γραμμή το σχήμα περιπλέκεται. Έτσι καταφεύγουμε στη λύση της βοηθητικής γραμμής μόνο όταν έχουμε δοκιμάσει κάθε άλλο τρόπο επίλυσης και έχουμε απογοητευθεί. Είναι φανερό ότι οι ασκήσεις στις οποίες η επίλυση απαιτεί τη χάραξη βοηθητικής ευθείας, είναι δυσκολότερες από τις υπόλοιπες. Στην παρούσα διατριβή θα χρησιμοποιηθούν δύο είδη προβλημάτων: α) προβλήματα που επιλύονται είτε χωρίς τη χρήση βοηθητικών γραμμών είτε με τη χρήση βοηθητικών γραμμών, και β) προβλήματα που επιλύονται μόνο με τη χρήση βοηθητικών γραμμών.

Ένας παράγοντας που διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στις προσπάθειες επίλυσης ενός προβλήματος είναι ο τρόπος παρουσίασής του. Άρα, η λεκτική περιγραφή του μαθηματικού προβλήματος, σε συνδυασμό με την παρουσία εξωτερικών αναπαραστάσεων σε αυτό, μπορεί να συμβάλουν σημαντικά στην προσπάθεια επίλυσης μαθηματικού προβλήματος από το αρχικό κιόλας στάδιο της κατανόησης. Τα τελευταία χρόνια υποστηρίζεται από τη μαθηματική εκπαιδευτική κοινότητα η χρήση των εξωτερικών αναπαραστάσεων στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος.

Στα πλαίσια της χρήσης των αναπαραστάσεων στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος, μια σημαντική διάκριση που πρέπει να αποσαφηνιστεί είναι ανάμεσα στις κύριες και στις βοηθητικές αναπαραστάσεις. Οι κύριες αναπαραστάσεις είναι απαραίτητες για την επίλυση του προβλήματος εφόσον μέσα από αυτές εκφράζεται οποιαδήποτε πληροφορία σε σχέση με το πρόβλημα. Είναι αυτόνομες και ανεξάρτητες από το αντικείμενο που παριστούν και το άτομο μπορεί να τις τροποποιήσει και να τις επεξεργαστεί χωρίς περιορισμούς. Η λεκτική περιγραφή του προβλήματος θεωρείται κύρια αναπαράσταση. Οι βοηθητικές αναπαραστάσεις δεν είναι απαραίτητες για την επίλυση του προβλήματος, αλλά μπορούν να βοηθήσουν σημαντικά τη διαδικασία επίλυσης.

Γιατί όμως ο μετασχηματισμός αναπαράστασης είναι σημαντικός; Η μαθηματική δραστηριότητα απαιτεί ικανότητα αλλαγής συστήματος γιατί θα πρέπει δύο συστήματα να συνδυάζονται για την γεωμετρική σύλληψη, όπως τα σχήματα και η φυσική γλώσσα ή ο συμβολισμός. Από διδακτικής άποψης «μόνο οι μαθητές που μπορούν να αλλάζουν συστήματα δεν μπερδεύουν τα αντικείμενα με τις αναπαραστάσεις τους και μπορούν να μεταφέρουν τη γνώση τους και σε άλλα διαφορετικά πλαίσια απ' αυτά που διδάχθηκαν» (Duval, 1999). Το πρόβλημα των μαθητών στη μαθηματική σκέψη βρίσκεται στη μαθηματική εξειδίκευση και στη γνωστική πολυπλοκότητα της μετατροπής και αλλαγής αναπαραστάσεων. Δεν είναι θέμα μόνο κωδικοποίησης ούτε μαθηματικής έννοιας, αλλά απαιτείται συντονισμός μεταξύ διαφορετικών συστημάτων απεικόνισης (Duval, 2006). Η μάθηση, λοιπόν, μπορεί να επιτευχθεί μέσω της "από-διαμερισματοποίησης" και του συντονισμού των διαφόρων αναπαραστάσεων της ίδιας μαθηματικής κατάστασης. Ως εκ τούτου, η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων στη μάθηση των μαθηματικών, η σύνδεση και η σύγκριση μεταξύ τους και η μετατροπή από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο δεν πρέπει να αφεθεί στην τύχη, αλλά πρέπει να διδάσκεται και να μαθαίνεται συστηματικά (Duval, 2002),

Η παρούσα διατριβή χρησιμοποιεί τη θεωρία του Duval (1995, 2017), ως προς τον τρόπο σύλληψης γεωμετρικού σχήματος (geometrical figure apprehension) που ενεργοποιούν οι μαθητές. Κατά την ανάλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος η χρησιμότητα του γεωμετρικού σχήματος θεωρείται αναμφισβήτητη, καθώς παρέχει μια διαισθητική παρουσίαση των συνιστωσών και σχέσεων σε μια γεωμετρική κατάσταση (Duval, 1995).

Η χωρική ικανότητα (spatial ability) σχετίζεται με τη γνώση και κατανόηση χωρικών εννοιών και σχέσεων, τους διάφορους τρόπους με τους οποίους αναπαριστούμε αυτές τις έννοιες και σχέσεις και ακόμη πως επιχειρηματολογούμε και εξάγουμε συμπεράσματα σχετικά με την χωρική πληροφορία. (NRC 2006). Ως χωρική σκέψη ορίζεται η δυνατότητα απεικόνισης και ερμηνείας της θέσης, της απόστασης, της κατεύθυνσης, των σχέσεων, των αλλαγών και μετακινήσεων που σχετίζονται με το χώρο. Η χωρική σκέψη χρησιμοποιεί τις ιδιότητες του χώρου ως μέσο επίλυσης προβλημάτων, εύρεσης απαντήσεων και διατύπωσης λύσεων (NRC 2006).

Η χωρική σκέψη έχει προσφάτως αναγνωριστεί ως σημαντική ικανότητα τόσο για τις επιστήμες όσο και την καθημερινή ζωή. Η έκθεση του Εθνικού Συμβουλίου Έρευνας (National Research Council) των ΗΠΑ (NRC 2006) «Learning to Think Spatially: GIS as a Support System in the K-12 Curriculum» τόνισε ότι χωρίς τη ρητή προσοχή στη [χωρική παιδεία], δεν μπορεί η παιδεία να ανταποκριθεί στις ευθύνες της για τον εξοπλισμό της επόμενης γενιάς μαθητών σε ό,τι αφορά τον προσωπικό και εργασιακό τους βίο στον 21ο αιώνα.

Αρκετοί επιστήμονες έχουν ασχοληθεί με το θέμα καθορισμού και κατηγοριοποίησης εκείνων των δεξιοτήτων οι οποίες απαρτίζουν τη χωρική ικανότητα, όπως οι Linn και Peterson (1985) που θεώρησαν ότι οι συνιστώσες της χωρικής σκέψης είναι η χωρική αντίληψη, η χωρική οπτικοποίηση (spatial visualization) και η νοητή περιστροφή (mental rotation). Έκτοτε, προέκυψαν και άλλες κατηγοριοποιήσεις προσθέτοντας νέες κατηγορίες. Την διαφοροποίηση έκανε ο Carroll (1993), Αμερικανός ψυχολόγος, που εισήγαγε πέντε πιο γενικές κατηγορίες: οπτικοποίηση, χωρικές σχέσεις, ευελιξία κλεισίματος (flexibility of closure), ταχύτητα κλεισίματος (closure speed) και αντιληπτική ικανότητα. Σ' αυτές τις κατηγορίες προστίθενται και άλλες δεξιότητες που αφορούν κυρίως μεγάλες κλίμακες, όπως χωροχρονική ικανότητα και περιβαλλοντική ικανότητα.

Ανάλογα βέβαια με την οπτική γωνία που προσεγγίζει ο εκάστοτε ερευνητής το ζήτημα αυτό, προκύπτουν διαφορετικές κατηγοριοποιήσεις όπως για παράδειγμα η κατηγοριοποίηση του Allen (2003) και ο οποίος ανάλογα με το χωρικό σύστημα αναφοράς διακρίνει τρεις κατηγορίες: αναγνώριση αντικειμένου (object identification), (χωρικός) εντοπισμός αντικειμένου (object localization) και προσανατολισμός ταξιδιώτη (traveller orientation). Μια ακόμη πρόσφατη κατηγοριοποίηση είναι αυτή των Newcombe και Shipley (2014), στην οποία οι δεξιότητες της χωρικής σκέψης κατατάσσονται στις εξής τέσσερις κατηγορίες: εγγενείς-στατικές (intrinsic-static), εγγενείς-δυναμικές (intrinsic-dynamic), εξωγενείς-στατικές (extrinsicstatic) και εξωγενείς-δυναμικές (extrinsic-dynamic). Οι έρευνες που έχουν γίνει κατά καιρούς (π.χ. Bishop, 1983, Del Grande, 1987), δείχνουν ότι η χωρική ικανότητα αποτελεί σημαντικό παράγοντα για την κατανόηση της Γεωμετρίας και της στερεομετρίας, αλλά και μπορεί να αποτελέσει ισχυρό παράγοντα πρόβλεψης της μαθηματικής επίδοσης γενικότερα (π.χ. Conor & Serbin, 1985).

2 Θεωρητικό Πλαίσιο

2.1 Ικανότητες του 21ου Αιώνα

Τα τελευταία χρόνια, διεθνείς κυβερνητικοί και εκπαιδευτικοί οργανισμοί, όπως το European Parliament and the Council (2006) και το National Council of Teachers of Mathematics (2010), προτείνουν ορισμένες δεξιότητες τις οποίες θα πρέπει να έχει ένας πολίτης του 21ου αιώνα και θα πρέπει να αναπτύσσονται από μικρές ηλικίες, ώστε να ανταποκριθεί στις ανάγκες της κοινωνίας. Αυτές είναι:

1. Δημιουργικότητα (Creativity)

2. Ικανότητα στην επίλυση προβλήματος (Problem solving)

3. Ικανότητα στην επικοινωνία (Communication)

4. Κριτική Σκέψη (Critical Thinking)

5. Ικανότητα στη συνεργασία (Collaboration)

6. Ψηφιακή Ευχέρεια (Digital fluency)

7. Υπολογιστική Σκέψη (Computational Thinking)

8. Ικανότητα στη διαχείριση πολλών πληροφοριών (Information literacy)

Τις δεξιότητες Δημιουργικότητα και Επίλυση Προβλήματος θα τις αναλύσουμε στην παράγραφο 2.2. Ενδεικτικά για τις υπόλοιπες δεξιότητες έχουμε:

<u>Ικανότητα στην Επικοινωνία</u>: Οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να επικοινωνούν με τους άλλους αποτελεσματικά. Αυτό περιλαμβάνει την ικανότητα: α) άρθρωσης σκέψεων και ιδεών χρησιμοποιώντας αποτελεσματικά προφορικές, γραπτές ή μη λεκτικές δεξιότητες επικοινωνίας, β) επικοινωνία περίπλοκων ιδεών με σαφήνεια και αποτελεσματικότητα, γ) να επικοινωνούν αποτελεσματικά σε διαφορετικά περιβάλλοντα.

<u>Κριτική Σκέψη</u>: Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές να είναι σε θέση: α) να χρησιμοποιούν διάφορους τύπους συλλογισμού ανάλογα με την κατάσταση, β) να αναλύουν και να αξιολογούν σημαντικά εναλλακτικά σημεία απόψεων γ) να συνθέτουν και να συνδέουν

πληροφορίες και επιχειρήματα, και δ) να ερμηνεύουν πληροφορίες για την εξαγωγή καλύτερων συμπερασμάτων.

Ικανότητα στη Συνεργασία: Οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να εργάζονται αποτελεσματικά και με σεβασμό προς τους άλλους. Πιο συγκεκριμένα, α) να συμβάλλουν εποικοδομητικά σε ομάδες εργασίας, β) να είναι χρήσιμοι και να κάνουν τους απαραίτητους συμβιβασμούς για την επίτευξη ενός κοινού στόχου.

Ψηφιακή Ευχέρεια: Η δεξιότητα αυτή αναφέρεται στην τεχνολογική γνώση των μαθητών. Έτσι, περιλαμβάνει την ικανότητα κατανόησης των θεμελιωδών εννοιών των τεχνολογικών λειτουργιών και του τρόπου χρήσης της ψηφιακής τεχνολογίας, καθώς και τη χρήση των μέσων αυτών ως εργαλεία έρευνας, οργάνωσης, αξιολόγησης και επικοινωνίας πληροφοριών.

Υπολογιστική Σκέψη: Η δεξιότητα αυτή περιλαμβάνει την επίλυση προβλημάτων, το σχεδιασμό συστημάτων και την κατανόηση της ανθρώπινης συμπεριφοράς, αντλώντας πληροφορίες από τις βασικές έννοιες της επιστήμης των υπολογιστών. Πιο συγκεκριμένα, ορισμένες δεξιότητες που σχετίζονται με την υπολογιστική σκέψη είναι ο μαθητής να είναι σε θέση: α) να σπάσει τα προβλήματα σε συστατικά μέρη, να εξαγάγει βασικές πληροφορίες, να αναπτύξει μοντέλα για να κατανοήσει πολύπλοκα συστήματα β) να χρησιμοποιεί την αλγοριθμική σκέψη για να αναπτύξει μια ακολουθία βημάτων για να δημιουργήσει και να δοκιμάσει λύσεις.

Ικανότητα στη διαχείριση πολλών πληροφοριών: Αυτή η δεξιότητα αναφέρεται σε: α) αποτελεσματική πρόσβαση στις πληροφορίες και κριτική αξιολόγηση αυτών των πληροφοριών και β) χρήση και διαχείριση των ψηφιακών πληροφοριών.

2.2 Δημιουργικότητα τον 21ου Αιώνα

Η δημιουργικότητα στις μέρες μας έχει αυξήσει ραγδαία τη σημασία της όσον αφορά την κοινωνία και συνάμα την εκπαίδευση. Η δημιουργικότητα είναι ένας όρος που επινοήθηκε πρόσφατα, εμφανίστηκε στην βιβλιογραφία το 1950, αλλά εξακολουθούσε να λείπει από πολλά δημοφιλή περιοδικά μέχρι το 1960 (Piirto, 2004). Ωστόσο, μέχρι το τέλος του 20ου αιώνα, μια δίτομη εγκυκλοπαίδεια δημιουργικότητας από τους Runco & Pritzker (1999), είχε δημοσιευθεί με συνεισφορά από δεκάδες επιστήμονες από διάφορους τομείς. Παρόλα αυτά, η σημασία της δημιουργικότητας είναι δύσκολο να εκτιμηθεί. Αυτό το αυξανόμενο ενδιαφέρον αντιστοιχεί σε μια αυξημένη οικονομική ανάγκη για δημιουργικότητα. Σε έναν κόσμο που αλλάζει σε μεγάλο βαθμό και στον οποίο οι τεχνολογικές και επιστημονικές εξελίξεις αλλάζουν τα κοινωνικά δίκτυα και τη ζωή των ατόμων, η δημιουργικότητα είναι απαραίτητη τόσο για την προσαρμογή σε αυτόν τον μεταβαλλόμενο κόσμο όσο και για τη συνέχιση αυτών των εξελίξεων.

Στο βιβλίο του, A Whole New Mind, ο Pink (2005) κάνει μια ισχυρή υπόθεση ότι η δημιουργικότητα παίζει έναν όλο και πιο σημαντικό ρόλο στην οικονομία. Υποστηρίζει ότι η δημιουργικότητα, που κάποτε θεωρήθηκε λιγότερο σημαντική από τις μαθηματικές-λογικές ικανότητες στην εκπαίδευση, είναι απαραίτητη στην εποχή του διαδικτύου και της εξωτερικής ανάθεσης εργασίας σε τρίτους. Σύμφωνα με τον Pink, δεν αρκεί να είναι απλά κάποιος δικηγόρος ή μηχανικός. Πολλές συνήθεις νομικές λειτουργίες, όπως η σύνταξη εγγράφων διαζυγίου ή ο σχεδιασμός μιας βασικής κατασκευής, μπορούν να γίνουν μέσω διαδικτύου με λιγότερο κόστος αν ανατεθούν σε χώρες με λιγότερο δαπανηρές αγορές εργασίας. Κάποιος πρέπει να είναι όχι μόνο κατάλληλος αλλά και δημιουργικός για να είναι απαραίτητος στην αγορά. Ο δικηγόρος πρέπει να είναι σε θέση να ανταποκρίνεται σε καταστάσεις που δεν είναι συνηθισμένες, ενώ ένας μηχανικός πρέπει να είναι σε θέση να δημιουργεί μοναδικές και καινοτόμες κατασκευές. Το εκπαιδευτικό μας σύστημα θα πρέπει να αντικατοπτρίζει αυτή την τάση, αλλά φαίνεται να εμποδίζει τη δημιουργικότητα.

Ο Robinson (2006) υπαινίσσεται ότι το χειρότερο πράγμα που κάνουν τα σχολεία για την δημιουργικότητα είναι ότι δημιουργούν μια αίσθηση φόβου στα παιδιά να μην κάνουν λάθος, με αποτέλεσμα αυτά να αποφεύγουν πρωτότυπες λύσεις με αντάλλαγμα σίγουρες και συμβατικές απαντήσεις. Το σημερινό κλίμα που επικεντρώνεται στην εκμάθηση ρόλων με ερωτήσεις κλειστού τύπου που επιδέχονται μια ενιαία απάντηση, αντί για πιο ανοιχτές ερωτήσεις ή επίλυση προβλημάτων με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, πιθανώς επιδεινώνει το φόβο των μαθητών να κάνουν λάθος. Η Piirto (2004) χαρακτηριστικά αναφέρει *"try to be the teacher that the creative child will remember as encouraging, not as discouraging*" (p. 84), δηλαδή οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να προσπαθούν να γίνουν οι δάσκαλοι που το δημιουργικό παιδί μελλοντικά θα θυμάται ενθαρρυντικά και όχι αποθαρρυντικά. Πράγματι, αυτό μπορεί να είναι προφανές, αλλά επιδεικνύει το σημαντικό ρόλο που μπορούν να διαδραματίσουν οι εκπαιδευτικοί στην ενθάρρυνση της ανάπτυξης δημιουργικών ταλέντων.

Μπορούν να εντοπιστούν πολλοί παράγοντες που να εξηγούν ενδεχομένως την αυξανόμενη προσοχή για δημιουργικότητα στην εκπαίδευση. Η δημιουργικότητα είναι ένα σημαντικό χαρακτηριστικό, προσωπικό και κοινωνικό, που δίνει ώθηση στην ανθρώπινη πρόοδο και εξέλιξη. Ένας από αυτούς τους παράγοντες, όπως προαναφέρθηκε σχετίζεται με τις σημερινές κοινωνικές εξελίξεις. Ζούμε σε μια ταχέως μεταβαλλόμενη κοινωνία με γρήγορες τεχνολογικές εξελίξεις και αυξανόμενη ποσότητα διαθέσιμων πληροφοριών. Κατά συνέπεια, στα εκπαιδευτικά συμπόσια συζητείται ποιες ικανότητες απαιτούνται για την προετοιμασία των μαθητών για αυτή την ταχέως μεταβαλλόμενη κοινωνία. Η αξία αυτή της δημιουργικής σκέψης στον άνθρωπο έχει αναγνωριστεί και από διεθνείς εκπαιδευτικούς και κυβερνητικούς οργανισμούς, όπως το European Parliament and the Council (2006) και το National Council of Teachers of Mathematics (2000), οι οποίοι τονίζουν τη σημασία ανάπτυξης της ικανότητας των μαθητών, όλων των εκπαιδευτικών βαθμίδων, να σκέφτονται δημιουργικά και ευέλικτα.

Η σημασία ενίσχυσης της δημιουργικότητας κατά τη διδακτική διαδικασία είναι επίσης σύμφωνη με τις νέες απόψεις για τη μάθηση. Αντί των πιο παραδοσιακών απόψεων της μάθησης, όπου οι μαθητές μαθαίνουν να αναπαράγουν τις γνώσεις και τις δεξιότητες, οι νέες προσεγγίσεις της μάθησης αποκτούν όλο και μεγαλύτερη σημασία. Σε αυτές τις νέες απόψεις της μάθησης, είναι σημαντικό οι μαθητές να μάθουν να αναπτύσσουν ενεργά τις δικές τους γνώσεις, να δημιουργούν περισσότερη διορατικότητα στον κόσμο γύρω τους και να είναι σε θέση να λειτουργήσουν σε αυτόν τον κόσμο (Meijer & Oosterheert, 2017). Για παράδειγμα, στην εκπαίδευση των μαθηματικών, θεωρείται σήμερα σημαντικό οι μαθητές να κατασκευάζουν τις μαθηματικές τους γνώσεις και δεξιότητές, με την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων τα οποία απαιτούν δημιουργικότητα (Gravemeijer et al., 2007; Sriraman, 2005).

2.2.1 Ορισμός Δημιουργικότητας

Δεν υπάρχει ενιαία, επίσημη άποψη ή ορισμός της δημιουργικότητας (Mann, 2006). Υπάρχει μια ποικιλία απόψεων για τη δημιουργικότητα, οι οποίες συνεχίζουν να αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου. Με βάση την βιβλιογραφία, ο Mann (2006) υποστηρίζει ότι υπάρχουν περισσότεροι από 100 σύγχρονοι ορισμοί της δημιουργικότητας. Ο Guilford (1967) διέκρινε τη συγκλίνουσα και την αποκλίνουσα σκέψη. Η συγκλίνουσα σκέψη περιλαμβάνει την επιδίωξη μιας ενιαίας και σωστής λύσης σε ένα πρόβλημα, ενώ η αποκλίνουσα σκέψη περιλαμβάνει τη δημιουργική παραγωγή πολλαπλών απαντήσεων σε ένα πρόβλημα και περιγράφεται πιο συχνά ως ευέλικτη σκέψη. Ο Runco (1993) περιέγραψε τη δημιουργικότητα ως ένα πολύπλευρο κατασκεύασμα που περιελάμβανε "αποκλίνουσες και συγκλίνουσες σκέψεις, εύρεση προβλημάτων και επίλυση προβλημάτων, αυτο-έκφραση, εσωτερικά κίνητρα, στάση αμφισβήτησης και αυτοπεποίθηση". Ο Haylock (1987) συνόψισε πολλές από τις προσπάθειες καθορισμού της δημιουργικότητας. Μια άποψη "περιλαμβάνει την ικανότητα να βλέπει κανείς νέες σχέσεις μεταξύ τεχνικών και εφαρμογών και να κάνει συσχετίσεις μεταξύ πιθανώς άσχετων ιδεών". Οι Bolden et al., 2010, ορίζουν την δημιουργικότητα κυρίως ως μια ατομική δραστηριοποίηση που στοχεύει στο να παράξει κάτι νέο ως «πολυδιάστατη ικανότητα ή δεξιότητα του ανθρώπου να σκεφτεί κάτι καινούριο».

Πολλοί είναι αυτοί που υποστηρίζουν ότι η δημιουργικότητα συνδέεται με την ιδιοφυία, και είναι χαρακτηριστικό ατόμων που έχουν δημιουργήσει κάτι καινοτόμο (Lilly & Bramwell-Rejskind, 2004). Η Τριαρχική Θεωρία της Νοημοσύνης (Sterenberg, 1997; Sternberg & Lubart, 2000) ορίζει τη δημιουργικότητα ως την ικανότητα κάποιου να παράγει απροσδόκητο, πρωτότυπο έργο χρήσιμο και προσαρμοστικό και υποστηρίζει ότι η δημιουργικότητα είναι ένα από τα κεντρικά συστατικά της έξυπνης ανθρώπινης συμπεριφοράς. Αυτή η συμπεριφορά προκύπτει από την ισορροπία μεταξύ αναλυτικών, δημιουργικών και πρακτικών ικανοτήτων που λειτουργούν συλλογικά για να επιτρέψουν στα άτομα να επιτύχουν μέσα σε συγκεκριμένα κοινωνικοπολιτιστικά πλαίσια (Sternberg, 1997).

Ωστόσο, άλλες έρευνες υποστηρίζουν ότι η δημιουργικότητα σχετίζεται στενά με βαθιά ευέλικτη γνώση στα γνωστικά πεδία, με μεγάλο διάστημα εργασίας και όχι με μια στιγμιαία έμπνευση (Ericsson, 1999). Επίσης, επηρεάζεται από τη διδασκαλία, την καθοδήγηση και τις εμπειρίες του ατόμου (Silver, 1997). Συνεπώς, η διδασκαλία που καλλιεργεί και ενισχύει τη δημιουργικότητα μπορεί να είναι κατάλληλη για ένα μεγάλο εύρος μαθητών, και όχι μόνο για μερικές εξαιρέσεις. Τέλος, μέσα στη σχολική τάξη, η δημιουργικότητα θεωρείται ότι μπορεί να βελτιώσει τη συμπεριφορά, τις κοινωνικές δεξιότητες, την αυτοεκτίμηση, τα κίνητρα και τις επιδόσεις (Bolden et al., 2010).

2.2.2 Μαθηματική Δημιουργικότητα

Το National Council of Teachers of Mathematics (2000), τονίζει το πόσο σημαντική είναι η σημασία ανάπτυξης της ικανότητας των μαθητών, να σκέφτονται δημιουργικά, ευέλικτα και καινοτόμα όταν αντιμετωπίζουν κάποιο μαθηματικό πρόβλημα. Όπως συμβαίνει με την δημιουργικότητα γενικά, έτσι και για την μαθηματική δημιουργικότητα ειδικότερα υπάρχουν πολλοί ορισμοί που προέρχονται από τις διάφορες προσεγγίσεις της δημιουργικότητας (Haylock, 1987; Leikin, 2009). Ορισμένοι ορισμοί αφορούν τα στάδια των δημιουργικών διαδικασιών (Ervynck, 1991), ενώ άλλοι αφορούν τις ιδιότητες των δημιουργικών πράξεων και του προϊόντος που παράγεται (Silver, 1997). Ο Ervynck (1991) σύνδεσε τη μαθηματική δημιουργικότητα με την προηγμένη μαθηματική σκέψη και θεωρούσε ότι είναι η ικανότητα κάποιου να διατυπώνει μαθηματικούς στόχους και να βρίσκει ενυπάρχουσες σχέσεις μεταξύ τους. Σύμφωνα με τον ίδιο, η μαθηματική κατανόηση, η διαίσθηση και η διορατικότητα αποτελούν τη βάση της μαθηματικής δημιουργίας, με αποτελέσματα τα δημιουργικά προϊόντα να βοηθούν στην κατανόηση των μαθηματικών σχέσεων αποκαλύπτοντας κρυφές σχέσεις. Η Leikin (2009) διακρίνει την γενική (general) και τη συγκεκριμένη (specific) μαθηματική δημιουργικότητα. Η γενική δημιουργικότητα συνδέεται με τη χρήση προτύπων επίλυσης προβλημάτων από ένα πεδίο των μαθηματικών σε άλλα πεδία των μαθηματικών. Η συγκεκριμένη δημιουργικότητα, συνδέεται με την δημιουργικότητα σε ένα συγκεκριμένο πεδίο. Στην έρευνα αυτή θα εστιάσουμε στη συγκεκριμένη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών.

Ο Sriraman (2005) παρουσίασε ένα μοντέλο μαθηματικής δημιουργικότητας και χαρισματικότητας που περιλαμβάνει επτά επίπεδα μαθηματικών ικανοτήτων. Τα επίπεδα έξι και επτά είναι εκείνα των εξαιρετικά δημιουργικών μαθηματικών που εκτελούν έρευνα και προετοιμάζουν το έδαφος για άλλους μαθηματικούς. Ο ίδιος ερευνητής, κάνει μια διάκριση μεταξύ της μαθηματικής δημιουργικότητας που αφορά το σχολικό περιβάλλον και της δημιουργικότητας των επαγγελματιών μαθηματικών. Ενώ ένας επαγγελματίας μαθηματικός διακατέχεται συχνά από αβεβαιότητα, τα έργα που δίνουμε στους μαθητές δεν εμπεριέχουν αυτό το στοιχείο. Κοντά σε αυτή την άποψη, η Leikin (2009) και Leikin & Lev (2013) επισημαίνουν ότι η δημιουργικότητα στα σχολικά μαθηματικά διαφέρει από εκείνη των επαγγελματιών μαθηματικών. Η μαθηματική δημιουργικότητα στο περιβάλλον του σχολείου αξιολογείται με αναφορά στις προηγούμενες εμπειρίες των μαθητών και στις επιδόσεις άλλων μαθητών που έχουν παρόμοιο εκπαιδευτικό ιστορικό. Η Leikin (2009), προτείνει ότι η προσωπική δημιουργικότητα είναι δυναμικό χαρακτηριστικό (τόσο ως προσωπική όσο και ως κοινωνική) και απαιτεί μια διάκριση μεταξύ σχετικής (relative) και απόλυτης (absolute) δημιουργικότητας. Η απόλυτη δημιουργικότητα συνδέεται με τις ανακαλύψεις που προωθούν τα μαθηματικά ως επιστήμη. Η σχετική δημιουργικότητα αναφέρεται σε ανακαλύψεις από ένα συγκεκριμένο άτομο μέσα σε μια συγκεκριμένη ομάδα αναφοράς. Έτσι, οι μαθητές μπορούν να προσφέρουν ιδέες που είναι καινοτόμες σε σχέση με τα μαθηματικά που έχουν μάθει και τα προβλήματα που έχουν λύσει.

Η μαθηματική δημιουργικότητα στα σχολικά μαθηματικά συνδέεται συνήθως με την επίλυση προβλημάτων (problem solving) ή τη δημιουργία προβλημάτων (problem posing) (Silver, 1997). Ο ίδιος προτείνει, ότι η δημιουργικότητα μπορεί να αναπτυχθεί μέσω της επίλυσης προβλημάτων, με τα άτομα να αναπτύσσουν τις ικανότητες ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία. Δημιουργώντας πολλαπλές ιδέες, πολλαπλές απαντήσεις σε ένα πρόβλημα (όταν υπάρχουν) και διερευνώντας καταστάσεις, τα άτομα αναπτύσσουν ευχέρεια. Η δημιουργία νέων λύσεων όταν τουλάχιστον μία έχει ήδη παραχθεί αναπτύσσει την ευελιξία, ενώ η εξερεύνηση πολλών λύσεων σε ένα πρόβλημα και η δημιουργία ενός νέου προωθεί την πρωτοτυπία. "Τόσο η διαδικασία όσο και το αποτέλεσμα της επίλυσης προβλημάτων μπορούν να αξιολογηθούν για να καθοριστεί ο βαθμός στον οποίο είναι εμφανής η δημιουργικότητα" (Silver, 1997: σελ. 76). Κοντά σε αυτή την άποψη, ο Torrance (1994) ορίζει τη δημιουργικότητα ως πολυδιάστατη. Ευχέρεια (fluency), ευελιξία (flexibility), πρωτοτυπία (originality) και επεξήγηση (elaboration), είναι όλες πτυχές της δημιουργικότητας. Η ευχέρεια αναφέρεται στη ροή των ιδεών, τον αριθμό των ορθών λύσεων που μπορεί να δώσει κάποιος με τη χρήση βασικών γνώσεων. Η ευελιξία συνδέεται με την εναλλαγή των ιδεών, την προσέγγιση ενός προβλήματος με διαφορετικούς ποιοτικά τρόπους και από διαφορετικές προοπτικές. Η πρωτοτυπία, αφορά στην ικανότητα του ατόμου να προσεγγίζει το πρόβλημα με καινούριο, μοναδικό τρόπο και να βρίσκει αντισυμβατική και μη αναμενόμενη λύση. Η επεξήγηση, αφορά στην ικανότητα του ατόμου να σκέφτεται με σύνθετο τρόπο, να εξελίσσει τη δοσμένη ιδέα συνδυάζοντάς την με άλλες, να προχωρά σε γενικεύσεις, να καταλήγει σε σύνθετες απαντήσεις.

Ο Sriraman (2005), υποστηρίζει ότι η δημιουργικότητα στο σχολικό επίπεδο μπορεί να ορισθεί ως μια διαδικασία που οδηγεί σε πρωτότυπες (διορατικές) λύσεις σε ένα δεδομένο πρόβλημα ή / και προσεγγίσεις σε ένα παλιό πρόβλημα από μια νέα προοπτική. Οι Kwon et al. (2006), πρότειναν δύο σημαντικούς ορισμούς της μαθηματικής δημιουργικότητας: πρώτον, τη δημιουργία νέων γνώσεων και δεύτερον την ικανότητα ευελιξίας στην αντιμετώπιση προβλημάτων. Οι ερευνητές, ανέπτυξαν ένα πρόγραμμα για να βοηθήσουν στην καλλιέργεια αποκλίνουσας σκέψης στα μαθηματικά με βάση την επίλυση προβλημάτων ανοιχτού τύπου, τα οποία αποδείχθηκαν χρήσιμα για την ενίσχυση των δεξιοτήτων δημιουργικής σκέψης των μαθητών. Ο Chiu (2009), συνέδεσε τη μαθηματική δημιουργικότητα με την ικανότητα των μαθητών να λύνουν προβλήματα ρουτίνας (routine) και μη συμβατικά προβλήματα (non-routine). Σύμφωνα με τους Posamentier et al. (2010), η επίλυση προβλημάτων αφορά στην δημιουργία κάποιου καινούργιου αποτελέσματος και γι' αυτό το λόγο τα προβλήματα που δίνουμε στους μαθητές πρέπει να εμπεριέχουν το στοιχείο της πρόκλησης και της ανακάλυψης.

2.2.3 Μαθηματικό Πρόβλημα και Επίλυση Μαθηματικού Προβλήματος

Η αξία του προβλήματος στη μάθηση όχι μόνο στα μαθηματικά αλλά σε όλους τους επιστημονικούς τομείς θεωρείται αδιαμφισβήτητη. Ο Hilbert (1902) αναφέρει ότι κάθε κλάδος της επιστήμης παραμένει ζωντανός εφόσον εξακολουθεί να προσφέρει αφθονία προβλημάτων. Πιθανή απουσία προβλημάτων μπορεί να προβλέψει την εξαφάνισης της ανθρώπινης ανάπτυξης. Για αυτό και η μαθηματική έρευνα χρειάζεται τα προβλήματα. Η λύση των προβλημάτων προσφέρει την ευκαιρία στον ερευνητή να ανακαλύψει νέες μεθόδους και προσεγγίσεις και νέες προκλήσεις για περαιτέρω έρευνα (Γαγάτσης, κ.ά., 2011).

Τα προβλήματα κατείχαν σημαντική θέση στα μαθηματικά των αρχαίων πολιτισμών (π.χ. Αιγύπτιων, Κινέζων, Ελλήνων, Βαβυλωνίων)και αποτέλεσαν την αφετηρία ανάπτυξης σε διάφορους τομείς των μαθηματικών (Γεωμετρία, Άλγεβρα, Θεωρία Αριθμών, Στατιστική, κ.ά.). Επιπλέον, τα μαθηματικά προβλήματα αποτελούσαν ανέκαθεν ένα σημαντικό μέρος των σχολικών μαθηματικών (Stanic, & Kilpatrick, 1989). Στη διδασκαλία των μαθηματικών, η θεμελίωση της αξιοποίησης των προβλημάτων επήλθε από την πρωτοποριακή εργασία του Polya, η οποία αποτέλεσε για πολλούς ερευνητές τη βάση στον τομέα της επίλυσης μαθηματικού προβλήματος.

Η ανάπτυξη της ικανότητας των παιδιών να επιλύουν προβλήματα αναγνωρίζεται ως πρωταρχικός σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών από όλους τους παιδαγωγούς, ανεξάρτητα από τη θεωρία μάθησης που ακολουθούν. Είναι η ικανότητα που αντανακλά το επίπεδο της μαθηματικής σκέψης και θεωρείται ότι περιλαμβάνει τόσο δημιουργική όσο και κριτική σκέψη. Στην πραγματικότητα, αν επρόκειτο να συνοψίσουμε τους σκοπούς της μαθηματικής εκπαίδευσης ή γενικότερα της εκπαίδευσης σε μια μόνο φράση, θα μπορούσαμε να πούμε ότι «η εκπαίδευση αποβλέπει στην ανάπτυξη της ικανότητας για επίλυση προβλήματος» (Γαγάτσης, κ.ά., 2011). Στην καθημερινή ζωή ο όρος πρόβλημα χρησιμοποιείται εύκολα και συχνά αλλά αόριστα και με πολλή ασάφεια. Επιπλέον, η άποψη των μαθητών για το τι είναι πρόβλημα στα μαθηματικά, παρουσιάζει ενδιαφέρον, εφόσον είναι πολύ πιθανόν να αντικατοπτρίζει τις δικές τους μαθησιακές εμπειρίες σε σχέση με την επίλυση μαθηματικού προβλήματος (Γαγάτσης, κ.ά., 2011).

Στα μαθηματικά παρατηρείται συχνά σύγχυση μεταξύ άσκησης και προβλήματος. Ο Polya προβαίνει σε μία σαφή διάκριση ανάμεσα στα προβλήματα ρουτίνας και στα πρωτότυπα προβλήματα. Ενδεικτικά αναφέρει: «Όταν ένας δάσκαλος δίνει στους μαθητές του να λύνουν προβλήματα ρουτίνας, σκοτώνει το ενδιαφέρον τους και παρεμποδίζει τη νοητική τους ανάπτυξη. Αν όμως προκαλεί την περιέργειά τους δίνοντας τους προβλήματα ανάλογα με τις γνώσεις τους και τους βοηθά να λύσουν τα προβλήματα θέτοντάς τους κατάλληλες ερωτήσεις, μπορεί να τους βοηθήσει να αναπτύξουν αυτόνομη κριτική σκέψη» (Polya, 1945).

Στη μαθηματική εκπαίδευση η επίλυση μαθηματικού προβλήματος αναφέρεται στο σχεδιασμό της διαδικασίας μετάβασης από την υφιστάμενη στην επιδιωκόμενη κατάσταση μέσα από μία σειρά νοητικών διεργασιών. Η λύση προβλήματος οδηγεί σε ένα τελικό προϊόν, το οποίο αποτελεί το συμπέρασμα μιας σειράς διαδικασιών που διενεργούνται από το υποκείμενο, οι οποίες μπορεί να είναι άδηλες ή φανερές, συνειδητές ή ασυνείδητες. Το τελικό προϊόν αναφέρεται στην καταλληλότητα της λύσης, το χρόνο που χρειάζεται για να συμπληρωθεί η λύση από το υποκείμενο, την ορθότητα ή μη της λύσης, το κατά πόσον είναι ολοκληρωμένη η λύση και το βαθμό της πολυπλοκότητάς της. Οι διαδικασίες αναφέρονται σε παράγοντες που σχετίζονται με τη συμπεριφορά του υποκειμένου κατά τη διάρκεια της λύσης προβλήματος, τις ευρετικές στρατηγικές που χρησιμοποιεί και τους αλγορίθμους που εφαρμόζει (Γαγάτσης, κ.ά, 2011).

Τα στάδια από τα οποία περνά η επίλυση ενός προβλήματος είναι: (α) η μετάφραση, δηλαδή η μετατροπή των στοιχείων του προβλήματος, με τη σειρά που εμφανίζονται σε αυτό, σε νοητική αναπαράσταση, (β) η ολοκλήρωση, δηλαδή ο συνδυασμός όλων των επιμέρους αναπαραστάσεων σε μια περιεκτική, συνολική νοητική εικόνα του προβλήματος, (γ) ο σχεδιασμός, δηλαδή η επινόηση και ο έλεγχος ενός σχεδίου επίλυσης, μιας στρατηγικής προσέγγισης των ζητουμένων, και (δ) η εκτέλεση, δηλαδή η μετατροπή του σχεδίου σε συγκεκριμένες αριθμητικές πράξεις και η εύρεση του αποτελέσματος. Τα τρία πρώτα στάδια έχουν έναν ποιοτικό χαρακτήρα και στοχεύουν στη δημιουργία μιας μαθηματικής αναπαράστασης των ενεργειών και των σχέσεων που περιγράφονται στο πρόβλημα. Το τέταρτο στάδιο είναι ποσοτικό και αποσκοπεί στην παρουσίαση της λύσης σε αριθμητική μορφή (Mayer et al., 1992).

Ο Hatfield (1978) διακρίνει τρεις τύπους διδασκαλίας επίλυσης μαθηματικού προβλήματος. Ο πρώτος τύπος αναφέρεται ως διδασκαλία για τη λύση προβλήματος και εστιάζεται στην απόκτηση από το μαθητή μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων που είναι χρήσιμες για τη λύση προβλήματος. Ο δεύτερος τύπος χαρακτηρίζεται ως διδασκαλία αναφορικά με τη λύση προβλήματος. Στα πλαίσια αυτής της διδασκαλίας ο εκπαιδευτικός επιδεικνύει κατάλληλες διαδικασίες λύσης προβλήματος και κατευθύνει έμμεσα τους μαθητές στη χρήση σημαντικών διαδικασιών και στρατηγικών. Ο τρίτος τύπος διδασκαλίας συντελείται μέσω της λύσης προβλήματος και εστιάζεται στη χρήση καταστάσεων λύσης προβλήματος ως μέσο για τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών (Lester, 1980).

Σε κάθε τύπο διδασκαλίας που εμπλέκει επίλυση προβλήματος πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ότι για την αναπαράσταση και την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων χρειάζεται η ανάπτυξη των ακόλουθων τύπων γνώσης: (α) Γλωσσική γνώση, δηλαδή γνώση της δομής της ελληνικής γλώσσας και της σημασίας των λέξεων, (β) Πραγματολογική γνώση, δηλαδή γνώση πληροφοριών από τον περιβάλλοντα κόσμο, (γ) Γνώση υποδειγμάτων προβλημάτων, δηλαδή γνώση διαφόρων κατηγοριών προβλημάτων, (δ) Στρατηγική γνώση, δηλαδή γνώση του τρόπου ανάπτυξης ενός σχεδίου επίλυσης και παρουσίασης μιας κατάλληλης απάντησης, (ε) Αλγοριθμική γνώση, δηλαδή γνώση του τρόπου εκτέλεσης των πράξεων (Mayer et al., 1992). Τυχόν ελλείψεις στα παραπάνω είδη γνώσεων είναι δυνατόν να προκαλέσουν διάφορα λάθη, όπως για παράδειγμα: (α) ασυμφωνία ανάμεσα στο νοητικό μοντέλο του προβλήματος που κατασκευάζει ο μαθητής και στην κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα ή (β) αναντιστοιχία στο νοητικό μοντέλο και στην ποσοτική του έκφραση (Γαγάτσης, κ.ά., 2011).

Ένας από τους παράγοντες που διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο στην επίλυση ενός προβλήματος είναι ο τρόπος παρουσίασής του. Άρα, η λεκτική περιγραφή του μαθηματικού προβλήματος, σε συνδυασμό με την παρουσία εξωτερικών αναπαραστάσεων σε αυτό, μπορεί να συμβάλουν σημαντικά στην προσπάθεια επίλυσης μαθηματικού προβλήματος από το αρχικό κιόλας στάδιο της κατανόησης. Τα τελευταία χρόνια υποστηρίζεται από τη μαθηματική εκπαιδευτική κοινότητα η χρήση των εξωτερικών αναπαραστάσεων στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Ενδεικτικό είναι το γεγονός ότι στα Principles and Evaluation Standards for School Mathematics (NCTM, 2000) ενθαρρύνεται η χρήση πολλαπλών εξωτερικών αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλήματος τόσο στο δημοτικό όσο και στο Γυμνάσιο.

Στα πλαίσια της χρήσης των αναπαραστάσεων στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος, μια σημαντική διάκριση που πρέπει να αποσαφηνιστεί είναι ανάμεσα στις κύριες αναπαραστάσεις καις τις βοηθητικές αναπαραστάσεις. Οι κύριες αναπαραστάσεις είναι απαραίτητες για την επίλυση του προβλήματος εφόσον μέσα από αυτές εκφράζεται οποιαδήποτε πληροφορία σε σχέση με το πρόβλημα. Είναι αυτόνομες και ανεξάρτητες από το αντικείμενο που παριστούν και το άτομο μπορεί να τις τροποποιήσει και να τις επεξεργαστεί χωρίς περιορισμούς. Η λεκτική περιγραφή του προβλήματος θεωρείται κύρια αναπαράσταση. Οι βοηθητικές αναπαραστάσεις δεν είναι απαραίτητες για την επίλυση του προβλήματος, αλλά μπορούν να βοηθήσουν σημαντικά τη διαδικασία επίλυσης. Στις βοηθητικές αναπαραστάσεις για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος εντάσσονται οι εικόνες, οι γραφικές παραστάσεις, οι πίνακες, τα δενδροδιαγράμματα, τα διαγράμματα Vergnaud (1982) και Marshall (1995) κ.ά.

2.2.4 Προβλήματα Πολλαπλών Λύσεων

Ένας από τους πιο αναγνωρισμένους τρόπους ανάπτυξης των συνδέσεων των μαθηματικών γνώσεων είναι η επίλυση προβλημάτων με διάφορους τρόπους (multiple solutions problems) (Leikin & Levav-Waynberg 2009, NCTM, 2000, Polya, 1981, Silver, 1997). Ένα πρόβλημα πολλαπλών λύσεων, είναι ένα πρόβλημα το οποίο καλείται ο μαθητής να λύσει με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους (Leikin, 2009). Βασιζόμενοι στην Leikin (2006), η διαφορά των λύσεων μπορεί να αντικατοπτρίζεται με τη χρήση:

α) Διαφορετικών απεικονίσεων μιας μαθηματικής έννοιας.

β) Διαφορετικών ιδιοτήτων (ορισμών ή θεωρημάτων) των μαθηματικών εννοιών από ένα συγκεκριμένο πεδίο των μαθηματικών.

γ) Διαφορετικά μαθηματικά εργαλεία και θεωρήματα από διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών.

Η Leikin (2007), πρότεινε την έννοια των χώρων λύσεων που επιτρέπει στους ερευνητές να εξετάσουν τις διάφορες πτυχές της μαθηματικής δημιουργικότητας, κατά την επίλυση προβλημάτων με πολλαπλούς τρόπους. Χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

(α) Οι εξειδικευμένοι χώροι λύσεων (Expert solution spaces), περιλαμβάνουν ένα ολοκληρωμένο σύνολο λύσεων σε ένα πρόβλημα που είναι γνωστό σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Μπορούν επίσης να θεωρηθούν ως ένα σύνολο λύσεων που οι εμπειρογνώμονες μαθηματικοί μπορούν να προτείνουν στο πρόβλημα. Οι εξειδικευμένοι χώροι λύσεων χωρίζονται σε συμβατικούς χώρους λύσεων (conventional solution spaces), οι οποίοι στο περιβάλλον των σχολικών μαθηματικών περιλαμβάνουν λύσεις οι οποίες συνιστώνται από το αναλυτικό πρόγραμμα, βρίσκονται στα σχολικά εγχειρίδια και διδάσκονται από τον εκπαιδευτικό, καθώς και τους μη συμβατικούς χώρους λύσεων (unconventional solution spaces), οι οποίοι περιλαμβάνουν λύσεις οι οποίες δεν συνίστανται από το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών.

(β) Οι ατομικοί χώροι λύσεων (Individual solution spaces), είναι συλλογές λύσεων που παράγονται από ένα άτομο σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Οι ατομικοί χώροι λύσεων χωρίζονται σε προσωπικούς χώρους λύσεων (available individual solution spaces), οι οποίοι περιλαμβάνουν λύσεις οι οποίες μπορούν να παρουσιαστούν από ένα άτομο άμεσα, χωρίς κάποια βοήθεια, και τους ενδεχόμενους χώρους λύσεων (potential solution spaces), οι οποίοι περιλαμβάνουν λύσεις που μπορούν να δοθούν από ένα άτομο με την βοήθεια κάποιου άλλου. Οι λύσεις που προέρχονται από τους ενδεχόμενους χώρους λύσεων, αντιστοιχούν στην ζώνη επικείμενης ανάπτυξης (Zone of proximal development, ZPD) του Vygotsky (1978), όπου ZPD είναι η διαφορά ανάμεσα σε αυτό που από μόνο του ένα παιδί μπορεί να πετύχει κι αυτό που θα κατακτήσει αν το βοηθήσουν.

(γ) Οι ομαδικοί χώροι λύσεων (Collective solution spaces), είναι ένας συνδυασμός των λύσεων που παράγονται από μια ομάδα ατόμων. Οι ομαδικοί χώροι λύσεων, είναι συνήθως ευρύτεροι από τους ατομικούς χώρους λύσεων μέσα σε μια συγκεκριμένη κοινότητα και αποτελούν μία από τις κύριες πηγές για την ανάπτυξη ατομικών χώρων λύσεων. Τόσο οι ατομικοί όσο και οι ομαδικοί χώροι λύσεων είναι υποσύνολα των εξειδικευμένων χώρων λύσεων.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα διαστήματα λύσεων ως εργαλείο το οποίο επιτρέπει τη διερεύνηση της μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών. Συγκρίνοντας τα ατομικά και ομαδικά διαστήματα λύσεων των μαθητών από διαφορετικές ομάδες με ειδικά διαστήματα λύσεων, εκτιμούμε τη μαθηματική γνώση και δημιουργικότητα των μαθητών (Leikin, 2009).

Οι Stigler και Hiebert (1999), υποστηρίζουν ότι η ανάπτυξη της επίγνωσης των μαθητών ότι τα μαθηματικά προβλήματα μπορούν να έχουν πολλαπλές λύσεις και η ενθάρρυνση των μαθητών να κάνουν πολλαπλές λύσεις σε ένα πρόβλημα αυξάνουν την ποιότητα του μαθήματος των μαθηματικών. Κατά τον Polya (1981), όταν οι μαθητές επιλύουν τα προβλήματα με διαφορετικούς τρόπους μοιράζοντας και συζητώντας τις ιδέες τους στην τάξη, προωθούν τη μαθηματική τους γνώση με μετατοπίσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων, κάνουν συγκρίσεις μεταξύ διαφορετικών στρατηγικών και συνδέουν διαφορετικές έννοιες και ιδέες. Σύμφωνα με πολλούς ερευνητές (όπως, Elia et al., 2009, Ervynck, 1991, Kwon et al., 2006, Leikin, 2006) η επίλυση προβλημάτων με διαφορετικούς τρόπους αναπτύσσει τη διανοητική τους ευελιξία και δημιουργικότητα. Οι Levav-Waynberg και Leikin (2012, 2013), τονίζουν ότι τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων είναι αποτελεσματικά τόσο ως διδακτικό όσο και ως ερευνητικό εργαλείο και είναι κατάλληλα για την αξιολόγηση της γνώσης και της δημιουργικότητας των μαθητών. Η χρήση των προβλημάτων πολλαπλών λύσεων ως ερευνητικού εργαλείου επιτρέπει την εξερεύνηση της δυνητικής απόδοσης των μαθητών, η οποία συνήθως δεν μπορεί να παρατηρηθεί όταν οι μαθητές είναι ικανοποιημένοι με μια στρατηγική όταν φθάσουν σε μια λύση.

Τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων μπορούν να εφαρμοστούν αποτελεσματικά κατά τη μάθηση και διδασκαλία της γεωμετρίας. Η ουσία των μαθηματικών είναι να κάνουν αφηρημένα επιχειρήματα σχετικά με τα γενικά αντικείμενα και να επαληθεύσουν αυτά τα επιχειρήματα με αποδείξεις (Herbst & Brach, 2006). Το γεγονός ότι η απόδειξη είναι μια σημαντική συνιστώσα της γεωμετρίας κάνει την εργασία σε αυτό το πεδίο παρόμοια με αυτή των μαθηματικών της έρευνας. Η γεωμετρία συνδυάζει την αναγκαιότητα των οπτικών δεξιοτήτων (Clements & Battista , 1992) με την απαίτηση για αφηρημένους και λογικούς συλλογισμούς. Παρέχει ευκαιρίες για διερεύνηση και απόδειξη δραστηριοτήτων που μοιάζουν με το έργο των ερευνητικών μαθηματικών (Herbst, 2002). Ένα περιβάλλον το οποίο προάγει την έρευνα, βοηθάει τους μαθητές να αποκτήσουν αυτονομία στη σκέψη τους καταλήγοντας σε γενικεύσεις (Christou et al., 2004).

Ένας ακόμα λόγος που το πλαίσιο της γεωμετρίας μας επιτρέπει την εφαρμογή προβλημάτων πολλαπλών λύσεων είναι ότι σχεδόν κάθε πρόβλημα γεωμετρίας που βρίσκεται σε ένα τυπικό σχολικό εγχειρίδιο μπορεί να μετατραπεί σε πρόβλημα πολλαπλών λύσεων (Levav-Waynberg & Leikin, 2012, 2013, Stupel & Ben-Chaim, 2013, 2017). Τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων στη γεωμετρία επιτρέπουν την επίτευξη ποικίλων λύσεων χρησιμοποιώντας έννοιες και ιδιότητες μέσα από το σχολικό πρόγραμμα σπουδών γεωμετρίας χωρίς να απαιτούν εξωσχολικές γνώσεις από μαθητές και καθηγητές (Levav-Waynberg & Leikin, 2012, 2013, Stupel & Ben-Chaim, 2017). Επιπλέον, οι λύσεις των προβλημάτων γεωμετρίας δεν βασίζονται ποτέ πλήρως σε αλγοριθμικές διαδικασίες και περιλαμβάνουν ευρετικές διαδικασίες (Polya, 1981), ενώ τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων στη γεωμετρία απαιτούν ακόμη πιο εκτεταμένη χρήση αυτών των ευρετικών. Για τον λόγο αυτό και η έρευνα μας περιλαμβάνει ασκήσεις που βρίσκονται στο σχολικό εγχειρίδιο ή είναι συναφείς αυτών.

2.2.4.1 Σύστημα Βαθμολόγησης για την Αξιολόγηση της Μαθηματικής Δημιουργικότητας

Με βάση τις διάφορες θεωρίες που συνδέουν τη μαθηματική δημιουργικότητα με την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων με πολλούς τρόπους, οι Leikin και Lev (2007) εξέτασαν τις διαφορές στη δημιουργικότητα των ταλαντούχων και μη ταλαντούχων μαθητών στα μαθηματικά. Ανέπτυξαν ένα εργαλείο που περιλάμβανε ένα σύνολο μαθηματικών προβλημάτων και ένα σύστημα βαθμολόγησης για την αξιολόγηση των μαθητών σχετικά με την επίδοσή τους σε προβλήματα πολλαπλών λύσεων. Εξέτασαν την πρωτοτυπία (Originality) των λύσεων σύμφωνα με τη συμβατικότητά, τη διαθεσιμότητα και την επανάληψή τους. Η πρωτοτυπία των ατομικών λύσεων των μαθητών (που παράγονται χωρίς βοήθεια) βαθμολογήθηκε με 2, 4 και 6 σύμφωνα με το επίπεδο της συμβατικότητάς, ενώ οι λύσεις που παράχθηκαν με υποδείξεις έλαβαν βαθμολογίες 1, 2 και 3. Η ευελιξία (flexibility) αξιολογήθηκε με τον αριθμό των μη επαναλαμβανόμενων λύσεων στους ενδεχόμενους και στους επιμέρους ατομικούς χώρους λύσης. Η ευχέρεια (fluency) αξιολογήθηκε σε σχέση με το χρόνο που αφιέρωσαν οι μαθητές για να παράγουν τις λύσεις. Χρησιμοποιώντας αυτό το μοντέλο απέδειξαν ότι η δημιουργικότητα των ταλαντούχων μαθητών ήταν υψηλότερη από εκείνη των μέσων μαθητών σε κάθε είδος προβλήματος.

Οι Leikin και Lev (2007), έθεσαν στην μελέτη τους τις ακόλουθες υποθέσεις ως αναγκαίες για περαιτέρω εξέταση:

(α) Η δημιουργικότητα των μαθητών που σχετίζεται με την επίλυση προβλημάτων πολλαπλών λύσεων, μπορεί να διαμορφωθεί ως συνδυασμός ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας.

(β) Η αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας χρησιμοποιώντας έργα πολλαπλών λύσεων εξαρτάται από αυτά τα έργα.

Στη συνέχεια ανακάλυψαν κάποια προβλήματα του μοντέλου που έπρεπε να επιλυθούν, το πώς ενσωματώνεται η δημιουργικότητα σε αυτά τα έργα (υπόθεση β), αλλά και κάποιους περιορισμούς στο σύστημα βαθμολόγησης που εφάρμοσαν. Κατά την αξιολόγηση της δημιουργικότητας χρησιμοποιώντας τα στοιχεία πρωτοτυπίας, ευχέρειας και ευελιξίας και το σχήμα βαθμολόγησης που παρουσιάστηκε παραπάνω, δεν ήταν δυνατή η αναπαραγωγή των λεπτομερειών αυτών των στοιχείων με βάση την τελική βαθμολογία που πέτυχαν οι μαθητές. Ο στόχος τους ήταν να αναπτυχθεί ένα σύστημα βαθμολόγησης που θα επέτρεπε την ανάλυση της απόδοσης των μαθητών ποιοτικά, βάση των βαθμολογιών τους. Συνειδητοποίησαν επιπλέον, ότι πρέπει να δημιουργήσουν ακριβέστερους ορισμούς όσο αφορά την μεταβλητή της ευελιξίας.

Η Leikin (2009) παρουσίασε ένα εκλεπτυσμένο μοντέλο για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας χρησιμοποιώντας προβλήματα πολλαπλών λύσεων. Αυτό το μοντέλο καθιστά δυνατή όχι μόνο την αξιολόγηση της προσωπικής μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών αλλά και την εκτίμηση της αποτελεσματικότητας των προβλημάτων πολλαπλών λύσεων στην αξιολόγηση της δημιουργικότητας. Το μοντέλο περιέχει λειτουργικούς ορισμούς και ένα αντίστοιχο σύστημα βαθμολόγησης για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας με βάση τρεις διαστάσεις (πρωτοτυπία, ευχέρεια και ευελιξία), όπως τις πρότεινε ο Torrance (1974). Για να αξιολογηθεί η πρωτοτυπία χρησιμοποιεί τα επίπεδα διορατικότητας του Ervynck (1991) σε συνδυασμό με τη συμβατικότητα των λύσεων.

Η δημιουργικότητα μπορεί να αξιολογηθεί για μεμονωμένα άτομα και ομάδες ατόμων για τα ίδια έργα. Το μοντέλο διακρίνει διάφορους τύπους χώρων, που βασίζονται στην κατάσταση επίλυσης προβλημάτων (προφορική συνέντευξη ή γραπτή εξέταση) και στο μέγεθος και τη φύση μιας ομάδας. Αυτές οι διαφορές επηρεάζουν την αξιολόγηση της πρωτοτυπίας, της ευχέρειας και της ευελιξίας σε λειτουργικό επίπεδο. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται αυτές οι διακρίσεις.

<table>
<tr><td colspan="2">Κατάσταση</td><td>Εστίαση στο χώρο λύσης</td><td colspan="2">Χώρος λύσης αναφοράς για την αξιολόγηση της πρωτοτυπίας</td></tr>
<tr><td colspan="2">Το πρόβλημα (Ανεξάρτητο από το θέμα)</td><td colspan="3">Εξειδικευμένοι χώροι λύσεων</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Προφορικά (Συνέντευξη)</td><td>Ατομικά</td><td>Ατομικοί</td><td rowspan="2">Διαθέσιμοι
Ενδεχόμενοι</td><td rowspan="3">Εξειδικευμένοι</td></tr>
<tr><td>Σε ομάδες</td><td>Ομαδικοί</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Γραπτές Αξιολογήσεις</td><td>Μικρές ομάδες (≤ 10)</td><td>Ατομικοί</td><td rowspan="2">Διαθέσιμοι</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες ομάδες (> 10)</td><td>α) Ατομικοί
β) Ομαδικοί</td><td>α) Ομαδικοί
β) Εξειδικευμένοι</td></tr>
</table>

Σχήμα 1 : Χώροι λύσεων για την αξιολόγηση στις δημιουργικότητας

Η δημιουργικότητα που ενσωματώνεται σε ένα πρόβλημα, αξιολογείται με βάση τους εξειδικευμένους χώρους λύσεων του. Μια εξέταση προφορική (ατομική ή ομαδική συνέντευξη) επιτρέπει την αξιολόγηση τόσο των διαθέσιμων όσο και των ενδεχόμενων χώρων λύσεων, διότι σε αυτό το πλαίσιο βρίσκουμε τρόπους να παροτρύνουμε τους συμμετέχοντες με συμβουλές και ερωτήσεις, σε αντίθεση με μια γραπτή εξέταση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για την αξιολόγηση των διαθέσιμων χώρων λύσης. Οι χώροι για μεμονωμένα άτομα και μικρές ομάδες απαιτούν αξιολόγηση της πρωτοτυπίας βάσει προκαταρκτικής αξιολόγησης των εξειδικευμένων χώρων λύσεων. Αντίθετα, σε σχετικά μεγάλες ομάδες (n> 10) συμμετεχόντων που έχουν ένα κοινό εκπαιδευτικό ιστορικό (ομάδες αναφοράς), η πρωτοτυπία εξετάζεται με βάση τη συχνότητα μιας λύσης στους χώρους ομαδικών λύσεων. Κατά τη σύγκριση διαφορετικών ομάδων ατόμων αξιολογούμε και συγκρίνουμε τους χώρους ομαδικών λύσεων των ομάδων.

Ευχέρεια (Fluency)

Η ευχέρεια (N) αναφέρεται στον ρυθμό με τον οποίο προχωρά η επίλυση, καθώς και στις εναλλαγές που γίνονται μεταξύ των διαφορετικών λύσεων:

α) Η ευχέρεια εξετάζοντας τα έργα πολλαπλών λύσεων, αναφέρεται στον αριθμό των λύσεων που παράγει ο λύτης.

β) Η ευχέρεια ενός μαθητή σε μια γραπτή δοκιμασία, ανιχνεύεται από τον αριθμό των λύσεων στο χώρο ατομικών λύσεων.

γ) Η ευχέρεια ενός μαθητή σε μια ατομική συνέντευξη είναι ο αριθμός των κατάλληλων λύσεων στον χώρο ατομικών λύσεων που παράγεται μέσα σε μια μονάδα χρόνου.

Ευελιξία (Flexibility)

Για την αξιολόγηση της ευελιξίας (Flx), δημιουργήθηκαν οι ομάδες λύσεων για προβλήματα πολλαπλών λύσεων. Δύο λύσεις ανήκουν σε ξεχωριστές ομάδες λύσεων, αν χρησιμοποιούν στρατηγικές επίλυσης βασισμένες σε διαφορετικές αναπαραστάσεις, σε διαφορετικές ιδιότητες (θεωρήματα, ορισμοί ή βοηθητικές κατασκευές), καθώς και σε διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών.

α) Η ευελιξία που ενσωματώνεται σε ένα πρόβλημα πολλαπλών λύσεων αξιολογείται βάσει των ομάδων λύσεων στο χώρο των εξειδικευμένων λύσεων.

β) Κατά την επίλυση ενός προβλήματος πολλαπλών λύσεων από τον μαθητή, η ευελιξία αξιολογείτε με βάση τις λύσεις του, μέσα στον ατομικό χώρο λύσεων. Όσον αφορά τους αντίστοιχους χώρους λύσης, οι Leikin και Lev αξιολογούν την ευελιξία ως εξής:

i. Flx1 = 10, για την πρώτη κατάλληλη λύση.

Για κάθε επόμενη λύση:

ii. Flxi = 10, αν ανήκει σε μια ομάδα διαφορετικών χώρων λύσεων από την (τις) προηγούμενη (ές) λύση (εις).

iii. Flxi = 1, αν η λύση ανήκει σε μία από τις ομάδες που χρησιμοποιήθηκαν προηγουμένως αλλά έχει μια σαφή μικρή διάκριση.

iv. Flxi = 0.1, αν η λύση είναι σχεδόν πανομοιότυπη με προηγούμενες λύσεις.

Η συνολική βαθμολογία ευελιξίας ενός μαθητή για ένα πρόβλημα είναι το άθροισμα της ευελιξίας του στις λύσεις του ατομικού χώρου λύσης του μαθητή. Η συνολική ευελιξία που ενσωματώνεται σε ένα πρόβλημα είναι το άθροισμα των βαθμών ευελιξίας όλων των λύσεων στον εξειδικευμένο χώρο λύσεων. Δηλαδή,

$\text{Flx} = \sum_{i=1}^{n} \text{Flxi}$, όπου n είναι ο αριθμός των κατάλληλων λύσεων στον αντίστοιχο χώρο.

Πρωτοτυπία (Originality)

Κατά την αξιολόγηση της πρωτοτυπίας (Or), γίνεται διάκριση μεταξύ προφορικών ή γραπτών περιβαλλόντων και μεταξύ μικρών ή μεγάλων ομάδων, ως εξής:

α) Για ένα πρόβλημα πολλαπλών λύσεων ή έναν μεμονωμένο μαθητή σε μια μικρή ομάδα ($1 \leq g < 10$, g είναι ο αριθμός των μαθητών σε μια ομάδα) με παρόμοιο ιστορικό μάθησης, βαθμολογείτε η πρωτοτυπία μιας λύσης βασισμένη στη συμβατικότητά της και το επίπεδο γνώσης (βλ. Ervynck, 1991), και η συμβατότητα της λύσης σύμφωνα με το ιστορικό εκμάθησης των συμμετεχόντων (απόλυτη αξιολόγηση):

i. Ori = 10, για μια λύση βασισμένη στην διορατικότητα (insight-based solution) ή για μια μη συμβατική λύση.

ii. Ori = 1, για μια λύση που είναι εν μέρει αντισυμβατική (που αποκτάται σε διαφορετικό πλαίσιο).

iii. Ori = 0.1, για μια λύση βασισμένη σε αλγόριθμο ή συμβατική λύση.

β) Σε μια μεγάλη ομάδα μαθητών ($g>10$) με κοινό εκπαιδευτικό υπόβαθρο, αξιολογείται η πρωτοτυπία με τη σύγκριση των επιμέρους χώρων λύσεων με το χώρο συλλογικής λύσης της ομάδας αναφοράς. Αν P είναι το ποσοστό των μαθητών της ομάδας που παράγει μια συγκεκριμένη λύση, τότε (σχετική αξιολόγηση):

i. Ori = 10, όταν $P < 15\%$.

ii. Ori = 1, όταν $15\% \leq P < 40\%$.

iii. Ori = 0.1, όταν P ≥ 40%.

Ο συνολικός βαθμός πρωτοτυπίας ενός μαθητή για ένα πρόβλημα είναι το άθροισμα της πρωτοτυπίας του μαθητή στις λύσεις του ατομικού χώρου λύσεων του. Η συνολική πρωτοτυπία που ενσωματώνεται σε ένα πρόβλημα είναι το άθροισμα των βαθμολογιών πρωτοτυπίας όλων των λύσεων στο χώρο των εξειδικευμένων λύσεων. Δηλαδή,

Or = $\sum_{i=1}^{n}$ Ori , όπου n είναι ο αριθμός των κατάλληλων λύσεων στον αντίστοιχο χώρο.

Δημιουργικότητα (Creativity)

Η δημιουργικότητα (Cr) μιας συγκεκριμένης λύσης είναι το προϊόν της πρωτοτυπίας και της ευελιξίας της λύσης:

$$\mathrm{Cri} = \mathrm{Flxi} * \mathrm{Ori}.$$

Το συνολικό σκορ δημιουργικότητας σε ένα πρόβλημα πολλαπλών λύσεων είναι το άθροισμα των βαθμών δημιουργικότητας σε κάθε λύση στο χώρο του προβλήματος ενός ατόμου:

$$\mathrm{Cr} = \sum_{i=1}^{n} Flx_i * Or_i \ .$$

Τέλος, ο ρυθμός παραγωγής της λύσης και η ορθότητα της αντικατοπτρίζονται στην βαθμολογία της ευχέρειας. Το μοντέλο δημιουργικότητας που προτείνεται εδώ περιλαμβάνει ότι η ευχέρεια είναι ένα αναπόσπαστο κομμάτι της δημιουργικότητας και υποδηλώνει ότι το τελικό σκορ δημιουργικότητας είναι το αποτέλεσμα της συνολικής βαθμολογίας δημιουργικότητας και της βαθμολογίας της ευχέρειας.

$$\mathrm{CR} = \mathrm{n} * \left(\sum_{i=1}^{n} Flx_i * Or_i\right)$$

Στο παρακάτω σχήμα 2, παρουσιάζεται σχηματικά το μοντέλο της Leikin (2009) για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας το οποίο παρουσιάστηκε αναλυτικά πιο πριν.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="4">**Δημιουργικότητα**</td></tr>
<tr><td>Ευχέρεια</td><td>Ευελιξία</td><td>Πρωτοτυπία</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Σκορ ανά λύση</td><td>Για ένα πρόβλημα ανεξάρτητα από την απόδοση ή για έναν μεμονωμένο φοιτητή από μια μικρή ομάδα</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">$Flx_1 = 10$ για την πρώτη λύση
$Flx_i = 10$ λύσεις από μια δια-φορετική ομάδα στρατηγικών
$Flx_i = 1$ παρόμοια στρατηγική, αλλά μια διαφορετική αναπαράσταση
$Flx_i = 0.1$ η ίδια στρατηγική, η ίδια αναπαράσταση</td><td>$Or_i = 10$ για διορατικότητα / μη συμβατική λύση
$Or_i = 1$ για μοντέλο / εν μέρει αντισυμβατική λύση
$Or_i = 0.1$ για αλγόριθμο / συμβατική λύση</td><td rowspan="2">$Flx_i \times Or_i$</td></tr>
<tr><td>Για την απόδοση των σπουδαστών σε μια μεγάλη ομάδα</td><td>$Or_i = 10 \quad P < 15\%$
$Or_i = 1 \quad 15\% \le P < 40\%$
$Or_i = 0.1 \quad P \ge 40\%$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Συνολικό σκορ</td><td>n</td><td>$Flx = \sum_{i=1}^{n} Flx_i$</td><td>$Or = \sum_{i=1}^{n} Or_i$</td><td>$\sum_{i=1}^{n} Flx_i \times Or_i$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Συνολικό σκορ δημιουργικότητας</td><td colspan="4">$Cr = n\left(\sum_{i=1}^{n} Flx_i \times Or_i\right)$</td></tr>
</table>

n είναι ο συνολικός αριθμός των κατάλληλων λύσεων

$P = (m_j / n) \cdot 100\%$ όπου m_j είναι ο αριθμός των μαθητών που χρησιμοποίησαν την στρατηγική j

Σχήμα 2: Αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας σε διαφορετικά πλαίσια.

2.2.5 Κατασκευή Προβλήματος (Problem Posing)

Είναι η κατασκευή προβλήματος ένα εργαλείο για τον εντοπισμό και την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας; Προφανώς, η κατασκευή προβλήματος αναφέρεται στη δημιουργία κάποιου καινούργιου προβλήματος ή στην αποκάλυψη κάποιου καινούργιου προβλήματος από ένα σύνολο δεδομένων, επομένως κατά κάποιο τρόπο περιλαμβάνει τη δημιουργικότητα. Ωστόσο, για μια πιο δομημένη απάντηση, πρέπει να διερευνήσουμε τους ορισμούς που αφορούν την κατασκευή προβλημάτων.

Υπάρχουν διάφορες προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται σε σχέση με την κατασκευή προβλήματος, όπως εύρεση προβλήματος, ανίχνευση προβλήματος, διατύπωση προβλήματος, δημιουργική ανακάλυψη προβλημάτων, προβληματισμός, δημιουργία προβλημάτων και οραματισμός προβλημάτων (Dillon, 1982; Jay & Perkins, 1997). Λόγω αυτής της ποικιλίας σημασιών, διαφορετικοί συγγραφείς χρησιμοποιούν διαφορετικά πλαίσια για τη μελέτη των δραστηριοτήτων κατασκευής προβλήματος. Για παράδειγμα, οι Brown και Walter (1983/1990) εξέτασαν την κατασκευή προβλήματος στο πλαίσιο μιας στρατηγικής επικεντρωμένης στη φράση «τι-αν-όχι» (“what-if-not.”). Αυτή η στρατηγική προϋποθέτει ότι, συζητώντας τη σημασία των συνιστωσών του προβλήματος και προσπαθώντας να το τροποποιήσουν, οι μαθητές μπορούν να καταλήξουν σε μια βαθύτερη κατανόηση του προβλήματος, αντί να επικεντρωθούν απλώς στην εύρεση της λύσης.

Για την κατασκευή προβλήματος συναντάμε κυρίως δύο ορισμούς, τουλάχιστον ένας από τους οποίους χρησιμοποιείται ή αναφέρεται στην πλειονότητα των ερευνητικών εργασιών σχετικά με το θέμα. Ο πρώτος ορισμός προτάθηκε από τον Silver (1994, σελ. 19), ο οποίος περιγράφει την κατασκευή προβλημάτων ως δραστηριότητες δημιουργίας νέων προβλημάτων ή αναδιατύπωσης δεδομένων προβλημάτων. Και οι δύο δραστηριότητες μπορούν να συμβούν πριν, κατά τη διάρκεια ή μετά από μια διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Ο δεύτερος ορισμός προέρχεται από τους Stoyanova και Ellerton (1996, σελ. 518), οι οποίοι αναφέρονται στην κατασκευή προβλήματος ως «διαδικασία με την οποία, βάσει της μαθηματικής εμπειρίας, οι μαθητές κατασκευάζουν προσωπικές ερμηνείες συγκεκριμένων καταστάσεων και τις διατυπώνουν ως ουσιαστικά μαθηματικά προβλήματα». Ορισμένοι ερευνητές (π.χ. Jay και Perkins 1997) ισχυρίζονται ότι η κατασκευή προβλημάτων μπορεί να διεγείρει τη δημιουργικότητα, πιθανώς ακόμη περισσότερο από την επίλυση προβλημάτων. Οι Singer et al. (2011) υποστηρίζουν ότι η κατασκευή προβλημάτων μπορεί να ενισχύσει την εμπλοκή των μαθητών στην αυθεντική μαθηματική δραστηριότητα και να ανοίξει τη σκέψη των μαθητών για νέες ιδέες και προσεγγίσεις.

Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας για την κατασκευή προβλημάτων δείχνει ότι αυτή η δραστηριότητα είναι σημαντική από διάφορες οπτικές γωνίες και δίνει έμφαση στις συνδέσεις μεταξύ της κατασκευής προβλημάτων και της μαθηματικής δημιουργικότητας. Ορισμένοι ερευνητές έχουν αναφέρει μια θετική σχέση μεταξύ των επιτευγμάτων στα μαθηματικά και των ικανοτήτων δημιουργίας προβλημάτων (English, 1998; Leung & Silver, 1997). Άλλοι ερευνητές (π.χ., Cai & Cifarelli, 2005; Singer, Ellerton, Cai, & Leung, 2011; Singer, Pelczer, & Voica, 2011) ισχυρίστηκαν ότι η διδασκαλία που περιλαμβάνει εργασίες κατασκευής προβλημάτων (συμπεριλαμβανομένων των εργασιών τροποποίησης προβλημάτων) μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν πιο δημιουργικές προσεγγίσεις στα μαθηματικά.

Υπάρχουν επίσης ερευνητές που έχουν εκφράσει αμφιβολίες σχετικά με τη σύνδεση μεταξύ μαθηματικής δημιουργικότητας και κατασκευής προβλήματος. Για παράδειγμα, οι Yuan και Sriraman (2011) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι «μπορεί να μην υπάρχουν σταθερές συσχετίσεις μεταξύ της μαθηματικής δημιουργικότητας και των μαθηματικών ικανοτήτων κατασκευής προβλημάτων ή τουλάχιστον ότι οι συσχετίσεις μεταξύ της δημιουργικότητας και των μαθηματικών ικανοτήτων κατασκευής προβλημάτων είναι πολύπλοκες» (Yuan & Sriraman, 2011, σελ. 25). Ωστόσο, άλλοι ερευνητές όπως για παράδειγμα οι Haylock (1997) και Leung (1997), οι οποίοι δεν συμφώνησαν ότι υπάρχει συσχέτιση μεταξύ της δημιουργικότητας και της κατασκευής προβλημάτων στα μαθηματικά, δεν εξέτασαν τη διδασκαλία. Από εμπειρική άποψη, ο Silver (1997) πρότεινε ότι οποιαδήποτε σχέση μεταξύ δημιουργικότητας και κατασκευής προβλημάτων μπορεί να είναι προϊόν προηγούμενων εκπαιδευτικών προτύπων.

2.2.6 Ανοιχτά Προβλήματα (Open – Ended Problems)

Ένας άλλος αναγνωρισμένος τρόπος για να αναπτυχθεί η μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών μαθηματικών είναι να τους εμπλέκουμε σε εργασίες ανοιχτού τύπου (Kwon, Park, & Park, 2006; Silver, 1997). Όσον αφορά τη διαφορά μεταξύ κλειστών και ανοιχτών εργασιών, οι Sullivan, Warren και White (2000) δήλωσαν ότι «Το κλειστό σημαίνει ότι υπάρχει μόνο μία αποδεκτή πορεία, απόκριση, προσέγγιση ή λογική σκέψης. Το ανοιχτό αναφέρεται στην ύπαρξη περισσότερων από ενός (κατά προτίμηση πολλών περισσότερων από ενός) πιθανών τρόπων, απαντήσεων, προσεγγίσεων ή τρόπων συλλογισμού. " (σελ. 3). Μερικές φορές, ένα ανοιχτό πρόβλημα μπορεί να μην έχει μία ακριβώς απάντηση αλλά μάλλον μια σειρά λύσεων (Silver, 1997). Με άλλα λόγια, ένα ανοιχτό πρόβλημα μπορεί να έχει περισσότερες από μία σωστές τελικές απαντήσεις εκτός από αρκετές πιθανές οδούς λύσης. Με αυτόν τον τρόπο, η προσέλκυση μαθητών σε ανοιχτά προβλήματα παρέχει μια διαδρομή για πειθαρχημένο αυτοσχεδιασμό με την έννοια ότι ορισμένα μέρη της δραστηριότητας είναι σταθερά, ενώ άλλα είναι λίγο πολύ ρευστά (Beghetto & Kaufman, 2011).

Τα ανοιχτά προβλήματα είναι ποικίλα και δεν είναι εύκολο να καθοριστούν. Βασικά πρόκειται για προβλήματα που έχουν κάποιο χαρακτηριστικό που δεν είναι προκαθορισμένο (ή "κλειστό"). Τα προβλήματα αυτά μπορεί να έχουν χώρο λύσεων που δεν καθορίζεται πάντα εκ των προτέρων, ή μπορεί να περιλαμβάνουν μια συγκεκριμένη λύση και ωστόσο να απαιτούν την επίτευξή της με διαφορετικούς τρόπους, ή μπορεί να μην περιλαμβάνουν ένα «κανονικό» πρόβλημα αλλά μάλλον κάποιο είδος [ανοιχτής] δράσης (όπως π.χ. σύνταξη προβλήματος ή ταξινόμηση προβλημάτων). Η χρήση ανοιχτών προβλημάτων είναι πολύ συνηθισμένη στην Ιαπωνία και περιγράφεται από τον Hino (2007) ως μία από τις κύριες αιτίες για την επιτυχή ανάπτυξη των ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων των παιδιών της Ιαπωνίας. Ο Hino αποδίδει τον αρχικό σχεδιασμό αυτών των προβλημάτων στις προσπάθειες των Ιαπώνων ερευνητών να αναπτύξουν μια μέθοδο για την αξιολόγηση της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Ενώ, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο τρέχων στόχος μας είναι διαφορετικός, τα προϊόντα που προκύπτουν από αυτές τις προσπάθειες είναι προβλήματα που θα μπορούσαν να εξυπηρετήσουν το σκοπό μας. Ο πλούσιος όγκος έρευνας σε αυτή την κατεύθυνση περιλαμβάνει πολλά διαφορετικά είδη προβλημάτων. Τα προβλήματα διαφέρουν μεταξύ τους στον βαθμό «ανοιχτότητας», στο πλαίσιο της εργασίας, στην έκταση των ρεαλιστικών εκτιμήσεων και στο στυλ της εργασίας.

Όσον αφορά το πλαίσιο των προβλημάτων, ορισμένα προβλήματα είναι καθαρές μαθηματικές εργασίες, δηλαδή παρουσιάζονται στον κόσμο των μαθηματικών. Άλλα προβλήματα περιλαμβάνουν προβλήματα λέξεων ή καταστάσεις βγαλμένες από την πραγματική ζωή. Ένα μαθηματικό πρόβλημα μπορεί να ζητήσει μια μαθηματική λύση ή διαφορετικές διαδρομές για να φτάσει στη μαθηματική λύση. Για παράδειγμα, ο Ching (1997) χρησιμοποίησε ανοιχτά υπολογιστικά προβλήματα σε μια κανονική τάξη δημοτικού σχολείου. Ζήτησε από τους μαθητές της πέμπτης τάξης να καταλάβουν το άθροισμα των πρώτων δέκα φυσικών αριθμών και στη συνέχεια τους ζήτησε να βρουν μεθόδους για τον υπολογισμό αυτού του αθροίσματος χωρίς να προσθέσουν τους αριθμούς έναν προς έναν. Οι μαθητές του Ching παρήγαγαν ένα ευρύ φάσμα απαντήσεων, αποδεικνύοντας ότι το πρόβλημα ενθάρρυνε τη δημιουργικότητα και ταυτόχρονα του επέτρεψε να αναγνωρίσει έναν εξαιρετικά δημιουργικό μαθητή.

Ένα πρόβλημα που δεν είναι καθαρά μαθηματικό μπορεί να περιλαμβάνει διαφορετικούς τύπους περιεχομένου και διαφορετικά επίπεδα αυθεντικότητας. Ένα παράδειγμα προβλήματος με ημιρεαλιστικό περιεχόμενο: "Ο Roni επισκέφτηκε ένα αγρόκτημα. Είδε αγελάδες και κοτόπουλα. Δεν θυμόταν πόσες ήταν, αλλά θυμήθηκε τον οδηγό να λέει ότι είχαν συνολικά 100 πόδια. Πόσες αγελάδες και πόσα κοτόπουλα ήταν εκεί;» (Hershkovitz & Nesher 2003). Σε αυτό το πρόβλημα υπάρχει ένας ευρύς χώρος λύσεων και διαφορετικές στρατηγικές για την επίλυσή του και είναι δυνατό να επεκταθεί σε νέα και πιο προκλητικά προβλήματα.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό των ανοιχτών προβλημάτων περιλαμβάνει τη χρήση ρεαλιστικών θεωρήσεων, πραγματικών καταστάσεων ή εννοιών από άλλα πεδία εκτός των μαθηματικών. Αυτά είναι κυρίως προβλήματα μοντελοποίησης, συγκεκριμένα προβλήματα που απαιτούν οργάνωση καταστάσεων και λήψη επιλογών, και συχνά κάποια ενσωμάτωση εννοιών για την προσαρμογή των μαθηματικών μοντέλων στις δεδομένες καταστάσεις. Τέτοια προβλήματα περιλαμβάνουν εργασίες που έχουν διαφορετικά ποσά πρόκλησης και πολυπλοκότητας. Μερικές από τις πιο σύνθετες εργασίες όσον αφορά την οργάνωση και την ολοκλήρωση των μαθηματικών εννοιών είναι οι Δραστηριότητες Εκκίνησης Μοντέλων (Model Eliciting Activities - MEA). Τα χαρακτηριστικά σχεδιασμού των προβλημάτων τύπου MEA περιγράφονται λεπτομερώς και χρησιμοποιούνται και επεξεργάζονται περαιτέρω από διαφορετικούς συγγραφείς στο Lesh et al. (2000) και Lesh and Doerr (2003).

2.2.7 Έρευνες στη Μαθηματική Δημιουργικότητα

Υπάρχουν έρευνες σχετικά με τις γεωμετρικές γνώσεις και την ικανότητα απόδειξης με πολλούς τρόπους στα σχολικά μαθήματα γεωμετρίας (όπως, Guberman & Leikin, 2013, Gurevich & Meddnikov, 2006, Leikin, 2007, 2008, Leikin & Levav-Waynberg, 2008, Levav-Waynberg & Leikin, 2012, 2013, Stupel & Ben-Chaim, 2013, 2017).

Σε έρευνά τους, υπό την προσέγγιση της συγκεκριμένης μαθηματικής δημιουργικότητας, οι Levav-Waynberg και Leikin (2012), εξετάζουν τις μεταβολές στις γεωμετρικές γνώσεις και τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών καθώς αυτοί εμπλέκονται με την επίλυση προβλημάτων πολλαπλών λύσεων στη γεωμετρία. Στην έρευνα συμμετείχαν 303 μαθητές από 14 τάξεις. Από αυτούς οι 229 μαθητές παρακολουθούσαν μαθήματα γεωμετρίας επί έναν χρόνο κάνοντας χρήση έργων πολλαπλών λύσεων ενώ οι υπόλοιποι 74 δεν είχαν κάποια διαφοροποίηση διδασκαλία τους. Οι επιδόσεις τους μετρήθηκαν στην αρχή και στο τέλος του σχολικού έτους με 4 ασκήσεις πολλαπλών λύσεων (δύο στην αρχή και δύο στο τέλος), στις οποίες το σχήμα δινόταν. Αυτή η μελέτη συγκρίνει την εξέλιξη της γνώσης και της δημιουργικότητας μεταξύ των πειραματικών ομάδων και των ομάδων ελέγχου όπως αντικατοπτρίζεται στις γραπτές εξετάσεις των μαθητών. Η γνώση της γεωμετρίας μετρήθηκε με την ορθότητα (correctness) και τη συνάφεια (connectedness) των λύσεων που παρουσιάστηκαν, ενώ τα κριτήρια δημιουργικότητας ήταν: ευχέρεια (fluency), ευελιξία (flexibility) και πρωτοτυπία (originality). Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι η συνάφεια των μαθητών καθώς και η ευχέρεια και ευελιξία των λύσεων επωφελήθηκαν με την εφαρμογή των προβλημάτων πολλαπλών λύσεων. Η μελέτη υποστηρίζει την ιδέα ότι η πρωτοτυπία είναι ένα πιο εσωτερικό χαρακτηριστικό από την ευχέρεια και την ευελιξία και ως εκ τούτου σχετίζεται περισσότερο με τη δημιουργικότητα και είναι λιγότερο δυναμική. Η cluster ανάλυση της πειραματικής ομάδας προσδιόρισε τρεις ομάδες που αντιστοιχούν σε τρία επίπεδα μαθησιακών επιδόσεων, σύμφωνα με τα πέντε μετρούμενα κριτήρια στα προ-τεστ και μετά-τεστ και έδειξαν ότι, με εξαίρεση την πρωτοτυπία, οι επιδόσεις και στις τρεις ομάδες βελτιώθηκαν γενικά με βάση τα διάφορα κριτήρια.

Σε άρθρο τους, υπό την προσέγγιση της γενικής μαθηματικής δημιουργικότητας, οι Stupel & Ben-Chaim (2013), με τον χαρακτηριστικό τίτλο “One problem, multiple solution: How multiple proofs can connect several arias of mathematics”, παρουσιάζουν ένα συγκεκριμένο και ενδιαφέρον πρόβλημα γεωμετρίας και 9 διαφορετικές αποδείξεις από διαφορετικούς τομείς των μαθηματικών, όπως Ευκλείδεια γεωμετρία, τριγωνομετρία, αναλυτική γεωμετρία κ.α. Τονίζουν ότι η ενθάρρυνση των μαθητών των τελευταίων τάξεων του λυκείου, να επιλύσουν προβλήματα με διάφορους τρόπους, θα ενισχύσει την εκτίμησή τους για τα μαθηματικά και θα τους δώσει το έναυσμα να αντλήσουν ακόμα πιο κομψές λύσεις από μόνοι τους. Μετά τη διεξαγωγή μιας μελέτης περιπτώσεων που περιελάμβανε ένα μάθημα για το θέμα αυτό ως μέρος ενός προγράμματος εκπαίδευσης μαθηματικών πριν από τον διορισμό τους (συμπεριλαμβανομένης της ανατροφοδότησης των μαθητών μέσω ερωτηματολογίου και συνεντεύξεων), συνήχθη το συμπέρασμα ότι οι εκπαιδευτικοί των μαθηματικών πρέπει να ενθαρρύνονται να εισαγάγουν πολλούς διαφορετικούς τρόπους αποδείξεων κατά την διδασκαλία τους. Η άποψη αυτή, συμφωνεί με τα ευρήματα από αρκετές έρευνες των Leikin & Levav-Waynberg (2008, 2009, 2013), που υποστηρίζουν ότι οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει συνεχώς να ενθαρρύνονται ώστε να προωθούν συστηματικά τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων στο μάθημά τους, καθώς δημιουργώντας ευκαιρίες για τους μαθητές να λύσουν προβλήματα με πολλαπλές λύσεις, οι εκπαιδευτικοί επέκτειναν και οι ίδιοι τους δικούς τους χώρους προσωπικών λύσεων. Συντελείτε έτσι μια συνεχείς αύξηση της ποιότητας του μαθήματος αλλά και μια προσωπική ανάπτυξη γνώσεων, μαθηματικών συνδέσεων και δημιουργικών ικανοτήτων τόσο των μαθητών όσο και των εκπαιδευτικών.

Οι Kattou et al. (2012), διερεύνησαν εάν υπάρχει σχέση μεταξύ μαθηματικής ικανότητας και μαθηματικής δημιουργικότητας και εξέτασαν τη δομή αυτής της σχέσης. Τα δεδομένα συγκεντρώθηκαν με τη χορήγηση δύο δοκιμίων, ενός δοκιμίου μαθηματικής ικανότητας και ενός μαθηματικού τεστ δημιουργικότητας, σε 359 μαθητές δημοτικού. Η μαθηματική ικανότητα θεωρήθηκε ως ένα πολυδιάστατο κατασκεύασμα, συμπεριλαμβανομένης της ποσοτικής ικανότητας (αίσθηση των αριθμών και προ-αλγεβρική λογική), της αιτιώδους ικανότητας (εξέταση των σχέσεων αιτίου-αποτελέσματος), της χωρικής ικανότητας (αναδίπλωση χαρτιού, δυνατοτήτων περιστροφής αντικειμένων στο χώρο), της ποιοτικής ικανότητας (των σχέσεων ομοιότητας και διαφοράς) καθώς και επαγωγικών και παραγωγικών ικανοτήτων. Η μαθηματική δημιουργικότητα ορίστηκε ως χαρακτηριστικό γνώρισμα του τομέα, επιτρέποντας στα άτομα να χαρακτηρίζονται από ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία στον τομέα των μαθηματικών. Μετά από ανάλυση των δεδομένων φάνηκε ότι υπάρχει μια θετική συσχέτιση μεταξύ της μαθηματικής δημιουργικότητας και της μαθηματικής ικανότητας, με τη μαθηματική δημιουργικότητα να αποτελεί υποσυστατικό της μαθηματικής ικανότητας.

Η Einav Aizikovitsh-Udi (2014), διερεύνησε τη μαθηματική δημιουργικότητα μεταξύ 57 ταλαντούχων μαθητών στα Μαθηματικά, εξετάζοντας τους συλλογισμούς που εφαρμόζουν οι μαθητές κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος, το βαθμό της μαθηματικής δημιουργικότητας και αισθητικής που επιδεικνύουν κατά την επίλυση ενός μη-συνηθισμένου μαθηματικού προβλήματος καθώς και αν η μαθηματική σκέψη των μαθητών εξαρτάται αποκλειστικά από τις προηγούμενες μαθηματικές ικανότητες και δεξιότητες. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η πλειονότητα των μαθητών βασίστηκε σε τεχνικό αλγόριθμο για την επίλυση του προβλήματος. Αν και οι ταλαντούχοι μαθητές αντιμετώπιζαν καλά τα προκλητικά προβλήματα που χρειάζονταν σκέψη, οι περισσότεροι λειτουργούσαν στο βασικό επίπεδο δημιουργικότητας.

Σε άλλη έρευνα, οι Klavir και Gorodetsky (2009), μέτρησαν και σύγκριναν τις μεταβλητές της δημιουργικότητας: ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία ανάμεσα σε χαρισματικούς και μη-χαρισματικούς μαθητές στα μαθηματικά. Τα αποτελέσματα της έρευνάς τους έδειξαν την ύπαρξη σημαντικής διαφοράς μεταξύ των δύο ομάδων μαθητών, όσον αφορά την ικανότητά τους να εμπλακούν στη δημιουργική διαδικασία, την ικανότητα τους να σκέφτονται εναλλακτικές μαθηματικές ιδέες, τον βαθμό επεξεργασίας των ιδεών καθώς και την πρωτοτυπία των λύσεων τους.

Οι Sophocleous et al. (2009), διερεύνησαν τη σχέση μεταξύ του τύπου των κριτηρίων που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να αναγνωρίσουν τις γεωμετρικές μορφές και τις δημιουργικές τους ικανότητες να συμπληρώνουν σχήματα χρησιμοποιώντας διάφορα είδη γεωμετρικών σχημάτων. Ένα σύνολο μαθητών πέμπτης και έκτης τάξης (N = 201) ολοκλήρωσε ένα τεστ τριών μερών. Τα αποτελέσματα της έρευνάς τους δείχνουν ότι οι μαθητές που χρησιμοποίησαν διαφορετικό τύπο κριτηρίων για την αναγνώριση των γεωμετρικών σχημάτων διέφεραν ως προς τις λύσεις των εργασιών δημιουργικότητας. Πιο συγκεκριμένα, η μέση απόδοση στις εργασίες δημιουργικότητας των μαθητών που έδωσαν απαντήσεις βασισμένες στα βασικά χαρακτηριστικά των σχημάτων ήταν πολύ καλύτερη από την απόδοση των μαθητών που έδωσαν απαντήσεις με βάση τις οπτικές ιδιότητες των σχημάτων.

2.3 Ευκλείδεια Γεωμετρία

Κυρίαρχο ρόλο στα Ελληνικά σχολεία στον τομέα της Γεωμετρίας κατέχει η Ευκλείδεια Γεωμετρία που διδάσκεται τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η διδασκαλία της ξεκινά από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού σχολείου σε μια τόσο όχι αυστηρή μορφή, συνεχίζεται στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου ως προπαιδευτικό υλικό για τις τάξεις Α΄ και Β΄ του Λυκείου όπου διδάσκεται με πιο θεωρητική μορφή. Οι μαθητές που επιλέγουν Β΄ θετική κατεύθυνση, διδάσκονται εκτός από Ευκλείδεια Γεωμετρία και Διανυσματική – Αναλυτική Γεωμετρία. Γίνεται λοιπόν φανερό, ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία κατέχει μεγάλο ποσοστό της διδακτέας ύλης των Μαθηματικών τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Η Γεωμετρία σύμφωνα με το (Φ.Ε.Κ. Β΄ 1168, σ.16674), είναι το κατεξοχήν πεδίο που μπορεί να μεταφέρει στους μαθητές την ενιαία δομή και τη συνοχή των Μαθηματικών. Μέσα από την αξιωματική της θεμελίωση, τις προτάσεις και τα θεωρήματα που αποδεικνύονται με χρήση προηγούμενων αποτελεσμάτων, η Θεωρητική Γεωμετρία μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν μια αίσθηση της οικοδόμησης μιας μαθηματικής θεωρίας καθώς και της έννοιας της απόδειξης στα Μαθηματικά. Παράλληλα μπορεί να τους βοηθήσει να αναπτύξουν ικανότητες εύρεσης αποδεικτικών διαδικασιών στην επίλυση προβλημάτων. Στο πλαίσιο της Θεωρητικής Γεωμετρίας οι μαθητές αναγνωρίζουν το ρόλο του σχήματος στη Γεωμετρία ως στοιχείο άρρηκτα συνδεδεμένο με τη γεωμετρική σκέψη.

Το NCTM (2000) χαρακτηρίζει τη γεωμετρία και την αντίληψη του χώρου ως θεμελιώσεις παράγοντες για τη μάθηση των μαθηματικών, αφού παρέχουν τρόπους για να συλλογιστούμε και να ερμηνεύσουμε το φυσικό μας περιβάλλον. Επίσης, μπορούν να λειτουργήσουν και ως εργαλεία για τη μελέτη άλλων θεμάτων στα μαθηματικά και την επιστήμη. Η γεωμετρία, περισσότερο από άλλες περιοχές των μαθηματικών, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανακάλυψη και ανάπτυξη διαφόρων τρόπων σκέψης (Duval, 1998). Για τους λόγους αυτούς, τα σύγχρονα προγράμματα των μαθηματικών τονίζουν τη σπουδαιότητα της γεωμετρίας, τόσο ως αυτόνομου θέματος όσο και ως μέσου για την ανάπτυξη άλλων μαθηματικών εννοιών (NCTM, 2000). Συγκεκριμένα, καθορίζεται ότι από τους μαθητές αναμένεται να αναλύουν τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες των δισδιάστατων και τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων και να αναπτύσσουν μαθηματικά επιχειρήματα για τις γεωμετρικές σχέσεις. Επιπλέον πρέπει να είναι ικανοί να περιγράφουν χωρικές σχέσεις με τη χρήση Αναλυτικής Γεωμετρίας και άλλων συστημάτων αναπαράστασης, να εφαρμόζουν μετασχηματισμούς και να χρησιμοποιούν τη συμμετρία για να αναλύουν μαθηματικές καταστάσεις. Όσον αφορά στην επίλυση προβλήματος, αναμένεται η χρήση οπτικοποίησης, χωρικής αιτιολόγησης και γεωμετρικών μοντέλων (Γαγάτσης κ.ά, 2011).

2.3.1 Υποβάθμιση Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Τα τελευταία χρόνια η μάθηση και η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας υφίσταται μια πολυδιάστατη υποβάθμιση. Η υποβάθμιση αυτή οφείλεται κυρίως στο ότι δεν εξετάζεται στις Πανελλήνιες εξετάσεις ως αυτόνομο μάθημα αλλά και σε «κακές διδακτικές πρακτικές» που εφαρμόζονται τα τελευταία χρόνια.

2.3.2 Χρήση Θεωριών και Μοντέλων στην Έρευνα της Διδακτική της Γεωμετρίας

Για να γίνει αντιληπτή η σημασία των θεμάτων της Διδακτικής της Γεωμετρίας, παρουσιάζεται η ανάγκη ανάλυσης εφαρμογών των εννοιών και μεθόδων της Διδακτικής της Γεωμετρίας. Αυτή η ενότητα παρουσιάζει μια κριτική επισκόπηση θεωριών που χρησιμοποιήθηκαν για την ανακάλυψη της κατανόησης του πώς οι μαθητές κατασκευάζουν τα νοήματα για τις έννοιες της Γεωμετρίας. Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν διάφορες θεωρίες μάθησης και διδασκαλίας της γεωμετρίας στο πλαίσιο της σχολικής εκπαίδευσης.

2.3.2.1 Θεωρία των Van Hiele's (Van Hiele's Level, 1986)

Από τις πρώτες θεωρίες για το γεωμετρικό συλλογισμό των μαθητών ήταν η θεωρία των επιπέδων Γεωμετρικής σκέψης των Van Hieles (1986). Η θεωρία αυτή έχει ως στόχο τη διδασκαλία και τη μάθηση της γεωμετρίας, αλλά μπορεί να εφαρμοστεί και ευρύτερα και στους άλλους κλάδους των μαθηματικών. Το μοντέλο των Van Hieles στηρίζεται στο ότι η διδασκαλία και η μάθηση της γεωμετρίας έχει τρία στάδια:

Στάδιο Α: Διαισθητική, πειραματική διαδικασία

Στάδιο Β: Μερικώς παραγωγικός συλλογισμός

Στάδιο Γ: Απόλυτα αυστηρός συλλογισμός

Με βάση αυτή την πεποίθηση η μάθηση της γεωμετρίας αρχίζει διαισθητικά και σταδιακά προχωρεί σε πιο αφηρημένα επίπεδα. Οι Van Hieles (1986, 1999) προτείνουν ένα μοντέλο με πέντε ιεραρχικά επίπεδα της γεωμετρικής αντίληψης.

Επίπεδο 0: Επίπεδο Σφαιρικής ή Ολικής Αντίληψης (Οπτικοποίηση)

Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές είναι ικανοί να αναγνωρίζουν τα σχήματα ως ολότητες (σε απλά, σύνθετα και σε διαφορετικές θέσεις), αλλά δεν μπορούν να τα αναλύσουν στα επιμέρους στοιχεία τους. Η ορολογία που χρησιμοποιούν είναι άτυπη. Για παράδειγμα, ονομάζουν ένα σχήμα ως ρόμβο επειδή έχει το συγκεκριμένο σχήμα που τους έχουν μάθει να το αποκαλούν «ρόμβο». Η επίλυση προβλημάτων γίνεται χωρίς τη χρήση ιδιοτήτων, ενώ οι συγκρίσεις γίνονται με βάση τη μορφή σχημάτων (ονομάζουν ένα σχήμα ως ορθογώνιο, επειδή μοιάζει με μια πόρτα).

Επίπεδο 1: Επίπεδο Ανάλυσης (Περιγραφικό)

Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές είναι σε θέση να αναγνωρίζουν και να ελέγχουν τις ιδιότητες και τις σχέσεις μεταξύ των μερών ενός σχήματος (για παράδειγμα, οι τέσσερις πλευρές ενός τετραγώνου είναι ίσες). Οι μαθητές είναι ικανοί να αναλύουν τα σχήματα στα επιμέρους συστατικά τους και να ανακαλύπτουν τις ιδιότητές τους χρησιμοποιώντας ορθή ορολογία (για παράδειγμα, οι διαγώνιες του τετραγώνου είναι ίσες). Η επίλυση προβλημάτων γίνεται με τη χρήση ιδιοτήτων ενώ είναι σε θέση να αναγνωρίζουν, περιγράφουν, συγκρίνουν και ταξινομούν σχήματα με βάση τις ιδιότητές τους (για παράδειγμα, ένας μαθητής μπορεί να σκεφτεί πως ρόμβος είναι ένα σχήμα που έχει τέσσερις ίσες πλευρές αλλά δεν μπορεί να αναγνωρίσει τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων των σχημάτων). Τέλος, στο επίπεδο αυτό οι μαθητές χρησιμοποιούν άτυπους ορισμούς σχημάτων, χωρίς να μπορούν να κάνουν συσχετίσεις μεταξύ διαφόρων ιδιοτήτων του ίδιου σχήματος, ούτε μεταξύ διαφορετικών σχημάτων (για παράδειγμα, ένα σχήμα δεν μπορεί να είναι ορθογώνιο, γιατί είναι τετράγωνο).

Επίπεδο 2: Επίπεδο Άτυπης Παραγωγικής Σκέψης (Συσχετιστικό)

Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές καταφέρνουν να αναγνωρίζουν τον ελάχιστο αριθμό ιδιοτήτων που ορίζουν ένα σχήμα. Είναι σε σημείο να αναγνωρίζουν ότι για να είναι οι απέναντι πλευρές ενός τετραγώνου είναι παράλληλες, πρέπει οι απέναντι γωνίες να είναι ίσες. Επιπλέον, είναι σε θέση να αναγνωρίζουν σχέσεις μεταξύ τάξεων σχημάτων (για παράδειγμα, ένα τετράγωνο το αναγνωρίζουν ως ρόμβο με κάποιες επιπλέον ιδιότητες). Τέλος, οι μαθητές στο επίπεδο αυτό, επικεντρώνονται σε συλλογισμούς, δίνουν περισσότερες από μια εξηγήσεις για την απόδειξη απλών σχέσεων (για παράδειγμα, το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών πενταπλεύρου είναι 540^o) και φτάνουν σε άτυπες αποδείξεις.

Επίπεδο 3: Επίπεδο Παραγωγικής Σκέψης (Τυπικό – Αξιωματικό)

Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές κατανοούν τη σημαντικότητα της απόδειξης και το ρόλο των αξιωμάτων, των θεωρημάτων και των αποδείξεων. Είναι σε θέση να αναπτύσσουν συλλογισμούς για να αποδείξουν μια πρόταση χρησιμοποιώντας δεδομένα αξιώματα (για παράδειγμα, οι μαθητές μπορούν να αποδείξουν ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της), αλλά και κατανοούν ότι η απόδειξη μπορεί να γίνει με περισσότερους από ένα τρόπους. Τέλος, στο επίπεδο αυτό οι μαθητές δεν είναι σε θέση να αναγνωρίζουν την ανάγκη για αυστηρότητα στην απόδειξη και δεν κατανοούν τις σχέσεις μεταξύ διαφορετικών αξιωματικών συστημάτων, γεγονός που δημιουργεί την ανάγκη ύπαρξης του επόμενου επιπέδου 4.

Επίπεδο 4: Αυστηρό

Στο τελευταίο αυτό επίπεδο, οι μαθητές/φοιτητές είναι σε θέση να κατανοήσουν την αναγκαιότητα της αυστηρής αιτιολόγησης και να κάνουν αφηρημένους συλλογισμούς. Γνωρίζουν την ύπαρξη και κατανοούν και άλλα αξιωματικά συστήματα, όπως οι μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες και μπορούν να συγκρίνουν διαφορετικά αξιωματικά συστήματα.

Το μοντέλο Van Hiele έχει τη χαρακτηριστική ιδιότητα ότι τα επίπεδα είναι ιεραρχικά. Αν ένας μαθητής δεν έχει κατακτήσει κάποιο επίπεδο δεν μπορεί να προχωρήσει στα επόμενα επίπεδα. Η πρόοδος από το ένα επίπεδο στο άλλο δεν εξαρτάται από την ηλικία του μαθητή, αλλά από τις εκπαιδευτικές εμπειρίες του μαθητή. Κάθε επίπεδο έχει τη δική του γλώσσα και το δικό του δίκτυο σχέσεων μεταξύ των γλωσσικών συμβόλων. Μια σχέση που θεωρείται ορθή σε ένα επίπεδο, μπορεί να τροποποιηθεί στο επόμενο επίπεδο, καθώς και άτυπες έννοιες ενός επιπέδου γίνονται τυπικές στο επόμενο επίπεδο. Τέλος, χαρακτηριστικό του μοντέλου αυτού είναι πως αν η διδασκαλία που δέχεται ο μαθητής δε συνάδει με το επίπεδό του, τότε δεν μπορεί να επιτύχει τους αναμενόμενους μαθησιακούς στόχους.

Οι φάσεις διδασκαλίας γεωμετρίας των Van Hiele συνοψίζονται στα εξής 5 βήματα:

1. Εισαγωγή της έννοιας (Information): Ο δάσκαλος εκμαιεύει τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών γύρω από το θέμα μέσα από συζήτηση και οι μαθητές εξοικειώνονται με τη νέα έννοια.

2. Καθοδηγούμενη ανακάλυψη (Guided orientation): Οι μαθητές εξερευνούν τη νέα έννοια μέσα από προσεκτικά σχεδιασμένες δραστηριότητες, όπως δίπλωση κατασκευή σχημάτων.

3. Έκφραση – Επεξήγηση (Explicitation): Οι μαθητές περιγράφουν με δικά τους λόγια τι έχουν μάθει γύρω από τη νέα έννοια και ο δάσκαλος εισαγάγει τους σχετικούς μαθηματικούς όρους.

4. Ελεύθερη διερεύνηση (Free Orientation): Οι μαθητές εφαρμόζουν τις έννοιες που έχουν μάθει για την επίλυση προβλημάτων και τη διερεύνηση πιο ανοικτών δραστηριοτήτων.

5. Ολοκλήρωση (Integration): Οι μαθητές συνοψίζουν αυτά που έχουν μάθει και οικοδομούν ένα δίκτυο εννοιών και σχέσεων.

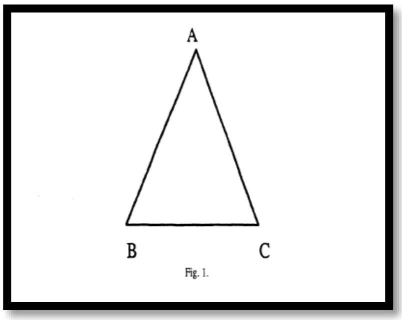
Παρόλο που το μοντέλο των Van Hiele είναι καλά ορισμένο κατά καιρούς έχει δεχθεί κριτική από ερευνητές της Διδακτικής των μαθηματικών. Ο Duval (2006), αναφέρει ότι η διδασκαλία της γεωμετρίας δεν πρέπει να αρχίζει με την αναγνώριση των σχημάτων, διότι έτσι οι μαθητές εγκλωβίζονται στην εικονική εξεικόνιση. Οι Houdement και Kuzniak (2003), επισημαίνουν ότι το μοντέλο είναι αυστηρά γραμμικό, ενώ αντίθετα τα επίπεδα δεν είναι διακριτά και στατικά, αλλά δυναμικά και αλληλένδετα, καθώς υπάρχουν μαθητές που βρίσκονται σε διαφορετικό επίπεδο στις διάφορες γεωμετρικές έννοιες. Τέλος, οι Clements και Battista (1992), προτείνουν την προσθήκη ενός πιο χαμηλού, προ-αναγνωριστικού επιπέδου (pre-recognition). Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές αναγνωρίζουν μόνο ένα υποσύνολο των οπτικών χαρακτηριστικών ενός σχήματος, ως αποτέλεσμα της αδυναμίας να διακρίνουν τα σχήματα (για παράδειγμα, μπορούν να διαχωρίσουν τα τρίγωνα από τα τετράγωνα αλλά όχι ένα ρόμβο από ένα παραλληλόγραμμο).

2.3.2.2 Θεωρία του Fischbein's (Figural Concept, 1993)

Ο Fischbein (1993) ασχολήθηκε με τη διδακτική της Γεωμετρίας και τα Γεωμετρικά σχήματα επισημαίνοντας την διπλή φύση του Γεωμετρικού σχήματος. Όπως ο ίδιος αναφέρει, κάθε Γεωμετρικό σχήμα είναι «σχηματικές έννοιες» (figural concepts), έχοντας ταυτόχρονα εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες. Στις περισσότερες θεωρίες ψυχολογίας, οι έννοιες (concepts) και οι νοητικές εικόνες (mental images) συνήθως διαχωρίζονται, ειδικότερα στις γνωστικές θεωρίες όπου θεωρούνται δύο βασικές, διακριτές κατηγορίες νοητικών οντοτήτων. Έννοια (concept) είναι μια συμβολική αναπαράσταση σχεδόν πάντα λεκτική που χρησιμοποιείται στη διαδικασία της αφαιρετικής σκέψης και εκφράζει μια ιδέα και μια γενικευμένη, ιδανική αναπαράσταση μιας κατηγορίας αντικειμένων, με βάση τα κοινά χαρακτηριστικά τους. Νοητική εικόνα (mental image) είναι μια αισθητηριακή απεικόνιση ενός αντικειμένου ή ενός φαινομένου.

Για να γίνει κατανοητή η έννοια του figural concept, ο Fischbein αναφέρει τα επόμενα δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 1: Θεωρούμε ένα ισοσκελές τρίγωνο ABC (AB=AC), στο οποίο θέλουμε να δείξουμε ότι η γωνία B είναι ίση με την γωνία C (εικόνα 1).

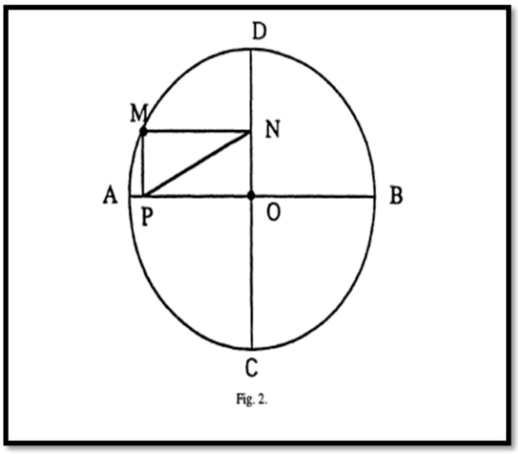


Εικόνα 1: Παράδειγμα 1 για την σχηματική έννοια του Fischbein.

Έχουμε να κάνουμε λοιπόν με έναν συνδυασμό των δύο αυτών ανεξάρτητων οντοτήτων, της αφαιρετικής έννοιας και της αισθητηριακής αναπαράστασης που αντικατοπτρίζουν συγκεκριμένες διεργασίες. Η εξήγηση που δίνεται είναι ότι οι παρά τη βάση γωνιές ισοσκελούς τριγώνου ABC (AB=AC) είναι ίσες αν νοερά αντιστραφεί το τρίγωνο έτσι ώστε η πλευρά AB να είναι στα δεξιά και η πλευρά AC να είναι στα αριστερά. Αν τοποθετηθεί το ένα τρίγωνο πάνω από το άλλο, η γωνία A παραμένει η ίδια και ότι οι δύο πλευρές AB και AC είναι ίσες, έτσι με την αντιστροφή το πρώτο τρίγωνο εφαρμόζει τέλεια με το δεύτερο τρίγωνο που παράγεται από την αντιστροφή. Επομένως, οι γωνίες της βάσης B και C υποχρεωτικά ισούνται.

Τα αντικείμενα στα οποία αναφερθήκαμε, τα σημεία, οι πλευρές, οι γωνίες καθώς και οι πράξεις μεταξύ τους έχουν μόνο ιδεατή ύπαρξη. Είναι δηλαδή εννοιολογικού χαρακτήρα. Ταυτόχρονα όμως κατέχουν μια εσωτερική σχηματική φύση, ώστε μόνο αναφερόμενος κάποιος στις εικόνες μπορεί να εξετάσει λειτουργίες όπως αποσύνδεση, αντιστροφή ή υπέρθεση. Η Γεωμετρία λοιπόν ασχολείται με οντότητες (σχηματικές έννοιες) οι οποίες διαθέτουν ταυτόχρονα εννοιολογικό αλλά και σχηματικό χαρακτήρα.

Παράδειγμα 2: Σε κύκλο κέντρου O, φέρνουμε τις κάθετες διαμέτρους AB και CD. Διαλέγουμε τυχαίο σημείο M και φέρνουμε τις κάθετες MN και MP στις δύο διαμέτρους. Ποιο είναι το μήκος του PN;



Εικόνα 2: Παράδειγμα 2 για την σχηματική έννοια του Fischbein.

Η ισότητα των διαγώνιων δεν είναι αμφισβήτηση, όπως και η ισότητα των ακτίνων. Αυτές οι σχέσεις δεν εξαρτώνται από το ίδιο σχέδιο, αλλά επιβάλλονται από τους ορισμούς και τα θεωρήματα. Όλα τα γεωμετρικά σχήματα αντιπροσωπεύουν διανοητικά κατασκευάσματα τα οποία κατέχουν ταυτόχρονα εννοιολογικές και εικονιστικές ιδιότητες. Το συμπέρασμα λοιπόν δεν έχει εξαχθεί μόνο από το σχήμα ή μόνο από τους αυστηρούς ορισμούς αλλά από έναν συνδυασμό τους. Τα γεωμετρικά σχήματα είναι σχηματικές έννοιες στις οποίες αντιστοιχούν ταυτόχρονα χωρικές ιδιότητες (σχήμα, θέση, μέγεθος) και εννοιολογικές ιδιότητες όπως το ιδεώδες, το αφηρημένο, η γενικότητα και η τελειότητα (Fischbein 1993, σελ. 143). Όμως, η συγχώνευση μεταξύ της έννοιας και του σχήματος στο γεωμετρικό συλλογισμό θεωρείται ιδανική περίπτωση και δεν επιτυγχάνεται απόλυτα.

Διπλή Φύση του Γεωμετρικού Σχήματος

Εννοιολογικές Ιδιότητες

- ✓ Ιδεατά αντικείμενα
- ✓ Αφηρημένες ιδέες
- ✓ Δεν υπάρχουν στην πραγματικότητα
- ✓ Προκύπτουν από τυπικούς ορισμούς

Γεωμετρικό Σχήμα

Σχηματικές Ιδιότητες

Οπτική εικόνα την οποία μπορούμε να χειριστούμε

Σχήμα 3: Η διπλή φύση του Γεωμετρικού σχήματος κατά Fischbein.

Διάφορες έρευνας έδειξαν ότι αυτή η διττή λειτουργία των γεωμετρικών σχημάτων αποτελεί τη βασική πηγή δυσκολιών των παιδιών όταν επιλύουν προβλήματα γεωμετρίας (Fischbein & Nachlieli, 1998; Mesquita, 1998). Η αλληλεπίδραση μεταξύ της εικόνας και της έννοιας κατά τη σύλληψη της γεωμετρικής έννοιας επηρεάζεται από ολόκληρη την αντίληψη του σχήματος. Μπορεί να προκύψουν δυσκολίες στο σχεδιασμό ενός Γεωμετρικού σχήματος εάν οι σχηματικές ιδιότητες δεν είναι σύμφωνες με τις εννοιολογικές ιδιότητες του σχήματος και αυτό μπορεί να οδηγήσει σε πρωτότυπες «σχηματικές έννοιες» (Fujita, 2012; Hershkowitz, 1990). Για παράδειγμα, οι μαθητές δεν μπορούν να αναγνωρίσουν ένα ορθογώνιο ως παραλληλόγραμμο, παρόλο που έχουν γνώση των εννοιολογικών ιδιοτήτων ενός παραλληλογράμμου (Fujita & Jones, 2007, Walcott, Mohr, & Kastberg, 2009).

Βλέποντας κριτικά την θεωρία του Fischbein, παρατηρούμε ότι η θεωρία αναφέρεται στην εννοιολογική ανάπτυξη των εννοιών της γεωμετρίας ως απλές γνωστικές έννοιες, χωρίς να αναφέρεται ο ρόλος της γλώσσας στην εννοιολογική ανάπτυξη. Επιπλέον, οι μελέτες που βασίζονται στη θεωρία των σχηματικών εννοιών του Fischbein έχουν επικεντρωθεί σε μεγάλο βαθμό στις ιδιότητες των δισδιάστατων σχημάτων, χωρίς να παρέχουν πολύτιμες γνώσεις για την εννοιολογική ανάπτυξη τρισδιάστατων σχημάτων (π.χ, Fujita & Jones, 2006; Vodušek & Lipovec, 2014;).

2.3.2.3 Ο ρόλος των Αναπαραστάσεων στη Μάθηση της Γεωμετρίας

Η επαφή με τα σύμβολα και γενικά τις αναπαραστάσεις ξεκινούν από πολύ μικρή ηλικία. Οι DeLoache, Uttal και Pierroutsakos (1998), επισημαίνουν ότι η αρχική επαφή του παιδιού με τα σύμβολα ξεκινά πριν τη γέννηση. Μετά τη γέννηση ο άνθρωπος εμπλέκεται σε ένα δίκτυο συμβόλων, το οποίο συνεχώς επεκτείνεται και γίνεται πιο πολύπλοκο (Γαγάτσης, κ.α, 2011). Σύμφωνα με τους Γαγάτση, Μιχαηλίδου και Σιακαλλή (2001), η πρόοδος των γνώσεων συνοδεύεται από τη δημιουργία και την ανάπτυξη νέων, ειδικών σημειωτικών συστημάτων που συνυπάρχουν και λειτουργούν παράλληλα με το πρώτο σύστημα, αυτό της φυσικής γλώσσας.

Ο όρος αναπαράσταση είναι ασαφής και επιδέχεται πολλαπλές ερμηνείες (Goldin & Kaput, 1996; Kaput, 1985; Seeger 1998). Είναι δύσκολο λοιπόν, να ορισθεί η έννοια της αναπαράστασης, αν και έχουν προταθεί διάφοροι ορισμοί από τον πιο απλό – σύμφωνα με τον οποίον «αναπαράσταση είναι κάτι που μπορεί να σταθεί στη θέση κάποιου άλλου αντικειμένου ή προσώπου ή κάποιας ενέργειας κ.α» - έως πιο πολύπλοκους, που εμπλέκουν διαδικασίες ψυχολογικού τύπου. Ένας από τους πιο διαδεδομένους ορισμού δίνεται από τον Kaput (1987), ο οποίος χρησιμοποιείται συχνά σε έρευνες της μαθηματικής παιδείας. Σύμφωνα με αυτόν η έννοια της αναπαράστασης περιλαμβάνει τις ακόλουθες πέντε ολότητες:

(α) την ολότητα που αναπαρίσταται,

(β) την ολότητα που αναπαριστά,

(γ) τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας προς αναπαράσταση που αναπαρίστανται,

(δ) τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας που αναπαριστά, οι οποίες κάνουν την αναπαράσταση και

(ε) την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο ολότητες.

Με βάση αυτόν τον ορισμό η αναπαράσταση θεωρείται ως ένα νοητικό σύμβολο ή έννοια, το οποίο αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο υλικό σύμβολο. Οι αναπαραστάσεις χωρίζονται σε εσωτερικές και εξωτερικές. Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις αναφέρονται σε νοητικούς σχηματισμούς που οικοδομούν τα υποκείμενα για να αναπαραστήσουν την πραγματικότητα. Εξαιτίας της φύσης τους οι εσωτερικές αναπαραστάσεις δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμες. Πολλές φορές η διδασκαλία αποσκοπεί στη δημιουργία συγκεκριμένων νοητικών αναπαραστάσεων – βρισκόμαστε στο πεδίο του σημαινόμενου (Dufour - Janvier, et al., 1987, σ. 109). Ο όρος εξωτερικές αναπαραστάσεις αναφέρεται σε όλους τους εξωτερικούς συμβολικούς φορείς – σύμβολα, σχήματα, διαγράμματα – οι οποίοι έχουν στόχο να αναπαραστήσουν εξωτερικά μια συγκεκριμένη μαθηματική έννοια (Dufour – Janvier, et al., 1987). Με άλλα λόγια οι εξωτερικές αναπαραστάσεις είναι οι «παρατηρήσιμες ενσωματώσεις των εσωτερικών εννοιολογικών δομών των μαθητών» (Lesh, et al., 1987), δηλαδή του τρόπου με τον οποίο κατανοούν οι μαθητές τις έννοιες εσωτερικά. Τέλος, ο όρος σημειωτικές αναπαραστάσεις αναφέρεται στη βιβλιογραφία και ως ανεξάρτητος από τη διάκριση εσωτερικών – εξωτερικών αναπαραστάσεων (Duval, 1987) και με τον τρόπο αυτό υπονοείται ότι τόσο οι εξωτερικές όσο και οι εσωτερικές είναι συνδυασμοί σημείων.

Κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, τα παιδιά έρχονται από μικρή ηλικία σε επαφή με μια μεγάλη ποικιλία εξωτερικών αναπαραστάσεων (Γαγάτσης, κ.ά., 2001). Τα διαγράμματα, οι πίνακες, οι γραφικές παραστάσεις, τα σχήματα, οι εικόνες, οι αλγεβρικές και λεκτικές εκφράσεις χρησιμοποιούνται στα περισσότερα διδακτικά εγχειρίδια και στη διδακτική πράξη των μαθηματικών, γιατί οι αναπαραστάσεις αποτελούν πλέον αναπόσπαστο μέρος των μαθηματικών εννοιών, ένα εργαλείο χειρισμού τους κατά τη διδασκαλία και ένα μέσο αξιολόγησης της κατανόησης στα μαθηματικά. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι αναπαραστάσεις είναι τόσο στενά συνδεδεμένες με μία έννοια, όπως είναι το κλάσμα, ώστε είναι δύσκολο να γίνει κατανοητή η έννοια, χωρίς τη χρήση της κάθε αναπαράστασης, π.χ μοντέλο σύγκρισης μέρους – όλου. Ωστόσο, κάθε αναπαράσταση παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας, χωρίς να μπορεί να την περιγράψει εξ ολοκλήρου.

Η έννοια της αναπαράστασης αποτελεί ένα εξαιρετικά βοηθητικό θεωρητικό εργαλείο για το χαρακτηρισμό των γνωστικών διαδικασιών στη μάθηση των μαθηματικών, γιατί η περιγραφή του τρόπου εξέλιξης των συστημάτων αναπαράστασης στο χρόνο περιλαμβάνει τόσο σημειωτικές πράξεις, μέσω των οποίων οι αναπαραστάσεις αποκτούν συγκεκριμένο νόημα, όσο και τη δομική εξέλιξη νέων συστημάτων, τα οποία οικοδομούνται πάνω στις βάσεις που παρέχουν τα προϋπάρχοντα συστήματα αναπαράστασης (Goldin & Kaput, 1996). Ένας κεντρικός στόχος της μαθηματικής παιδείας είναι η αύξηση της ισχύος των εσωτερικών αναπαραστάσεων των μαθητών (Goldin & Kaput, 1996). Ισχυρό είναι το σύστημα αναπαράστασης που έχει ευρύ και ποικίλο πεδίο εφαρμογής. Ο σημαντικός ρόλος που διαδραματίζουν τα συστήματα αναπαράστασης και η αλλαγή πεδίου αναπαράστασης στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης φαίνεται από το μεγάλο αριθμό ερευνών που εξετάζουν το θέμα.

Η γεωμετρία από τη φύση της συνδέεται με τις αναπαραστάσεις στις οποίες ενσωματώνεται ο φυσικός κόσμος. Η Mesquita (1998) με τον όρο εξωτερικές αναπαραστάσεις αναφέρεται στις αναπαραστάσεις που είναι υλικά ενσωματωμένες στο χαρτί ή σε άλλο υλικό, ενώ με τον όρο εικονικές αναπαραστάσεις αναφέρεται στην οπτική εικόνα, και αφορούν και οι δύο το πεδίο του σημαίνοντος. Όσον αφορά τις εικονικές, η Mesquita (1998) αναφέρει πως τα γεωμετρικά αντικείμενα αναπαριστώνται με τη βοήθεια σχημάτων (figures). Κατά τον Duval (2002), τα σημειωτικά συστήματα ή οι σημειωτικές αναπαραστάσεις διακρίνονται σε διάφορα registers (καταχωρήσεις). Η Mesquita (1998) αναφέρει ότι στη γεωμετρία χρησιμοποιούνται τρεις καταχωρήσεις: της φυσικής γλώσσας, το συμβολικό και το εικονικό. Η Τρίτη καταχώρηση συνδέεται με το αντιληπτικό-οπτικό σύστημα και έχει δικούς της νόμους οργάνωσης και λειτουργίας.

Σχετικά με τη συμβολή των αναπαραστάσεων στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, η Mesquita (1998) αναφέρει πώς η εικονική αναπαράσταση πολλές φορές στηρίζει και ενισχύει τη γεωμετρική διαίσθηση και ότι η συμβολή της μπορεί να είναι σημαντική, αφού βοηθά στον εντοπισμό σχέσεων ανάμεσα στα γεωμετρικά αντικείμενα. Η σημασία της σχέσης επίλυσης γεωμετρικού προβλήματος και εξωτερικών αναπαραστάσεων καταδεικνύεται και μέσα από τη γενικότερη στροφή της μαθηματικής παιδείας προς την επίλυση μαθηματικού προβλήματος κατά τις τελευταίες δεκαετίες (Schoenfeld, 1992). Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις ανέκαθεν ήταν συνδεδεμένες με τη γεωμετρία γενικότερα, αλλά και την επίλυση προβλήματος ειδικότερα (Poincare, 1963; Polya, 1945). Το NCTM (2000) εισηγείται τη χρήση τέτοιων αναπαραστάσεων κατά τη διδασκαλία της επίλυσης μαθηματικού προβλήματος. Οι εικόνες υποβοηθούν την αναγνώριση των πολλαπλών σχέσεων που μπορεί να υπάρχουν μεταξύ των γεωμετρικών αντικειμένων, όμως συχνά δυσχεραίνουν τη διάκριση δεδομένων και ζητουμένων και μπορεί να παρεμποδίσουν την ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν οι σχέσεις είναι εμφανείς από το σχήμα και ο μαθητής τις θεωρεί δεδομένες και δεν αναπτύσσει επιχειρήματα για την υποστήριξή τους. Τότε, η οπτική αντίληψη είναι ξένη προς τους μαθηματικούς κανόνες και οι εικόνες μπορεί να οδηγήσουν σε προκαταλήψεις όσον αφορά στη γεωμετρική απόδειξη. Η Mesquita (1998), εξαιτίας αυτών των αντίθετων δεδομένων, αναφέρει πως στις διάφορες χώρες δίνεται διαφορετική σημασία στη χρήση εικόνων. Σε μερικές χώρες δίνεται μεγάλη έμφαση στη χρήση εικόνων στα γεωμετρικά προβλήματα, ενώ σε άλλες αποφεύγεται η χρήση τους.

Μεγάλη προσοχή έχει δοθεί στη φύση της εξωτερικής αναπαράστασης. Η Mesquita (1998) διακρίνει δύο τύπους εξωτερικών αναπαραστάσεων, ανάλογα με τη φύση τους. Μια εξωτερική αναπαράσταση έχει φύση αντικειμένου όταν οι γεωμετρικές σχέσεις που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή της αναπαράστασης χρησιμοποιούνται ξανά. Σε αυτή την περίπτωση, είναι δυνατή η εξαγωγή γεωμετρικών σχέσεων από την κατασκευή του σχήματος και αυτές οι σχέσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για αιτιολόγηση και απόδειξη. Στην περίπτωση που η εξωτερική αναπαράσταση έχει τη φύση αντικειμένου, τότε η οπτική αντίληψη του σχήματος συμφωνεί με τις λεκτικές δηλώσεις που συνοδεύουν το σχήμα και δεν υπάρχει αντίφαση. Όταν η εξωτερική αναπαράσταση έχει τη φύση εικόνας, τότε δεν μπορούμε να εξάγουμε ιδιότητες κατευθείαν από την κατασκευή του σχήματος και το σχήμα φαίνεται να παραπλανεί. Σε αυτή την περίπτωση, η οπτική αντίληψη του σχήματος δεν συμφωνεί με τις λεκτικές δηλώσεις που το συνοδεύουν και ενώ, για παράδειγμα, στο λεκτικό μέρος ενός προβλήματος αναφέρεται πώς δύο ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους, αυτό μπορεί να μην «φαίνεται» από το σχήμα.

Ο όρος σχήμα ή γεωμετρική μορφή αναφέρεται σε μια νοερή κατασκευή που παραμένει αναλλοίωτη στα διάφορα σχέδια και κατασκευάζεται με βάση γεωμετρικές ιδιότητες και σχέσεις. Η γεωμετρική μορφή δεν υπόκειται στους υλικούς περιορισμούς των εξωτερικών αναπαραστάσεων και χαρακτηρίζεται από απόλυτη αντικειμενικότητα (Χριστοδουλίδης & Παπαδόπουλος, 2003).

Στη γεωμετρία χρησιμοποιούνται τρία σημειωτικά συστήματα: της φυσικής γλώσσας, της συμβολικής γλώσσας και των σχημάτων. Το σχήμα ανήκει σε ένα ειδικό σημειωτικό σύστημα (register), το οποίο συνδέεται με το αντιληπτικό οπτικό σύστημα, υπακούοντας σε εσωτερικούς κανόνες οργάνωσης. Συγκεκριμένα, ο όρος σχήμα είναι ταυτόσημος με την εξωτερική εικονική αναπαράσταση μιας έννοιας ή κατάστασης στη γεωμετρία (Mesquita, 1998). Ως αναπαράσταση γίνεται κατανοητή με πιο οικονομικό τρόπο σε σχέση με την αντίστοιχη λεκτική, αφού σε ένα σχήμα αναπαρίσταται και εντοπίζεται ευκολότερα το σύνολο των σχέσεων ανάμεσα στα γεωμετρικά αντικείμενα. Εξάλλου, τα σχήματα ενισχύουν τη γεωμετρική διαίσθηση κάνοντας αντιληπτό το σύμπλεγμα σχέσεων του οπτικού αντικειμένου (Lemonidis, 1997). Η πολλαπλή ενεργοποίηση σχέσεων δυσκολεύει όμως τη διάκριση δεδομένων και ζητούμενων. Παράλληλα η οπτική ενίσχυση της διαίσθησης μπορεί να είναι τόσο ισχυρή που να αποτελέσει τροχοπέδη στην ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού (Mesquita, 1998). Από τη μια δηλαδή είναι δύσκολο να σχηματιστεί η νοητική εικόνα μιας γεωμετρικής έννοιας και των παραδειγμάτων της χωρίς εξεικόνιση, από την άλλη όμως τα οπτικά χαρακτηριστικά πιθανόν να θέσουν φραγμούς στην πλήρη κατανόηση της (Hershkowitz, 1998).

Οι αλληλοσυγκρουόμενες απόψεις σχετικά με τις εξωτερικές αναπαραστάσεις των γεωμετρικών αντικειμένων οφείλονται κυρίως στο γεγονός ότι τα σχήματα διαθέτουν τόσο εννοιολογικές ιδιότητες, όπως η μη υλική υπόσταση, η αφαίρεση, η γενίκευση και η εξιδανίκευση, όσο και χωρικές, όπως η θέση και το μέγεθος. Άλλωστε η αλληλεπίδραση μεταξύ έννοιας και εικόνας στο γεωμετρικό συλλογισμό είναι η πιθανή αιτία των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη διαδικασία επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων (Fischbein & Nachieli, 1998).

2.3.2.4 Θεωρία του Duval (Geometrical Figure Apprehension, 1995 & 2017)

Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται ένα γεωμετρικό σχήμα έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές στο χώρο της Γνωστικής Ψυχολογίας και της Διδακτικής των Μαθηματικών. Όλες οι προσπάθειες συστηματικής κωδικοποίησης των σταδίων ανάπτυξης της αντίληψης του χώρου αποτυγχάνουν να βοηθήσουν στην κατανόηση των δυσκολιών που συχνά αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα μαθηματικά. Για την επίτευξη μιας τέτοιας κατανόησης, ο Duval (2002) εξηγεί ότι απαιτείται να μελετήσουμε την κατάσταση από τη γνωστική σκοπιά. Τονίζει ότι το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό μιας γνωστικής προσέγγισης του προβλήματος δεν είναι η κατανόηση των δυσκολιών του μαθητή, αλλά ο καθορισμός των γνωστικών λειτουργιών που βρίσκονται στο υπόβαθρο των διαφόρων μαθηματικών διαδικασιών (Duval, 2002).

Σύμφωνα με τον Duval (2004), υπάρχουν δύο τρόποι προσέγγισης ενός γεωμετρικού αντικειμένου, δια του λόγου και δια του σχήματος. Ο πρώτος τρόπος επικεντρώνεται στη γεωμετρική έννοια με βάση ορισμούς, θεωρήματα και αξιώματα. Στο δεύτερο τρόπο η γνωστική προσέγγιση επικεντρώνεται στην εξεικόνιση (οπτικοποίηση), δηλαδή πώς βλέπει κανείς τις σχέσεις ανάμεσα σε γεωμετρικά αντικείμενα, ώστε να διευκολύνεται η επεξεργασία του γεωμετρικού προβλήματος. Διακρίνονται δύο τύποι εξεικόνισης: εικονική και μη εικονική εξεικόνιση. Στην εικονική εξεικόνιση γίνεται αναγνώριση του σχήματος με βάση την ομοιότητά του με το τυπικό μοντέλο. Βλέπουν το σχήμα ως μορφή, ανεξάρτητα από τις πράξεις σ΄ αυτό. Αντίθετα, στη μη εικονική εξεικόνιση η αναγνώριση του σχήματος στηρίζεται στις νοερές, εσωτερικές πράξεις οι οποίες θα βοηθήσουν στον εντοπισμό των ιδιοτήτων για προσδιορισμό του σχήματος. Αυτές οι πράξεις πραγματοποιούνται είτε μέσω της κατασκευής, είτε μέσω του μετασχηματισμού ενός σχήματος.

Η παρούσα διατριβή χρησιμοποιεί τη θεωρία του Duval (1995, 2017), ως προς τον τρόπο σύλληψης γεωμετρικού σχήματος (geometrical figure apprehension) που ενεργοποιούν οι μαθητές. Κατά την ανάλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος η χρησιμότητα του γεωμετρικού σχήματος θεωρείται αναμφισβήτητη, καθώς παρέχει μια διαισθητική παρουσίαση των συνιστωσών και σχέσεων σε μια γεωμετρική κατάσταση (Duval, 1995). Παρόλα αυτά, συχνά οι μαθητές παρουσιάζονται να η βοηθιούνται από το σχήμα, ώστε να κατευθυνθούν προς τη λύση του προβλήματος. Ποιοι είναι, όμως οι λόγοι που προκαλούν την παρεμπόδιση της χειριστικής λειτουργίας του σχήματος;

Σύμφωνα με τον Duval (2017), μια συγκεκριμένη αναπαράσταση μπορεί να αναγνωριστεί με διάφορους τρόπους ανάλογα με το σύνολο κανόνων που εφαρμόζονται για οπτικές αναπαραστάσεις. Αυτό δείχνει ότι για να δει κάποιος τα στοιχεία γεωμετρικά, υπάρχει πάντα ένα σύνολο κανόνων που πρέπει να ακολουθήσει για να δει το δεδομένο σχήμα σαν γεωμετρική έννοια (ως γεωμετρικό σχήμα). Ως αποτέλεσμα, απαιτείται ένα σημαντικό γνωστικό άλμα για να δούμε τα στοιχεία γεωμετρικά ως αναπαραστάσεις, έναντι της αυτόματης αντιληπτικής τους αναγνώρισης.

Μέσα από τη γνωστική και αντιληπτική προσέγγιση της γεωμετρίας ο Duval (1995), παρουσιάζει ένα λεπτομερές πλαίσιο ανάλυσης των γεωμετρικών σχημάτων, με βάση το οποίο εντοπίζονται τέσσερις τύποι γνωστικής κατανόηση: αντιληπτική κατανόηση (perceptual apprehension), ακολουθιακή κατανόηση (sequential apprehension), λεκτική κατανόηση (discursive apprehension) και λειτουργική κατανόηση (operative). Ένα σχήμα για να λειτουργήσει ως γεωμετρικό σχήμα πρέπει να υπάρχει σίγουρα η αντιληπτική σύλληψη και τουλάχιστον ένα από τα άλλα είδη σύλληψης. Τα είδη κατανόησης όπως προτείνονται από τον Duval (1995), και έχουν ελεγχθεί πειραματικά σε μαθητές δημοτικού, γυμνασίου και λυκείου (Deliyianni et al., 2010; Elia et al., 2009) είναι:

1. *Αντιληπτική κατανόηση*, η οποία σχετίζεται με την αναγνώριση του σχήματος με την πρώτη ματιά. Συνίσταται στην κατανόηση της συνολικής μορφής του σχήματος και στη διάκριση των υποσχημάτων του, με τρόπο όμως που δεν επιτρέπει περαιτέρω επεξεργασία του.

2. *Ακολουθιακή ή σειριακή κατανόηση*, η οποία απαιτείται κατά την κατασκευή ή την περιγραφή της κατασκευής ενός σχήματος. Η οργάνωση των στοιχειωδών μονάδων του σχήματος δεν εμπίπτει σε νόμους της αντίληψης, αλλά καθορίζεται από κατασκευαστικούς περιορισμούς και από μαθηματικές ιδιότητες.

3. *Λεκτική κατανόηση*, η οποία συνδέεται με την αδυναμία προσδιορισμού των μαθηματικών σχέσεων σε ένα σχήμα μόνο από την αντιληπτική κατανόηση, αφού απαιτείται και λεκτική περιγραφή του. Σε κάθε γεωμετρική αναπαράσταση η αντιληπτική αναγνώριση των γεωμετρικών ιδιοτήτων πρέπει να παραμένει κάτω από τον έλεγχο των λεκτικών δηλώσεων (ονομασίες, ορισμοί).

4. *Λειτουργική κατανόηση*, η οποία εξασφαλίζει πρόσβαση στη λύση του προβλήματος. Σχετίζεται με την νοερή ή φυσική επεξεργασία του σχήματος και δίνει στο σχήμα μια ευρετική λειτουργία. Η μερολογική τροποποίηση είναι ο πιο δύσκολος τύπος τροποποίησης (Michael, et al., 2009) και αφορά στη διαίρεση του σχήματος σε υποσχήματα, το συνδυασμό των υποσχημάτων και τη δημιουργία νέων υποσχημάτων. Αναφέρονται, επίσης από τον Duval (1999) τρία είδη τροποποιήσεων ενός γεωμετρικού σχήματος, τα οποία συνιστούν τη λειτουργική κατανόηση:

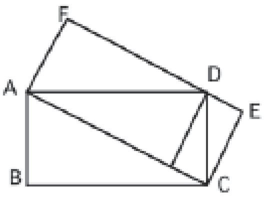
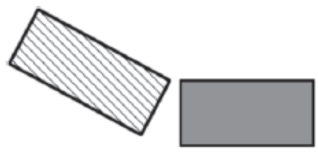
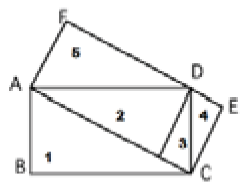
1. *Μερολογικές (mereologic):* αφορά στη διάσταση του ολόκληρου σχήματος σε διάφορα υποσχήματα, στον συνδυασμό των υποσχημάτων αυτών σε ένα άλλο ενιαίο σχήμα και στην εμφάνιση νέων υποσχημάτων. Συνεπώς, προκύπτει μια αλλαγή του τρόπου με τον οποίο το σχήμα παρουσιάζεται με την πρώτη ματιά. Την πιο τυπική λειτουργία σε αυτό το είδος τροποποίησης αποτελεί η αναδιαμόρφωση του σχήματος (reconfiguration).

2. *Οπτικές (optic):* επιτρέπουν τη σμίκρυνση ή μεγέθυνση του σχήματος ή το να εμφανίζεται λοξό, σαν να γίνεται χρήση φακών. Με αυτόν τον τρόπο, τα σχήματα αποκτούν τη δυνατότητα να εμφανίζονται διαφορετικά, χωρίς να έχουν υποστεί οποιαδήποτε αλλαγή. Επίπεδα σχήματα δύναται να θεωρηθούν ως τοποθετημένα σε ένα τρισδιάστατο χώρο. Επιπλέον, μια τυπική λειτουργία είναι να παρουσιάσεις δύο όμοια σχήματα επικαλυμμένα, στο βάθος, ώστε το μικρότερο σχήμα να φαίνεται σαν να ήταν το μεγαλύτερο από απόσταση.

3. *Αλλαγή θέσης (place way):* αλλάζει ο προσανατολισμός του σχήματος στο επίπεδο της εικόνας. Αποτελεί τον ασθενέστερο μετασχηματισμό. Επηρεάζει κυρίως την αναγνώριση ορθών γωνιών, οι οποίες οπτικός σχηματίζονται από οριζόντιες και κατακόρυφες γραμμές.

Οι λειτουργίες αυτές συνιστούν συγκεκριμένες διαδικασίες που προσδίδουν στο σχήμα μια ευρετική λειτουργία. Σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα, μία ή περισσότερες από αυτές τις λειτουργίες μπορούν να οδηγήσουν σε μετασχηματισμούς που ανοίγουν το δρόμο για τη λύση (Γαγάτσης, 2010). Οι διάφορες αυτές λειτουργίες μπορούν να εκτελεστούν είτε νοερά, είτε φυσικά. Συνθέτουν μια συγκεκριμένη επεξεργασία του σχήματος, η οποία του προσδίδει μια χειριστική λειτουργία. Όπως ο Polya (1945) αναφέρει ότι οι λειτουργίες αυτές μπορούν να φανερώσουν την «ιδέα», η οποία θα μας οδηγήσει στη λύση του προβλήματος. Θα μπορούσαμε, συνεπώς να πούμε πως η λειτουργική σύλληψη αποτελεί ένα είδος ευφυούς οργάνωσης του σχήματος, αφού κατά τον Piaget, η νοητική αντίληψη ενός αντικειμένου εμπεριέχει ευφυΐα. Με τη χρήση της ευφυΐας το άτομο καθίσταται ικανό να εντοπίζει ομοιότητες, διαφορές και χωρικές σχέσεις του αντικειμένου (Κολέζα, 2003).

Οι 4 τύποι σύλληψης μπορούν να συνοψιστούν σε δύο τρόπους προσέγγισης (Duval, 2014). Ο αντιληπτικός τρόπος προσέγγισης είναι η αυθόρμητη αναγνώριση του σχήματος. Ο μαθηματικός τρόπος προσέγγισης σχετίζεται με τη λειτουργική σύλληψη του Γεωμετρικού σχήματος. Δηλαδή αφορά στον έλεγχο της αναγνώρισης του σχήματος μέσω των ιδιοτήτων του, από τις οποίες εξάγονται άλλες ιδιότητες. Ο μαθητής μπορεί να δει ένα σχήμα ευέλικτα μέσω του «superposition» αλλά και του «juxtaposition» (Duval, 2014). Όπως φαίνεται στο παράδειγμα του σχήματος 4, με το «superposition» ένας μαθητής βλέπει μόνο δύο ορθογώνια που επικαλύπτονται. Αντίθετα, μέσω του «juxtaposition» βλέπει πέντε υποσχήματα που αντιπαρατίθενται.

<table>
<tr><th></th><th>Superposition</th><th>Juxtaposition</th></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td>
</td></tr>
</table>

Σχήμα 4: Superposition και juxtaposition

Κομβικό σημείο στη λειτουργική σύλληψη του Γεωμετρικού σχήματος είναι η ορατότητα της τροποποίησης του, που εξαρτάται από τις ακόλουθες 5 οπτικές μεταβλητές (Duval, 1995). Πρωτίστως, η διαίρεση του σχήματος σε υποσχήματα διευκολύνει τη λειτουργική σύλληψη. Παράλληλα, η ανάγκη για διπλή χρήση ενός υποσχήματος σε ένα έργο περιορίζει την ορατότητα της πράξης. Επίσης, αν το αναδιοργανωμένο σχήμα προεξέχει από το αρχικό πλαίσιο του σχήματος, η ορατότητα της πράξης μειώνεται. Τέλος, εάν τα υποσχήματα σχηματίζουν κυρτό σχήμα ή αν ο συνδυασμός των υποσχημάτων δημιουργεί ένα γνωστό σχήμα, η λειτουργική σύλληψη ενεργοποιείται πιο εύκολα. Οι γνωστικές μεταβλητές μπορούν να αξιοποιηθούν ως διδακτικές μεταβλητές για το σχεδιασμό έργων που αναπτύσσουν την ευρετική ικανότητα των παιδιών (Duval, 2014).

Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι οι μελέτες για την κατανόηση του Γεωμετρικού σχήματος όπως προτείνεται από τον Duval, έχουν επικεντρωθεί στην κατασκευή εννοιών των σχημάτων στον δισδιάστατο χώρο (2D), παρά το γεγονός ότι αναγνωρίζουν ότι τα αντικείμενα που χρησιμοποιούνται είναι τρισδιάστατα (3D) (π.χ. Gómez-Chacón & Kuzniak, 2015; Tanguay & Venant, 2016). Επιπρόσθετα, οι μελέτες αυτές δεν παρέχουν καμία αναφορά στο ρόλο της γλώσσας στη διαμεσολάβηση των Γεωμετρικών εννοιών και των αναπαραστάσεων τους, παρόλο που βρίσκονται σε πολύγλωσσο πλαίσιο (π.χ., Arıcı & Aslan-Tutak, 2015).

2.3.2.5 Η Διπλή Φύση του Γεωμετρικού Σχήματος: Ασυμφωνία Μεταξύ Φαίνεται και Είναι

Στη γεωμετρία υπάρχουν δύο εμπλεκόμενα στοιχεία: το σχήμα, προκειμένου να δούμε και η γλώσσα προκειμένου να εξηγήσουμε (Duval, 2006). Τα σχήματα στη γεωμετρία, ακόμη και αν είναι κατασκευασμένα με ακρίβεια, είναι απλώς αναπαραστάσεις με συγκεκριμένες τιμές που δε σχετίζονται πάντα με τη πραγματικότητα και ούτε μπορούν να ληφθούν ως απόδειξη (Duval, 1999). Ο τρόπος “που βλέπει” κάποιος ένα σχήμα είναι ένας κρίσιμος γνωστικός παράγοντας για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Συχνά παρατηρείται μία ισχυρή ασυμφωνία μεταξύ αυτού που φαίνεται στο σχήμα και αυτού που δηλώνεται στην εκφώνηση του προβλήματος (Duval, 2014). Πολλοί μαθητές δε μπορούν να προχωρήσουν πέρα από τη πρώτη ματιά, βλέποντας μόνο τα εμφανή, ούτε μπορούν να διαχωρίσουν αυτά που βλέπουν σε αναγκαία και μη ώστε να μην οδηγηθούν σε πιθανές παραπλανήσεις και λάθη (Γαγάτσης, 2011).

Σύμφωνα με τον Duval (2006), συχνά συγχέεται το μαθηματικό αντικείμενο με την αναπαράσταση του ή διαχωρίζονται δύο αναπαραστάσεις του ίδιου αντικειμένου σα να ήταν δύο διαφορετικά αντικείμενα, γι' αυτό απαιτείται συντονισμός τουλάχιστον δύο συστημάτων αναπαράστασης, της λεκτικής έκφρασης και της οπτικοποίησης. Αυτό που τελικά μετατρέπει την εικόνα σε εργαλείο σκέψης είναι η εννοιολογική κατανόηση (Arcavi, 2003).

Τα αποτελέσματα ερευνών δίνουν δύο κύριους παράγοντες που επηρεάζουν τη λειτουργία των γεωμετρικών αναπαραστάσεων. Ο πρώτος είναι η διπλή φύση τους. Οι αναπαραστάσεις είναι αντικείμενα με δικές τους ιδιότητες και ταυτόχρονα παραστάσεις κάτι άλλου. Οι μαθητές δυσκολεύονται να εστιάσουν σε αυτό που τα σχήματα σκοπεύουν να αναπαραστήσουν και τελικά παρατηρούν μόνο τις προφανείς και φυσικές τους ιδιότητες

(DeLoche, 2000; Mesquita, 1998). Ο δεύτερος παράγοντας είναι η ηλικία-εμπειρία. Η εξοικείωση, η προϋπάρχουσα γνώση, η μαθηματική εμπειρία του μαθητή, καθορίζουν την επίδραση που έχουν οι αναπαραστάσεις στην επίδοσή του (Schnotz, 2002).

Λαμβάνοντας υπόψη τις συζητήσεις των ερευνητών γύρω από τη φύση της αναπαράστασης, ορίζουμε δύο κατηγορίες αναπαράστασης, με βάση τη δυνατότητα συναγωγής γεωμετρικών σχέσεων από αυτές. Αυτές που έχουν φύση αντικειμένου, κατά τις οποίες υπάρχει γνωστική ασυμφωνία μεταξύ γεωμετρικού σχήματος και γεωμετρικού αντικειμένου και δεν είναι δυνατή η εξαγωγή γεωμετρικών σχέσεων από την κατασκευή του σχήματος. Το σχήμα "παραπλανεί" και η οπτική του σύλληψη έρχεται σε σύγκρουση με την εκφώνηση του προβλήματος. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι αναπαραστάσεις που έχουν φύση εικόνας, όπου το αναπαριστώμενο γεωμετρικό αντικείμενο και το γεωμετρικό σχήμα βρίσκονται σε γνωστική συμφωνία. Σε αυτές είναι δυνατή η εξαγωγή σχέσεων από την κατασκευή του σχήματος και μπορούν να χρησιμοποιηθούν στις αποδεικτικές διαδικασίες.

Σε έρευνα των Γώγου κ.α (2019) μελετάμε αποκλειστικά το βαθμό που επηρεάζει τις απαντήσεις των μαθητών η σύγκρουση που δημιουργείται όταν η γεωμετρική έννοια που περιγράφετε λεκτικά, ή πάνω στο ίδιο το σχήμα του εκάστοτε έργου, δεν συνάδει με το γεωμετρικό σχήμα που σκόπιμα δεν έχει κατασκευαστεί με ακρίβεια. Εξετάζουμε τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα: (α) Πώς επηρεάζονται οι απαντήσεις των μαθητών όταν η αναγνώριση του σχήματος με τη πρώτη ματιά συγκρούεται με τις ιδιότητες του γεωμετρικού αντικειμένου που δίνονται λεκτικά; και (β) επηρεάζει η ηλικία το βαθμό στον οποίο παρασύρονται οι μαθητές από μια μη ακριβή κατασκευή σχήματος;

Η έρευνα επιβεβαίωσε το γεγονός ότι η διπλή φύση της αναπαράστασης δυσκολεύει τους μαθητές και μάλιστα αποτελεί εμπόδιο στην αναγνώριση ακόμη και απλών γεωμετρικών εννοιών. Οι μαθητές παρόλο που κατά την επίδοση του δοκιμίου αναγνώρισαν την ασυνέπεια σχήματος - δεδομένων, στηρίχθηκαν στο "φαίνεσθαι" όπως μαρτυρά η αποτυχία σε έργα της Β΄ φάσης. Φάνηκε να έχουν συνδέσει τις έννοιες με μία συγκεκριμένη εικόνα που τους οδήγησε σε άκαμπτη σκέψη και εμπόδισε την αναγνώριση της έννοιας σε ένα διαφορετικό πλαίσιο.

Παρατηρήθηκε μια αντίθεση μεταξύ επιτυχίας - αποτυχίας για το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο σε παρόμοιες καταστάσεις. Αυτό καταδεικνύει έλλειψη συνδυασμού μεταξύ διαφορετικών συστημάτων απεικόνισης. Αυτοί οι συνδυασμοί χτίζουν το γνωστικό οικοδόμημα με το οποίο οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν το ίδιο αντικείμενο μέσα σε διαφορετικές αναπαραστάσεις και να κάνουν αντικειμενικές διασυνδέσεις (Duval, 1999). Η βάση για να χτιστεί το οικοδόμημα είναι η βαθιά εννοιολογική γνώση.

Η ηλικία, παρόλο που στην ανάλυση με περιγραφική στατιστική δε φάνηκε να διαφοροποιεί αξιοσημείωτα τις απαντήσεις των μαθητών, η ανάλυση ομοιότητας και κυρίως η συνεπαγωγική ανάλυση έδειξε ότι παίζει ρόλο στη φύση των αναπαραστάσεων που έχουν οι μαθητές. Παρατηρήσαμε ότι οι ομάδες έργων αλλά και ο τρόπος που αυτά συνδέονται μεταξύ τους είναι πολύ διαφορετικός. Επομένως ο τρόπος που επιδρά το σχήμα στο συλλογισμό τους και κατά συνέπεια και στις απαντήσεις τους, διαφοροποιείται σημαντικά από τάξη σε τάξη.

Οι οπτικές αναπαραστάσεις παρέχουν επικοινωνία, σκέψη και μάθηση, αλλά όχι αυτόματα. Συχνά οι μαθητές υποτιμούν ή παραβλέπουν πληροφορίες που περιέχονται στο σχήμα και θεωρούν ότι μια γρήγορη ματιά είναι αρκετή για να κατανοήσουν και να εξάγουν πληροφορίες (Schnotz, 2002). Η διάκριση του τι είναι αποδεκτό και τι όχι, απαιτεί κατανόηση της διπλής φύσης της αναπαράστασης. Οι δυσκολίες και τα προβλήματα από την "ευρετική ανεπάρκεια" στο σχήμα, όπως όρισε ο Duval την ανικανότητα των μαθητών να προχωρήσουν πέρα από τη πρώτη ματιά, μπορεί να ξεπεραστεί μέσα από συστηματική διδασκαλία. Κατά τη διδασκαλία απαιτείται συνεχώς μια μετατροπή μέσα σε ένα διπλό σημειωτικό σύστημα: τη κοινή γλώσσα για να δώσουμε εξηγήσεις και τα σύμβολα - σχήματα για τις μαθηματικές σχέσεις (Duval, 2006). Για να υπάρχει συντονισμός τους θα πρέπει να δοθεί έμφαση τόσο στη διαφοροποίηση των διαδικασιών οπτικοποίησης - συλλογισμού όσο και στην επίγνωση των διάφορων τύπων σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος (Michael-Chrysanthou & Gagatsis, 2015). Ένας τρόπος για να επιτευχθεί αυτό, είναι να ζητάμε από τους μαθητές να περιγράφουν ή να εξηγούν και λεκτικά μια οπτική αναπαράσταση. Μπορεί "μια εικόνα να είναι χίλιες λέξεις" αλλά αυτό δε σημαίνει ότι η παράλειψη των λέξεων οδηγεί και σε καλύτερη κατανόηση.

2.3.2.6 Χωρική Ικανότητα (Spatial Ability)

Η χωρική ικανότητα (spatial ability) είναι ένα θέμα το οποίο απασχόλησε τόσο ψυχολόγους όσο και ερευνητές της μαθηματικής παιδείας. Από τη φύση της η χωρική ικανότητα αποτελεί ένα πολύπλοκο θέμα, με διαφορετικές ερμηνείες από κάθε ερευνητή

(Kalogirou & Gagatsis, 2011). Οι χωρικές ικανότητες είναι γνωστικές λειτουργίες που επιτρέπουν στους ανθρώπους να αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά χωρικές σχέσεις, οπτικά χωρικά έργα και προσανατολισμούς αντικειμένων στο χώρο (Reber, 1985)

Δεν υπάρχει ένας ενιαίος κοινά αποδεκτός λειτουργικός ορισμός για τη χωρική αντίληψη. Σύμφωνα με τους Lean και Clements (1981), χωρική αντίληψη ορίζεται ως η ικανότητα δημιουργίας νοερών εικόνων και ο χειρισμός αυτών των εικόνων στο μυαλό. Για τον Lohman (1996), η χωρική ικανότητα μπορεί να ορισθεί ως η ικανότητα γένεσης, διατήρησης, ανάκλησης και μετασχηματισμού καλώς δομημένων νοητικών εικόνων. Ο Carroll (1993) αναφέρεται στη χωρική ικανότητα, ως την ικανότητα του ατόμου να αναζητά σε ένα οπτικό πεδίο, να κατανοεί τις μορφές, τα σχήματα και τις θέσεις των αντικειμένων, να κατασκευάζει τις νοητικές αναπαραστάσεις αυτών των μορφών, σχημάτων και θέσεων και να χειρίζεται αυτές τις αναπαραστάσεις νοερά. Πιο πρόσφατα ο όρος καλύπτει αφ' ενός τις «δυναμικές χωρικές ικανότητες», αφ'- ετέρου την κίνηση του ατόμου σε ένα μεγάλης κλίμακας περιβάλλον, οπότε έχουμε «τις ευρείας κλίμακας περιβαλλοντικές χωρικές ικανότητες» (Hegarty & Waller, 2005).

Όσον αφορά τη δομή της χωρικής αντίληψης, έχουν γίνει πολλές έρευνες και προσπάθειες για να την προσδιορίσουν. Παρόλα αυτά, επειδή οι απόψεις των ερευνητών διίστανται δεν υπάρχει μία αποδεχτή δομή της χωρικής ικανότητας. Από τη μία μεριά υπάρχουν ερευνητές (Johnson & Meade, 1987; Burton & Fogarty, 2003), που αναφέρουν ότι η χωρική αντίληψη είναι μια μονοδιάστατη οντότητα και αμφισβητούν τους ερευνητές που διακρίνουν διαφορετικές ικανότητες αντίληψης του χώρου. Από την άλλη πλευρά, υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός ερευνητών (Lohman, 1988; Carrol, 1993) που υποστηρίζουν ότι η χωρική ικανότητα δεν μπορεί να έχει μια μοναδιαία δομή αλλά είναι πολυδιάστατη. Χαρακτηριστικά, ο Lohman (1993) αναφέρει ότι υπάρχουν διάφορες χωρικές ικανότητες, που η καθεμιά δίνει έμφαση σε διαφορετικές πτυχές της διαδικασίας οπτικής δημιουργίας, αποθήκευσης, ανάκλησης και μετασχηματισμού των νοερών εικόνων (στο Kalogirou & Gagatsis, 2011).

Σύμφωνα με τον Carrol (1993), η χωρική αντίληψη αποτελείται από πέντε παράγοντες:

(α) Ο πρώτος παράγοντας αφορά την οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου (spatial visualization), δηλαδή την ικανότητα αντίληψης φανταστικών κινήσεων στον τρισδιάστατο χώρο και στην ικανότητα νοερού χειρισμού αντικειμένων,

(β) Ο δεύτερος παράγοντας αφορά τις σχέσεις εννοιών στο χώρο (spatial relations), δηλαδή την ικανότητα νοερής περιστροφής ενός αντικειμένου στο χώρο με ταχύτητα και ακρίβεια,

(γ) Ο τρίτος παράγοντας σχετίζεται με την ταχύτητα διεκπεραίωσης (closure speed) και αφορά ατομικές διαφορές στη δυνατότητα πρόσβασης χωρικών αναπαραστάσεων στη μακροπρόθεσμη μνήμη, όταν παρουσιάζονται ελλιπείς ή κρυμμένες νύξεις αυτών των αναπαραστάσεων,

(δ) Ο τέταρτος παράγοντας αφορά την ευελιξία διεκπεραίωσης (flexibility of closure) και προυποθέτει την εύρεση σχημάτων ή φιγούρων σε μια πιο σύνθετη εικόνα όταν τα άτομα είναι ενήμερα για την φιγούρα ή το σχήμα που ψάχνουν,

(ε) Ο πέμπτος και τελευταίος παράγοντας αφορά την αντιληπτική ταχύτητα (perceptual speed) και χαρακτηρίζεται από την ταχύτητα στον εντοπισμό μιας δοσμένης φιγούρας σε μια ποικιλία διαφορετικών αντικειμένων.

Σε μια ευρείας κλίμακας έρευνα στην οποία συμμετείχαν 400.000 μαθητές από λύκεια, τους οποίους παρακολουθούσαν για 11 χρόνια, οι Wai, Lubinski και Benbow (2009), αναφέρουν ότι η χωρική ικανότητα παίζει κρίσιμο ρόλο στην ανάπτυξη της εξειδικευμένης επίδοσης στους τομείς του STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics). Τα ευρήματα της έρευνας οδηγούν σε τουλάχιστον τρεις γενικεύσεις: Πρώτον, η χωρική ικανότητα είναι ένα πολύ διακριτό ψυχολογικό χαρακτηριστικό μεταξύ των εφήβων που στη συνέχεια προχωρούν και πετυχαίνουν ανεπτυγμένες εκπαιδευτικές επιδόσεις και επαγγελματικές προόδους στους τομείς του STEM. Δεύτερον, η χωρική ικανότητα παίζει κρίσιμο ρόλο στη διαμόρφωση εκπαιδευτικών και επαγγελματικών αποτελεσμάτων στο γενικό πληθυσμό, καθώς και στα ταλαντούχα νοητικά άτομα και τρίτον ότι οι σύγχρονες έρευνες αναζήτησης ταλέντων χάνουν πολλούς νοητικά ταλαντούχους μαθητές περιορίζοντας τα κριτήρια επιλογής σε μετρήσεις της μαθηματικής και λεκτικής ικανότητας. Τα κριτήρια επιλογής δείχνουν ότι πρέπει να συμπεριλάβουν και την χωρική αντίληψη.

Η χωρική ικανότητα σχετιζόμενη με τα μαθηματικά, ορίζεται, από τον Smith (1964), ως «η ικανότητα του ατόμου να λύνει προβλήματα, που έχουν κυρίως οπτικό-χωρικό περιεχόμενο, χρησιμοποιώντας τουλάχιστον κάποιο εικονικό ή γεωμετρικό στυλ νοητικών αναπαραστάσεων και / ή δραστηριότητες που σχετίζονται λειτουργικά με το οπτικό ή γεωμετρικό περιεχόμενο των έργων» (Olkun & Knaupp, 1999). O Bishop (1983), επισήμανε ότι η χωρική αντίληψη αποτελεί σημαντικό παράγοντα για την κατανόηση της γεωμετρίας, ενώ οι Kalogirou και Gagatsis (2012), έδειξαν ότι η χωρική ικανότητα σχετίζεται θετικά με την επιτυχία στη Γεωμετρία. Επίσης, έρευνα των Panaoura, Gagatsis και Lemonidis (2007), έδειξε ότι η επίδοση των μαθητών σε τεστ χωρικής αντίληψης ήταν ο πιο σημαντικός παράγοντας πρόβλεψης της επίδοσης των μαθητών στην γεωμετρία. Πιο συγκεκριμένα, φάνηκε από τα αποτελέσματα της έρευνάς τους ότι ο χειρισμός των εικόνων και η νοερή περιστροφή αποτελούν παράγοντες πρόβλεψης της επίδοσης των μαθητών δημοτικού και γυμνασίου στη γεωμετρία. Στην έρευνα τους, οι Xistouri και Pitta-Pantazi (2006) εξέτασαν τις σχέσεις μεταξύ χωρικών ικανοτήτων (νοητή περιστροφή και οπτικοποίηση) και γεωμετρικής σκέψης που σχετίζεται με τη συμμετρία. Τα αποτελέσματα της έρευνας τους υποδηλώνουν ότι η μαθηματική απόδοση των μαθητών σε αντανακλαστικά έργα συμμετρίας μπορεί να προβλεφθεί από τη γενική μαθηματική ικανότητα των μαθητών, τις ικανότητες οπτικοποίησης και τις σχέσεις εννοιών περιστροφής του χώρου, κατά φθίνουσα σειρά σπουδαιότητας. Τέλος, τα άτομα με υψηλού επιπέδου χωρική αντίληψη είναι καλύτερα στο να μετασχηματίζουν, να ερμηνεύουν και να ταξινομούν γεωμετρικά σχήματα, μοτίβα και διαγράμματα (English & Warren, 1995).

Η αντιληπτική σύλληψη, όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, σύμφωνα με τον Duval (1995, 1999), αναφέρεται στην ικανότητα ονομασίας και αναγνώρισης των σχημάτων και υποσχημάτων. Η ικανότητα αυτή είναι όμοια με αυτή που απαιτείται στον παράγοντα ευελιξία διεκπεραίωσης (Carrol, 1993), της χωρικής αντίληψης, όπου τα υποκείμενα καλούνται να εντοπίσουν ένα σχήμα ή μια φιγούρα, σε μια πιο σύνθετη εικόνα.

Επίσης, όπως αναφέρουν οι Fischbein και Nachlieli (1998), οι γεωμετρικές φιγούρες έχουν ταυτόχρονα σχηματικές και εννοιολογικές ιδιότητες (χωρικές αναπαραστάσεις). Δεν είναι απλές εικονικές αναπαραστάσεις, αλλά σημειωτικές. Η σημειωτική αναπαράσταση παρουσιάζει την οργάνωση των σχέσεων μεταξύ των στοιχείων που αναπαρίστανται. Στην περίπτωση των γεωμετρικών φιγούρων τα στοιχεία που αναπαρίστανται μπορεί να είναι δύο ή τριών διαστάσεων. Ωστόσο, στη μάθηση της γεωμετρίας δεν είναι αρκετή η αναγνώριση με την πρώτη ματιά. Εδώ εμφανίζεται και η διαφορά μεταξύ της οπτικής αντίληψης και της οπτικοποίησης. Αν και η οπτική αντίληψη είναι ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες για την αναγνώριση επίπεδων σχημάτων (αντιληπτική σύλληψη), προσφέρει άμεση πρόσβαση στο σχήμα αλλά όχι πλήρης κατανόηση του. Αντίθετα, η οπτικοποίηση βασίζεται στην παραγωγή της σημειωτικής αναπαράστασης της έννοιας και δίνει άμεσα μια ολοκληρωμένη εικόνα για την κατανόηση των σχέσεων (Duval, 1999).

Εκτός από την αντιληπτική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, η οπτικοποίηση σχετίζεται άμεσα και με τη λειτουργική σύλληψη. Η οπτική επεξεργασία αποτελεί βασική συνιστώσα της οπτικοποίησης (Gutiérrez, 1996). Η Yakimanskaya (1991), αναφέρει ότι η οπτική επεξεργασία περιλαμβάνει τις πιο κάτω διαδικασίες νοερών εικόνων:

(α) Αλλαγή στη θέση των αντικειμένων που αναπαρίστανται (π.χ περιστροφή αντικειμένων),

(β) Αλλαγή στη δομή των αντικειμένων που αναπαρίστανται. Η εικόνα μετασχηματίζεται έτσι ώστε να έχει μόνο μια μικρή ομοιότητα με την αρχική μορφή του αντικειμένου,

(γ) Συνδυασμός των πιο πάνω αλλαγών.

Σύμφωνα με τον Duval (1999), ομοίως η λειτουργική σύλληψη, είναι μια μορφή οπτικής επεξεργασίας των γεωμετρικών σχημάτων. Ο ίδιος ερευνητής αναφέρεται στην οπτικοποίηση των γεωμετρικών σχημάτων μέσα από τρία είδη τροποποιήσεων της λειτουργικής σύλληψης (μερολογική τροποποίηση, αλλαγής θέσης και οπτική τροποποίηση). Τα τρία είδη τροποποιήσεων της λειτουργικής σύλληψης επιτρέπουν την αλλαγή της αρχικής μορφής του σχήματος, διατηρώντας παράλληλα τις ιδιότητες του αρχικού σχήματος. Στη λειτουργική σύλληψη, η δοσμένη φιγούρα γίνεται σημείο εκκίνησης, προκειμένου να διερευνηθούν διαμορφώσεις της φιγούρας που μπορεί να προκύψουν μέσα από τις τροποποιήσεις. Ένα γεωμετρικό σχήμα μπορεί να διαμορφωθεί με πολλούς τρόπους, ένας από τους οποίους μπορεί να μας οδηγήσει στην λύση ενός προβλήματος. Για παράδειγμα, η σχεδίαση μιας βοηθητικής γραμμής, είναι ένδειξη λειτουργικής κατανόησης και μπορεί να μας βοηθήσει σε κάποιο πρόβλημα. Όμως, απαιτείται προηγουμένως η οπτικοποίηση του αποτελέσματος της διαμόρφωσης.

Οι Kalogirou, Elia και Gagatsis (2013) διερεύνησαν τον τρόπο με τον οποίο η οπτικοποίηση και η νοερή περιστροφή μπορεί να σχετίζονται με τη γεωμετρική κατανόηση του σχήματος (αντιληπτική και λειτουργική) όπως προτείνεται από τον Duval (1999) . Χρησιμοποιώντας δεδομένα από μεγάλα δείγματα μαθητών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αυτές οι μελέτες έδειξαν σημαντικές σχέσεις μεταξύ των χωρικών ικανοτήτων και των επιδόσεων σε συμμετρία, ικανότητα προσανατολισμού στο χώρο καθώς και στη γεωμετρική κατανόηση του σχήματος. Πιο συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα της πρώτης μελέτης έδειξαν ότι η ικανότητα προσανατολισμού στο χώρο σχετίζεται περισσότερο με την απόδοση στη συμμετρία από την περιστροφή του χώρου, καθιστώντας έτσι μια πρόβλεψη της απόδοσης των μαθητών σε ανακλαστική συμμετρία, ενώ τα δεδομένα από τη δεύτερη έρευνα έδειξαν ότι η χωρική ικανότητα συνδέεται με υψηλές επιδόσεις στην γεωμετρία και την επίλυση προβλημάτων. Εξετάζοντας τα δεδομένα από το δείγμα των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, οι συγγραφείς πρότειναν ότι καθώς οι μαθητές μεγαλώνουν και λαμβάνουν πιο προχωρημένη διδασκαλία στη γεωμετρία, τείνουν να χρησιμοποιούν τα σχήματα όχι μόνο ως χωρικές αναπαραστάσεις αλλά και ως σημειωτικές αναπαραστάσεις γεωμετρικών αντικειμένων.

Πρόσφατα, η έρευνα στη χωρική ικανότητα έχει γίνει ακόμη πιο δημοφιλής καθώς φαίνεται να συμβάλλει στην εκπαιδευτική απόδοση στις επιστήμες, την τεχνολογία, τη μηχανική και τα μαθηματικά μέσω συσχετιστικών στοιχείων (Buckley et al., 2018). Όντας μια πολυδιάστατη έννοια (Yilmaz, 2009), η χωρική ικανότητα έχει οριστεί με τόσους πολλούς διαφορετικούς τρόπους που δεν μπορεί κανείς να είναι ακριβής σχετικά με την ερμηνεία του όρου (Eliot & Smith, 1983). Ωστόσο, υπάρχει αυξανόμενη συναίνεση ότι είναι «η ικανότητα δημιουργίας, αποθήκευσης, ανάκτησης και μετατροπής οπτικών πληροφοριών» (McGrew, 2009). Οι παράγοντες που σχετίζονται με τη χωρική ικανότητα προσδιορίζονται ως νοητικές ικανότητες που σχετίζονται ειδικά με οπτικά ερεθίσματα. δεν έχουν καμία σχέση με τη σημασιολογική γνώση (Buckley et al., 2018). Όπως αναφέρουν οι Hagarty και Waller (2005), ο John Carroll ήταν ο ερευνητής που, το 1993, πραγματοποίησε την ευρύτερη και πληρέστερη μελέτη παραγόντων που σχετίζονται με τη χωρική ικανότητα.

Οι Kell κ.α. (2013), συμφωνούν ότι η χωρική ικανότητα παίζει μοναδικό ρόλο στην ενσωμάτωση και την εφαρμογή της προηγούμενης γνώσης, αλλά υπογραμμίζουν επίσης ότι διαδραματίζει κρίσιμο ρόλο στην ανάπτυξη νέας γνώσης. Όπως επισημαίνουν, χωρίς χωρική ικανότητα η γνωστική δομή που υποστηρίζει τη δημιουργική και καινοτόμο σκέψη είναι ελλιπής. Στα Μαθηματικά, οι Pitta-Pantazi κ.α. (2013), διερεύνησαν τη σχέση μεταξύ της δημιουργικής διαδικασίας στα μαθηματικά και των χωρικών, εικονικών και λεκτικών γνωστικών στυλ. Η μελέτη διερεύνησε το γνωστικό στυλ 96 υποψήφιων δασκάλων πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης μέσω μιας μετάφρασης του Ερωτηματολογίου χωρικής, εικονικής και Λεκτικής ικανότητας (Blazhenkova & Kozhevnikov, 2009) και τη μαθηματική τους δημιουργικότητα μέσω ενός αυτοδημιούργητου μαθηματικού τεστ δημιουργικότητας. Η μαθηματική δημιουργικότητα μετρήθηκε ως προς την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία. Τα αποτελέσματα της μελέτης πρότειναν ότι μόνο η χωρική ικανότητα προέβλεψε θετικά τη μαθηματική δημιουργικότητα, ενώ τόσο το εικονικό όσο και το λεκτικό γνωστικό στυλ σχετίζονταν αρνητικά με τη μαθηματική δημιουργικότητα και τη μαθηματική ευελιξία αντίστοιχα.

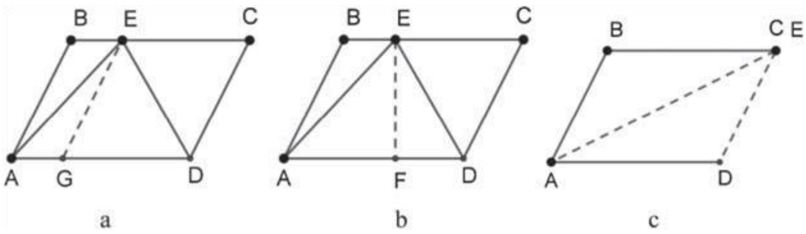
2.3.2.7 Ικανότητα Χρήσης Βοηθητικών Κατασκευών (Auxiliary Lines) κατά την Επίλυση Γεωμετρικών Προβλημάτων

Η εισαγωγή βοηθητικών κατασκευών είναι ένα κρίσιμο μέρος της επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων (Senk, 1985). Επιπλέον, ο ίδιος μέσα από μιας ευρείας κλίμακας έρευνα κατέληξε, ότι η δυσκολία που συναντούν συχνά οι μαθητές με τις βοηθητικές γραμμές «εξηγεί την ανάγκη να διδάσκονται πώς, γιατί και πότε μπορούν να μετατρέψουν ένα διάγραμμα σε απόδειξη» (σελ. 455). Στο ίδιο πνεύμα, οι Ding και Jones (2006) σημείωσαν επίσης ότι η εισαγωγή βοηθητικών κατασκευών σε μια απόδειξη ήταν συχνά πηγή μεγάλης δυσκολίας για τους μαθητές. Αυτό συμφωνεί με τα ευρήματα των Hsu και Silver (2014), οι οποίοι επεσήμαναν ότι η εισαγωγή βοηθητικών γραμμών είναι μία από τις τέσσερις κατηγορίες πολυπλοκότητας επίλυσης προβλημάτων. Η δυσκολία, όπως ισχυρίστηκε ο Hsu (2007), είναι η ανάγκη των μαθητών να αντιληφθούν τα διαγράμματα δυναμικά και να είναι σε θέση να εφαρμόσουν μετασχηματιστικές παρατηρήσεις έτσι ώστε να οπτικοποιήσουν μια λύση που μπορεί τελικά να δημιουργηθεί με τη βοήθεια βοηθητικών κατασκευών.

Οι Herbst (2004), Herbst και Brach (2006), μελέτησαν τις πεποιθήσεις των Αμερικανών μαθητών σχετικά με το ρόλο των βοηθητικών κατασκευών όταν αλληλεπιδρούν με γεωμετρικά προβλήματα. Οι περισσότεροι μαθητές ανέφεραν παθητικότητα σε αυτές τις αλληλεπιδράσεις, ειδικά με τα γεωμετρικά σχήματα. Συγκεκριμένα, πιστεύουν ότι δεν αναμένεται να εισάγουν βοηθητικές κατασκευές σε ένα σχήμα, αλλά ότι στις σπάνιες περιπτώσεις που πρέπει, περιμένουν να λάβουν υπόδειξη από τον καθηγητή. Αυτή η παθητικότητα δεν είναι ένα αβλαβές χαρακτηριστικό της μάθησης, ειδικά υπό το φως των ευρημάτων των Hsieh et al., (2012), οι οποίοι απέδειξαν πώς η ενεργητική εξερεύνηση και η επίλυση προβλημάτων διευκολύνουν την εκμάθηση γεωμετρικών αποδείξεων στην Ταϊβάν. Οι διερευνητικές δραστηριότητες μπορεί να αποκαλύψουν νέες πληροφορίες για το πρόβλημα στους μαθητές, βοηθώντας τους έτσι να ξεκινήσουν μια απόδειξη όταν χρειάζονται βοηθητικές κατασκευές, να κάνουν την εισαγωγή βοηθητικών γραμμών πιο κατανοητή και να παρέχουν στους μαθητές λόγους ώστε να εισάγουν νέα στοιχεία στο πρόβλημα.

Σύμφωνα με τον σημαντικό Ρώσο εκπαιδευτικό και συγγραφέα εγχειριδίων γεωμετρίας Igor F. Sharygin (2004), η σχολική γεωμετρία είναι πρωτίστως η τέχνη της επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων. Σε αντίθεση με τη σχολική άλγεβρα, ωστόσο, η επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων παρεμποδίζεται από την απουσία αλγορίθμων καθολικής λύσης (Sharygin, 2006). Έτσι, μία από τις μεθόδους που ανέπτυξε για τη διδασκαλία της σχολικής γεωμετρίας ήταν να κατασκευάσει ένα διευρυνόμενο σύνολο υποστηρικτικών προβλημάτων για τους μαθητές του. Σε ένα υποστηρικτικό πρόβλημα, διατυπώνεται ένα συγκεκριμένο γεωμετρικό γεγονός ή επιδεικνύεται κάποια μέθοδος ή τεχνική επίλυσης προβλημάτων γεωμετρίας. Πολλά υποστηρικτικά προβλήματα του τελευταίου τύπου βασίζονται σε βοηθητικά στοιχεία, τα οποία παρουσιάζονται ως τυπικά σε σχέση με συγκεκριμένα γεωμετρικά σχήματα. Οι Palatnik και Sigler (2018), επισημαίνουν ότι η είναι χρήσιμη μια προσέγγιση κατά την οποία οι μαθητές συνειδητοποιούν τις συνδέσεις μεταξύ ορισμένων γεωμετρικών διαμορφώσεων και βοηθητικών κατασκευών, ωστόσο, επισημαίνει ότι είναι δυνατό να αναπτυχθεί ένας πιο γενικευμένος και δομημένος τρόπος διδασκαλίας για το πώς (και γιατί) εισάγονται βοηθητικά στοιχεία. Πρόσφατα, έγιναν κάποια βήματα προς αυτή την κατεύθυνση και πραγματοποιήθηκαν μελέτες βασισμένες στην τάξη για την παροχή γενικευμένων λύσεων για την εισαγωγή του θέματος των βοηθητικών κατασκευών στους μαθητές (Fan et al., 2017).

Σύμφωνα με τον Polya (1945), «ένα στοιχείο που εισάγουμε με την ελπίδα ότι θα μας οδηγήσει στη λύση ονομάζεται βοηθητικό στοιχείο» (σελ. 46). Η εισαγωγή ενός ή περισσότερων βοηθητικών στοιχείων δεν θα πρέπει να είναι αυθαίρετη διαδικασία. Ο Polya παραθέτει μια σειρά από τυπικούς λόγους για την εισαγωγή τους, τους οποίους επεξηγούμε μέσω του απλού παραδείγματος που φαίνεται στο Σχήμα 5.



Σχήμα 5: Τρεις διαφορετικοί λόγοι – τρεις διαφορετικές βοηθητικές γραμμές. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου AED είναι το μισό του εμβαδού του παραλληλογράμμου ABCD.

(α) Χρήση (ανάκληση) γνωστών αποτελεσμάτων. Σε αυτή την περίπτωση, ένα πρόβλημα που σχετίζεται με το τρέχον ανακαλείται και το βοηθητικό στοιχείο τροποποιεί ανάλογα το δεδομένο πρόβλημα. Για παράδειγμα (σχήμα 5(α)), ένας μαθητής μπορεί να θυμηθεί ένα γνωστό αποτέλεσμα: η διαγώνιος ενός παραλληλογράμμου το χωρίζει σε δύο τρίγωνα ίσου εμβαδού. Εισάγοντας τη βοηθητική γραμμή EG παράλληλη στην AB, το δεδομένο παραλληλόγραμμο, ABCD, τροποποιείται σε δύο παραλληλόγραμμα με αντίστοιχες διαγώνιες.

(β) Χρησιμοποιώντας ορισμούς. Εδώ, ένας ορισμός μιας μαθηματικής οντότητας που σχετίζεται με ένα τρέχον πρόβλημα συγκεκριμενοποιείται μέσω του βοηθητικού στοιχείου. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5(β), ένας μαθητής μπορεί να ανακαλέσει τύπους που είχε μάθει προηγουμένως για τις περιοχές ενός παραλληλογράμμου και ενός τριγώνου με βάση b και ύψος h. Η βοηθητική ευθεία, σε αυτή την περίπτωση, είναι η EF – το κοινό ύψος του παραλληλογράμμου και του τριγώνου, καθιστώντας την απόδειξη άμεση.

(γ) Προσδοκώντας να γίνει το αρχικό πρόβλημα «πιο πλήρες, πιο οικείο» (σελ. 46). Ένας μαθητής μπορεί να μετακινήσει το σημείο E σε μία από τις κορυφές (σχήμα 5(γ)), δημιουργώντας ένα νέο βοηθητικό τρίγωνο με εμβαδόν οπτικά το μισό από αυτό ενός παραλληλογράμμου.

Η λίστα του Polya ήταν ένα σημείο εκκίνησης στην πρόσφατη μελέτη των Palatnik και Dreyfus (2018), η οποία διερεύνησε τα βοηθητικά στοιχεία των μαθητών. Δύο από τους λόγους που έδωσαν οι μαθητές για την εισαγωγή συγκεκριμένων βοηθητικών γραμμών συμφώνησαν με τις δύο πρώτες κατηγορίες του Polya (δηλαδή, οι προηγούμενες εμπειρίες και η χρήση ορισμών). Ο τρίτος λόγος αφορούσε κυρίως τους διαισθητικούς κανόνες (Tirosh & Stavy,

1999) και τα συναισθήματα των μαθητών ότι όλοι οι πόροι του προβλήματος είχαν εξαντληθεί και ότι έπρεπε να ανακαλύψουν κάποια νέα πηγή πληροφοριών. Στη μελέτη τους οι Palatnik και Dreyfus (2018), εστίασαν κυρίως στον τρίτο λόγο. Οι απόψεις του Polya σχετικά με το ρόλο που έχει η εισαγωγή βοηθητικών στοιχείων είναι σύμφωνες με την προσέγγιση των Mason et al. (2010) για την επίλυση προβλημάτων και την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Δηλαδή, αφού μάθουν οι μαθητές τι γνωρίζουν και τι θέλουν να πετύχουν στο πρόβλημα που αντιμετωπίζουν, είναι απαραίτητο να εισαγάγουν νέα στοιχεία σε αυτό. Σύμφωνα με τους Mason et al. (2010), η εισαγωγή περιέχει πτυχές σημειογραφίας, οργάνωσης και αναπαράστασης. Ισχυρίζονται επίσης ότι μια συστηματική προσέγγιση για την εισαγωγή νέων στοιχείων καλλιεργεί «μια νοητική στάση ελευθερίας» (σελ. 33).

2.3.2.8 Γεωμετρικός Χώρος Εργασίας (Geometrical Working Space, GWS)

Ο γεωμετρικό χώρος εργασίας, περιγράφει τη συγκεκριμένη δραστηριότητα των μαθητών όταν λύνουν προβλήματα στη γεωμετρία και οργανώνεται σε δύο επίπεδα. Το πρώτο, «επιστημολογικό» επίπεδο ορίζει a priori προσδοκίες για τη δραστηριότητα σύμφωνα με τις απαιτήσεις του μαθηματικού τομέα, στον τομέα της γεωμετρίας. Όσον αφορά τη γεωμετρία, τρία αλληλοεπιδρώντα στοιχεία είναι χαρακτηριστικά της γεωμετρικής δραστηριότητας στην καθαρά μαθηματική της διάσταση:

• Ένας πραγματικός και τοπικός χώρος ως υλικό υποστήριξης, με ένα σύνολο από συγκεκριμένα και απτά αντικείμενα όπως φιγούρες ή σχέδια,

• Ένα σύνολο αντικειμένων, όπως όργανα σχεδίασης ή λογισμικά,

• Ένα θεωρητικό σύστημα αναφοράς βασισμένο σε ορισμούς και ιδιότητες.

Η γεωμετρία που διδάσκεται και μαθαίνεται στο σχολείο δεν είναι ένα ασώματο σύνολο ιδιοτήτων και αντικειμένων που έχουν περιοριστεί σε σημαίνοντα που μπορούν να χειριστούν από τυπικά συστήματα, αλλά κυρίως μια ανθρώπινη δραστηριότητα. Αυτό συνεπάγεται ένα δεύτερο, «γνωστικό» επίπεδο που επικεντρώνεται στην επίλυση προβλημάτων. Η ιδέα των τριών γνωστικών διαδικασιών που εμπλέκονται στη γεωμετρική δραστηριότητα προσαρμόστηκε από τον Duval (2005) ως εξής:

• Μια διαδικασία οπτικοποίησης που συνδέεται με την αναπαράσταση του χώρου και της υλικής υποστήριξης,

• Μια διαδικασία κατασκευής που καθορίζεται από όργανα (χάρακα, διαβήτη, κ.λπ.) και γεωμετρικές διαμορφώσεις,

• Μια διαδικασία λόγου που μεταφέρει επιχειρηματολογία και αποδείξεις.

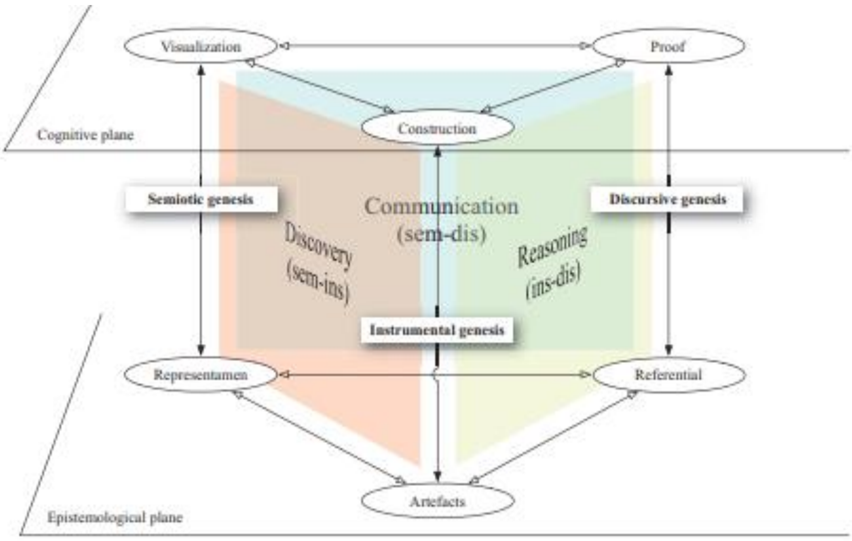
Και τα δύο επίπεδα, γνωστικά και επιστημολογικά, πρέπει να αλληλοσυνδεθούν για να εξασφαλιστεί ένα συνεκτικό και ολοκληρωμένο γεωμετρικό έργο. Αυτή η διαδικασία προϋποθέτει την παρουσία ορισμένων μετασχηματισμών που είναι δυνατό να καθοριστούν μέσω τριών θεμελιωδών αρχών:

• Μια εικονική και σημειωτική αρχή (figural and semiotic genesis), που δίνει στα υλικά αντικείμενα την κατάσταση λειτουργίας μαθηματικών αντικειμένων,

• Μια οργανική αρχή (instrumental genesis), που μετατρέπει τα αντικείμενα σε εργαλεία κατά τη διαδικασία κατασκευής, η οποία είναι ζωτικής σημασίας στην περίπτωση της γεωμετρίας,

• Μια λεκτική αρχή (discursive genesis), που δίνει νόημα στις ιδιότητες που χρησιμοποιούνται στον μαθηματικό συλλογισμό.

Η σύνθεση ενός γεωμετρικού χώρου εργασίας (σχήμα 6) θα ποικίλλει ανάλογα με το εκπαιδευτικό σύστημα (το προβλεπόμενο ή διαφοροποιημένο γεωμετρικό χώρο εργασίας), τις σχολικές συνθήκες (το εφαρμοσμένο ή κατάλληλο γεωμετρικό χώρο εργασίας) και τους συμμετέχοντες (προσωπικούς γεωμετρικούς χώρους εργασίας μαθητών και καθηγητών) (Gomen-Chacom & Kuzniak, 2015 ; Kuzniak, 2018; Kuzniak & Richard, 2014; Kuzniak, Tanguay, & Elia, 2016).



Σχήμα 6: Τα κατακόρυφα επίπεδα του μοντέλου GWS (Kuzniak & Richard, 2014).

3 Οι Έρευνες

3.1 Η Πρώτη Έρευνα: Μαθηματική Δημιουργικότητα & Κατανόηση Γεωμετρικού Σχήματος

Με βάση την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας η μαθηματική δημιουργικότητα και η κατανόηση γεωμετρικού σχήματος αποτελούν παράγοντες που έχουν μελετηθεί αρκετά τόσο στο χώρο της μαθηματικής παιδείας όσο και στο χώρο της ψυχολογίας, ως ξεχωριστά θέματα. Δεν έχουν γίνει εργασίες οι οποίες να συνδέουν τους δύο αυτούς παράγοντες, δηλαδή να εξετάζουν την επίδοση και τις ικανότητες ατόμων με διαφορετική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος σε δημιουργικά προβλήματα πολλαπλών λύσεων ή στην κατασκευή προβλημάτων. Βασική παραδοχή της εργασίας αυτής είναι ότι η σύλληψη γεωμετρικού σχήματος, επηρεάζει σημαντικά τη μάθηση και τη δομή της γνώσης κατά τη μάθηση της Γεωμετρίας, και κατ΄επέκταση και τη δημιουργική γνώση. Όμως, με πιο τρόπο η σύλληψη Γεωμετρικού σχήματος επηρεάζει τη μαθηματική δημιουργικότητα στη Γεωμετρία; Σε αυτή την ερώτηση είναι που επιχειρείται να δοθεί απάντηση μέσω αυτής της διατριβής. Συγκεκριμένα, ο σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να διερευνήσει κατά πόσο η μαθηματική δημιουργικότητα (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία) μαθητών Λυκείου σχετίζεται με τον τρόπο με τον οποίο κατανοούν τα σχήματα. Αναλυτικά τα ερωτήματα που εξετάζονται είναι:

(α) Υπάρχει σχέση ανάμεσα στον τύπο σύλληψης γεωμετρικού σχήματος που ενεργοποιούν οι μαθητές και στην παραγωγή πολλαπλών λύσεων σε γεωμετρικές ασκήσεις;

(β) Πώς επηρεάζει η αναγκαιότητα κατασκευής βοηθητικών γραμμών σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα την παραγωγή πολλαπλών λύσεων;

(γ) Υπάρχει σχέση ανάμεσα στον τύπο σύλληψης γεωμετρικού σχήματος που ενεργοποιούν οι μαθητές και στην κατασκευή γεωμετρικών προβλημάτων και επίλυση αυτών;

(δ) Πώς επηρεάζει η αναγκαιότητα κατασκευής βοηθητικών γραμμών σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα την κατασκευή προβλημάτων και επίλυση αυτών;

(ε) Πώς συνδέονται οι μεταβλητές της δημιουργικότητας ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία σε μια τέτοια προσέγγιση;

3.1.1 Δείγμα Έρευνας & Συλλογή Δεδομένων

Δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 243 μαθητές Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου, από 11 τάξεις 5 σχολείων της Ελλάδας. Τα πέντε σχολεία ήταν από παρόμοιο κοινωνικό-οικονομικό επίπεδο και εφαρμόζουν πανομοιότυπα προγράμματα μαθηματικών. Οι μαθητές αυτοί κλήθηκαν να συμπληρώσουν δυο δοκίμια μαθηματικής δημιουργικότητας και ένα δοκίμιο κατανόησης γεωμετρικού σχήματος. Η συμπλήρωση των τριών δοκιμίων έγινε σε δύο μέρες από τους συμμετέχοντες. Το δοκίμιο της μαθηματικής δημιουργικότητας χρησιμοποιήθηκε, για να μετρήσει τη δημιουργικότητα των μαθητών (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία) περιελάμβανε δύο φάσεις: α) δύο γεωμετρικά προβλήματα τα οποία οι μαθητές κλήθηκαν ρητά να τα λύσουν με όσο περισσότερους τρόπους μπορούν και β) ένα γεωμετρικό πρόβλημα με σκοπό να κατασκευάσουν όσο πιο πολλά γεωμετρικά προβλήματα μπορούν και να τα λύσουν. Το δοκίμιο κατανόησης Γεωμετρικού σχήματος χρησιμοποιήθηκε για να μετρήσει την αντιληπτική σύλληψη, τη λειτουργική σύλληψη μέσω της ικανότητας αναδιαμόρφωσης σχήματος και την λειτουργική σύλληψη μέσω της ικανότητας κατασκευής βοηθητικών κατασκευών. Οι ικανότητες ακολουθιακή σύλληψη και λεκτική σύλληψη γεωμετρικού σχήματος εξετάστηκαν μέσω του δοκιμίου της δημιουργικότητας.

3.1.2 Δοκίμιο Μαθηματικής Δημιουργικότητας

Α΄ Φάση

Το πρώτο μέρος του δοκιμίου μαθηματικής δημιουργικότητας περιλαμβάνει δύο γεωμετρικά προβλήματα τα οποία οι μαθητές κλήθηκαν ρητά να τα επιλύσουν με όσο περισσότερους τρόπους μπορούν και είχε διάρκεια 60 λεπτά. Τα δύο προβλήματα είναι παρόμοια με τη διαφορά ότι το ένα πρόβλημα (πρόβλημα 2) επιλύεται μόνο με τη χρήση επιπλέον βοηθητικών γραμμών ενώ το άλλο πρόβλημα επιλύεται είτε με το δοθέν σχήμα είτε με χρήση βοηθητικών κατασκευών. Και τα δύο προβλήματα δόθηκαν χωρίς σχήμα κυρίως για τρεις λόγος. Ο πρώτος λόγος είναι ότι από την στιγμή που μιλάμε για δημιουργικότητα η δημιουργία πρέπει να ξεκινά από το μηδέν. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι σε προηγούμενη έρευνα παρουσιάστηκαν διαφορές στις μεταβλητές τις δημιουργικότητας με βάση αν δινόταν ή όχι το σχήμα στην εκφώνησή (Gridos, Gagatsis, Elia & Deliyianni, 2019), με τους μαθητές να εμφανίζουν υψηλότερα επίπεδα ευχέρειας και ευελιξίας στις ασκήσεις που δόθηκαν με σχήμα, με την πρωτοτυπία να μην εμφανίζει σημαντικές αποκλίσεις. Τέλος, επειδή η προσέγγισή μας είναι αντιληπτική, όταν δεν δίνεται το σχήμα έχουμε δυο επίπεδα παρέμβασης χωρικών ικανοτήτων: (α) το πρώτο αφορά στη μετάβαση από τη λεκτική εκφώνηση στο σχεδιασμό του σχήματος (ακολουθιακή κατανόηση), και (β) το δεύτερο αφορά στην επίλυση του προβλήματος, ενώ όταν δίνεται το σχήμα στην άσκηση έχουμε μόνο το δεύτερο επίπεδο. Τα δύο γεωμετρικά προβλήματα φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

Πρόβλημα 1: Έστω κύκλος κέντρου Ο και ΑΒ διάμετρος. Έστω Δ και Ε σημεία του κύκλου και ΔΟ//ΕΒ, και Γ το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΕ. Να δείξετε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι ΓΒ=ΑΒ.

Πρόβλημα 2: Έστω κύκλος κέντρου Ο και ΑΒ διάμετρος. Έστω Γ και Δ σημεία του κύκλου τέτοια ώστε ΑΓ//ΟΔ, και Ε το σημείο τομής των ΑΓ και ΔΒ. Να αποδείξετε με όσο περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι ΔΒ=ΔΓ.

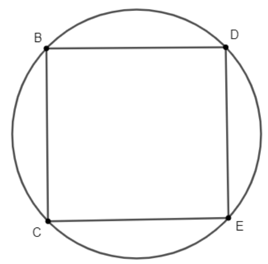
Σχήμα 7. Τα δύο γεωμετρικά προβλήματα του δοκιμίου μαθηματικής δημιουργικότητας της Α΄ φάσης.

Στη φάση αυτή, οι απαντήσεις των μαθητών αξιολογήθηκαν αρχικά ως προς την ορθότητα τους και στη συνέχεια ταξινομήθηκαν σε χώρους λύσεων (βλ. Leikin, 2009) με βάση τη βοηθητική κατασκευή που χρησιμοποιούν. Η ευχέρεια αξιολογήθηκε με βάση τον αριθμό των ορθών λύσεων σε κάθε πρόβλημα, η ευελιξία με βάση την εναλλαγή στους χώρους λύσεων και την ποιότητα των λύσεων, ενώ η πρωτοτυπία αξιολογήθηκε σχετικά με βάση τη συχνότητα της λύσης στο πλαίσιο του συνόλου των μαθητών χρησιμοποιώντας το μοντέλο υπολογισμού της Leikin (2009).

Ο συντελεστής αξιοπιστίας Gronbach's Alpha για τις απαντήσεις των μαθητών στο δοκίμιο μαθηματικής δημιουργικότητας βρέθηκε υψηλός (a=0.811). Αυτό δηλώνει ότι υπάρχει εσωτερική συνάφεια και αξιοπιστία στις απαντήσεις των μαθητών στα δύο προβλήματα πολλαπλών λύσεων.

Το δεύτερο μέρος του δοκιμίου μαθηματικής δημιουργικότητας περιέχει ένα γεωμετρικό πρόβλημα που δίνεται με ένα συγκεκριμένο σχήμα και οι μαθητές καλούνται να διατυπώσουν και να λύσουν όσα περισσότερα γεωμετρικά προβλήματα μπορούν. Οι απαντήσεις των μαθητών αξιολογήθηκαν σε δύο άξονες: (α) αν το πρόβλημα που έθεταν κάθε φορά είχε σωστή δομή και ήταν λογικό και (β) η λύση που έδωσαν για το πρόβλημα ήταν σωστή. Μετά από αυτό, τα προβλήματα που έθεσαν οι μαθητές ταξινομήθηκαν σε χώρους λύσης (Leikin, 2009) με βάση τη στρατηγική που το πρόβλημα χρειάζεται για να λυθεί. Στη συνέχεια, υπολογίστηκαν οι πτυχές της δημιουργικότητας (ευχέρεια - ευελιξία - πρωτοτυπία) με βάση: (α) ευχέρεια: αριθμός σωστών προβλημάτων που κατασκευάστηκαν, (β) ευελιξία: το πρώτο πρόβλημα θα βαθμολογηθεί με 10, το δεύτερο με 10 εάν λύνεται με διαφορετικά μαθηματικά εργαλεία και θεωρήματα, ενώ βαθμολογείται με 1 εάν λύνεται με τα ίδια μαθηματικά εργαλεία και (γ) πρωτοτυπία: αξιολογήθηκε με βάση τη συχνότητα που εμφανίστηκε το πρόβλημα, όπως προσδιορίστηκε από τον αριθμό των συμμετεχόντων που έθεσαν παρόμοιο πρόβλημα (10 → αν $p < 15\%$, 1 → εάν $p > 15\%$) . Στο παρακάτω σχήμα 8, φαίνεται το γεωμετρικό σχήμα για το οποίο κλήθηκαν οι μαθητές να κατασκευάσουν γεωμετρικά προβλήματα.

Το παρακάτω σχήμα περιέχει: το τετράγωνο BCDE και τον κύκλο που εγγράφεται σε αυτό το τετράγωνο. Να κατασκευάσετε όσο το δυνατόν περισσότερα γεωμετρικά προβλήματα που σχετίζονται με αυτό το σχήμα και να δώσετε μια λύση για κάθε πρόβλημα που κατασκευάσατε.



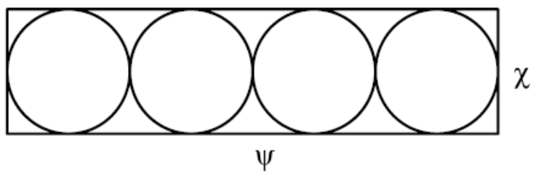
Σχήμα 8: Το γεωμετρικό σχήμα για κατασκευή γεωμετρικών προβλημάτων.

Β΄ Φάση

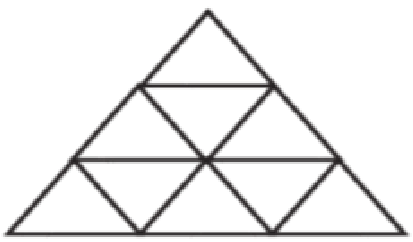
3.1.3 Δοκίμιο Κατανόησης Γεωμετρικού Σχήματος

Το δοκίμιο σύλληψης γεωμετρικού σχήματος, χρησιμοποιήθηκε για να αξιολογηθούν οι ατομικές διαφορές στον τρόπο που οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα σχήματα. Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλύσουν γραπτά το δοκίμιο που είχε διάρκεια 30 λεπτά και εξετάζει τρεις διαφορετικές ικανότητες. Η πρώτη ικανότητα είναι η αντιληπτική και περιλαμβάνει δύο αντιληπτικά έργα, η δεύτερη ικανότητα αφορά τη λειτουργική σύλληψη μέσω μερολογικών τροποποιήσεων και περιλαμβάνει δύο έργα λειτουργικής κατανόησης που επιλύονται είτε αλγοριθμικά είτε με αναδιαμόρφωση του σχήματος. Τέλος, η τρίτη ικανότητα αφορά την ικανότητα κατασκευής βοηθητικών κατασκευών και περιλαμβάνει δύο έργα λειτουργικής κατανόησης που η επίλυση τους απαιτεί την κατασκευή επιπλέον βοηθητικών κατασκευών, με το πρώτο έργο να επιλύεται και αλγοριθμικά χωρίς τη χρήση βοηθητικής κατασκευής. Στο σχήμα 8 παρουσιάζεται το δοκίμιο κατανόησης γεωμετρικού σχήματος.

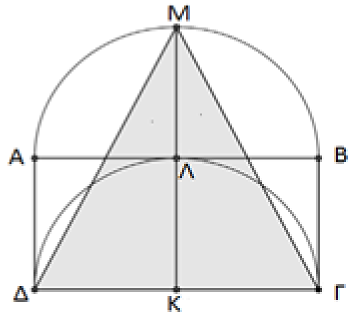
Αντιληπτικό έργο (Per1): Στο πιο κάτω σχήμα οι τέσσερις κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους και ταυτόχρονα εφάπτονται στις πλευρές του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Να βρείτε μια σχέση που συνδέει τα χ και ψ. Να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.



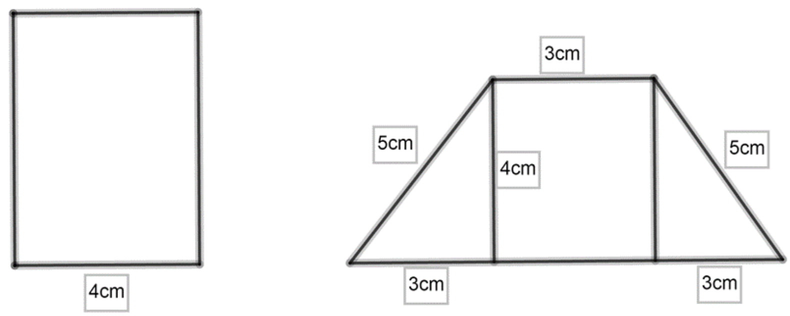
Αντιληπτικό έργο 2 (Per2): Να μελετήσετε προσεκτικά το παρακάτω σχήμα. Πόσα τρίγωνα βλέπετε στο σχήμα;



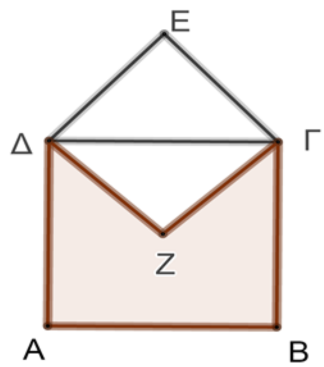
Λειτουργικό έργο με αναδιαμόρφωση σχήματος (Op1): Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρά ΒΓ=5cm και τα τόξα ΑΜΒ και ΔΛΓ είναι ημικύκλια με διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Τα σημεία Μ και Λ είναι τα μέσα των ημικυκλίων ΑΜΒ και ΔΛΓ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΜΓ.



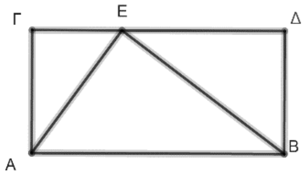
Λειτουργικό έργο με αναδιαμόρφωση σχήματος (Op2): Το τραπέζιο και το ορθογώνιο παρακάτω έχουν το ίδιο εμβαδόν. Να βρείτε το μήκος της άλλης πλευράς του ορθογωνίου.



Λειτουργικό έργο με χρήση επιπλέον κατασκευών (Aux1): Τα ΑΒΓΔ και ΔΕΓΖ είναι τετράγωνα. Εάν ΔΕ = 3cm, να βρείτε το εμβαδόν του σχήματος ΑΒΓΖΔΑ. Εξηγείστε πως σκεφτήκατε.



Λειτουργικό έργο με χρήση επιπλέον κατασκευών (Aux2): Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΒ του παρακάτω σχήματος είναι ισοδύναμο με το μισό του ορθογωνίου ΑΒΔΓ.

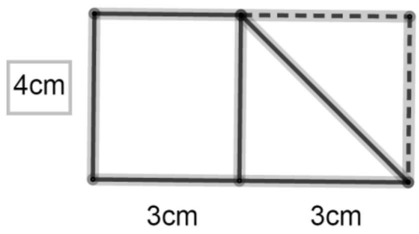


Σχήμα 9: Το δοκίμιο Κατανόησης Γεωμετρικού Σχήματος.

Σε αυτή τη φάση, οι απαντήσεις των μαθητών αξιολογήθηκαν ως προς την ορθότητά τους και έπειτα ως προς την στρατηγική επίλυσης που χρησιμοποιούν. Για την πρώτη ομάδα έργων τα δύο αντιληπτικά έργα (Per1, Per2) αξιολογήθηκαν μόνο ως προς την ορθότητά τους, για τη δεύτερη ομάδα έργων διακρίνουμε δύο κατηγορίες λύσεων, αλγοριθμικά (Op1al, Op2al) ή με αναδιαμόρφωση του σχήματος (Op1, Op2), ενώ για την τρίτη ομάδα έργων, αλγοριθμικά (Aux1al) ή με την χρήση επιπλέον βοηθητικών γραμμών (Aux1, Aux2).

Για να γίνει φανερός ο διαχωρισμός στο τι εννοούμε λύση με αναδιαμόρφωση σχήματος και τι αλγοριθμική λύση (σχήμα 9), αλγοριθμική λύση θεωρούμε την επίλυση του προβλήματος βασιζόμενοι στις μαθηματικές ιδιότητες που χρειάζεται, ενώ λειτουργική λύση με αναδιαμόρφωση σχήματος προκύπτει αν ο μαθητής παρατηρήσει ότι αρκεί να βάλει τα δύο μικρά τρίγωνα μέσα στο ορθογώνιο.

Λύση 1 Αλγοριθμική Επίλυση (Op2al) Η μεγάλη βάση του τραπεζίου είναι: Β = 3cm + 3cm + 3cm = 9cm. Εμβαδόν τραπεζίου = $\frac{1}{2}$ • (Β + β) • υ = = $\frac{1}{2}$ • 12 • 4 = 24cm^2. Εμβαδόν τραπεζίου = Εμβαδόν ορθογωνίου ⇒ 24 = 4 • α	**Λύση 2** Αναδιαμόρφωση του σχήματος (Op2) Το τραπέζιο μπορεί να μετασχηματιστεί ως εξής:

$\Rightarrow \alpha = 24:4$ $\Rightarrow \alpha = 6cm$ Άρα η άλλη πλευρά του ορθογωνίου είναι 6cm.	 Κατευθείαν συμπεραίνουμε ότι η άλλη πλευρά του ορθογωνίου είναι 6cm.

Σχήμα 10: Δύο τύποι λύσεων για το έργο λειτουργικής κατανόησης 2 (op2).

Ο συντελεστής αξιοπιστίας Gronbach's Alpha για τις απαντήσεις τον μαθητών και στις τρεις επιμέρους ικανότητες βρέθηκε υψηλός (a=0.8124, a=0.794, a=0.767). Αυτό δηλώνει ότι υπάρχει εσωτερική συνάφεια και αξιοπιστία στις απαντήσεις των μαθητών στο δοκίμιο κατανόησης Γεωμετρικού σχήματος.

3.1.4 Ανάλυση Δεδομένων

Η περιγραφική ανάλυση χρησιμοποιήθηκε για την παρουσίαση των ποσοστών επιτυχίας για τα έργα κατανόησης γεωμετρικών σχημάτων και της διάστασης «ευχέρειας» της μαθηματικής δημιουργικότητας των συμμετεχόντων. Στη συνέχεια, προκειμένου να εξεταστεί πώς η αναγκαιότητα εισαγωγής νέων βοηθητικών γραμμών σε γεωμετρικό σχήμα προάγει την ικανότητα παραγωγής πολλαπλών λύσεων, χρησιμοποιήθηκε δοκιμή t-test σε επίπεδο σημαντικότητας 95% χρησιμοποιώντας λογισμικό υπολογιστή Spss. Προκειμένου να κατανοηθεί η επίδραση της αντίληψης γεωμετρικών σχημάτων στην παραγωγή πολλαπλών λύσεων και αυτή η επιρροή στις μεταβλητές της μαθηματικής δημιουργικότητας, χρησιμοποιήθηκε ανάλυση πολλαπλής παλινδρόμησης χρησιμοποιώντας λογισμικό υπολογιστή Spss. Για την περαιτέρω κατανόηση των σχέσεων μεταξύ της αντίληψης γεωμετρικών σχημάτων και των μεταβλητών της μαθηματικής δημιουργικότητας, χρησιμοποιήθηκε στατιστική ανάλυση ομοιότητας χρησιμοποιώντας λογισμικό υπολογιστή C.H.I.C. (Classification, Hiérarchique, Implicative et Cohésitive). Η στατιστική ανάλυση ομοιότητας είναι μια μέθοδος ανάλυσης που καθορίζει τις συνδέσεις ομοιότητας των μεταβλητών (Gras, Suzuki, Guillet & Spagnolo, 2008). Στα διαγράμματα ομοιότητας, συμβολίζουμε με Pi, i=1,2το πρόβλημα που αναφέρεται και Sj, j=0,1,2,3,4 τον αριθμό λύσεων για κάθε πρόβλημα.

3.2 Η Δεύτερη Έρευνα: Μαθηματική Δημιουργικότητα και Χωρική Ικανότητα

Το επίκεντρο αυτής της μελέτης είναι να διερευνήσει τη σχέση μεταξύ της δημιουργικότητας στη Γεωμετρία και της χωρικής ικανότητας καθώς δεν υπάρχουν σχετικές μελέτες στη διεθνή βιβλιογραφία. Για τους σκοπούς της έρευνας θα εξετάσουμε τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

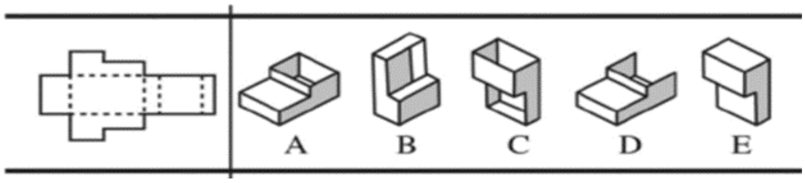
(α) Πώς ανταποκρίνονται οι μαθητές σε έργα χωρικής ικανότητας και σε ένα πρόβλημα γεωμετρίας με πολλαπλές λύσεις;

(β) Ποια είναι η σχέση μεταξύ της χωρικής ικανότητας και των συνιστωσών της δημιουργικότητας (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία) στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων πολλαπλών λύσεων;

3.2.1 Δείγμα της Έρευνας & Συλλογή Δεδομένων

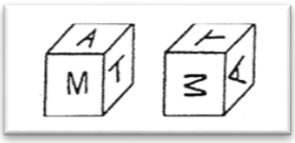
Για να εξεταστεί η σχέση μεταξύ χωρικής ικανότητας και μαθηματικής δημιουργικότητας στη γεωμετρία, ένα τεστ δύο μερών χορηγήθηκε σε 94 μαθητές Γ΄ Γυμνασίου (50 αγόρια και 44 κορίτσια) σε συνήθεις συνθήκες τάξης. Το πρώτο μέρος που αξιολόγησε τη χωρική ικανότητα των μαθητών διήρκεσε 12 λεπτά. Περιλάμβανε εννέα έργα που αναπτύχθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν σε προηγούμενες μελέτες (π.χ. Eliot & Smith, 1983; Ekstrom κ.α. 1976; Wai, κ.α. 2009). Αυτό το μέρος του τεστ δομήθηκε σύμφωνα με το μοντέλο του Carroll (1993) και αντικατοπτρίζει τρεις χωρικές ικανότητες που σχετίζονται περισσότερο με τα μαθηματικά επιτεύγματα: χωρική οπτικοποίηση, σχέσεις εννοιών στο χώρο και ευελιξία διεκπεραίωσης. Για να εξεταστεί η χωρική οπτικοποίηση χρησιμοποιούνται τρία έργα: «σύνθεση σχήματος» (Fb), «δίπλωμα σχήματος» (Pf) και «ανάπτυγμα σχήματος» (Sd). Οι σχέσεις εννοιών στο χώρο περιλαμβάνουν τρία έργα «σύγκριση κύβων» (Cc), «περιστροφή καρτών» (Cr) και «χέρια» (Ha), ενώ η ευελιξία διεκπεραίωσης αξιολογείται μέσω των ακόλουθων έργων: «κρυμμένες φιγούρες» (Hf), «κρυμμένα μοτίβα» (Hp) και «επικάλυψη σχήματος» (Of). Οι λανθασμένες και οι σωστές απαντήσεις βαθμολογήθηκαν με 0 ή 1, αντίστοιχα. Το σχήμα 10 αντιπροσωπεύει ένα δείγμα εργασιών χωρικής ικανότητας.

Ανάπτυγμα Σχήματος (Sd): Στο μέρος αυτό παρουσιάζεται στα αριστερά ένα κομμάτι χαρτόνι το οποίο θα διπλωθεί κατά μήκος των διακεκομμένων γραμμών. Ποιο από τα διπλανά στερεά θα σχηματισθεί;



Wai, Lubinski, & Benbow (2009)

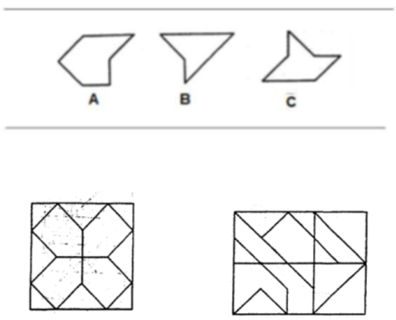
Σύγκριση κύβων (Cc): Το παρακάτω σχήμα παρουσιάζει δύο σχέδια ενός κύβου, υποθέτοντας ότι κανένας κύβος δεν μπορεί να έχει δύο όμοιες όψεις. Το ερώτημα είναι να υποδείξεις αν οι κύβοι παρουσιάζονται είναι ίδιοι ή διαφορετικοί.



Same Different

Eliot & Smith (1983)

Κρυμμένες φιγούρες (Hf): Ποια από τις παρακάτω φιγούρες A, B, C είναι κρυμμένη στις παρακάτω δύο σύνθετες εικόνες; Η φιγούρα αυτή έχει το ίδιο μέγεθος και κατεύθυνση όπως παρουσιάζεται στην αρχική φιγούρα.



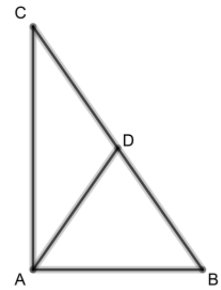
Ekstrom, French & Harman (1976)

Σχήμα 11: Τα έργα χωρικής ικανότητας (ένα από κάθε κατηγορία).

Ο συντελεστής αξιοπιστίας Gronbach’s Alpha για τις απαντήσεις των μαθητών σε όλες τις χωρικές ικανότητες (οπτικοποίηση a = 0,713, σχέσεις εννοιών στο χώρο a = 0,668, ευελιξία διεκπεραίωσης a = 0,767) βρέθηκε ότι είναι αποδεκτός (Taber, 2018). Αυτό δείχνει ότι υπάρχει εσωτερική συνάφεια και αξιοπιστία στις απαντήσεις των μαθητών στο τεστ χωρικής ικανότητας.

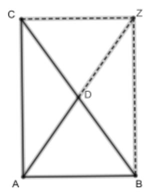
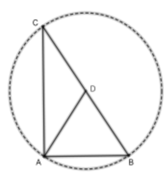
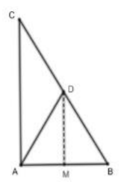
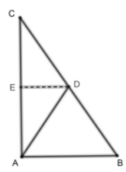
Στο δεύτερο μέρος του τεστ το οποίο αφορούσε τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών, χρησιμοποιήθηκε ένα γεωμετρικό πρόβλημα το οποίο οι μαθητές κλήθηκαν ρητά να το λύσουν με όσο περισσότερους τρόπους μπορούν (σχήμα 12). Αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιείται από τον Leikin (π.χ. 2011). Οι απαντήσεις των μαθητών αρχικά αξιολογήθηκαν ως προς την ορθότητά τους και στη συνέχεια ταξινομήθηκαν σε χώρους λύσεων σύμφωνα με τις βοηθητικές γραμμές που κατασκεύασαν οι μαθητές. Ένας χώρος λύσεων είναι μια ομάδα λύσεων σε ένα μαθηματικό πρόβλημα (Leikin, 2009).

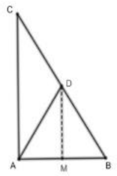
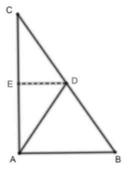
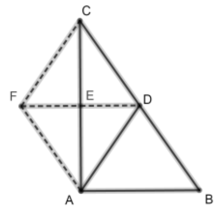
Να δείξετε με όσο περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος (AD) που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα (BC) είναι ίση με το μισό της.



Σχήμα 12: Το γεωμετρικό πρόβλημα πολλαπλών λύσεων.

Οι πέντε διαφορετικοί συλλογικοί χώροι λύσεων που διακρίναμε, με βάση τις απαντήσεις των μαθητών και τα ποσοστά των μαθητών που χρησιμοποιούν κάθε λύση του προβλήματος, παρουσιάζονται στο σχήμα 2. Οι μαθητές παρήγαγαν εννέα διαφορετικές λύσεις που αντιστοιχούν σε πέντε χώρους λύσεων. Ο πέμπτος χώρος αποτελείται από τρεις εναλλακτικές λύσεις γιατί αυτές οι λύσεις δεν εμφανίστηκαν ταυτόχρονα από κανέναν μαθητή.

1. Διπλασιασμός Διαμέσους – Διπλασιασμός Τριγώνου	2. Εγγεγραμμένο Τρίγωνο σε κύκλο	3. Σύγκριση Τριγώνων
(SP1.1) 11% (SP1.2) 3%	(SP2) 13%	(SP3.1) 40% (SP3.2) 15%
		 

4. Ιδιότητες Διαμέσου - διχοτόμου	5. Other ways
(SP4.1) (SP4.2) 10 % 4%  	α. Ομοιότητα Τριγ. β. Πυθαγόρειο Θεώρημα γ. Ρόμβος (SP5.1) (SP5.2) (SP5.3) 10% 2% 2% 

Σχήμα 13: Χώροι λύσεων και ποσοστά εμφάνισης της κάθε λύσης όπως προέκυψαν από τις απαντήσεις των μαθητών για το γεωμετρικό πρόβλημα πολλαπλών λύσεων.

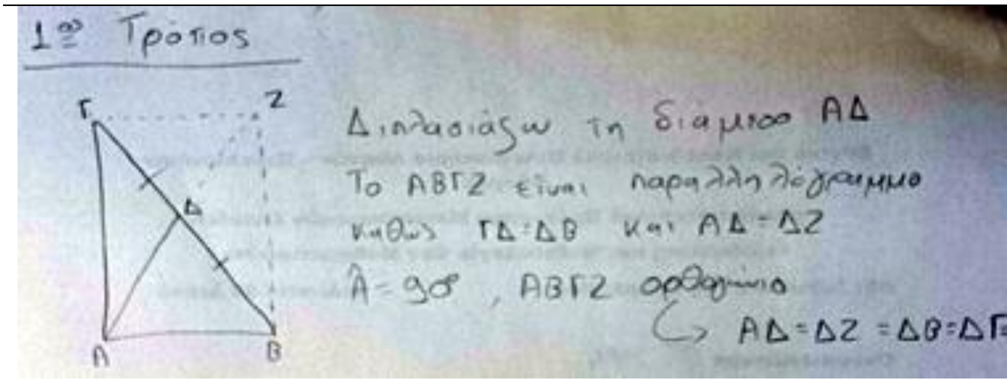
Η δημιουργικότητα των μαθητών αξιολογήθηκε μετρώντας πρώτα κάθε ένα από τα συστατικά της δημιουργικότητας (ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία) ξεχωριστά και στη συνέχεια με συνδυασμό αυτών των βαθμολογιών (π.χ. Levav-Waynberg & Leikin, 2012):

(α) Η ευχέρεια ενός μαθητή μετρήθηκε από τον αριθμό των ορθών λύσεων στον ατομικό χώρο λύσεων του. Για παράδειγμα, ένας μαθητής που πρότεινε 3 ορθές λύσεις σε ένα πρόβλημα έλαβε βαθμολογία ευχέρειας 3.

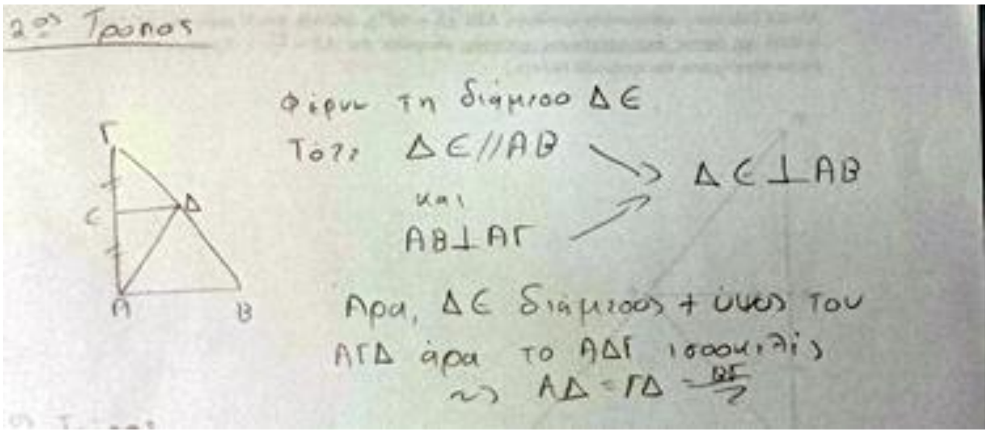
(β) Η ευελιξία ενός μαθητή μετρήθηκε από τις διαφορές μεταξύ των ορθών λύσεων στον ατομικό χώρο λύσεων του/της. Με άλλα λόγια, η βαθμολογία ευελιξίας αντιπροσωπεύει τον βαθμό στον οποίο ο μαθητής μπορεί να μετακινηθεί από μια λύση σε μια εντελώς διαφορετική. Απαιτείται η δημιουργία χώρων λύσεων για την αξιολόγηση της ευελιξίας. Κάθε λύση από διαφορετικό χώρο λύσης βαθμολογήθηκε με βαθμολογία 0,2. Η μέγιστη βαθμολογία ήταν 1 που αντιστοιχεί στις 5 λύσεις από 5 διαφορετικούς χώρους λύσης.

(γ) Η πρωτοτυπία μιας συγκεκριμένης λύσης ενός μαθητή αξιολογήθηκε με βάση το πόσο σπάνια είναι η ομάδα λύσεών της στο δείγμα αυτής της μελέτης. Οι λύσεις από ένα χώρο λύσεων που εμφανίστηκαν σε περισσότερο από το 40% των επιμέρους χώρων λύσεων έλαβαν βαθμολογία 1 (SP 3.1-SP3.2), ενώ δεν εμφανίστηκαν χώροι λύσεων σε ποσοστά μεταξύ 15% και 40%. Οι λύσεις που ήταν πιο πρωτότυπες ανήκαν σε ομάδες με συχνότητα μικρότερη από 15% (SP1.1-SP1.2, SP2, SP4.1-SP4.2, SP5.1-SP5.2-SP5.3). Η πρωτοτυπία αυτών των λύσεων βαθμολογήθηκε με 10. Οι τιμές συνόρων 15% και 40% για διαφορετικά επίπεδα πρωτοτυπίας βασίστηκαν στο μοντέλο της Leikin (2009).

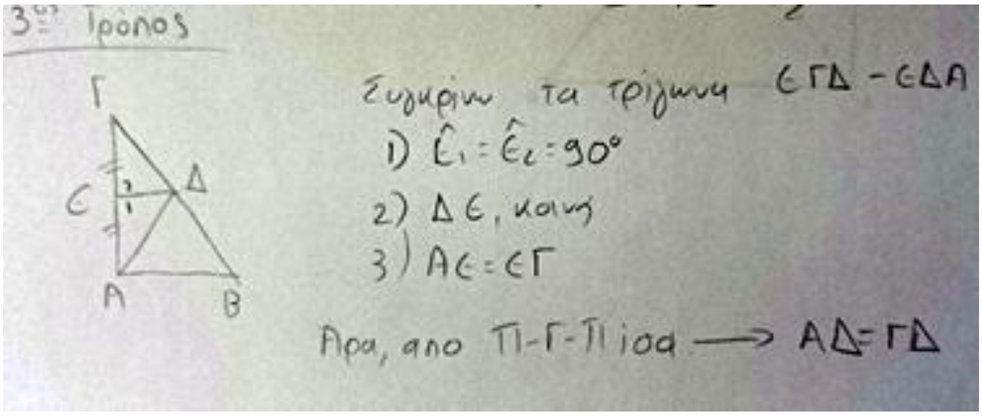
Το Σχήμα 14 παρουσιάζει πώς ένας μαθητής έλυσε το πρόβλημα. Αξίζει να αναφέρουμε ότι ο συγκεκριμένος μαθητής πέτυχε την υψηλότερη βαθμολογία δημιουργικότητας. Αυτός ο μαθητής έλυσε το πρόβλημα με πέντε διαφορετικούς τρόπους: SP1.1, SP2, SP3.2, SP4.2, SP5.3.



(SP 1.1)

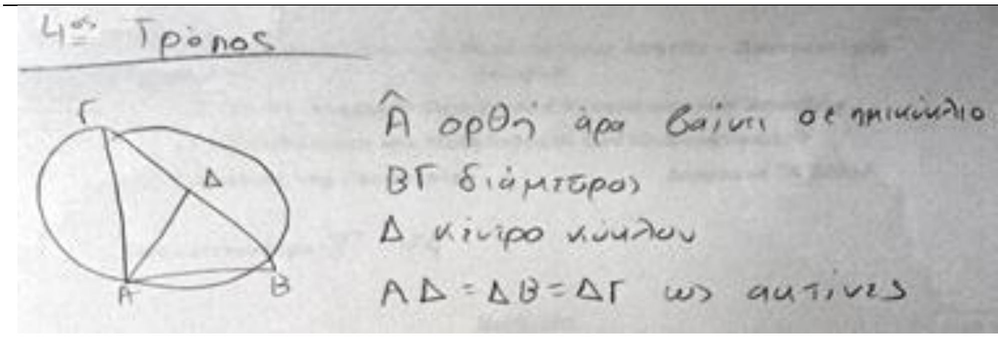


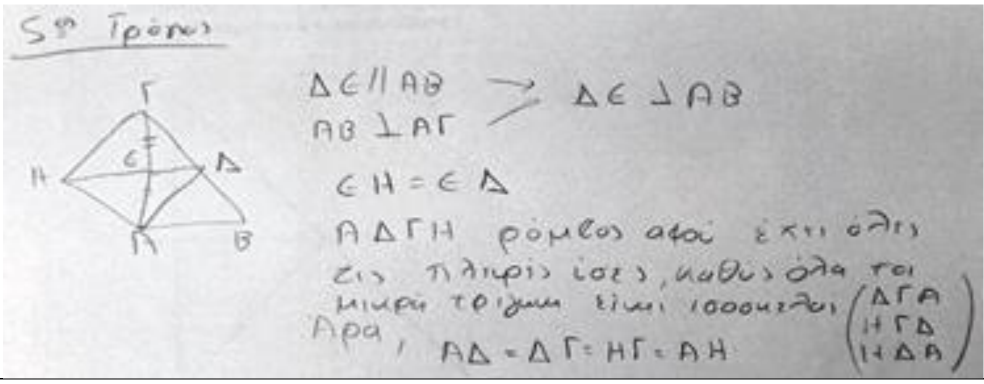
(SP4.2)



(SP3.2)

(SP2)





(SP5.3)

Σχήμα 14: Οι λύσεις όπως προέκυψαν από το μαθητή με τη μεγαλύτερο σκορ δημιουργικότητας.

Ο Πίνακας 1, παρουσιάζει πώς μετρήθηκαν οι διαστάσεις ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας για αυτόν τον μαθητή. Η συνολική βαθμολογία ευχέρειας ήταν 5 αφού ο μαθητής έλυσε το πρόβλημα με πέντε διαφορετικούς τρόπους. Καθώς αυτές οι λύσεις ανήκαν σε πέντε διαφορετικούς χώρους λύσεων, η βαθμολογία του μαθητή για ευελιξία ήταν 50, δηλαδή 10 για κάθε λύση από διαφορετικό χώρο λύσεων. Τέσσερις από τις πέντε λύσεις ανήκαν σε χώρους με συχνότητα μικρότερη από 15%. Η πρωτοτυπία για αυτές τις λύσεις (SP1.1, SP2, SP4.2, SP5.3) βαθμολογήθηκε με 10. Η λύση SP3.2 βαθμολογήθηκε με 1, καθώς ανήκει σε μια ομάδα με συχνότητα μεγαλύτερη από 40%. Έτσι, η βαθμολογία πρωτοτυπίας του μαθητή ήταν 41.

Λύσεις	Ευχέρεια	Ευελιξία	Πρωτοτυπία
SP1.1	1	10	10
SP2	1	10	10
SP3.2	1	10	1

SP4.2	1	10	10
SP5.3	1	10	10
Σύνολο	5	50	41

Πίνακας 1: Τρόπος υπολογισμού διαστάσεων δημιουργικότητας για το συγκεκριμένο μαθητή.

Ο συντελεστής αξιοπιστίας Cronbach’s Alpha για τις απαντήσεις των μαθητών σε όλες τις διαστάσεις της μαθηματικής δημιουργικότητας βρέθηκε ότι είναι αποδεκτός (ευχέρεια a=0,834, ευελιξία a = 0,754, πρωτοτυπία a = 0,732), υποδεικνύοντας ότι υπάρχει εσωτερική συνάφεια και αξιοπιστία στις απαντήσεις των μαθητών στο γεωμετρικό πρόβλημα πολλαπλών λύσεων.

Για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων χρησιμοποιήθηκε περιγραφική στατιστική και ανάλυση πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης με το λογισμικό SPSS.

3.3 Η Τρίτη Έρευνα: Μαθηματική Δημιουργικότητα και Αναπαραστάσεις

Αυτή η μελέτη στοχεύει στη διερεύνηση της μαθηματικής δημιουργικότητας και τη σχέση της με τον αν δίνεται ή όχι το γεωμετρικό σχήμα στην εκφώνηση της άσκησης καθώς και πως η κατανόηση γεωμετρικού σχήματος μπορεί να συμβάλει στην ανάπτυξη των διαστάσεων της δημιουργικότητας σε μαθητές Λυκείου. Η παρουσίαση ενός γεωμετρικού προβλήματος και η επιρροή του στη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών είναι το κύριο θέμα που ερευνάται. Επιπλέον, στόχος αυτής της μελέτης είναι να περιγράψει τη φύση του γεωμετρικού χώρου εργασίας που λαμβάνει μέρος σε ένα πρόβλημα πολλαπλών λύσεων γεωμετρίας. Η μελέτη βασίζεται σε ορισμένες θεωρητικές πτυχές του γεωμετρικού χώρου εργασίας (GWS) με τη δημιουργικότητα στη γεωμετρία και τη διάσταση της ευχέρειας που σχετίζεται με αυτήν.

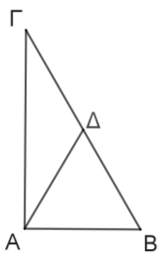
3.3.1 Δείγμα της Έρευνας & Συλλογή Δεδομένων

Διενεργήθηκε γραπτή δοκιμασία σε 147 μαθητές Β΄ Λυκείου (77 αγόρια και 72 κορίτσια από 7 τάξεις σε 5 ελληνικά σχολεία). Και οι 147 μαθητές ολοκλήρωσαν τη γραπτή δοκιμασία υπό τις συνήθεις συνθήκες της τάξης. Οι μαθητές επιλέχθηκαν τυχαία από 5 αστικά σχολεία της Ελλάδας. Στο δείγμα συμπεριλήφθηκαν μαθητές διαφόρων κοινωνικό-πολιτιστικών περιβαλλόντων. Το δοκίμιο αποτελούνταν από τέσσερις ασκήσεις γεωμετρίας (Σχήμα 15) και οι μαθητές κλήθηκαν ρητά να τις λύσουν με όσο το δυνατόν περισσότερους τρόπους. Όλες οι ασκήσεις είναι παρόμοιες με τις εργασίες που περιλαμβάνονται στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου. Στις ασκήσεις 1 και 3 η διατύπωση της άσκησης συνοδευόταν από το σχετικό σχήμα, ενώ στις Εργασίες 2 και 4 η διατύπωση δεν συνοδεύτηκε από το γεωμετρικό σχήμα. Οι συγκεκριμένες ασκήσεις επιλέχθηκαν γιατί μπορούν να επιλυθούν με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους, χρησιμοποιώντας διαφορετικά θεωρήματα και γεωμετρικά σχήματα, που αναφέρονται σε συγκεκριμένες ιδιότητες που διδάσκονται μέσω της κλασικής Ευκλείδειας γεωμετρίας στα σχολεία της Ελλάδας, και είναι μέρος του αναλυτικού προγράμματος που διδάσκεται σε αυτή τη συγκεκριμένη ηλικιακή ομάδα μαθητών.

Όταν δίνεται ένα πρόβλημα το οποίο δεν περιλαμβάνει το σχετικό σχήμα, οι μαθητές πρέπει να το κατασκευάσουν για να βρουν μια λύση. Αυτό λειτουργεί ως μια επιπλέον δυσκολία στη λύση των προβλημάτων. Στη μελέτη μας, τα προβλήματα 1 και 3 που περιλαμβάνουν και περιγραφική ανάλυση και το σχήμα απαιτούν από το μαθητή για τη λύση τους ένα επίπεδο εργασίας, αυτό της λύσης του προβλήματος. Αντίθετα, τα προβλήματα 2 και 4 οι οποίες δίνονται μόνο με τη φυσική γλώσσα απαιτούν τα δύο επίπεδα σκέψης αυτό της οπτικοποίησης και σχεδιασμού του σχήματος καθώς και τη λύση του προβλήματος.

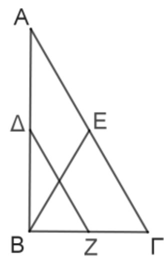
Πρόβλημα 1

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90^o) και ΑΔ διάμεσος του τριγώνου. Να αποδείξετε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι ΑΔ = ½ ΒΓ.



Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ(Β=90^o), Δ μέσο ΑΒ, Ε μέσο ΑΓ και Ζ μέσο ΒΓ. Να δείξετε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι ΔΖ=ΕΒ.



Πρόβλημα 2	Πρόβλημα 4
Έστω κύκλος κέντρου Ο και ΑΒ διάμετρος. Έστω Δ και Ε σημεία του κύκλου και ΔΟ//ΕΒ, και Γ το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΕ. Να δείξετε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι ΓΒ=ΑΒ.	Γνωρίζοντας μόνο το περίγραμμα του κύκλου, να προσδιορίσετε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε το κέντρο του.

Σχήμα 15: Τα 4 γεωμετρικά προβλήματα.

Ο συντελεστής αξιοπιστίας του Cronbach's Alpha για τις μεταβλητές που εξετάστηκαν οι οποίες είναι η ευχέρεια, η ευελιξία και η πρωτοτυπία είναι a = 0,738, a = 0,754 και a= 0,781, αντίστοιχα, υποδηλώνοντας ότι τα προβλήματα έχουν σχετικά υψηλή εσωτερική συνέπεια. Επιπλέον, όλες οι ασκήσεις επικυρώθηκαν ως προς το περιεχόμενο από δύο έμπειρους καθηγητές μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και δύο καθηγητές τριτοβάθμιας εκπαίδευσης στη διδακτική των μαθηματικών.

3.3.2 Ανάλυση Δεδομένων

Προκειμένου να διερευνήσουμε πώς η παρουσίαση ενός γεωμετρικού προβλήματος μπορεί να επηρεάσει τη δημιουργικότητα των μαθητών, υπολογίζουμε τις συνιστώσες της δημιουργικότητας ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία για κάθε λύση που χρησιμοποιούν οι μαθητές. Για να γίνει αυτό, εντοπίζουμε πρώτα τον αριθμό των διαφορετικών λύσεων και διερευνούμε επίσης τη χρήση βοηθητικών γραμμών από τους μαθητές. Για αυτήν την ανάλυση, χρησιμοποιήσαμε τόσο περιγραφική στατιστική όσο και το σχήμα βαθμολόγησης της Leikin (2009) για τη μαθηματική δημιουργικότητα. Στη συνέχεια και για να διερευνήσουμε τις σχέσεις μεταξύ της δημιουργικότητας των μαθητών, της οπτικοποίησης και της κατανόησης γεωμετρικών σχημάτων χρησιμοποιήσαμε το στατιστικό εργαλείο t-test σε επίπεδο σημαντικότητας 95% και ανάλυση πολλαπλής παλινδρόμησης με το λογισμικό υπολογιστή SPSS. Πραγματοποιήθηκε μια σειρά αναλύσεων πολλαπλής παλινδρόμησης με τη δημιουργικότητα (και καθεμία από τις συνιστώσες της) ως εξαρτημένες μεταβλητές και το γεωμετρικό σχήμα αν δίνεται ή όχι στην άσκηση ως ανεξάρτητη μεταβλητή. Η ανάλυση πολλαπλής παλινδρόμησης μας επέτρεψε να χαρακτηρίσουμε αυτές τις σχέσεις όχι μόνο ως προς τη στατιστική τους σημασία αλλά και ως προς τη δύναμή τους, μέσω συγκεκριμένων μετρήσεων, συμπεριλαμβανομένων των συντελεστών παλινδρόμησης και του ποσοστού διακύμανσης (Cohen, Cohen, West, & Aiken, 2003). Τέλος, πραγματοποιήθηκε συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση με χρήση του λογισμικού υπολογιστή C.H.I.C. Η υπονοούμενη μέθοδος επιτρέπει την παρατήρηση της γέννησης μιας ικανότητας σύμφωνα με τα στάδια της γενετικής ψυχολογίας καθώς και τον εντοπισμό του αμετάβλητου ή σταθερού τρόπου σκέψης των υποκειμένων. Οι σχέσεις στις οποίες συμπεραίνουμε δεν είναι σχέσεις αιτιότητας. Με άλλα λόγια, η μέθοδος αυτή μας βοηθά να συμπεράνουμε ότι η επιτυχία σε ένα πρόβλημα συνεπάγεται την επιτυχία σε ένα άλλο πρόβλημα με την οποία σχετίζεται το πρώτο πρόβλημα. Ομοίως, η αποτυχία σε μια εργασία συνεπάγεται αποτυχία σε μια άλλη εργασία με την οποία σχετίζεται η πρώτη εργασία (Gras, Suzuki, Guillet, & Spagnolo, 2008). Στο διάγραμμα συμβολίζουμε με Ti, i=1, 2, 3, 4 το πρόβλημα που αναφέρεται και με Sj, j=0, 1, 2, 3, 4 τον αριθμό των λύσεων για κάθε πρόβλημα.

3.4 Η Τέταρτη Έρευνα: Επέκταση των Παραπάνω Ερευνών σε Μαθητές Προσχολικής Ηλικίας – Μια Πρώτη Προσέγγιση

Σκοπός της τέταρτης έρευνας είναι να εξετάσει πώς η μαθηματική δημιουργική σκέψη (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία) μαθητών προσχολικής, μεταβάλλεται ύστερα από παρεμβατικό πρόγραμμα τριών μηνών το οποίο στοχεύει στην ανάπτυξη της κατανόησης γεωμετρικού σχήματος των μαθητών και της χωρικής τους ικανότητας. Αναλυτικά τα ερωτήματα που εξετάζονται είναι:

(α) Μεταβάλλεται η μαθηματική δημιουργικότητα (ευχέρεια – ευελιξία – πρωτοτυπία) μαθητών προσχολικής ύστερα από παρεμβατικό πρόγραμμα εστιασμένο στην ανάπτυξη της κατανόησης γεωμετρικού σχήματος και της χωρικής ικανότητας;

(β) Ποιες σχέσεις – διαφορές εμφανίζονται στις διαφορετικές ομάδες μαθητών σε μια τέτοια προσέγγιση;

3.4.1 Δείγμα της Έρευνας

Δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 14 μαθητές Νηπίου και Προνηπίου (9 Αγόρια & 5 Κορίτσια). Η έρευνα/παρέμβαση πραγματοποιήθηκε από τον Ιανουάριο έως τον Απρίλιο του σχολικού έτους (20 μαθήματα). Τα 2 αρχικά μαθήματα αφορούσαν τον ορισμό των ομάδων, τα 2 τελευταία την αξιολόγηση του προγράμματος και τα 16 την παρέμβαση. Τα μαθήματα διαρκούσαν 35-45 λεπτά και πραγματοποιούνταν 2 φορές την εβδομάδα.

3.4.2 Συλλογή & Ανάλυση Δεδομένων

Σαν μέθοδος συλλογής και επεξεργασίας των δεδομένων επιλέχθηκε η μελέτη περίπτωσης. Ο σχεδιασμός ήταν: (α) ψυχολογικός, καθώς επικεντρώθηκε σε συγκεκριμένες συμπεριφορές των μαθητών, δηλαδή τις ικανότητες και δράσεις τους προκειμένου να προσεγγίσουν τη δημιουργικότητα, και (β) μεθοδολογικός, διότι χρησιμοποιήθηκε για την εις βάθος μελέτη των συνδέσεων χωρικού συλλογισμού, κατανόησης γεωμετρικού σχήματος και μαθηματικής δημιουργικότητας (Hancock & Algozzine, 2006). Η συλλογή των δεδομένων έγινε σε τρία στάδια.

Α΄ Στάδιο: Εξέταση της μαθηματικής Ικανότητας και ο χωρισμός των μαθητών σε 3 ομάδες ως προς τη μαθηματική δημιουργικότητα.

Οι μαθητές αξιολογήθηκαν ως προς τη μαθηματική τους ικανότητα :

- να ακολουθούν οδηγίες,
- να συνεργάζονται,
- να διαχειρίζονται τα λάθη τους,
- να αναγνωρίζουν και συνθέτουν γεωμετρικά σχήματα,
- να αντιλαμβάνονται το χώρο,
- να λεκτικοποιήσουν τη μαθηματική τους σκέψη,

και ως προς τη δημιουργικότητα δηλαδή να βρίσκουν πολλές (ευχέρεια) και ποικίλες (ευελιξία) λύσεις σε ένα πρόβλημα, διαφορετικές από αυτές των συμμαθητών τους (πρωτότυπες).

Η δημιουργία των τριών ομάδων (Χαμηλής, Μέτριας και Υψηλής Ικανότητας / Δημιουργικότητας) στηρίχθηκε στην αξιολόγηση των μαθητών ανεξαρτήτως ηλικίας, φύλου και ιδιαιτεροτήτων, σε δραστηριότητες που αφορούσαν τη συμμετρία, τα βασικά γεωμετρικά σχήματα, την κατασκευή αριθμών και μοτίβων.

Οι μαθητές που είχαν σε όλα τα έργα σωστές απαντήσεις και μπορούσαν να τις εξηγήσουν στους συμμαθητές τους, βρίσκοντας και άλλες αποτέλεσαν την υψηλού επιπέδου ομάδα. Αντίστοιχα οι μαθητές που είχαν επίδοση σωστή κάποιες φορές και μπορούσαν εν μέρει να εξηγήσουν την σκέψη τους στους συμμαθητές τους και να καταλάβουν/διορθώσουν το λάθος τους βρίσκοντας σωστές λύσεις αποτελούσαν την μεσαίου επιπέδου ομάδα. Τέλος οι μαθητές που είχαν συνήθως λάθος στις εργασίες και δεν μπορούσαν ούτε να εξηγήσουν ούτε να αντιληφθούν τα λάθη τους αποτέλεσαν την χαμηλού επιπέδου ομάδα.

Από τους 14 μαθητές οι 4 είχαν υψηλή επίδοση 5 μέτρια και 5 χαμηλή. Από αυτούς 2 από κάθε ομάδα επιλέχθηκαν για την παρουσίαση ως μελέτες περίπτωσης: 2 κορίτσια από την υψηλή ομάδα (Μ1 και Μ2), 1 αγόρι (Μ3) και 1 κορίτσι (Μ4) από την μέτρια ομάδα και αντίστοιχα 1 αγόρι (Μ5) και 1 κορίτσι (Μ6) από την χαμηλή. Τα κριτήριο ήταν η σταθερή φοίτηση τους στο πρόγραμμα.

Στα 2 πρώτα μαθήματα, γνωρίστηκαν όλα τα μέλη της ομάδας , παρουσιάστηκε το υλικό, εξηγήθηκαν τα μαθήματα/διαδικασία και οι μαθητές οικειοποιήθηκαν τα υλικά ακολουθώντας οδηγίες. Στα επόμενα 2 μαθήματα που ξεκίνησε ουσιαστικά η έρευνα:

- Δόθηκε το εποπτικό υλικό που κινητοποίησε τους μαθητές όπως κυβάκια, ζάρια, ντόμινο, τάγκραμ, γεωμετρικά σχήματα για την κατασκευή μοτίβων, πλαστελίνες, ξυλάκια αρίθμησης, γεωμετρικά, σχήματα από χαρτόνι, τουβλάκια διαφορετικών χρωμάτων και σχημάτων, φύλλα εργασίας, μεζούρες, μαρκαδόροι μολύβια, τέμπερες

- Έγιναν δραστηριότητες που αφορούσαν:

✓ την αναγνώριση των βασικών γεωμετρικών σχημάτων (κύκλος, τρίγωνο, τετράγωνο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο)

✓ την απαρίθμηση, ανάγνωση και γραφή αριθμών και ποσοποίησή τους με εποπτικό υλικό (κυβάκια, τουβλάκια)

✓ τη δημιουργία γεωμετρικών σχημάτων με χαρτόνι

✓ τη δημιουργία συμμετριών με χάρτινες πεταλούδες και τέμπερες

Οι εκπαιδευτικοί όρισαν τον τρόπο εργασίας στην ομάδα καθώς οι μαθητές έπρεπε να εργάζονται αυτόνομα, να συνεργάζονται χωρίς προστριβές, να εργάζονται σε δεδομένο χρόνο και να χρησιμοποιούν το υλικό χωρίς να το καταστρέφουν.

Β΄ Στάδιο: Εφαρμογή παρεμβατικού προγράμματος

Το μάθημα ξεκινούσε πάντα με ένα ερώτημα για κινητοποίηση των μαθητών ή περιγραφόταν μια διαδικασία - παιχνίδι, κατασκευή, πρόβλημα. Ο εκπαιδευτικός έθετε το ερώτημα και ζητούσε από τους μαθητές να δοκιμάσουν να λύσουν το ερώτημα με εποπτικό υλικό μπροστά στην ομάδα ή ατομικά ή ανά 2 και να δείξουν τη λύση στην ομάδα επίσης. Στόχος ήταν όλοι οι μαθητές να συμμετέχουν και να εξηγούν όπως μπορούν τη λύση που έδωσαν ιδίως αν ήταν διαφορετική. Επομένως όλοι οι μαθητές σηκώνονταν στον πίνακα όπου είτε ζωγράφιζαν τη λύση είτε χρησιμοποιούσαν το εποπτικό υλικό και έφτιαχναν τη λύση.

Οι εκπαιδευτικοί παρότρυναν όλα τα παιδιά να πουν την σκέψη τους και να δείξουν τη λύση τους. Οι εκπαιδευτικοί στη συνέχεια, ρωτούσε σε μια λάθος λύση αν θα μπορούσαν να την κάνουν σωστή, πώς θα μπορούσαν να την κάνουν διαφορετική και πού διέφερε από τις άλλες λύσεις. Οι ιδέες και η έκφρασή τους, η προσπάθεια για αιτιολόγηση της απάντησης κάθε φορά από κάθε μαθητή ήταν στο επίκεντρο της παρέμβασης. Στη συνέχεια δινόταν χρόνος στους μαθητές να λύσουν το ερώτημα με όσο πιο δημιουργικό τρόπο μπορούσαν (σύμφωνα με την δική τους ξεχωριστή ιδέα). Στη συνέχεια στην ίδια διδακτική ώρα ή στο επόμενο μάθημα δίνονταν παρόμοια έργα προς επίλυση ατομικά ή ομαδικά (1 ή 2 ανάλογα το έργο). Η επεξεργασία τους γινόταν με τον ίδιο τρόπο: παρουσίαση των ιδεών, εύρεση λύσης και άλλης διαφορετικής (από τον κάθε μαθητή), επεξήγηση της λύσης και αξιολόγησή της από τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς με επιβράβευση των μαθητών. Στο τέλος κάθε διδακτικής ώρας επίσης γίνεται αξιολόγηση του μαθήματος προφορική από όλα τα παιδιά ή με ζωγραφική και γραφή από τους εκπαιδευτικούς όσων λέει το παιδί.

Οι δραστηριότητες περιλάμβαναν:

• ζωγραφική με μολύβι ή χρώματα γεωμετρικών σχημάτων σε τετραγωνισμένο χαρτί, χαρτί με τελείες,

- σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων (ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τετράγωνο) από άλλα γεωμετρικά σχήματα, με πλαστελίνη , με ξυλάκια αρίθμησης, με ξύλινα γεωμετρικά σχήματα, τάγκραμ

- κατασκευή οριγκάμι

- κατασκευή συμμετρίας ως προς οριζόντιο και κάθετο άξονα με εποπτικό υλικό, δίπλωμα χαρτονιού, γεωμετρικά σχήματα, ζωγραφική

- κατασκευή γεωμετρικών μοτίβων με εποπτικό υλικό και ζωγραφική

Γ΄ Στάδιο: Αξιολόγηση μεταβολής μαθηματικής δημιουργικότητας (2 μαθήματα)

Στα 2 τελευταία μαθήματα οι μαθητές αφού κλήθηκαν να θυμηθούν τι έχουν μάθει στο πρόγραμμα παρέμβασης, έλυσαν ατομικά τα ερωτήματα που έδωσε ο εκπαιδευτικός και με όλο το χρόνο της διδακτικής ώρας για να σκεφτεί ο κάθε μαθητής.

Οι εργασίες που έπρεπε να κάνουν αφορούσαν:

- σχεδιασμό και κατασκευή γεωμετρικού σχήματος από άλλα και ονομασία τους,

- δίπλωμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου με τρόπο συμμετρικό και στη συνέχεια τοποθέτηση ενός φύλλου με τρόπο ώστε να έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα συμμετρίας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου,

- κατασκευή γεωμετρικού σχήματος με πλαστελίνη και μεγέθυνσή του 3 φορές,

- αξιολόγηση του μαθήματος με ζωγραφική,

- ζωγραφική συμμετρικής πεταλούδας.

Οι λύσεις των μαθητών βαθμολογήθηκαν ως εξής:

- ως προς την ευχέρεια πήρε 1 βαθμό η κάθε σωστή λύση,

- ως προς την ευελιξία πήρε 1 βαθμό κάθε διαφορετική ποιοτικά λύση,

- ως προς την πρωτοτυπία πήρε 1 βαθμό η κάθε μη συμβατική λύση στο σύνολο των μαθητών.

4 Αποτελέσματα Έρευνών

4.1 Αποτελέσματα Πρώτης Έρευνας

Στον πίνακα 2, παρουσιάζονται τα ποσοστά επιτυχίας για τα έργα σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος με βάση τον τρόπο επίλυσής τους. Παρατηρούνται υψηλά ποσοστά επιτυχίας στα αντιληπτικά έργα (Per1, Per2), καθώς και υψηλότερα ποσοστά στους αλγοριθμικούς τρόπους επίλυσης (Op1al, Op2al, Aux1al) των έργων λειτουργικής κατανόησης σε σχέση με τις αναδιαμορφώσεις σχήματος (Op1, Op2) και την κατασκευή επιπλέον βοηθητικών γραμμών (Aux1, Aux2).

Per1	Per2	Op1al	Op1	Op2al	Op2	Aux1al	Aux1	Aux2
67%	82%	42%	29%	63%	18%	32%	22%	29%

Πίνακας 2: Ποσοστά επιτυχίας στα έργα σύλληψης γεωμετρικού σχήματος.

Είναι φανερό, ότι από τις 3 διαφορετικές προσεγγίσεις λύσεων τις μεγαλύτερες δυσκολίες παρουσιάζει η λειτουργική προσέγγιση, δηλαδή, αυτή που απαιτεί ένα μετασχηματισμό του δοθέντος σχήματος. Είναι επίσης φανερό, ότι η αλγοριθμική προσέγγιση στην λύση των ασκήσεων είναι βαθιά ριζωμένη στο μυαλό των παιδιών. Αυτό το αρνητικό φαινόμενο σαφώς σχετίζεται και με το διδακτικό συμβόλαιο (Brousseau, 1997). Είναι τόσο βαθιά ριζωμένη, που και καλοί μαθητές οι οποίοι βρίσκουν τη λύση με λειτουργικό μετασχηματισμό του σχήματος συχνά καταφεύγουν και αυτοί στην εφαρμογή ενός τύπου ή ενός θεωρήματος για να επαληθεύσουν την ορθή λύση που είχαν βρει προηγουμένως. Ο συλλογισμός τους αρχίζει συνήθως ως εξής: «πράγματι, αν εφαρμόσουμε τον τύπο…βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα.».

Στον πίνακα 3, παρουσιάζονται τα ποσοστά του πλήθους λύσεων των μαθητών (ευχέρεια) για τα δύο γεωμετρικά προβλήματα. Το εύρος λύσεων στο σύνολο των μαθητών για το πρόβλημα 1 από 0 έως 4 λύσεις ενώ για το πρόβλημα 2 από 0 έως 3.

P1s0	P1s1	P1s2	P1s3	P1s4	P2s0	P2s1	P2s2	P2s3
29%	40%	16%	11%	4%	46%	35%	10%	9%

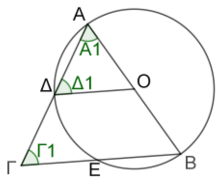
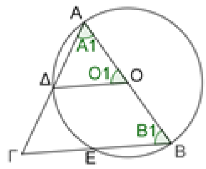
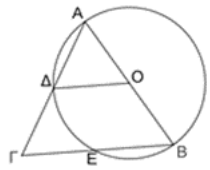
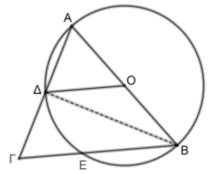
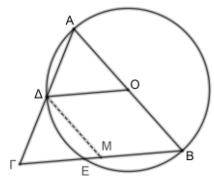
Πίνακας 3: Ευχέρεια λύσεων για τα δύο γεωμετρικά προβλήματα.

Για να εξεταστούν τυχόν διαφορές στα χαρακτηριστικά της δημιουργικότητας, οι οποίες απορρέουν από την αναγκαιότητα κατασκευής βοηθητικών κατασκευών πραγματοποιήθηκε έλεγχος – t σε επίπεδο σημαντικότητας 99% (βλέπε πίνακα 4). Ο μέσος όρος λύσεων για το πρόβλημα 1 είναι 1,3 λύσεις ενώ για το πρόβλημα 2 είναι 0,8 λύσεις, διαφορά που είναι στατιστικά σημαντική ($t=10.834$, $df=242$, $p<0.05$). Παρατηρούμε ότι οι μαθητές παρουσιάζουν υψηλότερη ευχέρεια στο πρόβλημα 1 που περιλαμβάνει λύσεις και χωρίς τη χρήση επιπλέον κατασκευών. Στατιστικά σημαντικές διαφορές παρατηρούνται και για την ευελιξία ($t=6.77$, $df=242$, $p<0.05$), με τους μαθητές να εμφανίζουν υψηλότερη ευελιξία στο πρόβλημα 1 ($M=10.95$, $Sd=11.15$) έναντι ($M=7.49$, $Sd=8.1$) στο πρόβλημα 2. Τέλος, στατιστικά σημαντικές διαφορές παρατηρούνται και για την πρωτοτυπία ($t=4.697$, $df=242$, $p<0.05$), με τους μαθητές να εμφανίζουν υψηλότερη πρωτοτυπία στο πρόβλημα 1 ($M=3.3$, $Sd=7.14$) έναντι ($M=1.79$, $Sd=3.43$) στο πρόβλημα 2.

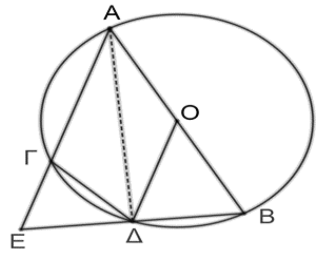
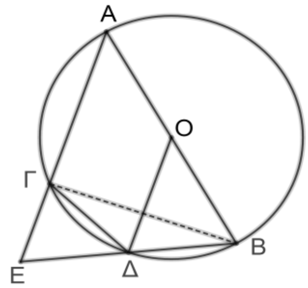
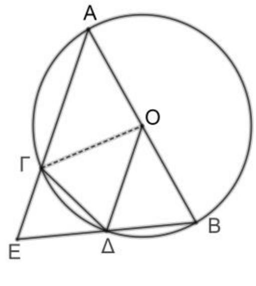
	t	**df**	**p**
Ευχέρεια P1_P2	10.834	242	<0.05
Ευελιξία P1_P2	6.77	242	<0.05
Πρωτοτυπία P1_P2	4.697	242	<0.05

Πίνακας 4: Έλεγχος – t σε επίπεδο σημαντικότητας 99% για σύγκριση των διαστάσεων της δημιουργικότητας στα δύο προβλήματα πολλαπλών λύσεων.

Στον πίνακα 5 παρουσιάζονται οι χώροι λύσεων για το πρόβλημα 1, χωρισμένοι με βάση τη βοηθητική κατασκευή που χρησιμοποιούν, καθώς και το ποσοστό εμφάνισης της κάθε λύσης στο σύνολο των μαθητών. Ο διαχωρισμός των χώρων λύσεων έχει γίνει με βάση την βοηθητική κατασκευή καθώς η προσέγγιση μας είναι αντιληπτική. Οι πιο καινοτόμες λύσεις είναι αυτές που απαιτούν βοηθητική κατασκευή.

<table>
<tr>
<td rowspan="3">Χώρος Λύσεων 1
(Χωρίς Βοηθητική Κατασκευή)</td>
<td><u>Λύση 1.1</u> (P1is1) 24%
ΔΟ = ΟΑ ως ακτίνες του κύκλου. Τότε το ΔΟΑ είναι ισοσκελές τρίγωνο. Άρα οι γωνίες Δ1 = Α1. (1). Επιπλέον ΔΟ // ΕΒ → ΔΟ // ΓΒ, άρα οι γωνίες Δ1 = Γ1 εντός εκτός και επί τα αυτά. (2). Από (1) , (2): Α1 = Δ1 = Γ1. Άρα, το τρίγωνο ΑΒΓ ισοσκελές και ΑΒ = ΓΒ.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Λύση 1.2</u> (P1is2) 37%
ΔΟ = ΟΑ ως ακτίνες του κύκλου. Τότε το ΔΟΑ είναι ισοσκελές τρίγωνο. Επιπλέον ΔΟ // ΕΒ → ΔΟ // ΓΒ, άρα οι γωνίες $O_1 = B_1$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά. Επιπλέον, στα τρίγωνα ΑΟΔ και ΑΒΓ η Α γωνία είναι κοινή, επομένως έχουν δύο οξείες γωνίες ίσες μία προς μία άρα είναι όμοια. Άρα, ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο, αφού είναι όμοιο με το ισοσκελές ΑΟΔ. Άρα, ΑΒ = ΓΒ.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Λύση 1.3</u> (P1mid1) 45%
Το ΔΟ=1/2ΑΒ ως ακτίνα, αφού ΑΒ διάμετρος. Το ΔΟ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών Δ και Ο των ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα (παράλληλη με την ΓΒ και διχοτομεί την ΑΒ). Τότε ΔΟ=1/2ΑΒ=1/2ΒΓ. Άρα, ΑΒ=ΒΓ.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Χώρος Λύσεων 2
(Βοηθ. Κατ. ΔΒ)</td>
<td><u>Λύση 2.1</u> (P1mid2) 14%
Το Δ είναι μέσο του ΑΓ, αφού ΔΟ ενώνει το μέσο Ο με το Δ και ΟΔ//ΒΓ. Φέρουμε ΔΒ διάμεσος του τριγώνου. Η γωνία Δ1 βαίνει σε ημικύκλιο, άρα Δ1=90^o, άρα ΔΒ διάμεσος και ύψος του τριγώνου ΑΒΓ. Άρα, το ΑΒΓ είναι ισοσκελές, άρα ΑΒ=ΓΒ.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Χώρος Λύσεων 3
(Βοηθ. Κατ. ΔΜ)</td>
<td><u>Λύση 3.1</u> (P1aux) 5%
Φέρουμε παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ. Τότε αφού διέρχεται από το μέσο Δ της ΑΓ, θα διέρχεται και από το μέσο Μ της ΒΓ και ΜΔ= ΑΒ/2. ΕΒ//ΔΟ → ΜΒ//ΔΟ. Άρα, ΜΒ=ΔΟ= ΒΓ/2 και ΟΔ=ΟΒ ως ακτίνες του κύκλου. Άρα, το ΔΟΜΒ ρόμβος → ΟΒ=ΜΒ → 1/2ΑΒ=1/2ΒΓ → ΑΒ=ΒΓ.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Πίνακας 5:Χώροι λύσεων για το πρόβλημα 1.

Χώρος Λύσεων 1 **(Βοηθ. Κατασκευή ΑΔ)**	Λύση 1.1 (P2_AD) (37%) Κατασκευάζουμε την βοηθητική ευθεία ΑΔ – διάμεσος. ∠ΑΔΒ=90ο βαίνει σε ημικύκλιο⇒ ΔΕΑΒ – ισοσκελές ⇒ ΑΔ διχοτόμος της γωνίας ∠ΕΑΒ. ⇒ ΔΒ=ΔΓ (Μέτρια πρωτοτυπία: 15% < 37% < 40%)	
Χώρος Λύσεων 2 **(Βοηθ. Κατασκευή ΒΓ)**	Λύση 2.1 (P2_CB1) (18%) Κατασκευάζουμε την βοηθητική ευθεία ΓΒ. Η ΟΔ ενώνει δύο μέσα στο ΔΑΓΒ ⇒ η ΟΔ διχοτομεί την ΓΒ ⇒ άρα διχοτομεί και το τόξο ΓΒ. Τελικά, ΔΒ=ΔΓ Λύση 2.2 (P2_CB2) (14%) Κατασκευάζουμε την βοηθητική ευθεία ΓΒ. Η ∠ΑΓΒ=90ο βαίνει σε ημικύκλιο ⇒ ∠ΕΓΒ=90ο , άρα ΕΔ=ΔΒ, ΓΔ διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου ΔΕΓΔ ⇒ ΕΔ=ΔΒ=ΔΓ (Μέτρια πρωτοτυπία: 15% < 32% < 40%)	
Χώρος Λύσεων 3 **(Βοηθ. Κατασκευή ΒΟ)**	Λύση 3 (P2_CO) (11%) Κατασκευάζουμε την βοηθητική ευθεία ΓΟ. Ισχύει: ∠ΔΟΒ=∠ΕΑΟ= φ, ως εντός εναλλάξ. Επίσης, ∠ΑΓΟ=φ, επειδή ΔΑΟΓ ισοσκελές. ∠ΑΓΟ=∠ΓΟΔ=φ, ως εντός εναλλάξ ⇒ ∠ΓΟΔ=∠ΔΟΒ=φ ⇒ ΔΒ=ΔΓ. (Υψηλή πρωτοτυπία: 11% < 15%)	

Πίνακας 6:Χώροι λύσεων για το πρόβλημα 2.

Για τη διερεύνηση της σχέσης ανάμεσα στη σύλληψη γεωμετρικού σχήματος και στη μαθηματική δημιουργικότητα πραγματοποιήθηκε πολλαπλή ανάλυση παλινδρόμησης με ανεξάρτητες μεταβλητές τις ικανότητες κατανόησης Γεωμετρικού σχήματος (αντιληπτική κατανόηση, αλγοριθμική σκέψη, λειτουργική με αναδιαμόρφωση σχήματος, λειτουργική με βοηθητικές κατασκευές) και με εξαρτημένες μεταβλητές τη μαθηματική δημιουργικότητα και τα χαρακτηριστικά της: ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Enter, προέκυψαν στατιστικά σημαντικά μοντέλα πρόβλεψης για κάθε μία εξαρτημένη μεταβλητή (Ευχέρεια: R^2=0.21, F=13.541, $p<0.005$; Ευελιξία: R^2=0.17, F =19.032 , $p<0.005$; Πρωτοτυπία: R^2=0.14, F=17.895, $p<0.005$). Ο πίνακας 7 παρουσιάζει τα αποτελέσματα της πολλαπλής παλινδρομικής ανάλυσης.

		Αντιληπτική Ικανότητα		**Αλγοριθμική Σκέψη**		**Λειτουργική Ικανότητα**	
		β	p	β	p	β	p
Μαθηματική Δημιουργικότητα	**Ευχέρεια**	.143	.078	-.176	.048	.317	.021
	Ευελιξία	.178	.114	-.218	.032	.214	.033
	Πρωτοτυπία	.116	.065	-.254	.018	.317	.001

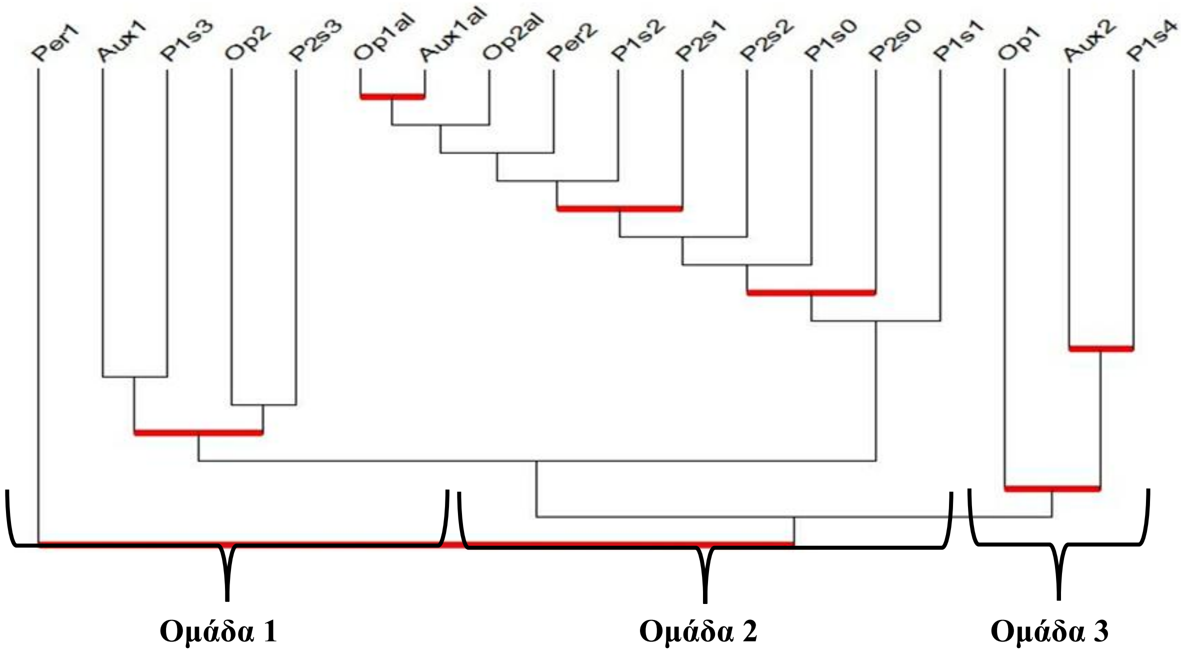
b = regression coefficient and p = p-value

Πίνακας 7: Πολλαπλή ανάλυση παλινδρόμησης με ανεξάρτητες μεταβλητές τη σύλληψη γεωμετρικού σχήματος και εξαρτημένες τις διαστάσεις της μαθηματικής δημιουργικότητας κατά την επίλυση προβλημάτων πολλαπλών λύσεων.

Η παλινδρομική ανάλυση μας δίνει σημαντικά αποτελέσματα για τις συνιστώσες του θέματος. Το πρώτο αποτέλεσμα που εξάγουμε είναι ότι η αντιληπτική ικανότητα γεωμετρικού σχήματος επιδράει θετικά στις μεταβλητές της δημιουργικότητας ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία. Παρόλα αυτή η επίδραση δεν είναι στατιστικά σημαντική καθώς το σφάλμα $p>0.05$. Το δεύτερο αλλά σημαντικό αποτέλεσμα είναι ότι η αλγοριθμική σκέψη σχετίζεται αρνητικά με τα χαρακτηριστικά της μαθηματικής δημιουργικότητας, αφού όλοι οι σταθμισμένοι παλινδρομικοί συντελεστές β είναι αρνητικοί αριθμοί. Συγκεκριμένα, η ανάλυση των δεδομένων έδειξε ότι η αλγοριθμική σκέψη αποτελεί στατιστικά σημαντικό δείκτη πρόβλεψης της ευχέρειας (β=-0.176, p=.048), της ευελιξίας (β=-0.218, p=.032) και της πρωτοτυπίας των μαθητών (β=-0.254, p=.018). Το αρνητικό σύμβολο στη τιμή β υποδηλώνει ότι όσο πιο έντονη είναι η αλγοριθμική σκέψη των μαθητών, τόσο περισσότερο η επίδοση στα χαρακτηριστικά της μαθηματικής δημιουργικότητας μειώνεται.

Το δεύτερο σημαντικό αποτέλεσμα που προκύπτει από την πολλαπλή παλινδρομική ανάλυση αφορά τη σχέση μεταξύ της λειτουργική σύλληψης Γεωμετρικού σχήματος και των χαρακτηριστικών της μαθηματικής δημιουργικότητας. Πιο συγκεκριμένα, βρέθηκε ότι η λειτουργική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος είναι ένας στατιστικά σημαντικός παράγοντας πρόβλεψης των χαρακτηριστικών της δημιουργικότητας: ευχέρεια (β=0.317, p=0.21), ευελιξία (β=0.214, p=0.33) και πρωτοτυπία (β=0.317, p=0.001). Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές που φθάνουν σε λειτουργική σύλληψη γεωμετρικού σχήματος μέσω μερολογικών τροποποιήσεων ή μέσω κατασκευής βοηθητικών γραμμών, πετυχαίνουν και υψηλότερα επίπεδα ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας.

Για να γίνουν περαιτέρω αντιληπτές οι συνδέσεις μεταξύ των ικανοτήτων σύλληψης γεωμετρικού σχήματος και των μεταβλητών της μαθηματικής δημιουργικότητας, πραγματοποιήθηκαν οι παρακάτω αναλύσεις ομοιότητας. Στο πρώτο διάγραμμα ομοιότητας (Διάγραμμα ομοιότητας 1), το οποίο αφορά στην ικανότητα παραγωγής πολλαπλών λύσεων των μαθητών (ευχέρεια) και τη σύλληψη γεωμετρικού σχήματος, παρατηρούνται τρεις σημαντικές ομάδες ομοιότητας.

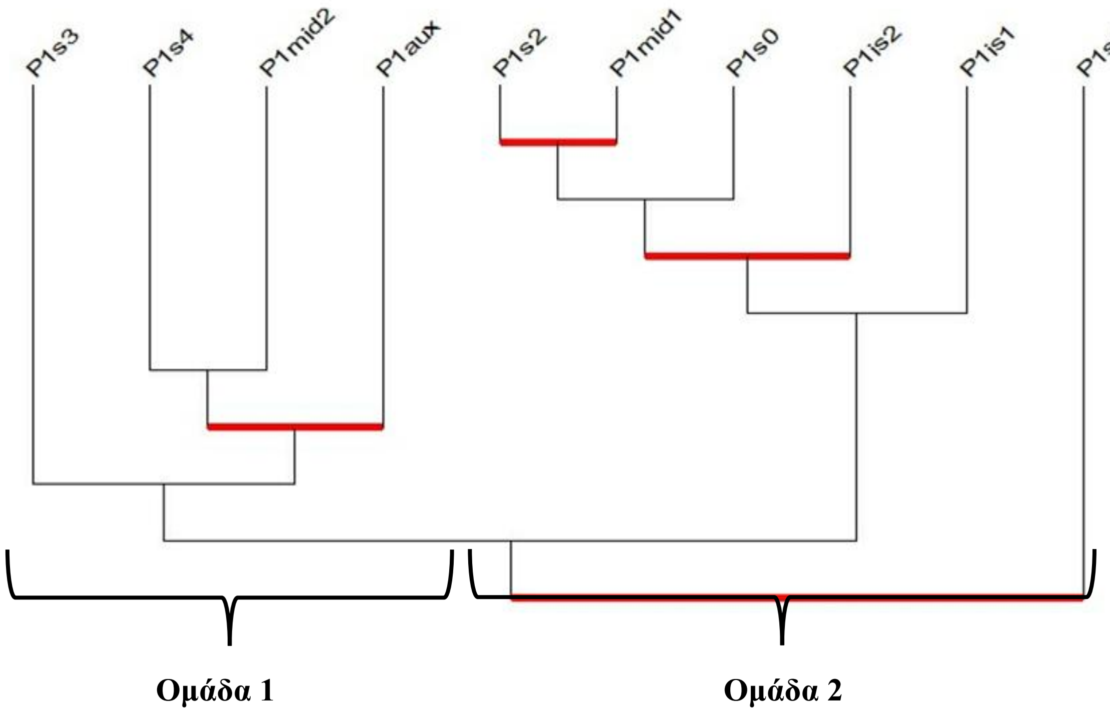


Διάγραμμα ομοιότητας 1: Σύλληψη γεωμετρικού σχήματος–Ευχέρεια λύσεων.

Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει τις μεταβλητές (Aux1, P1s3, Op2, P2s3), δηλαδή περιλαμβάνει τους μαθητές που: (α) επιλύουν τα προβλήματα 1 και 2 με 3 τρόπους (P1s3, P2s3), και (β) επιλύουν από τη δεύτερη ομάδα έργων σύλληψης γεωμετρικού σχήματος το δεύτερο έργο με αναδιαμόρφωση σχήματος (Op2) και από την τρίτη ομάδα έργων καταφέρνουν να επιλύσουν το πρώτο έργο (Aux1) με την προσθήκη επιπλέον βοηθητικών γραμμών. Η τρίτη ομάδα περιλαμβάνει τις μεταβλητές (Op1, Aux2, P1s4), δηλαδή περιλαμβάνει τους μαθητές που: (α) επιλύουν το πρόβλημα 1 με 4 τρόπους (P1s4), και (β) επιλύουν από τη δεύτερη ομάδα έργων σύλληψης γεωμετρικού σχήματος το πρώτο έργο με αναδιαμόρφωση σχήματος (Op1) και από την τρίτη ομάδα έργων καταφέρνουν να επιλύσουν το δεύτερο έργο (Aux2) με την προσθήκη βοηθητικής γραμμής. Οι δύο αυτές ομάδες έχουν σαφή χαρακτήρα και υποδεικνύουν ότι οι μαθητές που χαρακτηρίζονται από υψηλή ικανότητα μερολογικής τροποποίησης ενός σχήματος και είναι ικανοί να φέρουν επιπλέον κατασκευές στο σχήμα, εμφανίζουν υψηλή ευχέρεια λύσεων.

Η δεύτερη ομάδα περιλαμβάνει τις μεταβλητές (P1s0, P1s1, P1s2, P2s0, P2s1, P2s2, Per2, Op1al, Op2al, Aux1al), δηλαδή περιλαμβάνει τους μαθητές που: (α) δεν επιλύουν τα προβλήματα 1 και 2 (P1s0, P2s0) ή τα επιλύουν με 1 ή 2 τρόπους (P1s1, P1s2, P2s1, P2s2), και (β) επιλύουν το δεύτερο αντιληπτικό έργο (Per2), καθώς και 3 λειτουργικά έργα της δεύτερης και τρίτης ομάδας με αλγοριθμικό τρόπο (Op1al, Op2al, Aux1al). Η δεύτερη αυτή ομάδα έχει επίσης σαφή χαρακτήρα και περιλαμβάνει τους μαθητές οι οποίοι βλέπουν τα σχήματα στατικά, παγιδεύονται στην αντιληπτική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος αδρανοποιώντας τη λειτουργική σύλληψη επιλύοντας τα έργα αλγοριθμικά και εμφανίζουν μηδενική (καμία λύση) ή μέτρια ευχέρεια λύσεων (μία ή δύο λύσεις).

Στο δεύτερο διάγραμμα ομοιότητας (Διάγραμμα ομοιότητας 2), το οποίο αφορά στην ικανότητα παραγωγής πολλαπλών λύσεων (ευχέρεια) και την ευελιξία των μαθητών για το πρόβλημα 1, παρατηρούμε δύο ομάδες ομοιότητας.



Διάγραμμα ομοιότητας 2: Ευχέρεια-Ευελιξία λύσεων για το πρόβλημα 1.

Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει τις μεταβλητές (P1s3, P1s4, P1mid2, P1aux), δηλαδή, περιλαμβάνει τους μαθητές που: (α) επιλύουν το πρόβλημα 1 με 3 ή 4 τρόπους (P1s3, P1s4), και (β) επιλύουν το πρόβλημα 1 φέρνοντας επιπλέον βοηθητική κατασκευή στο δοθέν σχήμα (P1mid2, P1aux - βλέπε χώρους λύσεων του προβλήματος 1). Παρατηρούμε ότι οι μαθητές που είναι ικανοί να φέρουν επιπλέον βοηθητικές κατασκευές για να επιλύσουν το πρόβλημα, κατάσταση η οποία ενισχύει και την ευελιξία στις λύσεις τους καθώς μετακινούνται ευέλικτα σε όλους τους χώρους λύσεων, χαρακτηρίζονται από υψηλή ευχέρεια λύσεων. Επιπλέον, οι μαθητές αυτοί εμφανίζουν και υψηλή πρωτοτυπία στις λύσεις τους καθώς οι λύσεις αυτές εμφανίζονται σε ποσοστό 14% και 5% αντίστοιχα στο σύνολο των μαθητών.

Η δεύτερη ομάδα λύσεων περιλαμβάνει τις μεταβλητές (P1s0, P1s1, P1s2, P1is1, P1is2, P1mid1), δηλαδή, περιλαμβάνει τους μαθητές που: (α) δεν επιλύουν το πρόβλημα 1 (P1s0) ή το επιλύουν με 1 ή 2 τρόπους (P1s1, P1s2), και (β) επιλύουν το πρόβλημα βασιζόμενοι μόνο στην λεκτική περιγραφή του προβλήματος. Παρατηρούμε ότι οι μαθητές που δεν καταφέρνουν να φέρουν επιπλέον βοηθητικές γραμμές στο σχήμα, φτάνουν σε χαμηλά ή μέτρια επίπεδα ευχέρειας και ευελιξίας καθώς δεν μπορούν να εμφανίσουν λύσεις σε όλους τους χώρους λύσεων. Οι μαθητές αυτοί επίσης παγιδεύονται σε χαμηλά ποσοστά πρωτοτυπίας στις λύσεις τους, καθώς αυτές οι λύσεις εμφανίζονται σε ποσοστά 24%, 37% και 45% αντίστοιχα στο σύνολο των μαθητών.

Ο Πίνακας 8 παρουσιάζει τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών όσον αφορά την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία στα γεωμετρικά προβλήματα που κατασκεύασαν. Το εύρος των προβλημάτων που κατασκευάστηκαν για όλους τους μαθητές είναι από 0 έως 4 ενώ ο μέσος όρος των προβλημάτων που κατασκευάστηκαν είναι 1.27. Στον πίνακα, το Fluj, j=0, 1, 2, 3, 4 αναφέρεται στον αριθμό των διαφορετικών προβλημάτων που κατασκευάστηκαν. Σχεδόν οι μισοί μαθητές κατασκεύασαν μόνο ένα πρόβλημα (49%), ενώ το ποσοστό των μαθητών που κατασκεύασαν περισσότερα από ένα γεωμετρικά προβλήματα είναι 30%. Το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών (70%) εμφανίζει χαμηλή ευελιξία 0-10, το 9% παρουσιάζει μέτρια ευελιξία 11-19, ενώ το 21% παρουσιάζει υψηλή ευελιξία 20-40. Τέλος, παρατηρούμε ότι η πρωτοτυπία που δείχνουν οι μαθητές είναι σε χαμηλότερα επίπεδα. Το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών (74%) εμφανίζει χαμηλή πρωτοτυπία (0-10), το 19% παρουσιάζει μέτρια πρωτοτυπία 11-19, ενώ το 7% παρουσιάζει υψηλή πρωτοτυπία.

Flu0	**Flu1**	**Flu2**	**Flu3**	**Flu4**
21%	49%	17%	9%	4%
Flex (0-10)	**Flex (11 – 19)**	**Flex (20-29)**	**Flex (30-40)**	
70%	9%	13%	8%	
Or (0-10)	**Or (11-19)**	**Or (20-30)**		

74%	19%	7%

Πίνακας 8: Ποσοστά επιτυχίας για τις διαστάσεις τις μαθηματικής δημιουργικότητας στην κατασκευή γεωμετρικών προβλημάτων.

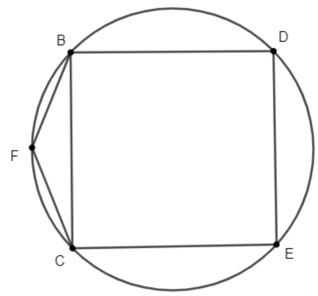
Ο Πίνακας 9 παρουσιάζει τα προβλήματα που κατασκεύασε ο πιο δημιουργικός μαθητής. Αυτός ο μαθητής, εκτός από το ότι κατασκεύασε τα προβλήματα, κατάφερε να τα λύσει σωστά. Τα 3 πρώτα προβλήματα λύνονται με το σχήμα που δίνεται ενώ το τέταρτο πρόβλημα χρησιμοποιεί πρόσθετες κατασκευές. Η ευχέρεια αυτού του μαθητή βαθμολογείται με 4, η ευελιξία με 40 ενώ η πρωτοτυπία με 22.

Πρόβλημα 1: Το σχήμα περιέχει: το τετράγωνο BCDE και τον κύκλο που εγγράφεται σε αυτό το τετράγωνο. Βρείτε το εμβαδόν του κύκλου που δεν καλύπτεται από το τετράγωνο αν η πλευρά του τετραγώνου είναι 5 cm.

Πρόβλημα 2: Το σχήμα περιέχει: το τετράγωνο BCDE και τον κύκλο που εγγράφεται σε αυτό το τετράγωνο. Βρείτε το κέντρο του κύκλου.

Πρόβλημα 3: Το σχήμα δείχνει μια κυκλική αυλή η οποία στο εσωτερικό της περιέχει μια τετράγωνη πισίνα. Αν η περίμετρος της κυκλικής αυλής είναι 310,4 m βρείτε τις διαστάσεις της πισίνας.

Πρόβλημα 4: Το σχήμα περιέχει: το τετράγωνο BCDE και τον κύκλο που εγγράφεται σε αυτό το τετράγωνο. Αν το F είναι το σημείο του τόξου BC, βρείτε τη γωνία $\widehat{BFC}$.



Πίνακας 9: Τα γεωμετρικά προβλήματα που κατασκεύασε ο πιο δημιουργικός μαθητής.

Προκειμένου να διερευνηθεί η σχέση μεταξύ κατανόησης γεωμετρικού σχήματος και μαθηματικής δημιουργικότητας στην κατασκευή προβλημάτων, πραγματοποιήθηκε ανάλυση πολλαπλής παλινδρόμησης με ανεξάρτητες μεταβλητές τις μεταβλητές κατανόησης γεωμετρικών σχημάτων (αντιληπτική αντίληψη, αλγοριθμική σκέψη, λειτουργική κατανόηση) και με εξαρτημένες μεταβλητές τις διαστάσεις της μαθηματικής δημιουργικότητας ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Enter, λήφθηκαν στατιστικά σημαντικά μοντέλα πρόβλεψης για κάθε εξαρτημένη μεταβλητή (Ευχέρεια: $R^2 = 0.32$, $F = 14.681$, $p < 0.05$; Ευελιξία: $R^2 = 0.22$, $F = 17.156$, $p < 0.05$; Πρωτοτυπία: $R^2 = 0.18$, $F = 18.215$, $p < 0.05$). Ο Πίνακας 10 παρουσιάζει τα αποτελέσματα της ανάλυσης πολλαπλής παλινδρόμησης.

		Αντιληπτική Κατανόηση		**Αλγοριθμική Σκέψη**		**Λειτουργική Κατανόηση**	
		b	p	b	p	b	p
Μαθηματική Δημιουργικότητα	**Ευχέρεια**	.113	.041	.036	.077	.273	.001
	Ευελιξία	.214	.062	-.183	.019	.328	.024
	Πρωτοτυπία	.091	.072	-.194	.042	.173	.031

b = regression coefficient and p = p-value

Πίνακας 10: Πολλαπλή ανάλυση παλινδρόμησης με ανεξάρτητες μεταβλητές τη σύλληψη γεωμετρικού σχήματος και εξαρτημένες τις διαστάσεις της μαθηματικής δημιουργικότητας κατά την κατασκευή γεωμετρικών προβλημάτων.

Η ανάλυση παλινδρόμησης δίνει ενδιαφέροντα αποτελέσματα για τις συνιστώσες του θέματος. Το πρώτο αποτέλεσμα που συμπεραίνουμε είναι ότι η αντιληπτική κατανόηση γεωμετρικού σχήματος επηρεάζει θετικά τις μεταβλητές της δημιουργικότητας: την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία. Ωστόσο, αυτή η επιρροή δεν είναι στατιστικά σημαντική για την ευελιξία και την πρωτοτυπία ($p > 0.05$). Το δεύτερο αποτέλεσμα είναι ότι η αλγοριθμική σκέψη σχετίζεται αρνητικά με τις συνιστώσες της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας, αφού οι σταθμισμένοι συντελεστές παλινδρόμησης b είναι αρνητικοί αριθμοί για αυτές τις συνιστώσες. Συγκεκριμένα, η ανάλυση δεδομένων έδειξε ότι η αλγοριθμική σκέψη είναι ένας στατιστικά σημαντικός προγνωστικός παράγοντας ευελιξίας (b = -0.183, p = 0.019) και πρωτοτυπίας (b = -0.194, p = 0.042). Το αρνητικό σύμβολο b δείχνει ότι όσο πιο βαθιά ριζωμένη είναι η αλγοριθμική σκέψη των μαθητών, τόσο μειώνεται η απόδοση στα συστατικά στοιχεία της μαθηματικής δημιουργικότητας. Ωστόσο, η επίδραση της αλγοριθμικής σκέψης δεν επηρεάζει την εμφάνιση της ευχέρειας ($p > 0.05$).

Ένα άλλο αποτέλεσμα της ανάλυσης πολλαπλής παλινδρόμησης σχετίζεται με τη σχέση μεταξύ της λειτουργικής κατανόησης γεωμετρικού σχήματος και των συνιστωσών της μαθηματικής δημιουργικότητας. Συγκεκριμένα, διαπιστώθηκε ότι η λειτουργική σύλληψη ενός γεωμετρικού σχήματος είναι ένας στατιστικά σημαντικός παράγοντας πρόβλεψης των συνιστωσών της μαθηματικής δημιουργικότητας: ευχέρεια (b = 0.273, p = 0.001), ευελιξία (b = 0.328, p = 0.024) και πρωτοτυπία. (b = 0.173, p = 0.031). Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές που αντιλαμβάνονται το γεωμετρικό σχήμα λειτουργικά μέσω της αναδιαμόρφωσης του σχήματος ή της εισαγωγής βοηθητικών γραμμών επιτυγχάνουν υψηλότερα επίπεδα ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας.

4.2 Αποτελέσματα της Δεύτερης Έρευνας

Πώς ανταποκρίνονται οι μαθητές σε έργα χωρικής ικανότητας και σε ένα πρόβλημα γεωμετρίας με πολλαπλές λύσεις;

Κατηγορία	Έργο	Ποσοστό Επιτυχίας (%)
Οπτικοποίηση (Vz)	Σύνθεση Σχήματος (Fb)	28%
	Δίπλωμα Σχήματος (Pf)	70%
	Ανάπτυγμα Σχήματος (Sd)	53%
Σχέσεις εννοιών στο Χώρο (Sr)	Σύγκριση Κύβων (Cc)	80%
	Περιστροφή Καρτών (Cr)	93%
	Χέρια (Ha)	70%
Ευελιξία Διεκπεραίωσης (Cf)	Κρυμμένες Φιγούρες (Hf)	41%
	Κρυμμένα Μοτίβα (Hp)	15%
	Επικάλυψη Σχήματος (Of)	73%

Πίνακας 11: Ποσοστά επιτυχίας ανά έργο χωρικής ικανότητας.

Ο Πίνακας 11 παρουσιάζει τα ποσοστά επιτυχίας στην οπτικοποίηση, τις σχέσεις εννοιών στο χώρο και την ευελιξία διεκπεραίωσης. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, το ποσοστό επιτυχίας διαφέρει ανάλογα με την κατηγορία στην οποία ανήκει το έργο. Τα υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας εμφανίστηκαν στις εργασίες «περιστροφής καρτών» (93%) και «σύγκρισης κύβων» (80%). Ωστόσο, οι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες στις εργασίες «σύνθεση σχήματος» (28%), «κρυμμένα μοτίβα» (15%) και «κρυμμένες φιγούρες» (41%).

Σύμφωνα με το σχήμα 14, οι λύσεις που παρείχαν οι μαθητές βασίστηκαν σε μία (PS2, PS3.1-PS3.2, PS4.1-PS4.2, PS5.1, PS5.2) ή περισσότερες (PS1.1-PS1.2, PS.5.3) βοηθητικές κατασκευές. Στις λύσεις στις οποίες χρησιμοποιήθηκε η σύγκριση τριγώνων, η ιδιότητα της κάθετης διαμέσου, η ομοιότητα και το Πυθαγόρειο θεώρημα, οι βοηθητικές κατασκευές δημιούργησαν υποσχήματα μέσα στο δεδομένο σχήμα. Στις λύσεις στις οποίες οι μαθητές διπλασίασαν το τρίγωνο (γύρω από την υποτείνουσα) ή τη διάμεσο, η βοηθητική κατασκευή ήταν εκτός του δεδομένου σχήματος. Στη λύση στην οποία οι μαθητές κατασκεύασαν έναν ρόμβο για να λύσουν το πρόβλημα, ένα μέρος της βοηθητικής κατασκευής ήταν μέσα και ένα μέρος έξω από το δεδομένο σχήμα.

Ο Πίνακας 12 παρουσιάζει τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών όσον αφορά την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία στις λύσεις τους στο γεωμετρικό πρόβλημα. Σχεδόν οι μισοί μαθητές (48%) έλυσαν το πρόβλημα με 2 ή 3 τρόπους, ενώ αρκετά υψηλό είναι και το ποσοστό των μαθητών που έλυσαν το πρόβλημα με 4 ή 5 τρόπους (18%). Παρόλο που η ευχέρεια των μαθητών ήταν σε ικανοποιητικό επίπεδο, ένα μεγάλο ποσοστό (34%) των μαθητών είτε βρήκε μια είτε δεν έδωσε καμία απολύτως λύση. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα αντίστοιχα ποσοστά ευχέρειας και ευελιξίας είναι αρκετά κοντά, με την ευελιξία των λύσεων των μαθητών να είναι χαμηλότερη. Αντίθετα, παρατηρούμε ότι η πρωτοτυπία των λύσεων που προκύπτουν με βάση τη συχνότητα της λύσης σε όλους τους μαθητές είναι σε χαμηλότερα επίπεδα. Πιο συγκεκριμένα, το 52% των μαθητών δείχνει χαμηλή πρωτοτυπία, το 32% δείχνει μέτρια πρωτοτυπία ενώ μόνο το 9% δείχνει υψηλή πρωτοτυπία στις λύσεις τους.

Ευχέρεια	Ποσοστό (%)	Ευελιξία	Ποσοστό (%)	Πρωτοτυπία	Ποσοστό (%)
0	10%	0	10%	0-20	59%
1	24%	10	34%	20-40	32%
2	32%	11	32%	40^{+}	9%
3	16%	20-21	16%		
4	10%	22	5%		
5	8%	30+	3%		

Πίνακας 12: Ποσοστά για κάθε διάσταση της μαθηματικής δημιουργικότητας.

Ποια είναι η σχέση μεταξύ της χωρικής ικανότητας και των διαστάσεων της μαθηματικής δημιουργικότητας στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων πολλαπλών λύσεων;

Ο Πίνακας 13 παρουσιάζει τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στη χωρική οπτικοποίηση, τις σχέσεις εννοιών στο χώρο και την ευελιξία διεκπεραίωσης σύμφωνα με τη βαθμολογία τους όσον αφορά την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία τους. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, μαθητές με χαμηλές βαθμολογίες ευχέρειας και ευελιξίας έλυσαν σωστά μόνο κάποια έργα σχέσεων εννοιών του χώρου. Το ποσοστό επιτυχίας τους στην οπτικοποίηση και την ευελιξία διεκπεραίωσης ήταν χαμηλό. Αντίθετα, οι μαθητές με υψηλή βαθμολογία ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας έλυσαν σωστά όχι μόνο εργασίες που απαιτούν απλή αίσθηση του χώρου αλλά και σχεδόν όλες τις εργασίες χωρικής οπτικοποίησης και ευελιξίας διεκπεραίωσης. Η επιτυχία των μαθητών σε έργα χωρικών ικανοτήτων αυξήθηκε, καθώς αυξήθηκε η βαθμολογία της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας.

Διαστάσεις Δημιουργικότητας	Βαθμολογία	Πλήθος	Οπτικοποίηση (%)	Σχέσεις εννοιών στο χώρο (%)	Ευελιξία διεκπεραίωσης (%)
Ευχέρεια	0	9	22.2	51.8	11.1
	10	23	27.2	76.7	30.1
	11	30	46.4	78.4	39.6
	20-21	15	66.2	86.5	41.8
	22	9	85.2	100	81.4
	30+	8	95.8	100	87.5

Ευελιξία	0	9	22.2	51.8	11.1
	0.2	32	34.5	76.5	29.3
	0.4	30	38.5	80.3	38.4
	0.6	15	74.8	93.1	49.5
	0.8	5	93.3	100	100
	1	3	100	100	100
Πρωτοτυπία	0-20	41	47.7	69.1	35.6
	20-40	50	51.3	76	47.3
	40+	3	100	100	100

Πίνακας 13: Ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στις χωρικές ικανότητες σύμφωνα με τη βαθμολογία ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας.

Για να διερευνηθεί περαιτέρω η σχέση μεταξύ χωρικής ικανότητας και μαθηματικής δημιουργικότητας, πραγματοποιήθηκε ανάλυση πολλαπλής παλινδρόμησης χρησιμοποιώντας τις χωρικές ικανότητες (χωρική οπτικοποίηση, σχέσεις εννοιών στο χώρο και ευελιξία διεκπεραίωσης) ως ανεξάρτητες μεταβλητές και τις διαστάσεις της μαθηματικής δημιουργικότητας (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία) ως εξαρτημένες μεταβλητές. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Enter, προέκυψε ένα σημαντικό μοντέλο για καθένα από τα χαρακτηριστικά της δημιουργικότητας (Fluency: $F = 11.017$, $p = 0.001$; Ευελιξία: $F = 9.571$, $p = 0.003$; Πρωτοτυπία: $F = 10.352$, $p = 0.012$). Ο Πίνακας 14 παρουσιάζει τα αποτελέσματα της ανάλυσης παλινδρόμησης και δείχνει τους συντελεστές και το ποσοστό διακύμανσης.

Σύμφωνα με τα ευρήματα, η οπτικοποίηση μπορεί να είναι στατιστικά σημαντικός προγνωστικός δείκτης ευελιξίας ($\beta = 0.115$, $p = 0.26$) και πρωτοτυπίας ($\beta = 0.166$, $p= 0.029$), αποδεικνύοντας ότι έχει θετική επίδραση στις δύο αυτές διαστάσεις. Μάλιστα, εξηγεί το 10% της διακύμανσης στη συνολική απόδοση της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας, αντίστοιχα. Όσον αφορά τη δεύτερη συνιστώσα της χωρικής ικανότητας, δηλαδή τις σχέσεις εννοιών στο χώρο, φαίνεται ότι δεν αποτελεί στατιστικά σημαντικό προγνωστικό παράγοντα των διαστάσεων της δημιουργικότητας ($p > 0.05$). Η ανάλυση πολλαπλής παλινδρόμησης αποκαλύπτει επίσης ότι η ευελιξία διεκπεραίωσης μπορεί να είναι στατιστικά σημαντικός παράγοντας πρόβλεψης όλων των διαστάσεων της μαθηματικής δημιουργικότητας, έχοντας θετική επίδραση σε όλες: ευχέρεια ($\beta = 0.327$, $p = 0.001$), ευελιξία ($\beta = 0.304$, $p = 0.003$) και πρωτοτυπία ($\beta = 0.298$, $p = 0.001$). Η ευελιξία διεκπεραίωσης εξηγεί το 11%, 10% και 10% της διακύμανσης στη συνολική απόδοση της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας, αντίστοιχα.

		Οπτικοποίηση		Σχέσεις Εννοιών στο Χώρο		Ευελιξία Διεκπεραίωσης	
		B (SE)	*β*	*B* (SE)	*β*	*B* (SE)	*β*
Μαθηματική Δημιουργικότητα	**Ευχέρεια**	0.06 (0.01)	0.189	-0.02 (0.04)	-0.040	0.12 (0.01)	0.327**
	Ευελιξία	0.04 (0.03)	0.115*	0.01 (0.07)	0.032	0.09 (0.02)	0.304**
	Πρωτοτυπία	0.05 (0.03)	0.166*	0.03 (0.09)	0.102	0.11 (0.02)	0.298**

$R^2 = 0.107$ για ευχέρεια, $R^2 = 0.094$ για ευελιξία, $R^2 = 0.102$ για πρωτοτυπία, * $p < 0.05$, ** $p < 0.01$.

Πίνακας 14: Πολλαπλή ανάλυση παλινδρόμησης που διερευνά τη σχέση μεταξύ χωρικών ικανοτήτων και διαστάσεων μαθηματικής δημιουργικότητας.

4.3 Αποτελέσματα της Τρίτης Έρευνας

Αρχικά αναλύουμε τον αριθμό των λύσεων που έδωσαν οι μαθητές για κάθε πρόβλημα. Ο Πίνακας 15, δείχνει τα ποσοστά των μαθητών που κατάφεραν να λύσουν κάθε πρόβλημα με έναν, δύο ή περισσότερους από δύο τρόπους. Με άλλα λόγια, ο Πίνακας 15 δείχνει την ευχέρεια των μαθητών ανά πρόβλημα.

		% στο σύνολο των μαθητών			
		Πρόβλημα 1	Πρόβλημα 2	Πρόβλημα 3	Πρόβλημα 4
Αριθμός Λύσεων	Καμία	24.5	41.5	25.9	43.5
	Μία	47.6	49	45.6	40.1
	Δύο	23.8	8.2	22.4	12.9
	Τρεις ή Παραπάνω	4.1	1.3	6.1	2.7

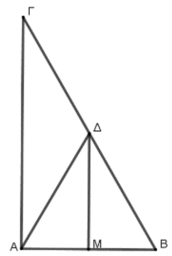
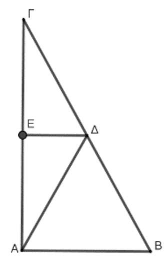
Πίνακας 15: Συνολική ευχέρεια λύσεων ανά πρόβλημα.

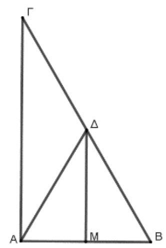
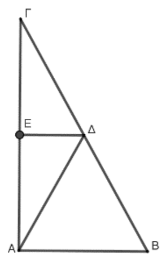
Για παράδειγμα, όσον αφορά την ευχέρεια των μαθητών στο πρόβλημα 1, το 24,5% των μαθητών δεν μπόρεσε να το λύσει, σχεδόν οι μισοί μαθητές βρήκαν μία λύση, το 23,8% το έλυσαν με δύο τρόπους, το 3,4% των μαθητών παρήγαγε τρεις λύσεις και το 0,7% των μαθητών κατάφερε να το λύσει με τέσσερις τρόπους. Αυτό σημαίνει ότι μόνο το 4,1% του μαθητικού πληθυσμού που συμμετείχε στο τεστ έλυσε το πρόβλημα με περισσότερους από δύο τρόπους. Ομοίως, στα άλλα προβλήματα η πλειοψηφία των μαθητών παρήγαγε μία λύση (εκτός από το πρόβλημα 4 όπου η πλειοψηφία των μαθητών δεν έδωσε καμία λύση) και μια πολύ μικρή μειοψηφία παρήγαγε περισσότερες από δύο λύσεις.

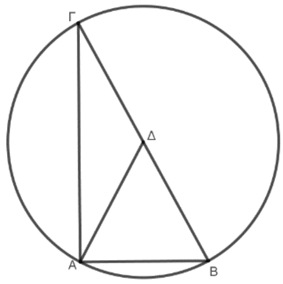
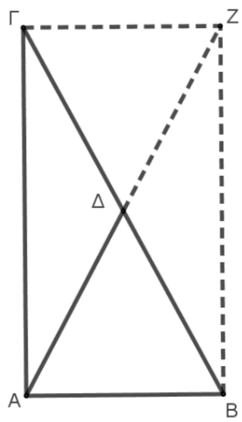
Όπως εξηγήθηκε στις προηγούμενες ενότητες, για να υπολογίσουμε τη διάσταση της ευελιξίας, κατηγοριοποιήσαμε τις λύσεις των μαθητών σε συλλογικούς χώρους λύσεων. Για το πρόβλημα 1, εντοπίσαμε πέντε συλλογικούς χώρους λύσεων, για τα προβλήματα 2 και 3 εντοπίσαμε τρεις χώρους λύσεων και, τέλος, για το πρόβλημα 4, προσδιορίσαμε τέσσερις χώρους λύσεων. Για να εξηγήσουμε πώς κατηγοριοποιήσαμε τις λύσεις των μαθητών, δίνουμε ένα λεπτομερές παράδειγμα με το πρόβλημα 1 στο Σχήμα 15. Στη συνέχεια, στο Σχήμα 16, παρουσιάζουμε εν συντομία τους συλλογικούς χώρους λύσεων που προσδιορίζονται στα προβλήματα 2, 3 και 4.

Το Σχήμα 15 παρουσιάζει τους πέντε συλλογικούς χώρους λύσεων που προσδιορίστηκαν και επίσης, τα ποσοστά των μαθητών που χρησιμοποίησαν την κάθε συγκεκριμένη λύση για το πρόβλημα 1. Αυτό το σχήμα μας βοηθά να παρατηρήσουμε την ευελιξία της ομάδας μαθητών. Οι μαθητές παρήγαγαν δέκα διαφορετικές λύσεις που αντιστοιχούν σε πέντε χώρους λύσεων. Οι περισσότεροι μαθητές (39,2%) χρησιμοποίησαν τη λύση που περιλαμβάνει τη σύγκριση τριγώνων (T1com1, T1com2). Οι μαθητές κατασκεύασαν τη διάμεσο του τριγώνου που ενώνει το μέσο των πλευρών και στη συνέχεια συνέκριναν τα δύο τρίγωνα. Η απόδειξη που παρουσιάζει το σχολικό εγχειρίδιο βασίζεται στην κατασκευή του διάμεσου και στην παρατήρηση ότι είναι και ύψος (T1med1). Είναι αξιοσημείωτο ότι αυτή η λύση χρησιμοποιήθηκε από λιγότερους μαθητές (27,1%). Παρόλο που οι μαθητές χρησιμοποίησαν την ίδια βοηθητική κατασκευή - τη διάμεσο - τα ευρήματά μας δείχνουν ότι οι μαθητές είναι πιο εξοικειωμένοι με τη σύγκριση τριγώνων. Ωστόσο, αυτό δεν ισχύει όσον αφορά την ομοιότητα τριγώνων, καθώς μόνο το 6,2% των μαθητών τη χρησιμοποίησε για να επιλύσει το πρόβλημα. Αυτό δείχνει ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην αναγνώριση της αναλογικότητας που είναι ενσωματωμένη στα τρίγωνα που προέκυψαν ως αποτέλεσμα της τροποποίησης του σχήματος.

Όλες οι λύσεις που έδιναν οι μαθητές απαιτούσαν την κατασκευή βοηθητικών γραμμών. Μάλιστα, όσον αφορά τις βοηθητικές γραμμές, οι λύσεις διακρίνονται σε δύο ευρύτερες κατηγορίες ως προς την τελική διαμόρφωση του σχήματος. Στον πρώτο και τον τέταρτο χώρο λύσης, οι βοηθητικές γραμμές δημιουργούν υποσχήματα μέσα στο δεδομένο σχήμα. Στους δεύτερους, τρίτους και πέμπτους χώρους λύσης η κατασκευή των βοηθητικών γραμμών έχει ως αποτέλεσμα την κατασκευή σχημάτων, μέρος των οποίων είναι το δεδομένο σχήμα. Το ποσοστό των μαθητών που χρησιμοποιούν την πρώτη κατηγορία βοηθητικών γραμμών είναι υψηλότερο από τη δεύτερη, γεγονός που υποδηλώνει ότι η τελευταία νοητική επεξεργασία είναι πολύ πιο απαιτητική. Είναι προφανές ότι ένα γεωμετρικό σχήμα μπορεί να τροποποιηθεί με πολλούς τρόπους, καθένας από τους οποίους μπορεί να οδηγήσει τον μαθητή σε μια διαφορετική λύση της εργασίας. Ωστόσο, ορισμένοι μαθητές κατασκεύασαν την ίδια βοηθητική γραμμή, αλλά έλυσαν την εργασία διαφορετικά. Αυτοί οι μαθητές αντιλαμβάνονται λειτουργικά το σχήμα με τον ίδιο τρόπο, αλλά έχουν διαφορετική λεκτική αντίληψη καθώς, για να βρουν τις λύσεις, χρησιμοποίησαν διαφορετικές ιδιότητες και θεωρίες για την ίδια βοηθητική κατασκευή.

1ος Χώρος Λύσεων - Θεώρημα Διαμέσου & Σύγκριση τριγώνων	**<u>1α Λύση</u> (P1med1)** Φέρουμε την διάμεσο ΔΜ του τριγώνου ΑΔΒ. Το ΔΜ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε ΔΜ//ΑΓ. Αφού ΑΓ⊥ΑΒ τότε και ΔΜ ⊥ΑΒ. Άρα, ΔΜ διάμεσος και ύψος τριγώνου ΑΔΒ, οπότε ΑΔΒ ισοσκελές. Άρα, ΑΔ=ΔΒ=$\frac{ΒΓ}{2}$.	
	<u>1β Λύση</u> (T1med2) 4,1% Φέρουμε την διάμεσο ΔΕ του τριγώνου ΑΔΓ. Το ΔΕ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε ΔΕ//ΑΒ. Αφού ΑΒ⊥ΑΓ τότε και ΔΕ ⊥ΑΒ. Άρα, ΔΕ διάμεσος και ύψος του τριγώνου ΑΔΓ, οπότε ΑΔΓ ισοσκελές. Άρα, ΑΔ=ΔΓ=$\frac{ΒΓ}{2}$.	
	<u>1γ Λύση</u> (T1com1) 35,1% Φέρουμε τη διάμεσο ΔΜ του τριγώνου ΑΔΒ. Το ΔΜ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου οπότε ΔΜ//ΑΒ. Αφού ΑΓ⊥ΑΒ τότε και ΔΜ ⊥ΑΒ.	

	Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΒΜΔ: (ι) Ορθογώνια στο Μ. (ιι) ΔΜ κοινή. (ιιι) ΑΜ=ΜΒ. Άρα, από κριτήριο ΠΓΠ ίσα τα τρίγωνα. Άρα, και ΑΔ=ΔΒ=$\frac{ΒΓ}{2}$.	
	<u>1^{δ} Λύση</u> (T1com2) 4,1% Φέρουμε τη διάμεσο ΔΕ του τριγώνου ΑΔΓ. Το ΔΕ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε ΔΕ//ΑΒ. Αφού ΑΒ⊥ΑΓ τότε και ΔΕ⊥ΑΒ. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΔΕΑ και ΔΕΓ: (ι) Ορθογώνια στο Ε. (ιι) ΔΕ κοινή. (ιιι) ΑΕ=ΓΕ. Άρα, από κριτήριο ΠΓΠ ίσα τα τρίγωνα. Άρα, και ΑΔ=ΔΓ=$\frac{ΒΓ}{2}$.	

$2^{ος}$ Χώρος Λύσεων - Τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο	**(P1cir) 4,1%** $Α=90^o$ Εγγράφουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ σε κύκλο. Αφού, η γωνία $Α=90^o$ το τρίγωνο θα βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα, ΒΓ διάμετρος και Δ κέντρο του κύκλου.	
$3^{ος}$ Χώρος Λύσεων – Διπλασιασμός Διαμέσου & Τριγώνου	**<u>$3^α$ Λύση</u> (T1dom) 14,2%** Διπλασιάζουμε την διάμεσο ΑΔ κατά τμήμα ΔΖ. Οι διαγώνιες διχοτομούνται, άρα ΑΒΖΓ παραλληλόγραμμο. Όμως, $Α=90^o$, άρα ΑΒΖΓ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Άρα, ΑΖ=ΒΓ ως διαγώνιες ορθογωνίου και επειδή διχοτομούνται: $ΑΔ=ΔΖ=ΔΒ=ΔΓ=\frac{ΒΓ}{2}$.	

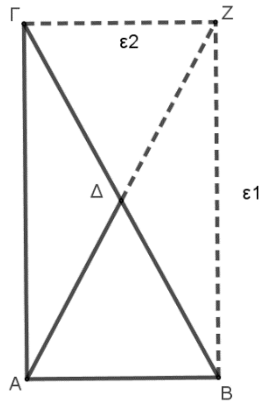
	<u>$3^β$ Λύση</u> (T1dot) 13,5%
	
	Από το Β φέρουμε παράλληλη στην ΑΓ, έστω (ε1)//ΑΓ.
	
	Από το Γ φέρουμε παράλληλη στην ΑΒ, έστω (ε2)//ΑΒ.	

Έστω Ζ το σημείο τομής των (ε1) και (ε2).

Το ΑΒΖΓ είναι ορθογώνιο, αφού Α=90^o.

Άρα, ΑΕ=ΒΓ ως διαγώνιες και επειδή διχοτομούνται:

ΑΔ=ΔΖ=ΔΒ=ΔΓ=$\frac{ΒΓ}{2}$.



4ος Χώρος Λύσεων – Ομοιότητα Τριγώνων

<u>4^α Λύση</u> (T1sim1) 4,7%

Φέρω τη διάμεσο ΔΜ του τριγώνου ΑΔΒ.

Το ΔΜ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών, άρα

ΔΜ//=$\frac{1}{2}$ ΑΓ.

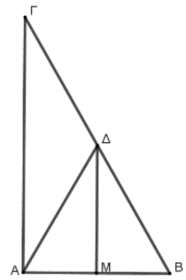
Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΜΑ:

(ι) Α = Μ =90^o .

(ιι) ΜΑ=$\frac{1}{2}$ ΑΒ.

(ιιι) ΔΜ=$\frac{1}{2}$ ΑΓ.

Άρα, τα ΑΒΓ και ΔΜΑ έχουν δύο πλευρές ανάλογες και την περιεχόμενη γωνία ίση, άρα είναι όμοια με λόγο $\frac{1}{2}$. Άρα, ΑΔ=$\frac{1}{2}$ ΒΓ.

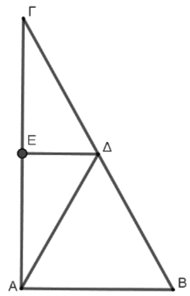
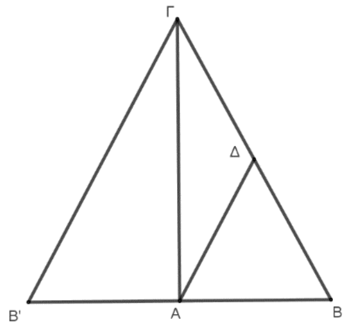


<u>4^β Λύση</u> (T1sim2) 1,4%

Φέρω τη διάμεσο ΔΕ του τριγώνου ΑΔΓ.
Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών, άρα ΔΕ//= $\frac{1}{2}$ ΑΒ.

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ:

(ι) Α = Ε =90^o .

	(ιι) ΕΔ=$\frac{1}{2}$ ΑΒ. (ιιι) ΕΑ=$\frac{1}{2}$ ΑΓ. Άρα, τα ΑΒΓ και ΑΕΔ έχουν δύο πλευρές ανάλογες και την περιεχόμενη γωνία ίση, άρα είναι όμοια με λόγο $\frac{1}{2}$. Άρα, ΑΔ=$\frac{1}{2}$ ΒΓ.	
5ος Χώρος Λύσεων - Midline	**<u>5 Λύση</u> (T1ext) 2%** Επεκτείνω την ΑΒ κατά τμήμα ΑΒ΄ με ΑΒ=ΑΒ΄. Από την στιγμή που Δ μέσο ΒΓ και Α μέσο Β΄Β έχουμε: ΔΑ//=$\frac{Β΄Γ}{2}$. (1) Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα Β΄ΓΑ και ΒΑΓ: (ι) Α= κοινή =90ο . (ιι) ΓΑ κοινή. (ιιι)Β΄Α=ΒΑ. Άρα, τα τρίγωνα ΒΆΓ=ΒΑΓ. Άρα, Β΄Γ=ΒΓ και Β΄ΓΒ ισοσκελές. (2) Από (1), (2): ΑΔ=$\frac{Β΄Γ}{2}=\frac{ΒΓ}{2}$.	

Σχήμα 15: Χώροι Λύσεων για το πρόβλημα 1

<table>
<tr>
<td rowspan="2">1^{ος} Χώρος Λύσεων – Midline</td>
<td>

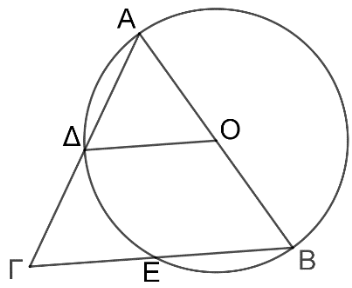
<u>1^α Λύση</u> (T2mid1)

Το ΔΟ=$\frac{1}{2}$ ΑΒ ως ακτίνα, αφού ΑΒ διάμετρος.

Το ΔΟ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών Δ και Ο των ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα (παράλληλη με την ΓΒ και διχοτομεί την ΑΒ).

Τότε ΔΟ=$\frac{1}{2}$ ΑΒ=$\frac{1}{2}$ ΒΓ.

Άρα, ΑΒ=ΒΓ.

</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>

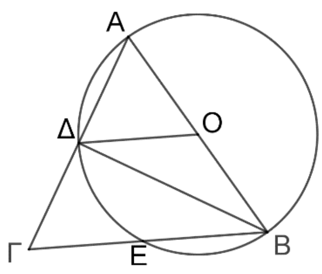
<u>2^β Λύση</u> (T2mid2)

Το Δ είναι μέσο του ΑΓ, αφού ΔΟ ενώνει το μέσο Ο με το Δ και ΟΔ//ΒΓ.

Φέρουμε ΔΒ διάμεσος του τριγώνου.

Η γωνία Δ1 βαίνει σε ημικύκλιο, άρα Δ1=90^o, άρα ΔΒ διάμεσος και ύψος του τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα, το ΑΒΓ είναι ισοσκελές, άρα ΑΒ=ΓΒ.

</td>
<td>


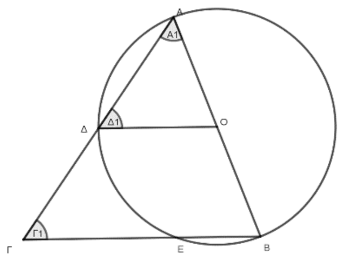
</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">2^{ος} Χώρος Λύσεων – Ίσες Αντίστοιχες Γωνίες</td>
<td>

<u>2^α Λύση (T2iso)</u>

ΔΟ=ΟΑ ως ακτίνες του κύκλου. Τότε το τρίγωνο ΔΟΑ είναι ισοσκελές. Άρα, οι γωνίες Δ1=Α1. (1)

Επιπλέον, ΔΟ//ΕΒ→ ΔΟ//ΓΒ, άρα οι γωνίες Δ1=Γ1 ως εντός εκτός και επί τα αυτά. (2)

Από (1), (2): Α1=Δ1=Γ1. Άρα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και ΑΒ = ΓΒ.

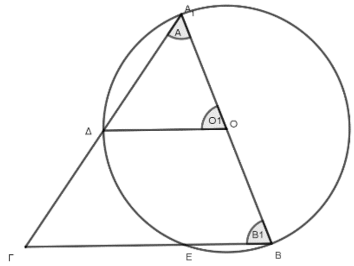
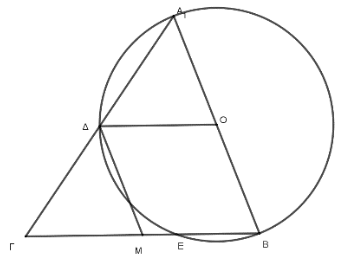
</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>

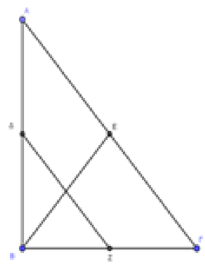
<u>2^β Λύση</u> (T2sim)

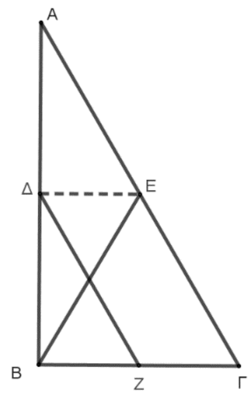
ΔΟ=ΟΑ ως ακτίνες του κύκλου. Τότε το τρίγωνο ΔΟΑ είναι ισοσκελές.

</td>
<td></td>
</tr>
</table>

	Επιπλέον, ΔΟ//ΕΒ→ ΔΟ//ΓΒ, άρα οι γωνίες Ο1=Β1 ως εντός εκτός και επί τα αυτά. Άρα, τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΑΒΓ έχουν δύο οξείες γωνίες ίσες μια προς μια, άρα είναι όμοια. Άρα, ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο αφού είναι όμοιο με το ισοσκελές ΑΟΔ. Άρα, ΑΒ=ΓΒ.	
3ος Χώρος Λύσεων – Ιδιότητες Ρόμβου	**<u>Λύση 3</u> (T2rho)** Φέρουμε παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ. Τότε αφού διέρχεται από το μέσο Δ της ΑΓ, θα διέρχεται και από το μέσο Μ της ΒΓ και ΜΔ= $\frac{1}{2}$ ΑΒ. ΕΒ//ΔΟ →ΜΒ//ΔΟ. Άρα, ΜΒ=ΔΟ= $\frac{1}{2}$ ΒΓ και ΟΔ=ΟΒ ως ακτίνες του κύκλου. Άρα, το ΔΟΜΒ ρόμβος → ΟΒ=ΜΒ → $\frac{1}{2}$ ΑΒ= $\frac{1}{2}$ ΒΓ → ΑΒ=ΒΓ.	

Πρόβλημα 3

1ος Χώρος Λύσεων – Βασικό Θεώρημα	**<u>1α Λύση</u> (T3the)** Από υπόθεση Δ μέσο ΑΒ και Ζ μέσο ΒΓ. Άρα, από γνωστή πρόταση ΔΖ//= $\frac{1}{2}$ ΑΓ. (1) Από γνωστή πρόταση έχω ΒΕ= $\frac{1}{2}$ ΑΓ. (2) Από (1), (2): ΔΖ=ΒΕ.	

	<u>1^{β} Λύση</u> (T3par) Από το Δ φέρω παράλληλη στην ΒΓ, αυτή θα περνάει από το Ε, αφού Δ και Ε μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Άρα, ΔΕ//ΒΓ και ΔΖ//ΑΓ. Άρα, ΔΖΓΕ παραλληλόγραμμο. Τότε ΔΖ=ΕΓ και ΕΓ= $\frac{1}{2}$ ΑΓ. Άρα, ΔΖ= $\frac{1}{2}$ ΑΓ. Όμως, ΒΕ= $\frac{1}{2}$ ΑΓ. Άρα, ΒΕ=ΔΖ.	
$2^{ος}$ Χώρος Λύσεων – Ομοιότητα	**<u>2^{α} Λύση</u> (T3sim)** Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΖ: (ι) Γωνία Β κοινή = 90^o. (ιι) ΒΖ= $\frac{1}{2}$ ΒΓ. (ιιι) ΒΔ= $\frac{1}{2}$ ΒΑ. Άρα, ΑΒΓ όμοιο με ΒΔΖ, με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$. Άρα, ΒΕ = $\frac{1}{2}$ ΑΓ. Όμως, ΒΕ = $\frac{1}{2}$ ΑΓ. Άρα, ΔΖ =ΒΕ.	

<table>
<tr>
<td rowspan="2">3ος Χώρος Λύσεων – Ιδιότητες Ορθογωνίου και Σύγκριση Τριγώνων</td>
<td>

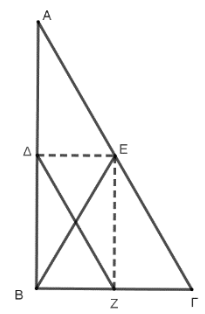
<u>3^{α} Τρόπος</u> (T3rec)

Φέρω ΔΕ // ΒΓ και ΕΖ // ΑΒ (Δ, Ε, Ζ μέσα).

Το ΔΕΖΒ παραλληλόγραμμο και αφού Β = 90^o τότε είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Άρα, οι διαγώνιοι του είναι ίσες, δηλαδή ΔΖ = ΕΒ.

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

<u>3^{β} Τρόπος</u> (T3Com)

Φέρω, ΕΖ//=$\frac{1}{2}$ ΑΒ.

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΔΒΖ και ΕΖΒ:

(ι) Β=Ζ=90^o

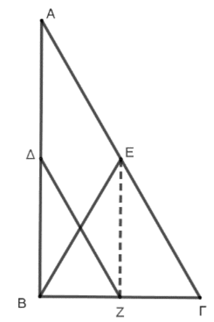
(ιι) ΒΖ κοινή

(ιιι) ΕΖ=$\frac{1}{2}$ ΑΒ=ΔΒ

Άρα, τα τρίγωνα ΔΒΖ και ΕΖΒ είναι ίσα.

Άρα, ΔΖ = ΒΕ.

</td>
<td>

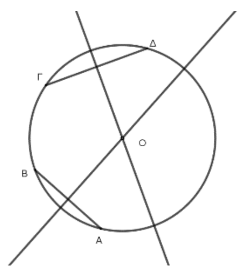


</td>
</tr>
</table>

Πρόβλημα 4

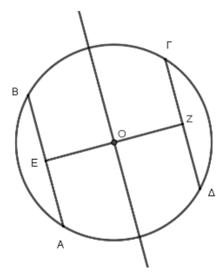
<table>
<tr>
<td>1ος Χώρος Λύσεων – Χορδή και Μεσοκάθετος</td>
<td>

<u>1^{α} Λύση</u> (T4cho)



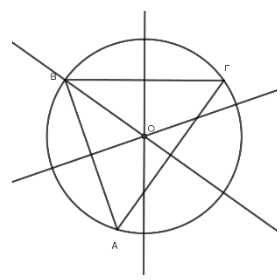
</td>
<td>

<u>1^{β} Λύση</u> (T4par)

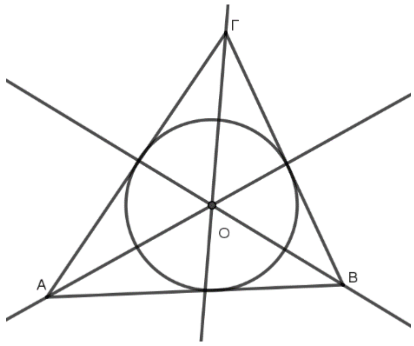
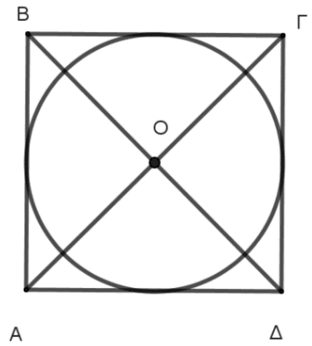
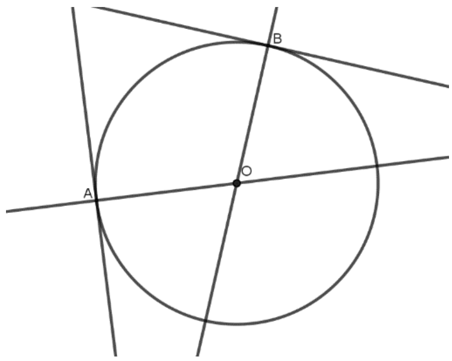
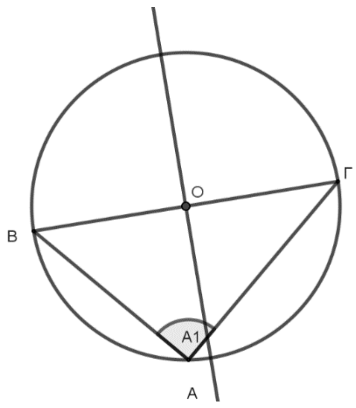


</td>
<td>

<u>1γ Λύση</u> (T4egt)



</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>2ος Χώρος Λύσεων – Διχοτόμος Γωνίας</td>
<td><u>2α Λύση</u> (T4bis)

</td>
<td><u>2β Λύση</u> (T4squ)

</td>
</tr>
<tr>
<td>3ος Χώρος Λύσεων – Εφαπτομένη Κύκλου</td>
<td colspan="2"><u>3α Λύση</u> (T4tan)

</td>
</tr>
<tr>
<td>4ος Χώρος Λύσεων – Ιδιότητες Εγγεγραμμένης Γωνίας</td>
<td colspan="2"><u>4α Λύση</u> (T4orm)

</td>
</tr>
</table>

Σχήμα 16: Χώροι Λύσεων για τα προβλήματα 2, 3, 4.

Έχοντας αναλύσει τις λύσεις των μαθητών και έχοντας εντοπίσει τους χώρους λύσεων για κάθε πρόβλημα, οι διαστάσεις της δημιουργικότητας ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία υπολογίστηκαν ξεχωριστά για κάθε πρόβλημα. Υπολογίστηκε επίσης η συνολική δημιουργικότητα. Πρώτα απ 'όλα, ο συντελεστής αξιοπιστίας του Cronbach's Alpha για τις διαστάσεις που εξετάστηκαν οι οποίες είναι η ευχέρεια, η ευελιξία και η πρωτοτυπία είναι 0,738, 0,754 και 0,781, αντίστοιχα, υποδηλώνοντας ότι τα προβλήματα έχουν σχετικά υψηλή εσωτερική συνέπεια. Επιπλέον, όλα τα προβλήματα επικυρώθηκαν ως προς το περιεχόμενο και την καταλληλότητα από δύο έμπειρους καθηγητές μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και δύο καθηγητές τριτοβάθμιας στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Οι λύσεις που έδωσαν οι μαθητές ταξινομήθηκαν ανάλογα με τη στρατηγική που χρησιμοποίησαν. Στη συνέχεια, οι τρεις συνιστώσες της δημιουργικότητας - ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία - καθώς και η συνολική δημιουργικότητα υπολογίστηκαν με βάση το σχήμα βαθμολόγησης που πρότεινε ο Leikin (2009) για την αξιολόγηση της απόδοσης στα προβλήματα πολλαπλών λύσεων. Έτσι, η ευχέρεια και η ευελιξία αντικατοπτρίζουν τον αριθμό των κατάλληλων και διαφορετικών λύσεων που παράγονται αντίστοιχα. Η Leikin (2009) χρησιμοποιεί ένα συγκεκριμένο σχήμα βαθμολογίας για τον υπολογισμό της ευελιξίας που είναι το εξής. 10 για την πρώτη λύση, 10 για μια πρόσθετη λύση αλλά από διαφορετικό χώρο λύσης, 1 για μια λύση που ανήκει σε έναν χώρο λύσης που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως αλλά διαφέρει στη στρατηγική και 0,1 για μια λύση που είναι σχεδόν ίδια με μια στρατηγική που έχει ήδη χρησιμοποιηθεί. Τέλος, η πρωτοτυπία βαθμολογείται από τον Leikin (2009) με 10, 1 και 0,1 ανάλογα με τον αριθμό των μαθητών που χρησιμοποίησαν μια συγκεκριμένη στρατηγική. Εάν λιγότερο από το 15% των μαθητών έχει χρησιμοποιήσει μια στρατηγική, τότε η πρωτοτυπία βαθμολογείται με 10. Εάν περισσότερο από το 40% των μαθητών έχει χρησιμοποιήσει μια συγκεκριμένη στρατηγική, τότε η πρωτοτυπία βαθμολογείται με 0,1. Εάν ένα ποσοστό μεταξύ 15% και 40% των μαθητών έχει χρησιμοποιήσει μια συγκεκριμένη στρατηγική, τότε η πρωτοτυπία βαθμολογείται με 1. Με άλλα λόγια, η πρωτοτυπία αξιολογήθηκε με βάση το ποσοστό εμφάνισης κάθε λύσης για όλους τους μαθητές. Έτσι, για παράδειγμα, στο πρόβλημα 1 και για τον πρώτο χώρο λύσης, κάθε λύση βαθμολογείται με 0,1, για τον τρίτο χώρο λύσης βαθμολογείται με 1, ενώ για το δεύτερο, τέταρτο και πέμπτο χώρο λύσεων, οι λύσεις βαθμολογούνται με 10. Η υψηλότερη βαθμολογία πρωτοτυπίας έφτασε το 21, πράγμα που σημαίνει ότι κανένας μαθητής δεν βρήκε όλες τις πρωτότυπες λύσεις. Ο μαθητής που πέτυχε την υψηλότερη βαθμολογία πρωτοτυπίας παρήγαγε λύσεις που περιελάμβαναν την κατασκευή βοηθητικών γραμμών που περιέχουν μέσα το δοθέν σχήμα του προβλήματος (T1cir, T1dot, T1ext). Για παράδειγμα, ο πίνακας 16 παρουσιάζει τις βαθμολογίες για την ευχέρεια, την ευελιξία, την πρωτοτυπία και τη συνολική δημιουργικότητα στο πρόβλημα 1. Αξίζει να σημειωθεί, ότι το πρόβλημα 1 υπολογίστηκε να έχει την υψηλότερη συνολική βαθμολογία δημιουργικότητας μεταξύ των τεσσάρων προβλημάτων.

Λύσεις	Ευχέρεια	Ευελιξία Flx_i	Πρωτοτυπία Or_i	Συνολική Δημιουργικότητα $Cr_i = Flx_i * Or_i$
T1med1	1	10	0.1	1
T1med2	1	0.1	0.1	0.01
T1com1	1	1	0.1	0.1
T1com2	1	0.1	0.1	0.01
T1cir	1	10	10	100
T1dom	1	10	1	10
T1dot	1	1	1	1
T1sim1	1	10	10	100
T1sim2	1	1	10	10
T1ext	1	10	10	100
Σύνολο	10	53.2	42.4	322.12

Πίνακας 16: Σκορ ευχέρειας – ευελιξίας – πρωτοτυπίας – συνολικής δημιουργικότητας για το πρόβλημα 1.

Σε προβλήματα πολλαπλών λύσεων που η διατύπωση συνοδεύεται από το σχετικό σχήμα (π.χ. πρόβλημα 1), απαιτείται η ενεργοποίηση του δεύτερου επιπέδου οπτικοποίησης για την ερμηνεία του γεωμετρικού σχήματος, καθώς και απαιτείται λειτουργική αντίληψη του σχήματος για την εκτέλεση τροποποιήσεων του σχήματος. Σε προβλήματα πολλαπλών λύσεων στα οποία δεν δίνεται το σχετικό σχήμα (π.χ. πρόβλημα 4), το πρώτο επίπεδο οπτικοποίησης είναι επίσης απαραίτητο για την κατασκευή του γεωμετρικού σχήματος. Όταν ένας μαθητής λύνει εργασίες σε αυτή την τελευταία κατηγορία, σημαίνει ότι έχει αναπτύξει τις αντίστοιχες ικανότητες οπτικοποίησης. Ένας άλλος τρόπος για να ελέγξουμε εάν οι μαθητές έχουν αναπτύξει τις απαραίτητες οπτικοποιητικές ικανότητες είναι να εξετάσουμε τα ποσοστά των σωστών λύσεων σε κάθε κατηγορία. Για κάθε κατηγορία προβλημάτων, δημιουργείται μια νέα μεταβλητή που σχετίζεται με την ικανότητα επίλυσης των συγκεκριμένων προβλημάτων ανάλογα με το αν δίνεται το σχετικό σχήμα.

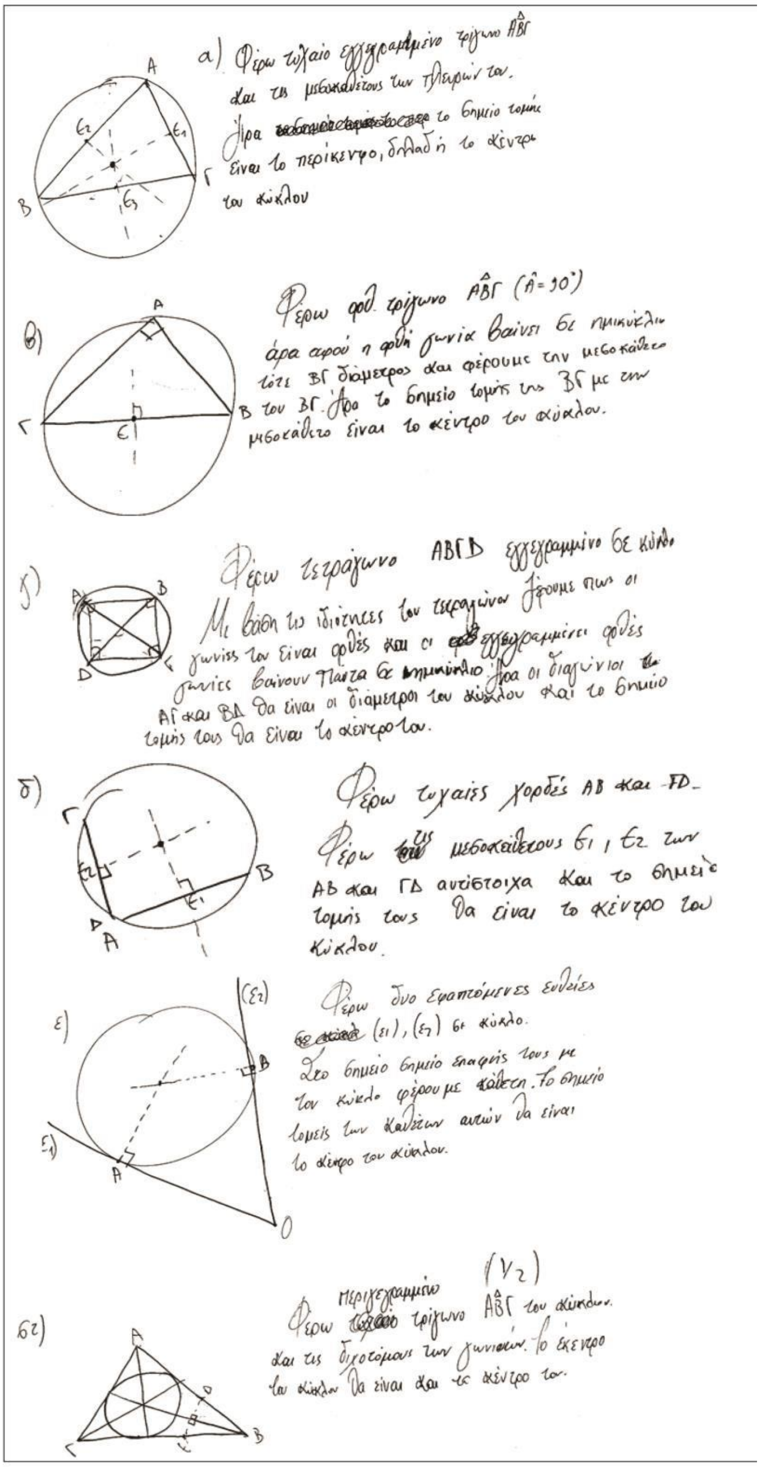
Όταν δίνεται το σχήμα, μπορεί να αξιολογηθεί το δεύτερο επίπεδο ικανότητας οπτικοποίησης, το οποίο αναφέρεται συγκεκριμένα στην ικανότητα ερμηνείας του γεωμετρικού σχήματος και τροποποίησης του. Όταν δεν δίνεται το σχήμα, μπορεί να αξιολογηθεί η ικανότητα κατασκευής και τροποποίησης ενός γεωμετρικού σχήματος προκειμένου να παραχθεί μια λύση. Πριν προχωρήσουμε στη διερεύνηση των σχέσεων μεταξύ της δημιουργικότητας των μαθητών, της οπτικοποίησης και της αντίληψης γεωμετρικών σχημάτων, το σχήμα 17 παρουσιάζει ένα παράδειγμα ενός μαθητή που λύνει το πρόβλημα 4 (πρόβλημα πολλαπλών λύσεων χωρίς το δεδομένο σχήμα) με έξι διαφορετικούς τρόπους. Σε αυτό το παράδειγμα, μπορεί κανείς να παρατηρήσει τον μαθητή χρησιμοποιώντας και τα δύο επίπεδα οπτικοποίησης, π.χ. η μετατροπή της λεκτικής περιγραφής στην κατασκευή του σχήματος και στη συνέχεια, η μετάβαση από το γεωμετρικό σχήμα στη λύση του προβλήματος με πολλούς τρόπους, όπου εμπλέκονται τόσο η λειτουργική όσο και η λεκτική αντίληψη του γεωμετρικού σχήματος.

Το επόμενο βήμα στην έρευνα, ήταν να μελετήσουμε σε μεγαλύτερο βάθος την επιρροή της παρουσίασης του προβλήματος συγκρίνοντας τις βαθμολογίες των συνιστωσών της δημιουργικότητας μεταξύ των δύο κατηγοριών Προβλημάτων. Επομένως, ο Πίνακας 17 παρουσιάζει τα περιγραφικά δεδομένα για την ευχέρεια, την ευελιξία, την πρωτοτυπία και τη συνολική δημιουργικότητα των μαθητών στις δύο κατηγορίες προβλημάτων ανάλογα με το αν η διατύπωση του προβλήματος συνοδεύεται από το σχετικό σχήμα ή όχι.

	Προβλήματα με δοσμένο σχήμα		Προβλήματα χωρίς δοσμένο σχήμα	
	x̄	SD	x̄	SD
Ευχέρεια	2.160	1.422	1.442	1.205
Ευελιξία	19.881	12.651	13.930	11.370
Πρωτοτυπία	2.891	5.001	3.925	5.989
Συνολική Δημιουργικότητα	58.701	121.932	67.274	136.483

Πίνακας 17: Περιγραφικά δεδομένα για τις διαστάσεις τις δημιουργικότητας στις 2 κατηγορίες προβλημάτων.

Με βάση τα αποτελέσματα του t-test, ο αριθμός των λύσεων που δίνουν οι μαθητές στα προβλήματα 1 και 3 (M = 2.16, SD = 1.42), δηλαδή στα προβλήματα που συνοδεύονται από το σχετικό σχήμα, είναι υψηλότερος σε σύγκριση με τα προβλήματα 2 και 4 (M = 1.44, SD = 1.21), δηλαδή τα προβλήματα στα οποία δεν δίνεται το αντίστοιχο σχήμα, διαφορά που είναι στατιστικά σημαντική (t = 6.02, df = 146, p <0,001). Όσον αφορά την ευελιξία των λύσεων στις εργασίες που δίνονται με σχήμα (M = 19.88, SD = 12.65) και στα προβλήματα χωρίς το αντίστοιχο σχήμα (M =13.93, SD = 11.37), σημειώνονται σημαντικές διαφορές με φαινομενικά υψηλότερη βαθμολογία στα προβλήματα στα οποία δίνεται το σχήμα (t = 5.57, df = 146, p < 0,001). Παρά το γεγονός ότι τα αποτελέσματά μας δείχνουν ότι η ευχέρεια και η ευελιξία των μαθητών είναι υψηλότερη στις εργασίες στις οποίες δίνεται το σχήμα, αυτό δεν συμβαίνει με την πρωτοτυπία των λύσεων (t = -1.87, df = 146, p > 0,05) και τη συνολική δημιουργικότητα (t = -0.71, df = 146, p > 0,05). Στην πραγματικότητα, δεν υπάρχουν σημαντικές διαφορές όσον αφορά την πρωτοτυπία και τη δημιουργικότητα μεταξύ των δύο τύπων προβλημάτων.



Σχήμα 17: Περιγραφικά Δεδομένα από τις λύσεις που έδωσε ο μαθητής για το πρόβλημα 4.

Μια σειρά αναλύσεων πολλαπλής παλινδρόμησης χρησιμοποιήθηκαν για την αξιολόγηση της σχέσης μεταξύ των δύο παραγόντων ενδιαφέροντος σε αυτή τη μελέτη, δηλαδή, επίλυσης ενός προβλήματος πολλαπλών λύσεων με ή χωρίς γεωμετρικό σχήμα, που είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές, και καθεμίας από τις εξαρτημένες μεταβλητές, δηλαδή τις διαστάσεις της μαθηματικής δημιουργικότητας (ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία). Όπως εξηγείται στην ενότητα ανάλυση δεδομένων, μέσω της ανάλυσης πολλαπλής παλινδρόμησης μπορέσαμε να χαρακτηρίσουμε αυτές τις σχέσεις τόσο ως προς τη στατιστική τους σημασία όσο και ως προς τη δύναμή τους. Επομένως, μπορεί να συναχθεί ποιος από τους δύο τύπους προβλημάτων συμβάλλει περισσότερο στη μαθηματική δημιουργικότητα. Στατιστικά σημαντικά μοντέλα πρόβλεψης λήφθηκαν για κάθε εξαρτημένη μεταβλητή χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Enter (Ευχέρεια: $F = 14.467$, $p = 0.022$; Ευελιξία: $F = 13.121$, $p = 0.034$; Πρωτοτυπία: $F = 16.352$, $p = 0.017$ και Συνολική Δημιουργικότητα: 19.032, $p < 0.001$). Ο Πίνακας 18 παρουσιάζει τα αποτελέσματα των αναλύσεων πολλαπλής παλινδρόμησης.

		Προβλήματα με δοσμένο σχήμα		**Προβλήματα χωρίς το δοσμένο σχήμα**	
		B (SE)	*β*	*B* (SE)	*β*
Μαθηματική Δημιουργικότητα	**Ευχέρεια**	0.10 (0.03)	0.289**	-0.01 (0.01)	-0.017
	Ευελιξία	0.05 (0.03)	0.164	0.02 (0.04)	0.072*
	Πρωτοτυπία	-0.03 (0.02)	-0.098**	0.08 (0.02)	0.252*
	Συνολική Δημιουργικότητα	0.04 (0.03)	.104	0.12 (0.02)	0.344**

$R^2 = 0.145$ για ευχέρεια, $R^2 = 0.125$ για ευελιξία, $R^2 = 0.204$ για πρωτοτυπία, $R^2 = 0.116$ για συνολική δημιουργικότητα, * $p < 0.05$, ** $p < 0.01$.

Πίνακας 18: Αποτελέσματα πολλαπλής ανάλυσης παλινδρόμησης σχετικά με τη σχέση μεταξύ των προβλημάτων με ή χωρίς σχήμα και των συνιστωσών της μαθηματικής δημιουργικότητας.

Η επίλυση ενός προβλήματος το οποίο συνοδεύεται από το αντίστοιχο γεωμετρικό σχήμα, σχετίζεται σημαντικά με την ευχέρεια και την πρωτοτυπία των μαθητών ($\beta = 0.289$, $p = 0.002$ και $\beta = -0.098$, $p = 0.004$ αντίστοιχα) και μπορεί να εξηγήσει το 15% και το 20% της διακύμανσης στο σύνολο απόδοσης της ευχέρειας και της πρωτοτυπίας, αντίστοιχα. Η επίλυση ενός προβλήματος χωρίς να δίνεται το γεωμετρικό σχήμα σχετίζεται σημαντικά με την ευελιξία των μαθητών ($\beta = 0.072$, $p = 0.011$), την πρωτοτυπία ($\beta = 0.252$, $p = 0.026$) και τη συνολική δημιουργικότητα ($\beta = 0.344$, $p = 0.001$) και μπορεί να εξηγήσει 13%, 20% και 12% της διακύμανσης στη συνολική απόδοση ευελιξίας, πρωτοτυπίας και συνολικής δημιουργικότητας αντίστοιχα. Οι τιμές β δείχνουν ότι τα προβλήματα που δεν συνοδεύονται από το γεωμετρικό σχήμα έχουν θετική επίδραση στην πρωτοτυπία των μαθητών, ενώ τα προβλήματα που συνοδεύονται από το γεωμετρικό σχήμα έχουν αρνητικό αντίκτυπο σε αυτήν.

Τέλος, εφαρμόστηκε συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση του R. Gras (Gras, Suzuki, Guillet, & Spagnolo, 2008). Στο παρακάτω συνεπαγωγικό διάγραμμα, υποδεικνύονται συνεπαγωγικές σχέσεις σε επίπεδο σημαντικότητας 99% (κόκκινο), 95% (μπλε), 90% (πράσινο) και 80% (γκρι).

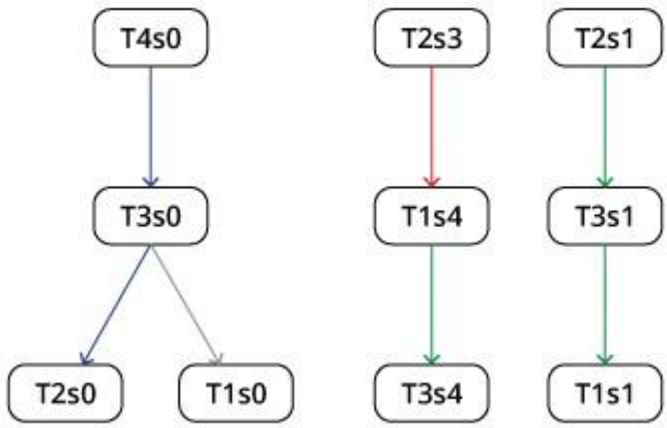
Στο συνεπαγωγικό διάγραμμα 1 διακρίνονται τρεις ανεξάρτητες συνεπαγωγικές αλυσίδες:

• Η πρώτη αλυσίδα (T4s0 →T3s0 →T2s0, T1s0) περιλαμβάνει τις μεταβλητές στις οποίες δεν δόθηκε λύση.

• Η δεύτερη αλυσίδα (T2s3 →T1s4 →T3s4) περιλαμβάνει τις μεταβλητές στις οποίες δόθηκαν τρεις ή τέσσερις λύσεις.

• Η τρίτη αλυσίδα (T2s1 →T3s1 →T1s1) περιλαμβάνει τις μεταβλητές στις οποίες δόθηκε μία λύση.

Σύμφωνα με το συνεπαγωγικό διάγραμμα, η δημιουργικότητα που υποδεικνύεται από τον αριθμό των λύσεων φαίνεται να έχει πιο ισχυρή επίδραση σε σχέση με την αντίληψη του γεωμετρικού σχήματος στη δημιουργία συνεπαγωγικών σχέσεων. Αυτές οι συνεπαγωγικές σχέσεις δημιουργούνται κυρίως μεταξύ μεταβλητών με τον ίδιο αριθμό λύσεων παρά μεταξύ απαντήσεων στην ίδια κατηγορία προβλημάτων όσον αφορά την παρουσία ή όχι του γεωμετρικού σχήματος στην εκφώνηση του προβλήματος. Αν και οι τρεις αλυσίδες είναι διαχωρισμένες λόγω του περιορισμένου αριθμού των μεταβλητών που εμπλέκονται, δεν θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι έχουμε το φαινόμενο της «διαμερισματοποίησης». Αξίζει επίσης να αναφέρουμε εδώ ότι οι αλυσίδες έχουν ως αφετηρία ένα πρόβλημα που δεν συνοδεύεται από το σχήμα, είτε πρόβλημα 2 είτε 4. Αυτό το εύρημα δείχνει ότι η επιτυχία σε ένα πρόβλημα που η διατύπωση δεν συνοδεύεται από το σχετικό σχήμα συνεπάγεται την επιτυχία σε προβλήματα στα οποία η διατύπωση συνοδεύεται από το σχετικό σχήμα.

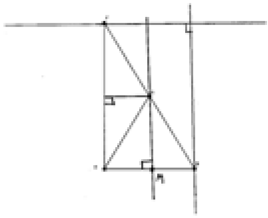


Συνεπαγωγικό Διάγραμμα 1: Συνεπαγωγικό διάγραμμα για την ευχέρεια λύσεων.

Στον πίνακα 19, παρουσιάζεται η ανάλυση του γεωμετρικού χώρου εργασίας για τον μαθητή με την μεγαλύτερη δημιουργικότητα στην έρευνα (βαθμολογία ευχέρειας: 6, βαθμολογία ευελιξίας: 22,2, βαθμολογία πρωτοτυπίας: 11,4, βαθμολογία συνολικής δημιουργικότητας: 253,08), καθώς και το κύριο μέρος της αλληλεπίδρασης μεταξύ του μαθητή (Μ) και του ερευνητή (Ε). Ο μαθητής όπως υποδεικνύεται στον Πίνακα 19 έλυσε το πρόβλημα με έξι διαφορετικούς τρόπους που ανήκουν σε τέσσερις διαφορετικούς χώρους λύσεων. Μία από τις λύσεις, η τελευταία, συγκαταλέγεται στις τρεις πιο καινοτόμες. Είναι επίσης προφανές ότι ο προσωπικός γεωμετρικός χώρος εργασίας του μαθητή και του ερευνητή είναι σε συμφωνία. Αυτό έχει ως θετικό αποτέλεσμα για τον μαθητή να αξιοποιεί πλήρως τις δυνατότητές του για να βρει νέους τρόπους επίλυσης του προβλήματος.

Κομμάτι από τη συνέντευξη	Γεωμετρικός Χώρος Εργασίας
<u>Λύση 1 και 2</u> Μ: Αν κατασκευάσω μια παράλληλη από το Δ στο ΑΓ, τότε αυτή η νέα ευθεία ΔΜ θα είναι κάθετη στο ΑΒ. Λαμβάνοντας υπόψη το θεώρημα, αν το Δ βρίσκεται στο μέσο του ΑΓ τότε το Μ είναι το μέσο του ΑΒ. Ομοίως κατασκευάζω μια παράλληλη ευθεία από το Δ έως το ΑΒ (ο μαθητής κάνει τις κατασκευές). Ε: Πολύ καλό. Μ: Από αυτά συμπεραίνω ότι το ΔΜ είναι διάμεσος και ύψος. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΜΔΒ, τα οποία είναι ίσα (Μ=90^o, ΔΜ=κοινή πλευρά και ΑΜ=ΜΒ). Έτσι, όλα τα στοιχεία τους είναι ίδια (ΑΔ = ΔΒ).	Ο μαθητής προχωρά σε μια κατασκευή αφού μοντελοποιήσει το πρόβλημα. Η χρήση οργάνων εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τις ιδιότητες ενός τριγώνου. Μόλις ερμηνευτεί το πρόβλημα, η γεωμετρική εργασία εντοπίζεται κυρίως στο επίπεδο [Ins-Dis] χρησιμοποιώντας τη θεωρητική αναφορά: η σύγκριση των τριγώνων εμφανίζεται ως θεωρητικό εργαλείο για την κατασκευή της λύσης. Τα δεδομένα παρέχονται στο σημειωτικό επίπεδο και οι ιδιότητες του τριγώνου διασφαλίζουν την εγκυρότητα της λύσης. **[Sem-Dis]→[Ins- Dis]**
<u>Λύση 2</u> Ε: Ωραία. Έχεις συνειδητοποιήσει ότι έλυσες το πρόβλημα με δύο διαφορετικούς τρόπους; Μ: Όχι, δεν το έχω συνειδητοποιήσει. Γιατί; Ε: Δες τη λύση. Όπως αναφέρεις το ΔΜ είναι και διάμεσος και ύψος. Μ: Μάλιστα! Εάν ένα από τα ύψη ενός τριγώνου είναι και διάμεσος, τότε το τρίγωνο	Η εισαγωγή στο χώρο εργασίας είναι πρώτα σημειωτική, αλλά απαιτείται η λεκτική απόδειξη για την επικύρωση της λύσης. **[Sem-Dis]**

είναι ισοσκελές. Έτσι, το ΑΔ και το ΔΒ είναι το ίδιο. Άρα δεν χρειαζόταν σύγκριση. Ε: Πολύ ωραία, δύο τρόποι που φαίνονται ίδιοι αλλά είναι διαφορετικοί. Πώς, θα συνεχίσουμε;	
<u>Λύσεις 3 και 4</u> Μ: Θέλω να σκεφτώ λίγο… Νομίζω ότι θα συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΓΔ. Όχι, αυτή η σύγκριση δεν θα οδηγήσει πουθενά. Θυμάμαι ότι το πρόσεξα από την αρχή. Το ίδιο θα κάνω και με την παράλληλη που κατασκευάζουμε με την ΑΒ. Ε: Αν το κάνουμε αυτό, τι θα βρούμε; Μ: Θα βρούμε άλλους δύο τρόπους που μοιάζουν με τους άλλους δύο. (Ο μαθητής γράφει ότι κάνει το ίδιο όπως στην πρώτη λύση για το τρίγωνο ΓΑΔ. Στη συνέχεια γράφει ότι κάνει το ίδιο όπως στη δεύτερη λύση για το τρίγωνο ΓΑΔ) Ε: Για να συνεχίσουμε σε επόμενο τρόπο να λύσεις το πρόβλημα;	Από την οπτική ανάλυση του σχήματος, ο μαθητής εστιάζει στα υποσχήματα που θεωρούνται από θεωρητική σκοπιά ως το σημείο εκκίνησης ενός απαγωγικού συλλογισμού. **[Sem-Dis]**
<u>Λύση 5</u> Μ: Θα φέρω μια παράλληλη ευθεία από το Γ στο ΑΒ και από το Β στο ΑΓ. Θα κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο γιατί Α = 90^o	Ο μαθητής κατασκευάζει βοηθητικά στοιχεία στο υπάρχον σχήμα που ικανοποιούν κάποιες προϋποθέσεις. Η αναγνώριση των ιδιοτήτων και των ορισμών περιλαμβάνεται στο πλαίσιο

(ο μαθητής κατασκευάζει βοηθητικά στοιχεία στο υπάρχον σχήμα που του δίνεται)  Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες και διχοτομούνται μεταξύ τους, άρα ΑΔ = $\frac{1}{2}$ ΒΓ.	αναφοράς μετά από κατασκευαστικές ή οπτικές επεξεργασίες. **[Ins] → [Sem-Dis]**
<u>Λύση 6</u> Μ: Θα βρω τώρα άλλο τρόπο να λύσω το πρόβλημα. Ε: Ποιος είναι ο άλλος τρόπος; Μ: Μπορώ να φτιάξω έναν κύκλο. Η γωνία που βαίνει σε ένα ημικύκλιο είναι ορθή γωνία, ΒΓ είναι διάμετρος και Δ είναι το κέντρο ενός κύκλου. Έτσι, τα ΔΓ, ΔΒ και ΔΒ είναι ακτίνες και έχουν το ίδιο μήκος.	Τα όργανα παραμερίζονται. Η εστίαση είναι σε μια υποθετική και απαγωγική απόδειξη που βασίζεται σε ιδιότητες, επομένως το σχήμα και η οπτικοποίηση παίζουν έναν ευρετικό ρόλο. **[Sem-Dis]**

Πίνακας 19: Ανάλυση του γεωμετρικού χώρου εργασίας μαθητή με υψηλά επίπεδα μαθηματικής δημιουργικότητας.

4.4 Αποτελέσματα της Τέταρτης Έρευνας

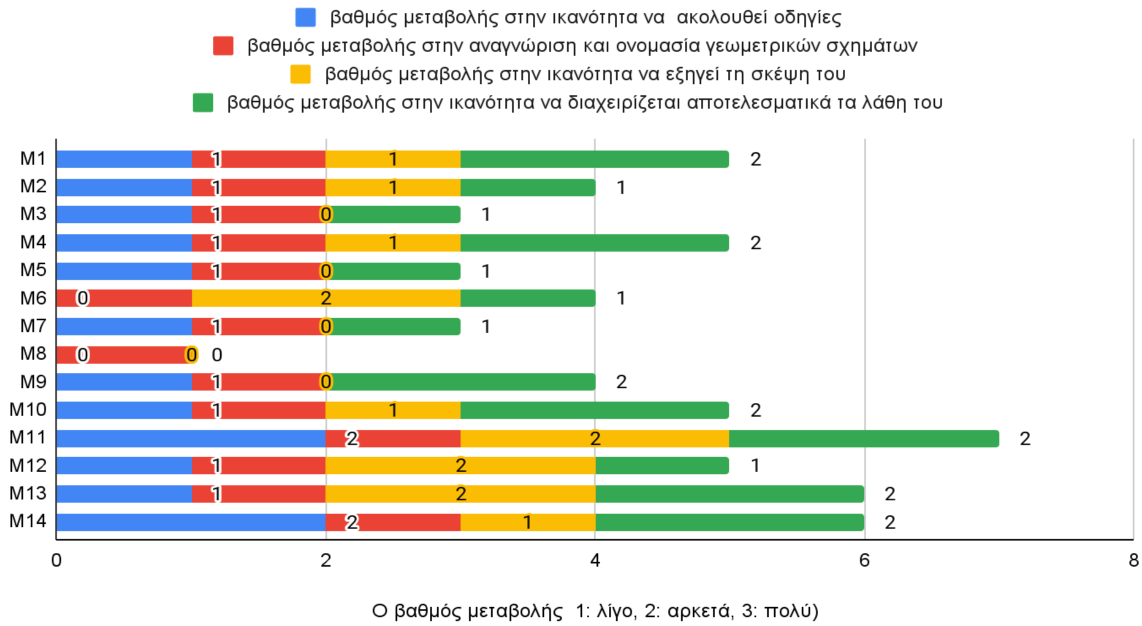
4.4.1 Μαθηματική Ικανότητα των όλων των μαθητών

ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗΝ ΟΜΑΔΑ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ								
ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΒΑΘΜΟΎ ΕΠΙΤΕΥΞΗΣ ΤΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ: 1:λίγο 2 : αρκετά 3: πολύ	ακολουθεί οδηγίες ΠΡΙΝ την παρέμβαση	ακολουθεί οδηγίες ΜΕΤΑ την παρέμβαση	αναγνώριση, ονομασία γεωμετρικών σχημάτων ΠΡΙΝ την παρέμβαση	αναγνώριση, ονομασία γεωμετρικών σχημάτων ΜΕΤΑ την παρέμβαση	επεξήγηση της σκέψης του ΠΡΙΝ την παρέμβαση	επεξήγηση της σκέψης του ΜΕΤΑ την παρέμβαση	αποτελεσματική διαχείριση του λάθους ΠΡΙΝ την παρέμβαση	αποτελεσματική διαχείριση του λάθους ΜΕΤΑ την παρέμβαση
Μ1	1	2	2	3	1	2	1	3
Μ2	2	3	2	3	2	3	2	3
Μ3	1	2	2	3	2	2	1	2
Μ4	1	2	1	2	1	2	1	3
Μ5	2	3	1	2	2	2	2	3
Μ6	2	2	2	3	1	3	2	3
Μ7	1	2	2	3	1	1	1	2
Μ8	1	1	2	3	2	2	1	1
Μ9	2	3	2	3	2	2	1	3
Μ10	1	2	2	3	1	2	1	3
Μ11	1	3	2	3	1	3	1	3
Μ12	2	3	2	3	1	3	2	3
Μ13	2	3	2	3	1	3	1	3
Μ14	1	3	2	3	1	2	1	3

Πίνακας 20: Μεταβολή μαθηματικής ικανότητας στο σύνολο της τάξης.

Στον παρακάτω πίνακα 20, παρουσιάζεται η μεταβολής της μαθηματικής ικανότητας κάθε μαθητή, ως προς την ικανότητα να ακολουθεί οδηγίες, να αναγνωρίζει και να ονομάζει τα γεωμετρικά σχήματα εξηγώντας τη σκέψη του, να διαχειρίζεται αποτελεσματικά τα λάθη του (να μη φοβάται να κάνει λάθος και να μην παραιτείται από την προσπάθεια).

Όπως φαίνεται στον πίνακα 19, η πλειοψηφία των μαθητών είχε θετική μεταβολή στους μετά την παρέμβαση στις παραπάνω ικανότητες. Ένας μαθητής (ο Μ8), από τα 4 κριτήρια βελτιώθηκε κατά 1 βαθμό στο 1, στην ικανότητα να αναγνωρίζει και να ονομάζει τα γεωμετρικά σχήματα. Ο μαθητής είχε προταθεί για διάγνωση καθώς δυσκολευόταν ιδιαίτερα στην αλληλεπίδραση και με τους εκπαιδευτικούς και με τους συμμαθητές, είχε χαρακτηριστικά παρορμητικότητας και δυσκολία αναγνώρισης των λαθών του σε όλους τους τομείς (κοινωνικό, συναισθηματικό, γνωστικό). Ένας μαθητής (Μ3) από τα 4 κριτήρια δεν βελτιώθηκε μόνο σε ένα στην εξήγηση της σκέψης του. Ήταν μαθητής με διάγνωση για ΔΕΠ/Υ που είχε μόνο ένα μήνα φοίτησης στο συγκεκριμένο Νηπιαγωγείο και δυσκολευόταν στην οριοθέτηση, στην αναγνώριση και λεκτικοποίηση της συμπεριφοράς του. Επίσης, ένας μαθητής (ο Μ6) με δυσκολίες στον συγχρονισμό και στην εξήγηση της συμπεριφοράς του, δεν βελτιώθηκε στην ικανότητα να ακολουθεί οδηγίες.



Γράφημα 1: Βαθμός μεταβολής της μαθηματικής ικανότητας όλων των μαθητών με 4 κριτήρια: να ακολουθεί οδηγίες, να αναγνωρίζει και να ονομάζει τα γεωμετρικά σχήματα και να διαχειρίζεται αποτελεσματικά τα λάθη του.

Όπως φαίνεται και από το παραπάνω γράφημα 1, όλοι οι μαθητές εκτός τριών, είχαν βελτίωση στην ικανότητα να ακολουθούν οδηγίες, να αναγνωρίζουν και να ονομάζουν τα γεωμετρικά σχήματα, να εξηγούν τη σκέψη τους και να διαχειρίζονται αποτελεσματικά τα λάθη τους. Μάλιστα οκτώ μαθητές είχαν το μέγιστο βαθμό βελτίωσης (από το 1: λίγο πήγαν στο 3: πολύ). Επίσης, οι μαθητές που δεν βελτιώθηκαν σε όλους τους τομείς αλλά σε κάποιους, χαρακτηρίζονταν από ιδιαίτερα χαρακτηριστικά όσον αφορά την παρορμητικότητα, την αδυναμία αναγνώρισης και εξήγησης της συμπεριφοράς τους όχι μόνο στον γνωστικό αλλά και στον συμπεριφορικό τομέα.

Όλοι οι μαθητές ήθελαν να μοιραστούν με τους γονείς τους το μάθημα και σχεδόν κάθε εβδομάδα υπήρχε καλεσμένος γονέας στην τάξη. Πιο συγκεκριμένα:

1. Κινητοποιήθηκαν όλοι οι μαθητές με μεγάλη εστίαση προσοχής στο μάθημα που ήταν συνήθως τελευταία ώρα! Περίμεναν πότε θα κάνουν Μαθηματικά Παιχνίδια καθώς το υλικό και οι δραστηριότητες τους προκαλούσαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και ήθελαν να δοκιμάζουν πολλές λύσεις .

2. Έμαθαν λεξιλόγιο σχετικό με τις δραστηριότητες: τα γεωμετρικά σχήματα : συμμετρία, άξονας συμμετρίας κάθετος και οριζόντιος, τετράγωνο, τρίγωνο, ορθογώνιο και πλάγιο παραλληλόγραμμο, ρόμβος, μισό, διπλάσιο, μεγέθυνση, μοτίβο, γεωμετρικό μοτίβο, πάνω από, κάτω από, δεξιά από, αριστερά από.

3. Ανέπτυξαν την ικανότητα αναγνώρισης σχήματος ανεξαρτήτως προσανατολισμού.

4. Αναγνώρισαν την ορθή γωνία ως χαρακτηριστικό του τετραγώνου (με εποπτικό υλικό).

5. Έμαθαν να αναγνωρίζουν και να φτιάχνουν συμμετρία ως προς οριζόντιο και κάθετο άξονα με μεγαλύτερη δυσκολία στον οριζόντιο άξονα.

6. Απέκτησαν τη δυνατότητα εξήγησης της σκέψης τους σε σύντομο χρόνο (2 λεπτά) και με λόγια και με χειρονομίες.

7. Απενοχοποίησαν το λάθος και εστίαζαν στην εύρεση λύσης ανεξάρτητα των δυσκολιών που πίστευαν ότι είχαν ή είχαν πραγματικά, ήθελαν να δείξουν την λύση τους ακόμη και να ήταν διαφορετική (και ίσως λάθος).

8. Συμμετείχαν στις νέες δραστηριότητες χωρίς φόβο για τη δυσκολία του έργου ή της χρήσης νέου υλικού αλλά κυρίως σταματούσαν στο συγκεκριμένο χρόνο που είχε οριστεί χωρίς να δημιουργούν θέμα στην ομάδα από την ματαίωση τους που δεν είχαν ολοκληρώσει την εργασία τους.

9. Απέκτησαν δεξιότητες συνεργασίας σε μια δραστηριότητα που υπήρχαν προϋποθέσεις π.χ. να φτιάξει πρώτο ένας ενα σχήμα με την πλαστελίνη ως προς τον κάθετο άξονα (κορδόνι κολλημένο στο τραπέζι) και μετά ο άλλος να φτιάξει το συμμετρικό του και αντίστροφα.

10. Αυξήθηκε η ικανότητα να ακούν οδηγίες και να ακολουθούν τους κανόνες λειτουργίας της τάξης.

11. Αυξήθηκε η ικανότητα αποτελεσματικής χρήσης και οργάνωσης του υλικού ατομικά και στην τάξη.

12. Αυξήθηκε η συμμετοχή στην αξιολόγηση του μαθήματος με προφορικό λόγο και ζωγραφική.

13. Αυξήθηκε η αξιοποίηση του διδακτικού χρόνου για τη μάθηση και μειώθηκαν οι ενέργειες διαχείρισης τάξης από τους εκπαιδευτικούς καθώς οι μαθητές προσπαθούσαν να συμμετέχουν λόγω της ελκυστικότητας των δραστηριοτήτων ελέγχοντας περισσότερο τη συμπεριφορά τους.

4.4.2 Ως προς τη μαθηματική δημιουργικότητα

1. Αυξήθηκαν οι σωστές λύσεις σε όλους τους μαθητές.

2. Αυξήθηκαν οι διαφορετικές και οι πρωτότυπες λύσεις και στους δυνατούς και στους αδύνατους μαθητές (ανεξάρτητα από τις ομάδες έρευνας).

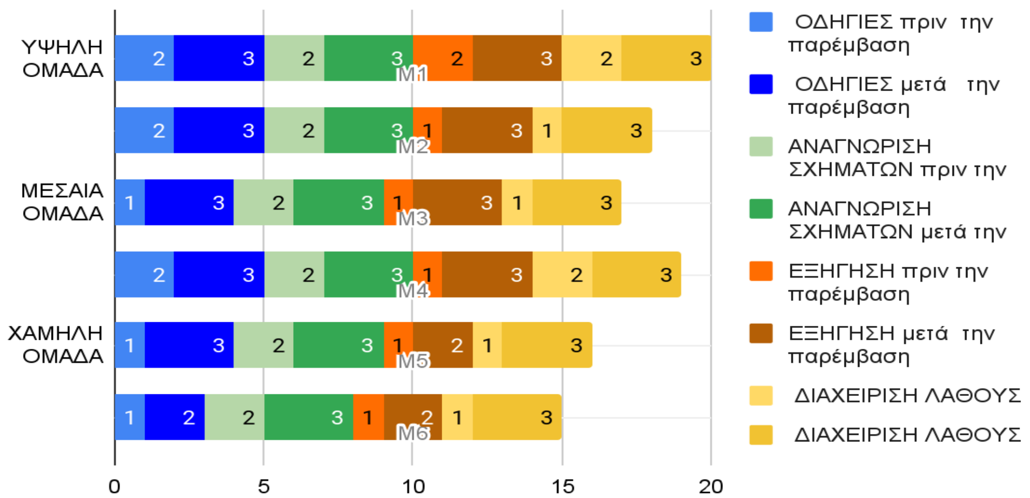
3. Αυξήθηκε η ικανότητα να αναγνωρίζουν όλοι οι μαθητές τις παρόμοιες από τις διαφορετικές λύσεις που έδιναν οι μαθητές στην ομάδα.

Ειδικότερα οι τρεις ομάδες έρευνας διαμορφώθηκαν:

Την υψηλή ομάδα αποτελούσαν οι μαθητές Μ1 και Μ2 δύο κορίτσια νηπιαγωγείου. Η Μ1 ήταν από την προηγούμενη χρονιά στο Νηπιαγωγείο όπου έμαθε ελληνικά γιατί είχε μητρική γλώσσα τα ρωσικά και ήταν πολύ υποστηρικτική με τους συμμαθητές της. Η Μ2 είχε μητρική γλώσσα τα ελληνικά. Ήταν η πρώτη της χρονιά φοίτησης στο Νηπιαγωγείο και είχε μεγάλη δυσκολία να διαχειριστεί κάτι που της φαινόταν δύσκολο, ήθελε πάντα παραπάνω χρόνο για να κάνει μια δραστηριότητα και ματαιωνόταν όταν δεν προλάβαινε να την ολοκληρώσει. Αρνιόταν να δείξει τη δουλειά της, μούτρωνε, τα παρατούσε και έκλαιγε όταν έκανε λάθος.

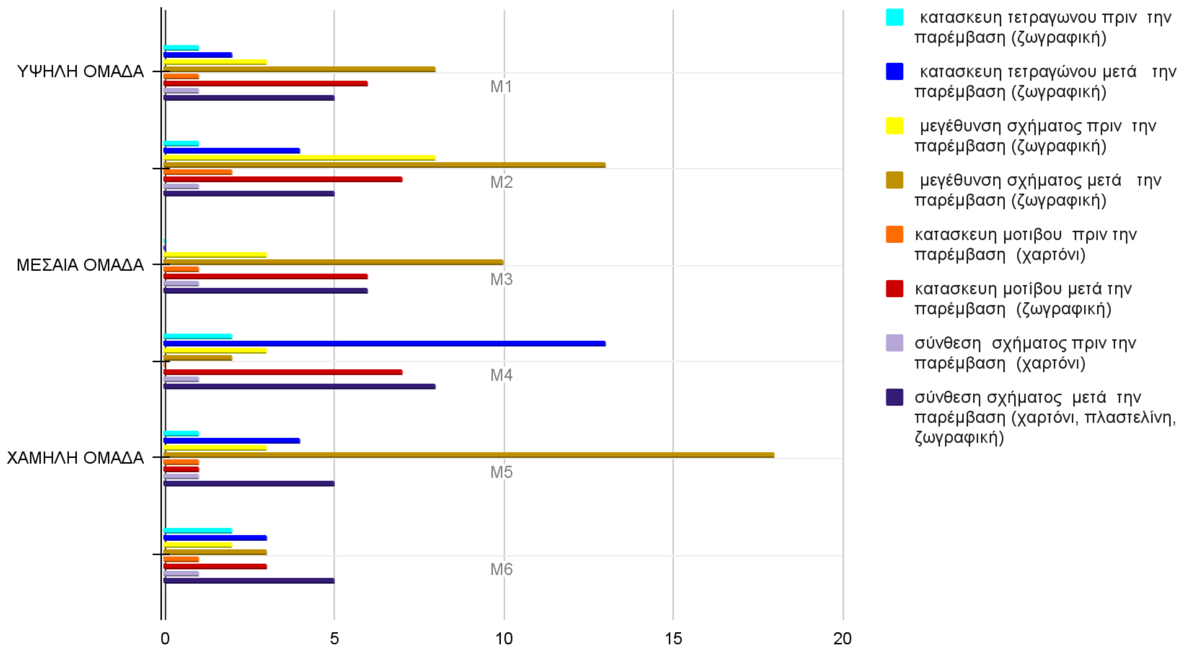
Η μεσαία ομάδα αποτελούνταν από τους Μ3 και Μ4 και ήταν δύο προνήπια που φοιτούσαν για πρώτη φορά σε σχολικό πλαίσιο. Ο Μ3 ήταν αγόρι που χαρακτηριζόταν από διάθεση να εξερευνήσει και δεν μπορούσε εύκολα να συγχρονιστεί με την ομάδα. Η Μ4 μπορούσε να συγχρονιστεί και αλληλοεπιδρούσε μόνο όταν θεωρούσε ότι οι δραστηριότητες δεν ήταν δύσκολες για αυτή και επειδή δεν ήθελε να κάνει μαθηματικά γιατί φοβόταν το λάθος στην αρχή δεν εμπλεκόταν στις ατομικές δραστηριότητες. Στη συνέχεια όμως αποενοχοποιείσαι το λάθος και ήθελε πρώτη να δείχνει τη λύση της στην ομάδα.

Η χαμηλή ομάδα, αποτελούνταν από τους Μ5 και Μ6 που ήταν μαθητές που ηλικιακά θα μεταβούν στην Α τάξη τον Σεπτέμβρη, ωστόσο η Μ5 ήταν μαθήτρια θέματα στην επικοινωνία, δεν ανταποκρινόταν στο μάθημα αν και είχε γνώσεις ενώ ο Μ6 ήταν ένας μαθητής που λόγω της πανδημίας δεν είχε κατακτήσει βασικές δεξιότητες για την ηλικία του αλλά επίσης είχε γνώσεις και δεν ανταποκρινόταν στο μάθημα λόγω δυσκολιών στην οριοθέτησή του στην ομάδα.



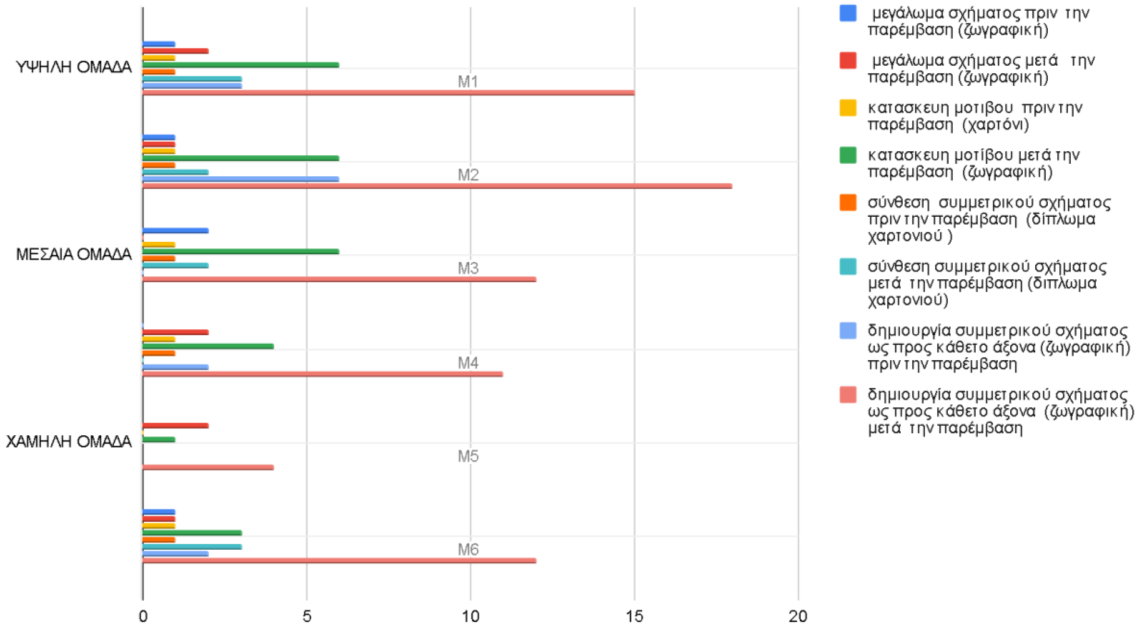
Γράφημα 2: Η εξέλιξη (μεταβολή) στην μαθηματική ικανότητα των ομάδων έρευνας στα 4 κριτήρια

Όπως φαίνεται από το παραπάνω γράφημα 2, όλοι οι μαθητές είχαν βελτίωση από 1 έως 2 βαθμούς, φτάνοντας στο μέγιστο (3). Το μέγιστο της εξέλιξης (μεταβολής) είχαν όλοι οι μαθητές στη διαχείριση του λάθους γεγονός που εξηγεί τη δυνατότητα για δοκιμές όταν διερευνούσαν νέα προβλήματα καθώς δεν φοβόντουσαν να κάνουν λάθος. Επίσης, μεγάλη μεταβολή φάνηκε να υπάρχει στην εξήγηση της σκέψης τους καθώς όλοι οι μαθητές κατάφεραν να το κάνουν στο τέλος της παρέμβασης. Η ανάπτυξη της ικανότητα να εξηγούν λεκτικά, με χειρονομίες ή δείχνοντας και εξηγώντας το έργο τους ήταν εξαιρετικά σημαντικό στην κινητοποίησή τους αλλά και στο γνωστικό αποτέλεσμα καθώς έμπαιναν στη διαδικασία να εξηγήσουν τα βήματα της δουλειάς τους, να βοηθήσουν να καταλάβουν οι συμμαθητές τους που δεν τα κατάφερναν και κυρίως να υπερασπιστούν την λύση τους που ήταν διαφορετική αλλά σωστή σε σχέση με τη λύση των συμμαθητών τους.



Γράφημα 3: Παρουσίαση της μεταβολής στην ευχέρεια των μαθητών βρίσκουν διαφορετικές σωστές λύσεις στα έργα που ασχολούνταν.

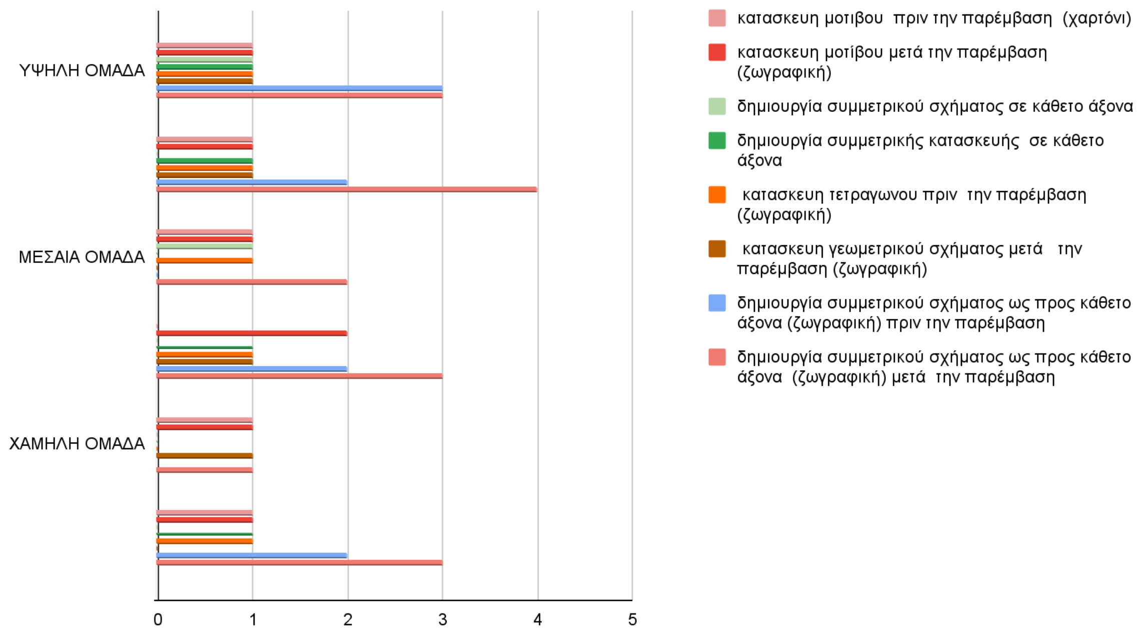
Από το παραπάνω γράφημα 3, φαίνεται ότι το έργο που οι μαθητές κατάφεραν να βρουν περισσότερες λύσεις είναι η σύνθεση σχήματος από μικρότερα άλλα πιο απλά, καθώς είχαν πάρα πολλές εμπειρίες με διαφορετικά πλαίσια και υλικά. Επίσης, οι μαθητές είχαν πάρα πολύ εξασκηθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους και υλικά σε εργασίες μεγέθυνσης σχήματος και σε ατομικό και ομαδικό επίπεδο. Φαίνεται ότι οι γνώσεις σε αυτές τις επιμέρους δραστηριότητες βοήθησαν όλους τους μαθητές να μπορούν να ασχολούνται με επιτυχία με ανάλογα έργα καθώς όλοι εξασκήθηκαν και μάθαιναν βλέποντας τα έργα των συμμαθητών τους.



Γράφημα 4: Παρουσίαση της μεταβολής στην ευελιξία των μαθητών.

Από το παραπάνω γράφημα 4, φαίνεται ότι το έργο που οι μαθητές κατάφεραν να βρουν περισσότερες διαφορετικές λύσεις ήταν η δημιουργία συμμετρικού σχήματος ως προς κάθετο άξονα καθώς ήταν πολλές οι εμπειρίες, κυρίως όμως ήταν πολλές οι δυνατότητες για δημιουργία δικού τους συμμετρικού σχήματος και όχι η απλή συνέχισή του. Επίσης, το δεύτερο έργο στο οποίο έδειξαν μεγαλύτερη ευελιξία ήταν η δημιουργία μοτίβου για τους ίδιους λόγους. Ωστόσο τα μοτίβα επειδή άρεσαν στα παιδιά και έγιναν σε πολλά μαθήματα, πολλά από τα παιδιά χρησιμοποίησαν αυτά που είχαν δει και δημιουργήσει τα ίδια και τους άρεσαν οπότε τα επανέλαβαν στην αξιολόγηση της παρέμβασης.

Στο παρακάτω γράφημα 5, φαίνεται ότι οι μαθητές δεν είχαν ούτε όλοι, ούτε σε μεγάλο βαθμό μεταβολή στην ικανότητά τους να βρίσκουν πρωτότυπες λύσεις στις εργασίες από αυτές των συμμαθητών τους. Το έργο στο οποίο έδειξαν τη μεγαλύτερη πρωτοτυπία ήταν η δημιουργία συμμετρικού σχήματος ως προς κάθετο άξονα συμμετρίας. Θεωρούμε ότι είχαν πολλές εμπειρίες αλλά η πιο καθοριστική ήταν η δραστηριότητα που χρειαζόταν να συνεργαστούν να φτιάξουν ένα συμμετρικό σχήμα ως προς κάθετο άξονα (ένα κορδόνι κολλημένο στο τραπέζι) με την εξής προϋπόθεση: πρώτα θα έφτιαχνε ένα κομμάτι του σχήματος με πλαστελίνη ο ένας μαθητής και ο άλλος μαθητής θα έφτιαχνε το υπόλοιπο και μετά θα επαναλαμβανόταν η διαδικασία από τον άλλον μαθητή. Αυτή η δραστηριότητα ευχαρίστησε πολύ τους μαθητές που δεν ήθελαν να κλείσουν τη δραστηριότητα στο χρόνο που είχε τεθεί. Η διαδικασία της τελικής αξιολόγησης με συμμετρικό σχήμα ήταν αυτό που οι μαθητές της έρευνας έδειξαν τη μεγαλύτερη πρωτοτυπία σε όλες τις ομάδες όχι όμως όλοι οι μαθητές. Φαίνεται ότι η πρωτοτυπία δεν εξαρτάται ούτε από την εξάσκηση όπως η ευχέρεια και η ευελιξία ούτε από την ηλικία ή άλλα χαρακτηριστικά σχετικά με την ακαδημαϊκή ετοιμότητα των μαθητών. Επίσης, στη μεσαία και την μικρή ομάδα οι δύο μαθητές που έδειξαν μεγάλη πρωτοτυπία στο έργο τους χαρακτηρίζονται από σπάσιμο ορίων στη συμπεριφορά και την ανάγκη να διερευνούν χωρίς να ακολουθούν το πλαίσιο της τάξης.



Γράφημα 5: Παρουσίαση της μεταβολής στην πρωτοτυπία των μαθητών να βρίσκουν διαφορετικές σωστές λύσεις από αυτές των συμμαθητών τους στα έργα που ασχολούνταν.

5 Συμπεράσματα

Σκοπός της παρούσας διατριβής είναι η προσέγγιση της μαθηματικής δημιουργικότητας μέσα από μια γνωστική και αντιληπτική προσέγγιση κατά τη μάθηση της γεωμετρίας. Καθώς η διατριβή ασχολείται με τη σχετική δημιουργικότητα (Leikin, 2009), υποστηρίζουμε ότι η μαθηματική δημιουργικότητα πρέπει και μπορεί να αναπτυχθεί σε όλους τους μαθητές (Sheffield, 2009). Πορίσματα άλλων ερευνών έδειξαν ότι οι μεταβλητές της δημιουργικότητας, κυρίως η ευχέρεια και η ευελιξία, είναι δυναμικές και μεταβάλλονται από τη διδασκαλία, την καθοδήγηση και τις εμπειρίες του ατόμου (Leikin, 2009; Silver, 1997).

Με βάση τα αποτελέσματα της πρώτης έρευνας εικάζουμε ότι μπορούμε να ενισχύσουμε την ευχέρεια και την ευελιξία των μαθητών με ασκήσεις οι οποίες στοχεύουν οι μαθητές να ξεπεράσουν την αντιληπτική σύλληψη γεωμετρικού σχήματος και να οδηγηθούν στη λειτουργική σύλληψη, αλλά επιπλέον και την πρωτοτυπία λύσεων με ασκήσεις οι οποίες απαιτούν από τους μαθητές την αναγκαιότητα επιπλέον κατασκευών. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές επικεντρώνονται ταυτόχρονα σε διαφορετικά στοιχεία, αναγνωρίζουν νέες ιδιότητες, κατασκευάζουν νέα στοιχεία στο σχήμα και οδηγούνται σε διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης (Michael & Gagatsis, 2015).

Πράγματι, τα ευρήματα της έρευνας δείχνουν ότι οι μαθητές που μετακινούνται σε λειτουργική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, ξεπερνώντας την αντιληπτική και αλγοριθμική σκέψη, είναι σε θέση να πραγματοποιήσουν μερολογικές τροποποιήσεις (Duval, 1995, 2017) που τους επιτρέπουν να παρέχουν διαφορετικές γεωμετρικές αποδείξεις, ενισχύοντας την ευχέρεια και την ευελιξία στις λύσεις τους. Παρόλα αυτά, ο Duval (1995) έδειξε ότι ο μαθηματικός τρόπος ανάγνωσης των σχημάτων προκύπτει μόνο από το συντονισμό μεταξύ των ξεχωριστών διαδικασιών σύλληψης για μεγάλο χρονικό διάστημα.

Έμφαση πρέπει να δοθεί στην ενίσχυση της ικανότητας κατασκευής βοηθητικών γραμμών, καθώς η ικανότητα αυτή φάνηκε να ενισχύει ισχυρά και τις τρεις μεταβλητές της μαθηματικής δημιουργικότητας, αλλά και λόγο της πολυπλοκότητας και δυσκολίας του θέματος (Hsu & Silver, 2014), καθώς οι μισοί σχεδόν μαθητές (46%) δεν μπόρεσαν να λύσουν το πρόβλημα 2. Σε αυτή την κατεύθυνση οι Palatnik και Dreyfus (2018) στην ανάλυσή τους για τους λόγους που αναφέρουν οι μαθητές όταν φέρνουν βοηθητικές κατασκευές σε γεωμετρικές αποδείξεις ανέφεραν δύο ομάδες λόγων. Πρώτον, μαθητές οι οποίοι έφερναν βοηθητικές ευθείες βασιζόμενοι σε ορισμούς ή θεωρήματα, τροποποιώντας το αντίστοιχο σχήμα αναλόγως ως μέρος μιας γνωστής διαδικασίας, και δεύτερον μαθητές οι οποίοι έφερναν βοηθητικές ευθείες προσδοκώντας να λάβουν περισσότερες πληροφορίες από αυτή την τροποποιημένη κατάσταση. Οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνοντας τους μαθητές και των δύο ομάδων να σχεδιάζουν διάφορες βοηθητικές γραμμές δημιουργώντας εναλλακτικές προσεγγίσεις θα ενισχύσουν τη μαθηματική δημιουργικότητα και την ποιότητα του μαθήματος.

Επιπλέον, πρέπει με τη διδασκαλία της γεωμετρίας να γίνει υπέρβαση της σκέψης των μαθητών από την αλγοριθμική στη λειτουργική κατανόηση. Αυτή η υπέρβαση δεν είναι εύκολο έργο: το μεγαλύτερο εμπόδιο είναι η ρήξη του διδακτικού συμβολαίου σύμφωνα με το οποίο οι μαθητές για να λύσουν ένα πρόβλημα γεωμετρίας αναζητούν τον τύπο ή το θεώρημα το οποίο η άμεση εφαρμογή δίνει την λύση του προβλήματος. Ακόμα και μαθητές μεγάλης ηλικίας ή φοιτητές εφαρμόζουν αλγοριθμικό τύπο που έχει ως αποτέλεσμα πολλές πράξεις ενώ η λύση με λειτουργικό τρόπο απαιτεί έναν απλό μετασχηματισμό (Deliyianni, Elia, Gagatsis, Monoyiou & Panaoura, 2010). Αυτή η ρήξη του συμβολαίου δεν είναι ένα απλό διδακτικό γεγονός αλλά απαιτεί την δημιουργία μιας ειδικής διδακτικής κατάστασης. Προς την κατεύθυνση αυτή θεωρούμε ότι πρέπει να στραφεί η έρευνα στη διδασκαλία και μάθηση της γεωμετρίας.

Εν κατακλείδι, θα ήταν ενδιαφέρον και χρήσιμο να εξεταστούν τα αποτελέσματα παρεμβατικών προγραμμάτων που να στοχεύουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας και κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος σχετικά με τις πολλαπλές γεωμετρικές αποδείξεις των μαθητών. Τέλος, η επικύρωση ενός θεωρητικού μοντέλου που εξετάζει τη δομή και τη σχέση των διαφόρων συνιστωσών κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος, χωρικής ικανότητας, μαθηματικής δημιουργικότητας και επίλυσης προβλημάτων με πολλαπλούς τρόπους στην γεωμετρία θα συνέβαλε επίσης σε αυτόν τον τομέα της έρευνας.

Η δεύτερη έρευνα στοχεύει στον εμπλουτισμό της γνώσης σχετικά με τη μαθηματική δημιουργικότητα κατά την επίλυση προβλημάτων με πολλούς τρόπους στη Γεωμετρία μέσω εμπειρικών δεδομένων. Για το σκοπό αυτό εξετάστηκε η σχέση της δημιουργικότητας με τις χωρικές ικανότητες.

Για την πρώτη μας ερευνητική ερώτηση, εξετάσαμε πώς οι μαθητές ανταποκρίνονται σε εργασίες χωρικής ικανότητας και σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα που ζητήθηκε ρητά να λυθεί με διαφορετικούς τρόπους. Όσον αφορά τα έργα χωρικής ικανότητας, τα αποτελέσματά μας αποκάλυψαν ότι οι μαθητές έχουν δυσκολίες με έργα που απαιτούν την ικανότητα να διπλώνουν ή να συναρμολογούν νοερά μέρη ενός αντικειμένου. Τα ευρήματα μπορούν να εξηγηθούν εάν λάβουμε υπόψη ότι η χωρική οπτικοποίηση περιλαμβάνει περίπλοκους, πολλαπλούς χειρισμούς χωρικά παρουσιαζόμενων πληροφοριών (Linn & Petersen, 1985). Επιπλέον, η αποσύνθεση, η οποία είναι η χωρική ικανότητα που είναι απαραίτητη για ένα άτομο για να διακρίνει ένα απλό αντικείμενο μέσα σε μια πιο σύνθετη φιγούρα, απαιτεί υψηλή αντιληπτική κατανόηση. Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν και όταν έπρεπε να είναι σε θέση να προσδιορίσουν ένα μοτίβο μέσα σε μια δεδομένη απλή διαμόρφωση προκειμένου να λύσουν το δοσμένο χωρικό έργο. Οι προαναφερθείσες διαδικασίες απαιτούσαν όλες μαζί οι μαθητές να αφομοιώσουν ένα δεδομένο σύνολο οπτικο-χωρικών σχέσεων και στη συνέχεια να τις τροποποιήσουν σε ένα νέο σύνολο σχέσεων με περιορισμένο τρόπο (Sanchez & Wiley, 2017). Αντίθετα, οι μαθητές πέτυχαν υψηλές βαθμολογίες σε έργα που απαιτούσαν απλή αίσθηση του χώρου. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι αυτά τα έργα περιλάμβαναν απλούστερες νοητικές λειτουργίες, όπως μια νοητή περιστροφή ενός δισδιάστατου αντικειμένου (Kozhevnikov & Hegarty, 2001).

Όσον αφορά το γεωμετρικό πρόβλημα, οι μαθητές παρήγαγαν διαφορετικές λύσεις οι οποίες κατηγοριοποιήθηκαν σε χώρους λύσεων ανάλογα με τις βοηθητικές γραμμές που κατασκεύασαν. Προέκυψε η ανάγκη μετασχηματισμού του αρχικού σχήματος κατασκευάζοντας ένα ή περισσότερα βοηθητικά στοιχεία προκειμένου οι μαθητές να δώσουν λύσεις στο γεωμετρικό πρόβλημα. Τα ευρήματά μας έδειξαν ότι οι βοηθητικές κατασκευές έπαιξαν κρίσιμο ρόλο στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Προηγούμενη έρευνα προτείνει ότι οι μαθητές εισάγουν βοηθητικές γραμμές για να ανακαλέσουν κάποια γνωστά αποτελέσματα ή ορισμούς και να τροποποιήσουν το δεδομένο σχήμα ανάλογα, ως μέρος μιας διαδικασίας που μαθαίνουν. Τροποποιώντας το δεδομένο σχήμα, αναμένουν να ανακτήσουν περισσότερες πληροφορίες (Palatnik & Dreyfus, 2018). Ορισμένα βοηθητικά στοιχεία ενώνουν προηγουμένως άσχετα στοιχεία του αρχικού σχήματος, ενώ άλλα χωρίζουν ένα δεδομένο σύνθετο σχήμα σε απλούστερα (Palatnik & Sigler, 2019). Στη μελέτη μας, οι βοηθητικές κατασκευές είτε δημιούργησαν διάφορα υποσχήματα μέσα στο δεδομένο σχήμα είτε οδήγησαν στην κατασκευή ενός άλλου σχήματος που περιελάμβανε το αρχικό. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ικανότητα αναγνώρισης είτε των υποσχημάτων που είναι ενσωματωμένα στο δεδομένο σχήμα είτε του δεδομένου σχήματος που είναι ενσωματωμένο σε ένα πιο σύνθετο, ήταν προαπαιτούμενα για να λυθεί το πρόβλημα.

Τα ευρήματά μας σχετικά με την κατασκευή βοηθητικών γραμμών ήταν σύμφωνα με την πρώτη έρευνα, αλλά και με την λειτουργική αντίληψη του Duval για ένα γεωμετρικό σχήμα που εξαρτάται από τους διάφορους τρόπους τροποποίησης του σχήματος (Duval, 2014; Kalogirou & Gagatsis, 2012; Michael-Chrysanthou & Gagatsis, 2015). Κάθε μία από αυτές τις διαφορετικές τροποποιήσεις μπορεί να πραγματοποιηθεί νοητικά ή πάνω στο σχήμα μέσω διαφόρων λειτουργιών όπως η εικονική επεξεργασία, η οποία στοχεύει στον προσδιορισμό της ευρετικής λειτουργίας των σχημάτων. Είναι συνήθως μία ή περισσότερες από αυτές τις διαδικασίες που μπορούν να οδηγήσουν σε τροποποίηση του σχήματος που επιτρέπει στους μαθητές να έχουν μια εικόνα για τη λύση ενός προβλήματος (Duval, 1999). Τα ευρήματα δείχνουν ότι κάποιες λύσεις παρήχθησαν από λιγότερο από το 5% των συμμετεχόντων. Μια πιθανή εξήγηση για τη χαμηλή συχνότητα είναι το επιχείρημα της Hsu (2007) ότι η χρήση βοηθητικών γραμμών είναι απαιτητική για δύο λόγους. Πρώτον, επειδή η αντιληπτική αντίληψη συμπεριλαμβανομένης της βοηθητικής κατασκευής είναι μια δυναμική και απαιτητική διαδικασία και δεύτερον επειδή οι μαθητές πρέπει να εφαρμόσουν μετασχηματιστική παρατήρηση για να οπτικοποιήσουν μια λύση. Επιπλέον, οι Fujita et al. (2020) επεσήμαναν ότι για τις λύσεις προβλημάτων που απαιτούν περισσότερα από ένα βήματα συλλογισμού, η χωρική οπτικοποίηση και η χωρική αναλυτική συλλογιστική βάσει ιδιοτήτων είναι προαπαιτούμενα. Με αυτόν τον τρόπο, μπορεί να ξεπεραστεί η αντιληπτική σύλληψη του δεδομένου γεωμετρικού σχήματος. Με βάση τα αποτελέσματά μας, πιστεύουμε ότι οι μαθητές που πέτυχαν στη δημιουργία των περισσότερων λύσεων και είναι πιο δημιουργικοί, μπορούν να πραγματοποιήσουν μετασχηματισμούς που αποκαλύπτουν τα ευρετικά χαρακτηριστικά του σχήματος.

Όσον αφορά τα στοιχεία της δημιουργικότητας, τα αποτελέσματά μας έδειξαν ότι η ευχέρεια των μαθητών ήταν σε ικανοποιητικό επίπεδο. Τα τελευταία χρόνια, συνιστάται ιδιαίτερα ότι η επίλυση προβλημάτων με πολλούς τρόπους είναι επωφελής για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών (π.χ. Bingolbali, 2020, Stupel & Ben-Chaim, 2017). Σε αυτό το πλαίσιο, προκύπτουν πρόσθετες ευκαιρίες μάθησης όταν οι μαθητές προσπαθούν να κατανοήσουν τις λύσεις που δίνονται από άλλους, να συγκρίνουν λύσεις άλλων με τις δικές τους και να κάνουν σχόλια για τις ομοιότητες στις λύσεις (Yackel & Cobb, 1996). Ωστόσο, είναι μια χρονοβόρα διαδικασία και λαμβάνοντας υπόψη τις απαιτήσεις του σχολικού προγράμματος, δεν είναι πάντα μια εφικτή ρουτίνα στην τάξη. Αυτός είναι, ίσως, ένας από τους λόγους για τους οποίους πολλοί μαθητές βρήκαν μία μόνο λύση ή δεν έδωσαν καμία.

Όπως ήταν αναμενόμενο, τα αντίστοιχα ποσοστά ευχέρειας και ευελιξίας ήταν παρόμοια. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στις περισσότερες ερευνητικές μελέτες οι δύο έννοιες εμφανίζονται ως δίπολο (Leikin, 2009), με τα ποσοστά ευελιξίας των λύσεων των μαθητών να είναι συνήθως χαμηλότερα. Όσον αφορά τις βαθμολογίες πρωτοτυπίας, αυτές βρέθηκαν αρκετά χαμηλές. Αυτό είναι σύμφωνο με προηγούμενες μελέτες (π.χ. Levav-Waynberg & Leikin, 2012) στις οποίες η πρωτοτυπία φαίνεται να είναι ένα πιο εσωτερικό χαρακτηριστικό σε σύγκριση με την ευχέρεια και την ευελιξία. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι και μαθητές με βαθιά γνώση του μαθηματικού περιεχομένου μπορεί να επιδείξουν πρωτοτυπία (Van Harpen & Presmeg, 2013).

Προκειμένου να απαντήσουμε στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, εστιάσαμε στη σχέση μεταξύ των διαστάσεων της μαθηματικής δημιουργικότητας και των χωρικών ικανοτήτων. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι μαθητές με υψηλή ικανότητα να οπτικοποιούν και να μετασχηματίζουν νοερά χωρικές πληροφορίες, είναι σε θέση να εστιάσουν σε διαφορετικά υποσχήματα ταυτόχρονα, να χρησιμοποιήσουν διαφορετικές ιδιότητες και να κατασκευάσουν νέα βοηθητικά στοιχεία στο σχήμα. Αυτοί οι μαθητές πέτυχαν υψηλές βαθμολογίες δημιουργικότητας. Τα ευρήματα δείχνουν αρχικά ότι η χωρική ικανότητα είναι μια πολυδιάστατη έννοια. Δεύτερον, δείχνουν ότι στην πραγματικότητα η λειτουργική αντίληψη του γεωμετρικού σχήματος είναι που ενισχύει την ικανότητα των μαθητών να εκτελούν γεωμετρικές αποδείξεις με περισσότερους από έναν τρόπους.

Τα ευρήματά μας δείχνουν ότι οι διαστάσεις της δημιουργικότητας μπορούν να προβλεφθούν από ορισμένες χωρικές ικανότητες. Η χωρική οπτικοποίηση ειδικότερα αποδείχθηκε ότι είχε θετική επίδραση στην ευελιξία και την πρωτοτυπία, ενώ η ευελιξία διεκπεραίωσης είχε θετική επίδραση σε όλα τα στοιχεία της δημιουργικότητας. Με άλλα λόγια, οι μαθητές με υψηλή ικανότητα να διπλώνουν ή να συναρμολογούν νοερά μέρη ενός αντικειμένου και να οπτικοποιούν το αποτέλεσμα και οι μαθητές με την ικανότητα να αναγνωρίζουν τις αλλαγές προσανατολισμού σε ένα σχήμα είχαν υψηλό επίπεδο ευελιξίας και πρωτοτυπίας. Επιπλέον, οι μαθητές με υψηλές δεξιότητες αποσυναρμολόγησης είχαν υψηλό επίπεδο ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας. Οι Pitta-Pantazi et al. (2013) ανέφεραν παρόμοια ευρήματα δηλώνοντας ότι το γνωστικό στυλ χωρικής απεικόνισης επέτρεψε στα άτομα να είναι πιο δημιουργικά και να παρέχουν πολυάριθμες, διαφορετικές και μοναδικές λύσεις σε μαθηματικά προβλήματα.

Τέλος, τα ευρήματά μας καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η ευελιξία διεκπεραίωσης μπορεί να συμβάλει στη βελτίωση όλων των διαστάσεων της μαθηματικής δημιουργικότητας και ότι η χωρική οπτικοποίηση μπορεί να ενισχύει την πτυχή της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας. Η επίπτωση αυτών των ευρημάτων είναι σημαντική για τη διδασκαλία των μαθηματικών και θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη από τους υπεύθυνους χάραξης εκπαιδευτικής πολιτικής, τους προγραμματιστές προγραμμάτων σπουδών και τους συγγραφείς εγχειριδίων μαθηματικών, έτσι ώστε οι εργασίες χωρικής ικανότητας να περιλαμβάνονται στην εκπαιδευτική πρακτική με στοχευμένο τρόπο και να υποστηρίζονται από την κατάρτιση των εκπαιδευτικών. Επιπλέον, τα γεωμετρικά προβλήματα που μπορούν να επιλυθούν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους είναι ένα αποτελεσματικό εργαλείο για να ενθαρρύνουν τους μαθητές να ασκήσουν τις δεξιότητες χωρικής ικανότητας και να εξασκήσουν τη μαθηματική τους δημιουργικότητα.

Η τρίτη έρευνα στοχεύει να εμπλουτίσει την υπάρχουσα βιβλιογραφία σχετικά με τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών Λυκείου στη γεωμετρία κατά την επίλυση προβλημάτων πολλαπλών λύσεων. Για το σκοπό αυτό, εξετάστηκε η σχέση της μαθηματικής δημιουργικότητας τόσο με την οπτικοποίηση όσο και με την αντίληψη γεωμετρικών σχημάτων. Σε προβλήματα των οποίων η διατύπωση δεν συνοδεύεται από το σχετικό σχήμα, χρειάζονται δύο επίπεδα οπτικοποίησης. Το πρώτο περιλαμβάνει οπτικοποίηση που επιτρέπει τη μετάβαση από τη λεκτική εκφώνηση στην κατασκευή του σχήματος. Απαιτείται, λοιπόν, η λεκτική αντίληψη του σχήματος, που οδηγεί στη γεωμετρική κατασκευή, η οποία εδώ συλλαμβάνεται τόσο ως η νοητική διαδικασία κατασκευής του σχήματος όσο και ως η πραγματική κατασκευή του σχήματος. Το δεύτερο επίπεδο οπτικοποίησης έχει να κάνει με την ερμηνεία και τη νοητική διαδικασία χειρισμού του σχήματος προκειμένου να λυθεί το γεωμετρικό πρόβλημα με πολλούς τρόπους. Έτσι, η λειτουργική αντίληψη του σχήματος είναι απαραίτητη καθώς οι μαθητές τροποποιούν το σχήμα και παράγουν διαφορετικές διαμορφώσεις του σχήματος προκειμένου να δώσουν λύσεις. Συνολικά, το πραγματικό προϊόν των μαθητών (σχήμα που παράγεται) βασίζεται στη γεωμετρική τους σκέψη που περιλαμβάνει τη λεκτική διαδικασία και την οπτική διαδικασία δημιουργίας του σχήματος (Επίπεδο Οπτικοποίησης 1) και οδηγεί στην οπτική διαδικασία λειτουργίας του σχήματος (Επίπεδο Οπτικοποίησης 2) . Σε προβλήματα των οποίων η διατύπωση συνοδεύεται από το σχετικό σχήμα, η οπτική διαδικασία για την επίλυσή τους περιλαμβάνει μόνο το δεύτερο επίπεδο οπτικοποίησης.

Ένα άλλο σημαντικό εύρημα σχετίζεται με τον τρόπο που οι μαθητές τροποποιούν ένα γεωμετρικό σχήμα και έχει να κάνει με την κατασκευή βοηθητικών γραμμών όταν δίνεται το σχετικό σχήμα. Τα αποτελέσματά μας έδειξαν ότι περισσότεροι μαθητές κατασκεύασαν βοηθητικές γραμμές μέσα και όχι έξω από το δεδομένο γεωμετρικό σχήμα. Επιπλέον, ένα σημαντικό εύρημα ήταν ότι, παρόλο που ορισμένοι μαθητές κατασκεύασαν την ίδια βοηθητική γραμμή, στη συνέχεια ακολούθησαν διαφορετική διαδρομή για τη λύση της εργασίας. Αυτό αποδεικνύει ότι διαφορετικοί μαθητές μπορούν να έχουν παρόμοια λειτουργική αλλά διαφορετική λεκτική αντίληψη του γεωμετρικού σχήματος. Οι Palatnik και Dreyfus (2018) επεσήμαναν ότι με την εισαγωγή βοηθητικών γραμμών οι μαθητές μπορούν να ανακαλέσουν γνωστά γεγονότα ή ορισμούς και να τροποποιήσουν τα δεδομένα διαγράμματα. Με αυτόν τον τρόπο προσδοκούν να λάβουν χρήσιμες πληροφορίες που θα τους οδηγήσουν στη λύση ή στην αναγνώριση μιας ήδη γνωστής διαδικασίας. Ωστόσο, η χρήση βοηθητικών γραμμών αποτελεί πηγή δυσκολίας για τους μαθητές. Σύμφωνα με την Hsu (2007), για να κατασκευάσει μια βοηθητική γραμμή και επομένως να οπτικοποιήσει μια λύση, ένας μαθητής πρέπει να προσεγγίσει το σχήμα δυναμικά και να εφαρμόσει παρατήρηση μετασχηματισμού. Αυτός είναι πιθανώς ο λόγος για τον οποίο, για παράδειγμα, το ένα τέταρτο των μαθητών που συμμετείχαν σε αυτή τη μελέτη δεν έλυσαν το πρόβλημα 1. Τα αποτελέσματά μας επιβεβαίωσαν ότι προκειμένου να παραχθούν λύσεις σε ένα πρόβλημα, εκτός από την αντιληπτική, ακολουθιακή και λεκτική σύλληψη γεωμετρικού σχήματος, η λειτουργική σύλληψη είναι πολύ σημαντική, αφού οι μαθητές πρέπει να κατασκευάσουν βοηθητικές γραμμές.

Τα παραπάνω ευρήματα είναι σύμφωνα με την άποψη του Duval (1995) ότι πολλές διαφορετικές διαδικασίες σύλληψης είναι απαραίτητες ταυτόχρονα για να κατανοήσουν οι μαθητές μαθηματικά στοιχεία. Συνοπτικά, τα ευρήματά μας υποδεικνύουν ότι οι βοηθητικές γραμμές χωρίζονται σε δύο τύπους: (α) τις βοηθητικές γραμμές που δημιουργούν υποσχήματα μέσα στο δεδομένο σχήμα και (β) την κατασκευή των βοηθητικών γραμμών που έχει ως αποτέλεσμα την κατασκευή σχημάτων των οποίων το δεδομένο σχήμα είναι ένα μέρος. Σύμφωνα με τα ποσοστά των λύσεων των μαθητών, η τελευταία εικονική επεξεργασία είναι πολύ πιο απαιτητική για τους μαθητές καθώς απαιτεί αυξημένη αφηρημένη σκέψη και ικανότητα οπτικοποίησης του αποτελέσματος της τροποποίησης του σχήματος. Αυτό το εύρημα έριξε φως σε μια αποτελεσματική στρατηγική μέσω της οποίας οι μαθητές μπορούν να λύσουν προβλήματα γεωμετρίας. Μια τέτοια στρατηγική θα μπορούσε να περιλαμβάνει τη χρήση προβλημάτων που στοχεύουν να ξεπεράσουν την αντιληπτική αναγνώριση του σχήματος από τους μαθητές, ώστε να οδηγηθούν σε λειτουργική σύλληψη μέσω μερολογικής τροποποίησης.

Κατά τη διερεύνηση των σχέσεων μεταξύ της δημιουργικότητας και την παρουσίαση ενός γεωμετρικού προβλήματος, το είδος της δημιουργικότητας που επιδεικνύουν οι μαθητές δεδομένου ενός προβλήματος πολλαπλών λύσεων που μπορεί ή όχι να συνοδεύεται από το σχετικό σχήμα δείχνει παραλλαγές. Για να είμαστε πιο ακριβείς, όταν δίνεται το αντίστοιχο σχήμα, αν και η ευχέρεια και η ευελιξία είναι υψηλότερες, η πρωτοτυπία δεν επηρεάζεται ούτε θετικά ούτε αρνητικά. Σε προβλήματα που δίνονται χωρίς το αντίστοιχο σχήμα και, επομένως, οι μαθητές πρέπει να κατασκευάσουν το γεωμετρικό σχήμα για να το λύσουν, η πρωτοτυπία είναι μεγαλύτερη. Μάλιστα, η παρουσία του σχήματος στα προβλήματα πολλαπλών λύσεων φαίνεται να λειτουργεί αρνητικά όσον αφορά την εύρεση πρωτότυπων λύσεων. Συνοπτικά, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η συνολική δημιουργικότητα των μαθητών είναι υψηλότερη σε προβλήματα τα οποία δίνονται με το αντίστοιχο σχήμα. Ως εκ τούτου, προτείνουμε ότι η συμπερίληψη προβλημάτων που ενισχύουν την κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων κατά τη διδασκαλία και τη μάθηση της γεωμετρίας, θα ενισχύσει σημαντικά την ανάπτυξη της δημιουργικότητας των μαθητών και την ικανότητα επίλυσης ενός προβλήματος με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους.

Στη συνέχεια στην τρίτη έρευνα, διερευνούμε τη δημιουργικότητα υπό το φως του γεωμετρικού χώρου εργασίας (GWS). Με βάση τις πρόσφατες μελέτες, προχωράμε ένα βήμα μπροστά και περιγράφουμε τη φύση της γεωμετρικής εργασίας που κάνει ένας μαθητής κατά τη διάρκεια επίλυσης ενός γεωμετρικού προβλήματος πολλαπλών λύσεων που η διατύπωση συνοδεύεται από το σχετικό σχήμα. Μάλιστα, αξίζει να αναφερθεί ότι ο Kuzniak (2018) υποδεικνύει ότι ο στόχος της θεωρίας του GWS δεν είναι μόνο να παρατηρήσει και να περιγράψει υπάρχουσες δραστηριότητες αλλά και να αναπτύξει κάποιες εργασίες και να τις εφαρμόσει στην τάξη για να ενσωματώσει τις τρεις διαστάσεις του μοντέλου στην πλήρη κατανόηση της γεωμετρικής εργασίας σύμφωνα με την προοπτική που αναμένεται από τους εκπαιδευτικούς. Τα ευρήματά μας υποδηλώνουν ότι η χρήση των προβλημάτων πολλαπλών λύσεων κατά τη διάρκεια του μαθήματος και η ένταξή τους στα σχολικά βιβλία μπορεί να συμβάλει σε αυτή την κατεύθυνση.

Τα ευρήματα αποκαλύπτουν ότι η μαθηματική εργασία των μαθητών υψηλής δημιουργικότητας θεωρείται ολοκληρωμένη και συνεκτική. Παρόλο που το γεωμετρικό έργο υποστηρίζεται έντονα από τη λεκτική γένεση της απόδειξης, υπάρχει μια γνήσια σχέση μεταξύ επιστημολογικών και γνωστικών πτυχών και μια πλούσια ποικιλομορφία μεταξύ των κατακόρυφων επιπέδων του μοντέλου. Στην πραγματικότητα, σχετίζεται πρώτα με την εικονική ή τη σημειωτική γένεση. Ο μαθητής εργάζεται στο επίπεδο της Γεωμετρίας II (Συνεκτικός Χώρος Εργασίας GII) και μεταβαίνει στη λεκτική γένεση της απόδειξης μέσω της οργανικής (Instrumental) γένεσης. Η οργανική γένεση λειτουργεί ως μέσο απόδειξης και παραγωγής διαφορετικών λύσεων. Το γεωμετρικό έργο υποστηρίζεται και από μια αναλυτική εικαστική εργασία στο σχήμα. Στην πραγματικότητα, σχετίζεται με την εικονική γένεση που χρησιμοποιείται για την αναγνώριση των υποσχημάτων και την αναγνώριση ιδιοτήτων σε μετασχηματισμούς.

Η Leikin (2009) επεσήμανε ότι οι διαφορές μεταξύ των λύσεων μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σύμφωνα με τα ακόλουθα κριτήρια: (α) διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας μαθηματικής έννοιας, (β) διαφορετικές ιδιότητες (ορισμοί ή θεωρήματα) μαθηματικών εννοιών από ένα μαθηματικό θέμα, ή (γ) διαφορετικά μαθηματικά εργαλεία και θεωρήματα από διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών. Προτείνουμε μια ευθυγράμμιση μεταξύ της κατηγοριοποίησης της Leikin και των θεμελιωδών γονιδίων: διαφορετικές αναπαραστάσεις αντιστοιχούν σε εικονική και σημειωτική γένεση, διαφορετικές ιδιότητες (ορισμοί ή θεωρήματα) μαθηματικών εννοιών από ένα μαθηματικό θέμα έως τη γένεση λόγου και διαφορετικά μαθηματικά εργαλεία και θεωρήματα από διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών έως οργανική γένεση.

Κάνοντας ένα βήμα παραπέρα, πιστεύουμε ακράδαντα ότι μεταξύ των τριών όρων που σχετίζονται με τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων και τη μαθηματική δημιουργικότητα, η «ευελιξία» είναι η πιο σημαντική διάσταση και σχετίζεται με τους τρεις κάθετους άξονες του μοντέλου GWS. Ο όρος «αναπαραστατική ευελιξία» έχει συσχετιστεί με ένα μοντέλο τριών διαστάσεων: την αναγνώριση μιας μαθηματικής έννοιας μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων της, τις επεξεργασίες στο ίδιο σημειωτικό επίπεδο και τη μετατροπή μεταξύ διαφορετικών σημειωτικών καταχωρίσεων (Deliyianni & Gagatsis, 2013; Deliyianni et al., 2016). Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι τρεις διαφορετικοί σημειωτικοί παράγοντες παρεμβαίνουν στη γεωμετρία, δηλαδή η φυσική γλώσσα, η συμβολική γλώσσα και τα σχήματα, υπάρχουν διαφορετικές μορφές μιας γεωμετρικής παρουσίασης εργασίας που βασίζονται στους διαφορετικούς συνδυασμούς στοιχείων από τους τρεις καταχωρητές. Για παράδειγμα, η εργασία που χρησιμοποιείται στην παρούσα ερευνητική μελέτη μπορεί να παρουσιαστεί με έξι εναλλακτικούς τρόπους. Έτσι, η αναγνώριση σε μια γεωμετρική εργασία μπορεί να σχετίζεται με το γεωμετρικό σχήμα που προτείνεται στον μαθητή ή με τα διαφορετικά σχήματα που κατασκεύασε ο ίδιος. Η λύση μπορεί να σχετίζεται με τα αλγεβρικά σύμβολα που παρεμβαίνουν στη λύση της εργασίας. Τέλος, η μετατροπή σχετίζεται όχι μόνο με τη μετακίνηση από μια μορφή σχήματος που σχεδιάστηκε από τον μαθητή σε άλλη (με τη χρήση βοηθητικών γραμμών, για παράδειγμα) αλλά και με τη διατύπωση της απόδειξης ενός προβλήματος με την χρήση της φυσικής και συμβολικής γλώσσας.

Επιπλέον, θα ήταν ενδιαφέρον να διερευνηθεί η φύση της γεωμετρικής εργασίας που κάνουν οι μαθητές και η αντίστοιχη ευελιξία τους κατά τη διάρκεια ενός γεωμετρικού προβλήματος πολλαπλών λύσεων που η διατύπωση δεν συνοδεύεται από το σχετικό σχήμα, δεδομένου ότι σε αυτήν την περίπτωση χρειάζονται δύο επίπεδα οπτικοποίησης.

Σκοπός της 4ης έρευνας είναι να εξετάσει πώς η μαθηματική δημιουργική σκέψη (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία) μαθητών προσχολικής, μεταβάλλεται ύστερα από παρεμβατικό πρόγραμμα τριών μηνών το οποίο στοχεύει στην ανάπτυξη της κατανόησης γεωμετρικού σχήματος των μαθητών και της χωρικής τους ικανότητας. Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι η σημασία της διαχείρισης του λάθους στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας είναι καθοριστικός παράγοντας όχι μόνο για τη μάθηση αλλά και την ανάπτυξη της πρωτοτυπίας. Οι μαθητές που φοβόντουσαν τα μαθηματικά, να μην κάνουν λάθος ή που δεν είχαν ξανακάνει τις ίδιες δραστηριότητες και φοβόντουσαν μην αποτύχουν κατάφεραν να απενοχοποιήσουν το λάθος και ατομικά και στην ομάδα με αποτέλεσμα να αναπτύξουν τις διαστάσεις της μαθηματικής δημιουργικότητας. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές μπορούσαν να κάνουν λάθος παραπάνω από μία φορά, με διαφορετικά έργα χωρίς να μειώνεται η αξία τους ή να απογοητεύονται και να μην προσπαθούν εκ νέου, να μην περιμένουν πρώτα να τους δείξει ο εκπαιδευτικός το σωστό, αλλά να δοκιμάζουν ή να βλέπουν και να ζητούν βοήθεια από τους συμμαθητές τους και να μην απογοητεύονται αν δεν έχουν ολοκληρώσει στο δεδομένο χρόνο το έργα τους. Γνωστικά επομένως υπήρχε η ελευθερία του πειραματισμού και η εύρεση πάνω από μία σωστή λύση κάθε φορά ενώ ήταν δεδομένη η εξήγηση της προσπάθειας, της σκέψης κάθε μαθητή από τον ίδιο ακόμη και αν είχε κάνει λάθος.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η σημασία να αναδεικνύονται όλες οι διαφορετικές λύσεις είναι πρώτη προτεραιότητα για την ανάπτυξη της δημιουργικότητας και όχι η ανάδειξη της πιο κοινής λύσης (Tsamir et al., 2010). Αυτό ήταν συνέπεια της διαδικασίας μάθησης που δεν είχε αυτοσκοπό τη γνωριμία των μαθητών μόνο με συγκεκριμένες έννοιες αλλά και με όσες κατά τη διάρκεια της διερεύνησης έρχονταν ως φυσιολογικές απορίες π.χ. διάκριση τετραγώνου από ρόμβο, η έννοια της γωνίας. Η ικανότητα μεταβολής της ευχέρειας και ευελιξίας λύσεων των μαθητών φάνηκε να λειτουργεί ως δίπολο: όσο πιο πολύ εξασκούνταν με διαφορετικά έργα τόσο πιο πολύ άνεση είχαν να βρουν νέες λύσεις (Leikin, 2009). Η βιωματική προσέγγιση και η ποικιλία των εργασιών φαίνεται να παίζουν σημαντικό ρόλο σε αυτή την ηλικία στην κινητοποίηση και ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας. Η σημασία των πολλών και ποικίλων προσεγγίσεων των μαθηματικών εννοιών είχε ως συνέπεια οι μαθητές να οικειοποιούνται τη μαθηματική γνώση χωρίς δημιουργία στερεότυπων π.χ. η έννοια της σωστής θέσης ενός ορθογωνίου τριγώνου ή ενός τετράγωνου. Η πρωτοτυπία όμως φαίνεται να μην αναπτύσσεται με την ίδια ευκολία σε σχέση με την ευχέρεια και την ευελιξία. Οι μαθητές ως προς τη δημιουργική τους ικανότητα φάνηκε να ευνοήθηκαν σε μεγαλύτερο βαθμό στην ανάπτυξη ευχέρειας και στην ανάπτυξη ευελιξίας μέσα από τις δραστηριότητες του προγράμματος παρέμβασης απ΄ ότι στην ανάπτυξη πρωτότυπων λύσεων.

Η σημασία της διαφοροποίησης ανάλογα τις ιδιαιτερότητες του μαθητή σε θέματα που αφορούν τον τρόπο επικοινωνίας και υποστήριξης (στόχος η απόκτηση αυτοπεποίθησης και αυτονομίας). Κάθε μαθητής χρειάζεται το δικό του χρόνο για να οικειοποιηθεί τις έννοιες και να γίνει αυτόνομος στη μάθηση. Οι μαθητές ανέπτυξαν δεξιότητες διαχείρισης του υλικού, του χρόνου και δεξιότητες συνεργασίας για να μπορέσουν να ασχοληθούν με τις ελκυστικές γι αυτούς δραστηριότητες. Η αποτελεσματική διαχείριση του χρόνου επιτρέπει την ενασχόληση με πολλά διαφορετικά έργα κάθε φορά που είναι απαραίτητα για την ανάπτυξη ευρύτητας οπτικής για τις έννοιες αλλά και επανάληψη μέσα από άλλα πλαίσια των εννοιών που διερευνώνται. Κάθε μαθητής ανάλογα με τις δυνατότητές του ολοκλήρωνε ή όχι το έργο ακολουθώντας τις οδηγίες στο βαθμό που μπορούσε καθώς στόχος ήταν να εργάζεται μόνος του ή να συνεργάζεται και όχι το αποτέλεσμα με κάθε κόστος. Έτσι οι δεξιότητες όλων βελτιώθηκαν σε ένα κλίμα μάθησης με νόημα και ευκαιρίες για ανάδειξη της προσωπικής δουλειάς του καθενός.

Περιορισμοί Έρευνας

Η έρευνα εφαρμόστηκε σε μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου όπου η Ευκλείδεια γεωμετρία διδάσκεται ως δομή με τον αποδεικτικό της χαρακτήρα. Έγινε μια πρώτη προσέγγιση σε μαθητές Νηπίου με ενδιαφέροντα αποτελέσματα αλλά ο μικρός αριθμός συμμετεχόντων δεν επιτρέπει τις γενικεύσεις. Απουσιάζουν επίσης ευρήματα για τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας από μαθητές πρωτοβάθμιας σαν συνέχεια του Νηπίου. Ο λόγος είναι ότι προτιμήθηκαν οι μεγαλύτερες ηλικίες της Δευτεροβάθμιας όπου οι μαθητές έχουν περισσότερα εργαλεία στην φαρέτρα τους για να παράγουν πολλαπλές λύσεις στη γεωμετρία.

Μελλοντική Έρευνα

Συνέχεια της παρούσας προσέγγισης μέσα από δυναμικά περιβάλλοντα γεωμετρίας και περιβάλλοντα επαυξημένης πραγματικότητας με σκοπό να εξετάσουμε:

Πως τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων σε συνδυασμό με τα δυναμικά περιβάλλοντα γεωμετρίας μπορούν να αναπτύξουν τη μαθηματική δημιουργικότητα και τις μαθηματικές δεξιότητες των μαθητών;

Πως τα περιβάλλοντα επαυξημένης πραγματικότητας μπορούν να ενισχύσουν τα δύο επίπεδα οπτικοποίησης, την κατανόηση γεωμετρικού σχήματος και τις διαστάσεις της μαθηματικής δημιουργικότητας.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

Aizikovitsh - Udi, E. (2014). The Extent of Mathematical Creativity and Aesthetics in Solving Problem among Students Attending the Mathematically Talented Youth Program. *Creative Education, 5*, 228-241.

Allen, G. (2003). Functional families of spatial abilities: poor relations and rich prospects. *International Journal of Testing, 3*(3), pp. 251-262.

Arcavi, A., (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics *Educational Studies in Mathematics, 52,* pp.215–241.

Arıcı, S., & Aslan-Tutak, F. (2015). The effect of origami-based instruction on spatial visualization, geometry achievement, and geometric reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(1), 179-200. doi:10.1007/s10763-013-9487-8.

Beghetto, R. A., & Kaufman, J. C. (2011). Teaching for creativity with disciplined improvisation. *In R. K. Sawyer (Ed.), Structure and improvisation in creative teaching* (pp. 94–109). Cambridge: Cambridge University Press.

Bingolbali, E. (2020). An analysis of questions with multiple solution methods and multiple outcomes in mathematics textbooks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(5), 669-687, doi: 10.1080/0020739X.2019.1606949.

Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Concepts and Processes* (pp. 176-203). New York: Academic Press.

Blazhenkova, O., & Kozhevnikov, M. (2009). The new object-spatial verbal cognitive style model: Theory and measurement. *Applied Cognitive Psychology, 23*(5), 638–663. https://psycnet.apa.org/doi/10.1002/acp.1473

Bolden, D.S., Harries, A.V. & Newton, D.P. (2010). Pre-service primary teacher's conceptions of creativity in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 73* (2), 143-157.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht: The Netherlands, Kluwer.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1983/1990). *The art of problem posing*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Brunkalla, K. (2009). How to increase mathematical creativity – an experiment. *The Montana Mathematics Enthusiast, 6*(1), 257-266.

Buckley, J., Seery, N., & Canty, D. (2018). A heuristic framework of spatial ability: A review and synthesis of spatial factor literature to support its translation into STEM education. *Educational Psychology Review*. https://doi.org/10.1007/s10648-018-9432-z.

Burton, L. J., & Fogarty, G. J. (2003). The factor structure of visual imagery and spatial abilities. *Intelligence, 31*, 289–318.

Cai, J., & Cifarelli, V. (2005). Exploring mathematical exploration: How two college students formulated and solved their own mathematical problems. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 27*(3), 43–72.

Carroll, J.B. (1993). *Human cognitive abilities: A survey of factor-analytical studies*. United Kingdom: Cambridge University Press.

Ching, T. P. (1997). An experiment to discover mathematical talent in primary school in Kampong Air. *ZDM: International Reviews on Mathematics Education, 29*(3), 94-96.

Chiu, M.-S. (2009). Approaches to the teaching of creative and non-creative mathematical problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*, 55–79.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 420 – 464). New York: MacMillan.

Cohen, J., Cohen, P., West, S., & Aiken, L. (2003*). Applied multiple regression/correlation analysis for the behavioral sciences.* (3rd ed.). Mahwah, NJ: Lawrence.

Del Grande, J. J. (1987). Spatial Perception and Primary Geometry. In M. M. Lindquist (Ed.) *Learning and Teaching Geometry, K-12* (pp 127 – 135). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dillon, J. T. (1982). Problem finding and solving. *Journal of Creative Behavior, 16*, 97–111.

Duval, R. (1987). Ο ρόλος της ερμηνείας στη μάθηση των μαθηματικών. *Διάσταση*, *2*, 56-74.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, (p.142-157). Germany: Springer.

Duval, R. (1999). Representations, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3–26). Morelos, Mexico.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean journal for Research in Mathematics Education, 1*(2), 1-16.

Duval, R. (2004). Geometrical Pictures: kind of representation and specific processings. Σημειώσεις διαλέξεων στα πλαίσια του μαθήματος «Χώρος, εξεικόνιση και συλλογισμός στη Γεωμετρία».

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l’apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 10, 5–53

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103 – 131.

Duval, R. (2014). The first crucial point in geometry learning: Visualization. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 13*(1-2), 1-28.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. London: Springer.

Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., Monoyiou, A., & Panaoura, A. (2010). A theoretical model of students’ geometrical figure understanding. *Proceedings of the 6th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 6)*, Lyon, France.

Deliyianni, E., & Gagatsis, A. (2013). Tracing the development of representational flexibility and problem solving in fraction addition : A longitudinal study. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology*, *33*(4), 427–442.

Deliyianni, E., Gagatsis, A., Elia, I., & Panaoura, A. (2016). Representational Flexibility and Problem-Solving Ability in Fraction and Decimal Number Addition: A Structural Model. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14,* 397-417.

DeLoache, J. S., (2000). Dual representation and young children's use of scale models. *Child Development, 71*, pp.329–338.

DeLoache, J. S., Uttal, D., H., & Pierroutsakos, S. L. (1998). The development of early symbolization: Educational implications. *Learning and Instruction, 8*(4), 325-339.

Ding L., & Jones, K. (2006). Teaching geometry in lower secondary school in Shanghai, China. *Proc Br Soc Res Learn Math, (26),* 41–46.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 109 – 122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Ekstrom, R. B., French. J. W., Harman, H. H., and Derman, D. (1976). *Manual for Kit of factor-referenced cognitive tests.* Princeton, NJ: Educational Testing Service.

Elia, I., Gagatsis, A., Deliyianni, E., Monoyiou, A., & Michael, S. (2009). A structural model of primary school students' operative apprehension of geometrical figures. *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME),* Thessaloniki, Greece.

Elia, I., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 605–618.

Elliot, J. & Smith, I.M. (1983). *An international dictionary of spatial tests.* Windsor, United Kingdom: The NFER-Nelson Publishing Company, Ltd.

English, D. L. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 83–106.

European Parliament and the Council. (2006). *Recommendation of the European Parliament and of the Council of 18 December 2006 on key competences for lifelong learning.* Retrieved http://eurlex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2006:394:0010:0018:en:PDF

Ericsson, K., A., (1999). Creative Expertise as Superior Reproducible Performance: Innovative and Flexible Aspects of Expert Performance. *Psychological Inquiry Vol. 10, No. 4, 1999,* pp. 329-333.

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking (pp. 42–53)*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

English, L., & Warren, E. (1995). General reasoning processes and elementary algebraic understanding: Implications for instruction. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 17*(4), 1–19.

Fan, L., Qi, C., Liu, X. (2017). Does a transformation approach improve students' ability in constructing auxiliary lines for solving geometric problems? An intervention-based study with two Chinese classrooms. *Educational Studies of Mathematics*, *96*(2), 229–248.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139-162. doi:10.1007/BF01273689

Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education, 20* (10), 1193-1211. doi:10.1080/0950069980201003

Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 60-72. doi:10.1016/j.jmathb.2011.08.003.

Fujita, T., & Jones, K. (2006). *Primary trainee teachers' understanding of basic geometrical figures in Scotland*. Paper presented at the PME, Prague. Retrieved from https://eprints.soton.ac.uk/41247/1/Fujita_Jones_PME30_2006.pdf

Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education, 9*(1), 3-20. doi:10.1080/14794800008520167.

Fujita, T., Kondo, Y., Kumakura, H., Kunimune, S., & Jones, K. (2020). Spatial reasoning skills about 2D representations of 3D geometrical shapes in grades 4 to 9. *Mathematics Education Research Journal*, 32, 285–305. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00335-w.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J (1996). A joint perspective of the idea of representation in learning and doing mathematics. In von L. P. Steffe & Mahwah (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397-430). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Gómez-Chacón, I. M., & Kuzniak, A. (2015). Spaces for geometric work: Figural, instrumental, and discursive geneses of reasoning in a technological environment. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(1), 201-226. doi:10.1007/s10763-013-9462-4.

Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F., & Spagnolo, F. (2008). *Statistical implicative analysis*. Germany: Springer.

Gravemeijer, K. P. E., Figueiredo, N., Feijs, E., Van Galen, F., Keijzer, R., & Munk, F. (2007). *Measurement and geometry in upper primary school*. Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Gridos, P., Gagatsis, A., Elia, I. & Deliyianni, E. (2019). Mathematical creativity and geometry: the influence of geometrical figure apprehension on the production of multiple solutions. *Proceedings of the 11th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group 4 (pp. 789-796).* Utrecht, Netherlands.

Guberman, R., & Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: Changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*, 33–56. Doi: 10.1007/s10857-012-9210-7

Guilford, J. P. (1967). The *n*ature of *h*uman *i*ntelligence. McGraw-Hill: New York.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-Dimensional Geometry: In search of a Framework. In L. Puig and A. Gutiérrez (Eds), *Proceedings of the 20th conference of the international* *group for the psychology of mathematics education,* (1), 3-19. Valencia: Universidad de Valencia.

Hancock, D. R. & Algozzine, B. (2006). *Doing Case Study Research*. New York.

Haylock, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school children. *Education Studies in Mathematics, 18*(1), 59–74.

Haylock, D. (1997). Recognizing mathematical creativity in school children. *International Reviews on Mathematical Education, 29*(3), 68–74.

Hegarty, M. and Waller, D.A (2005). *Individual differences in spatial abilities.* The Cambridge Handbook of Visuospatial Thinking (pp. 121-169).

Herbst, P. (2002). Engaging students in proving: A double bind on the teacher. *Journal for Research in Mathematics Education, 33,* 176–203.

Herbst P. (2004). Interactions with diagrams and the making of reasoned conjectures in geometry. *ZDM, 36(5),* 129–139.

Herbst, P. & Brach, C. (2006). Proving and doing proofs in high school geometry classes: What is it that is going on for students? *Cognition and Instruction, 24*, 73–122.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry – Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(1), 61-76.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In J. Kilpatrick & P. Nesher (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70-95). New York, NY: Cambridge University Press.

Hershkovitz, S., & Nesher P. (2003): The role of schemes in solving word problems. *The Mathematics Educator, 7*(2), 1-24.

Hilbert, D. (1902). Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society, 8*, 437-479.

Hino, K. (2007). Towards the problem-centered classroom: trends in mathematical problem solving in Japan. *ZDM: International Reviews on Mathematics Education, 39,* 503-514.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In M. Mariotti (Ed.), *Proceedings of CERME 3.* Bellaria, Italy.

Hsieh, F. J., Horng W. S., & Shy H.Y. (2012). From exploration to proof production. In G. Hanna, & M. de Villiers, (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 279–304). New York: Springer.

Hsu, H. (2007). Geometric calculations are more than calculations. In: J-H Woo, H-C Lew, K-S Park, D-Y Seo (Eds*.), Proceedings of the 31st conference of the international group for the psychology of mathematics education, Vol. 3.*, (p. 57–64). Korea: Seoul.

Hsu, H.Y., & Silver, E. A. (2014). Cognitive complexity of mathematics instructional tasks in a Taiwanese classroom: an examination of task sources. *Journal for Research in Mathematics Education, (45),* 460–496.

Jay, E. S., & Perkins, D. N. (1997). Problem finding: The search for mechanism. In M. Runco (Ed.), *The creativity research handbook* (pp. 257–293). Cresskill, NJ: Hampton Press.

Johnson, E. S., & Meade, A. C. (1987). Developmental patterns of spatial ability: An early sex difference. *Child Development, 58,* 725 – 740.

Kalogirou, P., Gagatsis, A. (2011). A first insight of the relationship between students' spatial ability and geometrical figure apprehension. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics, Issue 11, 2011, pp. 27-39*.

Kalogirou, P. & Gagatsis, A. (2012). The relationship between students'spatial ability and geometrical figure apprehension. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 11 (1-2)*, 133-146.

Kalogirou, P., Elia, I., & Gagatsis, A. (2013*). The relationship between visualization, spatial rotation, perceptual and operative apprehension*. Proceedings of PME 37, 3, 129–136.

Kaput, J. J. (1985). Representation and Problem Solving: Methodological Issues Related to Modeling. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (pp. 381-398). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (1997). Representation Systems and Mathematics. In C. Janvier (Ed.*), Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (p.p 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM Mathematics Education, 45*, 167-181.

Kaur, H. (2015). Two aspects of young children's thinking about different types of dynamic triangles: Prototypicality and inclusion. *ZDM, 47*(3), 407-420. doi:10.1007/s11858-014-0658-z.

Kell, H. J., Lubinski, D., Benbow, C. P., & Steiger, J. H. (2013). Creativity and technical innovation: Spatial ability's unique role. *Psychological Science, 24*(9), 1831–1836. https://doi.org/10.1177/0956797613478615

Klavir, R., & Gorodetsky, M. (2009). On Excellence and Creativity: A study of Gifted and Expert Students. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 221-242). Rotterdam: Sense Publishers.

Kozhevnikov, M., & Hegarty, M. (2001). A dissociation between object manipulation spatial ability and spatial orientation ability. *Memory & Cognition*, *29*, 745–756. https://doi.org/10.3758/BF03200477

Kuzniak A. (2018) Thinking about the Teaching of Geometry through the Lens of the Theory of Geometric Working Spaces. In: Herbst P., Cheah U., Richard P., Jones K. (eds) *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools.* ICME-13 Monographs. Springer, Cham

Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4.I), 7–40.

Kuzniak, A., Tanguay, D. & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction, *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 721-737.

Kwon, O.N., Park, J.S. & Park, J.H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pasific Education Review, 7 (1), 51-61*.

Lean G, Clements M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics.*

Leikin, R. (2006). About four types of mathematical connections and solving problems in different ways. *Aleh - The (Israeli) Senior School Mathematics Journal, 36*, 8–14.

Leikin, R. (2007). *Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks*. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), Proceedings of the Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education - CERME-5 (pp. 2330–2339).

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129–145). Netherlands: Sense Publisher.

Leikin, R. (2013). Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight. *Psychological Test and Assessment Modeling, Volume 55, 2013 (4),* 385-400.

Leikin, R., & Lev, M. (2007). *Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity*. In J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. Park, & D.-Y. Seo (Eds.), Proceedings of the 31st International Conference for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 161–168). Korea: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Leikin, R. & Levav-Waynberg, A., (2008). Solution Spaces of Multiple-Solution Connecting Tasks as a Mirror of the Development of Mathematics Teachers' Knowledge. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 8:3,* 233-251.

Leikin, R., Levav-Waynberg, A., Gurevich, I., & Meddnikov, L. (2006). Implementation of multiple solution connecting tasks: Do students' attitudes support teachers' reluctance? *FOCUS on Learning Problems in Mathematics, 28,* 1–12.

Lemonidis, C. (1997). A few remarks regarding the teaching of geometry, through a theoretical analysis of geometrical figure. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Application, 30*(4), 2087-2095.

Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1987). Rational Number Relations and Proportions. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (Eds.) (2003). Beyond constructivism: *A model and modelling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education*. Mahwah, N. Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought revealing activities for students and teachers. In A. E. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education*, (pp. 591-645). Mahwah, NJ: Erlbaum. J: Lawrence Erlbaum.

Lester, F. K. (1980). Research on mathematical problem solving. In R. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education.* Reston, Virginia: NCTM.

Leung, S. S. (1997). On the role of creative thinking in problem posing. *Zentralbatt fur Didaktik der Mathematik (ZDM), 97*(2), 48–52.

Leung, S. S., & Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal*, *9*(1), 5–24.

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *Journal of Mathematics Behavior, 31,* 73-90.

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2013). Using Multiple Solution Tasks for the Evaluation of Students' Problem-Solving Performance in Geometry. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 12:4*, 311-333.

Levenson, E. (2013). Tasks that may occasion mathematical creativity: Teachers' choices. *Journal Mathematical Teacher Education, 16*, 269-291.

Lilly, F. & Bramwell-Rejskind, G. (2004). The dynamics of creative teaching. *The Journal of Creative Behavior, 38 (2)*, 102-124.

Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child Development, 56*(6), 1479–1498. https://doi.org/10.2307/1130467

Lohman, D. F. (1988). Spatial abilities as traits, processes, and knowledge. In R. J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence* (Vol. 40, pp. 181-248). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lohman, D.F. (1996). Spatial ability and g. In I. Dennis & P. Tapsfield (Eds.), *Human abilities: their nature and measurement* (pp. 97-116). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically*. 2nd ed. Harlow: Pearson Education.

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in Problem Solving*. New York: Cambridge University Press.

Mayer, R. E., Lewis, A. B., & Hegarty, M. (1992). Mathematical misunderstandings: Qualitative reasoning about quantitative problems. In J. D. Campbell (Ed.), *The Nature and Origin of Mathematical Skills*. Amsterdam: North Holland.

McGrew, K. S. (2009). CHC theory and the human cognitive abilities project: standing on the shoulders of the giants of psychometric intelligence research. *Intelligence*, *37*(1), 1–10. https://doi.org/10.1016/j.intell.2008.08.004.

Meijer, P.C. & Oosterheert, I.E. (2017). Challenging student teachers' professional identities through immersion in 'teaching for creativity'. *Symposium paper presented at AERA 2017*, San Antonio, USA

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of mathematical behavior*, *17*(2), 183-195.

Michael – Chrysanthou, P., & Gagatsis, A. (2015). Ambiguity in the way of looking at a geometrical figure. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – Relime*, *17*(4-I), 165-180.

Michael, S., Gagatsis, A., Elia, I., Deliyianni, E., & Monoyiou, A. (2009). Operative apprehension of geometrical figures of primary and secondary school students. In A. Gagatsis & S. Grozdev (Eds.), *Proceedings of the 6th Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp.67-78). Plovdiv, Bulgaria: University of Plovdiv, CMS.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Research Council. (2006). Learning to Think Spatially: GIS as a Support System in the K-12 Curriculum. *Washington, DC: The National Academies Press*.

Newcombe, N., & Shipley, T. (2014). Thinking about Spatial Thinking: New Typology, New Assessments. *In J. S. Gero, Studying visual and spatial reasoning for design creativity (pp. 179-192)*. Netherlands: Springer.

Ng, O.-L., & Sinclair, N. (2015). Young children reasoning about symmetry in a dynamic geometry environment. *ZDM, 47*(3), 421-434. doi:10.1007/s11858-014-0660-5.

OECD. (2021). PISA 2021 creative thinking framework (Third Draft). PISA 2022. https://www.oecd.org/pisa/publications/pisa-2021-assessment-and-analytica framework.htm

Olkun, S., & Knaupp, J. E. (1999). Children's understanding of rectangular solids made of small cubes. (Report No. SE062280). *Paper presented at the annual meeting of the Southwest Educational Research 92 Association, San Antonio, TX*. (ERIC Document Reproduction Service No. ED428954).

Palatnik, A., & Dreyfus, T. (2018). Students' reasons for introducing auxiliary lines in proving situations. Number of pages 35. Located at: https://www.researchgate.net/publication/326009357_ Palatnik_Dreyfus_Students_reasons_Auxiliary_lines.

Palatnik, A., & Sigler, A. (2018): Focusing attention on auxiliary lines when introduced into geometric problems, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.

Panaoura, G., Gagatsis, A., Lemonidis, C. (2007). Spatial abilities in relation to performance in geometry tasks. In D. Pitta Pantazi D. Pitta Pantazi & Philippou (Eds), *Proceedings of the fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group 7, Geometrical Thinking* (pp. 1062 – 1072). Larnaka, Cyprus: ERME, http://www.cyprusisland.com/cerme/.

Pellegrino, J. W., & Hilton, M. L. (2012). *Educating for life and work: Developing transferable knowledge and skills in the 21st century*. NRC, the National Academies Press

Piirto, J. (2004). *Understanding creativity*. Scottsdale, AZ: Great Potential Press.

Pink, D. (2005). *A whole new mind*. New York, NY: Penguin.

Pitta-Pantazi, D., Sophocleous, P., & Christou, C. (2013). Spatial visualizers, object visualizers and verbalizers: Their mathematical creative abilities. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 45*(2), 199 – 213. doi:10.1007/s11858-012-0475-1

Poincare, H. (1963). *Mathematics and science: last essays.* New York, NY: Dover.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. New York: Wiley.

Posamentier, A. S., Smith, B. S. & Steelman, J. (2010). *Teaching secondary mathematics: techniques and enrichment units*. (8th Ed.). Columbus, Ohio: Merrill Prentice Hall.

Reber, A. S. (1985). *The penguin dictionary of psychology*. England: Clays Ltd.

Robinson, K. (2006). *Schools kill creativity. TED: Ideas worth spreading*. Retrieved from http://www.ted.com/speakers/sir_ken_robinson.html

Runco, M. A. (1993). *Creativity as an educational objective for disadvantaged students* (RBDM 9306). Storrs: University of Connecticut. The National Research Center on the Gifted and Talented.

Runco, M. & Pritzker, S. (1999). *Encyclopedia of Creativity*. Academic Press.

Sanchez, C. A., & Wiley, J. (2017). Dynamic visuospatial ability and learning from dynamic visualizations. In R. Lowe & R. Ploetzner (Eds.), *Learning from dynamic visualization – Innovations in research and application*. Berlin: Springer.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In D. Grows (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Education* (p. 334-370). New York: Macmillan Publishing Company.

Schnotz, W., (2002). Towards an Integrated View of Learning From Text and Visual Displays. *Educational Psychology Review*, *14*(1), pp.101-120. Published by: Springer.

Seeger, F. (1998). Representations in the mathematical classroom: Reflections and constructions. In von F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 308-343). Cambridge UP.

Senk, S.L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Math Teach.78*, 448–456.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM-Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik, 3*, 75–80.

Singer, F. M., Ellerton, N. F., Cai, J., & Leung, E. (2011). Problem posing in mathematics learning and teaching: A research agenda. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 137–166). Ankara, Turkey: PME.

Singer, F. M., Pelczer, I., & Voica, C. (2011). Problem posing and modification as a criterion of mathematical creativity. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the CERME 7* (pp. 1133–1142). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.

Sharygin, I., Protasov, V. (2004). Does the school of the 21st century need geometry? *Proceedings of the 10th International Congress of Mathematics Education. Selected materials from Russia National Presentation* (pp. 167–177). Institute of New Technology: Moscow, Russia.

Sharygin, I. (2006). *Matematika dlia postupayuschih v vuzy (Mathematics for enrolling in higher education)*. 6th ed. Moscow: Drofa.

Smith, I. M. (1964). *Spatial ability: its educational and social significance*. London: University of London Press.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *Journal of Secondary Gifted Education*, *17*, 20–36. doi:10.4219/jsge-2005-389

Stanic, G.M.A., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. Charles, & E. Silver (Eds.), The Teaching and Assessing of problem Solving (pp. 1-22). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates – NCTM.

Sternberg, R. J. (1997). A triarchic view of giftedness: Theory and practice. In N. Colangelo & G. A. Davis (Eds.), *Handbook of gifted education* (2nd ed., pp. 43–53). Boston: Allyn and Bacon.

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (2000). The concept of creativity: Prospects and paradigms. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 93–115). New York: Cambridge University Press.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518–525). Melbourne, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013). One problem, multiple solutions: How multiple proofs can connect several areas of mathematics. *Far East Journal of Mathematics Education (FJME), 11*(2), 129–161.

Stupel, M. & Ben-Chaim, D. (2017): Using multiple solutions to mathematical problems to develop pedagogical and mathematical thinking: A case study in a teacher education program. *Investigations in Mathematics Learning*.

Sullivan, P., Warren, E., & White, P. (2000). Students' responses to content specific open-ended mathematical tasks. *Mathematics Education Research Journal, 12*(1), 2–17.

Taber, K.S (2018). The use of Cronbach's alpha when developing and reporting research instruments in science education. *Research in Science Education*, 48, 1273–1296. https://doi.org/10.1007/s11165-016-9602-2

Tanguay, D., & Venant, F. (2016). The semiotic and conceptual genesis of angle. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 48*(6), 875-894. doi:10.1007/s11858-016-0789-5.

Tirosh, D., & Stavy, R. (1999). Intuitive rules: a way to explain and predict students' reasoning. *Educational Studies of Mathematics, (38)*, 51–66.

Torrance, E. P. (1974). *Torrance tests of creative thinking*. Bensenville, IL: Scholastic Testing Service.

Torrance, E.P. (1994). Creativity: *Just wanting to know*. Pretoria, South Africa: Benedic books.

Van Harpen, X. Y., & Presmeg, N. C. (2013). An investigation of relationships between students' mathematical problem-posing abilities and their mathematical content knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 117–132.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematical Education*. Orlando, FL: Academic Press.

Van Hiele, P. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics, 5*(6), 310-316.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In J. P. Carpenter, J. M. Moser and T. A. Romberg

(Eds.), *Addition and subtraction: A Cognitive Perspective* (pp. 39-59). Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum.

Vodušek, H. B., & Lipovec, A. (2014). The square as a figural concept. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28*(48), 430-448. doi:10.1590/1980-4415v28n48a21.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press. Published originally in Russian in 1930.

Wai, J., Lubinski, D., & Benbow, C., P. (2009). Spatial Ability for STEM Domains: Aligning Over 50 Years of Cumulative Psychological Knowledge Solidifies its Importance. *Journal of Educational Psychology, Vol. 101, No 4*, 817-835.

Walcott, C., Mohr, D., & Kastberg, S. E. (2009). Making sense of shape: An analysis of children's written responses. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(1), 30-40. doi:10.1016/j.jmathb.2009.04.001

Wang, S. (2016). *Discourse perspective of geometric thoughts*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Xistouri, X., & Pitta-Pantazi, D. (2006). *Spatial rotation and perspective taking abilities in relation to performance in reflective symmetry tasks*. Proceedings of PME 30, 5, 425–432.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education, 27*(4), 458–477. doi:10.2307/749877.

Yakimanskaya, I. (Ed.). (1991). *The development of spatial thinking in schoolchildren*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Yilmaz, H. B. (2009). On the development and measurement of spatial ability. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *1*(2), 83–96. http://www.iejee.com/1_2_2009/yilmaz.pdf.

Yuan, X., & Sriraman, B. (2011). An exploratory study of relationships between students' creativity and mathematical problem posing abilities: Comparing Chinese and U.S. students. In B. Sriraman & K. Lee (Eds.), *Th8e elements of creativity and giftedness in mathematics* (pp. 5–28). Rotterdam, The Netherlands: Sense.

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

Γαγάτσης, Α. (2010). *Κατανόηση γεωμετρικού σχήματος από μαθητές δημοτικού, γυμνασίου και λυκείου*. Η Γεωμετρία και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση. Εκδόσεις ΖΗΤΗ.

Γαγάτσης, Α., (2011). Μια εικόνα αξίζει πράγματι χίλιες λέξεις; Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών, σσ.115-128. *Ερευνητικά θέματα Μαθηματικής Παιδείας*, Α. Γαγάτσης & Χ. Γ. Χαραλάμπους (Eds) Αντιπρυτανεία Ακαδημαϊκών υποθέσεων Πανεπιστημίου Κύπρου.

Γαγάτσης, Α., Μιχαήλ, Π., Δεληγιάννη, Ε., Μονογυιού, Α., Καλογήρου, Π., & Φιλίππου, Α. (2011). *Ικανότητα χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων συναρτήσεων και γεωμετρίας: Η μετάβαση από το Γυμνάσιο στο Λύκειο.* Πανεπιστήμιο Κύπρου: Λευκωσία.

Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ. (2001). *Θεωρίες Αναπαράστασης και Μάθηση των Μαθηματικών*. Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου, ERASMUS IP.

Κολέζα, Ε. (2003). Νοητικές Διεργασίες Ανάπτυξης Γεωμετρικών Εννοιών. *Πρακτικά 2ου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση*. Αθήνα: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών & Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Υπουργείο Παιδείας, Δια Βίου Μάθησης & Θρησκευμάτων: *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου*. Φ.Ε.Κ. Β΄ 1168, 8 Ιουνίου 2011.

Χριστοδουλίδης, Μ. & Παπαδόπουλος, Γ. (2003). Η αναγνώριση γεωμετρικών μορφών και η επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων στη Στ΄ δημοτικού. Στο Α. Γαγάτσης & Ι. Ηλία (Εκδ.), *Οι αναπαραστάσεις και τα Γεωμετρικά Μοντέλα στη Μάθηση των Μαθηματικών, Τόμος ΙΙ* (σελ. 199-214). Λευκωσία: Intercollege.