ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Σημαντικότητα διδακτικής των Πιθανοτήτων στο σχολείο και παράγοντες που επηρεάζουν την διδακτική διαδικασία

Διδακτορική Διατριβή

ΜΙΧΑΗΛ ΖΩΡΖΟΣ

Ρόδος, 2023

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Διδακτορική Διατριβή

Σημαντικότητα διδακτικής των Πιθανοτήτων στο σχολείο και παράγοντες που επηρεάζουν την διδακτική διαδικασία.

Μιχαήλ Ζώρζος

Μέλη Τριμελούς Επιτροπής:

Ευγένιος Αυγερινός, Καθηγητής Πανεπιστημίου Αιγαίου, Επιβλέπων

Μιχαήλ Φιλιππάκης, Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Ευαγγελία Κόττα-Αθανασιάδου, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Εθνικού Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

Η υλοποίηση της διδακτορικής διατριβής συγχρηματοδοτήθηκε από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση», 2014-2020, στο πλαίσιο της Πράξης «Ενίσχυση του ανθρώπινου δυναμικού μέσω της υλοποίησης διδακτορικής έρευνας Υποδράση 2: Πρόγραμμα χορήγησης υποτροφιών ΙΚΥ σε υποψηφίους διδάκτορες των ΑΕΙ της Ελλάδας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2014-2020
ανάπτυξη - εργασία - αλληλεγγύη

Ρόδος, 2023

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Σημαντικότητα διδακτικής των Πιθανοτήτων στο σχολείο και παράγοντες που επηρεάζουν την διδακτική διαδικασία.

Διδακτορική Διατριβή

Μιχαήλ Ζώρζος

Εξεταστική Επιτροπή

Ευγένιος Αυγερινός	Καθηγητής	Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Αιγαίου	Επιβλέπων
Μιχαήλ Φιλιππάκης	Καθηγητής	Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων Πανεπιστημίου Πειραιώς	Μέλος Τριμελούς
Ευαγγελία Αθανασιάδου-Κόττα	Αναπληρώτρια Καθηγήτρια	Τμήμα Μαθηματικών Εθνικού Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών	Μέλος Τριμελούς
Νικόλαος Παπαναστασίου	Αφυπηρετήσας Καθηγητής	Τμήμα Μαθηματικών Εθνικού Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών	Μέλος
Μιχαήλ Σκουμιός	Καθηγητής	Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Αιγαίου	Μέλος
Εμμανουήλ Φωκίδης	Αναπληρωτής Καθηγητής	Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Αιγαίου	Μέλος
Πέτρος Τραντάς	Επίκουρος Καθηγητής	Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Αιγαίου	Μέλος

Ρόδος, 2023

Σημαντικότητα διδακτικής των Πιθανοτήτων στο σχολείο και παράγοντες που επηρεάζουν τη διδακτική διαδικασία

Διδακτορική Διατριβή

The importance of teaching Probabilities at school and factors influencing the teaching process

Ph.D. Dissertation

Η υλοποίηση της διδακτορικής διατριβής συγχρηματοδοτήθηκε από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση», 2014-2020, στο πλαίσιο της Πράξης «Ενίσχυση του ανθρώπινου δυναμικού μέσω της υλοποίησης διδακτορικής έρευνας Υποδράση 2: Πρόγραμμα χορήγησης υποτροφιών ΙΚΥ σε υποψηφίους διδάκτορες των ΑΕΙ της Ελλάδας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού,
Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2014-2020
ανάπτυξη - εργασία - αλληλεγγύη

Δηλώνω υπεύθυνα ότι είμαι ο αποκλειστικός συγγραφέας της υποβληθείσας Διδακτορικής Διατριβής με τίτλο «Σημαντικότητα διδακτικής των Πιθανοτήτων στο σχολείο και παράγοντες που επηρεάζουν την διδακτική διαδικασία». Η συγκεκριμένη Διδακτορική Διατριβή είναι πρωτότυπη και εκπονήθηκε αποκλειστικά για την απόκτηση του Διδακτορικού διπλώματος του Τμήματος Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης. Κάθε βοήθεια, την οποία είχα για την προετοιμασία της, αναγνωρίζεται πλήρως και αναφέρεται επακριβώς στην εργασία. Επίσης, επακριβώς αναφέρω στην εργασία τις πηγές, τις οποίες χρησιμοποίησα, και μνημονεύω επώνυμα τα δεδομένα ή τις ιδέες που αποτελούν προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας άλλων, ακόμη κι εάν η συμπερίληψή τους στην παρούσα εργασία υπήρξε έμμεση ή παραφρασμένη. Γενικότερα, βεβαιώνω ότι κατά την εκπόνηση της Διδακτορικής Διατριβής έχω τηρήσει απαρέγκλιτα όσα ο νόμος ορίζει περί διανοητικής ιδιοκτησίας και έχω συμμορφωθεί πλήρως με τα προβλεπόμενα στο νόμο περί προστασίας προσωπικών δεδομένων και τις αρχές Ακαδημαϊκής Δεοντολογίας.

ΖΩΡΖΟΣ ΜΙΧΑΗΛ

Στην μνήμη του

Παππού μου.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε το χρονικό διάστημα 2018-2023. Για την ολοκλήρωση αυτής της προσπάθειας, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Ευγένιο Αυγερινό, ο οποίος με καθοδήγησε σε όλα τα στάδια της εργασίας με τις εύστοχες παρατηρήσεις και συμβουλές του. Τόσο το αδιάκοπο ενδιαφέρον του, όσο και η επιστημονική και ηθική βοήθεια που μου προσέφερε, συντέλεσαν καθοριστικά στοιχεία στην ολοκλήρωση του έργου μου.

Ευχαριστώ, τον καθηγητή του Πανεπιστημίου Πειραιώς κ. Φιλιππάκη Μιχαήλ και την αναπληρώτρια καθηγήτρια του Εθνικού Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Κόττα-Αθανασιάδου Ευαγγελία, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξαν και αποδέχτηκαν τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή μου. Επίσης, ευχαριστώ όλα τα μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής για την συμμετοχή τους στην υποστήριξη της παρούσας διατριβής.

Για το χρόνο που μου αφιέρωσαν και τις πολύτιμες συμβουλές τους, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συναδέλφους μου και την επιστημονική ομάδα του εργαστηρίου Μαθηματικών, διδακτικής και πολυμέσων του ΠΤΔΕ Ρόδου. Ιδιαίτερα μάλιστα την κυρία Ρόζα Βλάχου και την κυρία Δήμητρα Ρεμούνδου. Επιπλέον, ευχαριστώ όλους τους συμμετέχοντες που έλαβαν μέρος στην έρευνα, καθώς και τις διευθύνσεις της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης του νομού Δωδεκανήσου, όπου βοήθησαν στον διαμοιρασμό του ερωτηματολογίου. Ευχαριστώ ακόμα, όλους τους παράγοντες του ΙΕΠ και του Υπουργείου Παιδείας που βοήθησαν τον ερευνητή στην αναζήτηση παλαιότερων ΦΕΚ και των οδηγιών διδασκαλίας που χρειάστηκε ο ερευνητής.

Ευχαριστώ, το ΙΚΥ και όλους τους εργαζόμενους και συνεργάτες του, όπου με στήριξαν στην διατριβή μου, τόσο μέσα από την οικονομική ενίσχυση με την υποτροφία που έλαβα, όσο και σε πολλά διαδικαστικά ζητήματα.

Ευχαριστώ θερμά, τα μέλη της γραμματείας του ΠΤΔΕ Ρόδου, διότι είναι άξια στην δουλειά τους και πάντα με βοηθούσαν και εκτελούσαν άμεσα και με περίσσιο ζήλο κάθε μου αίτημα.

Τέλος, θα ήθελα να πω ένα ιδιαίτερο ευχαριστώ, στην γυναίκα μου, Άννα-Ραφαέλα Τσαγκάρη, γιατί με στήριξε, με ενίσχυσε και με σεβάστηκε σε όλη αυτήν την προσπάθεια μου. Ένα μεγάλο ευχαριστώ αξίζει ακόμα, στους φίλους και την οικογένεια μου, για την κατανόηση που έδειξαν, την ηθική στήριξη που μου προσέφεραν και την πίστη που έδειξαν στο πρόσωπο μου.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

ΚΑΤΣΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΩΝ

Α.Π.Σ.	: Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών
Δ.Ε.Π.Π.Σ.	: Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών
ΙΕΠ	: Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής
Π.Ι.	: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο
Υ.Π.Θ.	: Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων
IMD	: Institute for Management Development
RME	: Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση
ECMWF	: Ευρωπαϊκό Κέντρο Μεσοπρόθεσμων Μετεωρολογικών Προβλέψεων

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι Πιθανότητες είναι ο κλάδος των μαθηματικών με την μεγαλύτερη χρηστικότητα στην καθημερινή ζωή (Batanero et al., 2016). Η απήχηση τους σε διάφορες επιστήμες, όπως η μετεωρολογία, οι φυσικές επιστήμες, οι επιστήμες υγείας και η οικονομία, αλλά και σε καταστάσεις που υπάρχει αβεβαιότητα ή ανάγκη πρόβλεψης, καθιστούν τις Πιθανότητες ένα πολύ ενδιαφέρον κομμάτι των μαθηματικών (Reia et al., 2019). Το γεγονός αυτό δεν θα μπορούσε να περάσει απαρατήρητο κατά τον σχεδιασμό των προγραμμάτων σπουδών των μαθηματικών στις περισσότερες αναπτυσσόμενες χώρες. Κατά συνέπεια, πολλές χώρες ανά τον κόσμο εμπλούτισαν το πρόγραμμα σπουδών τους για τα μαθηματικά με την εισαγωγή των Πιθανοτήτων (Batanero et al., 2016).

Μεταξύ των χωρών αυτών, η Ελλάδα διαμόρφωσε ένα πλούσιο πρόγραμμα σπουδών για τις Πιθανότητες, το οποίο βρίσκεται εν ενέργεια από το 2003 έως σήμερα. Η χώρα στο πρόγραμμα της, εντάσσει την Πιθανότητα στην Πρωτοβάθμια και την Δευτεροβάθμια εκπαίδευση, χωρίζοντας τους διδακτικούς στόχους ανάλογα την ηλικιακή βαθμίδα των μαθητών. Επιπροσθέτως, στην εργασία αναλύονται τα εκπαιδευτικά συστήματα της Σιγκαπούρης και της Ολλανδίας, καθώς και ο ρόλος των Πιθανοτήτων σε αυτά.

Η εξέλιξη της διδακτέας ύλης, αλλά και η διδακτική πορεία των μαθηματικών κατά την διάρκεια ενός διδακτικού έτους, πολλές φορές αναγκάζουν τον εκπαιδευτικό να αποκλίνει από τους δεδομένους στόχους. Αποτέλεσμα που επηρεάζει την μάθηση της θεωρίας των Πιθανοτήτων. Γενικότερα η μάθηση μπορεί να επηρεαστεί από ποικίλους παράγοντες, ωστόσο σημαντικό είναι να δοθεί έμφαση στους πέντε βασικότερους παράγοντες επιρροής της μάθησης, με απώτερο σκοπό την βελτίωση της μαθησιακής διαδικασίας στις Πιθανότητες. Πιο συγκεκριμένα, της σχέσης των μαθητών με τα μαθηματικά, της αντίληψης τους για τις πιθανότητες, την ετοιμότητα του εκπαιδευτικού να διδάξει το συγκεκριμένο αντικείμενο των μαθηματικών, τα σχολικά εγχειρίδια και διάφορους άλλους κοινωνικούς ή πολιτισμικούς παράγοντες.

Η παρούσα εργασία έχει πολλαπλούς στόχους, με επίκεντρο την μελέτη της χρησιμότητας των Πιθανοτήτων σε καθημερινές διαδικασίες, την μελέτη του βαθμού επίτευξης των οδηγιών των αναλυτικών προγραμμάτων και την βελτίωση των διδακτικών εγχειριδίων στα μαθήματα των Πιθανοτήτων. Για τις ανάγκες αυτές, η

έρευνα επικεντρώθηκε σε ένα δείγμα 542 ατόμων διάφορων ειδικοτήτων για την απάντηση του ερωτηματολογίου, σε 5 εκπαιδευτικούς μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που έλαβαν μέρος σε μια διαδικασία συνέντευξης και στην συγκριτική ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων στα κεφάλαια των στοχαστικών μαθηματικών των χωρών Ελλάδα, Σιγκαπούρη και Ολλανδία.

Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν, ότι υπάρχει γενικότερα μια θετική αντίληψη σχετικά με την χρήση της θεωρίας Πιθανοτήτων σε καθημερινές δραστηριότητες και μάλιστα αναγνωρίζεται από την πλειοψηφία του δείγματος μια άμεση σχέση των Πιθανοτήτων με την λήψη αποφάσεων. Οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να ακολουθήσουν τις αναλυτικές οδηγίες και τις ώρες που προτείνουν τα ΑΠΣ, με αποτέλεσμα η διδακτική των Πιθανοτήτων να στερείτε του αναγκαίου χρόνου. Τέλος, τα σχολικά βιβλία των τριών χωρών που μελετήθηκαν εμφανίζουν πολλές ομοιότητες, ωστόσο υπάρχουν και αρκετές διαφορές που πολλές από αυτές κρίνονται αρκετά σημαντικές και επηρεάζουν τις προσφερόμενες ευκαιρίες μάθησης στον μαθητή.

ABSTRACT

Probability is one of the mathematics domains with the greatest usefulness in everyday life (Batanero et al., 2016). Their appeal in various sciences, such as meteorology, natural sciences, health sciences and economics, but also in situations where there is uncertainty or the need for a forecast, makes Probability a very interesting field of mathematics (Reia et al., 2019). This fact could not be unnoticed when designing mathematics curricula in most developing countries. As a result, many countries around the world have enriched their mathematics curriculum with the introduction of Probabilities (Batanero et al., 2016).

Among these countries, Greece has developed a rich curriculum for Probability, which has been in effect since 2003. The country in its program, includes Probability in Primary and Secondary education, dividing the teaching objectives according to the age level of the students. In addition, the paper analyses the educational systems of Singapore and the Netherlands, as well as the role of Probabilities in them.

The evolution of the curriculum, but also the teaching course of mathematics during a school year, often force the teacher to deviate from the given goals. Result, that affects the learning of the theory of Probability. In general, learning can be influenced by a variety of factors, but it is important to emphasize to five key factors influencing learning, with the goal of improving the learning process in Probability. More specifically, the relationship of students with mathematics, their perception of the probabilities, the readiness of the teacher to teach the specific domain of mathematics, school textbooks and various other social or cultural factors.

The present work has multiple objectives, focusing on the study of the usefulness of Probabilities in daily procedures, the study of the extent of achievement of the instructions of the curricula and the improvement of the teaching books in the courses of Probabilities. For these needs, the research focused on a sample of 542 people of different majors for answering the questionnaire, 5 secondary school mathematics teachers who took part in an interview process and the comparative analysis of textbooks in the chapters of Stochastic mathematics in Greece, Singapore and the Netherlands.

The results of the research show that there is a generally positive perception about the use of Probability theory in everyday activities and in fact most of the sample recognizes a direct relationship between Probability and decision making. Teachers find it difficult to follow the detailed instructions and hours suggested by the curriculum, with the result that the teaching of Probability deprives of the necessary time. Finally, the textbooks of the three countries studied, show many similarities, however there are several differences, many of which are considered quite important and affect the learning opportunities offered to the student.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η χρησιμότητα των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή κρίνεται αδιαμφισβήτητη από το μεγαλύτερο μέρος των επιστημόνων. Η τεχνολογική και η επιστημονική εξέλιξη δεν θα μπορούσαν να υφίστανται εν απουσία των μαθηματικών θεωριών και αλγορίθμων. Μάλιστα, ακόμα και στις πιο απλές διαδικασίες ρουτίνας, όπως μια οικονομική συναλλαγή, τα μαθηματικά διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο. Ωστόσο, δεν εκλείπει η άποψη, κυρίως από πολίτες χωρίς ιδιαίτερο μαθηματικό υπόβαθρο, ότι η παρουσία περαιτέρω μαθηματικών γνώσεων δεν επηρεάζει την καθημερινότητα τους.

Στην παρούσα εργασία, πραγματεύεται ο τομέας των Πιθανοτήτων και η ανάγκη για μια ορθότερη διδακτική παρέμβαση στην σχολική τάξη, δεδομένου της χρησιμότητας τους σε διάφορες επιστήμες. Η επιλογή του συγκεκριμένου θέματος βασίστηκε σε τρία κυρίως γεγονότα. Αρχικά, στο γεγονός ότι οι Πιθανότητες είναι ένας κλάδος των μαθηματικών με ευρεία χρήση σε καθημερινά στοχαστικά δρόμενα, που δυστυχώς οι περισσότεροι άνθρωποι αγνοούν. Έπειτα, στο παραγκωνισμό της ύλης που βιώνει η συγκεκριμένη θεωρία στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα τα τελευταία χρόνια και τελικά στην ιδιαιτερότητα της θεωρίας να μην χρήζει απαραιτήτως ιδιαίτερων μαθηματικών γνώσεων, ωστόσο να επηρεάζεται άμεσα από τις διαισθητικές αντιλήψεις του ανθρώπου.

Η μελέτη των αντιλήψεων και των πεποιθήσεων των μαθητών για τις Πιθανότητες, είναι ένα θέμα που διερευνάται ευρέως στην επιστημονική κοινότητα. Ωστόσο, απουσιάζουν εργασίες, που να στοχεύουν στην αφύπνιση της διάθεσης των μαθητών για μάθηση της έννοιας της «Πιθανότητας», επεξηγώντας τη χρησιμότητα της σε καθημερινές εφαρμογές και αποφάσεις. Η εργασία αυτή, στοχεύει να καλύψει αυτό το κενό, καθώς και να αναδείξει την αυταπόδεικτη επιρροή της στη λήψη αποφάσεων σε διάφορους τομείς, όπως την οικονομία, την πολιτική και γενικότερα την επιστήμη.

Βασική σημείωση αποτελεί το γεγονός, ότι στην παρούσα μελέτη έχει συνειδητά αποφευχθεί η εκτενής ανάπτυξη της θεωρίας Πιθανοτήτων και κατά επέκτασιν της θεωρίας μέτρου. Ο κύριος λόγος αυτής της παράληψης, είναι να μην θεωρηθεί η εργασία, ως αυστηρά μαθηματική. Έτσι, η εργασία απευθυνόμενη σε ευρύ φάσμα αναγνωστών, αποσκοπεί να παρουσιάσει τη χρησιμότητα των Πιθανοτήτων σε διάφορες επιστήμες, να εξηγήσει την αξία της διδασκαλίας τους και μέσα από τα ερευνητικά αποτελέσματα να αναδείξει την ανάγκη για περαιτέρω επιμόρφωση στις Πιθανότητες.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα μαθηματικά θεωρούνται ένα ανθρώπινο δημιούργημα με στόχο την μελέτη και την εξήγηση φαινομένων του πραγματικού κόσμου (Wilder, 1986). Από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα, έχουν συνεισφέρει τα μέγιστα στην προσπάθεια του ανθρώπου να επιλύσει βασικά του προβλήματα και να εξηγήσει τα καθημερινά φυσικά φαινόμενα (Graham et al., 1989; Κομηνέας & Χαρμανδάρης, 2016). Κατά συνέπεια, τα μαθηματικά αντικατοπτρίζουν, όχι μόνο την άποψη του ανθρώπου για τον κόσμο, αλλά την ίδια την πραγματικότητα (Greer & Mukhopadhyay, 2005). Η ιστορία τους, από μόνη της επιβεβαιώνει την άποψη του Laplace (1986), ότι δεν υπάρχει επιστήμη αντάξια των μαθηματικών και περισσότερο χρήσιμη, ώστε να διδάσκεται δημόσια.

Οι μαθηματικές διαδικασίες και ο αλγοριθμικός τρόπος σκέψης, είναι βασικές ικανότητες που προσφέρει η γνώση των μαθηματικών. Ακόμα, η μοντελοποίηση, η αφαίρεση, η βελτιστοποίηση, η λογική ανάλυση και η διεξαγωγή συμπερασμάτων από δεδομένα, είναι χαρακτηριστικά που αναπτύσσονται μέσα από την μαθηματική εκπαίδευση και θεωρούνται σήμερα βασικές ικανότητες στην αγορά εργασίας (Drijvers et al., 2019). Για αυτόν ακριβώς το λόγο πραγματοποιούνται συνεχώς νέες έρευνες προς βελτίωση της διδακτικής των μαθηματικών (Sievert et al., 2019). Άλλωστε, τα μαθηματικά απευθύνονται σε ένα ευρύ κοινό, που κυμαίνεται από μαθητές, εκπαιδευτικούς και γονείς, μέχρι επιχειρηματίες, ηγέτες και πολιτικούς (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005).

Η Πιθανότητα είναι ένας σχετικά νέος κλάδος των μαθηματικών, όπου η απήχηση της στις στοχαστικές διαδικασίες της καθημερινότητας, την οδηγεί στην κορυφή της λίστας των χρηστικών μαθηματικών (Batanero et al., 2016). Δεν χρειάζεται ιδιαίτερη παρατηρητικότητα, για να καταλάβει κανείς, ότι η ζωή ενός ατόμου επηρεάζεται καθημερινά από μια σειρά γεγονότων, που μπορούν να περιγράφουνε με ένα μοντέλο πιθανότητας (Rose, 2007) ή ότι τα πλεονεκτήματα που προσφέρει έχουν γίνει αναπόσπαστο στοιχείο, σχεδόν για κάθε τομέα σκέψης (Greer & Mukhopadhyay, 2005; Zorzos & Avgerinos, 2021).

Το αντικείμενο των Πιθανοτήτων, είναι η μαθηματική έρευνα των νόμων που διέπουν τα στοχαστικά φαινόμενα και το βασικό στοιχείο των φαινομένων που πραγματεύεται είναι η τυχαιότητα (Χαραλαμπίδης, 2009). Η ανάπτυξη της θεωρίας τους, έχει τις ρίζες στο πρότερο παρελθόν και προκλήθηκε μέσω της έμφυτης περιέργειας του ανθρώπου για τα τυχερά παιχνίδια (Κοντογιάννης & Τουμπής, 2015), αλλά και την ανάγκη αντιμετώπισης καταστάσεων που εμφανίζουν αβεβαιότητα (Batanero et al., 2016). Η αξιωματική τους θεμελίωση πραγματοποιήθηκε μόλις το 1933, από τον Ρώσο μαθηματικό Andrei N. Kolmogorov και εκ τότε αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι των μαθηματικών (Batanero et al., 2016; Χαραλαμπίδης, 2009). Μάλιστα, θεωρείται από πολλούς, ως το μέρος των μαθηματικών που εμπλουτίζει τα μαθηματικά ως σύνολο, λόγω των αλληλεπιδράσεων του με άλλες επιστήμες (Batanero et al., 2016). Οι εφαρμογές τους, έχουν ευρύτατο πεδίο στην ιατρική, στην διοικητική, στις επιχειρήσεις και στις θετικές, τις συμπεριφορικές ή τις κοινωνικές επιστήμες (Naidu & Sanford, 2017; Κοντογιάννης & Τουμπής, 2015). Επιπλέον, τα τελευταία χρόνια, με την παράλληλη εξέλιξη της τεχνολογίας, οι εφαρμογές αυτές έχουν πολλαπλασιαστεί και επεκταθεί σε μια πλειάδα σύγχρονων επιστημονικών και τεχνολογικών περιοχών (Κοντογιάννης & Τουμπής, 2015).

Κάποιος μπορεί να υποστηρίξει, ότι οι άνθρωποι στο παρελθόν αντιμετώπιζαν την αβεβαιότητα χωρίς ιδιαίτερες γνώσεις πιθανοτήτων και κατά συνέπεια μπορούν να συνεχίσουν να το κάνουν αυτό και στο μέλλον (Greer & Mukhopadhyay, 2005). Η ιστορία έχει δείξει, ότι οι άνθρωποι χρησιμοποιούν αρκετά την εμπειρία τους ή τη διαίσθηση τους για να λαμβάνουν αποφάσεις σε στοχαστικές ή πιθανοτικές διαδικασίες (Borovcnik & Kapadia, 2010). Επίσης, πολλές φορές προσπαθούν να σκεφτούν τις πιθανότητες μεταξύ δύο γεγονότων, αγνοώντας ακόμη και τους πιο βασικούς κανόνες της θεωρίας τους (Borovcnik & Kapadia, 2010). Το επιχείρημα εδώ είναι, ότι ίσως οι άνθρωποι να στερούνται πιθανοτικών γνώσεων και κατά συνέπεια να μην μπορούν να αντιληφθούν τα πλεονεκτήματα της θεωρίας στην καθημερινή λήψη αποφάσεων (Olofsson, 2015).

Η θεωρία Πιθανοτήτων, δεν αποτελεί την τυφλή πίστη σε τεχνικές που καλλιεργούνται κατά τη διάρκεια μιας διδακτικής παρέμβασης, αλλά την πρόκληση για την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης και άλλων ικανοτήτων ή παιδαγωγικών ιδεών που εμφανίζουν εφαρμογή σε πολλούς επιστημονικούς τομείς (Freudenthal, 1970). Λόγου χάρη, όπως αναφέρουν οι Batanero, Henry και Parzysz (2005), διδάσκει τον άνθρωπο να αποφεύγει τις αυταπάτες που συχνά τον παραπλανούν. Επιπροσθέτως, μπορεί να μην μπορούν να προβλέψουν την εξέλιξη ενός γεγονότος, ωστόσο μπορούν να επιχειρηματολογήσουν για τις πιθανότερες εξελίξεις του (Bryant & Nunes, 2012).

Η παρούσα εργασία έχει πολλαπλό σκοπό και καλείται να καλύψει τα κενά της διεθνούς βιβλιογραφίας. Πιο συγκεκριμένα, η έρευνα ασχολείται με την διερεύνηση των γνώσεων πιθανότητας στο κοινωνικό σύνολο, καθώς και την διασαφήνιση της χρήσης της θεωρίας στις διάφορες επιστήμες. Βασικούς στόχους της, αποτελούν η σύνδεση της θεωρίας των πιθανοτήτων με τις καθημερινές αποφάσεις και η δημιουργία ενός καταλόγου κινήτρων μάθησης της θεωρίας, που θα προσελκύσει το ενδιαφέρον των εκπαιδευόμενων για την μάθηση της θεωρίας. Μάλιστα, η εργασία προσπαθεί να διασαφηνίσει το κενό μεταξύ των διδακτικών στόχων του Αναλυτικού προγράμματος σπουδών των μαθηματικών, με το τελικό αποτέλεσμα στην διδακτική διαδικασία. Επίσης, η έρευνα έρχεται να δημιουργήσει έναν ολοκληρωμένο κατάλογο παραγόντων για την ανάλυση ή ακόμα και την συγκριτική ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών. Κατά συνέπεια, η μελέτη προσπαθεί να προσφέρει μια εισαγωγή της χρησιμότητας της κλασικής θεωρίας πιθανοτήτων, και να αναδείξει την διδακτική της αξία μέσα από την διεπιστημονικότητα και το πλήθος των εφαρμογών της. Ακόμα, αναδεικνύεται μέσα από την έρευνα η σημαντικότητα συγκριτικής ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων διαφόρων χωρών και προτείνονται πιθανές βελτιώσεις κατά την συγγραφή ενός νέου σχολικού εγχειριδίου. Για τους σκοπούς της έρευνας αυτής θεωρείται, ότι η έννοια «Πιθανότητες» ή «πιθανοτικός τρόπος σκέψης», θα πραγματεύεται την θεωρία Πιθανοτήτων και όλες τις έννοιες ή τις διαδικασίες που υπόκεινται σε αυτήν. Επίσης, η έννοια «στοχαστικός» θα χρησιμοποιείται στο εξής για να περιγράφει φαινόμενα που ακολουθούν μια τυχαία εξέλιξη και η μελέτη τους πραγματοποιείται μέσα από την θεωρία των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής.

Η δομή της εργασίας χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος της, γίνεται μια εκτενής βιβλιογραφική ανασκόπηση του θέματος και το δεύτερο μέρος αποτελείται από την έρευνα και την ανάλυση των αποτελεσμάτων της. Αναλυτικότερα, η εργασία ξεκινάει με ένα κεφάλαιο, το οποίο αναλύει βασικές εφαρμογές πιθανοτήτων σε διάφορες επιστήμες. Στο δεύτερο κεφάλαιο, πραγματεύεται η αξία της διδακτικής των πιθανοτήτων, όπως αυτή προκύπτει από τις έρευνες που έχουν γίνει στο παρελθόν. Στο τρίτο κεφάλαιο, αναλύεται το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα και ο ρόλος των Πιθανοτήτων σε αυτό. Στη συνέχεια, στο τέταρτο κεφάλαιο, αναλύεται η σχέση των Πιθανοτήτων με τα εκπαιδευτικά συστήματα της Ολλανδίας και της Σιγκαπούρης, καθώς όπως προκύπτει από διάφορες έρευνες, παρουσιάζεται από το κάθε ένα, μια ιδιαιτερότητα στις μαθηματικές διδακτικές προσεγγίσεις. Στο κεφάλαιο νούμερο πέντε, γίνεται μια προσπάθεια ανάλυσης κάποιων παραγόντων που χρήζουν υψίστης σημασίας κατά μια διδακτική παρέμβαση. Έπειτα, στο έκτο κεφάλαιο, αναλύονται κάποιες εποικοδομητικές προτάσεις που προκύπτουν από την ανάλυση της βιβλιογραφίας, με στόχο την βελτίωση της διδασκαλίας των πιθανοτικών εννοιών.

Ακολούθως, βρίσκεται το δεύτερο μέρος της εργασίας, όπου παρατίθενται οι έρευνα και οι μεθοδολογικές προσεγγίσεις της. Στο κεφάλαιο 7 λοιπόν, αναγράφονται οι στόχοι, οι σκοποί και η αναγκαιότητα της έρευνας, όπως επίσης και η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε. Πιο αναλυτικά, παρουσιάζονται η ερευνητική στρατηγική, τα μεθοδολογικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για τη συλλογή δεδομένων, όπως επίσης και τα προγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση των δεδομένων. Επίσης, γίνεται μια αναλυτική περιγραφή τόσο για τον σχεδιασμό του ερωτηματολογίου και των συνεντεύξεων, όσο και για την οριοθέτηση του πλαισίου ταξινόμησης των δραστηριοτήτων και των εικόνων των σχολικών εγχειριδίων.

Διαδεχόμενο αυτό το κεφάλαιο, ακολουθεί το κεφάλαιο της παρουσίασης των αποτελεσμάτων της έρευνας. Στο κεφάλαιο αυτό τα αποτελέσματα οργανώθηκαν σε μορφή πινάκων και διαγραμμάτων, ώστε να βοηθήσουν τον αναγνώστη. Έπειτα, στο ένατο κεφάλαιο, γίνεται μια ανακεφαλαίωση – συζήτηση των εξαγομένων της έρευνας, καθώς και η ερμηνεία των αποτελεσμάτων που προέκυψαν. Μάλιστα, παρουσιάζονται και κάποιοι περιορισμοί που προέκυψαν κατά τον σχεδιασμό και την διεκπεραίωση της έρευνας. Τέλος, στο δέκατο και τελευταίο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, παρουσιάζονται τα γενικά συμπεράσματα της εν λόγω μελέτης και οι προτάσεις του ερευνητή με τις μελλοντικές προοπτικές τους.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο}: ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

Οι Πιθανότητες είναι ο κλάδος των μαθηματικών που σχετίζεται με την τύχη και την μελέτη της αβεβαιότητας στα διάφορα φαινόμενα (Batanero & Chernoff, 2017). Η χρήση τους επιτρέπει προβλέψεις και περιγραφές φαινομένων απροσδόκητα κοντά στην πραγματικότητα (Graham et. al., 1989) και δεν μπορεί να περιοριστεί μόνο στα μαθηματική ή στις θετικές επιστήμες (Olofsson, 2015). Κατά συνέπεια, αυτό δικαιολογεί την πεποίθηση του μεγάλου μαθηματικού – αστρονόμου, Marquis de Laplace, ο οποίος πίστευε, ότι οι πιθανότητες είχαν τις προδιαγραφές να γίνουν το σημαντικότερο πεδίο της ανθρώπινης γνώσης (Ross, 2010).

Γεγονός είναι, ότι οι Πιθανότητες μπορούν να αποτελέσουν από μόνες τους ένα πολύ ενδιαφέρον θέμα μελέτης, ωστόσο η σύνδεση τους με τη στατιστική, τη λήψη μιας απόφασης υπό αβεβαιότητα ή την ανάγκη μοντελοποίησης στοχαστικών καταστάσεων, δημιουργούν έναν ισχυρό λόγο για την ανάμιξή τους με άλλες επιστήμες (Borovcnik, & Kapadia, 2010; Reia et al., 2019). Ως συνέπεια αυτού, οι Πιθανότητες είναι αλληλένδετες με ένα ευρύ φάσμα πραγματικών καταστάσεων (Gal, 2005; Sofaer et al., 2018). Η ανάμιξη της θεωρίας, είναι εμφανής τόσο στις επαγγελματικές, όσο και στις καθημερινές δραστηριότητες (Taylor, 2014).

Στο κεφάλαιο αυτό, μελετάται η επιρροή των Πιθανοτήτων σε διάφορους σημαντικούς κλάδους των επιστημών. Φυσικά, η προσπάθεια συζήτησης ενός τόσο εκτενούς θέματος, επιφέρει το αναπόφευκτο, ότι ορισμένα θέματα έχουν παραληφθεί. Δηλαδή, θα ήταν αδύνατο να περιγράφει η ευρεία χρησιμότητα των πιθανοτήτων, ειδικότερα στους τομείς των θετικών επιστημών και της οικονομίας. Κατά συνέπεια γίνεται μια προσπάθεια ανάδειξης μέρους των εφαρμογών τους σε διάφορες επιστήμες, με στόχο την αφύπνιση του αναγνώστη. Πιο συγκεκριμένα, η χρήση τους στην ιατρική, την βιολογία, την πληροφορική, την νομική και άλλες επιστήμες, έχει εξελίξει το κύρος και την αξιοπιστία των δεδομένων επιστημών, προσδίδοντας πολλάκις σολομώντειες λύσεις σε ποικίλα ζητήματα (Borovcnik & Kapadia, 2010; Olofsson, 2015; Taylor, 2014).

1.1 Η επιρροή της Πιθανότητας στη Μετεωρολογία

Η Μετεωρολογία είναι ο κλάδος της επιστήμης που ασχολείται με τα καιρικά φαινόμενα. Από αρχαιοτάτων χρόνων, αναγνωρίστηκε η κοινωνική και οικονομική αξία των μετεωρολογικών προβλέψεων (Piechota et. al., 2001). Μια πρόβλεψη καιρικών φαινομένων, έχει άμεσο αντίκτυπο στη λήψη αποφάσεων και κατά συνέπεια μεγάλη οικονομική αξία (Mylne, 2002). Λόγου χάρη, η πρόβλεψη βροχόπτωσης για το επόμενο καλοκαίρι, θα μπορούσε να επηρεάσει τόσο τις αποφάσεις των επίδοξων εκδρομέων, όσο και να βελτιώσει τη διαχείριση των υδάτινων πόρων (Piechota et. al., 2001).

Η προσπάθεια πρόβλεψης των καιρικών φαινομένων ξεκίνησε περίπου πριν από έναν αιώνα (Murphy & Winkler, 1984). Οι μετεωρολόγοι, είχαν εξαρχής αναγνωρίσει την ύπαρξη αβεβαιότητας στις προβλέψεις τους και έτσι εισήγαγαν την έννοια της Πιθανότητας για να αντικειμενοποιήσουν τα αποτελέσματα τους (Murphy & Winkler, 1984). Αρχικά οι προβλέψεις πραγματοποιήθηκαν σε επιχειρησιακή βάση από εξειδικευμένα κέντρα όπως το Ευρωπαϊκό Κέντρο Μεσοπρόθεσμων Μετεωρολογικών Προβλέψεων (ECMWF), την Εθνική Μετεωρολογική υπηρεσία των Η.Π.Α. και διάφορα άλλα εθνικά μετεωρολογικά και περιβαλλοντολογικά κέντρα (Hersbach, 2000). Το 1965, ξεκίνησε στην Αμερική ένα πρόγραμμα προβλέψεων πιθανότητας για την βροχόπτωση, το οποίο αργότερα γνωστοποιούνταν στο ευρύ κοινό (Murphy & Winkler, 1984). Μέχρι σήμερα έχουν πραγματοποιηθεί πολλές μελέτες και πειράματα με στόχο την ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας των καιρικών προβλέψεων και έχει διαδραματιστεί σημαντική πρόοδος (Murphy & Winkler, 1984).

Η προσπάθεια πρόβλεψης ξεκίνησε αναλύοντας στατιστικά στοιχεία (Murphy & Winkler, 1984). Στη συνέχεια, οι Πιθανότητες προτάθηκαν ως εργαλείο επαλήθευσης των συστημάτων πρόβλεψης (Hersbach, 2000). Αυτό είχε ως αποτέλεσμα, τα στοιχεία των προβλέψεων να υποβάλλονται σε μια λεπτομερή αξιολόγηση υπό το πρίσμα της θεωρίας Πιθανοτήτων, με στόχο την ανάδειξη των αναμενόμενων μετεωρολογικών συνθηκών (Murphy & Winkler, 1984). Η αναγκαιότητα της θεωρίας Πιθανοτήτων στις προβλέψεις αναγνωρίστηκε επίσημα από τον Cooke (1906) αρκετά χρόνια αργότερα. Ο Cooke υποστήριξε την ανάγκη, κάθε μετεωρολογική πρόβλεψη να συνοδεύεται από την πιθανότητα που εκφράζει το μέγεθος της βεβαιότητας για την πραγματοποίηση της.

Σήμερα, η πρόοδος της τεχνολογίας και των υπολογιστών έχει βελτιώσει σε μεγάλο βαθμό τις καιρικές προβλέψεις, αφού η εφαρμογή πιθανοτικών και στατιστικών τεχνικών παρουσιάζει μεγαλύτερη ακρίβεια (Murphy & Winkler, 1984). Ακόμα, οι υπολογιστές προσφέρουν την δυνατότητα πραγματοποίησης μεγάλου μεγέθους υπολογισμών σε πολύ μικρό χρόνο. Αυτό επιτρέπει την διεξαγωγή πειραμάτων με στόχο τη βελτίωση των στρατηγικών πρόβλεψης (Mylne, 2002). Υπό αυτές τις συνθήκες, ο Lorenz (1963) ανακάλυψε την υπερευαισθησία των προβλέψεων από τις αρχικές συνθήκες της ατμόσφαιρας και οδηγήθηκε στην ανάπτυξη της θεωρίας του χάους (Lorenz 1993).

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί, ότι η θεωρία πιθανοτήτων, όχι μόνο είναι σε θέση να ποσοτικοποιήσει την βεβαιότητα μιας πρόβλεψης, αλλά και να υπολογίσει τα πιθανά σφάλματα των δεδομένων προβλέψεων (Grimit et al., 2006). Πιο συγκεκριμένα, συγκρίνονται τα αιτιοκρατικά και τα πιθανοτικά δεδομένα, γίνεται μια μικρή διόρθωση μεσαίας τάσης και έτσι βελτιώνονται οι πιθανοτικές προβλέψεις. Ωστόσο, πολλοί ερευνητές συμφωνούν ότι οι διαδικασίες αυτές πρέπει να γίνονται με σύνεση και απαιτούν σημαντικό μαθηματικό υπόβαθρο και προκαταρκτικό σχεδιασμό (Grimit et al., 2006).

1.2 Πλεονεκτήματα εφαρμογής των κανόνων Πιθανότητας στην Οικονομία

Στην προηγούμενη παράγραφο έγινε ξεκάθαρη η άποψη, ότι οι Πιθανότητες μέσα από τις μετεωρολογικές προβλέψεις μπορούν να εμφανίσουν άμεσο αντίκτυπο στην οικονομία. Βέβαια, όπως είναι λογικό η επίδραση των Πιθανοτήτων εισχωρεί πολύ περισσότερο στα οικονομικά και επιχειρηματικά ζητήματα. Το κοινωνικό και οικονομικό περιβάλλον των εταιριών, βρίσκεται υπό την επιρροή πολλών παραγόντων, μεταξύ των οποίον είναι τα προστατευτικά μέτρα για τις περιορισμένες εξαγωγές, ο άγνωστος αντίκτυπος του Brexit και της οικονομικής ύφεσης, τα νομικά πλαίσια κάθε χώρας και η ασταθής νομοθεσία (Bogdan & Sava, 2018). Μια βιώσιμη λύση ήταν μέχρι πρόσφατα η μείωση των αποθεμάτων (Avlijas et al., 2018), ωστόσο αποδεικνύεται, ότι υπάρχουν καλύτερες λύσεις για την μείωση του κινδύνου και την βελτιστοποίηση του κεφαλαίου κίνησης των εταιριών (Bogdan & Sava, 2018).

Ο κίνδυνος είναι κινητήριος δύναμη στη λήψη αποφάσεων και κατά συνέπεια είναι αναμενόμενο να επηρεάζει τις συνήθειες της αγοράς (Hunter et al., 2004). Η σημασία του κινδύνου, είναι αντιληπτικής φύσεως στο μυαλό του εκάστοτε αγοραστή και πηγάζει είτε από προσωπικούς είτε από οργανωτικούς παράγοντες. Ο φόβος της αβεβαιότητας και του κινδύνου μιας κακής επιχειρηματικής απόφασης, καθορίζει την τελική επιλογή και το μέγεθος των συνεπειών (Hunter et al., 2004). Αυτό σημαίνει, ότι ο επιχειρηματικός κόσμος οφείλει να είναι προσεκτικός κατά την λήψη αποφάσεων, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις που διακυβεύονται μεγάλα χρηματικά ποσά.

Ένα καθημερινής φύσεως παράδειγμα κινδύνου, μιας μικρής επιχείρησης, αποτελεί η απόφαση ανεφοδιασμού προϊόντων (Hunter et al., 2004). Ένας επιχειρηματίας θέλει να ανεφοδιάσει το κατάστημα του με προϊόντα στο τέλος της τουριστικής σεζόν. Στην απόφαση αυτή έρχεται αντιμέτωπος με δύο σκέψεις. Αν ανεφοδιάσει το μαγαζί του, θα αποκτήσει ένα ανταγωνιστικό πλεονέκτημα στην αγορά και ενδεχομένως πουλώντας το έξτρα προϊόν να αυξηθεί το κέρδος του. Ωστόσο, αυτή η κίνηση εμπεριέχει τον κίνδυνο να μην πουληθούν τα προϊόντα πριν την λήξη της σεζόν και άρα να χάσει τα λεφτά τη επένδυσης. Συμπερασματικά λοιπόν, ότι η απόφαση ανεφοδιασμού του καταστήματος αξίζει μεγάλης προσοχής. Επίσης, στην περίπτωση που ο καταστηματάρχης θα αποφασίσει να προχωρήσει στην επιπλέον παραγγελία, θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στην επιλογή και την ποσότητα των προϊόντων. Πιο συγκεκριμένα, πρέπει να γίνει προσεκτική επιλογή στην παραγγελία ενός ακριβού προϊόντος με μεγάλη απήχηση στην αγορά, σε σύγκριση με ένα φθηνότερο που δεν χαίρει της ίδιας απήχησης στο αγοραστικό κοινό. Καθοριστικός παράγοντας εδώ, είναι ο βαθμός στον οποίο ο αγοραστής αισθάνεται σίγουρος για τα δύο αυτά προϊόντα (Hunter et al., 2004). Πολλές έρευνες μάλιστα, έχουν δείξει, ότι γίνονται διάφορες προσπάθειες από τη μεριά των επιχειρηματιών να χρησιμοποιήσουν στρατηγικές λήψης αποφάσεων με στόχο τον περιορισμό του κινδύνου (Hunter et al., 2004).

Κατά το σχεδιασμό λοιπόν, μιας επιχειρηματικής ιδέας, είναι επιθυμητό να μπορεί ο επίδοξος επιχειρηματίας να προβλέψει την κερδοφορία της επιχείρησης του (Bogdan & Sava, 2018; Hol, 2007). Ως εκ τούτου, προτείνονται διάφορες τεχνικές αξιολόγησης παραγόντων, όπως το κόστος, τα αναμενόμενα έσοδα, το αναμενόμενο κέρδος και τους πιθανούς κινδύνους (Bogdan & Sava, 2018). Οι τεχνικές αυτές, αποτελούν ένα πιθανοτικό πλαίσιο μοντελοποίησης και ασχολούνται με την πρόβλεψη της κερδοφορίας ή της πτώχευσης μιας επιχείρησης (Bogdan & Sava, 2018; Hol, 2007). Αυτό πραγματοποιείται δοκιμάζοντας εμπειρικά δεδομένα βάση της ανάλυσης των οικονομικών καταστάσεων, του μέσου εισοδήματος του πληθυσμού της γύρο περιοχής και των κινήσεων στους επιχειρηματικούς κύκλους (Avlijas et al., 2018; Hol, 2007; Layton, 1998). Η χρήση αυτού του μοντέλου, μπορεί να βελτιώσει τον εντοπισμό αποτυχημένων εταιρειών, κάτι που αποτελεί μια από τις ανησυχίες στη διαχείριση χρηματοοικονομικών κινδύνων (Hol, 2007).

Επιπροσθέτως, οι Πιθανότητες δεν θα μπορούσαν να μην διαδραματίζουν ένα σπουδαίο ρόλο κατά την παροχή δανείων από τις τράπεζες (Lakhani et al., 2018). Τόσο από την μεριά των πελατών, όσο και των τραπεζών, οι Πιθανότητες έχουν σημαντικό ρόλο κατά τη διαδικασία της δανειοληψίας. Γεγονός μάλιστα είναι, ότι σχεδόν όλες οι τράπεζες φροντίζουν να αναβαθμίζουν συχνά τα επιχειρηματικά – πιθανοτικά τους μοντέλα, τα επονομαζόμενα ως Machine Learning (Lakhani et al., 2018). Κατά συνέπεια, με βάση τα οικονομικά στοιχεία του καθενός, πραγματοποιείται μια πιθανή πρόβλεψη για την μελλοντική πορεία του δανείου, βάση της οποίας λαμβάνεται η τελική απόφαση της δανειοδότησης. Αυτό, έχει ως αποτέλεσμα να μειωθεί ο αριθμός των επισφαλών δανείων και κατ' επέκταση οι τράπεζες να αποφεύγουν τις ζημιές (Lakhani et al., 2018).

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί η σημαντική συμβολή των Πιθανοτήτων στην εξοικονόμηση ενέργειας και στη διαχείριση φυσικών πόρων. Πιο αναλυτικά, πιθανοτικές μέθοδοι όπως ο κανόνας του Bayes, οι αλυσίδες Markov, το πιθανοτικό μοντέλο Gray-Markov και διάφορες κατανομές όπως η Gauss και η Beta, χρησιμοποιούνται σε προβλέψεις και υπολογισμούς σφαλμάτων των εναλλακτικών πηγών ενέργειας (Layton, 1998; Li, et al., 2013). Μια πρόβλεψη των σφαλμάτων στις αποδόσεις της αιολικής ενέργειας ή των φωτοβολταϊκών (Li et al., 2013), δίνει την δυνατότητα για καλύτερη διαχείριση των πρωτογενών πηγών. Ως άμεσο αποτέλεσμα αυτού, προκύπτουν άμεσες θετικές επιδράσεις τόσο στην οικονομία, όσο και στο περιβάλλον (Kolar & Lodge, 2001). Επίσης, σε αυτό έρχεται να προστεθεί και η ανάπτυξη των πιθανοτικών μελετών στην ασφάλεια των πετρελαιαγωγών (Nwokedi & Nnadi, 2018).

1.3 Πιθανότητα και Φυσικές Επιστήμες

Στη σύγχρονη επιστήμη, δημιουργούνται δύο σημαντικά ερωτήματα (Batanero et al., 2005). Το πρώτο ερώτημα, πραγματεύεται την ύπαρξη σταθερών κατά την πιθανότητα εμφάνισης φυσικών φαινομένων. Το δεύτερο ερώτημα, προκύπτει ως λογικό επακόλουθο του πρώτου ερωτήματος και αναζητά κάποιον πιθανό βαθμό ακρίβειας στην εμφάνιση των φυσικών φαινομένων (Batanero et al., 2005). Σύμφωνα με αυτά, καταλαβαίνει κανείς, ότι το εύρος χρήσης της Πιθανότητας στον τομέα των φυσικών επιστημών, θα ήταν πρακτικά αδύνατο να καταγραφεί. Επιστημονικοί κλάδοι, όπως φυσική, χημεία, αστρονομία κ.α., όχι μόνο χρησιμοποιούν την πιθανότητα για προβλέψεις πειραμάτων ή συμπεριφορών σωματιδίων, αλλά πολλές φορές η ίδια η εξέλιξη τους βασίζεται στις εφαρμογές Πιθανοτήτων (Ross, 2010).

Ένα από τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα, θα μπορούσε να πει κανείς ότι είναι η θεωρία της κβαντικής φυσικής (Charles-Cadogan, 2018; Feynman, 1951). Η κβαντική φυσική ήρθε να καλύψει την ανεπάρκεια της κλασικής φυσικής και να εξηγήσει φαινόμενα στα οποία το ακριβές αποτέλεσμα δεν μπορεί να προβλεφθεί αιτιοκρατικά. Στις περιπτώσεις αυτές, πρέπει να γίνει μια πιθανοτική ανάλυση των διάφορων αποτελεσμάτων μέσω υπολογιστή (Feynman, 1951). Αυτό οδήγησε στην ανάπτυξη των νόμων πιθανότητας της κβαντικής μηχανικής, όπου προβλέπουν την αλλαγή συμπεριφοράς ενός φωτονίου ή ηλεκτρονίου (Charles-Cadogan, 2018; Feynman, 1951). Πιο συγκεκριμένα, μια ευρέως διαδεδομένη θεωρία της κβαντικής μηχανικής που συνδέεται άρρηκτα με τις Πιθανότητες, ακούει στο όνομα «Αρχή της Αβεβαιότητας του Heisenberg» (Batanero et al., 2005). Η συγκεκριμένη αρχή, αποτελεί σημαντικό κομμάτι της κβαντικής μηχανικής και υποδηλώνει ότι μια κίνηση σωματιδίων μπορεί να περιγράφει μόνο από τυχαίες λειτουργίες, όπως επίσης, ότι είναι θεωρητικά αδύνατο να προσδιοριστεί ταυτόχρονα η θέση και η ταχύτητά ενός ηλεκτρονίου (Batanero et al., 2005).

Στη χημεία, ένα παράδειγμα άξιο αναφοράς, είναι οι πιθανότητες αντίδρασης που αναπτύσσονται μεταξύ διάφορων φυσικών στοιχείων ή ενώσεων (Davis et al., 2008). Καθοριστικοί παράγοντες στον υπολογισμό πιθανοτήτων για την πραγματοποίηση μιας αντίδρασης, είναι η θερμοκρασία, η υγρασία η σύνθεση των σωματιδίων κ.α. (Davis et al., 2008). Ακόμα, άμεση απήχηση εδώ, βρίσκουν και οι κατανομές πιθανότητας. Λόγου χάρη, το πλήθος κάποιων σωματιδίων που εκπέμπονται από ένα ραδιενεργό υλικό, ακολουθεί κατανομή πιθανότητας Poisson (Ross, 2010).

Τέλος, στο τομέα της αστρονομίας, ένα παράδειγμα της εμφάνισης της θεωρίας Πιθανοτήτων, αποτελεί η μέτρηση αποστάσεων ουράνιων σωμάτων (Ross, 2010). Πιο συγκεκριμένα, η μέτρηση της απόστασης μεταξύ δύο ουράνιων σωμάτων αποτελεί μόνο μια εκτίμηση της πραγματικής απόστασης. Ο λόγος, διότι κάθε μέθοδος μέτρησης, επηρεάζεται τόσο από το φυσικό σφάλμα, όσο και από τις μεταβαλλόμενες ατμοσφαιρικές συνθήκες (Ross, 2010). Κατά συνέπεια, οι αστρονόμοι καταφεύγουν σε μια σειρά μετρήσεων και προσεγγίζουν την απόσταση από την μέση τιμή. Απαραίτητο φυσικά είναι και ο υπολογισμός του ενδεχόμενου σφάλματος της τελικής εκτίμησης (Ross, 2010).

1.4 Η χρήση των Πιθανοτήτων στις Επιστήμες Υγείας

Η ανάγκη χρήσης των πιθανοτήτων στις επιστήμες υγείας, φαίνεται άμεσα τόσο στο ερευνητικό, όσο και στο πρακτικό κομμάτι της επιστήμης. Η υγεία ενός ανθρώπου είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με ένα μοντέλο πιθανότητας που επηρεάζει το μέλλον του (Rose, 2007). Από τη στιγμή της γέννησης του, οι ισχυρισμοί πιθανότητας είναι πανταχού παρόντες στην ζωή και την υγεία του, μέσω της ιατρικής (Upshur, 2013).

Στο ερευνητικό κομμάτι, οι πιθανοτικές διαδικασίες χρησιμοποιούνται αρκετά σε κοινωνικές έρευνες και έρευνες ανάπτυξης φαρμάκων (Singh, 2015). Τέτοιες έρευνες είναι πρακτικά αδύνατον να εφαρμοστούν σε ολόκληρο τον πληθυσμό και έτσι ακολουθείται μια αυστηρή διαδικασία δειγματοληψίας (Cameron & Baldock, 1998; Singh, 2015). Στόχος των πιθανοτικών διαδικασιών είναι: α) να περιορίσουν το μέγεθος του δείγματος σε ένα επίπεδο, που θα μπορεί να δώσει το κατάλληλο βαθμό αξιοπιστίας στα αποτελέσματα της έρευνας, β) να ορίσει τα κατάλληλα διαστήματα εμπιστοσύνης στα ενδεχόμενα διαγνωστικά τεστ και γ) να μελετήσει μια προγνωστική πιθανότητα επιτυχίας του εκάστοτε φαρμάκου (Cameron & Baldock, 1998; Saint-Hilary et. al., 2018; Singh, 2015). Στο πρακτικό κομμάτι, οι Πιθανότητες δεν μπορούν να συλλάβουν την ιατρική διαίσθηση, ωστόσο αποτελούν έναν αδιαμφισβήτητο παράγοντα ανάλυσης των ιατρικών επιλογών στην αντιμετώπιση μιας κατάστασης (Upshur, 2013). Λόγου χάρη, οι ηλικιωμένοι ασθενείς ανταποκρίνονται με υψηλότερες πιθανότητες αρνητικών αποτελεσμάτων σε ένα φάρμακο από τους νεότερους (Mazur & Merz, 1994). Κατά συνέπεια, δεδομένου της ηλικίας του ασθενούς περιορίζονται και οι επιλογές της θεραπείας.

Έρευνες για την τεκμηρίωση της ίασης από ασθένειες, γίνονται όλο και πιο σημαντικές (Cameron & Baldock, 1998). Φυσικά, δεν λείπουν και έρευνες που εξετάζουν την χρήση της εναλλακτικής ιατρικής (Mackenzie et al., 2003). Άμεσες επιδράσεις σε όλες αυτές, έχει η πιθανοτική δουλειά του Bayes, η οποία εμφανίζει μια ευρεία απήχηση σε ένα συνεχώς αυξανόμενο πεδίο εφαρμογών (Huelsenbeck et al., 2001; Olofsson, 2015). Μάλιστα, στις ιατρικές δοκιμές για να εξαχθούν συμπεράσματα από αποδεικτικά στοιχεία, χρησιμοποιείται ολόκληρη μεθοδολογία που συχνά αναφέρεται ως «Bayesian στατιστική» (Olofsson, 2015; Saint-Hilary et al., 2018). Η γενική αρχή της μεθόδου, ακολουθεί το μοτίβο του «ανάποδου υπολογισμού». Δηλαδή, υπολογίζει την πιθανότητας της αρχικής υπόθεσης με βάση τα αποτελέσματα παρόμοιων καταστάσεων (Olofsson, 2015).

Για παράδειγμα, εφαρμογές της παραπάνω μεθόδου φαίνονται σε έρευνες που ασχολούνται με την εξελικτική φύση των θηλαστικών και των φυτών (Shore & Baldwin, 1983; Huelsenbeck & Ronquist, 2001; Wang et al., 2000). Με βάση αυτές, η επιστήμη μπορεί αφενός να ανακαλύψει την ιστορία της ζωής και αφετέρου να σκιαγραφήσει ένα πιθανό μοτίβο της εξέλιξης των οργανισμών (Huelsenbeck & Ronquist, 2001; Kolar & Lodge, 2001). Σε όλα αυτά, έρχονται να συμβάλουν και άλλες πιθανοτικές διαδικασίες, όπως η θεωρία των αλυσίδων Markov (Huelsenbeck & Ronquist, 2001). Αποτελέσματα του συνδυασμού διάφορων πιθανοτικών μεθόδων σε τέτοιες έρευνες μέχρι σήμερα, είναι η εξέλιξη της επιστήμης σε ζητήματα εξελικτικής, αναπαραγωγής και γονιμοποίησης (Frankham et. al., 2011; Huelsenbeck et. al., 2001; Shore & Baldwin, 1983; Wang et al., 2000).

Κλείνοντας την παρούσα παράγραφο, δεν θα μπορούσε να παραληφθεί μια ιδιαίτερη αναφορά στον Γεώργιο Παπανικολάου και στο παγκοσμίου φήμης «Pap Test». Το «Pap Test» είναι η μέθοδος πρώιμης διάγνωσης μικροβιακών και μυκητιασικών λοιμώξεων, καθώς και του καρκίνου του τραχήλου της μήτρας (Bigras & de Marval, 2005). Η μέθοδος βασίζεται στην αναγνώριση απολεπισμένων ανώμαλων κυττάρων, δηλαδή στην ύπαρξη πιθανών χαρακτηριστικών του καρκινώματος (Papanicolaou & Traut, 1943). Πιο συγκεκριμένα, το συγκεκριμένο διαγνωστικό τεστ, συστήνεται ως προκαταρκτική διαγνωστική διαδικασία που μελετάει με υψηλή πιθανότητα επιτυχίας, την πιθανή ύπαρξη καρκίνου στον τράχηλο της μήτρας μιας γυναίκας (Papanicolaou & Traut, 1943).

1.5 Ωφέλεια χρήσης Πιθανοτήτων σε Κοινωνικές και Ανθρωπιστικές Επιστήμες

Σε ένα καθημερινό διάλογο, δημιουργείται πολλές φορές η ανάγκη της χρήσης βασικών γνώσεων μαθηματικών και χωρικών στοιχείων προς υποστήριξη επιχειρημάτων (Rubel et al., 2016). Τα μαθηματικά από τη φύσης τους, είναι λόγος αποδείξιμός και δεν χωράνε αντιρρήσεις ή εμπειρικές παρεμβάσεις. Αποτέλεσμα αυτού, είναι να επεκτείνεται η χρήση τους όχι μόνο στις θετικές επιστήμες, αλλά και στις κοινωνικές - ανθρωπιστικές (Rubel et al., 2016).

Σε σοβαρές καταστάσεις, όπως μια δικαστική διαμάχη, τα μαθηματικά και ιδιαίτερα οι πιθανότητες είναι ένα μέτρο προσφυγής στην αλήθεια και έτσι διαδραματίζουν πρωταγωνιστικό ρόλο (Kingston, 1966). Λόγου χάρη, η εξαιρετικά υψηλή πιθανότητα ευστοχίας στα τεστ πατρότητας DNA, έχει επιλύσει πολλά ζητήματα. Βέβαια, σε πιο δύσκολες καταστάσεις, η ερμηνεία των αποδεικτικών στοιχείων φαίνεται να είναι η πιο δύσκολη πρόκληση που αντιμετωπίζει ένας δικαστής ή δικηγόρος, ακόμα και ιατροδικαστής (Gill, 2018). Λύση εδώ, προσπαθούν να δώσουν πάλι οι Πιθανότητες. Μέσα από λογισμικά ανάλυσης δεδομένων, προκύπτουν οι πιθανότητες ισχύος των αποδεικτικών στοιχείων (Gill, 2018; Tsamardinos et al., 2003;). Κατά συνέπεια, πολλές φορές εάν μια άποψη δεν υποστηρίζεται πιθανοτικά από δεδομένα, τότε θεωρείται υποκειμενική. Είναι σημαντικό, τα δικαστήρια να αναπτυχθούν βασιζόμενα σε γνώσεις, βάση δεδομένων και όχι με βάση την εμπειρία (Gill, 2018; Kingston, 1966). Η εμπειρία πρέπει να υποστηρίζεται από το εύρος των πιθανοτήτων που προκύπτουν από επιστημονικές αρχές πειραματισμού (Gill, 2018; Tsamardinos et al., 2003). Οι δοκιμές σε αυτά τα πειράματα διεξάγονται υπό ελεγχόμενες συνθήκες για την μέτρηση του ίδιου χαρακτηριστικού. Αυτό το μοντέλο, ακολουθείται εδώ και αρκετά χρόνια από δικαστήρια και ιατροδικαστές (Gill, 2018).

Αξίζει, όμως να σημειωθεί και η επιρροή των δικαστικών αγωγών και γενικά διάφορων νομικών υποθέσεων στις πιθανότητες. Μια από τις πιο γνωστές και ευρέως χρησιμοποιούμενες κατανομές πιθανότητας, η επονομαζόμενη «κατανομή Poisson», παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τον δημιουργό της Denis Poisson, σε ένα βιβλίο που έγραψε σχετικά με την εφαρμογή της θεωρίας Πιθανοτήτων σε νομικά θέματα (Ross, 2010). Σήμερα, η συγκεκριμένη θεωρία, καθώς και άλλες που ανέπτυξε ο Poisson στο βιβλίο του βρίσκουν τεράστιο εύρος εφαρμογών σε ποικίλα πεδία. Για παράδειγμα, σε μελέτες για το πλήθος των κατοίκων μιας κοινότητας που φτάνουν μέχρι μια ορισμένη ηλικία, μελέτες για το πλήθος των πελατών που μπαίνουν κάθε ώρα σε ένα κατάστημα και σε μελέτες για το πλήθος των κενών θέσεων που εμφανίζονται σε έναν κινηματογράφο στη διάρκεια του ενός έτους (Ross, 2010).

1.6 Πιθανότητες και τεχνολογική επιστημονική εξέλιξη

Τα τελευταία χρόνια, η χρήση της θεωρίας Πιθανοτήτων στην τεχνολογική εξέλιξη και ειδικότερα στην πληροφορική έχει ενταθεί σε εξαιρετικά μεγάλο βαθμό (Graham et al., 1989; Mitzenmacher, & Upfal, 2005). Πολλά τεχνολογικά επιτεύγματα οφείλουν την εξέλιξη τους στις πιθανότητες. Για παράδειγμα, οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές, τα ραντάρ, τα τηλεσκόπια, μεγάλο μέρος του στρατιωτικού εξοπλισμού κ.α. (Tait, 1993).

Η συνεχής και η διακριτή πιθανότητα, οι κατανομές πιθανοτήτων, οι αλυσίδες Markov, η μέση τιμή και η διακύμανση είναι μερικές μόνο από τις έννοιες που έθεσαν τις βάσεις στην επιστήμη των υπολογιστών (Graham et al., 1989; Ross, 2010). Ακόμα, θεωρήματα που αρχικά δεν εμφάνιζαν κάποια άμεση απήχηση, κατέληξαν μέσα από τις τεχνολογικές εφαρμογές να σηματοδοτήσουν την ιστορία ολόκληρης της ανθρωπότητας. Ο λόγος γίνεται για το θεώρημα Bayes, όπου ο Alan Turing και η ομάδα του χρησιμοποίησαν στην κρυπτογραφία μέσω ενός αυτοσχέδιου υπολογιστή και κατόρθωσαν να επηρεάσουν την έκβαση του δευτέρου παγκοσμίου πολέμου (Turing, 2012; Zabell, 2012). Σύμφωνα με τον Turing (2012), το θεώρημα του Bayes έχει άμεση σχέση με τις περισσότερες εφαρμογές κρυπτογραφίας. Αυτή η πεποίθηση και η επιτυχία της μηχανής του στο Bletchley, όπου και εργαζόταν κατά την περίοδο του πολέμου, έδωσε το έναυσμα για την ανάπτυξη πολλών τεχνολογικών επιτευγμάτων (Zabell, 2012).

Ακόμα, αξίζει να αναφερθούν, μεταξύ άλλων, κάποιες ενδιαφέρουσες περιπτώσεις που χρησιμοποιούν στο έπακρο βασικές τεχνικές και έννοιες πιθανοτήτων (Κοντογιάννης & Τουμπής, 2015).

- Προσομοίωση πολύπλοκων συστημάτων (π.χ. τηλεπικοινωνίες).
- Πιθανοκρατική ανάλυση αλγορίθμων (π.χ. στους πολύ πολύπλοκους αλγόριθμους).
- Ανάπτυξη μεθόδων μηχανικής μάθησης.

- Ανάπτυξη μεθόδων ανάκτησης πληροφοριών.
- Κατασκευή τυχαιοκρατικών αλγόριθμων (π.χ. πρωτόκολλο επικοινωνίας ethernet).
- Κρυπτογραφία.
- Σχεδιασμός αλγορίθμων πολυμεσικών δεδομένων (π.χ. στη συμπίεση ήχου και εικόνας).
- Θεωρητική θεμελίωση των βασικών εννοιών πολυπλοκότητας και υπολογισιμότητας.
- Τεχνίτη νοημοσύνη
- Bid Data και Marketing.

1.7 Οι Πιθανότητες στις Κατασκευές και την Μηχανική

Η ανάπτυξη της χρήσης των Πιθανοτήτων στο σχεδιασμό της μηχανικής, έχει ρίζες στις πρώτες δεκαετίες του 19ου αιώνα (Tait, 1993). Η επιστήμη της μηχανικής, είχε την τάση να ακολουθεί περισσότερο μια εμπειρική προσέγγιση. Ωστόσο, η ανάγκη αναβάθμισης της αξιοπιστίας στη μηχανική πρακτική, αποτέλεσε τον κύριο λόγο συσχετισμού των δύο αυτών επιστημών (Tait, 1993).

Ο συνδυασμός αυτός, δεν ήταν άμεσος, αλλά πραγματοποιήθηκε με σταθερή πορεία και τα πλεονεκτήματα του λαμβάνουν χώρα ακόμα και σήμερα (Tait, 1993). Κατά συνέπεια, μέσα από τις πιθανοτικές διαδικασίες οι μηχανικοί είναι θέση να σχεδιάζουν εκ των προτέρων τη συνολική πορεία του έργου. Πιο συγκεκριμένα, μπορούν να προβλέπουν πιθανούς κίνδυνους, το πιθανό κόστος, την ασφάλεια και την συνολική διάρκεια του έργου (Siddall, 1984; Tait, 1993; Yarmolaev & Korkhin, 2018). Οι εκτιμήσεις αυτές, συνήθως προσεγγίζουν στατιστικά στοιχεία παρόμοιων καταστάσεων αν υπάρχουν. Σε διαφορετική περίπτωση ορίζονται ως τυχαίες μεταβλητές και αναπτύσσεται ένα πιθανοτικό μοντέλο προσομοίωσης της κατάστασης (Yarmolaev & Korkhin, 2018). Σε κάθε περίπτωση βέβαια, ο μηχανικός είναι σε θέση να βελτιστοποιήσει τον σχεδιασμό της κατασκευής (Siddall, 1984). Παραδείγματος χάριν, η χρήση πιθανολογικών τεχνικών στο σχεδιασμό ενός εργοστασίου, μπορεί να προσδιορίσει τις συνθήκες, υπό της οποίες αξίζει να καλυφθεί ένα επιπρόσθετο κόστος κατασκευής διπλών τοιχωμάτων (Tait, 1993).

Στόχος των πιθανοτικών αναλύσεων στις κατασκευές, είναι η μείωση των κινδύνων (περιβαλλοντολογικοί, επαγγελματικοί, επιχειρησιακοί) και των διαδικαστικών εξόδων (Eric & Victoria, 2018). Παράγοντες, οι οποίοι δημιουργούν και τις συνθήκες ανταγωνισμού μεταξύ των εταιριών. Λόγου χάρη, σε μια σύγκριση μεταξύ δύο κατασκευαστικών εταιριών Α και Β, ας η υποτεθεί, ότι η εταιρία Α χρησιμοποιεί με επιτυχία πιθανοτικές μεθόδους ενώ η άλλη όχι. Η εταιρία Α έχει τη δυνατότητα να κάνει μια πιθανή πρόβλεψη της εξέλιξης του έργου, λαμβάνοντας υπόψιν πάντα κατάλληλα διαστήματα εμπιστοσύνης (Siddall, 1984). Άμεσο αποτέλεσμα αυτού, είναι να μπορεί να παραγγείλει ποσότητα πρώτων υλών εκ των προτέρων και έτσι να πετύχει καλύτερη τιμή. Συνεπώς, η τελική προσφορά κατασκευής στο πελάτη θα είναι πολύ καλύτερη οικονομικά από την αντίστοιχη της εταιρίας Β. Φυσικά, αυτό αποτελεί ένα μικρό πλεονέκτημα της θεωρίας, αφού θα μπορούσε να αναλυθεί επιπλέον η πιθανή πρόβλεψη ζημιών, η μείωση των κινδύνων και το ακριβές χρονοδιάγραμμα (Eric & Victoria, 2018).

1.8 Πιθανότητες και αθλητισμός

Στον αθλητισμό, ίσως να είναι λίγο αναμενόμενη η χρήση της στατιστικής και των πιθανοτήτων. Πολλοί διαδικτυακοί ιστότοποι φιλοξενούν στατιστικά ομάδων και αποδώσεις παικτών. Με βάση αυτά, οι δημοσιογράφοι κάνουν πιθανοτικούς υπολογισμούς και δημοσιεύουν στοιχεία, που στόχο έχουν την πρόβλεψη αποτελεσμάτων αγώνων (Croucher, 1986). Φυσικά, δεν είναι τυχαίο άλλωστε, ότι πάνω σε αυτά έχει στηθεί μια ολόκληρη βιομηχανία στοιχήματος, με επιρροή σε εκατομμύρια κόσμο.

Οι πιθανότητες παίζουν σπουδαίο ρόλο και από την μεριά του αθλητή. Οι Farrow και Reid το 2012, πραγματοποίησαν μια έρευνα κατά την οποία διάφοροι αθλητές τένις κλήθηκαν να δουν ένα αγώνα ενός γνωστού τενίστα και να υποθέσουν πως νίκησε. Οι μεγαλύτεροι σε ηλικία αθλητές αρκετές φορές χρησιμοποιούσαν την εμπειρία τους για να καθορίσουν τις πιθανότητες των γεγονότων που οδήγησαν στη νίκη. Αντιθέτως, οι λιγότερο έμπειροι αθλητές, φάνηκε να βελτιώνουν τις προβλέψεις τους, μετρώντας πληροφορίες όπως τα χτυπήματα της μπάλας, τις τεχνικές και την δύναμη. Με αυτό το τρόπο, ένας αθλητής προσπαθεί να αναλύσει τις δυνατότητες ενός αντιπάλου του πριν τον αντιμετωπίσει. Καταλαβαίνει λοιπόν κανείς, την χρησιμότητα των πληροφοριών πιθανότητας κατάστασης για τους επαγγελματίες αθλητές (Farrow & Reid, 2012). Ακόμα, σημαντικό είναι ο εκάστοτε προπονητής να γνωρίζει την πιθανότητα κατάστασης για τον κάθε αθλητή, καθώς οφείλει να προσαρμόσει το πρόγραμμα προπόνησης λαμβάνοντας υπόψιν αφενός το συντελεστή κόπωσης (δεδομένου του προγράμματος των αγώνων) και αφετέρου την ελαχιστοποίηση της πιθανότητας τραυματισμού (Emery & Meeuwisse, 2001). Αυτός ο σχεδιασμός στο σύνολο του, στοχεύει στην αύξηση της ανταγωνιστικότητας και της επίδοσης των αθλητών. Φυσικά, σπουδαίο ρόλο εδώ παίζει και η ψυχολογική ευημερία των αθλητών, η οποία μπορεί επίσης να εξηγηθεί με κάποια πιθανότητα (Hosseini & Besharat, 2010).

1.9 Περαιτέρω εφαρμογές της Πιθανότητας

Στην παρούσα παράγραφο περιγράφονται μερικά ενδιαφέροντα παραδείγματα, τα οποία αδυνατούσαν να ενταχθούν στις παραπάνω περιπτώσεις, ωστόσο παρουσιάζουν εξαιρετικό ενδιαφέρον χρήσης των πιθανοτήτων. Αρχικά, οι στρατιωτικές επιχειρήσεις δεν θα μπορούσαν να απέχουν από την προσπάθεια πρόβλεψης και τις πιθανότητες. Τεχνικές πιθανοτικών μεθόδων ακολουθούνται για τη βελτιστοποίηση της άμυνας μιας χώρας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η επιλογή θέσεων τοποθέτησης αντιαεροπορικών όπλων και ραντάρ, όπου είναι υψίστης σημασίας κατά τη διάρκεια ενός πολέμου (Tait, 1993). Κατά συνέπεια, μέσω πιθανοτικών ενεργειών οι βασικές θέσεις επιλέγονται με τρόπο ώστε να μειώνονται οι απώλειες κατά τη διάρκεια μιας ενδεχόμενης βομβιστικής επίθεσης (Tait, 1993).

Σε μεγάλες αγροτικές φάρμες, προκειμένου να βελτιωθεί η δομή φύτευσης και να χρησιμοποιείται πιο αποτελεσματικά ο μηχανισμός ποτίσματος, προτείνεται η εφαρμογή ενός μοντέλου πιθανότητας (Wang et al., 2018). Αυτό το μοντέλο, συσχετίζει τόσο την αβεβαιότητα του τρόπου διανομής του νερού, όσο και τα αναμενόμενα οφέλη ή ζημιές της εκάστοτε μεθόδου (Wang et al., 2018). Απώτερος σκοπός, είναι η βέλτιστη προσαρμογή των περιοχών φύτευσης διάφορων καλλιεργειών. Η επιτυχία της δεδομένης βελτιστοποίησης, συνεπάγεται θετικές επιδράσεις στα παγκόσμια αποθέματα πόσιμου νερού, στο περιβάλλον, την οικονομία και την παραγωγή (Wang et al., 2018).

Τέλος, η τηλεόραση και η συνεχώς αυξανόμενη βιομηχανία των τηλεπαιχνιδιών, τα τυχερά παιχνίδια και ο τζόγος, είναι μερικοί ακόμα χαρακτηριστικοί τομείς, όπου η ύπαρξη τους οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στη θεωρία πιθανοτήτων. Φυσικά, όπως υπογραμμίστηκε και στην αρχή του κεφαλαίου, η ευρύτητα χρήσης των πιθανοτικών μεθόδων λειτουργεί ως ανασταλτικός παράγοντας στην προσπάθεια περισυλλογής όλων των εφαρμογών πιθανότητας. Γίνεται, όμως, μια αξιοσημείωτη προσπάθεια με στόχο την παρουσίαση της απήχησης των πιθανοτικών μεθόδων στην καθημερινότητα πολλών επιστημών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $2^{Ο}$: ΣΠΟΥΔΑΙΟΤΗΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Τα μαθηματικά από αρχαιοτάτων χρόνων ξεκίνησαν να διδάσκονται στο ευρύ κοινό, εξαιτίας της χρησιμότητας τους και της συσχέτισης τους με την άμεση καθημερινότητα. Ο λόγος δημιουργίας τους άλλωστε, δεν είναι άλλος από την ανάγκη επεξήγησής των φυσικών φαινομένων και την επιβολή της καθημερινότητας για την αντιμετώπιση διάφορων καθημερινών προβλημάτων που υπόκεινται σε μια λογική εξήγηση. Ο Wilder το 1986 στο βιβλίο του, ανέφερε χαρακτηριστικά ότι τα μαθηματικά είναι δημιούργημα του ανθρώπου για να εξυπηρετήσει και να εξηγήσει τις ανάγκες του, για αυτό όπως προσθέτει, η εξέλιξη τους συνδέεται άρρηκτα με τις ανάγκες τις εκάστοτε εποχής. Ακόμα, ο μεγάλος Γερμανός μαθηματικός Kurt Gödel, γνωστός σήμερα για τη συνεισφορά του στη μαθηματική λογική, διέδιδε την πεποίθηση ότι τα μαθηματικά όντας λόγος αποδείξιμος, είναι η μόνη επιστήμη που βρίσκεται σε θέση να εξηγήσει ένα φαινόμενο, χωρίς να επιδέχεται αντιρρήσεις ή εμπειρικές παρεμβάσεις (Goldstein, 2006).

Τα τελευταία 30 χρόνια, η σημασία των μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων γενικότερα, αποτελούν απαραίτητα εφόδια για την αγορά εργασίας (Czocher, 2016). Η προσοχή στο μαθηματικό μοντέλο και την αυστηρή νοοτροπία του αυξάνεται συνεχώς. Το 2016 μάλιστα, οι Northcote και Marshall έκαναν μια έρευνα για τους μη-επαγγελματικής ανάγκης μαθηματικούς υπολογισμούς που χρειάζεται κανείς στη καθημερινότητα του. Τα αποτελέσματα της εν λόγω έρευνας αποκάλυψαν την άμεση και απαραίτητη χρήση των μαθηματικών στην απλή καθημερινή ζωή. Οι συμμετέχοντες, που ανέρχονταν στα 160 ενήλικα άτομα, πραγματοποίησαν συνολικά 1200 διαφορετικούς υπολογισμούς. Αυτοί μπορεί να θεωρηθούν είτε νοητικοί υπολογισμοί, είτε ακόμα και εκτιμήσεις. Ενδεικτικά, κάποιοι από αυτούς είχαν να κάνουν με τον χρόνο, τα οικονομικά, το βάρος, την απόσταση και την εκτίμηση προβλημάτων (Northcote & Marshall, 2016).

Αυτό που πρέπει να γίνει αντιληπτό από τον κόσμο, είναι ότι η χρήση των μαθηματικών γνώσεων στη καθημερινότητα δεν περιορίζεται μόνο σε εκτιμήσεις και πράξεις. Οι διαδικασίες των αποδεικτικών μεθόδων που χρησιμοποιεί η μαθηματική θεωρία, εξοπλίζουν τον μαθητή με δυνατότητες τεκμηρίωσης και αιτιολόγησης των απόψεων του (Harel & Stylianides, 2017). Επίσης, ένα από τα σημαντικότερα οφέλη της διδαχής των μαθηματικών, δεν αποτελεί μόνο το κομμάτι των γνώσεων, όσο το κομμάτι της ακαδημαϊκής πειθαρχίας (Wake et al., 2016). Η κατασκευή λογικών ιδεών και συλλογιστικών, όπως επίσης και ο αλγοριθμικός τρόπος σκέψης, τοποθετούν τα μαθηματικά πολύ ψηλά στον κατάλογο των τυπικών προσόντων (Harel & Stylianides, 2017).

Το 1654, δύο μεγάλοι μαθηματικοί της εποχής, οι Fermat και Pascal, ήρθαν να δώσουν και άλλα πλεονεκτήματα στη μαθηματική επιστήμη, αλλάζοντας τον τρόπο σκέψης του κοινωνικού συνόλου (Bayés, 2018). Η εποχή των Πιθανοτήτων άρχισε να αναβλύζει μέσα από το ενδιαφέρον που επιδείχθηκε από το ευρύ σύνολο. Παρόλο που η αξιωματική τους θεμελίωση και ο καθορισμός τους ως μαθηματική επιστήμη ήρθε αρκετά αργότερα, η ενασχόληση των δύο μεγάλων και γνωστών επιστημόνων με το αντικείμενο των πιθανοτήτων, προσέλκυσε το ενδιαφέρον ολόκληρης της επιστημονικής κοινότητας. Τα ειδικά χαρακτηριστικά που εμφανίζουν, όπως επίσης και το αμελητέο γνωστικό υπόβαθρο που απαιτούν, δημιουργούν μια πρόκληση στη μάθηση και στη διδακτική τους (Batanero & Chernoff, 2017).

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναλυθούν κάποια από τα βασικά πλεονεκτήματα που προσφέρουν οι γνώσεις της θεωρίας Πιθανοτήτων. Η ενασχόληση του ανθρώπου με τα τυχερά παιχνίδια και η ανάπτυξη των ασφαλιστικών εταιριών, ήταν δύο από τις κύριες κινητήριες δυνάμεις για την ανάπτυξη της θεωρίας (Borovcnik & Kapadia, 2018). Η απήχηση της, στο ενδιαφέρον που επέδειξε η κοινωνία και η άμεση εφαρμογή της σε καθημερινές καταστάσεις, οδήγησαν πολλές χώρες στην αναγνώριση της ανάγκης για το γραμματισμό της πιθανότητας (Batanero & Chernoff, 2017). Σήμερα λοιπόν, δεν θα μπορούσε παρά να μην αποτελεί έναν από τους κυριότερους στόχους των εκπαιδευτικών συστημάτων.

2.1 Η Πρόβλεψη, η Αβεβαιότητα και τα Σφάλματα

Στη καθημερινή ζωή, δεν είναι λίγες οι φορές, που ο άνθρωπος καλείται να προμαντέψει την έκβαση των γεγονότων. Ενίοτε βέβαια, προσπαθεί να προβλέψει εκ των προτέρων το τελικό αποτέλεσμα μιας δεδομένης κατάστασης. Οι προβλέψεις συνήθως, βασίζονται σε εμπειρικά δεδομένα από παρόμοιες περιπτώσεις του παρελθόντος (Murphy & Winkler, 1992). Αυτό βέβαια δε συνεπάγεται και την εγκυρότητα τους. Αν υπάρχει αβεβαιότητα στο υποκείμενο γεγονός, θα επηρεάσει και την πρόβλεψη (Howard, 1988). Σε αυτό το σημείο εισχωρεί η πιθανότητα για να μελετήσει το μέγεθος της αβεβαιότητας (Howard, 1988).

Με την έννοια Πιθανότητα, λογίζεται η αναμενόμενη τιμή της προσδοκίας, για τη πραγματοποίηση ή μη ενός φαινομένου (English & Watson, 2016). Επί της ουσίας, η «Θεωρία των Πιθανοτήτων» αντιστοιχεί σε κάθε ενδεχόμενο έναν αριθμό από το 0 μέχρι το 1, εκφράζοντας το μέγεθος της βεβαιότητας που αυτό δύναται να συμβεί (Howard, 1988). Αυτός ο αριθμός, ονομάζεται πιθανότητα του φαινομένου (Ross, 2010). Κατά συνέπεια, η αβεβαιότητα για ένα μελλοντικό γεγονός, εκφράζεται υπό το πρίσμα της πιθανότητας και των προβλέψεων (Murphy & Winkler, 1992). Φυσικά, στα μαθηματικά δεν είναι δυνατό να υπάρξει πρόβλεψη με βέβαιη πιθανότητα (Murphy & Winkler, 1992). Γεγονός που καταδεικνύει τη χρησιμότητα των πιθανοτήτων στη σχέση τους με την αβεβαιότητα και τη πρόβλεψη. Θα έλεγε κανείς, όπως υποστηρίζει και ο Wilson (2009), ότι η αβεβαιότητα για μια απόφαση, χρήζει βοήθειας πιθανοτικών διαδικασιών όταν η άμεση διαίσθηση λογικής είναι αδύναμη.

Η γνώση των πιθανοτήτων δίνει το πλεονέκτημα για μια «καλή» πρόβλεψη. Ο όρος «καλή πρόβλεψη», αποδίδεται στην επιλογή του ενδεχομένου με την μεγαλύτερη πιθανότητα να πραγματοποιηθεί. Η βελτίωση μιας πρόβλεψης απαιτεί την απουσία μεροληψίας και πιθανότητα γεγονότος κοντά στη μονάδα (Murphy & Winkler, 1992). Οι πιθανοτικές τεχνικές των προβλέψεων ποικίλουν στη θεωρία, ανάλογα με το γεγονός, με την πιο διαδεδομένη μέθοδο να αποτελεί η «αρχή του ελαχίστου» (Cousins & Shawe-Taylor, 2017). Φυσικά, συνίσταται μια επαρκής γνώση της θεωρίας των πιθανοτήτων, καθώς ουκ ολίγες φορές έχει παρατηρηθεί το φαινόμενο της παρερμήνευσης.

Η κατάλληλη πρόβλεψη δεν πραγματοποιείται μόνο υπό τη σκιά της δεδομένης αβεβαιότητας. Οι βασικές γνώσεις της θεωρίας Πιθανοτήτων εφοδιάζουν το άτομο με τη δυνατότητα υπολογισμού της πιθανότητας για το εκάστοτε δυνατό αποτέλεσμα. Οι περαιτέρω γνώσεις της θεωρίας όμως, προσδίδουν ικανότητες διαλογής της βέλτιστης πρόβλεψης ανάμεσα από ένα σύνολο προβλέψεων με την ίδια πιθανότητα (Cousins & Shawe-Taylor, 2017; Murphy & Winkler, 1992) και το συνδυασμό διάφορων δυνατών προβλέψεων χωρίς βλάβη της γενικότητας (Raftery et al., 2005). Σημαντικό προσόν θεωρείται ακόμα, η αποφυγή των τεχνιτών στατιστικών συμπερασμάτων που μπορεί για πολλούς λόγους να προσδώσουν αισχεμένη μεροληψία στον υπολογισμό της αβεβαιότητας (Kyburg, 1966).

Τέλος, αξίζει αναφερθεί η θεωρία των σφαλμάτων, όπου έρχεται να συμπληρώσει την αβεβαιότητα και να προσδώσει μεγαλύτερη αξιοπιστία στη πρόβλεψη (Murphy & Winkler, 1992; Pelc, 1989). Τα σφάλματα υπολογίζονται για να υπάρχει η δυνατότητα της επίγνωσης μιας πρόβλεψης. Επί της ουσίας, εκφράζουν το βαθμό βεβαιότητας για τον υπολογισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου και το ποσοστό σφάλματος που μπορεί να προκύψει. Τα αναπόφευκτα αυτά λάθη στον υπολογισμό της πιθανότητας μπορεί να διαφέρουν, καθώς εξαρτώνται από διάφορους παράγοντες και τη δειγματοληψία (Park et al., 2019). Για παράδειγμα, από τον τρόπο επιλογής του δείγματος, τις γενικότερες συγκυρίες που λαμβάνει χώρα το φαινόμενο και την ποιότητα των δεδομένων (Murphy & Winkler, 1992). Αρκετά από αυτά μπορούν να αντιμετωπιστούν ή να αποφευχθούν, αν τηρηθούν κάποιες βασικές προδιαγραφές κατά την επιλογή του δείγματος (Park et al., 2019).

2.2 Ο Κίνδυνος και οι Πιθανότητες

Ο κίνδυνος είναι μια βασική πτυχή της ζωής (Borovcnik & Kapadia, 2018). Το 2007 ο Hansson προσπάθησε να ορίσει την έννοια του κινδύνου ως ένα ανεπιθύμητο συμβάν, που έχει πιθανότητα να συμβεί. Βέβαια, ο συγκεκριμένος ορισμός δεν φάνηκε να καλύπτει την οριστέα έννοια και έτσι ο Hansson προχώρησε στην κατασκευή τεσσάρων ακόμα διαφορετικών ορισμών, για να πλαισιώσει την έννοια με το τρόπο που αυτή χρησιμοποιείται στη καθημερινή ζωή. Τελικά, οι ορισμοί που έδωσε φαίνεται να συμβαδίζουν με τον αντίστοιχο των Borovcnik και Kapadia (2018), οι οποίοι θεώρησαν τον κίνδυνο ως την αιτία ενός ανεπιθύμητου φαινομένου με πιθανότητα να πραγματοποιηθεί κάποια στιγμή στο μέλλον ή και όχι.

Σύμφωνα με τη φύση της θεωρίας των Πιθανοτήτων, είναι ευκόλως αντιληπτή η άμεση σχέση της πιθανότητας με τον κίνδυνο. Οι Batanero και Chernoff το 2018 σε ένα από τα άρθρα τους, υποστήριξαν ότι οι πιθανότητες είναι το μαθηματικό εργαλείο για να μετρηθεί ο κίνδυνος. Η πεποίθηση τους, η οποία ενισχύεται από πολλούς ερευνητές, στοχεύει στον περιορισμό του κίνδυνου μέσα από την πιθανότητα (Engel & Orthwein, 2018). Πιο συγκεκριμένα, οποιαδήποτε κατάσταση εμπεριέχει κίνδυνο, περιλαμβάνει και αβεβαιότητα. Αυτή μπορεί να υπολογιστεί με την πιθανότητα, όπως έχει αναφερθεί παραπάνω. Μερικές φορές μάλιστα, η αβεβαιότητα μπορεί να αντικατασταθεί από την έννοια του κινδύνου και αντίστροφα (Bayés, 2018). Αυτό, γίνεται όταν δεν υπάρχει επαρκής γνώση του αντικειμένου ή της κατάστασης ώστε να εκτιμηθούν οι πιθανότητες των δυνατών αποτελεσμάτων και κατά συνέπεια, καθίσταται δύσκολο να εξακριβωθεί η καλύτερη πορεία δράσης για την κάθε μία κατάσταση (Bayés, 2018).

Οι πιθανότητες έχουν συμβάλει τα μέγιστα στις καταστάσεις κινδύνου. Η γνώση υπολογισμού τους, ελαχιστοποιεί το ρίσκο της κατάστασης. Για αυτόν ακριβώς το λόγο, οι αποφάσεις που πραγματεύονται επικινδυνότητα συμβουλεύονται τη θεωρία τους (Borovcnik & Kapadia, 2018). Όπως πρεσβεύουν λοιπόν, οι Borovcnik και Kapadia όχι μόνο συνδέονται οι έννοιες της «πιθανότητας» και του «κινδύνου» μεταξύ τους, αλλά και πολλές φορές, οι καταστάσεις πιθανότητας εμφανίζονται στα πλαίσια κινδύνου. Δεν θα ήταν υπερβολή λοιπόν, να υιοθετηθεί η άποψη των Borovcnik και Kapadia και από άλλους ερευνητές.

Σήμερα, οι άνθρωποι φαίνεται να εμφανίζουν σημαντική επιρροή από τις πιθανότητες (Engel & Orthwein, 2018). Οι αποφάσεις που εμπεριέχουν οποιαδήποτε είδος κινδύνου, δεν είναι λογικό να ληφθούν υπό τη σκέπη παραγόντων, όπως η τύχη και η προχειρότητα. Σε αυτό το κομμάτι λοιπόν, εισχωρεί η πιθανότητα για να μετρήσει τη βεβαιότητα της «ζημιάς» και του «κέρδους» (Best & Freund, 2018). Η χρήση της είναι σημαντική, καθώς σε ιδιαίτερες καταστάσεις, που εμπεριέχονται πολλοί κίνδυνοι, η κοινή λογική δεν δύναται να αποφανθεί (Batanero & Chernoff, 2018). Λόγου χάρη, οι κίνδυνοι που μπορούν να λάβουν χώρα κατά την διάρκεια ενός ταξιδιού είναι αρκετοί. Ενδεικτικά κάποιοι από αυτούς είναι να χαθεί το αεροπλάνο ή να χαθεί κάποια βαλίτσα ή να μην φτάσει η πτήση στην ώρα της κ.ά.. Κατά συνέπεια, ο υπολογισμός της πιθανότητας να μην συμβεί τίποτα, είναι συνδυασμός των επιμέρους καταστάσεων και χρήζει εξειδικευμένων γνώσεων πιθανότητας. Γίνεται λοιπόν αντιληπτό, ότι οι αξιολογήσεις του κίνδυνου είναι ζωτικής σημασίας για πολλές πτυχές της καθημερινής ζωής (Borovcnik & Kapadia, 2018).

Τέλος, έχει αποδειχθεί από διάφορες έρευνες, ότι η σχέση του κινδύνου και της πιθανότητας εξαρτάται και από την ηλικιακή βαθμίδα των πρωταγωνιστών της κατάστασης (Best & Freund, 2018). Οι Best και Freund το 2018 διεκπεραίωσαν μια έρευνα με 130 ενήλικες συμμετέχοντες. Η ηλικία του εν λόγω δείγματος κυμάνθηκε από 18 έως 80 ετών. Το πείραμα που έλαβε μέρος αυτή η ομάδα, πραγματευόταν μια πραγματική οικονομική κατάσταση. Το ζητούμενο για το δειγματικό σύνολο, ήταν να επιλέξουν ανάμεσα σε μια ασφαλή και μια επικίνδυνη επένδυση. Προφανώς βέβαια, η ασφαλής επένδυση εμπεριείχε μικρό κέρδος, ενώ η επένδυση με το ρίσκο αρκετά μεγαλύτερο. Τα αποτελέσματα έδειξαν, ότι οι μεγαλύτερες ηλικίες αρκέστηκαν στην ασφαλή επιλογή, ενώ οι μικρότερες προτίμησαν να ρισκάρουν με στόχο το κέρδος. Γεγονός, που αποδεικνύει πανηγυρικά τις πεποιθήσεις των Best και Freund για την ισχυρή αλληλεπίδραση των ηλικιών με τον κίνδυνο και τις πιθανότητες.

2.3 Η σημασία της λήψης αποφάσεων

Η λήψη μιας απόφασης για ένα καθημερινό ζήτημα είναι κάθε άλλο παρά μια απλή υπόθεση. Πολλάκις παρατηρείται η ανάγκη λήψης μιας τελικής κρίσης για κάποια κατάσταση ή προκύπτων πρόβλημα (Alkahtani, 2017; Bonnett, & White, 2018). Είτε αυτή είναι σημαντική είτε όχι, δεν παύει να συνοδεύεται από κάποια μελλοντικά αποτελέσματα. Κατά συνέπεια, δεν είθισται μια απόφαση να λαμβάνεται εν μέσω προχειρότητας ή βασιζόμενη στη τύχη (Bonnett, & White, 2018).

Αρκετές από τις καθημερινές καταστάσεις που συναντάνε οι μαθητές, είναι στοχαστικές (Engel & Orthwein, 2018). Γεγονός, που δίνει το πλεονέκτημα στους κατέχοντες των πιθανοτικών γνώσεων να υπερτερούν στην αναζήτηση της βέλτιστης επιλογής. Ωστόσο, λόγω ελλείπων γνώσεων, τις περισσότερες φορές η λήψη των αποφάσεων βασίζεται σε παρόμοιες εμπειρίες, παραβιάζοντας τους επιστημονικούς κανόνες προς απλοποίηση της κατάστασης (Taylor, 2014). Αυτό, μπορεί να μην είναι απαραίτητα κακό, αλλά πολλές φορές οδηγεί σε μεροληπτικές κρίσεις (Engel & Orthwein, 2018).

Με τον όρο «μεροληψία» ή «μονομέρεια» χαρακτηρίζεται η ανακριβής εκτίμηση φαινομένων που βασίζεται σε επιμερισμένη παρατήρηση ή επηρεασμένη από δευτερογενής παράγοντες (Kyburg, 1966). Ακόμα, μεροληψία εμφανίζουν και οι αποφάσεις που εξαρτώνται από τα συναισθήματα ή την προσωπικότητα του ατόμου (Engel & Orthwein, 2018). Οι Borovcnik και Kapadia το 2018, στη μελέτη που πραγματοποίησαν, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η υπερβολική εμπιστοσύνη ενός ατόμου στη συναισθηματική του νοημοσύνη και την διαίσθηση, συνεπάγεται επιρρεπείς λάθη και μεροληψία κατά την χρήση της θεωρίας των πιθανοτήτων. Άμεση συνέπεια αυτού είναι να επηρεάζεται η λήψη αποφάσεων. Ως αποτέλεσμα, οι σημαντικές αποφάσεις, ιδιαίτερα αυτές που περιλαμβάνουν κίνδυνο (Hansson, 2007), δεν πρέπει να επηρεάζονται από προσωπικές απόψεις, πεποιθήσεις, συναισθήματα, διαισθητικές υποθέσεις ή ακόμα και εμπειρικά δρώμενα. Αντιθέτως, οφείλουν να είναι αμερόληπτες με μόνη επιρροή αυτή της θεωρίας των πιθανοτήτων, στερούμενες κάθε είδους απλούστευσης, ευκολίας και γρηγοράδας, λόγω του περιορισμένου χρόνου και της ελλιπούς γνωστικής αντίληψης (Borovcnik & Kapadia, 2018).

Η τελική απόφαση ενός γεγονότος, πρέπει να έχει οσοδήποτε μεγαλύτερο βαθμό αξιοπιστίας (Howard, 1988). Ουσιαστικά, αυτό σημαίνει ότι η αναμενόμενη τιμή του επιλεγόμενου αποτελέσματος πρέπει να πλησιάζει όσο το δυνατό περισσότερο την τιμή του βέβαιου ενδεχομένου, δηλαδή τη μονάδα. Συμπερασματικά λοιπόν, μια απόφαση θεωρείται «καθαρή» και «αμερόληπτη» μόνο όταν οι άνθρωποι λογοδοτούν μέσω των πιθανοτήτων (Borovcnik & Kapadia, 2018; Juslin et al., 2014).

Παραδείγματος χάριν όσον προηγήθηκαν, ο Howard το 1988, περιγράφει με ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα τη πολυπλοκότητα και τη δυσκολία λήψης μιας απόφασης, καθώς και την ανάγκη της χρήσης των πιθανοτήτων. Ο Howard υποθέτει ότι ένα εργοστάσιο πυρηνικής ενέργειας, που χτίστηκε σε μια συγκεκριμένη περιοχή, με σαφώς μεγάλο κοστολόγιο κατασκευής, αποτυγχάνει. Αν το κράτος αποφασίσει να επενδύσει στην κατασκευή ενός δεύτερου εργοστασίου, πρέπει η περιοχή αυτή να απορριφθεί και να θεωρηθεί ως κύριος παράγοντας της αποτυχίας; Η απόφαση για να δαπανηθεί το υπέρογκο χρηματικό ποσό που χρειάζεται η κατασκευή ενός πυρηνικού εργοστασίου, σε συνδυασμό με την επιλογή της κατάλληλης περιοχής, αντιλαμβάνεται κανείς πόσο σημαντική είναι. Η άποψη του Howard, μετά από την μελέτη του, πραγματευόταν τους παράγοντες που οδήγησαν το πρώτο εργοστάσιο στην αποτυχία. Πιο αναλυτικά, δεν μπορεί να απορριφθεί η περιοχή με τη δικαιολογία της εμπειρικής πιθανότητας, καθώς για την αποτυχία ενός πυρηνικού εργοστασίου δε μπορεί να ευθύνεται μόνο αυτή. Επίσης, η πιθανότητα δεν μπορεί να θεωρηθεί τυχαία και άρα να κατασκευαστεί στην ίδια περιοχή το εργοστάσιο, θεωρώντας ότι η τοποθεσία δεν επηρέασέ στη πρώτη αποτυχία. Γίνεται έτσι αντιληπτός ο όγκος της μελέτης, που χρειάζεται μια τέτοια απόφαση. Με αυτό το παράδειγμα, ο Howard ήθελε να τονίσει, τη σημαντικότητα λήψης μιας πολύ σοβαρής απόφασης. Γίνεται ακόμα εμφανής, η επιτακτική ανάγκη για την καλή γνώση της θεωρίας των πιθανοτήτων, αφού μια πρόχειρη και εσφαλμένη απόφαση, θα κόστιζε αρκετές χρηματικές μονάδες (Borovcnik & Kapadia, 2018).

Αξίζει να τονιστεί λοιπόν, ότι οι «πιθανοτικές» δεξιότητες που εξοπλίζουν τους μαθητές σχετικά με τη λήψη αποφάσεων, δεν είναι μόνο η γνώση για την ελαχιστοποίηση της αβεβαιότητας. Η θεωρία και οι αποδεικτικές της μέθοδοι, εφοδιάζουν τον διδασκόμενο με μια στρατηγική λογική, που μπορεί να ακολουθεί για να λαμβάνει καθημερινές αποφάσεις (Batanero & Chernoff, 2017). Ακόμα, η εμπειρία με το αντικείμενο των πιθανοτήτων μπορεί να προσδώσει διορατικότητα ελέγχου ενός γεγονότος, σχετικά με την αμεροληψία ή τα τεχνητά συμπεράσματα (Howard, 1988; Kyburg, 1966).

2.4 Μοντελοποίηση της καθημερινότητας

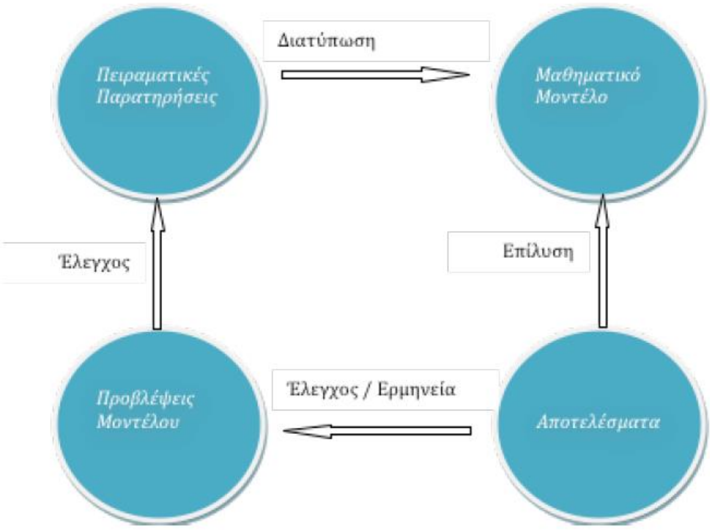
Η αιτία δημιουργίας και εξέλιξης των μαθηματικών, ήταν η περιγραφή και η μελέτη των φαινομένων του φυσικού κόσμου (Wilder, 1986). Η χρήση τους κατά το πέρασμα των αιώνων, φανερώνεται από την ευελιξία τους στην αναπαράσταση των υπό μελέτη φαινομένων με μαθηματικά μοντέλα (Κομηνέας & Χαρμανδάρης, 2016). Η διαδικασία δημιουργίας των μοντέλων αυτών, καθώς και η επεξεργασία τους με διάφορα μαθηματικά εργαλεία, λογίζεται ως μοντελοποίηση (Κομηνέας & Χαρμανδάρης, 2016). Σύμφωνα με τον τρόπο ορισμού της λοιπόν, δικαίως θεωρείται ως ένα από τα βασικά κομμάτια των μαθηματικών (Singer & Sheffield, 2017).

Ο κύριος στόχος της συγκεκριμένης διαδικασίας, δεν είναι άλλος από την επεξήγηση της συμπεριφοράς απλών ή πολύπλοκών συστημάτων μέσω των μαθηματικών (Κομηνέας & Χαρμανδάρης, 2016). Ως συνέπεια αυτού, προκύπτουν επιμέρους στόχοι, που συμβάλουν στην ολοκλήρωση του πρωταρχικού. Πιο συγκεκριμένα, η ανάπτυξη νέων μαθηματικών εργαλείων και η βελτίωση των υποθέσεων ενός μοντέλου είναι μερικοί από αυτούς (Κομηνέας & Χαρμανδάρης, 2016). Γενικά λοιπόν, τα πλεονεκτήματα που η χρήση της μοντελοποίησης έχει εμφανίσει κατά καιρούς, οδηγούν στην ενσωμάτωσή της στη διδασκαλία όλων των βαθμίδων εκπαίδευσης (Czocher, 2016).

Οι πιθανότητες είναι ένα κατεξοχήν εργαλείο των μαθηματικών, που ενδείκνυται για την μοντελοποίηση της πραγματικότητας (Borovcnik & Kapadia, 2018). Ο λόγος, διότι πολλές καθημερινές καταστάσεις τείνουν να είναι στοχαστικές ή ντετερμινιστικές. Έτσι, προτείνεται και επιβάλλεται πολλάκις η χρήση τους στην μοντελοποίηση προβλημάτων που περιλαμβάνουν τυχαιότητα (Soto-Andrade et al., 2018). Όντας λοιπόν, ένας από τους πιο ενδιαφέροντες κλάδους των μαθηματικών σήμερα, η μοντελοποίηση τέτοιων καταστάσεων αποτελεί πόλο έλξης για διάφορους τομείς των επιστημών.

Η μαθηματική σκέψη αναπτύσσεται κατά τη διάρκεια της μαθηματικής μοντελοποίησης (Czocher, 2016). Πολλές μελέτες έχουν αποδείξει την αποτελεσματικότητα της μοντελοποίησης στην νοημοσύνη και την κριτική ικανότητα των μαθητών. Φυσικά, κάθε μοντέλο είναι καλό στο βαθμό που μπορεί να είναι χρήσιμο (Czocher, 2016). Λόγου χάρη, δεν μπορεί ένα συγκεκριμένο μοντέλο να καλύψει πολλές διαφορετικές καταστάσεις. Για το λόγο αυτό, οφείλει να αναπροσαρμόζεται και να επανελέγχεται αν καλύπτει τις προδιαγραφές του εκάστοτε προβλήματος (Κομηνέας & Χαρμανδάρης, 2016).

Τα μαθηματικά μοντέλα συνήθως, αρχίζουν ως πρόχειρες - ακατέργαστες αναπαραστάσεις και στην συνέχεια μέσα από τις ανακατασκευές του μοντέλου και τις προσαρμογές τους στις ανάγκες της εκάστοτε κατάστασης, γίνονται πιο λεπτομερείς (Czocher, 2016). Αυτό επιτυγχάνεται μέσα από τις πολλαπλές επαναλήψεις της διαδικασίας. Γεγονός που ονομάζεται κύκλος της μοντελοποίησης (Czocher, 2016). Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ο κύκλος και η διαδικασία της μοντελοποίησης.



Σχήμα 1: Διαγραμματική περιγραφή της διαδικασίας της μαθηματικής μοντελοποίησης (Κομηνέας & Χαρμανδάρης, 2016).

Αναφορικά λοιπόν με το παραπάνω σχήμα, σύμφωνα με τα δεδομένα των πειραματικών μετρήσεων, ο μαθητής καλείται να κατασκευάσει ένα μαθηματικό μοντέλο. Στην συνέχεια, ελέγχει το μοντέλο του, επιλύοντας το πρόβλημα και αξιολογώντας τις προβλέψεις του. Στην περίπτωση που οι προβλέψεις του συγκεκριμένου μοντέλου είναι ικανοποιητικές, η διαδικασία τελειώνει. Σε διαφορετική περίπτωση, ο μαθητής προχωράει σε επαναπροσδιορισμό του μοντέλου του και επαναλαμβάνει τη διαδικασία (Κομηνέας & Χαρμανδάρης, 2016).

Σε διάφορες έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί στο παρελθόν, υπάρχει μια πεποίθηση, η οποία υποστηρίζει, ότι τα παιδιά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης δεν είναι σε θέση να αναπτύξουν τα δικά τους μοντέλα για σύνθετες καταστάσεις (English & Watson, 2016). Φυσικά, όπως έχει αποδειχθεί και σε πιο πρόσφατες έρευνες, με την κατάλληλη διδασκαλία τα παιδιά μαθαίνουν να αναπτύσσουν δεξιότητες μοντελοποίησης (Czocher, 2016; English & Watson, 2016). Μαθαίνουν να οργανώνουν, να δομούν, να απεικονίζουν και να αντιπροσωπεύουν χαρακτηριστικά διαφόρων καταστάσεων, είτε σύνθετων είτε απλοϊκών (English & Watson, 2016).

Το σημαντικό πλεονέκτημα που λαμβάνει ένας μαθητής προσπαθώντας να μοντελοποιήσει μια κατάσταση είναι η σύνθεση μαθηματικών γνώσεων (Czocher, 2016). Όπως, ορίστηκε η έννοια στην αρχή της συγκεκριμένης παραγράφου, μοντελοποίηση δεν είναι απλώς η αναζήτηση και η αναπαραγωγή του κατάλληλου μοντέλου, αλλά η συνολική διαδικασία μαθηματικοποίησης και επίλυσης ενός προβλήματος. Ιδιαίτερη προσοχή κατά τη διδακτική των μεθόδων μοντελοποίησης πρέπει να δοθεί στην σύγχυση με την προσομοίωση (Borovcnik & Kapadia, 2018). Η σύγχυση των δύο αυτών διαδικασιών, μπορεί να περιορίσει τους νοητικούς ορίζοντες του ατόμου και να «φρενάρει» την ανάπτυξη της πιθανοτικής του σκέψης.

2.5 Συλλογιστική πορεία σκέψης

Η θεωρία των πιθανοτήτων εφοδιάζει με πολλά μη μαθηματικά πλεονεκτήματα τους μαθητές, η χρησιμότητα των οποίων δεν φαίνεται μόνο στην επαγγελματική καθημερινότητα. Βέβαια στη σημερινή κοινωνία, η μη προφανής εφαρμογή μιας διδακτέας ενότητας δημιουργεί πρόβλημα στην εκπαιδευτική διαδικασία. Άλλωστε είναι γενικό φαινόμενο της εποχής, τα παιδιά να μαθαίνουν μόνο ό,τι θεωρούν απαραίτητο στη μελλοντική τους επαγγελματική σταδιοδρομία. Φυσικά όμως, όπως έχει προαναφερθεί, τα οφέλη των μαθηματικών και ειδικότερα των πιθανοτήτων είναι πολλά περισσότερα από την γνώση μερικών κανόνων και θεωρημάτων. Γεγονός, για το οποίο οφείλει να επιμείνει ένας εκπαιδευτικός στην διδαχή τους. Σε αυτά τα οφέλη, έρχεται να προστεθεί και η διαδικασία της «συλλογιστικής».

Με τον όρο «συλλογιστική», δηλώνεται η στρατηγική πορεία που λαμβάνει το μυαλό, προς αντιμετώπιση ενός προβλήματος (Batanero & Chernoff, 2017). Οι μαθηματικές διαδικασίες, οι αλγόριθμοι και οι αποδεικτικές μέθοδοι, οργανώνουν τις άτυπες μορφές των μαθητικών συλλογισμών (Singer & Sheffield, 2017). Η στρατηγική λογική που δημιουργείται λοιπόν, βοηθάει τον διδασκόμενο στην αντιμετώπιση καθημερινών καταστάσεων (Batanero & Chernoff, 2017). Να σημειωθεί ακόμα, ότι η συλλογιστική δεν είναι μόνο απαραίτητη για να φτάσει κανείς στην λύση ενός προβλήματος, αλλά και για να τεκμηριώσει κατάλληλα τις απόψεις του (Forthmann et al., 2016).

Όσον αφορά τις πιθανότητες, η επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής επίλυσης και τεκμηρίωσης, απαιτεί καλή γνώση της θεωρίας. Ο συγκεκριμένος κλάδος των μαθηματικών, φημίζεται για την ευρεία χρήση του στις καθημερινές διαδικασίες. Έτσι, μέσω των γνώσεων των πιθανοτήτων και της μοντελοποίησης διάφορων καθημερινών στοχαστικών καταστάσεων, τα παιδιά μαθαίνουν την λογική πορεία εξέλιξης των ιδεών και της συλλογιστικής (Batanero & Chernoff, 2017). Ουσιαστικά, οι διδασκόμενοι μέσα από τις πιθανότητες μαθαίνουν να εξισορροπούν τη πιθανότητα της απώλειας, με την πιθανότητα της υψηλότερης βαθμολογίας (Engel & Orthwein, 2018). Δηλαδή, να κατασκευάζουν μια συλλογιστική πορεία εξισορρόπησης της πιθανότητας ελαχιστοποίησης του ρίσκου και της αντίστοιχης μεγιστοποίησης του κέρδους.

Η σπουδαιότητα της συλλογιστικής και της απόδειξης, έχει αναγνωριστεί διεθνώς (Harel & Stylianides, 2017). Οι μαθητές συχνά, καθώς σκέφτονται για να δομήσουν μια συλλογιστική πορεία, επηρεάζονται από προγενέστερες γνώσεις, συναισθήματα και φαντασία (Forthmann et al., 2016). Αυτοί οι παράγοντες αποτελούν τροχοπέδη για την ανοικοδόμηση των συλλογιστικών ιδεών των μαθητών. Εν συνέπεια αυτού, δεν επιτυγχάνεται η κατανόηση και η στόχοι της μάθησης (Harel & Stylianides, 2017).

Καταλήγοντας, κρίνεται αναγκαίο να παρουσιαστεί το μοντέλο SOLO. Το μοντέλο αυτό, που ανέπτυξαν οι Biggs και Collins το 1982, φέρει μια γενική περιγραφή των νοητικών επιπέδων συλλογιστικής που άπτεται στο πεδίο της λήψης αποφάσεων και τα ταξινομεί σύμφωνα με τις προδιαγραφές που επιβάλει η νοητική και γνωστική εξέλιξη των διδασκομένων. Η σχέση του SOLO με τη θεωρία των πιθανοτήτων είναι άμεση, αφού η κατηγοριοποίηση εξαρτάτε από τη παρουσία αβεβαιότητας στο γεγονός. Στο πρώτο στάδιο του μοντέλου, οι αποφάσεις λαμβάνονται βάσει της ιδίας εκτιμήσεως του μαθητή. Το στάδιο αυτό, ονομάστηκε ως προ-δομική αντίδραση. Στο επόμενο στάδιο, επονομαζόμενο ως μονο-δομική αντίδραση, οι αποφάσεις λαμβάνονται υπό το πλαίσιο αβεβαιότητας. Έπειτα, στο τρίτο στάδιο, πολύ-δομική αντίδραση, πραγματεύονται αποφάσεις υπό αβεβαιότητα ή υπό την επήρεια κινδύνου. Και τέλος, στο τελευταίο στάδιο, που επικράτησε η ονομασία της σχεσιακής αντίδρασης, πραγματεύεται αποφάσεις υπό αβεβαιότητα και κίνδυνο.

2.6 Ανάπτυξη Κριτικής Ικανότητας

Ένας εκπαιδευτικός, συχνά καλείται να αντιμετωπίσει τις απόψεις του κοινωνικού συνόλου για την χρησιμότητα των διδακτικών κεφαλαίων. Από διάφορες συζητήσεις, μπορεί να προκύψει το συμπέρασμα, ότι η γνώση με την απουσία της άμεσης απήχησης στη καθημερινότητα, είναι περιττή. Τα μαθηματικά, λόγω και της δυσνόητης φύσης τους, θεωρούνται από τα πρώτα μαθήματα που ο μαθητής θεωρεί ανούσια τη διδακτική τους (Wilder, 1986). Είναι όμως γεγονός, ότι η χρήση τους, πολλές φορές είναι πολύ πιο συχνή από την προφανή.

Όπως αναφέρθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, τα μαθηματικά και πιο συγκεκριμένα οι πιθανότητες, για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας, εμφανίζουν άμεσες θετικές επιδράσεις στην συλλογιστική, στην λήψη αποφάσεων, στην μοντελοποίηση κ.ά.. Τα πλεονεκτήματα που προσφέρουν όμως, δεν πραγματεύονται μόνο την εκμάθηση διαδικασιών και μεθόδων, οι οποίες θα βοηθήσουν ένα μαθητή που ακολουθεί ένα βασικό μοντέλο, να οδηγηθεί στη λύση του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, η μαθηματική γνώση, έχει άμεση επίδραση στην ανάπτυξη της κριτικής ικανότητας του διδασκόμενου.

Η γνώση της θεωρίας πιθανοτήτων για παράδειγμα, ωθεί τους πολίτες να ξεπεράσουν τη ντετερμινιστική τους σκέψη (Batanero & Chernoff, 2017). Επιπλέον, η στρατηγική λογική και η λήψη αποφάσεων, αποτελούν καθοριστικούς παράγοντες για τις καθημερινές επαγγελματικές πρακτικές (Batanero & Chernoff, 2017). Γεγονός, που οδηγεί στο ασφαλές συμπέρασμα, ότι αλλάζει ο τρόπος σκέψης των μαθητών. Άμεση κατάληξη αυτού είναι η εμπειρία χειρισμού της θεωρίας, να διευρύνει την πιθανοτική σκέψη και κατά συνέπεια την κριτική ικανότητα.

Οι Borovcnik και Kapadia το 2018, προσπάθησαν να κατηγοριοποιήσουν τα επίπεδα της πιθανολογικής σκέψης και κατέληξαν σε 7 επιμέρους κατηγορίες.

1. Ικανότητα διάκρισης μεταξύ τυχαίας και αιτιώδους συνάφειας.
2. Ικανότητα εξισορρόπησης μεταξύ ψυχολογικών και τυπικών στοιχείων πιθανότητας.
3. Κατανόηση έλλειψης κριτήριων για επιτυχία πιθανότητας.
4. Διάκριση κριτηρίων παρατήρησης μιας τυχαίας κατάστασης, από αυτά που εφαρμόζονται στην επιλογή της απόφασης.
5. Συνειδητοποίηση θεωρητικού χαρακτήρα πιθανότητας.
6. Συνειδητοποίηση της υπό όρους πιθανότητας.
7. Ανάπτυξη εννοιών που δημιουργούν πιθανοτικά στοιχεία.

Σύμφωνα με αυτές λοιπόν, ένας μαθητής οργανώνει τη σκέψη του και συνειδητοποιεί τις ικανότητες που έχει ή χρειάζεται για να επιληφθεί του προβλήματος. Αυτό σημαίνει, ότι από τα βασικά βήματα που πρέπει να ακολουθήσει, είναι να μετατρέπει την αξία μιας κατάστασης σε κλίμακα πιθανότητας από 0 έως 1 (Borovcnik & Kapadia, 2018). Με αυτό το τρόπο, μπορεί να συγκρίνει τις πιθανότητες των δυνατών ενδεχομένων. Να συνδυάζει τις πιθανότητες με τα αξιώματα και να μην υποπίπτει σε παρανοήσεις ή παρερμηνείες (Batanero & Chernoff, 2018). Μεγάλης σημασίας χρήζει ακόμα και η αμφισβήτηση των εικασιών (Langrall, 2018). Η εφαρμογή της θεωρίας αποσκοπεί στην επιβεβαίωση ή στην απόρριψη των επιμέρους εικασιών μέσα από τη σύγκριση των σχέσεων που πηγάζουν από το πρόβλημα. Αυτό συνεπάγεται επίσης, τον αποκλεισμό της θεωρίας από εμπειρικές παρεμβάσεις και έτσι απουσιάζουν τα σημαντικού μεγέθους σφάλματα στον υπολογισμό των πιθανοτήτων (Engel & Orthwein, 2018).

Η ανάπτυξη της κριτικής σκέψης παρουσιάζεται ακόμα και στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Λόγου χάρη, η λογική ερμηνεία ακολουθεί τη συνταγή της λογικής αλήθειας για τις ορθές προτάσεις και τις αιτιολογεί με λογικά επιχειρήματα (Kyburg, 1966). Αντιθέτως, η υποκειμενική ερμηνεία εμπεριέχει προσωπικές απόψεις και οφέλη, παρουσιάζοντας τα γεγονότα με μη αντικειμενικό τρόπο (Kyburg, 1966). Ως συνέπεια αυτού, μπαίνει σε λειτουργεία η κριτική ικανότητα του μαθητή να κατανοήσει την έκβαση των αποτελεσμάτων και να αποφύγει τη παρερμήνευση των δεδομένων μιας υποκειμενικής παρουσίασης (Kyburg, 1966).

2.7 Περαιτέρω πλεονεκτήματα της Θεωρίας

Η οριοθέτηση της προσφοράς των μαθηματικών υπό το πρίσμα ενός καθημερινού πλαισίου, θα ήταν μια χαοτική πρόκληση, ακόμα και για έναν λάτρη της επιστήμης. Στις προηγούμενες παραγράφους, μολονότι αναφέρθηκαν ορισμένες θετικές επιδράσεις των πιθανοτικών γνώσεων στον άνθρωπο, ενδεχομένως να αποτελούσε υποβάθμιση της ιδίας επιστήμης η καθολική ενστέρνιση του ισχυρισμού περί μη ύπαρξης περισσότερων πλεονεκτημάτων.

Το 1975 ο Milton, απαρίθμησε τις απόψεις του για την εισαγωγή των πιθανοτήτων στα πρώιμα στάδια της εκπαίδευσης. Οι μαθηματικές ιδέες και δεξιότητες που αναπτύσσει η θεωρία τους, είναι ένας από τους βασικούς του λόγους. Ακόμα, ο ρόλος που κατέχει η «πιθανότητα» στη σύγχρονη κοινωνία και την αγορά εργασίας, δεν θα μπορούσε να μην συνοδεύσει τους ισχυρισμούς του.

Οι πιθανότητες ενθαρρύνουν τους μαθητές στην εκτέλεση πειραμάτων τύχης (Batanero, 2013). Η προσομοίωση μιας κατάστασης, με την ενεργό συμμέτοχή των μαθητών, τους εφοδιάζει με εμπειρίες τυχαιότητας. Πιο αναλυτικά, η διεξαγωγή πειραμάτων στην τάξη, σε πραγματικό χρόνο, αναπτύσσει τις δεξιότητες της πρόβλεψης, της συζήτησης, της ανάλυσης αποτελεσμάτων, καθώς και του ελέγχου των αρχικών υποθέσεων (Batanero, 2013). Κατά συνέπεια, οι μαθητές κατανοούν καλύτερα τις καθημερινές καταστάσεις και οι δυνατότητες επεξήγησης τους βελτιώνονται (Batanero, 2013; Taylor, 2014). Σημαντικό ακόμα, για το σύνολο της διδακτικής των μαθηματικών, είναι η εξοικείωση με την εκχώρηση αριθμών στα γεγονότα (Taylor, 2014). Μέθοδος, που εφαρμόζεται ευρέως σε διάφορους τομείς των μαθηματικών.

Τέλος, πρέπει να επισημανθεί, ότι οι πιθανότητες, ως ένας από τους πολυσήμαντους μαθηματικούς κλάδους, δύναται να προσδώσει πλεονεκτήματα και σε ερευνητικό επίπεδο. Πιο αναλυτικά, μια πιθανοτική μελέτη, διασφαλίζει την αξιοπιστία μιας έρευνας, αφού μελετάει τα ποσοστά σφάλματος που ενδεχομένως να προκύψουν κατά την επιλογή του δείγματος και σιγουρεύει την ομοιογένεια του δείγματος με τον πληθυσμό (Singh, 2015). Δευτερεύων αποτέλεσμα αυτού, είναι η διεξαγωγή ερευνών με μικρότερο κόστος, μεγαλύτερη αξιοπιστία και σε συντομότερο χρονικό διάστημα (Taylor, 2014).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

3.1 Δομή ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος και Πιθανότητες

Το ελληνικό Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (Π.Ι.) επιχειρεί έναν μακρόπνοο εκπαιδευτικό σχεδιασμό για την υποχρεωτική εκπαίδευση. Ως υποχρεωτική εκπαίδευση στην Ελλάδα λογίζεται το Δημοτικό και το Γυμνάσιο, με συνολική διάρκεια τα εννέα χρόνια. Να σημειωθεί βέβαια, ότι σε αρκετές θεματικές περιοχές, αυτός ο σχεδιασμός επεκτείνεται και στο Νηπιαγωγείο. Ο κύριος λόγος δόμησης του συγκεκριμένου σχεδιασμού, είναι η πεποίθηση, ότι η βάση του εκπαιδευτικού συστήματος οφείλει να είναι αυστηρά δομημένη.

Στόχος του σχεδιασμού και των αναγκαίων αλλαγών, είναι να εκσυγχρονιστούν τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) κατά τρόπο που απαιτεί η σύγχρονη κοινωνία και οι ανάγκες της (ΦΕΚ 303Β, 2013). Πιο συγκεκριμένα, να γίνει καλύτερη κατανομή του εκπαιδευτικού χρόνου και να παραχθεί ένα πιο στοχευμένο στη σημερινή καθημερινότητα εκπαιδευτικό υλικό. Συνεπακόλουθο της ανάγκης για αναβάθμιση των Α.Π.Σ. είναι και η χρεία για μια λύση στην αντιμετώπιση μαθητών με ιδιαίτερες εκπαιδευτικές ανάγκες. Έτσι, το Π.Ι. επεξεργάστηκε ένα Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) για να εισάγει μια ευρεία και διαθεματική προσέγγιση της γνώσης.

Η διαθεματική αυτή προσέγγιση διαφοροποιεί εντέχνως την δομή της διδασκαλίας, αναπροσαρμόζοντας τις παραδοσιακές πρακτικές και τους αντίστοιχους στόχους τους. Υπό το πρίσμα, λοιπόν, της δομής και της οργάνωσης του Δ.Ε.Π.Π.Σ. που ως στόχο έχει θέσει να προωθήσει τη σύνδεση των διάφορων γνωστικών θεμάτων με τις κατάλληλες προεκτάσεις και να αναβαθμίσει την ποιότητα της εκπαίδευσης. Άμεση προϋπόθεση του εν λόγω επιχειρήματος βέβαια, είναι η δημιουργία νέων εποπτικών μέσων και διδακτικών πρακτικών, με γνώμονα τη διαθεματικότητα και την ενίσχυση των μαθητών με δεξιότητες που θεωρούνται αναγκαίες στη σημερινή κοινωνία.

Στο Δ.Ε.Π.Π.Σ λοιπόν, λαμβάνοντας υπόψη τη σημερινή πραγματικότητα του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος (σκοπούς και υλικοτεχνικές υποδομές), προτείνονται λύσεις για τα προβλήματα που πραγματεύονται τόσο την επιλογή, όσο και την οργάνωση της διδακτές ύλης. Επίσης, ορίζονται οι κατευθυντήριες γραμμές της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Γενικά όμως, το σύνολο των σκοπών της εκπαίδευσης, παράλληλα με τις δεξιότητες και τις αξίες που πηγάζουν από αυτούς, προωθούνται μέσα από τα Δ.Ε.Π.Π.Σ και Α.Π.Σ. των εκάστοτε διδακτικών θεμάτων.

Γενικεύοντας, το Α.Π.Σ και το Δ.Ε.Π.Π.Σ. συστήνονται παράλληλα για την διδακτική μιας θεματικής ενότητας. Η πεποίθηση του Π.Ι. ήταν, ότι αυτά τα δύο προγράμματα θα οργάνωναν, θα συμπλήρωναν και θα καθοδηγούσαν την δουλειά ενός εκπαιδευτικού κατά την διδακτική διαδικασία και την προετοιμασία της. Η διδακτικοί στόχοι που απαιτεί μια θεματική ενότητα, το προτεινόμενο χρονικό διάστημα και οι ενδεικτικές διαθεματικές προσεγγίσεις ενός θέματος, δίνουν την δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να προετοιμάσει ένα σύγχρονο μάθημα, άμεσα συνδεδεμένο με τις ανάγκες και τα βιώματα της εποχής. Στη συνέχεια θα αναφερθούν τα βασικά σημεία των Δ.Ε.Π.Π.Σ και Α.Π.Σ. όπως αυτά αναφέρονται στην εφημερίδα της κυβερνήσεως με αριθμό 303/Β/13-3-2003.

Ειδικότερα για στο Δ.Ε.Π.Π.Σ των μαθηματικών, όπου θεωρείτε υψίστης σημασίας για τη συμβολή της προσωπικότητας και της κριτικής σκέψης του μαθητή, επεξεργάζονται ασκήσεις και δραστηριότητες που αναπτύσσουν τη παρατηρητικότητα, τη συγκέντρωση, τη μεθοδική σκέψη και τη δημιουργική φαντασία. Προσόντα, που είναι απαραίτητα εφόδια στη καθημερινή ζωή και στον εργασιακό χώρο. Αναλυτικότερα, το Δ.Ε.Π.Π.Σ των μαθηματικών που ασχολείται με τον κλάδο των πιθανοτήτων αναλύεται παρακάτω.

Οι πιθανοτικές έννοιες εμφανίζονται για πρώτη φορά στο Δ.Ε.Π.Π.Σ μαθηματικών στη Δ τάξη Δημοτικού. Ο γνωστικός άξονας που πραγματεύεται τις πρώτες πιθανοτικές έννοιες είναι περί συλλογής και επεξεργασίας δεδομένων. Οι μαθητές εξασκούνται στη συλλογή και την οργάνωση δεδομένων, καθώς συναντάνε και την έννοια της πιθανότητας. Στη συνέχεια, ο ίδιος γνωστικός άξονας στην Ε Δημοτικού, στοχεύει σε γνώσεις και δεξιότητες όπως η έννοια του διατεταγμένου ζεύγους, η κατασκευή διαφόρων τύπων διαγραμμάτων, η έννοια του μέσου όρου, αλλά και εισαγωγή στην έννοια της «πιθανότητας». Ακόμα, μερικές θεμελιώδης έννοιες που συστήνονται για τη διαθεματικότητα του μαθήματος είναι οι εξής: Μεταβολή, Σύστημα, Άτομο - Σύνολο, Χώρος - Χρόνος, Ομοιότητα - Διαφορά και Πιθανότητα. Τέλος, στην τελευταία τάξη της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης, συνεχίζεται η εξάσκηση στην καταγραφή δεδομένων, την εύρεση του μέσου όρου και στην δημιουργία διαγραμμάτων, αλλά εμπλουτίζονται οι γνώσεις των μαθητών με την κατασκευή πινάκων και την προσπάθεια προβλέψεων. Να αναφερθεί επίσης, ότι προτείνονται οι ίδιες θεματικές περιοχές για την διαθεματικότητα του συγκεκριμένου γνωστικού άξονα.

Στο γυμνάσιο, οι πιθανοτικές έννοιες εμφανίζονται μόνο στη Β΄ και τη Γ΄ γυμνασίου. Στη μικρότερη από της δύο τάξεις, ο εκπαιδευτικός στόχος είναι περισσότερο θεωρητικός, αφού οι γνωσιακές δεξιότητες περιλαμβάνουν την ανάλυση πινάκων και γραφικών παραστάσεων. Ακόμα, συνεχίζεται η συλλογή και η ανάλυση των δεδομένων. Αντιθέτως όμως με τα διαθεματικά θέματα του δημοτικού, εδώ προσαυξάνονται και προτείνονται πιο σύνθετες έννοιες, όπως αλληλεπίδραση, επικοινωνία και μεταβολή.

Στη Γ γυμνασίου, οι γνωστικές απαιτήσεις και οι στόχοι αλλάζουν επίπεδο. Σε αυτή τη τάξη τα παιδιά έρχονται σε επαφή με τη κλασική «Θεωρία Πιθανοτήτων» και ασχολούνται με εφαρμογές και προβλήματα που απαιτούν τη χρήση της. Οι αυστηρότερες έννοιες, όπως αυτές του «Δειγματικού χώρου» και του «Ενδεχομένου», συνοδεύουν τον κλασικό ορισμό της Πιθανότητας και εισάγουν το μαθητή στην ουσία της θεωρίας. Οι ενδεικτικές έννοιες διαθεματικής προσέγγισης που προτείνονται σε αυτό το μαθητικό επίπεδο, είναι το «Σύνολο», η «Επικοινωνία», το «Σύστημα» και η γενική έννοια της «Πιθανότητας».

Στο Α.Π.Σ. για το δημοτικό, με τη διδασκαλία των μαθηματικών επιδιώκονται κάποιοι βασικοί στόχοι. Ενδεικτικά, οι πιο σημαντικοί από αυτούς είναι η απόκτηση βασικών γνώσεων και ικανοτήτων στα μαθηματικά, η εξοικείωση με στοιχειώδης μαθηματικές διαδικασίας και η ανάδειξη της χρησιμότητας των μαθηματικών σε καθημερινά προβλήματα (ΦΕΚ 303Β, 2013). Παρακάτω εμφανίζεται ένας πίνακας προσαρμοσμένος από τα Α.Π.Σ. μαθηματικών του δημοτικού, με τα ήδη των προτεινόμενων δραστηριοτήτων, τη στοχοθεσία και το χρονικό διάστημα που συστήνουν σε θεματικές ενότητες που σχετίζονται με τις πιθανότητες.

Πίνακας 1: Α.Π.Σ Δημοτικού ανά τάξη για Πιθανότητες (ΦΕΚ 303Β, 2013)

Τάξη (χρόνος)	**Θεματικές Ενότητες**	**Στόχοι**	**Είδη Ενδεικτικών δραστηριοτήτων**
Δ΄ Δημοτικού **(5 ώρες)**	Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων	Συλλογή, οργάνωση, ερμηνεία και παρουσίαση ερευνητικών δεδομένων. Ερμηνεία γραφικών παραστάσεων.	Χρήση και ερμηνεία ραβδογραμμάτων και εικονογραμμάτων. Ομαδικές δραστηριότητες για να συλλέξουν και να οργανώσουν τα ερευνητικά δεδομένα. Συγκέντρωση, οργάνωση και παρουσίαση δεδομένων. Ερμηνεία γραφικών παραστάσεων.
Ε΄ Δημοτικού **(5 ώρες)**		Συλλογή, οργάνωση και πινακοποίηση δεδομένων. Μετατροπή προφορικών ή γραπτών περιγραφών δεδομένων σε γραφικές, και αντίστροφα. Να εξοικειωθούν με την έννοια της πιθανότητας. Εύρεση μέσου όρου.	Διερεύνηση ενός προβλήματος καθημερινότητας. Συλλογή δεδομένων και δημιουργία στατιστικών διαγραμμάτων. Πρόβλημα εύρεσης του μέσου όρου.
ΣΤ΄ Δημοτικού **(6 ώρες)**		Συλλογή, οργάνωση, ταξινόμηση και πινακοποίηση δεδομένων. Μετατροπή προφορικών ή γραπτών περιγραφών δεδομένων σε γραφικές, και αντίστροφα. Εύρεση μέσου όρου.	Χρήση «νέων» εννοιών στην τάξη τους και στη καθημερινότητα.

Στο γυμνάσιο από την άλλη, επιδιώκεται η απόκτηση βασικών γνώσεων και ικανοτήτων (ΦΕΚ 303Β, 2013). Η μαθηματική εκπαίδευση σε αυτή τη βαθμίδα, γίνεται πιο αυστηρή και στοχεύετε η σταδιακή εξοικείωση με τη παραγωγή συλλογισμών και αντιμετώπιση προβλημάτων (ΦΕΚ 303Β, 2013). Το πρόβλημα που δημιουργείται στην ηλικία αυτή, είναι η δυσχέρεια καλλιέργειας θετικής στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά. Γεγονός που καλείται να αντιμετωπίσει το Α.Π.Σ. για την εκάστοτε μαθηματική ενότητα.

Πίνακας 2: Α.Π.Σ Γυμνασίου ανά τάξη για Πιθανότητες (ΦΕΚ 303Β, 2013)

Τάξη (χρόνος)	**Θεματικές Ενότητες**	**Στόχοι**	**Είδη Ενδεικτικών δραστηριοτήτων**
Β΄ Γυμνασίου (15 ώρες)	Βασικές έννοιες: Πληθυσμός Δείγμα Γραφικές παραστάσεις Συχνότητες και κατανομή Ομαδοποίηση παρατηρήσεων Μέση τιμή, διάμεσος, διασπορά	Κατανόηση εννοιών και χρησιμότητας διαγραμμάτων. Κατασκευή και ανάλυση διαγραμμάτων και πινάκων. Ομαδοποίηση δεδομένων και κατασκευή διαγράμματος. Εύρεση και χρήση εννοιών σε ασκήσεις.	Άσκηση ανάδειξης της σπουδαιότητας επιλογής αντικειμενικού δείγματος. Άσκηση που οι μαθητές διεξάγουν οι ίδιοι μια στατιστική έρευνα και σχεδιάζουν τα κατάλληλα γραφήματα. Άσκηση εμπνευσμένη από την καθημερινότητα, όπου ζητάτε η Μέση τιμή, η διάμεσος και η διασπορά.
Γ΄ Γυμνασίου (9 ώρες)	Βασικές έννοιες: Σύνολα, Δειγματικός Χώρος, ενδεχόμενα Έννοια της πιθανότητας	Ορισμός Συνόλου και βασικές ιδιότητες και πράξεις θεωρίας συνόλων. Χρήση διαγραμμάτων Venn. Γνώση βασικών εννοιών και εύρεση δειγματικού χώρου. Κατανόηση κλασικού ορισμού και κανόνων Πιθανότητας.	Προβλήματα εύρεσης δειγματικού χώρου και διάφορων ενδεχομένων. Προβλήματα χρήσεις κλασικού ορισμού πιθανότητας από άλλα μαθήματα που έχουν διδαχτεί (π.χ. νόμος του Μέντελ).

Τέλος, συνεχίζοντας στο λύκειο, το οποίο δεν αποτελεί μέρος στη λογιζόμενη ως υποχρεωτική εκπαίδευση, το πρόγραμμα σπουδών κινείται στο ίδιο μήκος κύματος. Όπως τεκμαίρεται από το πρόγραμμα σπουδών της Α΄ Λυκείου, θέτει ως πρωταρχικό στόχο την ολοκλήρωση της μαθηματικής εκπαίδευσης των διδασκομένων σε σχέση με τις προγενέστερες προσφερόμενες γνώσεις, που έλαβαν τα προηγούμενα μαθητικά τους χρόνια. Στο κομμάτι των Πιθανοτήτων, όπου οι μαθητές έχουν έρθει ήδη σε επαφή με της περισσότερες πιθανοτικές έννοιες, αποσκοπείτε η τελειοποίηση της εκμάθησης του λογισμού των Πιθανοτήτων με τη χρήση της θεωρίας Συνόλων και του κλασικού ορισμού της Πιθανότητας. Ενδεικτικά, παρουσιάζεται ο παρακάτω πίνακας με το πρόγραμμα σπουδών της Α΄- Γ΄ Λυκείου κατά τη χρονική διάρκεια 2011 έως 2016, καθώς από το 2017 και έπειτα, οι Πιθανότητες αφαιρέθηκαν από το πρόγραμμα σπουδών της Α΄τάξης (ΦΕΚ 1168Β, 2011).

Πίνακας 3: Α.Π.Σ Α Λυκείου για Πιθανότητες (ΦΕΚ 1168Β, 2011)

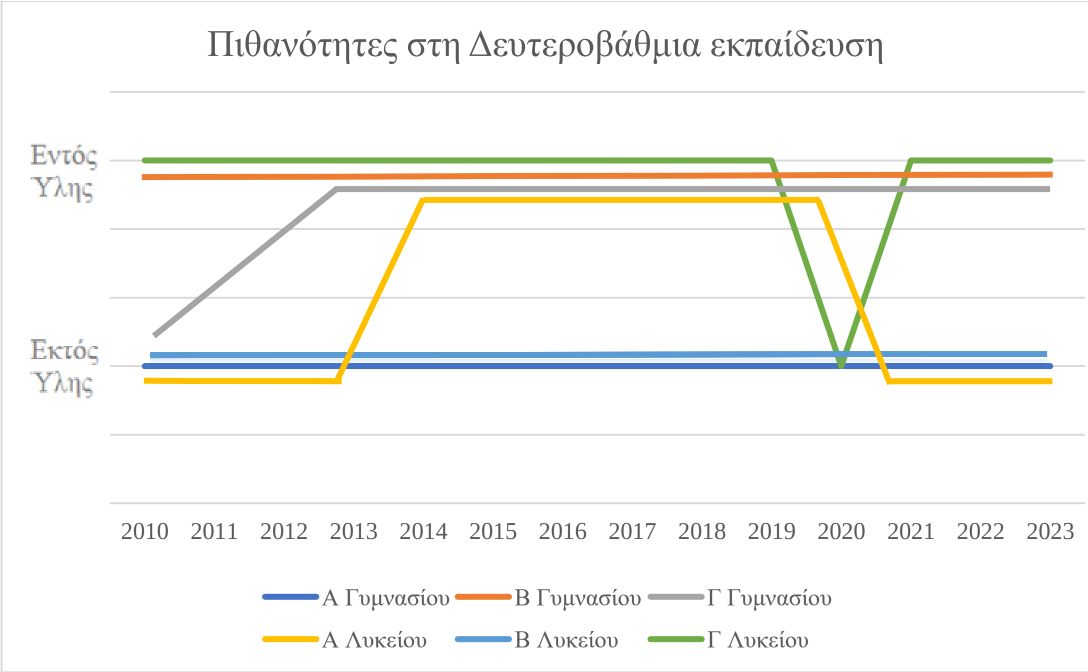
Τάξη (χρόνος)	**Θεματικές Ενότητες**	**Στόχοι**	**Είδη Ενδεικτικών δραστηριοτήτων**
Α΄ Λυκείου **(6 ώρες)**	Δειγματικός χώρος και ενδεχόμενα. Η έννοια της Πιθανότητας.	Αναγνώριση πειραμάτων τύχης. Προσδιορισμός Δειγματικού χώρου με διάφορους τρόπους. Μετάφραση γλώσσας ενδεχομένων σε φυσική και αντίστροφα. Επίλυση προβλημάτων με κλασικό ορισμό. Κατανόηση και χρήση κανόνων λογισμού Πιθανοτήτων	Ασκήσεις διαχωρισμού των πειραμάτων σε είδη. Ασκήσεις μετάφρασης μαθηματική και φυσική γλώσσα. Ασκήσεις με δεντροδιαγράμματα και άλλους τρόπους εύρεσης Δειγματικού χώρου. Ασκήσεις με κλασικό ορισμό. Ασκήσεις με κανόνες λογισμού.

3.2 Πρότυπα και προσδοκίες μάθησης στην Ελλάδα τα τελευταία χρόνια

Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα στην αρχή κάθε σχολικού έτους το Υ.Π.Θ. (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων) γνωστοποιεί στα σχολεία και στις επιμέρους περιφερειακές διευθύνσεις την ύλη κάθε μαθήματος, που θεωρείται ως διδακτέα για τη δεδομένη σχολική χρονιά. Γενικά, κατά την πάροδο των χρόνων, δεν υπάρχουν πολλές και ουσιαστικές μεταβολές στη διδακτέα ύλη των μαθηματικών, όπως αυτό προκύπτει από την ανάλυση των αντίστοιχων ΦΕΚ.

Παρακάτω, φαίνεται ένα διάγραμμα το οποίο έχει προσαρμοστεί σύμφωνα με τη μελέτη των κατάλληλων ΦΕΚ από το 2010 έως και το 2023. Η λέξη «ύλη» που αναφέρεται στο διάγραμμα για την εκάστοτε τάξη, αποτελεί την ύλη και τους επιμέρους στόχους που αναγράφονται στα αντίστοιχα Α.Π.Σ. και σχετίζονται με τις Πιθανότητες. Στο γράφημα αυτό λοιπόν, ξεχωρίζουν οι χρονικές περίοδοι που οι Πιθανότητες ή οι πιθανοτικές έννοιες, αποτελούσαν διδακτέα ύλη για την αντίστοιχη σχολική χρονιά. Σκοπός του συγκεκριμένου διαγράμματος είναι να δείξει την εξέλιξη της ύλης που σχετίζεται με τις Πιθανότητες τα τελευταία χρόνια.

Αναλυτικότερα, οι εγκύκλιοι - αποφάσεις του Ενιαίου Διοικητικού Τομέα Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και της Διεύθυνσης Σπουδών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης που χρησιμοποιήθηκαν για τη κατασκευή του εν λόγω διαγράμματος, είναι κατά χρονολογική σειρά οι εξής: 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021 και 2022. Όπως επίσης και τα ΦΕΚ με αριθμούς 1168Β/8-6-2011 και 3411/10-8-2018.



Διάγραμμα 3.1: Εξέλιξη της ύλης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση

Κατά συνέπεια, όπως φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα, αναγράφονται όλες οι τάξεις της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος και οι χρονικές περίοδοι που η κάθε μία πραγματεύτηκε ύλη σχετική με τις Πιθανότητες. Όπως παρατηρεί κανείς, από το 2010 και έπειτα, μόνο στη Β΄ Γυμνασίου και στη Γ΄ Λυκείου οι Πιθανότητες ήταν αναπόσπαστο κομμάτι της σχολικής διδακτέας ύλης. Αντιθέτως, στις τάξεις Α΄ Γυμνασίου και Β΄ Λυκείου, δεν υπήρξε ποτέ όλα αυτά τα χρόνια σχετική ύλη. Στη Γ΄ Γυμνασίου, από το 2011 και έπειτα η ύλη των Πιθανοτήτων έχει εισχωρήσει στη διδακτέα, ενώ στη Α΄ Λυκείου φαίνεται για ένα χρονικό διάστημα να είναι εντός της ύλης, αλλά να καταλήγει το 2017 να αποστασιοποιείται. Σημαντικό ακόμα είναι, ότι στην Γ τάξη του λυκείου από το 2021 και έπειτα, μόνο τα παιδιά της θεωρητικής κατεύθυνσης διδάσκονται Στατιστική και Πιθανότητες.

Κλείνοντας την παρούσα παράγραφο, έχει δομηθεί ένας πίνακας με βάση την εγκύκλιο του Ενιαίου Διοικητικού Τομέα Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και της Διεύθυνσης Σπουδών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης για το σχολικό έτος 2018-2019 και το ΦΕΚ 3411/10-8-2018.

Πίνακας 4: Πιθανότητες και προσδοκίες διδαχής τους ανά τάξη σύμφωνα με τις ύλες του Π.Ι. για το διδακτικό έτος 2018-2019

Πιθανότητες και προσδοκίες διδαχής τους ανά τάξη.	**Τάξεις**								
	Δ΄ Δημ.	**Ε΄ Δημ.**	**ΣΤ΄ Δημ.**	**Α΄ Γυμν.**	**Β΄ Γυμν.**	**Γ΄ Γυμν.**	**Α΄ Λυκ.**	**Β΄ Λυκ.**	**Γ΄ Λυκ.**
Εξερεύνηση εννοιών Πιθανότητας	✓	✓	✓		✓	✓			✓
Μοντελοποίηση καταστάσεων		✓	✓		✓	✓			✓
Δειγματικός χώρος και προσδιορισμός πιθανοτήτων						✓			✓
Εκτιμήσεις πιθανότητας						✓			✓
Προβλέψεις						✓			✓
Εκτίμηση για τη χρήση της πιθανότητας στον πραγματικό κόσμο						✓			✓
Γεγονότα ως πιθανά, βέβαια, απίθανα, ισοπίθανα και αδύνατα						✓			✓
Πιθανότητα αποτελεσμάτων απλών πειραμάτων						✓			✓
Το μέτρο της πιθανότητας ενός γεγονότος αντιπροσωπεύεται από έναν αριθμό από 0 έως 1						✓			✓
Ορολογία για συμπληρωματικά και αμοιβαία αποκλειστικά γεγονότα									✓
Πιθανότητα αποτελεσμάτων σύνθετων πειραμάτων									✓
Υπολογισμός πιθανότητας χρησιμοποιώντας μοντέλα όπως διαγράμματα δέντρων και άλλα						✓			✓
Συχνότητα και σχετική συχνότητα									✓

Αυτό που ξεχωρίζει στο παραπάνω πίνακα είναι, ότι οι Πιθανότητες δεν εμφανίζονται ως σημαντικός τομέας της μαθηματικής εκπαίδευσης στις μικρότερες σχολικές τάξεις. Η δόμηση των βασικών εννοιών και διαδικασιών τους ξεκινάει από τη Δ΄ Δημοτικού, ωστόσο η θεμελίωση όλων των διδακτικών προσδοκιών του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος έρχεται στη Γ΄ τάξη του Λυκείου. Επίσης, αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η διδαχή των Πιθανοτήτων στις τάξεις Α΄ και Β΄ Λυκείου, την τελευταία σχολική χρονιά, δεν αποτέλεσαν μέρος της διδακτέας ύλης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $4^{Ο}$: ΔΙΕΘΝΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Με τη χρησιμότητα των πιθανοτήτων να αναδεικνύεται μέσα από πολλές καθημερινές εφαρμογές και πρακτικές, είναι αναμενόμενη η παρουσία τους στα προγράμματα σπουδών πολλών αναπτυσσόμενων χωρών. Η εισαγωγή βασικής ορολογίας έχει τις ρίζες της, στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση και κορυφώνεται στα πλαίσια της Δευτεροβάθμιας και Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης (Batanero et al., 2016).

Το παρόν κεφάλαιο, στόχο έχει να αναλύσει το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, στα εκπαιδευτικά συστήματα της Σιγκαπούρης και της Ολλανδίας. Επίσης παρουσιάζονται οι συνήθειες που ακολουθούν οι χώρες αυτές, στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών σχετικά με τον κλάδο των Πιθανοτήτων. Ο λόγος επιλογής των συγκεκριμένων χωρών, καθίσταται η υψηλή επίδοση των μαθητών της Σιγκαπούρης στις τελευταίες έρευνες των PISA και TIMSS, όπου συνηθίζει να βρίσκεται στην κορυφαία τριάδα (Gurría, 2018; Mullis et al., 2015; Wang & Lu, 2018), και ο εναλλακτικός τρόπος προσέγγισης της μάθησης στα σχολεία της Ολλανδίας λόγω της διαδραστικότητας που εμφανίζει ($8^{η}$ στην επίδοση Μαθηματικών του PISA 2018). Τα πρότυπα αυτών των δύο χωρών, έχουν ορισμένα χαρακτηριστικά τα οποία χρήζουν σημαντικότητας και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για συγκριτική αξιολόγηση με χαρακτηριστικά συστημάτων άλλων χωρών (Ginsburg, & Leinwand, 2005).

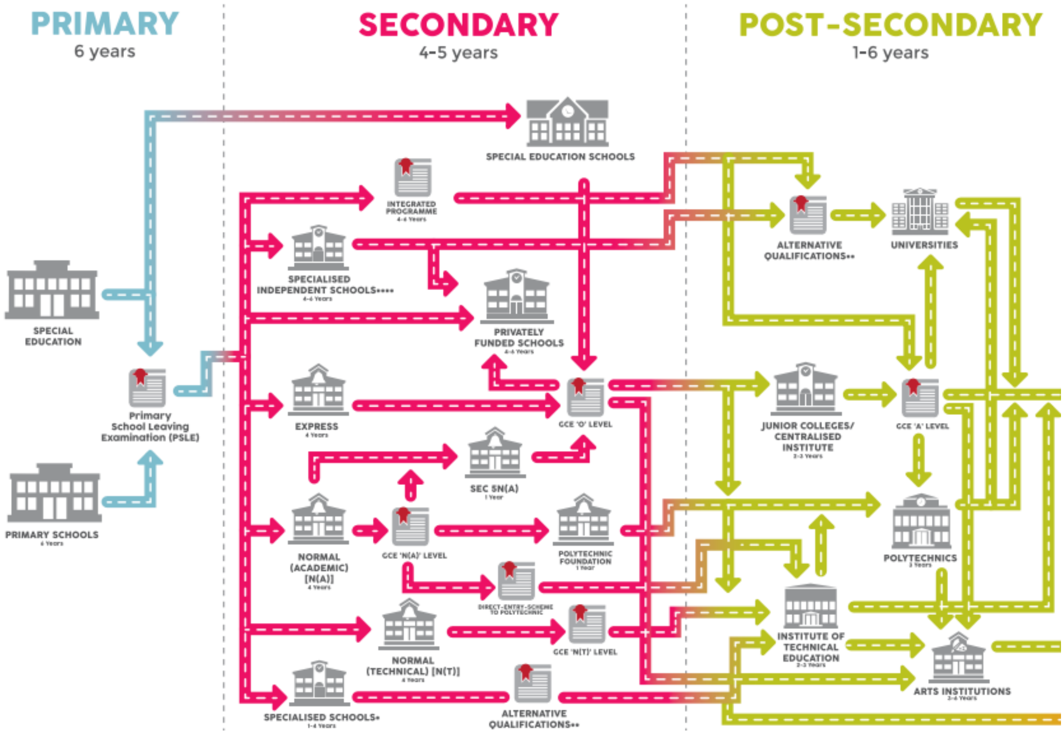
Τα αποτελέσματα των διεθνών συγκριτικών μελετών, όπως το PISA και το TIMSS, προσελκύουν κατά καιρούς το ενδιαφέρον μεγάλου αριθμού ερευνητών. Ο λόγος, είναι ότι αυτοί οι οργανισμοί δεν αποτελούν απλά έναν τρόπο ελέγχου του αντικατοπτρισμού της σχολικής γνώσης στην σχολική απόδοση, αλλά αποτελούν και μια εξαιρετική ατομική δοκιμή επίλυσης προβλημάτων για τον εκάστοτε μαθητή (Flores-Mendoza et al., 2018). Κατά συνέπεια, σήμερα διεξάγονται πολλαπλές μελέτες που συγκρίνουν το μαθηματικό περιεχόμενο στα προγράμματα σπουδών μεταξύ των χωρών, καθώς και τα εποπτικά μέσα που χρησιμοποιούνται κατά τη διδακτική διαδικασία (Kaur & Pereira-Mendoza, 2000; Safrudiannur & Rott, 2018). Μια σύγκριση, που φυσικά έχει περισσότερο νόημα να γίνεται με χώρες που πετυχαίνουν στα προγράμματα υψηλές επιδώσεις (Gurría, 2018; Mullis et al., 2015).

4.1 Εκπαιδευτικό σύστημα Σιγκαπούρης και Μαθηματικά

Η Σιγκαπούρη είναι μια μικρή χώρα, που απαρτίζεται από 5.703.600 κάτοικους, σύμφωνα με τις επίσημες εκτιμήσεις το 2019 ("Population and Population Structure - Latest Data", 2020). Παρόλο το πληθυσμό της, καταφέρνει συχνά να ξεχωρίζει με τις επιδώσεις των μαθητών της στα μαθηματικά και γενικότερα τις θετικές επιστήμες. Αυτό γίνεται φανερό από τα αποτελέσματα των διεθνών συγκριτικών μελετών PISA και TIMSS (Gurría, 2018; Mullis et al., 2015; Wang & Lu, 2018). Το εκπαιδευτικό της σύστημα, όπως και τα συστήματα πολλών ασιατικών χωρών, έχουν ισχυροποιηθεί και προσαρμοστεί στις απαιτήσεις μιας όλο και περισσότερο παγκοσμιοποιημένης κοινωνίας (Wang & Lu, 2018). Βέβαια να σημειωθεί, όπως από πολλούς ερευνητές υποστηρίζεται, ότι ο μικρός πληθυσμός της Σιγκαπούρης επιτρέπει την ανάπτυξη ενός ευέλικτου και ισχυρού προγράμματος σπουδών (Ginsburg, & Leinwand, 2005).

Η εκπαίδευση κατέχει έναν εξέχοντα ρόλο για τους πολίτες της Σιγκαπούρης και θεωρείται κρίσιμη για την επιβίωση της χώρας τόσο σε οικονομικό, όσο και σε κοινωνικό επίπεδο (Kaur & Har, 2009). Η γενική τάση που επικρατεί, πραγματεύεται τη παροχή γνώσεων και την απόκτηση δεξιοτήτων με άμεσο αντίκτυπο την καθημερινότητα (Erbilgin, 2017; Kaur & Har, 2009). Επακόλουθο αυτού, είναι η ιδιαίτερη έμφαση στη διδασκαλία των μαθηματικών, αφού η αλγοριθμική σκέψη και οι διαδικασίες ταξινόμησης, σύγκρισης, αφαίρεσης, ανάλυσης, σύνθεσης και χρήσης ποικίλων στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων είναι αποτέλεσμα μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων (Erbilgin, 2017).

Τα παιδία της χώρας, λαμβάνουν τουλάχιστον 10 χρόνια γενικής υποχρεωτικής εκπαίδευσης ("Education System", 2020). Πιο αναλυτικά, αποτελείται από 6 χρόνια Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, 4 με 5 χρόνια στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση και έπειτα οι μαθητές εισάγονται στην Τριτοβάθμια εκπαίδευση (Toprak & Özmantar, 2019). Αυτό που είναι σημαντικό να αναφερθεί, είναι, ότι εν σύγκριση με άλλες χώρες, στη Σιγκαπούρη οι μαθητές καλούνται να ολοκληρώσουν επιτυχώς απολυτήριες εξετάσεις σε διάφορα μαθήματα που διδάχτηκαν για να μεταβούν από την Πρωτοβάθμια στην Δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Ginsburg, & Leinwand, 2005; Safrudiannur & Rott, 2018). Επίσης, υπάρχουν 5 διαφορετικά προγράμματα σπουδών στη δευτεροβάθμια, τα οποία δομούνται σύμφωνα με τα ενδιαφέροντα των μαθητών και τους μελλοντικούς επαγγελματικούς στόχους τους (MOE, 2019). Με άλλα λόγια, οι μαθητές επιλέγουν το είδος του σχολείου που θέλουν να ακολουθήσουν στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση μεταξύ των επιλογών: α) γυμνάσιο ειδικής εκπαίδευσης (για τους μαθητές με ιδιαίτερες μαθησιακές ανάγκες), β) ανεξάρτητο γυμνάσιο, γ) ταχύρρυθμο γυμνάσιο, δ) κανονικό γυμνάσιο και ε) ειδικευμένο γυμνάσιο.



Εικόνα 1: Εκπαιδευτικό σύστημα Σιγκαπούρης (MOE, 2015)

Η δομή του εκπαιδευτικού συστήματος, δίνει ευκαιρίες στους μαθητές να ανακαλύψουν τα ταλέντα τους και να αναπτύξουν μια αέναη σχέση με τη δια βίου μάθηση (Kaur et al., 2012; Koh, 2000). Αυτό, σε συνδυασμό με την ανάπτυξη κρητικής σκέψης και δεξιοτήτων, είναι από τους κύριους στόχους του συστήματος (Badger, 2013; Koh, 2000; Lee, 2018). Το Γραφείο Εκπαιδευτικής Έρευνας χρηματοδοτεί από το 2002 έρευνες προς ενημέρωση της πολιτικής και των διδακτικών πρακτικών, ώστε να βελτιωθεί η εκπαίδευση στη Σιγκαπούρη (Chen & Mu 2010; Kaur et al., 2012). Επίσης, οι εκπαιδευτικοί έχουν αρκετά πλεονεκτήματα και υποχρεώσεις προς απόκτηση διδακτικής εμπειρίας και διδακτικής επάρκειας. Λόγου χάρη, η κυβέρνηση της Σιγκαπούρης προσφέρει ένα ανταγωνιστικό πακέτο αποδοχών και όρων απασχόλησης, που στόχο έχει να προσελκύσει επαγγελματίες του κλάδου και να προσδώσει μεγαλύτερο κύρος στην εκπαίδευση (Meelissen & Punter, 2015). Επίσης, όλοι δικαιούνται 100 διδακτικές ώρες κάθε χρόνο για να παρακολουθούν τις τρέχουσες παιδαγωγικές εξελίξεις και να αναπτύξουν νέες δεξιότητες, (Badger, 2013; Chen & Mu, 2010; Kaur et al., 2012; Meelissen & Punter, 2015). Οι ώρες αυτές, πληρώνονται στους εκπαιδευτικούς και η παρακολούθηση τους είναι υποχρεωτική (Ginsburg & Leinwand, 2005; Meelissen & Punter, 2015). Ωστόσο, η πρόσληψη στο σχολείο εκπαίδευσης πραγματοποιείται έπειτα από την επιτυχία σε μια αυστηρή εξέταση εισόδου, αποτελούμενη από γραπτό διαγωνισμό και συνέντευξη. Ακόμα, καλούνται να ολοκληρώσουν πρακτική άσκηση τουλάχιστον 10 εβδομάδων, κατά την οποία ελέγχονται και αξιολογούνται σε σχέση με τις ικανότητες τους (Meelissen & Punter, 2015). Γεγονός που καταρτίζει ένα υψηλό επίπεδο γνώσης για τους διορισμένους εκπαιδευτικούς (Ginsburg & Leinwand, 2005; Wong et al., 2014).

Τα Μαθηματικά είναι ένα υποχρεωτικό μάθημα σε όλες τις τάξεις και τις βαθμίδες εκπαίδευσης (Kaur et al., 2012). Ο σχεδιασμός του προγράμματος σπουδών τους, ακολουθεί μια σπειροειδής προσέγγιση σε όλες της εκπαιδευτικές βαθμίδες και ως αποτέλεσμα αυτού δίνονται ευκαιρίες σε όλους τους μαθητές να μάθουν ανεξάρτητα από το μαθησιακό τους επίπεδο (Ginsburg, & Leinwand, 2005; Lee, 2018; Toprak & Özmantar, 2019). Φαίνεται λοιπόν, το πρόγραμμα μαθηματικών της Σιγκαπούρης να είναι εστιασμένο, προοδευτικό και οργανωμένο στη μάθηση του συνόλου των μαθητών (Lee & Smith, 2011).

Το τρέχον πρόγραμμα ξεκίνησε τη διδασκαλία των μαθηματικών το 2013 και αναθεωρείται κάθε 6 χρόνια (Toprak & Özmantar, 2019). Εκ τότε, το Υπουργείο Παιδείας της χώρας, έχει δημοσιεύσει ένα πρόγραμμα σπουδών για τα μαθηματικά, με τους πιο σημαντικούς διδακτικούς στόχους να ξεχωρίζουν παρακάτω (Badger, 2013; Kaur et al., 2012; Safrudiannur & Rott, 2018):

1. Απόκτηση απαραίτητων μαθηματικών δεξιοτήτων για την καθημερινή ζωή.
2. Ανάπτυξη των απαραίτητων δεξιοτήτων επεξεργασίας για την απόκτηση και εφαρμογή μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων.
3. Ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης και επίλυση προβλημάτων.
4. Ανάπτυξη θετικών στάσεων απέναντι στα μαθηματικά.
5. Αναγνώριση σύνδεσης μαθηματικών εννοιών με διάφορους κλάδους της επιστήμης.
6. Αποτελεσματική χρήση ποικίλων μαθηματικών εργαλείων.
7. Ανάπτυξη ικανοτήτων λογικής και αιτιολόγησης.

Στις πρώτες τάξεις της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, περίπου το 20% του σχολικού προγράμματος είναι αφιερωμένο στα μαθηματικά (Kaur et al., 2012). Η πεποίθηση του συγκεκριμένου σχεδιασμού, οφείλεται στην προσπάθεια δημιουργίας ενός ισχυρού θεμέλιου μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων για να υποστηρίξουν την περαιτέρω μάθηση των μεταγενέστερων χρόνων (Ginsburg & Leinwand, 2005; Kaur et al., 2012; Toprak & Özmantar, 2019). Ακόμα, πλεονέκτημα αποτελεί η παροχή ευελιξίας στα σχολεία για την εφαρμογή του προγράμματος σπουδών (Kaur et al., 2012). Συνέπεια αυτού είναι η αποτελεσματικότερη κάλυψη μαθησιακών αναγκών για τον εκάστοτε μαθητή. Στο δευτεροβάθμιο επίπεδο, υπάρχουν 7 διαφορετικά προγράμματα σπουδών, τα οποία χωρίζονται σύμφωνα με την κατεύθυνση που επιθυμούν να ακολουθήσουν οι μαθητές στη Τριτοβάθμια εκπαίδευση ("Education System", 2020). Αξίζει να προστεθεί ακόμα, ότι έχουν προβλεφθεί προγράμματα για την υποστήριξη τόσο των μαθητών αργής προόδου, όσο και εκείνων που εμφανίζει ιδιαίτερες μαθηματικές δεξιότητες (Kaur et al., 2012; Toprak & Özmantar, 2019).

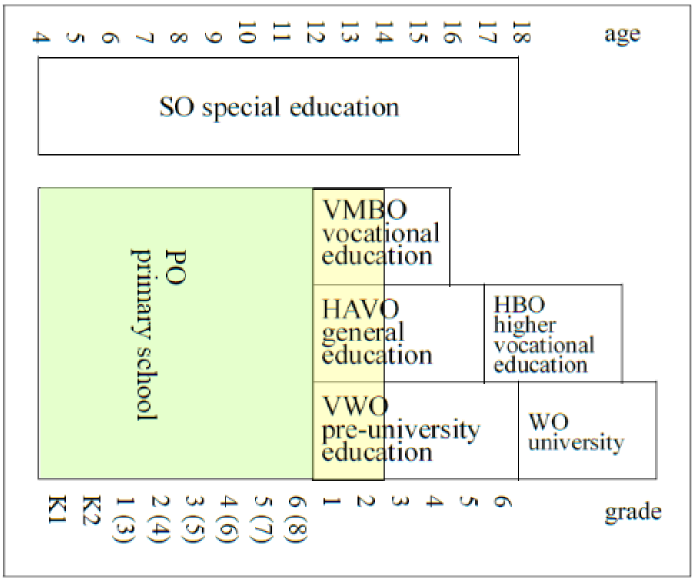
Ως κύριο εποπτικό μέσο χρησιμοποιείται το σχολικό εγχειρίδιο (Kaur, 2010). Ωστόσο, δεν λανσάρεται από το κράτος κάποιος συγκεκριμένος εκδοτικός οίκος. Κάθε χρόνο το Υπουργείο Παιδείας της Σιγκαπούρης δημοσιεύει έναν κατάλογο προτεινόμενων βιβλίων και παρέχει μια λίστα με τα σχολεία ανάλογα με τις ανάγκες τους (Toprak & Özmantar, 2019). Υπάρχουν πέντε διαφορετικές σειρές βιβλίων και συχνά ο εκάστοτε εκπαιδευτικός μπορεί να επιλέξει (Toprak & Özmantar, 2019). Να σημειωθεί όμως, ότι οι μαθητές καλούνται να αγοράσουν το βιβλίο που θα τους υποδείξει ο δάσκαλος και παρέχεται οικονομική υποστήριξη στις οικογένειες που αδυνατούν να υποστηρίξουν την συγκεκριμένη ενέργεια (Toprak & Özmantar, 2019).

Η θέση της Σιγκαπούρης στους τελευταίους διαγωνισμούς TIMSS (2015) και PISA (OECD, 2019), έχει θέση το εκπαιδευτικό σύστημα και τα εγχειρίδια της, ως πρότυπο για πολλές χώρες. Πολλές μελέτες έχουν πραγματοποιηθεί κατά καιρούς, τόσο για να πραγματευτούν μια διεξοδική ανάλυση περιεχομένου των μαθηματικών βιβλίων της Σιγκαπούρης, όσο και για να συγκριθούν με αντίστοιχα βιβλία άλλων χωρών. Τα αποτελέσματα αυτών των μελετών έχουν καταλήξει στο συμπέρασμα ότι τα βιβλία της Σιγκαπούρης δίνουν μεγάλο βάρος στην επίλυση προβλημάτων (Badger, 2013; Chan, 2009; Kaur & Har, 2009; Kaur et al., 2012; Safrudiannur & Rott, 2018). Γενικά, υπάρχει ισορροπία στη παρουσία ανοικτών και κλειστών προβλημάτων, ωστόσο σημαντικό είναι ότι αυτά στη πλειοψηφία τους, είναι συνδυαστικών κεφαλαίων και εμφανίζουν άμεση συσχέτιση με την μοντελοποίηση καθημερινών ζητημάτων (Cai et al., 2011; Kaur & Har, 2009; Toprak & Özmantar, 2019; Yang et al., 2017). Οι ασκήσεις και οι ερωτήσεις απαιτούν υψηλό επίπεδο γνωσιακής ζήτησης, με ιδιαίτερα επιστημονικό λεξιλόγιο για την εκάστοτε ηλικιακή βαθμίδα (Ginsburg, & Leinwand, 2005; Toprak & Özmantar, 2019; Yang & Sianturi, 2019). Ακόμα, ιδιαίτερο χαρακτηριστικό γνώρισμα αποτελούν οι πολλαπλές αναπαραστάσεις και οι γραφικές εικόνες. Χαρακτηρίζονται από ευκολότερη εσωτερική οργάνωση σε σύγκριση με άλλα σχολικά βιβλία, καθώς υπάρχει χαμηλή πυκνότητα κειμένου και περισσότερη χρήση οπτικών μέσων (Erbaş et al., 2012). Η παρουσία τόσο λεκτικών, όσο και οπτικών αναπαραστάσεων συμβάλλουν στη δημιουργία ενός φιλικού προς τον αναγνώστη βιβλίου, υπό το φόντο της ευκολότερης κατανόησης των διδασκόμενων εννοιών (Badger, 2013; Cai et al., 2011; Erbaş et al., 2012; Safrudiannur, & Rott, 2018; Toprak & Özmantar, 2019; Yang et al., 2017). Βέβαια σημειώνεται, ότι τα βιβλία κάποιων βαθμίδων στερούνταν ερωτημάτων για την ενθάρρυνση της αξιολόγησης γενικών παραδειγμάτων και εμπειρικών μεθόδων για τη καλλιέργεια της μνήμης (Badger, 2013; Toprak & Özmantar, 2019).

4.2 Εκπαιδευτικό σύστημα Ολλανδίας και Μαθηματικά

Η Ολλανδία είναι μια από τις αναπτυσσόμενες Ευρωπαϊκές χώρες με πληθυσμό 17.125.844 κατοίκους (Ευρωπαϊκή Στατιστική Υπηρεσία, 2020). Οι επιδώσεις των μαθητών της, στα διεθνή προγράμματα PISA και TIMSS στην τελευταία περίοδο διεξαγωγής τους, δεν κρίνονται ικανοποιητικές (26η και 19η θέση αντίστοιχα, σύμφωνα με τα επίσημα στατιστικά του OECD (2018) και του TIMSS (2015)), ωστόσο η δομή του προγράμματος σπουδών των Μαθηματικών και η προσέγγιση της διδασκαλίας τους, παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον σε πολλούς μελετητές.

Το εκπαιδευτικό σύστημα της Ολλανδίας αποτελείται από μια δωδεκάχρονη υποχρεωτική εκπαίδευση (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Η φοίτηση των μαθητών ξεκινάει συνήθως, έπειτα από τη συμπλήρωση του 4ου έτους της ηλικίας τους και περιλαμβάνει φοίτηση 2 χρόνων στο νηπιαγωγείο, με το πρώτο από αυτά τα χρόνια να μην θεωρείται υποχρεωτική εκπαίδευση (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Έπειτα από την ολοκλήρωση του Δημοτικού σχολείου, οι μαθητές προχωράνε με προαιρετικές εξετάσεις στο Γυμνάσιο. Εκεί, έχουν τρεις διαφορετικές επιλογές φοίτησης. Πιο συγκεκριμένα, την προ-επαγγελματική εκπαίδευση που προετοιμάζει τους μαθητές για την επαγγελματική εκπαίδευση, τη γενική εκπαίδευση που προετοιμάζει τους μαθητές για την ανώτερη επαγγελματική εκπαίδευση και την ενιαία εκπαίδευση που ακολουθούν όσοι επιθυμούν να εισαχθούν στο Πανεπιστήμιο (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Οποιαδήποτε επιλογή και να ακολουθήσουν οι μαθητές στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, οφείλουν να διανύσουν ένα προσαρμοστικό στάδιο 2 ετών. Η φάση αυτή, ονομάζεται «Βασική Δευτερεύουσα Εκπαίδευση» και έχει σημαντικό ρόλο στη γενική εκπαιδευτική πορεία των μαθητών (Lerman, 2014; Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Η δομή του εκπαιδευτικού συστήματος της Ολλανδίας, δίνει ευκαιρίες και στους μαθητές με ιδιαιτερότητες, καθώς παράλληλα με το παραπάνω σύστημα εκπαίδευσης, υπάρχει ανεξάρτητα από αυτό, ένα σκέλος για τους μαθητές που χρήζουν ειδικής εκπαίδευσης (Lerman, 2014; Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Τέλος, η τριτοβάθμια εκπαίδευση της χώρας, αποτελείται από Πανεπιστήμια και Ινστιτούτα ανώτερης επαγγελματικής εκπαίδευσης (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005).



Εικόνα 2: Εκπαιδευτικό σύστημα Ολλανδίας (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005).

Η φιλοσοφία ολόκληρου του εκπαιδευτικού συστήματος σήμερα, βασίζεται πάνω στη διδακτική των μαθηματικών. Η ιστορία για την καθολική επιρροή του συστήματος από τα μαθηματικά, έχει να αναφέρει την μεγάλη συμβολή του Ολλανδού μαθηματικού Hans Freudenthal και την εισαγωγή της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης (Realistic Mathematics Education ή RME) (Gravemeijer & Terwel, 2000; Lerman, 2014; Van den Heuvel-Panhuizen, 2000; Van den Heuvel-Panhuizen, 2019; Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Ο Freudenthal και οι συνάδελφοί του τοποθέτησαν τα θεμέλια της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης το 1970 (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Λίγο αργότερα το 1987, ο Adri Treffers και η συγγραφική του ομάδα, ήρθαν να περιγράψουν λεπτομερώς τις αρχές της εκπαίδευσης του Freudenthal και έγραψαν μια σειρά βιβλίων, γνωστή στην αγορά ως «Proeve», με την οποία ενισχύουν την ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση στα υπόλοιπα μαθήματα (Lerman, 2014; Treffers, 1987; Van den Heuvel-Panhuizen, 2019).

Οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί στην Ολλανδία, πρέπει να αποκτήσουν το δίπλωμα τους σε ένα από τα ανώτατα εκπαιδευτικά ιδρύματα της χώρας (Meelissen & Punter, 2015). Ωστόσο, στο πρώτο έτος φοίτησης θεωρείται δοκιμαστικό, αφού ελέγχεται η ικανότητα τους στην ολλανδική γλώσσα και στα μαθηματικά, προκειμένου να διασφαλιστούν τα πρότυπα ικανοτήτων (Meelissen & Punter, 2015). Αν οι φοιτητές δεν ανταπεξέλθουν στις δοκιμασίες του πρώτου έτους, έχουν ένα χρόνο να βελτιωθούν και να επαναλάβουν το δοκιμαστικό έτος. Σε περίπτωση που αδυνατούν εκ νέου να περάσουν τις δοκιμασίες της γλώσσας και των μαθηματικών, δεν μπορούν να προβιβάσουν στο επόμενο έτος (Meelissen & Punter, 2015).

Τα μαθηματικά έγιναν υποχρεωτικό μάθημα στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση της Ολλανδίας στις αρχές του 19ου αιώνα (Van den Heuvel-Panhuizen, 2019). Στα πρώτα βήματα δόμησης ενός ενιαίου προγράμματος σπουδών, η κυβέρνηση και οι περισσότεροι μαθηματικοί της χώρας απείχαν, καθώς θεωρήθηκε προτιμότερο οι σχετικές αποφάσεις να λαμβάνονται απευθείας από τις σχολικές διευθύνσεις (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000; Van den Heuvel-Panhuizen, 2019; Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Υπό το πρίσμα αυτής της απόφασης, οι χρονολογίες 1968-1970, αποτέλεσαν το εναρκτήριο λάκτισμα του μεταρρυθμιστικού κινήματος ανοικοδόμησης ενός προγράμματος σπουδών για τα μαθηματικά (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005).

Οι πεποιθήσεις του Freudenthal, αντιτάσσονται στην καθολική ένταξη των μαθηματικών σε ένα διδακτικό πλαίσιο με συγκεκριμένο σχέδιο και δομή. Με άλλα λόγια, πίστευε ότι η διδακτική των μαθηματικών πρέπει να είναι απαλλαγμένη από συμπεριφοριστικούς προσανατολισμούς και να μην οριοθετείται στα πλαίσια ενός ενιαίου προγράμματος (Gravemeijer & Terwel, 2000). Η πρόταση του ήταν να μην διδάσκονται τα μαθηματικά ως έτοιμη γνώση ενός κλειστού συστήματος, αλλά να συνδέονται με την πραγματικότητα και τις ανθρώπινες δραστηριότητες (Freudenthal, 1968). Κατά συνέπεια, οι μαθητές πρέπει να διδάσκονται και να καθοδηγούνται την «επανεφεύρεση» της μαθηματικής γνώσης (Freudenthal, 1968). Απώτερος στόχος αυτού, είναι να τοποθετηθεί η δραστηριότητα της μαθηματικοποίησης στο επίκεντρο της εκπαίδευσης των μαθηματικών (Treffers, 1987).

Ο ανθρωπιστικός χαρακτήρας των μαθηματικών που ήθελε να αναδείξει ο Freudenthal, έκανε τα μαθηματικά προσιτά σε όλους. Το μεγαλύτερο επιχείρημα του, πραγματευόταν το μέλλον των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, υποστήριζε ότι δεν πρόκειται όλοι οι μαθητές να γίνουν μαθηματικοί, άρα μάλλον για την πλειοψηφία τα μαθηματικά θα αποτελέσουν ένα καθημερινό εργαλείο επίλυσης προβλημάτων (Gravemeijer & Terwel, 2000). Πολύ γρήγορα, αυτή η άποψη ξεχώρισε και η εκμάθηση των μαθηματικών σε περιβάλλοντα πραγματικής ζωής έλαβε την ονομασία «Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση» (RME) (Gravemeijer & Terwel, 2000). Η ονομασία αυτή, τονίζει τόσο τη συσχέτιση της RME με τον πραγματικό κόσμο, όσο και την έμφαση που δίνεται στη γνώση των μαθητών (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005).

Βασικό χαρακτηριστικό της RME αποτέλεσε ο διαχωρισμός της μαθηματικοποίησης σε «οριζόντια μαθηματικοποίηση» και «κάθετη μαθηματικοποίηση» (Gravemeijer & Terwel, 2000; Lerman, 2014; Treffers, 1987; Van den Heuvel-Panhuizen, 2000; Van den Heuvel-Panhuizen, 2019; Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Οριζόντια μαθηματικοποίηση λογίζεται η διαδικασία επιλογής εργαλείων που μπορούν να βοηθήσουν στην επίλυση ενός προβλήματος πραγματικής ζωής. Αντιθέτως, κάθετη μαθηματικοποίηση λογίζεται η διαδικασία αναδιοργάνωσης και βελτίωσης των συμβολισμών και των θεωριών μέσα στο ίδιο το σύστημα των μαθηματικών. Αυτές οι διαδικασίες εφαρμόζονται στα πλαίσια της διδακτικής παρέμβασης ακολουθώντας έξι βασικές αρχές (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005):

- Αρχή δραστηριότητας, οι μαθητές είναι ενεργοί συμμετέχοντες της εκπαιδευτικής διαδικασίας και μέσα από την αντιμετώπιση μιας πραγματικής κατάστασης δημιουργούν τις ιδέες και τα μαθηματικά εργαλεία που χρειάζονται.
- Αρχή της πραγματικότητας, οι μαθητές ενθαρρύνονται να χρησιμοποιούν τις γνώσεις τους σε πραγματικές καταστάσεις.
- Αρχή επιπέδου, η εκμάθηση των μαθητών οφείλει να περάσει τα επίπεδα κατανόησης: ικανότητα εφεύρεσης λύσεων, δημιουργία συμβολισμών και σχημάτων, απόκτηση γνώσεων και βασικών αρχών, διάκριση ευρέων

σχέσεων, προβληματισμός για τις δραστηριότητες που επιλύουν και αλληλεπίδραση μεταξύ τους.

- Αρχή αλληλοσυμπληρώματος, παρότρυνση των μαθητών να συνδέουν τις γνώσεις τους για τους διάφορους τομείς των μαθηματικών με στόχο τη συνοχή στο πρόγραμμα.
- Αρχή αλληλεπίδρασης, οι μαθητές αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους και ανταλλάσσουν ιδέες, στρατηγικές και λύσεις,
- Αρχή καθοδήγησης, οι εκπαιδευτικοί δίνουν στους μαθητές ευκαιρίες για «επανεφεύρεση» της γνώσης, μέσα από δραστηριότητες που αυτό καθίσταται εφικτό.

Αξιοσημείωτο είναι, ότι στα ολλανδικά δημοτικά σχολεία δεν υπάρχει κεντρική απόφαση σχετικά με το περιεχόμενο που διδάσκεται. Τα σχολεία είναι ελεύθερα να επιλέξουν το βιβλίο που θέλουν, χωρίς να χρειάζεται έγκριση της ολλανδικής κυβέρνησης (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Επίσης, μπορούν να αναπτύξουν το δικό τους πρόγραμμα σπουδών. Η πολιτική αυτή, φέρει από το 1927 την ονομασία «Ελευθερία της Παιδείας» και επηρεάζει ακόμα και σήμερα την εκπαιδευτική κατάσταση της χώρας (Van den Heuvel-Panhuizen, 2019). Βέβαια, να σημειωθεί, ότι οι σχολικές μονάδες δεν απέχουν τελείως μιας γενικής επίβλεψης. Η διδακτέα ύλη επηρεάζεται τόσο από τα σχολικά βιβλία που χρησιμοποιούνται, καθώς όλα τα λανσαρισμένα βιβλία πραγματεύονται περίπου τα ίδια πράγματα, αλλά και από τους γενικούς στόχους μάθησης που έχουν τεθεί σε κάθε τάξη (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Επίσης, στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση η ύλη δέχεται επιρροές και από τις γενικές τελικές εξετάσεις που καλούνται να δώσουν οι μαθητές (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005).

Τα μαθηματικά θεωρούνται υποχρεωτικό μάθημα σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης της Ολλανδίας, χαρακτηριστικό βέβαια είναι ότι όλα τα μαθήματα φυσικών επιστημών δομούνται με τρόπο ώστε να ενισχύουν τη ρεαλιστική μάθηση των μαθηματικών (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Κατά συνέπεια, καταλαβαίνει κανείς, ότι οι αρχές της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης είναι η κύρια μέθοδος διδακτικής των μαθηματικών. Οι γενικοί στόχοι που θέτει το σύστημα για την μάθηση των μαθηματικών και επηρεάζουν τις επιλογές βιβλίων και προγραμμάτων, εμφανίζονται παρακάτω (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005; Lerman, 2014):

1. Γνώση χρήσης της μαθηματικής γλώσσας και δυνατότητα εξήγησης και σε άλλους.
2. Εξοικείωση με πρακτικές και στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων.
3. Δυνατότητα υποστήριξης ή κρίσης πιθανών λύσεων, αλλά και δυνατότητα τεκμηρίωσης απαντήσεων.
4. Κατανόηση όλων των αριθμών, των πράξεων τους και τις σχέσεις μεταξύ τους.
5. Δυνατότητα άμεσης και ταχύτατης επίλυσης των μικρών πράξεων και συνετή χρήση αριθμομηχανής.
6. Γνώση επίλυσης απλών γεωμετρικών προβλημάτων.
7. Γνώση αναπαραστάσεων, σχημάτων, διαγραμμάτων και δυνατότητα κατασκευής τους.
8. Γνώση συστηματικής περιγραφής σχημάτων ή διαγραμμάτων.
9. Γνώση μονάδων μέτρησης και υπολογισμών.
10. Γνώση μοντελοποίησης και οπτικοποίησης δεδομένων, με στόχο την κριτική τους ανάλυση,

Στην πραγματικότητα, κύριοι παράγοντες για την επίτευξη των παραπάνω στόχων είναι οι εκπαιδευτικοί και το εποπτικό μέσο που χρησιμοποιείται. Στην Ολλανδία, όπως έχει προαναφερθεί, κάθε σχολική μονάδα ή εκπαιδευτικός, έχει τη δυνατότητα επιλογής του σχολικού βιβλίου που θεωρεί κατάλληλο για την τάξη του (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Φυσικά, οι μαθητές καλούνται να αγοράσουν το βιβλίο που θα τους υποδείξει ο εκάστοτε εκπαιδευτικός (Van den Heuvel-Panhuizen, 2019). Για τα μαθηματικά, υπάρχουν 6 διαφορετικές εκδώσεις βιβλίων που θεωρούνται ισοδύναμες (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Όλες στηρίζονται στις βασικές αρχές που είχε θέσει ο Freudenthal. Σημαντικό, βέβαια είναι για την επιτυχία της RME η ευρεία υποστήριξη των εκπαιδευτικών στο σύστημα (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Γεγονός, που φαίνεται τόσο από τη στάση των εκπαιδευτικών, αφού εμφανίζουν ξεκάθαρη υποστήριξη στην RME, όσο και από τα εγχειρίδια που κυκλοφορούν στην αγορά, όπου πλέον έχουν σταματήσει να λανσάρονται συμβατικά βιβλία. Κατά συνέπεια, στην Ολλανδία το μερίδιο της αγοράς με τα βιβλία, που είναι προσανατολισμένα στη μεταρρύθμιση της RME φτάνουν το 100% (Gravemeijer & Terwel, 2000; Lerman, 2014).

4.3 Οι Πιθανότητες στην Σιγκαπούρη και την Ολλανδία

Η διδασκαλία και η εκμάθηση των Πιθανοτήτων πρέπει να αποτελούν μέρος του προγράμματος σπουδών της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (NCTM, 2000). Ωστόσο, δεν είναι λίγες οι χώρες ανά το κόσμο, που ξεκινάνε την εκμάθηση των Πιθανοτήτων στην Δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Batanero et al., 2016). Το Εθνικό Συμβούλιο καθηγητών Μαθηματικών της Αμερικής (2000) πρεσβεύει, ότι αν οι μαθητές αναμένεται να κατανοήσουν σε βαθύτερο επίπεδο την πιθανότητα στο γυμνάσιο και στο λύκειο, τότε οι δεξιότητες που απαιτούνται για την εκμάθηση της έννοιας πρέπει να αναπτυχθούν στο Δημοτικό.

Στο εκπαιδευτικό σύστημα της Σιγκαπούρης, πρωτεύοντας στόχος στο Δημοτικό σχολείο είναι η ανάπτυξη ικανοτήτων για την επίλυση προβλήματος (MOE, 2006; MOE, 2012). Κατά συνέπεια η διδασκαλία των Πιθανοτήτων ξεκινάει στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Yang & Sianturi, 2019). Ωστόσο, από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού, οι μαθητές αρχίζουν να έρχονται σε επαφή με διαδικασίες ανάλυσης δεδομένων και ερμηνείας γραφημάτων (MOE, 2012). Πιο συγκεκριμένα, τα παιδιά έρχονται σε επαφή με το «Εικονόγραμμα» στην Α΄ Δημοτικού, στη Β΄ Δημοτικού, τα παιδιά μαθαίνουν να επιλύουν προβλήματα με την βοήθεια διαγράμματος και μέχρι την ΣΤ΄ Δημοτικού οι γνώσεις αυτές εμπλουτίζονται σε ποικιλία διαγραμμάτων και με την έννοια του μέσου όρου (MOE, 2012). Στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση της χώρας, υπάρχουν 5 διαφορετικά προγράμματα σπουδών, σύμφωνα με το τύπο σχολείου που επιλέγει ο μαθητής (MOE, 2019). Γενικά, οι διαφορές των προγραμμάτων αυτών πραγματεύονται την εμβάθυνση στους διάφορους μαθηματικούς τομείς. Αυτό σημαίνει, ότι δεν αλλάζει δραστικά η ύλη μεταξύ των προγραμμάτων, αλλά αλλάζει η βαρύτητα που δίνεται σε κάθε κλάδο. Κατά συνέπεια, όπως φαίνεται και στο MOE (2019) για την Δευτεροβάθμια εκπαίδευση, στις πρώτες τάξεις των γυμνασίων, οι μαθητές πραγματεύονται έννοιες και διαδικασίες στατιστικής, ενώ στις επόμενες 2^{η} , 3^{η} ή 4^{η} τάξη (ανάλογα τον τύπο του γυμνασίου) γίνεται η εισαγωγή των εννοιών πιθανότητας. Πιο συγκεκριμένα, η διδακτική των Πιθανοτήτων ξεκινάει με την εισαγωγή της έννοιας της πιθανότητας ως μέτρο της τυχαιότητας και συνεχίζει πιθανότητες απλών ενδεχομένων (MOE, 2019).

Στην Ολλανδία, όπως και στη Σιγκαπούρη, η έννοια των Πιθανοτήτων εισάγεται στο γυμνάσιο (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Βέβαια, από το 1993, όπου ξεκίνησε η συζήτηση για το νέο πρόγραμμα σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, οι Πιθανότητες αποτέλεσαν ένα από τα επίμαχα θέματα συζήτησης (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Αποτέλεσμα αυτής της συζήτησης, ήταν οι Πιθανότητες να μην συμπεριληφθούν επίσημα στους στόχους της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Το γεγονός αυτό έλαβε χώρα, δεδομένης της πεποίθησης αρκετών σημαντικών στελεχών της εκπαίδευσης, ότι πολλοί μαθητές κατά την μετάβαση τους από την Πρωτοβάθμια στην Δευτεροβάθμια εκπαίδευση, υστερούσαν σε βασικές διαδικασίες (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Φυσικά, όπως και σε πολλές άλλες χώρες, στο δημοτικό δομούνται οι αρχικές γνώσεις και διαδικασίες για την ανάλυση δεδομένων, την ερμηνεία διαγραμμάτων και γενικότερα διαδικασιών στοχαστικών μαθηματικών, αρχής γενομένης της Β΄ Δημοτικού. Το αξιοσημείωτο όμως είναι, ότι στους γενικούς στόχους της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης δεν περιλαμβάνονται οι συγκεκριμένες ικανότητες (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{Ο}: ΠΕΝΤΕ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΠΟΥ ΕΠΗΡΕΑΖΟΥΝ ΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Η εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης και της μαθηματικής αντίληψης, κατά το διάβα των αιώνων, βρίσκει τις ρίζες της τόσο στις άμεσες κοινωνικές ανάγκες, όσο και στη περιέργεια του ανθρώπου για τα φυσικά φαινόμενα (Wilder, 1986). Τα μαθηματικά, λοιπόν, μπορούν να θεωρηθούν ως μια επιστήμη που δημιουργήθηκε από τον άνθρωπο, με σκοπό την ανάπτυξη ισχυρών προτύπων για την επεξήγηση του φυσικού κόσμου (Wilder, 1986). Κατά συνέπεια, η φύση των μαθηματικών, ενθαρρύνει μια βαθιά επεξεργασία των εννοιών και των θεωρημάτων τους (Watkins, 1984).

Βέβαια, τα χρονικά αναδεικνύουν δυσκολίες κατά τη διδακτική των μαθηματικών (Kok Hwee Chia, 2014). Πιο συγκεκριμένα, τα διδακτικά αποτελέσματα μιας μαθηματικής διδακτικής παρέμβασης, δέχονται επιρροές από ποικίλους παράγοντες. Η απαρίθμηση των παραγόντων αυτών, θα αποτελούσε μια ατελής διαδικασία και για το λόγο αυτό δεν θα πραγματοποιηθεί στην παρούσα μελέτη. Ωστόσο, παρακάτω θα αναλυθούν τέσσερεις βασικοί παράγοντες που επηρεάζουν τη διδακτική των μαθηματικών και ειδικότερα τη διδακτική των πιθανοτήτων. Χαρακτηριστικό των παραγόντων αυτών, αποτελεί η πεποίθηση πολλών εκπαιδευτικών, ότι με την κατάλληλη διδακτική παρέμβαση δημιουργούνται προοπτικές για άμεση βελτίωση της διδακτικής διαδικασίας (Kok Hwee Chia, 2014).

5.1 Σχέση μαθητών με τα μαθηματικά και αντιληπτικές ικανότητες

Η επίτευξη της μάθησης σε ένα μάθημα όπως τα μαθηματικά δεν είναι απλή υπόθεση. Τα μαθηματικά θεωρούνται από πολλούς μάθημα ιδιαίτερης δυσκολίας. Οι μαθητικές επιδώσεις, εξαρτώνται άμεσα από τη σχέση των μαθητών με τα μαθηματικά, τις διαισθητικές αντιλήψεις και τις νοητικές-αντιληπτικές ικανότητες του ανθρώπου (Kok Hwee Chia, 2014). Κατά συνέπεια, μπορούν να βρεθούν πολλές έρευνες που να φανερώνουν την επιρροή των παραγόντων αυτών στη διδακτική των μαθηματικών.

Ο Peter Kloosterman και ο συνεργάτης του ο Stage, το 1992, απέδειξαν μέσα από μια έρευνα, την άμεση συσχέτιση της στάσης των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά με την μαθησιακή διαδικασία. Πιο συγκεκριμένα, ο Kloosterman, αρχικά ανέδειξε το πρόβλημα που επιφέρει στην επίτευξη της μάθησης των μαθηματικών η εν λόγω στάση και στη συνέχεια, υποστήριξε την σημασία βελτίωσης της, μέσω της επιβολής κινήτρου στον μαθητή. Η διαδικασία αυτή, αποτελεί ένα από τα δυσκολότερα μελήματα ενός εκπαιδευτικού και πολλές φορές καθίσταται σημαντικότερη και από την επιλογή τρόπου διδασκαλίας (Kloosterman & Stage, 1992).

Σημαντικό ακόμα, είναι να ληφθούν υπόψιν κατά την διδακτική παρέμβαση οι προηγούμενες γνώσεις και οι διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών (Wynne, 2000). Σε διαφορετική περίπτωση, δεν επιτυγχάνεται η πλήρης κατανόηση της «νέας έννοιας», αποτελώντας τροχοπέδη στην επιτυχή μάθηση. Ως άμεση συνέπεια, λογίζεται η νέα γνώση να μην αποτελεί ανεξάρτητο παράγοντα των μαθησιακών ικανοτήτων των μαθητών και της προγενέστερης γνώσης τους (Wynne, 2000).

Η αντίληψη και η ευφυΐα, αποτελούν τη ψυχομετρική νοημοσύνη του ανθρώπου και διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη μάθηση των μαθηματικών (Flores-Mendoza et al., 2018). Βέβαια, αξίζει να σημειωθεί, ότι η χαμηλή νοημοσύνη δεν αποτελεί ανασταλτικό παράγοντα στη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, ωστόσο σε ένα άτομο με αναπτυγμένη αντίληψη εμφανίζονται αρκετά πλεονεκτήματα κατά την επίλυση προβλημάτων (Flores-Mendoza et al., 2018). Πιο συγκεκριμένα, η υψηλή νοημοσύνη μειώνει τον χρόνο κατανόησης της μιας έννοιας και βελτιώνει την συνολική απόδοση του μαθητή στο μάθημα των μαθηματικών.

Συχνά, κρίνονται σημαντικές και ικανότητες, όπως η βραχυπρόθεσμη και η μακροπρόθεσμη μνήμη για τον υπολογισμό και την αποθήκευση πληροφοριών αντίστοιχα, καθώς και η ικανότητα ανάκλησης μαθηματικών πληροφοριών (Kok Hwee Chia, 2014). Αυτές οι δεξιότητες, σε συνδυασμό με τις οπτικές-χωρικές αντιληπτικές δεξιότητες, δομούν έναν κατάλογο παραγόντων, όπου η έλλειψη οποιουδήποτε από αυτούς, προκαλεί προβλήματα στη μάθηση των μαθηματικών (Kok Hwee Chia, 2014). Κατά συνέπεια, παρουσιάζονται στους μαθητές δυσκολίες σε διάφορες διαδικασίες, στην εκμάθηση θεωρημάτων και κανόνων, καθώς και στην οπτική παράσταση προτύπων. Αρκετές από αυτές τις δυσκολίες και τις ελλείψεις, όπως επίσης και η αδυναμία ολοκλήρωσης κάποιων διαδικασιών, πολλές φορές γίνονται γνωστές με τον όρο «μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά» (Kok Hwee Chia, 2014). Οι πιο διαδεδομένες από αυτές, είναι η δυσκολία στην επίλυση προβλημάτων με πολλαπλά βήματα και στην ανάκτηση δεδομένων (Kok Hwee Chia, 2014).

5.2 Αντίληψη μαθητών για τις Πιθανότητες

Ο άνθρωπος αναπτύσσει την πιθανοτική του σκέψη ανάλογα με την ηλικία του (Fischbein & Schnarch, 1997). Πολλές έρευνες που πραγματοποιούνται κατά καιρούς, συνάδουν στο συμπέρασμα, ότι αυτό γίνεται κατά το όγδοο έτος της ηλικίας των μαθητών (Ζώρζος, 2018). Βέβαια, υπάρχουν και έρευνες που υποστηρίζουν, ότι τα παιδιά αρχίζουν να εκδηλώνουν πιθανολογικές αντιδράσεις στα πλαίσια επιλογών ή αποφάσεων του φυσικού κόσμου, από την ηλικία των 5 ετών (Girotto et al., 2016). Ωστόσο, η ερμηνεία της ικανότητας των μαθητών να σκέφτονται πιθανολογικά, απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή, καθώς μπορεί να επηρεάζεται από διαισθητικές ή επιφανειακές πεποιθήσεις (Girotto et al., 2016; Kazak & Leavy, 2018; Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005).

Το 2014 ο Gallistel και οι ομάδα του υποστήριξαν, ότι όλοι οι άνθρωποι, δημιουργούν υποσυνείδητα στο μυαλό τους έναν μηχανισμό απόδοσής εξηγήσεων σε απλά φαινόμενα πιθανοτήτων. Ο μηχανισμός αυτός, βασίζει την λειτουργεία του στις διαισθητικές αντιλήψεις του εκάστοτε ανθρώπου. Ως αποτέλεσμα αυτού, γίνεται εμφανής η άμεση επιρροή των διαισθητικών αντιλήψεων των μαθητών στις πιθανοτικές έννοιες (Gallistel et al., 2014). Κατά συνέπεια, οι μαθητές του Γυμνασίου και του Λυκείου, έχουν συχνά μεγάλη δυσκολία στην κατανόηση των πιθανοτικών εννοιών. Παραδείγματος χάριν, πολλές είναι οι φορές που δεν γίνεται αντιληπτή η διαφορά μεταξύ της θεωρητικής και της πειραματικής πιθανότητας (Ross, 2017). Ακόμα, συχνά συναντάτε το φαινόμενο τόσο σε μαθητές, όσο και σε εκπαιδευτικούς, να μην κατανοούν πιθανοτικές έννοιες, ωστόσο να μπορούν να απομνημονεύουν αλγορίθμους για τη επίλυσή ασκήσεων (Ross, 2017; Ζώρζος, 2018).

Οι παρερμηνείες και τα λάθη σχετικά με την χρήση του δειγματικού χώρου, τις περισσότερες φορές προέρχονται από λάθη που κάνουν τα παιδιά και οι ενήλικες στη συλλογιστική τους σχετικά με την πιθανότητα (Batanero et al., 2016; Bryant & Nunes, 2012). Τα λάθη αυτά, ενδεχομένως να μην εμφανιζόντουσαν εάν υπήρχε πλήρη κατανόηση της έννοιας του δειγματικού χώρου (Bryant & Nunes, 2012). Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές που χρησιμοποιούν απλή διαισθητική συλλογιστική για να επιβεβαιώσουν την επιλογή τους, πέφτουν στην παγίδα της διαίσθησης και υποβαθμίζουν τα αποδεικτικά δεδομένα της κατάστασης (Batanero & Chernoff, 2018; Bryant & Nunes, 2012;). Κλασικό παράδειγμα της εν λόγω τάσης, αποτελεί μια εμπειρία σε ένα παιχνίδι καζίνο. Δηλαδή, η κατάσταση κάποιου παίχτη, όπου έπειτα από ένα νικηφόρο σερί παιχνιδιών, αποκτά την πεποίθηση ότι, έχει μια τυχερή βραδιά και συνεχίζει να ρισκάρει (Bryant & Nunes, 2012).

Ο Clifford Konold, το 2002, απέδειξε μέσα από τις έρευνες του, ότι οι περισσότεροι μαθητές αντιλαμβάνονται τις πιθανότητες σαν μια πρόβλεψη αποτελέσματος σε ένα πείραμα και όχι ως την επιστημονική εξήγηση για την μελέτη της βεβαιότητας εμφάνισης κάποιου δυνατού αποτελέσματος. Μάλιστα, δεν είναι λίγες και οι φορές που οι μαθητές επηρεάζονται από τις αντιλήψεις τους ακόμα και κατά τη διεξαγωγή ενός εργαστηριακού πειράματος (Konold, 2002). Γεγονός που αποδεικνύει, ότι οι αντιλήψεις του μαθητή, συνέχεια συγκρούονται με την διδακτέα έννοια και επηρεάζουν την επιτυχία της μάθησης (Watson, 2005).

Οι διαισθητικές αντιλήψεις και οι προκαταλήψεις των μαθητών, πολλές φορές κυριαρχούν έναντι των πιθανοτικών γνώσεων και επηρεάζουν τη μάθηση των μαθητών (English & Watson, 2016). Αυτές συχνά μπορεί να βασίζονται σε προσωπικές πεποιθήσεις και απόψεις ή ακόμα και να είναι αποτέλεσμα πολιτικών παραγόντων (English & Watson, 2016). Το σίγουρο βέβαια είναι, ότι οι δυσκολίες στην εκμάθηση πιθανότητας, εμφανίζουν μεγάλη ποικιλία και αποτελούν τη βάση της έρευνας στις επιστήμες της ψυχολογίας και της μαθηματικής εκπαίδευσης (Batanero et al., 2016; Eckert & Nilsson, 2015). Ωστόσο, σημαντικό εμπόδιο αποτελεί η πεποίθηση πολλών μαθητών, ότι η διδακτέα ύλη των πιθανοτήτων σε κάποια σημεία της, εμφανίζεται ως ασύνδετη με τη πραγματική ζωή (Supovitz et al., 2009).

Η πιθανοτική σκέψη των μαθητών επηρεάζεται άμεσα και από την πίεση χρόνου (Furlan et al., 2016). Με άλλα λόγια, η αντιμετώπιση ενός προβλήματος πιθανότητας σε συγκεκριμένο χρόνο, ενεργοποιεί την γρήγορη απάντηση της διαίσθησης και παραμερίζει την χρήση της θεωρίας που φυσικά απαιτεί περισσότερη σκέψη και χρόνο. Λόγου χάρη, πολλοί είναι οι μαθητές που διαισθητικά θεωρούν ότι, μετά από μια σειρά αποτελεσμάτων σε ένα πείραμα, το αποτέλεσμα που δεν έχει εμφανιστεί στις πρώτες εκτελέσεις του πειράματος, είναι πιο πιθανό να εμφανιστεί στην επόμενη εκτέλεση. Μάλιστα, δεν είναι λίγοι και οι μαθητές που θεωρούν, ότι το αποτέλεσμα της τελευταίας εκτέλεσης έχει μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης στην επόμενη. Αυτές οι λανθασμένες μαθητικές αντιλήψεις, είναι γνωστές ως εφέ της «αρνητικής πρόσφατης κατάστασης» και της «θετικής πρόσφατης κατάστασης» αντίστοιχα (Bryant & Nunes, 2012).

5.3 Γνώσεις και ετοιμότητα εκπαιδευτικών/ Εκπαιδευτικοί και Εκπαιδευτικό Σύστημα

Η δυσκολία της φύσης των μαθηματικών, σε συνδυασμό με την αυξημένη νοητική αντίληψη που απαιτεί, απωθεί τους μαθητές και επηρεάζει τη διάθεση τους για μάθηση (Greer, 2001). Ακόμα, αρκετές έρευνες έχουν αποδείξει, ότι οι διαφορές στο σχολικό περιβάλλον και η καταλληλόλητα των εκπαιδευτικών έχουν άμεσες επιπτώσεις στην επίδοση των μαθητών (Flores-Mendoza et al., 2018). Οι συζητήσεις τους με τους μαθητές, ο ρόλος τους στην τάξη, οι γνώσεις τους και οι ικανότητες τους, επιδρούν στην συλλογιστική και την μάθηση των μαθητών (Veloo & Chairhany, 2013). Γεγονός, που συνάδει στο συμπέρασμα σχετικά με τη σπουδαιότητα του ρόλου του εκπαιδευτικού (Greer, 2001). Μάλιστα, οι Johansson και Hansen (2019) θεωρούν, ότι ο τρόπος με τον οποίο μεταδίδονται οι γνώσεις και οι δεξιότητες στους μαθητές, είναι πολύ σημαντικός και αντικατοπτρίζεται μέσα από το έργο των εκπαιδευτικών, αλλά και την αποτελεσματικότητα των σχολικών προγραμμάτων.

Οι εκπαιδευτικοί αποτελούν τη βασική προσωπικότητα για τη δημιουργία ενός δημιουργικού κλίματος μάθησης στη τάξη (Ferrari et al., 2009). Ο ρόλος τους, είναι να υλοποιήσουν και να μεταφράσουν το περιεχόμενο των μαθηματικών σε μάθηση για τους μαθητές (Johansson & Hansen, 2019). Με αυτόν τον τρόπο, οι δάσκαλοι και οι συνθήκες στην τάξη, είναι κεντρικό θέμα στην εκπαιδευτική διαδικασία, αφού οι τρόποι με τους οποίους εισάγεται το περιεχόμενο των μαθηματικών, διαμορφώνουν τις στάσεις των παιδιών απέναντι στα μαθηματικά (Johansson & Hansen, 2019). Βέβαια, σημαντική είναι και η υποστήριξη των εκπαιδευτικών από την πολιτεία, το πρόγραμμα σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια (Ferrari et al., 2009), τα οποία φαίνεται στις περισσότερες χώρες να μην προσφέρουν επαρκή στήριξη στην διδασκαλία και την εκμάθηση της πιθανότητας (Batanero et al., 2016).

Οι γνώσεις των εκπαιδευτικών περί της Πιθανότητας και ειδικότερα η γνώση του μαθηματικού της περιεχομένου, είναι πολύ σημαντικές (Batanero & Chernoff, 2016; Paparistodemou & Meletiou-Mavrotheris, 2018). Η ικανότητα του δασκάλου να διδάξει την ιδέα της τυχαιότητας, απαιτεί γνώση τόσο για τον χειρισμό των διαισθήσεων των μαθητών σχετικά με τα τυχαία φαινόμενα, όσο και για την αντιμετώπιση των προβλέψεων που πραγματοποιούν οι μαθητές σε ένα στοχαστικό πείραμα (Fischbein, 1987; Paparistodemou & Meletiou-Mavrotheris, 2018). Επίσης, είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να γνωρίζει τις κύριες πιθανοτικές ιδέες και ικανότητες που οι μαθητές πρέπει να αποκτήσουν στις διάφορες ηλικιακές βαθμίδες, προκειμένου να επιλέξει τις κατάλληλες μεθόδους διδασκαλίας (Batanero et al., 2016). Κατά συνέπεια, φαίνεται η διδασκαλία της πιθανότητας να μην είναι εύκολη για τους εκπαιδευτικούς (Batanero & Chernoff, 2016; Kazak & Leavy, 2018).

Στην περίπτωση του Μεξικού, για παράδειγμα, η πιθανότητα απέχει από τα προγράμματα σπουδών της μέσης εκπαίδευσης, κατά κύριο λόγο για το επιχείρημα, ότι οι δάσκαλοι του δημοτικού σχολείου έχουν πολλές δυσκολίες στην κατανόηση της πιθανότητας (Batanero et al., 2016). Ως εκ τούτου, δεν είναι καλά προετοιμασμένοι για να διδάξουν την θεωρία της (Batanero et al., 2016). Επίσης, στην Ελλάδα, η ύλη των Πιθανοτήτων στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση πραγματεύεται στην Έ τάξη του Δημοτικού, ωστόσο οι εκπαιδευτικοί φαίνεται να υστερούν σε βασικές πιθανοτικές γνώσεις και διαδικασίες (Zorzos & Avgerinos, 2019). Κατά συνέπεια, οι εκπαιδευτικοί τόσο στις παραπάνω χώρες, όσο και σε άλλες που συναντάται το ίδιο φαινόμενο, οφείλουν να εξερευνήσουν τις διάφορες μεθόδους διδασκαλίας της πιθανότητας και να αποκτήσουν εμπιστοσύνη στην ικανότητά τους να μάθουν και να διδάσκουν πιθανότητες (Batanero & Chernoff, 2016; Ramey-Gassert et al., 1996). Πολλές φορές μάλιστα, αυτή η ανετοιμότητα των εκπαιδευτικών και των σχολικών εγχειριδίων παραμελεί είτε αναφέρει ελάχιστα την υποκειμενική έννοια της πιθανότητας, παρόλο που σχετίζεται στενά με αυτό που οι άνθρωποι χρησιμοποιούν συνήθως στη καθημερινή συλλογιστική (Kazak & Leavy, 2018).

Τέλος, αρκετές έρευνες έρχονται να σημειώσουν, ότι η χρήση μη ρεαλιστικών ή ενδιαφερουσών πλαισίων διδασκαλίας, στη σχολική ύλη, δεν βοηθάει στην εκμάθηση της Πιθανότητας (Langrall, 2018). Επίσης, έχει διαπιστωθεί αρκετές φορές, ότι η χρήση απλών εργασιών πιθανότητας δεν είναι επαρκής για την ανάπτυξη μιας μαθηματικής κατανόησης της πιθανότητας από τους μαθητές και από την άλλη πλευρά η χρήση σύνθετων δραστηριοτήτων πιθανότητας δεν ευνοεί στην κατανόηση των πιθανοτικών εννοιών (Kazak & Leavy, 2018; Langrall, 2018). Για τους λόγους αυτούς, η πιθανότητα δεν εμφανίζεται πλέον ως σημαντικός τομέας μελέτης στην Πρωτοβάθμια και στη κατώτερη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Jones et al., 2007; Langrall, 2018). Μάλιστα, πολλές χώρες ανά τον κόσμο δεν περιλαμβάνουν τις Πιθανότητες στα προγράμματα σπουδών για μαθητές κάτω των 11 ετών.

5.4 Σχολικά βιβλία

Από τα δεδομένα του TIMSS το 2011, προέκυψε ότι τα βιβλία είναι ο σημαντικότερος μαθησιακός πόρος στην εκπαίδευση των μαθηματικών. Οι περισσότεροι δάσκαλοι και καθηγητές, τα χρησιμοποιούν ως βάση για την εκπαιδευτική διαδικασία και έχουν ουσιαστική επίδραση στους μαθητές (Fan et al., 2013; Mullis et al., 2012). Επίσης, το βιβλίο αποτελεί κατευθυντήριο παράγοντα για την καθημερινή σχολική πρακτική (Fan et al., 2013; Van den Ham & Heinze, 2018). Πιο συγκεκριμένα, τα βιβλία έχουν την δική τους δύναμη στην καθοδήγηση της διδασκαλίας, την ανάπτυξη μιας οργανωμένης ακολουθίας ιδεών και στην ανάλυση των πληροφοριών (Fan et al., 2013). Η ποιότητα των σχολικών βιβλίων είναι υπεύθυνη για την δημιουργία ευκαιριών μάθησης και επηρεάζει την ανάπτυξη της εμπειρίας των μαθητών (Sievert et al., 2019). Συνεπώς, η επιλογή του σχολικού βιβλίου επηρεάζει άμεσα τα αποτελέσματα της μάθησης (Kaur & Pereira-Mendoza, 2000; Van den Ham & Heinze, 2018; Sievert et al., 2019; Zorzos & Avgerinos, 2023).

Το 2017 ο Hadar πραγματοποίησε μια έρευνα, συγκρίνοντας δύο βιβλία μαθηματικών. Ο κύριος στόχος του, ήταν να ανακαλύψει αν υπάρχουν διαφορές στις επιδώσεις των μαθητών ανάλογα με την επιλογή του εγχειριδίου. Για αυτό το σκοπό, το ένα από τα δύο βιβλία που επέλεξε ο Hadar, συμπεριλάμβανε δραστηριότητες μεγαλύτερης σκεπτικής απαίτησης, δίνοντας ευκαιρίες στους μαθητές να πραγματευθούν καθήκοντα με υψηλότερα επίπεδα κατανόησης. Ο Hadar μοίρασε τα δύο είδη βιβλίων σε δύο τάξεις, όπου στο τέλος της σχολικής χρονιάς κλήθηκαν να δώσουν μια εξέταση μαθηματικών. Τα αποτελέσματα έδειξαν, ότι οι μαθητές που χρησιμοποίησαν κατά τη διάρκεια της χρονιάς το βιβλίο με τις δραστηριότητες μεγαλύτερης απαίτησης, είχαν υψηλότερες επιδόσεις στην τελική εξέταση. Γεγονός, που συμφωνεί και με την άποψη των Sievert, Van den Ham, Niedermeyer, και Heinze (2019), οι οποίοι πρέσβευαν, ότι το σχολικό βιβλίο των μαθηματικών επηρεάζει το επίπεδο των μαθητών.

Πολλές διακρατικές έρευνες, έχουν αποδείξει ότι υπάρχουν αρκετές διαφορές ανάμεσα στα βιβλία μαθηματικών. Αρχικά, όπως είναι λογικό, τα βιβλία κάθε χώρας επηρεάζονται από κοινωνικούς και πολιτισμικούς παράγοντες (Van den Ham & Heinze, 2018; Yang et al., 2010). Μάλιστα, οι Yang, Reys, και Wu (2010), πρεσβεύουν ότι ένα σχολικό βιβλίο πρέπει να συμμορφώνεται με συγκεκριμένους κυβερνητικούς κανονισμούς. Έτσι, οι κανονισμοί αυτοί και οι εκπαιδευτικές παραδόσεις μιας χώρας, δεν θα μπορούσαν να απέχουν κατά τη συγγραφή ενός σχολικού βιβλίου μαθηματικών (Van den Ham & Heinze, 2018). Λόγου χάρη, κάποιοι μνημονικοί κανόνες και τεχνάσματα στην επίλυση προβλημάτων, μονάδες μέτρησης και εθνικό νόμισμα, ή ακόμα και λογοπαίγνια που βοηθούν τους μαθητές να κατανοούν και να επιλύουν ευκολότερα ασκήσεις μαθηματικών. Όλα αυτά, είναι παράγοντες που δημιουργούν διαφορετικές συνθήκες μάθησης στους μαθητές μέσω του σχολικού βιβλίου.

Κατά συνέπεια, η σημαντικότητα του σχολικού εγχειριδίου στη διδακτική διαδικασία, έχει οδηγήσει σε πολλές συγκριτικές μελέτες σχολικών βιβλίων από διάφορες χώρες, με απώτερο σκοπό την βελτίωση των σχολικών εποπτικών μέσων (Fan et al., 2013). Λόγου χάρη, το 2019 οι Yang και Sianturi, λαμβάνοντας υπόψιν τα δεδομένα των προγραμμάτων PISA και TIMSS σχετικά με τις επιδόσεις των μαθητών στις χώρες Σιγκαπούρη, ΗΠΑ και Ινδονησία, οδηγήθηκαν σε μια συγκριτική μελέτη των σχολικών βιβλίων των μαθηματικών. Η επιλογή των συγκεκριμένων χωρών, πραγματοποιήθηκε γιατί υπάρχει μια ουσιαστική διαφορά σχετικά με την ηλικία ένταξης των μαθητών σε πιθανοτικές έννοιες. Στόχος των ερευνητών, ήταν να συγκρίνουν τη ροή διδακτικής των Πιθανοτήτων στα συστήματα των συγκεκριμένων χωρών μέσα από τα σχολικά βιβλία μαθηματικών, υπό το φόντο των επιδόσεων τους στις διεθνής έρευνες. Τα αποτελέσματα έδειξαν, ότι υπήρχαν ουσιαστικές διαφορές τόσο στις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών, όσο και στην μορφολογία και την ευχρηστία των βιβλίων.

Βέβαια, ένα σχολικό εγχειρίδιο οφείλει να μην παρουσιάζει μόνο την κλασική προσέγγιση μιας έννοιας (Batanero et al., 2016). Δηλαδή, να μην περιορίζεται σε συγκεκριμένες εφαρμογές ή σε συγκεκριμένα πλαίσια εφαρμογών. Ακόμα, σημαντικό ρόλο διαδραματίζει η ορολογία και το λεξιλόγιο που συγκροτούν την εξήγηση των νέων εννοιών (Kaur & Pereira-Mendoza, 2000). Αρκετές έρευνες έχουν δείξει, ότι οι μαθητές εμφανίζουν δυσκολίες όταν το λεξιλόγιο που χρησιμοποιεί ένα σχολικό εγχειρίδιο είναι σε ανώτερο επίπεδο από αυτό που μπορούν να διαχειριστούν.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί, ότι τα σχολικά βιβλία των μαθηματικών διαδραματίζουν, σημαντικό ρόλο στην εκπροσώπηση του προγράμματος σπουδών (Fan et al., 2013). Ουσιαστικά, το δύσκολο έργο τους, είναι να μεταφράσουν το αφηρημένο αναλυτικό πρόγραμμα σε πράξεις που θα οδηγήσουν τον μαθητή και τον εκπαιδευτικό στον τελικό στόχο της μάθησης (Van den Ham & Heinze, 2018). Κατά συνέπεια, το εγχειρίδιο των μαθηματικών μπορεί να θεωρηθεί ως μεσολαβητής του προτεινόμενου προγράμματος σπουδών και του εφαρμοσμένου προγράμματος στα πλαίσια της τάξης (Van den Ham & Heinze, 2018).

5.5 Κοινωνικοί και πολιτισμικοί παράγοντες

Τα μαθηματικά είναι ένα ανθρώπινο δημιούργημα που στοχεύει στην αυστηρή και λογική εξήγηση διάφορων καταστάσεων. Κατά συνέπεια, η εξέλιξη τους δεν θα μπορούσε να μην επηρεαστεί από τους κοινωνικούς, τους πολίτικους και τους πολιτισμικούς παράγοντες της εκάστοτε εποχής (Wilder, 1986). Πιο συγκεκριμένα, η κοινωνική κατάσταση μιας χώρας ή εποχής, καθοδηγεί τη μαθηματική και επιστημονική εξέλιξη ανάλογα με τις ανάγκες της (Wilder, 1986). Επίσης, δεν είναι λίγες οι έρευνες που αποδεικνύουν την ευπάθεια του εκπαιδευτικού συστήματος στις κοινωνικές και πολιτιστικές αξίες (Brand et al., 2006).

Η μαθηματική κατανόηση περιλαμβάνει συνδυασμό πληροφοριών σχετικά με την καθημερινή ζωή του ατόμου, τις εμπειρίες του και τις αναλυτικές δεξιότητες που απαιτούνται για την κατανόηση ενός προβλήματος (Kok Hwee Chia, 2014). Βέβαια, τα αρνητικά στερεότυπα μιας κοινωνίας, οι σχέσεις μαθητών και εκπαιδευτικών ή οι αρνητικές αντιλήψεις των μαθητών για ένα μάθημα ή εκπαιδευτικό, επηρεάζουν άμεσα την επιτυχία της μάθησης, αφού αποτρέπουν τους μαθητές από την αποδοχή των εκπαιδευτικών προκλήσεων (Brand et al., 2006). Άμεσο αποτέλεσμα της εν λόγω κατάστασης, είναι η αποθάρρυνση των μαθητών σχετικά με τη μάθηση των μαθηματικών. Επιπροσθέτως, γεγονός είναι, ότι η ανάπτυξη του εκπαιδευτικού συστήματος μιας χώρας, επηρεάζεται άμεσα από τις κοινωνικές αξίες και τους κανόνες. Ωστόσο, δεν υφίσταται κάποια λογική εξήγηση για το πώς τα εκπαιδευτικά συστήματα σε όλο τον κόσμο αναπτύσσουν τα προγράμματα σπουδών τους (Johansson & Hansen, 2019). Βέβαια, υπάρχουν γενικοί στόχοι και παραδόσεις του εθνικού εκπαιδευτικού και κοινωνικού πλαισίου, που συμβάλλουν στην διαμόρφωση του χαρακτήρα του προγράμματος σπουδών της εκάστοτε χώρας (Johansson & Hansen, 2019).

Το σχολείο αποτελεί μια μικρογραφία της κοινωνίας και είναι η πρώτη κοινωνική ομάδα ένταξης των μαθητών μετά από την οικογένεια. Κατά συνέπεια, το σχολείο αποτελεί την εικόνα της κοινωνίας, μέχρι τη στιγμή που ο μαθητής θα ενηλικιωθεί

(Brand et al., 2006). Έτσι, αρκετές έρευνες αναφέρουν το σχολικό περιβάλλον ως σημαντικό παράγοντα στην επιρροή της μάθησης (Flores-Mendoza et al., 2018). Πιο αναλυτικά, ο Flores-Mendoza και η ομάδα του (2018) απέδειξαν, ότι οι μαθητές με υψηλή νοημοσύνη, αλλά εγγεγραμμένοι σε σχολεία χαμηλού κοινωνικοοικονομικού επιπέδου, αντεπεξήλθαν σε δύσκολα προβλήματα με χαμηλότερο ποσοστό, από μαθητές με το ίδιο επίπεδο νοημοσύνης, αλλά εγγεγραμμένοι σε σχολεία με καλύτερο κοινωνικοοικονομικό επίπεδο.

Ο ρόλος της οικογένειας και του εκπαιδευτικού, κρίνεται αρκετά σημαντικός στην ανάπτυξη της μαθηματικής αντίληψης των μαθητών (Greer, 2001). Μελέτες που γίνονται σε παιδιά μικρότερης ηλικίας, διεξάγουν το συμπέρασμα, ότι η πιθανοτική τους σκέψη πολλές φορές επηρεάζεται από την προκατειλημμένη συμπεριφορά των γονιών τους (Girotto et al., 2016). Σε αυτό, έρχεται να προστεθεί η άποψη του Clifford Konold (2002), ο οποίος πρέσβευε, ότι μια έννοια συχνά επηρεάζεται από εξωτερικούς παράγοντες. Μάλιστα, πολλές φορές το εξωτερικό περιβάλλον μπορεί να επιβληθεί στη διδακτέα έννοια και ως αποτέλεσμα να μην επέλθει ποτέ η κατανόηση της (Konold, 2002; Wynne, 2000).

Οι Πιθανότητες από τη φύση τους αποτελούν μια πολιτιστική οικοδόμηση, ιστορικά συνδεδεμένη με φιλοσοφικές απόψεις, θρησκευτικές πεποιθήσεις και κοινωνικές πρακτικές (Greer & Mukhopadhyay, 2005). Ο Langrall (2018) υποστηρίζει μάλιστα, ότι η Πιθανότητα είναι σημαντική τόσο ως τρόπος σκέψης, όσο και μέσα από τις εφαρμογές της, σε πτυχές του φυσικού κόσμου, αλλά και σε κοινωνικά ή πολιτικά ζητήματα. Φυσικά, αυτό επιβεβαιώνεται και από την ιστορική τους ανάπτυξη, αφού αυτή είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με δικαστικές αποφάσεις, την ανάγκη για ασφάλιση και τα τυχερά παιχνίδια (Greer & Mukhopadhyay, 2005). Έτσι, το ιστορικό αρχείο των Πιθανοτήτων καθιστά σαφές την άμεση επιρροή της θεωρίας από τους κοινωνικούς και πολιτισμικούς παράγοντες (Greer & Mukhopadhyay, 2005). Άμεσο επακόλουθο των εν λόγω παραγόντων, εμφανίζεται και στην εκπαίδευση της θεωρίας Πιθανοτήτων, όπου επηρεάζουν ανεπίσημες πιθανοτικές γνώσεις, όπως άτυπες έννοιες και πρωτογενείς διαισθήσεις, όπου και αυτές με τη σειρά τους επηρεάζουν τη μάθηση της Θεωρίας της Πιθανότητας (Greer & Mukhopadhyay, 2005).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{Ο}: ΕΠΟΙΚΟΔΟΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΕΘΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Η σπουδαία σημασία της τυχαιότητας και της πιθανότητας στη καθημερινή ζωή του ανθρώπου δεν χωράει καμία αμφισβήτηση (Bryant & Nunes, 2012). Το γεγονός αυτό, θέτει τις Πιθανότητες στις σημαντικές γενικές μαθηματικές γνώσεις που οφείλει να γνωρίζει ο άνθρωπος. Η διδασκαλία και η εκμάθηση μαθηματικών γενικής εκπαίδευσης διαδραματίζει ζωτικό ρόλο στη διαμόρφωση της βασικής δομής γνώσης και καλλιέργειας ικανοτήτων των ανθρώπων (Yao, 2019). Σχετικά με τις γνώσεις Πιθανοτήτων όμως, είναι σαφές, ότι τόσο τα παιδιά, όσο και οι ενήλικες εμφανίζουν συχνά μεγάλη δυσκολία να σκεφτούν ορθολογικά και να ποσοτικοποιήσουν την έννοια «Πιθανότητα» (Bryant & Nunes, 2012). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, η βελτίωση της κατανόηση της θεωρίας πιθανότητας να είναι ένας από τους κύριους στόχους που θέτουν πολλές έρευνες σχετικές με μαθήματα Πιθανοτήτων (Pfannkuch & Budgett, 2016; Yao, 2019).

Η μαθηματική κατανόηση περιλαμβάνει μεταξύ άλλων την αριθμητική γνώση, την αριθμητική πρακτική ικανότητα και την λεκτική μαθηματική έκφραση (Kok Hwee Chia, 2014). Επίσης, σημαντικό ακόμα είναι η κατανόηση των μαθηματικών συμβολισμών και του ιδιαίτερου λεξιλογίου, καθώς διάφορες μελέτες έχουν αποδείξει, ότι περιορισμένες γνώσεις σε αυτούς τους τομείς οδηγούν σε κακή μαθηματική κατανόηση (Kok Hwee Chia, 2014). Η Πιθανότητα, είναι μια εύχρηστη αλλά συνάμα και περίπλοκη έννοια. Για αυτό το λόγο, η κατανόηση της χρήζει ανάγκης τεσσάρων βασικών γνωστικών απαιτήσεων (Bryant & Nunes, 2012). Πιο αναλυτικά, αυτές οι γνωστικές απαιτήσεις είναι οι παρακάτω:

1. Κατανόηση της φύσης και της χρήσης της έννοιας της τυχαιότητας.
2. Κατανόηση της έννοιας του «δειγματικού χώρου».
3. Γνώση σύγκρισης και ποσοτικοποίησης των πιθανοτήτων.
4. Κατανόηση των σχέσεων μεταξύ διάφορων γεγονότων.

Στο παρόν κεφάλαιο, θα αναλυθούν βασικές προϋποθέσεις για την επιτυχία της μάθησης των μαθηματικών και ειδικότερα των Πιθανοτήτων. Ακόμα, θα αναλυθούν ζητήματα όπως η ανάγκη για μετεκπαίδευση των εκπαιδευτικών, η χρήση της τεχνολογίας στη τάξη, καθώς και η ανάγκη για δημιουργική μάθηση. Γεγονός βέβαια αποτελεί, ότι η συνύπαρξη παραγόντων, όπως ο πολιτισμός, οι μαθηματικές ατομικές δεξιότητες, η διδακτέα ύλη, οι μορφές διδασκαλίας, οι γνώσεις και η ετοιμότητα των εκπαιδευτικών να διδάξουν πιθανότητες και η χρήση της τεχνολογίας, είναι βασικό κομμάτι για μια επιτυχημένη διδακτική παρέμβαση (Ferrari et al., 2009).

6.1 Προϋποθέσεις για την επιτυχία μιας διδακτικής παρέμβασης στις Πιθανότητες

Τα μαθηματικά είναι ζωτικής σημασίας για την κατανόηση καταστάσεων του φυσικού κόσμου, για αυτό και αξίζει να επενδυθεί στη προσπάθεια της ανάλυσης και της επεξήγησης των ιδανικών της θεωρίας τους (Nilsson et al., 2018). Ο γνωστός μαθηματικός Pólya, πρέσβευε, ότι τα μαθηματικά οφείλουν πάνω από όλα να διδάξουν τον άνθρωπο να σκέφτεται (Drijvers et al., 2019). Λόγου χάρη, ο αλγοριθμικός τρόπος σκέψης, η μοντελοποίηση καθημερινών καταστάσεων και η επίλυση προβλημάτων είναι ικανότητες που χρησιμοποιούνται συχνά στην καθημερινότητα (Bieda et. al., 2014; Borovcnik & Kapadia, 2018; Drijvers et al., 2019; Sievert et al., 2019; NCTM, 2000; Wilson, 2009; Yang & Sianturi, 2019).

Η μελέτη και η ανάλυση της πιθανοτικής σκέψης, τόσο σε μικρές, όσο και σε μεγαλύτερες ηλικίες, αποτελεί βασικό στοιχείο των προσπαθειών ανακάλυψης της λειτουργίας του ανθρώπινου εγκέφαλου (Borovcnik & Kapadia, 2018; Greer, 2001; Langrall, 2018; Soto-Andrade et al., 2018). Η πιθανότητα είναι σημαντική στην κατανόηση της χρήσης της λογικής από τον άνθρωπο, καθώς και στη διαχείριση των δεδομένων μιας κατάστασης, υπό το πρίσμα της λήψης αποφάσεων (Borovcnik & Kapadia, 2010). Επίσης, η ανάπτυξη της θεωρίας των Πιθανοτήτων έχει προσφέρει ποικίλα πλεονεκτήματα και σε άλλους τομείς (Abramovich & Nikitin, 2017). Μάλιστα, μπορεί να θεωρήσει κανείς, ότι οι Πιθανότητες είναι ο κατεξοχήν κλάδος των μαθηματικών που καταδεικνύει ότι τα μαθηματικά γεννήθηκαν από την ανάγκη επίλυσης διάφορων κοινωνικά και πολιτικά σημαντικών προβλημάτων της εκάστοτε εποχής (Abramovich & Nikitin, 2017). Άμεση συνέπεια των εν λόγω γεγονότων, είναι η ανάγκη για την αναζήτηση και την βελτίωση των βασικών προϋποθέσεων για μια επιτυχή διδασκαλία της θεωρίας τους. Σε αυτό φυσικά, πρέπει να ληφθεί υπόψιν η σχέση των Πιθανοτήτων με τα άλλα μέρη των μαθηματικών (Greer, 2001; Taylor, 2014). Ακόμα, αξίζει να τονιστεί και η σημασία που έχει ο συνδυασμός της γνώσης με την ιστορία της. Οι ανάγκες που οδήγησαν στην ανάπτυξη μιας θεωρίας, μπορούν να επιτύχουν ευκολότερα τη σύνδεση της με την καθημερινότητα και κατά συνέπεια να γίνει βαθύτερη η κατανόηση της (Abramovich & Nikitin, 2017).

Γενικά για τα μαθηματικά, ο Freudenthal (1991) πρέσβευε, ότι πρέπει να παραμείνουν στα πλαίσια της κοινής λογικής. Βέβαια σημειώνεται, ότι η λεγόμενη κοινή λογική για έναν μαθηματικό, διαφέρει σημαντικά από την έννοια κοινή λογική σε ένα λαϊκό άτομο, ωστόσο αυτή μπορεί να εξελιχθεί κατά τη διάρκεια της μάθησης (Gravemeijer & Doorman, 1999; Pitta-Pantazi & Kūma, 2017). Βασική προϋπόθεση βέβαια για να μάθει κάποιος μαθηματικά, είναι να θέλει να αφεθεί στη μαθηματική γνώση (Kloosterman & Stage, 1992). Ο Kloosterman και ο Stage σε ένα από τα άρθρα τους το 1992, είχαν μιλήσει για μια αδιάφορη έως και εχθρική στάση των μαθητών σχετικά με τη χρησιμότητα των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή. Οι μαθητές με αυτές τις αντιλήψεις δυσκολεύονται να μάθουν μαθηματικά και για αυτό σήμερα πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν, ότι ο εκπαιδευτικός πρέπει πρώτα να κερδίσει την συμπάθεια των μαθητών του περί τα μαθηματικά και έπειτα να τους διδάξει τις βασικές αρχές τους. Μόνο με αυτό τον τρόπο θα είναι σε θέση να επιτύχει η μάθηση (Kloosterman & Stage, 1992).

Ο γνωστός εκπαιδευτικός ψυχολόγος Benjamin Bloom το 1956, μίλησε για τα στάδια επίτευξης της μάθησης και πρότεινε την διάκριση των εκπαιδευτικών στόχων σε τρεις κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία όρισε τους γνωστικούς στόχους, που αφορούν τις διεργασίες της γνώσης, έπειτα τους συναισθηματικούς, που αφορούν τις στάσεις και τις αντιλήψεις των διδασκόμενων και τέλος τους ψυχοκινητικούς στόχους, που αφορά τις μαθητικές δεξιότητες (Bloom, 1956). Με βάση αυτές τις κατηγορίες, δημιούργησε μια ταξινόμηση με έξι επίπεδα που οδηγούν στη γνώση (Bloom, 1956). Η ταξινόμηση αυτή βελτιώθηκε αργότερα από τους Lorin Anderson και Krathwohl και κατάληξε στα εξής επίπεδα: α) αξιολόγηση, β) σύνθεση, γ) ανάλυση, δ) εφαρμογή, ε) κατανόηση και στ) γνώση (Bosman & Zagenczyk, 2011).

Η κατανόηση και η γνώση απαιτούν μια σε βάθος προσέγγιση του διδακτικού αντικειμένου (Watkins, 1984; Badger, 2013). Για να επιτευχθούν γρήγορα βέβαια, πολλοί είναι οι παράγοντες που διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο κατά τη διάρκεια μιας διδακτικής παρέμβασης. Κάθε δάσκαλός έχει το δικό του τρόπο διδασκαλίας με συγκεκριμένες δυνατότητες και αδυναμίες (Neal, 2007). Στην ίδια λογική, κάθε μαθητής χρήζει ιδιαίτερης διδακτικής μεταχείρισης, αφού δεν μαθαίνουν όλοι στον ίδιο ρυθμό ή με τον ίδιο τρόπο (Neal, 2007). Αυτό, έχει άμεση επιρροή στις μελέτες για τη βελτίωση των διδακτικών παρεμβάσεων, αλλά και στο σχεδιασμό της διδασκαλίας από έναν εκπαιδευτικό. Ακόμα, ο δάσκαλος οφείλει να βοηθάει τους μαθητές να οικοδομούν τη δική τους εμπιστοσύνη τόσο στον εαυτό τους, όσο και στην ικανότητα τους να μάθουν (Larnell, 2016; Sun et al., 2018). Έτσι, μόνο στην περίπτωση που ο εκπαιδευτικός γνωρίζει την ποικιλομορφία της τάξης του και βοηθάει ψυχολογικά τους μαθητές, είναι σε θέση να δημιουργήσει τις κατάλληλες συνθήκες διδασκαλίας, να σχεδιάσει αποτελεσματικά το μάθημα του και να οδηγήσει τους μαθητές τόσο σε ακαδημαϊκή, όσο και σε κοινωνική επιτυχία (Batanero & Chernoff, 2017; Eckert & Nilsson, 2015; Neal, 2007; Sampaio & Wodewotzki, 2016).

Η επιλογή μιας συγκεκριμένης μεθόδου διδασκαλίας, καθορίζει τι μπορεί να μάθει ο μαθητής (Badger, 2013; Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Έτσι, ο δάσκαλος μπορεί να επιλέξει την μέθοδο διδασκαλίας που αρμόζει στην τάξη του για να επιτύχει τα βέλτιστα αποτελέσματα μάθησης (Jolliffe, 2005). Επιπροσθέτως, ένας εκπαιδευτικός για να παρέχει αποτελεσματική διδασκαλία στην τάξη του, πρέπει να αυξάνει συνεχώς τις γνώσεις του (Batanero et al., 2016; Friel et al., 2001). Πιο συγκεκριμένα, δεν αρκεί να γνωρίζει καλά την έννοια που στοχεύει να διδάξει, αλλά οφείλει να γνωρίζει και το βέλτιστο τρόπο που πρέπει να διδάξει τη συγκεκριμένη έννοια (Batanero et al., 2004; Chan, 2009; Friel et al., 2001). Με άλλα λόγια, θα πρέπει να δομηθούν και να βελτιώνονται συνεχώς οι εμπειρίες επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών (Friel et al., 2001; Huerta, 2018), αλλά και να εκπαιδευτούν στη θεωρητική και στην εφαρμοζόμενη πιθανότητα (Batanero et al., 2016). Φυσικά, κατά την πρόσληψη των εκπαιδευτικών που θα υπηρετήσουν τη δημόσια εκπαίδευση, οφείλεται να γίνει μια προσεκτική επιλογή ατόμων που είναι εφοδιασμένοι με τα απαραίτητα ακαδημαϊκά προσόντα και τις κατάλληλες δεξιότητες επικοινωνίας (Wong et al., 2014; Batanero et al., 2016). Ακόμα, σημαντικό είναι οι μαθητές να συμμετέχουν σε έργα μαθηματικής μοντελοποίησης (Chan, 2009). Κατά αυτό το τρόπο, θα μπορούν να βιώσουν τη χρησιμότητα των μαθηματικών στην καθημερινότητα και να δώσουν μεγαλύτερη προσοχή στη μάθηση των μαθηματικών εννοιών (Paparistodemou & Meletiou-Mavrotheris, 2018).

Οι εκπαιδευτικοί μεταξύ τους, έχουν χρόνιες διαμάχες για τη φύση του σχολικού προγράμματος σπουδών (Mnguni et al., 2019). Τις περισσότερες φορές μάλιστα, κερδίζει η άποψη, ότι το πρόγραμμα σπουδών οφείλει να δομείται με επίκεντρο τον μαθητή (Mnguni et al., 2019). Βέβαια, για την επιτυχία του εκπαιδευτικού συστήματος, βασική προϋπόθεση είναι να υπάρχει κοινός στόχος και ιδεολογία των εκπαιδευτικών με το πρόγραμμα σπουδών. Ακόμα, σημαντικό είναι το αποτέλεσμα πολλών ερευνών, όπου δείχνουν την εξατομικευμένη μάθηση να έχει μεγάλες δυνατότητες στο να καταστήσει τις μαθησιακές δραστηριότητες πιο αποτελεσματικές (Lin et al., 2013). Αυτό συμβαίνει κατά κύριο λόγο, επειδή μπορεί να προσαρμόσει τη διαδικασία μάθησης στον εκάστοτε μαθητή (Lin et al., 2013).

Η διάθεση και η θέληση για γνώση του μαθητή έχει άμεσα αποτελέσματα στη μάθηση (Engel & Orthwein, 2018; Rahimi et al.,, 2019). Άλλες μελέτες πάλι, αναδεικνύουν και τη σημαντικότητα της θετικής ανατροφοδότησης των μαθητών από τους συνομηλίκους τους (Badger, 2013; Yao, 2019). Οι απλοποιημένες ερωτήσεις ή η επεξηγήσεις ενός μαθητή για μια έννοια, οδηγούν πολλές φορές στην κατανόηση της έννοιας από άλλους μαθητές. Μάλιστα, γενικότερα το περιβάλλον και ο κοινωνικός περίγυρος έχουν άμεση επίδραση στη μάθηση των μαθηματικών, αφού εμφανίζουν τη σύνδεση της μαθηματικής θεωρίας με την καθημερινότητα (Gravemeijer & Doorman, 1999).

Σχετικά με τις Πιθανότητες, το NCTM (2000) συνέστησε την εφαρμογή των βασικών εννοιών της πιθανότητας στο Δημοτικό σχολείο. Έτσι, τα παιδιά μαθαίνοντας αρκετά νωρίς τις βασικές έννοιες και διαδικασίες πιθανοτήτων, θα είναι σε θέση μεγαλώνοντας να αντιληφθούν την αντιστοίχιση του μέτρου της πιθανότητας ενός γεγονότος, ως έναν αριθμό από 0 έως 1. Η διδασκαλία και η εκμάθηση της θεωρίας τους, ταξινομείται σε τρείς διαφορετικές φιλοσοφικές ερμηνείες (Batanero et al., 2016). Την κλασική, την συχνή και την υποκειμενική ερμηνεία. Αναλυτικότερα, η κλασική ερμηνεία έχει ως βασικό χαρακτηριστικό το τυπικό ορισμό της Πιθανότητας και ένα αυστηρό σύνολο αξιωμάτων. Η συχνή ερμηνεία, επηρεάζεται από την κλασική χρήση της έννοιας στην καθημερινή ζωή και η υποκειμενική ερμηνεία της Πιθανότητας δέχεται επιρροές από τις προσωπικές εμπειρίες του ατόμου (Batanero et al., 2016; Engel & Orthwein, 2018).

Αυτός ο μαθηματικός τομέας, απαιτεί εξοικείωση με αρκετές σύνθετες έννοιες (Gal, 2005). Μάλιστα, πολλές από αυτές τις έννοιες δεν έχουν σαφείς ορισμούς και είναι δύσκολο να εξηγηθούν με απλή γλώσσα (Gal, 2005). Αυτό, σε συνδυασμό με τους συναισθηματικούς και ψυχολογικούς προβληματισμούς που επηρεάζουν την κατανόηση των εννοιών (Baki & Gökçek, 2005), όπως επίσης και η έλλειψη αναστρεψιμότητας των στοχαστικών καταστάσεων, καθιστά δυσκολότερο για τα παιδιά να κατανοήσουν τα βασικά χαρακτηριστικά τυχαιότητας (Batanero et al., 2016) και κατά συνέπεια η διδασκαλία των Πιθανοτήτων κρίνεται αρκετά δύσκολη (Bonnett & White, 2018). Οι εκπαιδευτικοί χρειάζονται ιδιαίτερες γνώσεις και εμπειρίες για να διδάξουν αποτελεσματικά Πιθανότητες, με την διεξαγωγή πειραμάτων να αποτελεί μέρος του μαθήματος (Batanero, 2013; Bonnett & White, 2018; "NCTM CAEP Mathematics Content for Secondary Addendum to the NCTM CAEP Standards 2012", 2015; Shaughnessy, 1992). Ακόμα, η χρονική πίεση που ασκεί το πρόγραμμα σπουδών στους εκπαιδευτικούς με σκοπό την αποπεράτωση μιας αρκετά μεγάλης ύλης, λειτουργεί ως ανασταλτικός παράγοντας στην επιτυχή διδασκαλία τόσο των Πιθανοτήτων, όσο και άλλων μαθηματικών αντικειμένων (Furlan et al., 2016; Park et al., 2019). Μάλιστα, στο κομμάτι των πιθανοτήτων αρκετές μελέτες έχουν αποδείξει, ότι η πίεση χρόνου στον μαθητή λειτουργεί ανασταλτικά στη χρήση της θεωρίας (Furlan et al., 2016). Πιο συγκεκριμένα, η ανάγκη για μια απάντηση σε ένα στοχαστικό πρόβλημα υπό την πίεση του χρόνου, δίνει τη δυνατότητα στις διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών να επηρεάσουν την καθαρή τους κρίση. Κατά συνέπεια, τόσο το χρονικό διάστημα που αφιερώνεται στη διδασκαλία των πιθανοτήτων, όσο η χρονική πίεση σε ένα πρόβλημα, δημιουργούν δυσμενείς συνθήκες για την μάθηση της θεωρίας (Furlan et al., 2016).

Η κατάλληλη ηλικία για την διδακτική των Πιθανοτήτων έχει δημιουργήσει μια γενική σύγχυση στον επιστημονικό τομέα (Lewis, 1966). Πολλές χώρες εισάγουν πιθανοτικές έννοιες από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού, αλλά αρκετές είναι και οι χώρες που καθυστερούν την εισαγωγή των πιθανοτικών εννοιών, με αυτήν να πραγματοποιείται στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Batanero, 2013; Batanero et al., 2005; Batanero et al., 2016). Πιο συγκεκριμένα, σε αυτή την εκπαιδευτική βαθμίδα στις περισσότερες χώρες ανά τον κόσμο, αντιμετωπίζονται βασικά θέματα πιθανότητας. Λόγου χάρη, συνήθως πραγματεύονται ζητήματα αναπαραστάσεων των χώρων του δείγματος και εμπειρικές εκτιμήσεις πιθανοτήτων σε σύνθετα ή ανεξάρτητα γεγονότα (Batanero et al., 2005; Yang & Sianturi, 2019). Βέβαια, φημολογείται από πολλούς ερευνητές, ότι τα εγχειρίδια και τα έγγραφα σπουδών που προετοιμάζονται για τους δασκάλους της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, δεν προσφέρουν επαρκή υποστήριξη στη διδασκαλία και εκμάθηση της πιθανότητας (Yang et al., 2010; Yang & Sianturi, 2019). Οι πεποιθήσεις αυτές, βασίζονται κυρίως σε δυο βασικά γεγονότα. Αρχικά, τα σχολικά βιβλία παρουσιάζουν αρκετές φορές μια περιορισμένη άποψη της πιθανότητας (δηλαδή μόνο τον κλασικό ορισμό) και οι εφαρμογές τους περιορίζονται αρκετά στα τυχερά παιχνίδια (Yang & Sianturi, 2019). Δεύτερον οι Πιθανότητες παρουσιάζονται συχνά μαζί ή ως κομμάτι της στατιστικής (Bonnett & White, 2018). Θα ήταν καλύτερο, σύμφωνα με την άποψη αρκετών ερευνητών, να εισάγονται με μια λογική για τη στήριξη της διδασκαλίας τους, ως μέσο λήψης αποφάσεων ή αντιμετώπισης πιθανών κινδύνων (Bonnett & White, 2018).

Γενικά οι ερευνητές έχουν αποφανθεί, ότι η καλύτερη κατανόηση του ρόλου των σχολικών βιβλίων ή άλλων εποπτικών μέσων στα μαθηματικά, παίζει σημαντικό ρόλο (Fan et al., 2013). Κατά συνέπεια, πρέπει κατά τον σχεδιασμό ενός σχολικού εγχειριδίου να μελετάτε τόσο η ύλη και το επιστημονικό βάθος που δίνεται, όσο και η σχέση τους με το πρόγραμμα σπουδών, αλλά και με αρκετούς άλλους παράγοντες (Fan et al., 2013; NCTM, 1989; NCTM, 2000; Sun et al., 2018). Με άλλα λόγια, η ύπαρξη εγχειριδίων θα πρέπει να εξεταστεί από μια ευρύτερη προοπτική, λαμβάνοντας υπόψιν την ευχρηστία και τη σχέση που αυτά εμφανίζουν με τους μαθητές. Είναι επίσης χρήσιμο για τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές να επιλέξουν το βιβλίο που τους αρέσει περισσότερο (Yang & Sianturi, 2019). Δεν υπάρχει αμφιβολία, ότι η αύξηση της έμφασης κατά τη δημιουργία ενός σχολικού εγχειριδίου, θα προσδώσει μεγαλύτερες πιθανότητες επιτυχίας στη μάθηση.

Το Schools Council Statistical Education (1980) υποστηρίζει, ότι η Πιθανότητα για να έχει νόημα να βρίσκεται στο πρόγραμμα σπουδών πρέπει η διδακτική της να επικεντρωθεί περισσότερο σε παραδειγματικά ζητήματα καθημερινότητας. Με άλλα λόγια, είναι σημαντικότερο να φανεί η χρήση της Πιθανότητας παρά να διευκρινιστεί το νόημα της. Το γεγονός αυτό, επιβεβαιώθηκε και από τις έρευνες του Batanero το 2013. Επίσης, ο Bryant και η ομάδα του (2018), αλλά και ο Ζώρζος (2018) σε ξεχωριστή έρευνα, έδειξαν, ότι τα παιδιά είναι σε θέση να αντιληφθούν Πιθανότητες από το όγδοο έτος της ηλικίας τους. Μάλιστα, όπως απέδειξε και ο Pange το 2013, τα παιδιά μαθαίνουν εύκολα πιθανότητες μέσα από παιχνίδια και πειράματα. Αυτός είναι και ο κύριος λόγος που πολλοί ερευνητές συστήνουν την χρήση πειραμάτων στην διδακτική των Πιθανοτήτων.

Η κατανόηση των Πιθανοτήτων βέβαια συνοδεύεται από την ηλικιακή ανάπτυξη των μαθητών (Fischbein & Schnarch, 1997). Οι Graham και Thornton το 2005, έγραψαν μια αρκετά αναλυτική εργασία σχετικά με τη σχέση της κατανόησης των Πιθανοτήτων και της ηλικίας, σύμφωνα και με παλαιότερες εργασίες του Fischbein. Το ίδιο επιχείρησαν ανεξάρτητα μεταξύ τους και οι Watson (2005), με περισσότερη έμφαση στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση, και ο Tarr με τον συνεργάτη του τον Lannin (2005), με έμφαση στα στάδια που περνάει ο μαθητής για να κατανοήσει τις Πιθανότητες. Παρακάτω, εμφανίζεται ένας πίνακας με τα βασικά στοιχεία των παραπάνω ερευνών, χωρισμένα σε ηλικιακές ομάδες.

Πίνακας 5: Διδακτικοί στόχοι Πιθανότητας ανά ηλικία

Ηλικία	Κατανόηση Πιθανοτήτων
Ηλικία μικρότερη των 7 χρονών	1. Σχετική κατανόηση της απροσδιοριστίας. 2. Προσπάθεια πρόβλεψης αποτελεσμάτων. 3. Χρήση πιθανοτικών διαδικασιών κυρίως από διαίσθηση .
Ηλικία από 7 έως 12 χρονών	1. Οι πιθανότητες αποκτούν πιο οργανωμένη εννοιολογική δομή. 2. Ύπαρξη παρανοήσεων. 3. Κατανόηση βασικών διαδικασιών Πιθανότητας με δοκιμές και σφάλματα. 4. Κατανόηση ότι η Πιθανότητα αλλάζει μεταξύ των γεγονότων, ανάλογα με τις συνθήκες. 5. Κατανόηση ανεξαρτησίας γεγονότων.
Ηλικία μεγαλύτερη των 12 χρονών	1. Κατανόηση πλήρους έννοιας και λογικής Πιθανοτήτων 2. Κατανόηση αβεβαιότητας. 3. Κατανόηση διαφοράς ανεξάρτητων και εξαρτημένων γεγονότων . 4. Απλή κατανόηση δεσμευμένης Πιθανότητας (Bayés, 2018). 5. Ίσως αναζητούνται ακόμα πρόχειρες λύσεις και επεξηγήσεις. 6. Ενίσχυση της ικανότητας πρόβλεψης. 7. Η χρήση της θεωρίας γίνεται περισσότερο συχνή. 8. Δεν έχει αναπτυχθεί ακόμα η συστηματική χρήση της Πιθανότητας, ωστόσο ανταποκρίνονται σε βασικές διαδικασίες και κανόνες. 9. Κατανόηση χρησιμότητας Πιθανοτήτων ως μέσω επεξήγησης εμφάνισης ενός αποτελέσματος.

Οι μαθητές γενικά, χρειάζονται ισορροπία μεταξύ δεξιοτήτων και γνώσεων (Kaur & Pereira-Mendoza, 2000). Επίσης, δραστηριότητες που αφορούν τόσο σε οικεία όσο και σε άγνωστα περιβάλλοντα, πρέπει να αποτελούν αναπόσπαστο μέρος του σχολικού προγράμματος. Έτσι, μπορούν να βοηθήσουν τον μαθητή μέσα από την πρακτική σε προβλήματα που πραγματεύονται καθημερινές καταστάσεις, να αναπτύξει τις γνώσης του, αλλά και την αντίληψη του (Chan, 2013; Kaur & Pereira-Mendoza, 2000; Velayutham1, 2020). Οι Burrill και Biehler (2011), εξήγησαν πολύ ωραία το γεγονός, συλλέγοντας και καταγράφοντας τις πιθανοτικές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται ευρέως σε διάφορες άλλες επιστήμες. Λόγου χάρη, την ανάλυση δεδομένων, την πρόβλεψη ενός αποτελέσματος, την δημιουργία γραφημάτων και πινάκων ή άλλων οπτικών αναπαραστάσεων και την διεξαγωγή πειραμάτων (Burrill & Biehler, 2011; Pfannkuch & Budgett, 2016). Κατά συνέπεια, φαίνεται να επαληθεύεται η άποψη του Mildenhall (2016) και της Taylor (2014), όπου υποστήριζαν, ότι ένα σπειροειδές πρόγραμμα σπουδών θα μπορούσε να ήταν πιο αποτελεσματικό στη διδακτική μαθηματικών διαδικασιών και να κεντρίσει περισσότερο το ενδιαφέρον των μαθητών, εστιάζοντας στη χρήση των μαθηματικών στην καθημερινότητα και σε άλλες επιστήμες.

6.2 Δημιουργικότητα και μάθηση Πιθανοτήτων

Η δημιουργικότητα και η καινοτομία γίνονται ολοένα και πιο σημαντικές δεξιότητες για την ανάπτυξη του ανθρώπου στον 21^{ο} αιώνα (Ferrari, Cachia & Punie, 2009). Η ανάπτυξη αυτών των ικανοτήτων στον άνθρωπο, συμβάλλει στην οικονομική, την κοινωνική και την ατομική του ευημερία, καθώς θεωρούνται απαραίτητα προσόντα για έναν επιτυχημένο επαγγελματία (Ferrari et al., 2009; Simonton, 2010; Aizikovitsh-Udi & Amit, 2011). Η αξία της δημιουργικής σκέψης έχει αναγνωριστεί διεθνώς (Leikin & Pitta-Pantazi, 2012), τόσο από πλήθος εκπαιδευτικών και ερευνητών, όσο και από διάφορους κυβερνητικούς ή εκπαιδευτικούς οργανισμούς, όπως το European Parliament and the Council (2006) και το National Council of Teachers of Mathematics (2000). Κατά συνέπεια, η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να σκέφτονται δημιουργικά και ευέλικτα, οφείλει να αποτελεί βασικό στόχο της διδασκαλίας των μαθηματικών (Brunkalla, 2009; Mann, 2006; Yani & Oikawa, 2019).

Η δημιουργικότητα συνηθίζεται να ορίζεται με εκλαϊκευμένο τρόπο, ως η επίλυση ενός προβλήματος με συνδυασμό ιδεών, ή τρόπων ή στρατηγικών είτε ακόμα και αναπαραστάσεων, που δεν έχουν χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν (Aiken, 1973; Mayer, 1989; Koh, 2000; Oh & Lee, 2012; Varshney, 2019). Βέβαια, δεν υπάρχει σαφής και επίσημος ορισμός για τη δημιουργικότητα (Mann, 2006; Leikin & Pitta-Pantazi, 2012). Κυκλοφορεί μια ποικιλία απόψεων, οι οποίες συνεχίζουν να αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου. Οι περισσότερες από αυτές, συγκλίνουν να χαρακτηρίσουν τη δημιουργικότητα, ως ένα προσωπικό ή κοινωνικό γνώρισμα που δίνει ώθηση στην ανθρώπινη εξέλιξη (Leikin & Pitta-Pantazi, 2012; Leikin & Pitta – Pantazi, 2013). Ο Torrance (1994), ίσως να έδωσε ένα πιο σαφή ορισμό, αφού ορίσει την συγκεκριμένη έννοια ως πολυδιάστατη, με βασικά χαρακτηριστικά αυτά της ευελιξίας (flexibility), της πρωτοτυπίας (originality), της ευχέρειας (fluency) και της επεξήγησης (elaboration).

Στην εκπαίδευση η δημιουργικότητα συναντάται κυρίως ως δημιουργική μάθηση ή ως δημιουργική διδασκαλία. Η δημιουργική μάθηση αναφέρεται στη διδασκαλία των μαθητών να χρησιμοποιούν δημιουργικές στρατηγικές και δεξιότητες (Mayer, 1989; Leikin & Pitta-Pantazi, 2012). Αντιθέτως, η δημιουργική διδασκαλία, αναφέρεται κυρίως στον εκπαιδευτικό και τις τεχνικές διδασκαλίας που θα χρησιμοποιήσει για να διδάξει τους μαθητές, με τρόπο τέτοιο ώστε να μπορούν να μεταφέρουν τις γνώσεις τους σε νέα προβλήματα (Mayer, 1989). Φυσικά και στις δύο περιπτώσεις ως κλειδί της δημιουργικής σκέψης ορίζεται ο ίδιος ο δάσκαλος (Aiken, 1973). Είναι γεγονός, ότι ένας δημιουργικός δάσκαλος παράγει δημιουργικούς μαθητές, αφού όπως αποδεικνύεται σε έρευνες, υπό την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού και μέσω ομαδικής συζήτησης στην τάξη, δίνεται στα παιδιά η δυνατότητα να εξερευνήσουν την ανακαλυπτική μάθηση (Aiken, 1973). Εδώ, αξίζει να αναφερθεί και το πείραμα του Koeller (2015), όπου μαζί με την ερευνητική του ομάδα, έθεσαν σε μια ομάδα εκπαιδευτικών ένα πιθανοτικό πρόβλημα. Για αυτό το πρόβλημα, οι εκπαιδευτικοί είχαν την δυνατότητα να συνεργαστούν, να συζητήσουν και να μελετήσουν πιθανά σενάρια για τον τρόπο διδαχής του εν λόγω προβλήματος στην τάξη. Τα αποτελέσματα τη έρευνας έδειξαν, ότι η διαδικασία της συνεργασίας με άλλους εκπαιδευτικούς μπορεί να ανοίξει πολλές συζητήσεις σχετικά με τη διδακτική των θεμελιωδών εννοιών πιθανότητας, καθώς και να βρεθούν καλύτεροι τρόποι και ιδέες για να διδαχθούν αυτές δημιουργικά στους μαθητές. Ως επακόλουθο του εκπαιδευτικού, σημαντικό ρόλο στη δημιουργική μάθηση κατέχει και το σχολικό βιβλίο (Aiken, 1973). Για αυτό το λόγο, πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στις δραστηριότητες και στα παραδείγματα που περιλαμβάνει (Aiken, 1973; Zhu & Fan, 2006; Yang & Sianturi, 2019), όπως επίσης και να δίνεται η δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να επιλέγει το βιβλίο που του ταιριάζει (NCTM, 2000).

Διάφορες έρευνες έχουν δείξει κατά καιρούς, ότι η δημιουργικότητα και η καινοτόμος ικανότητα των μαθητών ενισχύεται με την εκπαίδευση (Ferrari et al., 2009; Zulkarnaen et al., 2018; Rahimi et al., 2019; Yani & Oikawa, 2019). Μάλιστα, έχει αποδειχθεί, ότι δημιουργικότητα μπορεί να διδαχθεί σε παιδιά προσχολικής ηλικίας, όπως επίσης και ότι υπάρχουν δημιουργικές επιρροές από το ένα παιδί στο άλλο (Goetz, 1989). Επομένως, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να αναπτύξουν δημιουργικές προσεγγίσεις κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, βρίσκοντας νέες μεθόδους, λύσεις και πρακτικές, με στόχο τη δημιουργική μάθηση των μαθητών (Ferrari et al., 2009). Σημαντικό ακόμα είναι, ότι η νοημοσύνη δεν φαίνεται να αποτελεί προϋπόθεση για την δημιουργική μάθηση, ωστόσο απαιτείται ένα σημαντικά καλό επίπεδο προηγούμενων γνώσεων (Ferrari et al., 2009).

Τα τελευταία χρόνια, η μάθηση των μαθηματικών χρήζει ανάγκης για ανάπτυξη της σκέψης και της δημιουργικότητας των μαθητών, ώστε να μπορούν να προσφέρουν δημιουργικές και καινοτόμες λύσεις κατά την επίλυση προβλημάτων ή ακόμα και κατά τη διεκπεραίωση καθημερινών δραστηριοτήτων (Mayer, 1989). Πολλοί ερευνητές μάλιστα, συμμερίζονται την άποψη, ότι για να ικανοποιηθεί η ανάγκη ύπαρξης διεπιστημονικών και υψηλής ποιότητας ταλέντων στον τομέα της επιστήμης, πρέπει η διδασκαλία των μαθηματικών να περιλαμβάνει καινοτομία, δημιουργικότητα και την ευκαιρία εισαγωγής των μαθητών στην νέα εποχή της πληροφόρησης (Xiaonan, 2017; Suyidno et. al., 2018).

Η δημιουργικότητα στα μαθηματικά αποτελεί την ικανότητα των μαθητών να αναλύουν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα με πολλούς τρόπους, να παρατηρούν ομοιότητες ή διαφορές με παρόμοιες καταστάσεις και τελικά να προσαρμόζουν μια μέθοδο αντιμετώπισης μιας άγνωστης κατάστασης (Aiken, 1973). Ως συνέπεια αυτού, τα παιδιά πρέπει να ενθαρρύνονται συνεχώς να εξερευνούν και να ανακαλύπτουν νέους τρόπους επίλυσης προβλημάτων. Άλλωστε, δεν είναι λίγες οι έρευνες που υποστηρίζουν, ότι η δημιουργικότητα ενός ανθρώπου αυξάνεται όταν ο ίδιος αντιλαμβάνεται την επιτυχία του και την αναγνώριση του μέντορα του για τις ιδέες του (Randel et al., 2011).

Οι Πιθανότητες είναι δύσκολο να κατανοηθούν από τους μαθητές λόγω της αντίθετης φύσης τους. Ωστόσο, οι μαθητές μέσα από τη δημιουργική διδασκαλία καταλαβαίνουν και απολαμβάνουν καλύτερα τα παραδείγματα Πιθανοτήτων και η συμμετοχή στην τάξη κρίνεται υψηλότερη από το συνηθισμένο (Naidu & Sanford, 2017 Zampetakis et al., 2008). Μάλιστα, ακόμα και παιδιά με κινητικά ή μαθησιακά προβλήματα δείχνουν μεγαλύτερη διάθεση και προσπάθεια στο μάθημα (Lewis et al., 2011; Richard et al., 2018). Επίσης, ας σημειωθεί, ότι ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές έμαθαν την θεωρία των Πιθανοτήτων επηρεάζει άμεσα πολλά επόμενα μαθήματα στο μέλλον (Xiaonan, 2017). Με άλλα λόγια, τα εκπαιδευτικά αποτελέσματα είναι αυτά που με βάση τη θετική τους εξέλιξη αναδεικνύουν τη σημαντικότητα προώθησης της δημιουργικότητας στη μάθηση (Forthmann et al., 2016).

6.3 Διδακτική Πιθανοτήτων με χρήση Νέων Τεχνολογιών

Η ραγδαία εξέλιξη της τεχνολογίας και η χρήση της σε καθημερινές δραστηριότητες, οδήγησε την κοινωνία να αποκτήσει μια τεχνολογική εξάρτηση. Αναμενόμενο λοιπόν, ήταν κατά πολλούς επιστήμονες και ερευνητές, η τεχνολογία να επηρεάσει και την εκπαιδευτική διαδικασία (Ferrari et al., 2009; Kaur & Har, 2009; Zorzos & Avgerinos, 2019). Η παρουσία της στην εκπαιδευτική τάξη, φανερώνει δύο κύρια πλεονεκτήματα. Αρχικά, όπως υποστηρίζεται και από το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών της Αμερικής (NCTM, 2000), η παρουσία της καλλιεργεί ικανότητες των μαθητών που θεωρούνται σήμερα απαραίτητες για την αγορά εργασίας (Lin et al., 2013). Έπειτα, οι δυνατότητες που είναι σε θέση να προσφέρει (ειδικότερα αυτές της οπτικής αναπαράστασης ή της μοντελοποίησης καθημερινών προβλημάτων), καθιστούν τη διδακτέα έννοια ευκολότερα κατανοητή στο μαθητή και το έργο του εκπαιδευτικού απλοποιείται (Ang, 2006; David, 1997; Ferrari et al., 2009).

Στα μαθηματικά, η παρουσία της τεχνολογίας μπορεί να προσδώσει αμεσότητα, παραστατικότητα και ακρίβεια στο μάθημα (Abramovich & Nikitin, 2017). Το γεγονός αυτό επιτυγχάνεται, αφού όπως έχει αποδειχθεί σε πολλές έρευνες, τα τεχνολογικά μέσα, παρέχουν στους εκπαιδευτικούς ευκαιρίες και εργαλεία μοντελοποίησης καθημερινών προβλημάτων, επηρεάζοντας έτσι το τρόπο διδακτικής των μαθηματικών (Northcote & Marshall, 2016). Ειδικότερα, στον τομέα των Πιθανοτήτων, όπου φημολογείται ως ο κατεξοχήν κλάδος των μαθηματικών που επωφελείται από τις οπτικές αναπαραστάσεις (Greer, 2001; Polvanov, 2019; Pratt, 2000; Yang et al., 2017), η τεχνολογία είναι ένα εξαίρετο μέσο προς ανακάλυψη πιθανοτικών εννοιών (Kissane & Kemp, 2010).

Ο Biehler υποστηρίζει από το 1991, πως τα πιθανοτικά μοντέλα εξηγούνται καλύτερα με την παρουσία της τεχνολογίας. Πιο συγκεκριμένα, η τεχνολογία προσφέρει τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να εκτελέσει και να επαναλάβει πολλές φορές, με τρόπο σχετικά απλό και ανέξοδο σύνθετα πειράματα (Abramovich & Nikitin, 2017). Κατά συνέπεια, μπορεί να προσδώσει περισσότερες ευκαιρίες μάθησης, αφού οι δυνατότητες επεξεργασίας των δεδομένων μεγιστοποιούνται, παράλληλα με την ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση του χρόνου ανάλυσης. Με αυτό το τρόπο, οι μαθητές έχουν περισσότερο χρόνο, αλλά και παραδείγματα για να εφαρμόσουν και να αναπτύξουν την ικανότητα τους να συγκρίνουν τα δεδομένα και να εξάγουν συμπεράσματα για ένα πληθυσμό – δείγμα (English & Watson, 2016; Ben-Zvi, 2006). Τέτοιου είδους πειράματα, σύμφωνα με τον Shaugnessy (1992), είναι απαραίτητα για να μπορέσουν οι μαθητές να καταλάβουν τις πιθανοτικές έννοιες και να αποκολληθούν από τις διαισθητικές τους αντιλήψεις. Φυσικά, όλα αυτά τα πλεονεκτήματα, προϋποθέτουν την αναλυτική προετοιμασία του μαθήματος από τον εκπαιδευτικό, καθώς και μια προσεκτική επιλογή του κατάλληλου λογισμικού που θα υποστηρίζει την ενεργό κατασκευή της γνώσης μέσα από την ανάλυση και τη σύγκριση των δεδομένων (Batanero et al., 2016; Ben-Zvi, 2000).

Κλείνοντας την παρούσα παράγραφο, αξίζει να γίνει μια ιδιαίτερη αναφορά στο παιγνιώδη τρόπο μάθησης που είναι σε θέση να προσφέρει η τεχνολογία (Pange, 2003). Η διδακτική των Πιθανοτήτων μπορεί να ευνοηθεί από τη συγκεκριμένη μορφή μάθησης, αφού ιστορία ανάπτυξης της θεωρίας τους, βασίζεται κυρίως σε πιθανοτικά παιχνίδια (Batanero et al., 2016). Κατά συνέπεια, μέσα από ένα ηλεκτρονικό παιχνίδι-πείραμα πιθανότητας, υπάρχουν περισσότερες προοπτικές να κεντρισθεί το ενδιαφέρον των μαθητών, να απαλλαχθεί το μάθημα από το αίσθημα της πλήξης και να κατανοούνται καλύτερα οι πιθανοτικές έννοιες (Erbilgin, 2017; Pange, 2003; Wei et al., 2015).

6.4 Εκπαίδευση Εκπαιδευτικών

Ο ορίζοντας των γνώσεων ενός εκπαιδευτικού αποτελεί καθοριστικό παράγοντα για το επίπεδο των γνώσεων που μπορεί να αποκομίσει η τάξη του. Επίσης, μια επιτυχής διδακτική παρέμβαση δεν μπορεί να αρκεστεί μόνο σε έναν εκπαιδευτικό με μεγάλο όγκο γνώσεων. Αυτό σημαίνει, ότι τόσο διδακτική επάρκεια, όσο και οι γνώσεις των εκπαιδευτικών, υπό το πρίσμα της διδαχής των πιθανοτήτων, είναι σημαντικοί παράγοντες μιας επιτυχούς διδασκαλίας (English, 2002). Βέβαια, αξίζει να σημειωθεί, ότι αυτοί οι παράγοντες δεν πρέπει να λαμβάνονται ως μοναδικές συνθήκες της επιτυχούς μάθησης (Zorzos & Avgerinos, 2019). Κατά συνέπεια, δεν θα ήταν λάθος να παραδεχτεί κανείς ως σπουδαίο, το ρόλο που διαδραματίζουν οι γνώσεις των εκπαιδευτικών στο διδακτέο αντικείμενο και η ετοιμότητα τους να διδάξουν στην εκπαιδευτική διαδικασία (Yani & Oikawa, 2019; Zorzos & Avgerinos, 2019).

Σχετικά με τις γνώσεις των εκπαιδευτικών, έρευνες αναδεικνύουν ένα μοντέλο αξιολόγησης των μαθηματικών γνώσεων για τη διδασκαλία της διδακτικής πιθανότητας. Το μοντέλο αυτό, όπως παρουσιάζεται από τους Godino, Batanero, Roa και Wilhelmi το 2008 και τους Vásquez και Alsina το 2014, περιλαμβάνει τέσσερεις κατηγορίες βασικών γνώσεων, όπως φαίνονται παρακάτω:

- γνώση περιεχομένου εξειδικευμένη και διευρυμένη.
- γνώση του περιεχομένου σε σχέση με τους μαθητές.
- γνώση του περιεχομένου σε σχέση με την διδασκαλία.
- γνώση του προγράμματος σπουδών και διεπιστημονικών συνδέσεων.

Η πρώτη κατηγορία πραγματεύεται την κοινή γνώση του περιεχομένου μιας διδακτικής ενότητας Πιθανοτήτων, με στόχο την ικανότητα του εκπαιδευτικού να διεξάγει τη διδασκαλία του. Η δεύτερη κατηγορία, επιτρέπει την ανάλυση του τρόπου μάθησης των μαθητών και τις δυσκολίες ή τα λάθη που ενδέχεται να αντιμετωπίσουν κατά τη διαδικασία διδασκαλίας. Στη τρίτη κατηγορία, συμπεριλαμβάνονται οι γνώσεις και οι ικανότητες του εκπαιδευτικού για τη διαχείριση μιας τάξης, δηλαδή σχετικά με τη διαχείριση της φασαρίας, του διδακτικού χρόνου, την κατανομή της ύλης και τη διδακτική του εμπειρία. Τέλος, στη τελευταία κατηγορία, ο εκπαιδευτικός οφείλει να γνωρίζει το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών ή και άλλων επιστημών, ώστε να μπορεί να κάνει τις διεπιστημονικές συνδέσεις των διδακτέων εννοιών με άλλα μαθήματα ή την καθημερινότητα.

Γενικά, πραγματοποιούνται διάφορες έρευνες κατά καιρούς, που προσπαθούν να αναλύσουν τη σχέση των εκπαιδευτικών και την αποτελεσματική διδακτική παρέμβαση. Μάλιστα, αρκετές είναι οι έρευνες, που συστήνουν στους εκπαιδευτικούς να εξερευνήσουν διαφορετικές μεθόδους διδασκαλίας των Πιθανοτήτων και να αποκτήσουν εμπιστοσύνη στην ικανότητά τους να διδάσκουν πιθανότητες (Batanero & Chernoff, 2016). Άλλες έρευνες από την άλλη, εστιάζουν στο ρόλο των μη γνωστικών παραγόντων, όπως στάσεις και κίνητρα στην εκπαίδευση των εκπαιδευτικών για να διδάξουν την πιθανότητα (Batanero & Chernoff, 2016). Επίσης, δεν είναι λίγες και οι έρευνες που χαρακτηρίζουν ως σημαντικό για τους εκπαιδευτικούς, να κατανοήσουν τη στάση των μαθητών τους απέναντι στις Πιθανότητες και να τις χρησιμοποιήσουν ως ένα αποτελεσματικό εργαλείο για τη λήψη κατάλληλων μέτρων για τη συνεχή ενίσχυση της διδακτικής τους παρέμβασης (Veloo & Chairhany, 2013).

Η εκπαίδευση και η μετεκπαίδευση των εκπαιδευτικών βέβαια, δεν πρέπει να περιορίζεται στο κομμάτι των γνώσεων του διδακτικού αντικειμένου. Πιο αναλυτικά, τα πλεονεκτήματα χρήσης των νέων τεχνολογιών τόσο στο τομέα των πιθανοτήτων, αλλά και άλλων διδακτικών αντικειμένων, ανοίγουν το δρόμο για την ένταξη τους στο εκπαιδευτικό σύστημα. Έτσι, σημαντικό κρίνεται από πολλούς ερευνητές να υπάρχουν ανά τακτά χρονικά διαστήματα επιμορφωτικά σεμινάρια και ημερίδες, σχετικά με τη χρήση των νέων τεχνολογιών στην εκπαιδευτική διαδικασία (Zorzos & Avgerinos, 2019). Η αναγκαιότητα της ύπαρξης αυτών των δια βίου επιμόρφωσης εκπαιδευτικών προγραμμάτων για τους εκπαιδευτικούς, πηγάζει τόσο από την επιρροή που ασκεί τα τελευταία χρόνια η τεχνολογία στην εκπαιδευτική τάξη, όσο και από την προσοχή που πρέπει να δοθεί, ώστε η τεχνολογία να ενταχθεί ομαλά στην εκπαιδευτική διαδικασία και όχι ως μια επιπλέον απαίτηση (Μιχαηλίδης, 2007). Η κατάλληλη επιμόρφωση θα εφοδιάσει τον εκπαιδευτικό με δεξιότητες που θα μπορεί να συνδυάζει τις παιδαγωγικές μεθόδους με την τεχνολογία και τις εκπαιδευτικές εφαρμογές της πληροφορικής, χωρίς να υποβαθμίζει τη ποιότητα του μαθήματος (Gras & Kuntz, 2008).

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^{Ο}: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρείται η μεθοδολογική θεμελίωση της έρευνας, καθώς και ο τρόπος εργασίας υπό το φόντο της κεντρικής ιδέας του ερευνητή. Πιο αναλυτικά, επεξηγούνται η πρωτοτυπία, ο σκοπός και οι ερευνητικές υποθέσεις της συγκεκριμένης μελέτης, ακολουθούμενες από μια αναλυτική περιγραφή της ερευνητικής στρατηγικής, των μέσων συλλογής των δεδομένων και του τρόπου ανάλυσης των αποτελεσμάτων.

Άξιο αναφοράς προς τον αναγνώστη, αποτελεί το γεγονός, ότι η παρακάτω έρευνα εντάσσεται στο ευρύτερο πλαίσιο των ερευνών έρευνας δράσης. Γίνεται αξιοποίηση και ανάλυση σχολικών εγχειριδίων και μέσα συλλογής δεδομένων αποτελούν η συνέντευξη και το ερωτηματολόγιο. Κατά συνέπεια, η ερευνητική προσέγγιση παρουσιάζει τόσο μια ποιοτική, όσο και μια ποσοτική ανάλυση. Η ανάγκη ανάλυσης των αποτελεσμάτων που συλλέχτηκαν οδήγησε στη χρήση τριών στατιστικών πακέτων ανάλυσης.

7.1 Σκοπός έρευνας

Ως επιστέγασμα του θεωρητικού πλαισίου της έρευνας, προκύπτει, ότι η κατανόηση της σημαντικότητας μιας θεωρίας με τέτοιο βεληνεκές καθημερινών εφαρμογών, καθώς και η αυταπόδεικτη επιρροή της στη λήψη αποφάσεων σε σημαντικούς τομείς της καθημερινότητας, χρήζει υψηλής σημασίας για τον μελλοντικό άνθρωπο. Ιδιάζων σκοπός της παρούσας έρευνας, είναι να επιδείξει την άμεση συσχέτιση των πιθανοτήτων με καθημερινές δραστηριότητες και αποφάσεις, και κατά συνέπεια να επισιτίσει την αναγκαιότητα για περαιτέρω προσοχή κατά τη διδακτική παρέμβαση της θεωρίας. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτό, γίνεται μια προσπάθεια ανάλυσης του βαθμού επίτευξης των στόχων που τίθενται στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών. Ακόμα, η έρευνα αυτή, στοχεύει να προτείνει βελτιώσεις μέσα από την διεθνή βιβλιογραφία, που οφείλουν να πλαισιώσουν την εκπαιδευτική διαδικασία της θεωρίας. Μάλιστα, μέσα από την ποσοτική και ποιοτική σύγκριση των σχολικών εγχειριδίων της Ελλάδας με τα αντίστοιχα άλλων χωρών που διακρίνονται για τις μαθηματικές τους επιδόσεις, προτείνονται βελτιώσεις στη δομή και τη θεματολογία του σχολικού βιβλίου, με στόχο την αναβάθμιση του.

Μάλιστα, αυτή η ερευνητική εργασία, στοχεύει να αναδείξει την απήχηση των πιθανοτήτων στη καθημερινότητα, με την ταυτόχρονη επιρροή τους από τη σχολική διδακτική παρέμβαση και το σχολικό εγχειρίδιο. Ως αποτέλεσμα αυτού, μελετάται η επιρροή των Πιθανοτήτων μέσα από τρεις διαφορετικούς άξονες. Πρώτων, τις εμπειρίες και την επαγγελματική ενασχόληση του κοινωνικού συνόλου με τις Πιθανότητες, δεύτερον μέσα από την άποψη των εκπαιδευτικών που διδάσκουν Πιθανότητες, και τρίτον μέσα από την συγκριτική ανάλυση του ελληνικού σχολικού εγχειριδίου, με πρότυπα σχολικά βιβλία άλλων χωρών.

Πιο συγκεκριμένα, η έρευνα αποσκοπεί να μελετήσει:

1. Ποιες είναι οι αντιλήψεις του δείγματος για την αναγκαιότητα και τη χρησιμότητα των «Πιθανοτήτων» στην καθημερινότητα;
2. Ποιες είναι οι αντιλήψεις του δείγματος για την αναγκαιότητα και τη χρησιμότητα των «Πιθανοτήτων» στην επαγγελματική του δραστηριότητα;
3. Δείχνει ο μέσος άνθρωπος εμπιστοσύνη στην Θεωρία Πιθανοτήτων;
4. Ποια είναι η επιρροή της θεωρίας των Πιθανοτήτων στον εκάστοτε πολίτη;
5. Ποια η αντίληψη των ερωτηθέντων για την Πιθανότητα και καθημερινά ζητήματα πιθανοτήτων;
6. Τι σχέση έχουν οι ερωτώμενοι με τη διδακτική των Πιθανοτήτων κατά τη σχολική τους εμπειρία;
7. Ποιοι παράγοντες επηρέασαν την μάθηση των ερωτώμενων κατά τα σχολικά τους χρόνια;
8. Ποια είναι η επιρροή των Πιθανοτήτων σε μια σημαντική απόφαση;
9. Ποια είναι η επιρροή των Πιθανοτήτων στην αναζήτηση συνδυασμών;
10. Ποια είναι η επιρροή των Πιθανοτήτων και τη σχέση με τις παρερμηνείες ενός αποτελέσματος;
11. Ποια είναι η επιρροή των Πιθανοτήτων σε μια πρόβλεψη;
12. Ποια η διαφορά στην εμπιστοσύνη που δείχνουν οι ερωτώμενοι μεταξύ συναισθηματισμού και πιθανότητας;
13. Ποιος ο βαθμός κατανόησης της χρήσης της θεωρίας σε μια καθημερινή κατάσταση;
14. Ποιες είναι οι βασικές διαφορές των σχολικών βιβλίων της Ελλάδας με τα αντίστοιχα της Σιγκαπούρης και της Ολλανδίας στο κεφάλαιο των Πιθανοτήτων;

15. Ποια είναι η δυνατότητα και η ευχέρεια των εκπαιδευτικών να ακολουθήσουν τις οδηγίες των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών περί τα μαθηματικά;

7.2 Ερευνητικές υποθέσεις-ερωτήματα

Η παρούσα έρευνα συστήθηκε με γνώμονα τη χρησιμότητα των Πιθανοτήτων στη καθημερινή ζωή και την ανάγκη προς βελτίωση των πιθανοτικών γνώσεων και δεξιοτήτων που πρέπει να εξοπλίζουν τον άνθρωπο. Είναι γεγονός σήμερα, ότι οι Πιθανότητες αποτελούν ένα από τους πιο χρηστικούς κλάδους των μαθηματικών και η θεωρεία τους αποτελεί τμήμα των σχολικών μαθηματικών προγραμμάτων σε ολοένα και περισσότερες αναπτυσσόμενες χώρες (Batanero et al., 2016). Το μεγάλο όμως ερώτημα που προκύπτει, έχει να κάνει με την αντίληψη του μέσου ανθρώπου σχετικά με την εμφανή χρησιμότητα του συγκεκριμένου μαθηματικού κλάδου. Γεγονός, που παίζει καθοριστικό ρόλο στην προσφορά ενός κινήτρου μάθησης στον μαθητή.

Αναλυτικότερα, η χρόνια ενασχόληση του ερευνητή με τη διδακτική των πιθανοτήτων και την αντίληψη των μαθητών για αυτές, σε συνδυασμό με μια διεξοδική μελέτη της διεθνούς βιβλιογραφίας, οδήγησε στο σχεδιασμό της συγκεκριμένης έρευνας. Η έρευνα αυτή, συστήθηκε με τα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

1. Ποιος είναι ο βαθμός συσχέτισης των Πιθανοτήτων με την καθημερινή λήψη αποφάσεων του μέσου ανθρώπου;

2. Τι σχέση έχει η αντίληψη του μέσου ανθρώπου για τις Πιθανότητες, με την χρήση τους σε επαγγελματικές, κοινωνικές ή προσωπικές καταστάσεις;

3. Επαρκούν οι υπάρχουσες γνώσεις – αντιλήψεις ενός ανθρώπου για την θεωρία Πιθανοτήτων, στην αντιμετώπιση καθημερινών στοχαστικών καταστάσεων;

4. Πόσο εφικτό είναι χρονικά κατά την διάρκεια μιας σχολικής περιόδου να διδάσκονται οι Πιθανότητες, σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα και τις οδηγίες διδασκαλίας που παρέχει το ΥΠΕΠΘ;

5. Ποιοι βασικοί παράγοντες επηρεάζουν περισσότερο την μάθηση των πιθανοτικών εννοιών;

6. Τι σχέση έχουν οι γενικότερες προτάσεις διδακτικής των Πιθανοτήτων, με τα σχολικά εγχειρίδια;
7. Τι σχέση έχουν οι δραστηριότητες των στοχαστικών μαθηματικών των σχολικών εγχειριδίων της Ελλάδας, με τα αντίστοιχα εγχειρίδια άλλων χωρών;

7.3 Αναγκαιότητα και πρωτοτυπία της έρευνας

Ο κλάδος των Πιθανοτήτων συγκεντρώνει το ενδιαφέρων πολλών επιστημονικών τομέων, αφού πολλά καθημερινά προβλήματα βασίζονται σε πιθανοτικές και σε στοχαστικές διαδικασίες. Άμεσο αποτέλεσμα του εν λόγω γεγονότος, είναι η εισαγωγή της θεωρίας πιθανοτήτων τόσο στο επίκεντρο της επιστημονικής μελέτης, όσο και σε αυτό της εκπαίδευσης.

Αρκετές μελέτες που έχουν πραγματοποιηθεί στο παρελθόν για τις αντιλήψεις των μαθητών για τις Πιθανότητες, έχουν δείξει, ότι τα παιδιά αντιλαμβάνονται πιθανοτικές έννοιες ήδη από την ηλικία των 8 ετών (Ζώρζος, 2018). Μάλιστα, μια πρόχειρη έρευνα στην ύλη των μαθηματικών διαφόρων χωρών δείχνει, ότι τα παιδιά εντάσσονται από μικρή ηλικία σε πιθανοτικές διαδικασίες και προβλήματα. Λόγου χάρη, στην Ελλάδα μαθαίνουν τρόπους συλλογής δεδομένων και αναπαράστασης των αποτελεσμάτων από την Β τάξη Δημοτικού. Επίσης, συχνά γίνονται έρευνες και προτείνονται διδακτικές παρεμβάσεις με στόχο την βελτίωση της διδασκαλίας των Πιθανοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, προτείνεται η χρήση πειραμάτων, και καθημερινών στοχαστικών διαδικασιών για να επιτευχθεί η διαδραστικότητα στο μάθημα και κατά επέκταση η βελτίωση της μάθησης. Επίσης, δεν είναι λίγες και οι έρευνες που ελέγχουν τη χρήση των νέων τεχνολογικών μέσων κατά την διδακτική της Πιθανότητας.

Η πλειοψηφία της διεθνούς βιβλιογραφίας βέβαια, ασχολείται με έρευνες για τις προοπτικές στην εκπαίδευση των πιθανοτήτων στο σχολείο και για τις αντιλήψεις των μαθητών για τις πιθανοτικές έννοιες. Τέτοιες έρευνες φυσικά, συμβάλλουν κατά καιρούς στη βελτίωση της διδακτικής διαδικασίας, ωστόσο υστερούν στην συσχέτιση των προσλαμβανόμενων γνώσεων με την καθημερινή δραστηριότητα των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, έχει παρατηρηθεί από διάφορους ερευνητές, ότι οι περισσότεροι άνθρωποι αδυνατούν να κάνουν χρήση των γνώσεων Πιθανότητας ή αγνοούν τα πλεονεκτήματα τη θεωρίας στην καθημερινή ζωή (Konold, 2002). Μάλιστα, αναζητώντας βιβλιογραφία και από τον διεθνή χώρο, δεν βρέθηκαν έρευνες που να συγκεντρώνουν και να μελετάνε τους παράγοντες που χρίζουν την πιθανότητα σημαντική για τη καθημερινή ζωή. Με άλλα λόγια, απουσιάζουν έρευνες που να εμφανίζουν τα πλεονεκτήματα χρήσης της θεωρίας σε καθημερινές στοχαστικές διαδικασίες και κατά συνέπεια να εξοπλίζουν τον μαθητή με ένα κίνητρο μάθησης. Γεγονός, που την σημαντικότητα του υποστηρίζουν ο Kloosterman και ο Stage από το 1992 και εκ τότε πολλές έρευνες το επαληθεύουν.

Ακόμα, έχει αποδειχθεί κατά καιρούς η σημαντικότητα της ανάλυσης, αλλά και της σύγκρισης των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών διαφόρων χωρών (Fan et al., 2013). Μάλιστα, αυτό το ερευνητικό πεδίο έχει γνωρίσει ιδιαίτερη άνθηση τα τελευταία δέκα χρόνια, ωστόσο υστερεί στην σύνδεση αυτών των ερευνών με εμπειρικά δεδομένα, αλλά και στην δημιουργία ενός καταλόγου παραγόντων που μπορούν να αναλυθούν ή να συγκριθούν μεταξύ των σχολικών εγχειριδίων, δικαιολογώντας τις διαφορετικές ευκαιρίες μάθησης που το σχολικό βιβλίο είναι σε θέση να προσφέρει. Κατά συνέπεια, η παρούσα ερευνητική εργασία, αναλαμβάνει να πραγματοποιήσει μια όσο το δυνατόν αναλυτικότερη σύγκριση μεταξύ σχολικών βιβλίων διάφορων χωρών, προκειμένου αφενός να συμπληρώσει έναν τέτοιο κατάλογο και αφετέρου να αναδείξει την σημασία αυτής της ανάλυσης μέσα από έρευνες που φανερώνουν τις διαφορετικές επιδόσεις των μαθητών. Επίσης, είναι γεγονός, ότι τα ελληνικά εκπαιδευτικά εγχειρίδια των μαθηματικών και ειδικότερα στο κομμάτι των Πιθανοτήτων, δεν έχουν αποδείξει την διδακτική τους αξία. Μάλιστα, εμφανίζεται μια έλλειψη πιθανοτικών γνώσεων των Ελλήνων μαθητών, η οποία αντικατοπτρίζεται κυρίως μέσα από έρευνες διεθνών προγραμμάτων όπως το PISA (OECD, 2019). Επίσης, δεν είναι λίγες οι έρευνες που έχουν δείξει, ότι πολλοί φοιτητές στην Ελλάδα, εμφανίζονται απογοητευμένοι σε μεγάλο ποσοστό από τα σχολικά εγχειρίδια σε αυτόν τον μαθηματικό κλάδο (Ζώρζος, 2018).

Η παρούσα μελέτη, έρχεται να καλύψει τα παραπάνω κενά. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύοντας τη χρήση των Πιθανοτήτων σε καθημερινή βάση, από ανθρώπους διάφορων επαγγελμάτων και μελετώντας το χάσμα μεταξύ της θεωρίας των ΑΠΣ-ΔΕΠΠΣ μέχρι την διδακτική πράξη, έρχεται τόσο για να αναδείξει στον κόσμο τη χρησιμότητα μιας θεωρίας που οι περισσότεροι νομίζουν ότι βρίσκει απήχηση μόνο στα τυχερά παιχνίδια, όσο και να εντοπίσει τα διδακτικά κενά στην ποσότητα και την ποιότητα της ύλης που διδάσκεται στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα. Το δεύτερο, επιτυγχάνεται σε μεγαλύτερο βαθμό και από τις προτάσεις βελτίωσης των σχολικών εγχειριδίων, έπειτα από τις διαφορές που προκύπτουν από τη συγκριτική μελέτη των ελληνικών σχολικών βιβλίων με τα αντίστοιχα άλλων χωρών που εμφανίζουν ιδιαίτερες μαθηματικές επιδόσεις σε διεθνής διαγωνισμούς. Εδώ πρέπει να σημειωθεί και η έλλειψη μελετών στην διεθνή επιστημονική κοινότητα, που να συγκρίνουν βιβλία τριών διαφορετικών χωρών ειδικά στο τομέα των Πιθανοτήτων. Επιπροσθέτως, γίνεται μια ενδελεχή καταγραφή των βασικών παραγόντων που επηρεάζουν την εκπαιδευτική διαδικασία, καθώς και για τις σωστές διδακτικές παρεμβάσεις που προτείνονται ως αποτελεσματικές από παλαιότερες έρευνες του διεθνή χώρου για την διδακτική των Πιθανοτήτων.

Με άλλα λόγια, η συγκεκριμένη εργασία στοχεύει να αφυπνίσει τη διάθεση του κόσμου για την μελέτη της θεωρίας Πιθανοτήτων και αναδεικνύοντας τη χρησιμότητα της, να βελτιώσει τόσο την μάθηση, όσο και την εκπαιδευτική διαδικασία. Ο τομέας της διδακτικής των πιθανοτήτων, όπως και άλλοι επιστημονικοί τομείς, στερούνται ερευνών όπως η δεδομένη, παρόλο που κρίνεται αρκετά σημαντική στην εξέλιξη των διδακτικών πρακτικών και της μάθησης. Σύμφωνα με τα παραπάνω λοιπόν, κρίνεται απαραίτητη η διεξαγωγή τέτοιων ερευνών, καθώς όχι μόνο συντελούν στη λήψη σημαντικών στατιστικών συμπερασμάτων, αλλά βοηθούν τόσο τους εκπαιδευτικούς, όσο και τα στελέχη των παιδαγωγικών ινστιτούτων στην οικοδόμηση ενός σωστού σχολικού προγράμματος με μεγαλύτερη αξιοπιστία και αποτελεσματικότητα.

7.4 Ερευνητική προσέγγιση

Η διεξαγωγή μιας έρευνας χρήζει ως ένα από τα σημαντικότερα στάδια της, τον τρόπο προσέγγισης και συλλογής των δεδομένων. Μέσα από αυτήν την επιλογή του ερευνητή, σκιαγραφείται η εγκυρότητα και η αξιοπιστία της έρευνας. Σήμερα, οι περισσότερες έρευνες βασίζονται σε δύο συνήθης τρόπους προσέγγισης ή συνδυασμό αυτών. Ο λόγος γίνεται για την ποσοτική και την ποιοτική προσεγγιστική ερευνητική μέθοδο.

Η ποσοτική προσέγγιση είναι μια μεγάλης κλίμακας έρευνα και διεξάγετε κυρίως μέσο ερωτηματολογίου ή δομημένης συνέντευξης (Dawson, 2007). Χαρακτηριστικό της είναι, ότι ο συγκεκριμένος τύπος έρευνας δεν απαιτεί την άμεση επαφή του ερευνητή με το δείγμα. Λογικό, μάλιστα, από τη στιγμή που σε μεγάλες έρευνες αυτό είναι σχεδόν αδύνατο. Ωστόσο, απαιτεί μια αυστηρή αλληλουχία βημάτων κατά τη σχεδίαση και την εκτέλεση της (Dawson, 2007).

Η ποιοτική προσέγγιση δεν χαρακτηρίζεται από την αυστηρότητα και το μέγεθος του δείγματος που χρησιμοποιεί η ποσοτική. Φυσικά, αυτό δεν σημαίνει, ότι στερείται επιστημονικής σημασίας. Σε αυτή την προσέγγιση, ο ερευνητής επιδιώκει την διερεύνηση σε βάθος της ιδιαιτερότητας του υπό μελέτη φαινομένου, διαμορφώνοντας έτσι μια ολοκληρωτική προσέγγιση (Ίσαρη & Πουρκός, 2015). Το σημαντικό εδώ είναι, ότι μπορεί το δείγμα να είναι μικρότερο, αλλά υπάρχει επαφή με το δείγμα του ίδιου του ερευνητή και μάλιστα για αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα. Κατά συνέπεια, μέσω παρατήρησης, συνέντευξης ή αρκετές φορές και διδακτικής παρέμβασης, διεξάγονται συμπεράσματα για τις συμπεριφορές και τις εμπειρίες των ερωτώμενων (Dawson, 2007).

Η παρούσα ερευνητική εργασία αποτελεί μία ατομική μελέτη που ανατέθηκε στον ερευνητή με πρωτοβουλία του και κατόπιν συνεννόησης με τον επιβλέποντα καθηγητή. Το πλαίσιο διεξαγωγής της έρευνας είναι η εκπαίδευση και γενικότερα η μαθηματική εκπαίδευση. Μελετώνται οι αντιλήψεις και οι εμπειρίες του κοινωνικού περίγυρου για τις Πιθανότητες και τη χρησιμότητα τους σε καθημερινά δρόμενα. Ακόμα, μελετάται η άποψη καθηγητών μαθηματικών σχετικά με ύλη και την κατά γράμμα τήρηση των οδηγιών διδασκαλίας, καθώς και γίνεται μια συγκριτική ανάλυση των ελληνικών σχολικών εγχειριδίων με άλλα του εξωτερικού. Σύμφωνα με αυτά τα ζητούμενα, η παρούσα έρευνα δεν μπορεί να αρκεστεί μόνο στη χρήση ποσοτικής ή μόνο ποιοτικής προσέγγισης, ώστε να επιτευχθεί η μέγιστη δυνατή αυστηρότητα και αξιοπιστία. Κατά συνέπεια, ακολουθείται μια μεικτή προσέγγιση, με παρουσία τόσο ποσοτικών, όσο και ποιοτικών στοιχείων. Σε αυτήν την προσέγγιση, οι δύο μέθοδοι λειτουργούν συμπληρωματικά μεταξύ τους, προσφέροντας στον ερευνητή μια καλύτερη και πληρέστερη διερεύνηση των εξεταζόμενων ζητημάτων (Ίσαρη & Πουρκός, 2015). Λόγω αυτού, θα μπορούσε να πει κανείς, ότι τα αποτελέσματα μιας τέτοιας έρευνας, τείνουν να είναι πιο αξιόπιστα, καθώς αντισταθμίζονται τα αδύναμα σημεία της μιας μεθόδου με την άλλη (Ίσαρη & Πουρκός, 2015). Μάλιστα, αυτό το είδος έρευνας, επιτυγχάνει να δώσει απαντήσεις σε ένα ευρύτερο φάσμα ερευνητικών ερωτημάτων (Ίσαρη & Πουρκός, 2015).

7.5 Μέσα συλλογής δεδομένων

Η πολυδιάστατη έρευνα της συγκεκριμένης εργασίας, μέσα στις πολλαπλές απαιτήσεις της, είχε και αυτές της συλλογής των δεδομένων. Τα δεδομένα που απαιτούνταν για τις ανάγκες της έρευνας αυτής, δεν θα μπορούσαν να συλλεχτούν μόνο με ένα μέσο συλλογής. Κατά συνέπεια, ο τρόπος συλλογής τους, αποτελείται κυρίως από την χρήση ερωτηματολογίου και ημιδομημένων συνεντεύξεων. Μάλιστα, η συλλογή ορισμένων ποιοτικών δεδομένων, όπως η ύλη των μαθηματικών της Ελλάδας την τελευταία δεκαετία και τα σχολικά βιβλία μαθηματικών των τάξεων του Δημοτικού για τις χώρες Σιγκαπούρη και Ολλανδία, απαίτησαν την άμεση επαφή του ερευνητή με τα παιδαγωγικά ινστιτούτα των τριών αυτών χωρών, καθώς το διαδίκτυο δεν ήταν πλήρως ενημερωμένο με τα ζητούμενα δεδομένα.

Το ερωτηματολόγιο συντάχθηκε από τον ερευνητή και προσαρμόστηκε στις ανάγκες και τους στόχους της έρευνας. Στόχος του ερωτηματολογίου κατά τον σχεδιασμό του, τέθηκε η κάλυψη ενός ευρύ φάσματος ηλικιών και εργαζομένων. Παράλληλα, το δύσκολο εγχείρημα του ερευνητή, το οποίο απαίτησε ιδιαίτερη προσοχή και χρόνο, ήταν να δομηθεί ένα ερωτηματολόγιο που να αντιπροσωπεύει τα ζητούμενα της έρευνας, αλλά και να παρίσταται ευχάριστο για τον ερωτώμενο, να μην κουράζει με το πλήθος των ερωτήσεων και να μην ξεφεύγει στα χρονικά πλαίσια.

Η συνέντευξη σχεδιάστηκε σύμφωνα με τις προδιαγραφές και της αρχές των ημιδομημένων συνεντεύξεων και προσαρμόστηκε στα πλαίσια της έρευνας και τις ιδιαιτερότητες του δείγματος. Πιο συγκεκριμένα, ο προορισμός της συνέντευξης ήταν ένα σύνολο καθηγητών μαθηματικών. Γεγονός, που επέτρεψε στον ερευνητή ως μαθηματικό, να σχεδίασε την συνέντευξη χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες.

Άξιο αναφοράς εδώ είναι, η διατήρηση ενός υψηλού δεοντολογικού πήχη. Αυτό στην έρευνα, επιτυγχάνεται με την εθελοντική συμμετοχή των ατόμων που έλαβαν μέρος στις συνεντεύξεις ή στο ερωτηματολόγιο, αλλά και την διατήρηση της ανωνυμίας τους, με ταυτόχρονη ψυχική και πνευματική κάλυψη των συναισθημάτων τους. Ακόμα, και μέσα από τα ευεργετικά αποτελέσματα της έρευνας για το σύνολο της εκπαιδευτικής κοινότητας.

7.5.1 Ανάλυση Βιβλίων

Πολλές έρευνες έχουν γίνει κατά καιρούς στην ανάλυση ή τη σύγκριση σχολικών βιβλίων μεταξύ διάφορων χωρών. Κάθε χώρα εμφανίζει τις δικές της ιδιαιτερότητες στα σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιούνται στο σχολικό της πρόγραμμα. Το εκάστοτε σχολικό εγχειρίδιο, αποτελεί την σκιαγράφηση της πορείας και της ευκαιρίες μάθησης που λαμβάνει ο μαθητής (Yang & Sianturi, 2019; Zhu & Fan, 2006). Γεγονός, που αναμφίβολα τεκμηριώνει την σπουδαιότητα των μελετών που αναλύουν ή συγκρίνουν τα σχολικά βιβλία διάφορων χωρών. Μάλιστα, δεν είναι λίγοι και οι ερευνητές που θεωρούν, ότι αυτές οι μελέτες μπορούν να επεξηγήσουν σε ένα βαθμό τις διαφορές απόδοσης των μαθητών (Xin, 2007; Zorzos & Avgerinos, 2022).

Στην παρούσα εργασία πραγματοποιείται μια διεξοδική ανάλυση των κεφαλαίων που πραγματεύονται στοχαστικά μαθηματικά στο βιβλίο του μαθητή, στα σχολικά βιβλία μαθηματικών της Ελλάδας, της Σιγκαπούρης και της Ολλανδίας. Η ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων απαντάει στο έκτο και το έβδομο ερευνητικό ερώτημα, όπως αυτά τέθηκαν παραπάνω. Κατά συνέπεια, γίνεται μια προσπάθεια να αναλυθούν τα επιλεγμένα κεφάλαια ως προς τις ασκήσεις, τις γνωστικές απαιτήσεις, τις επιστημονικές πρακτικές, τη μορφή των θεμάτων, την ισορροπία μεταξύ των γνωστικών επιπέδων και τις διαισθητικές ή δημιουργικές ικανότητες που προάγουν.

Η Ελλάδα χρησιμοποιεί ένα συγκεκριμένο σχολικό βιβλίο μαθηματικών, εγκεκριμένο από το ελληνικό Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Το Υπουργείο Παιδείας της Σιγκαπούρης, ενώ έχει ρόλο στην έγκριση των βιβλίων, δεν περιορίζεται σε ένα μόνο εκδοτικό οίκο, αλλά εκδίδοντας ένα κατάλογο με εγκεκριμένα σχολικά βιβλία μαθηματικών, αφήνει την επιλογή στον εκάστοτε εκπαιδευτικό (Toprak & Özmantar, 2019). Αντιθέτως, στην Ολλανδία το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο συνεργάζεται με 6 εκδοτικούς οίκους και τα βιβλία τα επιλέγουν οι εκπαιδευτικοί, χωρίς να υπάρχει συγκεκριμένη αρχή έγκρισης (Van den Ham & Heinze, 2018).

Η επιλογή των βιβλίων από τις χώρες Σιγκαπούρη και Ολλανδία προήλθε έπειτα από την επικοινωνία του ερευνητή με τα αντίστοιχα Παιδαγωγικά Ινστιτούτα των δύο χωρών. Πιο συγκεκριμένα, το Ινστιτούτο της Σιγκαπούρης πρότεινε ένα εγχειρίδιο, το οποίο μεταγλωττίζεται σε αρκετές γλώσσες και λανσάρεται και σε άλλες χώρες ως βασικό σχολικό βιβλίο μαθηματικών. Μάλιστα, οι εκδόσεις αυτές που λανσάρονται εκτός Σιγκαπούρης προσαρμόζονται στην ύλη και τα ιδιαίτερα πολιτισμικά χαρακτηριστικά της χώρας προορισμού. Το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο του Freudenthal στην Ολλανδία, πρότεινε στον ερευνητή τον εκδοτικό οίκο και το σχολικό εγχειρίδιο που εμφανίζουν τις περισσότερες εμπορικές πωλήσεις στα σχολεία και τους μαθητές της Ολλανδίας την σχολική περίοδο 2020-2021. Παρακάτω, εμφανίζεται ένας πίνακας, όπου αναγράφονται τα σχολικά βιβλία κάθε χώρας που χρησιμοποιήθηκαν για τις ανάγκες της δεδομένης μελέτης.

Πίνακας 6: Σχολικά βιβλία που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα

Χώρα	Βιβλίο
Ελλάδα	Βρυώνης, Κ., Δουκάκης, Σ., Καρακώστα, Β., Μπαραλής, Γ., & Σταύρου, Ι. (2018). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού*. ΙΤΥΕ Διόφαντος. Κασσιώτη, Ό., Κλιάπης, Π. & Οικονόμου, Θ. (2013). *Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού.* ΙΤΥΕ Διόφαντος.
Σιγκαπούρη	Marshall Cavendish Education. (2021). *Primary Mathematics 1B U.S. Edition*. Singapore. Marshall Cavendish Education. (2021). *Primary Mathematics 2B U.S. Edition*. Singapore. Marshall Cavendish Education. (2021). *Primary Mathematics 3B U.S. Edition*. Singapore. Marshall Cavendish Education. (2021). *Primary Mathematics 4A U.S. Edition*. Singapore. Marshall Cavendish Education. (2021). *Primary Mathematics 5B U.S. Edition*. Singapore. Marshall Cavendish Education. (2021). *Primary Mathematics 6B U.S. Edition*. Singapore.
Ολλανδία	Noordhoff Utigevers. (2020). *Getal & Ruimte Junior 4*. Netherlands. Noordhoff Utigevers. (2020). *Getal & Ruimte Junior 5*. Netherlands. Noordhoff Utigevers. (2020). *Getal & Ruimte Junior 6*. Netherlands. Noordhoff Utigevers. (2020). *Getal & Ruimte Junior 7*. Netherlands. Noordhoff Utigevers. (2020). *Getal & Ruimte Junior 8*. Netherlands.

Για την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε στην παρούσα εργασία, ακολουθήθηκε μια συγκεκριμένη σειρά ανάλυσης κεφαλαίων και δραστηριοτήτων, όπως επίσης διατηρήθηκαν από τον ερευνητή ορισμένες αρχές. Αρχικά, γίνεται μια αναφορά στον μέσο όρο σελίδων και ασκήσεων ανά παράγραφο στο σύνολο των βιβλίων με στοχαστικά μαθηματικά των τριών χωρών. Έπειτα, γίνεται μια οριζόντια ανάλυση για την ύλη και τα κεφαλαία των πιθανοτικών εννοιών που λαμβάνουν χώρα στα σχολικά βιβλία των τριών επιλεγμένων χωρών. Ακολουθεί, μια ανάλυση των κεφαλαίων, σχετικά με τις προτεινόμενες καλές πρακτικές που εμφανίζονται στο εκάστοτε σχολικό βιβλίο. Εδώ αξίζει να αναφερθεί, ότι ο ερευνητής θεώρησε πως τα βιβλία της εκάστοτε χώρας ακολουθούν μία από τις καλές πρακτικές που όρισε ως μέτρο σύγκρισης, μόνο στην περίπτωση που αυτές αφορούν το σύνολο ή την πλειοψηφία των υπό μελέτη παραγράφων και όχι για μεμονωμένες περιπτώσεις.

Η ανάλυση συνεχίζει με μια καταμέτρηση των ασκήσεων και τον διαχωρισμό τους σε απλές, μέτριας δυσκολίας και πιο σύνθετες ασκήσεις. Ο διαχωρισμός αυτός ανάγει τις ασκήσεις που χρήζουν συνδυαστικών γνώσεων με άλλα κεφάλαια, σύνθετη σκέψη και απαιτητικές πράξεις για την εκάστοτε σχολική τάξη, στις σύνθετες ασκήσεις. Ως μέτριας δυσκολίας ασκήσεις, χαρακτηρίζει τις λιγότερο απαιτητικές ασκήσεις που ωστόσο συνδυάζουν τις νέες έννοιες με άλλα κεφάλαια ή λίγο πιο απαιτητικές διαδικασίες. Τέλος, ορίζει ως απλές ασκήσεις αυτές που επεξεργάζονται απλές διαδικασίες, με απώτερο στόχο την κατανόηση των νέων διδασκόμενων εννοιών. Αυτήν την ανάλυση, ακολουθεί ο διαχωρισμός των ασκήσεων, σύμφωνα με την παρουσία σε αυτές διαγραμμάτων, πινάκων ή εικόνων, την ζήτηση αιτιολόγησης ή απόδειξης, την ύπαρξη πολλαπλών λύσεων και την ανάγκη πιο σύνθετων πράξεων σύμφωνα πάντα με την εκάστοτε σχολική βαθμίδα.

Στην συνέχεια, καταμετρώνται και διαχωρίζονται οι δραστηριότητες σύμφωνα με την χρήση φαντασίας, λογικής, εκτίμησης και άλλα χαρακτηριστικά που προέκυψαν από την μελέτη της διεθνούς βιβλιογραφίας (Dimopoulos et al., 2003). Πιο συγκεκριμένα, οι ασκήσεις που απαιτούσαν την χρήση της φαντασίας του μαθητή, έστω και ένα σχήμα το οποίο δεν δινόταν σχεδιασμένο, αποτέλεσαν τις ασκήσεις φαντασίας. Οι ασκήσεις λογικής ήταν αυτές που ο μαθητής έπρεπε να ακολουθήσει μια λογική διαδικασία βημάτων για να καταλήξει στο αποτέλεσμα. Η συνέχεια της ανάλυσης δίνει την σκυτάλη στην ανάλυση των δραστηριοτήτων (Krathwohl, 2002; Dimopoulos et al., 2003). Έτσι, πραγματοποιείται μια διεξοδική ανάλυση του συνόλου των δραστηριοτήτων στα σχολικά βιβλία κάθε χώρας, ως προς το είδος της γνώσης (πραγματολογική γνώση, εννοιολογική και διαδικαστική γνώση), το πλαίσιο εφαρμογής (χωρίς πλαίσιο, καθημερινό πλαίσιο, επιστημονικό πλαίσιο, παιχνίδι ή άλλο πλαίσιο), τα γραπτά κείμενα (ταξινόμηση και τυπικότητα), τα απεικονιστικά στοιχεία (ταξινόμηση – τυπικότητα, τύπος απεικονιστικών στοιχείων, ρόλος και είδος απαιτούμενης γνώσης), τις γνωστικές απαιτήσεις (απομνημόνευση, κατανόηση, εφαρμογή, ανάλυση, αξιολόγηση) και τις επιστημονικές τους πρακτικές (υποβολή ερωτημάτων, ανάπτυξη - χρήση μοντέλων, πείραμα, ανάλυση δεδομένων, χρήση υπολογιστικής σκέψης και πράξεων, συγκρότηση εξηγήσεων – αιτιολόγησης, επιχειρηματολογία με αποδεικτικά στοιχεία, αξιόλογη – ανταλλαγή πληροφοριών) (Krathwohl, 2002; National Research Council, 2012). Άξιο αναφοράς σε αυτό το σημείο είναι, ότι οι δραστηριότητες των σχολικών βιβλίων και των τριών χωρών, στα πλαίσια της διεπιστημονικότητας και του συνδυασμού θεωριών και διαδικασιών, εμφανίζουν σε αρκετές περιπτώσεις περισσότερες από μια επιστημονικές πρακτικές και γνωστικές απαιτήσεις.

Πιο συγκεκριμένα, για να γίνει κατανοητή στον αναγνώστη η ανάλυση δραστηριοτήτων, πρέπει να παρουσιαστούν οι σταθερές που έθεσε ο ερευνητής κατά την ανάλυση μιας δραστηριότητας ή εικόνας. Ως προς το είδος της γνώσης, πραγματολογική θεωρείται η γνώση όταν υπάρχει γνώση της ορολογίας και συγκεκριμένων λεπτομερειών, εννοιολογική είναι η γνώση όταν χρειάζεται η γνώση αρχών, θεωριών και γενικότερα μοντέλων (Dimopoulos et al., 2003). Η διαδικαστική γνώση απαιτεί εξειδικευμένες δεξιότητες και γνώση αλγορίθμων (Dimopoulos et al., 2003). Το πλαίσιο εφαρμογής της γνώσης, έχει να κάνει με το γενικότερο πλαίσιο που παρουσιάζεται η άσκηση. Λόγου χάρη, μια άσκηση για μια έρευνα σχετικά με το είδος των πτηνών που έχει η Ελλάδα έχει επιστημονικό πλαίσιο, καθώς το πλαίσιο αυτό δεν είναι στην άμεση καθημερινότητα του μαθητή. Η ανάλυση των γραπτών κειμένων, αλλά και των εικόνων, ως προς την ταξινόμηση έχει να κάνει με την παρουσία επιστημονικών πληροφοριών (Ισχυρή ταξινόμηση) ή μη (ασθενής ταξινόμηση). Η τυπικότητα πραγματεύεται τον τρόπο παρουσίασης και τα χρώματα – το φόντο που χρησιμοποιούνται κατά την παρουσίαση του κειμένου ή της εικόνας (υψηλή τυπικότητα: ένα χρώμα - όχι φόντο, μέση τυπικότητα: 2 έως 4 χρώματα – μονόχρωμο φόντο, χαμηλή τυπικότητα: πολλά χρώματα –φόντο) (Dimopoulos et al., 2003). Ο τύπος των απεικονιστικών στοιχείων τα ταξινομεί ως προς τις πραγματικές φωτογραφίες (ρεαλιστικά απεικονιστικά στοιχεία), φωτογραφίες φτιαγμένες σε υπολογιστή ή ζωγραφιές (συμβατικά απεικονιστικά στοιχεία) και συνδυασμό των δύο αυτών (υβρίδια). Ο ρόλος των απεικονιστικών στοιχείων χωρίζεται σε διακοσμητικός (αν η εικόνα απλά διακοσμεί και δεν προσφέρει τίποτα στην δραστηριότητα), πληροφοριακός (αν βοηθάει συμπληρωματικά στην εκφώνηση για την λύση της άσκησης) και ερμηνευτικός (όταν είναι αναπόσπαστο κομμάτι της άσκησης και η απουσία του κάνει την εκφώνηση ελλιπή). Έπειτα, ως προς τις γνωστικές απαιτήσεις, οι δραστηριότητες ταξινομούνται ανάλογα με τις κύριες γνωστικές διαδικασίες που απαιτούν οι δραστηριότητες από τον μαθητή. Λόγου χάρη, αν μια άσκηση χρειάζεται απομνημόνευση, απλή κατανόηση, κάποια εφαρμογή, ανάλυση δεδομένων ή αξιολόγηση διαδικασιών. Οι επιστημονικές πρακτικές είναι οι διαδικασίες που απαιτεί η δραστηριότητα για να επιλυθεί. Μάλιστα, κάποιες δραστηριότητες όπως προαναφέρθηκε απαιτούσαν περισσότερες από μία επιστημονικές πρακτικές. Οι πρακτικές αυτές χωρίστηκαν ως εξής: α) υποβολή ερωτημάτων (αν η δραστηριότητα απαιτούσε ο μαθητής να απαντήσει ή να κατασκευάσει και να απαντήσει ερωτήματα), β) ανάπτυξη - χρήση μοντέλων (αν η δραστηριότητα τελικά απαιτούσε από τον μαθητή να καταλήξει σε ένα γενικό συμπέρασμα και να αναπτύξει το μοντέλο – την θεωρία), γ) πείραμα (διεξαγωγή, κατασκευή ή περιγραφή πειράματος), δ) ανάλυση δεδομένων (ανάλυση συλλεγμένων δεδομένων και συζήτηση ή ερωτήσεις σε αυτά), ε) χρήση υπολογιστικής σκέψης και πράξεων (αν η δραστηριότητα ήθελε από τον μαθητή να κάνει πράξεις και υπολογισμούς, ακόμα και εκτιμήσεις), ζ) συγκρότηση εξηγήσεων – αιτιολόγησης (αν η δραστηριότητα ζητούσε αιτιολόγηση από τον μαθητή), η) επιχειρηματολογία με αποδεικτικά στοιχεία (αν ο μαθητής για να απαντήσει σε κάποιο ερώτημα της δραστηριότητας έπρεπε να ανατρέξει σε κάποια μαθηματική απόδειξη ή επιχειρηματολογία) και τέλος θ) αξιόλογη – ανταλλαγή πληροφοριών (όταν υπήρχε στην δραστηριότητα απαίτηση για συζήτηση στην τάξη ή ανταλλαγή πληροφοριών, δεδομένων ή και λύσεων με κάποιον ή κάποιους συμμαθητές) (Krathwohl, 2002; National Research Council, 2012).

Οι παραπάνω τρόποι ανάλυσης και σύγκρισης των σχολικών εγχειριδίων είναι συνδυασμοί που δημιούργησε ο ίδιος ο ερευνητής, έπειτα από την διεξοδική ανάλυση διάφορων ερευνών της παγκόσμιας εκπαιδευτικής κοινότητας. Συγκεκριμένα, οι έρευνες που ξεχώρισαν και έδωσαν τόσο το κίνητρο, όσο και τις ιδέες ανάλυσης στον ερευνητή, είναι οι έρευνες των Baki και Gökçek (2005), των Ginsburg και Leinwand (2005), των Yang, Reys και Wu (2010), των Erbaş, Alacaci, και Bulut (2012), της Kok Hwee Chia (2014), των Skoumios και Diakos (2015), του Erbilgin (2017), του Yang (2017), του Lee (2018), των Wang και Lu (2018), των Yang και Sianturi (2019) και τέλος του Velayutham1 (2020). Από αυτές τις έρευνες, ο ερευνητής συνδύασε, προσάρμοσε, επέκτεινε και δημιούργησε μια νέα ανάλυση για τα σχολικά εγχειρίδια, εστιάζοντας σε περισσότερες λεπτομέρειες και σε περισσότερες μεταβλητές. Άξιο αναφοράς είναι ακόμα, ότι η ανάλυση των σχολικών δραστηριοτήτων πραγματοποιήθηκε δύο φορές, το καλοκαίρι του 2021 και στα τέλη του 2022. Λόγω της απλότητας των δραστηριοτήτων δεν υπήρχαν καθόλου αποκλίσεις μεταξύ των δύο αναλύσεων.

7.5.2 Ερωτηματολόγιο

Το ερωτηματολόγιο που δομήθηκε για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας απαντάει στα πρώτα τρία ερευνητικά ερωτήματα. Η ιδιότητα του ερευνητή ως καθηγητή μαθηματικών και η ενασχόληση του με την διδακτική της θεωρίας Πιθανοτήτων τόσο στο γυμνάσιο και στο λύκειο, όσο και σε Πανεπιστημιακό επίπεδο, του προσφέρει το πλεονέκτημα να γνωρίζει τη συμπεριφορά και την γενικότερη στάση του κοινωνικού συνόλου απέναντι στα μαθηματικά. Γεγονός, που διαδραματίζει σημαντικό ρόλο τόσο κατά την δόμηση του ερωτηματολογίου, όσο και κατά τον έλεγχο των απαντήσεων. Με λίγα λόγια, η εμπειρία του ερευνητή έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην δημιουργία ενός ευχάριστου, ευέλικτου και αυστηρά δομημένου μέσου συλλογής δεδομένων, που επιτρέπει σε κάποιον να αναγνωρίσει και να απορρίψει τις τυχαία συμπληρωμένες απαντήσεις. Επιπλέον, άξιο αναφοράς είναι, ότι σημαντική βοήθεια του ερευνητή στην υποκείμενη κατασκευή, συντέλεσε η πληθώρα ερευνών στο τομέα της εκπαίδευσης πιθανοτήτων, αλλά και της συλλογής αντιλήψεων περί τις Πιθανότητες. Ως αποτέλεσμα των ανωτέρω, αλλά και άλλων τεχνικών που ο ερευνητής εφάρμοσε, ενισχύεται ακόμα περισσότερο η ποιότητα και η αξιοπιστία της έρευνας.

Οι τεχνικές αυτές, συμβάλουν στην εξακρίβωση της εγκυρότητας κάθε ερωτηματολογίου ή ακόμα και το σημείο που αυτό μπορεί να θεωρηθεί έγκυρο, ώστε να απορριφθούν οι αντίστοιχες ερωτήσεις. Πιο συγκεκριμένα, όπως προαναφέρθηκε, έγινε μια προσπάθεια δόμησης ενός μικρού, ευέλικτου και ευχάριστου ερωτηματολογίου, ώστε να αποφευχθεί το αίσθημα της κόπωσης στους συμμετέχοντες και να μην υπάρχουν ερωτηματολόγια κατά το ήμισυ συμπληρωμένα. Επίσης, για τον ίδιο λόγο, δεν απαιτήθηκε μια κλιμακωτή δυσκολία στις ερωτήσεις – έργα του ερωτηματολογίου. Οι παράγοντες αυτοί, διευκολύνουν την δουλειά του ερευνητή για να διαχωρίσει τα έγκυρα και τα άκυρα ερωτηματολόγια, καθώς ελαχιστοποιείται σε μεγάλο βαθμό η πιθανότητα, αρκετοί ερωτώμενοι να συμπληρώσουν το μισό ερωτηματολόγιο, χωρίς να προσπαθήσουν τις υπόλοιπες ερωτήσεις. Σημαντικό ρόλο έπαιξε ακόμα, η καταγραφή των χρόνων συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου, ώστε να προκύψει ένας μέσος χρόνος για μια σωστή – ασφαλή συμπλήρωση. Μάλιστα, σε αυτό έρχεται να προστεθεί η χρήση πρόσθετων cookies στο ηλεκτρονικό ερωτηματολόγιο, τα οποία αποτρέπουν τον χρήστη να προβεί στην συμπλήρωση του ερωτηματολογίου περισσότερες από μία φορές.

Το ερωτηματολόγιο του ερευνητή ελέγχθηκε ως προς την εγκυρότητα και την αξιοπιστία του με πολλαπλούς τρόπους. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά ο ερευνητής έλεγξε τα ερωτηματολόγια παρόμοιων ερευνών από την διεθνή βιβλιογραφία και κατασκεύασε παρόμοιες ερωτήσεις προσαρμόζοντας αυτές στα ερευνητικά δεδομένα της δικής του εργασίας (φαινομενική εγκυρότητα). Έπειτα, το ερωτηματολόγιο ελέγχθηκε από ομότιμους συναδέλφους του κλάδου, ώστε να διασφαλιστεί η εγκυρότητα περιεχομένου και ότι είναι κατάλληλο να συλλέξει τα δεδομένα που χρειάζεται ο ερευνητής για την έρευνα. Ακόμα, με κάποιες ερωτήσεις που ο ερευνητής έβαλε στο ερωτηματολόγιο διασκορπισμένες, μελετώντας την ίδια μεταβλητή, ελέγχεται και η συντρέχουσα εγκυρότητα. Επίσης, στην εγκυρότητα βοήθησε και η πιλοτική χορήγηση του ερωτηματολογίου. Μάλιστα, κατά την πιλοτική χρήση του εργαλείου μέτρησης, το δείγμα χωρίστηκε με τυχαίο τρόπο σε δύο ίσα δείγματα και εξετάστηκε και η αξιοπιστία του μέσω του συντελεστή συσχέτισης των μεταβλητών στα δύο δείγματα (αξιοπιστία ημίκλαστων). Ακόμα ελέγχθηκε ως προς την αξιοπιστία εσωτερικής συνέπειας με τον συντελεστή Cronbach alpha τα αποτελέσματα του συγκεκριμένου ελέγχου εμφανίζονται σε παρακάτω κεφάλαιο.

Τέλος, χαρακτηριστικό επίτευγμα στη δόμηση του ερωτηματολογίου είναι η επιλογή του ερευνητή να ασχοληθεί με προβλήματα καθημερινής φύσεως ή τυχερά παιχνίδια. Με αυτό τον τρόπο, γίνεται μια προσπάθεια του ερευνητή να επιβληθεί στη διάθεση και τον εγωισμό των ερωτώμενων να συμπληρώσουν ολόκληρο το ερωτηματολόγιο, κεντρίζοντας παράλληλα την προσοχή και το ενδιαφέρον τους.

7.5.2.1 Δοκιμαστική χρήση ερωτηματολογίου

Η χορήγηση του ερωτηματολογίου πραγματοποιήθηκε σε δύο φάσεις. Η πρώτη φάση, αποτέλεσε την πιλοτική χορήγηση του ερωτηματολογίου σε ένα μικρό πλήθος ατόμων, με στόχο να εξακριβωθεί τόσο το χρονικό όριο συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου, όσο και να διορθωθούν τυχόν ασάφειες και παρερμηνείες. Μάλιστα, το ερωτηματολόγιο στην αρχική του κατάσταση μοιραστικέ σκόπιμα με τις περισσότερες ερωτήσεις να είναι ανοιχτού τύπου και η δοκιμαστική του χρήση βοήθησε στον ερευνητή να προσαρμόσει και να ανακατασκευάσει τις ερωτήσεις σε κλειστές. Το δείγμα της πιλοτικής έρευνας αποτέλεσαν 30 άτομα διάφορων ειδικοτήτων. Όλοι οι συμμετέχοντες αυτής της φάσης, οι οποίοι φυσικά εξαιρέθηκαν από την τελική έρευνα, σχολίασαν και συζήτησαν το ερωτηματολόγιο με τον ερευνητή, ώστε να μπορεί αυτό να βελτιωθεί και να καταλήξει ευχάριστο, κατανοητό και χωρίς να κουράζει τον συμμετέχοντα.

Κατά συνέπεια, ο τελικός απολογισμός της δοκιμαστικής χρήσης του ερωτηματολογίου είναι θετικός, αφού βοήθησε σε μεγάλο βαθμό στην δόμηση του τελικού ερωτηματολογίου και κατά επέκταση και στην πορεία της έρευνας. Τα σχόλια των ερωτηθέντων οδήγησαν στην αλλαγή της δομής, αλλά και της μορφής του ερωτηματολογίου, αφού συγχωνεύτηκαν, επαναδιατυπώθηκαν ή άλλαξαν κάποιες ερωτήσεις. Επίσης, προστέθηκαν εικόνες για να βελτιωθεί η μορφή του ερωτηματολογίου και μειώθηκε ο χρόνος περάτωσης του στα 15 λεπτά.

7.5.2.2 Παρουσίαση τελικού ερωτηματολογίου

Η πρώτη φάση του ερωτηματολογίου σύλλεξε σημαντικές πληροφορίες, οι οποίες βοήθησαν τον ερευνητή να κατασκευάσει το τελικό ερωτηματολόγιο. Η τελική δομή, η σειρά των ερωτήσεων, ο απλοϊκός τρόπος έκφρασης και οι παρουσία εικόνων στο τελικό ερωτηματολόγιο, είναι μερικά χαρακτηριστικά που βελτιώθηκαν χάρη στην πιλοτική έρευνα. Στην παρούσα παράγραφο, αναλύεται και σχολιάζεται το τελικό ερωτηματολόγιο που αποτέλεσε και το κύριο μέσο συλλογής των δεδομένων της δεδομένης έρευνας. Οι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου αποτελούνται κυρίως από πρωτότυπες κατασκευές του ερευνητή, αλλά και παραλλαγές από παρόμοιες έρευνες όπως των Brand και της ομάδας του (2006), των Flores-Mendoza και της ομάδας του (2018), των Kloosterman και Stage (1991), των Koellner και της ομάδας του (2015), του Kok Hwee Chia (2014), του διαγωνισμού PISA 2015 (Gurría, 2018), των Van den Ham και Heinze (2018) και των Zorzos και Avgerinos (2023).

Το ερωτηματολόγιο ξεκινάει με μια επιστολή στην οποία ο ερωτώμενος ενημερώνεται για τον τίτλο και τους σκοπούς της έρευνας. Έπειτα, ακολουθεί μια ερώτηση που ενημερώνει τον ερωτώμενο σχετικά με την ανωνυμία του στις απαντήσεις του ερωτηματολογίου, αλλά και του ζητάει να αποδεχθεί την χρήση των δεδομένων που αυτός θα δώσει αποκλειστικά για ερευνητικό σκοπό. Στην συνέχεια, το ερωτηματολόγιο χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος ξεκινάει συλλέγοντας τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των ερωτώμενων και πιο συγκεκριμένα το φύλο, την ηλικία, τις γραμματικές γνώσεις και την ιδιότητα ή το επάγγελμα των ερωτώμενων. Δεδομένα, που ενδεχομένως να σχετίζονται ή να επηρεάζουν τα ζητούμενα της έρευνας. Στη συνέχεια, μελετάει γενικά τη σχέση της καθημερινότητας των ερωτώμενων με τις Πιθανότητες και τους βασικούς παράγοντες που επηρεάζουν τις γνώσεις τους. Χαρακτηριστικό των περισσότερων ερωτήσεων του πρώτου μέρους, είναι η χρήση της πεντάβαθμης κλίμακας Likert, ώστε να εξακριβωθεί σε βάθος ο βαθμός της επιρροής των Πιθανοτήτων στην καθημερινότητα του εκάστοτε ερωτώμενου, αλλά και ο βαθμός επιρροής των παραγόντων που ευθύνονται για την ύπαρξη ή μη των πιθανοτικών του γνώσεων.

Στο δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου, ο ερωτώμενος έρχεται αντιμέτωπος με προβλήματα ή παιχνίδια μιας καθημερινής κατάστασης, τα οποία προσαρμόστηκαν στις ανάγκες της παρούσας έρευνας. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν 7 ερωτήσεις – δραστηριότητες. Η πρώτη δραστηριότητα διερευνά την απόφαση ενός ατόμου σε ένα θέμα που εμπεριέχει ρίσκο και αβεβαιότητα. Στην συνέχεια, μελετάει την επιρροή που μπορεί να ασκήσει η Πιθανότητα σε αυτήν την απόφαση. Η δεύτερη δραστηριότητα διαδραματίζει διπλό ρόλο. Αρχικά, θέτει τον ερωτώμενο σε μία κατάσταση ανάγκης για την χρήση της θεωρίας Πιθανοτήτων σε ένα καθημερινό ζήτημα και έπειτα μελετάει τις γνώσεις το στη χρήση της θεωρίας. Στην δραστηριότητα τρία, μελετάτε η έλλειψή γνώσεων και η παρερμηνεία καθημερινών φαινομένων. Ακολούθως, η δραστηριότητα τέσσερα, μελετάει την πρόβλεψη μιας κατάστασης σύμφωνα με την ερμηνεία φαινομένων Πιθανότητας. Στην δραστηριότητα πέντε, μελετάτε η διαφορά στη λήψη μιας απόφασης μεταξύ συναισθήματος και Πιθανότητας. Στις επόμενες δύο δραστηριότητες, υπάρχει και βοηθητική εικόνα. Στην δραστηριότητα με το νούμερο 6, διερευνάτε η αντίληψη των ερωτωμένων για τις Πιθανότητες και τον κλασικό ορισμό. Τέλος, στην έβδομη δραστηριότητα υπάρχει ένα πρόβλημα ανοιχτού τύπου, όπου στοχεύει να μελετήσει την αντίληψη του ερωτώμενου στην αναγνώριση ύπαρξης πιθανοτήτων σε ένα ζήτημα καθημερινότητας. Το τελικό ερωτηματολόγιο, παρουσιάζεται στο παράτημα της συγκεκριμένης εργασίας.

Χαρακτηριστικό κάποιων ερωτήσεων, στις οποίες κρίθηκε απαραίτητο, ζητήθηκαν από τον ερευνητή να αιτιολογηθεί η απάντηση. Ο λόγος της αιτιολόγησης, είναι τόσο για να μελετηθεί ο τρόπος σκέψης των ερωτώμενων, όσο και να διασφαλιστεί ότι η απάντηση δεν επιλέχτηκε τυχαία. Επίσης, σημαντικό είναι να ελεγχθεί εάν οι ερωτώμενοι είναι σε θέση να αιτιολογούν πιθανοτικά την απόφαση τους. Ακόμα, υπάρχουν ερωτήσεις στο ερωτηματολόγιο, που δεν εμφανίζουν μεγάλη διαφορά και εξετάζουν την ίδια κατάσταση με διαφορετική προσέγγιση της εκφώνησης. Αυτό γίνεται για να διασφαλιστεί ότι το ερωτηματολόγιο είναι έγκυρο και δεν εμπεριέχονται τυχαιοποιημένες απαντήσεις.

7.5.3 Συνέντευξη

Η διαδικασία της συνέντευξης, αποτελεί την λεκτική επικοινωνία μεταξύ δύο ή περισσότερων προσώπων, με σκοπό την άντληση πληροφοριών για ένα συγκεκριμένο ζήτημα (Cohen & Manion, 1994). Οι ερευνητικές ανάγκες της παρούσας μελέτης, οδήγησαν στην επιλογή χρήσης της συνέντευξης σε μια ομάδα καθηγητών μαθηματικών, σχετικά με την συλλογή πληροφοριών για την διδακτική των Πιθανοτήτων στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα. Κύριο λόγο επιλογής της συνέντευξης έναντι του ερωτηματολογίου για το συγκεκριμένο εγχείρημα, αποτελεί το πλεονέκτημα της άμεσης επαφής του ερευνητή με τον ερωτώμενο. Επιπροσθέτως, ας σημειωθεί, ότι κατά την διεξαγωγή μιας συνέντευξης μπορούν να προκύψουν και άλλα ζητήματα στο υπό μελέτη θέμα, τα οποία δεν είχαν προβλεφθεί από τον ερευνητή και έτσι να συλλεχθούν νέα δεδομένα που έλλειπαν από τον αρχικό σχεδιασμό της. Η συνέντευξη στην παρούσα εργασία καλείται να απαντήσει στο τέταρτο και στο πέμπτο ερευνητικό ερώτημα που τέθηκαν κατά στον σχεδιασμό της εργασίας.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, επιλέχθηκε ο ημιδομημένος τύπος συνέντευξης. Κατά αυτόν τον τύπο συνέντευξης, ο ερευνητής έχει αποφασίσει για ορισμένα ερωτήματα, τα οποία απευθύνει σε όλους τους ερωτώμενους, σύμφωνα πάντα με την ροή της συζήτησης (Mason, 2003). Ωστόσο, του δίνεται η δυνατότητα για να διατυπώσει συμπληρωματικά ερωτήματα και να εξάγει περισσότερες πληροφορίες (Mason, 2003).

Βέβαια, η πραγματοποίηση μιας συνέντευξης οφείλει να ακολουθεί ορισμένες αρχές, ώστε να μην γίνεται ο ερευνητής φορτικός και η συνέντευξη να αρχίσει να μοιάζει με ανάκριση (Παπαναστασίου & Παπαναστασίου, 2021). Αυτό ενδεχομένως να οδηγήσει σε ανακριβείς αντιδράσεις και παραπλανητικές πληροφορίες. Κατά συνέπεια, ο ερευνητής οφείλει να έχει ενσυναίσθηση και να δημιουργεί ένα συναίσθημα εμπιστοσύνης στον ερωτώμενο, έτσι ο δεύτερος θα αισθάνεται άνετα και χωρίς το αίσθημα του φόβου προς λογοκρισία, θα μπορεί να δώσει ακριβείς πληροφορίες για το θέμα της έρευνας. Στην παρούσα έρευνα, προκειμένου να διεξαχθούν σωστά και με μεγάλη ακρίβεια οι συνεντεύξεις, ο ερευνητής παρακολούθησε για αρκετό καιρό, σεμινάρια επαγγελματικού προσανατολισμού, ώστε να εκπαιδευτεί σε διαδικασίες συνέντευξης με ενσυναίσθηση, γνώσεις στη συμπεριφορά και τη γλώσσα του σώματος του ερωτώμενου, αλλά και στην απόκτηση της εμπιστοσύνης του. Ο λόγος που επιλέχτηκαν σεμινάρια επαγγελματικού προσανατολισμού, είναι διότι τα παιδιά θεωρούνται αυστηρότεροι κριτές, κατά την δημιουργία μιας σχέσεως εμπιστοσύνης σε μια συζήτηση.

Σε αυτά, έρχονται να προστεθούν και κάποιοι παράγοντες που επίσης λήφθηκαν υπόψιν κατά την διεξαγωγή των συνεντεύξεων (Παπαναστασίου & Παπαναστασίου, 2021). Πιο συγκεκριμένα, ο ερευνητής είχε σχεδιάσει μια εισαγωγική συζήτηση για τους ερωτώμενους, σχετικά με τις σπουδές και τα ενδιαφέροντα τους, με απώτερο στόχο την δημιουργία φιλικών σχέσεων με τους ερωτώμενους, αλλά και την ομαλή εισαγωγή της συζήτησης στο επίμαχο θέμα. Επίσης, οι συνεντεύξεις με την σύμφωνη γνώμη των ερωτώμενων ηχογραφήθηκαν για να διευκολυνθεί η συζήτηση και να μην χρειάζονται πολλές σημειώσεις από τον ερευνητή. Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης βέβαια, ο ερευνητής κράτησε σημειώσεις σχετικά με τη στάση του σώματος και τις εκφράσεις των συμμετεχόντων, ώστε να μπορεί να εξακριβώσει την διάθεση τους για ακρίβεια και σωστή πληροφόρηση στα επιμέρους ζητήματα. Τέλος, έγινε μια προσπάθεια, η ερωτήσεις να είναι ανοιχτές, ευέλικτες εστιασμένες, καθώς και να μην χρήζουν ανάγκης συγκεκριμένης σειράς, αλλά να μπορούν να ενσωματωθούν αβίαστα στη ροή της συζήτησης (Mason, 2003).

Ο σχεδιασμός και η ολοκλήρωση της συνέντευξης πραγματοποιήθηκε σε τρία στάδια (Παπαναστασίου & Παπαναστασίου, 2021). Το πρώτο στάδιο ήταν πριν την διεξαγωγή της συνέντευξης, δηλαδή στο στάδιο της σχεδίασης. Σε αυτό το στάδιο, ο ερευνητής ανέλυσε τους σκοπούς της έρευνας, για την οποία ήθελε να δομήσει την συνέντευξη, έγινε μια πρόχειρη καταγραφή των ερωτημάτων, τα οποία θα έπαιρναν την τελική τους μορφή μετά την δοκιμαστική συνέντευξη και ακολούθησε η επιλογή του δείγματος που θα συμμετείχε στη συνέντευξη (Παπαναστασίου & Παπαναστασίου, 2021). Το δεύτερο στάδιο, λογίζεται αυτό κατά την διάρκεια της συνέντευξης, όπου σημαντικό ήταν για τον ερευνητή η δημιουργία κατάλληλης ατμόσφαιρας και κλίματος εμπιστοσύνης. Μέσα σε αυτό το κλίμα, ο ερευνητής συνεννοήθηκε με τους ερωτώμενους για την μαγνητοφώνηση της συζήτησης και την διατήρηση μιας ομαλής ροής κατά την διάρκεια της, χωρίς απότομες εναλλαγές στο θέμα. Μάλιστα, ο ερευνητής προσπάθησε να διατήρηση ουδέτερη στάση στο επίμαχο ζήτημα της συνέντευξης, ώστε να μην επηρεάσει τις απόψεις του συμμετέχοντα. Τέλος, στο τρίτο και τελευταίο στάδιο, αυτό μετά την συνέντευξη, πραγματοποιήθηκε η αποδελτίωση και η ανάλυση της (Παπαναστασίου & Παπαναστασίου, 2021).

7.5.3.1 Δοκιμαστική διεξαγωγή συνέντευξης

Η διαδικασία των συνεντεύξεων, όπως ακριβώς και η αντίστοιχη της χορήγησης του ερωτηματολογίου, πραγματοποιήθηκε σε δύο φάσης, την πιλοτική και την κύρια φάση. Ο λόγος της διεξαγωγής της πιλοτικής φάσης για την συνέντευξη, ήταν για να ελεγχθούν τα ερωτήματα, η σειρά τους, η αποτελεσματικότητα τους, καθώς και η ομαλή ένταξη τους στη συζήτηση. Μάλιστα, μέσα από αυτή την φάση προέκυψαν και νέα ερωτήματα στο υπό μελέτη ζήτημα, γεγονός που συντέλεσε στην τελική διαμόρφωση της συνέντευξης.

Η δοκιμαστική συνέντευξη πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια συζήτησης σε 4 άτομα. Από αυτά τα άτομα, ο ερευνητής επέλεξε για να μπορεί να ελέγξει την αποδοτικότητα της συνέντευξης που σχεδίασε, να ρωτήσει 2 άτομα από τον κοινωνικό του περίγυρο, που ωστόσο είχαν γνώση στο αντικείμενο και δύο άτομα που δεν γνώριζε. Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης φάσης, καθώς και οι απόψεις των ερωτώμενων, οδήγησαν στην αναπροσαρμογή ορισμένων ερωτήσεων και της σειρά διεξαγωγής τους. Μάλιστα, η δοκιμαστική διεξαγωγή της συνέντευξης, συντέλεσε σημαντικά και στην δημιουργία της εισαγωγικής συζήτησης, όπου βοηθάει τον ερωτώμενο να χαλαρώσει και να εμπιστευτεί τις απόψεις του στον ερευνητή.

7.5.3.2 Παρουσίαση τελικής συνέντευξης

Η τελική συνέντευξη που δομήθηκε με βάση την πιλοτική εφαρμογή, αποτελεί έναν κατάλογο 17 ερωτημάτων. Ο χαρακτηρισμός της ως ημιδομημένη, περιγράφει αρκετά καλά την δόμηση της αλληλουχίας των ερωτημάτων αυτών. Πιο συγκεκριμένα, τα ερωτήματα δεν έχουν συγκεκριμένη σειρά, καθώς μπορούν να εφαρμοστούν ανά πάσα στιγμή μέσα σε μια συζήτηση γύρω από το θέμα της έρευνας. Επίσης, στόχος του ερευνητή ήταν, οι συνεντεύξεις να είχαν ένα σχετικά ανεπίσημο χαρακτήρα και μοιάζουν περισσότερο με μια συζήτηση, παρά με ένα σχήμα ερωτήσεων-απαντήσεων επίσημου ύφους.

Την δομή της συνέντευξης αποτέλεσε μια αρχική συζήτηση για τι γραμματικές γνώσεις, τα ενδιαφέροντα και γενικότερα κάποιες προσωπικές πληροφορίες του ερωτώμενου. Στην συνέχεια, ακολούθησε η εισαγωγή του θέματος από τον ερευνητή και μια γενική συζήτηση πάνω στο θέμα και μέσα από αυτό το στάδιο της συνέντευξης έγινε και η συζήτηση των ερωτημάτων που είχε σχεδιάσει ο ερευνητής. Βασικό, στη δομή της τελικής συνέντευξης, ήταν η προσπάθεια κατασκευής των ερωτημάτων με τρόπο που προάγει τόσο την συζήτηση, όσο και την εκβάθυνση των απόψεων του ερωτώμενου στο θέμα. Φυσικά, στα πλαίσια της συζήτησης ο ερευνητής ήταν έτοιμος τόσο στο να δώσει διευκρινήσεις αν αυτές ζητηθούν, όσο και στον να αναπτύξει τη δική του άποψη στο θέμα, χωρίς όμως να πλατειάσει ή να επηρεάσει την άποψη του υπό συνέντευξη υποκειμένου.

7.6 Πληθυσμός και δείγμα έρευνας

Ο πληθυσμός της έρευνας θα μπορούσε να αποτελείται από το σύνολο των Ρόδιων πολιτών. Οι δειγματοληπτικές ανάγκες της παρούσας έρευνας, οδήγησαν στην επιλογή μιας δειγματοληψίας της ευκολίας. Πιο συγκεκριμένα, ο ερευνητής κινήθηκε τόσο μέσο του διαδικτύου, όσο και στους χώρους που επισκέφτηκε, σε διάφορες ομάδες και μοίρασε το ερωτηματολόγιο του. Φυσικά, μέσα σε αυτές τις ομάδες, υπήρχε η δυνατότητα από τον ερωτώμενο να ασχοληθεί ή να μην ασχοληθεί με το ερωτηματολόγιο.

Η έρευνα που διεξάχθηκε διαδικτυακά με το αρχικό δείγμα να φτάνει τα 603 άτομα. Ο αριθμός αυτός μειώθηκε κατά 130 απαντήσεις, θεωρούμενες ως άκυρες από τον ερευνητή. Κύριοι λόγοι για τις ακυρώσεις των απαντήσεων, θεωρήθηκαν οι πολλαπλές και αδικαιολόγητες κενές απαντήσεις σε αρχικές ερωτήσεις όπως φύλο, ηλικία και ιδιότητα, ή η μη αποδοχή επεξεργασίας των απαντήσεων του ερωτηματολογίου για ερευνητικό σκοπό. Στην συνέχεια, ο ερευνητής προχώρησε σε μια δεύτερη επιλογή – διαλογή των ερωτηματολογίων, με συνέπεια την διαγραφή 74 ακόμα απαντήσεων. Η δεύτερη διαλογή βασίστηκε στον μέσο χρόνο συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου. Έτσι, απαλλάχτηκαν από την ανάλυση τα ερωτηματολόγια, τα οποία είχαν αρκετά λιγότερο χρόνο συμπλήρωσης από τον μέσο χρόνο. Γεγονός, που οδηγεί σε ένα δείγμα αποτελούμενο από 399 ερωτώμενους. Σε αυτό έρχονται να προστεθούν 143 ακόμα ερωτηματολόγια που προέκυψαν από την επίσκεψη του ερευνητή στο ΠΤΔΕ Ρόδου. Αξίζει να σημειωθεί εδώ, ότι τα αρχικά ερωτηματολόγια που συλλέχτηκαν από το ΠΤΔΕ ανέρχονταν στον αριθμό 162, ωστόσο έγινε προσεκτική επιλογή από τον ερευνητή να απορριφθούν όσα θεωρήθηκαν απαντημένα με έντονο τον παράγοντα τύχη, ή δεν δόθηκε αρκετή προσοχή από τους φοιτητές, ή ακόμα και όσα είχαν αδικαιολόγητες κενές απαντήσεις. Σύμφωνα με αυτά λοιπόν, το τελικό δείγμα της έρευνας ανέρχεται στους 542 ερωτώμενους.

Πιο συγκεκριμένα, συμμετείχαν 212 άνδρες και 330 γυναίκες, όπου αποτελούσαν το 39,1 % και το 60,9 % του δείγματος αντίστοιχα. Ο μέσος όρος ηλικίας των ερωτώμενων ήταν τα 21,7 έτη, ωστόσο το εύρος των ηλικιών ήταν 57 έτη, ξεκινώντας με την μικρότερη ηλικιακή ομάδα να είναι 15 χρονών και την μεγαλύτερη 72.

Πίνακας 7: Κατανομή των ηλικιών των συμμετεχόντων σε κλάσεις

Κλάσεις Ηλικιών	n	f %	N	F %
15-19	151	27,8 %	151	27,8 %
20-24	85	15,8 %	236	43,6 %
25-29	69	12,7 %	305	56,3 %
30-34	41	7,6 %	346	63,9 %
35-39	58	10,7 %	404	74,6 %
40-44	32	5,9 %	436	80,5 %
45-49	33	6 %	469	86,5 %
50-54	38	7 %	507	93,5 %
55-59	29	5,4 %	536	98,9 %
60-64	4	0,7 %	540	99,6 %
65-69	1	0,2 %	541	99,8 %
70-74	1	0,2 %	542	100 %

Ο παραπάνω πίνακας αποτελεί ένα συγκεντρωτικό πίνακα, διαβαθμισμένο με κλάσεις ίσου πλάτους 5, ο οποίος δείχνει την ακριβή κατανομή των ηλικιών του δείγματος. Σε αυτόν, εμφανίζονται τόσο οι συχνότητες (n) και οι σχετικές συχνότητες (f %) της κατανομής των ερωτώμενων ανάμεσα στις κλάσεις, όσο και οι αθροιστικές συχνότητες (N) και οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες τους (F %). Κατά συνέπεια, είναι φανερό, ότι η πλειοψηφία των ηλικιών του δείγματος ήταν από 15 έως 30 ετών, αλλά και αρκετοί ήταν οι συμμετέχοντες με ηλικία 30 έως 60 ετών.

Διάγραμμα 7.1: Γραμματικές Γνώσεις Δείγματος

Στο παραπάνω κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζονται οι συχνότητες και τα ποσοστά των ερωτώμενων, σχετικά με τις γραμματικές τους γνώσεις. Η συντριπτική πλειοψηφία του δείγματος, όπως φαίνεται και στο κυκλικό διάγραμμα, είναι άνθρωποι με πτυχίο τριτοβάθμιας εκπαίδευσης ή κάτοχοι μεταπτυχιακού τίτλου. Ενώ, πολύ μικρό φαίνεται να είναι το ποσοστό των τελειόφοιτων της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Στην συνέχεια, ακολουθεί ένας πίνακας που εμφανίζει την επαγγελματική ιδιότητα των ερωτώμενων του δείγματος. Στην έρευνα, έλαβαν μέρος ερωτώμενοι από διάφορα επαγγέλματα και ειδικότητες και παρακάτω φαίνεται η ακριβής κατανομή τους.

Πίνακας 8: Επάγγελμα – Ιδιότητα συμμετεχόντων στην έρευνα

Επάγγελμα - Ιδιότητα	n	f %
Μαθηματικός	43	7,9 %
Ιατρός	55	10,1 %
Φιλόλογος	36	6,6 %
Πληροφορικός	35	6,4 %
Δάσκαλος	40	7,4 %
Ιδιωτικός Υπάλληλος	22	4 %
Ψυχολόγος	3	0,5 %
Οικονομολόγος	4	0,7 %
Δημόσιος Υπάλληλος	12	2,3 %
Νηπιαγωγός	12	2,3 %
Καθηγητής Ξένων γλωσσών	22	4 %
Φυσικός - Χημικός	20	3,7 %
Μηχανικός (Πολιτικός, Μηχανολόγος, κ.τ.λ.)	15	2,8 %
Φοιτητής	157	29 %
Μαθητής Λυκείου	14	2,6 %
Άλλο	52	9,7 %
Σύνολο	542	100 %

7.7 Διαδικασία χορήγησης ερωτηματολογίου

Η χορήγηση του ερωτηματολογίου πραγματοποιήθηκε τόσο ηλεκτρονικά, όσο και με επίσκεψη του ερευνητή σε ομάδες ατόμων. Πιο συγκεκριμένα η χορήγηση πραγματοποιήθηκε σε τρία στάδια. Στο πρώτο στάδιο το ερωτηματολόγιο χορηγήθηκε σε εκπαιδευτικούς διαφόρων ειδικοτήτων που κατά το σχολικό έτος 2020 - 2021 ανήκαν στην Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια εκπαίδευση του νομού Δωδεκανήσου. Η αποστολή του ερωτηματολογίου, πραγματοποιήθηκε από τον ερευνητή μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου. Σε αυτό το εγχείρημα σημαντική ήταν η συμβολή της Διεύθυνσης τόσο της Πρωτοβάθμιας, όσο και της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης του νομού, που εδρεύουν στη Ρόδο. Κατά τη δεύτερη φάση, το ερωτηματολόγιο μοιράστηκε σε φοιτητές και ελεύθερους επαγγελματίες ή εργαζόμενους, μέσα από τα μέσα κοινωνικής δικτύωσης. Ο ερευνητής διάλεξε προσεκτικά τόσο τον τρόπο, όσο και τις ομάδες κοινοποίησης του ερωτηματολογίου του, ώστε να διασφαλίσει την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων του. Η Τρίτη φάση διαμοιρασμού των ερωτηματολογίων, πραγματοποιήθηκε με επίσκεψη του ερευνητή στο Παιδαγωγικό τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Αιγαίου, κατά την διάρκεια του μαθήματος «Εισαγωγή στις Βάσεις και στις βασικές έννοιες των μαθηματικών». Αυτή η φάση πραγματοποιήθηκε στο πρώτο μάθημα των πρωτοετών φοιτητών του τμήματος, ώστε οι αντιλήψεις τους να μην επηρεαστούν από τις γνώσεις που θα αποκτούσαν από το μάθημα, το οποίο πραγματευόταν στην ύλη του την θεωρία Πιθανοτήτων. Το συνολικό χρονικό διάστημα χορήγησης και συλλογής του ερωτηματολογίου, ήταν 2 μήνες.

Η εκπαιδευτική ιδιότητα του ερευνητή, καθώς και η ενεργή συμμετοχή του στις ομάδες των μέσων κοινωνικής δικτύωσης όπου κοινοποίησε το ερωτηματολόγιο, συντέλεσαν καθοριστικό παράγοντα στην δημιουργία ενός αξιοσέβαστου προφίλ με το ανάλογο κύρος. Γεγονός που βοήθησε να εξυπηρετηθεί ο σκοπός του, τόσο για την συμπλήρωση του ερωτηματολογίου, όσο και για να δοθεί από τους συμμετέχοντες η απαραίτητη προσοχή που απαιτούσαν οι δραστηριότητες.

Να σημειωθεί, ότι το ερωτηματολόγιο ξεκινούσε με την γνωστοποίηση στους ερωτώμενους του σκοπού και της σημασίας της έρευνας, προκειμένου να κατανοήσουν τη σημαντικότητα της και να εκφράσουν ακριβώς αυτό που σκέφτονται ή πιστεύουν με σαφήνεια και αμεροληψία. Στη συνέχεια, η πρώτη ερώτηση ενημέρωνε τους συμμετέχοντες για τα πνευματικά δικαιώματα και δέσμευε τον ερευνητή στην χρήση των συλλεγόμενων δεδομένων μόνο για επιστημονικό σκοπό. Τονίστηκε ιδιαίτερα, ότι το ερωτηματολόγιο είναι ανώνυμο και αντιπροσωπεύει μια έρευνα αντιλήψεων και όχι γνώσεων, για αυτό το λόγο δεν βαθμολογείτε και σε καμία περίπτωση δεν υπάρχουν σωστές ή λανθασμένες απαντήσεις. Αυτό μάλιστα, όπως ήδη ήταν γνωστό και από τα άτομα που συμμετείχαν στην πιλοτική έρευνα αφού είχαν την ευκαιρία να σχολιάσουν το ερωτηματολόγιο στον ερευνητή, έπαιξε καθοριστικό ρόλο κατά τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου, καθώς όπως δικαιολογήθηκε, απέβαλλε το άγχος των ερωτώμενων.

7.8 Διαδικασία Συνέντευξης

Η διαδικασία της συνέντευξης αποτέλεσε τελικά έναν ευχάριστο και εποικοδομητικό διάλογο του ερευνητή, με συναδέλφους καθηγητές μαθηματικών. Από την αρχή της κατασκευής των συνεντεύξεων, ο συγγραφέας είχε θέση ως στόχο, την δημιουργία μιας ημιδομημένης συνέντευξης, που θα οδηγούσε τον συμμετέχοντα σε έναν ευχάριστο διάλογο και οι απαντήσεις στις ερωτήσεις του ερευνητή θα πρόκυπταν αβίαστα μέσα από την συζήτηση.

Ο ερευνητής αρχικά στοχοποίησε και πλησίασε πέντε άτομα που θα λάμβαναν μέρος στη συνέντευξη. Τα άτομα αυτά είχαν τα εξής κοινά χαρακτηριστικά, αρχικά ήταν όλοι καθηγητές γυμνασίου με αρκετή εμπειρία στη διδακτική των μαθηματικών, είχαν διδάξει Μαθηματικά στην Γ γυμνασίου τουλάχιστον την τελευταία διετία, ήταν κάτοχοι μεταπτυχιακού τίτλου και δεν γνώριζαν τον ερευνητή προσωπικά. Οι συμμετέχοντες έλαβαν μέρος με ευχαρίστηση στη συνέντευξη, αφού πρωτίστως τους γνωστοποιήθηκε το θέμα της εργασίας του ερευνητή, καθώς και η δουλεία του στο αντικείμενο της διδακτικής των Πιθανοτήτων. Κατά συνέπεια, ορίστηκαν έπειτα από συνεννόηση, οι μέρες και οι ώρες που ο ερευνητής θα πραγματοποιούσε την συνέντευξη στον κάθε συμμετέχοντα και συμφώνησαν όλοι, ότι δεν είχαν πρόβλημα να ηχογραφηθούν στα πλαίσια της έρευνας.

Ο ερευνητής φρόντισε οι συναντήσεις να πραγματοποιηθούν σε ουδέτερο μέρος τόσο για εκείνον, όσο και για τον συμμετέχοντα. Η συνέντευξη - ομιλία ξεκίναγε με πρωτοβουλία του ερευνητή, στοχεύοντας αρχικά σε μια χαλαρή συζήτηση ενός γενικότερου πλαισίου με απώτερο στόχο να χαλαρώσει ο ερωτώμενος και να γίνει ομαλά η εισαγωγή στο κυρίως υπό μελέτη θέμα. Στη συνέχεια, χωρίς να γίνονται απότομες αλλαγές στο θέμα της συζήτησης, ο ερευνητής καθοδηγούσε τον ερωτώμενο στο κομμάτι των πληροφοριών που ήθελε να εκμαιεύσει. Βέβαια, η ροή της συζήτησης διαφέρει ανάμεσα στον ερευνητή και τον εκάστοτε ερωτώμενο και για αυτό τον λόγο δεν τηρήθηκαν τα ίδια χρονικά πλαίσια σε κάθε συνέντευξη, προκειμένου να συλλεχθούν οι πληροφορίες που αναζητούσε ο ερευνητής.

7.9 Το προφίλ των συμμετεχόντων στη συνέντευξη

Στην παρούσα παράγραφο κρίνεται απαραίτητο να παρουσιαστεί το προφίλ, η εμπειρία και οι γραμματικές γνώσεις των εκπαιδευτικών που έλαβαν μέρος στη συνέντευξη, ώστε να συνεκτιμηθεί στα αποτελέσματα της έρευνας η βαρύτητα της άποψης τους. Χαρακτηριστικό της δεδομένης έρευνας βέβαια αποτελεί, ότι η επιλογή των εκπαιδευτικών έγινε με βάση τις γραμματικές τους γνώσεις αλλά και την διδακτική τους εμπειρία. Για αυτό τον λόγο επιλέχθηκαν 5 εκπαιδευτικοί με μεταπτυχιακό τίτλο και με διάφορες διδακτικές εμπειρίες όπως φαίνονται στο παρακάτω πίνακα. Αξίζει να σημειωθεί εδώ, ότι τα ονόματα των εκπαιδευτικών δόθηκαν από τον ερευνητή προς αντικατάσταση των πραγματικών τους ονομάτων για να διατηρηθεί η ανωνυμία των συμμετεχόντων της έρευνας.

Πίνακας 9: Συμμετέχοντες στην συνέντευξη

Εκπαιδευτικός	Ηλικία	Γραμματικές γνώσεις	Διδακτική εμπειρία
Δίας	56	Μεταπτυχιακός τίτλος	32 χρόνια
Ποσειδώνας	55	Μεταπτυχιακός τίτλος	31 χρόνια
Ήρα	54	Μεταπτυχιακός τίτλος	30 χρόνια
Αθηνά	37	Μεταπτυχιακός τίτλος	13 χρόνια
Δήμητρα	30	Μεταπτυχιακός τίτλος	6 χρόνια

Κατά συνέπεια, όπως είναι φανερό, οι εκπαιδευτικοί που επιλέχτηκαν είχαν ελάχιστο όριο ηλικίας τα 30 έτη, κατέχουν όλοι έναν μεταπτυχιακό τίτλο και ασχολούνται αρκετά χρόνια στην διδακτική πράξη. Οι τρεις πρώτοι εκπαιδευτικοί, επιλέχτηκαν μεταξύ άλλων κριτηρίων για την διδακτική τους εμπειρία. Έπειτα, οι 2 τελευταίοι εκπαιδευτικοί, η Αθηνά και η Δήμητρα, παρόλο το νεαρό της ηλικίας τους και την μικρότερη διδακτική εμπειρία (παράγοντας που κρίνεται ένα από τα πιο ισχυρά χαρακτηριστικά επιλογής των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στις συνεντεύξεις), επελέγησαν για να αντιπροσωπεύσουν και την άποψη των μικρότερων σε ηλικία εκπαιδευτικών, που απαρτίζουν το ελληνικό εκπαιδευτικό δυναμικό στα σχολεία της χώρας. Μάλιστα, αξίζει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο, ότι ως διδακτική εμπειρία λογίζεται τόσο η εργασία των ανωτέρω εκπαιδευτικών στο δημόσιο σχολείο, όσο και η αντίστοιχη διδακτική εργασιακή εμπειρία σε ιδιωτικούς φορείς, όπως φροντιστήρια, οικοδιδάσκαλους και κέντρα μελέτης.

7.10 Μέθοδος ανάλυσης δεδομένων

Η ολοκλήρωση των διαδικασιών της διαμοίρασης των ερωτηματολογίων, της διεξαγωγής των συνεντεύξεων και της συγκέντρωσης των αποτελεσμάτων, οδήγησε την έρευνα στην επόμενη φάση, δηλαδή αυτήν της κωδικοποίησης των δεδομένων. Ο λόγος φυσικά, η ανάλυση τους μέσω στατιστικών προγραμμάτων. Για τις ανάγκες αυτής της διαδικασίας, ο ερευνητής ψηφιοποίησε όσα ερωτηματολόγια ή συνεντεύξεις ήταν σε χειρόγραφη μορφή. Έπειτα, για να διασφαλίσει την εγκυρότητα και την ποιότητα της έρευνας, έλεγξε μία προς μία τις απαντήσεις των ερωτώμενων στο ερωτηματολόγιο και αφαίρεσε αυτές που θεώρησε ότι απαντήθηκαν τυχαία ή δεν αφιερώθηκε ο απαραίτητος χρόνος. Για να επιτευχθεί βέβαια το συγκεκριμένο εγχείρημα, εκτός από την ιδιαίτερη δομή που δόθηκε στο ερωτηματολόγιο και τα κριτήρια που τέθηκαν, ο ερευνητής κρατούσε τον χρόνο συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου από τους ερωτώμενους. Κατά συνέπεια, δεν θεωρήθηκαν έγκυρα για την στατιστική επεξεργασία τα ερωτηματολόγια που συμπληρώθηκαν σε αρκετά λιγότερο χρόνο από τον μέσο χρόνο συμπλήρωσης. Επίσης, οι απαντήσεις που θεωρήθηκαν άκυρες, αλλά δεν έγινε ολική απόρριψη του ερωτηματολογίου, δεν επηρεάζουν τα αποτελέσματα της έρευνας, καθώς θεωρήθηκαν από τον ερευνητή ως κενές απαντήσεις.

Στη συνέχεια, στο στάδιο της κωδικοποίησης των απαντήσεων, τα δεδομένα που προέκυψαν τόσο από τα ερωτηματολόγια, όσο και από τις συνεντεύξεις, εισάχθηκαν σε αρχεία Excel και διατηρήθηκαν ως βάση δεδομένων για την συνέχεια της ανάλυσης. Πιο συγκεκριμένα, στο Excel γίνεται η πρώτη στατιστική ανάλυση των δεδομένων και η διόρθωση τυχών λαθών. Στη συνέχεια, γίνεται εισαγωγή των δεδομένων από το πρόγραμμα Excel σε άλλα προγράμματα στατιστικής και συνεπαγωγικής ανάλυσης για περαιτέρω επεξεργασία. Η στατιστική επεξεργασία και η ανάλυση των ποσοτικών ερευνητικών δεδομένων, τόσο περιγραφικό επίπεδο, όσο και σε επαγωγικό για ορισμένες ερωτήσεις, πραγματοποιήθηκε με διάφορα στατιστικά προγράμματα και κυρίως με τη χρήση του στατιστικού πακέτου S.P.S.S. και του προγράμματος συνεπαγωγικής στατιστικής ανάλυσης CHIC (Cohesive Hierarchical Implicative Classification). Ενώ, για την στατιστική επεξεργασία των ποιοτικών δεδομένων, προτιμήθηκαν προγράμματα με δυνατότητες κωδικοποίησης και ανάλυσης κειμένου, όπως το Atlas.ti 9.

7.11 Η ανάλυση με το S.P.S.S.

Η διεξαγωγή της ανάλυση των δεδομένων που συλλέχτηκαν τόσο από τα ερωτηματολόγια, όσο και από τις συνεντεύξεις, οδήγησε στην ανάγκη εξαγωγής των αποτελεσμάτων σε ένα αρχείο Excel. Στο αρχείο αυτό, ο ερευνητής προχώρησε σε διαφοροποιήσεις της κωδικοποίησης που είχε επιλεγεί αρχικά στο Lime Survey, όπως ακριβώς ορίζουν οι ανάγκες του στατιστικού πακέτου ανάλυσης S.P.S.S.. Κατά συνέπεια, τα δεδομένα από το αρχείο Excel κατηγοριοποιήθηκαν, οι παράμετροι αντιστοιχίστηκαν με τις ανάλογες τιμές και εισάχθηκαν στο S.P.S.S. για την περαιτέρω ανάλυση.

Η ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων με το συγκεκριμένο πρόγραμμα, έδωσε το σύνολο των απαντήσεων κάθε ερωτήματος με τα αντίστοιχα ποσοστά, ακολουθούμενα πάντα με τις αρχές και τα προτερήματα της περιγραφικής στατιστικής. Πιο αναλυτικά, υπολογίστηκαν τα μέτρα θέσης και διασποράς ορισμένων μεταβλητών και έγιναν τα αντίστοιχα παραμετρικά ή μη παραμετρικά τεστ, όπου αυτό κρίθηκε απαραίτητο. Έτσι, δημιουργήθηκαν προσαρμοσμένα διαγράμματα και πίνακες, για την παρουσίαση αυτών των αποτελεσμάτων.

Άξιο αναφοράς εδώ είναι, ότι παρόλο που η στατιστική ανάλυση πραγματοποιήθηκε από το πρόγραμμα S.P.S.S., στη δημιουργία διαγραμμάτων, πινάκων και γενικότερα γραφικών απεικονίσεων, έγινε επιλογή μεταξύ των αναπαραστάσεων που προσφέρουν τα προγράμματα S.P.S.S., Word, Excel και το Lime Survey. Ο κύριος λόγος της συγκεκριμένης επιλογής, ήταν προκειμένου να επιλεγεί η βέλτιστη δυνατή οπτική αναπαράσταση για τις ανάγκες του αναγνώστη, τόσο ως προς την κατανόηση του εν λόγω πίνακα ή γραφήματος, όσο και στην εμφάνιση και τη δημιουργία μια συνολικά ευχάριστης και ευανάγνωστης εργασίας. Τέλος, να σημειωθεί, ότι για αρκετούς πίνακες και διαγράμματα έγινε μια προσαρμογή με ένα τρόπο, που να ευνοεί τόσο την κατανόηση της έρευνας, όσο και τη σύγκριση των αποτελεσμάτων.

7.12 Το πρόγραμμα CHIC και η συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση

Η ανάγκη για περαιτέρω ανάλυση των δεδομένων από την περιγραφική στατιστική ανάλυση, οδήγησε στην συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση. Η συγκεκριμένη μορφή ανάλυσης, παρόλο που δίνεται πλέον η δυνατότητα να πραγματοποιηθεί και μέσω του προγράμματος S.P.S.S., θεωρήθηκε καλύτερο να γίνει μέσω του προγράμματος CHIC. Η διαφοροποίηση εδώ γίνεται καθώς το πρόγραμμα CHIC εμφανίζει μεγαλύτερη εμπειρία στην στατιστική συνεπαγωγική ανάλυση και συνεπώς θεωρήθηκε προτιμότερο. Βέβαια, σημαντικό ρόλο παίζει και το γεγονός, ότι οι δυνατότητες του προγράμματος βασίζονται σε αλγορίθμους του μαθηματικού προγράμματος MATLAB και της γλώσσας οπτικού προγραμματισμού Delphi 7 (Μάρκος, 2006). Κατά συνέπεια, πολλοί κατατάσσουν το CHIC ως ένα από τα ισχυρότερα εργαλεία συνεπαγωγικής ανάλυσης (Μάρκος, 2006).

Αναφορικά με το πρόγραμμα αυτό, βασιζόμενο στις αρχές της σενεπαγωγικής στατιστικής ανάλυσης που πρότεινε ο Gras το 1995, συγκρίνει τη σχέση δύο ή περισσοτέρων γεγονότων και εξάγει συμπεράσματα για τη μεταξύ τους συσχέτιση. Πιο συγκεκριμένα, συγκρίνει την ένταση συνεπαγωγής δύο ή περισσότερων γεγονότων. Σύμφωνα με το μέγεθος της έντασης αυτής, διεξάγει συμπεράσματα για το βαθμό αποδοχής της (Gras & Kuntz, 2008).

Ο κύριος λόγος που η στατιστική συνεπαγωγική ανάλυση έχει ξεχωρίσει από το παρελθόν στην ερευνητική διαδικασία, είναι χάρη της μη συμμετρικότητας των δεδομένων της (Gras & Kuntz, 2008). Γεγονός, που έρχεται σε αντίθεση με διάφορες άλλες αντίστοιχες μεθόδους που κυκλοφορούν (Gras & Kuntz, 2008). Μάλιστα, λαμβάνει υπόψιν την ύπαρξη εξαιρέσεων και αποτελεί έτσι μια ισχυρή μέθοδο για την ποσοτικοποίηση της ποιότητας μιας συνεπαγωγής (Gras & Kuntz, 2008). Η ποιότητα αυτή με την σειρά της, επιτρέπει την δημιουργία κανόνων στη συμπλοκή διαφόρων ενδεχομένων μεταξύ τους.

Ένας κανόνας συσχέτισης μιας ερώτησης Α και μιας ερώτησης Β δημιουργείται μόνο στην περίπτωση που το επίπεδο εμπιστοσύνης του, φτάσει σε ένα ικανοποιητικό επίπεδο (Gras & Kuntz, 2008). Το πρόγραμμα CHIC, παράγει κανόνες συσχέτισης μεταξύ δύο ή περισσότερων γεγονότων (Gras & Kuntz, 2008). Διαθέτει πολλά από τα γραφικά και αριθμητικά αποτελέσματα διάφορων άλλων παρόμοιων λογισμικών, αλλά είναι και εξοπλισμένο με νέες διαδικασίες ελέγχου και δείκτες ερμηνείας των αποτελεσμάτων (Μάρκος, 2006).

Οι ανάγκες του συγκεκριμένου προγράμματος, οδήγησαν τον ερευνητή στην επανακωδικοποιήση των κατηγορικών μεταβλητών σε δίτιμες μεταβλητές ή σε μεταβλητές με τιμές στο κλειστό διάστημα [0,1], αφού το πρόγραμμα χρησιμοποιεί αρκετά κατανομές πιθανοτήτων, όπως η Bernoulli και η binomial. Επίσης, δύναται να κατασκευάσει δύο είδη ειδικών δενδροδιαγραμμάτων και ενός γραφήματος. Πιο συγκεκριμένα, κατασκευάζει (Γαγάτσης & Μάρκου, 2001):

1. Το δενδροδιάγραμμα ομοιότητας (φαίνονται οι σχέσεις ομοιότητας μεταξύ των αντικειμένων που αναλύονται).

2. Το ιεραρχικό δενδροδιάγραμμα (φανερώνει τις σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν μεταξύ των μεταβλητών κατά σειρά προτεραιότητας).
3. Το συνεκτικό διάγραμμα (φαίνονται όλοι οι κανόνες και διακρίνονται αυτοί που έχουν την μεγαλύτερη ένταση για ένα συγκεκριμένο χαρακτηριστικό).

Σημαντικό είναι ότι οι μεταβλητές που παρουσιάζονται στα παραπάνω διαγράμματα και γραφήματα έχουν επίπεδο σημαντικότητας 95% ή 99% (Γαγάτσης & Μάρκου, 2001). Φυσικά όμως, υπάρχει η δυνατότητα αν επιθυμεί ο ερευνητής να δει και τις συσχετίσεις με μικρότερη σημαντικότητα. Ακόμα, επιτρέπει το χειρισμό ασαφών μεταβλητών, εισάγοντας τυπικές μεθόδους, που βοηθούν στην αποφυγή της υποκειμενικότητας, των προκαταλήψεων και των ανακριβειών στις μετρήσεις (Ζώρζος, 2018).

Τέλος, αξίζει να αναφερθούν μερικά ακόμα χαρακτηριστικά πλεονεκτήματα που συντέλεσαν στην επιλογή του συγκεκριμένου προγράμματος και το συγκεκριμένο είδος ανάλυσης. Πρώτων, το πρόγραμμα δίνει την επιλογή για κλασσική συνεπαγωγική ανάλυση ή εντροπική συνεπαγωγική ανάλυση (Gras & Kuntz, 2008). Στην εντροπική συνεπαγωγική ανάλυση δεν εξετάζεται μόνο ένας συγκεκριμένος κανόνας, αλλά και ο αντίστροφο του. Και δεύτερον, το πρόγραμμα είναι εφοδιασμένο με έναν αλγόριθμο που ελέγχει τη διαφορετικότητα των συσχετίσεων για να διασφαλίζεται η πρωτοτυπία των κανόνων που αναλύονται (Gras & Kuntz, 2008).

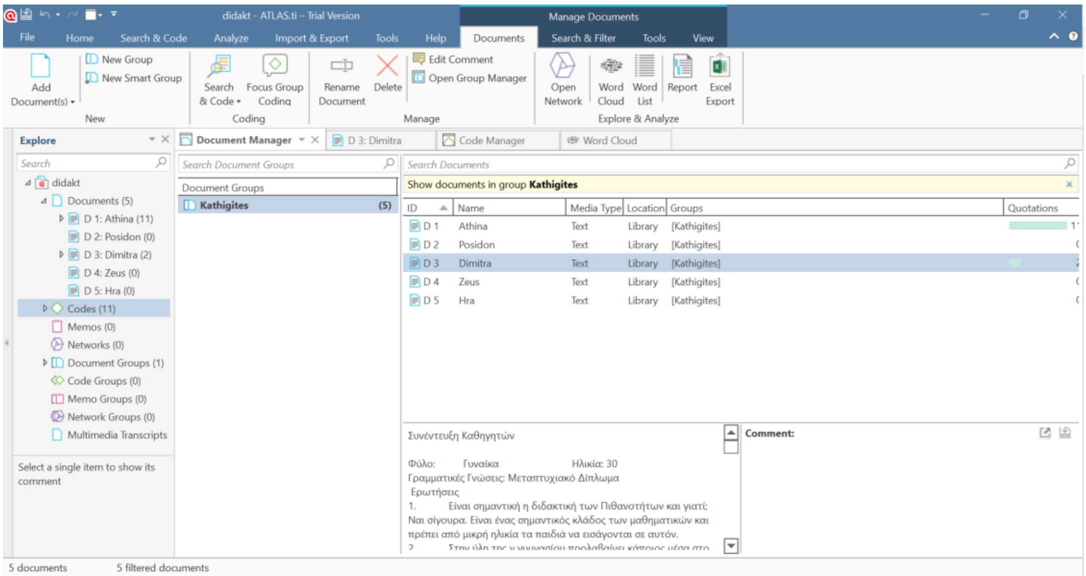
7.13 Διαδικασία Ανάλυσης Συνεντεύξεων

Τα ποιοτικά δεδομένα της έρευνας, όπως οι συνεντεύξεις και οι ανοικτού τύπου ερωτήσεις, αναλύθηκαν με το πρόγραμμα Atlas.ti 9. Αρχικά, οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν με ηχογράφηση και σημειώσεις του ερευνητή. Στη συνέχεια, ο ερευνητής αποδελτίωσε τις συνεντεύξεις σε ένα αρχείο Word, το οποίο και χρησιμοποίησε για την ανάλυση στο πρόγραμμα Atlas.ti 9.

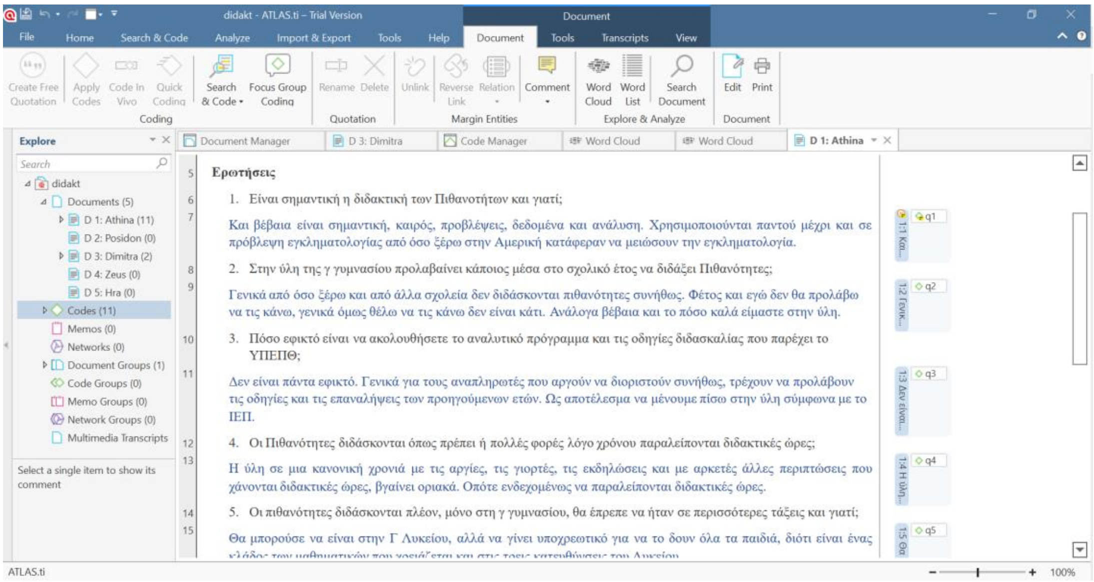
Το Atlas.ti είναι ένα πρόγραμμα λογισμικού εφοδιασμένο με εργαλεία που δίνουν δυνατότητες στον χρήστη να κωδικοποιήσει τα αποτελέσματα της έρευνας, να τα αξιολογήσει και να εξάγει τις σχέσεις μεταξύ τους ("What's New in ATLAS.ti 9 | ATLAS.ti", 2021). Μάλιστα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί με διάφορα είδη αρχείων, όπως αρχεία κειμένου, εικόνας, ήχου και βίντεο ("What's New in ATLAS.ti 9 |

ATLAS.ti", 2021). Επίσης, προσφέρει στον χρήστη μια μεγάλη ποικιλία τρόπων κωδικοποίησης και οργάνωσης των κωδικοποιημένων δεδομένων, ομαδοποιώντας αυτά σε φακέλους. Ακόμα, σημαντικό ρόλο για την επιλογή του συγκεκριμένου προγράμματος συντέλεσε, ότι το πρόγραμμα Atlas.ti 9 είναι διαθέσιμο για όλα τα λογισμικά της αγοράς, όπως Mac, Windows και Android ("What's New in ATLAS.ti 9 | ATLAS.ti", 2021).

Τα αρχεία Word με τις συνεντεύξεις εισάχθηκαν στο πρόγραμμα Atlas.ti 9 και στην συνέχεια κωδικοποιήθηκαν και ομαδοποιήθηκαν, όπως φαίνεται και στις εικόνες παρακάτω. Οι εικόνες αυτές αποτελούν φωτογραφίες από το πρόγραμμα Atlas.ti 9, κατά την διάρκεια της ανάλυσης. Η διαδικασία ανάλυσης συνεχίστηκε με την διεξαγωγή των αποτελεσμάτων της ανάλυσης, τα οποία παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο.



Εικόνα 3: Εισαγωγή συνεντεύξεων στο Atlas.ti



Εικόνα 4: Ανάλυση συνεντεύξεων στο Atlas.ti

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8^{Ο}: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση των αποτελεσμάτων της έρευνας. Η επιλογή του τρόπου παρουσίασης σε πίνακα ή διάγραμμα ή ενδεχομένως και κάποια εικόνα, έγινε με στόχο την καλύτερη δυνατή παρουσίαση των αποτελεσμάτων της έρευνας, ώστε να βοηθήσει τον αναγνώστη να κατανοήσει καλύτερα τα αποτελέσματα της έρευνας.

Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων, ξεκινάει με τα περιγραφικά αποτελέσματα του ερωτηματολογίου. Παρουσιάζονται τα δεδομένα που συλλέχτηκαν με το συγκεκριμένο μέσο συλλογής και φαίνονται οι συχνότητες των απαντήσεων με τα αντίστοιχα στατιστικά. Η συνέχεια της ανάλυσης των αποτελεσμάτων φέρει στο προσκήνιο την ανάλυση των συσχετίσεων. Η ανάλυση σε αυτό το κομμάτι, δρομολογείται κυρίως από τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν κατά τον σχεδιασμό της έρευνας από τον ερευνητή και παρουσιάζει διάφορες συσχετίσεις των μεταβλητών τις έρευνας που κρίθηκαν σημαντικές για ανάλυση και η συζήτηση τους σε γενικότερο επίπεδο, θα παρουσίαζε ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Έπειτα, η Τρίτη παράγραφος του συγκεκριμένου κεφαλαίου, παρουσιάζει την συνεπαγωγική ανάλυση των μεταβλητών του ερωτηματολογίου. Η ανάλυση αυτή πραγματοποιείται με το στατιστικό πακέτο CHIC και αποσκοπεί στην ενδεχόμενη δημιουργία κανόνων μεταξύ των ισχυρότερων συσχετίσεων των μεταβλητών. Τα διαγράμματα ομοιότητας και τα συνεπαγωγικά διαγράμματα, θα βοηθήσουν τον αναγνώστη να αποκτήσει μια πιο σφαιρική άποψη σχετικά με τις συ σχετιζόμενες μεταβλητές, καθώς επίσης και το βάθος της συσχέτισης πολλών μεταβλητών μαζί.

Ακολουθεί η παράγραφος ανάλυσης των συνεντεύξεων που έλαβαν χώρα για τις ανάγκες της παρούσας έρευνας. Η ανάλυση της συγκεκριμένης παραγράφου, ομαδοποίησε τα λεγόμενα των συμμετεχόντων στις συνεντεύξεις και τα οργάνωσε, ώστε η παρουσίαση τους να βοηθάει τον αναγνώστη να καταλάβει άμεσα το υπό συζήτηση θέμα και την άποψη των συμμετεχόντων πάνω σε αυτό.

Το κεφάλαιο της ανάλυσης των αποτελεσμάτων κλίνει με την ανάλυση και την σύγκριση των σχολικών εγχειριδίων των χωρών Ελλάδα, Σιγκαπούρη και Ολλανδία. Η σειρά παρουσίασης των δεδομένων που πάρθηκαν από τα βιβλία της εκάστοτε χώρας, όσο και ο τρόπος παρουσίασης τους, ακολουθεί μια επαγωγική λογική, ώστε να εντάξει τον μη εξειδικευμένο αναγνώστη στην λογική του εκάστοτε εγχειριδίου, στον τρόπο που αυτό λανσάρει την γνώση, αλλά και να τον βοηθήσει να καταλάβει τις βασικές διαφορές των εγχειριδίων των τριών χωρών.

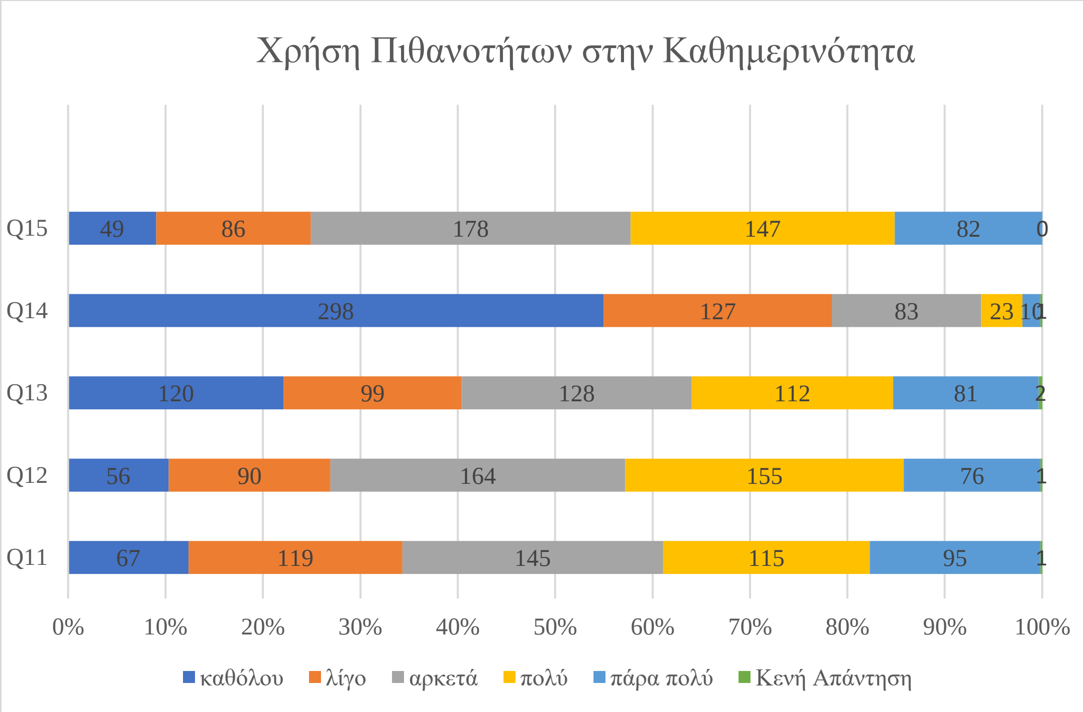
8.1 Περιγραφικά Αποτελέσματα Έρευνας

Το ερωτηματολόγιο έπειτα από τη συλλογή κάποιων γενικών χαρακτηριστικών του δείγματος, προχωρούσε σε μια σειρά ερωτήσεων φτιαγμένες με πεντάβαθμη κλίμακα Likert. Η πρώτη ομάδα ερωτήσεων από αυτές, ερευνούσε τη σχέση των ερωτευμένων με τις πιθανότητες σε επαγγελματικό ή καθημερινό πλαίσιο. Στην παρουσίαση που ακολουθεί, προηγείται του γραφήματος ένας πίνακας με την αποκωδικοποίηση των ερωτήσεων και στην συνέχεια το γράφημα με τα αποτελέσματα και τις συχνότητες που συγκέντρωσε κάθε μεταβλητή.

Η πρώτη ομάδα ερωτήσεων που παρουσιάζεται, αποτελεί ερωτήσεις σχετικές με την χρησιμότητα των πιθανοτήτων σε επαγγελματικές δραστηριότητες ή την καθημερινότητα.

Πίνακας 10: Αποκωδικοποίηση πρώτης ομάδας ερωτήσεων

Κωδικός	Ερώτηση
Q11	Σχέση Πιθανοτήτων με επαγγελματική δραστηριότητα.
Q12	Σχέση Πιθανοτήτων με καθημερινή δραστηριότητα.
Q13	Εμπιστοσύνη στις Πιθανότητες για στοίχημα μεγάλου χρηματικού ποσού.
Q14	Δεν με επηρεάζει η έλλειψη γνώσεων πιθανότητας.
Q15	Οι περισσότερες γνώσεις πιθανοτήτων θα επηρέαζαν την καθημερινότητα μου.



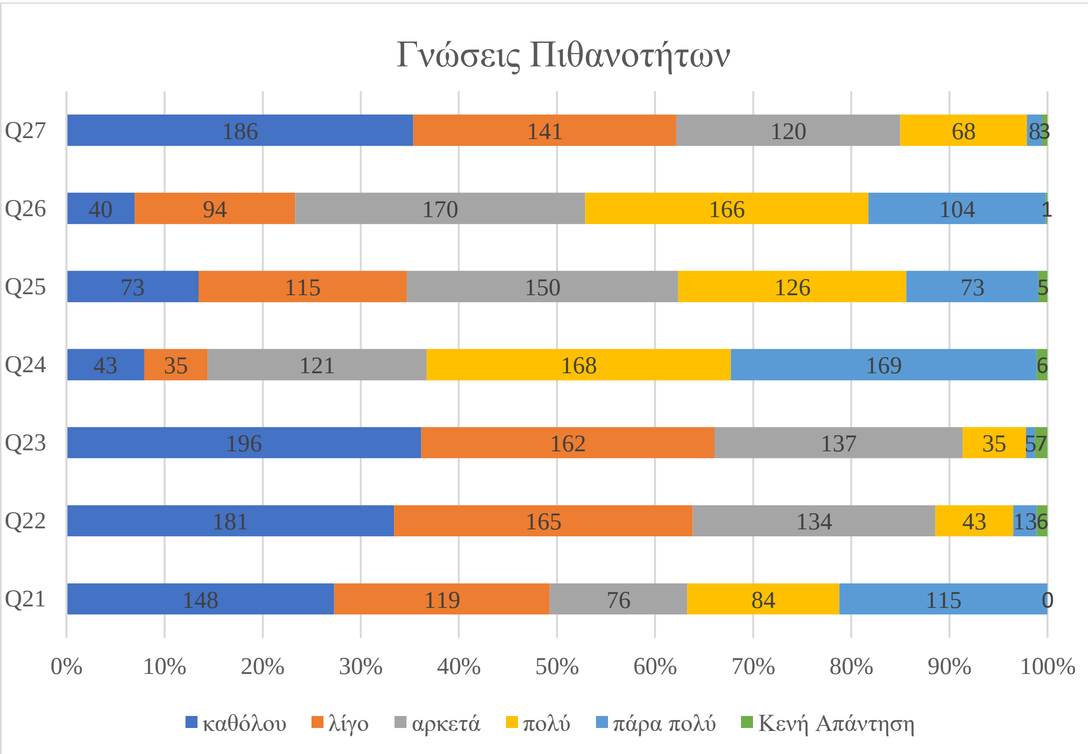
Διάγραμμα 8.1: Χρήση Πιθανοτήτων στην Καθημερινότητα

Είναι φανερό στον παραπάνω πίνακα ότι η πλειοψηφία των ερωτηθέντων πιστεύει ότι οι Πιθανότητες εμφανίζουν αρκετά καλή σχέση με την επαγγελματική τους δραστηριότητα. Μάλιστα ένα ποσοστό πάνω από 60% θεωρεί αυτή την σχέση από αρκετά καλή έως πολύ καλή. Το ποσοστό αυτό μεγαλώνει σε πάνω από 70%, όταν οι ερωτώμενοι απάντησαν σχετικά με τη σχέση των πιθανοτήτων με την καθημερινότητα τους. Έπειτα, η μεταβλητή Q13, όπου εκφράζει την πεποίθηση των ερωτώμενων σχετικά με την εμπιστοσύνη που θα έδειχναν στις Πιθανότητες για να στοιχηματίσουν σε ένα παιχνίδι ένα μεγάλο χρηματικό ποσό, δείχνει πολλούς να απάντησαν, ότι δεν θα εμπιστευόντουσαν καθόλου την θεωρία Πιθανοτήτων (120 άτομα), ή θα την εμπιστευόντουσαν λίγο (99 άτομα). Ωστόσο, η πλειοψηφία αναφέρθηκε, ότι θα έδειχνε εμπιστοσύνη, από αρκετή έως και πάρα πολύ. Στην μεταβλητή Q14, είναι φανερή η άποψη των ερωτώμενων, ότι δεν τους επηρεάζει καθόλου η έλλειψη γνώσεων Πιθανότητας (298 άτομα). Έπειτα, στην ερώτηση με κωδικό Q15, φαίνεται το ποσοστό που πιστεύουν ότι οι περισσότερες γνώσεις Πιθανοτήτων θα βοηθούσαν στην καθημερινότητα τους, ξεπερνάει το 70%.

Ακολουθεί η παρουσίαση των αποτελεσμάτων μιας ομάδας ερωτήσεων, όπου πραγματεύονται την διδαχή των Πιθανοτήτων κατά τα σχολικά χρόνια του ερωτώμενου. Μάλιστα, ο ερευνητής, θέτει τους ερωτώμενους, υπό ερωτήματα, όπως αν είχαν περισσότερες γνώσεις πιθανοτήτων, κατά πόσο πιστεύουν, ότι αυτό θα διευκόλυνε την καθημερινότητα τους.

Πίνακας 11: Αποκωδικοποίηση Δεύτερης ομάδας ερωτήσεων

Κωδικός	Ερώτηση
Q21	Θυμάμαι να διδάχτηκα πιθανότητες στο σχολείο.
Q22	Ικανοποίηση από την διδακτική των Πιθανοτήτων.
Q23	Ικανοποίηση από το σχολικό βιβλίο και τις δραστηριότητες στις Πιθανότητες.
Q24	Οι πιθανότητες είναι από αυτά τα χρήσιμα καθημερινά μαθηματικά που πρέπει να διδάσκονται περισσότερο.
Q25	Θα υπάρχουν ή υπήρξαν δυσκολίες στο πανεπιστήμιο, λόγω ελλείπων γνώσεων στις Πιθανότητες.
Q26	Περισσότερες γνώσεις πιθανοτήτων θα διευκόλυναν την καθημερινότητα μου.
Q27	Περισσότερες γνώσεις πιθανοτήτων δεν θα επηρέαζαν την καθημερινότητα μου



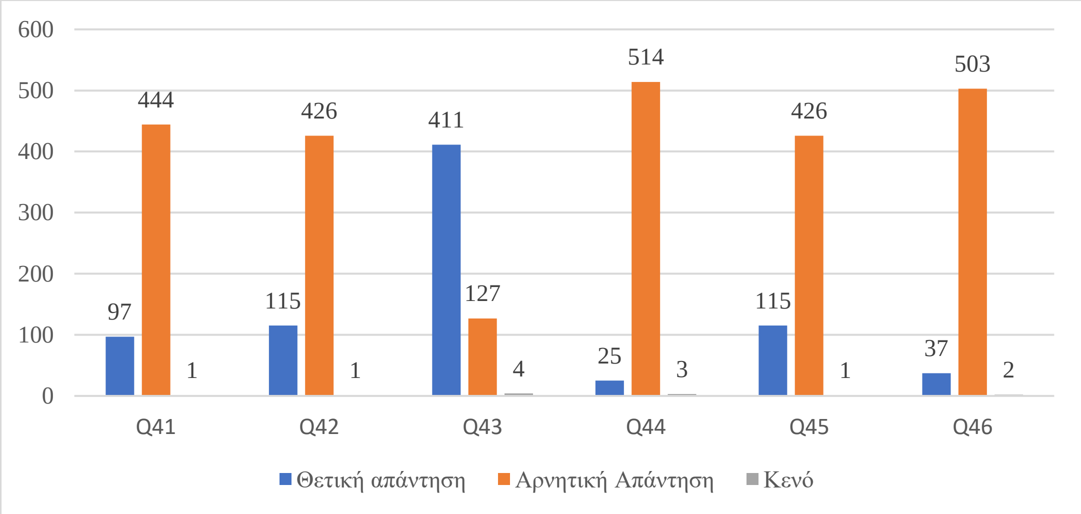
Διάγραμμα 8.2: Γνώσεις δείγματος για τις Πιθανότητες

Στο διάγραμμα λοιπόν αυτών των ερωτήσεων, φαίνεται αρχικά, ότι λίγο λιγότερο από το 50% των συμμετεχόντων στην έρευνα, δεν θυμάται να διδάχθηκε Πιθανότητες (148 άτομα) ή θυμάται λίγο (119 άτομα). Εν συνέχεια του εν λόγω αποτελέσματος, το ποσοστό ικανοποίησης από την διδακτική των Πιθανοτήτων ή το σχολικά βιβλίο, ανέρχεται σε πάνω από 60% για τις επιλογές «καθόλου» ή «λίγο ευχαριστημένοι». Βέβαια, στην ερώτηση Q24, ξεχωρίζει η άποψη ότι οι Πιθανότητες θα έπρεπε να διδάσκονται περισσότερο, όντας από τα πιο χρήσιμα μαθηματικά αντικείμενα στην καθημερινότητα. Η επόμενη ερώτηση της συγκεκριμένη ομάδας, πραγματεύεται τις δυσκολίες που υπάρχουν ή υπήρξαν στο Πανεπιστήμιο, λόγω ελλιπών πιθανοτικών γνώσεων. Εδώ, το ποσοστό αυτών που βρήκαν αρκετές έως και πάρα πολλές δυσκολίες είναι πάνω από 60%. Τέλος, μεγάλο κρίνεται και το ποσοστό που πιστεύει, ότι οι περισσότερες γνώσεις Πιθανοτήτων θα διευκόλυναν την καθημερινότητα τους. Πιο συγκεκριμένα, «αρκετά» απάντησαν 170 άτομα, «πολύ» 166 άτομα και «πάρα πολύ» 104 άτομα από το σύνολο των ερωτηθέντων.

Η επόμενη ερώτηση πραγματευόταν την επιρροή των Πιθανοτήτων στην καθημερινότητα, καθώς και συγκεκριμένες απόψεις σχετικά με τις γνώσεις της θεωρίας.

Πίνακας 12: Αποκωδικοποίηση Τέταρτης ομάδας ερωτήσεων

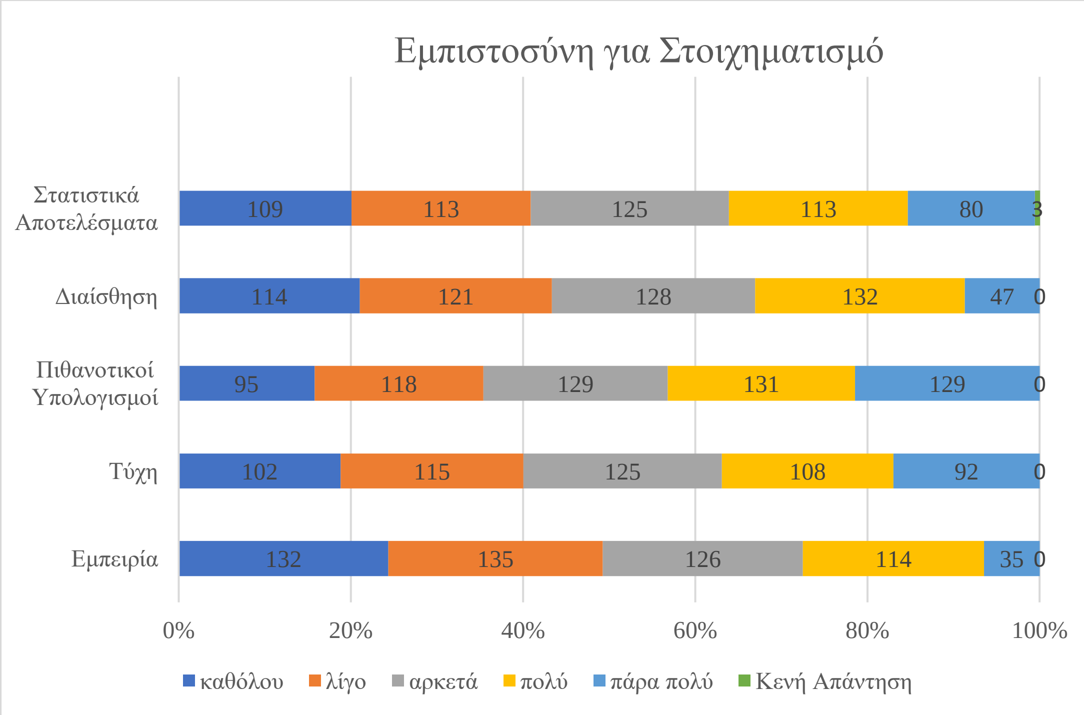
Κωδικός	Ερώτηση: Πώς θεωρείτε, ότι επηρεάζει η γνώση της θεωρίας Πιθανοτήτων την καθημερινότητα;
Q41	Δεν την επηρεάζει ιδιαίτερα.
Q42	Πολλές φορές, καλό είναι να αφήνουμε κάποια πράγματα στην τύχη.
Q43	Η λήψη μιας σημαντικής απόφασης πρέπει πάντα να λαμβάνεται έπειτα από την ανάλυση των πιθανών αποτελεσμάτων.
Q44	Οι Πιθανότητες χρησιμοποιούνται μόνο στον τζόγο.
Q45	Δεν καταλαβαίνω και πολύ την χρησιμότητα τους γιατί δεν γνωρίζω καλά την θεωρία τους.
Q46	Δεν καταλαβαίνω και πολύ την χρησιμότητα τους αφού μάλλον δεν τις χρειάζομαι.



Διάγραμμα 8.3: Γνώσεις δείγματος για τις Πιθανότητες και Καθημερινότητα

Το ραβδόγραμμα που φαίνεται παραπάνω δείχνει τις θετικές και τις αρνητικές αντιλήψεις των ερωτώμενων για την ομάδα ερωτήσεων που φαίνεται στον πίνακα πάνω από το διάγραμμα. Πιο συγκεκριμένα, 444 ερωτώμενοι απάντησαν αρνητικά στην ερώτηση, ότι οι γνώσεις Πιθανοτήτων δεν επηρεάζουν την καθημερινότητα τους. Μεγάλος αριθμός ερωτηθέντων μάλιστα, απάντησε ότι δεν πρέπει να αφήνουμε πολλά πράγματα στην τύχη (426 άτομα). Γεγονός, που επιβεβαιώνεται και από το επόμενο ερώτημα, αφού 411 άτομα θεωρούν ότι η λήψη μιας απόφασης πρέπει να βασίζεται στις Πιθανότητες. Στις επόμενες τρεις ερωτήσεις της συγκεκριμένης ομάδας, Υπάρχει μια συντριπτική πλειοψηφία ερωτώμενων που απάντησε αρνητικά. Με άλλα λόγια, δεν πιστεύουν ότι οι Πιθανότητες χρησιμοποιούνται μόνο στον τζόγο και δεν πιστεύουν ότι η μεγαλύτερη κατανόηση της θεωρίας έχει να κάνει με την χρησιμότητα της.

Το επόμενο διάγραμμα πραγματεύεται μια ερώτηση, όπου θέτει τον ερωτώμενο σε μια κατάσταση προς στοιχηματισμό σε μια βραδιά στο καζίνο. Η ερώτηση απευθύνεται στον ερωτώμενο, ρωτώντας κατά πόσο θα εμπιστευόταν τον στοιχηματισμό ενός μεγάλου χρηματικού ποσού σε παράγοντες όπως η διαίσθηση, τα στατιστικά αποτελέσματα, τις Πιθανότητες, την τύχη ή την γενικότερη εμπειρία του.



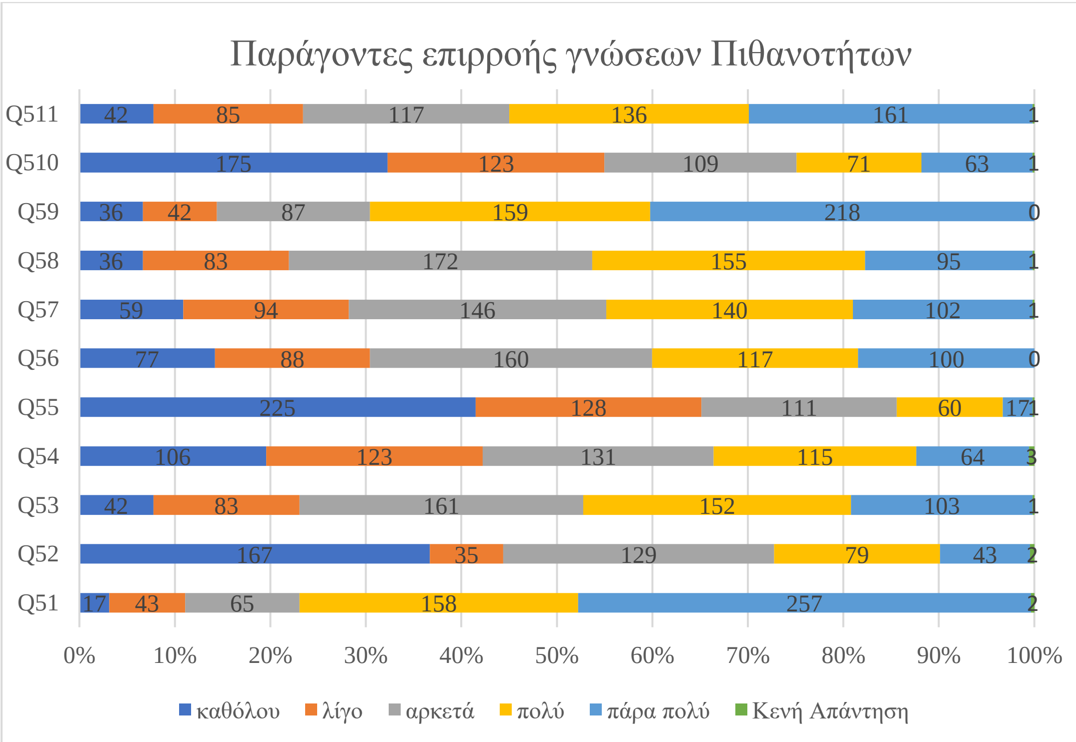
Διάγραμμα 8.4: Εμπιστοσύνη και στοίχημα

Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης ερώτησης, δείχνουν, ότι την μεγαλύτερη εμπιστοσύνη συγκεντρώνουν οι πιθανοτικοί υπολογισμοί και η τύχη. Ωστόσο, δεν απέχουν πολύ από τις πρώτες δύο επιλογές των ερωτώμενων η «διαίσθηση» και τα «στατιστικά αποτελέσματα». Ενώ πιο πίσω από τους παραπάνω παράγοντες παραμένει η επιλογή απόφασης προς στοιχηματισμό με βάση την εμπειρία.

Την πρώτη ομάδα ερωτήσεων του ερωτηματολογίου, κλίνει μια ερώτηση σχετικά με τους παράγοντες που έχουν επηρεάσει τις γνώσεις των ερωτώμενων στο κομμάτι των Πιθανοτήτων μέχρι σήμερα. Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης ερώτησης παρουσιάζονται στο διάγραμμα που ακολουθεί.

Πίνακας 13: Αποκωδικοποίηση Πέμπτης ομάδας ερωτήσεων

Κωδικός	Ερώτηση
Q51	Ο εκπαιδευτικός.
Q52	Η οικογένεια μου.
Q53	Το σχολικό βιβλίο.
Q54	Η κοινωνική και πολιτική κατάσταση της εποχής που πήγαινα σχολείο.
Q55	Οι φίλοι μου.
Q56	Η δυσκολία του μαθήματος των μαθηματικών.
Q57	Ο όγκος της ύλης.
Q58	Η ροή της ύλης.
Q59	Η έλλειψη διαδραστικών παραδειγμάτων.
Q510	Η έλλειψη βοήθειας στο σπίτι.
Q511	Η έλλειψη σύνδεσης των γνώσεων που λαμβάνω με την καθημερινή τους χρήση.



Διάγραμμα 8.5: Παράγοντες επιρροής γνώσεων Πιθανότητας

Αυτό που ξεχωρίζει στο παραπάνω διάγραμμα, με τις επιλογές «αρκετά», «πολύ» και «πάρα πολύ», είναι η σημαντική επιρροή στην παροχή πιθανοτικών γνώσεων από τον εκπαιδευτικό, την έλλειψη διαδραστικών παραδειγμάτων, το σχολικό βιβλίο και η έλλειψη σύνδεσης των γνώσεων πιθανότητας με την καθημερινή ζωή. Ενώ λιγότερο φαίνεται να πιστεύουν οι ερωτώμενοι, ότι οι γνώσεις τους επηρεάζονται από την παροχή βοήθειας στο σπίτι ή τους φίλους τους. Ακόμα σημαντικά ποσοστά επιρροών της τάξεως του «πολύ» και του «πάρα πολύ» συγκεντρώνουν η ροή της ύλης των μαθηματικών και ο όγκος της διδακτέας ύλης στην εκάστοτε τάξη.

Παρακάτω παρουσιάζονται οι πίνακες που προέκυψαν από την μελέτη αξιοπιστίας που πραγματοποιήθηκε με το στατιστικό πακέτο SPSS για την πρώτη ομάδα ερωτήσεων του ερωτηματολογίου. Η μελέτη αξιοπιστίας επιτεύχθηκε μέσω του συντελεστή αξιοπιστίας Cronbach's Alpha και βελτιώνεται με την αφαίρεση ορισμένων μεταβλητών από την μελέτη της έρευνας. Ακολουθούν οι πίνακες που προέκυψαν από την ανάλυση με το SPSS.

Πίνακας 14: Πίνακας αξιοπιστίας 1

Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
.679	.649	29

Πίνακας 15: Πίνακας βελτίωσης αξιοπιστίας 1

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total Correlation	Squared Multiple Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
Q11	76.8484	96.355	.239	.408	.669
Q12	76.7468	96.460	.262	.459	.667
Q13	77.0647	96.531	.206	.139	.673
Q14	78.1978	106.344	-.163	.174	.698
Q15	76.7024	97.828	.210	.374	.672
Q21	77.1201	94.906	.231	.460	.671
Q22	77.8115	99.338	.165	.655	.675
Q23	77.9113	98.614	.220	.565	.671
Q24	76.3826	96.589	.182	.190	.676
Q25	76.2847	94.756	.355	.435	.660
Q26	76.7800	97.916	.179	.194	.675
Q27	76.6414	95.842	.320	.516	.663
Q41	78.0444	102.983	.112	.161	.678
Q42	78.0776	103.701	.023	.128	.680
Q43	78.6322	105.922	-.220	.252	.689
Q44	77.9741	103.533	.094	.130	.679
Q45	78.1091	102.353	.193	.211	.676
Q46	77.9760	103.642	.071	.123	.679
Q51	75.8540	98.658	.181	.190	.674
Q52	77.4935	98.284	.158	.207	.677
Q53	76.5989	96.930	.240	.223	.669
Q54	77.1257	94.680	.297	.225	.664
Q55	77.8410	96.934	.249	.299	.669
Q56	76.8004	94.842	.295	.425	.664
Q57	76.6987	93.855	.349	.581	.659
Q58	76.5933	94.279	.376	.515	.658
Q59	76.0518	95.253	.306	.362	.663
Q510	77.4603	93.279	.334	.322	.660
Q511	76.4177	92.977	.375	.364	.657

Στον πρώτο πίνακα από τους δύο που προηγούνται, φαίνεται, ότι ο συντελεστής αξιοπιστίας Cronbach’s Alpha είναι 0,679. Στον δεύτερο πίνακα φαίνεται, ότι αυτός ο συντελεστής μπορεί να βελτιωθεί αφαιρώντας την μεταβλητή Q43. Η μεταβλητή που μπορεί να βελτιώσει τον συντελεστή αξιοπιστίας, φαίνεται μαρκαρισμένη σε κάθε έναν από τους πίνακες που ακολουθούν. Κατά συνέπεια, συνεχίζει η ανάλυση στους επόμενους πίνακες. Έτσι, ο συντελεστής βελτιώνεται στο 0,689. Ωστόσο επιδέχεται και άλλες βελτιώσεις, όπως φαίνεται σε επόμενους πίνακες και αφαιρώντας τις μεταβλητές Q42, Q14 και Q46 καταλήγουμε στον συντελεστή αξιοπιστίας 0,709, ο οποίος θεωρείται γενικότερα αποδεκτός.

Πίνακας 16: Πίνακας αξιοπιστίας 2

Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
.689	.680	28

Πίνακας 17: Πίνακας βελτίωσης αξιοπιστίας 2

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total Correlation	Squared Multiple Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
Q11	75.5434	97.945	.250	.406	.679
Q12	75.4418	98.014	.276	.448	.677
Q13	75.7597	98.335	.209	.139	.683
Q14	76.8928	108.470	-.171	.163	.707
Q15	75.3974	99.570	.216	.374	.682
Q21	75.8152	96.647	.235	.460	.681
Q22	76.5065	101.176	.168	.653	.685
Q23	76.6063	100.491	.221	.562	.681
Q24	75.0776	98.253	.189	.174	.685
Q25	74.9797	96.450	.362	.434	.670
Q26	75.4750	99.754	.181	.194	.685
Q27	75.3364	97.505	.329	.511	.673
Q41	76.7394	104.845	.120	.154	.688
Q42	76.7726	105.569	.032	.114	.690
Q44	76.6691	105.444	.097	.129	.689
Q45	76.8041	104.176	.205	.166	.685
Q46	76.6710	105.558	.073	.119	.689
Q51	74.5490	100.578	.180	.189	.684
Q52	76.1885	100.142	.159	.206	.687
Q53	75.2939	98.897	.236	.221	.680
Q54	75.8207	96.655	.292	.223	.675
Q55	76.5360	98.845	.247	.299	.679
Q56	75.4954	96.806	.291	.425	.675
Q57	75.3937	95.817	.344	.581	.670
Q58	75.2884	96.228	.371	.514	.669
Q59	74.7468	97.293	.298	.356	.675
Q510	76.1553	95.161	.332	.322	.671
Q511	75.1128	94.908	.371	.363	.668

Πίνακας 18: Πίνακας αξιοπιστίας 3

Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
.690	.683	27

Πίνακας 19: Πίνακας βελτίωσης αξιοπιστίας 3

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total Correlation	Squared Multiple Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
Q11	73.6839	97.661	.248	.406	.680
Q12	73.5823	97.740	.273	.448	.678
Q13	73.9002	98.031	.208	.139	.684
Q14	75.0333	108.062	-.169	.162	.708
Q15	73.5379	99.293	.213	.374	.683
Q21	73.9556	96.317	.235	.459	.682
Q22	74.6470	100.870	.166	.652	.686
Q23	74.7468	100.164	.220	.562	.682
Q24	73.2181	97.889	.190	.173	.686
Q25	73.1201	96.139	.361	.434	.671
Q26	73.6155	99.459	.178	.191	.686
Q27	73.4769	97.239	.326	.511	.674
Q41	74.8799	104.543	.114	.137	.689
Q44	74.8096	105.121	.090	.107	.690
Q45	74.9445	103.849	.202	.163	.687
Q46	74.8115	105.224	.069	.113	.690
Q51	72.6895	100.240	.180	.187	.686
Q52	74.3290	99.755	.161	.205	.688
Q53	73.4344	98.498	.239	.219	.681
Q54	73.9612	96.230	.296	.220	.676
Q55	74.6765	98.434	.250	.298	.680
Q56	73.6359	96.410	.293	.425	.676
Q57	73.5342	95.431	.347	.580	.671
Q58	73.4288	95.853	.373	.514	.670
Q59	72.8872	96.915	.300	.356	.676
Q510	74.2957	94.801	.333	.321	.672
Q511	73.2532	94.486	.374	.358	.668

Πίνακας 20: Πίνακας αξιοπιστίας 4

Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
.708	.707	26

Πίνακας 21: Πίνακας βελτίωσης αξιοπιστίας 4

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total Correlation	Squared Multiple Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
Q11	71.9445	99.475	.272	.393	.698
Q12	71.8429	99.692	.294	.446	.696
Q13	72.1608	100.194	.217	.137	.703
Q15	71.7985	101.435	.226	.374	.702
Q21	72.2163	98.536	.241	.454	.702
Q22	72.9076	103.499	.158	.650	.706
Q23	73.0074	102.778	.211	.560	.703
Q24	71.4787	99.950	.203	.169	.705
Q25	71.3808	98.070	.382	.425	.690
Q26	71.8762	101.842	.181	.190	.706
Q27	71.7375	99.375	.338	.510	.693
Q41	73.1405	106.917	.127	.131	.707
Q44	73.0702	107.584	.096	.106	.709
Q45	73.2052	106.326	.201	.160	.706
Q46	73.0721	107.671	.079	.110	.709
Q51	70.9501	102.673	.180	.185	.705
Q52	72.5896	102.191	.161	.205	.707
Q53	71.6950	100.923	.239	.219	.701
Q54	72.2218	98.751	.291	.220	.696
Q55	72.9372	100.952	.246	.297	.700
Q56	71.8965	98.871	.291	.424	.696
Q57	71.7948	97.997	.339	.580	.692
Q58	71.6895	98.452	.363	.513	.691
Q59	71.1479	99.556	.290	.355	.697
Q510	72.5564	97.181	.333	.319	.692
Q511	71.5139	97.050	.367	.356	.690

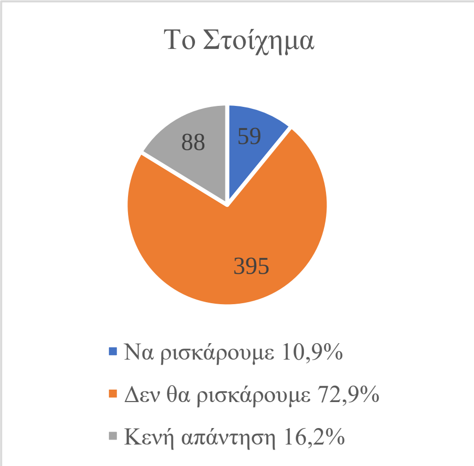
Πίνακας 22: Πίνακας αξιοπιστίας 5

Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
.709	.709	25

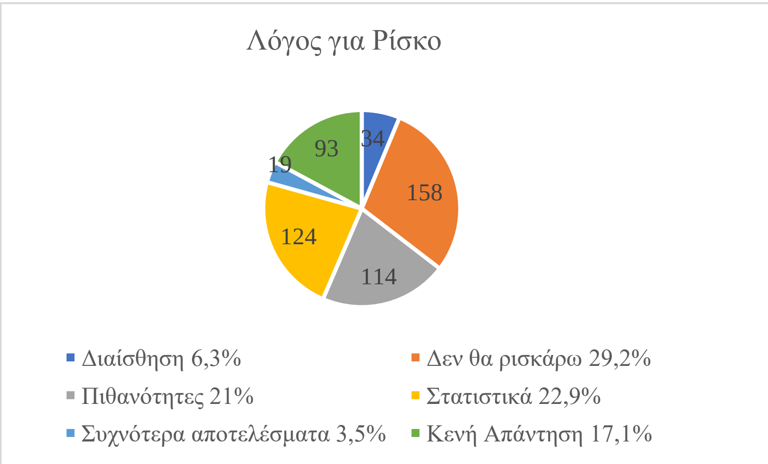
Πίνακας 23: Πίνακας βελτίωσης αξιοπιστίας 5

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total Correlation	Squared Multiple Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
Q11	69.9834	99.146	.270	.393	.699
Q12	69.8817	99.360	.292	.446	.697
Q13	70.1996	99.838	.216	.136	.704
Q15	69.8373	101.103	.224	.373	.702
Q21	70.2551	98.176	.241	.453	.702
Q22	70.9464	103.125	.157	.649	.707
Q23	71.0462	102.389	.211	.559	.703
Q24	69.5176	99.606	.202	.168	.706
Q25	69.4196	97.751	.379	.423	.690
Q26	69.9150	101.411	.183	.180	.706
Q27	69.7763	99.052	.336	.509	.694
Q41	71.1793	106.540	.126	.131	.708
Q44	71.1091	107.208	.093	.093	.709
Q45	71.2440	105.966	.198	.143	.706
Q51	68.9889	102.274	.181	.185	.705
Q52	70.6285	101.827	.160	.204	.708
Q53	69.7338	100.522	.240	.219	.701
Q54	70.2606	98.349	.292	.220	.697
Q55	70.9760	100.575	.246	.297	.701
Q56	69.9353	98.464	.292	.422	.697
Q57	69.8336	97.554	.342	.577	.692
Q58	69.7283	98.039	.365	.512	.691
Q59	69.1867	99.122	.292	.353	.697
Q510	70.5952	96.778	.334	.319	.693
Q511	69.5527	96.662	.367	.355	.690

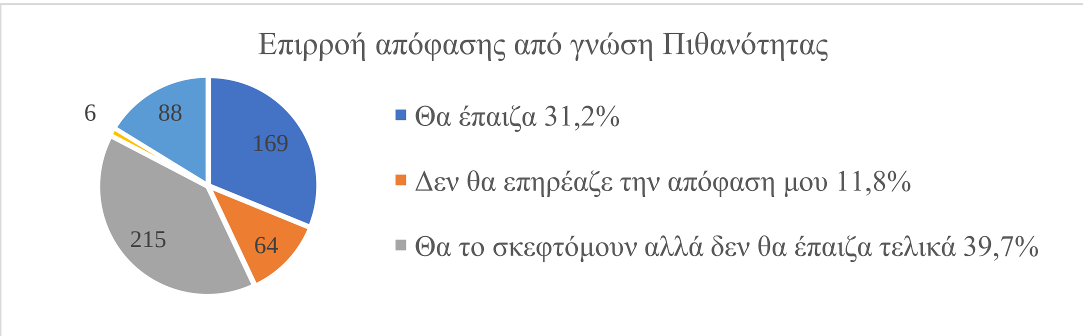
Το ερωτηματολόγιο συνέχιζε με κάποιες ερωτήσεις – δραστηριότητες, που προσπαθούσαν να φέρουν τον ερωτώμενο αντιμέτωπο με μια καθημερινή κατάσταση, ώστε να εξακριβωθεί η απόφαση της τελικής επιλογής του. Η πρώτη δραστηριότητα, έθετε τον ερωτώμενο ως νικητή ενός στοιχήματος ή παιχνιδιού, με κέρδος 1.000€. Έπειτα, ακολουθούσαν τρεις ερωτήσεις. Αρχικά, ο υπεύθυνος παρουσιαστής του παιχνιδιού, ρωτούσε τον ερωτώμενο – διαγωνιζόμενο, εάν θα ρίσκαρε τα 1.000€ με απώτερο στόχο τον πενταπλασιασμό του ποσού. Η δεύτερη ερώτηση του παρουσιαστή, είχε να κάνει με τον παράγοντα που θα επηρέαζε την απόφαση του διαγωνιζόμενου. Στην συνέχεια, στην Τρίτη του ερώτηση ο παρουσιαστής, γνωστοποιεί στον διαγωνιζόμενο τις Πιθανότητες νίκης του στην περίπτωση που ρισκάρει το ποσό, οπότε του επαναλαμβάνει την πρώτη ερώτηση. Τα αποτελέσματα των απαντήσεων των συμμετεχόντων της έρευνας σε αυτή την ερώτηση, φαίνονται παρακάτω και είναι προσαρμοσμένα σε κυκλικά διαγράμματα.



Διάγραμμα 8.6: Το στοίχημα



Διάγραμμα 8.7: Λόγος για Ρίσκο



Διάγραμμα 8.8: Επιρροή απόφασης υπό γνώση Πιθανότητας

Στο πρώτο κυκλικό διάγραμμα που φαίνεται, ξεχωρίζει η πεποίθηση των ερωτώμενων (72,9%), ότι δεν θα ρισκάρουν το ποσό που έχουν ήδη κερδίσει, ενώ μόνο το 10,9% απάντησε ότι θα έπαιρνε το ρίσκο. Στο επόμενο κυκλικό διάγραμμα, που αντιπροσωπεύει την δεύτερη ερώτηση του παρουσιαστή, η πλειοψηφία (29,2%) απάντησε, ότι δεν υπάρχει περίπτωση να ρισκάρει, αλλά αρκετά κοντά σε αυτό ήταν και τα ποσοστά αυτών που θα ρίσκαραν εμπιστευόμενοι τις Πιθανότητες (21%) και τα στατιστικά αποτελέσματα επιτυχίας, των προηγούμενων συμμετεχόντων στο παιχνίδι (22,9%). Στο τελευταίο κυκλικό διάγραμμα, παρατηρείται, ότι το 39,7% των ερωτώμενων, θα έμπαινε περισσότερο στο δίλημμα να συνεχίσει το παιχνίδι παίρνοντας το ρίσκο εάν ήξερε την πιθανότητα νίκης του, ωστόσο τελικά δεν θα ρίσκαρε. Επίσης, μεγάλο σε αυτό το σημείο είναι και το ποσοστό όσων θα ρίσκαραν (31,2%), ενώ το11,8% των ερωτώμενων δεν θα επηρεαζόταν από την γνώση της Πιθανότητας.

Ο πίνακας που ακολουθεί, αποτελεί την συχνότητα των απαντήσεων των συμμετεχόντων της έρευνας, σε μια δραστηριότητα που πραγματεύονταν την κλήρωση 5 αριθμών από ένα σύνολο 50 αριθμών. Μάλιστα, γίνεται γνωστό κατά την δραστηριότητα, ότι υπάρχει ένα περιοδικό προβλέψεων που δημοσιεύει τους αριθμούς που κέρδισαν σε 10 προηγούμενες κληρώσεις, αλλά και έναν γενικό στατιστικό πίνακα με τα ποσοστά εμφάνισης του κάθε αριθμού σε όλες τις κληρώσεις του τελευταίου έτους. Οι απαντήσεις που έδωσαν οι ερωτώμενοι, εμφανίζονται παρακάτω.

Πίνακας 24: Τυχερό παιχνίδι και Πιθανότητες

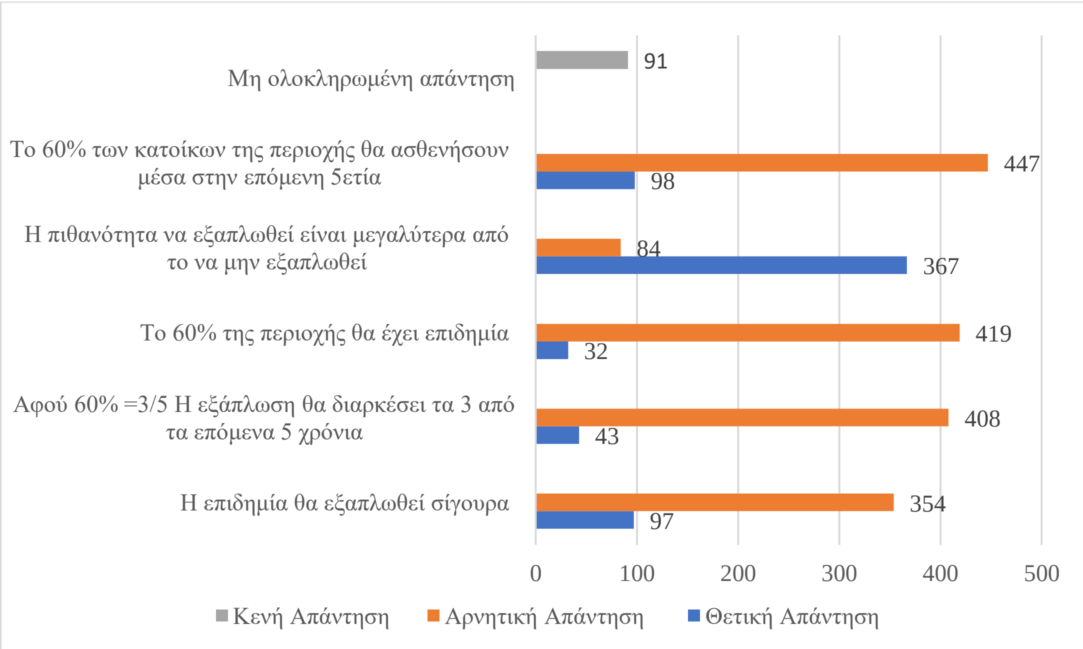
Α/Α	Ερωτήσεις	Συχνότητα θετικής απάντησης f (f %)	Συχνότητα αρνητικής απάντησης f (f %)	Κενή Απάντηση (f %)
1	Στην επόμενη κλήρωση καλό είναι να παίξουμε τους αριθμούς που έρχονται συχνότερα.	106 (19,6 %)	424 (78,2 %)	12 (2,2 %)
2	Στην επόμενη κλήρωση καλό είναι να μην παίξουμε τους αριθμούς που ήρθαν στη προηγούμενη κλήρωση, καθώς δυσκολα θα έρθουν πάλι.	119 (22 %)	411 (75,8 %)	12 (2,2 %)
3	Πιο πολλες πιθανότητες για να κερδίσουν, έχουν οι αριθμοί που κληρώθηκαν στην προηγούμενη κλήρωση, επειδή είναι τυχεροί αριθμοί	15 (2,8 %)	515 (95 %)	12 (2,2 %)
4	Οι πληροφορίες του Περιοδικού ειναι άχρηστες για την πρόβλεψη των αριθμών της επόμενης εβδομάδας.	162 (29,9 %)	368 (67,9 %)	12 (2,2 %)
5	Περισσότερες πιθανότητες να κληρωθούν έχουν οι αριθμοί που δεν έχουν κληρωθει εδω και καιρό.``````````	99 (18,3 %)	431 (79,5 %)	12 (2,2 %)
6	Αν επιλέξουμε τους αριθμούς έπειτα από σκέψη, θα έχουμε μεγαλύτερες πιθανότητες να κερδίσουμε από μια τυχαία επιλογή.	172 (31,7 %)	358 (66,1 %)	12 (2,2 %)

Γίνεται λοιπόν φανερό από τον παραπάνω πίνακα, το πολύ μεγάλο ποσοστό των ερωτώμενων (78,2%) που απάντησε αρνητικά στην ερώτηση, ότι στην επόμενη κλήρωση καλό θα ήταν να παιχτούν αριθμοί που έρχονται συχνότερα. Ομοίως και η απάντηση στις επόμενες δύο ερωτήσεις, ότι «καλό θα ήταν να μην παιχτούν οι αριθμοί που ήρθαν στην προηγούμενη κλήρωση», με αρνητική απάντηση σε ποσοστό 75,8%, καθώς και «να παιχτούν οι αριθμοί της προηγούμενης κλήρωσης» με αρνητική απάντηση 95%. Στην ερώτηση 4 του παραπάνω πίνακα, φαίνεται το 67,9% των ερωτώμενων, να μην θεωρεί άχρηστες τις πληροφορίες του περιοδικού. Ακόμα, ένα μεγάλο ποσοστό της τάξεως του 79,5% απαντάει αρνητικά στην «κλήρωση των αριθμών που έχουν καιρό να εμφανιστούν» και τέλος, αρνητικά επίσης απάντησε το 66,1% στην «σκεπτική για την επιλογή αριθμών, με στόχο την αύξηση της πιθανότητας νίκης».

Το ραβδόγραμμα που παρουσιάζεται παρακάτω, αποτελεί τις απαντήσεις των ερωτώμενων στην επόμενη δραστηριότητα του ερωτηματολογίου. Η δραστηριότητα αυτή, πραγματευόταν μια έκφραση που εμπεριέχει πιθανότητα και πως την καταλαβαίνει ο εκάστοτε ερωτώμενος. Η έκφραση αυτή, υποτίθεται για την ερώτηση, ότι ακούστηκε στην τηλεόραση και ήταν η εξής:

«Η Πιθανότητα εξάπλωσης της επιδημίας τα επόμενα 5 χρόνια, προβλέπεται 60%».

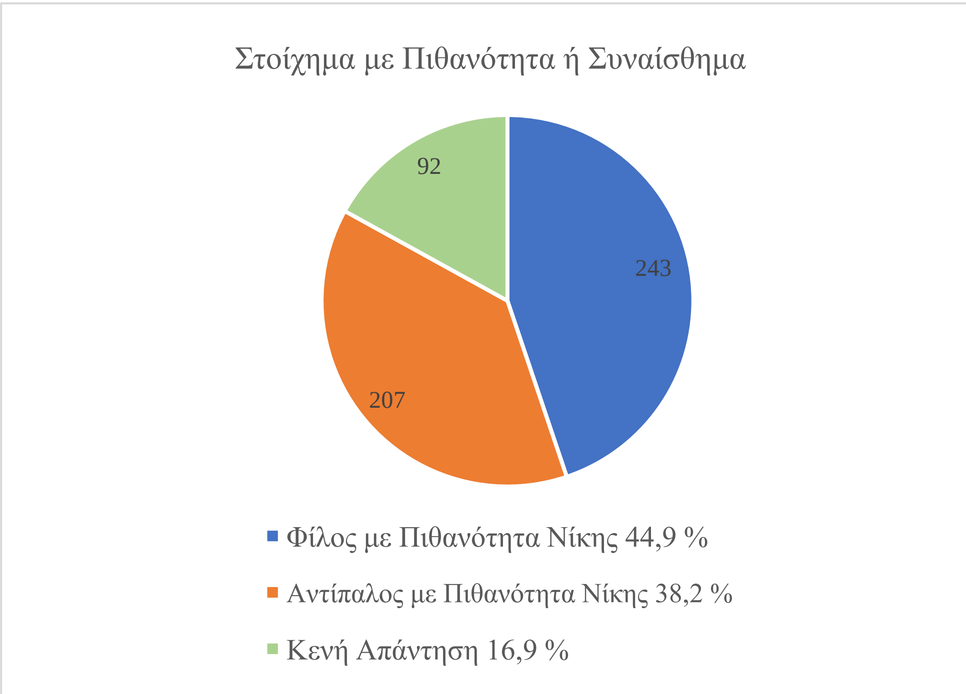
Οι ερωτώμενοι καλούνταν να απατήσουν σε κάποιες ερωτήσεις τύπου σωστού - λάθους που συνόδευαν την εν λόγω δραστηριότητα, ώστε να εξακριβωθεί ο τρόπος που ο καθένας αντιλαμβάνεται την συγκεκριμένη έκφραση. Το παρακάτω ραβδόγραμμα παρουσιάζει τις απαντήσεις των ερωτώμενων.



Διάγραμμα 8.9: Κατανόηση εκφράσεων Πιθανότητας

Αυτό που γίνεται αντιληπτό με μια πρώτη ματιά στο ραβδόγραμμα είναι, ότι μια πολύ μεγάλη μερίδα των ερωτώμενων (367 άτομα) καταλαβαίνει την έκφραση ως «Η πιθανότητα να εξαπλωθεί είναι μεγαλύτερη από το να μην εξαπλωθεί». Επίσης, παρατηρείται η πλειοψηφία να απαντάει αρνητικά σε ερωτήσεις όπως «Το 60% των κατοίκων της περιοχής θα ασθενήσουν μέσα στην επόμενη 5ετία», «Το 60% των κατοίκων της περιοχής θα ασθενήσουν μέσα στην επόμενη 5ετία» ή «Η επιδημία θα εξαπλωθεί σίγουρα».

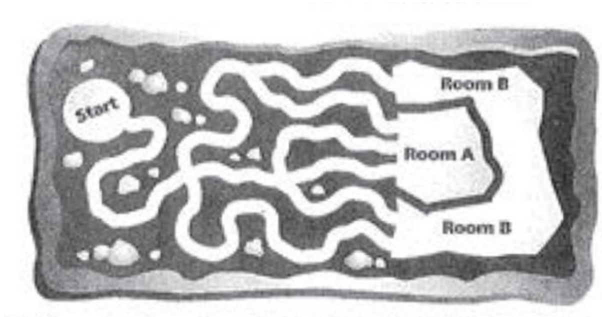
Η επόμενη ερώτηση πραγματευόταν τον στοιχηματισμό με βάση την Πιθανότητα ή το συναίσθημα. Ο ερευνητής με αυτή την ερώτηση, έθετε τον ερωτώμενο στην θέση ενός στοιχηματισμού ενός μεγάλου χρηματικού ποσού σε ένα παιχνίδι, στο οποίο λάμβανε μέρος ένας πολύ καλός φίλος του ερωτώμενου. Ο συμμετέχων στην έρευνα, καλούνταν να απαντήσει, σε ποιον θα στοιχημάτιζε αυτό το ποσό, δηλαδή θα στοιχημάτιζε εμπιστευόμενος τα συναισθήματα του για τον φίλο του ή τα πιθανοτικά δεδομένα που του δίνονται, τα οποία τάσσονταν υπέρ του αντιπάλου;



Διάγραμμα 8.10: Πιθανότητα ή Συναίσθημα

Στο κυκλικό διάγραμμα παραπάνω, φαίνεται οι περισσότεροι ερωτώμενοι να αποφασίζουν να στοιχηματίσουν με βάση το συναίσθημα (44,9 %). Ωστόσο, αρκετά κοντά σε αυτό το ποσοστό, είναι και το ποσοστό αυτών που θα στοιχημάτιζαν με βάση την Πιθανότητα (38,2 %).

Στην συνέχεια φαίνεται μια εικόνα, η οποία αποτελούσε μέρος της επόμενης ερώτησης του ερωτηματολογίου. Στην ερώτηση αυτή, οι συμμετέχοντες στην έρευνα, καλούνταν να απαντήσουν σχετικά με την πεποίθηση τους για την πιθανότητα κάποιος να καταλήξει στο δωμάτιο Α ή στο δωμάτιο Β.



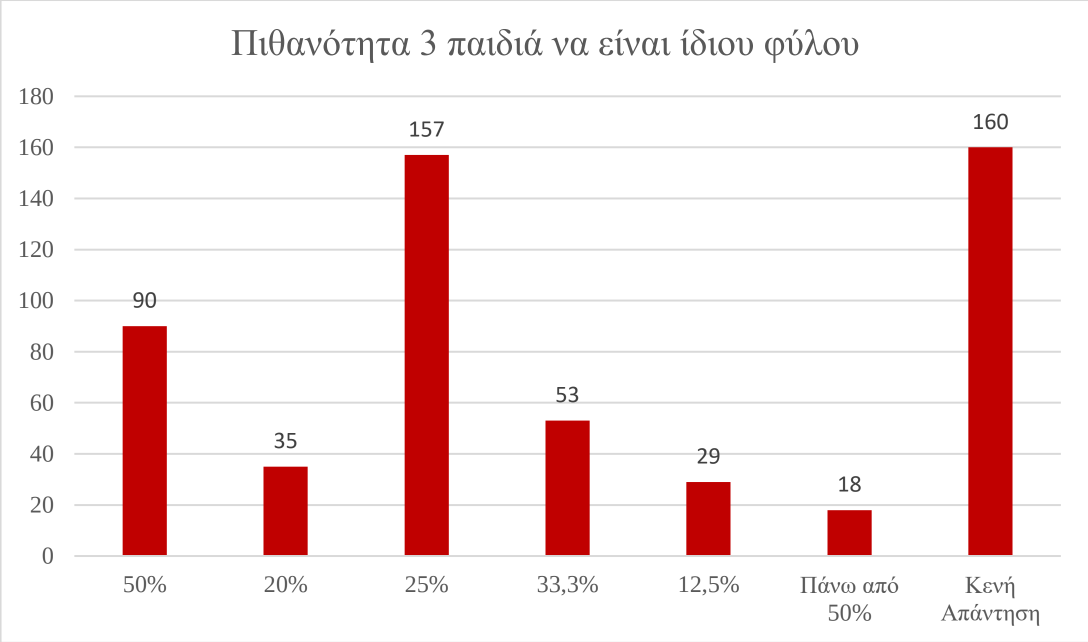
Εικόνα 5: Ο Λαβύρινθος

Πίνακας 25: Πιθανότητα και καθημερινά Παίγνια

Πιθανότητα και Παίγνια		
	f	**f %**
Δωμάτιο A	100	18,5 %
Δωμάτιο B	99	18,3 %
Ίσες Πιθανότητες	235	43,4 %
Κενή Απάντηση	108	19,9 %

Ο πίνακας που ακολουθεί την εικόνα, φανερώνει τις απαντήσεις των ερωτώμενων και τα αντίστοιχα ποσοστά τους. Όπως είναι φανερό, σε αυτή την ερώτηση η πλειοψηφία (43,4 %) απάντησε πως οι πιθανότητες είναι ίσες. Οι απαντήσεις για τα Δωμάτια Α και Β κυμάνθηκαν πάνω κάτω στα ίδια ποσοστά, με 18,5% και 18,3% αντίστοιχα.

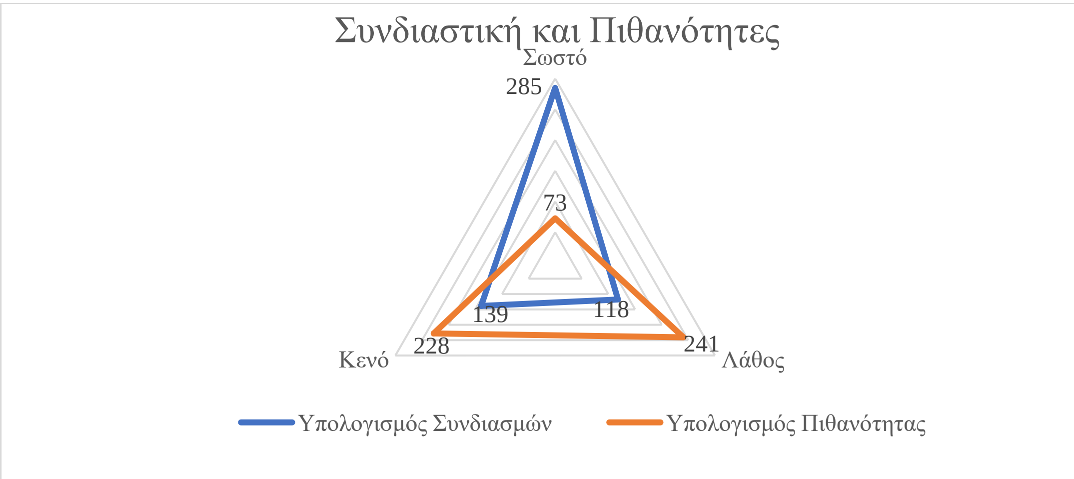
Έπειτα, την ερώτηση αυτή διαδέχονταν μια ερώτηση με περισσότερα μαθηματικά δεδομένα. Αυτό ενδεχομένως να δικαιολογεί και τις κενές απαντήσεις που λήφθηκαν στην συγκεκριμένη ερώτηση, που όπως φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα ανέρχονταν στις 160 απαντήσεις. Η ερώτηση αυτή λοιπόν, παρουσίαζε ένα δενδροδιάγραμμα με όλες τις δυνατές περιπτώσεις γέννησης παιδιών, σε μια οικογένεια με τρία παιδιά. Οι ερωτώμενοι κλήθηκαν να αναγνώσουν το διάγραμμα αυτό και να βρουν την πιθανότητα σε μια οικογένεια με τρία παιδιά, να είναι όλα του ίδιου φύλου. Τα αποτελέσματα έδωσαν το παρακάτω διάγραμμα.



Διάγραμμα 8.11: Πιθανότητα από δενδροδιάγραμμα

Η πλειοψηφία των ερωτώμενων δεν έδωσε καμία απάντηση στην συγκεκριμένη ερώτηση (160 άτομα), ενώ πολύ κοντά στων αριθμό των κενών απαντήσεων, ήταν και αυτοί που απάντησαν ότι η πιθανότητα είναι 25% (157 άτομα). Σε πλήθος ακολούθησαν οι απαντήσεις «50%», η οποία δόθηκε από 90 άτομα και η «33,3%» που δόθηκε από 53 άτομα. Οι υπόλοιπες απαντήσεις, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα κυμάνθηκαν σε αρκετά μικρότερα νούμερα.

Η τελευταία ερώτηση του ερωτηματολογίου ήταν μια μαθηματική δραστηριότητα, προσαρμοσμένη σε ένα καθημερινό πλαίσιο. Η δραστηριότητα αυτή ζητούσε τον υπολογισμό συνδυασμών, αλλά και τον υπολογισμό της πιθανότητας με την χρήση του κλασικού ορισμού.



Διάγραμμα 8.12: Πιθανότητα και Συνδυαστική

Το παραπάνω γράφημα δείχνει, ότι στον υπολογισμό των συνδυασμών, η πλειοψηφία απάντησε σωστά (285 απαντήσεις) και ήταν αρκετά λιγότερες οι κενές απαντήσεις (139 απαντήσεις). Από την άλλη πλευρά, στον υπολογισμό της πιθανότητας, φαίνεται μια αύξηση στις κενές απαντήσεις (228 απαντήσεις), ενώ ήταν πολύ λιγότερες οι απαντήσεις που θεωρήθηκαν σωστές (71 απαντήσεις).

8.2 Αποτελέσματα και Συσχετίσεις

Στο παρόν κεφάλαιο, γίνεται μια προσπάθεια συσχέτισης κάποιων ομάδων μεταβλητών. Οι ομαδοποίηση των μεταβλητών και η τελική τους ανάλυση με στόχο την εξακρίβωση συσχέτισης, ήταν άμεση απόρροια των ερευνητικών ερωτημάτων και των στόχων της έρευνας. Η συσχέτιση των μεταβλητών, πραγματοποιήθηκε μέσω της χρήσης του στατιστικού πακέτου SPSS και τον έλεγχο συσχέτισης Pearson. Τα αποτελέσματα των συσχετίσεων, καθώς και της σημαντικότητας κάθε συσχέτισης φαίνονται παρακάτω.

Αρχικά, καλό θα ήταν για τον αναγνώστη, πρώτού ξεκινήσει την μελέτη των πινάκων που ακολουθούν, να γνωρίζει ότι σε κάθε συσχέτιση εμφανίζονται 3 γραμμές. Η πρώτη γραμμή εμφανίζει τον συντελεστή συσχέτισης Pearson. Η δεύτερη γραμμή περιγράφει την σημαντικότητα της εκάστοτε συσχέτισης και η τρίτη γραμμή δείχνει το πλήθος των συσχετίσεων που ελέγχθηκαν. Όταν σε ένα κελί του πίνακα υπάρχει το 1, αυτό σημαίνει ότι δεν έχει γίνει συσχέτιση γιατί δεν υπάρχει λόγος συσχέτισης της μεταβλητής με τον εαυτό της. Ακόμα, στον πίνακα εμφανίζονται θετικές και αρνητικές συσχετίσεις. Οι θετικές συσχετίσεις μεταξύ δύο μεταβλητών περιγράφουν ως ανάλογες τις σχετιζόμενές μεταβλητές, ενώ οι αρνητικές συσχετίσεις περιγράφουν τις υπό μελέτη μεταβλητές ως αντιστρόφως ανάλογες. Επίσης, αξίζει να σημειωθεί, ότι όταν σε έναν αριθμό εμφανίζονται δύο αστερίσκοι, η σημαντικότητα της συσχέτισης είναι κάτω από το επίπεδο 0,001. Ενώ αν έχει ένα έναν αστερίσκο, τότε το επίπεδο σημαντικότητας της συσχέτισης είναι κάτω από 0,05.

Ο πρώτος πίνακας παρουσιάζει τις συσχετίσεις των μεταβλητών Q11, Q12, Q13, Q14 και Q15. Σε όλο τον πίνακα ξεχωρίζει η σημαντικότητα των συσχετίσεων, η οποία στην πλειοψηφία της θεωρείται κάτω από 0,001. Έπειτα, είναι φανερό ότι η μεταβλητή Q11 εμφανίζει θετική συσχέτιση και μάλιστα σε υψηλό βαθμό 0,583 με την μεταβλητή Q12, ενώ η σημαντικότητα αυτής της συσχέτισης καθίσταται πάρα πολύ υψηλή, αφού ο συντελεστής σημαντικότητας είναι κάτω από 0,001. Αυτό σημαίνει, πως όσοι απάντησαν πως οι πιθανότητες έχουν άμεση σχέση με την καθημερινότητα τους, απάντησαν πως έχουν και με την εργασία τους. Αρνητική φαίνεται να είναι η συσχέτιση της Q11 με την Q14 (-0,267), με σημαντικότητα επίσης 0,001. Ενώ, μεγάλη συσχέτιση φαίνεται να υπάρχει και μεταξύ των μεταβλητών Q12 με Q15 (0,368) με σημαντικότητα 0,001.

Πίνακας 26: Συσχετίσεις ομάδα 1

		Q11	Q12	Q13	Q14	Q15
Q11	Pearson Correlation	1	.583**	.071	-.267**	.305**
	Sig. (2-tailed)		<.001	.100	<.001	<.001
	N	542	542	542	542	542
Q12	Pearson Correlation	.583**	1	.215**	-.230**	.368**
	Sig. (2-tailed)	<.001		<.001	<.001	<.001
	N	542	542	542	542	542
Q13	Pearson Correlation	.071	.215**	1	-.121**	.222**
	Sig. (2-tailed)	.100	<.001		.005	<.001
	N	542	542	542	542	542
Q14	Pearson Correlation	-.267**	-.230**	-.121**	1	-.153**
	Sig. (2-tailed)	<.001	<.001	.005		<.001
	N	542	542	542	542	542
Q15	Pearson Correlation	.305**	.368**	.222**	-.153**	1
	Sig. (2-tailed)	<.001	<.001	<.001	<.001	
	N	542	542	542	542	542

Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει την συσχέτιση των μεταβλητών της δεύτερης ερώτησης του ερωτηματολογίου. Και σε αυτό τον πίνακα φαίνεται, ότι η σημαντικότητα των συσχετίσεων είναι πολύ υψηλή, αφού η πλειοψηφία έχει σημαντικότητα 0,001. Επίσης ξεχωρίζουν οι θετικές συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών Q21 - Q22 (με συσχέτιση Pearson 0,616), Q22 - Q23 (με συσχέτιση 0,733) και Q25 - Q27 (με συσχέτιση Pearson 0,548), ενώ δεν βρέθηκαν στην συγκεκριμένη ανάλυση συσχέτισης, σημαντικές αρνητικές συσχετίσεις.

Πίνακας 27: Συσχετίσεις ομάδα 2

		Q21	Q22	Q23	Q24	Q25	Q26	Q27
Q21	Pearson Correlation	1	.616**	.467**	.267**	.223**	-.016	.103*
	Sig. (2-tailed)		<.001	<.001	<.001	<.001	.712	.016
	N	542	541	541	541	541	541	541
Q22	Pearson Correlation	.616**	1	.733**	.121**	.071	-.083	-.028
	Sig. (2-tailed)	<.001		<.001	.005	.101	.053	.510
	N	541	541	541	541	541	541	541
Q23	Pearson Correlation	.467**	.733**	1	.122**	.145**	-.062	.038
	Sig. (2-tailed)	<.001	<.001		.004	<.001	.152	.375
	N	541	541	541	541	541	541	541
Q24	Pearson Correlation	.267**	.121**	.122**	1	.331**	.112**	.220**
	Sig. (2-tailed)	<.001	.005	.004		<.001	.009	<.001
	N	541	541	541	541	541	541	541
Q25	Pearson Correlation	.223**	.071	.145**	.331**	1	.219**	.548**
	Sig. (2-tailed)	<.001	.101	<.001	<.001		<.001	<.001
	N	541	541	541	541	541	541	541
Q26	Pearson Correlation	-.016	-.083	-.062	.112**	.219**	1	.363**
	Sig. (2-tailed)	.712	.053	.152	.009	<.001		<.001
	N	541	541	541	541	541	541	541
Q27	Pearson Correlation	.103*	-.028	.038	.220**	.548**	.363**	1
	Sig. (2-tailed)	.016	.510	.375	<.001	<.001	<.001	
	N	541	541	541	541	541	541	541

Στην συνέχεια, ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει τις συσχετίσεις των μεταβλητών για την τέταρτη ερώτηση του ερωτηματολογίου. Σε αυτό τον πίνακα, όπως φαίνεται δεν υπάρχουν μεταβλητές με ιδιαίτερα υψηλή συσχέτιση. Ωστόσο, θα μπορούσαν μεταξύ των άλλων να ξεχωρίζουν οι συσχετίσεις των μεταβλητών Q41 – Q42 (με θετική συσχέτιση 0,200), Q41 – Q43 (με αρνητική συσχέτιση -0,185), Q42 – Q43 (με αρνητική συσχέτιση -0,185), Q43 – Q45 (με θετική συσχέτιση -0,291) και Q42 – Q44 (με θετική συσχέτιση 0,199).

Πίνακας 28: Συσχετίσεις ομάδα 3

		Q41	Q42	Q43	Q44	Q45	Q46
Q41	Pearson Correlation	1	.200**	-.185**	.194**	.039	.090*
	Sig. (2-tailed)		<.001	<.001	<.001	.371	.036
	N	541	541	541	541	541	541
Q42	Pearson Correlation	.200**	1	-.185**	.199**	.095*	.125**
	Sig. (2-tailed)	<.001		<.001	<.001	.026	.003
	N	541	542	542	542	542	542
Q43	Pearson Correlation	-.185**	-.185**	1	-.088*	-.291**	-.066
	Sig. (2-tailed)	<.001	<.001		.040	<.001	.124
	N	541	542	542	542	542	542
Q44	Pearson Correlation	.194**	.199**	-.088*	1	.147**	.171**
	Sig. (2-tailed)	<.001	<.001	.040		<.001	<.001
	N	541	542	542	542	542	542
Q45	Pearson Correlation	.039	.095*	-.291**	.147**	1	.192**
	Sig. (2-tailed)	.371	.026	<.001	<.001		<.001
	N	541	542	542	542	542	542
Q46	Pearson Correlation	.090*	.125**	-.066	.171**	.192**	1
	Sig. (2-tailed)	.036	.003	.124	<.001	<.001	
	N	541	542	542	542	542	542

Η επόμενη ανάλυση συσχετίσεων, βασίζεται στην ερώτηση για τους παράγοντες επιρροής των γνώσεων της πιθανοτικής θεωρίας, η οποία αποτελούσε και την Πέμπτη ερώτηση του ερωτηματολογίου που μοιράστηκε από τον ερευνητή. Σε αυτή την ερώτηση είναι φανερό, ότι πολύ λίγες είναι οι συσχετίσεις με συντελεστή πάνω από 0,5. Λόγου χάρη, οι συσχετίσεις που ξεπερνάνε το 0,5 είναι μόλις δύο και πιο συγκεκριμένα, αυτές των μεταβλητών Q56 και Q57, δηλαδή τη συσχέτιση της δυσκολίας του μαθήματος των μαθηματικών και της ροής της ύλης, όπου ο συντελεστής είναι 0,596 και των μεταβλητών Q57 με Q58, όπου είναι 0,663 και συσχετίζεται ο όγκος της ύλης με την ροή της. Σημαντικό επίσης είναι, ότι φαίνεται άλλος ένας πίνακας με υψηλούς συντελεστές σημαντικότητας, της τάξεως κάτω από 0,001.

Πίνακας 29: Συσχετίσεις ομάδα 4

		Q51	Q52	Q53	Q54	Q55	Q56	Q57	Q58	Q59	Q510	Q511
Q51	Pearson Correlation	1	.200**	.301**	.184**	.121**	.107*	.055	.145**	.178**	-.002	.125**
	Sig. (2-tailed)		<.001	<.001	<.001	.005	.012	.197	<.001	<.001	.964	.004
	N	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542
Q52	Pearson Correlation	.200**	1	.045	.187**	.393**	.051	.060	.066	-.001	.129**	.061
	Sig. (2-tailed)	<.001		.297	<.001	<.001	.234	.161	.122	.979	.003	.156
	N	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542
Q53	Pearson Correlation	.301**	.045	1	.239**	.080	.191**	.205**	.273**	.211**	.025	.188**
	Sig. (2-tailed)	<.001	.297		<.001	.063	<.001	<.001	<.001	<.001	.559	<.001
	N	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542
Q54	Pearson Correlation	.184**	.187**	.239**	1	.358**	.139**	.210**	.220**	.176**	.205**	.195**
	Sig. (2-tailed)	<.001	<.001	<.001		<.001	.001	<.001	<.001	<.001	<.001	<.001
	N	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542
Q55	Pearson Correlation	.121**	.393**	.080	.358**	1	.149**	.177**	.139**	.046	.288**	.147**
	Sig. (2-tailed)	.005	<.001	.063	<.001		<.001	<.001	.001	.284	<.001	<.001
	N	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542
Q56	Pearson Correlation	.107*	.051	.191**	.139**	.149**	1	.596**	.463**	.288**	.399**	.333**
	Sig. (2-tailed)	.012	.234	<.001	.001	<.001		<.001	<.001	<.001	<.001	<.001
	N	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542
Q57	Pearson Correlation	.055	.060	.205**	.210**	.177**	.596**	1	.663**	.411**	.357**	.425**
	Sig. (2-tailed)	.197	.161	<.001	<.001	<.001	<.001		<.001	<.001	<.001	<.001
	N	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542
Q58	Pearson Correlation	.145**	.066	.273**	.220**	.139**	.463**	.663**	1	.457**	.304**	.432**
	Sig. (2-tailed)	<.001	.122	<.001	<.001	.001	<.001	<.001		<.001	<.001	<.001
	N	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542

Q59	Pearson Correlation	.178**	-.001	.211**	.176**	.046	.288**	.411**	.457**	1	.295**	.468**
	Sig. (2-tailed)	<.001	.979	<.001	<.001	.284	<.001	<.001	<.001		<.001	<.001
	N	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542
Q510	Pearson Correlation	-.002	.129**	.025	.205**	.288**	.399**	.357**	.304**	.295**	1	.374**
	Sig. (2-tailed)	.964	.003	.559	<.001	<.001	<.001	<.001	<.001	<.001		<.001
	N	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542
Q511	Pearson Correlation	.125**	.061	.188**	.195**	.147**	.333**	.425**	.432**	.468**	.374**	1
	Sig. (2-tailed)	.004	.156	<.001	<.001	<.001	<.001	<.001	<.001	<.001	<.001	
	N	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542

Η συσχέτιση που παρουσιάζεται στον επόμενο πίνακα, αποτελεί την συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών της πρώτης δραστηριότητας του ερωτηματολογίου. Υπενθυμίζεται εδώ, ότι σε εκείνη την δραστηριότητα, ο ερωτώμενος καλούνταν αρχικά να τοποθετηθεί ως προς μια απόφαση που εμπεριέχει ρίσκο. Έπειτα, επεξηγούσε τον κύριο λόγο που θα τον έκανε να ρισκάρει και στην συνέχεια επανατοποθετούνταν στην αρχική απόφαση του υπό την γνώση της πιθανότητας του ρίσκου του. Κατά συνέπεια, εμφανίζονται σχετικά υψηλές συσχετίσεις μεταξύ των συγκεκριμένων μεταβλητών.

Πιο συγκεκριμένα, παρατηρείται ότι η συσχέτιση της μεταβλητής Ex1a (αρχικής απόφασης) με τις Ex1b (παράγοντες επιρροής της απόφασης) και Ex1c (απόφαση με γνώση πιθανότητας), είναι πάνω από 0,500 (0,630 με σημαντικότητα κάτω από 0,001 και 0,633 με σημαντικότητά επίσης κάτω από 0,001 αντίστοιχα). Επίσης αρκετά ψηλά φτάνει και η συσχέτιση των μεταβλητών Ex1b (παράγοντες επιρροής της απόφασης) και Ex1c (απόφαση με γνώση πιθανότητας), όπου είναι 0,455 με σημαντικότητα μικρότερη του 0,001.

Πίνακας 30: Συσχετίσεις ομάδα 5

		Ex1a	Ex2b	Ex3c
Ex1a	Pearson Correlation	1	.630**	.633**
	Sig. (2-tailed)		<.001	<.001
	N	539	539	539
Ex2b	Pearson Correlation	.630**	1	.455**
	Sig. (2-tailed)	<.001		<.001
	N	539	539	539
Ex3c	Pearson Correlation	.633**	.455**	1
	Sig. (2-tailed)	<.001	<.001	
	N	539	539	539

Τέλος, ο τελευταίος πίνακας του συγκεκριμένου κεφαλαίου συσχετίζει διάφορες μεταβλητές από το σύνολο του ερωτηματολογίου μεταξύ τους. Πιο συγκεκριμένα συσχετίζονται οι μεταβλητές Q11 (σχέση πιθανοτήτων με επαγγελματική δραστηριότητα), Q12 (σχέση πιθανοτήτων με καθημερινότητα), Ex1c (απόφαση υπό την γνώση πιθανότητας επιτυχίας), Ex51 (απόφαση με πιθανότητα ή συναίσθημα), Ex6a (απόφαση με ισοπίθανα ενδεχόμενα) και Ex7a (ανάκτηση δεδομένων από δενδροδιάγραμμα). Φαίνεται λοιπόν στον πίνακα, ότι δεν υπάρχει ιδιαίτερη συσχέτιση μεταξύ των απαντήσεων των ερωτώμενων στις πρώτες δύο ερωτήσεις του ερωτηματολογίου σχετικά με την χρήση των πιθανοτήτων στην επαγγελματική τους δραστηριότητα και στην καθημερινότητα τους, με τις αντίστοιχες απαντήσεις τους στις δραστηριότητες του ερωτηματολογίου (αρκετά μικρότερες συσχετίσεις του 0,1). Όσον αφορά τις συσχετίσεις μεταξύ των απαντήσεων στις δραστηριότητες, εκεί παρατηρείται μια αρκετά υψηλή συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών Ex51 με Ex6a (συσχέτιση 0,499 με σημαντικότητα μικρότερη του 0,001), των μεταβλητών Ex51 με Ex7a (συσχέτιση 0,378 με σημαντικότητα μικρότερη του 0,001) και των μεταβλητών Ex6a με Ex7a (συσχέτιση 0,429 με σημαντικότητα επίσης μικρότερη του 0,001).

Πίνακας 31: Συσχετίσεις ομάδα 6

		Q11	Q12	Ex1c	Ex51	Ex6a	Ex7a
Q11	Pearson Correlation	1	.583**	-.050	-.009	-.063	-.047
	Sig. (2-tailed)		<.001	.247	.836	.142	.275
	N	542	542	539	542	542	541
Q12	Pearson Correlation	.583**	1	.010	.020	-.006	-.004
	Sig. (2-tailed)	<.001		.825	.635	.884	.932
	N	542	542	539	542	542	541
Ex1c	Pearson Correlation	-.050	.010	1	.031	.134**	.124**
	Sig. (2-tailed)	.247	.825		.470	.002	.004
	N	539	539	539	539	539	538
Ex51	Pearson Correlation	-.009	.020	.031	1	.499**	.378**
	Sig. (2-tailed)	.836	.635	.470		<.001	<.001
	N	542	542	539	542	542	541
Ex6a	Pearson Correlation	-.063	-.006	.134**	.499**	1	.429**
	Sig. (2-tailed)	.142	.884	.002	<.001		<.001
	N	542	542	539	542	542	541
Ex7a	Pearson Correlation	-.047	-.004	.124**	.378**	.429**	1
	Sig. (2-tailed)	.275	.932	.004	<.001	<.001	
	N	541	541	538	541	541	541

8.3 Επαγωγικά αποτελέσματα Έρευνας

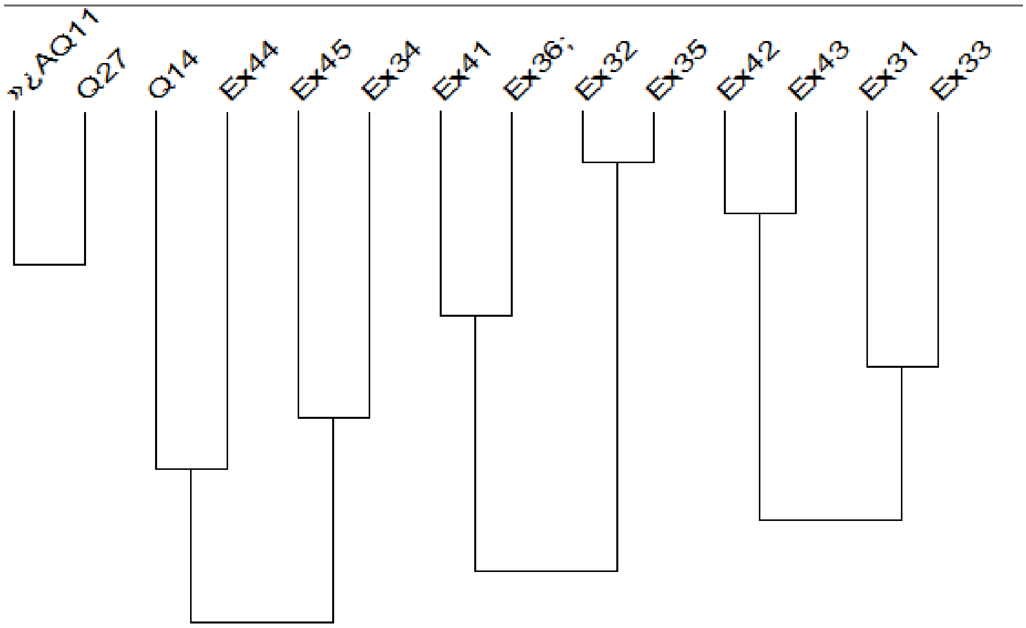
Στο παρόν κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την συνεπαγωγική ανάλυση και την χρήση του προγράμματος CHIC. Όπως θα παρατηρηθεί παρακάτω, προέκυψαν αρκετές ισχυρές συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών που αναλύθηκαν. Ωστόσο, δεν έλειψαν και οι απουσίες στις συσχετίσεις μεταξύ μεταβλητών που ενδεχομένως κάποιος να θεωρούσε τη συσχέτιση αναμενόμενη. Αξιοσημείωτο εδώ είναι, ότι δεν παρουσιάστηκαν καθόλου οι συσχετίσεις κάτω από 62%, καθώς δεν θεωρήθηκαν σημαντικές προς διατήρηση της αξιοπιστίας στα πλαίσια της παρούσας έρευνας. Επίσης, δεν προέκυψαν καθόλου συσχετίσεις κάτω από 50%, καθώς το πρόγραμμα CHIC τις απορρίπτει ως ασήμαντες.

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για τις ανάγκες της συνεπαγωγικής ανάλυσης, ήταν μέρος του συνόλου των δεδομένων του ερωτηματολογίου και η επιλογή της ομαδοποίησης συγκεκριμένων μεταβλητών, αποτέλεσε συνέπεια των ερευνητικών ερωτημάτων και του σκοπού της παρούσας μελέτης. Οι ερωτήσεις που δεν χρησιμοποιήθηκαν στην συνεπαγωγική ανάλυση, απορρίφθηκαν για τους λόγους, ότι δεν παρουσίαζαν ιδιαίτερο ενδιαφέρων στην παρούσα μελέτη ή τα αποτελέσματα της συνεπαγωγικής τους ανάλυσης δεν κρίθηκαν υψηλά σημαντικά ώστε να παρουσιαστούν στο εν λόγω κεφάλαιο.

Πριν ο αναγνώστης προχωρήσει στην ανάγνωση και την μελέτη των διαγραμμάτων του προγράμματος CHIC που ακολουθούν παρακάτω, καλό είναι να γνωρίζει, ότι τα διαγράμματα ομοιότητας και τα συνεπαγωγικά διαγράμματα, παρουσιάζουν τους κανόνες της συσχέτισης ή της συνεπαγωγής που μπορούν να αναπτυχθούν μεταξύ των εμπλεκόμενων μεταβλητών. Επίσης, στο συνεπαγωγικό διάγραμμα, παρουσιάζονται με κόκκινο οι συσχετίσεις που εμφανίζουν ποσοστό συσχέτισης μεγαλύτερο του 99 %, με μπλε αυτές που είναι μεγαλύτερες από 95 % και με πράσινο μεγαλύτερες από 90 %. Για τον λόγο αυτό, δεν υπάρχει αυτό το είδος διαγράμματος σε κάθε μια από τις παρακάτω ομάδες μεταβλητών που ελέγχθηκαν ως προς την συσχέτιση.

Οι τρείς ομάδες μεταβλητών που αναλύθηκαν συνεπαγωγικά, ήταν οι ακόλουθες. Η πρώτη ομάδα, εμπεριείχε τις μεταβλητές Q11, Q14, Q27, Ex31, Ex32, Ex33, EX34, Ex35, Ex41, Ex42, Ex43, Ex44 και Ex45. Ο στόχος αυτής της ομάδας ερωτήσεων είναι να εξακριβώσει σύμφωνα με την πεποίθηση της χρήσης των πιθανοτήτων στην καθημερινότητα ενός ατόμου, πως αντιλαμβάνεται και πράττει σε καταστάσεις που εμπεριέχουν πιθανότητες. Η δεύτερη ομάδα μεταβλητών, αποτελείται από τις μεταβλητές Q11, Q13, Q43, Q45, Q46, Ex1c, Ex51, Ex6a και Ex7a. Στόχος της ομάδας αυτής, ήταν να εξακριβώσει την επιρροή των πιθανοτήτων σε μια απόφαση, δεδομένου την πεποίθηση του εκάστοτε ερωτώμενου για την χρήση της θεωρίας στην καθημερινότητα του γενικότερα. Τέλος, η τρίτη ομάδα μεταβλητών περιέχει τις μεταβλητές με κωδικό ερώτησης Q21, Q22, Q23, Q25, Q27, Q51, Q52, Q53, Q54, Q55, Q56, Q57, Q58, Q59, Q510 και Q511. Σε αυτό το κομμάτι της ανάλυσης, η πρόθεση ελέγχου επικεντρώνεται στην μνήμη των ερωτώμενων σχετικά με την διδακτική των Πιθανοτήτων κατά τα σχολικά τους χρόνια και στους παράγοντες που επηρέασαν τις γνώσεις τους πάνω στην θεωρία.

Το πρώτο διάγραμμα που φαίνεται παρακάτω, αποτελεί ένα διάγραμμα ομοιότητας και συνοδεύεται από τον πίνακα που το διαδέχεται, στον οποίο πίνακα φαίνονται οι συνεπαγωγές με το μεγαλύτερο ποσοστό ομοιότητας.

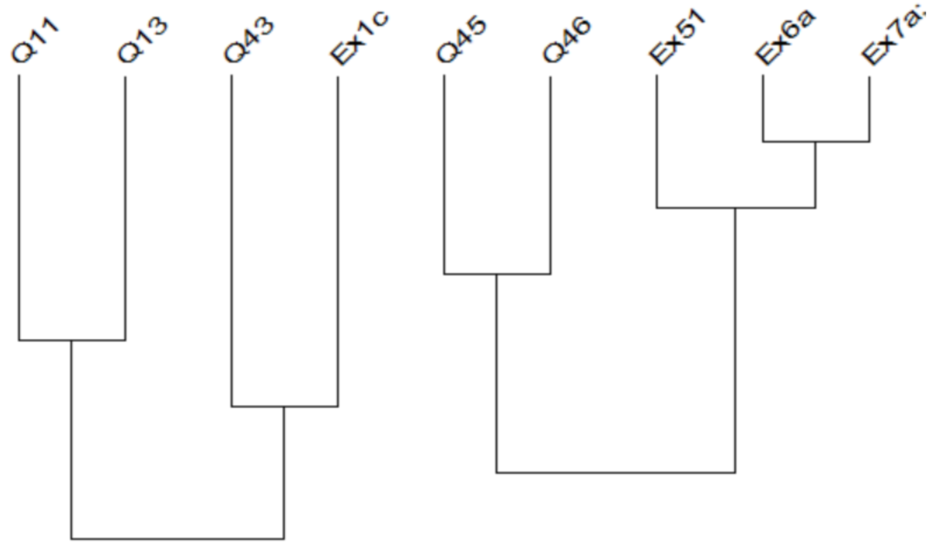


Διάγραμμα 8.13: Διάγραμμα Ομοιότητας πρώτης ομάδας ερωτήσεων

Πίνακας 32: Συσχετίσεις ομάδας 1 και ομοιότητα σε ποσοστό

Επίπεδο	Συσχετίσεις	Ομοιότητα
1	Ex32, Ex35	63,64%
2	Ex42, Ex43	63,59%
3	Q11, Q27	63,4%
4	Ex41, Ex36	62,9%

Οι ομοιότητες στο παραπάνω διάγραμμα φαίνονται να είναι αρκετές, ωστόσο συμφώνα με τον πίνακα κυμαίνονται γύρο στο 63% οι πιο υψηλές. Αυτές που εμφανίζουν το μεγαλύτερο ποσοστό ομοιότητας είναι τα ζευγάρια Ex32-Ex35 (63,64%), Ex42-Ex43 (63,59%), Q11-Q27 (63,4%) και Ex41-Ex36 (62,9%). Πιο συγκεκριμένα, οι ερωτώμενοι που απάντησαν θετικά στην ερώτηση με κωδικό Ex32, απάντησαν θετικά και στην ερώτηση με κωδικό Ex35. Ομοίως επεξηγούνται και τα άλλα ζευγάρια των απαντήσεων.

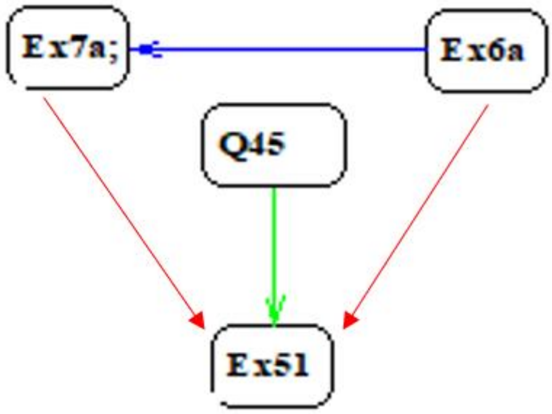


Διάγραμμα 8.14: Διάγραμμα Ομοιότητας Δεύτερης ομάδας ερωτήσεων

Πίνακας 33: Συσχετίσεις ομάδας 2 και ομοιότητα σε ποσοστό

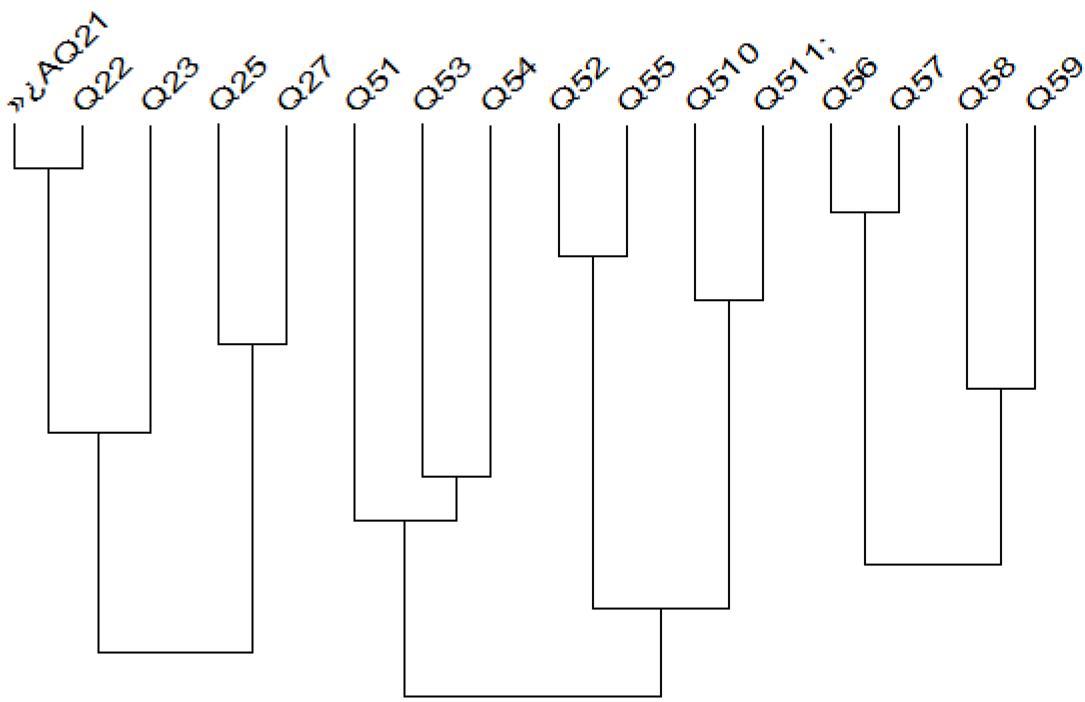
Επίπεδο	Συσχετίσεις	Ομοιότητα
1	Ex6a, Ex7a	98,7%
2	Ex51, (Ex6a, Ex7a)	96,55%
3	Q45, Q46	70,27%

Στο διάγραμμα ομοιότητας της δεύτερης ομάδας μεταβλητών που αναλύθηκε συνεπαγωγικά, εμφανίζονται μεταβλητές με πολύ μεγάλο ποσοστό ομοιότητας. Πιο συγκεκριμένα, για τις μεταβλητές Ex6a και Ex7a, το ποσοστό αυτό ανέρχεται στο 98,7%. Γεγονός, το οποίο εκφράζει την σχεδόν σίγουρη συνεπαγωγή των δύο ερωτήσεων. Έπειτα, πολύ μεγάλο ποσοστό ομοιότητας εμφανίζεται και μεταξύ των μεταβλητών Ex51, Ex6a, και Ex7a. Μεταξύ των τριών αυτών μεταβλητών, αυτό σημαίνει, ότι όσοι απάντησαν την ερώτηση Ex51, απάντησαν και τις ερωτήσεις Ex6a και Ex7a. Γεγονός που φαίνεται στο διάγραμμα ομοιότητας, αλλά και υποδεικνύεται και από τον συμβολισμό (Ex51, (Ex6a, Ex7a)) στον πίνακα που συνοδεύει το διάγραμμα. Στη συνέχεια, με αρκετά μικρότερο ποσοστό ομοιότητας, ακολουθούν οι ερωτήσεις Q45 και Q46 (με ποσοστό ομοιότητας 70,27 %).



Διάγραμμα 8.15: Συνεπαγωγικό Διάγραμμα Δεύτερης ομάδας ερωτήσεων

Το συνεπαγωγικό διάγραμμα που φαίνεται παραπάνω για την δεύτερη ομάδα μεταβλητών, εμφανίζει την υψηλή συνεπαγωγή μεταξύ των μεταβλητών Ex6a με Ex51 και των Ex51 με Ex7a, η οποία λογίζεται πάνω από 99%. Έπειτα, με μπλε χρώμα, είναι η συνεπαγωγή των Ex6a και Ex7a,με ποσοστό συνεπαγωγής 95%. Τέλος, το πράσινο βελάκι, εμφανίζει μια συνεπαγωγή της τάξεως του 90%, ανάμεσα στις ερωτήσεις Q45 και Ex51.



Διάγραμμα 8.16: Διάγραμμα Ομοιότητας τρίτης ομάδας ερωτήσεων

Πίνακας 34: Συσχετίσεις ομάδας 3 και ομοιότητα σε ποσοστό

Επίπεδο	Συσχετίσεις	Ομοιότητα
1	Q21, Q22	82,58%
2	Q56, Q57	76,08%
3	Q52, Q55	72,46%
4	Q510, Q511	69,75%

Το τελευταίο διάγραμμα ομοιότητας με τον πίνακα που το συνοδεύει, εμφανίζουν την ομοιότητα μεταξύ των μεταβλητών της τρίτης ομάδας ερωτήσεων. Εδώ, οι υψηλότερες ομοιότητες εμφανίζονται μεταξύ των μεταβλητών Q21 με Q22 (82,58%), Q56 με Q57 (76,08%), Q52 με Q55 (72,46%) και Q510 με Q511 (69,75%).

8.4 Τα αποτελέσματα των Συνεντεύξεων

Στην παράγραφο αυτή, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την ανάλυση των συνεντεύξεων των εκπαιδευτικών. Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων αυτής της ανάλυσης πραγματοποιείται με δύο τρόπους. Αρχικά στις αρχικές ερωτήσεις της συνέντευξης, τα αποτελέσματα εμφανίζονται σε πίνακες για να εμφανιστεί η γενικότερη τάση των απαντήσεων και στην συνέχεια, ακολουθεί η αναλυτική παρουσίαση των λεγόμενων των συμμετεχόντων με τις σημαντικότερες παρατηρήσεις των εκπαιδευτικών για το υπό συζήτηση ερώτημα. Ο λόγος που ακολουθεί αυτή η παρουσίαση, είναι για να εξακριβωθεί ακριβώς το υπόβαθρο και η σκεπτική των ερωτώμενων στο ερώτημα. Επίσης, να σημειωθεί εδώ, ότι προτιμήθηκε από τον συγγραφέα της έρευνας να μην παρουσιαστούν όλες οι ερωτήσεις σε μορφή ερωταπαντήσεων. Κατά συνέπεια, οι πρώτες ερωτήσεις της συνέντευξης αποτελούν ξεχωριστές αναλύσεις, διότι στα πλαίσια ομαδοποίησης τους θεωρήθηκαν ως αυτοτελή ερωτήματα και οι τελευταίες ερωτήσεις της συνέντευξης που πραγματεύονται συγκεκριμένα το κομμάτι διδασκαλίας των Πιθανοτήτων πραγματοποιήθηκαν όλες μαζί για τον εκάστοτε ερωτώμενο και παρουσιάζονται σε μορφή στιχομυθίας.

Να σημειωθεί ακόμα, όπως έχει αναφερθεί και στο κεφάλαιο που αναλύεται η μεθοδολογία έρευνας της συγκεκριμένης εργασίας, ότι οι συνεντεύξεις ήταν ημιδομημένου τύπου και πλησίαζαν περισσότερο τα χαρακτηριστικά μιας χαλαρής συζήτησης. Αυτό, είχε θετική επίδραση στους συμμετέχοντες, αφού εμπιστεύτηκαν τον ερευνητή, απέβαλαν το άγχος τους και μίλησαν ξεκάθαρα για τις απόψεις τους στο θέμα της έρευνας. Ο ερευνητής καθοδηγούσε και κατεύθυνε την συνέντευξη με τρόπο ώστε να ρέει ομαλά η συζήτηση και να απαντηθούν όλα τα ερωτήματα του. Ωστόσο, στο παρόν κεφάλαιο, προς διευκόλυνση της παρουσίασης και της ανάγνωσης της εργασίας από έναν μέσο αναγνώστη, παρουσιάζονται οι συνεντεύξεις να έχουν πιο αυστηρή δομή ερωτήσεων – απαντήσεων.

Η συζήτηση ξεκίνησε με μια γενικότερη συζήτηση σχετικά με τα ενδιαφέροντα, τις ασχολίες και τις σπουδές των ερωτώμενων. Πρωταρχικός στόχος του ερευνητή ήταν η απόκτηση οικειότητας και εμπιστοσύνης του συμμετέχοντα. Έπειτα, η συζήτηση συνέχισε με την ενασχόληση του ερευνητή και το γενικότερο θέμα της εργασίας του. Αυτό, έδωσε το εναρκτήριο λάκτισμα στην πρώτη ερώτηση, σχετικά με την σημαντικότητα των Πιθανοτήτων. Παρακάτω εμφανίζεται ένας πίνακας με την γενικότερη άποψη των εκπαιδευτικών και όπως συζητήθηκε παραπάνω ακολουθεί και η αναλυτική τους άποψη με τους λόγους της θετικής ή της αρνητικής τους απάντησης.

Πίνακας 35: Σημαντικότητα διδακτικής των Πιθανοτήτων

Ερώτηση	Θετικές Απαντήσεις	Ποσοστό
Σημαντική η διδακτική των Πιθανοτήτων;	5	100%

Όπως φανερώνουν και τα συνολικά αποτελέσματα στο παραπάνω πίνακα το σύνολο των 5 εκπαιδευτικών θεωρεί τη διδακτική των Πιθανοτήτων σημαντική. Σε αυτή την ερώτηση ξεχώρισαν όλες οι τοποθετήσεις των εκπαιδευτικών, η κάθε μία για τους δικούς της λόγους.

Ο Δίας ανέφερε χαρακτηριστικά ότι:

«*Θεωρώ ότι είναι πολύ σημαντική. Είναι σημαντική διότι οξύνει το μυαλό και το εισάγει σε ένα άλλο κομμάτι των μαθηματικών, τα εφαρμοσμένα μαθηματικά, τα οποία εκλείπουν από την τυπική εκπαίδευση*».

Σε αυτήν την άποψη, έρχεται να συμφωνήσει και ο Ποσειδώνας, όπου αναφέρει:

«*Είναι σημαντική, γιατί τα στοχαστικά μαθηματικά είναι μέσα στη ζωή του καθενός. Αλλά θέλει μια ενίσχυση στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα για να προλαβαίνουμε να τις κάνουμε*».

Και οι δύο έμπειροι εκπαιδευτικοί, θεωρούν σημαντική την διδακτική των Πιθανοτήτων, αλλά μιλάνε για ελλείψεις στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα. Γεγονός, που επιβεβαιώνει με την σειρά της και η Ήρα η οποία στέκεται σε πιο συγκεκριμένες ελλείψεις.

«Πιστεύω, ότι είναι σημαντική η διδακτική των Πιθανοτήτων και γενικότερα των στοχαστικών μαθηματικών, μαζί με την Συνδυαστική. Διότι, έτυχε να κάνω Πιθανότητες στην Α λυκείου χωρίς συνδυαστική και ήταν λίγο δύσκολο για τα παιδιά».

Η Αθηνά πάνω στην θετική της άποψη, ανέφερε και μερικά παραδείγματα χρήσης της θεωρίας των πιθανοτήτων.

«Και βέβαια είναι σημαντική, καιρός, προβλέψεις, δεδομένα και ανάλυση. Χρησιμοποιούνται παντού μέχρι και σε πρόβλεψη εγκληματολογίας, από όσο ξέρω στην Αμερική κατάφεραν να μειώσουν την εγκληματολογία».

Τέλος, η Δήμητρα ανέφερε την άποψη της με την πεποίθηση ότι θα ήταν καλό να ξεκινάει νωρίτερα η διδακτική τους.

«Ναι σίγουρα. Είναι ένας σημαντικός κλάδος των μαθηματικών και πρέπει από μικρή ηλικία τα παιδιά να εισάγονται σε αυτόν».

Έπειτα, η συζήτηση έγινε πιο συγκεκριμένη και πλαισίωσε την σημερινή κατάσταση. Το ερώτημα πραγματευόταν την ύλη της Γ Γυμνασίου, όπου η θεωρία των Πιθανοτήτων αποτελεί μέρος της διδακτέας ύλης. Πιο συγκεκριμένα, ο ερευνητής έθεσε το ερώτημα του χρόνου και αν προλαβαίνουν γενικότερα οι εκπαιδευτικοί να διδάξουν τις Πιθανότητες στη συγκεκριμένη τάξη. Οι θετικές απαντήσεις των ερωτηθέντων φαίνονται στο παρακάτω πινακάκι.

Πίνακας 36: Χρόνος και διδαχή Πιθανοτήτων

Ερώτηση	Θετικές Απαντήσεις	Ποσοστό
Προλαβαίνει κάποιος να διδάξει Πιθανότητες στην Γ Γυμνασίου;	2	40%

Οι 2 εκπαιδευτικοί που δήλωσαν ότι προλαβαίνει ένας εκπαιδευτικός να διδάξει Πιθανότητες στην ύλη της Γ Γυμνασίου, ήταν η Δήμητρα και η Ήρα. Αξιοσημείωτο βέβαια είναι, ότι η θετική απάντηση των δυο εκπαιδευτικών συνοδευόταν από μια αβεβαιότητα. Πιο συγκεκριμένα, η απάντηση της Δήμητρας στην δεδομένη ερώτηση ήταν *«Λίγο στο τέλος»* και της Ήρας ήταν *«Οριακά, δηλαδή να πεις τις έννοιες, αλλά να μην επιμείνεις σε θεματολογία και εξάσκηση»*.

Από την άλλη πλευρά, ο Δίας, ο Ποσειδώνας και η Αθηνά, συμφώνησαν ο καθένας ξεχωριστά, ότι δεν είναι εφικτό να προλάβει κάποιος εκπαιδευτικός να διδάξει κανονικά την ύλη των Πιθανοτήτων στο Γυμνάσιο. Μάλιστα ο καθένας από αυτούς δήλωσε:

Δίας: *«Όχι και είναι ένα μάθημα που χρειάζεται χρόνο για να καταλάβει ο μαθητής την έννοια του συνόλου, τις πράξεις μεταξύ συνόλων και τι είναι δειγματικός χώρος. Δυστυχώς η διδακτική τους έχει πάει πίσω πλέον, ενώ παλιά τα παιδία έκαναν στην γ γυμνάσιου και μάθαιναν τον κλασικό ορισμό πιθανότητας, να βρίσκουν δειγματικούς χώρους και πράξεις συνόλων που τους χρειάζονται μελλοντικά»*.

Ποσειδώνας: *«Δυστυχώς στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα που τώρα διδάσκουμε εμείς, συνήθως δεν προλαβαίνουμε να τα κάνουμε»*.

Αθηνά: *«Γενικά από όσο ξέρω και από άλλα σχολεία δεν διδάσκονται πιθανότητες συνήθως. Φέτος και εγώ δεν θα προλάβω να τις κάνω, γενικά όμως θέλω να τις κάνω δεν είναι κάτι. Ανάλογα βέβαια και το πόσο καλά είμαστε στην ύλη»*.

Στην συνέχεια, υπήρχαν δύο ερωτήσεις σχετικά με το αναλυτικό πρόγραμμα και τις οδηγίες διδασκαλίας που παρέχει το ΥΠΕΠΘ για την διδακτική των Πιθανοτήτων. Πιο αναλυτικά, ο ερευνητής ήθελε να μάθει πόσο εφικτό είναι να ακολουθηθεί το αναλυτικό πρόγραμμα και οι οδηγίες διδασκαλίας που παρέχει το ΥΠΕΠΘ και αν παραλείπονται διδακτικές ώρες όταν κατορθώνονται να διδαχθούν οι Πιθανότητες βάση των οδηγιών των ΔΕΠΠΣ και ΑΠΣ. Εδώ οι 4 εκπαιδευτικοί απάντησαν πως είναι αρκετά δύσκολο το συγκεκριμένο επίτευγμα, ενώ η Ήρα υπογράμμισε, ότι εξαρτάτε από τις ώρες που θα δοθούν για επαναλήψεις στην αρχή του σχολικού έτους. Γενικά, ο καθένας τους ανέφερε τα ακόλουθα.

Δίας: *«Γενικά είναι δύσκολο να ακολουθηθούν οι οδηγίες, γιατί υπάρχουν πολλές περιπτώσεις που θα χαθούν ώρες, όπως σε εκδρομές ή σε κάποιο κεφάλαιο να χρειαστεί να μείνεις πίσω για να το καταλάβουν οι μαθητές. Επίσης, υπάρχει συνήθως και μια γενικότερη οδηγία από τους συντονιστές να μην κοιτάμε τις προτεινόμενες ώρες, αλλά να μένουμε και* *παραπάνω και όσο χρειαστεί ώστε να το καταλάβουν οι μαθητές, δηλαδή να στοχεύουμε περισσότερο στην ποιότητα. Η διδακτική τους είναι στο τέλος της χρονιάς, οι μαθητές κοιτάνε να κάνουν επαναλήψεις και έχουν καταλάβει ότι οι Πιθανότητες δεν είναι στην ύλη των εξετάσεων , οπότε κοιτάνε να διαβάσουν άλλα πράγματα π.χ. ταυτότητες, ισότητα τριγώνων κ.α. που θεωρούν ¨SOS¨. Επίσης, η ποσότητα της ύλης στην Γ γυμνασίου είναι πολύ μεγάλη και πολλές φορές είναι δύσκολο για τον εκπαιδευτικό να φτάσει να κάνει το κεφάλαιο των Πιθανοτήτων. Θα μπορούσαν να φύγουν οι ανισώσεις και οι ανισότητες από την Γ και να μοιραστούν στην Β Γυμνασίου και στην Α Λυκείου αντίστοιχα για να αποσυμφορηθεί λίγο η ύλη της Γ γυμνασίου».*

Ποσειδώνας: *«Είναι δύσκολο, ακόμα και να φτάσω να κάνω πιθανότητες μέσα στην χρονιά, είναι ό,τι προλαβαίνω και όχι όπως τα ζητάει το ΙΕΠ. Συνήθως δεν προλαβαίνουμε να τις διδάξουμε σύμφωνα με την εμπειρία μου. Προσωπικά, τα τελευταία 5 χρόνια που δίδαξα Γ γυμνασίου, μόνο μια φορά πρόλαβα να κάνω πιθανότητες».*

Αθηνά: «*Δεν είναι πάντα εφικτό. Γενικά για τους αναπληρωτές που αργούν να διοριστούν συνήθως, τρέχουν να προλάβουν τις οδηγίες και τις επαναλήψεις των προηγούμενων ετών. Ως αποτέλεσμα να μένουμε πίσω στην ύλη σύμφωνα με το ΙΕΠ. Η ύλη σε μια κανονική χρονιά με τις αργίες, τις γιορτές, τις εκδηλώσεις και με αρκετές άλλες περιπτώσεις που χάνονται διδακτικές ώρες, βγαίνει οριακά. Οπότε ενδεχομένως να παραλείπονται διδακτικές ώρες».*

Δήμητρα: *«Οι προτεινόμενες ώρες του ΙΕΠ είναι λιγότερες από αυτές που κάποιος χρειάζεται στην τάξη για να διδάξει. Επίσης, είναι πολλά τα παιδιά και όλο και κάποιος χρειάζεται κάποιες παραπάνω ώρες σε κάποιο κεφάλαιο. Παραλείπονται διδακτικές ώρες συνήθως γιατί στο τέλος δεν προλαβαίνεις με την ύλη να τις βγάλεις κανονικά».*

Ήρα: «*Εξαρτάτε στην αρχή της χρονιάς πόσο χρόνο θα χάσουμε για τις επαναλήψεις τις προηγούμενης χρονιάς, γιατί πολλές φορές τα παιδιά έχουν ελλείψεις και αναγκαστικά μένεις περισσότερο από τις προτεινόμενες ώρες του ΙΕΠ. Πολύ συχνά έχει πέσει στην αντίληψη μου να παραλείπονται διδακτικές ώρες από τις πιθανότητες, τόσο στο Γυμνάσιο, όσο και στο Λύκειο».*

Έπειτα ακολουθεί μια ερώτηση σχετικά με την πεποίθηση των ερωτώμενων εκπαιδευτικών για την τάξη την οποία διδάσκονται οι Πιθανότητες. Γενικά, έχει αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, ότι οι Πιθανότητες τα τελευταία χρόνια αποτελούν κομμάτι της ύλης, μόνο στην Γ τάξη του Γυμνασίου. Επί του θέματος οι ερωτώμενοι εκπαιδευτικοί σχολιάζουν τα εξής:

Δίας: «*Το πρόβλημα με τη διδακτική τους στην Γ γυμνασίου, συνεχίζεται και στην Α λυκείου, όπου κάποια στιγμή ήταν στην ύλη και μετά αφαιρέθηκαν. Σαν να είχαν μπει για λίγο πειραματικά. Φαίνεται σαν να μην έχει λυθεί το πρόβλημα των προγραμμάτων σπουδών για την τάξη που θα έπρεπε να διδάσκονται οι Πιθανότητες. Θα μπορούσαν μερικές απλές έννοιες και βασικά η έννοια του συνόλου να ξεκινήσει από την Ε Δημοτικού, καθώς το παιδί μπορεί να καταλάβει την απλή έννοια του συνόλου ως συλλογή αντικειμένων και να προχωράει η ύλη μέχρι τη Β Λυκείου Γενικής παιδείας με λίγη συνδυαστική*».

Ποσειδώνας: «*Σπουδαίο είναι να μοιραστεί η ύλη σε περισσότερες από μια τάξεις. Βέβαια, πρέπει να μπουν και κάποια στοιχεία από την θεωρία συνόλων στο γυμνάσιο και έπειτα θα μπορούσε να γίνει μια τέτοια ανακατανομή*».

Αθηνά: «*Θα μπορούσε να είναι στην Γ Λυκείου, αλλά να γίνει υποχρεωτικό για να το δουν όλα τα παιδιά, διότι είναι ένας κλάδος των μαθηματικών που χρειάζεται και στις τρεις κατευθύνσεις του Λυκείου*».

Δήμητρα: «*Πρέπει να αρχίσουν στο γυμνάσιο να διδάσκονται οι Πιθανότητες και θα μπορούσε να έβγαινε κάτι λίγο από τα άλλα κεφάλαια της Γ γυμνασίου και να γίνονται καλύτερα οι Πιθανότητες*».

Ήρα: «*Θα έπρεπε να συνδυαστούν με τη στατιστική της Β γυμνασίου, όχι όμως εκεί, Σίγουρα χρειάζεται ένας καλός εξορθολογισμό, Ίσως αν οι ανισώσεις κατέβαιναν στην Β Γυμνασίου και πήγαινε η στατιστική στην Γ μαζί με τις πιθανότητες, διότι οι ανισώσεις χρειάζονται αρκετό χρόνο στην Γ ώστε τα παιδιά να ξαναθυμηθούν την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων*».

Οι επόμενες ερωτήσεις αφορούν την διδακτική των Πιθανοτήτων και τα μέσα που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί που μίλησαν με τον ερευνητή στα πλαίσια της συνέντευξης. Η παρουσίαση των συγκεκριμένων ερωτήσεων αλλάζει μορφή σε σχέση με την παρουσίαση των απαντήσεων στις προηγούμενες ερωτήσεις. Ο κύριος λόγος αυτής της επιλογής, είναι τόσο το γεγονός ότι αποτελούν ερωτήσεις κοινού θέματος και πλαισίου, όσο και ότι βολεύει καλύτερα στο να κατανοήσει ο αναγνώστης τις διδακτικές πρακτικές του εκάστοτε εκπαιδευτικού. Σημαντικό βέβαια είναι να σημειωθεί σε αυτό το σημείο για άλλη μια φορά, ότι οι παρακάτω διάλογοι παρουσιάζονται σε μορφή στιχομυθίας, απαλλαγμένες από τις περιττές συζητήσεις και τα τεχνάσματα του ερευνητή για να μεταφέρει το θέμα ομαλά στην ερώτηση που έχρηζε απάντησης.

Ο πρώτος διάλογος που παρουσιάζεται είναι με τον Δία. Ο Δίας γενικότερα, αρέσκεται στην χρήση παραδειγμάτων της καθημερινότητας, χρησιμοποιεί το σχολικό εγχειρίδιο για το κεφάλαιο των Πιθανοτήτων και θεωρεί, ότι την μάθηση την επηρεάζει πάντα η άποψη του μαθητή για την χρησιμότητα της διδακτέας έννοιας. Αναλυτικότερα, απάντησε τα παρακάτω στις συγκεκριμένες ερωτήσεις.

-Τι είναι ιδιαίτερα επιτυχημένο για εσάς κατά τη διδασκαλία των Πιθανοτήτων;

- «*Η χρήση απλών παραδειγμάτων από την καθημερινή ζωή, ωστόσο χρειάζεται η συνδυαστική. Π.χ παραδείγματα από τράπουλα ή δενδρόγραμμα*».

-Χρησιμοποιείτε-Διδάσκετε τις δραστηριότητες του σχολικού βιβλίου;

- *«Ναι και καλύπτει τις καθημερινές δραστηριότητες που χρειάζονται για να προσελκύσουν τον μαθητή. Βέβαια, οι αναλυτικές οδηγίες σου κόβουν αρκετές από αυτές τις δραστηριότητες ως εκτός ύλης».*

-Προκαλεί κάτι σύγχυση στους μαθητές κατά τη διδακτική των Πιθανοτήτων;

- *«Η συνδυαστική είναι δύσκολή αλλά δεν είναι τόσο μεγάλο θέμα. Ίσως μερικές φορές κάποιες εκφωνήσεις που από θέμα έκφρασης ή γλώσσας οι μαθητές δεν καταλαβαίνουν τι πρέπει να κάνουν. Αλλά θέμα δυσκολίας όχι σύγχυσης».*

-Διεξάγετε Πείραμα κατά την διδασκαλία;

- *«Δεν έχω κάνει, αλλά γενικά δεν πιστεύω, ότι θα δείξει κάτι το πείραμα που είναι δύσκολο να αντιληφθεί κάποιος από μόνος του».*

-Χρησιμοποιείτε κάποια διαδικτυακή εφαρμογή κατά την διδασκαλία;

- *«Δεν έχω υπόψιν μου κάποια τέτοια εφαρμογή. Αλλά αν υπάρχει κάποια που να ρίχνει σε μικρό χρόνο το ζάρι για να δούμε τα αποτελέσματα, θα ήταν πολύ χρήσιμο».*

-Ποιοι είναι οι παράγοντες που επηρεάζουν την άποψη των μαθητών για τη χρησιμότητα της θεωρίας;

- *«Πάντα στα μαθηματικά αυτό που επηρεάζει τον μαθητή είναι η χρησιμότητα της έννοιας. Και αυτό είναι και το δύσκολο για τον εκπαιδευτικό, να πείσει τον μαθητή, ότι όλα έχουν μια χρησιμότητα, μέσα από καθημερινά παραδείγματα».*

Ακολουθεί ο διάλογος με τον Ποσειδώνα, ο οποίος δεν θεωρεί τις Πιθανότητες ως δύσκολο μάθημα, αλλά ενδιαφέρον και ένα μάθημα που εκπλήσσει τους μαθητές. Μάλιστα, θεωρεί βοηθητικό το πείραμα, αλλά οι πολλές επαναλήψεις που χρειάζονται σε μια άσκηση Πιθανοτήτων δημιουργούν προβλήματα χρόνου. Τέλος, δηλώνει ως σημαντικά τα ερεθίσματα που λαμβάνουν οι μαθητές από τον εκπαιδευτικό για να επιτευχθεί η μάθηση. Αναλυτικότερα ανέφερε τα παρακάτω.

-Τι είναι ιδιαίτερα επιτυχημένο για εσάς κατά τη διδασκαλία των Πιθανοτήτων;

- «*Το πείραμα βοηθάει πάρα πολύ τα παιδιά*».

-Χρησιμοποιείτε-Διδάσκετε τις δραστηριότητες του σχολικού βιβλίου;

- *«Δεν τις θυμάμαι τώρα να σου πω την αλήθεια».*

-Προκαλεί κάτι σύγχυση στους μαθητές κατά τη διδακτική των Πιθανοτήτων;

- *«Οι Πιθανότητες είναι ένα δύσκολο κομμάτι να κατανοηθούν από τους μαθητές, ωστόσο έχει το ενδιαφέρον του. Δεν θα έλεγα ότι δυσκολεύει, όσο ότι τους εκπλήσσει. Για παράδειγμα, πόσο αυξάνονται τα δυνατά αποτελέσματα σε ένα πείραμα με δυο ζαριά σε αντίθεση με το ένα ζάρι ή η πιθανότητα μια οικογένεια με τρία παιδιά να κάνει όλα του ίδιου φύλου».*

-Διεξάγετε Πείραμα κατά την διδασκαλία;

- *«Το πείραμα βοηθάει πάρα πολύ τα παιδιά, αλλά θέλει προσοχή στο πείραμα. Για παράδειγμα δεν μπορούμε να εκτελέσουμε χίλιες επαναλήψεις».*

-Χρησιμοποιείτε κάποια διαδικτυακή εφαρμογή κατά την διδασκαλία;

- *«Όχι δεν είναι πάντα εύκολο, ωστόσο η βοήθεια των υπολογιστών μπορεί σήμερα να βοηθήσει στην διεξαγωγή ενός πειράματος με πολλές επαναλήψεις».*

-Ποιοι είναι οι παράγοντες που επηρεάζουν την άποψη των μαθητών για τη χρησιμότητα της θεωρίας;

- *«Τα παραδείγματα και τα ερεθίσματα που τους δίνει ο εκπαιδευτικός».*

Η Αθηνά πιστεύει, ότι ο τζόγος προσελκύει το ενδιαφέρον των μαθητών για τις Πιθανότητες και θεωρεί τα δενδροδιαγράμματα βοηθητικά στην κατανόηση των Πιθανοτήτων. Ακολουθεί το σχολικό βιβλίο, αλλά δεν έχει εκτελέσει ζωντανό πείραμα στη τάξη παρόλο που θα ήθελε. Πεποίθηση της Αθηνάς είναι, ότι ο εκπαιδευτικός μπορεί να επηρεάσει θετικά ή αρνητικά την άποψη των μαθητών για μια νέα θεωρία μαθηματικών. Παρακάτω φαίνονται αναλυτικά οι απαντήσεις της Αθηνάς.

-Τι είναι ιδιαίτερα επιτυχημένο για εσάς κατά τη διδασκαλία των Πιθανοτήτων;

- *«Τα δενδροδιαγράμματα που είναι το πρώτο που καταλαβαίνουν, αλλά δυστυχώς ή ευτυχώς και ο τζόγος προσελκύει το ενδιαφέρον των μαθητών. Και γενικά τα ζωντανά παραδείγματα και η οπτικοποίηση των ασκήσεων».*

-Χρησιμοποιείτε-Διδάσκετε τις δραστηριότητες του σχολικού βιβλίου;

- *«Ναι και συνήθως ακολουθώ το βιβλίο».*

-Προκαλεί κάτι σύγχυση στους μαθητές κατά τη διδακτική των Πιθανοτήτων;

- *«Τα σύνολα και οι πράξεις τους με τα διαγράμματα Venn δυσκολεύουν και κουράζουν τους μαθητές, με αποτέλεσμα να χάνουν πολλοί το ενδιαφέρον τους».*

-Διεξάγετε Πείραμα κατά την διδασκαλία;

- *«Εφόσον υπάρχει το βιβλίο θα το έκανα, παρόλα αυτά δεν το έχω κάνει.».*

-Χρησιμοποιείτε κάποια διαδικτυακή εφαρμογή κατά την διδασκαλία;

- *«Όχι».*

-Ποιοι είναι οι παράγοντες που επηρεάζουν την άποψη των μαθητών για τη χρησιμότητα της θεωρίας;

- *«Ένας «παθιασμένος» εκπαιδευτικός μπορεί να επηρεάσει θετικά την άποψη των μαθητών για μια θεωρία, αντίστοιχα και αρνητικά».*

Η Δήμητρα είναι της άποψης, ότι τα παιδιά για να καταλάβουν πιθανοτικές έννοιες χρειάζονται χρόνο και πρέπει να ξεκινάνε με πολύ απλά παραδείγματα. Χρησιμοποιεί και αυτή, το σχολικό βιβλίο, αλλά δεν θέλει να χρησιμοποιήσει εφαρμογές Η/Υ γιατί μπορεί τα παιδιά να μην εστιάσουν στο πείραμα, αλλά στην εφαρμογή. Σχετικά με τους παράγοντες που επηρεάζουν την μάθηση πιθανοτικών εννοιών θεωρεί ότι πρέπει να γίνει ιδιαίτερη συζήτηση με τους μαθητές, ώστε να αντιληφθούν την χρησιμότητα τους. Γενικότερα ακολούθησε μεταξύ ερευνητή και Δήμητρας ο παρακάτω διάλογος.

-Τι είναι ιδιαίτερα επιτυχημένο για εσάς κατά τη διδασκαλία των Πιθανοτήτων;

- «*Γενικά καταλαβαίνουν την θεωρία μέσα από τις ασκήσεις. Πρέπει να ξεκινάς από πολύ εύκολες ασκήσεις για να πιστεύουν ότι θα τα καταφέρουν».*

-Χρησιμοποιείτε-Διδάσκετε τις δραστηριότητες του σχολικού βιβλίου;

- «*Ναι, διότι της Γ γυμνασίου το βιβλίο είναι πολύ καλό».*

-Προκαλεί κάτι σύγχυση στους μαθητές κατά τη διδακτική των Πιθανοτήτων;

- *«Είναι καινούριες έννοιες και χρειάζονται χρόνο οι μαθητές να μπουν στο κλίμα».*

-Διεξάγετε Πείραμα κατά την διδασκαλία;

- *«Δεν το έχω κάνει, αλλά αν υπάρχει χρόνος θα ήταν καλό γιατί τους τραβάει το ενδιαφέρων».*

-Χρησιμοποιείτε κάποια διαδικτυακή εφαρμογή κατά την διδασκαλία;

- *«Θα μπορούσε να γίνει, αλλά δεν έχουμε ούτε τα μέσα, αλλά θα ήταν δύσκολο το παιδί να καταλάβει τι κάνει το πρόγραμμα».*

-Ποιοι είναι οι παράγοντες που επηρεάζουν την άποψη των μαθητών για τη χρησιμότητα της θεωρίας;

- «*Νομίζω, ότι τα παιδιά για να μάθουν κάτι, πρώτα ρωτάνε σε τι χρησιμεύει αυτό. Πολλές φορές μάλιστα δεν είναι σε θέση και να το καταλάβουν μέσα από παραδείγματα. Χρειάζεται ιδιαίτερη εξήγηση και συζήτηση ότι τα μαθηματικά χρησιμεύουν σε όλα αυτά που βλέπουμε και κάνουμε γύρω μας».*

Τέλος, η Ήρα έμεινε στην διαφορά του κλασικού και του αξιωματικού ορισμού της Πιθανότητας ως δυσκολία για την κατανόηση της έννοιας από τους μαθητές. Η Ήρα θεωρεί σε αντίθεση με την Αθηνά, ότι το δενδροδιάγραμμα δυσκολεύει τους μαθητές. Επίσης, προσθέτει στις δύσκολες έννοιες αυτές των ασυμβίβαστων και των ανεξάρτητων ενδεχομένων. Η Ήρα θεωρεί χρήσιμες τις διαδικτυακές εφαρμογές πιθανοτήτων, ωστόσο χρησιμοποιεί το σχολικό βιβλίο και έχει πραγματοποιήσει αρκετές φορές πείραμα κατά την διδασκαλία της. Κλείνοντας, αναφέρει και αυτή τον σημαντικό ρόλο του εκπαιδευτικού για να επηρεάσει την άποψη των μαθητών για τη χρησιμότητα της θεωρίας.

-Τι είναι ιδιαίτερα επιτυχημένο για εσάς κατά τη διδασκαλία των Πιθανοτήτων;

- «*Τα παιδιά καταλαβαίνουν πολύ τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας και όχι τον αξιωματικό που τον καταλαβαίνουν μόνο οι πολύ προικισμένοι μαθητές ή τον κάνουν μηχανικά. Οπότε ασκήσεις με κάλπη και πείραμα βοηθούν τους μαθητές να αξιοποιούν τον ορισμό πιθανότητας».*

-Χρησιμοποιείτε-Διδάσκετε τις δραστηριότητες του σχολικού βιβλίου;

- *«Το βιβλίο της Γ γυμνασίου είναι ικανοποιητικά δομημένο και κάνω από εκεί ασκήσεις».*

-Προκαλεί κάτι σύγχυση στους μαθητές κατά τη διδακτική των Πιθανοτήτων;

- *«Το δενδροδιάγραμμα δυσκολεύει τους μαθητές να βρουν τις περιπτώσεις ή πολλές φορές δυσκολεύονται για το που πρέπει να σταματήσουν. Επίσης, σε μεταγενέστερο στάδιο, όπου τα παιδιά πάνε φοιτητές έχω παρατηρήσει ότι μπερδεύουν τα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα με τα ανεξάρτητα».*

-Διεξάγετε Πείραμα κατά την διδασκαλία;

- *«Το πείραμα βοηθάει στον νόμο των μεγάλων αριθμών για να κατανοήσουν την πιθανότητα μετά από πολλές επαναλήψεις. Γενικά όμως είναι χρήσιμα να καταλάβουν τα παιδιά την Πιθανότητα και εγώ έχω χρησιμοποιήσει αρκετές φορές νόμισμα κατά την διδασκαλία μου».*

-Χρησιμοποιείτε κάποια διαδικτυακή εφαρμογή κατά την διδασκαλία;

- *«Δεν έχω ασχοληθεί, αλλά πλέον τα υπάρχοντα διδακτικά πακέτα και οι εφαρμογές θα ήταν πολύ βοηθητικές, Φυσικά να υπάρχουν οι απαραίτητες υλικοτεχνικές υποδομές».*

-Ποιοι είναι οι παράγοντες που επηρεάζουν την άποψη των μαθητών για τη χρησιμότητα της θεωρίας;

- *«Οπωσδήποτε μπορούμε εμείς να επηρεάσουμε σαν καθηγητές την άποψη των μαθητών για την χρησιμότητα της θεωρίας των Πιθανοτήτων μέσα από διάφορα καθημερινά παραδείγματα».*

8.5 Η ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων

Στη παράγραφο αυτή, παρουσιάζονται σε μορφή πινάκων τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων. Η ανάλυση αυτή πραγματοποιείται ανάμεσα στα σχολικά βιβλία των χωρών που επελέγησαν και πραγματεύεται μόνο τα σχολικά εγχειρίδια της εκάστοτε χώρας που εμπεριέχουν κεφάλαιο που εντάσσεται στο ευρύτερο πλαίσιο των στοχαστικών μαθηματικών. Για αυτόν ακριβώς τον λόγο, τα σχολικά εγχειρίδια της μελέτης μπορεί να διαφέρουν μεταξύ των δυο χωρών, τόσο ως προς τις τάξεις, όσο και ως προς το απαιτούμενο επίπεδο κάθε τάξης. Βέβαια, η παρούσα εργασία μπορεί να θεωρηθεί μια συνολική μελέτη, τόσο κάθετη, όσο και οριζόντια στα στοχαστικά μαθηματικά που κάθε χώρα πραγματεύεται στο σύνολο των εγχειριδίων της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Σημαντικό είναι να αναφερθεί σε αυτό το σημείο, ότι δεν θεωρήθηκε απαραίτητη η ανάλυση των βιβλίων ως προς την ακολουθία των κεφαλαίων, το πλήθος των σελίδων, όπως και τις διδακτικές ώρες που αφιερώνονται είτε στην εκάστοτε παράγραφο, είτε ακόμα και συνολικά. Ο κύριος λόγος της συγκεκριμένης επιλογής – αποφυγής της σύγκρισης, είναι τα αποτελέσματα της ανάλυσης των εκπαιδευτικών συστημάτων των τριών χωρών που λαμβάνουν μέρος στη σύγκριση, η οποία έδειξε ότι κάθε χώρα έχει τα δικά της κοινωνικά και πολιτιστικά χαρακτηριστικά τα οποία αποτυπώνει στα βιβλία της. Πιο συγκεκριμένα, η επιλογή της ακολουθίας των κεφαλαίων δεν εξαρτάτε μόνο από το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών που επιλέγει κάθε χώρα, αλλά και γενικότερα από τους στόχους που το εκπαιδευτικό της σύστημα θέτει για την εκάστοτε τάξη ή ακόμα και από τις γνώσεις που κάθε μαθητής οφείλει να έχει τελειώνοντας ένα σχολικό έτος. Επίσης, το πλήθος των σελίδων εξαρτάτε από την γραμματοσειρά, τις εικόνες, αλλά και τις σελίδες που ορίζει το εκάστοτε παιδαγωγικό ινστιτούτο για το εκάστοτε κεφάλαιο. Αναφορικά μόνο, να σημειωθεί, ότι ο μέσος όρος σελίδων στις τρεις χώρες είναι 2 για την Ελλάδα, 4,6 για την Σιγκαπούρη και 3,8 για την Ολλανδία. Σε αυτή την πληροφορία, αξίζει να προστεθεί ότι οι σελίδες στις τρεις χώρες κυμαίνονται από 3 έως 6 σελίδες για την Σιγκαπούρη, από 3 έως 4 για την Ολλανδία, ενώ για την Ελλάδα κάθε παράγραφος αποτελείται από ακριβώς δύο σελίδες. Τέλος, όπως είναι λογικό, οι διδακτικές ώρες διαφέρουν από χώρα σε χώρα ανάλογα με τις περιόδους των διακοπών, τις αργίες, την έναρξη και λήξη του διδακτικού έτους και άλλους μη σταθερούς παράγοντες, όπως την περίοδο 2020-2021 με την πανδημία Covid-19.

Τα αποτελέσματα της σύγκρισης αναδεικνύουν τον μέσο όρο ασκήσεων προς λύση ανά παράγραφο σχολικού βιβλίου των τριών χωρών. Να σημειωθεί εδώ για άλλη μια φορά, ότι τα σχολικά εγχειρίδια που έλαβαν μέρος στη συγκριτική μελέτη αποτελούν μόνο το Βιβλίο του Μαθητή, από τα επιλεγμένα σχολικά εγχειρίδια κάθε χώρας. Εδώ αξίζει να σημειωθεί, όπως παρουσιάζεται και στον πίνακα που ακολουθεί, ότι η Ελλάδα είναι η μόνη εκ των τριών χωρών που αναπτύσσει λίγο παραπάνω τα στοχαστικά μαθηματικά που διδάσκει στους μαθητές της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς εντάσσει μια παράγραφο στην Ε΄ Δημοτικού με τίτλο «Πιθανότητες». Η συγκεκριμένη παράγραφος, έχει εξαιρεθεί από την ανάλυση που θα ακολουθήσει στο παρόν κεφάλαιο, καθώς κρίθηκε πρέπον από τον ερευνητή, η μελέτη να εστιάσει στα κοινά διδακτικά κομμάτι των στοχαστικών μαθηματικών που έχουν οι τρεις χώρες στην πρώτη βαθμίδα εκπαίδευσης τους. Επίσης, στην καταμέτρηση και στην ανάλυση των δραστηριοτήτων των εγχειριδίων, έχουν συνυπολογιστεί και οι ασκήσεις που πρέπει να λυθούν από τον εκπαιδευτικό στην εισαγωγή της παραγράφου. Κατά συνέπεια, ως ασκήσεις προς λύση, θεωρήθηκαν όλες οι ασκήσεις των σχολικών βιβλίων «Βιβλίο Μαθητή» που ήταν άλυτες και αναμένετε να λυθούν είτε από τον ίδιο τον μαθητή, είτε από τον εκπαιδευτικό ως παράδειγμα στην τάξη. Στα Βιβλία Μαθητή της Ελλάδας, σε όλο το εύρος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, τα κεφάλαια – παράγραφοι που πραγματεύονται στοχαστικά μαθηματικά αποτελούνται κατά μέσο όρο από 2,1 ασκήσεις για λύση, με το εύρος των ασκήσεων να κυμαίνεται από 2 έως 3 ασκήσεις. Η Σιγκαπούρη από την άλλη, έχει 6,1 ασκήσεις ανά παράγραφο, με εύρος 4 έως και 15 ασκήσεις. Τέλος, η Ολλανδία εμφανίζει έναν μέσο όρο ασκήσεων στις 7,7 ασκήσεις ανά παράγραφο, με αυτές να κυμαίνονται από 6 έως 11 ασκήσεις.

Στην συνέχεια, ακολουθεί ένας πίνακας, ο οποίος παρουσιάζει την κατανομή της ύλης των στοχαστικών μαθηματικών στα βιβλία της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης των τριών επιλεγμένων χωρών. Αρχικά, αυτό που παρατηρεί κανείς στον συγκεκριμένο πίνακα, είναι η διαφορά κατανομής των στοχαστικών κεφαλαίων σε όλο το εύρος των έξι τάξεων της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Πίνακας 37: Η κατανομή της ύλης των στοχαστικών μαθηματικών στα σχολικά εγχειρίδια της Ελλάδας, της Σιγκαπούρης και της Ολλανδίας

Τάξη	Ελλάδα	Σιγκαπούρη	Ολλανδία
Α΄ Δημοτικού	-	**Εικονόγραμμα** (Ερωτήσεις, όχι σχεδίαση)	-
Β΄ Δημοτικού	-	**Εικονόγραμμα** (Ερωτήσεις, όχι σχεδίαση)	**Εικονόγραμμα - Πίνακες - Ραβδόγραμμα** (Ερωτήσεις, όχι σχεδίαση)
Γ΄ Δημοτικού	-	**Ραβδόγραμμα** (Ερωτήσεις, όχι σχεδίαση)	**Εικονόγραμμα - Πίνακες - Ραβδόγραμμα** (Ερωτήσεις και σχεδίαση)
Δ΄ Δημοτικού	-	**Παρουσίαση Δεδομένων** (Πίνακες και σχεδίαση Ραβδόγραμμα)	**Κυκλικό Διάγραμμα - Ραβδόγραμμα - Διάγραμμα Γραμμής** (Ερωτήσεις και σχεδίαση)
Ε΄ Δημοτικού	**Μέσος όρος** **Συλλογή – Παρουσίαση Δεδομένων** (Πίνακες) **Εικονόγραμμα – Ραβδόγραμμα – Διάγραμμα Γραμμής – Σημειόγραμμα** (Ερωτήσεις, όχι σχεδίαση) **Βασικές έννοιες Πιθανότητας και κλασικός ορισμός** (Πείραμα τύχης, Δυνατά αποτελέσματα, Επιθυμητά αποτελέσματα)	**Μέσος όρος - Διάγραμμα Γραμμής** (Ερωτήσεις, όχι σχεδίαση)	**Μέσος όρος - Διάγραμμα Γραμμής - Ραβδόγραμμα** (Ερωτήσεις και σχεδίαση)
ΣΤ΄ Δημοτικού	**Συλλογή – Παρουσίαση Δεδομένων** (Πίνακες) **Εικονόγραμμα – Ραβδόγραμμα** (Ερωτήσεις και σχεδίαση) **Κυκλικό Διάγραμμα – Διάγραμμα Γραμμής** (Ερωτήσεις, όχι σχεδίαση)	**Κυκλικό Διάγραμμα** (Ερωτήσεις, όχι σχεδίαση)	**Διάγραμμα Γραμμής - Πίνακες - Ραβδόγραμμα** (Ερωτήσεις και σχεδίαση)

Σύμφωνα λοιπόν με τον πίνακα, στην Ελλάδα, η ύλη των στοχαστικών μαθηματικών στην πρώτη βαθμίδα εκπαίδευσης, συμπτύσσεται στις δύο τελευταίες τάξεις του

Δημοτικού και επεκτείνεται από την έννοια του μέσου όρου, την συλλογή και την παρουσίαση δεδομένων, τα διάφορα είδη διαγραμμάτων μέχρι και σε κάποιες Βασικές έννοιες Πιθανότητας και τον κλασικό ορισμό. Στην Σιγκαπούρη, φαίνεται μια πιο ομαλή κατανομή της ύλης στις έξι πρώτες τάξεις της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Πιο συγκεκριμένα, η ύλη ξεκινάει από την Ά Δημοτικού και φτάνει μέχρι και την ΣΤ΄ Δημοτικού. Η έκταση της είναι παρόμοια με αυτήν της Ελλάδας, ωστόσο στην Σιγκαπούρη οι μαθητές δεν πραγματεύονται καθόλου την έννοια Πιθανότητα σε αυτήν την βαθμίδα εκπαίδευσης. Η Ολλανδία, δείχνει να πλαισιώνει περισσότερο το μοτίβο της Σιγκαπούρης, αφού η ύλη των στοχαστικών μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση της χώρας απλώνεται σε όλη την ύλη του Δημοτικού σχολείου, εκτός της πρώτης τάξης. Βέβαια, η Ολλανδία διαφέρει από την Σιγκαπούρη στο κομμάτι κατανομής των επιμέρους ενοτήτων της ύλης, αφού φαίνεται στις αντίστοιχες τάξεις να πραγματεύεται περισσότερες έννοιες από την Σιγκαπούρη, αλλά να επαναλαμβάνεται η ίδια έννοια και σε άλλες τάξεις. Φυσικά, αξίζει να σημειωθεί για κάθε μία από τις τρείς χώρες, όπως σημειώνεται και στον πίνακα, η ύλη κάθε τάξης, εμβαθύνει στο μέτρο που κρίνεται πιθανό για την αντίστοιχη ηλικιακή ομάδα. Αξίζει να σημειωθεί ακόμα, ότι όπως έχει ήδη αναφερθεί μια βασική διαφορά της Ελλάδας σε σχέση με τις άλλες δύο χώρες, στην παράγραφο με τις Πιθανότητες, όπως επίσης και η παρουσία του «Σημειογράμματος».

Στον πίνακα που ακολουθεί, έγινε μια προσπάθεια να καταγραφούν οι γενικότερες προδιαγραφές που ακολουθεί κάθε σχολικό βιβλίο, με απώτερο στόχο την κατανόηση του αναγνώστη και την δημιουργία μιας γενικής άποψης για τον τύπο του σχολικού βιβλίου και τον τρόπο που αυτό προωθεί την γνώση στον μαθητή. Βέβαια, να σημειωθεί εδώ, ότι κάποιες διαφορές που υπήρξαν δεν ήταν εφικτό να παρουσιαστούν στον πίνακα, κατά συνέπεια θα παρουσιαστούν από τον ερευνητή παράλληλα με τον σχολιασμό του πίνακα.

Τα κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν άρθηκαν από την γενικότερη βιβλιογραφία και είναι διάφορες πρακτικές που χρησιμοποιούνται στα σχολικά εγχειρίδια ανά τον κόσμο. Κατά συνέπεια, όπως παρατηρεί κανείς στα σχολικά βιβλία της Ελλάδας, χρησιμοποιούνται τεχνικές, όπως η καταγραφή της θεωρίας της υπό μελέτης έννοιας, τα λυμένα παραδείγματα και ο προσδιορισμός βημάτων σε αλγοριθμικές διαδικασίες. Επίσης, το ίδιο το βιβλίο παροτρύνει τον μαθητή να απομνημονεύει έννοιες, διαδικασίες και κανόνες. Εδώ αξίζει να προστεθεί, ότι τα λυμένα παραδείγματα δεν βρίσκονται στην αρχή της ενότητας, αλλά στην μέση. Στην Ολλανδία, τα βιβλία ακολουθούν μια συγκεκριμένη δομή. Λόγου χάρη, κατά την εισαγωγή μιας έννοιας, το κεφάλαιο σπάει σε 4 υποκεφάλαια, στα οποία το πρώτο πραγματεύεται την προετοιμασία για την εισαγωγή της νέας έννοιας, το δεύτερο και το τρίτο την εξάσκηση στην νέα έννοια και το τέταρτο την εφαρμογή της. Τα βιβλία της, σε αντίθεση με τα αντίστοιχα της Ελλάδας, παρουσιάζουν στην αρχή κάθε κεφαλαίου ένα λυμένο παράδειγμα, καθώς επίσης και όποτε κρίνεται αναγκαίο, κάποιες ασκήσεις προς επανάληψη προηγούμενων γνώσεων που θα χρειαστούν για τις νέες έννοιες. Στην Σιγκαπούρη, από την άλλη μεριά, δεν παρατηρείτε καμία βασική τεχνική, η οποία να επαναλαμβάνεται σταθερά στην έκταση των σχολικών βιβλίων της χώρας.

Πίνακας 38: Βασικές τεχνικές δόμησης των κεφαλαίων των Βιβλίων

	Ελλάδα	Σιγκαπούρη	Ολλανδία
Ύπαρξη λυμένων παραδειγμάτων	✓		✓
Ύπαρξη καταγεγραμμένης θεωρίας και ορισμών	✓		
Προσδιορισμός βημάτων στις μεθοδολογίες	✓		
Επανάληψη προγενέστερων γνώσεων			✓
Παρότρυνση χρήσης μνημονικών κανόνων			
Παρότρυνση απομνημόνευσης	✓		

Στην συνέχεια, παρουσιάζεται ένας πίνακας, ο οποίος φανερώνει την σύγκριση της δυσκολίας των ασκήσεων των κεφαλαίων ανάλογα με το γνωστικό επίπεδο. Πιο συγκεκριμένα, μια άσκηση χαρακτηρίζεται ως απλή ή δύσκολη ανάλογα με την τάξη που πρόκειται να διδαχθεί και όχι στην γενικότερη μορφή της. Αρχικά, αυτό που είναι πρώτιστος φανερό, είναι το συνολικό πλήθος ασκήσεων με στοχαστικές έννοιες στην εκάστοτε χώρα. Στην Σιγκαπούρη για παράδειγμα, υπάρχουν συνολικά 43 ασκήσεις, στην Ελλάδα 13, ενώ στην Ολλανδία 162. Έπειτα, φαίνεται στην Ελλάδα το σύνολο των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων με στοχαστικά μαθηματικά, που απαρτίζουν τα σχολικά εγχειρίδια, να θεωρούνται ως απλές ασκήσεις για την εκάστοτε τάξη που διδάσκονται (100%). Στην Σιγκαπούρη, ως απλές θεωρήθηκαν περίπου οι μισές ασκήσεις των κεφαλαίων που μελετήθηκαν (51,2%), μέτριας δυσκολίας οι 19 από τις 43 (44,2%) και μόνο 2 δύσκολες ασκήσεις (4,6%). Στην Ολλανδία, υπάρχει μία σύνθετη – δύσκολη άσκηση (0,6%), 26 μέτριας δυσκολίας και 135 απλές ασκήσεις (83,4%).

Πίνακας 39: Ισορροπία Ασκήσεων μεταξύ των γνωστικών επιπέδων

Ισορροπία Ασκήσεων μεταξύ των γνωστικών επιπέδων	Ελλάδα		Σιγκαπούρη		Ολλανδία	
	f	f%	f	f%	f	f%
Απλές Ασκήσεις	13	100	22	51,2	135	83,4
Ασκήσεις Μέτριας Δυσκολίας	0	0	19	44,2	26	16
Σύνθετες Ασκήσεις	0	0	2	4,6	1	0,6
Σύνολο Ασκήσεων	**13**	**100**	**43**	**100%**	**162**	**100%**

Σε συνέχεια των παραπάνω πινάκων, ο πίνακας που ακολουθεί έρχεται να συμπληρώσει το προφίλ των διδακτικών εγχειριδίων, καθώς παρουσιάζει το πλήθος ύπαρξης σχημάτων, ανάγκης αιτιολογήσεων, ασκήσεων με πολλαπλές λύσεις και ασκήσεων με σύνθετες πράξεις, σε σχέση με το σύνολο των δραστηριοτήτων. Στην Ελλάδα υπάρχουν διαγράμματα, πίνακες ή εικόνες σε 9 ασκήσεις, όπου σε ποσοστό αποτελούν πάνω από τις μισές δραστηριότητες 69,2%. Αιτιολόγηση, απαιτούν οι 4 από τις 13 συνολικά ασκήσεις (30,7%) και ο ίδιος αριθμός ασκήσεων έχει πολλαπλές απαντήσεις (30,7%). Όσον αφορά ασκήσεις με πιο σύνθετες πράξεις, μόλις μια μόνο υπάρχει στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού (7,7%). Στην Σιγκαπούρη, διαγράμματα ή εικόνες, εμπεριέχουν οι 37 ασκήσεις δηλαδή το 86% επί του συνόλου των δραστηριοτήτων των σχολικών βιβλίων της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης της χώρας. Ένα ποσοστό ύψους 25,6% των δραστηριοτήτων (11 δραστηριότητες) χρειάζεται για την επίλυση τους πιο σύνθετες πράξεις και καμία άσκηση δεν υπάρχει που να ζητάει από τους μαθητές να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους και ή να χρήζει πολλαπλών λύσεων. Στην Ολλανδία από την άλλη, το ποσοστό των ασκήσεων που εμπεριέχουν εικόνα, διάγραμμα ή σχήμα, είναι στα 73,4%. Οι ασκήσεις που ζητούν από τον μαθητή να τεκμηριώσει την απάντηση του είναι 5, δηλαδή 3% των συνολικών δραστηριοτήτων με στοχαστικά μαθηματικά. Όπως και στην Σιγκαπούρη, έτσι και στην Ολλανδία, φαίνεται να μην υπάρχουν ασκήσεις με πολλαπλές λύσεις, ενώ οι ασκήσεις που χρειάζονται πιο σύνθετες πράξεις, ανέρχονται στις 12, δηλαδή σε 7,4%.

Πίνακας 40: Προφίλ Συνόλου δραστηριοτήτων των εγχειριδίων

Αριθμός σε σχέση με τις συνολικές ασκήσεις	Ελλάδα		Σιγκαπούρη		Ολλανδία	
	f	f%	f	f%	f	f%
Ύπαρξη διαγραμμάτων, σχημάτων και εικόνων	9	69,2	37	86	119	73,4
Ζήτηση Αιτιολόγησης – Απόδειξης	4	30,7	0	0	5	3
Ασκήσεις με πολλαπλές λύσεις	4	30,7	0	0	0	0
Ασκήσεις με πιο σύνθετες πράξεις	1	7,7	11	25,6	12	7,4

Διαβάζοντας ένα σχολικό βιβλίο μαθηματικών, οι ασκήσεις που πραγματεύεται μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σύμφωνα με το ύφος τους, τα ζητούμενα τους, αλλά και τις αισθητηριοκινητικές - σκεπτικές λειτουργίες που αποσκοπούν να ενεργοποιήσουν στον αναγνώστη. Ακολουθεί ένας πίνακας, που στοχεύει στην ανάδειξη αυτών των δραστηριοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, οι δραστηριότητες χωρίζονται σε κατηγορίες, ανάλογα με τις ανάγκες χρήσης από τον μαθητή, της φαντασίας του, της λογικής του, της διαίσθησης του, ή άλλων σύνθετων μαθηματικών σκεπτικισμών. Επίσης, φανερώνει το πλήθος των ασκήσεων της εκάστοτε χώρας, που χρήζουν ανάγκης εκτιμήσεων, ανάλυσης δεδομένων, ή συνδυασμό με άλλα μαθηματικά κεφάλαια ή διαδικασίες. Σημαντικό είναι να σημειωθεί εδώ, ότι κάθε δραστηριότητα, μπορεί να παρουσιάζει περισσότερα από ένα χαρακτηριστικά, για αυτό τον λόγο και δεν υπάρχει ένα γενικότερο σύνολο στον πίνακα. Φυσικά, τα ποσοστά έχουν προκύψει σε σχέση με το συνολικό πλήθος ασκήσεων της εκάστοτε χώρας.

Στον πίνακα παρακάτω λοιπόν φαίνεται, ότι καμία από τις τρεις χώρες δεν προάγει την χρήση της φαντασίας μέσα από τις δραστηριότητες που προσφέρουν στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση τα σχολικά τους εγχειρίδια. Χαρακτηριστικό είναι, ότι μόνο μια άσκηση υπάρχει με τέτοια ανάγκη, στα σχολικά εγχειρίδια της Ολλανδίας. Η χρήση της λογικής, υπάρχει στα βιβλία και των τριών χωρών. Στην Ελλάδα και την Σιγκαπούρη κατά πλειοψηφία με 76,9% και 79% των ασκήσεων τους αντίστοιχα, ενώ στην Ολλανδία με 43,8%. Η χρήση διαίσθησης δεν φάνηκε να ξεχωρίζει σε καμία από τις συνολικές δραστηριότητες που μελετήθηκαν. Η χρήση πιο σύνθετων μαθηματικών διαδικασιών, φαίνεται να ζητείται από κάποιες δραστηριότητες της Σιγκαπούρης και της Ολλανδίας, αλλά σε μικρότερα ποσοστά, δηλαδή 4,6% και 9,3% αντίστοιχα στις δύο χώρες. Στην συνέχεια, η χρήση εκτιμήσεων, φαίνεται να καταλαμβάνει σημαντικό ποσοστό ασκήσεων στα ελληνικά σχολικά βιβλία (46,1%), ενώ δεν προτιμάται ιδιαίτερα στην Ολλανδία (1,9%) και την Σιγκαπούρη (0%). Στην ανάλυση δεδομένων, φαίνονται τα ποσοστά να είναι αρκετά μεγάλα, με 46,1% στην Ελλάδα, 60,5% στην Σιγκαπούρη και 35,8% στην Ολλανδία. Βέβαια, τα ποσοστά αυτά αλλάζουν για τις δραστηριότητες που ζητούσαν την συλλογή των δεδομένων από τους ίδιους τους μαθητές. Ωστόσο, σε αυτό το κομμάτι, φαίνεται ότι η Σιγκαπούρη δεν πραγματευόταν καμία τέτοια άσκηση που να θέτει τους μαθητές στην διαδικασία της συλλογής των δεδομένων που θα πρέπει να αναλύσουν. Αντίστοιχα, και στην Ολλανδία φαίνεται να είναι πολύ μικρό το ποσοστό τέτοιων ασκήσεων, μόλις 11,7%. Τέλος, ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει το ποσοστό των ασκήσεων που η επίλυση τους χρήζει ανάγκης μαθηματικών γνώσεων και διαδικασιών από άλλα μαθηματικά κεφάλαια. Σε αυτό το σημείο, φαίνεται η Σιγκαπούρη να συλλέγει ένα ποσοστό τέτοιων δραστηριοτήτων στις 48,8% επί του συνόλου των δραστηριοτήτων της. Από την άλλη μεριά, η Ελλάδα και η Ολλανδία κυμαίνονται σε πολύ μικρά ποσοστά στο παρόν ζήτημα, αφού όπως φαίνεται τα ποσοστά αυτά για τις δύο αυτές χώρες, διαμορφώνονται στα 7,9% για την Ελλάδα και 2,5% για την Ολλανδία.

Πίνακας 41: Γενική κατανομή ασκήσεων με βάση τις διαδικασίες επίλυσης

Ασκήσεις	Ελλάδα		Σιγκαπούρη		Ολλανδία	
	f	f%	f	f%	f	f%
Χρήση Φαντασίας	0	0	0	0	1	0,6
Χρήση λογικής	10	76,9	34	79	71	43,8
Χρήση Διαίσθησης	0	0	0	0	0	0
Χρήση σύνθετων μαθηματικών διαδικασιών	0	0	2	4,6	15	9,3
Χρήση Εκτιμήσεων	6	46,1	0	0	3	1,9
Ανάλυση δεδομένων	6	46,1	26	60,5	58	35,8
Συλλογή δεδομένων	11	15,3	0	0	19	11,7
Συνδυασμός με άλλες μαθηματικές διαδικασίες	1	7,9	21	48,8	4	2,5

Η συνέχεια της ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων, οδηγεί στην ανάλυση των σχολικών δραστηριοτήτων ως προς το είδος της γνώσης, το πλαίσιο εφαρμογής της, την ανάλυση του γραπτού κειμένου ως προς την ταξινόμηση και την τυπικότητα, την ανάλυση των απεικονιστικών στοιχείων, τις επιστημονικές πρακτικές που απαρτίζουν τις δραστηριότητες, καθώς επίσης και τις γνωστικές απαιτήσεις κάθε δραστηριότητας. Κατά συνέπεια, ακολουθούν 6 πίνακες για να καλύψουν τις ανάγκες της συγκεκριμένης ανάλυσης.

Η ανάλυση των δραστηριοτήτων ως προς το είδος της γνώσης, κατηγοριοποιεί τις δραστηριότητες ως προς την Πραγματολογική γνώση, την εννοιολογική γνώση και την διαδικαστική γνώση (Krathwohl, 2002; Dimopoulos et. al., 2003). Η πραγματολογική γνώση σε μια δραστηριότητα, είναι η γνωστικές απαιτήσεις της δραστηριότητας σχετικά με την γνώση βασικών εννοιών και διαδικασιών. Η εννοιολογική γνώση, πραγματεύεται τις βασικές γνώσεις και συνδυασμό αυτών, ενώ η διαδικαστική γνώση απαιτεί περισσότερες γνώσεις διαδικασιών και συνδυασμού των γνώσεων (Krathwohl, 2002; Dimopoulos et. al., 2003). Η Ελλάδα, φαίνεται να πραγματεύεται ασκήσεις και στα τρία επίπεδα του είδους της γνώσεις. Πιο συγκεκριμένα, οι περισσότερες ασκήσεις είναι στην πραγματολογική γνώση με 46,1%, ακολουθεί το πλήθος των ασκήσεων της εννοιολογικής γνώσεις με 38,5% και το υπόλοιπο 15,4% είναι οι ασκήσεις που παρουσιάζουν διαδικαστική γνώση. Στην Σιγκαπούρη και την Ολλανδία, φαίνεται στον πίνακα να μην υπάρχουν καθόλου ασκήσεις με διαδικαστική γνώση. Πιο συγκεκριμένα, το πλήθος των ασκήσεων της Σιγκαπούρης, κατανέμεται κατά 83,7% στην πραγματολογική γνώση και 16,3% στην εννοιολογική γνώση, ενώ της Ολλανδίας κατά 85,8% στην πραγματολογική γνώση και κατά 14,2% στην εννοιολογική γνώση αντίστοιχα.

Πίνακας 42: Ανάλυση ως προς το Είδος γνώσης

Ανάλυση ως προς το Είδος γνώσης	**Ελλάδα**		**Σιγκαπούρη**		**Ολλανδία**	
	f	**f%**	**f**	**f%**	**f**	**f%**
Πραγματολογική γνώση	6	46,1	36	83,7	139	85,8
Εννοιολογική γνώση	5	38,5	7	16,3	23	14,2
Διαδικαστική γνώση	2	15,4	0	0	0	0
Σύνολο	**13**	**100**	**43**	**100**	**162**	**100**

Η ανάλυση ως προς το πλαίσιο εφαρμογής, αναδεικνύει από μηδενικά έως μηδαμινά ποσοστά τις δραστηριότητες με πλαίσιο το παιχνίδι ή άλλο πλαίσιο. Πιο συγκεκριμένα, είναι 0% και στις δύο κατηγορίες για τις χώρες, Ελλάδα και Σιγκαπούρη, ενώ μόνο 1,2% και 3% για την Ολλανδία αντίστοιχα στις δύο κατηγορίες. Αυτό που ξεχωρίζει γενικότερα στον πίνακα, είναι ότι η Σιγκαπούρη έχει δομημένες το 100% των δραστηριοτήτων της σε καθημερινό πλαίσιο. Αντιθέτως η Ελλάδα και η Ολλανδία μοιράζουν τις δραστηριότητες τους σε διάφορα πλαίσια. Αναλυτικότερα, η Ελλάδα σχεδόν ισομοιράζει τις δραστηριότητες της σε αυτές χωρίς πλαίσιο (30,75%), σε αυτές με επιστημονικό πλαίσιο (30,75%) και σε εκείνες με καθημερινό πλαίσιο εφαρμογής (38,5%). Η Ολλανδία, έχει 11 δραστηριότητες χωρίς πλαίσιο (6,8%), 93 δραστηριότητες σε καθημερινό πλαίσιο (57,5%), 51 δραστηριότητες με επιστημονικό πλαίσιο και όπως ήδη έχει αναφερθεί 2 δραστηριότητες σε πλαίσιο παιχνιδιού (1,2%) και 5 που κατατάσσονται σε άλλο πλαίσιο (3%).

Πίνακας 43: Ανάλυση ως προς Πλαίσιο Εφαρμογής

Ανάλυση ως προς Πλαίσιο Εφαρμογής	Ελλάδα		Σιγκαπούρη		Ολλανδία	
	f	f%	f	f%	f	f%
Δραστηριότητες άνευ πλαισίου	4	30,75	0	0	11	6,8
Καθημερινό πλαίσιο	5	38,5	43	100	93	57,5
Επιστημονικό πλαίσιο	4	30,75	0	0	51	31,5
Δραστηριότητες ως Παιχνίδι	0	0	0	0	2	1,2
Δραστηριότητες άλλου πλαισίου	0	0	0	0	5	3
Σύνολο	**13**	**100**	**43**	**100**	**162**	**100**

Η ανάλυση του κειμένου σε κάθε δραστηριότητα, πραγματεύεται την ανάλυση του τρόπου γραφής της εκφώνησης και των ερωτημάτων. Η ταξινόμηση πραγματεύεται την ύπαρξη επιστημονικού ή καθημερινού περιεχομένου και χωρίζεται αντίστοιχα σε ισχυρή και ασθενής (Krathwohl, 2002; Dimopoulos et. al., 2003). Επίσης, η τυπικότητα έχει να κάνει με την συνολική οργάνωση της δραστηριότητας και την παρουσίαση της με χρήση παθητικής δομής, αυστηρής συντακτικής οργάνωσης και επιστημονικού λεξιλογίου. Κατά συνέπεια, φαίνεται ότι σχεδόν το σύνολο των δραστηριοτήτων και στις 3 χώρες πραγματεύεται δραστηριότητες ασθενής ταξινόμησης και χαμηλής τυπικότητας. Μόνο 1 δραστηριότητα της Ολλανδίας φαίνεται να παρουσιάζει υψηλή τυπικότητα (0,6%) και ισχυρή ταξινόμηση (0,6%).

Πίνακας 44: Ανάλυση γραπτού κειμένου

Ανάλυση γραπτού κειμένου		Ελλάδα		Σιγκαπούρη		Ολλανδία	
		f	f%	f	f%	f	f%
Ταξινόμηση	Ισχυρή	0	0	0	0	1	0,6
	Ασθενής	13	100	43	100	161	99,4
Σύνολο		**13**	**100**	**43**	**100**	**161**	**100**
Τυπικότητα	Υψηλή	0	0	0	0	1	0,6
	Χαμηλή	13	100	43	100	161	99,4
Σύνολο		**13**	**100**	**43**	**100**	**162**	**100**

Η ανάλυση των απεικονιστικών στοιχείων, χωρίζει επίσης τις δραστηριότητες σε ισχυρής και ασθενής ταξινόμησης, και ως προς την τυπικότητα σε υψηλής, χαμηλής και μέσης τυπικότητας. Στον παρακάτω πίνακα, εμφανίζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης των δραστηριοτήτων που εμπεριέχουν απεικονιστικά στοιχεία και το ποσοστό που παρουσιάζεται στον πίνακα, είναι επί του συνόλου των ασκήσεων κάθε χώρας, με απεικονιστικά στοιχεία. Παρατηρείται λοιπόν, ότι ως προς την ταξινόμηση, το σύνολο των δραστηριοτήτων κάθε χώρας που εμπεριέχουν απεικονιστικά στοιχεία, είναι ασθενής ταξινόμησης. Αντιθέτως, ως προς την τυπικότητα εμφανίζονται κάποιες διαφορές. Πιο συγκεκριμένα, η Ελλάδα, εμφανίζει 4 ασκήσεις με μέση τυπικότητα (44,5%) και 5 ασκήσεις με χαμηλή τυπικότητα (55,5%). Η Σιγκαπούρη, φαίνεται να έχει 13 ασκήσεις ισχυρής τυπικότητας (31,7%), 17 μέσης (41,5%) και 11 χαμηλής τυπικότητας (26,8%). Η Ολλανδία από την άλλη, έχει 24 ασκήσεις ισχυρής (18,5%) τυπικότητας και 106 μέσης (81,5%), ενώ δεν έχει καμία άσκηση με ασθενή τυπικότητα.

Πίνακας 45: Ανάλυση απεικονιστικών στοιχείων

Ανάλυση απεικονιστικών στοιχείων		Ελλάδα		Σιγκαπούρη		Ολλανδία	
		f	**f%**	**f**	**f%**	**f**	**f%**
Ταξινόμηση	Ισχυρή	0	0	0	0	0	0
	Ασθενής	9	100	41	100	130	100
Σύνολο		**9**	**100**	**41**	**100**	**130**	**100**
Τυπικότητα	Υψηλή	0	0	13	31,7	24	18,5
	Μέση	4	44,5	17	41,5	106	81,5
	Χαμηλή	5	55,5	11	26,8	0	0
Σύνολο		**9**	**100**	**41**	**100**	**130**	**100**

Στον πίνακα που ακολουθεί, φαίνονται οι επιστημονικές πρακτικές των δραστηριοτήτων. Μια δραστηριότητα, μπορεί να εμφανίζει περισσότερες από μια επιστημονικές πρακτικές και για αυτό τον λόγο, δεν θεωρήθηκε απαραίτητο να παρουσιαστεί το σύνολο των δραστηριοτήτων στον συγκεκριμένο πίνακα. Φυσικά, αξίζει να σημειωθεί, ότι το ποσοστό που παρουσιάζεται σε αυτόν τον πίνακα, είναι επί του σύνολο των δραστηριοτήτων.

Ξεχωρίζουν λοιπόν σε αυτόν τον πίνακα, οι επιστημονικές πρακτικές με το μεγαλύτερο ποσοστό στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια να είναι η ανάλυση και η ερμηνεία δεδομένων (61,5%), η συγκρότηση εξηγήσεων (46,1%), η εμπλοκή σε επιχειρηματολογία (38,5%) και η ανάλυση με χρήση μοντέλων (23%). Η Σιγκαπούρη, φαίνεται να περιορίζεται σε τρεις μόνο πρακτικές, αυτές της ερμηνείας και ανάλυσης δεδομένων (60,5%), της χρήσης μαθηματικής και υπολογιστικής σκέψης (67,4%) και της υποβολής ερωτημάτων (60,5%). Τέλος, οι δραστηριότητες της Ολλανδίας, κατά κύριο λόγο πραγματεύονται την υποβολή ερωτημάτων (56,8%), την ανάλυση - ερμηνεία δεδομένων (43,8%) και την χρήση μαθηματικής και υπολογιστικής σκέψης (21%).

Πίνακας 46: Ανάλυση ως προς τις Επιστημονικές Πρακτικές

Επιστημονικές Πρακτικές	Ελλάδα		Σιγκαπούρη		Ολλανδία	
	f	f%	f	f%	f	f%
Υποβολή ερωτημάτων	1	7,7	26	60,5	92	56,8
Ανάπτυξη και χρήση μοντέλων	3	23	0	0	3	1,9
Σχεδίαση και πραγματοποίηση Πειράματος-Δοκιμής	1	7,7	0	0	3	1,9
Ανάλυση και ερμηνεία δεδομένων	8	61,5	26	60,5	71	43,8
Χρήση μαθηματικής και υπολογιστικής σκέψης	1	7,7	29	67,4	34	21
Συγκρότηση εξηγήσεων	6	46,1	0	0	7	4,3
Εμπλοκή σε επιχειρηματολογία που εδράζεται σε αποδεικτικά στοιχεία	5	38,5	0	0	9	5,5
Απόκτηση, αξιολόγηση και ανταλλαγή πληροφοριών	1	7,7	0	0	0	0

Στη συνέχεια της ανάλυσης των δραστηριοτήτων ακολουθεί η ανάλυση τους ως προς τις γνωστικές τους απαιτήσεις. Και για τα δεδομένα αυτού του πίνακα, αξίζει να σημειωθεί, ότι υπήρχαν δραστηριότητες με περισσότερο από μια γνωστική απαίτηση και κατά συνέπεια, τα αποτελέσματα της ανάλυσης παρουσιάζονται αναλόγως.

Όπως φαίνεται στο παρακάτω πίνακα, η Ελλάδα δομεί τις περισσότερες δραστηριότητες της με γνώμονα την κατανόηση (100%), την ανάλυση (61,5%), την απομνημόνευση (46,1%) και την αξιολόγηση (38,5%). Η Σιγκαπούρη από την άλλη πλευρά, στοχεύει στην κατανόηση (100%), την ανάλυση (67,4%) και την απομνημόνευση (51,2%). Η Ολλανδία στοχεύει στην ανάλυση (58,6%), την κατανόηση (38,3%) και αρκετά λιγότερο στην σύνθεση ασκήσεων (4,3%).

Πίνακας 47: Ανάλυση ως προς την γνωστική απαίτηση

Γνωστική απαίτηση	Ελλάδα		Σιγκαπούρη		Ολλανδία	
	f	f%	f	f%	f	f%
Απομνημόνευση	6	46,1	22	51,2	0	0
Κατανόηση	13	100	43	100	62	38,3
Εφαρμογή	2	15,4	0	0	4	2,5
Ανάλυση	8	61,5	29	67,4	95	58,6
Αξιολόγηση	5	38,5	0	0	0	0
Σύνθεση	0	0	0	0	7	4,3

Το κεφάλαιο αυτό της ανάλυσης – σύγκρισης των σχολικών εγχειριδίων κλείνει με μια γενική ανάλυση της μορφής των δραστηριοτήτων και των απεικονιστικών στοιχείων που τις απαρτίζουν. Αξίζει να σημειωθεί για τον πίνακα που ακολουθεί, ότι τα ποσοστά των γραμμών που πραγματεύονται απεικονιστικά στοιχεία, είναι μόνο για τις ασκήσεις τις εκάστοτε χώρας που περιέχουν απεικονιστικά στοιχεία και σε παρένθεση επί του συνόλου των ασκήσεων, ενώ στις υπόλοιπες γραμμές είναι μόνο επί του συνόλου των ασκήσεων. Ακόμα, να σημειωθεί, ότι ως ρεαλιστικά απεικονιστικά στοιχεία λογίζονται οι φωτογραφίες, ως συμβατικά εικόνες που έχουν προσαρμοστεί από έναν υπολογιστή και εκλείπει εντελώς το ρεαλιστικό – πραγματικό στοιχείο από μέσα τους και ως υβρίδια, ο συνδυασμός των δύο προηγούμενων. Επίσης, ανοικτής απάντησης, λογίζεται ένα πρόβλημα, όταν ο μαθητής μπορεί να δώσει μια απάντηση γράφοντας όσο θέλει και όπως θέλει, ενώ κλειστής απάντησης θεωρήθηκε μια άσκηση που ο μαθητής έχει συγκεκριμένες επιλογές απάντησης.

Στον πίνακα παρακάτω, φαίνεται η Ελλάδα να παρέχει στο 61,5% των δραστηριοτήτων της, εισαγωγικό κείμενο, ενώ η Σιγκαπούρη στο 51,2% και αντίστοιχα η Ολλανδία στο 39,5%. Ακόμα, είναι φανερό ότι από το σύνολο των υπό μελέτη δραστηριοτήτων κάθε χώρας, απεικονιστικά στοιχεία περιέχουν στην Ελλάδα το 69,2%, στην Σιγκαπούρη το 95,3% και στην Ολλανδία το 80,2%. Από αυτές τις ασκήσεις, στην Ελλάδα το 88,9% των απεικονιστικών στοιχείων είναι συμβατικά (61,5% επί του συνόλου) και το 11,1% είναι υβρίδια (7,7% επί του συνόλου). Ο ρόλος των απεικονιστικών στοιχείων, είναι κατά ποσοστό 11,1% διακοσμητικός (7,7% επί του συνόλου), 44,45% πληροφοριακός (30,7% επί του συνόλου) και 44,45% ερμηνευτικός (30,7% επί του συνόλου). Στην Σιγκαπούρη το 100% των απεικονιστικών στοιχείων είναι συμβατικά (95,3% επί του συνόλου) και δεν έχει καθόλου υβρίδια ή ρεαλιστικά απεικονιστικά στοιχεία. Ο ρόλος των απεικονιστικών στοιχείων της χώρας αυτής, είναι κατά 58,5% ερμηνευτικός (55,8% επί του συνόλου), 36,6% πληροφοριακός (34,9% επί του συνόλου) και 4,9% διακοσμητικός (4,6% επί του συνόλου). Στην Ολλανδία το 100% των απεικονιστικών στοιχείων είναι συμβατικά (80,2% επί του συνόλου) απεικονιστικά στοιχεία. Ο ρόλος των απεικονιστικών στοιχείων της Ολλανδίας, είναι κατά 3,8% διακοσμητικός (3% επί του συνόλου), 16,2% πληροφοριακός (13% επί του συνόλου) και 80% ερμηνευτικός (64,2% επί του συνόλου).

Τέλος, σχετικά με το είδος των απαιτούμενων απαντήσεων στις δραστηριότητες κάθε χώρας, η Ελλάδα ζητάει στο 61,5% του συνόλου των δραστηριοτήτων της, ανοιχτή απάντηση, στο 30,7% κλειστή απάντηση και μόλις στο 7,7% των ασκήσεων συνδυάζει κλειστή και ανοιχτή απάντηση. Στην Σιγκαπούρη, το 88,4% του συνόλου των δραστηριοτήτων, θέλουν κλειστές απαντήσεις και το 11,6% ανοιχτές, ενώ δεν υπάρχουν ασκήσεις που να συνδυάζουν τους δύο τύπους απαντήσεων. Η Ολλανδία, έχει το 87,7% των δραστηριοτήτων της, με κλειστές απαντήσεις και 6,8% με ανοιχτές, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό του συνδυασμού του τύπου των απαντήσεων ανέρχεται για την συγκεκριμένη χώρα στο 5,5%.

Πίνακας 48: Ανάλυση ως προς την Μορφή του θέματος

Μορφή θέματος		Ελλάδα		Σιγκαπούρη		Ολλανδία	
		f	f%	f	f%	f	f%
Με εισαγωγικό κείμενο		8	61,5	22	51,2	64	39,5
Με απεικονιστικά στοιχεία		9	69,2	41	95,3	130	80,2
Τύπος απεικονιστικών στοιχείων	Ρεαλιστικά	0	0 (0)	0	0 (0)	0	0 (0)
	Συμβατικά	8	88,9 (61,5)	41	100 (95,3)	130	100 (80,2)
	Υβρίδια	1	11,1 (7,7)	0	0 (0)	0	0 (0)
Λειτουργικός ρόλος των απεικονιστικών στοιχείων	Διακοσμητικός	1	11,1 (7,7)	2	4,9 (4,6)	5	3,8 (3)
	Πληροφοριακός	4	44,45 (30,7)	15	36,6 (34,9)	21	16,2 (13)
	Ερμηνευτικός	4	44,45 (30,7)	24	58,5 (55,8)	104	80 (64,2)
Είδος απαιτούμενης απάντησης	Ανοικτή απάντηση	8	61,5	5	11,6	11	6,8
	Κλειστή απάντηση	4	30,7	38	88,4	142	87,7
	Συνδυασμός	1	7,7	0	0	9	5,5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9^{Ο}: ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται η ερμηνεία των αποτελεσμάτων της έρευνας, συνοδευόμενη από μια συζήτηση – αντιπαράθεση αυτών, με τα αποτελέσματα άλλων ερευνών. Αξίζει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο, ότι για διευκόλυνση του αναγνώστη, η ανάπτυξη της συγκεκριμένης παραγράφου, θα ακολουθήσει την σειρά των ερευνητικών ερωτημάτων που τέθηκαν στην έρευνα. Έπειτα, θα συνεχίσει μια γενικότερη ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας, παρουσιάζοντας τα καίρια σημεία της και τα σημεία μεγίστου ενδιαφέροντος, με βάση τους σκοπούς της συγκεκριμένης μελέτης. Επίσης, γίνεται μια προσπάθεια σύνδεσης των αποτελεσμάτων της έρευνας με τις εκπαιδευτικές συνέπειες που μπορεί να επιφέρει.

Γενικότερα, καλό είναι να τονισθεί, ότι έρευνες σαν την δεδομένη πρέπει να διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο τόσο στον σχεδιασμό της ύλης των αναλυτικών προγραμμάτων των μαθηματικών, όσο και κατά την συγγραφή των σχολικών εγχειριδίων ή την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών. Ο κύριος λόγος περί αυτού, είναι διότι συνάδουν σε μεγάλο βαθμό στην βελτίωση της ποιότητας και της ποσότητας της ύλης, στην βελτίωση των σχολικών εγχειριδίων, αλλά και την συγκέντρωση του ενδιαφέροντος από μη ειδικευμένους στα μαθηματικά. Αυτά επιτυγχάνονται, μέσα από την ανάδειξη της χρησιμότητας του μαθηματικού αντικειμένου, την αποδοτικότητα του μέσα από τις διδακτικές παρεμβάσεις του παρόντος, την συγκέντρωση απόψεων καθηγητών μαθηματικών, αλλά και καθημερινών ανθρώπων. Επίσης, σημαντικό για την βελτίωση των διδακτικών εγχειριδίων, είναι η συγκριτική μελέτη με βιβλία άλλων χωρών.

9.1 Συζήτηση και Ερμηνεία Αποτελεσμάτων Έρευνας

Μέσα από διάφορες καθημερινές καταστάσεις που εμπεριέχουν τυχαιότητα, καθώς επίσης και μέσα από τα γενικότερα παραδείγματα που δόθηκαν στο κεφάλαιο 1 της συγκεκριμένης εργασίας, καταλαβαίνει κανείς, ότι η Πιθανότητα είναι μια ευρέως διαδεδομένη έννοια στην καθημερινότητα και η θεωρία της βρίσκει απήχηση σε πολλές επιστήμες (Gal, 2005; Sofaer et al., 2018; Taylor, 2014). Μάλιστα, η γενικότερη εικόνα της διεθνούς βιβλιογραφίας υποστηρίζει την απήχηση των πιθανοτήτων και σε διάφορες καθημερινές καταστάσεις, λόγου χάρη της ανάγκης για κάποια πρόβλεψη ή την λήψη μιας απόφασης υπό αβεβαιότητα (Bonnett, & White, 2018; Borovcnik & Kapadia, 2018). Συχνά, μια απόφαση σημαντική ή ασήμαντη, ψάχνει την εξήγηση της πάνω στις πιθανότητες, ώστε τελικά να ληφθεί η καλύτερη δυνατή απόφαση για την εν λόγω κατάσταση (Batanero & Chernoff, 2017; Howard, 1988; Juslin et al., 2014; Kyburg, 1966). Γεγονός, που επεξηγεί την πεποίθηση πολλών ερευνητών για την επιρροή της θεωρίας των Πιθανοτήτων στην λήψη μιας απόφασης (Borovcnik & Kapadia, 2018; Juslin et al., 2014).

Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα λοιπόν, που τέθηκε από τον ερευνητή και πραγματευόταν την σχέση των Πιθανοτήτων με την καθημερινή λήψη αποφάσεων, επιβεβαιώνεται από την διεθνή άποψη, αλλά και τα αποτελέσματα της δεδομένης έρευνας, αφού στα διαγράμματα 8.1 και 8.3 φαίνεται ξεκάθαρα η άποψη της πλειοψηφίας των ερωτώμενων σχετικά με την απήχηση των Πιθανοτήτων στις καθημερινές και τις επαγγελματικές τους δραστηριότητες. Επίσης, στο διάγραμμα 8.5 φαίνεται η πλειοψηφία των ερωτώμενων να βασίζει μια σημαντική απόφαση για τον στοιχηματισμό ενός μεγάλου χρηματικού ποσού στις Πιθανότητες. Ακόμα, στα διαγράμματα 8.6 και 8.8 φαίνεται ξεκάθαρα η αλλαγή των αποφάσεων των ερωτώμενων, υπό την επιρροή της Πιθανότητας. Γεγονός, που επιβεβαιώνεται και συγκριτικά με το διάγραμμα 8.7, αφού μόνο το 21% απάντησε αρχικά, ότι θα επηρεαζόταν από την γνώση της πιθανότητας νίκης. Ωστόσο, στο διάγραμμα 8.8 παρατηρείται αλλαγή των ποσοστών των απαντήσεων του διαγράμματος 8.6, όπου φανερώνει μια διαφορά υπέρ της απάντησης για ρίσκο γύρο στο 20,3%. Επίσης, ένα ποσοστό του ύψους 39,7% των ερωτώμενων, απαντάει ότι η γνώση της Πιθανότητας, θα έθετε σε περισσότερη σκέψη την απόφαση τους. Ενώ μόλις το 1,1% απάντησε ότι δεν θα επηρεάσει καθόλου την απόφαση του η Πιθανότητα. Μάλιστα, η παρούσα εργασία επεκτείνει την διεθνή βιβλιογραφία αναδεικνύοντας, ότι παρόλη την εμπιστοσύνη της πλειοψηφίας του δείγματος στις Πιθανότητες, δεν θα βασίζονταν σε αυτές για μια απόφαση που εμπεριέχει κάποιο συναίσθημα. Λόγου χάρη, στο διάγραμμα 8.10, φαίνεται η πλειοψηφία των ερωτώμενων να επιλέγει συναισθηματικά να στοιχηματίσει και όχι με βάση τις πιθανότητες (44,9% έναντι 38,2%).

Στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, όπου αναζητάει την συσχέτιση των αντιλήψεων ενός μέσου ανθρώπου για τις Πιθανότητες με την χρήση της θεωρίας στην καθημερινότητα, η παρούσα μελέτη απαντάει, ότι γενικότερα υπάρχει μια θετική αντίληψη σχετικά με την χρήση της θεωρίας σε καθημερινές διεργασίες. Πιο συγκεκριμένα, στο διάγραμμα 8.1, γίνεται ξεκάθαρη η άποψη ενός ποσοστού των ερωτώμενων (πάνω από το 80% στην ερώτηση Q15), ότι οι περισσότερες γνώσεις στην θεωρία Πιθανοτήτων θα επηρέαζαν την καθημερινότητα τους. Γεγονός που επιβεβαιώνεται στο ίδιο διάγραμμα από τις απαντήσεις στην ερώτηση Q14, αλλά και στο διάγραμμα 8.3 με τα ποσοστά των θετικών ή των αρνητικών απαντήσεων στις ερωτήσεις Q41, Q43, Q44, Q45 και Q46. Έτσι, γίνεται ξεκάθαρο, ότι μια συντριπτική πλειοψηφία των συμμετεχόντων της έρευνας, δεν θεωρεί ότι οι πιθανότητες χρησιμοποιούνται μόνο στον τζόγο, αλλά έχουν άμεση απήχηση στην καθημερινότητα και στην λήψη αποφάσεων. Πράγμα που γίνεται κατανοητό, ακόμα και αν δεν γνωρίζει κάποιος καλά την θεωρία τους. Επιπροσθέτως, φαίνεται στον πίνακα 26 να υπάρχει μια αξιοσημείωτη συσχέτιση (0,583) με πολύ υψηλή σημαντικότητα (<0,001) μεταξύ των ερωτημάτων για την χρήση της Πιθανότητας στην καθημερινότητα και την χρήση της στην επαγγελματική δραστηριότητα.

Ακόμα, η παρούσα εργασία, απαντώντας στο τρίτο ερευνητικό ερώτημα της, αναδεικνύει μια απόσταση – διαφορά μεταξύ των πεποιθήσεων των ερωτώμενων για την επιρροή των Πιθανοτήτων στις καθημερινές τους αποφάσεις και την τελική επιρροή που η πιθανότητα ασκεί σε αυτούς κατά την λήψη μιας απόφασης. Πιο συγκεκριμένα, στον πίνακα 31, φαίνεται να μην υπάρχει υψηλή συσχέτιση μεταξύ των απαντήσεων των ερωτώμενων για την χρήση της πιθανότητας σε καθημερινές καταστάσεις και την τελική χρήση της πιθανότητας, όταν ο ερωτώμενος πρωταγωνιστεί σε μια κατάσταση. Γεγονός, που οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι η πιθανότητα επιφέρει μεγαλύτερη επιρροή σε μια απόφαση, από ότι μπορεί να πιστεύει αρχικά ο ερωτώμενος. Αυτό, επιβεβαιώνεται και από το διάγραμμα ομοιότητας 8.14 και το συνεπαγωγικό διάγραμμα 8.15, αφού δεν εμφανίζεται άμεση ομοιότητα ή συνεπαγωγή μεταξύ των ερωτήσεων Q11 και Q13 με τις ερωτήσεις Ex1c, Ex51, Ex6a και Ex7a.

Επίσης, στο διάγραμμα 8.2 φαίνεται ότι σχεδόν το 50% του δείγματος θυμάται να διδάχθηκε πιθανότητες στο σχολείο, αλλά μόνο το 40% του συνόλου δηλώνει μια σχετική ικανοποίηση από την διδαχή της θεωρίας. Επίσης, στο ίδιο διάγραμμα και στις ερωτήσεις Q26 και Q27, φαίνεται ένα πολύ μεγάλο ποσοστό των ερωτώμενων (πάνω από 80%) να θεωρεί, ότι οι περισσότερες γνώσεις πάνω στην θεωρία Πιθανοτήτων θα διευκόλυναν την καθημερινότητα τους. Σε αυτό, έρχονται να προστεθούν τα αποτελέσματα των ερωτήσεων με την κλήρωση και την κατανόηση της πιθανοτικής έκφρασης του ερωτηματολογίου. Πιο συγκεκριμένα, στον πίνακα 24, όπου συγκεντρώνονται τα αποτελέσματα της ερώτησης με την κλήρωση 5 αριθμών, φαίνεται οι ερωτώμενοι να ανταπεξήλθαν των προσδοκιών του ερευνητή κατά την πλειοψηφία τους. Βέβαια, δεν έλειψαν τα μεγάλα ποσοστά στις λάθος απαντήσεις, όπως το 22% εκείνων που θεωρούν, ότι στην επόμενη κλήρωση μικρότερη πιθανότητα έχουν να έρθουν οι αριθμοί της προηγούμενης κλήρωσης. Αυτό, εξηγείται λόγω τις έλλειψης γνώσεων πιθανότητας που είχε ένα μεγάλο μέρος των ερωτώμενων. Ωστόσο, σε γενικότερη κλίμακα τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων ήταν πάνω από 66% και μέχρι 95% σε κάποιες ερωτήσεις. Αυτό που προκαλεί εντύπωση στον συγκεκριμένο πίνακα, είναι σχετικά με την τέταρτη ερώτηση που πραγματεύεται τις πληροφορίες ενός περιοδικού που διατηρεί τα στατιστικά εμφάνισης των αριθμών. Σε αυτή την ερώτηση η πλειοψηφία των ερωτώμενων θεώρησε χρήσιμες τις πληροφορίες του περιοδικού για τις μελλοντικές προβλέψεις.

Στην συνέχεια, από το διάγραμμα 8.9, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα περί κατανόησης της έκφρασης «Η Πιθανότητα εξάπλωσης της επιδημίας τα επόμενα 5 χρόνια, προβλέπεται 60%». Εδώ, καταλαβαίνει κανείς, ότι οι απόψεις για την κατανόηση της συγκεκριμένης έκφρασης, διαφέρουν. Οι περισσότεροι συγκλίνουν στην άποψη ότι υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης της επιδημίας, από ότι μη εμφάνισης της, ωστόσο απαντούν αρνητικά σε ερωτήσεις όπως «το 60% της περιοχής θα ασθενήσει» ή «Η εξάπλωση θα διαρκέσει 3 από τα επόμενα 5 χρόνια». Σύμφωνα με αυτά τα αποτελέσματα λοιπόν, διεξάγεται το συμπέρασμα, ότι ένας μέσος άνθρωπος μπορεί να ανταπεξέλθει σε ικανοποιητικό βαθμό σε καθημερινές στοχαστικές καταστάσεις ή καταστάσεις που εμπεριέχουν τυχαιότητα, αλλά η έλλειψη γνώσεων Πιθανότητας τον αποτρέπει από το να δει την πλήρη εικόνα ή όλες τις επιλογές μιας κατάστασης.

Αυτά είναι αποτελέσματα που έχουν άμεση επίδραση από την διδακτική των Πιθανοτήτων κατά τα σχολικά χρόνια των συμμετεχόντων της έρευνας. Το ελληνικό Παιδαγωγικό Ινστιτούτο λανσάρει τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών και το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών για κάθε μάθημα. Αυτά, παραμένουν σταθερά για αρκετά χρόνια, ωστόσο κάθε χρόνο υπάρχουν αλλαγές στην διδακτέα ύλη και τις αναλυτικές οδηγίες διδασκαλίας. Τα στοχαστικά μαθηματικά και οι πιθανοτικές έννοιες εμφανίζονται για πρώτη φορά στα Αναλυτικά Προγράμματα μαθηματικών της Δ΄ Δημοτικού, μέσα από τον γνωστικό άξονα περί συλλογής και επεξεργασίας δεδομένων (Πίνακας 1). Ωστόσο, η παρούσα έρευνα και η πραγμάτευση των σχολικών εγχειριδίων δείχνει, ότι τα στοχαστικά μαθηματικά εμφανίζονται για πρώτη φορά στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια στην Ε΄ Δημοτικού (Πίνακας 37). Επίσης, αξιοσημείωτο είναι, ότι τα στοχαστικά μαθηματικά σύμφωνα με τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών για τα μαθηματικά στο γυμνάσιο, υπάρχουν στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα στις τάξεις Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου, όπου μάλιστα προτείνονται 15 ώρες και 9 ώρες αντίστοιχα σε κάθε τάξη (Πίνακας 2). Βέβαια, αυτό έρχεται σε αντιπαράθεση με την διδακτική πραγματικότητα. Απαντώντας στο τέταρτο ερευνητικό ερώτημα της εργασίας, από τις συνεντεύξεις που πραγματοποιήθηκαν για τις ανάγκες της συγκεκριμένης εργασίας, ενώ υπήρξε μια ομοφωνία των εκπαιδευτικών που λάμβαναν χώρα στην συνέντευξη, σχετικά με την σημαντικότητα της διδακτικής των Πιθανοτήτων, παρατηρήθηκε, ότι μόνο 2 από τους 5 εκπαιδευτικούς θεωρούν ότι προλαβαίνουν με την υπάρχουσα ύλη στις δύο τάξεις και περισσότερο στην Γ΄ Γυμνασίου να διδάξουν στοχαστικά μαθηματικά. Μάλιστα, κανένας από αυτούς τους δύο εκπαιδευτικούς δεν θεώρησε, ότι η διδαχή των Πιθανοτήτων μπορεί να πραγματοποιηθεί όπως προβλέπουν τα Αναλυτικά Προγράμματα, αφού απάντησαν χαρακτηριστικά, ότι προλαβαίνουν οριακά να διδάξουν «λίγο» την ύλη των Πιθανοτήτων. Μάλιστα και οι πέντε εκπαιδευτικοί συμφώνησαν στην δυσκολία που υπάρχει χρονικά για να ακολουθήσουν τις προτεινόμενες ώρες των Αναλυτικών Προγραμμάτων.

Γενικότερα, στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος, έχουν γίνει προσπάθειες για να διαμορφωθεί καλύτερα η διδακτέα ύλη μαθηματικών κάθε τάξης. Βέβαια, αυτό δεν βελτίωνε πάντα την κατάσταση και για αυτό υπάρχουν χρονικές περίοδοι, όπου παρατηρείτε μια συνεχής εναλλαγή της διδακτέας ύλης (Διάγραμμα 3.1). Μάλιστα, στο κομμάτι των στοχαστικών μαθηματικών τα τελευταία 12 χρόνια, υπάρχει αστάθεια στην εισαγωγή της ύλης τους στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Πιο συγκεκριμένα, μια μεγάλη χρονική περίοδο (2012-2018) τα στοχαστικά μαθηματικά αποτελούσαν μέρος της διδακτέας ύλης των τάξεων Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου και Α΄ και Γ΄ Λυκείου (Διάγραμμα 3.1). Ωστόσο αυτό άλλαξε το 2018, όπου τα στοχαστικά μαθηματικά αποχώρησαν από την ύλη της Α΄ Λυκείου και το 2019, όπου αποχώρισαν και από την ύλη της Γ΄ Λυκείου (Διάγραμμα 3.1). Αποτέλεσμα αυτού ήταν την χρονική περίοδο 2019-2021, τα παιδιά να διδάσκονται στοχαστικά μαθηματικά και ειδικότερα Πιθανότητες μόνο στις τάξεις Β΄

και Γ΄ Γυμνασίου, υπό την προϋπόθεση βέβαια, όπως προέκυψε και από την ποιοτική μελέτη της συγκεκριμένης έρευνας, ο εκπαιδευτικός να προλάβει χρονικά να διδάξει τα κεφάλαια των στοχαστικών μαθηματικών. Μάλιστα, εδώ αξίζει να σημειωθεί και μια ενδιαφέρουσα άποψη που έφερε ο Δίας, ο οποίος με λίγα λόγια θεωρεί, ότι και να προλάβει κανείς να διδάξει Πιθανότητες στην Γ΄ Γυμνασίου, τα παιδιά δεν μελετάνε ιδιαίτερα, καθώς γνωρίζουν ότι το κεφάλαιο των Πιθανοτήτων δεν θα αποτελεί μέρος της τελικής εξεταστέας ύλης. Επίσης, άξιο αναφοράς σχετικά με το Διάγραμμα 3.1, είναι το έτος 2021, όπου παρατηρείτε να μπαίνουν ξανά στην ύλη της Γ΄ Λυκείου οι Πιθανότητες. Αυτό που πρέπει να σημειωθεί εδώ, είναι ότι οι Πιθανότητες εισάγονται στην ύλη της Γ΄ Λυκείου, αλλά μόνο για τους μαθητές των θεωρητικών μαθημάτων (Οδηγίες διδασκαλίας, 2021).

Ο εξορθολογισμός και ο σωστός διαμοιρασμός της ύλης μεταξύ των σχολικών βαθμίδων και ειδικότερα των σχολικών τάξεων, είναι ένας από τους κύριους παράγοντες που μπορεί να βελτιώσει την διδακτική των μαθηματικών και κατά επέκταση τις γνώσεις και τις ικανότητες των πολιτών. Άλλοι σημαντικοί παράγοντες που επηρεάζουν τις γνώσεις ενός ανθρώπου για ένα διδακτικό αντικείμενο σύμφωνα με την βιβλιογραφία, είναι οι διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών για το μάθημα (Kok Hwee Chia, 2014), ο εκπαιδευτικός (Flores-Mendoza et al., 2018), τα σχολικά εγχειρίδια (Fan et al., 2013; Mullis et al., 2012) και διάφοροι άλλοι κοινωνικοί ή πολιτικοί παράγοντες, όπως η οικογένεια και οι πολιτικές αξίες της εκάστοτε εποχής (Brand et al., 2006). Η παρούσα μελέτη προσπαθεί να συμπληρώσει την διεθνή βιβλιογραφία, αναζητώντας τον βαθμό επιρροής του καθενός από τους παραπάνω παράγοντες στην μάθηση των Πιθανοτήτων, απαντώντας έτσι στο πέμπτο ερευνητικό ερώτημα. Τα αποτελέσματα δείχνουν, ότι ο «εκπαιδευτικός», η «έλλειψη διαδραστικών παραδειγμάτων» και η «έλλειψη σύνδεσης των παρεχόμενων πιθανοτικών γνώσεων με την καθημερινότητά», αποτελούν τους πρωτοπόρους παράγοντες επιρροής της μάθησης της θεωρίας Πιθανοτήτων (Διάγραμμα 8.5). Με τους παράγοντες «φίλοι», «βοήθεια στο σπίτι» και «σχολικό εγχειρίδιο» να πλαισιώνουν τις τελευταίες θέσεις των επιλογών των ερωτώμενων (Διάγραμμα 8.5). Ακόμα, στον πίνακα 29 και στο διάγραμμα 8.16 που συνοδεύεται από τον πίνακα 34, φαίνεται να υπάρχει υψηλή συσχέτιση μεταξύ κάποιον παραγόντων. Λόγου χάρη, μεταξύ της δυσκολίας του μαθήματος και του συνολικού όγκου της ύλης, ή των παραγόντων όγκος και ροή της ύλης.

Στην συνέχεια, προς απάντηση των τελευταίων δύο ερευνητικών ερωτημάτων, σημειώνεται από την βιβλιογραφία, ότι η σημαντικότητα του σχολικού εγχειριδίου στην παροχή γνώσεων και ευκαιριών μάθησης στους μαθητές, οδηγεί στην ανάγκη για την συγκριτική μελέτη τόσο των σχολικών εγχειριδίων μεταξύ τους, όσο και με την γενικότερη βιβλιογραφία και τις διδακτικές συστάσεις για την θεωρία Πιθανοτήτων. Ο μαθητής πρέπει να εμφανίζει μια ισορροπία μεταξύ των γνώσεων και των δεξιοτήτων που αποκτά από την μάθηση (Kaur & Pereira-Mendoza, 2000). Κατά συνέπεια, υπάρχει ένας γενικότερος κανόνας για τις ηλικιακές βαθμίδες που μπορεί ο μαθητής να διδαχθεί μια έννοια ή να αποκτήσει μια συγκεκριμένη δεξιότητα (Chan, 2013; Velayutham1, 2020). Στο Πίνακα 5, φαίνονται οι διδαχτικοί στόχοι στο κομμάτι των Πιθανοτήτων, που μπορούν να επιτευχθούν σε κάθε ηλικιακή ομάδα, όπως αυτοί προέκυψαν από τις ανεξάρτητες έρευνες των Graham και Thornton (2005), των Tarr και Lannin (2005) και του Watson (2005). Στον πίνακα 37, φαίνεται η Ελλάδα, η Σιγκαπούρη και η Ολλανδία, στα σχολικά τους εγχειρίδια να μην ακολουθούν την συγκεκριμένη κατανομή. Προφανώς, λοιπόν τα παιδιά είναι σε θέση να κατανοήσουν κάποιες πιθανοτικές έννοιες σε κάποια ορισμένη ηλικία, αλλά αυτό εξαρτάτε και από τις επιλογές και την συνολική δομή του προγράμματος σπουδών για την εκάστοτε χώρα.

Επίσης, η γενικότερη βιβλιογραφία προτείνει την σύνδεση των διδασκόμενων εννοιών με την καθημερινότητα, ώστε να μπορούν να αφομοιωθούν οι έννοιες από τον μαθητή και να αναγνωριστεί η ανάγκη εισαγωγής τους (Gravemeijer & Doorman, 1999; Schools Council Statistical Education 1980). Με τον τρόπο αυτό, επιτυγχάνεται ευκολότερα η μάθηση, αφού η νέα έννοια δομείται πάνω στις υπάρχουσες αντιλήψεις (Engel & Orthwein, 2018). Στον πίνακα 43 αποδεικνύεται, ότι και οι τρεις χώρες στα σχολικά τους εγχειρίδια δομούν την πλειοψηφία των δραστηριοτήτων τους σε ένα καθημερινό πλαίσιο. Ακόμα, η γλώσσα γραφής των εννοιών και των δραστηριοτήτων επηρεάζει την μάθηση των νέων εννοιών. Γεγονός, που δικαιολογεί την ανάπτυξη των σχολικών δραστηριοτήτων των τριών χωρών, σε ασθενή ταξινόμηση και χαμηλή τυπικότητα (Πίνακας 44). Το ίδιο ισχύει φυσικά και για τα απεικονιστικά στοιχεία που κοσμούν κάποιες δραστηριότητες (Πίνακας 45).

Πολλές ομοιότητες εμφάνισαν τα σχολικά εγχειρίδια των τριών αυτών χωρών. Κάποιες από αυτές είναι, ότι η πλειοψηφία των ασκήσεων τους, αποτελούνται από απλές ασκήσεις για την εκάστοτε ηλικία (Πίνακας 39 και 48), συνοδεύονται από κάποιο γράφημα ή εικόνα ή πίνακα (Πίνακας 40), ακολουθούν το είδος της πραγματολογικής γνώσης (Πίνακας 42) και η συντριπτική πλειοψηφία των απεικονιστικών τους στοιχείων είναι συμβατικές εικόνες (Πίνακας 48). Βέβαια, μεταξύ των ομοιοτήτων τους τα σχολικά βιβλία των τριών χωρών εμφανίζουν και αρκετές διαφορές. Εκτός από την διαφορετική κατανομή των διδασκόμενων εννοιών στις έξι τάξεις της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης κάθε χώρας, η οποία φαίνεται και από τον Πίνακα 37, οι τρεις χώρες ακολουθούν διαφορετική νοοτροπία στα βιβλία τους. Αρχικά, σημαντική είναι η διαφορά των ζητουμένων κάθε βιβλίου, αλλά και των βασικών τεχνικών δόμησης της εκάστοτε παραγράφου. Πιο συγκεκριμένα, μεταξύ των τριών χωρών αλλάζει το ζητούμενο κάθε παραγράφου, αφού στην Ελλάδα ο μαθητής αναμένεται στο τέλος μιας παραγράφου να γνωρίζει την νέα έννοια που διδάχτηκε, την θεωρία της και την χρήση της, αλλά στις χώρες Ολλανδία και Σιγκαπούρη, ο μαθητής οφείλει να γνωρίζει απλά να ακολουθεί διαδικασίες και τεχνικές για την επίλυση ασκήσεων. Αυτό δικαιολογείτε τόσο από τον πίνακα 38 που ορίζει τις βασικές τεχνικές που ξεχωρίζουν σε κάθε παράγραφο των σχολικών βιβλίων της εκάστοτε χώρας, αλλά από το πλήθος των συνολικών ασκήσεων που πραγματεύονται τα σχολικά εγχειρίδια, όπου είναι 13 ασκήσεις για τα ελληνικά σχολικά βιβλία, 43 για το σχολικά βιβλία της Σιγκαπούρης και 162 για τα σχολικά βιβλία της Ολλανδίας (Πίνακας 39). Επίσης, η πλειοψηφία των ασκήσεων των ελληνικών και των ολλανδικών εγχειριδίων εξασκεί την φαντασία του μαθητή (Πίνακας 41), ενώ της Σιγκαπούρης την ανάλυση δεδομένων. Οι κυρίαρχες επιστημονικές πρακτικές διαφέρουν μεταξύ των τριών χωρών, αφού στην Ελλάδα είναι η ανάλυση και η ερμηνεία δεδομένων, στην Σιγκαπούρη η χρήση μαθηματικής και υπολογιστικής σκέψης και στην Ολλανδία η υποβολή ερωτημάτων. Ακόμα, η γνωστική απαίτηση της Ελλάδας και της Σιγκαπούρης είναι η «κατανόηση», αλλά στην Ολλανδία η «ανάλυση». Τέλος, σημαντική διαφορά υπάρχει στην πλειοψηφία του είδους των απαντήσεων. Στην Ολλανδία και την Σιγκαπούρη οι περισσότερες ασκήσεις είναι κλειστού τύπου απάντησης, ενώ στην Ελλάδα ανοικτού τύπου απάντησης.

Η παρούσα μελέτη έδωσε και άλλα ενδιαφέροντα αποτελέσματα, πέραν των ερευνητικών ερωτημάτων. Λόγου χάρη, μια εικόνα στην εκφώνηση ή ένα δενδροδιάγραμμα, κατανοήθηκε σε μεγάλο βαθμό από την πλειοψηφία των ερωτώμενων και βοήθησε να δώσουν σωστές απαντήσεις (Πίνακας 25 και διάγραμμα

8.11 αντίστοιχα). Επίσης, σημαντικό είναι, ότι η πλειοψηφία των συμμετεχόντων στην έρευνα, αντεπεξήλθε καλύτερα στις ερωτήσεις συνδυαστικής, από ότι στις ερωτήσεις Πιθανότητας. Αυτό δικαιολογείται από τα πλεονεκτήματα της οπτικοποίησης στην διδακτική των πιθανοτήτων. Έτσι, οι διδακτικές παρεμβάσεις στον κλάδο των στοχαστικών μαθηματικών μπορούν να βελτιωθούν μέσα από τις οπτικές αναπαραστάσεις, αλλά και την δημιουργία κινήτρων μάθησης στους μαθητές.

Ακόμα, αν το σχολικό εγχειρίδιο της Σιγκαπούρης θεωρηθεί ως πρότυπο, τόσο λόγω των επιδόσεων των μαθητών της χώρας στους διεθνής διαγωνισμούς PISA και TIMSS (Mullis et al., 2015; OECD, 2019), όσο και λόγω της χρήσης τους σε πολλές χώρες και συγκριτικές μελέτες ανά τον κόσμο (Badger, 2013; Cai et al., 2011; Erbaş et al., 2012; Safrudiannur, & Rott, 2018; Toprak & Özmantar, 2019; Yang et al., 2017), τότε προκύπτουν ενδιαφέρουσες προτάσεις για τα σχολικά εγχειρίδια της Ελλάδας και της Σιγκαπούρης, οι οποίες ενδεχομένως να βελτιώσουν μελλοντικά την επίδοση των μαθητών των δύο χωρών στους διεθνής διαγωνισμούς. Λόγου χάρη, το παράδειγμα της Σιγκαπούρης δείχνει, ότι α) δεν χρησιμοποιούνται συγκεκριμένες τεχνικές κατά την ανάπτυξη των κεφαλαίων (πίνακας 8), β) υπάρχει μια σχετική ισορροπία στην δυσκολία των ασκήσεων (πίνακας 39), γ|) το πλήθος των δραστηριοτήτων διατηρείται σε κανονικά πλαίσια (πίνακας 40), δ) χρησιμοποιούνται συγκεκριμένες διαδικασίες επίλυσης ασκήσεων βασισμένες στην πραγματολογική γνώση των εννοιών (πίνακες 41 και 42), ε) δεν εμπλέκονται πολλά πλαίσια εφαρμογής παρά μόνο της καθημερινότητας των μαθητών (πίνακας 43), ζ) οι ασκήσεις και τα απεικονιστικά στοιχεία κινούνται κυρίως σε ασθενή επίπεδα ταξινόμησης (πίνακας 44 και 45), ενώ η) η τυπικότητα είναι χαμηλή για το γραπτό κείμενο και μέση για τα απεικονιστικά στοιχεία, θ) χρησιμοποιούνται συγκεκριμένες και περιορισμένες επιστημονικές πρακτικές και γνωστικές απαιτήσεις (πίνακας 46 και 47), ι) η χρήση των απεικονιστικών στοιχείων είναι κυρίως ερμηνευτικού ρόλου, με απουσία ρεαλιστικών και συνδυαστικών εικόνων (πίνακας 48) και τέλος κ) το είδος των απαιτούμενων απαντήσεων είναι κατά την πλειοψηφία τους κλειστές απαντήσεις.

9.2 Απόρροια της Έρευνας στην Εκπαίδευση και Περιορισμοί Μελέτης

Τα αποτελέσματα της έρευνας φανερώνουν αρκετά προβλήματα κατά την διδακτική των Πιθανοτήτων. Η μελέτη αυτή, αρχικά παρουσιάζεται η σημαντικότητα χρήσης των Πιθανοτήτων σε καθημερινές καταστάσεις και αποφάσεις. Αυτό γίνεται τόσο μέσα από την βιβλιογραφική ανασκόπηση και τις εφαρμογές των Πιθανοτήτων ανά τις επιστήμες, όσο και από την παραδοχή των συμμετεχόντων της έρευνας. Γεγονός που οδηγεί στο συμπέρασμα για την σημαντικότητα της διδακτικής της θεωρίας των Πιθανοτήτων.

Έπειτα, μελετώνται οι γνώσεις των συμμετεχόντων της έρευνας, αλλά και η άποψη τους σχετικά με την διδακτική των πιθανοτήτων κατά τα σχολικά τους χρόνια. Σε αυτό το σημείο, τα αποτελέσματα δείχνουν, ότι σχεδόν το 50% των ερωτώμενων δεν θυμούνται να διδάχτηκαν Πιθανότητες (διάγραμμα 8.2), ή θυμούνται ελάχιστα. Μάλιστα, οι γνώσεις των ερωτώμενων σε αυτό το κομμάτι κρίνονται ελλιπής με βάση το σύνολο των αποτελεσμάτων στις δραστηριότητες του ερωτηματολογίου. Γεγονός, που επιβεβαιώνεται και από την άποψη των συμμετεχόντων στις συνεντεύξεις, ότι οι πιθανότητες στην τάξη και στο κομμάτι της ύλης που βρίσκονται, διδάσκονται ελάχιστα και με λιγότερη προσοχή από την πρέπουσα, λόγω απουσίας τους από την τελική εξεταστέα ύλη. Έτσι, θεωρείται υψίστης σημασίας η βελτίωση της εκπαιδευτικής διαδικασίας σε αυτό το μαθηματικό κλάδο.

Η έρευνα παρουσιάζει τα ζητούμενα των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών των μαθηματικών στο κομμάτι των Πιθανοτήτων και μέσα από τις συνεντεύξεις σε εκπαιδευτικούς, διεξάγει το συμπέρασμα για εξορθολογισμό της διδακτέας ύλης στην Δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Αποτέλεσμα, που αποτελεί βασικό κίνητρο για την αναπροσαρμογή των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών των μαθηματικών. Σε αυτό το σημείο, αξίζει να αναφερθεί, ότι τα νέα αναλυτικά προγράμματα σπουδών της Ελλάδας περί τα μαθηματικά, ξεχωρίζουν την στατιστική και τις πιθανότητες και επεκτείνουν μάλιστα την διδακτική τους σε όλες τις σχολικές βαθμίδες. Επίσης, η συγκεκριμένη έρευνα δείχνει, ότι τα σχολικά βιβλία πρέπει να ενημερωθούν στις διδακτικές προτάσεις που συστήνονται από την παγκόσμια βιβλιογραφία και οι εκπαιδευτικοί πρέπει να επιμορφωθούν στις διδακτικές παρεμβάσεις με αντικείμενο τις Πιθανότητες. Μάλιστα, ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δίνεται και στην δομή, την οργάνωση, αλλά και τον τρόπο παρουσίασης των νέων εννοιών των διδακτικών βιβλίων, καθώς είναι παράγοντες που επηρεάζουν την μάθηση.

Η μελέτη των σχολικών εγχειριδίων, δείχνει αρκετές ομοιότητες, αλλά και διαφορές στα σχολικά βιβλία των χωρών Ελλάδας, Σιγκαπούρης και Ολλανδίας. Σημαντικό είναι να διατηρηθεί ένας αριθμός ασκήσεων στα σχολικά βιβλία κάθε χώρας, που να δίνει στον μαθητή τις κατάλληλες ευκαιρίες, αλλά και τον κατάλληλο χρόνο μάθησης. Επίσης, η διαφορά κατάταξης των τριών αυτών χωρών στους διεθνής διαγωνισμούς TIMMS και PISA, φανερώνουν το σχολικό βιβλίο της Σιγκαπούρης ως πρότυπο για τα βιβλία των δύο άλλων χωρών. Βέβαια, κάθε χώρα οφείλει να βελτιώσει το σχολικό της εγχειρίδιο, σύμφωνα με τις βασικές δομές του εκπαιδευτικού της συστήματος, αλλά και της κουλτούρας της.

Επιπροσθέτως με όλα τα παραπάνω, η παρούσα μελέτη συγκροτεί και συμπληρώνει έναν κατάλογο παραγόντων για την μελέτη και την συγκριτική ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων. Ο κατάλογος των παραγόντων αυτών, μπορεί έρχεται να καλύψει και να συμπληρώσει ένα κενό στην διεθνή βιβλιογραφία, σχετικά με τις μελέτες σχολικών εγχειριδίων, αλλά και βιβλίων θετικών επιστημών γενικότερα. Η έρευνα στα σχολικά εγχειρίδια, αλλά και στην συγκριτική ανάλυση σχολικών εγχειριδίων από διάφορες χώρες, γνωρίζει τα τελευταία χρόνια μεγάλη ανάπτυξη και τα δεδομένα που εξάγονται από τέτοιου είδους έρευνες κατορθώνουν να προσφέρουν πολύτιμές, αλλά και ενδιαφέρουσες πληροφορίες για την αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών, των ίδιων των βιβλίων, αλλά και των διδακτικών πρακτικών.

Συμπερασματικά, η παρούσα μελέτη μπορεί να αξιοποιηθεί τόσο από έναν ανειδίκευτο αναγνώστη, ώστε να κατανοήσει τις βασικές πτυχές, τις χρήσεις και την σημαντικότητα μιας θεωρίας όπως οι Πιθανότητες, όσο και από έναν εκπαιδευτικό για να δημιουργήσει ένα κίνητρο μάθησης στους μαθητές, να βελτιώσει την διδακτική του προσέγγιση στο κομμάτι των Πιθανοτήτων, αλλά και να χρησιμοποιήσει τον διδακτικό του χρόνο και το προσφερόμενο διδακτικό εποπτικό μέσο στο βέλτιστο δυνατό σημείο. Μάλιστα, σημαντικά είναι τα ευρήματα της έρευνας και για τη βελτιστοποίηση της δομής του σχολικού προγράμματος σπουδών, των προτάσεων διδασκαλίας του ΙΕΠ και των σχολικών εγχειριδίων.

Στο διδακτικό κομμάτι, η εργασία αυτή προσδιορίζει βασικές αρχές και παραδείγματα, ώστε να εξοπλισθούν οι μαθητές με τις κατάλληλες εμπειρίες και ικανότητες για να μάθουν για την χρήση και την έννοια της Πιθανότητας. Γεγονός που παρέχει μια επιστημονική βάση για την αποτελεσματική διδασκαλία της θεωρίας των Πιθανοτήτων. Επίσης, οι ερευνητές και οι εκπαιδευτικοί, σχετικά με την κατανόηση της πιθανότητας των παιδιών, οφείλουν να δώσουν πολύ περισσότερη προσοχή στην κατανόηση των πιθανοτικών εννοιών από τους μαθητές, καθώς ο κλάδος αυτός των μαθηματικών αποτελεί το πλέον πιο εύχρηστο διδακτικό αντικείμενο μαθηματικών στην καθημερινότητα.

Σε αυτό το σημείο καλό είναι να αναφερθούν και κάποιοι περιορισμοί που προέκυψαν κατά την μελέτη τόσο της βιβλιογραφίας, όσο και της έρευνας. Αρχικά, αξίζει να σημειωθεί ότι οι βιβλιογραφίες που μελετήθηκαν ήταν κυρίως στην ελληνική και την αγγλική γλώσσα, καθώς και πολύ λίγες στην κινέζικη και την τούρκικη γλώσσα. Ακόμα, τα άρθρα, τα περιοδικά, τα βιβλία και γενικότερα το υλικό που μελέτησε ο ερευνητής ήταν κατά κύριο λόγο όσα βρίσκονται ανεβασμένα στο διαδίκτυο, αλλά και έχει στην κατοχή της η βιβλιοθήκη του Πανεπιστημίου Αιγαίου στο παιδαγωγικό τμήμα δημοτικής εκπαίδευσης. Κατά συνέπεια δεν ήταν εφικτό να μελετηθούν βιβλιογραφίες από συνέδρια και ημερίδες, που δεν υπάρχουν τα πρακτικά τους στο διαδίκτυο. Επίσης, περιορισμό της μελέτης αποτέλεσε η έλλειψη παρόμοιων ερευνών στο κομμάτι των Πιθανοτήτων, αφού η βιβλιογραφία επεκτεινόταν περισσότερο σε πιο παλιούς και πιο διαδεδομένους κλάδους των μαθηματικών, όπως η άλγεβρα και η γεωμετρία. Τέλος, ένας ακόμα περιορισμός της μελέτης που θα αποτελούσε ιδιαίτερο ενδιαφέρον, είναι η χρήση των σχολικών βιβλίων της Σιγκαπούρης και της Ολλανδίας σε Έλληνες μαθητές, ώστε να εξοπλιστεί η έρευνα και με εμπειρικά δεδομένα σε αυτό το κομμάτι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10^{Ο}: ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Φτάνοντας στον επίλογο της εργασίας αυτής, ο αναγνώστης θα πρέπει να έχει κατανοήσει την χρησιμότητα και την σημαντικότητα των πιθανοτήτων σε καθημερινές καταστάσεις, αλλά και σε άλλες επιστήμες. Η απήχηση της θεωρίας τους στον φυσικό κόσμο, τις προσωπικές αποφάσεις, τις ανθρώπινες συμπεριφορές, τα τυχερά παιχνίδια, την αξιολόγηση του κίνδυνου και τις προβλέψεις, τοποθετεί τις Πιθανότητες στην κορυφή της λίστας των χρηστικών μαθηματικών, τόσο για έναν ειδήμονα, όσο και για έναν αρχάριο (Batanero et al., 2016; Gal, 2005; Greer & Mukhopadhyay, 2005). Μάλιστα, γεγονός είναι, ότι ο πιθανοτικός συλλογισμός συμπληρώνει τη λογική, την αιτιολόγηση και τη στατιστική συλλογιστική (Batanero et al., 2016).

Τα εξαγόμενα της συγκεκριμένης εργασίας δείχνουν μια τάση των ερωτώμενων να θέλουν και να προσπαθούν να αναζητούν «την ασφάλεια» των πιθανοτήτων κατά την λήψη μιας απόφασης, ωστόσο η έλλειψη γνώσεων πιθανότητας, το συναίσθημα και οι λανθασμένες υπάρχουσες αντιλήψεις, επηρεάζουν την τελική τους επίδοση. Αυτό δικαιολογείται, αφού πολλοί από αυτούς αναφέρουν έλλειψη γνώσεων στις πιθανότητες, δεν θυμούνται να διδάχθηκαν πιθανότητες, αλλά και πολλοί που θυμούνται να διδάχθηκαν αυτήν την θεωρία, δεν ήταν ευχαριστημένοι από τον τρόπο διδαχής τους και το σχολικό εγχειρίδιο. Μάλιστα, τα αποτελέσματα της συνέντευξης επιβεβαιώνουν την απουσία διδασκαλίας πιθανοτήτων λόγω έλλειψης χρόνου και τα αποτελέσματα της σύγκρισης των σχολικών εγχειριδίων εμφανίζουν την ανάγκη βελτιώσεων στην δομή και τις δραστηριότητες του σχολικού εγχειριδίου της Ελλάδας.

Συνέπεια των παραπάνω είναι η διδακτική των Πιθανοτήτων στην εκπαίδευση να είναι δικαιολογημένη από μόνη της και όχι απλώς ως ένα άλλο εργαλείο για να ανοίξει ο δρόμος για τις συμπερασματικές μεθόδους των στοχαστικών μαθηματικών γενικότερα (Batanero et al., 2016). Ωστόσο, πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή κατά την διδακτική τους παρέμβαση, αφού υπάρχουν αρκετά προβλήματα κατανόησης και παρανόησης σε μεγάλο ποσοστό του πληθυσμού, αλλά και στην ολοκλήρωση των προτεινόμενων διδακτικών ωρών των ΑΠΣ. Βέβαια, η διδακτική παρέμβαση για μια πιθανοτική έννοια δεν είναι απλή υπόθεση. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να είναι πλήρως καταρτισμένος με γνώσεις Πιθανοτήτων (Johansson & Hansen, 2019) και να γνωρίζει τις αντιλήψεις των μαθητών για την δεδομένη έννοια, ώστε να δομήσει την νέα έννοια στις υπάρχουσες αντιλήψεις (Gallistel, 2014). Τα σχολικά βιβλία οφείλουν να δίνουν τις απαραίτητες ευκαιρίες μάθησης στον μαθητή, όντας πλούσια σε υλικό και παραδείγματα (Hadar, 2017). Ακόμα, άλλες προκλήσεις που πρέπει να καλυφθούν, ώστε να υπάρξει σημαντική βελτίωση στην διδακτική των Πιθανοτήτων είναι η εμβάθυνση της ιστορικής - πολιτικής ανάλυσης του αντικειμένου και η βελτίωση της σύνδεσης των διδακτέων πιθανοτικών θεωριών με την καθημερινή πραγματικότητα (Greer & Mukhopadhyay, 2005).

Επιπροσθέτως, αξίζει να σημειωθεί, ότι η έρευνα για την σύγκριση των διδακτικών εγχειριδίων των τριών χωρών, έγινε στο πνεύμα της ανάλυσης – σύγκρισης διαφορών και ομοιοτήτων, ώστε να είναι χρήσιμή στο μέλλον για μια πιθανή αναμόρφωση ή ανάπτυξη κάποιου νέου διδακτικού εγχειριδίου. Μάλιστα, μια συγκριτική μελέτη σχολικών εγχειριδίων μπορεί να θεωρείται και ως μελέτη προγράμματος σπουδών, αφού τα βιβλία αντιπροσωπεύουν διαφορετικά προγράμματα σπουδών για τις τρεις χώρες. Ακόμα, η παρούσα έρευνα μπορεί να θεωρηθεί, ότι συγκροτεί ένα κατάλογο παραγόντων ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων, οι οποίοι επηρεάζουν τα διδακτικά αποτελέσματα του βιβλίου. Η ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων που πραγματοποιήθηκε στην συγκεκριμένη εργασία, μπορεί να ανοίξει τον δρόμο για περαιτέρω μελέτες, αναλύσεις και βελτιώσεις των σχολικών εγχειριδίων των θετικών επιστημών γενικότερα.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθούν ορισμένες προτάσεις που διεξάγονται άμεσα ή έμμεσα με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας. Στόχος των προτάσεων αυτών δεν είναι να κρίνουν την υπάρχουσα κατάσταση, αλλά να βελτιστοποιήσουν τις αντιλήψεις και τις γνώσεις των μαθητών – μελλοντικών εργαζομένων.

Προτάσεις προς τους εκπαιδευτικούς:

- Να φροντίζουν να είναι πλήρως καταρτισμένοι στο διδακτικό αντικείμενο που μέλλετε να διδάξουν.
- Να δείχνουν με παραδείγματα την χρησιμότητα της έννοιας που πρόκειται να διδάξουν, ώστε να επικεντρωθεί η προσοχή του μαθητή.
- Να αναζητούν τις υπάρχουσες αντιλήψεις των μαθητών, ώστε να διδάσκουν την νέα έννοια πάνω σε αυτές.

- Να επιλέγουν σωστά τις δραστηριότητες τους, ώστε να συνδέουν άμεσα τις νέες έννοιες με την καθημερινότητα των μαθητών.
- Να οργανώνουν προσεκτικά τον χρόνο τους, ώστε να προλαβαίνουν μέσα σε ένα διδακτικό έτος την ύλη τους, χωρίς να παραλείπονται διδακτικά αντικείμενα.
- Να διεξάγουν πειράματα τύχης κατά την διδαχή της Πιθανότητας, ώστε ο μαθητής να μπει στην λογική της στοχαστικής διαδικασίας.

Προτάσεις προς τη Πολιτεία και τους θεσμούς της εκπαίδευσης:

- Τα προτεινόμενα αναλυτικά προγράμματα σπουδών να αναμορφωθούν σύμφωνα με τις δυνατότητες του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος και των μαθητών του.
- Οι προτεινόμενες ώρες διδασκαλίας ανά κεφάλαιο να επανεξετασθούν, ώστε να είναι εφικτή η ολοκλήρωση της διδακτέας ύλης από τον εκπαιδευτικό στα πλαίσια ενός διδακτικού έτους.
- Σε συνεργασία με τους εκπαιδευτικούς να γίνει ένας σωστός εξορθολογισμός της διδακτέας ύλης κάθε τάξεως.
- Να επιμορφωθούν οι εκπαιδευτικοί, αποκτώντας κατάλληλες δεξιότητες για να μπορούν να διδάξουν σύμφωνα με νέες διδακτικές μεθόδους έναντι των παραδοσιακών πρακτικών.
- Να αναπτυχθεί εποπτικό και τεχνολογικό υλικό, ώστε να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς στην διδασκαλία των πιθανοτήτων. Λόγου χάρη, βίντεο ή εφαρμογές για διεξαγωγή πειραμάτων τύχης.
- Τα σχολικά εγχειρίδια να εμπλουτιστούν με δραστηριότητες, δίνοντας έμφαση σε αυτές που συνδέουν τις διδακτέες έννοιες με την καθημερινότητα του μαθητή.

Η συγκεκριμένη έρευνα λοιπόν, απαντάει σε όλα της τα ερευνητικά ερωτήματα και ανοίγει έναν νέο γνωστικό ορίζοντα στην αξιοποίηση μελετών περί αντιλήψεων αλλά και απόψεων των διδασκομένων, καθώς επίσης επεκτείνει την επιστημονική γνώση για τους παράγοντες συγκριτικής ανάλυσης σχολικών εγχειριδίων. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της, καταφέρνει σε αντίθεση με άλλες έρευνες του παρελθόντος, να αναδείξει την χρησιμότητα των Πιθανοτήτων τόσο μέσα από παραδείγματα και εφαρμογές άλλων επιστημών, όσο και δίνοντας έναν πλήρη κατάλογο πλεονεκτημάτων των γνώσεων της θεωρίας, δημιουργώντας έτσι ένα ακριβές κίνητρο μάθησης για τον μη ειδικευμένο αναγνώστη. Προσφέρει νέες γνώσεις στην διεθνή επιστημονική κοινότητα, τόσο δείχνοντας την επιρροή των πιθανοτήτων στις αποφάσεις ενός ατόμου, όσο και αναδεικνύοντας το συναίσθημα ως ισχυρό λόγο για μη εμπιστοσύνη στις πιθανότητες. Επίσης, είναι πρώτη έρευνα που μελετάει τους παράγοντες βελτίωσης της διδασκαλίας των Πιθανοτήτων, μέσα από τις απόψεις των ερωτώμενων. Μάλιστα, είναι η μια από τις λίγες έρευνες στο συγκεκριμένο πεδίο, που συνδέει τα ζητούμενα του αναλυτικού προγράμματος σπουδών για τις πιθανότητες, με την διδακτική πραγματικότητα της τάξης. Αυτό επιτυγχάνεται εις διπλούν, αφού η συγκεκριμένη μελέτη ελέγχει τόσο τις γνώσεις που αποκόμισαν κατά την σχολική τους εμπειρία, άνθρωποι από διάφορες επαγγελματικές ασχολίες, όσο και την εμπειρία των εκπαιδευτικών σχετικά με την διδασκαλία των Πιθανοτήτων. Επίσης, η παρούσα μελέτη αποδεχόμενη την άποψη περί σημαντικών ερευνητικών αποτελεσμάτων στην σύγκριση των σχολικών εγχειριδίων, αποτελεί την πρώτη ερευνητική προσπάθεια για μια μεθοδική και αναλυτική ανάλυση – σύγκριση σχολικών εγχειριδίων θετικών επιστημών. Με άλλα λόγια, η παρούσα έρευνα, συμπληρώνει την διεθνή βιβλιογραφία σχετικά με τους παράγοντες σύγκρισης των σχολικών εγχειριδίων, αλλά επεκτείνει και την διεθνή επιστημονική γνώση στην σημασία της επιλογής των δραστηριοτήτων που απαρτίζουν ένα σχολικό βιβλίο μαθηματικών, αφού αυτές επηρεάζουν τις προσφερόμενες στον μαθητή, ευκαιρίες μάθησης. Μάλιστα, κατορθώνει μέσα από την σύγκριση των σχολικών εγχειριδίων που πραγματοποίησε, να προτείνει βελτιώσεις τόσο στο ελληνικό σχολικό βιβλίο, όσο και γενικότερες προτάσεις και καλές πρακτικές για τους συγγραφείς νέων εκπαιδευτικών βιβλίων μαθηματικών.

Τέλος, ορισμένες μελλοντικές προτάσεις προς επέκταση της συγκεκριμένης έρευνας, θα μπορούσαν να είναι οι παρακάτω. Πρώτιστος, να γίνει μια έρευνα σε διάφορες σχολές, σχετικά με την ύπαρξη του μαθήματος «Πιθανότητες», αλλά και τις απόψεις των φοιτητών αυτών για την χρησιμότητα της θεωρίας, ώστε να εξακριβωθεί με μεγαλύτερη σαφήνεια η κατανόηση της χρηστικότητας των Πιθανοτήτων σε άλλες επιστήμες, μέσα από τις απόψεις των εκπαιδευομένων σε αυτές. Επίσης, σε μια τέτοια έρευνα, καλό θα ήταν να εξεταστεί και το επίπεδο των γνώσεων που αποκτούν οι φοιτητές στα πιθανοτικά ζητήματα, ώστε αυτό να μπορέσει να βελτιωθεί, αλλά και να αναδειχθούν άμεσες εφαρμογές από διάφορες καθημερινές ασχολίες. Επίσης, σημαντικές θα ήταν οι έρευνες σχετικά με τις διαφορές των σχολικών εγχειριδίων και σε άλλα κεφάλαια μαθηματικών, ώστε να διεξαχθεί ένα γενικό συμπέρασμα για τις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρουν τα ελληνικά, αλλά και άλλα σχολικά εγχειρίδια. Ενδιαφέρον θα αποτελούσε ακόμα, μια έρευνα με μεγαλύτερη συμμετοχή εκπαιδευτικών μαθηματικών σχετικά με την αξιοποίηση των ΑΠΣ στην διδακτική πραγματικότητα και σε άλλους τομείς των μαθηματικών. Μάλιστα, θα μπορούσε να επεκταθεί μια τέτοια έρευνα και στο προσφερόμενο επίπεδο μάθησης των διδακτικών εγχειριδίων και κατά πόσον αυτό αντικατοπτρίζεται από την πλειοψηφία των μαθητών στα ελληνικά σχολεία. Κλείνοντας, μια μελλοντική προοπτική που αποτελεί πρόκληση για τον ερευνητή, θα μπορούσε να ήταν η έρευνα για την επίδοση των μαθητών σε πιθανοτικά - στατιστικά προβλήματα, έπειτα από την διδακτική των θεωριών των δύο μαθηματικών κλάδων, με τα σχολικά εγχειρίδια της Σιγκαπούρης, τα οποία αποτελούν πρότυπα για πολλές χώρες. Εξοπλίζοντας έτσι έρευνες σαν την δεδομένη και με εμπειρικά δεδομένα, τα οποία είναι πολύ σημαντικά για την δημιουργία καθολικών προτάσεων βελτίωσης των διδακτικών εγχειριδίων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abramovich, S., & Nikitin, Y. (2017). Teaching Classic Probability Problems with Modern Digital Tools. *Computers In The Schools*, *34*(4), 318-336. https://10.1080/07380569.2017.1384687

Aiken, L. R. (1973). Ability and Creativity in Mathematics. *Review of Educational Research*, *43*(4), 405–432. https://10.3102/00346543043004405

Aizikovitsh-Udi, E., & Amit, M. (2011). Developing the skills of critical and creative thinking by probability teaching. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 15, 1087–1091.* https://10.1016/j.sbspro.2011.03.243

Alkahtani, M. (2017). Decision Dimensions and Selecting Appropriate Strategy: An Analysis of Decision Making in Saudi Arabian Governmental Organizations. *International Journal Of Applied Business And Economic Research*, *15*(5), 477-488.

Ang, K. C. (2006). Mathematical modelling, technology and H3 mathematics. *The Mathematics Educator*, *9*(2), 33-47.

Avlijas, G., Milicevic, N., & Golijanin, D. (2018). Influence of store characteristics on product availability in retail business. *E+M Ekonomie A Management*, *21*(4), 195-206. https://10.15240/tul/001/2018-4-013

Badger, J. (2013). Teaching Singapore Math: Evaluating Measures to Effectively Teach and Implement a New Mathematics Curriculum in 21 Elementary Schools. *Gateways To Teacher Education*, *14*(1), 23-41.

Baki, A., & Gökçek, T. (2005). Comparison of the Development of Elementary Mathematics Curriculum Studies in Turkey and The U.S.A. *Educational Sciences: Theory & Practice*, *5*(2), 580-588.

Ball, W. (2012). *Short Account of the History of Mathematics*. Dover Publications.

Batanero, C. & Chernoff, E. (2017). Teaching and Learning of Probability. In *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 439-442). Switzerland; Springer International Publishing.

Batanero, C. (2013). Teaching and learning probability. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 491-496). Springer.

Batanero, C. and Chernoff, E. (2016). *Teaching and learning stochastics*. Springer International Publishing.

Batanero, C., & Chernoff, E. (2018). *Teaching and Learning Stochastics*. Springer.

Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., & Sánchez, E. (2016). Research on Teaching and Learning Probability. *Research on Teaching and Learning Probability*, 1–33. https://10.1007/978-3-319-31625-3_1

Batanero, C., Godino, J. D., & Roa, R. (2004). Training Teachers to Teach Probability. *Journal of Statistics Education, 12(1).* https://10.1080/10691898.2004.11910715

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The Nature of Chance and Probability. In J. Graham (Eds.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 15-37). Springer Science and Business Media, Inc.

Bayés, A. (2018). Reasoning in Decision Making Under Uncertainty and Decisions of Risk in a Game of Chance. In C. Batanero & E. Chernoff (Eds.), *Teaching and learning stochastics* (pp. 201-221). Springer International Publishing.

Ben-Zvi, D. (2000). Toward Understanding the Role of Technological Tools in Statistical Learning. *Mathematical Thinking and Learning*, 2, 127-155.

Best, R., & Freund, A. (2018). Age, Loss Minimization, and the Role of Probability for Decision-Making. *Gerontology*, 64(5), 475-484. https://10.1159/000487636

Bichpuriya, Y. K., Soman, S. A., & Subramanyam, A. (2014). Non-parametric probability density forecast of an hourly peak load during a month. *2014 Power Systems Computation Conference*. https://doi.org/10.1109/pscc.2014.7038464

Biehler, R. (1991). Computers in probability education. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 169–211). Kluwer.

Biggs, B., & Collins, F. (1982). *Evaluating the quality of learning: SOLO taxonomy*. Academic Press.

Bigras, G., & de Marval, F. (2005). The probability for a pap test to be abnormal is directly proportional to HPV viral load: Results from a Swiss study comparing HPV testing and liquid-based cytology to detect cervical cancer precursors in 13842 women. *British Journal of Cancer*, *93*(5), 575–581. https://doi.org/10.1038/sj.bjc.6602728

Birenbaum, M., Tatsuoka, C., & Xin, T. (2005). Large-scale diagnostic assessment: comparison of eighth graders' mathematics performance in the United States, Singapore and Israel. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 12*(2), 167–181. https://10.1080/09695940500143852

Bloom, B. S. (1956). *Taxonomy of Educational Objectives, Handbook I: The Cognitive Domain.* David McKay Co Inc.

Bogdan, M., & Sava, A. (2018). Supply Chain Finance, A Solution To Improve Business Efficiency. *Applied Mathematics, Mechanics, And Engineering*, *61*(IV), 625-630.

Bonnett, L., & White, S. (2018). May the odds be ever in your favour. *Teaching Statistics*, 40(3), 94-97. https://10.1111/test.12162

Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2010). Research and Developments in Probability Education Internationally. In *British Congress for Mathematics Education* (pp. 41-48). England;

Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2018). Reasoning with Risk: Teaching Probability and Risk as Twin Concepts. *Teaching And Learning Stochastics*, 3-22. https://10.1007/978-3-319-72871-1_1

Bosman, L., & Zagenczyk, T. (2011). Revitalize Your Teaching: Creative Approaches to Applying Social Media in the Classroom. *Social Media Tools and Platforms in Learning Environments,* 3–15. https://10.1007/978-3-642-20392-3_1

Brand, B., Glasson, G., & Green, A. (2006). Sociocultural Factors Influencing Students' Learning in Science and Mathematics: An Analysis of the Perspectives of African American Students. *School Science And Mathematics*, *106*(5), 228-236. https://10.1111/j.1949-8594.2006.tb18081.x

Bruner, J. (1960). *The process of education*. Cambridge. Harvard University Press.

Brunkalla, K. (2009). How to increase mathematical creativity – an experiment. *The Montana Mathematics Enthusiast, 6*(1), 257-266.

Bryant, P., & Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability A literature review (full report)*. Nuffield Foundation.

Bryant, P., Nunes, T., Evans, D., Barros, R., Gottardis, L. & Terlektsi, E. (2018). What 9- and 10- Year Old Pupils Already Know and What They Can Learn About Randomness. In C. Batanero & E. Chernoff (Eds.), *Teaching and learning stochastics* (pp. 201-221). Springer International Publishing.

Burrill, G., & Biehler, R. (2011). Fundamental Statistical Ideas in the School Curriculum and in Training Teachers. *New ICMI Study Series,* 57–69. https://10.1007/978-94-007-1131-0_10

Cai, J., Ng, S. F., & Moyer, J. C. (2011). Developing Students' Algebraic Thinking in Earlier Grades: Lessons from China and Singapore. *Advances in Mathematics Education,* 25–41. https://10.1007/978-3-642-17735-4_3

Cameron, A., & Baldock, F. (1998). A new probability formula for surveys to substantiate freedom from disease. *Preventive Veterinary Medicine*, *34*(1), 1-17. https://10.1016/s0167-5877(97)00081-0

Chan, C. M. E. (2013). Initial Perspectives of Teacher Professional Development on Mathematical Modelling in Singapore: Conceptions of Mathematical Modelling. *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice,* 405–413. https://10.1007/978-94-007-6540-5_34

Chan, E. C. M. (2009). Mathematical modelling as problem solving for children in the Singapore mathematics classrooms. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia,* 32(1), 36-61.

Charles-Cadogan, G. (2018). Probability interference in expected utility theory. *Journal Of Mathematical Economics*, *78*, 163-175. https://10.1016/j.jmateco.2018.03.006

Chen, J., & Mu, Z. (2010). The Cross-national Comparison of Pre-service Mathematics Teacher Education and Curriculum Structure. *Journal Of Mathematics Education*, *3*(1), 119-136.

Cohen, L. & Manion, L. (1994). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Μεταίχμιο.

Cooke, W.E. (1906). Forecasts and Verifications in Western Australia. *Monthly Weather Review***,** 34, 23-24.

Cousins, S., & Shawe-Taylor, J. (2017). High-probability minimax probability machines. *Machine Learning*, *106*(6), 863-886. https://10.1007/s10994-016-5616-2

Croucher, J. (1986). The Conditional Probability of Winning Games of Tennis. *Research Quarterly For Exercise And Sport*, *57*(1), 23-26. https://10.1080/02701367.1986.10605384

Czocher, J. (2016). Introducing Modeling Transition Diagrams as a Tool to Connect Mathematical Modeling to Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking And Learning*, *18*(2), 77-106. https://10.1080/10986065.2016.1148530

David, M. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International Statistical Review*, 65, 123-165.

Davis, J., Bhave, P., & Foley, K. (2008). Parameterization of N2O5 reaction probabilities on the surface of particles containing ammonium, sulfate, and nitrate. *Atmospheric Chemistry And Physics*, *8*(17), 5295-5311. https://10.5194/acp-8-5295-2008

Dawson, C. (2007). *A practical guide to research methods*. How To Books.

Dimopoulos, K., Koulaidis, V., & Sklaveniti, S. (2003). Towards an Analysis of Visual Images in School Science Textbooks and Press Articles about Science and Technology. *Research in Science Education*, 33(2), 189-216.

Drijvers, P., Kodde-Buitenhuis, H., & Doorman, M. (2019). Assessing mathematical thinking as part of curriculum reform in the Netherlands. *Educational Studies in Mathematics*. https://10.1007/s10649-019-09905-7

Eckert, A. & Nilsson, P. (2015). Introducing a symbolic interactionist approach on teaching mathematics: the case of revoicing as an interactional strategy in the teaching of probability. *Journal Of Mathematics Teacher Education*, 20(1), 31-48. https://10.1007/s10857-015-9313-z

Education System. (2020, January 4). *Ministry of Education Singapore*. https://www.moe.gov.sg/education/education-system

Emery, C., & Meeuwisse, W. (2001). Risk factors for groin injuries in hockey. *Medicine & Science In Sports & Exercise*, *33*(9), 1423-1433. https://10.1097/00005768-200109000-00002

Engel, J. & Orthwein, A. (2018). The Six Loses: Risky Decisions Between Probabilistic Reasoning and Gut Feeling. In C. Batanero & E. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics* (pp. 261-275). Springer International Publishing.

English, L. (2002). *Handbook of international research in mathematics education.* Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

English, L., & Watson, J. (2016). Development of Probabilistic Understanding in Fourth Grade. *Journal For Research In Mathematics Education*, *47*(1), 28. https://10.5951/jresematheduc.47.1.0028

Erbaş, A., Alacaci, C., & Bulut, M. (2012). A Comparison of Mathematics Textbooks from Turkey, Singapore, and the United States of America. *Educational Sciences: Theory & Practice*, *12*(3), 2324-2330.

Erbilgin, E. (2017). A comparison of the mathematical processes embedded in the content standards of Turkey and Singapore. *Research in Social Sciences and Technology, 2*(1),.

Eric, M., & Victoria G., B. (2018). Reducing risks in the construction enterprise under strategic leadership of the management. *Vestnik MGSU*, (11), 341-1348. https://10.22227/1997-0935.2018.11.1341-1348

European Parliament and the Council. (2006). *Recommendation of the European Parliament and of the Council of 18 December 2006 on key competences for lifelong learning.* http://eur-ex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM*, *45*(5), 633-646. https://10.1007/s11858-013-0539-x

Farrow, D., & Reid, M. (2012). The contribution of situational probability information to anticipatory skill. *Journal Of Science And Medicine In Sport*, *15*(4), 368-373. https://10.1016/j.jsams.2011.12.007

Ferrari, A., Cachia, R., & Punie, Y. (2009). Innovation and Creativity in Education and Training in the EU Member States: Fostering Creative Learning and Supporting Innovative Teaching. *JRC Technical Notes*. Publication of the European Community. http://ftp.jrc.es/EURdoc/JRC52374_TN.pdf

Feynman, R. (1951). The Concept of Probability in Quantum Mechanics. In *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (pp. 533-541). University of California Press.

Fischbein, E. & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1), 96–105.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics.* The Netherlands.

Flores-Mendoza, C., Ardila, R., Rosas, R., Lucio, M. E., Gallegos, M., & Reátegui Colareta, N. (2018). Intelligence, Problem Solving, and Creativity. *Intelligence Measurement and School Performance in Latin America, 43–61*. https://10.1007/978-3-319-89975-6_4

Forthmann, B., Wilken, A., Doebler, P., & Holling, H. (2016). Strategy Induction Enhances Creativity in Figural Divergent Thinking. *The Journal of Creative Behavior*. https://10.1002/jocb.159

Frankham, R., Ballou, J., Eldridge, M., Lacy, R., Ralls, K., Dudash, M., & Fenster, C. (2011). Predicting the Probability of Outbreeding Depression. *Conservation Biology*, *25*(3), 465-475. https://10.1111/j.1523-1739.2011.01662.x

Freudenthal, H. (1968). Why to Teach Mathematics so as to Be Useful. *Educational Studies in Mathematics,* 1, 3-8.

Freudenthal, *H.* (1970). The aims of teaching probability. In L. Rade (Eds.), *The teaching of probability and statistics* (pp. 1 5 1 - 168). Almqvist & Wiksell.

Freudenthal, H. (1977). Antwoord door Prof. Dr. H. Freudenthal na het verlenen van het eredoctoraat [Speech by Prof. H. Freudenthal upon being granted an honorary doctorate]. Euclides 52, p. 336-338

Furlan, S., Agnoli, F., & Reyna, V. (2016). Intuition and analytic processes in probabilistic reasoning: The role of time pressure. *Learning And Individual Differences*, *45,* 1-10. https://10.1016/j.lindif.2015.11.006

Gal, I. (2005). Towards "Probability Literacy" For All Citizens: Building Blocks and Instructional Dilemmas. In J. Graham (Eds.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 39-63). Springer Science and Business Media, Inc.

Gallistel, C., Krishan, M., Liu, Y., Miller, R. & Latham, P. (2014). The Perception of Probability. *Psychological Review, American Psychological Association,* 121 (1), 96–123.

Gill, P. (2018). Interpretation continues to be the main weakness in criminal justice systems: Developing roles of the expert witness and court. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Forensic Science*, e1321. https://10.1002/wfs2.1321

Ginsburg, A., & Leinwand, S. (2005). Singapore Math: Can It Help Close The U.S. Mathematics Learning Gap?. In *CSMC's First International Conference on Mathematics Curriculum*. Chicago.

Girotto, V., Fontanari, L., Gonzalez, M., Vallortigara, G., & Blaye, A. (2016). Young children do not succeed in choice tasks that imply evaluating chances. *Cognition*, *152,* 32-39. https://10.1016/j.cognition.2016.03.010

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. & Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Stud: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education*. ICMI and IASE.

Goetz, E. M. (1989). The Teaching of Creativity to Preschool Children. *Handbook of Creativity, 411–428.* https://10.1007/978-1-4757-5356-1_23

Goldstein, R. (2006). *Αιχμάλωτος των Μαθηματικών: Ο Κουρτ Γκέντελ και το θεώρημα της μη πληρότητας.* (Ε. Πισσία, μεταφρ.). Τραύλος (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε 2005).

Graham, J. & Thornton, C. (2005). An Overview of Research Into The Teaching and Learning of Probability. In J. Graham (Eds.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 65-92). Springer Science and Business Media, Inc.

Graham, R., Knuth, D., Patashnik, O. and Liu, S. (1989). Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science. *Computers in Physics*, 3(5), p.106.

Gras, R. & Kuntz, P. (2008). An overview of the Statistical Implicative Analysis (SIA) development. *Studies in Computational Intelligence (SCI)*, 127, 11 – 40.

Gras, R. (1995). Ανάλυση ενός ερωτηματολογίου με τη Συνεπαγωγική Μέθοδο. Στου Α. Γαγάτση (Εκδ.) *Διδακτική και Ιστορία των Μαθηματικών* (σσ. 97-109). Θεσσαλονίκη: Erasmus ICP-94-G-2011/11.

Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: A mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal Of Curriculum Studies*, *32*(6), 777-796. https://10.1080/00220270050167170

Gravemeijer, K., Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 111–29.

Greer, B. & Mukhopadhyay, S. (2005). Teaching and Learning the Mathematization of Uncertainty: Historical, Cultural, Social and Political Contexts. In J. Graham (Eds.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 297-324). Springer Science and Business Media, Inc.

Greer, B. (2001). Understanding probabilistic thinking: the legacy of Efraim Fischbein. *Educational Studies in Mathematics*, 45, 15–33.

Grimit, E., Gneiting, T., Berrocal, V., & Johnson, N. (2006). The continuous ranked probability score for circular variables and its application to mesoscale forecast ensemble verification. *Quarterly Journal Of The Royal Meteorological Society*, *132*(621C), 2925-2942. https://10.1256/qj.05.235

Gurría, A. (2018). *PISA 2015 Results in Focus.* OECD.

Hadar, L. L. (2017). Opportunities to learn: Mathematics textbooks and students' achievements. *Studies in Educational Evaluation*, 55, 153–166.

Hansson, S. O. (2007). Risk. In E. N. Zalta (Eds.), *Stanford Encyclopedia of Science*. https://plato.stanford.edu/archives/spr2014/entries/risk/

Harel, G, & Stylianides, A. (2017). Reasoning and Proof in Mathematics Education. In G. Kaiser (Eds.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 459-462). Springer International Publishing.

Hersbach, H. (2000). Decomposition of the Continuous Ranked Probability Score for Ensemble Prediction Systems. *Weather And Forecasting*, *15*(5), 559-570. https://10.1175/1520-0434(2000)015<0559:dotcrp>2.0.co;2

Hol, S. (2007). The influence of the business cycle on bankruptcy probability. *International Transactions In Operational Research*, *14*(1), 75-90. https://10.1111/j.1475-3995.2006.00576.x

Hosseini, S., & Besharat, M. (2010). Relation of resilience whit sport achievement and mental health in a sample of athletes. *Procedia - Social And Behavioral Sciences*, *5*, 633-638. https://10.1016/j.sbspro.2010.07.156

Howard, R. (1988). Uncertainty about Probability: A Decision Analysis Perspective. *Risk Analysis*, 8(1), 91-98. https://10.1111/j.1539-6924.1988.tb01156.x

Huelsenbeck, J. and Ronquist, F. (2001). MRBAYES: Bayesian inference of phylogenetic trees. *Bioinformatics*, 17(8), pp.754-755.

Huelsenbeck, J., Ronquist, F., Nielsen, R., & Bollback1, J. (2001). Bayesian Inference of Phylogeny and Its Impact on Evolutionary Biology. *Science*, *294*(5550), 2310-2314. https://10.1126/science.1065889

Huerta, P. (2018). Preparing Teachers for Teaching Probability Through Problem Solving. In C. Batanero & E. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics* (pp. 293-312). Springer International Publishing.

Hunter, L., Kasouf, C., Celuch, K. and Curry, K. (2004). A classification of business-to-business buying decisions: risk importance and probability as a framework for e-business benefits. *Industrial Marketing Management*, 33(2), 145-154.

Johansson, S., & Hansen, K. Y. (2019). Are Mathematics Curricula Harmonizing Globally Over Time? Evidence from TIMSS National Research Coordinator Data. *EURASIA Journal Of Mathematics, Science And Technology Education*, *15*(2).

Johnson, P., Iacob, M., Välja, M., Van Sinderen, M., Magnusson, C., & Ladhe, T. (2013). Business Model Risk Analysis: Predicting the Probability of Business Network Profitability. In M. Van Sinderen, P. Luttighuis, E. Folmer & S. Bosems (Eds.), *Enterprise Interoperability* (pp. 118-130). ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc.

Jolliffe, F. (2005). Assessing Probabilistic Thinking and Reasoning. In J. Graham (Eds.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 325-344). Springer Science and Business Media, Inc.

Jones, G. A., Langrall, C.W. & Mooney, E. S. (2007). Research in Probability: Responding to Classroom Realities. In F. Lester (Eds.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 909–955). Information Age Publishing.

Juslin, P., Lindskog, M. & Mayerhofer, B. (2014). Is there something special with probabilities? – Insight vs. computational ability in multiple risk combination. *Cognition*, *136,* 282-303. https://10.1016/j.cognition.2014.11.041

Kaur, B. (2010). Mathematics Homework: A Study Of Three Grade Eight Classrooms In Singapore. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 9(1), 187–206. https://10.1007/s10763-010-9237-0

Kaur, B., & Har, Y. B. (2009). Mathematical Problem Solving in Singapore Schools. *Mathematical Problem Solving,* 3–13. https://10.1142/9789814277228_0001

Kaur, B., & Pereira-Mendoza, L. (2000). Singapore Primary School TIMSS Data: Data Representation, Analysis and Probability and Patterns, Relations and Functions. *The Mnthenlnlics Edurntor.*, *5*(1/2), 180-193.

Kaur, B., K. Soh, C., Wong,, K., Tay, E., Toh, T., & Lee, N. (2012). Mathematics Education in Singapore. In *12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 311-316). Seoul, Korea; Springer.

Kazak, S., & Leavy, A. M. (2018). Emergent Reasoning About Uncertainty in Primary School Children with a Focus on Subjective Probability. *Statistics in Early Childhood and Primary Education*, 37–54. https://10.1007/978-981-13-1044-7_3

Kinderman, P., Schwannauer, M., Pontin, E., & Tai, S. (2011). Η ανάπτυξη και επικύρωση ενός γενικού μέτρου ευεξίας: Η κλίμακα ευημερίας του BBC. *Research Quality Of Life*, *20*(7), 1035-1042.

Kingston, C. (1966). Probability and Legal proceedings. *The Journal Of Criminal Law, Criminology And Police Scienc, 57*(1), 93-98.

Kissane, B. & Kemp, M. (2010). Teaching and learning probability in an age of technology. In M. Majewski, W-C. Yang, T. de Alwis & W. P. Hew (Eds.), *Linking Applications with Mathematics and Technology: Proceedings of the 15th Annual Conference of the Asian Technology Conference on Mathematics.* (pp 401-410) Kuala Lumpur, Malaysia; ATCM Inc.

Kloosterman, P. & Stage, F. (1992). Measuring Beliefs About Mathematical Problem Solving. *School Science and Mathematics*, 109-118. Academic Research Library.

Koellner, K., Pittman, M., & Brendefur, J. (2015). Expect the Unexpected When Teaching Probability. *Mathematics Teaching*, 245, 29-32.

Koh, A. (2000). Linking Learning, Knowledge Creation, and Business Creativity. *Technological Forecasting and Social Change*, 64(1), 85–100. https://10.1016/s0040-1625(99)00075-x

Kok Hwee Chia, N. (2014). A Comparison of Cognitive Equations of Mathematics Learning Process between the American and Singaporean Students with Dyscalculia. *Educational Research International*, *3*(1).

Kolar, C., & Lodge, D. (2001). Progress in invasion biology: predicting invaders. *Trends In Ecology & Evolution*, *16*(4), 199-204. https://10.1016/s0169-5347(01)02101-2

Konold, C. (2002). Understanding students' Beliefs about probability. In E. Von Glasersfeld (Eds.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 139-156). Kluwer Academic Publishers.

Krathwohl, D. (2002). A revision of bloom's taxonomy: An overview. *Theory into Practice*, *41*(4), 212-218.

Kyburg, H. (1966). Probability and Decision. *Philosophy Of Science*, 33(3), 250-261. https://10.1086/288097

Lakhani, M., Dhotre, B., & Giri, S. (2018). Prediction of Credit Risks in Lending Bank Loans. *International Research Journal Of Engineering And Technology (IRJET)*, *05*(12), 1066-1069.

Langrall, C. W. (2018). The Status of Probability in the Elementary and Lower Secondary School Mathematics Curriculum: The Rise and Fall of Probability in School Mathematics in the United States. *ICME-13 Monographs*, 39–50. https://10.1007/978-3-319-72871-1_3

Laplace, P. S. (1986*). Essai Philosophique sur les Probabilitks* (5th edition). Christian Bourgois.

Larnell, G. (2016). More Than Just Skill: Examining Mathematics Identities, Racialized Narratives, and Remediation Among Black Undergraduates. *Journal For Research In Mathematics Education*, *47*(3), 233-269. https://10.5951/jresematheduc.47.3.0233

Layton, A. (1998). A further test of the influence of leading indicators on the probability of US business cycle phase shifts. *International Journal Of Forecasting*, *14*(1), 63-70. https://10.1016/s0169-2070(97)00051-4

Lee, D. H. (2018). A Comparative analysis on the Fraction Contents of Korean, Japanese, Singaporean, American, and Finnish Mathematics Textbooks. *한국수학교육학회지시리즈C: 초등수학교육*, *21*(2), 111–130. https://doi.org/10.7468/JKSMEC.2018.21.2.111 (183)

Lee, K., & Smith, J. P. (2011). What is different across an ocean? How Singapore and US elementary mathematics curricula introduce and develop length measurement. *ZDM, 43(5), 681–696.* https://10.1007/s11858-011-0339-0

Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2012). Creativity and mathematics education: the state of the art. *ZDM, 45(2), 159–166.* https://10.1007/s11858-012-0459-1

Lerman, S. (Eds.). (2014). *Encyclopedia of Mathematics Education.* 535. https://10.1007/978-94-007-4978-8

Lewis, M. (1966). Probability learning in young children: The binary choice paradigm. *Journal of General Psychology, 108*, 43-48.

Lewis, S., Dontcheva, M. & Gerber1, E. (2011). Affective Computational Priming and Creativity. In *Proceedings Of The SIGCHI Conference On Human Factors In Computing Systems* (pp. 735-744). Canada;

Li, Y. (2000). A Comparison of Problems That Follow Selected Content Presentations in American and Chinese Mathematics Textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31(2), 234.* https://10.2307/749754 (180)

Li, Y., Niu, J., & Li, L. (2013). Forecast of Power Generation for Grid-Connected Photo-voltaic System Based on Grey Theory and Verification Model. *Energy And Power Engineering*, *05*(04), 177-181. https://10.4236/epe.2013.54b034

Lin, C. F., Yeh, Y., Hung, Y. H., & Chang, R. I. (2013). Data mining for providing a personalized learning path in creativity: An application of decision trees. *Computers & Education*, 68, 199–210. https://10.1016/j.compedu.2013.05.009

Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow (20 edition). *J. Atmos. Sci.*

Lorenz, E. N. (1993). *The Essence of Chaos*. UCL Press Ltd.

Mackenzie, E., Taylor, L., Bloom, B., Hufford, D., & Johnson, J. (2003). Ethnic minority use of complementary and alternative medicine (CAM): A national probability survey of CAM utilizers. *ALTERNATIVE THERAPIES*, *9*(4).

Mann, E. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 30(2), 236-260.

Marshall Cavendish Education. (2021). *Primary Mathematics 1B U.S. Edition*. Singapore.

Marshall Cavendish Education. (2021). *Primary Mathematics 2B U.S. Edition*. Singapore.

Marshall Cavendish Education. (2021). *Primary Mathematics 3B U.S. Edition*. Singapore.

Marshall Cavendish Education. (2021). *Primary Mathematics 4A U.S. Edition*. Singapore.

Marshall Cavendish Education. (2021). *Primary Mathematics 5B U.S. Edition*. Singapore.

Marshall Cavendish Education. (2021). *Primary Mathematics 6B U.S. Edition*. Singapore.

Mason, J., (2003). *Η διεξαγωγή της ποιοτικής έρευνας*. Ελληνικά Γράμματα.

Mayer, R. E. (1989). Cognitive views of creativity: Creative teaching for creative learning. *Contemporary Educational Psychology,* 14(3), 203–211. https://10.1016/0361-476x(89)90010-6

Mazur, D., & Merz, J. (1994). How age, outcome severity, and scale influence general medicine clinic patients' interpretations of verbal probability terms. *Journal Of General Internal Medicine, 9*(5), 268-271. https://10.1007/bf02599654

Meelissen, M., & Punter, A. (2015). *TIMSS 2015 ENCYCLOPEDIA* [Ebook]. IEA TIMMS & PIRLS.

Mildenhall, P. (2016). Estimation in the Primary School: Developing a Key Mathematical Skill for Life. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *21*(1), 18-22.

Milton, K. C. (1975). Probability in the primary school. *Australian Mathematics Teacher*, 31(5), 169-178.

Mitzenmacher, M., & Upfal, E. (2005). *Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis*. Cambridge University Press.

Mnguni, L., El Islami, R. A. Z., Hebe, H., Sari, I. J., & Nestiadi, A. (2019). *A comparison of the South African and Indonesian teachers preferred curriculum ideology for school science.* Curriculum Perspectives. https://10.1007/s41297-019-00089-x

MOE. (2006). *Mathematics Syllabus Primary*. Ministry of Education Singapore.

MOE. (2012). *Mathematics Syllabuses - Primary One to Six*. Ministry of Education Singapore.

MOE. (2015). *Bringing out the best in every child*. Ministry of Education Singapore.

MOE. (2019). *Mathematics Syllabuses - Secondary One to Four*. Ministry of Education Singapore.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics.* TIMSS & PIRLS International Study Center.

Mullis, I., Martin, M., Foy, P. & Hooper, M. (2015). TIMSS 2015 International Results in Mathematics. *IEA TIMSS & PIRLS International Study Center.*

Murphy, A. H. & Winkler, R. L. (1984). Probability Forecasting in Meteorology. *Journal of the American Statistical Association,* 79(387), 489–500. https://10.1080/01621459.1984.10478075

Murphy, A., & Winkler, R. (1992). Diagnostic verification of probability forecasts. *International Journal Of Forecasting*, 7(4), 435-455. https://10.1016/0169-2070(92)90028-8

Mylne, K. (2002). Decision-making from probability forecasts based on forecast value. *Meteorological Applications*, *9*(3), 307-315. https://10.1017/s1350482702003043

Naidu, J., & Sanford, J. (2017). Teaching Basic Probability In Undergraduate Statistics Or Management Science Courses. *American Journal Of Business Education (AJBE)*, *10*(1), 17-22. https://10.19030/ajbe.v10i1.9850

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: Author.

National Research Council. (2012). *A Framework for K-12 Science Education: Practices, Crosscutting Concepts, and Core Ideas*. National Academies Press.

NCTM CAEP Mathematics Content for Secondary Addendum to the NCTM CAEP Standards 2012. (2015, July 28). *NCTM Standards for Teacher Preparation Programs.* https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/CAEP-Standards/

NCTM, (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Neal, M. (2007). Teaching Probability and Statistics to English Language Learners in Grade Five. *Electronic Theses And Dissertations*, *5*

Nilsson, P., Eckert, A. & Pratt, D. (2018). Challenges and Opportunities in Experimentation-Based Instruction in Probability. In C. Batanero & E. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics* (pp. 51-72). Springer International Publishing.

Noordhoff Utigevers. (2020). *Getal & Ruimte Junior 5*. Netherlands.

Northcote, M. & Marshall, L. (2016). What mathematics calculations do adults do in their everyday lives? Part 1 of a report on the Everyday Mathematics project. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *21*(2), 8-17.

Nwokedi, T., & Nnadi, K. (2018). Estimating the Theoretical and Empirical Probability Coefficients of Oil Pipeline Transport Infrastructure Failure Modes in Nigeria's Coastal Ecosystem: Panacea for Non Optimal Deployment of Pipeline Safety and Security Management Systems. *LOGI – Scientific Journal On Transport And Logistics*, *9*(2), 38-50. https://10.2478/logi-2018-0017

OECD. (2019). *PISA 2018 Results* [Ebook]. PISA OECD

Oh, T.-K., & Lee, K. H. (2012). Creativity Development in Probability through Debate. *한국수학교육학회지시리즈D: 수학교육연구*, *16*(4), 233–244. https://doi.org/10.7468/JKSMED.2012.16.4.233

Olofsson, P. (2015). *Probabilities The Little Numbers That Rule Our Lives* (2nd ed.). Wiley.

Pange, J. (2003). Teaching Probabilities and Statistics to Preschool Children. *Information Technology In Childhood Education Annual*, 163-172.

Papanicolaou, G., & Traut, H. (1943). Diagnosis Of Uterine Cancer By The Vaginal Smear. *Yale Journal Of Biology And Medicine*.

Paparistodemou, E., & Meletiou-Mavrotheris, M. (2018). Teachers' Reflection on Challenges for Teaching Probability in the Early Years. *Statistics in Early Childhood and Primary Education*, 201–215. https://10.1007/978-981-13-1044-7_12

Park, Y., Qing, J. & Mozafari, B. (2019). BlinkML: Efficient Maximum Likelihood Estimation with Probabilistic Guarantees. In *Proceedings Of ACM International Conference On Management Of Data (SIGMOD 2019)*, (4), 18.

Pelc, A. (1989). Searching with known error probability. *Theoretical Computer Science*, 63(2), pp.185-202.

Pfannkuch, M., & Budgett, S. (2016). Markov Processes: Exploring the Use of Dynamic Visualizations to Enhance Student Understanding. *Journal of Statistics Education, 24(2), 63–73*. https://10.1080/10691898.2016.1207404

Piechota, T. C., Chiew, F. H. S., Dracup, J. A. & McMahon, T. A. (2001). Development of Exceedance Probability Streamflow Forecast. *Journal of Hydrologic Engineering*, 6(1), 20–28. https://10.1061/(asce)1084-0699(2001)6:1(20)

Pitta-Pantazi, D. & Kūma, D. (2017). Mathematics and Creativity. In G. Kaiser, *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 511-514). Switzerland; Springer International Publishing.

Polvanov,, R. (2019). Application of innovative technologies in teaching probability theory. *Scientific Bulletin of Namangan State University*, *1*(10), 19-25.

Population and Population Structure - Latest Data. (2020, January 4). Statistics on Singapore's population are compiled by the Singapore Department of Statistics. https://www.singstat.gov.sg/find-data/search-by-theme/population/population-and-population-structure/latest-data

Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), 602-625

Raftery, A., Gneiting, T., Balabdaoui, F., & Polakowski, M. (2005). Using Bayesian Model Averaging to Calibrate Forecast Ensembles. *Monthly Weather Review*, *133*(5), 1155-1174. https://10.1175/mwr2906.1

Rahimi, M., Sabahi, P., & Bigdeli, I. (2019). The Effect of Induced Positive and Negative Mood on Creativity. *International Journal Of Psychology, 13*(1), 5-21.

Ramey-Gassert, L., Shroyer, M. G., & Staver, J. R. (1996). A qualitative study of factors influencing science teaching self-efficacy of elementary level teachers. *Science Education, 80(3), 283–315.* https://10.1002/(sici)1098-237x(199606)80:3<283::aid-sce2>3.0.co;2-a

Randel, A. E., Jaussi, K. S., & Wu, A. (2011). When Does Being Creative Lead to Being Rated as Creative? The Moderating Role of Perceived Probability of Successfully Bringing Ideas to a Supervisor's Attention. *Creativity Research Journal, 23(1), 1–8.* https://10.1080/10400419.2011.545699

Reia, S. M., Gomes, P. F., & Fontanari, J. F. (2019). Individual decision making in task-oriented groups. *The European Physical Journal B,* 92(5). https://10.1140/epjb/e2019-90732-7

Richard, V., Lebeau, J.-C., Becker, F., Inglis, E. R., & Tenenbaum, G. (2018). Do more creative people adapt better? An investigation into the association between creativity and adaptation. *Psychology of Sport and Exercise,* 38, 80–89. https://10.1016/j.psychsport.2018.06.001

Rose, G. (2007). A Personal View. *Archives Of Ophthalmology, 125*(12), 1711. https://10.1001/archopht.125.12.1711

Ross, A. (2017). *A Brief Look at Probability.* Pedagogy And Content In Middle And High School Mathematics.

Ross, S. (2010). *A first course in probability* (8th ed.). Pearson Education.

Rubel, L., Lim, V., Hall-Wieckert, M., & Sullivan, M. (2016). Teaching Mathematics for Spatial Justice: An Investigation of the Lottery. *Cognition And Instruction*, *34*(1), 1-26. https://10.1080/07370008.2015.1118691

Safrudiannur, & Rott, B. (2018). The different mathematics performances in PISA 2012 and a curricula comparison: enriching the comparison by an analysis of the role of problem solving in intended learning processes. *Mathematics Education Research Journal.* https://10.1007/s13394-018-0248-4

Saint-Hilary, G., Barboux, V., Pannaux, M., Gasparini, M., Robert, V., & Mastrantonio, G. (2018). Predictive probability of success using surrogate endpoints. *Statistics In Medicine*, 1–22. https://10.1002/sim.8060

Sampaio, L. O., & Wodewotzki, M. L. L. (2016). Mathematical Modelling for Critical Statistics Education. *The Teaching and Learning of Statistics,* 99–100. https://10.1007/978-3-319-23470-0_11

Schools Council Statistical Education (1980). *Teaching Statistics 11-16: Statistics in your world (a handbook and a series of booklets)*. Foulsham.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (Eds.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 465–494). Macmillan.

Shore, D. and Baldwin, R. (1983). Energetics of DNA twisting. *Journal of Molecular Biology*, 170(4), 983-1007.

Siddall, J. (1984). A New Approach to Probability in Engineering Design and Optimization. *Journal Of Mechanisms Transmissions And Automation In Design*, *106*(1), 5. https://10.1115/1.3258562

Sievert, H., van den Ham, A.-K., Niedermeyer, I., & Heinze, A. (2019). Effects of mathematics textbooks on the development of primary school children's adaptive expertise in arithmetic. *Learning and Individual Differences*, 74, 101716. https://10.1016/j.lindif.2019.02.006

Simonton, D. K. (2010). Creative thought as blind-variation and selective-retention: Combinatorial models of exceptional creativity. *Physics of Life Reviews, 7(2), 156–179.* https://10.1016/j.plrev.2010.02.002

Singer, F. & Sheffield, L. (2017). Activities for, and Research on, Mathematically Gifted Students. In G. Kaiser (Eds.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 387-396). Switzerland; Springer International Publishing.

Singh, S. (2015). Advantages and Disadvantages of Probability Sampling Methods in Social Research. In *National Conference on Innovative Research in Chemical, Physical, Mathematical Sciences, Applied Statistics and Environmental Dynamics* (pp. 15-18). New Delhi, Delhi, India;

Skoumios, M. & Diakos, N. (2015). Questioning Levels of Greek Middle School Chemistry Textbooks from a Learning Activities Perspective. *The International Journal of Science, Mathematics and Technology Learning*, 22(3), 15-30.

Sofaer, H., Hoeting, J., & Jarnevich, C. (2018). The area under the precision-recall curve as a performance metric for rare binary events. *Methods In Ecology And Evolution*. https://10.1111/2041-210x.13140

Soto-Andrade, J., Díaz-Rojas, D. & Reyes-Santander, P. (2018). Random Walks in the Didactics of Probability: Enactive Metaphoric Learning Sprouts. In C. Batanero & E. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics* (pp. 125-144). Springer International Publishing.

Sun, Z., Xie, K. & Anderman, L. (2018). The role of self-regulated learning in students' success in flipped undergraduate math courses. *The Internet And Higher Education, 36*, 41-53. https://10.1016/j.iheduc.2017.09.003

Supovitz, J., Sirinides, P., & May, H. (2009). How Principals and Peers Influence Teaching and Learning. *Educational Administration Quarterly*, *46*(1), 31-56. https://10.1177/1094670509353043

Suyidno, Nur, M., Yuanita, L., Prahani, B., & Jatmiko, B. (2018). Effectiveness of creative responsibility-based teaching (CRBT) model on basic physics learning to increase student's scientific creativity and responsibility. *Journal Of Baltic Science Education*, *17*(1), 136-151.

Tait, N. (1993). The use of probability in engineering design—an historical survey. *Reliability Engineering & System Safety*, 40(2), 119-132.

Tarr, J. & Lannin, J. (2005). How Can Teachers Build Notions of Conditional Probability and Independence?. In J. Graham (Eds.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 215-238). Springer Science and Business Media, Inc.

Taylor, F. (2014). *Why Teach Probability in the Elementary Classroom?*. Louisiana Association Of Teachers Of Mathematics.

TIMSS. (2015, April 5). *Student Achievement – TIMSS 2015 and TIMSS Advanced 2015 International Results*. http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/timss-2015/mathematics/student-achievement/

Toprak, Z., & Özmantar, M. F. (2019). A comparative analysis of Turkey and Singapore 5th grade mathematics textbooks in terms of worked examples and questions. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, *10*(2), 539–566. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.490210

Torrance, E.P. (1994). *Creativity: Just wanting to know*. Benedic books.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction—the Wiskobas project.* D. Reidel Publishing Company.

Tsamardinos, I., Pollack, M.E., & Ramakrishnan, S. (2003). *Assessing the Probability of Legal Execution of Plans with Temporal Uncertainty*.

Turing, A. M. (2012). The Applications of Probability to Cryptography. *Unpublished paper*, c. 1941.

Upshur, R. (2013). A short note on probability in clinical medicine. *Journal Of Evaluation In Clinical Practice*, *19*(3), 463-466. https://10.1111/jep.12040

Uusitalo, L. (2007). Advantages and challenges of Bayesian networks in environmental modelling. *Ecological Modelling, 203(3-4)*

Van den Ham, A.-K., & Heinze, A. (2018). Does the textbook matter? Longitudinal effects of textbook choice on primary school students' achievement in mathematics. *Studies in Educational Evaluation,* 59, 133–140. https://10.1016/j.stueduc.2018.07.005

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. *Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9*. Utrecht University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2019). Didactics of Mathematics in the Netherlands. *Edition ZfE, 57–94.* https://10.1007/978-3-030-05514-1_3

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Wijers, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *37*(4), 287-307. https://10.1007/bf02655816

Varshney, L. R. (2019). Mathematical Limit Theorems for Computational Creativity. *IBM Journal of Research and Development, 1–1.* https://10.1147/jrd.2019.2893907

Vásquez, C., & Alsina, Á. (2014). Evaluation of Teaching and Mathematical Knowledge in Primary Teachers for the Teaching of Probability. *Procedia - Social And Behavioral Sciences*, *141*, 691-696. https://10.1016/j.sbspro.2014.05.121

Velayutham1, S. (2020). The Ideational Meaning of Diagrams in the Malaysian and Singaporean Mathematics Textbooks. *The Mathematics Enthusiast*, *17*(1), 166-199.

Veloo, A., & Chairhany, S. (2013). Fostering Students' Attitudes and Achievement in Probability Using Teams-games-tournaments. Procedia - Social And Behavioral Sciences, 93, 59-64. https://10.1016/j.sbspro.2013.09.152

Wake, G., Coben, D., Alpers, B., Weeks, K., & Frejd, P. (2016). Mathematics Education in and for Work. In G. Kaiser (Eds.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 387-389). Switzerland; Springer International Publishing.

Wang, J., & Lu, X. (2018). Selection of content in high school mathematics textbooks: An international comparison. *ZDM*, *50*(5), 813–826. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0977-6

Wang, J., Davies, M., & Norman, R. (2000). Body mass and probability of pregnancy during assisted reproduction treatment: retrospective study. *BMJ*, *321*(7272), 1320-1321. https://10.1136/bmj.321.7272.1320

Wang, Z., & McDougall, D. (2018). Curriculum matters: What we teach and what students gain. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(6), 1129–1149. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9915-x

Wang, Z., Dai, W., Shi, Y., Bai, M., Liu, Q., & Zeng, X. (2018). Optimizing the planting structure in Daxing District in 2020 based on inaccurate two-stage planning model and grey model. *MATEC Web Of Conferences*, *246*, 02052. https://10.1051/matecconf/201824602052

Watkins, D. (1984). Student Perceptions of Factors Influencing Tertiary Learning. *Higher Education Research & Development*, *3*(1), 33-50. https://10.1080/0729436840030103

Watson, J. (2005). The Probabilistic Reasoning of Middle School Students. In J. Graham (Eds.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 145-169). Springer Science and Business Media, Inc.

Wei, X., Weng, D., Liu, Y., & Wang, Y. (2015). Teaching based on augmented reality for a technical creative design course. *Computers & Education, 81, 221–234.* https://10.1016/j.compedu.2014.10.017

What's New in ATLAS.ti 9 | ATLAS.ti. (2021, October 10). *What's New in ATLAS.ti 9*. https://atlasti.com/product/whats-new-in-atlas-ti-9/

Wilder, R. (1986). *Εξέλιξη των Μαθηματικών εννοιών.* (Δ. Ψυχογίος, Μτχ., Επιμ.). εκδόσεις Κουτσούμπος.

Wilson, M. C. (2009). Creativity, probability and uncertainty. *Journal of Economic Methodology,* 16(1), 45–56. https://10.1080/13501780802684252

Wong, K. Y., Boey, K. L., Lim-Teo, S. K., & Dindyal, J. (2014). The Preparation of Primary Mathematics Teachers in Singapore: Programs and Outcomes from the TEDS-M Study. *Advances in Mathematics Education,* 163–186. https://10.1007/978-94-007-6437-8_8

Wynne, H. (2000). *Teaching, leaning and assessing science 5-12*. Paul Chapman Publishing Ltd.

Xiaonan, X. (2017). Dialectical Thinking and Method to Cultivate Student Creativity in the Teaching of Probability Statistics. *Advances In Social Science, Education And Humanities Research (ASSEHR), 107*, 345-347.

Xin, Y. P. (2007). Word Problem Solving Tasks in Textbooks and Their Relation to Student Performance. *Journal of Educational Research*, 100(6), 347–359.

Yang, D., & Sianturi, I. (2019). The earliest teaching and learning of probability in Singapore, the US, and Indonesia from the perspectives of textbooks analysis. *Irish Educational Studies*, *38*(4), 535-559. https://10.1080/03323315.2019.1664313

Yang, D.-C. (2017). A Comparison of Geometry Problems in Middle-Grade Mathematics Textbooks from Taiwan, Singapore, Finland, and the United States. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13. https://10.12973/eurasia.2017.00721a

Yang, D.-C., Reys, R. E., & Wu, L.-L. (2010). *Comparing the Development of Fractions in the Fifth- and Sixth-Graders' Textbooks of Singapore, Taiwan, and the USA. School Science and Mathematics*, 110(3), 118–127. https://10.1111/j.1949-8594.2010.00015.x

Yang, D.-C., Tseng, Y.-K. & Wang, T.-L. (2017). A Comparison of Geometry Problems in Middle-Grade Mathematics Textbooks from Taiwan, Singapore, Finland, and the United States. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13 https://10.12973/eurasia.2017.00721a

Yani, A. & Oikawa, S. (2019). Increasing Creative and Innovative Thinking Ability through The Strengthening of Character Education in Probability Theory Course. *Journal of Education, Teaching and Learning*, 4(1), 163-168.

Yao, J. (2019). “DECIMAL”: A Comprehensive Approach of Teaching Undergraduate Mathematics General Education Courses. *Science Journal Of Education*, *7*(1), 36-41.

Yarmolaev, A., & Korkhin, A. (2018). Method of determining the duration of the project given uncertainty. *Construction, Materials Science, Mechanical Engineering*, *0*(106), 159-164. https://10.30838/p.cmm.2415.270818.159.247

Yeo, L. S., & Clarke, C. (2006). Adjustment to the first year in school — A Singapore perspective. *European Early Childhood Education Research Journal, 14(2), 55–68.* https://10.1080/13502930285209911

Zabell, S. (2012). Commentary on Alan M. Turing: The Applications of Probability to Cryptography. *Cryptologia, 36(3), 191–214.* https://10.1080/01611194.2012.697811

Zampetakis, L. A., Moustakis, V., Dewett, T., & Zampetakis, K. (2008). A Longitudinal Analysis of Student Creativity Scripts. *The Journal of Creative Behavior, 42(4), 237–254.* https://10.1002/j.2162-6057.2008.tb01298.x

Zhang, Z., Sun, Y., Gao, D., Lin, J., & Cheng, L. (2013). A Versatile Probability Distribution Model for Wind Power Forecast Errors and Its Application in Economic Dispatch. *IEEE Transactions On Power Systems*, *28*(3), 3114-3125. https://10.1109/tpwrs.2013.2249596

Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the Representation of Problem Types in Intended Curriculum: A Comparison of Selected Mathematics Textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4), 609–626. https://10.1007/s10763-006-9036-9 (177)

Zorzos, M., & Avgerinos, E. (2021). Probability knowledge effect on critical thinking in young ages. In *Contemporary Mathematics Education* (pp. 186–191). Gdansk; Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Zorzos, M., & Avgerinos, E. (2022). Interdisciplinarity in data analysis through the primary school textbooks in Greece and Singapore. *Research in Social Sciences and Technology*, *7*(1), 90–99. https://doi.org/10.46303/ressat.2022.6

Zorzos, M., & Avgerinos, E. (2023). Research on visualization in probability problem solving. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *19*(4). https://doi.org/10.29333/ejmste/13066

Zorzos, M., & Avgerinos, E., (2019). The Benefits of Using New Technology in Probability Teaching lead to the need for teacher training. Proceedings of the

36th National Conference on Mathematical Education. Greece; Greek mathematical company.

Zulkarnaen, Supardi, I., & Jatmiko, B. (2018). The role of knowledge mastery and science process skills to increase the scientific creativity how do they work?. *Unnes Science Education Journal*, *7*(2), 178-185.

Βρυώνης, Κ., Δουκάκης, Σ., Καρακώστα, Β., Μπαραλής, Γ., & Σταύρου, Ι. (2018). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού*. ΙΤΥΕ Διόφαντος.

Γαγάτσης, Α. & Μάρκου, Α. (2001). Η συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση ως ένα αποτελεσματικό εργαλείο εκπαιδευτικής έρευνας. http://www.pee.gr/wp-content/uploads/praktika_synedrion_files/e19_11_03/sin_ath/mer_g_th_en_i/gagatsis.htm

Γενική Γραμματεία Πρωτοβάθμιας, Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Και Ειδικής Αγωγής Γενική Διεύθυνση Σπουδών Π/Θμιας Και Δ/Θμιας Εκπαίδευσης Διεύθυνση Σπουδών, Προγραμμάτων Και Οργάνωσης Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (2019). *Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο για το σχ. έτος 2019-2020*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Γενική Γραμματεία Πρωτοβάθμιας, Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Και Ειδικής Αγωγής Γενική Διεύθυνση Σπουδών Π/Θμιας Και Δ/Θμιας Εκπαίδευσης Διεύθυνση Σπουδών, Προγραμμάτων Και Οργάνωσης Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (2019). *Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στις Α΄, Β΄ τάξεις Ημερήσιου ΓΕ.Λ και Α΄, Β΄, Γ΄ τάξεις Εσπερινού ΓΕΛ για το σχολ. έτος 2019-2020*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Γενική Γραμματεία Πρωτοβάθμιας, Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Και Ειδικής Αγωγής Γενική Διεύθυνση Σπουδών Π/Θμιας Και Δ/Θμιας Εκπαίδευσης Διεύθυνση Σπουδών, Προγραμμάτων Και Οργάνωσης Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (2019). *Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στις Α΄ και Β΄ τάξεις Γενικού Λυκείου για το σχολικό έτος 2019 – 2020*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Γενική Γραμματεία Πρωτοβάθμιας, Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Και Ειδικής Αγωγής Γενική Διεύθυνση Σπουδών Π/Θμιας Και Δ/Θμιας Εκπαίδευσης Διεύθυνση Σπουδών, Προγραμμάτων Και Οργάνωσης Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (2019). *Διαχείριση διδακτέας-εξεταστέας ύλης των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης Ημερησίου Γενικού Λυκείου και Γ΄ και Δ΄ τάξεων Εσπερινού Γενικού Λυκείου για το σχολικό έτος 2019-2020*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Γενική Γραμματεία Πρωτοβάθμιας, Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Και Ειδικής Αγωγής Γενική Διεύθυνση Σπουδών Π/Θμιας Και Δ/Θμιας Εκπαίδευσης Διεύθυνση Σπουδών, Προγραμμάτων Και Οργάνωσης Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (2021). *Ύλη και Οδηγίες διδασκαλίας των Μαθηματικών Γενικής Παιδείας (το διδάσκονται οι μαθητές που επιλέγουν την Ομάδα Προσανατολισμού Ανθρωπιστικών Σπουδών) της Γ΄ τάξης Ημερησίου και

Εσπερινού Γενικού Λυκείου για το Σχολικό Έτος 2021-2022. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ενιαίος Διοικητικός Τομέας Π/Θμιας & Δ/Θμιας Εκπ/Σης Δ/Νση Σπουδών Δ/Θμιας Εκπ/Σης. (2009). *Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών Γ/σίου και Γεν. Λυκείου*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ενιαίος Διοικητικός Τομέας Π/Θμιας & Δ/Θμιας Εκπ/Σης Δ/Νση Σπουδών Δ/Θμιας Εκπ/Σης. (2010). *Καθορισμός και διαχείριση διδακτέας ύλης Θετικών Μαθημάτων, των Α΄, Β΄, και Γ΄ τάξεων Ημερησίου και Εσπερινού Γενικού Λυκείου, για το σχολικό έτος 2010-11*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ενιαίος Διοικητικός Τομέας Π/Θμιας & Δ/Θμιας Εκπ/Σης Δ/Νση Σπουδών Δ/Θμιας Εκπ/Σης. (2010). *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Διδακτέα ύλη*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ενιαίος Διοικητικός Τομέας Π/Θμιας & Δ/Θμιας Εκπ/Σης Δ/Νση Σπουδών Δ/Θμιας Εκπ/Σης. (2012). *Οδηγίες για τη διδασκαλία των μαθημάτων του Γενικού και του Εσπερινού Γενικού Λυκείου.* Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ενιαίος Διοικητικός Τομέας Π/Θμιας & Δ/Θμιας Εκπ/Σης Δ/Νση Σπουδών Δ/Θμιας Εκπ/Σης. (2012). *Οδηγίες για τη διδασκαλία των Θετικών Μαθημάτων των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Ημερήσιου και Εσπερινού Γυμνασίου για το σχ. έτος 2012-2013*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ενιαίος Διοικητικός Τομέας Π/Θμιας & Δ/Θμιας Εκπ/Σης Δ/Νση Σπουδών Δ/Θμιας Εκπ/Σης. (2013). *Καθορισμός και διαχείριση διδακτέας ύλης Θετικών Μαθημάτων, των Α΄, Β΄, και Γ΄ τάξεων Ημερησίου και Εσπερινού Γενικού Λυκείου, για το σχολικό έτος 2013-14*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ενιαίος Διοικητικός Τομέας Π/Θμιας & Δ/Θμιας Εκπ/Σης Δ/Νση Σπουδών Δ/Θμιας Εκπ/Σης. (2013). *Οδηγίες για τη διδασκαλία μαθημάτων του Γενικού και του Εσπερινού Γενικού Λυκείου*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ενιαίος Διοικητικός Τομέας Π/Θμιας & Δ/Θμιας Εκπ/Σης Δ/Νση Σπουδών Δ/Θμιας Εκπ/Σης. (2018). *Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στις Α΄, Β΄ τάξεις Ημερήσιου ΓΕΛ και Α΄, Β΄, Γ΄ τάξεις Εσπερινού ΓΕΛ για το σχολ. έτος 2018-19*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ενιαίος Διοικητικός Τομέας Π/Θμιας & Δ/Θμιας Εκπ/Σης Δ/Νση Σπουδών Δ/Θμιας Εκπ/Σης. (2016). *Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο για το σχολ. έτος 2016 – 2017*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ενιαίος Διοικητικός Τομέας Π/Θμιας & Δ/Θμιας Εκπ/Σης Δ/Νση Σπουδών Δ/Θμιας Εκπ/Σης. (2016). *Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στις Α΄, Β΄ τάξεις Ημερήσιου ΓΕΛ και Α΄, Β΄, Γ΄ τάξεις Εσπερινού ΓΕΛ για το σχολ. έτος 2016 – 2017*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ενιαίος Διοικητικός Τομέας Π/Θμιας & Δ/Θμιας Εκπ/Σης Δ/Νση Σπουδών Δ/Θμιας Εκπ/Σης. (2014). *Οδηγίες για τη διδασκαλία των θετικών μαθημάτων Ημερήσιου και Εσπερινού Γυμνασίου για το σχ. έτος 2014-2015*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ενιαίος Διοικητικός Τομέας Π/Θμιας & Δ/Θμιας Εκπ/Σης Δ/Νση Σπουδών Δ/Θμιας Εκπ/Σης. (2015). *Οδηγίες για τη διδασκαλία των θετικών μαθημάτων Ημερήσιου και Εσπερινού Γυμνασίου για το σχ. έτος 2015-2016*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ενιαίος Διοικητικός Τομέας Π/Θμιας & Δ/Θμιας Εκπ/Σης Δ/Νση Σπουδών Δ/Θμιας Εκπ/Σης. (2011). *Καθορισμός εξεταστέας– διδακτέας ύλης των Πανελλαδικώς εξεταζόμενων μαθημάτων της Γ΄ Τάξης Ημερησίων & Δ΄ Τάξης Εσπερινών ΕΠΑ.Λ. για το σχολικό έτος 2011-2012*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ενιαίος Διοικητικός Τομέας Π/Θμιας & Δ/Θμιας Εκπ/Σης Δ/Νση Σπουδών Δ/Θμιας Εκπ/Σης. (2017). *Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο και Λύκειο για το σχ. έτος 2017-2018*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ενιαίος Διοικητικός Τομέας Π/Θμιας & Δ/Θμιας Εκπ/Σης Δ/Νση Σπουδών Δ/Θμιας Εκπ/Σης. (2018). *Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο και Λύκειο για το σχ. έτος 2018-2019*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ενιαίος Διοικητικός Τομέας Π/Θμιας & Δ/Θμιας Εκπ/Σης Δ/Νση Σπουδών Δ/Θμιας Εκπ/Σης. (2019). *Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο και Λύκειο για το σχ. έτος 2019-2020*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ενιαίος Διοικητικός Τομέας Π/Θμιας & Δ/Θμιας Εκπ/Σης Δ/Νση Σπουδών Δ/Θμιας Εκπ/Σης. (2020). *Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο και Λύκειο για το σχ. έτος 2020-2021*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ενιαίος Διοικητικός Τομέας Π/Θμιας & Δ/Θμιας Εκπ/Σης Δ/Νση Σπουδών Δ/Θμιας Εκπ/Σης. (2021). *Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο και Λύκειο για το σχ. έτος 2021-2022*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ενιαίος Διοικητικός Τομέας Π/Θμιας & Δ/Θμιας Εκπ/Σης Δ/Νση Σπουδών Δ/Θμιας Εκπ/Σης. (2022). *Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο και Λύκειο για το σχ. έτος 2022-2023*. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ευρωπαϊκή Στατιστική Υπηρεσία. (2020, April 5). An official website of the European Union. https://ecas.ec.europa.eu/cas/login?loginRequestId=ECAS_LR-125929469-T572zkGTF085Y4Fiq18Jjc2KabzmZHbnB3AsF2TEND3dRHgXhloqicNC

D7whiaBpuptKZBHFXmrzpdbHkzzrBZ1-jpJZscgsw0KNMhrlgrkHRe-0SbrYlcLdFBI1IHLxAFoNdzWpXWWWS2zWxAopoumzjkG

Ζώρζος, Μ. (2018). Διδάσκοντας Πιθανότητες στο Δημοτικό σχολείο. Διερεύνηση των στάσεων, αντιλήψεων και πεποιθήσεων των δάσκαλων και υποψήφιων δασκάλων για το αντικείμενο των πιθανοτήτων [Μεταπτυχιακή Διατριβή, Πανεπιστήμιο Αιγαίου]. Βιβλιοθήκη Παν. Αιγαίου Ρόδος.

Ίσαρη, Φ., & Πουρκός, Μ. (2015). *Ποιοτική Μεθοδολογία Έρευνας: Εφαρμογές στην Ψυχολογία και την Εκπαίδευση.* Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών.

Κασσιώτη, Ό., Κλιάπης, Π. & Οικονόμου, Θ. (2013). *Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού.* ΙΤΥΕ Διόφαντος.

Κομηνέας, Σ., Χαρμανδάρης, Ε. (2016). *Μαθηματική Μοντελοποίηση*. [ηλεκτρ. βιβλ.] Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών. http://hdl.handle.net/11419/6325

Κοντογιάννης, Γ. & Τουμπής, Σ. (2015). *Στοιχεία Πιθανοτήτων: Με εφαρμογές στη στατιστική και την πληροφορική.* Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών.

Μάρκος, Α. (2006*). Βοήθεια στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών & Αλγόριθμοι Ανάλυσης και Κατασκευής Ειδικών Πινάκων Εισόδου.* [Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας]. ΕΚΤ.

Μιχαηλίδης, Π. (2007). Νέες Τεχνολογίες και Διδακτική των Φυσικών Επιστημών. In *Διδακτική φυσικών επιστήμων και νέες τεχνολογίες στην εκπαίδευση* (pp. 55-72). Ιωάννινα;

Ν. 21072α/Γ2/2013. Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Εφημερίδα της Κυβέρνησης (ΦΕΚ 303Β/13-3-2013).

Ν. 21072α/Γ2/2019. Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Εφημερίδα της Κυβέρνησης (ΦΕΚ 303Β/13-3-2013).

Ν. 119174/Δ2/2018. Καθορισμός εξεταστέας ύλης για το έτος 2019 για τα μαθήματα που εξετάζονται πανελλαδικά για την εισαγωγή στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση αποφοίτων Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου (ΦΕΚ 3411/10-8-2018).

Ν. 59614/Γ2/2011. Πρόγραμμα σπουδών μαθηματικών Α τάξης γενικού Λυκείου (ΦΕΚ 1168Β/8-6-2011).

Παπαναστασίου, Ε., & Παπαναστασίου, Κ. (2021). *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας* (4th ed., pp. 119-131). Παπαναστασίου, Ε., & Παπαναστασίου, Κ.

Χαραλαμπίδης, Χ. (2009). *Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές*. Εκδόσεις Συμμετρία.

ΓΛΩΣΣΑΡΙ

Bayesian στατιστική	Κλάδος της στατιστικής με ευρεία χρήση που βασίζεται στον κανόνα Bayes.
Αλυσίδες Markov	Μαθηματικό σύστημα που μεταβάλλεται από μια κατάσταση σε μια άλλη, ανάμεσα σε ένα περιορισμένο αριθμό καταστάσεων και η μελλοντική κατάσταση δεν επηρεάζεται από την κατάσταση του παρελθόντος.
Γραμματισμός Πιθανότητας	Η γνώση της θεωρίας και των διαδικασιών των Πιθανοτήτων.
Κανόνας Bayes	Θεώρημα που πραγματεύεται την μελέτη της Πιθανότητας υπό δεδομένων συνθηκών.
Κατανομή	Μια συνάρτηση που εκφράζει την Πιθανότητα πραγματοποίησης ενός αριθμού γεγονότων που συμβαίνουν σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα.
Κβαντική μηχανική	Θεωρία της φυσικής μηχανικής με αντικείμενο την εξήγηση φαινομένων που η κλασική μηχανική ή η κλασική ηλεκτροδυναμική αδυνατούν να αναλύσουν.
Κρυπτογραφία	Επιστημονικό πεδίο με αντικείμενο μελέτης την κρυπτογράφηση-απόκρυψη-ασφάλεια δεδομένων.
Μαθηματικά εργαλεία	Τα εργαλεία αυτά μπορεί να είναι ένα σύστημα εξισώσεων, ένα σύνολο αριθμών, ένας αλγόριθμος, μια στοχαστική διαδικασία
Μοντελοποίηση	Είναι η ανάπτυξη μαθηματικής περιγραφής ενός φαινομένου, ενός συστήματος ή μιας διαδικασίας και η μελέτη τους με τη χρήση μαθηματικών εργαλείων.

Πιθανοτική γνώση	Η γνώση της θεωρίας Πιθανότητας.
Πιθανοτική έννοια	Έννοια που έχει αντίκτυπο στην θεωρία Πιθανοτήτων.
Πιθανοτικό μοντέλο Gray-Markov	Μοντέλο ανάκτησης πληροφοριών από ένα σύστημα δεδομένων, το οποίο βασίζεται στις Πιθανότητες.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΦΟΙΤΗΤΕΣ-ΕΡΓΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Ανώνυμο Ερωτηματολόγιο

Αγαπητοί συμμετέχοντες,

Η παρούσα έρευνα διεξάγεται στα πλαίσια διδακτορικής διατριβής του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Παν. Αιγαίου και στοχεύει στη διερεύνηση των στάσεων και των αντιλήψεων του κοινωνικού συνόλου, σχετικά με τη χρήση των Πιθανοτήτων στην καθημερινότητα. Σε καμία περίπτωση δεν εξετάζει τις γνώσεις των ερωτώμενων στο αντικείμενο των Πιθανοτήτων, παρά μόνο την στάση τους και τις αντιλήψεις τους για την χρησιμότητα της θεωρίας τους στην καθημερινότητα. Τέτοιες έρευνες μπορούν να βοηθήσουν στη βελτίωση του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών στο ελληνικό σχολείο, αφού στοχοποιούν τους τομείς των χρηστικών μαθηματικών που πρέπει να δοθεί έμφαση κατά την διδασκαλία. Σημειώνεται, ότι το ερωτηματολόγιο είναι ανώνυμο και τα δεδομένα που θα συλλεχθούν, θα χρησιμοποιηθούν αυστηρά και μόνο για επιστημονικούς ή ερευνητικούς σκοπούς.

Η παρακάτω έρευνα είναι ανώνυμη και τα αποτελέσματα της προορίζονται καθαρά για εκπαιδευτικό σκοπό. Ο χρόνος υλοποίησης του ερωτηματολογίου δεν ξεπερνάει τα 12 λεπτά. Θα σας παρακαλούσα να απαντήσετε δίνοντας την απαραίτητη προσοχή στις ερωτήσεις, καθώς και τις ειλικρινείς σας απαντήσεις.

Σας ευχαριστώ πολύ εκ των προτέρων για τον πολύτιμο χρόνο που αφιερώνετε και σας εύχομαι κάθε επιτυχία.

Με εκτίμηση

Μιχαήλ Δ. Ζώρζος

Καθηγητής Μαθηματικών και Υπ. Διδάκτωρ Πανεπιστημίου Αιγαίου

Ενημέρωση Για Προσωπικά Δεδομένα

Όλες οι πληροφορίες που θα συγκεντρωθούν θα είναι ανώνυμες και θα χρησιμοποιηθούν μόνο για επιστημονικό και ερευνητικό σκοπό. Η επεξεργασία που θα πραγματοποιηθεί στα συνολικά δεδομένα της έρευνας, θα γίνει σε συμμόρφωση με τον Γενικό Κανονισμό Προστασίας Προσωπικών Δεδομένων. Τα δεδομένα αυτά, θα βρίσκονται στην κατοχή του ερευνητή και μόνο, για όσο χρονικό διάστημα υφίσταται λόγος επεξεργασίας τους.

Ενημερώθηκα και επιθυμώ να συμμετέχω ☐

Γενικές Ερωτήσεις

Φύλο: Άνδρας ☐ Γυναίκα ☐

Ηλικία: ………

Γραμματικές Γνώσεις:

Πρωτοβάθμιας Εκπ. ☐ Δευτεροβάθμιας Εκπ. ☐ Τριτοβάθμιας Εκπ. ☐

Μεταπτυχιακό Δίπλωμα ☐ Διδακτορικό Δίπλωμα ☐

Μεταδευτεροβάθμια – ΙΕΚ ☐ Άλλο ………………………

Ιδιότητα – Επάγγελμα Πανεπιστήμιο …....…………………………………………

Α/Α	**Ερώτηση: Να σημειώσετε στις παρακάτω ερωτήσεις τον βαθμό που συμφωνείτε σχετικά με τη χρήση των Πιθανοτήτων στην καθημερινότητα σας (1=καθόλου, 2=λίγο, 3=αρκετά, 4=πολύ, 5=πάρα πολύ)**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	Οι πιθανότητες σχετίζονται με την επαγγελματική μου δραστηριότητα					
2	Χρειάζεται να χρησιμοποιείτε στη καθημερινότητα σας τη λογική των πιθανοτήτων για καλύτερα αποτελέσματα					
3	Θα εμπιστευόμουν την θεωρία των Πιθανοτήτων για να στοιχηματίσω σε ένα παιχνίδι τύχης ένα μεγάλο χρηματικό ποσό.					
4	Δεν χρειάζομαι καθόλου τις Πιθανότητες, άρα δεν με επηρεάζει η έλλειψη γνώσεων πιθανότητας					
5	Αν είχα περισσότερες γνώσεις πιθανοτήτων σίγουρα θα επηρέαζαν την καθημερινότητα μου					

Α/Α	Ερώτηση: Να σημειώσετε τις παρακάτω ερωτήσεις που συμφωνείτε σχετικά με τις γνώσεις σας για τις Πιθανότητες (1=καθόλου, 2=λίγο, 3=αρκετά, 4=πολύ, 5=πάρα πολύ)	1	2	3	4	5
1	Θυμάμαι να διδάχτηκα πιθανότητες στο σχολείο					
2	Είμαι ευχαριστημένος από τον τρόπο που διδάσκονται οι πιθανότητες					
3	Είμαι ευχαριστημένος από το σχολικό βιβλίο και τις δραστηριότητες που παρέχει στο κομμάτι των πιθανοτήτων					
4	Θεωρώ, ότι η διδακτική των Πιθανοτήτων στο σχολείο δεν έγινε αρκετά διαδραστικά και με πειράματα					
5	Θεωρώ, ότι οι πιθανότητες είναι από αυτά τα χρήσιμα καθημερινά μαθηματικά που πρέπει να διδάσκονται περισσότερο					
6	Πιστεύω, ότι θα υπάρχουν ή υπήρξαν δυσκολίες στο πανεπιστήμιο, λόγω ελλείπων γνώσεων στις Πιθανότητες					
7	Πιστεύω, ότι περισσότερες γνώσεις πιθανοτήτων θα διευκόλυναν την καθημερινότητα μου					
8	Πιστεύω, ότι περισσότερες γνώσεις πιθανοτήτων δεν επηρέαζαν την καθημερινότητα μου					

Α/Α	Ερώτηση: Σε μια βραδιά στο καζίνο θα δρούσατε ανάλογα (1=καθόλου, 2=λίγο, 3=αρκετά, 4=πολύ, 5=πάρα πολύ) 	1	2	3	4	5
1	Με την εμπειρία σας					
2	Με τη τύχη					
3	Με τους πιθανοτικούς υπολογισμούς που κάνετε					
4	Με τη διαίσθηση σας					
5	Με τα στατιστικά που προβάλλονται στον πίνακα αποτελεσμάτων					

Α/Α	**Ερώτηση: Πώς θεωρείτε, ότι επηρεάζει η γνώση της θεωρίας Πιθανοτήτων την καθημερινότητα;** **(1=καθόλου, 2=λίγο, 3=αρκετά, 4=πολύ, 5=πάρα πολύ)**	1	2	3	4	5
1	Δεν την επηρεάζει ιδιαίτερα					
2	Πολλές φορές, καλό είναι να αφήνουμε κάποια πράγματα στην τύχη					
3	Η λήψη μιας σημαντικής απόφασης πρέπει πάντα να λαμβάνεται έπειτα από την ανάλυση των πιθανών αποτελεσμάτων.					
4	Πιστεύω, ότι οι Πιθανότητες χρησιμοποιούνται μόνο στον τζόγο					
5	Δεν καταλαβαίνω και πολύ την χρησιμότητα τους αφού δεν γνωρίζω καλά την θεωρία τους					
6	Δεν καταλαβαίνω και πολύ την χρησιμότητα τους αφού μάλλον δεν τις χρειάζομαι					

Α/Α	**Ερώτηση: Σημείωσε ποιοι παράγοντες πιστεύεις, ότι επηρέασαν τη διδασκαλία των μαθηματικών στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο (1=καθόλου, 2=λίγο, 3=αρκετά, 4=πολύ, 5=πάρα πολύ)**	1	2	3	4	5
1	Ο εκπαιδευτικός					
2	Η οικογένεια μου					
3	το σχολικό βιβλίο					
4	Η κοινωνική και πολιτική κατάσταση της εποχής που πήγαινα σχολείο					
5	Οι φίλοι μου					
6	Η δυσκολία του μαθήματος των μαθηματικών					
7	Ο όγκος της ύλης					
8	Η ροή της ύλης					
9	Η έλλειψη διαδραστικών παραδειγμάτων					
10	Η έλλειψη βοήθειας στο σπίτι					
11	Η έλλειψη σύνδεσης των γνώσεων που λαμβάνω με την καθημερινή τους χρήση					

Έργα – Δραστηριότητες

1. Ας υποθέσουμε έχουμε κερδίσει ένα χρηματικό ποσό ύψους 1.000€ σε ένα τυχερό παιχνίδι μιας στοιχηματικής εταιρίας. Ο υπεύθυνος της εταιρίας που μας δίνει την επιταγή, μας παροτρύνει να ξανά στοιχηματίσουμε αυτό το ποσό για να το πενταπλασιάσουμε.

Α) Δεδομένου ότι δεν μπορούμε να στοιχηματίσουμε μέρος του ποσού, εμείς σκεφτόμαστε (επιλέξτε την απάντηση που θέλετε):

(α) Να ρισκάρουμε τα 1.000€, αφού υπάρχει πιθανότητα να πάρουμε 5.000€.

(β) Δεν θα ρισκάρουμε, καλά είναι και τα 1.000€.

Β) Από τί εξαρτάται η απόφαση για να ρισκάρετε να κερδίσετε τα 5.000€;

(α) Από τη διαίσθηση της στιγμής.

(β) Δεν θα ρισκάρω ποτέ μεγάλα ποσά.

(γ) Αν ήξερα τις Πιθανότητες μπορεί και να ρίσκαρα.

(δ) Θα ρίσκαρα αν ήξερα τα στατιστικά των αποτελεσμάτων ώστε να ξέρω να ποντάρω σωστά.

(ε) Θα ρίσκαρα αν ήξερα τα συχνότερα αποτελέσματα που έρχονται συνήθως στο παιχνίδι.

Γ) Αν σας γίνει γνωστό ότι η πιθανότητα να κερδίσετε τα 5.000€ είναι 65%. Τί θα άλλαζε στα ερωτήματα Α και Β;

(α) Θα έπαιζα γιατί έχω περισσότερες πιθανότητες να κερδίσω.

(β) Τίποτα. Αυτό δεν θα επηρέαζε την απόφαση μου.

(γ) Θα το σκεφτόμουν σίγουρα περισσότερο αλλά τελικά δεν θα έπαιζα.

(δ) Θα το σκεφτόμουν σίγουρα περισσότερο και τελικά θα έπαιζα.

(ε) Δεν πιστεύω, ότι η γνώση της Πιθανότητας θα επηρεάσει είτε θετικά είτε αρνητικά την απόφαση μου.

2. Στην τηλεώραση ένας διακεκριμένος επιστήμονας είπε σχετικα με την εξάπλωση μιας επιδημίας σε μια περιοχή: «Η Πιθανότητα εξάπλωσης της επιδημίας τα επόμενα 5 χρόνια, προβλέπεται 60%». Πώς μεταφράζεται η συγγεκριμένη φράση, ώστε οι πολίτες να λάβουν τα απαραίτητα μέτρα προφύλλαξης; Χαρακτήρισε κάθε μια απο τις παρακάτω προτάσεις «Σωστή» ή «Λαθος».

Α/Α	Ερωτήσεις	Σωστό	Λάθος
1	Η επιδιμία θα εξαπλωθεί σίγουρα, αφου η πιθανότητα εξάπλωσης είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να μην εξαπλωθεί.		
2	$\frac{60}{100} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ άρα η εξάπλωση θα διαρκέσει τα 3 από τα επόμενα 5 χρόνια.		
3	Το 60% της περιοχής θα έχει επιδιμία.		
4	Η πιθανότητα να εξαπλωθεί είναι μεγαλύτερα από το να μην εξαπλωθεί.		
5	Το 60% των κατοίκων της περιοχής θα ασθενήσουν μέσα στην επόμενη 5ετία.		

3. Σε ένα τυχερό παιχνίδι υπάρχουν 50 αριθμιμένες μπάλες ίδιου μεγέθους και επιλέγονται με τυχαία κλήρωση 5 από αυτές. Ένας παίχτης επιλέγει τυχαία 5 αριθμούς από το 1 μέχρι το 50 και κερδίζει αν επιλέξει σωστα τα πέντε νούμερα που έχουν κληρωθει. Ένα περιοδικό προβλέψεων, δημοσιεύει τους αριθμούς που κέρδισαν σε

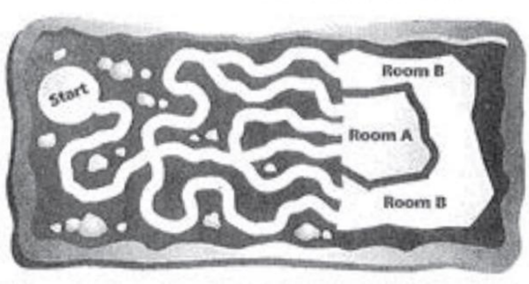
10 προηγουμενες κληρώσεις και έναν γενικό στατιστικό πίνακα με τα ποσοστά όλων των αριθμών στις κληρώσεις του τελευταίου έτους. Επιλέξτε τις προτάσεις που θεωρείτε Σωστές.

Α/Α	Ερωτήσεις	Σωστό	Λάθος
1	Στην επόμενη κλήρωση καλό είναι να παίξουμε τους αριθμούς που έρχονται συχνότερα.		
2	Στην επόμενη κλήρωση καλό είναι να μην πέξουμε τους αριθμούς που ήρθαν στη προηγούμενη κλήρωση, καθώς δυσκολα θα έρθουν πάλι.		
3	Πιο πολλες πιθανότητες για να κερδίσουν, έχουν οι αριθμοί που κληρώθηκαν στην προηγούμενη κλήρωση, επειδή είναι τυχεροί αριθμοί		
4	Οι πληροφορίες του Περιοδικού ειναι άχρηστες για την πρόβλεψη των αριθμών της επόμενης εβδομάδας.		
5	Περισσότερες πιθανότητες να κληρωθούν έχουν οι αριθμοί που δεν έχουν κληρωθει εδω και καιρό		
6	Αν επιλέξουμε τους αριθμούς έπειτα από σκέψη, θα έχουμε μεγαλύτερες πιθανότητες να κερδίσουμε από μια τυχαία επιλογή.		

4. Ο καλύτερος σου φίλος αγωνίζεται σε έναν αγώνα τέννις. Οι πιθανότητες που όρισε η ομοσπονδία, είναι 40% να κερδίσει ο φίλος σας, έναντι 60% που είναι του αντίπαλου. Προσωπικά εσείς πιστεύετε στις δυνατότητες του φίλου σας και ξέρετε ότι είναι ένας δυνατός παίχτης. Έτσι έχετε την διαίσθηση ότι θα καταφέρει να κερδίσει το παιχνίδι. Αν θα στοιχηματίζατε ένα σημαντικό ποσό, σε ποιόν από τους δύο θα ποντάρατε και γιατί;

Φυσικά στον φίλο μου ☐ Φυσικά στον αντίπαλο ☐

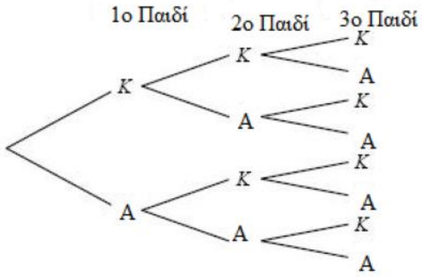
5. Στην παρακάτω εικόνα, εμφανίζεται ένας λαβύρυνθος. Ένας παίχτης ξεκινάει από την Έναρξη και ακολουθόντας τον λαβύρυνθο καταλήγει στο δωμάτιο Α που έχει ένα διαμάντι ή στο δωμάτιο Β που δεν έχει τίποτα.



Ποιο δωμάτιο έχει περισσότερες πιθανότητες να καταλήξει κάποιος (κυκλώστε);

Δωμάτιο Α Δωμάτιο Β Ίσες Πιθανότητες

6. Ένα νιόπαντρο ζευγάρι αποφασίζει ότι θέλει μελλοντικά να αποκτήσει 3 παιδιά. Βέβαια, τόσο ο άνδρας, όσο και η γυναίκα, θα ήθελαν να έχουν παιδιά και των 2 φύλλων. Ποια είναι η Πιθανότητα τα πρώτα 3 παιδιά να είναι του ίδιου φύλλου; Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετέ την απάντηση σας. Παρακάτω δίνεται ένα σχήμα για να σας βοηθήσει. Το σχήμα αυτό παρουσιάζει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς για τρία παιδιά.



(α) 50%
(β) 20%
(γ) 25%
(δ) 33.3%
(ε) 12,5%
(στ) πάνω από 50%

7. Κάποιος μεθυσμένος οδηγός, περνάει το βράδυ από τη γειτονιά σας και χτυπάει το οικογενειακό αυτοκίνητο. Η ασφάλεια προκειμένου να διαφυλάξει την αξιοπιστία της, αρνείται το συγκεκριμένο γεγονός και δεν πληρώνει την ζημιά μέχρι να βρεθεί ο δράστης. Εσείς, μαζεύοντας πληροφορίες από τους γείτονες, καταλήγετε στις εξής πληροφορίες:

- Ο τετραψήφιος αριθμός κυκλοφορίας του αυτοκινήτου έχει πρώτο και τέταρτο ψηφίο το 2.
- Το δεύτερο ψηφίο είναι το 5 ή 7 ή 8.
- Το τρίτο ψηφίο είναι το 4 ή το 1.

Α) Πόσοι διαφορετικοί συνδυασμοί αυτοκινήτων πρέπει να ελεγχθούν από την Τροχαία;

……………………………………………………………………………………

Β) Μπορείτε να υπολογίστε την πιθανότητα «Το δεύτερο ψηφίο να είναι περιττός αριθμός»;

……………………………………………………………………………………

Η υλοποίηση της διδακτορικής διατριβής συγχρηματοδοτήθηκε από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση», 2014-2020, στο πλαίσιο της Πράξης «Ενίσχυση του ανθρώπινου δυναμικού μέσω της υλοποίησης διδακτορικής έρευνας Υποδράση 2: Πρόγραμμα χορήγησης υποτροφιών ΙΚΥ σε υποψηφίους διδάκτορες των ΑΕΙ της Ελλάδας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού,
Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ
2014-2020
ανάπτυξη - εργασία - αλληλεγγύη