ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: Μαλισιόβα Ελευθερία

ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ: 421/2005177

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΜΑ: «Ανάπτυξη των στοχαστικών εννοιών με τη βοήθεια Τ.Π.Ε.»

Η ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Ο ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ

Φεσάκης Γεώργιος

Λέκτορας – Πανεπιστήμιο Αιγαίου

ΤΑ ΜΕΛΗ

1. Δημητρακοπούλου Αγγελική

Καθηγήτρια – Πανεπιστήμιο Αιγαίου

2. Καφούση Σουλτάνα

Αναπληρώτρια καθηγήτρια – Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Ρόδος 2009

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Πρώτα απ' όλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Λέκτορα κ. Γεώργιο Φεσάκη, για την πολύτιμη βοήθεια, υπομονή και καθοδήγησή του σε κάθε φάση της δημιουργίας της και για τη παραχώρηση του μικρόκοσμου Scratch που δημιούργησε. Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, την Καθηγήτρια κ. Δημητρακοπούλου Αγγελική και Αναπληρώτρια Καθηγήτρια κ. Καφούση Σουλτάνα για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου.

Έπειτα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους εκπαιδευτικούς των σχολείων που ήταν αρκετά καλοπροαίρετοι και εξυπηρετικοί απέναντι σε μια φοιτήτρια του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Δεν θα ήθελα, όμως, να λησμονήσω να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στα παιδιά που συμμετείχαν οικειοθελώς για το ερευνητικό μέρος της παρούσας εργασίας.

Ακόμη, ευχαριστώ τους φίλους- ες μου για την ηθική υποστήριξή τους και τα όμορφα φοιτητικά χρόνια που μου χάρισαν. Επίσης, θέλω να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στους γονείς μου, Κωνσταντίνο και Φωτεινή Μαλισιόβα, όπως και στις αδελφές μου Μαρία και Βασιλική για την ολόψυχη αγάπη και υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια.

Αφιερώνω αυτή την εργασία στην μητέρα μου και στον πατέρα μου.

Μαλισιόβα Ελευθερία

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία με θέμα «Ανάπτυξη στοχαστικών εννοιών με τη βοήθεια Τ.Π.Ε.» εκπονήθηκε από την τεταρτοετή φοιτήτρια Μαλισιόβα Ελευθερία του τμήματος των επιστημών της προσχολικής αγωγής και του εκπαιδευτικού σχεδιασμού (Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ.) του Πανεπιστημίου Αιγαίου κατά το ακαδημαϊκό έτος 2008- 2009. Ως μέλη εξεταστικής επιτροπής ορίστηκαν ο Λέκτορας του τμήματος και εποπτεύων κος Φεσάκης Γεώργιος, η Καθηγήτρια κα Δημητρακοπούλου Αγγελική και η Αναπληρώτρια καθηγήτρια κα Καφούση Σουλτάνα.

Αυτή η πτυχιακή εργασία ασχολείται με το πρόβλημα του αθροίσματος των δύο ζαριών σε περιβάλλον μικρόκοσμου- παιχνιδιού σε παιδιά νηπιακής ηλικίας, Δ΄ Δημοτικού και Β΄ Γυμνασίου. Ο μικρόκοσμος αυτός σχεδιάστηκε από τον κο Φεσάκη Γεώργιο, με τη βοήθεια του λογισμικού Scratch, στα πλαίσια του προγράμματος INTERREG III Ελλάδα – Κύπρος 2000-2006. Ειδικότερα, στόχος αυτής της εργασίας είναι να ερευνηθεί αν τα παιδιά κατά την επαφή τους με το μικρόκοσμο και κατ' επέκταση με τις Τ.Π.Ε. μπορούν να αναπτύξουν διαισθητικά την έννοια της πιθανότητας.

Η διερεύνηση του παραπάνω θέματος είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα, καθώς η σύγχρονη εκπαιδευτική τεχνολογία τα τελευταία χρόνια ωθείται σε μια ραγδαία εξέλιξη υπό την επίδραση των ταχύτατα αναπτυσσόμενων τεχνολογιών της πληροφορίας και της επικοινωνίας (Τ.Π.Ε.), που προσφέρουν συνεχώς νέες δυνατότητες για την εκπαίδευση, οι οποίες πριν από λίγα χρόνια θα ήταν ασύλληπτες. Οι υπολογιστές και οι Τ.Π.Ε. αποτελούν σήμερα πολυδύναμα και ισχυρά μέσα και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία διδασκαλίας και μάθησης σε μια ποικιλία γνωστικών αντικειμένων και ως ισχυρά γνωστικά ή νοητικά εργαλεία, μια διάσταση η οποία οφείλεται στις δυνατότητες αλληλεπίδρασης μεταξύ των μέσων αυτών με το χρήστη.

Ειδικότερα, η διάρθρωση της εργασίας είναι η παρακάτω: αρχικά, στο δεύτερο κεφάλαιο πραγματοποιείται μια ιστορική αναδρομή στην έννοια της πιθανότητας και αναλύονται οι φιλοσοφικές απόψεις σχετικά με τη Θεωρία των πιθανοτήτων. Ακολουθεί το τρίτο κεφάλαιο όπου αναφέρεται εκτενώς τι υποστηρίζουν οι έρευνες των εκπαιδευτικών και των ψυχολόγων για τη μάθηση των πιθανοτήτων. Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται και η διάκριση της διδακτικής των πιθανοτήτων σε τρεις περιόδους, ανάλογα με τις απόψεις που εκφράστηκαν για την πιθανολογική εκμάθηση. Έπειτα, στο τέταρτο κεφάλαιο περιγράφεται η σχέση αλληλεπίδρασης που έχει αναπτυχθεί μεταξύ των Τεχνολογιών Πληροφορίας και Επικοινωνίας (Τ.Π.Ε.) και της εκπαίδευσης αναφέροντας τα οφέλη που προκύπτουν από αυτή τη σχέση. Στο πέμπτο κεφάλαιο περιγράφεται η σχέση των Τ.Π.Ε. με τα μαθηματικά, παραθέτοντας και αποτελέσματα άλλων ερευνών που φανερώνουν τον βοηθητικό ρόλο που μπορούν να παίξουν οι Τ.Π.Ε. στην εκμάθηση του γνωστικού αντικειμένου των μαθηματικών. Στη συνέχεια, στο έκτο κεφάλαιο, αναλύεται η σχέση των Τ.Π.Ε. με τη μάθηση των πιθανοτήτων, ενώ παράλληλα παρατίθενται έρευνες σχετικές με το θέμα του κεφαλαίου και του υπό εξέτασης θέματος. Ακολουθεί η προβληματική της παρούσας εργασίας, στην οποία μετά από μια σύνοψη του θεωρητικού πλαισίου καταλήγει στο σκοπό και στη σημασία της έρευνας που θα ακολουθήσει. Πιο συγκεκριμένα σε αυτήν την εργασία μελετάται αν αναπτύσσεται η διαισθητική αντίληψη σε παιδιά ηλικίας νηπιαγωγείου, Δ΄ δημοτικού και Β΄ γυμνασίου κατά την επαφή τους με το πρόβλημα του αθροίσματος των δύο ζαριών με τη βοήθεια των Τ.Π.Ε. . Έπεται το όγδοο κεφάλαιο που περιγράφει τα ερευνητικά αποτελέσματα και τη μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε (στην περίπτωση μας η μελέτη περίπτωσης) και γίνεται μια λεπτομερής και εμπεριστατωμένη παρουσίαση της μεθοδολογικής πορείας που ακολουθήθηκε κατά τη διάρκεια της έρευνας. Ειδικότερα, δίνονται πληροφορίες τόσο για το δείγμα των ατόμων που συμμετείχαν στην έρευνα, όσο και για το υλικό που χρησιμοποιήθηκε καθώς και τη διαδικασία που ακολουθήθηκε για τη συλλογή των δεδομένων.

Ακολουθεί το ένατο κεφάλαιο όπου παρουσιάζονται σε πίνακες τα αποτελέσματα της έρευνας με την περιγραφή τους ανά βαθμίδα και έπεται η υποενότητα υπό τον τίτλο σύνοψη της ανάλυσης των ερευνητικών δεδομένων. Σε αυτό το σημείο γίνονται συγκρίσεις μεταξύ των αποτελεσμάτων των τριών βαθμίδων και παράλληλα γίνονται αναφορές, όπου χρειάζονται, στις διαισθητικές θεωρίες και δίνονται οι απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα.

Το τελευταίο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας αναφέρει συνοπτικά τα κυριότερα σημεία του θεωρητικού πλαισίου που αναλύθηκαν παραπάνω, τα κυριότερα επίσης σημεία της προβληματικής, παρουσιάζονται τα πιο βασικά στοιχεία των συμπερασμάτων, ενώ γίνεται λόγος για τυχόν μελλοντικές επεκτάσεις, για συνέπειες που μπορεί να έχει στη διδασκαλία ένα τέτοιο παιχνίδι και τέλος, περιγράφονται τα συμπεράσματα της ερευνήτριας αναφορικά με τη πιθανολογική αντίληψη των παιδιών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Σε αυτήν την ενότητα πραγματοποιείται ιστορική αναδρομή της έννοιας της πιθανότητας, καθώς επίσης αναφέρονται και οι επιστημονικές αντιλήψεις που διατυπώθηκαν αναφορικά με αυτήν, στο πέρασμα των χρόνων. Με την ανάλυση των φιλοσοφικών απόψεων που επικρατούν για τον ορισμό της Θεωρίας των Πιθανοτήτων γίνεται φανερό πως δεν μπορεί να θεωρηθεί μια και μόνο προσέγγιση ως επικρατέστερη, καθώς σε ορισμένες περιπτώσεις ο συνδυασμός αυτών των απόψεων οδηγεί στην πληρέστερη κατανόηση της έννοιας της πιθανότητας. Σε αυτό τη σημείο αξίζει να αναφερθεί πως για τη συλλογή πληροφοριών αυτού του κεφαλαίου έπαιξε καταλυτικό παράγοντα η μελέτη της εργασία της κας Σκουμπουρδή (2003).

2.1 Ιστορική αναδρομή στην έννοια της πιθανότητας

Πιθανολογικές δραστηριότητες έκαναν την εμφάνιση τους πριν από τον 15^{ο} αιώνα. Πιο συγκεκριμένα, γίνεται αναφορά στην προέλευση των κύριων αντικειμένων που χρησιμοποιούνται στα πιθανολογικά προβλήματα, όπως είναι ο αστράγαλος, ο κύβος, το ζάρι, τα τραπουλόχαρτα κ.α. και παρουσιάζονται δραστηριότητες όπως εμφανίστηκαν στην ιστορία και αποτελούν, κατά μια άποψη, το θεμέλιο της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Χαρακτηριστικά, στην Ιστορία του Ηροδότου αναφέρεται ίσως το πρώτο ζάρι (1200π.Χ.) το οποίο φτιάχτηκε από το τρίψιμο των στρογγυλών πλευρών του αστραγάλου μέχρι να γίνουν σχεδόν επίπεδες. Οι πλευρές του ζαριού διακρίνονταν από ρηχά βαθουλώματα, ίσως επειδή τότε δεν υπήρχαν συγκεκριμένα ή απλά σύμβολα για τους αριθμούς. Όσο όμως χρησιμοποιούνταν αληθινά κόκαλα οι ρίψεις έδιναν αποτελέσματα που δεν μπορούσαν να μελετηθούν αφού επηρεάζονταν από το είδος του κόκαλου και τη φυσική φθορά.

Βέβαια, ο λογισμός των Πιθανοτήτων ξεκινάει από κάποια «προβλήματα» που, αν και έκαναν την εμφάνιση τους μετά τον 15^{ο} αιώνα, απασχόλησαν τους μαθηματικούς για πολλά χρόνια. Ο Gerolamo Cardano έθεσε ένα από αυτά τα προβλήματα, ο οποίος γι’ αυτούς που υποστηρίζουν ότι η ανάπτυξη της Θεωρίας Πιθανοτήτων προήλθε από το ενδιαφέρον του ανθρώπου για τα τυχερά παιχνίδια, θεωρείται πατέρας της σύγχρονης Θεωρίας Πιθανοτήτων, καθώς για μια περίοδο σαράντα χρόνων, έπαιζε καθημερινά τυχερά παιχνίδια. Ένα άλλο πρόβλημα που τέθηκε είναι το πρόβλημα των σημείων (ή πρόβλημα των πόντων ή πρόβλημα των στοιχημάτων) και αφορά τη δίκαιη μοιρασιά του βραβείου (στοιχήματος) μεταξύ δυο παικτών όταν το παιχνίδι σταματάει, για κάποιο λόγο πριν ολοκληρωθεί. Για πρώτη φορά αυτό βρέθηκε σε έντυπη μορφή στο «Summa de Arithmetica, Geometrica, et Proportionalita» του Fra Luca Pacioli το 1494. Εκτός από τα παραπάνω, ορισμένα προβλήματα που αφορούσαν τα ζάρια διέγειραν το ενδιαφέρον του Fermat, ενώ και το πρόβλημα που τέθηκε από το Chevalier de Mere συνέβαλαν στην ανάπτυξη της Θεωρίας Πιθανοτήτων (Σκουμπουρδή, 2003). Οι πιθανότητες, λοιπόν, είναι αριθμοί οι οποίοι ανατίθενται σε γεγονότα που μπορεί να συμβούν ή όχι με κάποιον τυχαίο τρόπο. Με τον συνήθη συμβολισμό, οι πιθανότητες $P(E)$ ανατίθενται στα γεγονότα E. Οι πιθανότητες είναι κανονικοποιημένες και παίρνουν πραγματικές τιμές στο διάστημα από 0 μέχρι 1. Ακόμη, κεντρικό ρόλο στη θεωρία πιθανοτήτων παίζουν οι έννοιες των τυχαίων μεταβλητών, των συναρτήσεων κατανομής, των στοχαστικών διαδικασιών και των γεγονότων (Αρ.1. Wikipedia, 2009).

Στην αρχή η θεωρία των πιθανοτήτων αφορούσε κυρίως ξεχωριστά ενδεχόμενα και οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνταν ήταν κυρίως συνδυαστικής φύσεως, τελικά όμως αναλυτικές μελέτες οδήγησαν στην ενσωμάτωση συνεχόμενων μεταβλητών στη θεωρία. Αυτό μεσουράνησε στη μοντέρνα πιθανολογική θεωρία, στην οποία έδωσε μορφή ο Andrey Nikolaevich Kolmogorov. Ο τελευταίος συνδύασε την έννοια του δειγματικού χώρου με την measure θεωρία και παρουσίασε το αξιωματικό σύστημα για τη θεωρία των πιθανοτήτων το 1933. έτσι σε σύντομο χρονικό διάστημα το παραπάνω αποτέλεσε αδιαφιλονίκητα την αξιωματική βάση για τη σύγχρονη πιθανολογική θεωρία (Άρθρο 2, Wikipedia, 2009).

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων, χαρακτηρίζεται από ένα εύρος εφαρμογών αφενός των τυχερών παιχνιδιών και του χαρτοπαιγνίου που αποτελούν τις ρίζες της , και αφετέρου εφαρμογών στην ιατρική, στην πρόβλεψη του καιρού κ.α., ενώ συναντάται και στον κλάδο της οικονομίας, για παράδειγμα στις ασφαλιστικές επιχειρήσεις. Οι παραπάνω εφαρμογές σηματοδοτούν τη σημαντικότητα της μελέτης των πιθανοτήτων στη σύγχρονη κοινωνία, η κατανόηση της οποίας παρουσιάζει μεγάλες δυσκολίες, ακόμα και μετά από συστηματική διδασκαλία, όπως υποστηρίζουν πολλοί ερευνητές.

2.1.1. Φιλοσοφικές απόψεις σχετικά με τη Θεωρία Πιθανοτήτων

Οι τέσσερις βασικές φιλοσοφικές απόψεις που επικρατούν για τον ορισμό της Θεωρίας Πιθανοτήτων εμφανίστηκαν όταν το $17^{ο}$- $18^{ο}$ αιώνα υπήρξε ένα επιστημολογικό σχίσμα μεταξύ της ηπειρωτικής ορθολογιστικής παράδοσης και των Άγγλων εμπειριστών. Παρακάτω γίνεται μια προσπάθεια προσέγγισης των απόψεων αυτών, σύμφωνα με τη διδακτορική εργασία της Σκουμπουρδή (2003).

Ορθολογιστές φιλόσοφοι, όπως ο Descartes, ο Leibnitz και ο Spinoza, θεωρούσαν τη γνώση σαν μια διαδικασία απλής αιτιολογίας, ανακαλύπτοντας ιδέες που προϋπήρχαν στο μυαλό. Η γνώση για αυτούς δεν βασίζονταν στην αντίληψη της αίσθησης. Αντίθετα, οι εμπειριστές στην Αγγλία, πρωτοστατώντας οι Locke, Berkeley & Hume, αμφισβητούσαν την ύπαρξη της απόλυτης αλήθειας. Οι υποστηρικτές του εμπειρισμού πίστευαν πως δεν γνωρίζουμε πραγματικά τα πράγματα, αλλά μόνο ξέρουμε σχετικά με τα πράγματα.

Λαμβάνοντας υπόψη τα γραπτά του Pascal, Huygens, Leibnitz & Bernoulli στα μέσα του $17^{ου}$ και στις αρχές του $18^{ου}$ αιώνα, ο όρος πιθανότητα ερμηνεύονταν με δυο σημασίες. Από τη μια πλευρά ορίζονταν ως ο υπολογισμός συχνοτήτων για τυχαία γεγονότα με το χειρισμό στατιστικών δεδομένων (στατιστική) και από την άλλη πλευρά ως ο βαθμός πίστης και εξήγησης του τρόπου που παίζονται τα τυχερά παιχνίδια (εμπειρική) (Σκουμπουρδή, 2003).

Η διπλή αυτή ερμηνεία της έννοιας της πιθανότητας υφίσταται ακόμα. Προσπαθώντας λοιπόν, να προσεγγίσουμε την έννοια αυτήν και να δημιουργήσουμε πιθανολογικές δραστηριότητες αντιλαμβανόμαστε τη σπουδαιότητα ύπαρξης των παρακάτω διαφορετικών φιλοσοφικών απόψεων: της κλασικής, της στατιστικής, της υποκειμενικής και της τυπικής.

Πιο συγκεκριμένα, η **κλασική πιθανότητα** (ή του Laplace ή εκ των προτέρων ή a priori ή θεωρητική ή μαθηματική πιθανότητα) είναι εκείνη στην οποία δεχόμαστε ότι κάθε έκβαση είναι εξίσου πιθανή. Με την κλασική πιθανότητα καθορίζουμε την ακριβή πιθανότητα ενός γεγονότος από τις διαθέσιμες πληροφορίες, χωρίς να χρειαστεί να γίνει το πείραμα. Παρόλο που οι περισσότεροι ερευνητές, όπως οι Borovcnik, Bentz και Kapadia (1991), προσεγγίζουν την κλασική πιθανότητα εστιάζοντας την προσοχή τους σε ισοπίθανες εκβάσεις, η Drier (2000) στη διδακτορική της διατριβή, περιλαμβάνει και περιπτώσεις, όπου οι πιθανές εκβάσεις δεν είναι ισοπίθανες και παρόλα αυτά η πιθανότητα εμφάνισης ενός συγκεκριμένου ενδεχόμενου μπορεί να υπολογιστεί a priori. Ακόμη, η κλασική πιθανότητα δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε δραστηριότητες που τα εξαγόμενα αποτελέσματα του πειράματος δεν είναι ισοπίθανα και σε ερωτήματα που εκφράζουν καταστάσεις με άπειρο πλήθος δυνατών εξαγομένων απαντήσεων.

Μια άλλη φιλοσοφική άποψη που συναντάμε πολύ συχνά στον Ορισμό Πιθανοτήτων, αφορά στη **σχετική συχνότητα** (frequentist view ή στατιστική ή πειραματική ή εκ των υστέρων ή a posteriori). Στη περίπτωση αυτήν υπολογίζουμε την πιθανότητα, από την παρατηρούμενη συχνότητα εμφάνισης των εκβάσεων, που δε φαίνονται εξίσου πιθανές εκ των προτέρων, σε επαναλαμβανόμενες δοκιμές. Αυτό έχει το πλεονέκτημα της άμεσης σύνδεσης των θεωρητικών αντιλήψεων με τις πραγματικές δοκιμές.

Και οι δυο όμως φιλοσοφικές απόψεις που αναφέρθηκαν παραπάνω έχουν σαν αποτέλεσμα αντικειμενικές μετρήσεις της πιθανότητας και για αυτό το λόγο αποτελούν τμήμα της αντικειμενικής προσέγγισης. Σε αυτό το σημείο, όμως, χρήσιμο θα ήταν να επισημάνουμε πως παρόλο που η ιδέα του υπολογισμού της πιθανότητας με τη σχετική συχνότητα, είναι πολύ σημαντική, υπάρχουν ουσιαστικές δυσκολίες που συνδέονται με την αντίληψη του μεγάλου- άπειρου αριθμού πειραμάτων. Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε «ποτέ ακριβώς» την πιθανότητα γιατί ο αριθμός των δοκιμών είναι περιορισμένος και επίσης υπάρχουν κάποιες καταστάσεις στις οποίες είναι αδύνατο να διεξάγουμε επαναλαμβανόμενες δοκιμές κάτω από πειραματικές συνθήκες. Για παράδειγμα, δεν μπορούν να υπολογιστούν με ακρίβεια οι πιθανότητες που υπάρχουν να βρέξει αύριο.

Η **υποκειμενική προσέγγιση** (ή επαγωγική ή διαισθητική ή εμπειρική) αποτελεί μια άλλη προσέγγιση του ορισμού της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Σύμφωνα με αυτή, πιθανότητα είναι το μέτρο αξιοπιστίας που προσδίδουν οι επιστήμονες στους νόμους και στις θεωρίες. Ανεπαρκής γνώση της φύσης μας, αποκλείει τη χρήση κλασικής λύσης, εφόσον τα πειράματα και οι παρατηρήσεις πολλές φορές είναι κάπως σπάνια και ασαφή. Έτσι, δεν μπορούμε να έχουμε ακριβείς εκτιμήσεις συχνότητας. Τέτοιες εκτιμήσεις πιθανότητας, εκ των πραγμάτων όχι ακριβείς, αλλάζουν συνεχώς καθώς ή ανακαλύπτονται νέες ενδείξεις σχετικές με την υπόθεση ή βασιζόμαστε στο μοντέλο της «μάθησης από την εμπειρία».

Τέλος, η **τυπική πιθανότητα** (structural view) αποτελεί μια φιλοσοφική άποψη κατά την οποία αν η καινούρια πληροφορία που σχετίζεται με μια κατάσταση που μελετάμε, γίνεται διαθέσιμη, κάποιος μπορεί να εκτιμήσει την πιθανότητα με τη χρήση του θεωρήματος του Bayes. Αρχίζουμε με την a priori πιθανότητα και μετά η επιπλέον πληροφορία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστεί η a posteriori πιθανότητα. Υπάρχουν όμως παιδαγωγικές δυσκολίες στη διδασκαλία αυτού του θεωρήματος στα μικρά παιδιά.

Επαγωγικά σκεπτόμενοι τις παραπάνω φιλοσοφικές απόψεις οδηγείται κανείς στο συμπέρασμα πως δεν υπάρχει ένας ενιαίος ορισμός που να καλύπτει την πολλαπλή λειτουργικότητα της έννοιας της πιθανότητας. Οι διάφορες προσεγγίσεις στις οποίες αναφερθήκαμε φωτίζουν η καθεμιά διαφορετικές πλευρές της έννοιας της πιθανότητας περισσότερο ή λιγότερο ικανοποιητικά, αφήνοντας έτσι να φανεί ο πολλαπλός και θεμελιώδης ρόλος της.

Αυτές οι τέσσερις απόψεις συνήθως δεν χρησιμοποιούνται ανεξάρτητα η μια από την άλλη. Μάλιστα πολλές πιθανολογικές δραστηριότητες φαίνεται να στηρίζονται σε συνδυασμό των παραπάνω απόψεων (Σκουμπουρδή, 2003).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων 50 ετών εμφανίστηκαν σε μεγάλο βαθμό έρευνες αναφορικά με την ανάπτυξη, τη διδασκαλία αλλά και τη μάθηση της πιθανολογικής σκέψης. Στην πορεία αυτού του κεφαλαίου επιχειρείται η οργάνωση τους, όπως την πραγματοποίησαν οι Jones και Thornton (2005).

Στη δεκαετία του 1950 και 1960 πραγματοποιήθηκε η πρώτη σχετική έρευνα σε αυτόν τον τομέα από τον Piaget, τον Inhelder και από άλλους ψυχολόγους έχοντας θέσει ποικίλους θεωρητικούς προσανατολισμούς. Αυτή η πρώιμη εργασία εστίαζε στην ανάπτυξη και στη δόμηση της πιθανολογικής σκέψης και διαίσθησης των ανθρώπων. Εξετάστηκαν, ακόμη, τα δείγματα των απαντήσεων που δόθηκαν από ενήλικες και από παιδιά, όταν ήρθαν αντιμέτωποι με εργασίες που αφορούσαν την τυχαία πρόβλεψη, όπου πιθανά ενδεχόμενα ήταν άγνωστα. Αν και οι ερευνητές εκείνης της εποχής δεν ενδιαφέρονταν για την έννοια της πιθανότητας ως μέρους του σχολικού προγράμματος, το έργο τους και ιδιαίτερα αυτό του Piaget ενέπνευσε πολλούς ώστε να δώσουν έμφαση στην εκμάθηση αλλά και στη διδασκαλία της πιθανότητας.

Στην δεκαετία που μεσολάβησε από το 1970 ως το 1980, συνεχίστηκε το έργο του Piaget από ερευνητές (όπως ο Fischbein, 1975) που έδειξαν έντονο ενδιαφέρον στη φύση των πιθανολογικών αρχών και διαισθήσεων. Άλλοι ψυχολόγοι (όπως οι Tversky & Kahneman, 1974) ασχολήθηκαν με τις ευρετικές στρατηγικές (heuristics) που χρησιμοποιούσαν οι άνθρωποι για να κάνουν πιθανολογικές προβλέψεις. Αυτή η περίοδος σηματοδότησε την αρχή μελετών από ερευνητές που ασχολούνταν με τα μαθηματικά στην εκπαίδευση. Οι τελευταίοι (όπως ο Jones, 1974 και ο Green, 1983) ενδιαφέρονταν γενικότερα για την πιθανολογική σκέψη που παρουσιάζονταν από τους μαθητές διαφόρων ηλικιών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Παρόλα αυτά, υπήρχαν ορισμένοι ερευνητές μαθηματικοί στον τομέα της εκπαίδευσης που ξεκίνησαν να εστιάζουν την προσοχή τους στην διδασκαλία και την μάθηση της έννοιας της πιθανότητας (όπως ο Shepler, 1970 και ο Steinbring, 1984). Οι περισσότερες από αυτές τις έρευνες ακολούθησαν κλασικό προσανατολισμό στα τυχαία φαινόμενα και στις πιθανότητες, αλλά ορισμένες από αυτές ενσωμάτωσαν εμπειρικές και υποκειμενικές όψεις. Σε αυτό το σημείο καλό θα ήταν να αναφερθεί πως η ερευνητική δραστηριότητα που αναφέρθηκε παραπάνω, πραγματοποιήθηκε πριν την εισαγωγή της έννοιας της πιθανότητας στο αναλυτικό πρόγραμμα των σχολείων. Βέβαια, η μεταρρύθμιση που αφορούσε τον τομέα των μαθηματικών στην εκπαίδευση λειτούργησε ως εφαλτήριο για την άνθηση ερευνών σχετικά με την εκπαίδευση και τη μάθηση της πιθανότητας.

Σύμφωνα με την παραπάνω ιστορική σύνοψη σε ό,τι αφορά στη μάθηση και στη διδασκαλία της πιθανότητας ο Jones και ο Thornton (2005) ταξινομούν την έρευνα στις τρεις παρακάτω περιόδους : στην Πιαζετιανή Περίοδος, στην Περίοδο ερευνών για τη διαισθητική αντίληψη της πιθανότητας (Μετά- πιαζετιανή Περίοδος) και στη Σύγχρονη Περίοδο. Στο υπόλοιπο μέρος αυτού του κεφαλαίου προσεγγίζονται οι προαναφερθείσες φάσεις, ώστε να αναγνωριστούν τα θεωρητικά επιτεύγματα και η σημασία τους αναφορικά με την διδασκαλία και τη μάθηση της πιθανότητας.

3.1. ΦΑΣΗ ΠΡΩΤΗ: ΠΙΑΖΕΤΙΑΝΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου η έρευνα που κυριάρχησε αναφορικά με την εμβάθυνση στη πιθανολογική σκέψη ήταν αυτή του Piaget και Inhelder . Παρόλο που οι μελέτες τους δεν σχετίζονταν άμεσα με τη μάθηση και τη διδασκαλία της πιθανότητας, το αντικείμενο των στόχων της έρευνας, η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε και τα ευρήματα ήταν τόσο ουσιαστικά ώστε οι μελέτες τους να αποτελέσουν σημαντικό έργο για τις επόμενες μελέτες των υπόλοιπων περιόδων.

Πιο συγκεκριμένα, ο Piaget πραγματοποίησε πλήθος ερευνών αναφορικά με τη γνωστική ανάπτυξη, ενώ μια από τις έρευνες που ολοκλήρωσε μαζί με την Inhelder αποτέλεσε μεγάλη υποστήριξη για το ερευνητικό πεδίο των πιθανοτήτων. Σύμφωνα με τους Jones και Thorton (2005) ο Piaget και η Inhelder μετά από δείγμα 20 μαθητών ηλικίας 4 ως 15 χρόνων ταξινόμησαν την πιθανολογική σκέψη των μαθητών με βάση τα 3 στάδια ανάπτυξης : το στάδιο προσυλλογιστικής σκέψης (4 ως 7 χρόνων) (preoperational), το στάδιο συγκεκριμένων πράξεων (8 ως 11 χρόνων) (concrete operational), και το στάδιο των τυπικών λογικών πράξεων (πάνω από 11 χρόνων) (formal operational). Οι παραπάνω ερευνητές ασχολήθηκαν με παιδιά που υπάγονται στο στάδιο της προσυλλλογιστικής σκέψης πραγματοποιώντας την πρώτη τους έρευνα, η οποία αφορούσε σε ένα περιστρεφόμενο βέλος που σε κάθε περιστροφή έπεφτε στα τυχαία κατανεμημένα και ισόποσα χρώματα. Τα παιδιά αυτού του σταδίου ήταν ικανά να καταλάβουν ότι αυτό το βέλος μπορούσε να πέσει σε οποιοδήποτε χρώμα, ενώ δεν μπορούσαν να καταλάβουν τη διαφορά ανάμεσα στις έννοιες του βέβαιου και του αβέβαιου. Οι κρίσεις τους, όσον αφορά στα περισσότερο και λιγότερο πιθανά γεγονότα, και ο δειγματικός χώρος που έδινε την καλύτερη πιθανότητα για το επιδιωκόμενο ενδεχόμενο, ήταν βασισμένα σε κριτήρια αριθμών από τα οποία μόνο ένα υποβάλλονταν σε σύγκριση αριθμών. Σύμφωνα με τον Piaget και Inhelder, οι κρίσεις των παιδιών, όπως χαρακτηριστικά ανέφεραν, βρίσκονταν σε «έναν κόσμο αισθητηριακών και υποκειμενικών διαισθήσεων» (σελ. 136).

Η έρευνα των Piaget και Inhelder συνεχίστηκε με τα ίδια ερωτήματα και στο επόμενο στάδιο ανάπτυξης των συγκεκριμένων πράξεων. Τα παιδιά αυτού του σταδίου όπως φάνηκε καταλάβαιναν την ιδέα του προοδευτικού και τυχαίου ανακατέματος, αλλά ακόμη πίστευαν περισσότερο στην προβλεψιμότητα και στην αντιστρεπτότητα. Ήταν ικανά να αναγνωρίσουν ότι το περιστρεφόμενο βέλος του παιχνιδιού μπορούσε να σταματήσει σε οποιοδήποτε χρώμα, ακόμη και σε κάποιο χρώμα που είχε σταματήσει στην τελευταία προσπάθεια.

Επίσης, μπορούσαν να διαχωρίσουν τις έννοιες του βέβαιου και του αβέβαιου, να βρίσκουν όλους τους πιθανούς συνδυασμούς ενός δειγματοχώρου, να επιχειρηματολογούν υπέρ της χρησιμοποιούμενης στρατηγικής. Επιπλέον, παρόλο που σε κάποιες απαντήσεις τους βασίζονταν σε συγκρίσεις αριθμών, δεν ήταν ικανά να χρησιμοποιήσουν ανάλογο συλλογισμό στον καθορισμό καταλληλότερου δείγματος χώρου για το επιδιωκόμενο ενδεχόμενο και δεν μπορούσαν να αναγνωρίσουν το νόμο των μεγάλων αριθμών, έχοντας την αντίληψη ότι διανομές γίνονταν περισσότερο με κανονικό και συμμετρικό τρόπο, όσο οι προσπάθειες αυξάνονταν.

Η ίδια έρευνα πραγματοποιήθηκε σε παιδιά που βρίσκονταν στο στάδιο των τυπικών και λογικών πράξεων. Ο Piaget και η Inhelder ισχυρίστηκαν ότι τα παιδιά αυτά ήταν ικανά να αντιληφθούν τη φύση του πραγματικού και του προοδευτικού τυχαίου ανακατέματος, την απιθανότητα της αντιστρεπτότητας, το νόμο των μεγάλων αριθμών που φανερώνονταν στους μεγάλους αριθμούς πιθανών συνδυασμών, να τοποθετούν σε κατηγορίες τα αποτελέσματα του περιστρεφόμενου βέλους του παιχνιδιού και τις χρησιμοποιούμενες συστηματικές και ολοκληρωμένες στρατηγικές επιδεικνύοντας έτσι σε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς στο δειγματικό χώρο. Επιπρόσθετα, οι κρίσεις τους, όσον αφορά στο περισσότερο και στο λιγότερο πιθανό γεγονός και στο δειγματικό χώρο που έδινε τη μεγαλύτερη πιθανότητα για το επιδιωκόμενο γεγονός, βασίζονταν στις συγκρίσεις αριθμών και ήταν ικανοί να χρησιμοποιήσουν ανάλογο συλλογισμό για τον καθορισμό του καταλληλότερου δειγματικού χώρου για το επιδιωκόμενο ενδεχόμενο. Παρατηρήθηκε πως τα παιδιά αυτά ήταν ικανά να προβλέπουν τη μορφή της φυσικά δημιουργούμενης κανονικής ορθογώνιας κατανομής της πιθανότητας, να κατανοούν την αναλογικότητα όσον αφορά στη συμμετρία των διανομών και να καταλαβαίνουν το νόμο των μεγαλύτερων αριθμών, χάρη στον οποίο αναγνώρισαν ότι οι διανομές γίνονταν περισσότερο κανονικές και συμμετρικές όσο αυξάνονταν ο αριθμός των προσπαθειών(Jones & Thornton, 2005).

Εν συντομία ο Piaget και ο Inhelder ισχυρίστηκαν πως τα παιδιά δεν ήταν ικανά να ασχοληθούν με την έννοια της πιθανότητας, την κατανόηση του αναλογικού και συνδυαστικού συλλογισμού μέχρι να φθάσουν στο στάδιο των τυπικών λογικών πράξεων.

Παρόλο που παρατήρησαν πως τα παιδιά του σταδίου συγκεκριμένων πράξεων ότι μπορούσαν να διαφοροποιήσουν την έννοια του βέβαιου από αυτή του αβέβαιου και ότι είχαν αρχίσει να ποσοτικοποιούν τις πιθανότητες σε περιορισμένες καταστάσεις , ο ισχυρισμός των Piaget και Inhelder που έθετε ως ανάγκη την ύπαρξη επίσημων εγχειρημάτων που να αφορούν στην έννοια της πιθανότητας, τέθηκε ως ισχυρό εμπόδιο περιορίζοντας τη μελέτη των πιθανοτήτων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και στα πανεπιστήμια που αφορούσαν στην επιστήμη των μαθηματικών για πάνω από τρεις δεκαετίες.

Άλλες ψυχολογικές μελέτες αυτής της περιόδου σχεδιάστηκαν για να εξετάσουν τις σκέψεις των ανθρώπων, κάτω από ποικίλα είδη ενισχύσεων, που έκαναν προβλέψεις σε τυχαία πειράματα τα οποία είχαν δύο αποτελέσματα. Οι πιθανότητες εισόδου δε αποκαλύπτονταν, παρά μόνο μετά από πολλές προσπάθειες. Τα αποτελέσματα αυτών των μελετών έδειξαν ότι παιδιά ηλικίας 6 ως 9 χρόνων είχαν μεγαλύτερη τάση για τη δημιουργία στρατηγικών που έδειχναν το συνδυασμό των εισαγόμενων πιθανοτήτων, ενώ παρουσίαζαν λιγότερο την προδιάθεση να μεγιστοποιούν στρατηγικές απ' ότι οι ηλικίες των 3 ως 20 ετών. Ανάλογες μελέτες όπως αυτή του Gratch (Jones & Thornton, 2005) ερεύνησαν τις επιπτώσεις που είχαν σε παιδιά και ενηλίκους η πρόβλεψη τυχαίων καταστάσεων που είχαν δύο αποτελέσματα, όπως συνέβη και παραπάνω. Αυτές οι έρευνες αποκάλυψαν ότι νεότερα παιδιά (6 ως 9 χρόνων) παρουσίαζαν μεγαλύτερη εξοικείωση με το μετασχηματισμό των επιπτώσεων, συγκριτικά με τις μεγαλύτερες ηλικιακές ομάδες. Αν και αυτές οι μελέτες έδιναν τη δυνατότητα να αποκαλυφθούν οι σκέψεις των μαθητών όσον αφορά στη δημιουργία συνθηκών τυχαιότητας και εμπειρικής πιθανότητας, δεν έδωσαν πολλές πληροφορίες στην παραδοσιακά κυριαρχούσα σκέψη των μαθητών σχετικά με την κλασική και συνδυαστική πιθανότητα (Scheaffer, Watkins, & Landwehr, 1998).

Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου τα αποτελέσματα των ερευνών δεν υποστήριζαν ουσιαστικά την εισαγωγή της πιθανότητας στο αναλυτικό πρόγραμμα των σχολείων, αν και στις Ηνωμένες Πολιτείες στο Cambridge Conference on School Mathematics (1963), στο School
Mathematics Study Group (1966) και στην Ευρώπη στο Tamas Varga (1969) έκανε την εμφάνισή της. Μολαταύτα, αυτές οι προσπάθειες αποτέλεσαν τα πρώτα δείγματα ενδιαφέροντος για την εισαγωγή της πιθανότητας στο δημοτικό και στο γυμνάσιο κατά τη διάρκεια αυτής της πρώτης φάσης.

3.2. ΦΑΣΗ ΔΕΥΤΕΡΗ: ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΡΕΥΝΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΗ ΑΝΤΙΛΗΨΗ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Αυτή η περίοδος φάνηκε ιδιαίτερα γόνιμη για έρευνες αναφορικά με την πιθανολογική σκέψη παιδιών και ενηλίκων. Μεγάλος όγκος αυτών των ερευνών αφορούσε τις σκέψεις των ανθρώπων αλλά και τις παρανοήσεις σχετικά με την έννοια της πιθανότητας. Η συμβολή του Fischbein ήταν τόσο καθοριστικής σημασίας, ώστε καλό θα ήταν να ξεκινήσουμε με τις έρευνες αυτού έπειτα με τις συνεχείς έρευνες ψυχολόγων και τέλος να αναφερθούμε στην άνθηση των μελετών που πραγματοποίησαν μαθηματικοί εκπαιδευτικοί.

Εκπαιδευτικοί των μαθηματικών ανέλαβαν τη διεκπεραίωση μελετών, όντας περισσότερο επηρεασμένοι από τις έρευνες των Piaget και Fischbein από αυτές των Kahneman και Tversky που αναλύονται εκτενώς παρακάτω. Αυτές οι μελέτες στο σύνολο τους ερεύνησαν τη σκέψη των μαθητών σε ποικίλα ζητήματα των πιθανοτήτων συνοδευόμενες από έναν αριθμό ερευνών που είχαν ενσωματωμένα εκπαιδευτικά προγράμματα ή εξέταζαν την εκπαιδευτική διαδικασία. Το φάσμα των ηλικιών που κάλυψαν αυτές οι μελέτες ήταν από 5 ως 16 χρόνων παιδιά.

Πιο συγκεκριμένα, ο Jones χρησιμοποίησε κλινικές συνεντεύξεις ώστε να αποτιμήσει την παιδική πιθανολογική σκέψη στα παρακάτω πέντε ζητήματα: το δειγματοχώρο, το πιθανό ενδεχόμενο, τον περισσότερο ευνοϊκό δειγματικό χώρο για ένα δοσμένο ενδεχόμενο (δύο εκδοχών), και το δειγματικό χώρο που δίνει σε κάθε ενδεχόμενο ίδια πιθανότητα. Παρόλο που ο Jones συμπέρανε ότι η πιθανολογική σκέψη ξεκίνησε στις πολύ μικρές ηλικίες σε μέτριο βαθμό, παρατήρησε σε αντίθεση με τους Inhelder και Piaget, ότι αντί να κατατάσσουν σε λίστα τα αποτελέσματα, υιοθέτησαν μια πιο ντετερμινιστική στάση στην πρόβλεψη του αποτελέσματος που θα έρχονταν (όπως με τη ρίψη ενός ζαριού). Αναφορικά με το κομμάτι της εκμάθησης, ο Jones ισχυρίστηκε ότι τα παιδιά αντιμετώπιζαν δυσκολίες στο άθροισμα αποτελεσμάτων μη συνεχόμενων ενδεχομένων.

Έπειτα, ο Green παίρνοντας μεγάλο σε αριθμό δείγμα μαθητών (περίπου 3000 άτομα) ηλικίας 11 ως 16 χρόνων, προσπάθησε να αποτιμήσει τη σκέψη των μαθητών σχετικά με τις έννοιες με τις οποίες ασχολήθηκε και ο Jones: αναπαραστάσεις τυχαιότητας, δειγματοχώρος, δενδρικά διαγράμματα, πιθανό ενδεχόμενο, πιθανό δειγματικό χώρο για το target event. Κατέληξε πως οι μαθητές όλων των επιπέδων αντιμετώπιζαν προβλήματα στο διαχωρισμό των τυχαίων και μη τυχαίων κατανομών και ότι δεν μπορούσαν να εκτιμήσουν τα χαρακτηριστικά των τυχαίων και ελεύθερων συνθηκών. Ακόμη, ισχυρίστηκε πως οι μαθητές είχαν εξαιρετικές δυσκολίες με τα αντικείμενα των δειγματοχώρων και αποσπάτο από τα μη συνεχόμενα ενδεχόμενα. Επιπλέον, παρατήρησε ότι δεν ήταν ικανά να χρησιμοποιήσουν αναλογίες στα πιο ευνοϊκά αντικείμενα του δειγματοχώρου και ότι δυσκολεύονταν με τις αρχές του πολλαπλασιασμού. Ενώ κατέληξε πως οι περισσότεροι μαθητές μέχρι και την ηλικία των 16 δεν είχαν κατακτήσει το τελευταίο στάδιο του Piaget, το στάδιο των τυπικών λογικών πράξεων (Jones και Thornton , 2005).

Παρόλο που οι προαναφερθείσες ξεκίνησαν να χτίζουν την διδακτική θεωρία για την πιθανολογική μάθηση, το έργο του Heinz Steinbring, προς το τέλος αυτής της φάσης, παρήγαγε μια παιδαγωγική που αναγνωρίζει τις ξεχωριστές ανάγκες της έννοιας της πιθανότητας. Βασιζόμενος στην επιστημολογική ανάλυση της φύσης της στοχαστικής, ο Steinbring (1991) εξέτασε την έννοια της πιθανότητας και από την εμπειρική αλλά και από την θεωρητική της πλευρά. Ισχυρίστηκε πως ούτε το εμπειρικό αλλά ούτε και το κλασικό μαθηματικό μοντέλο μπορούσαν από μόνα τους να εκφράσουν την έννοια του τυχαίου και της πιθανότητας. Δεδομένης της έμφασης του Steinbring για τη σύνδεση της εμπειρικής και της θεωρητικής πιθανότητας, οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές αποτέλεσαν ένα ισχυρό εργαλείο στην δημιουργία λογισμικών που να πληρούν τους όρους προσομοίωσης και να παράγουν πειραματικά δεδομένα.

3.2.1. Η έρευνα του Efraim Fischbein: Πιθανολογική διαίσθηση

Παρόλο που το έργο του Fischbein βασίστηκε στην έρευνα του Piaget κατέληξε σε μια εντελώς διαφορετική κατεύθυνση. Το ενδιαφέρον του για την ανάπτυξη και τη διδασκαλία των πιθανοτήτων στα παιδιά οδήγησε σε μια ιδιαίτερα δημιουργική εργασία η οποία σχετίζονταν με τις πρωτεύουσες και δευτερεύουσες διαισθήσεις.

Σύμφωνα με τους Jones και Thorton (2005), ο Fischbein ισχυρίζεται πως η διαίσθηση είναι μια γνωστική κατάκτηση ή έστω μια αυθόρμητη και συνολική σκέψη η οποία λειτουργεί σαν εσωτερική απόδειξη για το άτομο που πιστεύει σε κάτι. Επίσης, οι άνθρωποι παρουσιάζουν συνήθως ως πειστήριο την διαίσθηση, σε περιπτώσεις που αναφερόμαστε σε αριθμούς, στη γεωμετρία και στις φυσικές επιστήμες. Στο επίκεντρο της θεωρίας του Fischbein βρίσκεται η προσαρμοστικότητα της διαίσθησης και γι’ αυτό το λόγο μπορεί να επηρεαστεί από τη συστηματική διδασκαλία. Αυτή η θεωρητική του θέση είναι αντίθετη με αυτή του Piaget, έτσι ο πρώτος έκανε ένα σαφή διαχωρισμό ανάμεσα στις πρωτεύουσες και δευτερεύουσες διαισθήσεις.

Ο Fischbein δήλωσε πως οι πρωτεύουσες διαισθήσεις ότι είναι πεποιθήσεις γνωστικού περιεχομένου που προκύπτουν από την εμπειρία του ατόμου, χωρίς να είναι απαραίτητη η ύπαρξη συστηματικής διδασκαλίας. Παραδειγματικά, ένα μικρό σε ηλικία παιδί ίσως να χρησιμοποιήσει την πρωτεύουσα διαίσθηση για να απαντήσει σε ένα ερώτημα που αφορά την περιστροφή ενός βέλους πάνω σε ένα δίσκο που είναι χωρισμένος σε δύο άνισες περιοχές με διαφορετικό χρώμα. Σε αυτήν την περίπτωση ενδεχόμενη απάντηση θα μπορούσε να είναι αυτή που βασίζεται στο αγαπημένο χρώμα του παιδιού.

Αντίθετα, οι δευτερεύουσες διαισθήσεις αναδομούν γνωστικές πεποιθήσεις που αποκτήθηκαν μέσω διδασκαλίας ή μέσα από το περιεχόμενο μιας συγκεκριμένης εργασίας. Παρόλο που η πρωτεύουσα διαίσθηση ενός ατόμου μπορεί να ανακατασκευαστεί σαν συνέπεια της διδασκαλίας, είναι ακόμη πιθανό να ξαναεμφανιστεί σε μια διαφορετική αλλά συναφή εργασία. Στην ουσία, προκειμένου να μη χαθεί η πρωτεύουσα διαίσθηση, το άτομο «χτίζει» μια δευτερεύουσα διαίσθηση για μια συγκεκριμένη εργασία. Η οικοδόμηση ,λοιπόν, της δευτερεύουσας συμβαίνει αυθόρμητα και ολοκληρωτικά, όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Shaughnessy (1992, σελ. 480) αυτή η διαδικασία λειτουργεί σαν «μια εμπειρία που βασίζεται στη gestalt ψυχολογία» ή αλλιώς στη μορφολογική θεωρία.

Από την πλευρά της διδασκαλίας και της μάθησης της πιθανότητας, η προσφορά του Fischbein είναι ιδιαίτερα σημαντική, καθώς ερεύνησε τις διαισθήσεις κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Οι ηλικίες των παιδιών που ερεύνησε ήταν αυτές των νηπίων, της τρίτης και έκτης τάξης. Το θέμα της έρευνας σε αυτό το δείγμα αφορούσε τις διαισθήσεις και τα προβλήματα της συνδυαστικής, ενώ οι έρευνες έδειξαν ότι τα παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας είχαν καλύτερες επιδόσεις.

Παρόλο που ο Fischbein πίστευε ότι η διδασκαλία μπορεί να βελτιώσει τις διαισθητικές ιδέες αναφορικά με την έννοια της πιθανότητας (Shaughnessy, 1992), παρατήρησε αργότερα πως πολλές πλευρές παραμένουν ακόμα αφανείς είτε επειδή δεν έχουν μελετηθεί ακόμη, είτε επειδή οι δυνατότητες των χρησιμοποιούμενων εργαλείων ήταν περιορισμένες. Μια σύνοψη των χαρακτηριστικών των αναπτυξιακών σταδίων κατά τον Fischbein, αναπτύχθηκε από τον Way το 2003 (Jones και Thornton, 2005) η οποία παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.

Σαν εξέλιξη της έρευνας του ο Fischbein, σύμφωνα με τους Jones και Thornton (2005), εισήγαγε τα τρία παρακάτω αναπτυξιακά στάδια που αφορούσαν τα χαρακτηριστικά της πιθανολογικής διαίσθησης των μαθητών (στάδιο προσχολικής ηλικίας, στάδιο συγκεκριμένων πράξεων και στάδιο τυπικών λογικών πράξεων). Κάθε στάδιο είχε στοιχεία και από την κλασική και από την εκ των υστέρων αντίληψη της πιθανολογικής διαίσθησης. Αν και αυτά τα στάδια εκ πρώτης όψεως παρουσίαζαν κάποια ομοιότητα με αυτά των Piaget και Inhelder, στην ουσία διέφεραν στο ότι ο Fischbein συμπεριέλαβε στους χαρακτηρισμούς του και τον αντίκτυπο των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων. Ακόμη, το περιεχόμενο της έρευνας του, αναφορικά με την εκπαίδευση, ήταν ένας οιωνός καθώς οι εκπαιδευτικές δραστηριότητες αναδύθηκαν στο αναλυτικό πρόγραμμα τα τελευταία 15 χρόνια.

Στάδιο	**Διαίσθηση για το τυχαίο**	**Εκτίμηση πιθανότητας ενός γεγονότος**	**Αντίκτυπος διδασκαλίας**	**Εγχειρήματα συνδυαστικής**
Προσυλλογιστικό (<7 χρόνων)	*μερική αίσθηση για τη μη προβλεψιμότητα * προσαρμογή των προβλέψεων ώστε να ανταποκρίνονται με τα αποτελέσματα των προσπαθειών	* μερικές φορές βασίζουν μια πιθανότητα στην πιθανότητα του γεγονότος	* η εκπαίδευση έχει μηδαμινή επίδραση	* διευκολύνονται στην κατανόηση συνδυασμών χρησιμοποιώντας χειροπιαστά αντικείμενα
Συγκεκριμένων πράξεων (7 ως 12 χρόνων)	* η έννοια του τυχαίου οργανώνεται σε μια θεμελιώδη δομή	* γίνονται εκπαιδευτικές συγκρίσεις πιθανότητας γεγονότων σε βασικές καταστάσεις	*ανταποκρίνονται στη διδασκαλία * αναλογικός συλλογισμός (δεν έχει κατακτηθεί πλήρως)	* ολοκληρώνει απλές διαδικασίες μέσω προσπαθειών και λαθών
Τυπικών λογικών πράξεων (>11 ως 12 χρόνων)	* η ανάπτυξη ενός πιο αφηρημένου συλλογισμού οδηγεί σε πληρέστερη κατανόηση της έννοιας της πιθανότητας * ενισχύεται η πρόβλεψη	* οι συγκρίσεις χρησιμοποιώντας την πιθανότητα των γεγονότων γίνονται πιο σύνθετες	*ανταποκρίνονται σε διδασκαλίες που οδηγούν στην οικοδόμηση των πιθανοτήτων	* συστηματικές διαδικασίες δεν έχουν αναπτυχθεί πλήρως, αλλά ανταποκρίνονται στην διδασκαλία

Πίνακας 1. Σύνοψη χαρακτηριστικών σταδίων ανάπτυξης του Fischbein κατά Way (2003).

3.2.2. Ψυχολογική συνεισφορά- κλειδί: Ευρετικές στρατηγικές (Heuristics)

Σύμφωνα με τον Jones και Thornton (2005), ακολούθησε η έρευνα των Kahneman και Tversky η οποία σχετίζονταν με τις λύσεις που δίνονταν χωρίς κρίση, τις ευρετικές στρατηγικές (Heuristics) και με τις προκαταλήψεις. Για τους δυο τελευταίους ερευνητές οι λύσεις που δίνονταν, χωρίς κρίση, ήταν στρατηγικές που στατιστικά χρησιμοποιούνταν από αφελείς ανθρώπους για να κάνουν πιθανολογικές εκτιμήσεις, αναφερόμαστε λοιπόν στις κρίσεις υπό αβεβαιότητα. Αυτές οι στρατηγικές μπορούν να βοηθήσουν στο να εκτιμήσει κανείς μια πιθανότητα, αλλά μπορούν και να οδηγήσουν σε προκαταλήψεις ή και παρανοήσεις. Οι στρατηγικές αυτές είναι γνωστές ως: αντιπροσωπευτικότητα, διαθεσιμότητα, ρύθμιση (adjustment) και αγκύστρωση (anchoring). Αν και οι αρχέτυπες περιγραφές ήταν αρκετά γενικές, συγκεκριμένες απόψεις αυτών των τριών στρατηγικών αποτέλεσαν την εστία της προσοχής στο μεγαλύτερο μέρος της έρευνας στην εκμάθηση των πιθανοτήτων.

Πιο συγκεκριμένα, άνθρωποι που βασίζονται στη στρατηγική της αντιπροσωπευτικότητας εκτιμούν τις πιθανότητες στο βαθμό που ένα γεγονός Α είναι τυπικό. Έχει παρατηρηθεί πως άτομα όλων των ηλικιών που έχουν εμπειρία στην πολυπλοκότητα της πιθανότητας χρησιμοποιούν την αντιπροσωπευτικότητα και συνεπώς αυτό είναι καταλυτικής σημασίας σε ό,τι τη διδασκαλία και τη μάθηση των πιθανοτήτων. Επίσης, όσον αφορά στη στρατηγική της διαθεσιμότητας, τα άτομα που τη χρησιμοποιούν αποτιμούν την πιθανότητα ενός γεγονότος σύμφωνα με την ευκολία των προηγούμενων εμφανίσεων των γεγονότων. Παρόλο που δεν έχει πραγματοποιηθεί εύρος ερευνών αναφορικά με τη χρήση των μαθητών της στρατηγικής της διαθεσιμότητας, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να γνωρίζουν τη ροπή που έχουν οι μαθητές σε αυτήν (Jones και Thornton, 2005). Επιπλέον, άτομα που χρησιμοποιούν τη στρατηγική της ρύθμισης και της αγκύστρωσης κάνουν ανεπαρκείς πιθανολογικές προβλέψεις, καθώς ξεκινούν από μια αρχική τιμή η οποία είχε προσαρμοστεί στη βάση των δοσμένων πληροφοριών του προβλήματος. Δύο παραδείγματα που είναι συνήθη στην πιθανολογική βιβλιογραφία η σύνδεση λαθών (conjunction fallacy) και η διάζευξη λαθών. Στην πρώτη περίπτωση ένα παιδί θα μπορούσε να αποδώσει μεγαλύτερη πιθανότητα στο να έρθουν δυο συνεχόμενα εξάρια από το να έρθει ένα μόνο έξι στην επόμενη ρίψη του ζαριού. Ενώ, στη δεύτερη περίπτωση θα έδινε μεγαλύτερη πιθανότητα στο να έρθει ένα έξι σε μια ρίψη από το να έρθει το λιγότερο ένα έξι σε τρεις ρίψεις. Οι έρευνες, όμως, σχετικά με τη διδακτική των μαθηματικών δεν σταματούν εδώ. Η έρευνα του Konold γνωστή και ως προσέγγιση εκ του αποτελέσματος ξεκινά αυτή την περίοδο κι συνεχίζει ως και την επόμενη. Ο Konold έδωσε διαφορετική εξήγηση στις στρατηγικές που ειπώθηκαν από τους Kahneman και Tversky. Ο πρώτος ισχυρίστηκε πως οι μαθητές που συμμετείχαν στην εργασία των τελευταίων αντί να την διεκπεραιώσουν συγκεκριμενοποιώντας το αποτέλεσμα, απλά προέβλεπαν το επόμενο αποτέλεσμα (προσέγγιση εκ του αποτελέσματος). Αυτή η προσέγγιση επηρεάζει από πολλές πλευρές τη σκέψη των μαθητών όσον αφορά στην πιθανότητα και στο ανεξάρτητο γεγονός.

Όσον αφορά στην επιρροή που ασκούν οι ευρετικές στρατηγικές στην σκέψη των μαθητών οι έρευνες δεν σταμάτησαν στα παραπάνω. Ο Shaughnessy, χρησιμοποιώντας εργασίες σαν αυτές των Kahneman και Tversky, μετά από ένα εντατικό πρόγραμμα μελέτης των στρατηγικών που ακολουθούν παιδιά του γυμνασίου προσπάθησε να αποτιμήσει τις σκέψεις τους (Jones και Thornton , 2005). Αν και οι ομάδες των μαθητών που εξετάστηκαν έδειξαν σημαντικά λιγότερη εμπιστοσύνη σε τέτοιου είδους στρατηγικές και προκαταλήψεις, ο Shaughnessy εστίασε στο βαθμό που οι προκαταλήψεις ήταν βαθιά ριζωμένες στα παιδιά.
Τέλος, οι έρευνες που πραγματοποιήθηκαν κατά τη δεύτερη φάση, ειδικά αυτές των Fischbein, Kahneman και Tversky, Green, και Steinbring, παρείχαν ένα κατανοητό γνωστικό και παιδαγωγικό τοπίο για την έννοια της πιθανότητας που θα χρησιμοποιηθεί ευρέως στην ανάπτυξη του αναλυτικού προγράμματος της επόμενης φάσης (Jones και Thornton, 2005).

3.3. ΦΑΣΗ ΤΡΙΤΗ: ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΕΡΕΥΝΑ

Την τελευταία δεκαπενταετία το αναλυτικό πρόγραμμα παγκοσμίως ανασχημάτισε τα σχολικά μαθηματικά διευρύνοντας το πεδίο των μαθηματικών, το οποίο τα παιδιά αναμένονταν να μάθουν. Επιπλέον, με τη συνεχόμενη υποστήριξη για κοινωνικοκονστρουβιστική και αλληλεπιδραστική μάθηση, εμφανίστηκε αξιοσημείωτο ενδιαφέρον για τις έρευνες που αφορούσαν κατευθείαν τη σχολική τάξη. Κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης, το μεγαλύτερο μέρος των ερευνών που αφορούσε στη μάθηση των πιθανοτήτων στόχευε στην υποστήριξη της ανάπτυξης ενός νέου αναλυτικού προγράμματος και η διδακτική σχετίστηκε με τον ανασχηματισμό του αναλυτικού προγράμματος. Αν και οι έρευνες των προηγούμενων φάσεων εστίαζαν στις αντιλήψεις των μαθητών και στην κατανόηση που έδειχναν για την έννοια της πιθανότητας, η παρούσα ερευνητική περίοδος εστίαζε περισσότερο στη σύνδεση που είχαν οι διάφορες ηλικίες με τα διαφορετικά επίπεδα της σχολικής διδασκαλίας (δημοτικό, γυμνάσιο, λύκειο, πανεπιστήμιο) και στο ευρύτερο πεδίο της πιθανολογικής γνώσης. Το ευρύτερο πεδίο της πιθανολογικής γνώσης αντικατοπτρίζεται στο ισχυρό ενδιαφέρον ερευνών με εκ των υστέρων και υποκειμενικούς προσανατολισμούς όπως επίσης και από το ενδιαφέρον της κλασικής προσέγγισης. Η έρευνα αναφορικά με τη μάθηση αυτής της φάσης καθοδηγήθηκε από την επικρατούσα ανάγκη για την παροχή ενημέρωσης στους δασκάλους για την πιθανολογική γνώση και τις πεποιθήσεις των μαθητών σε ποικίλα επίπεδα σχολικών τάξεων.
Οι έρευνες είχαν κιόλας αρχίσει να εστιάζουν στην ομοιόμορφη συλλογική σκέψη των μαθητών σε εκπαιδευτικά περιβάλλοντα. Η εμφάνιση διδακτικών πειραματικών σχεδιασμών, ρίχνοντας το κέντρο βάρους τους και σε ψυχολογικούς και σε κοινωνικούς παράγοντες, παρείχε μια ώθηση για έρευνα της πιθανότητας μέσα στη σχολική τάξη (Pratt, 2000, Pratt & Noss, 2002). Αυτές οι μελέτες άρχισαν να τεκμηριώνουν τροχιές μάθησης (Simon, 1995), δραστηριότητες- κλειδιά, όπως μικρόκοσμους και άλλα λογισμικά και, επιπλέον περιγραφές

κοινωνικομαθηματικών κανόνων και μαθηματικών πρακτικών στη σχολική τάξη όσον αφορά στην έννοια της πιθανότητας (Cobb, 2000).

Ακόμη, ο τομέας της εκπαίδευσης και των διδακτικών περιβαλλόντων τονίζει ό,τι έχουν αποκαλύψει οι έρευνες σχετικά με την εκπαίδευση και τα διδακτικά περιβάλλοντα της πιθανολογικής μάθησης. Ο Hawkins (1990) υποστηρίζει ότι η εξάσκηση σε στοχαστικές έννοιες δεν μπορεί να μειωθεί σε διδακτικές θεμελιώδεις δομές και εργαλεία λύσης προβλημάτων. Έχει λεχθεί ακόμη, πως τα παιδιά πρέπει να βοηθηθούν στην ανάπτυξη τρόπων συλλογισμών και ενός δυνατού συστήματος σωστών διαισθήσεων. Ενώ, το κριτικής σημασίας άτομο σε όλα τα μαθησιακά περιβάλλοντα είναι ο δάσκαλος. Ένας μεγάλος αριθμός ερευνητών έχει τονίσει πως αρχικά είναι ιδιαίτερα σημαντικό να καταρτιστούν οι δάσκαλοι στην έννοια της πιθανότητας.

Τέλος, αν και είναι πρόωρο να εκτιμήσουμε ιστορικά τη σημασία της πιθανολογικής έρευνας σε αυτήν την τρίτη και σύγχρονη φάση, είναι ξεκάθαρο ότι η ένταση κα η ποικιλία αυτής της έρευνας είναι πολύ μεγαλύτερη συγκριτικά με τις δύο προηγούμενες φάσεις. Ενώ, δεν έχει αποσαφηνιστεί ακόμα, αν η έρευνα που πραγματοποιήθηκε στη Φάση 3, αν παρέχει το είδος της βοηθητικής «σκαλωσιάς» (scaffolding) για τους δασκάλους και τους μαθητές και αν οι αρχές των ερευνών συμβαδίζουν απόλυτα με τη διακεκριμένη επιστημολογία της έννοιας της πιθανότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4. ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ (Τ.Π.Ε.) ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Είναι γεγονός πως στις μέρες μας κρίνεται ως αναγκαιότητα ο αναπροσδιορισμός των στόχων της εκπαίδευσης και της αλλαγής των εκπαιδευτικών πρακτικών, έτσι ώστε να είναι συμβατές με τις ανάγκες των πολιτών στη σημερινή κοινωνία της μάθησης. Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές όλο και περισσότερο αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της ζωής των ενηλίκων, αλλά και των παιδιών. Σε αυτό το κεφάλαιο περιλαμβάνονται σημαντικά θέματα αναφορικά με τη χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών από τα παιδιά, ενώ παρατίθενται και τα ευρήματα μελετών που αφορούν την αποτελεσματικότητα- καταλληλότητα της χρήσης των Τ.Π.Ε. στην εκπαίδευση.

Αρχικά, όπως αναφέρεται και από τη Σολομωνίδου (2006) οι υπολογιστές και οι Τ.Π.Ε. αποτελούν σήμερα πολυδύναμα και ισχυρά μέσα, τα οποία βοηθούν την αυτόματη επεξεργασία της πληροφορίας σε οποιαδήποτε μορφή, την ταχύτατη αναζήτηση, την αποθήκευση και διάδοση της πληροφορίας, την επικοινωνία μεταξύ των ανθρώπων σε οποιονδήποτε χρόνο και από οποιαδήποτε γωνιά του πλανήτη και τη μεταφορά- μεταβίβαση πακέτων ηλεκτρονικού υλικού. Ακόμη, οι υπολογιστές και οι Τ.Π.Ε. μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία διδασκαλίας και μάθησης σε μια ποικιλία γνωστικών αντικειμένων κα ως ισχυρά γνωστικά ή νοητικά εργαλεία, μια διάσταση η οποία οφείλεται στις πρωτοφανείς δυνατότητες αλληλεπίδρασης μεταξύ των μέσων αυτών με το χρήστη. Διαμορφώνονται έτσι νέοι γραμματισμοί και επιχειρείται η εισαγωγή των Τεχνολογιών Πληροφορικής και Επικοινωνιών (ΤΠΕ) στην εκπαίδευση.

Παρόλα αυτά, παλαιότερες αντιλήψεις υποστήριζαν ότι τα παιδιά πρέπει να κατακτήσουν πρώτα το στάδιο των συγκεκριμένων πράξεων και έπειτα να εργαστούν σε υπολογιστές. Έρευνες, παρόλα αυτά έδειξαν ότι τα παιδιά προσχολικής ηλικίας είναι περισσότερο ικανά απ’ ότι θεωρούνταν και μπορούν κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες να εκφράσουν σκέψεις που παραδοσιακά θα υπάγονταν στο στάδιο των συγκεκριμένων πράξεων. Επίσης, οι έρευνες δείχνουν ότι ακόμα και μικρά παιδιά του προσυλλογιστικού σταδίου μπορούν να χειριστούν κατάλληλα προγράμματα υπολογιστών (Clements και Nastasi, 1992). Ένα άλλο εμπόδιο που έχει διατυπωθεί είναι ότι οι υπολογιστές απαιτούν συμβολική ικανότητα που σημαίνει ότι δεν είναι κάτι το χειροπιαστό. Αυτό όμως δείχνει να αγνοεί ότι τα παιδιά εκφράζονται και επικοινωνούν μέσω των συμβόλων με χειρονομίες ή στη γλώσσα (Clements, 2002). Επιπλέον, το τι είναι συγκεκριμένο (concrete) για ένα παιδί σχετίζεται περισσότερο με το αν έχει νόημα για αυτό ή με το αν μπορεί να το χειριστεί σε σύγκριση με τα φυσικά του χαρακτηριστικά. Αυτό επιβεβαιώθηκε και από έρευνα που πραγματοποιήθηκε σε μαθητές τρίτης τάξης που χρησιμοποίησαν υλικά και λογισμικό ηλεκτρονικού υπολογιστή που επιδείκνυε την έννοια της ταξινόμησης κα της λογικής σκέψης. Τα παιδιά που χρησιμοποίησαν χειροπιαστά υλικά έδειχναν μεγαλύτερη πρόβλεψη και συγκεντρώνονταν περισσότερο στη σκέψη τους κατά τη διάρκεια της ταξινόμησης (Clements, 2002). Έτσι, το ερώτημα δεν είναι αν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές είναι κάτι το συγκεκριμένο (concrete), αλλά αν παρέχουν εμπειρίες που να εξυπηρετούν τη γνώση των παιδιών.

Πρώτα, όμως καλό θα ήταν να αποσαφηνίσουμε την έννοια των μικρόκοσμων. Οι μικρόκοσμοι λοιπόν, είναι ένα μέρος όπου ο μαθητής παίζοντας, μπορεί να ξεπεράσει τυχόν συγχύσεις και έπειτα να σκεφτεί σημαντικές εμπνεύσεις και ιδέες του. Είναι περιβάλλοντα όπου οι άνθρωποι μπορούν να εξερευνήσουν και να μάθουν από αυτά που λαμβάνουν πίσω από τον υπολογιστή τους, κατά τη διάρκεια της εξερεύνησης τους. Οι μαθητές λοιπόν των μικρόκοσμων είναι σχεδιαστές και χρήστες παράλληλα, καθώς δημιουργούν εργαλεία και αντικείμενα για την επίλυση των προβλημάτων τους(Hoyles, Noss και Adamson, 2002). Αυτός ο διπλός ρόλος των εκπαιδευόμενων οδηγεί απευθείας στην ιδέα του κονστρουκτιβισμού, κατά την οποία όπως χαρακτηριστικά έχει αναφέρει και ο Papert (1991) «η αποτελεσματική μάθηση δεν έρχεται με το να προσπαθεί ο δάσκαλος να βρει εναλλακτικούς τρόπους για διδασκαλία, αλλά με το να δίνει καλύτερες ευκαιρίες στο μαθητή για να κατασκευάσει ».

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω καταλήγει κανείς στο ότι η αυξανόμενη διάχυση των Τ.Π.Ε. στο κοινωνικό περιβάλλον εκθέτει τα παιδιά σε αυτές από νεαρές ηλικίες εγείροντας ερωτήματα, προκλήσεις και ευκαιρίες σε γονείς και εκπαιδευτικό σύστημα. Ο αρχικός «αφορισμός» των Τ.Π.Ε. και η αγνόηση δεν είναι πλέον αποτελεσματικές στρατηγικές και αντικαθίστανται σταδιακά από ρεαλιστικότερες στάσεις με την επίδραση και των σχετικών ερευνών. Σήμερα προτείνεται η χρήση των Τ.Π.Ε. από την ηλικία των τριών ετών ενώ το ζήτημα που τίθεται πλέον δεν αφορά στο αν πρέπει να χρησιμοποιούν τα παιδιά υπολογιστές και από ποια ηλικία αλλά στο να καταλάβουμε πώς οι Τ.Π.Ε. βοηθούν καλύτερα την μάθηση, τι είδους μάθηση ενισχύουν και πώς θα εξυπηρετήσουν καλύτερα της ανάγκες διαφορετικών πληθυσμών και γνωστικών αντικειμένων (Clements, 1999).

Ενώ οι σύγχρονοι ερευνητές διευρύνοντας το περιεχόμενο του όρου Τ.Π.Ε. ασχολούνται εκτός από τον επιτραπέζιο ηλεκτρονικό υπολογιστή με τεχνολογίες φορητές, ενσωματωμένες σε διάφορα υλικά (όπως e-toys), συστήματα μικτής πραγματικότητας, καθώς και με άλλες συσκευές όπως βιντεοκάμερες, ψηφιακές φωτογραφικές, τηλέφωνο, οικιακές συσκευές με ενσωματωμένους μικροεπεξεργαστές, έξυπνα παιχνίδια, και ηλεκτρονικούς πίνακες (Φεσάκης, 2008).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5. ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ (Τ.Π.Ε.) ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τα τελευταία χρόνια οι εφαρμογές της ψηφιακής τεχνολογίας φαίνεται να επηρεάζουν την εκμάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρείται ωφέλιμο να παρουσιαστούν ορισμένες χαρακτηριστικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν μαθητές στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών και έπειτα περιγράφεται πως ο παρεμβατικός ρόλος των ΤΠΕ μπορεί να εξομαλύνει αυτές και να δώσει μια άλλη διάσταση στη μαθηματική εκπαιδευτική διαδικασία.

Όσον αφορά στην εκμάθηση του γνωστικού αντικειμένου των μαθηματικών, υπάρχει μια ουσιώδης δυσκολία. Οι μαθηματικές έννοιες απορρέουν από ενδομαθηματικές συνδέσεις οι οποίες ενώνουν τη νέα μαθηματική γνώση με την παλιά και οι εξωμαθηματικές έννοιες προκύπτουν από περιβάλλοντα που συμπεριλαμβάνουν τον εμπειρικό κόσμο. Έχει παρατηρηθεί πως ενώ οι μαθητές είναι ικανοί να αναγνωρίσουν μια ποικιλία μοτίβων (Stacey, 1989), πολλά από αυτά τα μοτίβα δεν υποστηρίζουν ούτε την έκφραση μιας λειτουργικής σχέσης αλλά και ούτε μια αλγεβρική αναπαράσταση με άμεσο τρόπο. Πράγματι, μαθητές που είναι ικανοί να εφαρμόσουν μια σωστή μέθοδο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, συχνά δεν μπορούν να αρθρώσουν ένα γενικό μοτίβο ή μια σχέση χρησιμοποιώντας τη φυσική τους γλώσσα και η έκφραση τους σε αλγεβρικούς συμβολισμούς είναι ακόμα πιο προβληματική. Πράγματι, σύμφωνα και με τον Arzarello (1991) οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες στο να παρέχουν έγκυρη μαθηματική δικαιολόγηση όσον αφορά στους δικούς τους προτεινόμενους αλγεβρικούς κανόνες. Είναι γεγονός πως ο αλγεβρικός σχηματισμός είναι συχνά αποσυνδεδεμένος από την δραστηριότητα που προηγείται αυτού. Η άλγεβρα θεωρείται ως ο αυτοσκοπός αντί ως ένα εργαλείο επίλυσης.

Το θέμα όμως είναι το περιβάλλον στο οποίο πρέπει να εκφράζεται μια μαθηματική δραστηριότητα ώστε να ενθαρρύνει το μαθητή για να κατακτήσει τις επιδιωκόμενες γνώσεις. Σύμφωνα με τους Noss, Healy και Hoyles (1997) τα παραδοσιακά μέσα, όπως το χαρτί και το στυλό δεν ενθαρρύνουν ιδιαίτερα το μαθητή. Αυτού του τύπου δραστηριότητες προσφέρουν λίγους τρόπους για κατανόηση της προσέγγισης των μαθητών. Αντίθετα, σε περιβάλλον ηλεκτρονικού υπολογιστή, είναι πιθανό να οικοδομούνται εξαιρετικά πλούσιες περιγραφές αναφορικά με τη μαθητική σκέψη μελετώντας τι έχει κατασκευαστεί και πως.

Πράγματι, έρευνες έχουν επαληθεύσει την άποψη ότι οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές μπορούν να βοηθήσουν τα παιδιά να μάθουν μαθηματικά. Για παράδειγμα, μια εργασία που βασίζονταν στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές έδειξε ότι τα παιδιά παρουσίασαν στατιστικά σημαντική βελτίωση στις γνωστικές περιοχές της ανάγνωσης, των μαθηματικών και των επιδόσεων σε τυποποιημένα τεστ (Clements, 2002). Τα αποτελέσματα ήταν πιο έντονα στους μαθητές που πραγματοποίησαν τις εργασίες αυτές για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα από ένα χρόνο.

Η χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών μπορεί να επιφέρει μια σειρά από πλεονεκτήματα στην εκπαιδευτική πρακτική. Τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιούν τους υπολογιστές ως βοηθητικό μέρος της διδασκαλίας για να εξασκηθούν σε αριθμητικές διαδικασίες και να καλλιεργούν βαθύτερα θεμελιώδεις σκέψεις. Η εξάσκηση σε λογισμικό μπορεί να βοηθήσει τα μικρά παιδιά να αναπτύξουν την ικανότητα τους στην αρίθμηση και στην ταξινόμηση (Clements και Nastasi, 1993). Ακόμη, 10 λεπτά ημερησίως ή ακόμα καλύτερα και 20 λεπτά απέδειξαν ότι αρκούν για να βελτιωθεί το επίπεδο των παιδιών στους παραπάνω τομείς των μαθηματικών. Σύμφωνα λοιπόν με αυτήν την προσέγγιση οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές μπορεί να είναι το ίδιο ή περισσότερο αποτελεσματικοί σαν όλες τις υπόλοιπες διδακτικές παρεμβάσεις, όπως η κλασική διδασκαλία, μειώνοντας έτσι το μέγεθος της τάξης (Clements, 2002). Επίσης, σύμφωνα με την Clements (2002), μαθητές που βρίσκονταν στη δευτέρα τάξη και κατανάλωναν κατά μέσο όρο 1 ώρα αλληλεπίδρασης με παιχνίδια στους υπολογιστές για περίοδο 2 εβδομάδων απάντησαν περισσότερο σωστά σε τεστ ταχύτητας συγκριτικά με μαθητές που συμμετείχαν σε ομάδες ελέγχου.

Όσον αφορά στην ηλικία που πρέπει να είναι τα παιδιά για να κατακτήσουν αυτά τα οφέλη, παρατηρήθηκε πως παιδιά ηλικίας 3 χρόνων έμαθαν να ταξινομούν χάρη σε μια δραστηριότητα στον υπολογιστή τόσο εύκολα όπως θα μάθαιναν και με μια χειροπιαστή δραστηριότητα (Clements, 2002). Αξίζει να αναφερθεί έρευνα που πραγματοποιήθηκε σε χώρο νηπιαγωγείου κατά την οποία τα παιδιά που συγκέντρωναν περισσότερες σωστές απαντήσεις ήταν αυτά που συμμετείχαν σε δραστηριότητες που εξελίσσονταν σε περιβάλλον ηλεκτρονικού υπολογιστή και αφορούσαν την αναγνώριση αριθμών, σε σύγκριση με αυτούς που είχαν διδαχτεί τις ίδιες έννοιες από τον δάσκαλο (Clements, 2002). Παρόλα αυτά, υπήρχε μια ένδειξη ότι η εκπαίδευση από έναν δάσκαλο ήταν περισσότερο αποτελεσματική για παιδιά που μόλις ξεκίνησαν να αναγνωρίζουν τα σύμβολα της τάξης, αλλά το αντίθετο αλήθευε για τα πιο ικανά παιδιά. Επιπρόσθετα, σε αυτό το σημείο καλό θα ήταν να αναφερθεί και η περίπτωση των ατόμων με μαθησιακές δυσκολίες στην οποία δεν ενδείκνυται τα εκπαιδευτικά παιχνίδια στον ηλεκτρονική υπολογιστή, επειδή είναι πολύ πιθανό να αποσπάται η προσοχή τους, πράγμα που δυσχεραίνει τη μάθηση τους (Clements, 2002). Επίσης, μοναδικές ικανότητες των ηλεκτρονικών υπολογιστών που παρέχονται σε πρακτικό επίπεδο είναι ο συνδυασμός των οπτικών επιδείξεων, των ζωντανών γραφικών και του λόγου, η δυνατότητα της παροχής της ανάδρασης και της ποικιλίας των αποθηκευμένων αρχείων, η ευκαιρία για εξερεύνηση μιας κατάστασης και η εξατομίκευση. Παρόλα αυτά η αποκλειστική χρήση ενός τέτοιου λογισμικού εξάσκησης δεν θα βοηθούσε τα παιδιά να καταρτιστούν ως μαθηματικά εγγράμματοι σε έναν κόσμο όπου τα μαθηματικά αναπτύσσονται ραγδαία και εφαρμόζονται σε πολλούς και διαφορετικούς τομείς (Clements, 2002).

Λαμβάνοντας, λοιπόν, υπόψη τα παραπάνω θα μπορούσε να ειπωθεί πως οι ΤΠΕ και συγκεκριμένα οι μικρόκοσμοι αυτών, ενσωματώνουν τις μαθηματικές ιδέες. Αυτό συμβαίνει όχι επειδή υπάρχει μια αφηρημένη σύνδεση ανάμεσα στην αναπαράσταση και τη μαθηματική ή ολότητα, αλλά επειδή τέτοιου είδους περιβάλλοντα προσφέρουν την ευκαιρία στους μαθητές να αλληλεπιδράσουν κιναισθητικά και διανοητικά με τις σχεδιαστικές κατασκευές αυτών των ολοτήτων. Ο σχεδιασμός κατάλληλων περιβαλλόντων μάθησης στον ηλεκτρονικό υπολογιστή, όπως επίσης και η διύλιση των αποτελεσματικών δραστηριοτήτων μπορούν να επεκτείνουν σημαντικά την κατανόηση των μαθητών στα γνωστικά αντικείμενα των μαθηματικών (Edwards, 2000). Αξίζει, λοιπόν, να συνεχιστούν οι έρευνες που αφορούν τον παρεμβατικό ρόλο των ΤΠΕ σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, αφενός επειδή μπορούν να εισάγουν ομαλά το μαθητή σε έννοιες ποικίλων γνωστικών αντικειμένων και αφετέρου, επειδή έχουν ενδιαφέρον στην έρευνα για τη μαθηματική εκπαίδευση τόσο ως εργαλείο μάθησης, όσο ως διαγνωστικό εργαλείο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

6. ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ (Τ.Π.Ε.) ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Σε αυτήν την ενότητα περιγράφεται η σχέση των Τ.Π.Ε. με την έννοια των μαθηματικών, ενώ κατευθυντήριος άξονας για τις πληροφορίες που παρέχονται παρακάτω ήταν η διδακτορική εργασία της Drier (2000).

Τα τελευταία χρόνια, σύμφωνα με το National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) θα έπρεπε όλοι οι μαθητές να καλούνται να αναπτύσσουν και να εξάγουν συμπεράσματα λογικής ανάλυσης τα οποία είναι βασισμένα σε δεδομένα ηλεκτρονικού υπολογιστή. Συνίσταται στους μαθητές ηλικίας λυκείου και άνω του δημοτικού να αναπτύσσουν την έννοια στατιστικής ανάλυσης των λογικών συμπερασμάτων και προτείνεται ακόμη να χρησιμοποιούν προσομοιώσεις στους υπολογιστές, ώστε να εξυπηρετείται η μάθηση της πιθανότητας από τους μαθητές. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές ωφέλιμο είναι να κάνουν παρατηρήσεις, να εξάγουν συμπεράσματα λογικής ανάλυσης, να κάνουν εικασίες και να αναπτύσσουν νέες ερωτήσεις και να χρησιμοποιούν ρητούς αριθμούς και την αναλογικότητα ώστε να βελτιώσουν τις παρατηρήσεις τους και τα συμπεράσματα που επιδέχονται λογική ανάλυση.

Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να προμηθευθούν εφαρμογές λογισμικών υλικών όπως Tabletop Jr, Graphers, Probability Toolkit, and Probability Constructor, ώστε να τα χρησιμοποιήσουν στη μελέτη των πιθανοτήτων. Παρόλα αυτά, μόνο ένας περιορισμένος αριθμός ερευνών έχει μελετήσει την αποτελεσματικότητα αυτών των εργαλείων. Δεν υπάρχουν γνωστές μελέτες που να ασχολήθηκαν με την αποτελεσματικότητα των παραπάνω προαναφερθέντων λογισμικών στον πιθανολογικό συλλογισμό των μαθητών (Drier, 2000). Οι μελέτες που περιγράφονται παρακάτω έχουν όλες πραγματοποιηθεί με εφαρμογές λογισμικών σε πανεπιστημιακά περιβάλλοντα.

Πιο συγκεκριμένα, ο Konold (1991) ανέπτυξε και χρησιμοποίησε το λογισμικό *ProbSim* στους κολεγιακούς φοιτητές του και βρήκε ότι ήταν χρήσιμο για μαθητές ώστε να δουν τα αποτελέσματα της προσομοίωσης και ότι έχουν την δυνατότητα να αναλύσουν τα δεδομένα. Πιο πρόσφατα χρησιμοποιήθηκε σε παιδιά γυμνασίου στο SummerMath στο Mt. Holyoke με πολύ θετικά αποτελέσματα. Ο Konold χρησιμοποιεί τις ακόλουθες γενικές διδακτικές οδηγίες προς αποφυγή πιθανολογικών παρανοήσεων:

1. οι μαθητές πρέπει να ερωτούνται για το αν οι απόψεις τους συμπίπτουν με των άλλων,
2. Οι μαθητές θα πρέπει να ελέγχουν κατά πόσο οι απόψεις-γνώσεις τους είναι συνεπείς σε σχετικά θέματα (αν δηλαδή για την ερμηνεία-αντιμετώπιση παρόμοιων καταστάσεων χρησιμοποιούν διαφορετικές και ίσως αλληλοσυγκρουόμενες προσεγγίσεις)
3. οι μαθητές πρέπει να εξετάζουν τις απόψεις τους ενάντια σε εμπειρικές αποδείξεις.

Δυστυχώς, το *ProbSim* διατίθεται σε δασκάλους για τα μαθηματικά μόνο στην αγορά της Αυστραλίας και έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως στην ανάπτυξη επαγγελματικών προγραμμάτων για να προάγουν την κατανόηση των δασκάλων σε ζητήματα πιθανοτήτων και στατιστικής (Drier, 2000).

Σύμφωνα με την Drier (2000) ο Jiang ανέπτυξε περιβάλλον υπολογιστή υπό το όνομα *Chance World* (αναπτύχθηκε στο Πανεπιστήμιο της Γεωργίας) και χρησιμοποιήθηκε από μαθητές του γυμνασίου σε ένα διδακτικό, φροντιστηριακό περιβάλλον για την εκπόνηση της διδακτορικής του διατριβής. Ανακάλυψε ότι οι μικρές συνεδρίες και η χρήση περιβάλλοντος ηλεκτρονικού υπολογιστή ότι είχαν ιδιαίτερα βοηθητικό ρόλο για τους μαθητές ώστε να ξεπεράσουν κλασικές παρανοήσεις της πιθανότητας. Παρόλα αυτά, το μικρό χρονικό διάστημα και η φροντιστηριακή δομή της διδακτικής δεν μπορούν να προβλέψουν την αποτελεσματικότητα της χρήσης ενός τέτοιου περιβάλλοντος σε μια μεγάλη σχολική αίθουσα για εκτεταμένο χρονικό διάστημα. Αυτό το λογισμικό λειτουργεί μόνο σε παλαιότερους Macintosh ηλεκτρονικούς υπολογιστές, ενώ ακόμη και ο ίδιος ο Jiang δεν το χρησιμοποιεί στα πανεπιστημιακά μαθήματα.

Πιο πρόσφατα, η Drier (2000) αναφέρει πως ο Vahey μελέτησε τη χρήση άλλων πιθανολογικών λογισμικών εφαρμογών, Probability Inquiry Environment (PIE), σε συστηματική έρευνα βασιζόμενη στην εκπαίδευση παιδιών Α΄ γυμνασίου. Ανακάλυψε πως η χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή κι η συστηματική έρευνα της φύσης των δραστηριοτήτων έφεραν στην επιφάνεια διαισθήσεις των μαθητών που δεν χαρακτηρίζονταν εύκολα ως κοινές παρανοήσεις. Μελέτη που πραγματοποιήθηκε το 1997 δεν σχεδιάστηκε για να εξετάσει την αποτελεσματικότητα λογισμικών μαχόμενα τις διαισθήσεις των μαθητών. Παρόλα αυτά τα αποτελέσματα της μελέτης σηματοδοτούν πως οι προσομοιώσεις των ηλεκτρονικών υπολογιστών μπορούν να παρέχουν έναν πλούσιο τομέα για εξερεύνηση της κατανόησης πιθανολογικών δραστηριοτήτων από τους μαθητές και για ανάπτυξη περισσότερο τυπικών πιθανολογικών σκέψεων.

Στη διδακτορική του εργασία ο Vahey (1998) μελέτησε την αποτελεσματικότητα λογισμικών που να βελτιώνουν τις πιθανολογικές σκέψεις των μαθητών. Χρησιμοποίησε έναν ημι-πειραματικό σχεδιασμό σε δυο τάξεις έβδομου επιπέδου χρησιμοποιώντας των τριών εβδομάδων PIE αναλυτικό πρόγραμμα και σε δυο τάξεις έβδομου επιπέδου χρησιμοποιώντας επίσης των τριών εβδομάδων πρόγραμμα, αφού πρώτα είχε περάσει ο δάσκαλος της σχολικής τάξης. Όλες οι σχολικές τάξεις διδαχτήκαν από τον κανονικό δάσκαλο της τάξης, ενώ και τα δύο αναλυτικά προγράμματα χειρίστηκαν μια πειραματική προσέγγιση διδακτικής. Οι μαθητές και των δύο ομάδων έδωσαν την ίδια προ και μετα- εξέταση. Η βαθμολογία στην προ- εξέταση δεν διέφερε σημαντικά. Παρόλα αυτά, οι μαθητές που χρησιμοποίησαν το PIE αναλυτικό πρόγραμμα υπερτερούσαν σημαντικά των μαθητών της αντίστοιχης εξέτασης που βρίσκονταν στις άλλες συνθήκες.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσίασε η έρευνα του Dave Pratt (2000) η οποία εξελίχθηκε σε περιβάλλον ηλεκτρονικού υπολογιστή και το θέμα της οποίας αφορούσε το άθροισμα των δύο ζαριών. Σε αυτήν τη μελέτη ο παραπάνω ερευνητής χρησιμοποίησε μια νέα προσέγγιση κατά την οποία τα παιδιά, ηλικίας 10 ως 11 ετών, θα εξέφραζαν τις σκέψεις τους για το τυχαίο γεγονός στην προσπάθεια τους προσεγγίσουν στοχαστικά θέματα. Περιέγραψε την αλληλεπίδραση μεταξύ των ανεπίσημων διαισθήσεων και των πηγών του ηλεκτρονικού υπολογιστή καθώς τα παιδιά οικοδομούσαν μια νέα εσωτερική πηγή (δευτερογενής διαίσθηση) που αφορούσε το άθροισμα των 2 περιστρεφόμενων βέλων και των 2 ζαριών.

Τέλος, ενδιαφέρον παρουσιάζει μια πιλοτική έρευνα, που αφορούσε στην ανάπτυξη της συνδυαστικής σκέψης των παιδιών προσχολικής ηλικίας με τη βοήθεια ειδικά σχεδιασμένων λογισμικών περιβαλλόντων μάθησης, έρευνα η οποία πιο συγκεκριμένα εστίαζε στη μελέτη της διάδρασης παιδιών του νηπιαγωγείου με δύο ελάχιστα διαφορετικούς λογισμικούς μικρόκοσμους με σκοπό να βρίσκουν όλους τους δυνατούς συνδυασμούς με επανατοποθέτηση. Σύμφωνα με τον Φεσάκη και την Καφούση (2008), με το πέρας αυτής της μελέτης κατέληξαν ότι τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας μπορούν να εξελίξουν τις στρατηγικές τους, αν και δεν μπορούν να παραθέσουν όλους τους πιθανούς συνδυασμούς επιτυχώς. Ενώ η χρήση των συγκεκριμένων μικρόκοσμων, που σχεδιάστηκαν στο λογισμικό του Scratch, επέτρεψε την υλοποίηση ενός πειράματος σκέψης που παρέχει σημαντική διαγνωστική πληροφορία για την παραγωγή συνδυασμών από νήπια, δίνοντας τους τη δυνατότητα για ανάδραση.

Αν και τα χρησιμοποιούμενα λογισμικά στις παραπάνω μελέτες είναι διαφορετικά, είχαν πολλά χαρακτηριστικά κοινά. Τα ProbSim, Chance World, PIE και Scratch αναπτυχθήκαν βασιζόμενα σε έρευνες γνωστών πιθανολογικών παρανοήσεων και μη- τεχνολογικών διδακτικών πειραμάτων που επιτυχώς εμπλούτισαν τον πιθανολογικό συλλογισμό των μαθητών. Όλα αυτά παρείχαν ευκαιρίες στους μαθητές ώστε να δημιουργήσουν πειραματικά τυχαία δεδομένα και να τα αναλύσουν με πολλαπλούς συνδέσμους αναπαραστάσεων (όπως αριθμητικές ακολουθίες, σχετικές συχνότητες, λίστες δοκιμών). Ενώ, όπως φαίνεται και από τα παραπάνω κάθε εφαρμογή λογισμικού χρησιμοποιήθηκε επιτυχώς ώστε να προαχθεί η διδακτική της πιθανότητας και η μάθηση των πιθανολογικών αντιλήψεων των μαθητών.

Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα των παραπάνω μελετών που διενεργήθηκαν αναφορικά με τη σύνδεση των Τ.Π.Ε. και της έννοιας της πιθανότητας, προκύπτει πως η χρήση περιβάλλοντος ηλεκτρονικού υπολογιστή ότι είχε ιδιαίτερα βοηθητικό ρόλο για τους μαθητές ώστε να ξεπεράσουν κλασικές παρανοήσεις της πιθανότητας. Παρουσιάζεται , όμως, έλλειμμα ερευνών για τη σύνδεση των Τ.Π.Ε. και της έννοιας της πιθανότητας και της συνδυαστικής σε παιδιά νηπιακής ηλικίας (Φεσάκης & Καφούση, 2008). Η εικόνα αυτή, όμως, καλό θα ήταν να αλλάξει καθώς ο αντίκτυπος της χρήσης των Τ.Π.Ε. στα παιδιά νηπιακής ηλικίας αναφορικά με τις συνδυαστική βοηθά ιδιαίτερα στην ανάπτυξη διαισθητικών αντιλήψεων, όπως υποστηρίζεται και από τον Fischbein. Με βάση την παρατήρηση αυτή, διαμορφώνεται η προβληματική της παρούσας εργασίας, που περιγράφεται στην επόμενη ενότητα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

7. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΚΗ

Λαμβάνοντας υπόψη τα όσα αναφέρθηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, με το πέρασμα των χρόνων διατυπώθηκε ένα ευρύ φάσμα θεωριών αναφορικά με τη διδακτική των πιθανοτήτων. Γίνεται φανερή η διαφορετική προσέγγιση της κάθε ομάδας ερευνητών από τις δραστηριότητες και τις μεθόδους που χρησιμοποιεί. Από τη μια μεριά, οι ψυχολόγοι μελετούν την εξέλιξη του πιθανολογικού συλλογισμού των παιδιών σε καταστάσεις αβεβαιότητας και δεν ασχολούνται με την επίδραση της διδασκαλίας στις λάθος αντιλήψεις των παιδιών για τις πιθανότητες (ο Konold είναι από τους λίγους που αποτελεί εξαίρεση μεταξύ των ψυχολόγων). Οι ψυχολόγοι είναι κυρίως παρατηρητές και περιγράφουν το τι συμβαίνει όταν τα υποκείμενα ασχολούνται με θέματα γνωστικής κρίσης. Συνήθως προσπαθούν να εξηγήσουν ό,τι παρατηρούν με βάση κάποια θεωρητικά μοντέλα, όπως αναφέρεται από την Σκουμπουρδή (2003). Από την άλλη μεριά οι διδακτικοί ψάχνουν τρόπους, ώστε να αλλάξουν τις λανθασμένες αντιλήψεις και τα πιστεύω των μαθητών τους σχετικά με τις πιθανότητες (Shaughnessy, 1992). Αυτή η διαφορετική προσέγγιση της κάθε ομάδας ερευνητών γίνεται αντιληπτή και από τις δραστηριότητες που χρησιμοποιεί.

Υπάρχουν βέβαια και ερευνητές, όπως ο Piaget και η Inhelder, που υποστηρίζουν πως στις μικρές ηλικίες και ειδικότερα στα παιδιά του προσυλλογιστικού σταδίου ότι δεν μπορεί να μεταδοθεί η έννοια της πιθανότητας.

Από την άλλη πλευρά, ο Fischbein (Jones & Thornton 2005) ήταν ο πρώτος που υποστήριξε την ύπαρξη πρωτευουσών διαισθήσεων, δηλαδή το σχηματισμό πεποιθήσεων γνωστικού περιεχομένου χωρίς την ύπαρξη συστηματικής διδασκαλίας. Ενώ αναφέρθηκε και στις δευτερεύουσες διαισθήσεις οι οποίες αναδομούν γνωστικές πεποιθήσεις μέσα από το περιεχόμενο μιας συγκεκριμένης εργασίας. Πράγμα που σημαίνει ότι η διαισθητική αντίληψη μπορεί να επηρεάσει σημαντικά τους μαθητές στην εκμάθηση της έννοιας της πιθανότητας, χωρίς την ύπαρξη συστηματικής διδασκαλίας, απλά μέσα από το περιεχόμενο μιας εργασίας.

Ακόμη, οι Τ.Π.Ε. επιβεβαιώνουν την μαθησιακή αξία της παροχής αναδραστικής πληροφορίας κατάλληλα σχεδιασμένης ώστε να γίνεται αντιληπτή από τα παιδιά και να τους επιτρέπει αυτορύθμιση. Πράγματι, οι Τ.Π.Ε. μπορούν να παρέχουν δραστηριότητες σε περιβάλλον πλούσιο σε εικονικά απτά αντικείμενα (concrete manipulatives), κάτι που διευκολύνει ιδιαίτερα την τριβή των παιδιών με τα μαθηματικά και τα οδηγεί τελικά στην εκμάθηση τους. Έτσι, θεμιτή είναι η χρήση των Τ.Π.Ε. για την ανάπτυξη της διαισθητικής αντίληψης. Αρκεί να αναλογιστεί κανείς την έρευνα που πραγματοποίησε ο Pratt (2000) αναφορικά με το άθροισμα των δύο ζαριών με τη βοήθεια μικρόκοσμου σε παιδιά ηλικίας 10 ως 11 ετών, αλλά και τα αποτελέσματα που είχε.

Στην παρούσα εργασία, επιλέχθηκε προς διερεύνηση το ίδιο θέμα με αυτό της μελέτης του Pratt, στοχεύοντας σε παιδιά νηπιαγωγείου, τετάρτης δημοτικού και δευτέρας γυμνασίου. Το πρόβλημα του αθροίσματος των δύο ζαριών, χάρη της ανομοιομορφίας της κατανομής της πιθανότητας θεωρούμε ότι μπορεί να βοηθήσει στην ανάπτυξη της διαισθητικής κατανόησης της έννοιας. Παράλληλα, οι Τ.Π.Ε. μπορούν να δώσουν τη δυνατότητα εκτεταμένου πειραματισμού σε ένα παιγνιώδη περιβάλλον, που να είναι ελκυστικό για τα παιδιά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

8. ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται μια λεπτομερής και εμπεριστατωμένη παρουσίαση της μεθοδολογικής πορείας που ακολουθήθηκε κατά τη διάρκεια της έρευνας. Πιο συγκεκριμένα, δίνονται πληροφορίες τόσο για το σκοπό της εργασίας και το δείγμα των ατόμων που συμμετείχαν στην έρευνα, όσο και για τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν καθώς και τη διαδικασία που ακολουθήθηκε για τη συλλογή των δεδομένων.

8.1. Σκοπός

Σκοπός της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι η διερεύνηση της ανάπτυξης της διαισθητικής αντίληψης της έννοιας της πιθανότητας σε παιδιά νηπιακής ηλικίας, δημοτικού (Ε’ δημοτικού) και γυμνασίου (Β’ γυμνασίου) με την υποστήριξη ενός παιχνιδιού σε περιβάλλον ηλεκτρονικού υπολογιστή, έχοντας ως βάση το πρόβλημα του αθροίσματος των 2 ζαριών. Τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα περιγράφονται μετά την περιγραφή του μικρόκοσμου, ώστε να γίνουν καλύτερα κατανοητά.

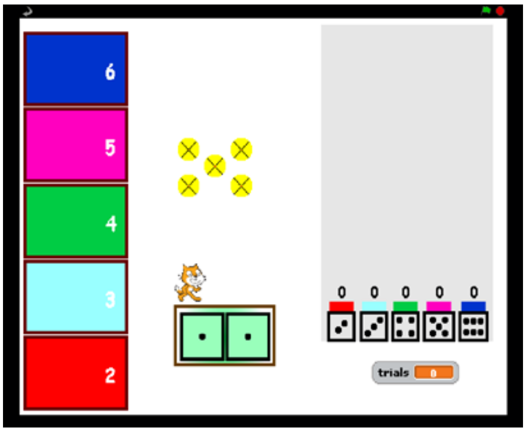
8.2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε σε αυτήν την εκπαιδευτική έρευνα είναι η μελέτη περίπτωσης. Σκοπός αυτής της μεθοδολογίας είναι η παρατήρηση, ώστε να εξερευνηθεί βαθιά και να αναλυθούν συστηματικά φαινόμενα, προκειμένου να γίνουν γενικεύσεις σχετικά με τον ευρύτερο πληθυσμό που εξετάζεται (Cohen L. & Manion L., 1994). Πιο συγκεκριμένα, η ερευνήτρια διατήρησε μια στάση μάλλον συμμετοχική, καθώς σε ορισμένες περιπτώσεις εμπλέκονταν και η ίδια στις δραστηριότητες του μικρόκοσμου. Σε πρώτο επίπεδο επεξηγούσε τα χαρακτηριστικά του μικρόκοσμου- παιχνιδιού, και παρενέβαινε όπου οι μαθητές ζητούσαν περαιτέρω διευκρινήσεις. Ενώ έπειτα, γίνονταν και η ίδια παίκτης αυτού του παιχνιδιού, καθώς έπαιζε με τον τελικό νικητή.

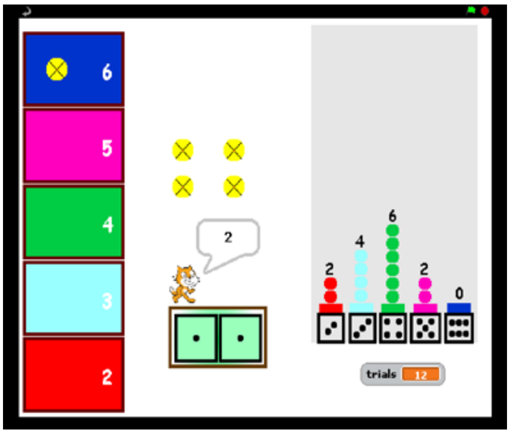
8.3. Εργαλεία

8.3.1.α. Μικρόκοσμος

Ο μικρόκοσμος- παιχνίδι που λειτούργησε ως εκπαιδευτικό υλικό για τη συλλογή των ερευνητικών δεδομένων είναι ένα πρόγραμμα το οποίο δημιουργήθηκε με τη βοήθεια του λογισμικού Scratch, στα πλαίσια του προγράμματος INTERREG III Ελλάδα – Κύπρος 2000-2006 από τον κο Φεσάκη Γεώργιο.



Εικόνα 1. Πριν το ποντάρισμα



Εικόνα 2. Μετά το ποντάρισμα

Πιο συγκεκριμένα, σε αυτόν τον μικρόκοσμο μπορεί να παρατηρήσει κανείς στο κέντρο τα δύο ζάρια, τα οποία όμως διαφέρουν από τα παραδοσιακά καθώς το καθένα έχει αριθμούς πάνω του από το 1 ως το 3 (προκειμένου να διευκολυνθούν τα παιδιά με το άθροισμα τους). Πάνω από αυτά υπάρχει μια γάτα, η οποία μετά από κάθε ρίψη αναφέρει το άθροισμα των 2 ζαριών, ενώ πάνω από αυτήν βρίσκονται τα 5 πούλια που πρέπει τα παιδιά να ποντάρουν. Τα πούλια τα ποντάρουν στα κουτάκια στην αριστερή πλευρά της οθόνης. Οι αριθμοί που είναι γραμμένοι πάνω σε αυτά τα κουτάκια, είναι πιθανά ενδεχόμενα του αθροίσματος από τη ρίψη των δύο ζαριών. Στη δεξιά πλευρά της οθόνης βρίσκεται το διάγραμμα συχνοτήτων των ενδεχομένων των πιθανών αποτελεσμάτων. Η συχνότητα των αποτελεσμάτων παριστάνεται με μπίλιες (ώστε τα παιδιά να μπορούν να τα μετρήσουν αν θέλουν, αλλά και για να είναι πιο εμφανής η διαφορά στη συχνότητα των αποτελεσμάτων) αλλά και με τα αραβικά σύμβολα των αριθμών. Τέλος, κάτω από το διάγραμμα συχνοτήτων φαίνεται ένα μικρό κουτί μέσα στο οποίο αναγράφονται οι γύροι του κάθε παιχνιδιού, μέχρι να εξαντληθούν όλα τα πούλια από τα ενδεχόμενα αποτελέσματα.

Σε αυτό το σημείο καλό θα ήταν να αναλυθεί το πρόβλημα του αθροίσματος των 2 ζαριών που αποτελεί και τη βάση του παραπάνω μικρόκοσμου. Στον ακόλουθο πίνακα (Πίνακας 2) αναλύεται χώρος των πιθανοτήτων των πιθανών ενδεχομένων που προκύπτει από το άθροισμα των 2 ζαριών, δηλαδή:

$P(2)= 1/6$

$P(3)= 2/6= 1/3$

$P(4)= 3/6= \frac{1}{2}$

$P(5)= 2/6= 1/3$

$P(6)= 1/6$

Πράγμα που σημαίνει ότι το πιο πιθανό ενδεχόμενο είναι να βγει το 4, μετά το 3 ή το 5 (συγκεντρώνουν τις ίδιες πιθανότητες) και τα λιγότερα πιθανά ενδεχόμενα είναι το 2 ή το 6 (συγκεντρώνοντας και αυτά τις ίδιες πιθανότητες). Τα ενδεχόμενα δε βγαίνουν με την ίδια πιθανότητα. Επιλέχθηκε, λοιπόν, αυτό το παιχνίδι, επειδή προσδοκάται τα παιδιά να παρατηρήσουν την ανισότητα στις συχνότητες και για να αναπτύξουν τη διαισθητική τους αντίληψη. Η αντίληψη των παιδιών αναμένεται να αντικατοπτριστεί στα πονταρίσματα και στις αιτιολογήσεις τους, καθώς ένα παιδί που αντιλαμβάνεται την ανομοιομορφία των ενδεχομένων, ποντάρει και με τον ανάλογο τρόπο.

	Ζάρι 2^{ο}			
Ζάρι 1^{ο}	**(+)**	**1**	**2**	**3**
	1	2	3	4
	2	3	4	5
	3	4	5	6

Πίνακας 2. Ανάλυση αθροίσματος των 2 ζαριών

8.3.1.β. Εργαλεία συλλογής δεδομένων

Τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για τη συλλογή των ερευνητικών δεδομένων ήταν το πρόγραμμα Camtasia που παρέχει τη δυνατότητα καταγραφής βίντεο (ήχος και εικόνα), ενώ κρατούνταν από την ερευνήτρια χειρόγραφες σημειώσεις των πιο σημαντικών στοιχείων κατά τη διάρκεια της έρευνας.

8.3.2. Δείγμα

Για την εκπόνηση της παρούσας εργασίας έλαβαν μέρος 10 παιδιά, από τα οποία τα 4 ήταν μαθητές 1^{ου} Νηπιαγωγείου Ρόδου, τα 2 ήταν μαθητές της Δ΄ τάξης του Ολοήμερου Δημοτικού σχολείου της Διμυλιάς και οι υπόλοιποι 4 της Β΄ τάξης του 7^{ου} Γυμνασίου Ρόδου. Ακόμη, όσον αφορά στην επιλογή του δείγματος ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς να παραχωρήσουν στην ερευνήτρια δύο μαθητές αντίθετου φύλου που είχαν μέτριες επιδόσεις στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών. Ενώ για λόγους διαφύλαξης των προσωπικών δεδομένων των συμμετεχόντων, τα ονόματα των παιδιών που αναφέρονται στην ενότητα 9 είναι φανταστικά.

8.3.3. Διαδικασία

Όλα τα παιδιά εργάστηκαν σε δυάδες στο γραφείο του νηπιαγωγείου και του δημοτικού αντίστοιχα, όπου είχα εγκατασταθεί ο ηλεκτρονικός υπολογιστής του πειράματος. Μόνο, οι ομάδες του γυμνασίου πραγματοποίησαν την έρευνα στο χώρο της βιβλιοθήκης, μιας και ο χώρος του γραφείου ήταν κατειλημμένος.

Στοχεύοντας στην ενασχόληση των παιδιών με το μικρόκοσμο, η ερευνήτρια παρουσιάζει την έρευνα ως ένα παιχνίδι που θα μπορούσε να έχει μόνο ένα νικητή. Αρχικά, ρωτάει τα παιδιά αν έχουν ενημερωθεί από τη δασκάλα- καθηγήτρια τους για το λόγο που λόγο βρίσκονταν μαζί της και αν έχουν ξαναπαίξει με υπολογιστή. Σε περίπτωση που δεν γνωρίζουν τα ενημερώνει πως θα παίξουν ένα παιχνίδι. Έπειτα, αφού συστηθούν τα ρωτά αν γνωρίζουν τι είναι (περισσότερη έμφαση σε αυτό δόθηκε στα παιδιά της νηπιακής ηλικίας) και αν έχουν ξαναπαίξει με ζάρια, σε περίπτωση που δεν γνώριζαν τους έδειχνε 2 απτά ζάρια μεγάλου μεγέθους κατάλληλα για τη νηπιακή ηλικία. Στη συνέχεια τους αναφέρει πως θα παίξουν ένα παιχνίδι με ζάρια, μόνο που αυτά τα ζάρια διαφέρουν από τα παραδοσιακά, καθώς οι αριθμοί που αναγράφονται πάνω σε καθένα από αυτά είναι μέχρι το 3. Αρχίζει να περιγράφει το περιβάλλον του μικρόκοσμου, ενώ παράλληλα τους εξηγεί τι πρέπει να κάνουν. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρει πως αυτά τα 5 πούλια (Εικόνα 1) πρέπει να τα ποντάρουν στα κουτάκια των αριθμών που βλέπουν στην αριστερή πλευρά της οθόνης με όποιο συνδυασμό αυτά επιθυμούν, ώστε το αποτέλεσμα των ζαριών που θα προκύψει από τη ρίψη τους να συμπίπτει με τα πονταρίσματα που έχουν κάνει. Ακόμη, τους εξηγεί πως ρίχνουν τα ζάρια κάνοντας «κλικ» με το ποντίκι τους πάνω σε αυτά. Έπειτα, τους εξηγεί τη λειτουργικότητα του διαγράμματος συχνοτήτων, πόσες φορές δηλαδή έχει έρθει το κάθε ενδεχόμενο- αριθμός, και τους δείχνει το σημείο που αναγράφονται οι προσπάθειες. Πριν ξεκινήσουν τα παιδιά να παίζουν η ερευνήτρια αναφέρει πως αυτός που θα κάνει τις λιγότερες προσπάθειες θα είναι και ο νικητής, ο οποίος θα παίξει και μαζί της. Η ερευνήτρια με τη σειρά της θα κάνει «έξυπνα» πονταρίσματα, ποντάροντας περισσότερο στο 3, 4 και 5, ώστε να αντιληφθούν τα παιδιά τη διαφορά στη συχνότητα των αποτελεσμάτων (στην περίπτωση που δεν την έχουν ήδη καταλάβει).

Η ερευνήτρια αρχικά αφήνει τα παιδιά να παίξουν ένα δοκιμαστικό γύρο, ώστε να εξοικειωθούν με το περιβάλλον του μικρόκοσμου και έπειτα παίζουν συνολικά 5 παρτίδες ο καθένας και ο νικητής άλλες 5 με την ερευνήτρια. Από το δεύτερο γύρο και έπειτα η ερευνήτρια ρωτά τους παίχτες πώς σκέφτηκαν και έβαλαν τα πούλια με αυτόν τον τρόπο, από τον τρίτο γύρο και μετά τους ρωτά επίσης αν κάποιος αριθμός έρχεται πιο πολλές ή πιο λίγες φορές. Αφού τελειώσουν το παιχνίδι ρωτά τις ακόλουθες ερωτήσεις:

Ερώτηση 1η: «Εμφανίζονται όλοι οι αριθμοί το ίδιο εύκολα;»

Ερώτηση 2η:«Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο δύσκολα;»

Ερώτηση 3η: «Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο εύκολα;»

Ερώτηση 4η:«Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός πιο πολλές φορές»

Ερώτηση 5η: «Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός λιγότερες φορές;»

Ερώτηση 6η: «Σας άρεσε το παιχνίδι;», «Σας δυσκόλεψε κάτι;».

Τέλος, παρακάτω παρατίθενται αναλυτικά οι δραστηριότητες της ερευνήτριας, σε ημερολογιακή γραφή, κατά τη διάρκεια εκπόνησης της πτυχιακής εργασίας.

Χρονική διάρκεια	Εργασίες
Αρχές Οκτώβρη- τέλη Φεβρουαρίου	Ανάλυση βιβλιογραφίας, διαμόρφωση θεωρητικού πλαισίου και του σχεδιασμού της έρευνας
26/02/2009- 26/03/2009	Συλλογή ερευνητικών δεδομένων
01/04/2009- 10/04/2009	Ανάλυση ερευνητικών δεδομένων

Πίνακας 7.3.3.α. Ημερολογιακή καταγραφή εργασιών ερευνήτριας

8.4. Ερευνητικά ερωτήματα

Με το πέρας αυτής της μελέτης προσδοκάται η απάντηση των ακολούθων ερευνητικών ερωτημάτων.

1. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται την ανομοιομορφία των συχνοτήτων της εμφάνισης των ενδεχομένων; Την χρησιμοποιούν στα πονταρίσματα;
2. Ποιες κατηγορίες αιτιολογήσεων εμφανίζουν τα παιδιά;
3. Κατά τη διάρκεια του πονταρίσματος οι μαθητές χρησιμοποιούν το διάγραμμα συχνοτήτων;
4. Οι μαθητές κατανοούν το περιβάλλον του μικρόκοσμου; Μπορούν να το χρησιμοποιήσουν;
5. Οι μαθητές θεωρούν ελκυστικό το μικρόκοσμο;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

9. ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα δεδομένα που συγκεντρώθηκαν κατά τη διάρκεια της έρευνας. Στην αρχή, παρουσιάζουμε τα βασικά αποτελέσματα. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα δεδομένα ανά βαθμίδα με μια σχετική λεπτομέρεια.

9.α.1. 1η ομάδα μαθητών Νηπιαγωγείου

- **ΜΑΘΗΤΗΣ: ΒΑΓΓΕΛΗΣ**

Όνομα Μαθητή: Βαγγέλης						
Πονταρίσματα						**Αιτιολόγηση**
Γύρος παιχνιδιού	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1ος	1	1	1	1	1	αν τα βάζουμε όλα από ένα θα βγαίνουν πιο γρήγορα
2ος	-	-	-	-	5	Θα τα βάλω όλα στο ένα, για να μην πατήσω πολλές φορές
3ος	1	1	1	1	1	Θα είναι πιο εύκολο να βγουν
4ος	1	1	1	1	1	Θα βγουν πιο γρήγορα έτσι
5ος	-	-	1	2	2	Θα βγουν πιο γρήγορα έτσι

Πίνακας 9.α.1.1. Πονταρίσματα Βαγγέλη

Ερώτηση: Εμφανίζονται κάποιοι αριθμοί πιο πολλές φορές;	
Γύρος παιχνιδιού	**Απαντήσεις**
1ος	
2ος	Από το 5 και κάτω οι αριθμοί βγαίνουν πιο πολλές φορές
3ος	Το 3 και το 4 βγήκαν πιο πολλές φορές
4ος	Δεν απάντησε
5ος	Δεν απάντησε

Πίνακας 9.α.1.2.

Ερώτηση: Εμφανίζονται κάποιοι αριθμοί πιο λίγες φορές;	
Γύρος παιχνιδιού	**Απαντήσεις**
1ος	
2ος	Το 6 βγαίνει λιγότερες φορές. Η Νίκη και εγώ προσπαθήσαμε πόσες φορές για το 6.
3ος	Δεν απάντησε
4ος	Δεν απάντησε
5ος	Δεν απάντησε

Πίνακας 9.α.1.3.

Ερωτήσεις	Απαντήσεις παιδιών
Εμφανίζονται όλοι οι αριθμοί το ίδιο εύκολα;	Όχι
Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο δύσκολα;	Το 6
Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο εύκολα;	Το 3,4
Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός πιο πολλές φορές;	Το 4
Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός λιγότερες φορές;	Το 3
Σας άρεσε το παιχνίδι;	Ναι, αλλά δεν έβγαινε εύκολα το 6.
Σας δυσκόλεψε κάτι;	Ο αριθμός 6

Πίνακας 9.α.1.4.

- **ΜΑΘΗΤΡΙΑ: ΝΙΚΗ**

Όνομα μαθητή: Νίκη						
Πονταρίσματα						**Αιτιολόγηση**
Γύρος παιχνιδιού	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1ος	1	1	1	1	1	Έτσι το σκέφτηκα
2ος	-	-	1	2	2	-
3ος	-	-	1	2	2	Έτσι
4ος	-	-	2	2	1	Επειδή αυτοί είναι οι μεγαλύτεροι αριθμοί
5ος	-	-	1	1	3	Έτσι το σκέφτηκα

Πίνακας 9.α.1.5. Πονταρίσματα Νίκης

Ερώτηση: Εμφανίζονται κάποιοι αριθμοί πιο πολλές φορές;	
Γύρος παιχνιδιού	**Απαντήσεις**
1ος	
2ος	Ναι, το 2 βγήκε πιο πολλές φορές
3ος	Το 4 βγήκε πιο πολλές φορές
4ος	Δεν απάντησε
5ος	Δεν απάντησε

Πίνακας 9.α.1.6.

Ερώτηση: Εμφανίζονται κάποιοι αριθμοί πιο λίγες φορές;	
Γύρος παιχνιδιού	**Απαντήσεις**
1ος	
2ος	Το 6 βγαίνει λιγότερες φορές.
3ος	Δεν απάντησε
4ος	Δεν απάντησε
5ος	Δεν απάντησε

Πίνακας 9.α.1.7.

Ερωτήσεις	Απαντήσεις παιδιών
Εμφανίζονται όλοι οι αριθμοί το ίδιο εύκολα;	Όχι
Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο δύσκολα;	Το 6
Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο εύκολα;	Το 2
Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός πιο πολλές φορές;	Το 4
Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός λιγότερες φορές;	Το 3
Σας άρεσε το παιχνίδι;	Ναι
Σας δυσκόλεψε κάτι;	Εμένα όχι

Πίνακας 9.α.1.8.

- **ΜΑΘΗΤΡΙΑ- ΝΙΚΗΤΡΙΑ: ΝΙΚΗ**

Όνομα Μαθητή- Νικητή: Νίκη						
Πονταρίσματα						**Αιτιολόγηση**
Γύρος παιχνιδιού	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1^{ος}	-	-	-	-	5	-
2^{ος}	1	1	1	1	1	Έτσι τα έβαλα
3^{ος}	-	-	-	-	5	Το σκέφτηκα, γιατί μ' αρέσουν οι μεγάλοι αριθμοί
4^{ος}	-	-	-	2	3	-
5^{ος}	-	-	-	-	-	-

Πίνακας 9.α.1.9. Πονταρίσματα Νίκης (νικήτριας παιχνιδιού)

- **ΕΡΕΥΝΗΤΡΙΑ**

Ερευνήτρια						
Πονταρίσματα						**Αιτιολόγηση**
Γύρος παιχνιδιού	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1^{ος}	-	1	3	**1**	-	-
2^{ος}	-	-	4	1	-	
3^{ος}	-	-	5	-	-	
4^{ος}	-	-	5	-	-	-
5^{ος}	-	-	-	-	-	-

Πίνακας 9.α.1.10. Πονταρίσματα ερευνήτριας

Οι παραπάνω πίνακες δείχνουν τα πονταρίσματα που έκαναν οι μαθητές της πρώτης ομάδας του νηπιαγωγείου, τις αιτιολογήσεις που έδωσαν για κάθε ποντάρισμα (Πίνακες 9.α.1.1., 9.α.1.5.), τις απαντήσεις που έδωσαν στις ερωτήσεις ανοικτού τύπου σχετικά με το αν κάποιος αριθμός εμφανίζεται περισσότερες ή λιγότερες φορές (Πίνακες 9.α.1.2., 9.α.1.3., 9.α.1.6., 9.α.1.7.), τις απαντήσεις που έδωσαν στις ερωτήσεις που ακολούθησαν με το πέρας του παιχνιδιού (Πίνακες 9.α.1.4., 9.α.1.8.) αλλά και τα πονταρίσματα του τελικού νικητή και της ερευνήτριας, όταν έπαιξαν μαζί (Πίνακες 9.α.1.9., 9.α.1.10.).

Όπως φαίνεται και από την ανάλυση των πονταρισμάτων των παιδιών στους πίνακες, ο Βαγγέλης είχε μια πρωτεύουσα διαίσθηση την οποία διατήρησε σχεδόν σε όλο το παιχνίδι. Πίστευε πως αν βάλουμε σε όλα τα ενδεχόμενα από ένα πούλι ότι θα είναι πιο εύκολο να τελειώσει πιο γρήγορα. Στη δεύτερη παρτίδα αφού είδε ότι καθυστέρησε πολύ στην πρώτη, τα πόνταρε όλα στο 5 πιστεύοντας ότι θα τελειώσει πιο γρήγορα. Αφού πάλι δυσαρεστήθηκε με τις συνολικές προσπάθειες που έκανε επέστρεψε στον αρχικό τρόπο σκέψης του θεωρώντας πως όντας ισοπίθανα τα ενδεχόμενα, είναι πιο πιθανή ενδεχόμενη νίκη. Πάλι όμως, η συμπαίκτρια του συγκέντρωνε περισσότερες νίκες, έτσι και αυτός πόνταρε στον τελευταίο γύρο στους μεγαλύτερους αριθμούς. Όπως φάνηκε κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού ο Βαγγέλης μάλλον επηρεάζονταν σε κάποιους γύρους από τα πονταρίσματα της Νίκης, γι΄ αυτό και άλλαζε συχνά τη στρατηγική του προσπαθώντας να κερδίσει τη συμπαίκτρια του.

Όσον αφορά στο ποντάρισμα της Νίκης και εκείνη στον πρώτο γύρο θεώρησε τα ενδεχόμενα ισοπίθανα, ποντάροντας σε όλους τους αριθμούς από ένα πούλι. Έπειτα όμως άλλαξε τον τρόπο πονταρίσματος της. Από τον δεύτερο γύρο μέχρι και το τέλος του παιχνιδιού με το Βαγγέλη πόνταρε στους μεγάλους αριθμούς, ακολουθώντας μια στρατηγική αυθαίρετη και υποκειμενική.

Όντας η νικήτρια του πρώτου παιχνιδιού η Νίκη, παρατηρείται πως παρόλο που έπαιξε με την ερευνήτρια, η οποία έκανε τα «έξυπνα» πονταρίσματα, δεν άλλαξε καθόλου τον τρόπο που πόνταρε. Ενώ σε αυτό το παιχνίδι αποκάλυψε πως ποντάρει στους μεγαλύτερους αριθμούς, επειδή της αρέσουν (πρωτεύουσα διαίσθηση).

Παρατηρείται ακόμη, πως ο Βαγγέλης αν και αντιλαμβάνεται ότι το 6 έρχεται πιο λίγες φορές και το 4 περισσότερες, όπως φαίνεται και από τα πονταρίσματα του, δεν εγκαταλείπει την πρωτεύουσα διαίσθηση του, το ισοπίθανο ποντάρισμα. Φαίνεται να καταλαβαίνει το στόχο του παιχνιδιού, όμως δεν έχει μια εύστοχη στρατηγική που να σχετίζεται ξεκάθαρα με την κατανομή, μάλλον θεωρεί τα μεγάλα πιο εύκολα. Επίσης, η Νίκη πιστεύει πως πιο δύσκολα έρχεται το 6 και λιγότερες φορές το 3, ενώ παρατηρεί πως πιο εύκολα έρχεται το 2 και πιο πολλές φορές το 4. Παρουσιάζεται εδώ μια δυσκολία συσχετισμού του πιο πολλές φορές- πιο εύκολα και του λιγότερες φορές- πιο δύσκολα.

Ακόμη, και τα δυο παιδιά δηλώνουν πως δεν είχαν καμία δυσκολία με το παιχνίδι, ενώ παράλληλα τους άρεσε, πράγμα που σημαίνει πως οι Τ.Π.Ε. ότι είναι μια καλή επιλογή για την εισαγωγή εννοιών. Τέλος, φάνηκε να καταλαβαίνουν το στόχο του παιχνιδιού, την ανομοιομορφία της συχνότητας, αν και δεν πρόβαιναν σε ανάλογες στρατηγικές. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση της Νίκης που ακολούθησε μια αμιγώς αυθαίρετη και υποκειμενική στρατηγική, χωρίς να λαμβάνει υπόψη την ανομοιομορφία της συχνότητας, που όπως είχε φανεί από τις απαντήσεις της, είχε προσεγγίσει. Βέβαια, οι διαισθήσεις των παιδιών δεν φάνηκε να προσαρμόζονται από το παιχνίδι- μικρόκοσμο, αν και τα πονταρίσματα τους διαμορφώνονταν, προκειμένου όμως να κερδίσουν το συμπαίκτη τους (χαρακτηριστική είναι η περίπτωση του Βαγγέλη) και όχι επειδή είχαν κατακτήσει σε βάθος την έννοια του πιθανού ενδεχομένου. Σε γενικές γραμμές τα παιδιά της πρώτης ομάδας αντιλαμβάνονταν τη διαφορά ανάμεσα στο περισσότερο και λιγότερο πιθανό ενδεχόμενο, χωρίς όμως να διαμορφώνουν μια ανάλογη στρατηγική. Λαμβάνοντας, λοιπόν, υπόψη τα παραπάνω μάλλον επιβεβαιώνεται η θεωρία του Piaget και της Inhelder, αναφορικά με την κατάκτηση της έννοιας της πιθανότητας από τα παιδιά του προσυλλογιστικού σταδίου.

9.α.2. 2η ομάδα μαθητών Νηπιαγωγείου

- **ΜΑΘΗΤΗΣ: ΔΗΜΟΣΘΕΝΗΣ**

Όνομα Μαθητή: Δημοσθένης						
Πονταρίσματα						**Αιτιολόγηση**
Γύρος παιχνιδιού	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1ος	-	1	1	**2**	1	-
2ος	1	1	1	1	1	Επειδή… δεν θυμάμαι
3ος	1	1	1	2	-	(δεν απάντησε)
4ος	-	1	1	2	1	Επειδή… (δεν απάντησε)
5ος	1	1	1	1	1	(δεν απάντησε)

Πίνακας 9.α.2.1. Πονταρίσματα Δημοσθένη

Ερώτηση: Εμφανίζονται κάποιοι αριθμοί πιο πολλές φορές;	
Γύρος παιχνιδιού	**Απαντήσεις**
1ος	
2ος	
3ος	Όχι
4ος	Όχι, το ίδιο
5ος	Όχι

Πίνακας 9.α.2.2.

Ερώτηση: Εμφανίζονται κάποιοι αριθμοί πιο λίγες φορές;	
Γύρος παιχνιδιού	**Απαντήσεις**
1ος	
2ος	
3ος	Όχι
4ος	Όχι
5ος	Όχι

Πίνακας 9.α.2.3.

Ερωτήσεις	Απαντήσεις παιδιών
Εμφανίζονται όλοι οι αριθμοί το ίδιο εύκολα;	Ναι
Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο δύσκολα;	Όχι
Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο εύκολα;	Όχι
Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός πιο πολλές φορές;	Όχι
Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός λιγότερες φορές;	Όχι
Σας άρεσε το παιχνίδι;	Ναι
Σας δυσκόλεψε κάτι;	Όχι

Πίνακας 9.α.2.4.

- **ΜΑΘΗΤΡΙΑ: ΣΥΛΒΙΑ**

Όνομα Μαθητή:Σύλβια						
Πονταρίσματα						**Αιτιολόγηση**
Γύρος παιχνιδιού	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1ος	1	1	-	1	2	
2ος	1	1	1	1	1	Έτσι μπορεί να κερδίσω. Ό,τι αριθμό και να βγάλει θα βγαίνει από μια φορά
3ος	1	1	1	1	1	Ήθελα να τα βάλω όπως πριν
4ος	-	2	1	1	1	Απλώς μου άρεσε
5ος	1	1	1	1	1	Δεν απάντησε

Πίνακας 9.α.2.5. Πονταρίσματα Σύλβιας

Ερώτηση: Εμφανίζονται κάποιοι αριθμοί πιο πολλές φορές;	
Γύρος παιχνιδιού	**Απαντήσεις**
1ος	
2ος	
3ος	Δεν νομίζω
4ος	Ναι, το 5
5ος	Όχι

Πίνακας 9.α.2.6.

Ερώτηση: Εμφανίζονται κάποιοι αριθμοί πιο λίγες φορές;	
Γύρος παιχνιδιού	**Απαντήσεις**
1ος	
2ος	
3ος	Δεν απάντησε
4ος	Δεν απάντησε
5ος	Δεν απάντησε

Πίνακας 9.α.2.7.

Ερωτήσεις	Απαντήσεις παιδιών
Εμφανίζονται όλοι οι αριθμοί το ίδιο εύκολα;	Ναι
Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο δύσκολα;	Δεν ξέρω
Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο εύκολα;	Όχι
Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός πιο πολλές φορές;	Όχι
Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός λιγότερες φορές;	Όχι
Σας άρεσε το παιχνίδι;	Ναι
Σας δυσκόλεψε κάτι;	Όχι

Πίνακας 9.α.2.8.

- **ΜΑΘΗΤΡΙΑ- ΝΙΚΗΤΡΙΑ: ΣΥΛΒΙΑ**

Όνομα Μαθητή- Νικητή: Σύλβια						
	Πονταρίσματα					**Αιτιολόγηση**
Γύρος παιχνιδιού	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1ος	-	-	-	-	5	Είπα από μέσα μου… μάλλον ήρθε η σειρά να τα βάλω όλα στο 6
2ος	-	-	-	5	-	Τα βάζω όλα με τη σειρά από πάνω ως κάτω
3ος	-	-	5	-	-	Όπως και πριν
4ος	-	5	-	-	-	Όπως και πριν
5ος	5	-	-	-	-	Όπως και πριν

Πίνακας 9.α.2.9. Πονταρίσματα Σύλβιας (νικήτριας παιχνιδιού)

- **ΕΡΕΥΝΗΤΡΙΑ**

	Ερευνήτρια						
Γύρος παιχνιδιού	**Πονταρίσματα**						**Αιτιολόγηση**
		2	**3**	**4**	**5**	**6**	
	1ος	-	1	3	1	-	
	2ος	-	-	4	1	-	
	3ος	-	1	3	1	-	
	4ος	-	1	3	1	-	
	5ος	-	1	3	1	-	

Πίνακας 9.α.2.10. Πονταρίσματα ερευνήτριας

Οι παραπάνω πίνακες δείχνουν τα πονταρίσματα που έκαναν οι μαθητές της πρώτης ομάδας του νηπιαγωγείου, τις αιτιολογήσεις που έδωσαν για κάθε ποντάρισμα (Πίνακες 9.α.2.1., 9.α.2.5.), τις απαντήσεις που έδωσαν στις ερωτήσεις ανοικτού τύπου σχετικά με το αν κάποιος αριθμός εμφανίζεται περισσότερες ή λιγότερες φορές (Πίνακες 9.α.2.2., 9.α.2.3., 9.α.2.6., 9.α.2.7.), τις απαντήσεις που έδωσαν στις ερωτήσεις που ακολούθησαν με το πέρας του παιχνιδιού (Πίνακες 9.α.2.4., 9.α.2.8.) αλλά και τα πονταρίσματα του τελικού νικητή και της ερευνήτριας, όταν έπαιξαν μαζί (Πίνακες 9.α.2.9., 9.α.2.10.).

Όπως φαίνεται και στις αναλύσεις των πονταρισμάτων στους παραπάνω πίνακες ο Δημοσθένης δεν ανέπτυξε καμία προσαρμογή για το ποντάρισμα των πουλιών. Ακόμη, όπως φαίνεται και από τις απαντήσεις που έδωσε δεν προσέγγισε καν την έννοια της πιθανότητας, πόσο μάλλον την ανομοιομορφία του αθροίσματος των δύο ζαριών. Ακόμη, δεν απαντούσε στις ερωτήσεις της ερευνήτριας που αφορούσαν τον τρόπο σκέψης του, είτε επειδή είναι πολύ ντροπαλός είτε επειδή δεν ήξερε πώς να αιτιολογήσει τα πονταρίσματα του.

Αντίθετα, η Σύλβια ξεκίνησε να ποντάρει με ισοπίθανο τρόπο στα ενδεχόμενα, σκεφτόμενη ότι με αυτόν τον τρόπο μπορεί να κερδίσει γιατί όποιος αριθμός και να βγει, θα βγαίνουν τα πούλια από μια φορά. Συνέχισε και στον τρίτο γύρο, όπως και μέχρι το τέλος αυτού του παιχνιδιού, με την ίδια πρωτεύουσα διαίσθηση.

Βέβαια παρατηρήθηκε πως όταν έπαιξε με την ερευνήτρια, καθώς ήταν η νικήτρια, ότι ακολούθησε μια αυθαίρετη στρατηγική χωρίς όμως να επηρεάζεται από τα «έξυπνα» πονταρίσματα της ερευνήτριας. Έβαζε σε κάθε γύρο όλα τα πούλια σε ένα ενδεχόμενο με τη σειρά, ξεκινώντας από το 6 και καταλήγοντας στο 2.

Όπως φαίνεται και από τις δοθείσες απαντήσεις ανοικτού τύπου ούτε και η Σύλβια δεν αντιλήφθηκε και ούτε ανέπτυξε κάποια στρατηγική που να εξυπηρετεί το άθροισμα των δύο ζαριών. Το μόνο που φάνηκε να παρατηρεί κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού είναι ότι το 5 εμφανίστηκε πιο πολλές φορές. Συμπερασματικά, τα παιδιά αυτής της ομάδας δεν κατάλαβαν την ανομοιομορφία στην κατανομή και δεν υπήρξε καμία ρητή στρατηγική, αν και κατανόησαν το στόχο του παιχνιδιού και δήλωσαν ότι τους άρεσε. Τέλος, η δεύτερη ομάδα του προσυλλογιστικού σταδίου φάνηκε και αυτή, όπως και η προηγούμενη, να επιβεβαιώνει τη θεωρία του Piaget και της Inhelder.

9.β.1. Ομάδα μαθητών Δ΄ Δημοτικού

- **ΜΑΘΗΤΗΣ: ΣΩΚΡΑΤΗΣ**

Όνομα Μαθητή: Σωκράτης						
Πονταρίσματα						**Αιτιολόγηση**
Γύρος παιχνιδιού	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1ος	1	1	1	1	1	Θα έρχεται η ζαριά και θα βγαίνει σε όλα αυτά
2ος	-	-	1	3	1	Αφού έρχεται πιο πολλές φορές στο 5
3ος	-	-	1	3	1	Αφού έρχεται πιο πολλές φορές στο 4 ή στο 5
4ος	-	-	1	4	-	Αφού βγάζει πιο πολλές φορές το 5
5ος	-	-	1	4	_	Αφού βγάζει πιο πολλές φορές το 5

Πίνακας 9.β.1.1. Πονταρίσματα Σωκράτη

Ερώτηση: Εμφανίζονται κάποιοι αριθμοί πιο πολλές φορές;	
Γύρος παιχνιδιού	**Απαντήσεις**
1ος	
2ος	
3ος	Το 5
4ος	Ναι το 5
5ος	Δεν απάντησε

Πίνακας 9.β.1.2.

Ερώτηση: Εμφανίζονται κάποιοι αριθμοί πιο λίγες φορές;	
Γύρος παιχνιδιού	**Απαντήσεις**
1ος	
2ος	
3ος	Το 2
4ος	Δεν απάντησε
5ος	Δεν απάντησε

Πίνακας 9.β.1.3.

Ερωτήσεις	Απαντήσεις παιδιών
Εμφανίζονται όλοι οι αριθμοί το ίδιο εύκολα;	Όχι
Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο δύσκολα;	Το 6, 2
Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο εύκολα;	Το 5
Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός πιο πολλές φορές;	Το 5
Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός λιγότερες φορές;	Το 2,6
Σας άρεσε το παιχνίδι;	Ναι
Σας δυσκόλεψε κάτι;	Όχι

Πίνακας 9.β.1.4.

- **ΜΑΘΗΤΡΙΑ: ΕΡΜΙΟΝΗ**

Όνομα Μαθητή: Ερμιόνη						
Πονταρίσματα						**Αιτιολόγηση**
Γύρος παιχνιδιού	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1ος	-	1	-	2	2	Σκέφτηκα ότι αν τα ποντάρω 6 και 6 θα βγαίνουν και τα δύο μαζί, το έβαλα στο 2 γιατί έκανα
2ος	1	2	-	-	2	Δεν απάντησε
3ος	-	-	-	2	3	Επειδή έρχεται συνέχεια στο 5 και στο 6
4ος	1	1	1	1	1	Αν βγάζει κάθε φορά από ένα νούμερο…τώρα έβαλα και στο 6 για να τελειώσω πιο γρήγορα
5ος	-	4	1	-	-	Βρήκα κόλπο! Θα βάζω 3 και θα βγαίνει 3

Πίνακας 9.β.1.5. Πονταρίσματα Ερμιόνης

Ερώτηση: Εμφανίζονται κάποιοι αριθμοί πιο πολλές φορές;	
Γύρος παιχνιδιού	**Απαντήσεις**
1^{ος}	
2^{ος}	
3^{ος}	Το 3 και το 2
4^{ος}	Ναι, το 5
5^{ος}	Δεν απάντησε

Πίνακας 9.β.1.6.

Ερώτηση: Εμφανίζονται κάποιοι αριθμοί πιο λίγες φορές;	
Γύρος παιχνιδιού	**Απαντήσεις**
1^{ος}	
2^{ος}	
3^{ος}	Δεν απάντησε
4^{ος}	Το 2
5^{ος}	Δεν απάντησε

Πίνακας 9.β.1.7.

Ερωτήσεις	Απαντήσεις παιδιών
Εμφανίζονται όλοι οι αριθμοί το ίδιο εύκολα;	Όχι
Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο δύσκολα;	Το 6,2
Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο εύκολα;	Το 5
Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός πιο πολλές φορές;	Το 5
Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός λιγότερες φορές;	Το 2
Σας άρεσε το παιχνίδι;	Ναι
Σας δυσκόλεψε κάτι;	Όχι

Πίνακας 9.β.1.8.

➢ ΜΑΘΗΤΡΙΑ- ΝΙΚΗΤΡΙΑ: ΕΡΜΙΟΝΗ

Όνομα Μαθητή- Νικητή: Ερμιόνη						
Ποντarίσματα						**Αιτιολόγηση**
Γύρος παιχνιδιού	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1ος	-	5	-	-	-	Είναι ο τυχερός μου αριθμός και είπα μήπως πάλι τα ξαναβγάλω
2ος	-	2	-	3	-	Επειδή είδα ότι σ εσάς έβγαινε συνέχεια το 5
3ος	-	2	1	1	1	Γιατί στο 6 έρχεται μερικές φορές, όπως και στα άλλα
4ος	1	1	1	1	1	Έρχεται από μια φορά ο κάθε αριθμός, άσχετα που κάποιες φορές αργεί το 2
5ος	-	5	-	-	-	Γιατί πριν μερικές φορές σας έβγαινε όλο 3

Πίνακας 9.β.1.9. Πονταρίσματα Νίκης (νικήτριας παιχνιδιού)

➢ ΕΡΕΥΝΗΤΡΙΑ

Ερευνήτρια						
Ποντarίσματα						**Αιτιολόγηση**
Γύρος παιχνιδιού	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1ος	-	1	3	1	-	
2ος	-	1	3	1	-	
3ος	-	1	2	2	-	
4ος	-	2	1	2	-	
5ος	-	1	2	2	-	

Πίνακας 9.β.1.10. Πονταρίσματα ερευνήτριας

Οι παραπάνω πίνακες δείχνουν τα πονταρίσματα που έκαναν οι μαθητές της πρώτης ομάδας του δημοτικού, τις αιτιολογήσεις που έδωσαν για κάθε πόνταρισμα (Πίνακες 9.β.2.1., 9.β.2.5.), τις απαντήσεις που έδωσαν στις ερωτήσεις ανοικτού τύπου σχετικά με το αν κάποιος αριθμός εμφανίζεται περισσότερες ή λιγότερες φορές (Πίνακες 9.β.2.2., 9.β.2.3., 9.β.2.6., 9.β.2.7.), τις απαντήσεις που έδωσαν στις ερωτήσεις που ακολούθησαν με το πέρας του παιχνιδιού (Πίνακες 9.β.2.4., 9.β.2.8.) αλλά και τα πονταρίσματα του τελικού νικητή και της ερευνήτριας, όταν έπαιξαν μαζί (Πίνακες 9.β.2.9., 9.β.2.10.).

Όπως φαίνεται και από τους πίνακες που παρουσιάζονται τα πονταρίσματα, ο πρώτος παίκτης, ο Σωκράτης, ξεκινά το πόνταρισμα έχοντας την πρωτεύουσα διαίσθηση ότι τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Έπειτα, από τον δεύτερο κιόλας γύρο αντιλαμβάνεται πως τα ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα και ότι το 5 έρχεται πιο πολλές φορές, εφαρμόζοντας την ευρετική της διαθεσιμότητας ενώ συνεχίζει αυτό το πόνταρισμα μέχρι και τον τρίτο γύρο. Στον τέταρτο όμως γύρο παρατηρεί ότι το 4 και το 5 έρχονται πιο πολλές φορές, σχηματίζοντας έτσι εμπειρικά μια δευτερεύουσα διαίσθηση. Ενώ παρακολουθώντας τις απαντήσεις του, στις ερωτήσεις που πραγματοποιήθηκαν στο τέλος του παιχνιδιού φαίνεται ότι κατέκτησε διαισθητικά ότι το άθροισμα των δύο ζαριών δεν έχει ισοπίθανα ενδεχόμενα, και αυτό φαίνεται από το ότι υποστήριξε πως το 6 και το 2 έρχονται λιγότερες φορές, ενώ το 5 έρχεται πιο πολλές φορές.

Έπειτα, η Ερμιόνη πόνταρε στον πρώτο γύρο δύο πούλια στο 6, δύο πούλια στο 5 και ένα πούλι στο 3 δημιουργώντας ένα δικό της συλλογισμό υποστηρίζοντας πως έτσι θα βγουν τα πούλια πιο γρήγορα. Στο δεύτερο γύρο άλλαξε πάλι πόνταρισμα, χωρίς όμως να δώσει κάποια αιτιολόγηση. Το πόνταρισμα του τρίτου γύρου το έκανε περισσότερο εμπειρικά, καθώς πόνταρε στο 5 και στο 6, ενδεχόμενα που στον προηγούμενο γύρο έρχονταν πολλές φορές. Στον τέταρτο γύρο δοκιμάζει άλλη στρατηγική αυτή των ισοπίθανων ενδεχομένων. Στο τέλος του παιχνιδιού παρατηρεί πως το 3 βγαίνει αρκετά συχνά και γι' αυτό αλλάζει πάλι το πόνταρισμα της. Ενώ, στο παιχνίδι της με την ερευνήτρια, μιας και αυτή ήταν η νικήτρια, φαίνεται να μην αλλάζει το πόνταρισμα της παρά μόνο στην τέταρτη φορά του παιχνιδιού που επιστρέφει σε μια από τις αρχικές της στρατηγικές. Ακόμη, όπως διαφαίνεται και από τις αιτιολογήσεις στον πίνακα, η Ερμιόνη επηρεάζεται και παραδειγματίζεται από τα «έξυπνα» πονταρίσματα της ερευνήτριας, ακολουθώντας την ευρετική της διαθεσιμότητας, όχι όμως με σταθερότητα. Επίσης, όπως παραδέχονται τα ίδια τα παιδιά δεν τους δυσκόλεψε κάτι στο μικρόκοσμο, ενώ τους άρεσε και το παιχνίδι. Τέλος, όπως φάνηκε και από τις αιτιολογήσεις των παιδιών του σταδίου των συγκεκριμένων πράξεων φάνηκε να επηρεάζονται από τα διαδοχικά τους παιχνίδια με το μικρόκοσμο, επιβεβαιώνοντας τα όσα λέχθηκαν από το Fischbein.

9.γ.1. 1η Ομάδα μαθητών Γυμνασίου

- **ΜΑΘΗΤΡΙΑ: ΧΑΡΑ**

Όνομα Μαθητή: Χαρά						
Πονταρίσματα						**Αιτιολόγηση**
Γύρος παιχνιδιού	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1ος	1	1		1	1	
2ος	-	2	1	2	-	Βλέπω ότι βγαίνει συνέχεια το 4 και το 5
3ος	-	1	2	1	1	(Δεν απάντησε)
4ος	1	2	1	1	-	Μου έρχονται εικόνες
5ος	-	1	2	2	_	Είναι οι αριθμοί που βγαίνουν κυρίως, γι' αυτό τα έβαλα σε αυτούς
6ος	-	1	2	1	1	Όπως μου έρχεται τα κάνω

Πίνακας 9.γ.1.1. Πονταρίσματα Χαράς

Ερώτηση: Εμφανίζονται κάποιοι αριθμοί πιο πολλές φορές;	
Γύρος παιχνιδιού	**Απαντήσεις**
1ος	
2ος	
3ος	
4ος	Δεν απάντησε
5ος	Το 4

Πίνακας 9.γ.1.2.

Ερώτηση: Εμφανίζονται κάποιοι αριθμοί πιο λίγες φορές;	
Γύρος παιχνιδιού	**Απαντήσεις**
1ος	
2ος	
3ος	
4ος	Δεν απάντησε
5ος	Το 6

Πίνακας 9.γ.1.3.

Ερωτήσεις	Απαντήσεις παιδιών
Εμφανίζονται όλοι οι αριθμοί το ίδιο εύκολα;	Όχι
Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο δύσκολα;	Το 6
Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο εύκολα;	Το 3,4 και το 5
Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός πιο πολλές φορές;	Το 3,4 και το 5
Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός λιγότερες φορές;	Το 6
Σας άρεσε το παιχνίδι;	Ναι
Σας δυσκόλεψε κάτι;	Όχι

Πίνακας 9.γ.1.4.

- **ΜΑΘΗΤΗΣ: ΒΙΚΤΩΡΑΣ**

Όνομα Μαθητή: Βίκτωρας						
Πονταρίσματα						**Αιτιολόγηση**
Γύρος παιχνιδιού	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1ος	-	2	2	1	-	
2ος	1	1	2	1	-	Συνήθως μπορεί να πετύχεις και μικρούς και μεγάλους αριθμούς, οπότε ποντάρεις μέχρι το 5, γιατί το 6 είναι μεγάλο και θεωρείται λιγάκι δύσκολο
3ος	-	1	2	2	-	Τα 3, 4, 5 βγαίνουν κυρίως
4ος	-	1	2	2	-	Με το ίδιο σκεπτικό
5ος	-	2	2	1	-	Με το ίδιο σκεπτικό

Πίνακας 9.γ.1.5. Πονταρίσματα Βίκτωρα

Ερώτηση: Εμφανίζονται κάποιοι αριθμοί πιο πολλές φορές;	
Γύρος παιχνιδιού	**Απαντήσεις**
1ος	
2ος	
3ος	
4ος	Δεν απάντησε
5ος	Το 4 και το 3

Πίνακας 9.γ.1.6.

Ερώτηση: Εμφανίζονται κάποιοι αριθμοί πιο λίγες φορές;	
Γύρος παιχνιδιού	**Απαντήσεις**
1ος	
2ος	
3ος	
4ος	Το 2
5ος	Δεν απάντησε

Πίνακας 9.γ.1.7.

Ερωτήσεις	Απαντήσεις παιδιών
Εμφανίζονται όλοι οι αριθμοί το ίδιο εύκολα;	Όχι
Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο δύσκολα;	Το 2
Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο εύκολα;	Το 3, 4, 5
Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός πιο πολλές φορές;	Το 3, 4, 5
Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός λιγότερες φορές;	Το 2
Σας άρεσε το παιχνίδι;	Ναι
Σας δυσκόλεψε κάτι;	Όχι, απλό είναι

Πίνακας 9.γ.1.8.

- **ΜΑΘΗΤΗΣ- ΝΙΚΗΤΗΣ: ΒΙΚΤΩΡΑΣ**

Όνομα Μαθητή- Νικητή: Βίκτωρας						
Πονταρίσματα						**Αιτιολόγηση**
Γύρος παιχνιδιού	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1ος	-	2	2	-	1	Παιχνίδι είναι
2ος	-	2	2	1	-	Αλλάζω κάθε φορά, αναλόγως
3ος	1	1	1	1	1	Επειδή παρατήρησα ότι πετύχαινα και το 2 και το 6
4ος	-	1	1	2	1	(Δεν απάντησε)
5ος	-	1	1	2	1	(Δεν απάντησε)

Πίνακας 9.γ.1.9. Πονταρίσματα Βίκτωρα (νικητής παιχνιδιού)

- **ΕΡΕΥΝΗΤΡΙΑ**

Ερευνήτρια						
Πονταρίσματα						**Αιτιολόγηση**
Γύρος παιχνιδιού	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1ος	-	1	3	1	-	
2ος	-	2	2	1	-	
3ος	-	1	2	2	-	
4ος	-	1	2	2	-	
5ος	-	2	2	1	-	

Πίνακας 8.γ.1.10. Πονταρίσματα ερευνήτριας

Οι παραπάνω πίνακες δείχνουν τα πονταρίσματα που έκαναν οι μαθητές της πρώτης ομάδας του γυμνασίου, τις αιτιολογήσεις που έδωσαν για κάθε ποντάρισμα (Πίνακες 9.γ.1.1., 9.γ.1.5.), τις απαντήσεις που έδωσαν στις ερωτήσεις ανοικτού τύπου σχετικά με το αν κάποιος αριθμός εμφανίζεται περισσότερες ή λιγότερες φορές (Πίνακες 9.γ.1.2., 9.γ.1.3., 9.γ.1.6., 9.γ.1.7.), τις απαντήσεις που έδωσαν στις ερωτήσεις που ακολούθησαν με το πέρας του παιχνιδιού (Πίνακες 9.γ.1.4., 9.γ.1.8.) αλλά και τα πονταρίσματα του τελικού νικητή και της ερευνήτριας, όταν έπαιξαν μαζί (Πίνακες 9.γ.1.9., 9.γ.1.10.).

Η πρώτη παίκτρια, η Χαρά, στον πρώτο γύρο βασίστηκε στην πρωτεύουσα διαίσθηση της και έκανε το ποντάρισμα του Πίνακα 9.γ.1.1. . Στο δεύτερο γύρο όμως, μετά από παρατήρηση των πιο συχνών αποτελεσμάτων άλλαξε στρατηγική και πόνταρε κυρίως στο 3, 4, 5, ενώ σε ορισμένους γύρους επηρεάζονταν από την πρωτεύουσα διαίσθηση. Για παράδειγμα για τον τέταρτο γύρο παραδέχτηκε πως της έρχονται εικόνες και τα βάζει έτσι. Λαμβάνοντας, όμως υπόψη την αιτιολόγηση της Χαράς που έδειχνε ότι έχει αντιληφθεί πως το 3, 4 και το 5 ότι «βγαίνουν κυρίως», θα είχε ενδιαφέρον να παρατηρηθεί αν αποτελεί η ανάλυση του χώρου των ενδεχομένων καλή δραστηριότητα, ώστε να λειτουργήσει ως εφαλτήριο για την εισαγωγή των παιδιών μέσω της τυπικής διδασκαλίας στην έννοια της πιθανότητας.

Έπειτα, ο Βίκτωρας στο δεύτερο γύρο διατύπωσε μια δική του αυθαίρετη στρατηγική την οποία όμως δεν ακολούθησε για πολύ, μιας και από τον τρίτο γύρο κιόλας παρατήρησε πως ορισμένοι αριθμοί έρχονται πιο πολλές φορές. Πράγματι, στους τρεις τελευταίους γύρους ο Βίκτωρας επέλεγε ως πιθανά αθροίσματα μόνο τους αριθμούς 3, 4, 5. Ακόμη, επειδή ήρθαν ισοπαλία χρειάστηκε να παίξουν και άλλον ένα γύρο που θα καθόριζε το νικητή.

Ως νικητής του πρώτου παιχνιδιού έπαιξε μετά και με την ερευνήτρια, η οποία έκανε πονταρίσματα που έδειχναν αυτό που φαινόταν να έχει ήδη καταλάβει. Ο Βίκτωρας όμως δοκίμαζε και άλλους τρόπους πονταρίσματος, ισχυριζόμενος πως ήταν απλά ένα παιχνίδι. Στον τρίτο γύρο από την αιτιολόγηση που έδωσε φάνηκε πως πειραματίζονταν, μιας και τα πόνταρε εντελώς διαισθητικά- εμπειρικά, χωρίς να έχει καταλάβει ότι κάποια ενδεχόμενα είναι πιο πιθανά από κάποια άλλα.

Σε αυτό το σημείο, όμως, αξίζει να αναφερθεί πως από τις απαντήσεις που έδωσαν στις ερωτήσεις ανοικτού τύπου που διερωτήθηκαν, προκύπτει ότι και τα δύο παιδιά αντιλήφθηκαν ότι το 3, 4 και το 5 έρχονται πιο πολλές φορές ενώ για τους αριθμούς που έρχονται τις λιγότερες φορές προέκυψε μια διχογνωμία. Ο Βίκτωρας υποστήριξε πως το 2 έρχεται λιγότερες φορές, ενώ η Χαρά το 6. Πάντως συμφώνησαν στο ότι τους άρεσε το παιχνίδι και ότι δεν τους δυσκόλεψε κάτι. Φάνηκε, λοιπόν, και τα δύο παιδιά να προσαρμόζουν τις διαισθήσεις τους, χάρη της επαφής τους με το παιχνίδι, αντιδράσεις που συμφωνούν με τα λεγόμενα του Fischbein ενώ έδειχναν να αντιλαμβάνονται την ανομοιομορφία των ενδεχομένων.

9.γ.2. 2η Ομάδα μαθητών Γυμνασίου

- **ΜΑΘΗΤΗΣ: ΧΑΡΗΣ**

Όνομα Μαθητή: Χάρης						
Πονταρίσματα						**Αιτιολόγηση**
Γύρος παιχνιδιού	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1ος	-	-	1	2	2	
2ος	-	-	3	-	2	Βγαίνει περισσότερο το 6 και το 4
3ος	1	-	2	1	1	Είπα να βάλω το 2, 4, 5, 6
4ος	-	-	2	2	1	Τυχαία
5ος	1	2	2	-	_	Είπα να βάλω στους μικρότερους αριθμούς
6ος	-	-	2	2	1	Έβαλα στους μεγαλύτερους αριθμούς, γιατί βγαίνουν περισσότερες φορές

Πίνακας 9.γ.2.1. Πονταρίσματα Χάρη

Ερώτηση: Εμφανίζονται κάποιοι αριθμοί πιο πολλές φορές;	
Γύρος παιχνιδιού	**Απαντήσεις**
1ος	
2ος	
3ος	Το 6 και το 4
4ος	Το 6 και το 4
5ος	Δεν απάντησε

Πίνακας 9.γ.2.2.

Ερώτηση: Εμφανίζονται κάποιοι αριθμοί πιο λίγες φορές;	
Γύρος παιχνιδιού	**Απαντήσεις**
1ος	
2ος	
3ος	Δεν απάντησε
4ος	Το 2 και το 3
5ος	Δεν απάντησε

Πίνακας 9.γ.2.3.

Ερωτήσεις	Απαντήσεις παιδιών
Εμφανίζονται όλοι οι αριθμοί το ίδιο εύκολα;	Όχι
Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο δύσκολα;	Το 2, 3
Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο εύκολα;	Το 4 και το 5
Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός πιο πολλές φορές;	Το 4 και το 5
Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός λιγότερες φορές;	Το 2,3
Σας άρεσε το παιχνίδι;	Λίγο
Σας δυσκόλεψε κάτι;	Όχι

Πίνακας 9.γ.2.4.

➢ ΜΑΘΗΤΡΙΑ: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑ

Όνομα Μαθητή: Αλεξάνδρα						
	Πονταρίσματα					**Αιτιολόγηση**
Γύρος παιχνιδιού	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1ος	-	1	3	1	-	
2ος	-	1	1	2	1	Στην τύχη τα βάζω, απλά επειδή τυχαίνει το 4, 5, 3
3ος	1	-	2	1	1	(Δεν απάντησε)
4ος	1	-	2	1	1	Επειδή τυχαίνουν περισσότερο αυτοί οι αριθμοί
5ος	-	1	2	1	1	Επειδή πριν έτυχε τρεις φορές το 4, έβαλα στο 4 δύο πούλια και στα υπόλοιπα από ένα

Πίνακας 9.γ.2.5. Πονταρίσματα Αλεξάνδρας

Ερώτηση: Εμφανίζονται κάποιοι αριθμοί πιο πολλές φορές;	
Γύρος παιχνιδιού	**Απαντήσεις**
1ος	
2ος	
3ος	Το 4, 5, 6
4ος	Δεν απάντησε
5ος	Το 4

Πίνακας 9.γ.2.6.

Ερώτηση: Εμφανίζονται κάποιοι αριθμοί πιο λίγες φορές;	
Γύρος παιχνιδιού	**Απαντήσεις**
1ος	
2ος	
3ος	
4ος	Δεν απάντησε
5ος	Το 2

Πίνακας 9.γ.2.7.

Ερωτήσεις	Απαντήσεις παιδιών
Εμφανίζονται όλοι οι αριθμοί το ίδιο εύκολα;	Όχι
Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο δύσκολα;	Το 2
Είναι κάποιοι αριθμοί που εμφανίζονται πιο εύκολα;	Το 4, 5
Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός πιο πολλές φορές;	Το 4, 5
Εμφανίστηκε κάποιος αριθμός λιγότερες φορές;	Το 2
Σας άρεσε το παιχνίδι;	Ναι
Σας δυσκόλεψε κάτι;	Όχι

Πίνακας 9.γ.1.8.

- **ΜΑΘΗΤΡΙΑ- ΝΙΚΗΤΡΙΑ: ΑΛΕΞΑΝΔΡΑ**

Όνομα Μαθητή- Νικητή: Αλεξάνδρα						
Πονταρίσματα						**Αιτιολόγηση**
Γύρος παιχνιδιού	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1ος	-	1	2	1	1	Παιχνίδι είναι
2ος	-	2	2	1	-	Γιατί το 4 και το 2 τυχαίνει διπλές ή τριπλές φορές
3ος	1	2	2	-	-	Το 4 τυχαίνει σχεδόν συνέχεια και το 2, επειδή όταν δεν το βάζω τυχαίνει
4ος	-	-	-	-	-	(Δεν απάντησε, επειδή χτύπησε το κουδούνι)
5ος	-	-	-	-	-	(Δεν απάντησε, επειδή χτύπησε το κουδούνι)

Πίνακας 9.γ.2.9. Πονταρίσματα Αλεξάνδρας (νικήτρια παιχνιδιού)

➢ ΕΡΕΥΝΗΤΡΙΑ

Ερευνήτρια						
Πονταρίσματα						**Αιτιολόγηση**
Γύρος παιχνιδιού	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1^{ος}	-	1	2	2	-	
2^{ος}	-	1	3	1	-	
3^{ος}	-	1	3	1	-	
4^{ος}	-	-	-	-	-	(Δεν ολοκληρώθηκε επειδή «χτύπησε» το κουδούνι)
5^{ος}	-	-	-	-	-	Δεν ολοκληρώθηκε επειδή «χτύπησε» το κουδούνι)

Πίνακας 9.γ.2.10. Πονταρίσματα ερευνήτριας

Οι παραπάνω πίνακες δείχνουν τα πονταρίσματα που έκαναν οι μαθητές της δεύτερης ομάδας του γυμνασίου, τις αιτιολογήσεις που έδωσαν για κάθε ποντάρισμα (Πίνακες 9.γ.2.1., 9.γ.2.5.), τις απαντήσεις που έδωσαν στις ερωτήσεις ανοικτού τύπου σχετικά με το αν κάποιος αριθμός εμφανίζεται περισσότερες ή λιγότερες φορές (Πίνακες 9.γ.2.2., 9.γ.2.3., 9.γ.2.6., 9.γ.2.7.), τις απαντήσεις που έδωσαν στις ερωτήσεις που ακολούθησαν με το πέρας του παιχνιδιού (Πίνακες 9.γ.2.4., 9.γ.2.8.) αλλά και τα πονταρίσματα του τελικού νικητή και της ερευνήτριας, όταν έπαιξαν μαζί (Πίνακες 9.γ.2.9., 9.γ.2.10.).

Όπως φαίνεται από τα πονταρίσματα που αναγράφονται στον πίνακα, ο Χάρης καθ' όλη τη διάρκεια του παιχνιδιού δεν φάνηκε να αντιλαμβάνεται ότι τα ενδεχόμενα με τις περισσότερες πιθανότητες ότι είναι τα 3, 4 και 5. Αντίθετα, εξέφραζε υποκειμενικές αιτιολογήσεις, όπως άλλωστε φάνηκε και από τους δύο τελευταίους γύρους.

Από την άλλη μεριά, η Αλεξάνδρα φάνηκε να χρησιμοποιεί την ευρετική στρατηγική της διαθεσιμότητας, καθώς τα πονταρίσματα της μεταβάλλονταν σύμφωνα με την ευκολία των προηγούμενων εμφανίσεων των γεγονότων. Πράγματι, ενώ στο δεύτερο γύρο παρατήρησε πως το 3, το 4 και το 5 εμφανίζονται περισσότερες φορές, στους υπόλοιπους γύρους που ακολούθησαν άλλαζε τις στρατηγικές ανάλογα με τα αποτελέσματα των προηγούμενων γύρων. Εμπειρικά προσπαθούσε να ποντάρει και στις παρτίδες που ακολούθησαν με την ερευνήτρια. Βέβαια, δεν πρόλαβαν να ολοκληρώσουν το παιχνίδι τους, επειδή «χτύπησε» το κουδούνι και έπρεπε να επιστρέψουν στις τάξεις τους.

Ανεξάρτητα όμως από τις αιτιολογήσεις που έδιναν τα παιδιά για τα πονταρίσματα τους, φάνηκε σε έναν βαθμό να έχουν αντιληφθεί ποιοι αριθμοί εμφανίζονται περισσότερες και ποιοι λιγότερες φορές. Χαρακτηριστικά, ο Χάρης ανέφερε ότι το 6 και το 4 ότι είναι οι αριθμοί που εμφανίζονται πιο πολλές φορές και η Αλεξάνδρα ανέφερε το 4 και το 5, ενώ ως λιγότερα εμφανιζόμενοι αριθμοί αναφέρθηκαν το 2 και το 3 και το 2 αντίστοιχα. Το παιχνίδι δεν δυσκόλεψε κανένα από τα δύο παιδιά, καθώς κατάλαβαν το στόχο του. Μόνο, ο Χάρης δεν έδειξε μεγάλο ενθουσιασμό για αυτό, σε αντίθεση με την Αλεξάνδρα που της άρεσε. Τέλος, Φάνηκε και τα δύο παιδιά αυτής της ομάδας να προσαρμόζουν τις διαισθήσεις τους, χάρη της επαφής τους με το παιχνίδι, αντιδράσεις που συμφωνούν με τα λεγόμενα του Fischbein ενώ έδειχναν να αντιλαμβάνονται την ανομοιομορφία των ενδεχομένων.

9.2. Σύνοψη της ανάλυσης των ερευνητικών δεδομένων

Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα των αναλύσεων των πονταρισμάτων των παιδιών όπως παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη υποενότητα, είναι εφικτό να συνοψιστούν τα χαρακτηριστικά που παρουσίασε η κάθε βαθμίδα, απαντώντας ταυτόχρονα στα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στην ενότητα 7.2. .

Ερώτημα 1ο : Οι μαθητές αντιλαμβάνονται την ανομοιομορφία των συχνοτήτων εμφάνισης των ενδεχομένων; Την χρησιμοποιούν;

Αρχικά, όσον αφορά στο πρώτο ερώτημα για το αν αντιλαμβάνονται τα παιδία την ανομοιομορφία των ενδεχομένων θα μπορούσαν να ειπωθούν τα παρακάτω. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι απαντήσεις των παιδιών του προσυλλογιστικού σταδίου. Η πλειοψηφία των παιδιών (3 στα 4) με τις απαντήσεις που δίνει, κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, φαίνεται να αντιλαμβάνεται ότι κάποιοι αριθμοί εμφανίζονται πιο πολλές φορές ως αποτέλεσμα του αθροίσματος των δύο ζαριών. Το παράδοξο είναι ότι παρόλο που εντοπίζουν αυτήν την ανομοιομορφία και καταλαβαίνουν το σκοπό του παιχνιδιού, δεν αλλάζουν τον τρόπο πονταρίσματος τους, και +στις ερωτήσεις που πραγματοποιούνται στο τέλος του παιχνιδιού σχετικά με τη συχνότητα των ενδεχομένων δεν επαναλαμβάνουν τους αριθμούς που ανέφεραν κατά τη διάρκεια αυτού, αλλά παρουσιάζουν τα ενδεχόμενα ως ισοπίθανα. Σε αυτό το σημείο βλέπουμε να επαληθεύεται η θεωρία του Fischbein (Jones & Thornton, 2005) αναφορικά με τις διαισθήσεις και να αντικρούεται αυτή των Piaget και Inhelder, που υποστηρίζει ότι τα παιδιά δεν είναι ικανά να ασχοληθούν με την έννοια της πιθανότητας, την κατανόηση του αναλογικού και συνδυαστικού συλλογισμού μέχρι να φθάσουν στο στάδιο των τυπικών λογικών πράξεων. Σύμφωνα με τον Fischbein τα παιδιά όταν καλούνται να απαντήσουν σε ένα πρόβλημα κυρίως συνδυαστικής φύσεως, δημιουργούν την πρωτεύουσα διαίσθηση, η οποία αποτελεί μια γνωστική κατάκτηση ή έστω μια αυθόρμητη και συνολική σκέψη που λειτουργεί σαν εσωτερική απόδειξη. Επίσης, η πρωτεύουσα διαίσθηση δεν απορρίπτεται εύκολα, παρά μόνο ανασχηματίζεται σε δευτερεύουσα διαίσθηση προκειμένου να μη χαθεί η πρώτη. Έτσι, στην παραπάνω περίπτωση των νηπίων, τα παιδιά αρνούνται να ανασχηματίσουν την πρωτεύουσα διαίσθηση. Από την άλλη πλευρά τα παιδιά της Δ΄ δημοτικού φαίνεται να έχουν καλύτερη αντίληψη της έννοιας του τυχαίου συγκριτικά με τα παιδιά του προηγούμενου σταδίου, αρκεί να αναλογιστεί κανείς τα περισσότερο εύστοχα πονταρίσματα τους. Επίσης, σε αντίθεση με τα παιδιά του πρώτου σταδίου, τα παιδιά της Δ΄ δημοτικού παραδειγματίζονταν από τα άστοχα πονταρίσματα τους κι από τα «έξυπνα» πονταρίσματα της ερευνήτριας ακολουθώντας την ευρετική της διαθεσιμότητας όχι όμως με σταθερότητα, ώστε σε επόμενο γύρο να αλλάξουν τρόπο πονταρίσματος, χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτού είναι της παίκτριας Ερμιόνης. Σε αντιδιαστολή με τους παραπάνω συμμετέχοντες στο παιχνίδι του αθροίσματος των δύο ζαριών Είναι ενδιαφέρον το πως βελτιώνεται η πιθανολογική σκέψη στους μαθητές του σταδίου των τυπικών λογικών πράξεων. Ειδικότερα, οι μαθητές της Β΄ γυμνασίου φάνηκε να κατανοούν καλύτερα την έννοια της πιθανότητας, πράγμα που είχε ως αποτέλεσμα το να προβλέπουν με μεγαλύτερη επιτυχία το άθροισμα των δύο ζαριών, σε σύγκριση με τα παιδιά των δύο προηγούμενων βαθμίδων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση του Βίκτωρα, ο οποίος από το παράδειγμα κιόλας που παρουσίασε η ερευνήτρια κατάλαβε ότι τα κεντρικά ενδεχόμενα είναι πιο πιθανά, ενώ όσο απομακρυνόμαστε από αυτά οι πιθανότητες να εμφανιστούν μειώνονται. Επίσης, οι μαθητές αυτού του σταδίου δεν επηρεάστηκαν από τα πονταρίσματα της ερευνήτριας, καθώς είχαν ήδη εντοπίσει ποια είναι τα περισσότερο πιθανά ενδεχόμενα.

<u>Ερώτημα 2ο : Ποιες κατηγορίες αιτιολογήσεων εμφανίζουν τα παιδιά;</u>

Παρατηρήθηκε πως οι μαθητές της νηπιακής ηλικίας ότι δεν αιτιολογούσαν τις επιλογές τους και όταν το έκαναν οι αιτιολογήσεις τους ήταν περισσότερο υποκειμενικές (χαρακτηριστική είναι η αιτιολόγηση της Νίκης που ισχυρίστηκε ότι ποντάρει κατά αυτόν τον τρόπο λέγοντας ότι «Το σκέφτηκα, γιατί μου αρέσουν οι μεγάλοι αριθμοί»), χωρίς να φαίνεται ότι έστω προσεγγίζουν την έννοια της πιθανότητας. Σε αντίθεση με τους παραπάνω, τα παιδιά της Δ΄ δημοτικού δεν δίσταζαν να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους, δίνοντας μάλιστα αιτιολογήσεις που ήταν περισσότερο τυπικές, δείχνοντας ότι μέσα από τα λάθη τους και από τις επαναλήψεις των παιχνιδιών ότι άρχιζαν να αντιλαμβάνονται τα πιο πιθανά ενδεχόμενα, ακολουθώντας την ευρετική της διαθεσιμότητας λαμβάνοντας υπόψη τα προηγούμενα αποτελέσματα από τη ρίψη των ζαριών. Επίσης, οι μαθητές του γυμνασίου παρείχαν πιο ολοκληρωμένες απαντήσεις στην αιτιολογία τους αναφορικά με τον τρόπο σκέψης τους σε σύγκριση με τις δυο προηγούμενες βαθμίδες τους. Επιπρόσθετα από τις αναλύσεις στην προηγούμενη ενότητα προκύπτει ότι κυρίως τα παιδιά του γυμνασίου, λιγότερο τα παιδιά του δημοτικού και μηδαμινά του νηπιαγωγείου, ανταπεξήλθαν στο παιχνίδι, το οποίο τους οδηγούσε διαισθητικά στην οικοδόμηση της έννοιας της πιθανότητας. Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθεί η περίπτωση της Αλεξάνδρας, η οποία καθώς φάνηκε και από τις αιτιολογήσεις της υποκινούνταν από την ευρετική στρατηγική της διαθεσιμότητας. Σύμφωνα με τους Kahneman και Tversky (Jones & Thornton, 2005), όπως αναφέρεται και στο κεφάλαιο της Διδακτικής της πιθανότητας της παρούσας εργασίας, χρησιμοποιώντας τη στρατηγική της διαθεσιμότητας αποτιμούσε την πιθανότητα των γεγονότων σύμφωνα με την ευκολία των προηγούμενων εμφανίσεων των γεγονότων.

<u>Ερώτημα 3ο : Κατά τη διάρκεια του πονταρίσματος οι μαθητές χρησιμοποιούν το διάγραμμα συχνοτήτων;</u>

Λαμβάνοντας υπόψη τα ερευνητικά ευρήματα για το αν χρησιμοποιούσαν οι μαθητές το διάγραμμα των συχνοτήτων θα μπορούσαν να ειπωθούν τα παρακάτω. Ειδικότερα, τα παιδιά της νηπιακής ηλικίας ενώ στις ερωτήσεις που παρεμβάλλονταν κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού συμβουλεύονταν το διάγραμμα των συχνοτήτων, στο τέλος του παιχνιδιού σε ανάλογες ερωτήσεις δεν το λάμβαναν υπόψη. Αντίθετα, τα παιδιά του δημοτικού το συμβουλεύονταν περισσότερο, πράγμα που φάνηκε και από τα «πιο έξυπνα» πονταρίσματα που πραγματοποιούσαν προς τους τελευταίους γύρους. Ανάλογα, το διάγραμμα των συχνοτήτων το συμβουλεύονταν και τα παιδιά του γυμνασίου, μόνο που φάνηκε να καθορίζει το ποντάρισμα τους νωρίτερα από τα παιδιά του δημοτικού.

Ερώτημα 4$^{\underline{o}}$: Οι μαθητές κατανοούν το περιβάλλον του μικρόκοσμου; Μπορούν να το χρησιμοποιήσουν;

Αναφορικά με την κατανόηση που έδειξαν για το περιβάλλον του μικρόκοσμου, τα παιδιά δεν παρουσίασαν κάποια δυσκολία. Ακόμη και τα παιδιά του νηπιαγωγείου το χειρίστηκαν με ευκολία, καθώς τα περισσότερα από αυτά είχαν προηγούμενες εμπειρίες με ηλεκτρονικούς υπολογιστές, αλλά και ένα νήπιο που δεν είχε, δεν παρουσίασε κανένα πρόβλημα.

Ερώτημα 5$^{\underline{o}}$: Οι μαθητές θεωρούν ελκυστικό το μικρόκοσμο;

Όλοι οι συμμετέχοντες αυτής της έρευνας υποστήριξαν πως το περιβάλλον αυτού του μικρόκοσμου- παιχνιδιού ότι ήταν ιδιαίτερα ελκυστικό. Μόνο σε ένα μαθητή της Β΄ γυμνασίου άρεσε λίγο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

10. ΣΥΖΗΤΗΣΗ- ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η προσέγγιση της έννοιας της πιθανότητας απασχολούσε μεγάλη μάζα ανθρώπων εδώ και πολλούς αιώνες. Οι ρίζες της Θεωρίας των Πιθανοτήτων βρίσκονται στην προσπάθεια επίλυσης «προβλημάτων- παιχνιδιών» που είχαν τεθεί την εποχή εκείνη και που στη διάρκεια των χρόνων, πλήθος μαθηματικών προσπάθησαν να λύσουν. Η σωστή μαθηματική λύση, σύμφωνα με τα σημερινά δεδομένα, άργησε πολύ να δοθεί.

Για τον ορισμό της Θεωρίας των Πιθανοτήτων διατυπώθηκαν οι ακόλουθες φιλοσοφικές απόψεις: η κλασική, η συχνότητας, η υποκειμενική και η τυπική. Η κάθε μια από αυτές προσεγγίζει την έννοια της πιθανότητας με διαφορετικό τρόπο εκφώνησης αλλά και λύσεων. Ενώ, για να μπορεί να συζητηθεί ένα πρόβλημα πιθανολογικό πρέπει να προσεγγίζεται με την ίδια φιλοσοφική άποψη.

Όσον αφορά στη διδακτική των πιθανοτήτων έχει πραγματοποιηθεί εύρος μελετών από ερευνητές που διατύπωσαν πολλές και διαφορετικές μεθόδους και δραστηριότητες. Από τη μια μεριά, οι ψυχολόγοι μελετούν την εξέλιξη του πιθανολογικού συλλογισμού των παιδιών σε καταστάσεις αβεβαιότητας και δεν ασχολούνται με την επίδραση της διδασκαλίας στις λάθος αντιλήψεις των παιδιών για τις πιθανότητες (ο Konold είναι από τους λίγους που αποτελεί εξαίρεση μεταξύ των ψυχολόγων). Οι ψυχολόγοι είναι κυρίως παρατηρητές και περιγράφουν το τι συμβαίνει όταν τα υποκείμενα ασχολούνται με θέματα γνωστικής κρίσης. Συνήθως προσπαθούν να εξηγήσουν ό,τι παρατηρούν με βάση κάποια θεωρητικά μοντέλα, όπως αναφέρεται από την Σκουμπουρδή (2003). Από την άλλη μεριά οι διδακτικοί ψάχνουν τρόπους, ώστε να αλλάξουν τις λανθασμένες αντιλήψεις και τα πιστεύω των μαθητών τους σχετικά με τις πιθανότητες (Shaughnessy, 1992). Αυτή η διαφορετική προσέγγιση της κάθε ομάδας ερευνητών γίνεται αντιληπτή και από τις δραστηριότητες που χρησιμοποιεί.

Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τους Jones και Thornton (2005), οι Piaget και Inhelder υποστηρίζουν την ανάπτυξη σε στάδια, η οποία απαιτεί την κατανόηση των λειτουργιών της συνδυαστικής ως προαπαιτούμενο για πλήρη κατανόηση της έννοιας της πιθανότητας και δεν ασχολούνται καθόλου με το ρόλο της διδασκαλίας για τη συγκεκριμένη έννοια.

Ακόμη, ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι έρευνες για τη διαισθητική αντίληψη, την οποία προσέγγισαν τρεις ερευνητές. Από τη μια πλευρά οι Kahneman και Tversky (Jones και Thornton, 2005) υποστήριξαν την ύπαρξη ευρετικών στρατηγικών (Heuristics), των οποίων η ύπαρξη μπορεί να βοηθήσει στο να εκτιμήσει κανείς μια πιθανότητα, αλλά μπορούν και να οδηγήσουν σε προκαταλήψεις ή και παρανοήσεις. Οι στρατηγικές αυτές είναι γνωστές ως: αντιπροσωπευτικότητα, διαθεσιμότητα, ρύθμιση (adjustment) και αγκύστρωση (anchoring). Από την άλλη πλευρά, ο Fischbein αναφέρθηκε στην πρωτεύουσα διαίσθηση, δηλαδή στο σχηματισμό πεποιθήσεων γνωστικού περιεχομένου χωρίς την ύπαρξη συστηματικής διδασκαλίας, και στις δευτερεύουσα διαίσθηση, η οποία αναδομεί γνωστικές πεποιθήσεις μέσα από το περιεχόμενο μιας συγκεκριμένης εργασίας.

Αξίζει να αναφερθεί σε αυτό το σημείο μια σύγχρονη έρευνα που πραγματοποιήθηκε από τον Pratt (2000) κι αφορούσε την ανάπτυξη της διαισθητικής αντίληψης μέσω του αθροίσματος των δύο ζαριών με τη βοήθεια μικρόκοσμου σε παιδιά ηλικίας 10 ως 11 ετών. Η έρευνα αυτή λειτούργησε ως αφορμή για περαιτέρω διερεύνηση του προβλήματος του αθροίσματος των δύο ζαριών. Το πρόβλημα του αθροίσματος των δύο ζαριών με την υποστήριξη μικρόκοσμου επιτρέπει την ουσιαστική κατανόηση της έννοιας των πιθανοτήτων, από τη μια πλευρά επειδή αυτή η ανομοιομορφία της κατανομής των πιθανοτήτων επιτρέπει τα παιδιά να κατανοήσουν την έννοια της πιθανότητας και από την άλλη επειδή η συμβολή των ΤΠΕ επιτρέπει την ανάπτυξη της διαισθητικής αντίληψης. Έτσι, στην παρούσα εργασία επιλέχθηκε το πρόβλημα του αθροίσματος των δύο ζαριών με την εμπλοκή μικρόκοσμου- παιχνιδιού και επεκτείνοντας το ηλικιακό δείγμα, αγγίζοντας και τα τρία στάδια ανάπτυξης (προσυλλογιστικό- παιδιά νηπιαγωγείου, συγκεκριμένων πράξεων- παιδιά Δ΄ δημοτικού και τυπικών λογικών πράξεων- παιδιά Β΄ γυμνασίου).

Με το πέρας της έρευνας προέκυψαν συμπεράσματα τα οποία επιβεβαίωσαν τα χαρακτηριστικά που είχε ήδη προσδώσει ο Fischbein στην περιγραφή του κάθε αναπτυξιακού σταδίου, χωρίς να παρουσιάζονται αποκλίσεις λόγω της χρήσης των Τ.Π.Ε. . Πράγματι, τα παιδιά νηπιακής ηλικίας προσάρμοζαν τις προβλέψεις τους, ώστε να ανταποκρίνονται στα επιθυμητά αποτελέσματα, χωρίς όμως να κατακτούν την έννοια της πιθανότητας, ενώ η εμπειρική μάθηση είχε μηδαμινή επίδραση σε αυτά. Ακόμη, ενώ αντιλαμβάνονταν ότι κάποιοι αριθμοί εμφανίζονταν πιο εύκολα, δεν ήταν πρόθυμα να εγκαταλείψουν την πρωτεύουσα διαίσθηση τους.

Από την άλλη πλευρά τα παιδιά της Δ΄ δημοτικού φάνηκε να έχουν καλύτερη αντίληψη της έννοιας του τυχαίου συγκριτικά με τα παιδιά του προηγούμενου σταδίου, αρκεί να αναλογιστεί κανείς τα περισσότερο εύστοχα πονταρίσματα τους. Ακόμη, λάμβαναν περισσότερο υπόψη το διάγραμμα συχνοτήτων από τα νήπια, κίνηση που τους βοήθησε στον ανασχηματισμό της πρωτεύουσας διαίσθησης, ενώ δεν δίσταζαν να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους, κάτι που δεν έκανε η πλειοψηφία των παικτών του νηπιαγωγείου. Επίσης, σε αντίθεση με τα παιδιά του πρώτου σταδίου, τα παιδιά της Δ΄ δημοτικού παραδειγματίζονταν από τα άστοχα πονταρίσματα τους κι από τα «έξυπνα» πονταρίσματα της ερευνήτριας, ώστε σε επόμενο γύρο να αλλάξουν τρόπο πονταρίσματος.

Τα αποτελέσματα, βέβαια, της παρούσας εργασίας δεν παρουσιάζουν αποκλίσεις από αυτά της έρευνας του Pratt που πραγματοποιήθηκε κατ΄ αναλογία σε παιδιά δημοτικού και είχε ως θέμα το άθροισμα των δύο ζαριών. Ειδικότερα και ο Pratt κατέληξε πως οι νέες πηγές γνώσεων (δευτερεύουσες διαισθήσεις) δεν αντικαθιστούσαν τις πρωταρχικές (πρωτεύουσες διαισθήσεις), αν και βαθμιαία άρχισαν να κυριαρχούν. Ακόμη, συνηγόρησε στο ότι η κατάλληλη επιλογή των εργαλείων του περιβάλλοντος του μικρόκοσμου μπορεί να εναρμονίσει τις πρωταρχικές γνώσεις, που αναδύονται άμεσα από την εμπειρία του παιχνιδιού, και να τις συνδέσει με τις νέες πηγές γνώσεων, ενώ παρουσιάστηκε ως υποστηρικτής του Fischbein αναφορικά με την ανοικοδόμηση των διαισθήσεων. Πράγμα που συμβαίνει και στην παρούσα μελέτη περίπτωσης, αρκεί να σκεφθεί κανείς την επιρροή που ασκούσε το περιβάλλον του παιχνιδιού στις στρατηγικές που ακολούθησαν τα παιδιά της Δ΄ δημοτικού.

Σε αντιδιαστολή με τους παραπάνω συμμετέχοντες στο παιχνίδι του αθροίσματος των δύο ζαριών, οι μαθητές της Β΄ γυμνασίου υπερείχαν στα παρακάτω. Οι μαθητές αυτού του σταδίου φάνηκε να κατανοούν καλύτερα την έννοια της πιθανότητας, πράγμα που είχε ως αποτέλεσμα το να προβλέπουν με μεγαλύτερη επιτυχία το άθροισμα των δύο ζαριών, σε σύγκριση με τα παιδιά των δύο προηγούμενων βαθμίδων. Ακόμη, οι μαθητές αυτής της βαθμίδας παρείχαν πιο ολοκληρωμένες απαντήσεις στην αιτιολογία τους αναφορικά με τον τρόπο σκέψης τους και χρησιμοποιούσαν όλα τα στοιχεία του μικρόκοσμου για την παραγωγή του πονταρίσματος τους. Επιπρόσθετα από τις αναλύσεις των ερευνητικών δεδομένων προκύπτει ότι τα παιδιά ανταπεξήλθαν στο παιχνίδι, το οποίο τους οδηγούσε διαισθητικά στην οικοδόμηση της έννοιας της πιθανότητας. Επιπλέον, φάνηκε ότι τα παιδιά είναι ικανά να συνεργαστούν και να χρησιμοποιήσουν αποτελεσματικά το συγκεκριμένο μικρόκοσμο για την κατανόηση του αθροίσματος των δύο ζαριών.

Λαμβάνοντας υπόψη τις αντιδράσεις- αιτιολογήσεις των παραπάνω συμμετεχόντων και των τριών βαθμίδων αναφορικά με τις επιλογές τους στο παιχνίδι- μικρόκοσμο προκύπτουν τα παρακάτω σε σχέση με τη προσέγγιση των Piaget και Inhelder. Σύμφωνα με τους τελευταίους τα παιδιά δεν ήταν ικανά να ασχοληθούν με την έννοια της πιθανότητας, την κατανόηση του αναλογικού και συνδυαστικού συλλογισμού μέχρι να φθάσουν στο στάδιο των τυπικών λογικών πράξεων. Σε αντίθεση με τα παραπάνω, παρατηρήθηκε πως ορισμένα παιδιά του προσυλλογιστικού σταδίου αντιλήφθηκαν την ανομοιομορφία της συχνότητας, αν και δεν προέβαιναν σε κάποια στρατηγική, ενώ τα παιδιά του σταδίου των τυπικών πράξεων όχι μόνο κατανόησαν την ανομοιομορφία της συχνότητας με την ευρετική της διαθεσιμότητας, αλλά και την μετουσίωσαν σε στρατηγική. Έπειτα, τα παιδιά των τυπικών λογικών πράξεων φάνηκε να αντιλαμβάνονται ταχύτερα την ανομοιομορφία των ενδεχόμενων των πιθανοτήτων. Συνεπώς, σε αντίθεση με τα όσα λέχθηκαν από τους Piaget και Inhelder, η μελέτη των πιθανοτήτων ακόμα και από το προσυλλογιστικό στάδιο μπορεί να συντελέσει στη διαμόρφωση μιας πρώτης διαίσθησης που σε βάθος χρόνου μπορεί να βοηθήσει το παιδί να κατακτήσει την έννοια της πιθανότητας.

Ακόμη, μελλοντικά αυτή η μελέτη περίπτωσης θα μπορούσε να επεκταθεί σε μεγαλύτερο δείγμα, ώστε τα αποτελέσματα που θα προκύψουν να είναι πιο αντικειμενικά. Επίσης, τα παιδιά δεν είναι σε θέση να δώσουν μια τυπική ερμηνεία στο αποτέλεσμα, έτσι το πρόβλημα των δύο ζαριών αναδεικνύεται σε ευκαιρία για την εισαγωγή τυπικής διδασκαλίας αναφορικά με αυτό. Συνεπώς, αυτός ο μικρόκοσμος- παιχνίδι μπορεί να έχει πολύ σημαντικές θετικές επιδράσεις στην πιθανολογική εκπαίδευση, καθώς τα παιδιά χάρη στις Τ.Π.Ε. προσεγγίζουν την έννοια της πιθανότητας στο περιθώριο της συνείδησης. Η οπτικοποίηση της πληροφορίας , η ενεργητική μάθηση και η ανατροφοδότηση σε συνδυασμό με την κατάλληλη στάση του εκπαιδευτικού μπορούν να δώσουν μια νέα διάσταση στην κατανόηση μιας τόσο δυσνόητης μαθηματικής έννοιας όπως αυτή της πιθανότητας από τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία:

- Άρθρο 1 Wikipedia, 2009, Θεωρία πιθανοτήτων, από Wikipedia, τελ.επίσκ. 28/05/2009 με url: http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A0%CE%B9%CE%B8%CE%B1%CE%BD%CF%8C%CF%84%CE%B7%CF%84%CE%B5%CF%82#.CE.88.CE.BD.CE.BD.CE.BF.CE.B9.CE.B5.CF.82
- Αρθρο 2 Wikipedia, 2009, Probability theory, από Wikipedia, τελ.επίσκ. 28/05/2009 με url: http://en.wikipedia.org/wiki/Probability_theory.
- Σκουμπουρδή, Χ. (2003). Μορφές μαθησιακών δραστηριοτήτων για την εισαγωγή της έννοιας της πιθανότητας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Διδακτορική διατριβή που παρουσιάστηκε στο Τμήμα Επιστημών Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού του Πανεπιστημίου Αιγαίου.
- Σολομωνίδου, Χ. (2006). Νέες τάσεις στην εκπαιδευτική τεχνολογία. Αθήνα: Μεταίχμιο
- Φεσάκης, Γ., (2008). Τεχνολογίες Πληροφορικής και Επικοινωνιών στην προσχολική εκπαίδευση, διαστάσεις και προοπτικές. Πρακτικά συνεδρίου Η διδακτική της πληροφορικής στο πανεπιστήμιο Πατρών.

- Ξενόγλωσση βιβλιογραφία:

- Arzarello, F. (1991). Pre-algebraic Problem Solving. Paper presented at a seminar on problem-solving. Viana do Castelo, Portugal.
- Borovcnik, M., Bentz, J. & Kapadia, R. (1991). A probabilistic perspective. In Kapadia, R & Borovcnik, M. Chance encounters probability in education Kluwer Academic Publishers The Netherlands.
- Cohen, L., & Manion, L. (1994). Research methods in education (2nd Ed.). New York: Routledge. Clements, D. H. & Nastasi, B.K. (1992). Computers in early childhood education, in M. Gettinger, S.N.Elliot & T.R. Kratochwill (Eds) Advances in school Psychology: preschool and early childhood treatment directions. Hillside: Lawrence Erlbaum Associates.
- Clements, D., (1999). Young Children and Technology, in Dialogue on Early Childhood Science, Math and Technology Education, American Association for the Advancement of Science.
- Clements, D. H. (2002). Computers in early childhood mathematics. Contemporary isues in early childhood, 3 (2).
- Clements, D. H. & Nastasi, B.K. (1993). Electronic media and early childhood education, in B. Spodek (Ed.) Handbook of research on the education of young children. New York: Macmillan. Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), Handbook of research design in mathematics and science education, (pp. 307-334). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Drier, H. S., (2000). Children’ s probababilistic reasoning with a computer microworld.Διδακτορική μελέτη που παρουσιάστηκε στο Curry School of Education University of Virginia.

- Edwards, L. D. (13 Ιανουαρίου 2000). Embodying mathematics and science: Microworlds as representations. The Journal of Mathematical Behavior 17 (1). Ημερομηνία πρόσβασης (date) από http://www.sciencedirect.com/science?_ob=ArticleURL&_udi=B6W5B-3YB4WXR-6&_user=10&_rdoc=1&_fmt=&_orig=search&_sort=d&view=c&_acct=C000050221&_version=1&_urlVersion=0&_userid=10&md5=dd5f13bf1c7284c6744ce081d6c92a4b
- Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
- Green, D. R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 1 1-16 years. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett, & G. M.. Constable (Eds.), Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics (pp. 766-783). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.
- Hawkins, A. (1990). Training teachers to teach statistics. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Hoyles, C., Noss, R., Adamson, R.,(200200). Rethinking the microworld idea. Journal of Educational Computing Research, 27 (1,2).
- Jones, G. A. (1 974). The performances offist, second, and third grade children on five concepts of probability and the effects of grade, I.Q., and embodiments on their performance. Unpublished doctoral dissertation, Indiana University, Bloomington.
- Jones, G. A., & Thornton, C. A. (2005). An overview of research into the teaching and learning probability. Mathematics Education Library, 40 (1).
- Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. In: Grouws D. (Ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Simon and Schuster Macmillan. pp. 515-556.
- Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. In E. von Glaserfeld (Ed.), Radical Constructivism in Mathematics Education (pp. 139-156). Holland: Kluwer.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.
- Noss, R., Healy, L., Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic, 33(2) July.
- Papert, S. (1991). Situating Constructionism. In I. Harel & S. Papert (eds) Constructionism. New Jerseyt: Ablex Publisshing Corporation. 1-12.
- Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. Journal of Research in Mathematics Education, 31(5),602-625.
- Pratt, D. & Noss, R. (2002). The microevolution of mathematical knowledge: The case of randomness. Journal of the Learning Sciences, 11 (4), 453-488.
- Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 465- 494). New York: Macmillan.
- Shepler, J. L. (1970). Parts of a systems approach to the development of a unit in probability and statistics for the elementary school. Journal for Research in Mathematics Education, 1, 197-205.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics from a constructivist pedagogy. Journal for Research in Mathematics Education, 26,146-149.
- Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. Educational Studies in Mathematics, 20, pp. 147-164.
- Steinbring, H. (1984). Mathematical concepts in didactical situations as complex systems: The case of probability. In H. Steiner & N. Balacheff (Eds.), Theory of mathematics education (TME: ICME 5): Occasional paper 54 (pp. 56-88). Bielefeld: IDM.
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. Science, 185, 1 124- 1 13 1.

- Vahey, P. (1998). Promoting Student Understanding of Elementary Probability Using a Technology-Mediated Inquiry Environment. Unpublished doctoral dissertation, University of California-Berkeley, Berkeley, CA.
- Way, J. (2003). The development of children's notions of probability. Unpublished doctoral dissertation, University of Western Sydney.