Delaunay τριγωνοποιηση και Πλεγματοποιηση

Πτυχιακη Εργασια

Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών

Σάμος Απρίλιος 2013

Εισηγητης: Ευστράτιος Πρασίδης

Επιτροπη

Χρήστος Νικολόπουλος

Κωνσταντίνος Χουσιάδας

Στους γονείς μου!

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η ανάλυση πεδίων στο $\mathbb{R}^d$, συνήθως, γίνεται με ανάλυση σε μικρότερα κομμάτια τα οποία θέλουμε να είναι κανονικά. Από την εμπειρία στις διαστάσεις 2 και 3, έχουμε ότι τα κομμάτια αυτά είναι πρέπει να είναι τρίγωνα ή τετράεδρα]. Έτσι απαιτούμε και στις άλλες διαστάσεις να έχουμε τα ανάλογα στοιχεία (simplices). Επίσης, θέλουμε η τομή αυτών των στοιχείων να είναι κανονική, δηλαδή να είναι μια ολόκληρη όψη (σημείο, ακμή, τρίγωνο και τα ανάλογά τους).Από την άλλη δεν θέλουμε αυτά τα στοιχεία να είναι πολύ ακανόνιστα. Για παράδειγμα, για τα τρίγωνα θέλουμε να είναι όσο πιο κοντά γίνεται στα ισόπλευρα τρίγωνα. Αυτό σημαίνει ότι τα τρίγωνα δεν θα έχουν πολύ μεγάλες (ή πολύ μικρές) γωνίες. Αυτήν ακριβώς την ιδιότητα κωδικοποιούν οι τριγωνοποιήσεις Delaunay. Αυτές οι τριγωνοποιήσεις είναι και ο καλύτερος τρόπος για να 'δώσουμε' το πεδίο στον Ευκλείδειο χώρο και να χρησιμοποιήσουμε αλγοριθμικά τις ιδιότητές τους.

Το πρόβλημα λοιπόν είναι η κατασκευή Delaunay τριγωνοποιήσεων. Αυτό το δίνουμε σε δυο περιπτώσεις. Η πρώτη είναι η τριγωνοποίηση της κυρτής θήκης πεπερασμένου αριθμού στοιχείων, απαιτώντας ότι τα δεδομένα σημεία είναι κορυφές της τριγωνοποίησης. Η δεύτερη περίπτωση είναι η κατασκευή πλέγματος, δηλαδή τριγωνοποίησης πεδίου στον Ευκλείδειο χώρο, χωρίς κανέναν περιορισμό στις κορυφές. Αλγοριθμικά, αυτά είναι τα αργά (bottlenecks) σημεία του αλγορίθμου επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με την μέθοδο των πεπερασμένων σττοιχείων.

Σ΄ αυτήν την εργασία παρουσιάζουμε τους βασικούς ορισμούς και ιδιότητες των τριγωνοποιήσεων Delaunay. Επίσης, περιγράφουμε τους βασικούς αλγορίθμους κατασκευής των τριγωνοποιήσεων και επίσης πως να προσθέσουμε περισσότερες κορυφές και να κατασκευάσουμε πλέγματα γενικών πεδίων.

Πέτρος Μυλωνάς, Σάμος 2013.

Κεφάλαιο 1

Τριγωνοποιήσεις

1.1 Βασικοί Ορισμοί και Τριγωνοποιήσεις

Θα δώσουμε τους βασικούς ορισμούς που χρειαζόμαστε στην συνέχεια.

Ορισμός 1.1.1. (i) *Ένα* **τρίγωνο** *είναι ένα πολύγωνο με τρεις πλευρές, το οποίο ορίζεται από τρεις κορυφές P_i, $i = 1, 2, 3$, με αριστερόστροφη διάταξη και συμβολίζεται ως $K = (P_1, P_2, P_3)$.*

(ii) *Ένα* **τετράεδρο** *είναι ένα πολύεδρο με τέσσερις τριγωνικές έδρες. Ορίζεται από τέσσερις διατεταγμένες κορυφές P_i, $i = 1, 2, 3, 4$,και συμβολίζεται ως $K = (P_1, P_2, P_3, P_4)$.*

Για ένα σύνολο σημείων S, στον χώρο απαιτούμε κάποιες συνθήκες για να αποφύγουμε τετριμμένες καταστάσεις. Έστω $V \subset \mathbb{R}^d$ είναι ένας διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^d$ διάστασης $d-1$. Ένα **υπερεπίπεδο** στο $\mathbb{R}^d$ είναι ένα υποσύνολο της μορφής $u + V \subset \mathbb{R}^d$.

Ορισμός 1.1.2. *Το σύνολο των σημείων του $S \subset \mathbb{R}^d$ ονομάζεται ότι βρίσκεται σε τυχαία θέση αν δεν υπάρχουν $d+1$ σημεία στο S που ανήκουν σε ένα υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^d$ και $d + 2$ σημεία του S που δεν ανήκουν σε μια σφαίρα του $\mathbb{R}^d$.*

Για σημεία $x, y \in \mathbb{R}^d$, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το x με το y είναι το μονοπάτι:

$$\sigma_{x,y} : [0, 1] \to \mathbb{R}^d,\ \sigma_{x,y}(t) = (1 - t)x + ty.$$

Υπενθυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ονομάζεται κυρτό αν για κάθε $x, y \in \Omega$, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το x με το y περιέχεται στο Ω.

- Τα τρίγωνα, κύκλοι, τετράγωνα κανονικά πολύγωνα είναι κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$.
- Τα τετράεδρα, οι σφαίρες, τα πλατωνικά στερεά είναι κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$.
- Το $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ δεν είναι κυρτό.

Το επόμενο είναι ένα εύκολο αποτέλεσμα, που είναι άμεση συνέπεια του ορισμού.

Πρόταση 1.1.3. *Έστω* $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ *μια συλλογή από κυρτά σύνολα στο* $\mathbb{R}^d$ *τότε η τομή:*

$$\Omega = \bigcap_{i\in I} \Omega_i,$$

αν δεν είναι κενή είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

Ορισμός 1.1.4. *Έστω* S *ένα σύνολο σημείων (σε τυχαία θέση) στον* R^d *τότε η* **κυρτή θήκη** *του* S *συμβολίζετε ώς* $Conv(S)$ *και είναι το μικρότερο κυρτό υποσύνολο του* $\mathbb{R}^d$ *που περιέχει το* S. *Πιο συγκεκριμένα:*

$$Conv(S) = \bigcap_{S\subset\Omega, \kappa\upsilon\rho\tau\acute{o}} \Omega.$$

Έστω T_r ένα σύνολο στοιχείων K που είναι τρίγωνα ή τετράεδρα και $S \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, τότε:

Ορισμός 1.1.5. (i) *Το* T_r *είναι μια κάλυψη του* $\Omega = Conv(S)$ *εάν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:*

- *οι κορυφές των στοιχείων του* T_r *είναι ακριβώς το* S
- $\Omega = \bigcup_{K\in T_r} K$
- *κάθε στοιχείο* K *στο* T_r *είναι μή κενό*
- *η τομή του εσωτερικού κάθε δύο στοιχείων είναι ένα κενό σύνολο.*

(ii) *Το* T_r *είναι μια τριγωνοποίηση του* Ω, *αν* T_r *είναι μια κάλυψη και επιπλέον ισχύει:*

- *η τομή κάθε δύο στοιχείων του* T_r *είναι είτε:*
  (α΄) *το κενό σύνολο*
  (β΄) *μια κορυφή*
  (γ΄) *μια ακμή*
  (δ΄) *μια όψη* ($\mathbb{R}^3$)

Γενικότερα στον $\mathbb{R}^d$ μια τέτοια τομή είναι μια k-όψη για $k = -1, \ldots, d-1$ (αν $k = -1$ τότε η τομή είναι το κενό σύνολο). Ο τύπος του Euler μας δίνει τον αριθμό για τις k-όψεις σε μια τριγωνοποίηση του Ω:
Τύπος Euler: Στο $\mathbb{R}^2$ έχουμε τη γενική σχέση:

$$ns - na + ne + c = 2$$

όπου ns είναι ο αριθμός των κορυφών της τριγωνοποίησης, na είναι ο αριθμός των ακμών , ne είναι ο αριθμός των στοιχείων και c είναι ο αριθμός των συνεκτικών συνιστουσών του ορίου της τριγωνοποίησης.

Παρόμοια στον $\mathbb{R}^3$ έχουμε :

$$ns - na + nf - ne = cste$$

όπου nf είναι ο αριθμός των όψεων στη τριγωνοποίηση και $cste$ είναι μία σταθερά που σχετίζεται με τη τοπολογία του χώρου.

Γενικά στις δύο διαστάσεις αν δεν υπάρχει κενό στη τριγωνοποίηση , για παράδειγμα αν ο αριθμός των συνεκτικών συνιστωσών του συνόρου είναι ακριβώς ένα τότε :

$$ns - na + ne = 1$$

και η σχέση :

$$na_f - 2xna_i + 3xne = 0$$

συνδέει τον αριθμό των στοιχείων ne με τον αριθμό των εσωτερικών ακμών και τον αριθμό των συνοριακών ακμών na_f .

Στις τρεις διαστάσεις η τριγωνοποίηση μιας κυρτής επιφάνειας ικανοποιεί τη σχέση :

$$ns - na + nf = 2$$

όπου τα ns είναι ο αριθμός των συνοριακών κορυφών στην τριγωνοποίηση, na είναι ο αριθμός των συνοριακών ακμών και nf , ο αριθμός των συνοριακών όψεων που συνδέονται.

1.1α΄ Αναπαράσταση της τριγωνοποίησης

Η **τριγωνοποίηση** είναι ένα σύνολο στοιχείων που περιγράφονται με ένα κατάλληλο τρόπο, επιλέγοντας την κατάλληλη δομή δεδομένων. Μια τριγωνοποίηση κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας κάποιους αλγόριθμους. Αφού η τριγωνοποίηση είναι γράφημα, μπορούμε να καθορίσουμε την έννοια της γειτονιάς αν δεχτούμε μια ακμή για μια επίπεδη τριγωνοποίηση (ή επιφανειακή τριγωνοποίηση) και μια όψη για τη τριγωνοποίηση στον $\mathbb{R}^3$. Με αυτό το τρόπο η σχέση της γειτονιάς για τα τρίγωνα ή τα τετράεδρα δίνει τα στοιχεία που μοιράζονται μια ακμή ή μια όψη ενός δοθέντος στοιχείου.

Στις δύο διαστάσεις, η i-οστή γειτονιά (i=1, 2, 3) ενός τριγώνου , αν υπάρχει, είναι το τρίγωνο που μοιράζεται την a_i ακμή με το αρχικό τρίγωνο. Στην περίπτωση που μια ακμή είναι συνοριακή ακμή τότε η σχετική γειτονιά δεν υπάρχει και ο αριθμός της είναι μηδέν.

Σύνολα Στοιχείων:

Έστω ότι T_r είναι μια τριγωνοποίηση, P είναι ένα σημείο διαφορετικό από όλες τις κορυφές της τριγωνοποίησης, K είναι ένα στοιχείο της T_r και C_k είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος (ή περιγεγραμμένη σφαίρα) του K.

Τα σύνολα που μας ενδιαφέρουν είναι:

- Δίσκος: Έστω P να είναι ένα στοιχείο κορυφής τότε ο δίσκος που σχετίζεται με το R είναι το σύνολο των στοιχείων που έχουν το P ως μία κορυφή.

- Βάση: Εάν το P είναι ένα σημείο που περιέχεται στη τριγωνοποίηση τότε η βάση που σχετίζεται με το P είναι το σύνολο των στοιχείων της T_r που περιέχουν το P.

  Στην περίπτωση όπου το P δεν περιέχεται στη τριγωνοποίηση τότε η βάση που σχετίζεται με το P είναι το σύνολο των στοιχείων που σχηματίζονται από την ένωση του P με τις ακμές (όψεις) των στοιχείων της τριγωνοποίησης που είναι ορατά από το P.

- Κοιλότητα: Σύμφωνα με ορισμένες παραδοχές, η κοιλότητα που σχετίζεται με ένα δοθέν σημείο P είναι το σύνολο των στοιχείων της T_r των οποίων οι περιγεγραμμένοι δίσκοι περιέχουν το σημείο.

- Αγωγός: Έστω s να είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα που περικλείεται στην T_r , υποθέτουμε ότι τα άκρα του s είναι δύο κορυφές στη τριγωνοποίηση. Τότε στις δύο διαστάσεις, ο αγωγός που σχετίζεται με το s είναι το σύνολο των στοιχείων που έχουν τουλάχιστον μία ακμή που τέμνεται από το s

  Στις τρεις διαστάσεις, ο αγωγός ή ακριβέστερα ο απλός αγωγός που σχετίζεται με το s είναι το σύνολο των στοιχείων που έχουν τουλάχιστον μία όψη που τέμνεται από τον s αλλά δεν έχουν ακμές που τέμνονται από τον s .

- Γενικός αγωγός: Έστω s να είναι ένα τμήμα που περιέχεται στην T_r .Υποθέτουμε ότι τα άκρα του s είναι δύο κορυφές της τριγωνοποίησης , τότε στις τρεις διαστάσεις ο γενικός αγωγός που σχετίζεται με το s είναι το σύνολο των στοιχείων που έχουν τουλάχιστον μια όψη ή μια ακμή που τέμνεται από το s .

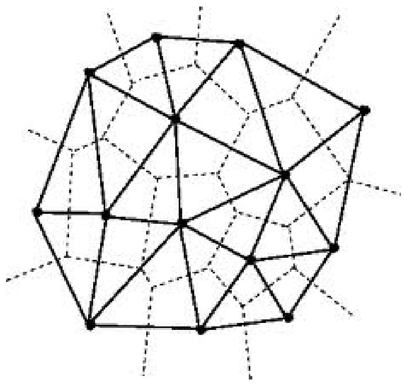
  Από τον ορισμό αυτό, όταν μια ακμή τέμνεται από τον s , τότε ο γενικός αγωγός περιλαμβάνει τουλάχιστον μια κάλυψη της οποίας το άκρο τέμνεται από τον s .

- Κάλυψη: Έστω a να είναι ένα άκρο της T_r , τότε η κάλυψη που σχετίζεται με το a είναι το σύνολο των στοιχείων που μοιράζονται αυτό το άκρο.

  Σε αυτή την περίπτωση το άκρο a λέγεται ότι είναι το καθοριστικό άκρο της κάλυψης. Αυτό είναι αρκετά κοινό στις τρεις διαστάσεις και μπορεί να περιλαμβάνει οποιοδήποτε αριθμό στοιχείων. Μία κλειστή κάλυψη περιλαμβάνει τουλάχιστον 3 στοιχεία. Καθώς μια κάλυψη σχετίζεται με ένα άκρο, για λόγους απλοποίησης θα λέμε επίσης κάλυψη κάθε σύνολο δύο στοιχείων που μοιράζονται μια όψη.

Ορισμός 1.1.6. ***Delaunay τριγωνοποιηση:*** *Ας υποθέσουμε ότι S είναι ένα σύνολο σημείων και Ω είναι η κυρτή θήκη του S, $Conv(S)$ Τότε η τριγωνοποίηση T_r ονομάζεται Delaunay εάν οι περιγεγραμμένοι κύκλοι ή σφαίρες κάθε στοιχείου δεν περιέχουν στο εσωτερικό τους στοιχεία του S.*

Γενικά: Οι τριγωνοποιήσεις και συγκεκριμένα οι Delaunay τριγωνοποιήσεις έχουν ερευνηθεί αναλυτικά, ιδίως στην υπολογιστική γεωμετρία. Η αυξανόμενη ζήτηση για κατάλληλα πλέγματα που να εκτελούν αποδοτικούς υπολογισμούς της λύσης για ρεαλιστικά προβλήματα,που διαμορφώνονται βάσει των μερικών διαφορικών εξισώσεων, οδήγησε τους μηχανικούς να δώσουν λίγη προσοχή στις τεχνικές τριγωνισμού. Άλλοι ενδιαφέρθηκαν για την Delaunay τριγωνοποιήση για εφαρμογές στη ρομποτική, στην επεξεργασία εικόνας, CAD περιβάλλον, γεωγραφικές επιστήμες, και ούτω καθεξής.



Σχήμα 1.1: *Delaunay* τριγωνοποίηση

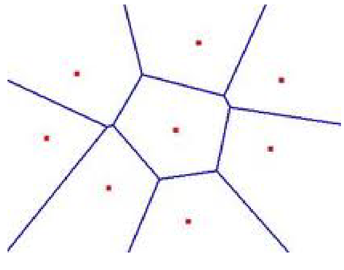
Παρατήρηση 1.1.7. *Το T_r είναι μια Delaunay τριγωνοποίηση του Ω αν οι ανοιχτοί περιγεγραμμένοι δίσκοι των στοιχείων του είναι κενοί. Αυτό το κριτήριο ονομάζεται ως κριτήριο της κενής σφαίρας,πού σημαίνει ότι οι ανοιχτοί δίσκοι των στοιχείων δεν περιέχουν κορυφές (καθώς οι κλειστοί δίσκοι περιέχουν κορυφές των στοιχείων). Το κριτήριο είναι ένα χαρακτηριστικό της Delaunay τριγωνοποίησης. Επίσης από το κριτήριο αυτό οδηγούμαστε σε διάφορα άλλα χαρακτηριστικά της Delaunay τριγωνοποίησης.*

1.1β′ Διάγραμμα *Voronoi*:

Έστω S ένα σύνολο σημείων $P_i, i = 1, ..., n$ σε d διαστάσεις. Η Delaunay τριγωνοποίησης της κυρτής θήκης αυτού του συνόλου μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η δυαδική τριγωνοποίηση του διαγράμματος Voronoi που ορίζεται από το S. Το σύνολο των κελιών ή των πολυτόπων, V_i, ορίζεται ως:

$$V_i = \{P : \ d(P, P_i) \leq d(P, P_j), \ \text{για κάθε } j \neq i\}$$

όπου $d(.,.)$ είναι η Ευκλείδεια απόσταση. Το κελί V_i είναι τότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων πιο κοντά στην P_i, από οποιοδήποτε άλλο σημείο στο S. Τα V_i είναι κλειστά κυρτά πολύγωνα (πολύεδρα, σε τρεις διαστάσεις, d-πολύτοπα σε d διαστάσεις), αυτά τα (ανοιχτά) μη-συμπίπτοντα κελιά καλύπτουν τον χώρο, και δημιουργούν, στο επίπεδο (δηλαδή εάν $d = 2$), την Dirichlet ψηφοθέτηση (tessellation).



Σχήμα 1.2: Διάγραμμα *Voronoi*

Δυικότητα μεταξύ Delaunay και Voronoi

Με βάση τον ορισμό του, κάθε κελί V_i είναι ένα μη κενό σύνολο που ορίζεται από ένα σημείο στο S. Το δυικό σύνολο των V_i είναι η Delaunay τριγωνοποίηση. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως το βασικό αποτέλεσμα της Delaunay. Οι πλευρές των κελιών είναι στο μέσον μεταξύ των δύο σημείων που τα διαχωρίζουν, κατά συνέπεια, αυτά σχηματίζουν τις κάθετες των διχοτόμων των ακμών της τριγωνοποίησης. Υπάρχει επίσης, σε οποιαδήποτε διάσταση, μια σχέση ορθογωνικότητας μεταξύ των κελιών και τα δυικά τους, που λέγεται Delaunay τριγωνοποίηση. Τα Voronoi k-όψης κελιά είναι ορθογώνια ως προς τα $(d-k)$-όψεων της τριγωνοποίησης Delaunay. Πιο συγκεκριμένα, εάν έχουμε την ψηφοθέτηση Voronoi, τότε για να κατασκευάσουμε την δυική της (που θα είναι η τριγωνοποίηση Delaunay) συνδέουμε δυο κορυφές στο S αν και μόνο αν το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία τέμνει μια ακμή την ψηφοθέτησης.
Ο Delaunay έχει αποδείξει το ακόλουθο αποτέλεσμα,αφού θεώρησε ένα βασικό λήμμα για τους περισσότερους από τους αλγόριθμους τριγωνοποίησης Delaunay.

Λήμμα 1.1.8 (Γενικό). *Έστω T μια αυθαίρετη τριγωνοποίηση της κυρτής θήκης ενός συνόλου σημείων S. Αν για κάθε ζεύγος των γειτονικών στοιχείων στο T ισχύει το κριτήριο της κενής σφαίρας, τότε το κριτήριο αυτό ισχύει γενικά και το T είναι μια Delaunay τριγωνοποίηση.*

Λήμμα 1.1.9. [*Delaunay*] *Αρχικά, το κριτήριο Delaunay είναι συμμετρικό. Ας θεωρήσουμε ένα ζευγάρι γειτονικών στοιχείων που μοιράζονται μια κοινή $(d-1)$-όψη και έστω P η κορυφή αυτών των στοιχείων απέναντι σε αυτή την όψη. Τότε:*

$$Q \notin B_P \Leftrightarrow P \notin B_Q$$

όπου το B_P η σφαίρα που συνδέεται με την simplex που έχει ως κορυφή το P.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια Delaunay τριγωνοποίηση $\mathcal{T}_i$ και ένα σημείο P το οποίο περιέχεται σε κάποια στοιχεία αλλά όχι σε στοιχείο κορυφής. Θέλουμε να δείξουμε ότι η πιο πάνω κατασκευή ολοκληρώνει μια Delaunay τριγωνοποίηση, $\mathcal{T}_{i+1}$, με τπ P να είναι στοιχείο κορυφής.
Αρχικά, σύμφωνα με τον ορισμό της $\mathcal{B}_P$, το P είναι στοιχείο κορυφής της $\mathcal{T}_{i+1}$. Ακολούθως, πρέπει να αποδήξουμε ότι η $\mathcal{T}_{i+1}$ είναι πράγματι μια Delaunay τριγωνοποίηση. Δείχνουμε ότι η τριγωνοποίηση είναι έγκυρη καθώς η $\mathcal{C}_P$ είναι ένα σύνολο στοιχείων. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{C}_P$ αποτελείται από δύο συνδεδεμένα σύνολα. Ένα από αυτά περιλαμβάνει ένα στοιχείο, το K_0, το οποίο χωρίζει το σύνολο στο οποίο ανήκει, απο το σύνολο το οποίο περικλείει το P.
Στη συνέχεια ορίζουμε το τμήμα που ενώνει το κέντρο βάρους αυτού του στοιχείου με το P. Αυτό το τμήμα τέμνει μία όψη του K_0 και θεωρούμε ένα στοιχείο, K_1, το οποίο μοιράζεται αυτή την όψη με το K_0. Πριν από την εισαγωγή του σημείου P, το ζεύγος K_0 και K_1 πληροί το κρητήριο του Delaunay. Έτσι, η κορυφή του K_1 που βρίσκεται απέναντι απο την κοινή όψη είναι έξω από την περιγεγραμμένη μπάλα του K_0. Κατά συνέπεια, η περιγεγραμμένη μπάλα του K_1 περικλείει απαραιτήτως το P και ως εκ τούτου το K_1 είναι μέλος της $\mathcal{C}_P$. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία δείχνουμε ότι όλα τα στοιχεία μεταξύ των δύο αυτών συνόλων της κοιλότητας ανήκουν στο σύνολο αυτό. Άρα η κοιλότητα είναι ένα συνδεδεμένο σύνολο και άρα η τριγωνοποίηση της $\mathcal{B}_P$ μπορεί να πραγματοποιηθεί. Επιπλέον, δεδομένου ότι οι εξωτερικές όψεις της $\mathcal{C}_P$ είναι εμφανή από το P, αυτή η τριγωνοποίηση είναι ευηκτή. Ο λόγος είναι προφανής στις δύο διαστάσεις. Προχωράμε με την

γειτονιά του τριγώνου K_0, το τρίγωνο στο οποίο το σημείο P ανήκει. οι τρείς ακμές του K_0 διακρίνονται απο το P. Έστω K_1 να είναι ένα τρίγωνο το οποίο μοιράζεται μια ακμή , f_1 με το K_0. Εάν το K_1 παραβιάζει το κρητήριο Delaunay, τότε είναι στην κοιλότητα και οι όψεις του K_1, εκτός απο την f_1 διακρίνονται απο το P. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το P βρίσκεται στο εσωτερικό της περιγεγραμμένης μπάλας του K_1 και στο ότι η f_1 χωρίζει το P απο την κορυφή του K_1 που βρίσκεται απέναντι απο την f_1. Έτσι, εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία, καθιστά δυνατό το αποτέλεσμα για όλα τα τρίγωνα μέσα στην κοιλότητα. Ωστόσο, το ίδιο επιχείρημα δεν επεκτείνεται. Πράγματι, ακολουθώντας αυτή την κατασκευή, είναι δυνατόν να καταλήξουμε σε ένα τετράεδρο K_1 του οποίου οι όψεις ενός στοιχείου, εκτός της f_1, δηλαδή η κοινή όψη με το K_0, να περιλαμβάνει μία όψη, g, η οποία δεν είναι ορατή από το R. Σε αυτή την περίπτωση το K_2 που είναι το στοιχείο το οποίο μοιράζεται την όψη g με το K_1 πρέπει απαραίτητα να ανήκει στην κοιλότητα, γεγονός που οδηγεί στην επιθυμητή ιδιότητα. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη πρέπει να δείξουμε ότι η $\mathcal{T}_{i+1}$ αποτελεί μια Delaunay τριγωνοποίηση, χρησιμοποιώντας το πιο πάνω λήμμα.
Στην συνέχεια μας μένει να δείξουμε ότι το κρητήριο της κενής σφαίρας ικανοποιείται για όλα τα ζεύγη των γειτονικών στοιχείων. Για να υπολογισθούν όλες οι πιθανές συνθέσεις αυτών ζευγών, τα στοιχεία του $\mathcal{T}_{i+1}$ ταξινομούνται σε τρεις κατηγορίες :

- αυτά που είναι μέσα στην $\mathcal{B}_P$,
- αυτά που έχουν ένα στοιχείο έξω απο την $\mathcal{B}_P$ και μοιράζονται μια εσωτερική όψη της $\mathcal{C}_P$,
- τα υπόλοιπα ζεύγη

Τα ζεύγη που ανήκουν στην τρίτη κατηγορία ικανοποιούν το κρητήριο Delaunay, όπως επίσης και τα ζεύγη που ανήκουν στην δεύτερη κατηγορία. Στην πραγματικότητα, ενώ οι περιγεγραμμένες μπάλες τους δεν περικλείουν το P, όλες οι κορυφές απέναντι από την όψη που μοιράζεται με την κοιλότητα δεν είναι στο εσωτερικό των περιγεγραμμένων μπαλών που συνδέονται με τα στοιχεία στην $\mathcal{B}_P$. Αυτό οφείλεται στην συμμετρική ιδιότητα του κρητιρίου του Delaunay. Αυτά που ανήκουν στην πρώτη κατηγορία είναι επίσης Delaunay. Η απόδειξη γίνεται χρησιμοποιώντας την είς άτοπο απαγωγή. Θεωρούμε μια εξωτερική όψη της κοιλότητας, f, και θεωρούμε το στοιχείο αυτής της κοιλότητας που έχει αυτή την όψη. (πρώην στοιχείο της $\mathcal{T}_i$). Έστω K_{old} να είναι το στοιχείο αυτό και K_{new} να είναι το στοιχείο που κατασκευάστηκε με αυτή την όψη. Υποθέτουμε ότι η περιγεγραμμένη μπάλα του K_{new} περιέχει μια κορυφή, η οποία βρίσκεται οποσδήποτε έξω απο την περιγεγραμμένη μπάλα του K_{old} και άρα είναι έξω απο την κοιλότητα. Εφόσον τα στοιχεία έξω απο την κοιλότητα είναι Delaunay οδηγούμαστε σε αντίφαση και άρα η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

Παρατήρηση 1.1.10. (i) *Στα μαθηματικά και στην υπολογιστική γεωμετρία,η τριγωνοποίηση Delaunay για ένα σύνολο σημείων P στο επίπεδο είναι μια τριγωνοποίηση $DT(P)$ τέτοια ώστε κανένα σημείο του συνόλου P να μη βρίσκεται μέσα στον περιγεγραμμένο κύκλο των τριγώνων της $DT(P)$.*

(ii) *Η Delaunay τριγωνοποίηση μεγιστοποιεί την ελάχιστη γωνία όλων των γωνιών των τριγώνων της τριγωνοποίησης και έτσι αποφεύγεται η δημιουργία* *πολύ μικρών γωνιών. Η Delaunay τριγωνοποίηση αναπτύχθηκε από τον Boris Delaunay το 1934.*

1.1γ′ Ιδιότητες στις δυο διαστάσεις

Ανάμεσα στις διαφορετικές πιθανές τριγωνοποιήσεις του S η Delaunay τριγωνοποίηση :

- μεγιστοποιεί την ελάχιστη γωνία που σχηματίζεται από τις άκρες τριγωνισμού
- ελαχιστοποιεί τη μέγιστη περιγεγραμμένη ακτίνα (δηλαδή τους κύκλους που σχετίζονται με τα στοιχεία τριγωνισμού)

Συμπερασματικά η τριγωνοποίηση της οποίας οι γωνίες δεν είναι αμβλείες είναι Delaunay τριγωνοποίηση.
Έστω T μια τριγωνοποίηση του S , $a_i(T)$ να είναι οι γωνίες μεταξύ των ακμών του T και $r_i(T)$ να είναι η ακτίνα των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων του T . Έστω $V(T)$ (αντίστοιχα $W(T)$) είναι το διάνυσμα που καθορίζεται από την διάταξη $a_i(T)$ (αντίστοιχα από το $r_i(T)$) ανάλογα με την αύξουσα διάταξη (αντίστοιχα φθίνουσα διάταξη. Για δύο διανύσματα $v, w \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε την λεξικογραφική διάταξη $v < w$ αν $v_i < w_i$ όταν $v_j = w_j$, $j = 1, 2, \ldots i-1$. Τότε η Delaunay τριγωνοποίηση μεγιστοποιεί (αντίστοιχα ελαχιστοποιεί) $V(T)$ (αντίστοιχα $W(T)$) σε σχέση με την ανισότητα.

1.1δ′ Ιδιότητες για οποιαδήποτε διάσταση

- Η μέγιστη ακτίνα της ελάχιστης σφαίρας των στοιχείων είναι ελάχιστη. (Η μικρότερη σφαίρα ενός δοθέντος στοιχείου είναι η μικρότερη σφαίρα που το περιέχει).
- Στην Delaunay τριγωνοποίηση, η ένωση των περιγεγραμμένων δίσκων των στοιχείων που περιέχουν ένα εσωτερικό σημείο περιέχεται στην αντίστοιχη ένωση για κάθε άλλο τύπο τριγωννοποίησης.
- Το άθροισμα των τετραγώνων του μήκους των ακμών με συντελεστή το άθροισμα των ίγκων των στοιχείων που τα περιέχουν είναι ελάχιστο.
- Αν όλα τα στοιχεία σε μια τριγωνοποιηση περικλείουν το κέντρο της περιγεγραμμένης σφαίρας τους, τότε αυτή η τριγωνοποίηση είναι Delaunay. Αυτό είναι γενίκευση από την διάσταση δυο όταν δεν υπάρχουν στοιχεία με αμβλείες γωνίες.

Στη γενική περίπτωση των n διαστάσεων η τριγωνοποίηση Delaunay ορίζεται ως εξής: Για ένα σύνολο σημείων P, στον $\mathbb{R}^n$, μια τριγωνοποίηση είναι τριγωνοποίηση Delaunay εάν ικανοποιεί ότι κανένα σημείο του συνόλου P να μη βρίσκεται στο εσωτερικό της περιγεγραμμένης υπερσφαίρας κανενός n-διάστατου στοιχείου (n-simplex).
Είναι γνωστό ότι υπάρχει μια μοναδική τριγωνοποίηση Delaunay για ένα σύνολο σημείων P, μόνο αν το σύνολο σημείων P είναι στην γενική θέση, δηλαδή δεν υπάρχουν τρία σημεία στην ίδια γραμμή και δεν υπάρχουν τέσσερα σημεία στον ίδιο κύκλο για ένα σύνολο σημείων δυο διαστάσεων, ή να μην υπάρχουν $n+1$

σημεία στο ίδιο n διαστάσεων επίπεδο (υπερεπίπεδο) και $n+2$ σημεία στην ίδια υπερσφαίρα για ένα n-διάστατο σύνολο σημείων. Η εύρεση της τριγωνοποίησης Delaunay ενός συνόλου σημείων στον $n-$διάστατο Ευκλείδιο χώρο είναι ισοδύναμο με το να βρεθεί η κυρτή επιφάνεια ενός συνόλου σημείων στον $n+1$-διάστατο Ευκλείδιο χώρο, δίνοντας σε κάθε σημείο P μια επιπλέον συντεταγμένη ίση με $|P|^2$, παίρνοντας την κάτω πλευρά της κυρτής επιφάνειας και προβάλλοντας αυτή στον n-διάστατο χώρο με απαλοιφή της επιπλέον συντεταγμένης. Επειδή η κυρτή επιφάνεια είναι μοναδική το ίδιο θα ισχύει και για την τριγωνοποίηση δεδομένου ότι οι έδρες της κυρτής επιφάνειας είναι n διαστάσεων τρίγωνα n-simplexes. Μια έδρα η οποία δεν είναι n-διαστάσεων τρίγωνο σημαίνει ότι $n+2$ σημεία από το αρχικό σύνολο σημείων ανήκουν στην ίδια υπερσφαίρα και τα σημεία δεν ήταν στη γενική θέση. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι για ένα σύνολο τριών σημείων που ανήκουν στην ίδια ευθεία δεν είναι εφικτή η τριγωνοποίηση Delaunay. Από την άλλη μεριά για τέσσερα σημεία που ανήκουν στον ίδιο κύκλο η τριγωνοποίηση *Delaunay* δεν είναι μοναδική εφόσον είναι φανερό ότι υπάρχουν δύο δυνατές τριγωνοποιήσεις που χωρίζουν το τραπέζιο σε δυο τρίγωνα και ικανοποιούν τις Delaunay συνθήκες.Τέλος, γενικεύσεις είναι δυνατές για χώρους άλλους από τον Ευκλείδειο αλλά σε αυτές τις περιπτώσεις δεν είναι σίγουρο ότι υπάρχει τριγωνοποίηση Delaunay ή αν υπάρχει ότι είναι η μοναδική.
Σε κάποιες περιπτώσεις απαιτούμε κάποιες συγκεκριμένες ακμές να είναι μέλη της τριγωνοποίησης. Αυτές οι τριγωνοποιήσεις ονομάζονται περιορισμένες.

Ορισμός 1.1.11. *Έστω Const ένα σύνολο στοιχείων (ακμών, τριγώνων, πολυέδρων). Το T_r είναι μια περιορισμένη τριγωνοποίηση του Ω αν τα στοιχεία της κυρτής θήκης Const είναι στοιχεία του T_r. Γενικότερα μια περιορισμένη τριγωνοποίηση μπορεί να ικανοποιεί τα κριτήρια Delaunay, εκτός σε μερικές γειτονιές των περιορισμένων ακμών και όψεων.*

1.2 Οριακή Μέθοδος

Η κατασκευή της Delaunay τριγωνοποίησης μπορεί να γίνει με αρκετές μεθόδους.Μια τέτοια μέθοδος έχει αναφερθεί προηγουμένως, η οποία χρησιμοποιεί την δυαδικότητα του διαγράμματος Voronoi και της Delaunay τριγωνοποίησης. Η Οριακή Μέθοδος είναι επίσης γνωστή με διαφορετικά ονόματα, όπως και αλγόριθμος του Watson.

1.2α′ Περιγραφή της μεθόδου

Έστω T_i η Delaunay τριγωνοποίηση της κυρτής θήκης των πρώτων i σημείων στο S . Θεωρούμε το $i+1^{\text{το}}$ σημείο του συνόλου να συμβολίζεται με P. Ο σκοπός της Οριακής Μεθόδου είναι να καταλήξουμε στο T_{i+1}, την Delaunay τριγωνοποίηση που περιέχει το P ως ένα στοιχείο κορυφής, ξεκινώντας από το T_i . Για το σκοπό αυτό εισάγουμε μια διαδικασία που αναφέρεται ως Delaunay πυρήνας.

Πυρήνας Delaunay

Αυτός ο πυρήνας είναι η τοπική διαδικασία που ορίζεται ως:

$$T_{i+1} = T_i - \mathcal{C}_P + \mathcal{B}_P$$

Το $\mathcal{B}_P$ είναι ο δίσκος του P δηλαδή το σύνολο των στοιχείων που σχηματίζονται από την ένωση του R με τις εξωτερικές ακμές (όψεις) της κοιλότητας $\mathcal{C}_P$, της οποίας την κατασκευή περιγράφουμε . Η θέση του R, σε σχέση με το T_i , εμπίπτει σε δύο κατηγορίες:

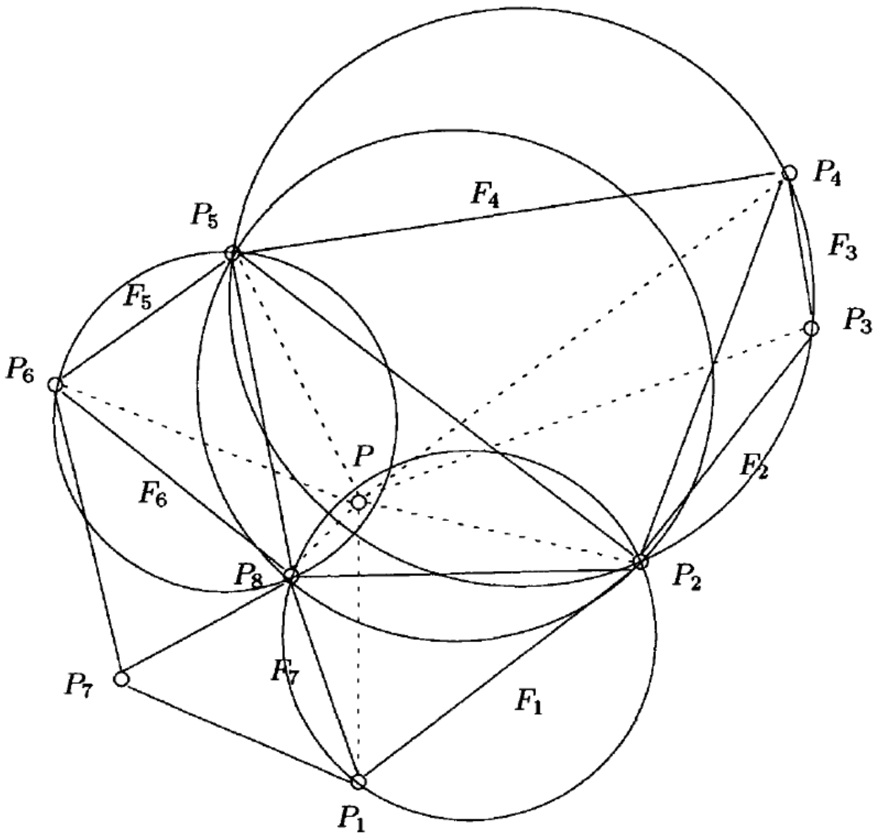
- είτε το P ανήκει στο T_i ,

- είτε το P είναι έξω από το T_i

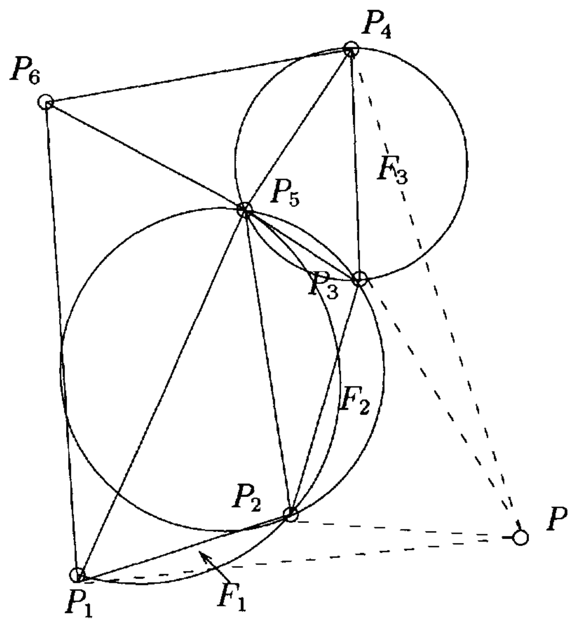
Στην πρώτη περίπτωση η κοιλότητα του του P είναι ένα σύνολο στοιχείων της T_i , του οποίου ο περιγεγραμμένος δίσκος (ή μπάλα) περιέχει το P . Στην δεύτερη περίπτωση η κοιλότητα είναι το ίδιο το σύνολο εμπλουτισμένο με το σύνολο στοιχείων που σχηματίζεται από την ένωση του P με τις ακμές (όψεις) στο T_i που είναι ορατές από το R και δεν έχουν ήδη επιλεγεί από το προηγούμενο κριτήριο.Το κεντρικό νόημα αυτής της κατασκευής βασίζεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.2.1. *Έστω T_i να είναι μια τριγωνοποίηση Delaunay της κυρτής θήκης των πρώτων i σημείων ενός συνόλου S, τότε T_{i+1} είναι μια Delaunay τριγωνοποίηση της θήκης που περιλαμβάνει το P , σημείο i+1 του συνόλου, ως κορυφή.*

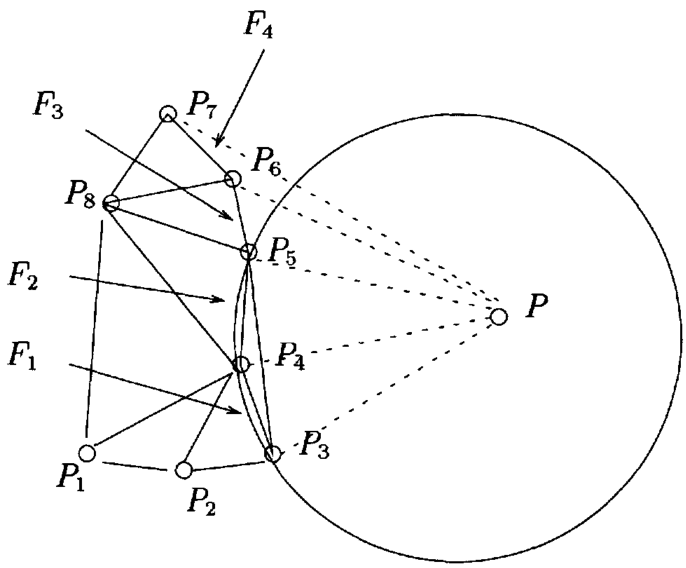
Διάφορες αποδείξεις μπορούν να δοθούν, μία από τις οποίες χρησιμοποιεί δύο στάδια.



Σχήμα 1.3: Αν εισάγουμε το σημείο P όπου $P \in T_i$



Σχήμα 1.4: Το P είναι έξω από το T_i και έξω από οποιονδήποτε περιγεγραμμένο δίσκο.



Σχήμα 1.5: Το P είναι έξω από το T_i και μέσα σε ένα περιγεγραμμένο δίσκο.

Πρώτον, έχει αποδειχθεί ότι η T_{i+1} είναι μια τριγωνοποίηση και στη συνέχεια αυτή η τριγωνοποίηση νααποδειχθεί ότι είναι μια Delaunay τριγωνοποίηση. Μια εναλλακτική απόδειξη γίνεται απ΄ ευθείας με τη Voronoi-Delaunay δυικότητα.

Απόδειξη. Πρώτον, υποθέτουμε ότι τα σημεία είναι σε μια γενική θέση. Η τριγωνοποίηση του συμπληρώματος της κοιλότητας, $\mathcal{C}_P$, παραμένει αμετάβλητη, και από τον ορισμό, οι σφαίρες που περιορίζονται στα στοιχεία αυτού του συμπληρώματος είναι κενές, έτσι αυτά τα στοιχεία είναι Delaunay (δηλαδή ισχύει το κριτήριο της κενής σφαίρας). Τώρα θα αποδείξουμε ότι η μόνη δυνατή Delaunay του $\mathcal{C}_P$ για το σημείο P είναι η σφαίρα $\mathcal{B}_P$ που ορίζεται από την ένωση του P με τις εξωτερικές όψεις του $\mathcal{C}_P$.
Το αποτέλεσμα αποδεικνύεται με εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε ότι ένα στοιχείο της νέας τριγωνοποίησης δεν έχει το P ως κορυφή, έτσι αναγκαστικά αυτή το στοιχείο ανήκει στην $\mathcal{C}_P$, επειδή τα σημεία είναι σε γενική θέση. Στην περίπτωση αυτή, η τριγωνοποίηση της κοιλότητας είναι μοναδική (ως η δυική του διαγράμματος Voronoi). Ως εκ τούτου, αυτή το στοιχείο παραβιάζει το κριτήριο Delaunay . Με άλλα λόγια, η νέα τριγωνοποίηση αποτελείται από τα στοιχεία και σχηματίζεται από την ένωση του P με τις εξωτερικές όψεις της $\mathcal{C}_P$, πράγμα που σημαίνει ότι $\mathcal{B}_P$ είναι η νέα τριγωνοποίηση του $\mathcal{C}_P$. Στην περίπτωση, όπου τα σημεία δεν είναι σε γενική θέση, ας υποθέσουμε ότι K είναι ένα στοιχείο στη νέα τριγωνοποίηση που δεν έχει το P ως κορυφή. Στη συνέχεια, υπάρχει ένα ή περισσότερα άλλα στοιχεία στην $\mathcal{C}_P$ της οποίας η περιγεγραμμένη μπάλα είναι ίδια με εκείνη της K . Κατά συνέπεια, η K παραβιάζει το κριτήριο Delaunay και μας οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα. □

1.2β΄ Μειωμένη Οριακή Μέθοδος

Η μειωμένη μορφή της οριακής μεθόδου βασίζεται στο αν αναλογιστούμε ένα κουτί που περικλείει τα σημεία του συνόλου S κατά τέτοιο τρόπο ώστε το P να περικλείεται πάντα στην τρέχουσα τριγωνοποίηση. Η μέθοδος αυτή είναι ένα τέχνασμα που απλοποιεί την κατασκευή αλγορίθμων. Με την ολοκλήρωση της εισαγωγής όλων των σημείων στο S τότε η Delaunay τριγωνοποίηση για το κουτί, $\mathcal{B}l\S(\mathcal{S})$ επιτυγχάνεται. Στη συνέχεια είναι δυνατό να ληφθεί μια τριγωνοποίηση της θήκης του S (όχι απαραίτητα της κυρτής του θήκης) αφαιρώντας ορισμένα στοιχεία από αυτή την τριγωνοποίηση (δηλαδή, αυτά που έχουν τουλάχιστον μία κορυφή ίδια με μία από τις γωνίες στο κουτί). Η μειωμένη οριακή μέθοδος μας προσδιορίζει τι περιλαμβάνει το κουτί και μας δίνει την τριγωνοποίηση του με λίγα στοιχεία.

1.2γ΄ Delaunay μέτρο

Το μέτρο Delaunay είναι ένας αριθμός που μας βοηθά να κατασκευάσουμε την κοιλότητα που συνδέεται με ένα δεδομένο σημείο. Από την προηγούμενη αναφορά μας στη κοιλότητα, η κοιλότητα είναι το σύνολο των στοιχείων του οποίου οι ανοιχτοί περιγεγραμμένοι δίσκοι περιέχουν το σημείο P . Αν $d(P, O_K)$ είναι η Ευκλείδια απόσταση μεταξύ P και O_K , όπου O_K είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου δίσκου που συνδέεται με το K και r_K η ακτίνα του δίσκου τότε ένα στοιχείο K στην T_i ανήκει στην κοιλότητα του P αν :

$$d(P, O_K) - (r_k) < 0, \text{ ή } \frac{d(P, O_K)}{r_K} < 1$$

Ορισμός 1.2.2. *Η σχέση* $\frac{d(P,O_K)}{r_K}$ *συμβολίζεται με* $\alpha(P,K)$ *και λέγεται η Delaunay μετρική του σημείου* P *ως προς το στοιχείο* K *. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι* $\alpha(P,K)$ *μπορεί να υπολογιστεί με την συνήθη Ευκλείδεια μετρική. Η κοιλότητα του* P *είναι τέτοια ώστε:*

$$K \in \mathcal{C_P} \Leftrightarrow \alpha(P,K) < 1$$

1.3 Άλλες Μεθόδοι

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι για την κατασκευή μιας Delaunay τριγωνοποίησης, ειδικότερα στις δύο διαστάσεις.

1.3α΄ Μέθοδος εναλλαγής ακμών

Η μέθοδος εναλλαγής ακμών είναι μια τοπολογική διαδικασία η οποία τροποποιεί την τριγωνοποίηση μιας κυρτής θήκης, εναλλάσσοντας την διαγώνιο της.

Θεώρημα 1.3.1. *Έστω* $\mathcal{T}_1$ *μια αυθαίρετη τριγωνοποίηση της κυρτής θήκης ενός συνόλου αποτελούμενο από σημεία* $\mathcal{S}$*. Η Delaunay τριγωνοποίηση* $\mathcal{T}_{Del}$ *αυτής της θήκης μπορεί να επιτευχθεί μέσω της εναλλαγής ακμών.*

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι η εναλλαγή διαγωνίου που εφαρμόζετε σε δύο τρίγωνα με την ίδια ακμή που παραβιάζουν το κριτήριο Delaunay, λόγω του ότι τα δύο τρίγωνα αποτελούν ένα κυρτό πολύγωνο. Η διαμόρφωση αυτή τροποποιεί το κριτήριο Delaunay. Επιπλέον, σημειώνουμε ότι η ιδιότητα σχετικά με την κυρτότητα, δεν ισχύει στον $\mathcal{R}^3$. Έτσι, η μοναδική διαδικασία που χρειάζεται είναι να εφαρμόσουμε την εναλλαγή ακμών εκεί όπου το κριτήριο Delaunay δεν ικανοποιείται. Ακολούθως, επαναλαμβάνουμε την διαδικασία αυτή. Το λήμμα του Delaunay μας εξασφαλίζει την απόδειξη, αφού η διαδικασία εμποδίζετε από να δώσει μια άπειρη διαδικασία. Αυτό σημαίνει ότι χρησιμοποιώντας την εναλλαγή, είναι αδύνατο να επιστρέψουμε στη προηγούμενη διαμόρφωση. Η ιδιότητα αυτή οφείλεται ισοδυναμία μεταξύ της εναλλαγής ακμών και της μεγιστοποίησης της ελάχιστης γωνιάς η οποία βρίσκετε μεταξύ των ακμών που συνδέονται με μια διαμόρφωση των δύο τριγώνων με την ίδια ακμή. □

Σαν πόρισμα έχουμε το πιο κάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.3.2. *Έστω* $\mathcal{T}_1$ *μια αυθαίρετη τριγωνοποίηση της κυρτής θήκης ενός συνόλου αποτελούμενο από σημεία* $\mathcal{S}$*. Τότε οποιαδήποτε άλλη τριγωνοποίηση* $\mathcal{T}_2$ *αυτής της κυρτής θήκης μπορεί να επιτευχθεί με την εναλλαγή ακμών.*

Απόδειξη. Αρχικά χρησιμοποιούμε το πιο πάνω θεώρημα για να πάρουμε μια τριγωνοποίηση $\mathcal{T}_{Del}$ από την $\mathcal{T}_1$ και ακολούθως χρησιμοποιώντας πάλι το ίδιο θεώρημα, παίρνουμε την $\mathcal{T}_2$. Η διαδικασία αυτή είναι εφικτή επειδή η εναλλαγή ακμών μπορεί να είναι αντιστρέψιμη. Προϋπόθεση για την απόδειξη είναι ότι η τριγωνοποίηση είναι μοναδική που ισχύει μόνο αν τα σημεία βρίσκονται σε γενική θέση. □

Θα χρησιμοποιούμε το πιο πάνω θεώρημα για την κατασκευή τριγωνοποίησης στις δύο διαστάσεις. Η επέκταση του στις τρεις διαστάσεις ακόμη δεν έχει επιτευχθεί.

1.3β′ Διαίρει και Βασίλευε

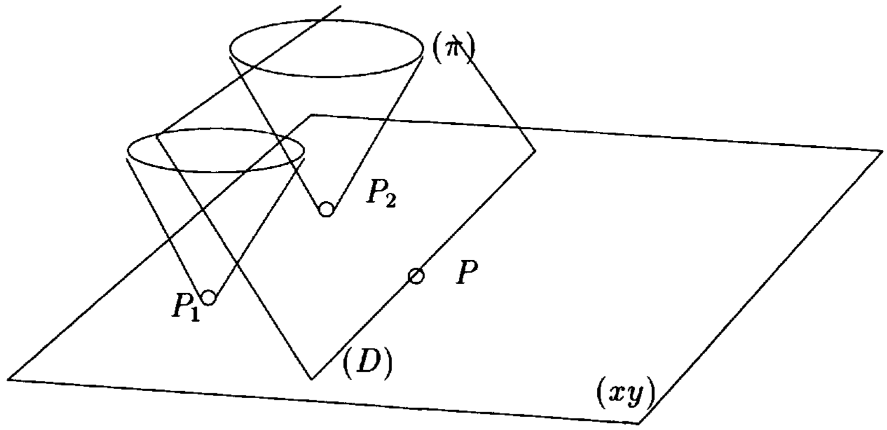
Είναι μια μέθοδος που εφαρμόζεται σε πολλές υπολογιστικές κατασκευές. Η βασική ιδέα της μεθόδου αυτής είναι να διαιρεθεί το δεδομένο πρόβλημα σε δύο πιο απλά υπο-προβλήματα και το βήμα αυτό είναι γνωστό ως το στάδιο διαίρεσης της όλης διαδικασίας. Στη συνέχεια τα δύο υπο-προβλήματα εξετάζονται ξεχωριστά και η γενική λύση δίνεται από τη συγχώνευση των λύσεων τους.Το βασικό χαρακτηριστικό αυτής της μεθόδου είναι το βήμα της συγχώνευσης των λύσεων. Η αναδρομική αυτή μέθοδος μας οδηγεί στην εξέταση ενός στοιχειώδους προβλήματος. Για την κατασκεύη τριγωνοποίησης της **κυρτής θήκης** του S η μέθοδος αυτή βασίζεται στη διαμέριση του S σε δύο υποσύνολα S_1 και S_2 . Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τις τριγωνοποιήσεις του $Conv(S_1)$ και $Conv(S_2)$ και τελικά κάνουμε τη συγχώνευση που θα μας δώσει την τελική τριγωνοποίηση. Το πρόβλημα τώρα είναι πώς να καθορίσουμε έναν τρόπο τέτοιο ώστε να αποκτήσουμε μια Delaunay του $Conv_S$ με τη συγχώνευση των δύο Delaunay τριγωνοποίησεων. Μία πιθανή μέθοδος, στις δύο διαστάσεις δίνεται από την εύρεση των δύο 'ακραίων' σημείων του κάθε υποσυνόλου ως προς τη διαχωριστική γραμμή των εν λόγω συνόλων. Τότε το σύνολο των σημείων που βρίσκονται μεταξύ των ακρότατων μπορούν να καθοριστούν και να ταξινομηθούν κατάλληλα. Για να επιτύχουμε μια τριγωνοποίηση της ένωσης των $Conv(S_1)$ και $Conv(S_2)$, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τη προηγούμενη μέθοδο.

Θεωρούμε ότι τα οριακά σημεία του κάθε υποσυνόλου έχουν διάταξη σύμφωνη με τη φορά του ρολογιού. Σε κάθε υπο-σύνολο αναζητούμε το σημείο που βρίσκεται πλησιέστερα προς τη γραμμή διαχωρισμού. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τις ακμές με άκρα αυτά τα σημεία (α_1 για το πρώτο υποσύνολο και α_2 για το άλλο). Θεωρούμε το α_1 και διαλέγουμε στην περιοχή του, σε σχέση με το όριο της $Conv(S_2)$, ξεκινώντας από α_2 όλα τα σημεία αυτού του ορίου που μπορούν να ενωθούν με το α_1 έτσι ώστε να κατασκευάσουν με τις αντίστοιχες ακμές. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται, αντικαθιστώντας το α_1 από το τελευταίο σημείο που δέν περιέχεται στο υποσύνολο. Η διαδικασία σταματά όταν δεν υπάρχουν άλλα σημεία ορατά από το α_1. Τα τελευταία σημεία που βρήκαμε μέσω αυτής της διαδικασίας είναι το ακρότατα που αναφέραμε προηγουμένως. Με την εφαρμογή της εναλλαγής ακμών στο αποτέλεσμα της τριγωνοποίησης λαμβάνουμε την Delaunay τριγωνοποίηση (παρ' όλα αυτά, μπορεί να παρατηρήσουμε ότι η εναλλαγή ακμών μπορεί να μας οδηγήσει σε εντελώς διαφορετικό αποτέλεσμα από τις δύο αρχικές τριγωνοποιήσεις). Τέλος , η κατασκευή μια τριγωνοποίησης η οποία θα έχει όλα τα σημεία της $Conv(S_1)$ και της $Conv(S_2)$ ως κορυφές δεν είναι τετριμμένη.

1.3γ′ Αλγόριθμος Σάρωσης

Ένας αλγόριθμος σάρωσης είναι μια εναλλακτική λύση στην επίτευξη μιας τριγωνοποίησης στις δύο διαστάσεις. Έχουμε κατασκευάσει το διάγραμμα $Voronoi$ και χρησιμοποιώντας τη δυαδικότητα ολοκληρώνουμε την επιθυμητή τριγωνοποίηση. Μία παρόμοια κατασκευή είναι και η πιο κάτω.

Θεωρούμε μια ευθεία $(\mathcal{D})$ η οποία είναι παράλληλη με τον άξονα των y και σαρώνει το επίπεδο (xy) απο το $x = -\infty$ μέχρι το $x = \infty$, έτσι ώστε να κατασκευάσουμε το διάγραμμα $Voronoi$ το οποίο αντιστοιχεί στο αριστερό μέρος του $(\mathcal{D})$. Παρατηρούμε ότι ένα σημείο τοποθετημένο στο αριστερό μέρος του $(\mathcal{D})$ μπορεί να αλληλεπιδρά με το διάγραμμα. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε τη πιο κάτω μέθοδο.



Σχήμα 1.6: Κώνοι Σάρωσης

Για κάθε σημείο που βρίσκεται μέσα στο $\mathcal{S}$ αντιστοιχεί ένας κώνος, του οποίου η κορυφή του είναι αυτό το σημείο με τους άξονες του να είναι παράλληλοι με τον άξονα των z με τέτοιο τρόπο ώστε η γωνία να ορίζεται από το (xy) επίπεδο και όλοι οι γεννήτορες να είναι 45^o. Έχουμε την ίδια κατάσταση και με την ευθεία $(\mathcal{D})$ στο οποίο αντιστοιχεί ένα επίπεδο (π) του οποίου η κλήση είναι 45 μοίρες. Το επίπεδο αυτό τέμνει τα σημεία στο αριστερό μέρος του $(\mathcal{D})$, δημιουργώντας έτσι κομμάτια μιας παραβολής. Χρησιμοποιώντας μια ορθογώνια προβολή των τεμνόμενων σημείων στο επίπεδο (xy), δημιουργούμε μια σειρά σημείων τα οποία αποτελούν το επιθυμητό διάγραμμα. Πράγματι, το διάγραμμα αυτό είναι κατασκευασμένο στο αριστερό μέρος του $(\mathcal{D})$ μετατοπισμένο ανάλογα με την γωνία που έχουμε επιλέξει. Κατ΄ αυτό το τρόπο, μπορούμε να προβλέψουμε την επίδραση ενός σημείου που βρίσκετε στο αριστερό μέρος του $(\mathcal{D})$, παρόλο που αυτό δεν έχει ανακαλυφθεί ακόμη.

1.4 Υπολογιστικές Μεθόδοι

Σ΄ αυτό το κεφάλαιο θα αναπτύξουμε ένα αλγόριθμο που θα μας βοηθήσει στην εφαρμογή της Μειωμένης Οριακής Μεθόδου. Έχουμε δύο στόχους, την απόκτηση κάποιου επιπέδου αξιοπιστίας καθώς και κάποιο επίπεδο αποτελεσματικότητας, όσον αφορά την CPU.
Πριν αναλύσουμε αυτούς τους δύο στόχους θα θέλαμε να παραθέσουμε μερικές ιδέες σχετικά με την **αξιοπιστία** και την **πολυπλοκότητα** ενός συγκεκριμένου αλγορίθμου.

1.4α΄ Αξιοπιστία και Πολυπλοκότητα

Η αξιοπιστία ενός συγκεκριμένου αλγορίθμου συνδέεται στενά με την ευαισθησία του να στρογγυλοποιεί τα σφάλματα που αντιμετωπίζει σε κάθε υπολογισμό. Ανεξάρτητα από το ποιος αλγόριθμος χρησιμοποιείται, αυτό προϋποθέτει ένα ορισμένο

ποσό πράξεων, ως επί το πλείστον από ακέραιους αριθμούς ή περιλαμβάνει και πράξεις κινητής υποδιαστολής. Μια πράξη με ακέραιους αριθμούς είναι ακριβής ενώ μια πράξη κινητής υποδιαστολής περιλαμβάνει αναγκαστικά ένα βαθμό αβεβαιότητας.
Η πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου μπορεί να μετρηθεί σε σχέση με:

- το μέγεθος της πολυπλοκότητας του (πόσο αυξημένες είναι οι απαιτήσεις μνήμης)
- τη πολυπλοκότητα των πράξεων (δηλαδή πόσες πράξεις απαιτούνται για να καταλήξουμε στο αποτέλεσμα)

Σε γενικές γραμμές οι δύο αυτές πτυχές είναι αντιστρόφως ανάλογες αφού αυξάνοντας τις απαιτήσεις μνήμης μας επιτρέπει να αποφύγουμε κάποιες πράξεις, ενώ η μείωση τους μας οδηγεί σε αύξηση της υπολογιστικής προσπάθειας. Ένας ικανοποιητικός αλγόριθμος μπορεί να οριστεί ως ένας αλγόριθμος, όπου επιτυγχάνεται μια καλή ισορροπία μεταξύ αυτών των δύο πτυχών. Μια ακριβής ανάλυση της πολυπλοκότητας ενός αλγόριθμου σε σχέση με τις δύο πιο πάνω πτυχές είναι απαραίτητη κατά το σχεδιασμό ενός αλγόριθμου.

Παρατήρηση 1.4.1. *Η πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου μπορεί να μειωθεί κατά δύο τρόπους, ιδίως για έναν αλγόριθμο που εμπλέκεται σε μια επαναληπτική διαδικασία (όπως για παράδειγμα στην περίπτωση της οριακής μεθόδου). Καταρχάς ελαχιστοποιώντας τον αριθμό των πράξεων που απαιτούνται και δεύτερον, με τη μείωση των συντελεστών. Η πρώτη λύση οδηγεί σε μια μερική βελτιστοποίηση, ενώ η δεύτερη μας δίνει μια συνολική βελτιστοποίηση.*

Τα υπολογιστικά βήματα που περιγράφονται στη συνέχεια βασίζονται στον ένα ή στον άλλο τρόπο, ή ακόμα και στους δύο σε ορισμένες περιπτώσεις.

1.4β′ Το σύστημα της οριακής μειωμένης μεθόδου

Θα παρουσιάσουμε ένα σύστημα το οποίο αντιστοιχεί στην οριακή μειωμένη μέθοδο και μας υποδεικνύει τα βασικά βήματα τα οποία πρέπει να εκτελεστούν. Θα παρουσιάζουμε κάθε βήμα λεπτομερώς, δίνοντας κάποιες ενδείξεις ως προς τον τρόπο εφαρμογής της διαδικασίας.
Σκοπός μας είναι να γράψουμε τον πυρήνα Delaunay ανάλογα με τις ιδιότητες των πρόσημων, δηλαδή

$$\mathcal{T}_{i+1} = \mathcal{T}_i - \mathcal{C}_P + \mathcal{B}_P.$$

Όσον αφορά τα πρόσημα, η πιο πάνω κατασκευή μας οδηγεί σε διαφορετικά βήματα, όπως είναι τα ακόλουθα :

- η ανάλυση της $\mathcal{S}$ έτσι ώστε να λάβουμε τα ακρότατα της.
- η κατασκευή ενός κουτιού
- η τριγωνοποίηση αυτού του κουτιού (έστω $\mathcal{T}_0$ να είναι η τριγωνοποίηση και $i = 0$)
- η εισαγωγή του κάθε σημείου στο $\mathcal{S}$ που αποτελείται από

(i) επιλογή του στοιχείου (ή των στοιχείων) της $\mathcal{T}_i$ το οποίο περικλείει το σημείο (αναζήτηση για τη βάση που συνδέεται με το σημείο)

(ii) κατασκευή της κοιλότητας χρησιμοποιώντας $(d-1)-$όψεις, ξεκινώντας από τη βάση

(iii) αφαίρεση της κοιλότητας, απαρίθμηση της μπάλας και αντικατάσταση της κοιλότητας από αυτή τη μπάλα, ακολούθως θέτουμε $i = i + 1$ πρίν συνεχίσουμε με το επόμενο σημείο της $\mathcal{S}$.

Οι λειτουργίες που απαιτούνται σε αυτό το σύστημα περιέχουν αναζητήσεις (για να βρούμε τη βάση), συγκρίσεις (για να κατασκευάσουμε τη κοιλότητα πρέπει να συγκρίνουμε αποστάσεις με ακτίνες) και λειτουργίες σχετικά με την αναβάθμιση της τρέχων τριγωνοποίησης. Οδηγούμαστε έτσι στην αναβάθμιση των αντίστοιχων δομών δεδομένων όταν ένα καινούριο σημείο εισαχθεί. Όταν εκτελούμε λειτουργίες κινητής υποδιαστολής, υπάρχουν πολλές δυσκολίες στις οποίες δεν μπορεί να ανταποκριθεί η πιο πάνω διαδικασία και έτσι θα έχουμε πρόβλημα ως προς το ποσοστό αξιοπιστίας.

1.5 Εφαρμογές

Μπορούμε να βρούμε ένα πλήθος εφαρμογών της συγκεκριμένης μεθόδου για την κατασκευή τριγωνοποιήσεων που να ισχύουν σε διάφορους τομείς δραστηριοτήτων. Μερικές απ αυτές τις εφαρμογές παραθέτουμε στη συνέχεια.

1.5α΄ Η κυρτή θήκη από εξαγωγή σε ένα κουτί σε πλέγμα

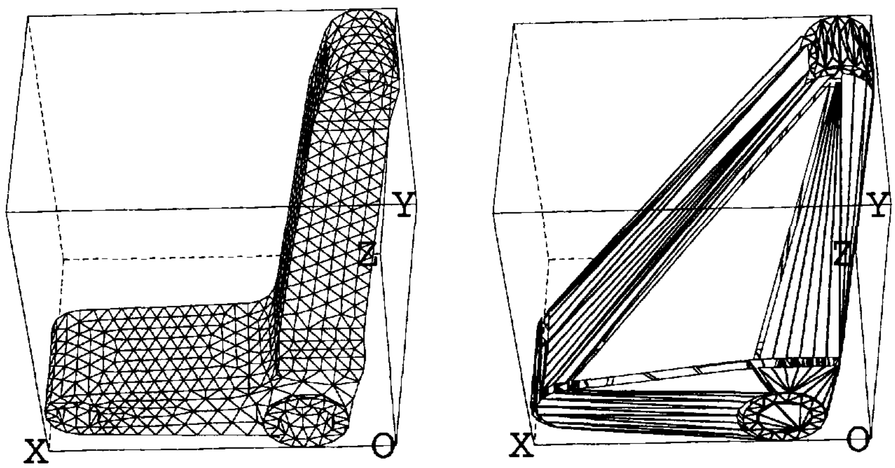
Η οριακή μειωμένη μέθοδος μας δίνει τη δυνατότητα να τριγωνοποιήσουμε ένα κουτί που περικλείει ένα σύνολο σημείων. Για να κατασκευάσουμε τη τριγωνοποίηση της κυρτής θήκης από μιας τέτοιας τριγωνοποίησης είναι πολύ δύσκολο. Αν αφαιρέσουμε όλα τα στοιχεία που έχουν τουλάχιστο μια κορυφή γειτονική με μια κορυφήτου πλαισίου (κουτί) τότε η κυρτή θήκη που επιδιώκουμε δεν καλύπτεται και για να βρούμε ένα τέτοιο σύνολο που να την καλύπτει αρκεί να εξετάσουμε το πρόβλημα γενικότερα. Άρα η οριακή μειωμένη μέθοδος δεν είναι κατάλληλη για το σκοπό αυτό.

1.5β΄ Η κυρτή θήκη ως σύνορο τριγωνοποίησης

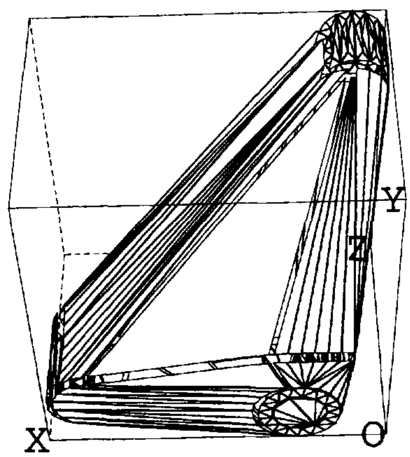
Ολοκληρώνουμε την τριγωνοποίηση που αντιστοιχεί σε ένα σύνολο σημείων χωρίς τη βοήθεια του περιγεγραμμένου κουτιού. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την οριακή μέθοδο. Το όριο της τριγωνοποίησης είναι το επιθυμητό αποτέλεσμα. Για να αυξήσουμε την αποτελεσματικότητα αυτής της διαδικασίας , θα πρέπει κάθε στοιχείο του συνόλου που περιέχεται στη τριγωνοποίηση να μην συμβάλλει στη κατασκευή της κυρτής θήκης.

1.5γ΄ Δυναμική κυρτή θήκη

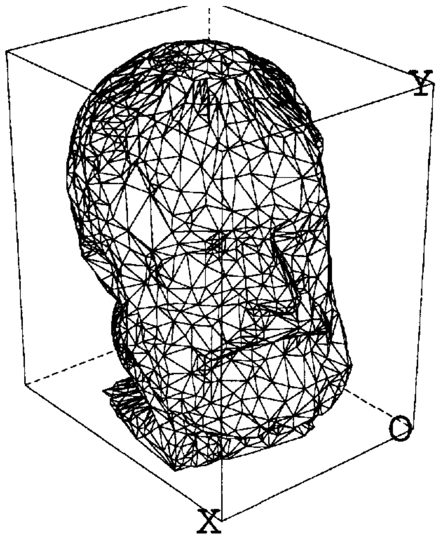
Για να καταλήξουμε σε ένα αλγόριθμο δεν αρκεί απλά να αναλογιστούμε την τριγωνοποίηση αλλά και εάν το επιθυμητό αποτέλεσμα είναι ένα σύνολο τμημάτων (στον $\mathbb{R}^2$) ή μια επιφάνεια αποτελούμενη από τρίγωνα (στον R^3). Ο αλγόριθμος τότε προκύπτει αν αλλάξουμε τα άκρα ή τα τρίγωνα σύμφωνα με κριτήρια ορατότητας.



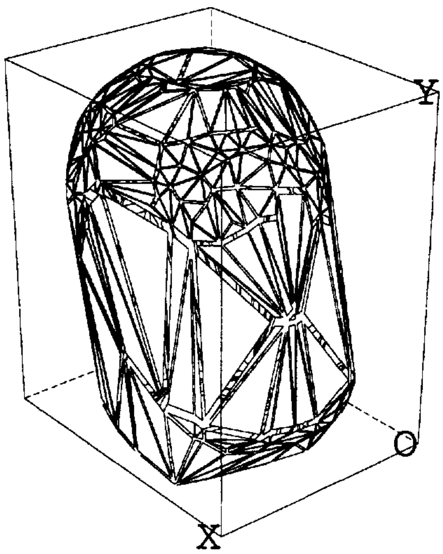
Σχήμα 1.7: περιοχή 1



Σχήμα 1.8: η κυρτή θήκη της περιοχής 1



Σχήμα 1.9: περιοχή 2



Σχήμα 1.10: η κυρτή θήκη της περιοχής 2

Στα παραδείγματα πιο πάνω στον $\mathbb{R}^3$, η κυρτή θήκη λαμβάνεται ως το όριο της τριγωνοποίησης.

Κεφάλαιο 2

Πλέγμα

Έστω Ω ένας κλειστός χώρος του $\mathbb{R}^2$ ή του $\mathbb{R}^3$, τότε θέλουμε να δούμε πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τριγωνοποίηση σε αυτό το πεδίο ορισμού. Μια τέτοια τριγωνοποίηση θα λέγεται πλέγμα του Ω και θα συμβολίζεται με T_r ή T_h.

Ορισμός 2.0.1. *Το T_h είναι ένα πλέγμα του Ω αν:*

- $\Omega = \bigcup_{K \in T_h} K$
- *Κάθε στοιχείο K στο T_h είναι μη κενό.*
- *Η τομή του εσωτερικού οποιονδήποτε δύο στοιχείων είναι κενή.*
- *Η τομή οποιωνδήποτε δύο στοιχείων στο T_h είναι είτε :*

  (i) *κενό σύνολο*

  (ii) *κορυφή*

  (iii) *ακμή*

  (iv) *όψη $d = 3$*

Η θεμελιώδης διαφορά της τριγωνοποίησης από το πλέγμα είναι ότι η τριγωνοποίηση είναι μια κάλυψη της κυρτής θήκης ενός συνόλου σημείων ενώ το πλέγμα είναι μια κάλυψη μιας δοθλησης ορισμένης περιοχής.

Εγκυρότητα ενός πλέγματος

Όπως και με τις τριγωνοποιήσεις πρέπει να ελέγξουμε τις συνθήκες για το πλέγμα. Στις τριγωνοποιήσεις αυτό μπορεί να ελεγχθεί με νουμερικές μεθόδους για να αναλύσουμε τα στοιχεία στο πλέγμα καθώς και τις σχέσεις γειτονίας. Πρακτικά είναι απαραίτητο να ελέγξουμε :

- κάθε κενό γείτονα να αντιστοιχεί σε ένα συνοριακό στοιχείο του πεδίου.
- οι σχέσεις γειτονίας όσο αφορά τις επιφάνειες να είναι συμμετρική.
- κάθε στοιχείο να έχει αυστηρά θετικό όγκο (εμβαδόν επιφάνειας, αν $d = 2$)

Ποιότητα

Η ποιότητα Q_M ενός πλέγματος T_h εξαρτάται από την ποιότητα των στοιχείων του πλέγματος. Μπορούμε να την εκφράσουμε ως:

- $Q_M = max_{K \in T_h} Q_K$
- η κατανομή των στοιχείων σύμφωνα με την ποιότητα
- η σύγκριση μεταξύ της τιμής Q_M και της τιμής στόχου.

Το Q_M είναι η ποιότητα του χειρότερου στοιχείου του πλέγματος ενώ τη τιμή στόχου είναι η ποιότητα του καλύτερου στοιχείου η οποία μπορεί να κατασκευαστεί αν μας δοθεί η χειρότερη ακμή (όψη) του πλέγματος. Στις δύο διαστάσεις η τιμή στόχου είναι ανεξάρτητη από τα στοιχεία, γιατί είναι πιθανό να κατασκευάσουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο από μια ακμή (αν υποθέσουμε ότι το βέλτιστο σημείο που απαιτείται για αυτή την κατασκευή ανήκει σ′ αυτή τη περιοχή). Η ίδια ιδιότητα δεν επεκτείνεται στις τρεις διαστάσεις. Στην πραγματικότητα, η ποιότητα του καλύτερου τετράεδρου που μπορεί να κατασκευαστεί από συγκεκριμένη τριγωνική όψη έχει άμεση σχέση με την ποιότητα αυτού του τριγώνου. Προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$Q_{3D} \approx \frac{\sqrt{2}}{2} Q_{2D} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2.1 Κλασική Delaunay meshing

Οι αλγόριθμοι της Delaunay τριγωνοποίησης χρησιμεύουν ως βάση για το σχεδιασμό μίας meshing μεθόδου , τη λεγόμενη Delaunay τύπου μέθοδο κατασκευής πλέγματος.
Στην ουσία το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε τώρα είναι κάπως διαφορετικό. Μέχρι τώρα συζητήσαμε κάποια προβλήματα τριγωνοποίησης. Δηλαδή συζητήσαμε μεθόδους τριγωνοποίησης της κυρτής θήκης ενός δοθέν συνόλου σημείων, ενώ για ένα τυπικό meshing πρόβλημα η είσοδος είναι μια κλειστή πολυγωνική καμπύλη (ή πολυεδρική επιφάνεια) που καθορίζει μία περιοχή.
Έπειτα αρκεί να δημιουργήσουμε ένα σύνολο κορυφών σε αυτή τη κυρτή περιοχή και να βεβαιωθούμε ότι η παραπάνω καμπύλη ή επιφάνεια ανήκει στη τριγωνοποίηση που προκύπτει. Αυτό σημαίνει ότι συναντάμε ένα πρόβλημα περιορισμένης τριγωνοποίησης σαν μια σειρά από ακμές και επιφάνειες που πρέπει να υπάρχουν στο πλέγμα. Παρά τις διαφορές αυτές, ορισμένες από τις προηγούμενες αναφορές μας επί της τριγωνοποίησης Delaunay πιθανώς με κάποιες προεκτάσεις, μπορούν να εφαρμοστούν σε προβλήματα meshing.
Για την Delaunay meshing είναι απαραίτητο ότι τα στοιχεία του πλέγματος πρέπει να είναι καλά-διαμορφωμένα καθώς επίσης τα μεγέθη τους θα πρέπει να είναι επαρκής. Ωστόσο, οι εφαρμογές απαιτούν πλέγματα των οποίων τα μεγέθη των στοιχείων και ακόμα των σχημάτων τους ποικίλουν ανάλογα πάντα με το πλέγμα.
Ένας τύπος Delaunay meshing μεθόδου είναι στην ουσία ένα βήμα στη διαδικασία της δημιουργίας πλέγματος που αποτελείται απο τρία διαδοχικά βήματα:

(i) Παραμετρικοποιούμε τα πλέγματα (περιγραφή ορίου, προδιαγραφή ή κατασκευή μίας συνάρτησης που καθορίζει το μέγεθος των στοιχείων, την κατανομή,κλπ.)

(ii) Διακρίνουμε το όριο

(iii) Δημιουργούμε τις κορυφές και τα στοιχεία, δηλαδή με άλλα λόγια, την Delaunay τύπου μέθοδο.

Σε μία Delaunay τύπου μέθοδο (το 3ο βήμα που αναφέραμε πιο πάνω) το πλέγμα που προκύπτει είναι ένα πλέγμα από το κουτί που περικλείει το πεδίο ορισμού. Τα σημεία εισάγονται στο τρέχον πλέγμα έτσι ώστε να σχηματίζουν τα στοιχεία με τη βοήθεια του Delaunay πυρήνα.

2.1α΄ Γενικό Πλάνο

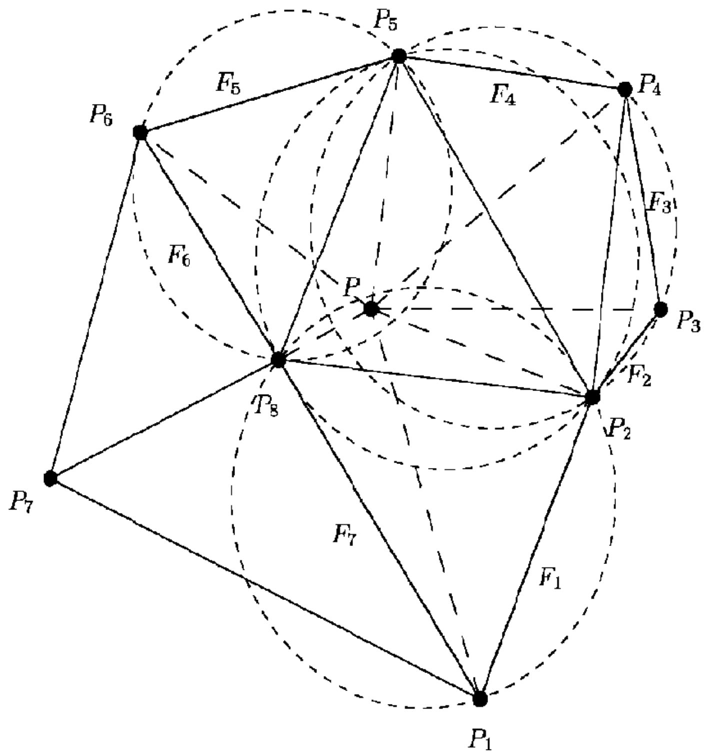
Σύμφωνα με όσα προαναφέραμε, τώρα μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε ώστε να δημιουργήσουμε μια Delaunay τύπου μέθοδο κατασκευής πλέγματος. Ένα γενικό πλάνο για μια τέτοια μέθοδο είναι:

- Στάδιο παρασκευής
  - (i) Δεδομένα: συντεταγμένες σημείων, στοιχεία ορίου, εσωτερικά στοιχεία(αν υπάρχουν)
  - (ii) Κατασκευή ενός πλαισίου οριοθέτησης και του meshing αυτού του πλαισίου με τη βοήθεια μερικών στοιχείων.
- Δημιουργία του κουτιού (πλαισίου) του πλέγματος.
  - (i) εισάγουμε τα δοσμένα σημεία στο πλέγμα (κουτί) χρησιμοποιόντας το Delaunay πυρήνα.
- Δημιουργία του κενού πλέγματος
  - (i) αναζητούμε τα στοιχεία που λείπουν
  - (ii) εφαρμόζουμε τα στοιχεία που βρήκαμε
  - (iii) ορίζουμε τα συνδεδεμένα στοιχεία της περιοχής αυτής
- Δημιουργία εσωτερικών σημείων και σημείων παρεμβολής.
  - (i) προσδιορίζουμε τις εσωτερικές ακμές και δημιουργούμε σημεία κατά μήκος αυτών των ακμών.
  - (ii) εισάγουμε σημεία με τη βοήθεια του Delaunay πυρήνα και επιστρέφουμε στο πρώτο βημα μέχρι να καλύψουμε όλες τις ακμές.
- Πεδίο Ορισμού
  - (i) αφαιρούμε τα εξωτερικά στοιχεία του χώρου
  - (ii) ταξινομούμε τα στοιχεία που αφορούν τις συνδεδεμένες συνιστώσες
- Βελτιστοποιούμε.

Σημειώστε ότι το να καταλήξουμε στο συγκεκριμένο πλαίσιο επιτυγχάνεται μόνο στο τέλος της διαδικασίας.
Με τον τρόπο αυτό, το κυρτό πλέγμα του κουτιού (πλαισίου) υπάρχει σε όλη την διαδικασία, η οποία διευκολύνει τις αναγκαίες εργασίες αναζήτησης του.
Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τα διάφορα στάδια αυτού του γενικού πλάνου και θα επικεντρωθούμε σε διάφορες δυσκολίες που θα αντιμετωπίσουμε.

2.1β′ Απλοποιημένη Delaunay τύπου μέθοδος τριγωνοποίησης

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ορίζουμε ένα κυρτό 'κουτί', το οποίο είναι αρκετά μεγάλο ώστε να περικλείει τον τομέα(πλαίσιο). Με τον τρόπο αυτό συναντούμε πάλι μια κατάσταση όπου η προηγουμένως περιγραφείσα incremental μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί.
Στην πραγματικότητα, η εισαγωγή ενός πλαισίου (κουτί), μας δίνει τη δυνατότητα να επιστρέψουμε σε ένα πρόβλημα κυρτής θήκης όπου το σύνολο $\mathcal{S}$ αποτελείται από τις κορυφές του συγκεκριμένου διακριτού ορίου(συνόρου) και τέσσερα επιπλέον σημεία. Μόλις το κουτί έχει τριγωνοποιηθεί με τη βοήθεια των δύο τριγώνων καταλήγουμε σε μια κατάσταση όπου όλα τα σημεία του $\mathcal{S}$ (εκτός από τις γωνίες του κουτιού) περιλαμβάνονται αυστηρά σε αυτή την αρχική τριγωνοποίηση. Λόγω αυτής της απλής ιδιότητας, την οποία θα χρησιμοποιούμε καθ 'όλη τη διαδικασία του meshing , η μέθοδος κατασκευής μας μειώνει την πιθανότητα όπου τα σημεία που πρέπει να προστεθούν να είναι ήδη μέσα στην τρέχουσα τριγωνοποίηση.



Σχήμα 2.1: Στο παραπάνω σχήμα: Εισάγουμε το σημείο P , (το P περιλαμβάνεται στο πλέγμα) .Σε αυτό το δισδιάστατο παράδειγμα εμφανίζονται μόνο τα τρίγωνα που είναι κοντά στο P . Η *βάση* είναι το τρίγωνο $(P_2P_5P_8)$. Η κοιλότητα σχηματίζεται από τα τρίγωνα με συνεχείς γραμμές. Οι εξωτερικές όψεις της κοιλότητας συμβολίζονται με F_1, F_2,..., F_7 . Η μπάλα αποτελείται από τα στοιχεία των γραμμών και σχηματίζεται απο την ένωση του P με τα F_i .

Έτσι, η κατασκευαστική μέθοδος βασίζεται στο σωστό καθορισμό της περιοχής (κοιλότητας) που συνδέεται με το σημείο που πρέπει να εισαχθεί, γνωρίζοντας ότι το σημείο αυτό συμπίπτει αναγκαστικά με ένα στοιχείο του πλέγματος.
Αυτή η κατασκευή, για ένα δεδομένο σημείο P , επιτυγχάνεται διαδοχικά ως εξής:

(i) Ψάχνουμε στο παρόν πλέγμα για το στοιχείο στο οποίο ανήκει το σημείο P. Ως αποτέλεσμα παίρνουμε ένα σύνολο από στοιχεία, τη λεγόμενη *βάση* που συνδέεται με το P. Αυτή η *βάση* μπορεί να μειωθεί σε ένα στοιχείο, δύο στοιχεία όταν το P βρίσκεται σε μία ακμή (ή σε μια όψη στο R^3) ή ακόμα περισσότερο, όταν, στον R^3 το P ανήκει σε μια ακμή.

(ii) Ξεκινώντας από τα στοιχεία της *βάσης* , αναζητούμε στο πλέγμα τα στοιχεία των οποίων η περιγεγραμμένη μπάλα περιέχει το P. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την επιθυμητή κοιλότητα (περιοχή). Στη συνέχεια η κοιλότητα αντικαθίσταται από την αντίστοιχη μπάλα και το πλέγμα με το P ως κορυφή έχει ολοκληρωθεί. Αυτή η απλή διαδικασία εφαρμόζεται σε όλα τα σημεία που γνωρίζουμε μέχρι στιγμής (τυπικά, οριακά σημεία) . Ολοκληρώνοντας με αυτή τη διαδικασία, δημιουργήσαμε ένα πλέγμα του κουτιού (πλαισίου) που καλύπτει την περιοχή(τομέα) αυτή αλλά όχι ένα πλέγμα της περιοχής αυτής.

2.1γ΄ Ακεραιότητα ορίου

Το πλέγμα που προκύπτει από την πιο πάνω μέθοδο είναι ένα πλέγμα του κουτιού (πλαίσιο) που περικλείει το πεδίο ορισμού. Τα οριακά στοιχεία που καθορίζουν το πεδίο ορισμού δεν ανήκουν απαραιτήτως στο κουτί αυτό. Έχουμε δηλαδή να κάνουμε με ένα περιορισμένο meshing πρόβλημα, για το οποίο υπάρχουν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις για τη λύση του. Στη πρώτη περίπτωση, ο προσδιορισμός του ορίου είναι τέτοιος ώστε να εμφανίζεται φυσικά στο πλέγμα, ενώ στη δεύτερη κάποια οριακά στοιχεία λείπουν από το τρέχων πλέγμα
Οριακό πλέγμα κατά Delaunay . Πριν κατασκευάσουμε το κουτί πλέγματος αναλύουμε τον περιορισμό του ορίου ούτος ώστε να δούμε αν είναι Delaunay ή όχι. Στην περίπτωση όπου θα είναι σημαίνει ότι τα στοιχεία του ορίου βρίσκονται μέσα στο πλέγμα, βάση των τελικών τους σημείων, ενώ εάν δεν είναι το τροποποιούμε έτσι ώστε να γίνει.

Επιβολή του ορίου.

Έχουμε ένα πλέγμα στο οποίο λείπουν μερικές ακμές (όψεις). Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε την ίδια μέθοδο με αυτή της περιορισμένης τριγωνοποίησης και τροποποιούμε το τρέχων πλέγμα έτσι ώστε να διασφαλίσουμε την ύπαρξη όλων των στοιχείων του ορίου και να πάρουμε την επιθυμητή ακεραιότητα του ορίου.

2.1δ′ Δημιουργία πλαισίου από σημεία

Έχουμε ένα πλέγμα για το πεδίο ορισμού, όπου οι κορυφές των στοιχείων είναι τα σημεία του ορίου και αυτό σημαίνει ότι οι εσωτερικές κορυφές βρίσκονται μέσα στο πλέγμα. Έτσι για να πληρεί τις προϋποθέσεις (καλά ορισμένα στοιχεία και στοιχεία επαρκούς μεγέθους) πρέπει να δημιουργήσουμε μερικά πλαίσια από σημεία στο πεδίο ορισμού. Μία μέθοδος για να το κάνουμε αυτό είναι χρησιμοποιώντας τις ακμές του τρέχων πλέγματος σαν υποστήριξη για το πλαίσιο σημείων.

Προκαταρκτικές προϋποθέσεις.

Αρχικά ένα βηματικό μέγεθος h συνδέεται με όλες τις οριακές κορυφές.

Ανάλυση ακμών.

Η βασική ιδέα είναι να θεωρήσουμε τις ακμές του τρέχων πλέγματος και να κατασκευάσουμε ένα σύνολο σημείων σε αυτές. Όσο χρειάζεται η δημιουργία ενός σημείου σε μια ακμή επαναλαμβάνουμε αυτή την διαδικασία. Η επαναληπτική διαδικασία ξεκινά από το πλέγμα που λαμβάνεται μετά τον ορισμό του πεδίου ορισμού, κατασκευάζει μια σειρά απο σημεία, τα εισάγει στο τρέχων πλέγμα και επαναλαμβάνεται στο πλέγμα που προκύπτει. Ακολούθως εξετάζουμε τις ακμές του τρέχων πλέγματος και συγκρίνουμε το μήκος τους με το βηματικό μέγεθος το οποίο σχετίζεται με τα τελικά τους σημεία. Ο στόχος της μεθόδου είναι να αποφασίσουμε εάν ένα ή περισσότερα σημεία πρέπει να δημιουργηθούν κατά μήκος των ακμών. Αν ναι, τόσο ο αριθμός των απαιτούμενων σημείων, n , όσο και η θέση τους πρέπει να καθοριστούν. Θέλουμε να εισαγάγουμε κατάλληλα απέχοντα σημεία κατά μήκος των ακμών ώστε να τις καλύψουμε όλες και να πάρουμε μια ομαλή κατανομή σημείων. Για μια ακμή AB μπορούμε να έχουμε ένα αριθμητικό τύπο για την κατανομή των σημείων εάν

- $h(0) = h_A$είναι το βηματικό μέγεθος που σχετίζεται με $P_0 = A$ένα απ·ο τα τελικά σημεία
- $h(n{+}1) = h_B$είναι αυτό που σχετίζεται με $P_{n+1} = B$το άλλο τελικό σημείο

μπορούμε να ορίσουμε μια ακολουθία α_i τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \alpha_0 &= h(0) + r \\ \alpha_n &= h(n+1) - r \\ \alpha_i &= d(P_i, P_{i+1}) \end{cases}$$

όπου $d(P_i, P_{i+1})$ είναι η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ του σημείου P_i και P_{i+1} και r ο λόγος της κατανομής. Θα πρέπει έτσι να λύσουμε το πιο κάτω σύστημα :

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = d$$

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + r$$

με σκοπό να βρούμε το r και το n. Οι λύσεις του πιο πάνω συστήματος είναι

$$n = \frac{2d}{h(0) + h(n+1)} - 1$$

και

$$r = \frac{h(n+1) - h(0)}{n+2}.$$

Λόγω του ότι το n πρέπει να είναι ακέραιος, προσαρμόζουμε τη λύση έτσι ώστε να πάρουμε μια ακριβής διακριτικοποίηση της ακμής AB όσον αφορά το n και το r. Το α_{is} και άρα η ακολουθία σημείων προσδιορίζεται όταν τα n και r καθοριστούν. Τότε, κάθε σημείο που είναι έτσι καθορισμένο, συνδέετε μια τιμή, το h, το οποίο προέρχεται από το h της ακμής. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνετε για όλες τις ακμές του τρέχων πλέγματος και σχετίζεται με το γεγονός ότι οι κορυφές είναι καλά τοποθετημένες κατά μήκος της ακμής, αλλά αυτή η ιδιότητα δεν ισχύει πάντοτε. Για παράδειγμα, στην περίπτωση όπου όλες οι ακμές προέρχονται από ένα σημείο, τα διατηρούμενα σημεία στην συνέχεια εισάγονται χρησιμοποιώντας τον πυρήνα Delaunay και η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται για όσο υπάρχουν ακμές στο πλέγμα οι οποίες πρέπει να υποδιαιρεθούν. Θα μπορούσε να σημειωθεί ότι αυτή η μέθοδος είναι ανεξάρτητη από την διάσταση του χώρου.

2.2 Βελτιστοποίηση

Μόλις τα σημεία του πεδίου έχουν εισαχθεί, τότε έχουμε κατασκευάσει ένα πλέγμα για τον τομέα(πλαίσιο) που πρέπει να βελτιστοποιηθεί σε κάποιο βαθμό. Ο στόχος είναι να βελτιστοποιηθεί το πλέγμα ως προς ένα κριτήριο ποιότητας το οποίο είναι κατάλληλο για το σκοπό μας (υπολογισμός πεπερασμένου στοιχείου) . Πράγματι, ενώ είναι Delaunay (στο μεγαλύτερο μέρος του τομέα), η ποιότητα του πλέγματος δεν είναι αυτό που απαιτείται. Αυτό σημαίνει ότι το κριτήριο Delaunay δεν είναι αυστηρά ορισμένο κριτήριο.
Μέχρι τώρα θεωρήσαμε την κατασκευή ενός κλασσικού πλέγματος. Τώρα στόχος μας είναι να δημιουργήσουμε καλά ορισμένα στοιχεία, με άλλα λόγια ισοτροπικά στοιχεία που να είναι ομοιόμορφα (καλά διαμορφωμένα) (ισόπλευρα τρίγωνα στο R^2 και κανονικά τετράεδρα στον R^3) .
Ένα φυσικό μέτρο για την ποιότητα μίας simplex είναι:

$$Q_K = \alpha \frac{h_{max}}{p_K}$$

όπου το α είναι ένας παράγοντας κανονικοποίησης έτσι ώστε η ποιότητα ενός κανονικού στοιχείου να είναι 1, h_{max} είναι η μεγαλύτερη ακμή του στοιχείου π.χ η διάμετρος και p_K είναι η ακτίνα. Αυτή η ποιότητα μετρά επαρκώς το σχήμα ή τις διαστάσεις ενός δεδομένου στοιχείου. Κυμαίνεται από το 1, για ένα ισόπλευρο τρίγωνο, μέχρι το ∞ για ένα απόλυτα επίπεδο στοιχείο. Για να επιστρέψουμε σε ένα πεδίο ορισμού από 0 έως 1, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αντίστροφο της Q_K .
Με βάση την παραπάνω ποιότητα στοιχείου, η ποιότητα ενός πλέγματος, T , δίνεται από:

$$Q_M = max_{K \in T} Q_K$$

Ο στόχος στη συνέχεια είναι να ελαχιστοποιήσουμε αυτή τη τιμή.

2.2α΄ Διαδικασία βελτιστοποίησης

Ο στόχος μας είναι να βελτιστοποιηθεί το τρέχον πλέγμα με απλές τοπικές τροποποιήσεις. Από την άποψη αυτή δύο κατηγορίες τεχνικών βελτιστοποίησης μπορούν να εντοπιστούν, οι *τοπολογικές τεχνικές* που διατηρούν τις συντεταγμένες και τροποποιούν τα σημεία σύνδεσης και τις *μετρικές τεχνικές* που κινούν τα σημεία, διατηρώντας παράλληλα τη συνδεσιμότητα μεταξύ των κορυφών.

2.3 Πρακτικά θέματα

Σε αυτή τη σύντομη ενότητα θα θέλαμε να δώσουμε κάποιες ενδείξεις σχετικά με την εφαρμογή υπολογιστή στα όσα αναφέραμε παραπάνω.

Σχετικά με τους βασικούς αλγορίθμους:

Αναφορικά με τον Delaunay πυρήνα οι δραστηριότητες που εμπλέκονται είναι :

- μια γρήγορη διαδικασία αναζήτησης, έτσι ώστε να καθοριστεί η *βάση* .
- ένας εύκολος τρόπος για να περάσει από το ένα στοιχείο στα γειτονικά του για να ολοκληρωθεί η *κοιλότητα* με σχέση γειτονιάς (περιοχής).
- ένας μή ακριβής υπολογισμός των περιγεγραμμένων κέντρων και της περιγεγραμμένης ακτίνας των στοιχείων του πλέγματος ,έτσι ώστε να αξιολογήσουμε το Delaunay κριτήριο.
- μια εύκολη τροποποίηση του πλέγματος κατά την εισαγωγή ενός σημείου σε αυτό.

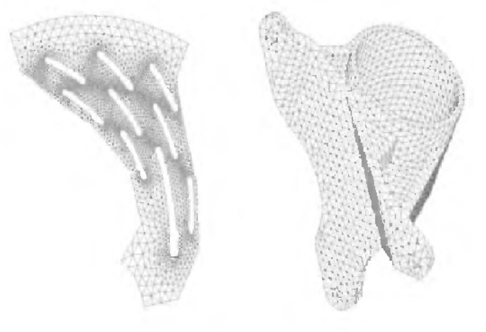
Σχετικά με μνημονικούς κανόνες και δομές δεδομένων

Πρώτον, θα μπορούσε να σημειωθεί ότι μια απλή δομή δεδομένων παρέχει μια καλή ευκαιρία για την επίτευξη μιας επιθυμητής αποτελεσματικότητας. Επιπλέον, οι χρήση της μνήμης πρέπει να ελαχιστοποιηθεί όσο το δυνατόν περισσότερο το οποίο είναι εφικτό με τη χρήση μιας απλής δομής. Έτσι, η εσωτερική δομή δεδομένων που χρησιμοποιείται πρέπει να αποθηκεύει και να διατηρεί τα ακόλουθα (σύμφωνα με τις ανάγκες της γλώσσας προγραμματισμού) :

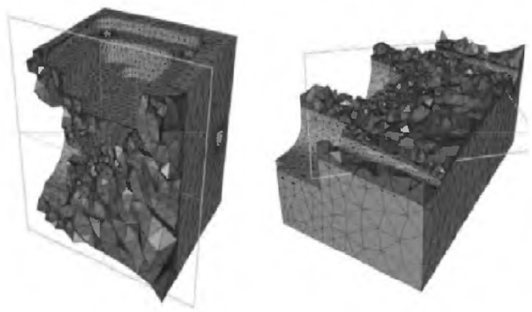
- τις συντεταγμένες των σημείων
- τις κορυφές των στοιχείων
- τα γειτονικά στοιχεία (ως προς τη γειτονικότητα των ακμών (όψεων) .
- τα περίκεντρα των στοιχειών
- τις περιγεγραμμένες ακτίνες των στοιχείων
- κάποια επιπλέον στοιχεία (π.χ για το πλέγμα που χρησιμοποιείται για τα προηγούμενα)

Παραδείγματα εφαρμογών

Στον R^2 ,μία ποιότητα ενός πλέγματος, δηλαδή Q_M , κοντά στο 1 μπορεί να υπολογιστεί, ανεξάρτητα από τη πολυγωνική διακριτή τιμή του ορίου της περιοχής. Στον R^3 , η αναμενόμενη τιμή του Q_M εξαρτάται από το πόσο καλά μπορεί να κατασκευαστεί ένα τετράεδρο για κάθε δεδομένη τριγωνική επιφάνεια. Ως εκ τούτου, η ποιότητα στον R^3 είναι ανάλογη της ποιότητας της επιφάνειας του πλέγματος που θεωρούμε.



Σχήμα 2.2: Στο παραπάνω σχήμα:Στην αριστερή πλευρά παρατηρούμε ένα δισδιάστατο γεωμετρικό σχήμα. Το πλέγμα του σχήματος περιέχει 2.445 κορυφές και 4.340 τρίγωνα. Η χαμηλότερη ποιότητα είναι 1.12 . Στη δεξιά πλευρά το τρισδιάστατο γεωμετρικό σχημα έχει προκύπτον πλέγμα που περιέχει 13,001 τετράεδρα και 3,703 κορυφές. Η ποιότητα του είναι 5.83 καθώς η τιμή CPU είναι 1.73 δευτερόλεπτα ($HP9000/C180$) .



Σχήμα 2.3: Στο παραπάνω σχήμα: δύο τομές μέσα από ένα τρισδιάστατο πλέγμα παρατηρούμε το σχήμα και την κλιμάκωση του εσωτερικού του.

2.4 Μέθοδοι εισαγωγής σημείου

Η χρήση ενός κλειστού πλαισίου(κουτί) δεν είναι απολύτως απαραίτητη. Για παράδειγμα, είναι δυνατόν, για ένα δοσμένο σύνολο σημείων, να τα ταξινομήσουμε έτσι ώστε ένα σημείο, P_{i+1} να είναι πάντα έξω από το πλέγμα (με βάση τα προηγούμενα i σημεία) . Εφαρμόζοντας ένα τέτοιο τέχνασμα στα οριακά σημεία καταλήγουμε τελικά στο πλέγμα της κυρτής θήκης του συνόλου αυτού. Τότε μπορούμε να δημιουργήσουμε και να εισάγουμε εσωτερικά σημεία επιστρέφοντας έτσι στην κλασική μέθοδο εισαγωγής σημείων ή κάποια άλλη ισοδύναμη μέθοδο. Για παράδειγμα, στο R^2 , ένα σημείο εισάγεται στη *βάση* μέσω διάσπασης του και κάποιας διαγώνιας εναλλαγής ολοκληρώνοντας έτσι ένα Delaunay τύπου πλέγμα .

2.4α΄ Καθορισμός ορίου

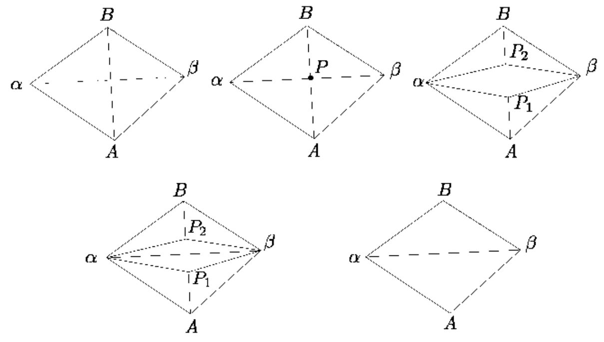
Μπορούμε να έχουμε πολλές παραλλαγές για τον καθορισμό του ορίου οι οποίες περιλαμβάνονται σε μια meshing μέθοδο τύπου Delaunay.

(i) Το όριο (και γενικότερα τα δοθέν στοιχεία)καθορίζεται αφού πρώτα τα σημεία της περιοχής έχουν εισαχθεί

(ii) Το δοθέν στοιχείο δεν υπάρχει την στιγμή που τα τελικά στοιχεία εισάγονται και χωρίζονται έτσι ώστε να εξασφαλίζεται ότι η διαμέριση που προκύπτει δημιουργείται αυτόματα

(iii) Τα στοιχεία του ορίου που λείπουν χωρίζονται μέσω των τεμνόμενων σημείων (ένα σημείο λείπει διότι ένα άλλο σημείο το τέμνει)

Η πιο πάνω μέθοδος παρουσιάζεται στο πιο κάτω σχήμα, όπου απεικονίζεται ένα απλό παράδειγμα στις δύο διαστάσεις.



Σχήμα 2.4: Επάνω αριστερά: το αρχικό σχέδιο (όπως δημιουργήθηκε μετά την εισαγωγή των τεσσάρων κορυφών), η ακμή AB υπάρχει ενώ η ακμή $\alpha\beta$ δημιουργείται. Στο σχήμα πάνω και στη μέση: το σημείο $P = AB \bigcap \alpha\beta$ εισάγεται στο σχήμα και μας οδηγεί σε τέσσερα τρίγωνα. Στο σχήμα πάνω δεξιά: Το σημείο P γίνεται P_1 και P_2 , η ακμή AP αντικαθίσταται από την ακμή AP_1 και η ακμή BP αντικαθίσταται από την ακμή BP_2 . Στο σχήμα κάτω αριστερά: Το πολύγωνο $\alpha P_1 \beta P_2$ είναι τέτοιο ώστε να δημιουργείται η ακμή $\alpha\beta$. Στο σχήμα κάτω δεξιά: Η κορυφή P_1 μαζί με την κορυφή P_2 αφαιρούνται που μας οδηγεί στην αναμενόμενη λύση, π.χ. η ακμή $\alpha\beta$ υπάρχει στο πλέγμα.

2.5 Ισοτροπική Delaunay meshing

Μέχρι τώρα το πρόβλημα ήταν να πλεγματοποιήσουμε όσο καλύτερα μπορούμε μια περιοχή, χρησιμοποιώντας την διακριτικοποίηση των ορίων ως μοναδικό δεδομένο. Πιο κάτω θα δούμε ένα διαφορετικό πρόβλημα meshing .

Θεωρούμε μια περιοχή η οποία προέρχεται μέσω μιας κατάλληλης διακριτικοποίησης του ορίου και υποθέτουμε ότι τα μεγέθη και τα χαρακτηριστικά της φοράς των στοιχείων που πρέπει να κατασκευάσουμε μας έχουν δοθεί. Το πρόβλημα είναι πώς θα κατασκευάσουμε ένα πλέγμα το οποίο θα είναι κατασκευασμένο σύμφωνα με τις πιο πάνω προδιαγραφές. Στην περίπτωση όπου μας έχουν δοθεί μόνο τα μεγέθη των στοιχείων, έχουμε ένα ισοτροπικό πρόβλημα πλέγματος, ενώ στην περίπτωση όπου τα χαρακτηριστικά της φοράς μας έχουν δοθεί τότε έχουμε ένα ανισοτροπικό πρόβλημα πλέγματος.
Αρχικά θα πρέπει να αντικαταστήσουμε κάποια απ·ο τα εργαλεία της απλοποιημένης μεθόδου τριγωνοποίησης τύπου Delaunay. Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο πυρήνας Delaunay είναι μια κατάλληλη τεχνική, χωρίς τροποποιήσεις, για να εισαγάγουμε ένα σημείο στο πλέγμα. Κατα ακρίβεια, η κύρια διαφορά βρίσκεται στον τρόπο τον που τα σημεία της περιοχής πρέπει να δημιουργηθούν έτσι ώστε να προσαρμόζονται στο δοθέν μέγεθος. Παράλληλα, θα πρέπει να γίνουν και κάποιες μικρές αλλαγές στην διαδικασία βελτιστοποίησης. Ένας τρόπος για να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα είναι να εισάγουμε την έννοια της μονάδας πλέγματος και να την χρησιμοποιήσουμε στην ανάλυση ακμών. Επίσης αλλαγές θα πρέπει να γίνουν και στην φάση της βελτιστοποίησης.

2.5α′ Έλεγχος χώρου

Οι προδιαγραφές μιας συνάρτησης κατανομής μεγέθους μας δίνει την δυνατότητα να ορίσουμε ένα έλεγχο του χώρου. Μία προσέγγιση είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα πλέγμα του οποίου τα κελιά (στοιχεία) δίνουν τις πληροφορίες για το επιθυμητό μέγεθος των στοιχείων. Στην πράξη, μια συνάρτηση κατανομής μεγέθους συνδέεται με την κάλυψη της περιοχής.
Αυτό σημαίνει ότι ο έλεγχος χώρου ορίζεται με αυτόν τον τρόπο. Εάν, από τη χωρική άποψη, η δομή ελέγχου είναι ένα φόντο πλέγματος χωρίς εσωτερικά σημεία, τότε η κατανομή μεγέθους εξαρτάται μόνο από τα μεγέθη των στοιχείων του ορίου. Στην επόμενη ενότητα θα δούμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό τον έλεγχο χώρου.

2.5β′ Χρήση του φόντου πλέγματος

Έχοντας ένα φόντο πλέγματος, η κατανομή μεγέθους είναι γνωστή, στις κορυφές αυτού του φόντου πλέγματος. Χρησιμοποιώντας αυτό το διακριτό χάρτη, ένας συνεχής χάρτης μεγέθους μπορεί να επιτευχθεί μέσω της παρεμβολής. Έστω P να είναι ένα αυθαίρετο σημείο στην περιοχή, το μέγεθος $h(P)$ στο P μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τα μεγέθη $h(P_i), i = 1, ..., d$ στις κορυφές P_i του στοιχείου που περικλείει το P, μέσω μιας P^1 τύπου παρεμβολής, δηλαδή

- βρίσκουμε το στοιχείο K στο οποίο ανήκει το P,
- υπολογίζουμε το $h(P)$ μέσω της P^1-παρεμβολής των μεγεθών $h(P_i)$ του στοιχείου στις P_i κορυφές.

Στην περίπτωση που θα έχουμε ένα κενό φόντο πλέγματος, η συνάρτηση κατανομής μεγέθους συνδέεται με την διακριτικοποίηση του ορίου και τα μεγέθη υπολογίζονται βάση αυτών των δεδομένων.

2.5γ′ Δημιουργία ενός σημείου στο πεδίο

Εφόσον ο έλεγχος χώρος έχει καθοριστεί, μπορούμε να στραφούμε στη δημιουργία σημείων πεδίου. Αυτό γίνεται βάση της ανάλυσης των ακμών του τρέχων πλέγματος. Στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε στοιχεία των οποίων το μέγεθος είναι σύμφωνα με τις δοθέν προδιαγραφές.
Μήκος Ακμής Έστω AB μια ακμή του πλέγματος. Εάν t είναι μεταξύ του 0 και 1 και $h(t)$ είναι μια συνάρτηση μεγέθους για αυτή την ακμή ($h(0) = h(A), h(1) = h(b)$), τότε το μήκος της ακμής AB σε σχέση με το $h(t)$ είναι

$$l_{AB} = d_{AB} \int_0^1 \frac{1}{h(t)} dt$$

όπου d_{AB} είναι η Ευκλείδεια απόσταση. Μια ακμή AB, εξ ορισμού, έχει το μέγεθος των προδιαγραφών εάν :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq l_{AB} \leq \sqrt{2}.$$

Η βασική ιδέα στη τοποθέτηση σημείου είναι να κατασκευάσουμε τα σημεία, έτσι ώστε κάθε τμήμα που ορίζεται από ένα ζεύγος των γειτονικών σημείων να είναι μήκους ένα ή περίπου ένα. Εάν $h(t)$ είναι μια σταθερή συνάρτηση, $h(t) = h, \forall t$ τότε $l_{AB} = 1$, που σημαίνει ότι $d_{AB} = h$ που είναι και η αναμενόμενη τιμή.
Δημιουργία ενός σημείου στο πεδίο Τα σημεία πεδίου μπορούν να δημιουργηθούν με την κλασσική μέθοδο δημιουργίας σημείων, αλλά με μερικές αλλαγές. Χρησιμοποιούμε μια επαναληπτική διαδικασία με την οποία θα καλυφτούν όλες οι εσωτερικές ακμές του τρέχων πλέγματος.
Αναλύουμε τις ακμές και υπολογίζουμε τα κανονικοποιημένα μήκη, χρησιμοποιώντας μια προσεγγιστική μέθοδο την οποία θα περιγράψουμε πιο κάτω. Στόχος είναι να κατασκευάσουμε τα βέλτιστα δυνατά στοιχεία μεγέθους 1. Έστω δ να είναι μια σταθερά (συνήθως $\delta < 1$, για παράδειγμα $\delta = 0.5$). Εάν $l_{AB} < \delta$ η ακμή AB δεν χωρίζεται. Διαφορετικά, το μεσαίο σημείο Q_1 εισάγεται και η διαδικασία επαναλαμβάνεται για κάθε ένα απο τα επιμέρους τμήματα AQ_1 και Q_1B. Έτσι βρίσκουμε μια σειρά σημείων Q_i τέτοια ώστε

$$l_{Q_iQ_{i+1}} < \delta$$

και

$$l_{AB} = \sum_i l_{Q_iQ_{i+1}}$$

και τότε ο συνολικός αριθμός σημείων κατά μήκος κάθε ακμής είναι γνωστός. Το επόμενο βήμα θα είναι να βρούμε την θέση των σημείων κατά μήκος των ακμών. Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε ένα δείκτη i, τέτοιο ώστε

$$l_{0,i} = \sum_{j=0}^{j=1} \delta_j > 1$$

και εισάγεται το σημείο P_1 το οποίο αντιστοιχεί στη μέση τιμή των σημείων Q_i και Q_{i+1}, και θα ισχύει

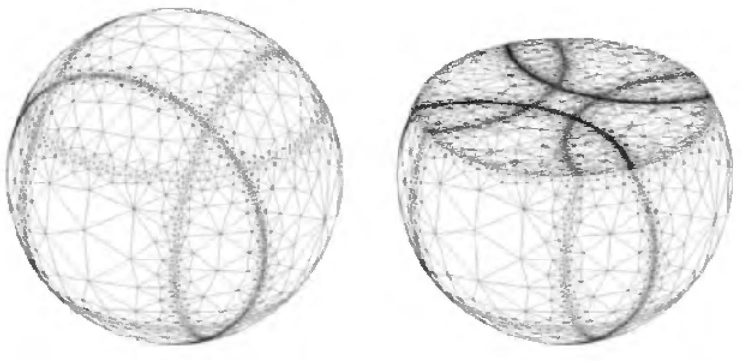
$$P_1 = Q_i + \omega \overrightarrow{Q_iQ_{i+1}}$$

όπου

$$\omega = \frac{1 - l_{0,i-1}}{l_{i-1,i}} d_{i-1,i}$$

l_{i-1} είναι το κανονικοποιημένο μήκος του τμήματος $Q_{i-1}Q_i$ και $d_{i-1,i}$ είναι η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των σημείων Q_{i-1} και Q_i. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να καλυφτούν όλες οι ακμές.

Για τον ίδιο λόγο όπως και με την κλασσική περίπτωση, έτσι και τώρα τα σημεία εισάγονται στο τρέχων πλέγμα μέσω του πυρήνα Delaunay. Επιπλέον, για να επιτύχουμε το βέλτιστο πλέγμα, προσθέτουμε ένα περιορισμό που σχετίζεται με τους τομείς (όγκους) των στοιχείων, αλλά δεν είναι απαραίτητο στις δύο διαστάσεις, λόγω του ότι ένα τρίγωνο του οποίου όλες οι ακμές είναι μονάδα, είναι αναγκαστικά βέλτιστο. Ωστόσο, στις τρείς διαστάσεις η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει και άρα είναι απαραίτητος ο έλεγχος των όγκων.



Σχήμα 2.5: ένα παράδειγμα ενός ισοτροπικού πλέγματος, όπου η μετρική συνάρτηση ορίζεται αναλυτικά

Βελτιστοποιήσεις

. Παρόμοια με την κλασσική περίπτωση, είναι καλό να βελτιστοποιούμε το πλέγμα που προκύπτει. Ο στόχος είναι να πάρουμε καλά ορισμένα στοιχεία, των οποίων τα μεγέθη τους να είναι σύμφωνα με τις δοθέν προδιαγραφές. Το στάδιο βελτιστοποίησης βασίζεται στην ίδια διαδικασία με αυτή της κλασσικής περίπτωσης, με ένα κριτήριο που βασίζεται στο μέγεθος. Αυτή η διαδικασία γίνεται σε δύο βήματα, αρχικά τα στοιχεία του πλέγματος βελτιστοποιούνται σύμφωνα με το κριτήριο μεγέθους και ακολούθως βελτιστοποιούνται σύμφωνα με το κριτήριο σχήματος.

2.6 Επεκτάσεις

Μία **σταθμισμένη** Delaunay τριγωνοποίηση μπορεί να θεωρηθεί ως μία Delaunay τριγωνοποίηση , όπου τα σταθμά είναι ανάλογα με το δεδομένο σύνολο σημείων. Σε αυτή την ενότητα θα συζητήσουμε εν συντομία τη σταθμισμένη τριγωνοποίηση πρίν αναφερθούμε στις περιπτώσεις όπου οι πληροφορίες που σχετίζονται με τα στοιχεία αφορούν τα μεγέθη καθώς και τις κατευθύνσεις , όπου το στάδιο κατασκευής στοχεύει στη δημιουργία *ανισοτροπικών* πλεγμάτων. Δηλαδή πλέγματα στα οποία τα στοιχεία τεντώνονται (για παράδειγμα, εκείνα που βρίσκονται σε υπολογιστικές ρευστοδυναμικές προσομοιώσεις).

2.6α′ Σταθμισμένη Delaunay τριγωνοποίηση

Θεωρούμε ένα σύνολο σημείων $\mathcal{S}$ όπου ένα θετικό ή μηδενικό βάρος ω_P^2 είναι ανάλογο του P για όλα τα P στο $\mathcal{S}$. Κατά την κατασκευή μίας σταθμισμένης τριγωνοποίησης του $\mathcal{S}$, στηριζόμαστε στην κατασκευή μιας Delaunay τριγωνοποίησης όπου η απόσταση από σημείο σε σημείο αντικαθίσταται από μια δύναμη , με δεδομένους τους συντελεστές στάθμισης. ($Aurenhammer - 1987$)
Το ζεύγος (P, ω_P^2) μπορεί να θεωρηθεί ως μια σφαίρα ακτίνας ω_P^2 με κέντρο το P. Δεδομένου ενός άλλου σημείου Q ορίζουμε $\Pi(P, \omega_P, Q) = d(P, Q)^2 - \omega_P^2$ όπου το $d(P, Q)$ είναι η Ευκλείδεια απόσταση. Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό , μπορούμε να ορίσουμε το λεγόμενο διάγραμμα δύναμης:

$$V_i = \left\{P \text{τέτοιο ώστε} \Pi(P_i, \omega_{P_i}, P) \leq \Pi(P_j, \omega_{P_j}, P), \forall j \neq i\right\}$$

Εάν για όλα τα ζεύγη $\left\|\omega_P^2 - \omega_Q^2\right\| \leq d(P, Q)^2$ ισχύει τόσο το διάγραμμα όσο και η δυαδικότητα του, τότε η σταθμισμένη τριγωνοποίηση υπάρχει. Η κατασκευή των σταθμισμένων τριγωνοποιήσεων και κυρίως ο τρόπος εισαγωγής ενός σταθμισμένου σημείου στηρίζεται στην εφαρμογή της μεθόδου του πυρήνα Delaunay που περιγράψαμε στην κλασσική περίπτωση με την αντικατάσταση της απόστασης d από τη δύναμη Π ώστε να ισχύουν τα πρακτικά ζητήματα.
Το ενδιαφέρον είναι ότι τα σταθμά τροποποιούν τα κελιά στο διάγραμμα, καθώς και η τριγωνοποίηση μας δίνει την αίσθηση ότι, στο διάγραμμα, τα διαχωριστικά από σημείο σε σημείο μπορεί να ωθούνται το ένα προς το άλλο (αντί να βρίσκεται στο μεσοδιάστημα) και συνεπώς οι συνδέσεις της τριγωνοποίησης επηρεάζονται αναλόγως.

2.7 Ανισοτροπική Delaunay meshing

Όμοια με τη προσέγγιση που υιοθετήσαμε για το κλασσικό σύστημα μπορεί να ακολουθηθεί, αλλά είναι απαραίτητο να τροποποιηθεί η μέθοδος που χρησιμοποιείται για τη δημιουργία του πεδίου των σημείων (όπως και στη προηγούμενη ισοτροπική μέθοδο) και ο πυρήνας Delaunay πρέπει να επεκταθεί. Αυτές οι δύο συγκεκριμένες πτυχές παρουσιάζονται στη συνέχεια.

2.7α′ Μήκος ακμής ως προς μία μετρική

Έστω AB μία ακμή η οποία ορίζεται ως: $AB(t) = A + t\overrightarrow{AB}$, $t \in [0,1]$. Έστω $M(M(t))$ να είναι ένας 2×2-πίνακας :

$$M(M(t)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{h^2(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2(t)} \end{pmatrix}$$

αν θεωρήσουμε ένα πρόβλημα στο R^2 (και ένα παρόμοιο 3X3 πίνακα στον R^3), όπου $h(t)$ είναι το αναμενόμενο μέγεθος στο σημείο $M(t)$, και η απόσταση μεταξύ των σημείων Α και Β ως προς τη μετρική $\mathcal{M}$ τότε είναι:

$$l_{\mathcal{M}}(AB) = \int_0^1 \sqrt{{}^t\overrightarrow{AB}\mathcal{M}(A + t\overrightarrow{AB})\overrightarrow{AB}dt}$$

.

2.7β′ Δημιουργά πεδίου σημείων

Η δημιουργία εσωτερικού σημείου σε ένα ανισοτροπικό πλέγμα επιτυγχάνεται με την αντικατάσταση του υπολογισμού του μήκους με το κλασσικό σύστημα. Συγκεκριμένα , χρησιμοποιούμε τον προηγούμενο ορισμό των κανονικοποιημένων μηκών , με αντικατάσταση του πίνακα $\mathcal{M}(\mathcal{M}(t))$ με το πίνακα (στον R^2):

$${}^t\mathcal{R}(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1^2(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2^2(t)} \end{pmatrix} \mathcal{R}(t)$$

όπου το $\mathcal{R}(t)$ καθορίζει τις δύο κατευθύνσεις που αναμένονται στο σημείο $\mathcal{M}(t)$ καθώς το $h_1(t)$ (καί το $h_2(t)$) υποδεικνύει τα επιθυμητά μεγέθη στο ίδιο σημείο μετά από την πρώτη (ή δεύτερη) κατεύθυνση που προαναφέραμε. Η στρατηγική τοποθέτησης σημείου είναι τότε η ίδια με εκείνη της προηγούμενης περίπτωσης για την ισοτροπική.

Σύστημα εισαγωγής σημείου Ο πυρήνας Delaunay δεν είναι πλέον κατάλληλος για ένα ανισοτροπικό πρόβλημα δημιουργίας πλέγματος. Ωστόσο, η κλασσική κατασκευή

$$\mathcal{T}_{i+1} = \mathcal{T}_i - \mathcal{C}_P + \mathcal{B}_P,$$

όπου $\mathcal{C}_P$ είναι η κοιλότητα και $\mathcal{B}_P$ είναι η μπάλα που σχετίζονται με το σημείο P, θα πρέπει να επεκταθεί. Πρέπει να ορίσουμε το $\mathcal{C}_P$ έτσι ώστε να είναι σύμφωνο με την ανισοτροπική που θέλουμε. Για αυτό το λόγο, ορίζουμε μια προϋπόθεση που λέει ότι ένα δοθέν στοιχείο είναι ένα μέλος του $\mathcal{C}_P$. Στην κλασσική κατασκευή, ένα στοιχείο K είναι στην κοιλότητα άν :

$$\alpha(P,K) = \frac{d(P,O_K)}{r_K} < 1,$$

όπου O_K να είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου (ή της σφαίρας) που αντιστοιχεί στο K και r_K η ακτίνα του κύκλου (ή της σφαίρας). Αντικαθιστούμε την σχέση αυτή με :

$$\alpha_{\mathcal{M}}(P,K) = \frac{l_{\mathcal{M}}(P, O_K)}{r_K} < 1$$

όπου

- O_K αντιπροσωπεύει το σημείο το οποίο έχει ίση απόσταση απο τις κορυφές του K, δεδομένου ότι το $l_{\mathcal{M}}$ είναι το μήκος που σχετίζεται με τον πίνακα $\mathcal{M}$ και
- r_K είναι το $l_{\mathcal{M}}(P_1, O_K), P_1$ να είναι μια απο τις κορυφές του K.

Ώς αποτέλεσμα, η κοιλότητα εκτιμάται από την ανισοτροπική κατασκευή. Η υπολογιστική εφαρμογή της πιο πάνω σχέσης θα είναι πολύ δύσκολη, λόγο του ότι εμφανίζεται ένα μη-γραμμικό σύστημα και έτσι θα πρέπει να βρεθεί μια προσεγγιστική λύση. Μία πιθανή λύση θα ήταν να λύσουμε το πιο κάτω σύστημα :

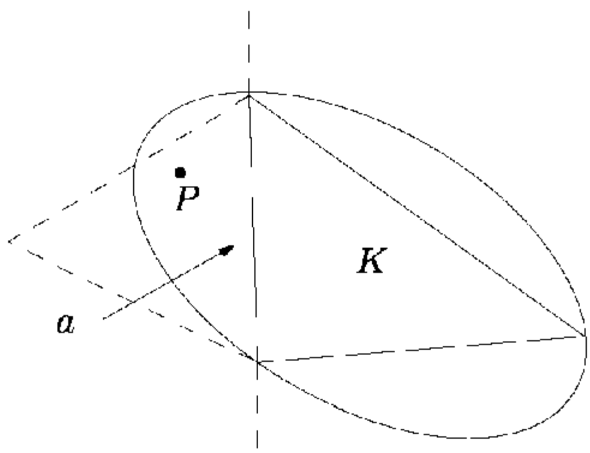
$$\begin{aligned} l_{\mathcal{M}(P)}(O_K, P_1) &= l_{\mathcal{M}(P)}(O_K, P_2) \\ l_{\mathcal{M}(P)}(O_K, P_1) &= l_{\mathcal{M}(P)}(O_K, P_3) \end{aligned}$$

Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνουμε το O_K (τα P_i να είναι οι κορυφές του K). Ακολούθως ελέγχουμε αν

$$\alpha_{\mathcal{M}(P)}(P,K) < 1,$$

όπου το $\mathcal{M}$ προσεγγίζεται από το $\mathcal{M}(P)$, η μετρική που σχετίζεται με το σημείο το οποίο εισάγεται. Το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο ισχύει για τις δύο διαστάσεις, μας δείχνει οτι ο προηγούμενος χαρακτηρισμός είναι κατασκευαστικός.

Θεώρημα 2.7.1. *Η σχέση $\alpha_{\mathcal{M}(P)}(P,K) < 1$ μας οδηγεί σε μία έγκυρη Delaunay πυρήνα μέθοδο*



Σχήμα 2.6: ένα σχήμα για την απόδειξη του θεωρήματος

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος έπεται του ελέγχου ότι η οριζόμενη κοιλότητα είναι περιοχή σε σχήμα αστεριού ως προς το P . Η κοιλότητα ξεκινά με βάση το P και η τελευταία είναι προφανώς σε σχήμα αστεριού σε σχέση με το P . Στη συνέχεια, αυτή η κοιλότητα εμπλουτίζεται με γειτνίαση. Δεδομένου ότι μια κοιλότητα σε σχήμα αστεριού περιέχει ορισμένα στοιχεία, πρέπει απλώς να αποδείξουμε ότι η προσθήκη ενός ακόμα στοιχείου, χρησιμοποιώντας το παραπάνω κριτήριο, διατηρεί το σχήμα του αστεριού της προκύπτουσας κοιλότητας. Όπως κάθε σημείο της έλλειψης $\alpha_{\mathcal{M}(P)}(P,K)=1$ που σχετίζεται με το P και όπως η κοινή ακμή της τρέχουσας κοιλότητας έτσι και το στοιχείο K , διαχωρίζει την έλλειψη σε δύο μη συνδεδεμένων μέρη. Έτσι, το P είναι συνδεδεμένο με τα δύο άλλα άκρα του K, τα οποία άκρα θα είναι μέρος της νέας κοιλότητας. Δυστυχώς, ο παραπάνω διαχωρισμός δεν ισχύει στον R^3 ,άρα το αποτέλεσμα δεν καλύπτει την περίπτωση αυτή, συνεπώς μια αποδοτικότερη μέθοδος πρέπει να χρησιμοποιηθεί. Πράγματι, θεωρούμε ακριβώς την ίδια κατασκευή, αλλά θα πρέπει να βεβαιωθούμε ότι η τρέχουσα κοιλότητα είναι μια περιοχή σε σχήμα αστεριού (Αυτό ολοκληρώνεται από έναν αλγόριθμο που διορθώνει μια πιθανώς μή έγκυρη κοιλότητα, επιστρέφοντας έτσι στο κλασικό αλγόριθμο διόρθωσης κοιλότητας) .

Σχήμα 2.7: ένα παράδειγμα ενός ανισοτροπικού πλέγματος, όπου η μετρική συνάρτηση ορίζεται αναλυτικά

Συμπερασματικά, πρέπει να σημειωθεί ότι και άλλες προσεγγιστικές λύσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν με αποτέλεσμα το επιθυμητό textlatinDelaunay τύπου πυρήνα. Οι λύσεις αυτές απαιτούν το σημείο P και μερικά άλλα σημεία να εντάσσονται στο πλαίσιο.

2.7γ′ Βελτιστοποιήσεις

Όμοια με την ανισοτροπική περίπτωση, ένα στάδιο βελτιστοποίησης στοχεύει στη βελτιστοποίηση της ποιότητας του μεγέθους και του σχήματος του πλέγματος που προκύπτει. Το στάδιο αυτό βασίζεται σε τοπικές τοπολογικές και γεωμετρικές πράξεις.

2.7δ′ Μια θεωρητική παρατήρηση

Όπως αναφέραμε σε αυτό το κεφάλαιο, μία Delaunay τύπου μέθοδος έχει προταθεί για την επίλυση προβλημάτων ανισοτροπικής meshing . Στο πλαίσιο αυτό, ο πυρήνας Delaunay έχει χρησιμοποιηθεί για τη σύνδεση των κορυφών.

Μια καθαρά θεωρητική προσέγγιση του προβλήματος θα μπορούσε να αντικρούσει τα συμπεράσματα μας. Στην πραγματικότητα, λόγω του μετρικού χάρτη που παρέχεται ως πληροφορίες για τα μεγέθη, (κατευθύνσεις) Η βασική ιδέα της απόστασης μεταξύ δύο σημείων δεν είναι πλέον Ευκλείδεια. Πράγματι, το μέτρο της απόστασης ποικίλλει από το ένα σημείο στο άλλο. Σύμφωνα με το διάγραμμα Voronoi ,το οποίο μπορεί να συνδέεται με ένα σύνολο σημείων σε ένα τέτοιο μετρικό πλαίσιο, δεν μπορούμε να επιστρέψουμε στο κλασικό διάγραμμα. Για παράδειγμα, η κάθετη διαχωριστική γραμμή δύο σημείων (στο R^2) δεν είναι μια ευθεία γραμμή, αλλά μια καμπύλη. Έτσι, η τριγωνοποίηση Delaunay, η dual για αυτό το διάγραμμα, δεν αποτελείται από affine (straight-sided) τρίγωνα. Πράγματι, αντιμετωπίζουμε ένα πρόβλημα Riemannian όπου η καμπύλη του ελάχιστου μήκους μεταξύ δύο σημείων, η λεγόμενη γεωδαιτική, δεν είναι πλέον ένα ευθύγραμμο τμήμα. Στην πραγματικότητα, ένας κατάλληλος ορισμός του διαγράμματος δεν είναι απόδειξη και δεν παρουσιάζει μια 'διπλή' Delaunay τριγωνοποίηση , αλλά είναι μία έγκυρη τριγωνοποίηση. Το κλασικό διάγραμμα:

$$V_i = P \text{ τέτοιο ώστε } d(P, P_i) \leq d(P, P_j), \forall j \neq i$$

θα αντικατασταθεί από:

$$V_i = P \text{ τέτοιο ώστε } l_{\mathcal{M}}(P, P_i) \leq l_{\mathcal{M}}(P, P_j), \forall j \neq i$$

όπου $l_{\mathcal{M}}(.,.)$ είναι η Riemannian απόσταση μεταξύ των σημείων. Ο ορισμός που χρησιμποποιείται για την παραπάνω κατασκευή τριγωνοποίησης απαιτεί να θεωρήσουμε το:

$$l_{\mathcal{M}}(AB) = \int_0^1 \sqrt{{}^t\overrightarrow{AB}\mathcal{M}(A + t\overrightarrow{AB})\overrightarrow{AB}}dt$$

αφού ενδιαφερόμαστε για τα affine τρίγωνα. Θεωρητικά, η απόσταση μεταξύ δύο σημείων δέν μετριέται σε ευθύγραμμο τμήμα αλλα σε μία καμπύλη, άρα ένας πιθανός τύπος θα ήταν :

$$l_{\mathcal{M}}(AB) = \int_0^1 \sqrt{{}^t\overrightarrow{\gamma'(t)}\mathcal{M}(\gamma(t))\overrightarrow{\gamma'(t)}}dt$$

όπου $\gamma(0) = A$ καί $\gamma(1) = B$ και το γ μία άγνωστη καμπύλη. Παρ 'ολα αυτά στο πλαίσιο μας, ο μόνος στόχος είναι να κατασκευάσουμε μία affine τριγωνοποίηση και ως εκ τούτου η καθαρά θεωρητική συζήτηση πιο πάνω δεν είναι το ζητούμενο. Στην πραγματικότητα, χρησιμοποιούμε το Delaunay φόντο ως ένα βασικό σύστημα που μας επιτρέπει να φτιάξουμε μια μέθοδο παραγωγής πλέγματος (η οποία δεν είναι πλέον Delaunay).

2.8 Επιφανειακό meshing

Η δημιουργία επιφανειακών πλεγμάτων θεωρείται δύσκολη διαδικασία για την οποία δύο προσεγγίσεις είναι δυνατές, μια άμεση και μία έμμεση προσέγγιση. Οι άμεσες προσεγγίσεις απαιτούν τη χρήση της κλασσικής meshing τεχνικής άμεσα στην επιφάνεια, χωρίς τη χρήση χαρτών. Τα μεγέθη των στοιχείων και τα σχήματα ελέγχονται λαμβάνοντας υπόψη τις τοπικές διακυμάνσεις της επιφάνειας από τις εγγενείς ιδιότητες. Οι οριακές καμπύλες διακριτικοποιούνται πρώτα πριν το meshing του πεδίου(τομέα) χρησιμοποιώντας ένα κλασικό σύστημα. Σύμφωνα με αυτό το σύστημα, μια Delaunay τύπου προσέγγιση δέν είναι καλή για κάτι τέτοιο. Ωστόσο η έμμεση προσέγγιση είναι περισσότερο εφικτή.

2.8α΄ Παραμετρικές επιφάνειες

Η δημιουργία παραμετρικών επιφανειακών πλεγμάτων μπορεί να επιτευχθεί με το πλέγμα του παραμετρικοποιημένου χώρου. Αυτή η τεχνική απλοποιεί το πρόβλημα σε αποκλειστικά δισδιάστατο πρόβλημα. Έστω Ω να είναι μία περιοχή(τομέας) στο R^2 και έστω σ μια απλή συνάρτηση, τότε η επιφάνεια Σ που ορίζεται:

$$\sigma : \Omega \to R^3, (u, v) \mapsto \sigma(u, v)$$

μπορεί να γίνει με μία δισδιάστατη μέθοδο δημιουργίας πλέγματος στο Ω ,στη συνέχεια χαρτογραφούμε αυτά τα πλέγματα, μέσω του σ, στον R^3. Ο μοναδικός περιορισμός είναι να έχουμε μια μέθοδο η οποία να επιτρέπει στα ανισοτροπικά πλέγματα να δημιουργηθούν. Ο μετρικός χάρτης βασίζεται στις ιδιότητες της επιφάνειας. Η μέθοδος Delaunay φαίνεται να είναι καλά ορισμένη σε αυτού του είδους τα προβλήματα.
Η Delaunay τύπου μέθοδος δημιουργίας πλέγματος αποδεικνύεται αποτελεσματική, ισχυρή και ευέλικτη για να χρησιμοποιηθεί στην κλασική καθώς και σε πολλές άλλες μεθόδους δημιουργίας πλέγματος. Επιπλέον, θα μπορούσε να σημειωθεί ότι η ανισοτροπική Delaunay τύπου meshing μέθοδος είναι ένα βασικό συστατικό για την παραγωγή της παραμετρικής επιφάνειας πλέγματος.