ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πτυχιακή εργασία

ΜΕΛΕΤΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΩΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ

Λαζαρίδου Ελένη
Αρ.Μητρώου:311/2008101

Επιβλέπων καθηγητής:
Δημητράκος Θεοδόσης

ΣΑΜΟΣ 2014

Μέλη εξεταστικής επιτροπής:

κ. Ανούσης Μιχαήλ
Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών
Πανεπιστημίου Αιγαίου

κ. Χατζηνικήτας Αγαπητός
Επίκουρος Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών
Πανεπιστημίου Αιγαίου

Η παρουσίαση της εργασίας έλαβε χώρα την Πέμπτη 19/06/2014 στο Καρλόβασι Σάμου.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία εκπονήθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Δημητράκο Θεοδόση Λέκτορα του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου για την υπομονή του, για τον χρόνο και την ενέργεια που αφιέρωσε για αυτήν την εργασία.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κύριο Ανούση Μιχαήλ Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αιγαίου και τον κύριο Χατζηνικήτα Αγαπητό Επίκουρο Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αιγαίου για την συμμετοχή τους στην επιτροπή εξέτασης και το ενδιαφέρον που έδειξαν. Θα ήθελα να ευχαριστήσω το διδακτικό και διοικητικό προσωπικό του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου που ήρθα σε επαφή κατά την διάρκεια της φοιτητικής μου ζωής για την βοήθεια και την υποστήριξη που μου πρόσφεραν και αρκετούς συμφοιτητές και φίλους που με στήριξαν όλα αυτά τα χρόνια. Όλων η παρουσία ήταν και είναι σημαντική για εμένα.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω με όλη μου την καρδιά, τους γονείς μου, Αγγελική και Γρηγόρη για την διαρκή στήριξη και το λιγότερο που μπορώ να κάνω είναι να τους αφιερώσω αυτήν την εργασία.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία γίνεται μια εισαγωγή στις στοχαστικές διαδικασίες. Μελετάμε διάφορες σημαντικές κατηγορίες των στοχαστικών ανελίξεων .Η πτυχιακή εργασία απαρτίζεται από τέσσερα κεφάλαια.

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρουμε βασικές έννοιες και ορισμούς καθώς και τα είδη των στοχαστικών ανελίξεων. Επιπλέον, ορίζουμε τις ανελίξεις απαρίθμησης και γίνεται μια αναφορά στην κατανομή στοχαστικών ανελίξεων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο ορίζουμε τις ανελίξεις Poisson και θεμελιώνουμε την μελέτη των στοχαστικών ανελίξεων σε συνεχή χρόνο και με διακριτό χώρο καταστάσεων. Τέλος, αναφερόμαστε στους ενδιάμεσους χρόνους και χρόνους αναμονής καθώς και στις γενικεύσεις της ανέλιξης Poisson και δίνουμε ορισμένα παραδείγματα.

Στο τρίτο κεφάλαιο ορίζουμε τις μαρκοβιανές αλυσίδες σε διακριτό και συνεχή χρόνο. Μελετάμε τις πιθανότητες μετάβασης καταστάσεων και την κλαδωτή μαρκοβιανή ανέλιξη.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναφέρουμε και μελετάμε άλλα είδη στοχαστικών ανελίξεων , όπως είναι οι τυχαίοι περίπατοι, οι ανελίξεις γεννήσεως-θανάτου, η κίνηση Brown ως διάχυση, η ανανεωτική θεωρία και δίνουμε ορισμένα παραδείγματα.

Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ-ΠΕΡΙΛΗΨΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο ....

ΒΑΣΙΚΑ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ....

1.1. Βασικές Έννοιες και Ορισμοί 7

1.2. Είδη Στοχαστικών Ανελίξεων 10

1.3. Ανελίξεις Απαρίθμησης 13

1.4. Στοχαστικές Ανελίξεις Απαρίθμησης 14

1.5. Κατανομή Στοχαστικής Ανέλιξης 15

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο ....

ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ POISSON ....

2.1. Εισαγωγή 16

2.2. Ενδιάμεσοι Χρόνοι και Χρόνοι Αναμονής 19

2.3. Γενικεύσεις Ανέλιξης Poisson 20

2.4. Παραδείγματα 22

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο ....

ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ ....

3.1. Μαρκοβιανές Αλυσίδες σε Διακριτό Χρόνο 36

3.2 Πιθανότητες μετάβασης καταστάσεων – Πίνακας μετάβασης καταστάσεων.36

3.3 Πιθανότητες μετάβασης καταστάσεων n τάξης 38

3.4. Παραδείγματα 41

3.5. Μαρκοβιανές Αλυσίδες σε Συνεχή Χρόνο 60

3.6. Κλαδωτή Μαρκοβιανή Ανέλιξη 62

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο ....

ΑΛΛΑ ΕΙΔΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ ....

4.1. Τυχαίοι Περίπατοι..66

4.2. Ανέλιξη Γεννήσεως - Θανάτου...78

4.3. Κίνηση Brown ως Διάχυση 88

4.4. Ανανεωτική Θεωρία 93

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 99

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΒΑΣΙΚΑ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Οι στοχαστικές ανελίξεις παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, τόσο από άποψη θεωρητική, όσο και για το μεγάλο φάσμα των εφαρμογών που παρέχουν. Αυτό γίνεται γιατί μελετούν πιθανοθεωρητικά μοντέλα τα οποία περιγράφουν φαινόμενα σε σχέση με τον χρόνο (δηλαδή εξαρτώνται από τον χρόνο) και επειδή επιπλέον υπόκεινται σε τυχαιότητα. Για την ανάπτυξη της σχετικής θεωρίας επιστρατεύονται σχεδόν όλοι οι κλάδοι των μαθηματικών, από απλά πιθανοθεωρητικά επιχειρήματα έως πολύπλοκα θεωρήματα μαθηματικής ανάλυσης. Για το λόγο αυτό, ως κλάδος, προσελκύει ερευνητές τόσο από το χώρο των θεωρητικών μαθηματικών όσο και από το χώρο των εφαρμοσμένων.

Η Θεωρία των Στοχαστικών Ανελίξεων αναπτύχθηκε συγχρόνως με τη μελέτη διαφόρων φυσικών φαινομένων, όπως ο θερμικός θόρυβος στα ηλεκτρικά κυκλώματα, η κίνηση Brown που κάνει ένα σωματίδιο μέσα σ' ένα υγρό ή αέριο κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες και πολλά άλλα. Δηλαδή, ο πρώτος επιστημονικός κλάδος που συνετέλεσε στην ανάπτυξη της θεωρίας των Στοχαστικών Ανελίξεων είναι η Φυσική.

Πολύ γρήγορα έγινε κατανοητό ότι μοντέλα Στοχαστικών Ανελίξεων περιγράφουν βιολογικά φαινόμενα όπως: Η συμπεριφορά ενός πληθυσμού που υπόκειται σε γέννηση, θάνατο και (ή) σε πολυπλοκότερες συνθήκες. Η κατανομή των φυτών και των ζώων. Ο αγώνας για την επικράτηση ενός πληθυσμού. Η εξαφάνιση ενός επιθέτου. Το φαινόμενο της καρκινογένεσης. Τέλος, η συνεισφορά των Στοχαστικών Ανελίξεων στα εντυπωσιακά αποτελέσματα που αφορούν την ανάγνωση του DNA είναι ιδιαίτερα σημαντική. Γενικά, στη Βιολογία οι εφαρμογές των Στοχαστικών Ανελίξεων είναι εξαιρετικά χρήσιμες και λόγω της φύσης των εφαρμογών αυτών ελκυστικές για τους ερευνητές.

Η Οικονομία είναι ένας άλλος κλάδος στον οποίο οι Στοχαστικές Ανελίξεις εφαρμόζονται με ιδιαίτερη επιτυχία. Για παράδειγμα, οι διακυμάνσεις των τιμών των προϊόντων, των χρηματιστηριακών μονάδων, καθώς και άλλων οικονομικών προβλημάτων, όπως τα Ασφαλιστικά, περιγράφονται από στοχαστικά μοντέλα που αναπτύσσονται στη Θεωρία των Στοχαστικών Ανελίξεων και παρέχουν χρήσιμες προβλέψεις για τη συμπεριφορά των σχετικών μεγεθών. Δεν θα ήταν υπερβολή να διατυπώσουμε την άποψη ότι οι Στοχαστικές Ανελίξεις έχουν εφαρμογές σ' όλες τις επιστήμες, αφού περιγράφουν φαινόμενα που εξαρτώνται από χρόνο ή χώρο όπως θα δούμε αργότερα.

Προτού γίνει αναφορά στη φύση μιας στοχαστικής ανέλιξης, είναι απαραίτητη η εισαγωγή της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής. Μία μεταβλητή της οποίας η τιμή εξαρτάται από την έκβαση ενός πειράματος τύχης, δύναται να θεωρηθεί ως μία τυχαία μεταβλητή. Πολλές φορές σ' ένα πείραμα τύχης δε μας ενδιαφέρει ο δειγματοχώρος του, αλλά ένα σύνολο το οποίο είναι αποτέλεσμα μιας απεικόνισης των στοιχείων του δειγματοχώρου στους πραγματικούς αριθμούς.

Παράδειγμα:

Έστω ότι ρίχνουμε δύο νομίσματα, τότε ο δειγματοχώρος του πειράματος είναι ίσος με:

$$\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$$

Ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει ο αριθμός των K τα οποία εμφανίζονται και ας συμβολίσουμε τον αριθμό αυτό με X. Τότε, εάν κατά την εκτέλεση του πειράματος συμβεί το γεγονός KK, η αντίστοιχη τιμή του X είναι 2. Εάν συμβεί το γεγονός $K\Gamma$ ή το ΓK, η αντίστοιχη τιμή του X είναι 1 και εάν συμβεί το γεγονός $\Gamma\Gamma$ η αντίστοιχη τιμή του X είναι 0. Έτσι, ορίσαμε μία συνάρτηση X με πεδίο ορισμού τον δειγματοχώρο και πεδίο τιμών το υποσύνολο $\{0,1,2\}$ των πραγματικών αριθμών

Ορισμός: Μία τυχαία μεταβλητή Χ (εν συντομία τ.μ.) είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού έναν δειγματοχώρο Ω και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών (δηλαδή η $X : \Omega \rightarrow R$).

1.1. Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Ως στοχαστική ανέλιξη ορίζεται η διαδικασία η οποία περιγράφει την μεταβολή σε μία ή περισσότερες μεταβλητές, υπό συνθήκες αβεβαιότητας. Γενικά, ο όρος της αβεβαιότητας είναι το κύριο χαρακτηριστικό των στοχαστικών ανελίξεων.

Θα δώσουμε, στο σημείο αυτό, ένα παράδειγμα για να κατανοήσουμε καλύτερα τις περιπτώσεις του πραγματικού κόσμου στις οποίες έχουν εφαρμογές οι στοχαστικές ανελίξεις. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η μελέτη στις μεταβολές των τιμών των περιουσιακών στοιχείων. Αυτού του είδους οι στοχαστικές ανελίξεις μπορεί να είναι χρονικά είτε διακριτές είτε συνεχείς. Παρά το γεγονός ότι οι τιμές των μετοχών παρατηρούνται σε διακριτό χρόνο, θεωρούμε ωστόσο ότι περιγράφονται από μια συνεχή στοχαστική ανέλιξη, διότι αυτό αποδεικνύεται πολύ χρήσιμο.

Ορισμός 1.1.1: Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \in T\}$, όπου T αποτελεί το σύνολο των δεικτών (τα οποία συνήθως μεταφράζονται σε χρονικές στιγμές) το οποίο μπορεί να περιλαμβάνει συνεχείς ή διακριτές τιμές ή με άλλα λόγια ορίζει τη διαδρομή (ακολουθία) τυχαίων μεταβλητών στον ίδιο χώρο πιθανοτήτων, όπου κάθε αλλαγή θεωρείται ανεξάρτητη των προηγούμενων αλλαγών (ανεξαρτησία) και, κάθε μια από αυτές περιγράφεται από όμοια κατανομή πιθανότητας (ισονομία). Δηλαδή, για κάθε $t \in T$, η συνάρτηση X_t είναι μια **τυχαία μεταβλητή.**

Ανεξαρτησία

$$f\left(X_1, X_2, ..., X_T\right) = f\left(X_1, X_2, ..., X_T; \theta\right) = f_1\left(X_1; \theta_1\right) f_2\left(X_2; \theta_2\right) .... f_T\left(X_T; \theta_T\right)$$

Η συνθήκη της ανεξαρτησίας, υποδηλώνει ότι, η συνδιακύμανση μεταξύ δύο διαδοχικών παρατηρήσεων είναι μηδέν.

Ισονομία

$$f_1\left(X_1;\theta_1\right)=f_2\left(X_2;\theta_2\right)=....=f_{\mathrm{T}}\left(X_{\mathrm{T}};\theta_{\mathrm{T}}\right)=f\left(X_t;\theta\right)\forall t=1,2,...,T$$

Η συνθήκη της ισονομίας ορίζει πως κάθε αλλαγή έχει τον ίδιο τύπο κατανομής πιθανότητας με τις ίδιες παραμέτρους, δηλαδή ίδιους μέσους και διακυμάνσεις.

Επιπλέον, το σύνολο T ονομάζεται παραμετρικός χώρος της ανέλιξης. Αν υποθέσουμε ότι κάθε μία από τις τυχαίες μεταβλητές X_t λαμβάνει τιμές μέσα σε ένα σύνολο S τότε ονομάζουμε το S χώρο καταστάσεων της ανέλιξης.

Ορισμός 1.1.2: Ένα δείγμα, δηλαδή ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών πλήθους T, θα λέμε ότι είναι τυχαίο δείγμα, όταν η από κοινού κατανομή του δείγματος μπορεί να γραφεί ως γινόμενο T οριακών κατανομών, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$f\left(X_1,X_2,...,X_T\right)=f\left(X_1,X_2,...,X_T;\theta\right)=f_1\left(X_1;\theta_1\right)f_2\left(X_2;\theta_2\right)....f_{\mathrm{T}}\left(X_{\mathrm{T}};\theta_{\mathrm{T}}\right)=$$
$$f_1\left(X_1;\theta_1\right)=f_2\left(X_2;\theta_2\right)=....=f_{\mathrm{T}}\left(X_{\mathrm{T}};\theta_{\mathrm{T}}\right)=f\left(X_t;\theta\right)=\prod_{t=1}^{T}f\left(X_t;\theta\right)$$

Δηλαδή, οι συνθήκες της ανεξαρτησίας και της ισονομίας, τις οποίες περιγράψαμε παραπάνω, μας επιτρέπουν τη διάσπαση της από κοινού κατανομής του δείγματος. Δηλαδή, με άλλα λόγια, μας επιτρέπουν τη μείωση της διαστατικότητας του υποδείγματος πιθανοτήτων από την πολυδιάστατη $f\left(X_1,X_2,...,X_T;\theta\right)$ στη μονοδιάστατη οριακή κατανομή . Όλη αυτή η διαδικασία έχει ως αποτέλεσμα να μειωθεί ο αριθμός των παραμέτρων που απαιτούνται προς εκτίμηση.

Αρχικά, αυτό που επιζητάμε σε μια στοχαστική ανέλιξη είναι η υπόθεση της ανεξαρτησίας (ή η σχέση εξάρτησης) των τυχαίων μεταβλητών $X_t, t=1,2,3$ αλλά και ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλονται στο χρόνο οι από κοινού και οριακές κατανομές των X_t (ισονομία ή ετερογένεια).

Ορισμός 1.1.3: **Στοχαστική ανέλιξη** (ή στοχαστική διαδικασία) (stochastic process) είναι μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t), t\in T\}$. Το σύνολο T

καλείται σύνολο δεικτών της ανέλιξης και το σύνολο των τιμών I των τυχαίων μεταβλητών $X(t), t \in T$ καλείται χώρος καταστάσεων (state space) της στοχαστικής ανέλιξης.

Η τυχαία μεταβλητή $X(t)$ ερμηνεύεται ως η κατάσταση της ανέλιξης κατά τη χρονική στιγμή t. Το σύνολο δεικτών T ανάλογα με τη μορφή του, ταξινομεί την ανέλιξη σε δύο κατηγορίες: (α) Αν το σύνολο T είναι της μορφής $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ ή της μορφής $T = \{0,1,2,\ldots\}$ τότε η ανέλιξη καλείται **στοχαστική ανέλιξη σε διακριτό χρόνο**. (β) Αν το σύνολο T είναι της μορφής $T = [0, \infty)$ ή της μορφής $T = (-\infty, \infty)$ τότε η ανέλιξη καλείται **στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο**.

Η στοχαστική ανέλιξη είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, της ω και της t.Κατά συνέπεια έχουμε:

[1] Για συγκεκριμένο $t \in T$, μία **στοχαστική ανέλιξη** $\{X_t(\omega), t \in T\}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή: $\omega \rightarrow X_t(\omega), \omega \in \Omega$.

[2] Για συγκεκριμένο $\omega \in \Omega$, μία **στοχαστική ανέλιξη** $\{X_t(\omega), t \in T\}$ είναι μια συνάρτηση μεταβλητής: $t \rightarrow X_t(\omega), t \in T$,η οποία καλείται "διαδρομή" (*path*).

Πολλές φορές, η μελέτη διαφόρων φαινομένων και η εξέλιξή τους στο χρόνο ή στο χώρο (π.χ. μεταβολή πληθυσμού σε μια συγκεκριμένη περιοχή της χώρας) μπορεί να γίνει με τη βοήθεια των στοχαστικών ανελίξεων.

Παράδειγμα:

Θεωρούμε ένα μόριο το οποίο κινείται στην περιφέρεια ενός κύκλου με $m+1$ διακεκριμένα σημεία $\{0,1,\ldots,m\}$ Σε κάθε βήμα της κίνησής του το μόριο έχει την ίδια πιθανότητα να κινηθεί, είτε με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, είτε με την αντίθετη φορά. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή:

$$X_n := \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \tau o\upsilon\ \mu o\rho\acute{\iota}o\upsilon\ \mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}\ \tau o\ n - o\sigma\tau\acute{o}\ \beta\acute{\eta}\mu\alpha.$$

Η $\{X_n, n \geq 1\}$ είναι μία στοχαστική ανέλιξη σε διακριτό χρόνο. Η κίνηση του μορίου διέπεται από την σχέση:

$$P\{X_{n+1} = j+1 \mid X_n = j\} = P\{X_{n+1} = j-1 \mid X_n = j\} = 1/2,$$

όπου $j + 1 = m\ \alpha\nu\ j = m$ και $j - 1 = m\ \alpha\nu\ j = 0$.

Το σύνολο τιμών $I = \{0,1, \ldots, m\}$ της στοχαστικής ανέλιξης είναι πεπερασμένο, ενώ το σύνολο δεικτών της $T = \{n, n \geq 1\}$ είναι άπειρο, διότι θεωρούμε ότι το μόριο μπορεί να περάσει άπειρες φορές από τα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία της περιφέρειας του κύκλου $\{0,1,2, \ldots, m\}$.

1.2. Είδη Στοχαστικών Ανελίξεων

Στην συνέχεια της εργασίας θα παρουσιάσουμε διάφορα είδη στοχαστικών ανελίξεων. Για το λόγο αυτό είναι σημαντικό να αναφέρουμε πως οι στοχαστικές ανελίξεις ταξινομούνται με βάση κάποια κριτήρια τα οποία είναι τα παρακάτω:

[1] Ο παραμετρικός τους χώρος

Αν ο παραμετρικός χώρος πρόκειται για ένα αριθμήσιμο σύνολο, τότε η στοχαστική ανέλιξη ονομάζεται ανέλιξη σε διακριτό χρόνο ή αλυσίδα, ενώ σε περίπτωση που το Τ δεν είναι αριθμήσιμο η στοχαστική ανέλιξη ονομάζεται ανέλιξη σε συνεχή χρόνο. Στην περίπτωση αλυσίδας, παίρνουμε σαν Τ το σύνολο $N_0 = \{0,1,2,\ldots\}$

[2] Ο χώρος καταστάσεων

Αν ο χώρος καταστάσεων S αποτελεί αριθμήσιμο σύνολο , τότε η ανέλιξη ονομάζεται στοχαστική ανέλιξη διακριτού χώρου καταστάσεων, ενώ σε περίπτωση που το S δεν είναι αριθμήσιμο τότε ονομάζεται στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χώρου καταστάσεων. Στην περίπτωση στοχαστικής ανέλιξης με διακριτό χώρο καταστάσεων παίρνουμε, συνήθως το σύνολο $S = N = \{0,1,2,...\}$.

[3] Οι σχέσεις εξάρτησης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών X_t

Εδώ έχουμε μια επιπλέον ταξινόμηση ως εξής:

$\Rightarrow$ Ανέλιξη με Ανεξάρτητες Προσαυξήσεις

Έστω ότι έχουμε τις τυχαίες μεταβλητές

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, δηλαδή

$$\forall t_1, t_2, ..., t_n \in S$$

τέτοια ώστε

$$t_1 < t_2 < ... < t_n$$

Αν το σύνολο T περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο πρέπει επιπλέον οι τυχαίες μεταβλητές

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

να είναι ανεξάρτητες.

$\Rightarrow$ Αυστηρά Στάσιμη Ανέλιξη

Αν οι από κοινού συναρτήσεις κατανομών των οικογενειών τυχαίων μεταβλητών

$$\{X_{t_{1+h}}, X_{t_{2+h}}, X_{t_{3+h}}, ..., X_{t_{n+h}}\}, \{X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, ..., X_{t_n}\}$$

με

$$\left(t_i + h\right) \in T, i = 1, 2, ..., n$$

είναι ίδιες για κάθε $h > 0$ και $t_1, t_2, ..., t_n \in S$

$\Rightarrow$ Στάσιμη Ανέλιξη με την Ευρεία Έννοια

Χαρακτηρίζεται ως στάσιμη σε δύο περιπτώσεις:

[i] Αν η ανέλιξη έχει πεπερασμένες ροπές δεύτερης τάξης

[ii] Αν η συνδιασπορά

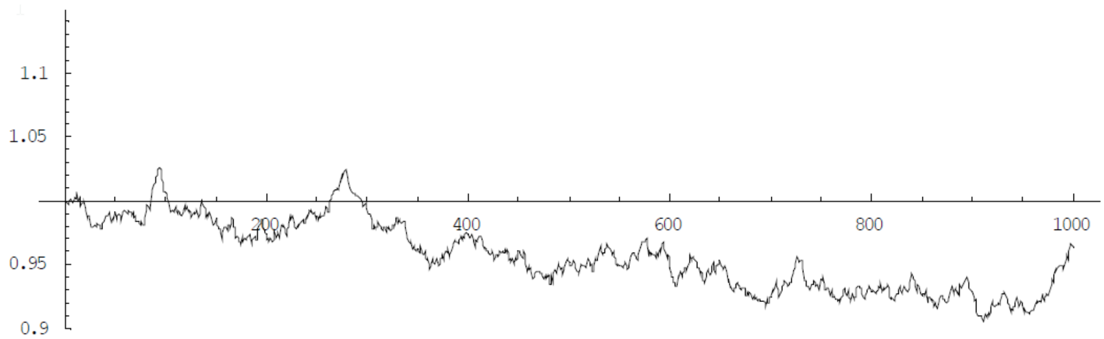
$$C\left(X_t, X_{t+h}\right) = E\left(X_t, X_{t+h}\right) - EX_t \cdot EX_{t+h}$$

εξαρτάται μόνο από το h , $\forall t \in T$, δηλαδή

$$C\left(X_t, X_{t+h}\right) = \varphi\left(h\right)$$

Παραδείγματα:

1. Έστω ότι $\{X_t, t \geq 0\}$ περιγράφει την εξέλιξη της τιμής μιας μετοχής στο χρόνο t, στη διάρκεια μιας ημέρας. Τότε η $\{ X_t : t \in T \}$ είναι μία στοχαστική ανέλιξη με συνεχείς τιμές σε συνεχή χρόνο. Μια πραγματοποίηση της $\left\{X\left\{t, \omega\right\}, t \geq 0\right\}$, για συγκεκριμένο ω μπορεί να έχει την μορφή:



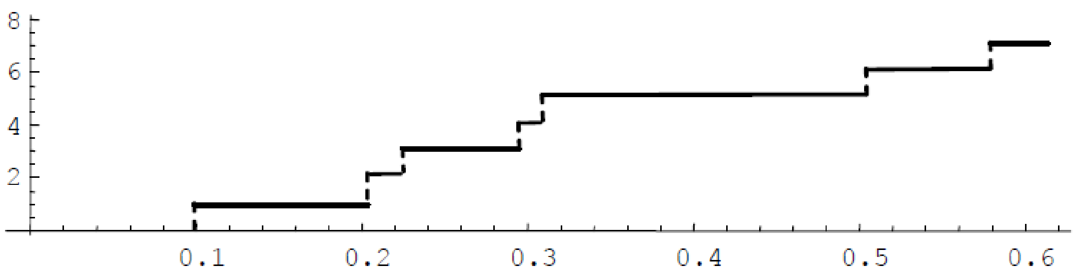
Η πραγματοποίηση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως μία απεικόνιση από το R+ στον R (εδώ πρόκειται μάλιστα για συνεχή συνάρτηση διότι θεωρούμε ότι η εξέλιξη της τιμής δεν παρουσιάζει άλματα).

2. Έστω X_t η τιμή μιας μετοχής στο τέλος της ημέρας $t, t \in \{1,2, \dots ,20\}$,δηλαδή εξετάζουμε το κλείσιμο των τιμών μιας μετοχής για ένα διάστημα 20 ημερών. Τότε η $\{X_t : t \in \{1,2, \dots ,20\}\}$ είναι μία στοχαστική ανέλιξη με συνεχείς τιμές σε διακριτό χρόνο.

3. Ρίχνουμε ένα ζάρι n φορές και έστω X_k ο αριθμός των φορών που εμφανίστηκε ο αριθμός <<τρία>> στις πρώτες k ρίψεις. Τότε η $\{X_k : k \in \{1,2, \dots , n\}\}$ είναι μία στοχαστική ανέλιξη με διακριτές τιμές σε διακριτό χρόνο.

4. Η X_t παριστάνει το πλήθος των απαιτήσεων (ζημιών) που έχουν φτάσει σε μία ασφαλιστική εταιρεία στο χρονικό διάστημα $[0, t]$. Τότε η $\{ X_t : t \geq 0 \}$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη με διακριτές τιμές σε συνεχή χρόνο.

5. Έστω ότι η $\{X(t), t \geq 0\}$ περιγράφει το πλήθος των πελατών που έχουν εισέλθει σε ένα κατάστημα στο χρονικό διάστημα [0,t]. Μια πραγματοποίηση της $\{X(t, \omega), t \geq 0\}$(για συγκεκριμένο ω) μπορεί να έχει τη μορφή:



Η $\{X(t, \omega), t \geq 0\}$ μπορεί να θεωρηθεί ως μία απεικόνιση από το R+ → N.

1.3. Ανελίξεις Απαρίθμησης

Ορισμός 1.3: Μια στοχαστική ανέλιξη $\{N_t\}_{t \geq 0}$ καλείται **σ.α. απαρίθμησης** (counting process) αν η τ.μ. N_t παριστάνει τον συνολικό αριθμό των γεγονότων που συμβαίνουν στο χρονικό διάστημα $(0, t]$. Για παράδειγμα, οι ανελίξεις που μετρούν τον αριθμό των τηλεφωνημάτων που φθάνουν σ' ένα τηλεφωνικό κέντρο, τον αριθμό των δυστυχημάτων που γίνονται σε μια διασταύρωση είναι ανελίξεις απαρίθμησης.

Σε μια σ.α. απαρίθμησης ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

[1] $N_t \geq 0$

[2] N_t παίρνει ακέραιες τιμές

[3] Αν $s < t$ τότε $N_s \leq N_t$

[4] Για $s < t$, ο αριθμός $N_t - N_s$ παριστάνει τον αριθμό των γεγονότων που συμβαίνουν στο διάστημα $(s,t]$.

Μια σ.α. απαρίθμησης είναι **ανεξαρτήτων προσαυξήσεων**, αν οι αριθμοί των γεγονότων που συμβαίνουν σε μη επικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα, είναι ανεξάρτητες τ.μ. Για παράδειγμα, οι τ.μ. N_t και $\left(N_{t+s} - N_t\right)$ είναι ανεξάρτητες.

Μια σ.α. απαρίθμησης είναι **στάσιμων προσαυξήσεων**, αν ο αριθμός των γεγονότων που συμβαίνουν σε ένα χρονικό διάστημα, είναι τ.μ. της οποίας η κατανομή εξαρτάται μόνο από το μήκος του χρονικού διαστήματος. Για παράδειγμα, οι τ.μ. $\left(N_{t_2} - N_{t_1}\right)$ και $\left(N_{t_2+s} - N_{t_1-s}\right)$ έχουν την ίδια κατανομή.

1.4. Στοχαστικές Ανελίξεις Απαρίθμησης

Ας υποθέσουμε ότι «πελάτες» φθάνουν σ' ένα σημείο εξυπηρέτησης , π.χ. τα ταμεία ενός super market, τα γκισέ μιας τράπεζας, τα διόδια ενός σταθμού διοδίων και θέλουν να εξυπηρετηθούν. Εάν οι «εξυπηρετητές» είναι απασχολημένοι, τότε σχηματίζουν μια ουρά. Μερικές στοχαστικές ανελίξεις οι οποίες σχετίζονται μ' ένα σύστημα ουράς είναι:

(α) η X_t μπορεί να παριστάνει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα τον χρόνο t ή

(β) η X_t μπορεί να παριστάνει τον αριθμό των πελατών που έχουν εξυπηρετηθεί μέχρι τον χρόνο t.

(γ) η ανέλιξη $\{W_n\}_{n=1}^{0}$ όπου W_n παριστάνει τον χρόνο που «ξοδεύει» στο σύστημα ή στην ουρά ο n-οστός πελάτης.

1.5. Κατανομή Στοχαστικής Ανέλιξης

Σε μια στοχαστική ανέλιξη, η X_t είναι μια τ.μ. της οποίας η κατανομή λαμβάνεται όπως μιας οποιασδήποτε τ.μ. Επειδή όμως το t μεταβάλλεται στον χώρο T , για να έχουμε μια πλήρη εικόνα της ανέλιξης χρειαζόμαστε την από κοινού κατανομή των βασικών τ.μ της οικογένειας $\{X_t\}_{t\in T}$.

Η από κοινού συνάρτηση κατανομής ορίζεται από την σχέση:

$$F_{t_1,t_2,\dots,t_n}\left(X_1,X_2,\dots,X_n\right)=P\left\{X_{t_1}\le x_1,X_{t_2}\le x_2,\dots,X_{t_n}\le x_n\right\}$$

Τις περισσότερες πληροφορίες σε μια ανέλιξη, τις παίρνουμε από τις λεγόμενες συναρτήσεις κατανομής μετάβασης (transition distribution functions) που ορίζονται από την σχέση:

$$F_{t_0,t_1}\left(x_0,x_1\right)=P\left\{X_{t_1}\le x_1 / X_{t_0}=x_0\right\}$$

Μια σ.α $\{X_t\}_{t\in T}$ καλείται **χρονικά ομογενής** (time homogeneous) αν η συνάρτηση κατανομής μετάβασης εξαρτάται από την διαφορά t_1-t_0 αντί από τα t_0,t_1, οπότε έχουμε:

$$F_{t_0,t_0+t}\left(x_0,x_1\right)=F_{0,t}\left(x_0,x_1\right),t_0\in T$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ POISSON

2.1. Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα ξεκινήσουμε με την μελέτη στοχαστικών ανελίξεων σε συνεχή χρόνο και με διακριτό χώρο καταστάσεων, οι οποίες ικανοποιούν κάποιες χαρακτηριστικές ιδιότητες. Οι ανελίξεις αυτές είναι οι πολύ γνωστές ανελίξεις Poisson. Υπάρχει μια σειρά προβλημάτων τα οποία μπορούν να μοντελοποιηθούν και να μελετηθούν με την βοήθεια αυτών των ανελίξεων Poisson. Τα προβλήματα αυτά έχουν να κάνουν με την χρονική ή την χωρική εξέλιξη «πληθυσμών», και μερικά παραδείγματα δίνονται παρακάτω:

- Οι προσγειώσεις αεροπλάνων σ’ ένα αεροδρόμιο,
- Οι διελεύσεις αυτοκινήτων από έναν σταθμό διοδίων,
- Οι αφίξεις κλήσεων σ’ ένα τηλεφωνικό κέντρο,
- Η κατανομή των κατοικιών σε μια συγκεκριμένη περιοχή της χώρας
- Η κατανομή των γαλαξιών σε μια περιοχή του σύμπαντος

Η ανέλιξη Poisson είναι μία στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου με διακριτό χώρο καταστάσεων, όπου κάθε χρονική στιγμή t, η τυχαία μεταβλητή X_t ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt. Η παράμετρος καλείται ρυθμός ή ένταση της ανέλιξης και αποδίδει το μέσο αριθμό γεγονότων στη μονάδα χρόνου. Αποτελεί παράδειγμα μιας ευρύτερης οικογένειας ανελίξεων, γνωστές και ως απαριθμήτριες ανελίξεις.

Γενικά, **απαριθμήτριες στοχαστικές ανελίξεις** (*counting processes*) $\{N_t\}_{t\geq 0}$ καλούνται οι ανελίξεις στις οποίες η N_t εκφράζει το πλήθος κάποιων γεγονότων που συνέβησαν μέχρι και το χρόνο t.

Προκειμένου να παραθέσουμε τον ορισμό της ανέλιξης Poisson, υποθέτουμε ότι μελετάμε ένα φαινόμενο χρησιμοποιώντας μια ανέλιξη απαρίθμησης $\{N_t\}_{t\geq 0}$, δηλαδή μια στοχαστική ανέλιξη της οποίας η τυχαία μεταβλητή παριστάνει τον αριθμό (κάποιων) γεγονότων (του φαινομένου) που συμβαίνουν στο χρονικό διάστημα $(0,t]$. Επιπλέον, έστω ότι τα γεγονότα του προβλήματος που συμβαίνουν ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

[1] Σ' ένα ελάχιστο χρονικό διάστημα, συμβαίνει το πολύ ένα γεγονός.

[2] Τα γεγονότα του φαινομένου τα οποία συμβαίνουν σε μη επικαλυπτόμενα διαστήματα χρόνου θεωρείται ότι είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα.

[3] Η πιθανότητα να συμβεί ένας συγκεκριμένος αριθμός γεγονότων σ' ένα χρονικό διάστημα, είναι ίδια για όλα τα (χρονικά) διαστήματα ίσου μήκους.

Η ανέλιξη απαρίθμησης, σ' αυτή την περίπτωση, καλείται **ανέλιξη Poisson**.

Αυστηρά με μαθηματικό ορισμό η ανέλιξη Poisson περιγράφεται ως εξής:

Ορισμός 2.1.1: Μια ανέλιξη απαρίθμησης $\{N_t\}_{t\geq 0}$ καλείται **ανέλιξη Poisson** με ρυθμό λ εάν:

[1] $N_0 = 0$

[2] Η $\{N_t\}_{t\geq 0}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις

[3] Ο αριθμός των γεγονότων που συμβαίνουν σε κάθε διάστημα μήκους t, ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt , δηλαδή:

$$P\{N_{t+s} - N_s = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad ,\forall s,t \geq 0 \text{ και } n = 0,1,2,\ldots$$

Ένας δεύτερος ορισμός, που έχει δοθεί για την ανέλιξη Poisson, είναι ο παρακάτω:

Ορισμός 2.1.2: Μια ανέλιξη απαρίθμησης $\{N_t\}_{t\geq 0}$ καλείται **ανέλιξη Poisson** με ρυθμό λ εάν:

[1] $N_0 = 0$

[2] Η $\{N_t\}_{t\geq 0}$ έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις

[3] Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} P\{N_{t+h} - N_t = 1\} &= \lambda h + O(h) \\ P\{N_{t+h} - N_t \geq 2\} &= O(h) \end{aligned} \qquad (1)$$

Με τον συμβολισμό $O(h)$, αναφερόμαστε σε μια πραγματική συνάρτηση $f = f(h)$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0 \qquad (2)$$

Τότε η συνάρτηση καλείται τύπου $O(h)$. Με απλά λόγια η συνάρτηση $f = f(h)$ είναι τύπου $O(h)$, όταν συγκλίνει στο 0 γρηγορότερα από ότι το h. Άρα, η $f = f(h)$ είναι αμελητέα, εφόσον την συγκρίνουμε με το h (για h πολύ μικρό).

Οι δύο ορισμοί που δόθηκαν παραπάνω για την ανέλιξη Poisson είναι ισοδύναμοι:

$(2) \Rightarrow (1)$. Εάν $s < t$ τότε έχουμε:

$$P\{N_t - N_s = n\} = e^{-\lambda(t-s)} \frac{\left(\lambda(t-s)\right)^n}{n!}, \quad n=0,1,2,...$$

Δηλαδή, η πιθανότητα $P\{N_t - N_s = n\}$ εξαρτάται μόνο από το μήκος του χρόνου $(t-s)$, το οποίο σημαίνει ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{N_t\}_{t\geq 0}$ είναι στάσιμων προσαυξήσεων.

Επίσης, ισχύει ότι:

$$P\{N_{t+h} - N_t = 1\} = e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^1}{1!} = \lambda h \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda h)^n}{n!} = \lambda h\left(1-\lambda h + O(h)\right) = \lambda h + O(h)$$

Και

$$P\{N_{t+h} - N_t \geq 2\} = e^{-\lambda h}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\lambda h)^n}{n!} = O(h)$$

2.2. Ενδιάμεσοι Χρόνοι και Χρόνοι Αναμονής

Δύο ακόμη ποσότητες που μας ενδιαφέρουν σε μια ανέλιξη Poisson είναι οι χρόνοι που πραγματοποιούνται τα διάφορα γεγονότα, καθώς και οι χρόνοι ανάμεσα στην πραγματοποίηση διαδοχικών γεγονότων.

Ορισμός 2.2.1: Έστω $\{N_t\}_{t\geq 0}$ μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ και έστω ότι η τυχαία μεταβλητή T_1 παριστάνει τον χρόνο, από την χρονική στιγμή 0 μέχρι την πραγματοποίηση του 1ου γεγονότος και για $n > 1$, η T_n παριστάνει τον χρόνο από την πραγματοποίηση του $(n-1)$ γεγονότος μέχρι την πραγματοποίηση του n −οστού γεγονότος. Η στοχαστική ανέλιξη $\{T_n\}_{n-1}^{\infty}$ καλείται στοχαστική ανέλιξη των **ενδιάμεσων χρόνων** (interarrival times).

Ορισμός 2.2.2: Έστω $\{N_t\}_{t\geq 0}$ μια στοχαστική ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ και έστω W_n είναι ο χρόνος μέχρι την πραγματοποίηση του n-οστού γεγονότος.

Τότε, η στοχαστική ανέλιξη $\{ W_n \}_{n-1}^{\infty}$ καλείται στοχαστική ανέλιξη των **χρόνων αναμονής** (waiting times).

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι:

$$W_n = \sum_{k-1}^{n} T_n$$

2.3. Γενικεύσεις Ανέλιξης Poisson

Στην παράγραφο αυτή αναφέρουμε μερικές ενδιαφέρουσες και χρήσιμες γενικεύσεις της ανέλιξης Poisson.

2.3.1 Μη ομογενής ανέλιξη Poisson

Έστω ότι σε μια ανέλιξη Poisson ο ρυθμός λ δεν είναι σταθερός, αλλά εξαρτάται από τον χρόνο, δηλαδή $\lambda = \lambda(t)$. Η συνθήκη (3) στο δεύτερο ορισμό της ανέλιξης Poisson γίνεται σε αυτή την περίπτωση:

$$P\{ N_{t+h} - N_t = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$$

Τότε η N_t ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο:

$$\rho(t) = \int_0^t \lambda(r)\, dr$$

ο οποίος καλείται συνάρτηση μέσης τιμής της ανέλιξης και η ανέλιξη $\{ N_t\}_{t\geq 0}$ καλείται σε αυτή την περίπτωση **μη-ομογενής ανέλιξη Poisson.**

2.3.2 Ανέλιξη Poisson με τυχαίο ρυθμό

Έστω ότι σε μια ανέλιξη Poisson $\{ N_t\}_{t\geq 0}$ ο ρυθμός λ δεν είναι πάλι σταθερός αλλά μια τυχαία μεταβλητή Λ με κατανομή F (π.π. $f_\Lambda(x)$) και μέση τιμή λ. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής N_t υπολογίζεται από την σχέση:

$$P\{N_t = n\} = \int_0^\infty P\{N_t = n \mid \Lambda = \mathrm{x}\} f_\Lambda(x)dx = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^n}{n!} f_\Lambda(x)\, dx$$

η δε μέση της τιμή ισούται με:

$$EN_t = E[E[N_t \mid \Lambda\,]] = \int_0^\infty E[N_t|\Lambda = x] f_\Lambda(x)dx = t\int_0^\infty x f_\Lambda(x)dx = tE\Lambda = \lambda t$$

Η ανέλιξη $\{ N_t\}_{t\geq 0}$ σε αυτή την περίπτωση καλείται **ανέλιξη Poisson με τυχαίο ρυθμό**.

2.3.3 Σύνθετη ανέλιξη Poisson

Εάν $\{ N_t\}_{t\geq 0}$ είναι μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ και $\forall t \geq 0$ ορίσουμε:

$$X_t = \sum_{n=1}^{N_t} Y_n$$

όπου $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ταυτοτικά κατανεμημένων (θετικών) τυχαίων μεταβλητών και ανεξάρτητων από την $\{ N_t\}_{t\geq 0}$, τότε η ανέλιξη $\{X_t\}_{t\geq 0}$ καλείται **σύνθετη ανέλιξη Poisson.**

Σε μια σύνθετη ανέλιξη Poisson, έχουμε:

$$EX_t = \lambda t EY_1 \quad \text{και} \quad V(X_t) = \lambda t E Y_1^2$$

2.4. Παραδείγματα

Παράδειγμα 1:

Στο τηλεφωνικό κέντρο εξυπηρέτησης πελατών μεγάλης τηλεφωνικής εταιρείας καταφθάνουν τηλεφωνήματα πελατών με ρυθμό 3 τηλεφωνήματα ανά λεπτό.

Ζητείται να βρεθεί:

[1] η πιθανότητα σε ένα λεπτό να φθάσουν το πολύ 2 τηλεφωνήματα

[2] η πιθανότητα σε μισό λεπτό να φθάσουν το πολύ 2 τηλεφωνήματα

[3] η πιθανότητα σε 2 λεπτά να φθάσουν το πολύ 4 τηλεφωνήματα

[4] η πιθανότητα σε 3 διαφορετικά χρονικά διαστήματα του ενός λεπτού να βρεθούν τουλάχιστον δύο τέτοια διαστήματα σε καθένα από τα οποία να έχουν φθάσει το πολύ 2 τηλεφωνήματα.

Λύση: Ο αριθμός των τηλεφωνημάτων που καταφθάνουν στο τηλεφωνικό κέντρο σε ένα διάστημα t λεπτών ακολουθεί κατανομή Poisson με λ=3. Οπότε έχουμε:

$$P\left(X_t = x\right) = e^{-3t}\frac{\left(3t\right)^x}{\text{x!}}, \quad x = 0,1,2,....$$

Επομένως, έχουμε:

$$(1) P\left(X_1 \le 2\right) = P\left(X_1 = 0\right) + P\left(X_1 = 1\right) + P\left(X_1 = 2\right) = \sum_{x=0}^{2} e^{-3}\frac{3^x}{\text{x!}} = 0{,}4232$$

$$(2) P\left(X_{1/2} \le 2\right) = P\left(X_{1/2} = 0\right) + P\left(X_{1/2} = 1\right) + P\left(X_{1/2} = 2\right) = \sum_{x=0}^{2} e^{-1.5}\frac{1.5^x}{\text{x!}} = 0{,}8088$$

$$(3) P\left(X_2 \le 4\right) = \sum_{x=0}^{4} e^{-6}\frac{6^x}{\text{x!}} = 0{,}2851$$

(4) Τα 3 χρονικά διαστήματα του ενός λεπτού μπορούν να θεωρηθούν ως τρεις ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli στις οποίες επιτυχία σημαίνει : σε ένα λεπτό

φθάνουν το πολύ δύο τηλεφωνήματα. Έτσι, αν συμβολίζουμε με Y τον αριθμό των επιτυχιών στις 3 δοκιμές είναι προφανές ότι $Y \sim B(3, 0.4232)$.Δηλαδή

$$P(Y=y)=\binom{3}{y}(0.4232)^{y}(0.5768)^{3-y}, \quad y=0,1,2,3$$

και επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(Y \geq 2)=\binom{3}{2}(0.4232)^{2}(0.5768)^{1}+\binom{3}{3}(0.4232)^{3}(0.5768)^{0}=0.3857$$

Παράδειγμα 2:

Μηνύματα φτάνουν σ'ένα τηλεγραφείο σύμφωνα με μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό $\lambda = 3$ μηνύματα ανά ώρα. Ποια η πιθανότητα ότι κανένα μήνυμα δε φτάνει κατά τη διάρκεια των πρωινών ωρών (8.00 με 12.00 πμ) ;

Λύση: Έστω N_t ο αριθμός των μηνυμάτων που φτάνουν στο τηλεγραφείο**.** Ο ρυθμός με τον οποίο φτάνουν τα μηνύματα είναι $\lambda = 3$ ανά ώρα. Από τις 8.00 μέχρι τις 12.00 πμ είναι 4 ώρες. Δηλαδή θέλω να υπολογίσω την πιθανότητα:

$$P\{N_4 = 0\} = e^{-3\cdot 4}\frac{(3\cdot 4)^0}{0!} = e^{-12}\cdot 1 = e^{-12}$$

Παράδειγμα 3:

Αεροπλάνα φθάνουν στο αεροδρόμιο Ελευθέριος Βενιζέλος σύμφωνα με την ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ. Υποθέτουμε ότι δεδομένου ότι ένα αεροπλάνο προσγειώνεται στο αεροδρόμιο, η πιθανότητα να προέρχεται από πτήση στο εσωτερικό της χώρας είναι p και η πιθανότητα να προέρχεται από πτήση στο εξωτερικό της χώρας είναι $(1-p)$. Να βρεθεί η κατανομή των αεροπλάνων από πτήσεις του εσωτερικού και εξωτερικού στο αεροδρόμιο.

Λύση: Έστω $N(t)$: ο αριθμός των αεροπλάνων που φθάνουν στο αεροδρόμιο στο χρονικό διάστημα $(0,t)$.

Έστω $N_1(t)$: ο αριθμός των αεροπλάνων που προέρχονται από πτήσεις στο εσωτερικό της χώρας.

Έστω $N_2(t)$: ο αριθμός των αεροπλάνων που προέρχονται από πτήσεις στο εξωτερικό της χώρας.

Θα βρούμε την από κοινού πιθανότητα να έχουμε $N_1(t)=n$ και $N_2(t)=m$ αντίστοιχα. Για να το πετύχουμε αυτό θα βρούμε την :

$$P\{N_1(t)=n\,,N_2(t)=m\}=P\{N_1(t)=n\,,N_2(t)=m\,|N(t)=n+m\}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι:

$$P\{N_1(t)=m\,,N_2(t)=m\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N_1(t)=n\,,N_2(t)=m\,|N(t)=k\}\cdot P\{N(t)=k\}$$

Όμως, για να έχουμε $N_1(t)=n$ και $N_2(t)=m$ είναι φανερό ότι θα πρέπει:

$N(t)=n+m$, διαφορετικά αν $k\neq n+m$ η

$$P\{N_1(t)=m\,,N_2(t)=m\,|N(t)=k\}=0$$

Επομένως έχουμε,

$$P\{N_1(t)=n\,,N_2(t)=m\}=$$

$$=P\{N_1(t)=n\,,N_2(t)=m|N(t)=n+m\}P\{N(t)=n+m\}=$$

$$=P\{N_1(t)=n\,,N_2(t)=m|N(t)=n+m\}\cdot e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}$$

Δεδομένου ότι έχουμε $(n+m)$ προσγειώσεις αεροπλάνων, αν είναι p η πιθανότητα να προέρχεται από πτήση στο εσωτερικό της χώρας και $(1-p)$ η πιθανότητα να προέρχεται από πτήση στο εξωτερικό της χώρας, τότε η πιθανότητα το πόσα αεροπλάνα είναι από εσωτερικό και εξωτερικό ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή.

Επομένως,

$$P\{N_1(t)=n\,,N_2(t)=m\;|N(t)=n+m\}=\binom{n+m}{n}p^n(1-p)^m$$

Άρα,

$$P\{N_1(t)=n\,,N_2(t)=m\}=\binom{n+m}{n}p^n(1-p)^m e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}=$$

$$=e^{-\lambda tp}\frac{(\lambda tp)^n}{n!}e^{-\lambda t(1-p)}\frac{[\lambda t(1-p)]^m}{m!}$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε ότι:

$$P\{N_1(t)=n\}=\sum_{m=0}^{\infty}P\{N_1(t)=n\,,N_2(t)=m\}=$$

$$=e^{-\lambda tp}\frac{(\lambda tp)^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}e^{-\lambda t(1-p)}\frac{[\lambda t(1-p)]^m}{m!}=$$

$$=e^{-\lambda tp}\frac{(\lambda tp)^n}{n!}$$

Άρα, η κατανομή του αριθμού των αεροπλάνων από πτήση στο εσωτερικό της χώρας στο διάστημα $(0,t)$ είναι η Poisson με παράμετρο λp.

Ομοίως, έχουμε:

$$P\{N_2(t)=m\}=\sum_{n=0}^{\infty}P\{N_1(t)=n\,,N_2(t)=m\}=$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t p)^n}{n!} \right) e^{-\lambda t(1-p)} \frac{[\lambda t(1-p)]^m}{m!}$$

$$= e^{-\lambda t p(1-p)} \frac{[\lambda t(1-p)]^m}{m!}$$

Άρα, η κατανομή του αριθμού των αεροπλάνων από πτήση στο εξωτερικό της χώρας στο διάστημα $(0, t)$ είναι η Poisson με παράμετρο $\lambda(1-p)$.

Παράδειγμα 4:

Οδηγοί φθάνουν στα διόδια της Ελευσίνας σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson $\{X_t\}_{t\geq 0}$ με ρυθμό λ. Κάθε ένας από τους οδηγούς, ανεξάρτητα από τους άλλους, έχει πιθανότητα p να φθάσει (συνεχίζοντας μέσω της εθνικής οδού) στα διόδια της Κορίνθου. Δείξτε ότι η ανέλιξη $\{N_t\}_{t\geq 0}$ που μετρά τον αριθμό των οδηγών που φθάνουν στα διόδια της Κορίνθου, είναι μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό λp.

Λύση: Έστω X_t: ο αριθμός των οδηγών που φθάνουν στα διόδια της Ελευσίνας μέχρι το χρόνο t και N_t: ο αριθμός των οδηγών που φθάνουν στα διόδια της Κορίνθου μέχρι το χρόνο t.

Από υπόθεση έχουμε ότι:

$$P\{N_t = k | X_t = n\} = \binom{n}{k} p^n (1-p)^{n-k}$$

Αλλά,

$$P\{N_t = k\} = \sum_{n=k}^{\infty} P\{N_t = k, X_t = n\} = \sum_{n=k}^{\infty} P\{N_t = k | X_t = n\} P\{X_t = n\} =$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} p^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(q\lambda t)^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} p^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(q\lambda t)^m}{m!} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda pt)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)t} = e^{-\lambda pt} \frac{(\lambda pt)^k}{k!}$$

Επιπλέον, όλες οι υπόλοιπες υποθέσεις του ορισμού της ανέλιξης ικανοποιούνται έχουμε ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{N_t\}_{t\geq 0}$ είναι ανέλιξη Poisson με ρυθμό λp.

Παράδειγμα 5:

Στο Κέντρο Διάδοσης Επιστημών και Μουσείο Τεχνολογίας ΝΟΗΣΙΣ φθάνουν για την εκδήλωση (ΤΑΞΙΔΕΨΤΕ ΜΕ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ ΣΑΣ ΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ) οι μαθητές σχολείων της Θεσσαλονίκης συνοδευόμενοι από καθηγητές τους μεταξύ 11.00 πμ και 2.00 μμ σύμφωνα με τη διαδικασία Poisson και με ρυθμό $\lambda = 5$ σχολεία ανά μισή ώρα. Από ένα σχολείο μπορεί να έρθουν είτε 60 μαθητές με πιθανότητα 0.5, είτε 30 με πιθανότητα 0.2, είτε 20 με πιθανότητα 0.1, είτε 10 με πιθανότητα 0.2. Να βρεθεί:

α) το αναμενόμενο πλήθος των προσερχόμενων στην εκδήλωση,

β) η διακύμανση του πλήθους των προσερχόμενων στην εκδήλωση.

Υπόθεση: Θεωρείστε ότι για κάθε σχολείο υπάρχουν 3 συνοδοί καθηγητές.

Λύση: Έστω X_t η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το πλήθος των προσερχόμενων στην εκδήλωση. Το ζητούμενο είναι το $E[X_t]$ και $Var[X_t]$ για $t = 14 - 11 = 3$ ώρες.

Συμβολίζουμε με N_t την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό των μαθητών, συνοδευόμενοι από 3 καθηγητές, που μπορεί να έρθουν από ένα σχολείο στο διάστημα $(0, t)$. Τέλος, έστω η τυχαία μεταβλητή Y_i που εκφράζει τον αριθμό των μαθητών που προέρχονται από το i σχολείο. Τότε

$$X_t = N_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

Είναι γνωστό ότι:

$$E[X_t] = E[E[X_t|N_t]]$$

Οπότε, έχουμε:

$$E[X_t] = E[N_t] + E\left\{\sum_{i=1}^{n} E[Y_i]\right\} = E[N_t] + E\{nE[Y]\} =$$

$$= E[N_t] + E[N_t]E[Y] = E[N_t]\{1 + E[Y]\}.$$

Έχουμε όμως ότι το $\lambda = 5$ ανά μισή ώρα, οπότε $\lambda = 10$ ανά ώρα, άρα

$$E[N_t] = 10 \cdot 3 = 30$$

και

$$E[Y] = \left(60\frac{1}{2} + 30\frac{1}{5} + 20\frac{1}{10} + 10\frac{1}{5}\right) + 3 = 43$$

$$E[X] = E[X_t]E[Y] = 30 \cdot 43 = 1290$$

Επίσης,

$$Var[X] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E[Y^2] = \left(\frac{1}{2}3600 + \frac{1}{5}900 + \frac{1}{10}400 + \frac{1}{5}100\right) + 3 = 2043$$

$$Var[X] = E[X_t]\{1 + E[Y^2]\} = 30(1 + 2043) = 63364$$

Παράδειγμα 6:

Οι αφίξεις των απαιτήσεων σε μια ασφαλιστική εταιρεία ακολουθούν την ανέλιξη Poisson με ένταση $\lambda = 3$ ανά εβδομάδα. Να βρεθεί η πιθανότητα:

α) να υπάρχουν δύο απαιτήσεις σε διάστημα δύο εβδομάδων.

β) να υπάρχουν τουλάχιστον δύο απαιτήσεις σε διάστημα δύο εβδομάδων.

γ) να χρειαστούν τουλάχιστον τρεις εβδομάδες έως την πρώτη απαίτηση.

Λύση: Η ένταση σε μια ανέλιξη Poisson εκφράζεται πάντα ανά μονάδα χρόνου (εδώ ανά εβδομάδα).

α) Ζητάμε την πιθανότητα $P(N(2) = 2)$. Από τις ιδιότητες της ανέλιξης έχουμε ότι

$$N(2) \sim Poisson(\lambda t) = Poisson(6)$$

Συνεπώς,

$$P(N(2) = 2) = e^{-6}\frac{6^2}{2!} = 18e^{-6}$$

β) Παρόμοια, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} P(N(2) \geq 2) &= 1 - P(N(2) \leq 1) \\ &= 1 - P(N(2) = 0) - P(N(2) = 1) \\ &= 1 - e^{-6}\left[\frac{6^0}{0!} + \frac{6^1}{1!}\right] \\ &= 1 - (1 + 6)e^{-6} \\ &= 1 - 7e^{-6} \end{aligned}$$

γ) Έστω T_1 ο χρόνος (σε εβδομάδες) μέχρι την πρώτη απαίτηση. Εφόσον $T_1 \sim Exp(3)$ παίρνουμε

$$P(T_1 > 3) = e^{-\lambda t} = e^{-3\times 3} = e^{-9}$$

που είναι η ζητούμενη πιθανότητα.

Παράδειγμα 7:

Πελάτες φτάνουν σε μία τράπεζα σύμφωνα με την ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ πελάτες ανά ώρα. Έστω ότι φτάνουν δύο πελάτες κατά την πρώτη ώρα. Ποια η πιθανότητα ότι:

α) και οι δύο έφτασαν τα πρώτα 20 λεπτά;

β) τουλάχιστον ένας έφτασε τα πρώτα 20 λεπτά;

Λύση: $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$

α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P\{N(s) = 2 | N(1) = 2\}, όπου\ s = \frac{1}{3}$$

γιατί τα 20 λεπτά είναι το ένα τρίτο της ώρας. Έχουμε ότι:

$$P\left\{N\left(\frac{1}{3}\right) = 2 | N(1) = 2\right\} = \frac{P\{N\left(\frac{1}{3}\right) = 2, N(1) = 2\}}{P\{N(1) = 2\}}$$

$$= \frac{P\left\{N\left(\frac{1}{3}\right) = 2\right\} P\{N\left(\frac{2}{3}\right) = 0\}}{e^{-\lambda\frac{\lambda^2}{2}}}$$

$$= \frac{e^{-\lambda\frac{1}{3}}\frac{(\lambda\frac{1}{3})^2}{2!}e^{-\lambda\frac{2}{3}}\frac{(\lambda\frac{2}{3})^0}{0!}}{e^{-\lambda\frac{\lambda^2}{2}}} = \frac{1}{9}$$

β) Η πιθανότητα που ζητείται είναι:

$$P\left\{N\left(\frac{1}{3}\right) \geq 1 \middle| N(1) = 2\right\} = P\left\{N\left(\frac{1}{3}\right) = 1 \middle| N(1) = 2\right\} + P\left\{N\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \middle| N(1) = 2\right\}$$

Όμως,

$$P\left\{N\left(\frac{1}{3}\right) = 1 \middle| N(1) = 2\right\} = \frac{P\{N\left(\frac{1}{3}\right) = 1, N(1) = 2\}}{P\{N(1) = 2\}}$$

$$= \frac{P\left\{N\left(\frac{1}{3}\right) = 1\right\}P\{N\left(\frac{2}{3}\right) = 1\}}{P\{N(1) = 2\}}$$

$$= \frac{e^{-\lambda\frac{1}{3}}\frac{(\lambda\frac{1}{3})^1}{1!}e^{-\lambda\frac{2}{3}}\frac{(\lambda\frac{2}{3})^1}{1!}}{e^{-\lambda\frac{\lambda^2}{2}}} = \frac{5}{9}$$

Παράδειγμα 8:

Γεγονότα συμβαίνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda =$ 3 γεγονότα ανά ώρα.

α) Ποια η πιθανότητα ότι δε συμβαίνει τίποτα μεταξύ 8 και 10 το πρωί;

β) Ποια η πιθανότητα να συμβούν δύο ή περισσότερα γεγονότα ανάμεσα στις 6 και 8 το βράδυ;

γ) Ποια η μέση τιμή του αριθμού των γεγονότων που συμβαίνουν μεταξύ 8 και 10 το πρωί;

δ) Ποια η αναμενόμενη ώρα εμφάνισης του πέμπτου γεγονότος μετά από τις 2 το απόγευμα;

Λύση: α) Η πιθανότητα που ζητείται είναι με:

$$P\{N(10) - N(8) = 0\} = e^{-6}$$

β) $P\{N(3 \cdot 2) \geq 2\} = 1 - P\{N(6) = 0\} - P\{N(6) = 1\} = 1 - e^{-6} - 6e^{-6}$

$$= 1 - 7e^{-6}$$

γ) Η μέση τιμή του αριθμού των γεγονότων που συμβαίνουν μεταξύ 8 και 10 είναι η $E[N(10) - N(8)]$. Γνωρίζουμε, όμως ότι ο αριθμός των γεγονότων που συμβαίνουν σ'ένα διάστημα μήκους t ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt. Επομένως, $E[N(10) - N(8)] = 2\lambda = 6$.

δ) Ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι την άφιξη του πέμπτου γεγονότος είναι $E[S_5] = E[T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5] = 5\frac{1}{3}$, δηλαδή μία ώρα και 40 λεπτά. Άρα η αναμενόμενη ώρα εμφάνισης του πέμπτου γεγονότος μετά τις 2 είναι η 3:40.

Παράδειγμα 9:

Πελάτες φτάνουν σ' ένα σημείο εξυπηρέτησης σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson $\{N_t\}_{t\geq 0}$ με ρυθμό $\lambda = 2$.

α) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

1) $P\{N_1 = 2\}$

2) $P\{N_1 = 2, N_3 = 6\}$

3) $P\{N_1 = 2 | N_3 = 6\}$

4) $P\{N_3 = 6 | N_1 = 2\}$

β) Να υπολογιστούν οι μαθηματικές ελπίδες:

1) EN_2

2) EN_1^2

3) $E(N_1N_2)$

Λύση: Γνωρίζουμε ότι $N_t \approx P(\lambda t) \Rightarrow P\{N_t = k\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$ και $EN_t = V(N_t) = \lambda t$.

α) Από την παραπάνω σχέση, έχουμε ότι:

1) $P\{N_1 = 2\} = e^{-2\cdot 1}\frac{(2\cdot 1)^2}{2!} = 2e^{-2}$

2) $P\{N_1 = 2, N_3 = 6\} = P\{N_1 = 2, N_3 - N_1 = 6 - 2\}$

$$= P\{N_1 = 2\}P\{N_3 - N_1 = 4\}$$

$$= P\{N_1 = 2\}P\{N_2 = 4\}$$

$$= 2e^{-2}e^{-2\cdot 2}\frac{(2\cdot 2)^4}{4!} = \frac{64}{3}e^{-6}$$

3) $P\{N_1 = 2|N_3 = 6\} = \frac{P\{N_1=2,N_3=6\}}{P\{N_3=6\}} = \frac{\frac{64}{3}e^{-6}}{\frac{6^6}{6!}e^{-6}} = 15\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4$

4) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Bayes, έχουμε:

$P\{N_3 = 6|N_1 = 2\} = \frac{P\{N_1 = 2|N_3 = 6\}P\{N_3=6\}}{P\{N_1=2\}} = \frac{15\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4 e^{-6}\frac{6^6}{6!}}{2e^{-2}} = \frac{32}{3}e^{-4}$

β) 1) $EN_2 = 2\cdot 2 = 4$

2) $EN_1^2 = V(N_1) + (EN_1)^2 = 2\cdot 1 + (2\cdot 1)^2 = 6$

3) Έχουμε:

$$E(N_1N_2) = E[N_1(N_2 - N_1 + N_1)] = E[N_1(N_2 - N_1)] + EN_1^2 =$$

$$= EN_1E(N_2 - N_1) + EN_1^2 = (EN_1)^2 + EN_1^2 = 4 + 6 = 10$$

Παράδειγμα 10:

Άνδρες και γυναίκες εισέρχονται σ'ένα πολυκατάστημα σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες ανελίξεις Poisson, την X_t με ρυθμό $\lambda_x = 2$ ανά ώρα και Y_t με ρυθμό $\lambda_y = 4$ ανά ώρα αντίστοιχα. Ξεκινώντας από μία τυχαία χρονική στιγμή, υπολογίστε την πιθανότητα να φθάσουν πρώτα δύο άνδρες πριν φθάσει η πρώτη γυναίκα.

Λύση: Έστω $T_1(X)$ είναι ο χρόνος από το 0 μέχρι την πρώτη εμφάνιση της X_t και $T_2(X)$ ο χρόνος από το $T_1(X)$ μέχρι τη δεύτερη εμφάνιση της X_t. Έστω, επίσης, $T_1(Y)$ ο χρόνος από το 0 μέχρι την πρώτη εμφάνιση της Y_t. Τότε θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα:

$$P\{T_1(X) + T_2(X) < T_1(Y)\} =;$$

Διαπιστώνουμε ότι: $\{T_1(X) + T_2(X) < T_1(Y)\}$ μπορεί να γραφεί ως τομή ενδεχομένων, δηλαδή

$$\{T_1(X) < T_1(Y)\} \cap \{T_2(X) < T_1(Y) - T_1(X) | T_1(X) < T_1(Y)\}$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$P\{T_1(X) + T_2(X) < T_1(Y)\} =$$

$$= P\{T_1(X) < T_1(Y)\} P\{T_2(X) < T_1(Y) - T_1(X) | T_1(X) < T_1(Y)\}$$

και

$$P\{T_1(X) < T_1(Y)\} =$$

$$= \int_0^\infty P\{T_1(X) < T_1(Y) | T_1(Y) = y\} \lambda_y e^{-\lambda_y y} dy$$

$$= \int_0^\infty P\{T_1(X) < Y\} \lambda_y e^{-\lambda y} dy$$

$$= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda_x y}) \lambda_y e^{-\lambda_y y} dy$$

$$= \int_0^\infty \lambda_y e^{-\lambda_y y} dy - \lambda_y \int_0^\infty e^{-(\lambda_x+\lambda_y)y} dy$$

$$= 1 - \frac{\lambda_y}{\lambda_x + \lambda_y} = \frac{\lambda_x}{\lambda_x + \lambda_y}$$

Είναι γνωστό ότι η τυχαία μεταβλητή που είναι ο χρόνος μεταξύ των εμφανίσεων μια διαδικασίας Poisson ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο την παράμετρο της διαδικασίας Poisson. Επομένως, η τυχαία μεταβλητή $T_2(X)$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ_x.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ

3.1. Μαρκοβιανές Αλυσίδες σε Διακριτό Χρόνο

Ορισμός 3.1.1: Η στοχαστική ανέλιξη $\{X_n, n = 0,1,\dots\}$ με χώρο καταστάσεων I, καλείται Μαρκοβιανή Αλυσίδα σε **διακριτό χρόνο** (discrete-time Markov chain), αν για κάθε $n = 0,1,2,\dots$ και για όλες τις δυνατές τιμές για κάθε $i_0, i_1, \dots, i_n \in I$ ισχύει:

$$P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\} =$$

$$= P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i\} = P_{ij}$$

Ισοδύναμα, η X_n είναι μαρκοβιανή αλυσίδα αν και μόνο αν δεδομένης της τιμής της τυχαίας μεταβλητής X_n, η τυχαία μεταβλητή X_{n+1} είναι στοχαστικά ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$. Έτσι, δοθέντος κάθε φορά του παρόντος (δηλαδή της τιμής της X_n), η μελλοντική εξέλιξη $\left(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots\right)$ της στοχαστικής διαδικασίας είναι στοχαστικά ανεξάρτητη από την παρελθούσα ιστορία της $\left(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\right)$.

3.2 Πιθανότητες μετάβασης καταστάσεων – Πίνακας μετάβασης καταστάσεων

Η δεσμευμένη πιθανότητα $P\left(X_{n+1} = j \middle| X_n = i\right)$ λέγεται **πιθανότητα μετάβασης πρώτης τάξης** από την κατάσταση i στην κατάσταση j στο $(n+1)$ βήμα και συμβολίζεται με $p_{ij}(n, n+1)$.

Ο συμβολισμός αυτός δηλώνει ότι γενικά οι πιθανότητες μετάβασης είναι συναρτήσεις, όχι μόνο των καταστάσεων i, j, αλλά και της χρονικής στιγμής κατά την οποία γίνεται η μετάβαση. Όταν οι πιθανότητες αυτές είναι στάσιμες, δηλαδή ανεξάρτητες του βήματος , τότε έχουμε τον συμβολισμό:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P\left(X_{n+1} = j \middle| X_n = i\right) \\ &= P\left(X_i = j \middle| X_0 = i\right) \end{aligned}$$

και η X_n λέγεται **χρονικά ομογενής.**

Επίσης, ως χώρο καταστάσεων S θεωρείται συνήθως το σύνολο των θετικών ακέραιων αριθμών ή ένα πεπερασμένο σύνολό του, οπότε και η μαρκοβιανή αλυσίδα θα λέγεται πεπερασμένη.

Οι πιθανότητες μετάβασης γράφονται συνοπτικά με την μορφή ενός πίνακα.

$$P = \left(p_{ij}\right) = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός καλείται **πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης** (πρώτης τάξης).

Επειδή η i-γραμμή του P είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $\left(p_{ij}, j \in S\right)$ της τυχαίας μεταβλητής X_{n+1} δοθέντος ότι $X_n = i$, ο P είναι τετραγωνικός πίνακας μη αρνητικών στοιχείων , όπου το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του είναι ίσο με την μονάδα. Τέτοιοι πίνακες αναφέρονται ως στοχαστικοί πίνακες.

Μια μαρκοβιανή αλυσίδα είναι πλήρως ορισμένη όταν δίνεται για αυτή ο πίνακας P και η αρχική κατανομή, δηλαδή η συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_i^0 = P\left(X_0 = i\right), \quad \left(i \in S\right)$$

της αρχικής τυχαίας μεταβλητής X_0. Πράγματι, τότε από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας σε συνδυασμό με την μαρκοβιανή ιδιότητα για κάθε $n \in N$ και $i_0, i_1, ..., i_{n-1} \in S$ έχουμε ότι :

$$\begin{aligned}
&P\left(X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n\right) \\
&= P\left(X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n\right) P\left(X_n = i_n \middle| X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_{n-1} = i_{n-1}\right) \\
&= P\left(X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_{n-1} = i_{n-1}\right) p_{i_{n-1}-i_n}
\end{aligned}$$

Έτσι, όταν ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης και η αρχική κατάσταση είναι γνωστά, τότε προσδιορίζεται η πιθανότητα οποιασδήποτε πεπερασμένης πραγματοποίησης $\left(i_0, i_1, ..., i_{n-1}, i_n\right)$ και επομένως, η χρονική ανέλιξη της μαρκοβιανής αλυσίδας είναι από πιθανοθεωρητικής άποψης γνωστή.

3.3 Πιθανότητες μετάβασης καταστάσεων n τάξης

Ένα από τα πλεονεκτήματα που προσφέρουν οι αλυσίδες Markov είναι το γεγονός ότι οι πιθανότητες που μας ενδιαφέρουν υπολογίζονται με πράξεις πινάκων. Αν λοιπόν:

$P = \left(p_{ij}\right)$ είναι ο πίνακας μετάβασης μιας αλυσίδας Markov, $\left\{X_n : n \geq 0\right\}$, υποθέτουμε ότι οι αρχικές πιθανότητες είναι $P = \left(X_0 - j\right) = a_j$.

Οι δυνάμεις του *P* ορίζονται ως εξής:

$$p^2 = p \cdot p = \left(p_{ij}^{(2)}\right) = \left(\sum_k p_{ik} p_{kj}\right)$$

και γενικά

$$p^{n+1} = p^n \cdot p = p \cdot p^n = \left(p_{ij}^{(2)}\right) = \left(\sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj}\right) = \left(\sum_k p_{ik} p_{kj}^{(n)}\right)$$

Το p^0 το θεωρούμε ως τον ταυτοτικό πίνακα.

Οι πιθανότητες μετάβασης λοιπόν markov σε n βήματα θα είναι:

$$P(X_n = k|X_0 = i) = P(X_{n+m} = k|X_m = i)$$

Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι για κάθε $n \geq 0$ και για κάθε στοιχείο i, j στον χώρο καταστάσεων S ισχύει:

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j|X_0 = i)$$

Επιπλέον, η ταυτότητα

$$p^{n+m} = p^n p^m \Leftrightarrow p_{ij}^{(n+m)} = \sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

καλείται ταυτότητα Chapman – Kolmogorov και εκφράζει το γεγονός ότι η πιθανότητα μετάβασης από το i στο j σε $n+m$ βήματα, δύναται να υπολογιστεί από τις πιθανότητες μετάβασης από την i κατάσταση σε οποιαδήποτε ενδιάμεση κατάσταση k σε n βήματα και την πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση k στην κατάσταση j σε m βήματα.

Τέλος, οι πιθανότητες $P(X_n = j)$ υπολογίζονται από τον τύπο:

$$a_j^{(n)} := P(X_n = j) = \sum_i a_i\, p_{ij}^{(n)}$$

Ορισμός 3.3.1: Η κατάσταση j λέγεται **επαναληπτική** αν $f_{jj} = 1$ και **παροδική** αν $f_{jj} < 1$. Επιπλέον, η επαναληπτική κατάσταση j λέγεται **θετικά επαναληπτική** αν $v_{jj} < \infty$ και **μηδενικά επαναληπτική** αν $v_{jj} = \infty$.

Θεμελιώδους σημασίας είναι το γεγονός ότι με κάθε επίσκεψη στην κατάσταση j η μαρκοβιανή αλυσίδα μπορεί να θεωρηθεί ότι ξεκινά πάλι από την αρχή, με αρχική κατάσταση την j και ανεξάρτητα από την παρελθούσα ιστορίας της. Αυτό είναι αποτέλεσμα της μαρκοβιανής ιδιότητας σε συνδυασμό με την χρονική ομογένεια της $\{X_n\}$, δηλαδή προκύπτει από το γεγονός ότι με κάθε επίσκεψη στην j η μελλοντική εξέλιξη της μαρκοβιανής αλυσίδας καθορίζεται από τον ίδιο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P, και ανεξάρτητα από την συγκεκριμένη παρελθούσα ιστορία της.

Από την παρατήρηση αυτή, γίνεται φανερό ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}$ είναι μια **αναγεννητική διαδικασία** με αναγεννητικές στιγμές τις στιγμές των διαδοχικών επισκέψεων στην κατάσταση j. Έτσι, οι ενδιάμεσοι χρόνοι

$$T_{ij}, T_{jj}^{(1)}, T_{jj}^{(2)}, \ldots.$$

μεταξύ διαδοχικών επισκέψεων στην κατάσταση j, όταν $X_0 = i$, είναι ανεξάρτητες και, εκτός ίσως της T_{ij}, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Ισοδύναμα, όταν $X_0 = i$, οι στιγμές διαδοχικών επισκέψεων στην j σχηματίζουν μια (διακριτού χρόνου) γενική ανανεωτική διαδικασία (απλή αν $i = j$), όπου η κατανομή Α του χρόνου πρώτης ανανέωσης ορίζεται από την $\{f_{ij}^{(n)}\}$, ενώ η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων ανανέωσης ορίζεται από την $\{f_{jj}^{(n)}\}$. Αυτή αναφέρεται ως η εμφυτευμένη j-ανανεωτική διαδικασία στην $\{X_n\}$. Επομένως, τα αποτελέσματα της ανανεωτικής θεωρίας, την οποία θα δούμε και πιο αναλυτικά σε επόμενο κεφάλαιο, έχουν άμεση εφαρμογή στη θεωρία των Μαρκοβιανών Αλυσίδων.

Ορισμός 3.3.2: Μια κατάσταση i ονομάζεται **εργοδική** αν είναι απεριοδική και θετικά επαναλαμβανόμενη. Με αλλά λόγια, μια κατάσταση i είναι εργοδική αν είναι επαναληπτική, έχει περίοδο ίση με 1 και έχει πεπερασμένο μέσο χρόνο επανάληψης. Αν όλες οι καταστάσεις σε μια αμείωτη Μαρκοβιανή Αλυσίδα είναι εργοδικές τότε λέμε ότι η αλυσίδα είναι εργοδική.

Έχει αποδειχτεί ότι μια πεπερασμένη αμείωτη Μαρκοβιανή Αλυσίδα είναι εργοδική αν έχει μία απεριοδική κατάσταση. Ένα μαρκοβιανό μοντέλο έχει την εργοδική ιδιότητα αν υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός N τέτοιος ώστε κάθε κατάσταση μπορεί να φτάσει σε κάθε άλλη κατάσταση σε ακριβώς N βήματα. Σε περίπτωση που έχουμε ένα πλήρως συνδεδεμένο πίνακα μετάβασης όπου όλες οι μεταβάσεις έχουν μη-μηδενική πιθανότητα, αυτή η προϋπόθεση ικανοποιείται για N=1. Ένα μοντέλο με παραπάνω από μία καταστάσεις και με μόνο μία πιθανή μετάβαση σε κάθε κατάσταση δε μπορεί να είναι εργοδικό.

Μια εργοδική αλυσίδα Markov έχει μοναδική στάσιμη κατανομή $\Pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$.

3.4. Παραδείγματα

Παράδειγμα 1:

Έστω μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $K = \{0,1\}$ και πίνακα μετάβασης:

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}, p, q \in (0,1).$$

Να υπολογίσετε:

i) την πιθανότητα η αλυσίδα, ξεκινώντας από την κατάσταση i, να επισκεφθεί την κατάσταση j, για πρώτη φορά, μετά από n χρονικές στιγμές,

ii) την πιθανότητα η αλυσίδα, ξεκινώντας από την κατάσταση i, να επισκεφθεί την κατάσταση j άπειρες φορές.

Λύση: Θα πρέπει να υπολογίσουμε τις πιθανότητες:

$$f_{00}^{(n)}, f_{01}^{(n)}, f_{10}^{(n)}, f_{11}^{(n)} \ \text{για}\ i, j \in \{0,1\}.$$

- $f_{00}^{(n)}, n = 1,2,\dots \kappa\alpha\iota\ i,j = 0$

Για $n = 1$: $f_{00}^{(1)} = P_0(\xi_1 = 0) = P(\xi_1 = 0|\xi_0 = 0) = p_{00} = 1 - p.$

Για $n = 2$: $f_{00}^{(2)} = P_0(\xi_2 = 0, \xi_1 = 1) = P(\xi_2 = 0, \xi_1 = 1|\xi_0 = 0)$

$$= P(\xi_2 = 0|\xi_1 = 1, \xi_0 = 0)P(\xi_1 = 1|\xi_0 = 0)$$

$$= P(\xi_2 = 0|\xi_1 = 1)P(\xi_1 = 1|\xi_0 = 0)$$

$$= p_{10}p_{01} = qp.$$

Για $n = 3$: $f_{00}^{(3)} = P_0(\xi_3 = 0, \xi_2 = 1, \xi_1 = 1) = P(\xi_3 = 0, \xi_2 = 1, \xi_1 = 1|\xi_0 = 0)$

$$= P(\xi_3 = 0|\xi_2 = 1, \xi_1 = 1, \xi_0 = 0)P(\xi_2 = 1|\xi_1 = 1, \xi_0 = 0) \cdot$$

$$\cdot P(\xi_1 = 1|\xi_0 = 0)$$

$$= P(\xi_3 = 0|\xi_2 = 1)P(\xi_2 = 1|\xi_1 = 1)P(\xi_1 = 1|\xi_0 = 0)$$

$$= p_{10}p_{11}p_{01} = q(1 - q)p.$$

Για $n = 4$: $f_{00}^{(4)} = P_0(\xi_4 = 0, \xi_3 = 1, \xi_2 = 1, \xi_1 = 1)$

$$= P(\xi_4 = 0, \xi_3 = 1, \xi_2 = 1, \xi_1 = 1|\xi_0 = 0)$$

$$= P(\xi_4 = 0|\xi_3 = 1, \xi_2 = 1, \xi_1 = 1, \xi_0 = 0) \cdot$$

$$\cdot P(\xi_3 = 1|\xi_2 = 1, \xi_1 = 1, \xi_0 = 0)$$

$$\cdot P(\xi_2 = 1|\xi_1 = 1, \xi_0 = 0)P(\xi_1 = 1|\xi_0 = 0)$$

$$= P(\xi_4 = 0|\xi_3 = 1)P(\xi_3 = 1|\xi_2 = 1)P(\xi_2 = 1|\xi_1 = 1) \cdot$$

$$\cdot P(\xi_1 = 1|\xi_0 = 0)$$

$$= p_{10}p_{11}p_{11}p_{01} = q(1 - q)(1 - q)p$$

$$= qp(1 - q)^2.$$

Οπότε, $f_{00}^{(1)} = 1 - p$

$f_{00}^{(2)} = qp$

$f_{00}^{(3)} = qp(1-q)$

$f_{00}^{(4)} = qp(1-q)^2$

Άρα, επαγωγικά έχουμε: $f_{00}^{(n)} = \begin{cases} 1-p, & n = 1 \\ qp(1-q)^{n-2}, & n \geq 2 \end{cases}$

- $f_{11}^{(n)}, n = 1,2,\dots \kappa\alpha\iota\ i,j = 1$

Για $n = 1$: $f_{11}^{(1)} = P_1(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = 1|\xi_0 = 1) = p_{11} = 1 - q.$

Για $n = 2$: $f_{11}^{(2)} = P_1(\xi_2 = 1, \xi_1 = 0) = P(\xi_2 = 1, \xi_1 = 0|\xi_0 = 1)$

$= P(\xi_2 = 1|\xi_1 = 0, \xi_0 = 1)P(\xi_1 = 0|\xi_0 = 1)$

$= P(\xi_2 = 1|\xi_1 = 0)P(\xi_1 = 0|\xi_0 = 1)$

$= p_{01}p_{10} = pq.$

Για $n = 3$: $f_{11}^{(3)} = P_1(\xi_3 = 1, \xi_2 = 0, \xi_1 = 0) = P(\xi_3 = 1, \xi_2 = 0, \xi_1 = 0|\xi_0 = 1)$

$= P(\xi_3 = 1|\xi_2 = 0, \xi_1 = 0, \xi_0 = 1)P(\xi_2 = 0|\xi_1 = 0, \xi_0 = 1) \cdot$

$\cdot P(\xi_1 = 0|\xi_0 = 1)$

$= P(\xi_3 = 1|\xi_2 = 0)P(\xi_2 = 0|\xi_1 = 0)P(\xi_1 = 0|\xi_0 = 1)$

$= p_{01}p_{00}p_{10} = p(1-p)q.$

Για $n = 4$: $f_{11}^{(4)} = P_1(\xi_4 = 1, \xi_3 = 0, \xi_2 = 0, \xi_1 = 0)$

$= P(\xi_4 = 1, \xi_3 = 0, \xi_2 = 0, \xi_1 = 0|\xi_0 = 1)$

$= P(\xi_4 = 1|\xi_3 = 0, \xi_2 = 0, \xi_1 = 0, \xi_0 = 1) \cdot$

$$\cdot P(\xi_3 = 0|\xi_2 = 0, \xi_1 = 0, \xi_0 = 1)$$

$$\cdot P(\xi_2 = 0|\xi_1 = 0, \xi_0 = 1)P(\xi_1 = 0|\xi_0 = 1)$$

$$= P(\xi_4 = 1|\xi_3 = 0)P(\xi_3 = 0|\xi_2 = 0)P(\xi_2 = 0|\xi_1 = 0) \cdot$$

$$\cdot P(\xi_1 = 0|\xi_0 = 1)$$

$$= p_{01}p_{00}p_{00}p_{10} = p(1-p)(1-p)q$$

$$= pq(1-p)^2.$$

Οπότε, $f_{11}^{(1)} = 1 - q$

$$f_{11}^{(2)} = pq$$

$$f_{11}^{(3)} = pq(1-p)$$

$$f_{11}^{(4)} = pq(1-p)^2$$

Άρα, επαγωγικά έχουμε: $f_{11}^{(n)} = \begin{cases} 1-q, & n = 1 \\ pq(1-p)^{n-2}, & n \geq 2 \end{cases}$

- $f_{01}^{(n)}, n = 1,2, \dots \kappa\alpha\iota\ i = 0, j = 1$

Για $n = 1$: $f_{01}^{(1)} = P_0(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = 1|\xi_0 = 0) = p_{01} = p.$

Για $n = 2$: $f_{01}^{(2)} = P_0(\xi_2 = 1, \xi_1 = 0) = P(\xi_2 = 1, \xi_1 = 0|\xi_0 = 0)$

$$= P(\xi_2 = 1|\xi_1 = 0, \xi_0 = 1)P(\xi_1 = 0|\xi_0 = 0)$$

$$= P(\xi_2 = 1|\xi_1 = 0)P(\xi_1 = 0|\xi_0 = 0)$$

$$= p_{01}p_{00} = p(1-p).$$

Για $n = 3$: $f_{01}^{(3)} = P_0(\xi_3 = 1, \xi_2 = 0, \xi_1 = 0) = P(\xi_3 = 1, \xi_2 = 0, \xi_1 = 0|\xi_0 = 0)$

$$= P(\xi_3 = 1|\xi_2 = 0, \xi_1 = 0, \xi_0 = 0)P(\xi_2 = 0|\xi_1 = 0, \xi_0 = 0) \cdot$$

$$\cdot P(\xi_1 = 0 | \xi_0 = 0)$$

$$= P(\xi_3 = 1 | \xi_2 = 0) P(\xi_2 = 0 | \xi_1 = 0) P(\xi_1 = 0 | \xi_0 = 0)$$

$$= p_{01} p_{00} p_{00} = p(1-p)^2.$$

Για $n = 4$: $f_{01}^{(4)} = P_0(\xi_4 = 1, \xi_3 = 0, \xi_2 = 0, \xi_1 = 0)$

$$= P(\xi_4 = 1, \xi_3 = 0, \xi_2 = 0, \xi_1 = 0 | \xi_0 = 0)$$

$$= P(\xi_4 = 1 | \xi_3 = 0, \xi_2 = 0, \xi_1 = 0, \xi_0 = 0) \cdot$$

$$\cdot P(\xi_3 = 0 | \xi_2 = 0, \xi_1 = 0, \xi_0 = 0)$$

$$\cdot P(\xi_2 = 0 | \xi_1 = 0, \xi_0 = 1) P(\xi_1 = 0 | \xi_0 = 0)$$

$$= P(\xi_4 = 1 | \xi_3 = 0) P(\xi_3 = 0 | \xi_2 = 0) P(\xi_2 = 0 | \xi_1 = 0) \cdot$$

$$\cdot P(\xi_1 = 0 | \xi_0 = 0)$$

$$= p_{01} p_{00} p_{00} p_{00} = p(1-p)(1-p)(1-p)$$

$$= p(1-p)^3.$$

Οπότε, $f_{01}^{(1)} = p$

$$f_{01}^{(2)} = p(1-p)$$

$$f_{01}^{(3)} = p(1-p)^2$$

$$f_{01}^{(4)} = p(1-p)^3$$

Άρα, επαγωγικά έχουμε: $f_{01}^{(n)} = p(1-p)^{n-1}, \quad n = 1,2,\ldots$

- $f_{10}^{(n)}, \;\; n = 1,2,\ldots \, \kappa\alpha\iota \; i = 1, j = 0$

Με τον ίδιο τρόπο, θα έχουμε: $f_{10}^{(n)} = q(1-q)^{n-1}, \quad n = 1,2,\ldots$

ii) Πρέπει να υπολογίσουμε τα $f_{ij} = \sum_{n=1,2,..} f_{ij}^{(n)}$, δηλαδή τα $f_{00}, f_{01}, f_{10}, f_{11}$.

Έχουμε:

- $f_{00} = f_{00}^{(1)} + f_{00}^{(2)} + f_{00}^{(3)} + f_{00}^{(4)} + \cdots =$

$$= (1-p) + pq\sum_{n=2}^{\infty}(1-q)^{n-2}$$

$$= (1-p) + pq\frac{1}{1-(1-q)}$$

$$= 1 - p + \frac{pq}{q} = 1$$

Οπότε, η κατάσταση $i = 0$ είναι επαναληπτική.

- $f_{11} = f_{11}^{(1)} + f_{11}^{(2)} + f_{11}^{(3)} + \cdots =$

$$= (1-q) + pq\sum_{n=2}^{\infty}(1-p)^{n-2}$$

$$= 1 - q + pq\frac{1}{1-(1-p)}$$

$$= 1 - q + \frac{pq}{p} = 1$$

Οπότε, η κατάσταση $i = 1$ είναι επαναληπτική.

- $f_{01} = f_{01}^{(1)} + f_{01}^{(2)} + \cdots =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1}$$

$$= p\frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

και

- $f_{10} = f_{10}^{(1)} + f_{10}^{(2)} + \cdots =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} q(1-q)^{n-1}$$

$$= q\frac{1}{1-(1-q)} = 1$$

Οπότε και οι δύο καταστάσεις είναι επαναληπτικές.

Παράδειγμα 2:

Έστω ότι $X_i = 1$ ή 0 ανάλογα με το αν την i-μέρα βρέχει ή όχι. Για απλότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι πρόκειται για Μαρκοβιανή αλυσίδα με:

$$\begin{aligned}
P\left(X_{n+1}=1 \middle| X_n=0\right) &= p_{01} = 0.2 \\
P\left(X_{n+1}=0 \middle| X_n=0\right) &= p_{00} = 0.8 \\
P\left(X_{n+1}=1 \middle| X_n=1\right) &= p_{11} = 0.6 \\
P\left(X_{n+1}=0 \middle| X_n=1\right) &= p_{10} = 0.4
\end{aligned}$$

Και άρα

$$p = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3:

Σε μια ασφαλιστική εταιρία (αυτοκινήτων) οι ασφαλιζόμενοι κατηγοριοποιούνται σε 4 καταστάσεις οι οποίες καθορίζουν και το ύψος των ασφαλίστρων.

Κάθε χρόνο ο ασφαλιζόμενος αλλάζει κατάσταση σύμφωνα με το πλήθος των ατυχημάτων που έκανε τον προηγούμενο χρόνο ως εξής:

		Μετάβαση από την κατάσταση i στην j, αν ο ασφαλιζόμενος έχει x ατυχήματα το προηγούμενο έτος.			
Κατάσταση	Ασφάλιστρο	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x \geq 3$
$i=1$	200	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$i=2$	250	$j=1$	$j=3$	$j=4$	$j=4$
$i=3$	400	$j=2$	$j=4$	$j=4$	$j=4$
$i=4$	600	$j=3$	$j=4$	$j=4$	$j=4$

Αν π.χ. ένας ασφαλιζόμενος βρίσκεται στην κατάσταση $i=1$ και μέσα στο έτος ζητήσει αποζημίωση για 2 ατυχήματα τότε το επόμενο έτος θα βρεθεί στην κατάσταση $j=3$.

Λύση: Αν υποθέσουμε ότι το πλήθος των απαιτήσεων ζημιάς από τον ασφαλισμένο στην διάρκεια ενός έτους ακολουθεί την κατανομή Poisson με ένταση λ τότε η πιθανότητα να απαιτήσει *k* αποζημιώσεις θα είναι:

$$a^k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad \mathrm{k} = 0{,}1$$

Αν η τ.μ. X_n εκφράζει την κατάσταση του ασφαλισμένου το *n* έτος τότε η

$\{X_n, n=1,2,...\}$ είναι Μαρκοβιανή Αλυσίδα με πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης:

$$p=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 1-a_0-a_1-a_2 \\ a_0 & 0 & a_1 & 1-a_0-a_1 \\ 0 & a_0 & 0 & 1-a_0 \\ 0 & 0 & a_0 & 1-a_0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 4:

Ένας εμπορικός αντιπρόσωπος Α έχει πελάτες σε τρείς πόλεις 1,2,3. Αν μια ημέρα ο Α βρίσκεται στην 1 πόλη τότε την επόμενη είναι εξίσου πιθανό να παραμείνει στην 1 ή να φύγει και τότε επιλέγει τυχαία μια από τις πόλεις 2, 3. Αν όμως μια ημέρα ο Α βρίσκεται στην πόλη 2 ή 3 , τότε την επόμενη φεύγει και πηγαίνει στην πόλη 1 με διπλάσια πιθανότητα από ότι στην άλλη πόλη. Η πορεία του Α μεταξύ των πόλεων 1,2,3 μέσα στον χρόνο μπορεί να περιγραφεί με την βοήθεια μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας.

Λύση: Πράγματι έστω X_0 η πόλη στην οποία βρίσκεται ο Α αρχικά (την ημέρα 0) και X_n η πόλη στην οποία βρίσκεται ο Α την n-οστή μέρα, όπου $n=0,1,2,...$

Η στοχαστική ανέλιξη $X_n, n=0,1,...$ είναι διακριτού χρόνου με διακριτό χώρο καταστάσεων $S=\{1,2,3\}$. Επιπλέον, η X_n έχει την μαρκοβιανή ιδιότητα, αφού η πόλη στην οποία θα βρεθεί ο Α την επόμενη μέρα εξαρτάται στοχαστικά μόνο από την πόλη στην οποία ο Α βρίσκεται μέχρι σήμερα και όχι από την συγκεκριμένη παρελθούσα πορεία του. Άρα, η X_n είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα και μάλιστα χρονικά ομογενής, αφού οι πιθανότητες μετάβασης δεν εξαρτώνται από την συγκεκριμένη ημέρα αλλά μόνο από τις συγκεκριμένες πόλεις. Από τα δεδομένα του παραδείγματος, ο αντίστοιχος πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι ο παρακάτω:

$$p = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Η πιθανότητα πραγματοποίησης της συγκεκριμένης πορείας (1,2,1,1,3,2,3) κατά τις πρώτες 7 ημέρες είναι:

$$\begin{aligned} & P\left(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 3, X_5 = 2, X_6 = 3\right) \\ & = p_1^{(0)} p_{12} p_{21} p_{11} p_{13} p_{32} p_{23} \\ & = p_1^{(0)} \frac{1}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{3} \\ & = \frac{1}{432} p_1^{(0)} \end{aligned}$$

Αν αρχικά ο A βρίσκεται στην πόλη 1 αυτή η πιθανότητα είναι $\frac{1}{432}$, αφού τότε $p_1^{(0)} = 1$.

Ενώ, αν αρχικά ο A βρίσκεται στην πόλη 2 ή 3 αυτή η πιθανότητα είναι 0, αφού $p_1^{(0)} = 0$.

Επίσης, αν αρχικά ο A είναι εξίσου πιθανό να βρίσκεται σε οποιαδήποτε πόλη, δηλαδή αν αρχικά η κατανομή του είναι $p_i^{(0)} = \frac{1}{3}$, τότε αυτή η πιθανότητα είναι $\frac{1}{1296}$.

Οι πιθανότητες μετάβασης δεύτερης τάξης για το συγκεκριμένο πρόβλημα δίνονται από τον πίνακα:

$$p^{(2)} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/12 & 5/24 & 5/24 \\ 5/9 & 5/18 & 3/18 \\ 5/9 & 3/18 & 5/18 \end{bmatrix}$$

Έτσι, η πιθανότητα επανόδου του A στην πόλη από όπου ξεκίνησε σε δύο ακριβώς ημέρες είναι $7/12, 5/18, 5/18$ για τις πόλεις 1,2,3 αντίστοιχα. Επίσης, αν αρχικά ο Α είναι εξίσου πιθανό να βρίσκεται σε οποιαδήποτε πόλη , τότε οι πιθανότητες με τις οποίες ο Α βρίσκεται στις διάφορες πόλεις την δεύτερη ημέρα δίνονται από το διάνυσμα πιθανοτήτων δεύτερης τάξης:

$$p^{(2)} = p^{(0)} p^{(2)} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7/12 & 5/24 & 5/24 \\ 5/9 & 5/18 & 3/18 \\ 5/9 & 3/18 & 5/18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{122}{216}, & \frac{47}{216}, & \frac{47}{216} \end{bmatrix}$$

Η κατανομή πρώτης επανόδου στην κατάσταση 1 είναι:

$$f_{11}^{(1)} = p_{11} = \frac{1}{2}$$

$$f_{11}^{(2)} = p_{12} p_{21} + p_{13} p_{31} = \frac{1}{4}\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$f_{11}^{(3)} = p_{12} p_{23} p_{31} + p_{13} p_{32} p_{21} = \frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$f_{11}^{(4)} = p_{12} p_{23} p_{32} p_{21} + p_{13} p_{32} p_{23} p_{31} = \frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

Και επαγωγικά

$$f_{11}^{(n)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \qquad n \geq 2$$

Η αντίστοιχη πιθανογεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$F_{11}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} s^n = \frac{1}{2}s + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} s^n = \frac{1}{2}s + \frac{1}{3}s^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{3}\right)^k = \frac{s}{2} + \frac{s^2}{3}\frac{1}{1-\frac{s}{3}}$$

$$= \frac{5(3-s)+2s^2}{2(3-s)} = \frac{s(3+s)}{2(3-s)}, \qquad (|s|<3)$$

Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$P_{11}(s) = \frac{1}{1 - \frac{s(3+s)}{2(3-s)}} = \frac{2(3-s)}{(6-5s-s^2)} = \frac{2(s-3)}{(s-1)(s+6)}$$

σχέση από την οποία προκύπτουν οι πιθανότητες επανόδου στην 1 $\left\{ p_{11}^{(n)} : n \in N \right\}$, αναπτύσσοντας την $P_{11}(s)$σε δυναμοσειρά ή εναλλακτικά από την σχέση

$$p_{11}^{(n)} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{ds^n} P_{11}(s) \Big|_{s=0} \qquad (n \in N)$$

Επειδή $f_{11} = F_{11}(1) = \frac{4}{4} = 1$, η κατάσταση 1 είναι επαναληπτική. Επίσης,

$$\begin{aligned} F'_{11}(s) &= \frac{1}{2} \frac{(3s+s^2)'(3-s) - (3s+s^2)(3-s)'}{(3-s)^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(3+2s)(3-s) + (3s+s^2)}{(3-s)^2} \end{aligned}$$

Και άρα

$$F'_{11}(1) = \frac{1}{2} \frac{5 \cdot 2 + 4}{4} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4} < \infty$$

Έτσι, ο αντίστοιχος μέσος χρόνος επανόδου είναι:

$$v_1 = F'_{11}(1) = \frac{7}{4} < \infty$$

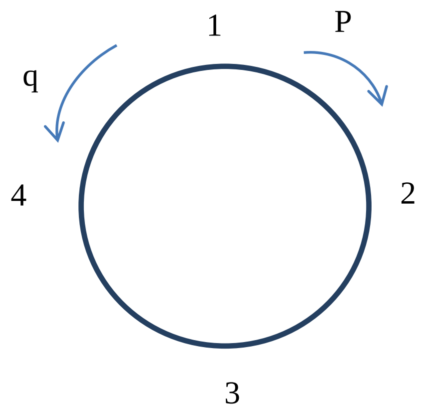
και επομένως η 1 είναι θετικά επαναληπτική.

Η συγκεκριμένη απλή μορφή της $\left\{ f_{11}^{(n)} \right\}$ οφείλεται στην συμμετρία του αντίστοιχου διαγράμματος πιθανοτήτων μετάβασης για την κατάσταση 1 που, όμως, δεν ισχύει για τις καταστάσεις 2 και 3.

Παράδειγμα 5:

Ένα σωματίδιο ύλης κινείται μεταξύ των τεσσάρων σημείων του παρακάτω κύκλου, μετατοπιζόμενο σε κάθε βήμα κατά μία θέση και ακολουθώντας την ορθή φορά με πιθανότητα p ή την αντίστροφη φορά με πιθανότητα q.

$p, q > 0,\ p + q = 1$



Λύση: Συμβολίζοντας με X_0 την αρχική θέση του σωματιδίου και με X_n την θέση του στο n-οστό βήμα, είναι φανερό ότι η ανέλιξη $X_n, n = 0,1,...$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S = \{1,2,3,4\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \end{bmatrix}$$

Εδώ, οι πιθανότητες μετάβασης $2^{ης}$ τάξης δίνονται από τον πίνακα:

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & p \\ p & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & p \\ p & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2pq & 0 & p^2+q^2 & 0 \\ 0 & 2pq & 0 & p^2+q^2 \\ p^2+q^2 & 0 & 2pq & 0 \\ 0 & p^2+q^2 & 0 & 2pq \end{bmatrix}$$

Δεδομένης της αρχικής κατανομής $P^{(0)}$, ο προσδιορισμός της αντίστοιχης μεταβατικής κατανομής $\left\{P^{(n)}\right\}$ ανάγεται στον υπολογισμό των διαδοχικών ακέραιων δυνάμεων του πίνακα P. Προκειμένου για πεπερασμένες μαρκοβιανές αλυσίδες υπάρχουν αλγεβρικές μέθοδοι για τους υπολογισμούς αυτούς που βασίζονται σε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του πίνακα P, αλλά η αντίστοιχη εργασία είναι επίπονη ακόμα και για σχετικά μικρό πλήθος καταστάσεων. Λόγω και αυτού του γεγονότος, αλλά κυρίως επειδή οι κατηγορίες μαρκοβιανών αλυσίδων, που εμφανίζονται στις εφαρμογές, παύουν ουσιαστικά να επιδεικνύουν μεταβατική στοχαστική συμπεριφορά μετά από παρέλευση σχετικά μικρού χρόνου (δηλαδή επιδεικνύουν οριακή στοχαστική συμπεριφορά σχετικά σύντομα) το ενδιαφέρον επικεντρώνεται ακριβώς στον προσδιορισμό της αντίστοιχης οριακής κατανομής όταν $n \to \infty$.

Λόγω της συμμετρίας του πίνακα P για όλες τις καταστάσεις θα ισχύουν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα με το αμέσως προηγούμενο παράδειγμα. Επομένως, αρκεί να εξετάσουμε μόνο μια από αυτές, έστω την 1.

$$f_{11}^{(2n+1)} = 0 \qquad \left(n \in N_0\right)$$
$$f_{11}^{(2)} = p_{12}p_{21} + p_{14}p_{41} = pq + qp = 2pq$$
$$f_{11}^{(4)} = p_{12}p_{23}p_{34}p_{41} + p_{14}p_{43}p_{32}p_{21} + p_{12}p_{23}p_{32}p_{21} + p_{14}p_{43}p_{34}p_{41} = p^4 + q^4 + 2p^2q^2$$

Αλλά, γενικά, η $f_{11}^{(2n)}$, $\left(n \in N\right)$ είναι δύσκολο να δοθεί σε αναλυτική μορφή. Προκύπτει, λοιπόν, ότι η 1 είναι θετικά επαναληπτική.

Παράδειγμα 6:

Σε ένα συγκεκριμένο χιλιόμετρο μιας εθνικής οδού μια μέρα κατά την περίοδο του χειμώνα μπορεί να χαρακτηριστεί σαν χιονισμένη ή σαν καθαρή. Κάθε αυτοκίνητο που θα προσπαθήσει να περάσει τον δρόμο αυτό μια χιονισμένη μέρα θα πρέπει οπωσδήποτε να έχει αλυσίδες. Αν μια χιονισμένη μέρα διαδέχεται μια καθαρή με πιθανότητα 0,335 και μια καθαρή διαδέχεται μια χιονισμένη με πιθανότητα 0,25 να βρεθεί:

[1] Η πιθανότητα ένα αυτοκίνητο να χρειαστεί αλυσίδες στις 28/12, αν τα Χριστούγεννα ήταν χιονισμένα.

[2] Ποιο είναι το μέσο μήκος μιας χιονισμένης περιόδου και ποιο το μέσο μήκος μιας καθαρής περιόδου.

Λύση: Ορίζουμε σαν κατάσταση 0 όταν ο δρόμος είναι καθαρός και κατάσταση 1 όταν ο δρόμος είναι χιονισμένος. Τότε, ο πίνακας μετάβασης της μαρκοβιανής αλυσίδας είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 0,655 & 0,335 \\ 0,250 & 0,750 \end{bmatrix}$$

Έχουμε σαν δεδομένο ότι τα Χριστούγεννα ήταν χιονισμένα και θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα να είναι και η 28/12 χιονισμένη, δηλαδή $25 \to 26 \to 27 \to 28$, δηλαδή 3 βήματα μετά στην μαρκοβιανή αλυσίδα. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $p_{11}^{(3)}$.

Είναι:

$$p_{11}^{(3)} = \sum_{j=0}^{1} p_{1j}^{(1)} p_{j1}^{(2)} = p_{10} p_{01}^{(2)} + p_{11} p_{11}^{(2)} = 0,603$$

Γιατί

$$p_{01}^{(2)} = \sum_{j=0}^{1} p_{0j} p_{j1} = p_{00} p_{01} + p_{01} p_{11} = 0,474$$

$$p_{11}^{(2)} = \sum_{j=0}^{1} p_{1j} p_{j1} = p_{10} p_{01} + p_{11} p_{11} = 0,646$$

Με w θα συμβολίσουμε την τυχαία μεταβλητή που δηλώνει τον αριθμό των συνεχόμενων χιονισμένων ημερών. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} &P(w=n)=P\left(X_1=X_2=\ldots=X_n, X_{n+1}=0 \middle| X_1=1\right)= \\ &=P\left(X_2=1 \middle| X_1=1\right)P\left(X_3=1 \middle| X_2=1\right)=\ldots \\ &=P\left(X_n=1 \middle| X_{n-1}=1\right)P\left(X_{n+1}=0 \middle| X_n=1\right)=p_{11}^{n-1}\cdot p_{10} \end{aligned}$$

Δηλαδή, η κατανομή της τ.μ. είναι γεωμετρική με πιθανότητα επιτυχίας p_{11} και κατά συνέπεια η μέση τιμή αυτής θα είναι:

$$E(w)=\sum_{n=1}^{\infty} np_{11}^{n-1}p_{10}=p_{10}^{-1}=4 \text{ μέρες}$$

Με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε ότι το μέσο μήκος μιας καθαρής περιόδου είναι 2,96 μέρες.

Παράδειγμα 7:

Ένα μοντέλο για έλεγχο αποθεμάτων. Υποθέτουμε ότι ένα κατάστημα διαθέτει προς πώληση ένα προϊόν. Οι εβδομαδιαίες ζητήσεις για το προϊόν κατά τις διαδοχικές εβδομάδες $n=0,1,\ldots$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την ίδια κατανομή. Η πιθανότητα να ζητηθούν $j-$τεμάχια του προϊόντος κατά τη διάρκεια μίας εβδομάδας είναι ίση με ϕ_j, $j=0,1,\ldots$. Υποθέτουμε ότι οποιαδήποτε ζήτηση που υπερβαίνει το τρέχον απόθεμα του προϊόντος χάνεται. Ο αριθμός των τεμαχίων του προϊόντος εξετάζεται μόνο στην αρχή κάθε εβδομάδας και σε κάθε εβδομαδιαία επιθεώρηση, υπάρχει η δυνατότητα να παραγγελθούν τεμάχια του προϊόντος. Τα τεμάχια που παραγγέλνονται, παραδίδονται αμέσως στο κατάστημα. Το αποθεματικό επίπεδο ελέγχεται σύμφωνα με ένα κανόνα που είναι γνωστός ως κανόνας (s,S), $0\le s\le S$. Σύμφωνα με τον κανόνα αυτό, αν σε μια εβδομαδιαία επιθεώρηση, ο αριθμός των τεμαχίων του προϊόντος είναι μικρότερος του s, τότε παραγγέλνονται τόσα τεμάχια, ώστε ο συνολικός αριθμός των τεμαχίων να γίνει

S. Αν ο αριθμός των τεμαχίων είναι ίσος ή μεγαλύτερος του S, τότε δεν παραγγέλνεται κανένα τεμάχιο του προϊόντος.

Λύση: Για $n = 0, 1, \ldots$ ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X_n, έτσι ώστε:

$X_n =$ αριθμός τεμαχίων του εμπορεύματος στη αρχή της $\boldsymbol{n-o\sigma\tau}$**ής** εβδομάδας μόλις πριν την εβδομαδιαία επιθεώρηση.

Η στοχαστική ανέλιξη $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα σε διακριτό χρόνο με χώρο καταστάσεων $I = \{0, \ldots, S\}$. Ο αριθμός των τεμαχίων του προϊόντος (δηλαδή η τιμή της τυχαίας μεταβλητής X_n) στην αρχή κάθε εβδομάδας (δηλαδή για κάθε $\boldsymbol{n}$) εξαρτάται μόνο από τον κανόνα παραγγελίας που θα εφαρμοστεί την αμέσως προηγούμενη εβδομάδα και τη ζήτηση του καταναλωτικού κοινού την αμέσως προηγούμενη εβδομάδα. Η Μαρκοβιανή ιδιότητα είναι άμεση συνέπεια της ανεξαρτησίας των εβδομαδιαίων ζητήσεων και της μορφής της πολιτικής παραγγελίας που χρησιμοποιείται. Συγκεκριμένα, αν η ζήτηση κατά την $\boldsymbol{n-o\sigma\tau}$ή εβδομάδα είναι ίση με D_n, $n = 0, 1, \ldots$ τότε: $X_{n+1} = \begin{cases} \max(X_n - D_n, 0), & \alpha\nu\ X_n \geq s \\ \max(S - D_n, 0), & \alpha\nu\ X_n < s \end{cases}$.

Οι πιθανότητες μετάβασης πρώτης τάξης P_{ij}, της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ υπολογίζονται εύκολα διακρίνοντας δύο περιπτώσεις:

1η περίπτωση: $i \geq s$. (α) $1 \leq j \leq i$. $P_{ij} = P\{$η ζήτηση κατά την τρέχουσα εβδομάδα είναι ίση με $i - j\} = \phi_{i-j}$.

(β) Η ζήτηση κατά την τρέχουσα εβδομάδα είναι ίση ή μεγαλύτερη του i.

Άρα, σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος, θα πρέπει $j = 0$. Τότε: $P_{ij} = \sum_{k=i}^{\infty} \phi_k$. Άρα, $P_{ij} = \begin{cases} \phi_{i-j}, 1 \leq j \leq i \\ \sum_{k=i}^{\infty} \phi_k,\ j = 0 \end{cases}$.

2η περίπτωση: $i < s.$ (α) $1 \le j \le S$. $P_{ij} = P\{$Η ζήτηση κατά την τρέχουσα εβδομάδα να είναι ίση με $S - j\} = \phi_{S-j}$. (β) Η ζήτηση κατά την τρέχουσα εβδομάδα να είναι μεγαλύτερη ή ίση του S. Άρα, σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος, θα πρέπει $j = 0$.Τότε: $P_{ij} = \sum_{k=S}^{\infty} \phi_k$. Έτσι, $P_{ij} = \begin{cases} \phi_{S-j}, 1 \le j \le S \\ \sum_{k=S}^{\infty} \phi_k,\ j = 0 \end{cases}$. Σε κάθε άλλη περίπτωση $P_{ij} = 0$.

Παράδειγμα 8 (Μοντέλο EhrenFest):

Έστω μια κάλπη που περιέχει k σφαίρες, κάθε μια από τις οποίες είναι μαύρη ή κόκκινη. Σε κάθε πείραμα (βήμα ή χρονική στιγμή) εκλέγουμε μια σφαίρα στην τύχη και την αντικαθιστούμε με μια άλλη άλλου χρώματος.

Λύση: Έστω X_n ο αριθμός των μαύρων σφαιρών στην κάλπη αμέσως μετά το $\boldsymbol{n-}$ ***οστό*** πείραμα. Η $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα. Ο χώρος καταστάσεών της είναι $\Omega = \{0, 1, 2, ..., \mathrm{k}\}$ και οι πιθανότητες μεταπήδησης πρώτης τάξης είναι:

$$p_{i,i+1} = \frac{k-i}{k},\ p_{i,i-1} = \frac{i}{k}$$

Η $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ έχει την ιδιότητα markov, αφού η γνώση της X_n μας επιτρέπει να καθορίσουμε την κατανομή της X_{n+1}, π.χ. αν $X_n = i$, αυτό σημαίνει ότι η κάλπη έχει i μαύρες σφαίρες και $k-i$ κόκκινες και επομένως η κατανομή της X_{n+1} είναι ένα στοιχειώδες πρόβλημα πιθανοτήτων.

Ο πίνακας P πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης είναι:

$$P=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0k} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1k} \\ p_{20} & p_{21} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k0} & p_{k1} & p_{k,k-1} & p_{00} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & & & 0 \\ \frac{1}{k} & 0 & \frac{k-1}{k} & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & \frac{2}{k} & 0 & \frac{k-2}{k} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Το μοντέλο αυτό σε πολυπλοκότερη μορφή χρησιμοποιήθηκε από τον Ehrenfest για την μελέτη της μεταφορά θερμότητας ανάμεσα στα μόρια αερίου. Παρατηρούμε ότι η αλυσίδα είναι ομογενής. Ακόμα στις καταστάσεις 0 και k εμφανίζονται ανακλαστικά φράγματα, δηλαδή με πιθανότητα 1 η αλυσίδα μεταπηδά από την κατάσταση 0 στην κατάσταση 1 και από την k στην k-1.

Παράδειγμα 9:

Σε ένα ταχυδρομείο, που διαθέτει ένα μόνο ταμείο, οι πελάτες που φθάνουν σχηματίζουν ουρά και περιμένουν τη σειρά τους για να εξυπηρετηθούν. Στο χρονικό διάστημα που το ταμείο εξυπηρετεί τον $\boldsymbol{n-o\sigma\tau}$ό πελάτη, έστω X_n ο αριθμός των πελατών που φθάνουν στο ταχυδρομείο και μπαίνουν στην ουρά. Υποθέτουμε ότι οι $X_0, X_1, ..., X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $P\{X_n = i\} = p_i,\ i, n = 0, 1, ...$ και $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$. Έστω Y_n ο αριθμός των πελατών που περιμένουν στη ουρά τη στιγμή που το ταμείο έχει τελειώσει με την εξυπηρέτηση του $\boldsymbol{n-o\sigma\tau o}$ύ πελάτη. Τότε: $Y_n = Y_{n-1} - \delta(Y_{n-1}) + X_n,\ n = 1, 2, ...$όπου $\delta(x) = 0$ αν $x = 0$ και $\delta(x) = 1$, αν $x \neq 0$. Δείξτε ότι η ακολουθία των τ.μ. Y_n είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα σε διακριτό χρόνο και υπολογίστε τις πιθανότητες μετάβασης πρώτης τάξης.

Λύση: Αν $Y_n = 0$ τότε $\delta(Y_n) = 0$ και $Y_{n+1} = X_{n+1}$. Αν $Y_n \neq 0$ τότε $\delta(Y_n) = 1$ και $Y_{n+1} = X_{n+1} + Y_n - 1$.

Επειδή η τυχαία μεταβλητή X_{n+1} είναι, προφανώς, ανεξάρτητη των τυχαίων μεταβλητών $Y_1, Y_2, ..., Y_n$, αν γνωρίζουμε την τιμή της τυχαίας μεταβλητής Y_n, τότε δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε τις τιμές των τυχαίων μεταβλητών $Y_1, Y_2, ..., Y_{n-1}$ για τον υπολογισμό της δεσμευμένης συνάρτησης πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y_{n+1}. Άρα, η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών Y_n, $n = 0, 1, 2, ...$ είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα σε διακριτό χρόνο με πιθανότητες μετάβασης πρώτης τάξης:

$$P_{0j} = P\{Y_{n+1} = j \mid Y_n = 0\} = P\{X_{n+1} = j\} = p_j,\ j = 0, 1, 2, ...$$

και για $i = 1, 2, ...$ $P_{ij} = P\{Y_{n+1} = j \mid Y_n = i\} = P\{X_{n+1} = j - i + 1\} = p_{j-i+1},\ j \geq i - 1$, $P_{ij} = 0,\ j < i - 1$.

3.5. Μαρκοβιανές Αλυσίδες σε Συνεχή Χρόνο

Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες μπορούν να εκφραστούν εξίσου και σε συνεχή χρόνο, όπως θα περιγράψουμε και στην συνέχεια.

Ορισμός 3.5: Έστω στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \geq 0\}$ με τιμές (καταστάσεις) στο $\{0,1\}$. Εφόσον ικανοποιείται η ιδιότητα

$$P\left(X_{s+t} = j \middle| X_s = i, X_u = i_u, u < s\right) = P\left(X_{s+t} = j \middle| X_s = i\right)$$

για όλες τις καταστάσεις j, i, i_u και για όλους τους χρόνους t,s τότε η Μαρκοβιανή αλυσίδα καλείται **Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου.**

Επιπλέον, και σε αυτήν την περίπτωση, ισχύει η Μαρκοβιανή ιδιότητα: Η κατάσταση στην οποία θα βρεθεί η αλυσίδα στο μέλλον $\left(X_{t+s} = j\right)$ επηρεάζεται μόνο από την κατάσταση που έχει στο παρόν $\left(X_s = i\right)$ και όχι από το παρελθόν $\left(X_u = i_u, u < s\right)$.

Οι πιθανότητες μετάβασης (σε χρόνο t) τώρα θα είναι:

$$p_{ij}^{(t)} = P\left(X_{s+t} = j \middle| X_s = i\right)$$

Αν το h είναι μικρό, τότε για τις πιθανότητες μετάβασης σε χρόνο h, ισχύει:

$$p_{ij}^{(h)} = q_{ij} h + O(h), \qquad (i \neq j)$$

Η ποσότητα q_{ij} καλείται ρυθμός μετάβασης από την *i* κατάσταση στην *j*.

Αποδεικνύεται ότι, η Μαρκοβιανή αλυσίδα παραμένει σε μια κατάσταση *i* (πριν μεταβεί σε κάποια άλλη) χρόνο που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο:

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij} \; .$$

Μόλις λήξει ο παραπάνω χρόνος, η αλυσίδα μεταβαίνει στην κατάσταση $j\left(\neq i\right)$ με πιθανότητα:

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$$

Επομένως, σε συνεχή χρόνο, η συμπεριφορά της αλυσίδας καθορίζεται μονοσήμαντα από τον πίνακα (πίνακας μετάβασης):

$$Q = \begin{bmatrix} -q_0 & q_{01} & \cdots & q_{0j} & \cdots \\ q_{10} & -q_1 & & q_{1j} & \\ \cdots & & \cdots & & \\ q_{i0} & q_{i1} & & -q_i & \\ \cdots & & & & \cdots \end{bmatrix}$$

3.6. Κλαδωτή Μαρκοβιανή Ανέλιξη

Ως **κλαδωτή διαδικασία** αναφέρεται μια συγκεκριμένη κατηγορία Μαρκοβιανών αλυσίδων ειδικής μορφής που χρησιμοποιούνται ως στοχαστικά μοντέλα κυρίως για την περιγραφή και μελέτη της εξέλιξης βιολογικών ή φυσικών πληθυσμών. Στην πιο απλή περίπτωση, ο πληθυσμός αποτελείται αρχικά από ένα ακριβώς άτομο (τον προγεννήτορα), ο οποίος κατά τη διάρκεια της ζωής του γεννά νέα άτομα (την πρώτη γενεά) σύμφωνα με μια γνωστή κατανομή. Κάθε άτομο της πρώτης γενεάς συμπεριφέρεται στοχαστικά, όπως ο προγεννήτορας και ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα άτομα. Έτσι, παράγονται τα άτομα της δεύτερης γενεάς κ.λπ.

Συμβολίζοντας με Y τη γενική τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό νέων ατόμων που ένα συγκεκριμένο άτομο γεννά, υποθέτουμε ότι η Y έχει συνάρτηση πιθανότητας:

$$a_k = P(Y=k) \qquad (k \in N_0), \qquad 0 < a_0 < 1$$

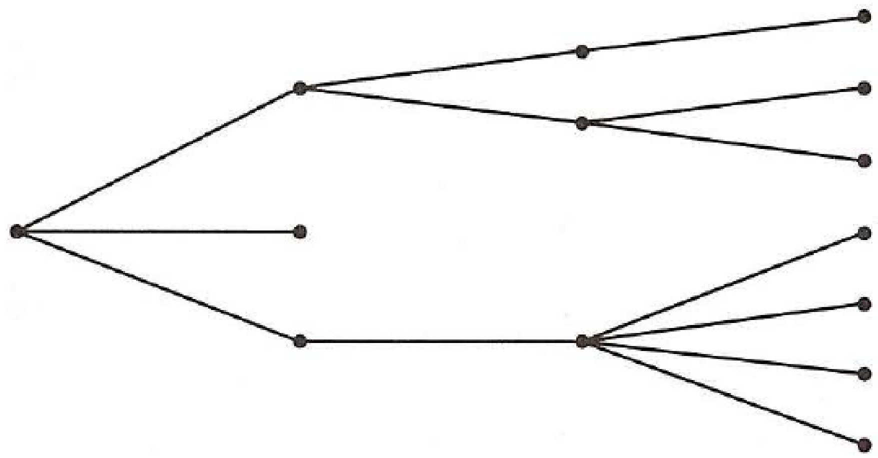
και πεπερασμένη μέση τιμή:

$$b = E(Y) < \infty \quad .$$

Έστω X_0 το μέγεθος του πληθυσμού αρχικά (μηδενική γενεά) και X_n το μέγεθος της n-οστής γενεάς $n \in N$. Επειδή η $(n+1)$-γενεά προέρχεται αποκλειστικά από τη n-οστή γενεά και η συμπεριφορά κάθε ατόμου είναι στοχαστικά ανεξάρτητη και ισοδύναμη με τη συμπεριφορά κάθε άλλου ατόμου, ισχύει η σχέση

$$X_{n+1} = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{X_n} \qquad (n \in N_0)$$

όπου οι $Y_1, Y_2, \ldots, \ldots$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $\{a_k\}$ και ανεξάρτητες από την τ.μ. X_n. Σχηματικά, έχουμε:



X_0 X_1 X_2 X_3

Και η αιτιολόγηση του όρου κλαδωτή διαδικασία είναι τώρα προφανής.

Από τη σχέση $X_{n+1} = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{X_n}$ γίνεται φανερό ότι η στοχαστική διαδικασία $\{X_n : n \in N_0\}$, που περιγράφει την εξέλιξη του μεγέθους του πληθυσμού ως συνάρτηση των διαδοχικών γενεών, είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το N_0. Φυσικά αν $X_n = 0$, για κάποιο $n \in N$, τότε και $X_{n+m} = 0$, για κάθε $m \in N$. Επομένως, $p_{00} = 1$ και η κατάσταση 0 που αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο εξάλειψης του πληθυσμού είναι κατάσταση απορρόφησης. Γενικά, οι πιθανότητες μετάβασης είναι, λόγω της σχέσης $X_{n+1} = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{X_n}$:

$$\begin{aligned}
p_{ij} &= P\left(X_{n+1} = j \middle| X_n = i\right) \\
&= P\left(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{X_n} = j \middle| X_n = i\right) \\
&= P\left(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_i = j \middle| X_n = i\right) \\
&= P\left(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_i = j\right) \qquad \left(i, j \in N_0\right)
\end{aligned}$$

Έτσι, η $i\left(i \in N_0\right)$ γραμμή του αντίστοιχου πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης είναι η i-απλή συνέλιξη $\left(a_j\right)^{(i)}$ της ακολουθίας $\left(a_j\right)$ με τον εαυτό της, δηλαδή:

$$\left(a_j\right)^{(0)} = (1,0,0,....)$$
$$\left(a_j\right)^{(1)} = \left(a_j\right) = \left(a_0, a_1, a_2, ...\right)$$

και γενικά

$$\left(a_j\right)^{(i)} = \left(a_j\right)^{(i-1)} * \left(a_j\right) \qquad (i \geq 2)$$
$$\left(a_j\right)^{(1)} = \left(a_j\right) = \left(a_0, a_1, a_2, ...\right)$$

όπου * είναι το σύμβολο της συνέλιξης δυο ακολουθιών. Επειδή στη γενική περίπτωση, ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης P δεν μπορεί να δοθεί σε αναλυτική μορφή ως συνάρτηση της $\left(a_j\right)$, καταφεύγουμε στη χρησιμοποίηση πιθανογεννητριών συναρτήσεων για τη μελέτη της $\left\{X_n\right\}$. Έστω

$$A_n(z) = E\left(z^{X_n}\right) \qquad \left(n \in N_0\right)$$

η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X_n $\left(n \in N_0\right)$.

Υποθέτοντας ότι X_0=1 τότε:

$$A_0(z) = E\left(z^{X_0}\right) = z$$
$$A_1(z) = A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

Προκύπτει, λοιπόν, ότι:

$$A_{n+1}(z) = A_n\left(A(z)\right) \qquad \left(n \in N_0\right)$$

Και αναγωγικά

n φορές $\quad A_n(z) = A\Big(A\big(\ldots\big(A(z)\big)\big)\Big) \quad (n \in N)$

Ισοδύναμα, για κάθε $n \in N$ και $i < n$, ισχύει η σχέση:

$$A_n(z) = A_{n-i}\left(A_i(z)\right)$$

Ενώ, η ειδική περίπτωση $A_n(z) = A\left(A_{n-i}(z)\right)$ είναι ιδιαίτερα χρήσιμη.

Η πιθανότητα εξάλειψης του πληθυσμού ρ, όταν αυτός αποτελείται αρχικά από ένα άτομο δίνεται από την σχέση:

$$\rho = \begin{cases} z_0, & \text{αν b} = E(Y) > 1 \\ 1, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου z_0 είναι η μοναδική στο $(0,1)$ λύση της εξίσωσης $A(z) = z$. Μάλιστα στην πρώτη περίπτωση, με πιθανότητα $1 - z_0 > 0$, ο πληθυσμός γίνεται άπειρος οριακά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

ΑΛΛΑ ΕΙΔΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ

4.1. Τυχαίοι Περίπατοι

Ο **τυχαίος περίπατος** είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα ειδικής μορφής, η οποία χρησιμοποιήθηκε αρχικά ως στοχαστικό μοντέλο στη φυσική για την περιγραφή της κίνησης σωματιδίου μέσα σε υγρό, ως αποτέλεσμα της σύγκρουσής του με άλλα στοιχειώδη σωματίδια. Μια άλλη από τις πρώτες εφαρμογές του τυχαίου περιπάτου υπήρξε το πρόβλημα οικονομικής καταστροφής ενός παίκτη, το χρηματικό κεφάλαιο του οποίου αυξομειώνεται ως συνάρτηση των αποτελεσμάτων των διαδοχικών δοκιμών ενός παιχνιδιού τύχης.

Έστω $\{Y_n : n \in N\}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων ακέραιων τυχαίων μεταβλητών με συνάρτηση πιθανότητας $\{a_k : k \in Z\}$. Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad (n \in N_0, \quad X_0 = 0)$$

Η ακολουθία μερικών αθροισμάτων $\{X_n : n \in N_0\}$ αναφέρεται ως ο τυχαίος περίπατος ο παραγόμενος από την ακολουθία Y_n. Γράφοντας

$$X_n = X_{n-1} + \mathrm{Y_n}$$

γίνεται φανερό ότι, η $\{X_n\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία με χώρο καταστάσεων το Z και η οποία έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις $X_n - X_{n-1}(n \in N)$. Επομένως, η $\{X_n\}$ είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πιθανότητες μετάβασης

$$
\begin{aligned}
p_{ij} &= P\left(X_{n+1} = j \middle| X_n = i\right) \\
&= P\left(Y_{n+1} = j-1 \middle| X_n = i\right) \\
&= P\left(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_i = j \middle| X_n = i\right) \\
&= P\left(Y_{n+1} = j-i\right) \\
&= a_{j-1} \qquad \left(i, j \in Z\right)
\end{aligned}
$$

οι οποίες εξαρτώνται από τις καταστάσεις i, j μόνο μέσα από τη διαφορά τους $j-i$.

Όταν $a_k = 0$, για $k \neq -1,0,1$, δηλαδή όταν μεταβάσεις είναι δυνατές μόνο στις γειτονικές καταστάσεις, ο τυχαίος περίπατος λέγεται **απλός**.

Επειδή η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}$ είναι αδιαχώριστη, όλες οι καταστάσεις της είναι του ίδιου τύπου. Επομένως, αρκεί να προσδιορίσουμε τον τύπο μιας από αυτές, έστω της κατάστασης 0.

Όταν $r > 0$, η 0 είναι απεριοδική κατάσταση, ενώ όταν $r = 0$, αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2, αφού τότε επάνοδος στη 0 είναι δυνατή μόνο σε άρτιο αριθμό βημάτων. Όσον αφορά την επαναληπτικότητα ή παροδικότητα της 0, αυτή δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τιμή του r και επομένως αρκεί να εξετάσουμε μόνο την περίπτωση όπου $r = 0$. Αλλά τότε:

$$
p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n, \quad p_{00}^{(2n+1)} = 0 \qquad \left(n \in N_0\right)
$$

αφού επάνοδος στην κατάσταση 0 πραγματοποιείται αν και μόνο αν ο αριθμός μεταβάσεων που οδηγούν σε επόμενη κατάσταση είναι ίσος με τον αριθμό μεταβάσεων που οδηγούν σε προηγούμενη κατάσταση και ανεξάρτητα από τη συγκεκριμένη διάταξη όλων αυτών των μεταβάσεων. Από τον τύπο του Stirling,

$$
n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n\sqrt{2\pi}} \qquad \left(n \in N_0\right)
$$

προκύπτει ότι

$$p_{00}^{(2n)} \cong (4pq)^n / \sqrt{\pi n}$$

όπου το σύμβολο $\cong$ σημαίνει ότι ο λόγος των δύο μελών τείνει στη μονάδα, καθώς $n \to \infty$

Επειδή $4pq \leq 1$, με ισότητα αν και μόνο αν $p = q = \frac{1}{2}$, προκύπτει η ισοδυναμία

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} = \infty \quad \Leftrightarrow p = q = \frac{1}{2}$$

Άρα, η κατάσταση 0 είναι επαναληπτική όταν $p = q$, και παροδική όταν $p \neq q$. Επιπλέον, επειδή

$$\lim_{n\to\infty} p_{00}^{(2n)} = 0$$

ακόμη και όταν $p = q$, η κατάσταση 0 είναι μηδενικά επαναληπτική όταν $p = q$. Όταν $r > 0$, ισχύουν ακριβώς τα ίδια συμπεράσματα, εκτός φυσικά από τη δεύτερη ισότητα του δεύτερου μέλους της παραπάνω ισοδυναμίας. Έτσι, ο απλός τυχαίος περίπατος με χώρο καταστάσεων το Z είναι μια αδιαχώριστη μηδενικά επαναληπτική $(p = q)$ή παροδική $(p \neq q)$, Μαρκοβιανή αλυσίδα και επομένως δεν έχει στάσιμη κατανομή, ενώ η αντίστοιχη οριακή κατανομή είναι η μηδενική διπλή ακολουθία (...,0, 0, 0,...).

Ο παραπάνω τυχαίος περίπατος αναφέρεται ως απεριόριστος.

Το μοντέλου του τυχαίου περίπατου μπορεί να τροποποιηθεί κατάλληλα προκειμένου να περιγράψει συγκεκριμένα προβλήματα, όπως θα δούμε στην συνέχεια. Αν θεωρήσουμε ότι το σωματίδιο μπορεί να παραμείνει στην θέση του και ότι ο χώρος καταστάσεων είναι $\Omega = \{0,1,....\}$, έχουμε τον εξής πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης:

$$P_1 = \begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

όπου:

$$P\left(X_{v+1} = i+1 \middle| X_v = i\right) = p_i, P\left(X_{v+1} = i-1 \middle| X_v = i\right) = q_i$$
$$P\left(X_{v+1} = i \middle| X_v = i\right) = r_i, \quad i = 1,2,\dots$$

και

$$P\left(X_{v+1} = 0 \middle| X_v = 0\right) = r_0, P\left(X_{v+1} = 1 \middle| X_v = 0\right) = p_0$$

με $p_i + r_i + q_i = 1, \quad i = 1,2,\dots$ και $r_0 + p_0 = 1$.

Παραλλαγές του πίνακα P_1 είναι οι εξής:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q & 0 & p & \dots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι πίνακες P_3, P_4 έχουν χώρο καταστάσεων πεπερασμένο, έστω $\Omega = \{0,1,\dots,N\}$.

Στην περίπτωση του P_2 η κατάσταση $\{0\}$ καλείται κατάσταση απορρόφησης καθώς και οι καταστάσεις $\{0,N\}$ του P_3,ενώ στον P_4 οι καταστάσεις $(0,N)$ είναι ανακλαστικά φράγματα. Οι τυχαίοι περίπατοι με πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης P_2, P_3 μπορούν να περιγράψουν το κεφάλαιο ενός παίκτη ή δύο παικτών.

Παράδειγμα 1:

Ο απλός τυχαίος περίπατος $\{X_n : n = 1, 2, ...\}$ θετικού βήματος $Z_n = 1$ με πιθανότητα p και αρνητικού βήματος $Z_n = -1$ με πιθανότητα q=1-p αποτελεί μια Μαρκοβιανή αλυσίδα. Με χώρο καταστάσεων το Z={…, -2, -1, 0, 1, 2,…} ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης έχει στοιχεία $p_{ij} = 0$ για $j \neq i \pm 1, p_{i,i+1} = p = 1 - q$ και $q = p_{i,i-1}$, $i \in Z$. Έχουμε, συνεπώς, πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P_4 = \begin{bmatrix} ... & ... & ... & -1 & 0 & 1 & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & 0 & q & 0 & p & 0 & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & 0 & q & 0 & p & 0 & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 & q & 0 & p & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2:

Απλός Τυχαίος Περίπατος με Απορροφητικές Καταστάσεις. Με χώρο καταστάσεων το Z={-α, -α+1, …, -1,0, 1, …, β-1, β}, τις καταστάσεις –α και β απορροφητικές και πιθανότητα θετικού βήματος p ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι:

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ q & 0 & p & 0 & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & q & 0 & p & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & q & 0 & p & o \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 & q & 0 & p \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3:

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής:

Έστω ότι ρίχνουμε ένα νόμισμα. Αν έρθει η πλευρά Α κερδίζουμε 1 €, ενώ αν έρθει η πλευρά Β χάνουμε 1€. Ορίζουμε με S_n τα χρήματα που έχει ο παίκτης μετά από την διεξαγωγή n παιχνιδιών.

Έστω $N = \inf\{n \geq 1 : S_n = 1\}$, δηλαδή η πρώτη φόρα που ο τυχαίος περίπατος είναι στο 1 ή αλλιώς που ο παίκτης έχει κέρδος. Θα χρησιμοποιήσουμε γεννήτριες συναρτήσεις για να υπολογίσουμε την κατανομή της N.

Έστω $\Phi_n = P(N = n), n \geq 0$ ώστε $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = p$. Αν $n \geq 2$, για να πάει ο τυχαίος περίπατος από το 0 στο 1 σε *n* βήματα, το πρώτο βήμα πρέπει αναγκαστικά να είναι στο -1 (με πιθανότητα q). Από το -1 πρέπει να πάει στο 0 (έστω σε *j* βήματα). Άρα, αυτό θα συμβεί με πιθανότητα φ_j, και από το 0 θα πρέπει να πάει στο 1 έστω σε *k* βήματα με πιθανότητα φ_k. Άρα, $1 + j + k = n$ και

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^{n-2} q \varphi_j \varphi_{n-j-1}, \quad \mathrm{n} \geq 2$$

Ας δούμε το παραπάνω με μεγαλύτερη αυστηρότητα. Για $\mathrm{n} \geq 2$

$$[N = n] = \bigcup_{j=1}^{n-2} [X_1 = -1] \cap A_j \cap B_{n-j-1}$$

όπου για *n* =2 το δεξί μέρος το θεωρούμε ίσο με το 0 και το A_j είναι το ενδεχόμενο ο τυχαίος περίπατος να επιστρέψει για πρώτη φορά από το -1 στο 0 σε *j* βήματα και το B_{n-j-1} είναι το ενδεχόμενο ο τυχαίος περίπατος να πάει για πρώτη φορά από το 0 στο 1 σε $n - j - 1$ βήματα, δηλαδή

$$A_j = \left[\inf \left\{ n : \sum_{i=1}^{n} X_{i+1} \right\} = j \right]$$
$$B_{n-j-1} = \left[\inf \left\{ n : \sum_{i=1}^{n} X_{j+i+1} = 1 \right\} = n - j - 1 \right]$$

Το A_j εξαρτάται από τις $X_2, X_3, ..., X_{j+1}$ και το B_{n-j-1} από τα $X_{j+2}, ..., X_n$. Άρα, τα ενδεχόμενα $[X_1 = -1], A_j, B_{n-j-1}$ είναι ανεξάρτητα και για διαφορετικά j τα $[X_1 = -1] \cap A_j \cap B_{n-j-1}$ είναι ξένα. Έτσι, έχουμε:

$$P(N = n) = \varphi_n = \sum_{j=1}^{n-2} qP(A_j)P(B_{n-j-1})$$

Τώρα,

$$\{X_1, X_2, ...\} \stackrel{d}{=} \{X_2, X_3, ...\}$$

Δηλαδή, για κάθε $k_1, ..., k_m \in \{-1, 1\}$, έχουμε:

$$P(X_1 = k_1, ..., X_m = k_m) = P(X_2 = k_1, ..., X_{m+1} = k_m)$$

αφού και οι δύο ακολουθίες στην $\{X_1, X_2, ...\} \stackrel{d}{=} \{X_2, X_3, ...\}$ έχουν την ίδια κατανομή. Άρα,

$$P(A_j) = P\left(\inf \left\{ n : \sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \right\} = j \right) = \varphi_j$$

και ομοίως $P(B_{n-j-1}) = \varphi_{n-j-1}$. Συνεπώς,

$$\varphi_0 = 0, \varphi_1 = p, \varphi_n = \sum_{j=1}^{n-2} q\varphi_j \varphi_{n-j-1}$$

για $n \geq 2$. Για να λύσουμε την άνω εξίσωση ως προς φ_n πολλαπλασιάζουμε με s^n και αθροίζουμε ως προς n. Έστω $\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n s^n$ η γεννήτρια συνάρτηση της $(\varphi_n)_n$. Έχουμε:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \varphi_n s^n = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n-2} q\varphi_j \varphi_{n-j-1}\right)s^n = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n-2} q\varphi_j \varphi_{n-j-1}\right)s^n = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{n=j+2}^{\infty} \varphi_{n-j-1} s^{n-j-1}\right)\varphi_j s^j qs$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m s^m\right)\varphi_j s^j qs = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(s)\varphi_j s^j qs = qs\left(\varphi(s)\right)^2$$

Αυτό, μαζί με τον ορισμό της φ, δίνει $\varphi(s) - ps = qs\varphi^2(s)$. Συνεπώς,

$$\varphi(s) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}$$

Η λύση με το + απορρίπτεται, αφού πρέπει $\varphi(0) = \varphi_0 = 0$. Άρα,

$$\varphi(s) = \frac{1 - \sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}$$

για $0 \leq s \leq 1$. Από το διωνυμικό ανάπτυγμα τώρα:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \varphi_n s^n = \frac{1}{2qs}\left(1 - \sum_{j=0}^{\infty}\binom{1/2}{j}(-1)^j\left(4pqs^2\right)^j\right)$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}\binom{1/2}{j}(-1)^{j+1}\frac{(4pqs)^j}{2q}s^{2j-1}$$

Δηλαδή,

$$\varphi_{2j-1} = (-1)^{j+1} \binom{1/2}{j} \frac{(4pqs)^j}{2q}$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^{j+1} \frac{(4pqs)^j}{2q} s^{2j-1}$$

για όλα τα $j \geq 1$.

Για να αποκτήσουμε μια διαίσθηση για το τι συμβαίνει παρατηρούμε ότι

$$P(N < \infty) = \varphi(1) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2q} = \frac{1 - |p - q|}{2q} = \begin{cases} 1, \text{αν } p \geq q \\ p/q, \text{αν } p < q \end{cases}$$

Έτσι, αν $p < q$, δηλαδή ο τυχαίος περίπατος κινείται στην θετική κατεύθυνση δυσκολότερα, τότε $P(N = \infty) = 1 - {}^{p}\!/_{q} > 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, $P(S_n \leq 0, \forall n) > 0$ και στο σύνολο θετικής πιθανότητας $\bigcap_{n=0}^{\infty} [S_n \leq 0]$ ο παίκτης δεν κερδίζει ποτέ. Όταν $P(N = \infty) > 0$, έχουμε από τον ορισμό $EN = \infty$. Όταν $p \geq q$, τότε

$$EN = \varphi'(1)$$
$$= \frac{\left(2q \frac{4pq}{\sqrt{1-4pq}} - 2q\left(1 - \sqrt{1-4pq}\right)\right)}{2q^2}$$
$$= \frac{2p}{|p-q|} - \frac{1 - |p-q|}{2q}$$

άρα

$$EN = \begin{cases} \infty, \text{αν } p = 1 = 1/2 \\ (p-q)^{-1}, \text{αν } p > q \end{cases}$$

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε την επιστροφή στο 0. Έστω $N_0 = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0\}$. Έστω $f_0 = 0, f_{2n} = P(N_0 = 2n), n \geq 1$ και $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n} s^{2n}$ για $0 \leq s \leq 1$. Έχουμε:

$$N_0 = \begin{cases} 1 + \inf\left\{n : \sum_{i=1}^{n} X_{i+1} = 1\right\} \infty, \text{ στο } [X_1 = -1] \\ 1 + \inf\left\{n : \sum_{i=1}^{n} X_{i+1} = -1\right\} \infty, \text{ στο } [X_1 = 1] \end{cases}$$

Έστω

$$N^+ = \inf\left\{n : \sum_{i=1}^{n} X_{i+1} = 1\right\} \text{ και } N^- = \inf\left\{n : \sum_{i=1}^{n} X_{i+1} = -1\right\}$$

Αφού $\{X_i, i \geq 1\} \overset{d}{=} \{X_i, i \geq 2\}$ συνεπάγεται ότι $N \overset{d}{=} N^+$. Επίσης, η N^+ καθορίζεται από τις $\{X_{i+1}, i \geq 1\}$ και άρα είναι ανεξάρτητη από την X_1. Έτσι, έχουμε :

$$\begin{aligned} F(s) &= Es^{N_0} \\ &= Es^{N_0} 1_{[X_1=-1]} + Es^{N_0} 1_{[X_1=1]} \\ &= Es^{1+N^+} 1_{[X_1=-1]} + Es^{1+N^-} 1_{[X_1=1]} \\ &= Es^{N^+} P[X_1 = -1] + Es^{N^-} P[X_1 = 1] \\ &= s\varphi(s) q + spEs^{N^-} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι :

$$\begin{aligned} N^- &= \inf\left\{n : \sum_{i=1}^{n} X_{i+1} = -1\right\} \\ &= \inf\{n : \sum_{i=1}^{n} X_i = -1\} \end{aligned}$$

$$= \inf\{n: \sum_{i=1}^{n} (-X_i) = 1\}$$

$$= \inf\{n: \sum_{i=1}^{n} X_i = 1\}$$

Η $\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\#}, n \geq 1\right\}$ είναι απλός τυχαίος περίπατος με κατανομή:

$$P\left(X_i^{\#} = 1\right) = P\left(-X_i = 1\right) = P\left(X_i = -1\right) = q$$

και $P\left(X_i^{\#} = -1\right) = p$. Άρα η $\varphi^{-}(s) := Es^{N^{-}}$, προκύπτει από τον τύπο της $\varphi(s)$ με εναλλαγή των p και q. Έτσι, η

$$F(s) = sq\frac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2qs} + sp\frac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2ps} = 1-\sqrt{1-4pqs^2}$$

και

$$F(1) = P(N_0 < \infty) = 1-\sqrt{1-4pq} = 1-|p-q|$$

Συνεπώς,

$$P(N_0 < \infty) = \begin{cases} 1, \text{αν } p = q \\ 2q, \text{αν } p > q \\ 2p, \text{αν } p < q \end{cases}$$

Άρα, μόνο αν $p = q = \frac{1}{2}$, ο τυχαίος περίπατος επιστρέφει σίγουρα στο 0. Ακόμα, όμως και σε αυτήν την περίπτωση που $P(N_0 < \infty) = 1, p = q = 1/2$ έχουμε:

$$F(s) = 1-\sqrt{1-s^2}$$
$$F'(s) = -\frac{1}{2}\left(1-s^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2s \to \infty$$

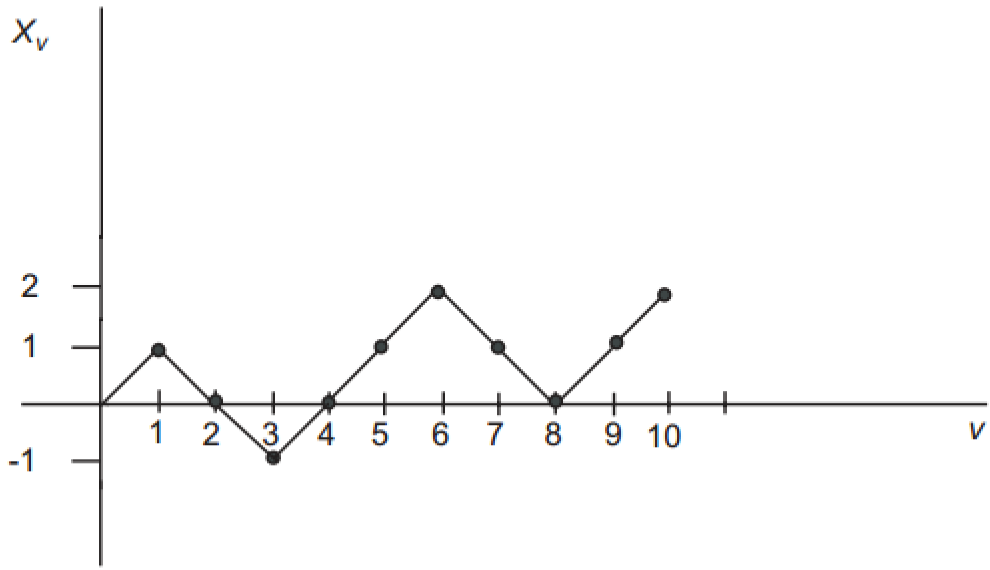
καθώς $s \to 1$. Οπότε, $EN_0 = F'(s)\big|_{s=1} = \infty$, δηλαδή η επιστροφή στο 0 είναι βέβαιη αλλά μετά από τυχαίο αριθμό βημάτων (χρόνου) με άπειρη μέση τιμή.

Παράδειγμα 4:

Έστω ένα σωματίδιο που ξεκινάει από την αρχή του άξονα και κάνει ένα βήμα δεξιά με πιθανότητα p ή ένα βήμα αριστερά με πιθανότητα $q = 1 - p$ σε κάθε χρονική μονάδα δηλαδή, αν Y_n, n=1,2,... είναι η μετατόπισή του τη χρονική στιγμή n τότε:

$$P(Y_n = 1) = p, P(Y_n = -1) = 1 - p = q$$

Έστω X_n η τετμημένη (θέση) του σωματιδίου αμέσως μετά τη χρονική στιγμή n. Τα σημεία (n, X_n), n=1,2,... παριστάνουν τον τυχαίο περίπατο του σωματιδίου. Μία τέτοια πραγματοποίηση για 10 βήματα θα μπορούσε να είναι η εξής:



Αφού $X_0 = 0$, είναι φανερό ότι

$$X_n = Y_1 + ... + Y_n$$

όπου οι μετατοπίσεις Y_i, i=1,2,...,n είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

Αν θεωρήσουμε το n σταθερό, τότε η X_n είναι μία τυχαία μεταβλητή για την οποία εύκολα προσδιορίζουμε την κατανομή της, π.χ. αν μέχρι και τη n-οστή χρονική στιγμή το σωματίδιο έκανε j αρνητικές μετατοπίσεις i=0,1,...,n τότε η τετμημένη ή θέση του είναι $n - j$ και αυτό το ενδεχόμενο έχει πιθανότητα:

$$P(X_n = n - j) = P(j\ από\ τις\ n\ μετατοπίσεις\ είναι\ αρνητικές)$$

$$= \binom{n}{j} p^{n-j} q^j$$

δηλαδή η X_n ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή.

Αλλά η ακολουθία $\{X_n, \text{n=1,2,...}\}$ αποτελεί στοχαστική ανέλιξη διακριτού χώρου καταστάσεων σε διακριτό χρόνο και είναι τυχαίος περίπατος.

4.2. Ανέλιξη Γεννήσεως - Θανάτου

Έστω ότι σε ένα χρονικό διάστημα μήκους h, όπου $h \to 0$, ένα συγκεκριμένο άτομο ενός πληθυσμού γεννάει ένα νέο άτομο με πιθανότητα $\lambda h + o(h)$ ή πεθαίνει με πιθανότητα $\mu h + o(h)$, όπου λ και μ θετικοί αριθμοί. Τα διαφορετικά άτομα συμπεριφέρονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και ανεξάρτητα από την προηγούμενη ιστορία της ανέλιξης. Αν τη χρονική στιγμή t υπάρχουν n άτομα στον πληθυσμό, τότε η πιθανότητα να συμβεί ακριβώς μία γέννηση στο χρονικό διάστημα $(t, t+h)$, όπου $h \to 0$, είναι ίση με

$$\binom{n}{1}(\lambda h + o(h))(1 - \lambda h + o(h)) = n\lambda h + o(h).$$

Ομοίως, η πιθανότητα να συμβεί ακριβώς ένας θάνατος είναι ίση με $n\mu h + o(h)$. Η πιθανότητα να συμβούν περισσότερα από ένα γεγονότα στο χρονικό διάστημα $(t, t+h)$, όπου $h \to 0$, είναι ίση με $o(h)$. Η αντίστοιχη Μαρκοβιανή αλυσίδα σε συνεχή χρόνο $X(t), t \geq 0$, όπου η τυχαία μεταβλητή $X(t)$ αναπαριστά το μέγεθος του πληθυσμού τη χρονική στιγμή t, καλείται **απλή ανέλιξη γεννήσεως-θανάτου** (simple birth-death process) με ρυθμούς γέννησης και θανάτου ανά άτομο λ και μ, αντίστοιχα. Ο χώρος των καταστάσεων της διαδικασίας είναι το σύνολο των μη-αρνητικών ακεραίων αριθμών. Για $n \geq 1$ και $h \to 0$, έχουμε:

$$P\{X(t+h) - X(t) = 1 \mid X(t) = n\} = \lambda n h + o(h)$$

$$P\{X(t+h) - X(t) = -1 \mid X(t) = n\} = \mu n h + o(h)$$

$$P\{X(t+h) - X(t) = 0 \mid X(t) = n\} = 1 - n\lambda h - \mu n h + o(h)$$

$$P\{X(t+h) - X(t) = j \mid X(t) = n\} = o(h), \text{ για } j \notin \{0, 1, -1\}.$$

Η κατάσταση 0 είναι μία κατάσταση απορρόφησης. Αντιστοιχεί στην εξάλειψη του πληθυσμού. Ένας συνοπτικός πίνακας παρουσίασης των μεταβάσεων της ανέλιξης και των αντίστοιχων ρυθμών είναι ο εξής:

Μετάβαση	**Ρυθμός**
$x \to x+1$	$\lambda x,\ x \geq 1$
$x \to x-1$	$\mu x,\ x \geq 1$

Μας ενδιαφέρει η μελέτη της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$. Ορίζουμε τις πιθανότητες: $p_n(t) = P\{X(t) = n \mid X(0) = \xi\}$. Οι προδρομικές εξισώσεις, για $n \geq 1$ και $h \to 0$, λαμβάνονται ως εξής:

$$p_n(t+h) = p_n(t)(1-\lambda nh - \mu nh + o(h)) + p_{n-1}(t)(\lambda(n-1)h + o(h)) + p_{n+1}(t)(\mu(n+1)h + o(h)) + o(h).$$

Για $n = 0$ και $h \to 0$,

$$p_0(t+h) = p_0(t) + p_1(t)(\mu h + o(h)) + o(h).$$

Προκύπτουν οι εξής διαφοροδιαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda+\mu)np_n(t) + \lambda(n-1)p_{n-1}(t) + \mu(n+1)p_{n+1}(t), \quad n \geq 1$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \mu p_1(t)$$

Για τη λύση των παραπάνω εξισώσεων χρησιμοποιούμε την τεχνική της πιθανογεννήτριας. Θεωρούμε την πιθανογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$, δηλαδή τη συνάρτηση:

$$\phi(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n, |z| < 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με z^n και προσθέτοντας το αποτέλεσμα στην δεύτερη, έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{dp_n(t)}{dt} z^n = -(\lambda+\mu)z\sum_{n=1}^{\infty} np_n(t)z^{n-1} + \mu\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)p_{n+1}(t)z^n + \lambda z^2\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)p_{n-1}(t)z^{n-2},$$

Δηλαδή,

$$\frac{\partial\phi(z,t)}{\partial t} = -(\lambda+\mu)z\frac{\partial\phi(z,t)}{\partial z} + \lambda z^2\frac{\partial\phi(z,t)}{\partial z} + \mu\frac{\partial\phi(z,t)}{\partial z}$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{\partial\phi(z,t)}{\partial t} = (\lambda z-\mu)(z-1)\frac{\partial\phi(z,t)}{\partial z}$$

Για τη λύση της άνω μερικής διαφορικής εξίσωσης θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Lagrange που παραθέτουμε παρενθετικά παρακάτω.

Μέθοδος Lagrange: Έστω ϕ μία συνάρτηση των μεταβλητών z και t που ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση: $A\frac{\partial\phi(z,t)}{\partial t} + B\frac{\partial\phi(z,t)}{\partial z} = C,$ όπου A,B,C είναι συναρτήσεις των $z,t,\phi.$ Θεωρούμε τις βοηθητικές εξισώσεις: $\frac{dt}{A} = \frac{dz}{B} = \frac{d\phi}{C}.$ Βρίσκουμε δύο ανεξάρτητες λύσεις των βοηθητικών εξισώσεων. Αυτές έχουν τη μορφή: $u(z,t,\phi) = const,$ $v(z,t,\phi) = const,$ όπου *const* συντόμευση του constant που σημαίνει σταθερά. Μια γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης είναι $\psi(u,v) = 0,$ όπου ψ είναι κάποια αυθαίρετη συνάρτηση. Ισοδύναμα, μία γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης είναι: $u = f(v),$ όπου f είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση.

Επανερχόμαστε στην λύση της εξίσωσης, ορίζουμε τις βοηθητικές εξισώσεις:

$$\frac{dt}{1} = -\frac{dz}{(\lambda z-\mu)(z-1)} = \frac{d\phi}{0}.$$

Πρέπει $d\phi = 0,$ δηλαδή $\phi = const.$ Αυτή είναι μία από τις δύο ανεξάρτητες λύσεις. Για να βρούμε τη δεύτερη λύση, πρέπει να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1η Περίπτωση: $\lambda \neq \mu.$

Τότε, μπορούμε να γράψουμε: $dt = \dfrac{dz}{\lambda-\mu}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda z-\mu}-\dfrac{1}{z-1}\right).$ Με ολοκλήρωση παίρνουμε: $v \equiv \dfrac{z-1}{\lambda z-\mu}e^{(\lambda-\mu)t} = const.$ Συνεπώς, η γενική λύση της εξίσωσης είναι της μορφής:

$$\phi(z,t) = f\left(\frac{z-1}{\lambda z-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}\right).$$

Η συνάρτηση f προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη για $t=0,$ δηλαδή από τη συνθήκη: $\phi(z,0) = z^{\xi} = f\left(\dfrac{z-1}{\lambda z-\mu}\right).$

Θέτουμε $u = \dfrac{z-1}{\lambda z-\mu}$ και έχουμε $z = \dfrac{\mu u-1}{\lambda u-1}.$ Άρα, $f(u) = \left(\dfrac{\mu u-1}{\lambda u-1}\right)^{\xi}.$

Συνεπώς,

$$\phi(z,t) = \left(\frac{\dfrac{\mu(z-1)}{\lambda z-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}-1}{\dfrac{\lambda(z-1)}{\lambda z-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}-1}\right)^{\xi}.$$

Τελικά,

$$\phi(z,t) = \left(\frac{\mu(z-1)e^{(\lambda-\mu)t}+\mu-\lambda z}{\lambda(z-1)e^{(\lambda-\mu)t}+\mu-\lambda z}\right)^{\xi}.$$

$2^{η}$ Περίπτωση: $\lambda = \mu.$

Τότε, $dt = -\dfrac{dz}{(\lambda z-\mu)(z-1)} = -\dfrac{dz}{\mu(z-1)^2}$. Με ολοκλήρωση παίρνουμε $\mu\int dt = -\int \dfrac{dz}{(z-1)^2} \Rightarrow \mu t - \dfrac{1}{z-1} = const.$. Συνεπώς, η γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$\phi(z,t) = f\left(\mu t - \frac{1}{z-1}\right).$$

Θέτοντας $t = 0$ έχουμε:

$$z^{\xi} = \phi(z,0) = f\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

Όταν $u = \dfrac{1}{1-z}$ τότε $z = \dfrac{u-1}{u}$. Άρα, $f(u) = \left(1-\dfrac{1}{u}\right)^{\xi}$. Συνεπώς,

$$\phi(z,t) = \left(1 - \frac{1}{\mu t - \frac{1}{z-1}}\right)^{\xi} = \left(\frac{\mu t(z-1)-z}{\mu t(z-1)-1}\right)^{\xi}.$$

Από τον ορισμό της $\phi(z,t)$ προκύπτει ότι οι πιθανότητες $p_n(t)$ εξάγονται από τον τύπο:

$$p_n(t) = \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n \phi(z,t)}{\partial z^n}\right]_{z=0}.$$

Ορίζουμε $m(t) = E[X(t)], t \geq 0.$

Παρατηρούμε ότι $\left[\dfrac{\partial\phi(z,t)}{\partial z}\right]_{z=1} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t)n = m(t).$ Παραγωγίζοντας την αρχική εξίσωση ως προς z, έχουμε:

$$\frac{\partial^2 \phi(z,t)}{\partial t \partial z} = (\lambda z - \mu)(z-1)\frac{\partial^2 \phi(z,t)}{\partial z^2} + \lambda(z-1)\frac{\partial \phi(z,t)}{\partial z} + (\lambda z - \mu)\frac{\partial \phi(z,t)}{\partial z}.$$

Θέτοντας $z = 1$ προκύπτει $\dfrac{dm(t)}{dt} = (\lambda - \mu)m(t)$ με αρχική συνθήκη $m(0) = \xi.$

Η λύση της τελευταίας διαφορικής εξίσωσης είναι: $m(t) = \xi e^{(\lambda-\mu)t}, t \geq 0.$ Για να μελετηθεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$, καθώς $t \to \infty,$ αρκεί να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της ποσότητας $\phi(z,t),$ καθώς $t \to \infty.$ Παρατηρούμε ότι: αν $\lambda = \mu$ τότε $\phi(z,t) \to 1,$ καθώς $t \to \infty.$ Αν $\lambda < \mu$ τότε $\phi(z,t) \to 1,$ καθώς $t \to \infty.$ Αν $\lambda > \mu$ τότε $\phi(z,t) \to \left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^{\xi}$, καθώς $t \to \infty.$

Δηλαδή, $p_0(t) = \phi(0,t) \to 1$ καθώς $t \to \infty,$ αν $\lambda \leq \mu$ και $p_0(t) = \phi(0,t) \to \left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^{\xi}$, καθώς $t \to \infty,$ αν $\lambda > \mu.$ Αυτό σημαίνει ότι, αν $\lambda \leq \mu,$ ο πληθυσμός εξαλείφεται τελικά με πιθανότητα 1, ενώ αν $\lambda > \mu,$ ο πληθυσμός εξαλείφεται τελικά με πιθανότητα $\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^{\xi}$.

Παράδειγμα 5:

Θεωρούμε ένα τηλεφωνικό δίκτυο με άπειρες τηλεφωνικές γραμμές στο οποίο οι κλήσεις φθάνουν σύμφωνα με στοχαστική ανέλιξη Poisson παραμέτρου λ. Η διάρκεια ενός τηλεφωνήματος ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο μ. Τα λ και μ προσδιορίζονται εμπειρικά. Σε συγκεκριμένες εφαρμογές υπολογίζονται από συλλογή δεδομένων. Έστω $\mathrm{X}(t)$ ο αριθμός των κρατημένων γραμμών τη χρονική στιγμή t. Η $\{\mathrm{X}(t), t \geq 0\}$ είναι στοχαστική ανέλιξη

Γεννήσεως - Θανάτου και για να τη μελετήσουμε πρέπει να προσδιορίσουμε τα λ και μ . Σκεφτόμαστε ως εξής:

Αφού οι κλήσεις φθάνουν κατά Poisson, αυτό σημαίνει ότι σ' ένα μικρό χρονικό διάστημα h μία κλήση φθάνει με πιθανότητα:

$$p_{i,i+1}(h) = \lambda h + O(h)$$

και καμία με πιθανότητα:

$$p_{i,i}(h) = 1 - \lambda h + O(h)$$

Δηλαδή,

$$\lambda_i = \lambda, \quad \iota = 0,1,....$$

Αν υποθέσουμε ότι i-γραμμές είναι κρατημένες, τότε σ' ένα μικρό χρονικό διάστημα h μία απ' αυτές ελευθερώνεται (κλείνει) και αυτό γίνεται με την ίδια πιθανότητα για όλες έστω p. Σημειώνουμε ότι οι γραμμές λειτουργούν ανεξάρτητα η μία της άλλης. Άρα, έχουμε Διωνυμική κατανομή, δηλαδή,

$$p_{i,i-1}(h) = \binom{i}{1} p(1-p)^{i-1}, \quad i = 1, 2, ...$$

Για να προσδιορίσουμε την πιθανότητα p ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή T, που είναι η διάρκεια ενός τηλεφωνήματος και που, όπως ήδη αναφέραμε, ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο μ. Επομένως,

$$p = P(T \leq t+h | T > t) = \frac{P(t < T \leq t+h)}{P(T > t)} = \frac{\int_h^{t+h} \mu e^{-\mu x} dx}{\int_t^x \mu e^{-\mu x} dx} = 1 - e^{-\mu h}$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις γράφονται:

$$p_{i,i-1}(h) = i\left(1 - e^{-\mu h}\right)\left(e^{-\mu h}\right)^{i-1}$$

Αναπτύσσοντας την εκθετική συνάρτηση $e^{-\mu h}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\mu h)^k}{k!}$ αντικαθιστώντας στην $p_{i,i-1}(h)=i\left(1-e^{-\mu h}\right)\left(e^{-\mu h}\right)^{i-1}$ παίρνουμε:

$$p_{i,i-1}(h)=i\left(1-1+\mu h+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-\mu h)^k}{k!}\right)\left(1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-\mu h)^k}{k!}\right)^{i-1}=i\mu h+O(h)$$

Άρα,

$$i\mu=\mu \ , i=1,2,\ldots$$

Ο προσδιορισμός του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων που ικανοποιούν οι $p_j(t)=P\left(X(t)=j\right)$, j=0,1,... γίνεται όπως στο γενικό μοντέλο στοχαστικής ανελίξεως Γεννήσεως - θανάτου λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις $\lambda_i=\lambda$ και $i\mu=\mu$. Εύκολα, καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} p_0'(t)=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t) \\ p_j'(t)=-(\lambda+j\mu)p_j(t)+\lambda p_{j-1}(t)+(j+1)\mu p_{j+1}(t) \end{Bmatrix}$$

Γνωρίζουμε ότι, η οριακή κατανομή δίνεται από τη σχέση:

$$p_j=\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_j}p_0$$

και στην περίπτωση μας είναι:

$$p_j=\frac{\lambda\cdot\lambda\cdot\ldots\lambda}{\mu\cdot 2\mu\ldots j\mu}, p=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\frac{1}{j!}p_0 \backslash$$

Από τη σχέση $\sum_{j=0}^{\infty}p_j=1$ έχουμε $p_0\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\frac{1}{j!}p_0=1$ ή $p_0=e^{-\lambda/\mu}$. Άρα, η οριακή κατανομή είναι:

$$p_j = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!}$$

Δηλαδή, κατανομή Poisson με παράμετρο $\frac{\lambda}{\mu}$. Επειδή, όμως, δεν είναι ρεαλιστικό να υποθέτουμε ότι ένα τηλεφωνικό κέντρο έχει άπειρες γραμμές, ας θεωρήσουμε ότι το κέντρο διαθέτει N γραμμές. Τότε, στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\left\{\begin{array}{c} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ p_j'(t) = -(\lambda + j\mu) p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) + (j+1)\mu p_{j+1}(t) \end{array}\right\}$$

έχουμε ότι η γενική διαφορική εξίσωση ισχύει για $j = 1, \ldots, N-1$ και:

$$p_N'(t) = -N\mu p_N(t) + \lambda p_{N-1}(t)$$

Αντίστοιχα, για την οριακή κατανομή έχουμε ότι $\sum_{j=0}^{N} p_j = 1$. Άρα, $p_0 \sum_{j=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!} = 1$, συνεπώς $p_0 = \left[\sum_{j=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!}\right]^{-1}$ και

$$p_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!} \left[\sum_{j=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!}\right]^{-1}, \; j = 0, 1, \ldots, N$$

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρανομαστή με $e^{-\lambda/\mu}$ έχουμε:

$$p_j = \frac{e^{-\lambda/\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!}}{\left[\sum_{j=0}^{\mathrm{N}} e^{-\lambda/\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!}\right]^{-1}}, \; j = 0, 1, \ldots, N$$

Η τελευταία σχέση είναι πιο εύχρηστη, γιατί στον αριθμητή έχουμε συνάρτηση πιθανότητας Poisson παραμέτρου $\frac{\lambda}{\mu}$ για την τιμή j και στον παρονομαστή αθροιστική συνάρτηση κατανομής Poisson, τις τιμές των οποίων παίρνουμε από τους πίνακες της Poisson.

Χρήσιμη πληροφορία για τη λειτουργία του τηλεφωνικού κέντρου είναι το ποσοστό των κλήσεων που χάνονται γιατί όλες οι γραμμές είναι κρατημένες. Αυτό εκφράζεται από την πιθανότητα:

$$p_N = \frac{e^{-\lambda/\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N \frac{1}{N!}}{\left[\sum_{j=0}^{\mathrm{N}} e^{-\lambda/\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!}\right]^{-1}}$$

η οποία καλείται τύπος απώλειας του Erlang.

Γνωρίζοντας τα λ και μ και αποφασίζοντας τι ποσοστό απώλειας θέλουμε να έχουμε (π.χ. 0,01 δηλ. να χάνουμε 1 κλήση στις 100) μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό N των γραμμών που απαιτούνται από την σχέση

$$p_N = \frac{e^{-\lambda/\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N \frac{1}{N!}}{\left[\sum_{j=0}^{\mathrm{N}} e^{-\lambda/\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!}\right]^{-1}}.$$

4.3. Κίνηση Brown ως Διάχυση

Το 1827 ο Άγγλος βοτανολόγος Brown παρατήρησε ότι ένα μόριο (διαμέτρου της τάξης 10 -4 cm) όταν βυθιστεί σ' ένα υγρό ή αέριο κινείται άτακτα. Αυτήν την κίνηση προσπάθησαν να περιγράψουν μ' ένα μαθηματικό μοντέλο, κι αυτή ήταν η αρχή της ανάπτυξης ενός από τους πολύ σημαντικούς κλάδους της Θεωρίας Πιθανοτήτων και Στοχαστικών Ανελίξεων, που ονομάζεται Κίνηση Brown ή Wiener.

Η κίνηση Brown μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει πολλά φυσικά φαινόμενα. Έχει το όνομα του Άγγλου βοτανολόγου Robert Brown, ο οποίος πρώτος περιέγραψε (1827) την «ακανόνιστη» κίνηση ενός μικρού σώματος μέσα σε ένα υγρό ή αέριο. Ο Γερμανός φυσικός Albert Einstein έδειξε (1905) ότι η κίνηση αυτή μπορεί να ερμηνευθεί θεωρώντας ότι το σωματίδιο «βομβαρδίζεται» από τα μόρια του υγρού ή του αερίου και για αυτό κινείται ακανόνιστα με «τυχαίο» τρόπο στο χώρο. Τέλος, ο Αμερικανός μαθηματικός Norbert Wiener όρισε αυστηρά και μελέτησε σε βάθος (1918) την ανέλιξη αυτή αποδεικνύοντας πολλές ιδιότητές της (για αυτό και η ανέλιξη είναι γνωστή και ως Wiener Process).

Ορισμός4.3.1.: Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι **στοχαστική ανέλιξη Brown ή Weiner** αν:

[1] Η στοχαστική ανέλιξη έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις.

[2] Αν $t>0$ η $X(t)$ κατανέμεται κανονικά, δηλαδή:

$$f(x,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}, \sigma > 0$$

[3] $\mathrm{E}(\mathrm{X}(t)) = 0, \forall t > 0$

[4] $X(0) = 0$ και η $\mathrm{X}(t)$ είναι συνεχής στο μηδέν.

Η παράμετρος σ υπολογίζεται από τις παρατηρήσεις και όταν το μαθηματικό μοντέλο αναφέρεται στην κίνηση Brown. Ο Einstein απέδειξε ότι:

$$\sigma^2 = \frac{4RT}{Nf}$$

Όπου R η σταθερά του μέσου, N ο αριθμός Avogadro, T η απόλυτη θερμοκρασία, f ο συντελεστής τριβής του μέσου. Η παραπάνω σχέση συντέλεσε στον προσδιορισμό του N από τον Perrin το 1926 για το οποίο τιμήθηκε με Νόμπελ Χημείας.

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ μια στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου. Χωρίζουμε το χρόνο $[0,t]$ σε *n* διαστήματα πλάτους $h = \frac{t}{n}$ και σε καθένα από αυτά θεωρούμε ότι η X_n αυξάνεται ή μειώνεται ως εξής:

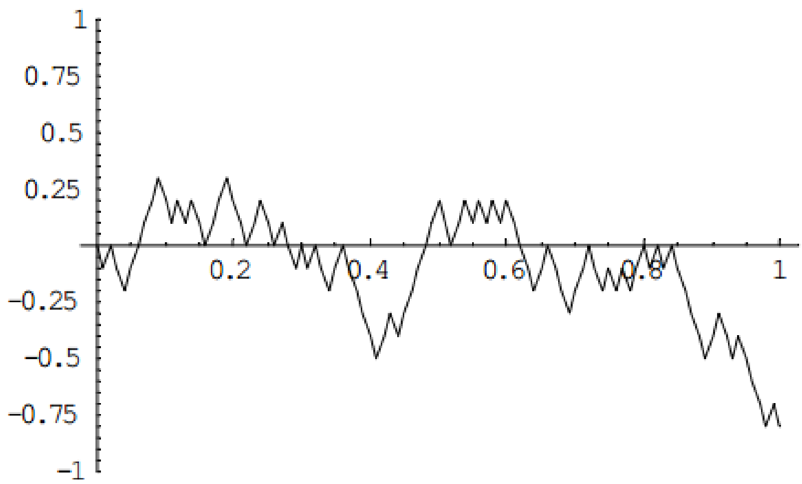
$$X_{ih} = \begin{cases} X_{(i-1)h} + \sigma\sqrt{h} & \text{με πιθανότητα p} \\ X_{(i-1)h} - \sigma\sqrt{h} & \text{με πιθανότητα 1-p} \end{cases}$$

όπου

$$p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{h}\right), \quad \text{i=1,2,...,n}$$

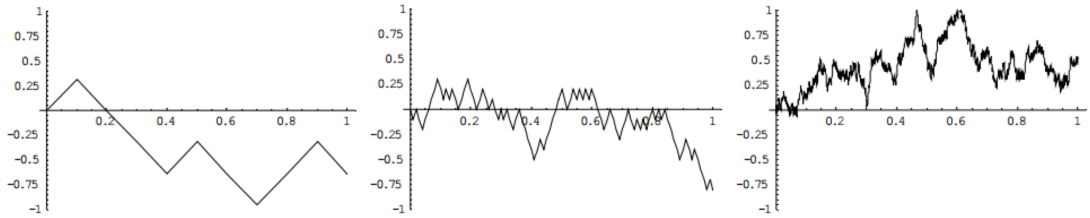
για κάποιες παραμέτρους μ, σ (υποθέτοντας ότι στα διαστήματα $((i-1)h, ih), i = 1, 2, ..., n$ η ανέλιξη κινείται γραμμικά).

Μια πραγματοποίηση του παραπάνω γραφικά θα είναι της μορφής:



Οι ανελίξεις που κινούνται τυχαία πάνω ή κάτω καλούνται τυχαίοι περίπατοι, όπως αναφέραμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο. Μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε το όριο της παραπάνω ανέλιξης όταν το $n \to 0$, δηλαδή κατάλληλο όριο τυχαίου περιπάτου. Αν αυξήσουμε το n (πλήθος υποδιαστημάτων που κινείται η παραπάνω ανέλιξη) τότε λαμβάνουμε τις πραγματοποιήσεις της μορφής:

$n = 10$, $n = 100$ $n = 1000$



Οριακά, σε πεπερασμένα χρονικά διαστήματα, η ανέλιξη θα πραγματοποιεί άπειρο πλήθος βημάτων, το καθένα απειροστού μήκους. Θέτουμε $Y_i = 1 ή 0$ αν η X αυξάνεται ή μειώνεται στο i χρονικό διάστημα. Θα ισχύει για σταθερό $t = nh$ ότι:

$$
\begin{aligned}
X_t = X_{nh} &= \sigma\sqrt{h}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \sigma\sqrt{h}\left(n - \sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \\
&\overset{h=t/n}{=} 2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i - n\sigma\sqrt{\frac{t}{n}} \\
&= 2\sigma\sqrt{tp(1-p)}\,\frac{\sum_{i=1}^{n} Y - np_i}{\sqrt{np(1-p)}} + \sigma\sqrt{nt(2p-1)} \\
&\to_{n\to\infty} \sigma\sqrt{t}\cdot Z + t\mu
\end{aligned}
$$

όπου $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ δηλαδή $\mathrm{X}_t \sim \mathrm{N}(t\mu, t\sigma^2)$.

Παρατηρούμε ότι, η ανέλιξη που προκύπτει (όταν $h \to 0$) έχει:

[1] Ανεξάρτητες προσαυξήσεις: $\mathrm{X}_{t+y} - \mathrm{X}_y$ ανεξάρτητες από τις $\mathrm{X}_u, 0 \le u \le y$.

Διότι σε κάθε απειροστό χρονικό διάστημα, η αύξηση ή η μείωση της X_t είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν, και άρα η τ.μ. $\mathrm{X}_{t+y} - \mathrm{X}_y, t > 0$ θα είναι ανεξάρτητη από τις $\mathrm{X}_u, 0 \le u \le y$.

[2] Κανονικές προσαυξήσεις: $\mathrm{X}_{t+y} - \mathrm{X}_y \sim \mathrm{N}(t\mu, t\sigma^2)$

Είδαμε ότι $\mathrm{X}_t \sim \mathrm{N}(t\mu, t\sigma^2)$ και επομένως και $\mathrm{X}_{t+y} - \mathrm{X}_y \sim \mathrm{N}(t\mu, t\sigma^2)$ για κάθε $y \ge 0$.

Ο τρόπος με τον οποίο ορίσαμε την παραπάνω ανέλιξη δεν είναι αυστηρός. Αποδεικνύεται, όμως, ότι πράγματι υπάρχει και μπορεί να οριστεί μια ανέλιξη με τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά (ανεξάρτητες, κανονικές προσαυξήσεις). Ειδικότερα, έχουμε τον ακόλουθο αυστηρό ορισμό:

Ορισμός 4.3.2: Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \geq 0\}$ καλείται **κίνηση Brown BM** με παραμέτρους $\mu \in R$ και $\sigma > 0$ αν ισχύει ότι, για κάθε $y \geq 0, t \geq 0$:

[1] Η τ.μ. $\mathrm{X}_{t+y} - \mathrm{X}_y \sim \mathrm{N}\left(t\mu, t\sigma^2\right)$

[2] Η τ.μ. $\mathrm{X}_{t+y} - \mathrm{X}_y \sim \mathrm{N}\left(t\mu, t\sigma^2\right)$ είναι ανεξάρτητη από τις $\mathrm{X}_u, 0 \leq u \leq y$.

Συνήθως, λαμβάνεται $\mathrm{X}_0 = 0$. Γενικότερα, ανελίξεις με ανεξάρτητες και ισόνομες (όχι κατ'ανάγκη κανονικές) προσαυξήσεις καλούνται ανελίξεις Lévy.

Αποδεικνύεται ότι η κίνηση Brown είναι η μοναδική στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο που

(i) οι διαδρομές της $g_\omega(t) = X_t(\omega)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και

(ii) έχει ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις.

Για παράδειγμα, οι προσαυξήσεις (τ.μ.):

$$\mathrm{X}_{t_1} - \mathrm{X}_{t_0}, \mathrm{X}_{t_2} - \mathrm{X}_{t_1}, \ldots, \mathrm{X}_{t_m} - \mathrm{X}_{t_{m-1}}$$

είναι ανεξάρτητες και αν $t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = t_m - t_{m-1}$ είναι και ισόνομες. Το (i) δικαιολογείται διαισθητικά από το ότι η ανέλιξη X_t κάνει «άλματα» (πάνω ή κάτω) μήκους $\sigma h^{1/2}$ σε χρονικό διάστημα μήκους h, δηλαδή το μέγεθος του άλματος συγκλίνει στο 0 όταν $h \to 0$.

Θα μπορούσε κανείς, σε αυτό το σημείο, να αναρωτηθεί τι θα γινόταν αν υποθέταμε (κάτι που ίσως φαίνεται πιο φυσιολογικό με την πρώτη ματιά) ότι:

$$X_{ih} = \begin{cases} X_{(i-1)h} + \sigma\sqrt{h} & \text{με πιθανότητα p} \\ X_{(i-1)h} - \sigma\sqrt{h} & \text{με πιθανότητα 1-p} \end{cases}$$

Δηλαδή, ότι οι προσαυξήσεις της ανέλιξης σε ένα διάστημα μήκους h είναι ανάλογες του h και όχι της ρίζας του h. Σε αυτή την περίπτωση, είναι εύκολο να επαληθεύσουμε (από τον νόμο των μεγάλων αριθμών) ότι $X_t = 0$ με πιθανότητα 1 (λαμβάνοντας n → ∞), δηλαδή προκύπτει μια τετριμμένη περίπτωση. Επομένως, οι απειροστές προσαυξήσεις θα πρέπει να μην είναι ανάλογες του μήκους h του διαστήματος, αλλά «αρκετά μεγαλύτερες». Παραπάνω θεωρήσαμε προσαυξήσεις ανάλογες του $h^{1/2}$ που όταν $h \to 0$ είναι πολύ μεγαλύτερες του h.

4.4. Ανανεωτική Θεωρία

Μια ανανεωτική ανέλιξη $\{N_t\}_{t\geq 0}$ είναι μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία, όπου στο χρονικό διάστημα [0,t] έχουμε την πραγματοποίηση n φορές των ζητούμενων γεγονότων, όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι (πραγματοποίησης των γεγονότων) είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μεταβλητές. Ασυμπτωτικά, οι ανανεωτικές ανελίξεις ερμηνεύονται από την ανανεωτική εξίσωση, από το απλό ανανεωτικό θεώρημα και από το βασικό ανανεωτικό θεώρημα.

Μία ανανεωτική ανέλιξη $N = \{N(t)\}_{t\geq 0}$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη, δηλαδή μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών, όπου

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\},$$

$T_0 = 0, T_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ για $n > 1$ και $\{X_i\}$ είναι μία ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

Σε μια ανανεωτική ανέλιξη $N = \{N(t)\}_{t\geq 0}$ η ανανεωτική συνάρτηση είναι η μέση τιμή, για κάθε t, της τυχαίας μεταβλητής N(t). Η ανανεωτική συνάρτηση συμβολίζεται με m(t).

Θέλοντας να γενικεύσουμε τα παραπάνω, μπορούμε να θεωρήσουμε μια στοχαστική ανέλιξη απαρίθμησης στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών γεγονότων είναι ανεξάρτητοι και ταυτοτικά κατανεμημένοι (αλλά) με μια οποιαδήποτε κατανομή.

Ορισμός 4.4: Έστω $\{N_t\}_{t\geq 0}$ μια στοχαστική ανέλιξη απαρίθμησης στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ μεταξύ διαδοχικών γεγονότων είναι θετικές, ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ. (όπου με X_k συμβολίζουμε τον χρόνο μεταξύ του (k-1) γεγονότος και του k γεγονότος). Η ανέλιξη απαρίθμησης $\{N_t\}_{t\geq 0}$ λέγεται **ανανεωτική ανέλιξη** (renewal process).

Κάθε φορά που συμβαίνει ένα γεγονός λέμε ότι έχουμε μια **ανανέωση**. Ακόμα, κάθε φορά που συμβαίνει μια ανανέωση, λέμε ότι συμπληρώνεται ένας **ανανεωτικός κύκλος**.

Επιπλέον, ονομάζουμε χρόνο αναμονής W_n τον χρόνο μέχρι την εμφάνιση του n-οστού γεγονότος, δηλαδή:

$$W_n = X_1 + X_2 + ... + X_n, \text{ για } n \geq 1 \text{ και } \mathrm{W}_0 = 0$$

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια των ανανεωτικών ανελίξεων, σκόπιμο είναι να δοθούν μερικά παραδείγματα.

Οι ανανεωτικές ανελίξεις έχουν πολλαπλές εφαρμογές σε προβλήματα πιθανότητας και γενικότερα σε συστήματα που ανανεώνονται. Τέτοια συστήματα έχουν εφαρμογή στη θεωρία αξιοπιστίας και στην οικονομία, ιδιαίτερα δε σε αναλογιστικά προβλήματα.

Παράδειγμα 1:

Έστω ότι ένα εξάρτημα μιας μηχανής χαλάει, μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή, και αντικαθίσταται αμέσως από ένα νέο εξάρτημα. Το νέο εξάρτημα το προμηθευόμαστε από μια διαρκή και άπειρη σε πλήθος τέτοιων εξαρτημάτων παρακαταθήκη που διαθέτουμε. Αν με $N(t)$ συμβολίσουμε τον αριθμό των εξαρτημάτων που έχουν χαλάσει μέχρι την στιγμή t , τότε προφανώς η $\{N_t\}_{t\geq 0}$ είναι μια ανανεωτική ανέλιξη.

Παράδειγμα 2:

Η σ.α. $\{N_t\}_{t\geq 0}$ μετρά τον αριθμό των οχημάτων που προέρχονται από ένα ορισμένο σημείο ενός δρόμου. Ας υποθέσουμε ότι αυτοκίνητα βρίσκονται σε έναν (απείρου θεωρητικά μήκους) δρόμο με μια λωρίδα κυκλοφορίας και ας θεωρήσουμε ένα συγκεκριμένο σημείο του δρόμου σαν την αρχή του. Αν N_t παριστάνει τον αριθμό των οχημάτων που βρίσκονται σε απόσταση t χιλιομέτρων από την αρχή του δρόμου, τότε η $\{N_t\}_{t\geq 0}$ είναι μια ανανεωτική ανέλιξη.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι, σε μια ανανεωτική ανέλιξη, ισχύει η εξής βασική σχέση: ο αριθμός ανανεώσεων μέχρι την στιγμή *t* είναι μεγαλύτερος ή ίσος από *n* αν και μόνον αν η ανανέωση συμβαίνει πριν από ή κατά την στιγμή t.

Συμβολικά: $N(t)\geq n \Leftrightarrow W_n \leq t$.

Έστω τώρα $\{X_n\}_{n=1,2,...}$ μια ακολουθία μη αρνητικών, ανεξάρτητων τ.μ., με κοινή κατανομή F και ας υποθέσουμε ότι $F(0)=P\{X_n=0\}<1$.

Ας θεωρήσουμε ότι κάθε X_n είναι ο χρόνος μεταξύ του (n-1) και του n –οστού γεγονότος (π.χ. αφίξεις). Τότε, η:

$$\mu = \mathrm{E}X_n = \int_0^\infty x dF(x)$$

είναι ο μέσος χρόνος μεταξύ διαδοχικών γεγονότων. Προφανώς, $0 < \mu < \infty$ (λόγω του ότι $X_n \geq 0$ και $F(0) < 1$) .

Ένα από τα ερωτήματα που προκύπτουν, σε μια τέτοιου είδους ανέλιξη, είναι αν μπορούν να συμβούν άπειρες ανανεώσεις μέσα σε ένα πεπερασμένου μήκους χρονικό διάστημα, δηλαδή αν μπορεί για κάποιο t πεπερασμένο, το N(t) να είναι άπειρο. Με μια πρώτη ματιά, η απάντηση είναι όχι . Για να το αποδείξουμε, ας σκεφτούμε ότι:

$$N(t) = \max\{n : W_n \leq t\}$$

Από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών προκύπτει ότι με πιθανότητα 1 ισχύει:

$$\frac{W_n}{n} \to \mu \text{ καθώς } n \to \infty$$

Αλλά $\mu > 0$ και επομένως το W_n πρέπει να τείνει στο άπειρο καθώς $n \to \infty$. Όμως, το N(t) πρέπει να είναι ένας πεπερασμένος αριθμός.

Ένα δεύτερο ερώτημα αφορά την συμπεριφορά του N(t), καθώς το t τείνει στο άπειρο. Αποδεικνύεται ότι, με πιθανότητα 1, ισχύει:

$$\lim_{t \to \infty} N(t) = \infty$$

Πράγματι, ο μόνος τρόπος για να είναι το N(t) πεπερασμένο είναι, ένας από τους ενδιάμεσους χρόνους να είναι άπειρος, δηλαδή:

$$P\left\{N\left(\infty\right)<\infty\right\}=P\left\{X_n=\infty,\ \text{για κάποιο n}\right\}=P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{X_n=\infty\right\}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{X_n=\infty\right\}=0$$

Παράδειγμα 3:

Σε ένα οικιακό ηλεκτρικό πίνακα απαραίτητη προϋπόθεση για να έχει το σπίτι ηλεκτρικό ρεύμα είναι να λειτουργεί η κεντρική ηλεκτρική ασφάλεια. Έστω ότι, από ένα πλήθος ηλεκτρικών ασφαλειών που διαθέτουμε, τίθεται σε λειτουργία την χρονική στιγμή 0 η πρώτη ασφάλεια της οποίας ο χρόνος λειτουργίας είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή X_1. Τη στιγμή κατά την οποία η πρώτη ασφάλεια πάψει να λειτουργεί αντικαθίσταται (ανανεώνοντας το σύστημα) από μία άλλη, της οποίας ο χρόνος λειτουργίας είναι επίσης συνεχής τυχαία μεταβλητή X_2, η οποία έχει την ίδια κατανομή με την X_1 κοκ.

Ο χρόνος πραγματοποίησης της *n* ανανέωσης περιγράφεται από την τυχαία μεταβλητή

$$S_n=X_1+X_2+...+X_n,n\geq 1$$

Υποθέτοντας ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X_i, i=1,2,...,n$ και n > 1 είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την ίδια κατανομή, τότε η τυχαία μεταβλητή $N\left(t\right)$ η οποία παίρνει τιμές:

$$N\left(t\right)=n \text{ αν } S_n\leq t\leq S_{n+1},n\geq 0$$

δίνει στο χρονικό διάστημα [0,t] τον αριθμό των ανανεώσεων.

Υπάρχουν και τεχνικές που εφαρμόζονται σε διάφορα συστήματα, όπου η ανανέωση γίνεται σε ένα προκαθορισμένο χρόνο. Πιο συγκεκριμένα, αν η φθορά συμβεί πέραν του καθορισμένου χρόνου, τότε η συσκευή αντικαθίσταται πριν χαλάσει. Ενώ, αν η φθορά επέλθει πριν από τον προκαθορισμένο χρόνο, τότε αντικαθίσταται κανονικά στο χρόνο φθοράς.

Παράδειγμα 4:

Θεωρούμε ότι στη διάρκεια μιας ημέρας καταφθάνουν σε μία ασφαλιστική εταιρία *n* τον αριθμό (τυχαία μεταβλητή) απαιτήσεις για αποζημίωση, έστω $X_i, i = 1, 2, ..., n$ τυχαίες συνεχείς μεταβλητές που παριστάνουν τους χρόνους μεταξύ δυο διαδοχικών αποζημιώσεων. Υποθέτοντας ότι οι τυχαίες μεταβλητές:

$$X_i, i = 1, 2, ..., n \text{ και n} > 1$$

είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την ίδια κατανομή, τότε η τυχαία μεταβλητή:

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n, n \geq 1$$

δηλώνει το χρόνο άφιξης της *n*-οστής αποζημίωσης στην ασφαλιστική εταιρία στη διάρκεια μιας ημέρας και τέλος στο χρονικό διάστημα [0,t] ο αριθμός των ανανεώσεων περιγράφεται από την τυχαία μεταβλητή N(t) για την οποία ισχύει και πάλι:

$$N(t) = n \text{ αν } S_n \leq t \leq S_{n+1}, n \geq 0$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

[1] Βασιλείου Γ. (1999), «Στοχαστικές Μέθοδοι στις Επιχειρησιακές Έρευνες», Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη

[2] Δάρας Τ., Σύψας Π. (2003), «Στοχαστικές Ανελίξεις: Θεωρία & Εφαρμογές», Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη

[3] Καλπαζίδου Σ. (1999), «Στοιχεία Θεωρίας Στοχαστικών Ανελίξεων», Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη

[4] Κουνιάς Σ., Μωυσιάδης Χ., (1999), «Θεωρία Πιθανοτήτων Ι: Κλασική Πιθανότητα, Μονοδιάστατες κατανομές», Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη

[5] Χαραλαμπίδης Κ. (2000), «Θεωρία Πιθανοτήτων και εφαρμογές», τεύχος 1, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2000

[6] Hoel P. Port S., Stone C., 2002, «Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων», Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

[1] Aldous, D.(1989), «Probabilistic Approximations via the Poisson» Clumping Heuristic ,New York: Springer-Verlag

[2] Bailey, N(1964), «The Elements of Stochastic Processes with Application to the Natural Sciences». N.Y : J. Wiley

[3] Barbour, A. D., Hoist, L. and Janson, S.(1992), «Poisson Approximations, Oxford Science Publications», England:Oxford,.

[4] Bartholemew, D. J.(1973), «Stochastic Models for Social Processes». 2nd ed., London: J. Wiley

[5] Bartlett, M. S.(1978), «An Introduction to Stochastic Processes». 3rd ed., England: Cam-bridge University Press, Cambridge,.

[6] Bliat. N.(1984), «Elements of Applied Stochastic Processes». N.Y :Wiley,. 1984.

[7] Chiang, C. L.(1980), «An Introduction to Stochastic Processes and Their Applications». Krieger

[8] Cinlar, E.(1975), «Introduction to Stochastic Processes». Prentice-Hall.

[9] Cox, D. R. And Miller II. D.(1965), «The Theory of Stochastic Processes» , London :Chapman and Hall

[10] Cramer, H., Leadbetter, M.(1996), «Stationary and Related Stochastic Processes», New York :Wiley

[11] Durret, R (1999), «Essentials of Stochastic Processes», Springer.

[12] Doob. J.(1953), «Stochastic Processes J» , N.Y: Wiley

[13] Feller, W. (1968), «An Introduction to Probability Theory and Its Applications», Vol.1, , N.Y.: J. Wiley

[14] Feller, W.(1971), «An Introduction to Probability Theory and Its Applications», Vol.2, 2nd ed., , N.Y.: J. Wiley

[15] Resnick, S.(1992), «Adventures in Stochastic Processes. Birkhauser», Boston. MA.

[16] Ross. S.(1996), «Stochastic Processes». 2nd ed., N.Y.: Wiley.