ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΙΩΑΝΝΟΥ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών
Σάμος 27 Ιουνίου 2014

Εισηγητής: Μιχαήλ Ανούσης

Επιτροπή

Φελουζής Ευάγγελος

Καραχάλιος Νικόλαος

Για την εκπόνηση αυτής της πτυχιακής εργασίας θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου :
Στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ.Μιχαήλ Ανούση, για την πολύτιμη βοήθεια του. Θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους φίλους μου για την αμέριστη συμπαράσταση τους.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σε αυτή την πτυχιακή ασχολούμαστε με την Διάσταση σε Τοπολογικούς Χώρους.

Στο πρώτο κεφάλαιο εισάγουμε βασικούς τοπολογικούς ορισμούς. Στο δεύτερο καφάλαιο, ορίζουμε την έννοια της διάστασης σε τοπολογικούς χώρους και αποδεικνύουμε θεωρήματα και προτάσεις σχετικά με αυτήν. Έπειτα, δίνουμε κάποια παραδείγματα βασικών πεπερασμένων διαστασιακά τοπολογικών χώρων που μας βοηθούν να κατανοήσουμε καλύτερα τις έννοιες και τις προτάσεις αυτές.

Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο, αναφέρουμε και αποδεικνύουμε το μείζον θεώρημα αυτής της πτυχιακής, το θεώρημα της εμφύτευσης, καθώς επίσης και το θεώρημα, ότι κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ έχει τοπολογική διάσταση το πολύ N.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί

1.1 Βασικοί Ορισμοί και Θεωρήματα

Ορισμός 1.1.1. *Υποθέτουμε ότι X είναι ένα μη κενό σύνολο και $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η πραγματική συνάρτηση ρ ονομάζεται μετρική στο X αν για τυχόντα $x, y, z \in X$ ικανοποιούνται οι παρακάτω τρεις ιδιότητες:*

(i) $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

(iii) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$ *(Τριγωνική Ανισότητα)*

Ορισμός 1.1.2. *Ένα σύνολο X εφοδιασμένο με μία μετρική ρ ονομάζεται μετρικός χώρος και συμβολίζεται (X, ρ)*

Ορισμός 1.1.3. *Έστω α ένα τυχαίο σημείο ενός μετρικού χώρου (X, ρ) και ρ θετικός πραγματικός αριθμός. Ονομάζουμε σφαιρική περιοχή ή σφαίρα με κέντρο το σημείο α και ακτίνα ρ , το σύνολο $B(a, r)$ που ορίζεται με τον τύπο*

$$B(a, r) = \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$$

Δηλαδή, σφαιρική περιοχή με κέντρο α και ακτίνα r, $r > 0$ είναι το σύνολο των σημείων του χώρου X που η απόστασή τους απο το α είναι γνήσια μικρότερη του αριθμού r. Όταν απαιτείται χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $B_\rho(a, r)$ αντί για $B(a, r)$ για να υποδηλώσουμε την μετρική ως προς την οποία θεωρείται η περιοχή.

Ορισμός 1.1.4. *Μια ακολουθία $\{x_n\}$ σε έναν μετρικό χώρο (X, ρ) λέγεται βασική ακολουθία ή ακολουθία Cauchy αν :*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) \text{ με } m, n > n_0 \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Ορισμός 1.1.5. *Μια συλλογή $\{A, B\}$ υποσυνόλων ενός συνόλου X είναι μια διαμέριση του X αν $A \neq \emptyset \neq B$ με $A \cap B = \emptyset$ και $A \cup B = X$.*

Ορισμός 1.1.6. *Ένας μετρικός χώρος X ονομάζεται συνεκτικός $(connected)$ μετρικός χώρος αν δεν υπάρχει ανοιχτή ή κλειστή διαμέριση του X σε δύο υποσύνολα του.*

Ορισμός 1.1.7. *Λέμε ότι ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{J})$ είναι κανονικός αν για τυχόντα F_1, F_2 κλειστά υποσύνολα του X , με $F_1 \cap F_2 = 0$, υπάρχουν $A, B \in \mathcal{J}$, με $F_1 \subseteq A$, $F_2 \subseteq B$ και $A \cap B = \emptyset$.*

Ορισμός 1.1.8. *Έστω $\phi : X \to \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε το $support$ της ϕ να είναι η κλειστότητα του συνόλου $\phi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Έτσι αν το x βρίσκεται εκτός του $support$ της ϕ τότε υπάρχει κάποια περιοχή του x την οποία η ϕ την μηδενίζει.*

Ορισμός 1.1.9. *Έστω $\{U_1, \ldots, U_n\}$ μια πεπερασμένη συλλογή η οποία είναι μια κάλυψη του X από ανοιχτά σύνολα στον X. Μια οικογένεια συνεχών συναρτήσεων $\phi_i : X \to [0, 1]$ για $i = 1, \ldots, n$ την ονομάζουμε διαμέριση της μονάδας που κυριαρχείται απο τα U_i αν :*

(i) *$support\ \phi \subset U_i$, για κάθε i*

(ii) *$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 0$, για κάθε x*

Θεώρημα 1.1.10. *(Ύπαρξη των πεπερασμένων διαμερίσεων της μονάδας) Έστω $\{U_1, \ldots, U_n\}$ να είναι μια πεπερασμένη συλλογή η οποία είναι μια ανοιχτή κάλυψη ενός κανονικού χώρου X. Τότε υπάρχει η διαμέριση της μονάδας που κυριαρχείται από τα $\{U_i\}$.*

Ορισμός 1.1.11. *Ένα υποσύνολο A του X λέγεται ανοιχτό εάν για κάθε $x \in A$,*

$$B(x, \varepsilon) \subseteq A.$$

Ορισμός 1.1.12. *Ένα σημείο x θα λέγεται σημείο επαφής του συνόλου A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.*

Ορισμός 1.1.13. *Το σύνολο των σημείων επαφής ενός συνόλου A το ονομάζουμε κλειστή θήκη ή κλειστότητα του συνόλου A και συμβολίζεται με $\overline{A}$.*

Ορισμός 1.1.14. *Ένα σύνολο A θα λέγεται πυκνό υποσύνολο του X ή πυκνό στον X εάν $\overline{A} = X$.*

Ορισμός 1.1.15. *Ένα σύνολο A θα λέγεται ε-πυκνό υποσύνολο του X αν ισχύει :*

$$(\forall x \in X)(\exists y \in A)\rho(x, y) < \varepsilon$$

Πρόταση 1.1.16. *Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X είναι πυκνό στον X αν και μόνο αν είναι ε-πυκνό υποσύνολο του X για κάθε $\varepsilon > 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι A είναι πυκνό υποσύνολο του μετρικού χώρου (X, ρ) και ε τυχαίος θετικός αριθμός. Θεωρούμε τυχαίο $x \in X$ και την σφαιρική περιοχή $B(x, \varepsilon)$ του x. Επειδή $x \in X = \overline{A}$ θα έχουμε $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ και άρα υπάρχει $y \in B(x, \varepsilon) \cap A$. Τότε όμως, το $y \in A$ και $\rho(x, y) < \varepsilon$. Δηλαδή το A είναι ε-πυκνό υποσύνολο του X για τον τυχαίο $\varepsilon > 0$.

Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ το A είναι ε-πυκνό υποσύνολο του X, x τυχαίο σημείο του X και r τυχαίος θετικός αριθμός. Τότε θα υπάρχει $y \in A$ τέτοιο ώστε $\rho(x, y) < r$. Δηλαδή, θα υπάρχει $y \in A$, με $y \in B(x, r)$. Επομένως, $y \in A \cap B(x, r) \neq \emptyset$. Άρα, επειδή ο r είναι τυχαίος θετικός αριθμός το $x \in \overline{A}$. Έτσι αποδείχθηκε ότι $X \subseteq \overline{A}$ ή, ισοδύναμα, $X = \overline{A}$, που σημαίνει ότι το A είναι πυκνό στον X. □

Ορισμός 1.1.17. *Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) λέγεται πλήρης μετρικός χώρος αν κάθε βασική (Cauchy) ακολουθία του X είναι συγκλίνουσα στον X.*

Ορισμός 1.1.18. *Η συλλογή $\mathcal{J}$ είναι μία τοπολογία στον X αν έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{J}$, $X \in \mathcal{J}$

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{J} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{J}$

(iii) $\forall \mathcal{C} \subseteq \mathcal{J} \Rightarrow \cup \mathcal{C} \in \mathcal{J}$.

Κάθε μη κενό σύνολο X στο οποίο έχει οριστεί μία τοπολογία $\mathcal{J}$ ονομάζεται τοπολογικός χώρος και συμβολίζεται με $(X, \mathcal{J})$. Τα μέλη της τοπολογίας και μόνον αυτά ονομάζονται ανοιχτά σύνολα στον τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{J})$. Τα συμπληρώματα των ανοιχτών συνόλων ενός τοπολογικού χώρου και μόνον αυτά ονομάζονται κλειστά σύνολα στον $(X, \mathcal{J})$.

Ορισμός 1.1.19. *Αν ο X είναι τοπολογικός χώρος, ο X λέγεται μετρικοποιήσιμος αν υπάρχει μετρική d στο σύνολο X που εισάγει την τοπολογία του X. Ένας μετρικός χώρος είναι ένας μετρικοποιήσιμος χώρος X μαζί με την συγκεκριμένη μετρική d η οποία δίνει την τοπολογία του X.*

Ορισμός 1.1.20. *Έστω X να είναι ένας μετρικός χώρος με μια μετρική d. Ένα υποσύνολο A του X λέγεται ότι είναι φραγμένο αν υπάρχει κάποιος αριθμός M τέτοιος ώστε $d(a_1, a_2) \leq M$ για κάθε ζεύγος a_1, a_2 σημείων του A. Αν ο A είναι φραγμένος η διάμετρος του A ορίζεται να είναι ο αριθμός*

$$diam = sup\{d(a_1, a_2) | a_1, a_2 \in A\}.$$

Ορισμός 1.1.21. *(σύνορο): Αν $A \subset X$ ορίζουμε το σύνορο του A από την εξίσωση*

$$Bd = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}.$$

Ορισμός 1.1.22. *Ένας χώρος X λέγεται ότι είναι συμπαγής αν κάθε ανοιχτό κάλυμμα του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.*

Ορισμός 1.1.23. *Έστω X και Y να είναι τοπολογικοί χώροι. Έστω $f : X \mapsto Y$ να είναι "1-1" και " επί ". Αν και οι δυο συναρτήσεις f και η αντίστροφή της είναι συνεχείς τότε η f ονομάζεται ομοιομορφισμός.*

Ορισμός 1.1.24. *Έστω X τοπολογικός χώρος. Μία οικογένεια $\mathfrak{B}$ ανοικτών υποσυνόλων του X λέγεται βάση της τοπολογίας αν κάθε ανοικτό σύνολο μπορεί να γραφεί σαν ένωση στοιχείων της $\mathfrak{B}$.*

Ορισμός 1.1.25. *Ένας χώρος X λέγεται ότι έχει μία αριθμήσιμη βάση στο x αν υπάρχει μία αριθμήσιμη συλλογή $\mathfrak{B}$ περιοχών του x τέτοια ώστε κάθε περιοχή του x να περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του $\mathfrak{B}$. Ένας χώρος ο οποίος έχει μία αριθμήσιμη βάση σε καθένα από τα σημεία του λέγεται ότι ικανοποιεί το πρώτο αξίωμα αριθμησιμότητας.*

Ορισμός 1.1.26. *Μία συλλογή συνόλων $\mathcal{C}$ λέμε ότι έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών αν για κάθε πεπερασμένη υποσυλλογή $\mathfrak{B}$ της $\mathcal{C}$ ισχύει*

$$\cap \mathfrak{B} \neq \emptyset$$

.

Κεφάλαιο 2

Διάσταση τοπολογικών χώρων

2.1 Τοπολογικοί χώροι

Ορισμός 2.1.1. *Ένας τοπολογικός χώρος X ονομάζεται χώρος Hausdorff αν για κάθε ζεύγος x_1, x_2 διακριτών σημείων του X υπάρχουν περιοχές U_1 και U_2 των x_1, x_2 αντίστοιχα οι οποίες είναι ξένες μεταξύ τους.*

Ορισμός 2.1.2. *Ένας m-manifold είναι ένας χώρος Hausdorff X με αριθμήσιμη βάση τέτοια ώστε κάθε σημείο x του X να έχει μια περιοχή η οποία είναι ομοιομορφική με ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$.*

Ορισμός 2.1.3. *Έστω A να είναι ένα υποσύνολο του X, το εσωτερικό του A ορίζεται να είναι η ένωση των ανοικτών συνόλων που περιέχονται στο A. Λέμε ότι το A έχει κενό εσωτερικό αν το A δεν περιέχει κανένα ανοικτό σύνολο του X εκτός από το κενό σύνολο.*

Ορισμός 2.1.4. *Ένας χώρος λέγεται ότι είναι ένας Baire χώρος αν ισχύει η ακόλουθη συνθήκη: Δοσμένης μίας αριθμήσιμης συλλογής $\{A_n\}$ από κλειστά σύνολα του X που το καθένα έχει κενό εσωτερικό στον X, η ένωσή τους $\cup A_n$ έχει επίσης κενό εσωτερικό στον X.*

Ορισμός 2.1.5. *Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{J})$ λέμε οτι είναι κανονικός αν για τυχόντα F_1 , F_2, κλειστά υποσύνολα του X , με $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, υπάρχουν $A, B \in \mathcal{J}$ με $F_1 \subseteq A$, $F_2 \subseteq B$ και $A \cap B = \emptyset$.*

Θεώρημα 2.1.6. *Αν ο X είναι ένας συμπαγής χώρος Hausdorff ή είναι πλήρης μετρικός χώρος τότε ο X είναι ένας Baire χώρος.*

Απόδειξη. Δοσμένης μιας αριθμήσιμης συλλογής $\{A_n\}$ κλειστών συνόλων στον X που έχουν κενά εσωτερικά, θέλουμε να δείξουμε ότι η ένωσή τους

$\cup A_n$ έχει επίσης κενό εσωτερικό στον X. Θεωρούμε ένα μη κενό ανοιχτό σύνολο U_0 του X, πρέπει να βρούμε ένα σημείο x του U_0 το οποίο δεν βρίσκεται σε κανένα από τα σύνολα A_n.

Θεωρούμε το πρώτο σύνολο A_1. Από υπόθεση το A_1 δεν περιέχει το U_0. Επομένως, μπορούμε να επιλέξουμε ένα y του U_0 το οποίο δεν βρίσκεται στο A_1. Η κανονικότητα του X μαζί με το γεγονός ότι το A_1 είναι κλειστό, μας δίνει τη δυνατότητα να διαλέξουμε μία περιοχή U_1 του y τέτοια ώστε

$$\overline{U_1} \cap A_1 = \emptyset,$$
$$\overline{U_1} \subset U_0$$

Αν ο X είναι μετρικός χώρος, διαλέγουμε επίσης U_1 αρκετά μικρό όπου η διάμετρος του είναι μικρότερη του 1.

Γενικότερα, δοσμένου μη κενού ανοιχτού συνόλου U_{n-1}, διαλέγουμε ένα σημείο του U_{n-1} το οποίο δεν είναι μέσα στο κλειστό σύνολο A_n, έπειτα διαλέγουμε U_n να είναι η περιοχή αυτού του σημείου τέτοια ώστε

$$\overline{U_n} \cap A_n = \emptyset,$$
$$\overline{U_n} \subset U_{n-1},$$
$$diam U_n < 1/n \text{ στην περίπτωση της μετρικής.}$$

Ισχυριζόμαστε ότι η τομή $\cap\overline{U_n}$ είναι μη κενή. Εάν το x είναι ένα σημείο της $\cap\overline{U_n}$, τότε το x βρίσκεται μέσα στο U_0, επειδή το $\overline{U_1} \subset U_0$. Για κάθε n το σημείο x δεν είναι μέσα στο A_n, επειδή τα $\overline{U_n}$ είναι ξένα με τα A_n.

Η απόδειξη ότι η $\cap\overline{U_n}$ είναι μη κενή χωρίζεται σε δύο μέρη, που εξαρτάται από το αν ο X είναι συμπαγής χώρος Hausdorff ή πλήρης μετρικός χώρος. Εάν ο X είναι συμπαγής Hausdorff, θεωρούμε την εμφωλευμένη ακολουθία $\overline{U_1} \supset \overline{U_2} \supset \dots$ μη μηδενικών υποσυνόλων του X. Η συλλογή $\{\overline{U_n}\}$ ικανοποιεί την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών. Αφού ο X είναι συμπαγής, η τομή πρέπει να είναι μη μηδενική.

Αν ο μετρικός χώρος X είναι πλήρης μετρικός, εφαρμόζουμε το ακόλουθο λήμμα. □

Λήμμα 2.1.7. *Έστω $C_1 \supset C_2 \supset \dots$ να είναι μία εμφωλευμένη ακολουθία από μη κενά κλειστά σύνολα του μετρικού χώρου X. Εάν $diam C_n \to 0$, τότε $\cap C_n \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. Διαλέγουμε $x_n \in C_n$ για κάθε n. Επειδή $x_n, x_m \in C_N$ για $n, m \geq N$, και επειδή η διάμετρος του C_N μπορεί να κατασκευαστεί μικρότερη από κάθε δοσμένο ε επιλέγοντας αρκετά μεγάλο N η ακολουθία (x_n) είναι ακολουθία Cauchy.

Υποθέτουμε ότι αυτή συγκλίνει στο x. Τότε για δοσμένο k, η υπακολουθία $x_k, x_{k+1}, \dots$ επίσης συγκλίνει στο x. Έτσι, το x απαραίτητα ανήκει στο $\overline{C_k} = C_k$.

Τότε, το $x \in \cap C_k$ όπως επιθυμούσαμε. $\square$

Πρόταση 2.1.8. *Έστω Y ένας υπόχωρος ενός μετρικού χώρου (X, r) και A ένα υποσύνολο του Y. Το σύνολο A είναι ανοιχτό υποσύνολο του υπόχωρου Y αν και μόνο αν υπάρχει υποσύνολο B του X, όπου B ανοιχτό στο μετρικό χώρο X τέτοιο ώστε $A = X \cap B$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το σύνολο A, $A \subseteq Y$ είναι ανοιχτό στον Y. Τότε για κάθε $a \in A$ υπάρχει $r_a > 0$ τέτοιο ώστε για την σφαιρική περιοχή $B_Y(a, r_a)$ του a στο Y να ισχύει $B_Y(a, r_a) \subseteq A$ ή ισοδύναμα $Y \cap B(a, r_a) \subseteq A$. Τότε όμως ισχύει,

$$\cup(Y \cap B(a, r_a)) = A \Rightarrow Y \cap (\cup B(a, r_a)) = A.$$

Θέτοντας $\cup B(a, r_a) = B$, παρατηρούμε ότι το σύνολο B είναι ανοιχτό στον X. Δηλαδή αποδείξαμε ότι υπάρχει ένα ανοιχτό υποσύνολο B του X τέτοιο ώστε $A = Y \cap B$.

Αντίστροφα, έστω $A = Y \cap B$, όπου B ανοιχτό στον X και a τυχαίο σημείο του A. Τότε $a \in Y$ και $a \in B$. Επειδή το B είναι ανοιχτό στον X, υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(a, r_a)$ του σημείου a τέτοια ώστε, το $B(a, r_a) \subseteq B$. Επειδή $a \in Y$,το σύνολο $B_Y(a, r_a) = B(a, r_a) \cap Y$, είναι περιοχή του a στον Y και μάλιστα τέτοια ώστε :

$$B_Y(a, r) = B(a, r) \cap Y \subseteq B \cap Y = A$$

Άρα, το A είναι ανοιχτό υποσύνολο του μετρικού υπόχωρου Y. $\square$

Ορισμός 2.1.9. *Έστω $f : X \mapsto Y$ είναι μία "1-1" συνεχής απεικόνιση, όπου X και Y τοπολογικοί χώροι. Έστω Z να είναι το σύνολο των εικόνων $f(X)$. Τότε ορίζουμε τη συνάρτηση $f' : X \mapsto Z$ από τη σχέση $f'(x) = f(x)$. Η $f'(x)$ είναι "1-1" και " επί ". Αν η f' τυχαίνει να είναι ομοιομορφισμός του X με το Z τότε λέμε ότι η απεικόνιση $f : X \mapsto Y$ είναι μια τοπολογική εμφύτευση του X στον Y.*

Λήμμα 2.1.10. *Ο X είναι χώρος Baire αν και μόνον δοσμένης κάθε αριθμήσιμης συλλογής $\{U_n\}$ από ανοικτά σύνολα στον X, τα οποία είναι πυκνά στον X, η τομή τους $\cap U_n$ είναι επίσης πυκνή στον X.*

Απόδειξη. Ανακαλώντας ότι ένα σύνολο C είναι πυκνό στον X αν και μόνον αν $\overline{C} = X$. Η απόδειξη έπεται από τις δυο ακόλουθες παρατηρήσεις :

(i) Το A είναι κλειστό στον X αν και μόνον αν το $X - A$ είναι ανοικτό στον X.

(ii) το B έχει κενό εσωτερικό στον X αν και μόνον αν το $X - B$ είναι πυκνό στον X.

□

Λήμμα 2.1.11. *(Αριθμός Lebesque). Έστω Q να είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του μετρικού χώρου (X, d). Αν ο X είναι συμπαγής, τότε υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε υποσύνολο του X που έχει διάμετρο μικρότερη του δ, υπάρχει ένα στοιχείο του Q που το περιέχει. Ο αριθμός δ ονομάζεται αριθμός Lebesque για το κάλυμμα Q.*

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι αν ο X είναι ακολουθιακά συμπαγής τότε κάθε κάλυμμα Q του X έχει έναν αριθμό Lebesque δ. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος, ώστε κάθε σύνολο διαμέτρου μικρότερης του δ να βρίσκεται σε τουλάχιστον ένα στοιχείο του Q. Τότε ο X δεν ακολουθιακά συμπαγής.

Εφόσον υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο δ , αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει ένα υποσύνολο διαμέτρου μικρότερης δ το όποιο δεν βρίσκεται μέσα σε κανένα στοιχείο του Q. Συγκεκριμένα, για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$ μπορούμε να διαλέξουμε ένα σύνολο C_n που έχει διάμετρο μικρότερη του $\frac{1}{n}$ το οποίο δεν περιέχεται σε κανένα στοιχείο του Q. Επιλέγω για κάθε n ένα σημείο x_n του C_n. Ισχυριζόμαστε ότι η ακολουθία (x_n) δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Υποθέτοντας ότι η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{n_k}) που συγκλίνει στο x λέμε τώρα ότι το x ανήκει σε κάποιο στοιχείο A του Q και επειδή το A είναι ανοιχτό, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε η $B(x, \varepsilon) \subset A$.

Διαλέγω i αρκετά μεγάλο τέτοιο ώστε η $d(x_{n_i}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ και $\frac{1}{n_i} < \frac{\varepsilon}{2}$. Τώρα το C_{n_i} βρίσκεται σε μία $\frac{1}{n_i}$ περιοχή του x_{n_i}. Ακολουθεί ότι το $C_n \subset B(x, \varepsilon)$. Τότε $C_{n_i} \subset A$ αντίθετα με την επιλογή των συνόλων C_n. Άτοπο. □

2.2 Διάσταση σε πεπερασμένους τοπολογικούς χώρους

Ορισμός 2.2.1. *Μια συλλογή $\mathcal{Q}$ υποσυνόλων ενός χώρου X λέγεται ότι έχει τάξη $m+1$ αν κάθε σημείο του X ανήκει το πολύ σε $m+1$ στοιχεία του $\mathcal{Q}$ και κανένα σημείο του X δεν ανήκει σε παραπάνω από $m+1$ στοιχεία του $\mathcal{Q}$.*

Ορισμός 2.2.2. *Δοσμένης συλλογής $\mathcal{Q}$ υποσυνόλων του X μια συλλογή $\mathfrak{B}$ λέμε ότι εκλεπτύνει το $\mathcal{Q}$ ή ότι είναι μια εκλέπτυνση του $\mathcal{Q}$ αν κάθε στοιχείο b του $\mathfrak{B}$ περιέχεται σε τουλάχιστον ένα στοιχείο του $\mathcal{Q}$.*

Ορισμός 2.2.3. *Ένας χώρος X ονομάζεται πεπερασμένης διάστασης αν υπάρχει κάποιος ακέραιος m τέτοιος ώστε για κάθε ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{Q}$ του X υπάρχει ένα ανοιχτό κάλυμμα $\mathfrak{B}$ του X που εκλεπτύνει το $\mathcal{Q}$ και έχει τάξη το πολύ $m+1$. Η τοπολογική διάσταση του X ορίζεται να είναι η μικρότερη τιμή του m για την οποία ισχύουν τα παραπάνω.*

Κάποια βασικά δεδομένα που αφορούν την τοπολογική διάσταση δίνονται στα ακόλουθα θεωρήματα.

Θεώρημα 2.2.4. *Αν ο Y είναι κλειστό υποσύνολο του X και αν ο X έχει πεπερασμένη διάσταση τότε και ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση και ισχύει ότι $dimY \leq dimX$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $dimX = m$. Έστω $\mathcal{Q}$ να είναι ένα κάλυμμα ανοιχτών συνόλων του Y. Για κάθε $A \in \mathcal{Q}$ επιλέγω ένα ανοιχτό σύνολο A' του X τέτοιο ώστε $A' \cap Y = A$. Καλύπτουμε τον X με τα ανοιχτά σύνολα A' μαζί με το ανοιχτό σύνολο $X \setminus Y$. Έστω $\mathfrak{B}$ να είναι η εκλέπτυνση αυτού του καλύμματος το οποίο είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του X και έχει τάξη το πολύ $m+1$. Τότε η συλλογή $\{B \cap Y | B \in \mathfrak{B}\}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του Y από ανοιχτά σύνολα στον Y το οποίο έχει τάξη το πολύ $m+1$ και εκλεπτύνει το $\mathcal{Q}$. Άρα έχουμε οτι $dimY \leq m$. □

Θεώρημα 2.2.5. *Έστω $X = Y \cup Z$ όπου Y και Z είναι κλειστά σύνολα στον X έχοντας πεπερασμένη τοπολογική διάσταση. Τότε,*

$$dimX = max\{dimY, dimZ\}.$$

Απόδειξη. Έστω $m = max\{dimY, dimZ\}$ τότε $dimX \geq m$. Μένει να αποδείξουμε ότι $dimX$ ότι είναι το πολύ m.

Βήμα 1: Πρώτα αποδεικνύουμε το ακόλουθο.

Υποθέτουμε ότι Y είναι κλειστό υποσύνολο του X και $dimY \leq m$. Αν $\mathcal{Q}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του X τότε υπάρχει ένα ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{E}$ του X που εκλεπτύνει το $\mathcal{Q}$ έτσι ώστε κανένα σημείο του Y να μη βρίσκεται σε παραπάνω από $m+1$ στοιχεία του $\mathcal{E}$. (Αν το $\mathcal{E}$ ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη λέμε ότι ο περιορισμός του $\mathcal{E}$ στον Y έχει τάξη το πολύ $m+1$).

Για να αποδείξουμε αυτό το γεγονός θα εξετάσουμε τη συλλογή $\{A \cap Y | A \in \mathcal{Q}\}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του Y άρα έχει εκλέπτυνση $\mathfrak{B}$ η οποία είναι ανοιχτό κάλυμμα του Y και έχει τάξη το πολύ $m+1$. Δοσμένου $B \in \mathfrak{B}$ διαλέγω ένα ανοιχτό σύνολο U_B του X τέτοιο ώστε $U_B \cap Y = B$. Διαλέγω επίσης ένα στοιχείο A_B του $\mathcal{Q}$ τέτοιο ώστε $B \subset A_B$.

Έστω $\mathcal{E}$ να είναι συλλογή αποτελούμενη από όλα τα σύνολα $U_B \cap A_B$ για $B \in \mathfrak{B}$ μαζί με όλα τα σύνολα $A \setminus Y$ για $A \in \mathcal{Q}$. Τότε, το $\mathcal{E}$ είναι το ανοιχτό κάλυμμα του X που θέλαμε.

Βήμα 2: Έστω $\mathcal{Q}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του X. Έστω $\mathfrak{B}$ να είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του X που εκλεπτύνει το $\mathcal{Q}$ του οποίου ο περιορισμός του στον Y έχει τάξη το πολύ $m+1$. Έπειτα, έστω $\mathcal{E}$ να είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του X που εκλεπτύνει το $\mathfrak{B}$ του οποίου ο περιορισμός του στο Z έχει τάξη το πολύ $m+1$.

Έχουμε σχηματίσει ένα νέο κάλυμμα $\mathcal{D}$ του X όπως ακολουθεί :

Ορίζουμε $f : \mathcal{E} \mapsto \mathfrak{B}$ διαλέγοντας για κάθε $C \in \mathcal{E}$ ένα στοιχείο $f(C)$ του $\mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε $C \subset f(C)$. Δοσμένου $B \in \mathfrak{B}$ ορίζουμε $D(B)$ να είναι η ένωση όλων εκείνων των στοιχείων C του $\mathcal{E}$ για το οποίο $f(C) = B$. (Φυσικά το $D(B)$ είναι κενό αν το B δεν είναι στην εικόνα της f).

Έστω $\mathcal{D}$ να είναι η συλλογή όλων των συνόλων $D(B)$ για $B \in \mathfrak{B}$. Τώρα, το $\mathcal{D}$ εκλεπτύνει το $\mathfrak{B}$ διότι $D(B) \subset B$ για κάθε B ως εκ τούτου το $\mathcal{D}$ εκλεπτύνει το $\mathcal{Q}$. Επίσης το $\mathcal{D}$ καλύπτει τον X διότι το $\mathcal{E}$ καλύπτει τον X και $C \subset D(f(C))$ για κάθε $C \in \mathcal{E}$. Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{D}$ έχει τάξη το πολύ $m+1$ και τότε το θεώρημα θα αποδειχτεί.

Υποθέτουμε ότι,

$$x \in D(B_1) \cap \ldots \cap D(B_k).$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $k \leq m+1$. Έχουμε,

$$x \in C_1 \cap \ldots \cap C_k \subset D(B_1) \cap \ldots \cap D(B_k) \subset B_1 \cap \ldots \cap B_k.$$

Αν το x τυχαίνει να βρίσκεται στον Y τότε $k \leq m+1$ διότι ο περιορισμός του $\mathfrak{B}$ στον Y έχει τάξη το πολύ $m+1$ και αν το x βρίσκεται στον Z τότε $k \leq m+1$ διότι ο περιορισμός του $\mathcal{E}$ στον Z έχει τάξη το πολύ $m+1$. □

Συνέπειες του Θεωρήματος 2.2.5.

Έστω $Q = Y_1 \cup \ldots \cup Y_k$ τέτοιο ώστε κάθε Y_i να είναι κλειστό στον X και έχει πεπερασμένη διάσταση. Τότε,

$$dimX = max\{dimY_1, \ldots, dimY_k\}.$$

Προφανώς η διάσταση του X (αν υπάρχει) είναι τοπολογική αμετάβλητη. Στην περίπτωση που ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος ο ορισμός μπορεί να διατυπωθεί με έναν τρόπο που να περιέχει μετρική.

Λήμμα 2.2.6. *Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος. Τότε $dimX \leq m$ αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα $\mathfrak{B}$ του X από σύνολα με διάμετρο μικρότερη του ε του το $\mathfrak{B}$ να έχει τάξη το πολύ $m+1$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $dimX \leq m$. Παίρνουμε ένα κάλυμμα του X από ανοικτές μπάλες ακτίνας $\frac{\varepsilon}{3}$ και διαλέγουμε $\mathfrak{B}'$ να είναι μία εκλέπτυνση του $\mathcal{Q}$ το οποίο είναι ανοικτό κάλυμμα του X και έχει τάξη το πολύ $m+1$.

Έστω $\mathfrak{B}$ να είναι πεπερασμένη υποσυλλογή του $\mathfrak{B}'$ η οποία καλύπτει το X. Τότε το $\mathfrak{B}$ έχει τάξη το πολύ $m+1$ και τα στοιχεία του $\mathfrak{B}$ έχουν διάμετρο μικρότερη του ε.

Για να αποδείξουμε τον τελευταίο ισχυρισμό έστω $\mathcal{Q}$ να είναι τυχαίο ανοικτό κάλυμμα του X. Έστω $\varepsilon > 0$ να είναι ένας αριθμός Lebesque για το

$\mathcal{Q}$ και διαλέγουμε ένα πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα $\mathfrak{B}$ του X από σύνολα διαμέτρου μικρότερης του ε που να έχει τάη το πολύ $m+1$. Το $\mathfrak{B}$ να έχει τάξη το πολύ $m+1$. Το $\mathfrak{B}$ είναι η εκλέπτυνση του $\mathcal{Q}$ που θέλαμε. $\square$

2.3 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1. *Το διάστημα $[a, b]$ έχει τοπολογική διάσταση 1. Δοσμένου $\varepsilon > 0$ μπορεί κανείς να επιλέξει $\{t_1, \ldots, t_n\} a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ του $t_i - t_{i-1} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ για κάθε i.*

Τότε, η συλλογή

$$\mathfrak{B} = \{[a, t_1), (t_0, t_2), (t_1, t_3), (t_2, t_4) \ldots (t_{n-2}, t_n), (t_{n-1}, b]\}$$

είναι ένα ανοικτό κάλυμμα από σύνολα διαμέτρου μικρότερη του ε και το $\mathfrak{B}$ έχει τάξη 2. Ως εκ τούτου $dim[a, b] \leq 1$.

Από την άλλη μεριά, δοσμένου $\varepsilon \leq b - a$, έστω $\mathfrak{B}$ να είναι οποιοδήποτε ανοικτό κάλυμμα του $[a, b]$ από σύνολα διαμέτρου μικρότερη του ε. Δηλώνουμε ότι το $\mathfrak{B}$ έχει τάξη το λιγότερο 2. Υποθέτω ότι το $\mathfrak{B}$ έχει τάξη 1 τότε δύο στοιχεία του $\mathfrak{B}$ δεν τέμνονται. Επειδή τα στοιχεία του $\mathfrak{B}$ έχουν διάμετρο μικρότερη του ε η συλλογή $\mathfrak{B}$ πρέπει να περιέχει πάνω από ένα στοιχείο, έστω U να είναι το ένα στοιχείο του $\mathfrak{B}$ και V να είναι η ένωση όλων των υπολοίπων.

Τότε, τα U και V σχηματίζουν μια διαμέριση του $[a, b]$ αντίθετα με το γεγονός ότι αυτό το διάστημα είναι συνεκτικό.

Παράδειγμα 2. *Κάθε συμπαγές υποσύνολο C του $\mathbb{R}^2$ έχει τοπολογική διάσταση το πολύ 2. Για να αποδείξουμε αυτό το γεγονός κατασκευάζουμε ένα συγκεκριμένο κάλυμμα $\mathcal{Q}$ του $\mathbb{R}^2$ το οποίο έχει τάξη 3. Αρχίζουμε ορίζοντας $\mathcal{Q}_2$ να είναι η συλλογή όλων των μοναδιαίων τετραγώνων του $\mathbb{R}^2$ με την ακόλουθη μορφή*

$$\mathcal{Q}_2 = \{(n, n+1) \times (m, m+1) | m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

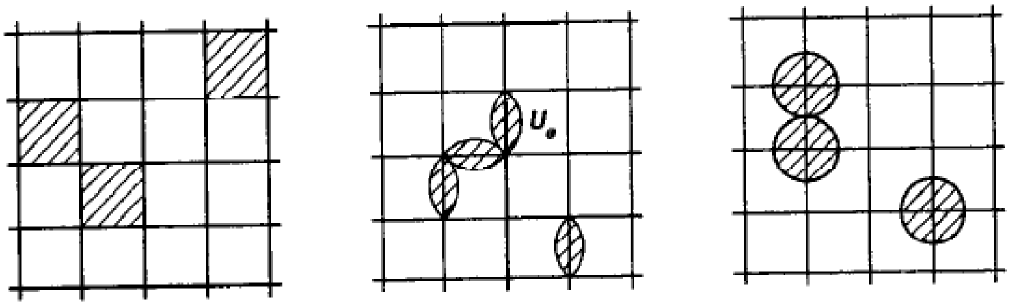
Σημειώστε ότι τα στοιχεία του $\mathcal{Q}_2$ είναι ξένα . Έπειτα ορίζουμε συλλογή $\mathcal{Q}_1$ παίρνοντας από κάθε (ανοικτή) πλευρά e από αυτά τα τετράγωνα

$$e = \{n\} \times (m, m+1)$$

ή

$$e = (n, n+1) \times \{m\}$$

και επεκτείνοντας το ελαφρώς σε ένα ανοικτό σύνολο U_e του $\mathbb{R}^2$, δίνοντας προσοχή στο να εξασφαλιστεί ότι αν $e \neq e'$ τα σύνολα U_e και $U_{e'}$ είναι ξένα. Διαλέγουμε επίσης κάθε U_e τέτοιο ώστε η διάμετρός του να είναι το πολύ 2.



Σχήμα 2.1

Τελικά ορίζουμε $\mathcal{Q}_0$ να είναι η συλλογή αποτελούμενη από όλες τις ανοικτές μπάλες ακτίνας $\frac{1}{2}$ και με κέντρα τα σημεία $n \times m$.

Η συλλογή $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_2 \cup \mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_0$ είναι κάλυμμα του $\mathbb{R}^2$. Κάθε ένα από τα στοιχεία της έχει διάμετρο το πολύ 2 και η $\mathcal{Q}$ τάξη 3, οπότε κανένα στοιχείο του $\mathbb{R}^2$ δεν μπορεί να βρίσκεται σε παραπάνω από ένα σύνολο από κάποιο από τα $\mathcal{Q}_i$.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι κάθε συμπαγές σύνολο C στο $\mathbb{R}^2$ έχει τοπολογική διάσταση το πολύ 2. Δοσμένου $\varepsilon > 0$ θεωρούμε τον ομοιομορφισμό $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ που ορίζεται ως $f(x) = (\frac{1}{3\varepsilon})x$. Παίρνουμε τις εικόνες κάτω από την f από τα ανοικτά σύνολα της συλλογής $\mathcal{Q}$. Αυτές θα σχηματίσουν ένα ανοικτό κάλυμμα του $\mathbb{R}^2$ από τα σύνολα διαμέτρου μικρότερη του ε. Διαλέγω τελικά πολλά από αυτά τα οποία καλύπτουν το C, αυτό είναι το επιθυμητό ανοικτό κάλυμμα του C.

Φυσικά δεν έχουν όλα τα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ διάσταση ακριβώς 2. Ένα μονοσύνολο έχει διάσταση 0 για παράδειγμα και ένα κλειστό διάστημα του άξονα των x έχει διάσταση 1. Είναι στην πραγματικότητα μη-τετριμμένο να αποδείξουμε ότι κάποια υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ έχουν τυπολογική διάσταση 2, απαιτούνται οι τεχνικές της αλγεβρικής τοπολογίας.

Κεφάλαιο 3

Θεώρημα Εμφύτευσης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την απόδειξη του θεωρήματος της εμφύτευσης που αναφέραμε νωρίτερα στο αποτέλεσμα ότι κάθε συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος τοπολογικής διάστασης m μπορεί να εμφυτευθεί στον $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Ορισμός 3.0.1. *Ένα σύνολο $\{x_0, \ldots, x_k\}$ σημείων του $\mathbb{R}^N$ ονομάζεται γεωμετρικά ανεξάρτητο αν*

$$\Big[\sum_{i=0}^{k} a_i x_i = 0 \text{ με } \sum_{i=1}^{k} a_i = 0\Big] \Rightarrow \text{κάθε } a_i = 0\Big].$$

Είναι φανερό ότι οποιοδήποτε σύνολο αποτελούμενο από μόνο ένα σημείο είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Τι σημαίνει η γεωμετρική ανεξαρτησία αν το k είναι θετικό;

Το σύνολο των σημείων $\{x_0, \ldots, x_k\}$ είναι γεωμετρικά ανεξάρτητο αν και μόνον αν το σύνολο των διανυσμάτων
$\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots, x_k - x_0\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αυτό μας δίνει να φανταστούμε οποιαδήποτε δυο διακριτά σημεία που διαμορφώνουν ένα γεωμετρικά ανεξάρτητο σύνολο. Τρία σημεία διαμορφώνουν ένα ανεξάρτητο σύνολο αν δεν είναι συγγραμικά και ούτω καθ ' εξής.

Έπεται από αυτές τις παρατηρήσεις ότι τα σημεία

$$O = (0, 0, \ldots, 0),$$

$$\epsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\epsilon_N = (0, 0, \ldots, 1)$$

είναι γεωμετρικά ανεξάρτητα στον $\mathbb{R}^N$. Έπεται επίσης ότι το $\mathbb{R}^N$ δεν περιέχει περισσότερα από $N+1$ σημεία γεωμετρικά ανεξάρτητα.

Ορισμός 3.0.2. *Έστω $\{x_0, \dots, x_k\}$ είναι ένα σύνολο σημείων του $\mathbb{R}^N$ το όποιο είναι γεωμετρικά ανεξάρτητο. Το επίπεδο P που προσδιορίζεται από αυτά τα σημεία ορίζεται να είναι το σύνολο όλων των σημείων x του $\mathbb{R}^N$ τέτοια ώστε*

$x = \sum_{i=0}^{k} t_i x_i$, όπου $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$

Το P μπορεί επίσης να εκφραστεί ως το σύνολο όλων των σημείων x τέτοιο ώστε

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i (x_i - x_0) \tag{3.1}$$

για κάποιους συντελεστές $a_1, \dots, a_k$. Έτσι το P μπορεί να περιγραφεί όχι μόνο ως "το επίπεδο ορισμένο από τα σημεία $x_0, \dots, x_k$", αλλά επίσης ως "το επίπεδο που περνάει από το σημείο x_0 και είναι παράλληλο στα διανύσματα $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_k - x_0$".

Θεωρούμε τώρα τον ομοιομορφισμό $T : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ ορισμένο από την εξίσωση $T(x) = x - x_0$. Ονομάζεται μία μεταφορά (ή παράλληλη μετατόπιση) του $\mathbb{R}^N$. Η έκφραση 3.1 δείχνει ότι αυτή η απεικόνιση μεταφέρει το επίπεδο P πάνω σε ένα διανυσματικό υπόχωρο V^k του $\mathbb{R}^N$ το οποίο έχει ως βάση τα διανύσματα $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_k - x_0$. Για αυτό τον λόγο συχνά ονομάζουμε P ένα k-επίπεδο στον $\mathbb{R}^N$.

Πρώτον αν $k < N$ τότε το k-επίπεδο P απαραίτητα έχει κενό εσωτερικό στον $\mathbb{R}^N$ (διότι το V^k έχει κενό εσωτερικό). Και δεύτερο αν y είναι οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}^N$ το οποίο δεν βρίσκεται στο P, τότε το σύνολο $\{x_0, \dots, x_k, y\}$ είναι γεωμετρικά ανεξάρτητο.

Εάν $y \notin P$, τότε το $T(y) = y - x_0$ δεν βρίσκεται στον V^k. Από ένα θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας τα διανύσματα $\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_k - x_0, y - x_0\}$ είναι γεωμετρικά ανεξάρτητο από το οποίο έπεται το συμπέρασμά μας.

Ορισμός 3.0.3. *Ένα σύνολο A σημείων του $\mathbb{R}^N$ λέμε ότι είναι σε γενική θέση στον $\mathbb{R}^N$ αν κάθε υποσύνολο του A που περιέχει $N+1$ ή λιγότερα σημεία είναι γεωμετρικά ανεξάρτητο.*

Λήμμα 3.0.4. *Δοσμένου ενός πεπερασμένου συνόλου $\{x_1, \dots, x_n\}$ σημείων του $\mathbb{R}^N$ και δοσμένου $\delta > 0$ τότε υπάρχει ένα σύνολο $\{y_1, \dots, y_n\}$ σημείων του $\mathbb{R}^N$ σε γενική θέση στον $\mathbb{R}^N$ τέτοιο ώστε $|x_i - y_i| < \delta$ για κάθε i.*

Απόδειξη. Συνεχίζουμε με επαγωγή. Θέτουμε $y_1 = x_1$. Υποθέτουμε ότι έχουμε $\{y_1, \dots, y_p\}$ σε γενική θέση στον $\mathbb{R}^N$. Θεωρούμε το σύνολο όλων των επιπέδων στον $\mathbb{R}^N$ προσδιορισμένο από υποσύνολα του $\{y_1, \ldots, y_p\}$ τα οποία περιέχουν N ή λιγότερα στοιχεία.

Κάθε τέτοιο υποσύνολο είναι γεωμετρικά ανεξάρτητο και προσδιορίζει ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^N$ για κάποιο $k \leq N-1$. Κάθε ένα από αυτά τα επίπεδα κενό εσωτερικό στον $\mathbb{R}^N$. Δεδομένου ότι υπάρχουν μόνο πεπερασμένα από αυτά η ένωσή τους έχει επίσης κενό εσωτερικό στον $\mathbb{R}^N$. (Θυμίζουμε ότι ο $\mathbb{R}^N$ είναι ένας Baire χώρος). Διαλέγουμε y_{p+1} να είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}^N$ εντός του $(x_{p+1} - \delta, x_{p+1} + \delta)$, το οποίο δεν βρίσκεται σε κανένα από αυτά τα επίπεδα.

Έπεται ότι το σύνολο

$$C = \{y_1, \ldots, y_p, y_{p+1}\}$$

βρίσκεται σε γενική θέση στον $\mathbb{R}^N$. Έστω D να είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του C το οποίο περιέχει $N+1$ ή λιγότερα σημεία. Αν το D δεν περιέχει το y_{p+1} τότε το D είναι γεωμετρικά ανεξάρτητο από την υπόθεση της επαγωγής. Αν p περιέχει το y_{p+1} τότε το $D \setminus \{y_{p+1}\}$ περιέχει N ή λιγότερα σημεία και το y_{p+1} δεν είναι στο επίπεδο που ορίζεται από αυτά τα σημεία από την κατασκευή. Όπως σημειώθηκε παραπάνω το D είναι γεωμετρικά ανεξάρτητο.

$\square$

Θεώρημα 3.0.5. *(Θεώρημα Εμφύτευσης). Κάθε συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος X τοπολογικής διάστασης m μπορεί να εμφυτευθεί στον $\mathbb{R}^{2m+1}$.*

3.1 Απόδειξη Θεωρήματος Εμφύτευσης

Απόδειξη. Έστω $N = 2m+1$. Θεωρούμε τη μετρική στον $\mathbb{R}^N$ που ορίζεται

$$|x-y|_\infty = max\{|x_i - y_i|, i = 1, \ldots, N\},$$

για $x = x_1, \ldots, x_n$ και $y = y_1, \ldots, y_n$. Συμβολίζουμε $\mathcal{E}(X, \mathbb{R}^N)$ το χώρο των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε την μετρική ρ στον χώρο $\mathcal{E}(X, \mathbb{R}^N)$

$$\rho(f,g) = max\{|f(x) - g(x)|_\infty : x \in X\}$$

Ο χώρος $\mathcal{E}(X, \mathbb{R}^N)$ είναι πλήρης με τη μετρική ρ. Διαλέγουμε μια μετρική d για το χώρο X. Επειδή ο X είναι συμπαγής η d είναι φραγμένη. Δοσμένης συνεχούς απεικόνισης $f : X \mapsto \mathbb{R}^N$, ορίζουμε

$$\Delta(f) = \sup\{diam f^{-1}(\{z\}) | z \in \mathbb{R}^N\}$$

Ο αριθμός $\Delta(f)$ μετράει πόσο πολύ " αποκλίνει " η f από το να είναι "1 -1". Αν $\Delta(f) = 0$, κάθε σύνολο $f^{-1}(\{z\})$ αποτελείται από το πολύ ένα σημείο, έτσι η f είναι "1-1".

Τώρα δοσμένου $\varepsilon > 0$, ορίζουμε U_ε να είναι το σύνολο όλων αυτών των συνεχών απεικονίσεων $f : X \mapsto \mathbb{R}^N$ τέτοιο ώστε $\Delta(f) < \varepsilon$. Αυτό περιέχει όλες αυτές τις απεικονίσεις που " αποκλίνουν " από το να είναι "1-1" λιγότερο από το ε. Ας δείξουμε ότι το U_ε είναι και ανοικτό και πυκνό στο $\mathcal{E}(X, \mathbb{R}^N)$. Ακολουθεί ότι η τομή

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} U_{1/n}$$

είναι πυκνή στο $\mathcal{E}(X, \mathbb{R}^N)$ και είναι, ειδικότερα, μη κενή. Αν η f είναι στοιχείο αυτής της τομής, τότε $\Delta(f) < 1/n$ για κάθε n.

Άρα $\Delta(f) = 0$ και η f είναι "1-1". Επειδή ο X είναι συμπαγής η f είναι μία εμφύτευση. Έτσι το θεώρημα της εμφύτευσης έχει αποδειχθεί.

(i) U_ε είναι ανοικτό στο $\mathcal{E}(X, \mathbb{R}^N)$. Δοσμένου ενός στοιχείου f του U_ε, θέλουμε να βρούμε κάποια σφαίρα $B_\rho(f, \delta)$ για την f η οποία να εμπεριέχεται στην U_ε. Πρώτα διαλέγουμε αριθμό b στον $\Delta(f) < b < \varepsilon$.

Σημειώνουμε ότι αν $f(x) = f(y) = z$ τότε το x και το y ανήκουν στο σύνολο $f^{-1}(\{z\})$, έτσι ώστε η $d(x, y)$ πρέπει να είναι μικρότερη του b. Ακολουθεί ότι αν διαλέξουμε A να είναι το ακόλουθο υποσύνολο του $X \times X$

$$A = \{(x, y) | d(x, y) \geq b\}$$

τότε η συνάρτηση $|f(x) - f(y)|_\infty$ είναι θετική στο A. Τώρα το A είναι κλειστό στο $X \times X$ και άρα συμπαγές.

Συνεπώς, η συνάρτηση $|f(x) - f(y)|_\infty$ έχει ένα θετικό ελάχιστο στο A. Έστω

$$\delta = \frac{1}{2} min\{|f(x) - f(y)|_\infty : (x, y) \in A\}.$$

ισχυριζόμαστε ότι αυτό το δ μας αρκεί.

Υποθέτουμε ότι η g είναι μια απεικόνιση τέτοια ώστε $\rho(f, g) < \delta$. Αν $(x, y) \in A$, τότε $|f(x) - f(y)|_\infty \geq 2\delta$ από τον ορισμό, και επειδή $\rho(f, g) < \delta$ πρέπει να έχουμε $|g(x) - g(y)|_\infty > 0$. Ως εκ τούτου η συνάρτηση $|g(x) - g(y)|_\infty$ είναι θετική στο A. Ως αποτέλεσμα αν x και y είναι δύο σημεία τέτοια ώστε $g(x) = g(y)$ τότε απαραίτητα $d(x, y) < b$. Συμπεραίνουμε ότι $\Delta(g) \leq b < \varepsilon$ όπως επιθυμούσαμε.

(ii) U_ε είναι πυκνό στο $\mathcal{E}(X, \mathbb{R}^N)$. Έστω $f \in \mathcal{E}(X, \mathbb{R}^N)$.

Δοσμένου $\varepsilon > 0$ και δοσμένου $\delta > 0$ θέλουμε να βρούμε συνάρτηση $g \in \mathcal{E}(X, \mathbb{R}^N)$ τέτοια ώστε η $g \in U_\varepsilon$ και $\rho(f, g) < \delta$. Καλύπτουμε τον X με ανοιχτά σύνολα $\{U_1, \ldots, U_n\}$ τέτοια ώστε

(1) $diam U_i < \varepsilon/2$ στο X

(2) $diamf(U_i) < \delta/2$ στον $\mathbb{R}^N$

(3) $\{U_1, \ldots, U_n\}$ έχει τάξη $\leq m+1$

Έστω $\{\phi_i\}$ να είναι μια διαμέριση της " μονάδας " που κυριαρχείται από τα $\{U_i\}$. Για κάθε i διαλέγω ένα σημείο $x_i \in U_i$.

Έπειτα, διαλέγω για κάθε i ένα σημείο $z_i \in \mathbb{R}^N$ τέτοιο ώστε $|f(x_i) - f(z_i)|_\infty < \delta/2$ και τέτοιο ώστε το σύνολο

$$\{z_1, \ldots, z_n\}$$

να είναι σε γενική θέση στον $\mathbb{R}^N$.

Τελικά, ορίζουμε την $g : X \mapsto \mathbb{R}^N$. Ισχυριζόμαστε ότι αυτή η g είναι η επιθυμητή συνάρτηση.

Πρώτα, δείχνουμε ότι $\rho(f,g) < \delta$. Σημειώστε ότι

$$g(x) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) z_i - \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) f(x)$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\sum \phi_i(x) = 1$. Τότε,

$$g(x) - f(x) = \sum \phi_i(x)(z_i - f(x_i)) + \sum \phi_i(x)(f(x_i) - f(x)).$$

Τώρα, $|z_i - f(x_i)|_\infty < \delta/2$ για κάθε i από επιλογή των σημείων z_i. Και αν το i είναι δείκτης τέτοιος ώστε $\phi_i(x) \neq 0$, τότε $x \in U_i$, διότι $diamf(U_i) < \delta/2$. Έπεται ότι $|f(x_i) - f(x)|_\infty < \delta/2$.

Εφόσον, $\sum \phi_i(x) = 1$ συμπεραίνουμε ότι $|g(x) - f(x)|_\infty < \delta$. Ως εκ τούτου $\rho(g,f) < \delta$.

Δεύτερον, δείχνουμε ότι η $g \in U_\varepsilon$. Θα αποδείξουμε ότι αν τα $x, y \in X$ και $g(x) = g(y)$ τότε το x και το y ανήκουν σε ένα από τα ανοικτά σύνολα U_i, έτσι ώστε απαραίτητα η $d(x,y) < \varepsilon/2$ (αφού $U_i < \varepsilon/2$). Ως αποτέλεσμα $\Delta(g) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, όπως επιθυμούσαμε. Έτσι υποθέτουμε ότι $g(x) = g(y)$. Τότε,

$$\sum_{i=1}^{n} [\phi_i(x) - \phi_i(y)] z_i = 0.$$

Επειδή το κάλυμμα $\{U_1, \ldots, U_n\}$ έχει τάξη το πολύ $m+1$, το πολύ $m+1$ από τους αριθμούς $\phi_i(x)$ είναι μη μηδενικοί και το πολύ $m+1$, από τους αριθμούς $\phi_i(y)$ είναι μη-μηδενικοί.

Έτσι, το άθροισμα $\sum[\phi_i(x)-\phi_i(y)]z_i$ έχει το πολύ τάξη $2m+2$ μη μηδενικών όρων. Σημειώνεται ότι το άθροισμα των συντελεστών μηδενίζεται αφού

$$\sum[\phi_i(x)-\phi_i(y)] = 1-1 = 0.$$

Τα σημεία z_i είναι σε γενική θέση στον $\mathbb{R}^N$, έτσι ώστε κάθε υποσύνολο από αυτό που έχει $N+1$ ή λιγότερα στοιχεία να είναι γεωμετρικά ανεξάρτητο. Από υπόθεση, $N+1 = 2m+2$ και συνεπώς $\phi_i(x)-\phi_i(y) = 0$ για όλα τα i. Τώρα $\phi_i(x) > 0$ για κάποιο i, έτσι ώστε το $x \in U_i$. Αφού $\phi_i(x) = \phi_i(y)$, έχουμε ότι το $y \in U_i$ επίσης, όπως επιθυμούσαμε.

□

3.2 Χώροι πεπερασμένης διάστασης

Για να δώσουμε κάποιο περιεχόμενο από το θεώρημα εμφύτευσης χρειαζόμαστε κάποια περισσότερα παραδείγματα από χώρους οι οποίοι είναι πεπερασμένοι διαστασιακά. Αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.1. *Κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ έχει τοπολογική διάσταση το πολύ N.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι μία γενίκευση της απόδειξης που δόθηκε στο παράδειγμα 3 παραπάνω για τον $\mathbb{R}^2$. Έστω ρ να είναι η τετραγωνική μετρική.

Βήμα1 : Ξεκινάμε χωρίζοντας τον $\mathbb{R}^N$ σε μοναδιαίους κύβους. Ορίζουμε $\mathcal{G}$ να είναι η ακόλουθη συλλογή ανοικτών διαστημάτων του $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{G} = \{(n, n+1) | n \in \mathbb{Z}\},$$

και ορίζουμε $\mathcal{K}$ να είναι η ακόλουθη συλλογή μονοσύνολων του $\mathbb{R}$

$$\mathcal{K} = \{\{n\}/n \in \mathbb{Z}\}.$$

Αν M είναι ένας ακέραιος τέτοιος ώστε $0 \leq M \leq N$ ας ορίσουμε $\mathcal{E}_M$ το σύνολο όλων των γινομένων

$$C = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_N$$

όπου ακριβώς M από τα σύνολα A_i ανήκουν στο $\mathcal{G}$ και τα υπόλοιπα ανήκουν στο $\mathcal{K}$. Αν $M > 0$ τότε το C είναι ομοιομορφικό στο γινόμενο $(0,1)^M$ και θα ονομάζεται ένα M-κύβος. Αν $M = 0$ τότε το C αποτελεί ένα μόνο σημείο και θα ονομάζεται 0-κύβος.

Έστω $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{E}_n$. Σημειώνουμε ότι κάθε σημείο x του $\mathbb{R}^N$ βρίσκεται σε ακριβώς ένα στοιχείο του $\mathcal{E}$, επειδή κάθε πραγματικός αριθμός x_i βρίσκεται σε ακριβώς ένα στοιχείο του $\mathcal{G} \cup \mathcal{K}$. Θα επεκτείνουμε κάθε στοιχείο C του $\mathcal{E}$ σε ένα ανοικτό σύνολο $U(C)$ του $\mathbb{R}^N$ διαμέτρου το πολύ 2 με τέτοιο τρόπο ώστε αν C και C' είναι δύο διακριτοί M-κύβοι, τότε τα $U(C)$ και τα $U(C')$ να είναι διακριτά.

Πρώτον, σημειώνουμε ότι αν C και C' είναι δύο διαφορετικοί M-κύβοι τότε $\overline{C} \cap C' = \emptyset$. Αυτό είναι εύκολο να το ελέγξουμε. Έστω $C = A_1 \times \ldots \times A_N$ και $C' = A'_1 \times \ldots \times A'_N$. Διαλέγω ένα διάστημα i έτσι ώστε $A_i \neq A'_i$. Αν $\overline{A_i}$ και A'_i είναι διακριτοί τότε το ίδιο ισχύει και για τα C και C'. Διαφορετικά το A_i πρέπει να είναι ένα διάστημα $(n, n+1)$ και A'_i πρέπει να είναι ίσο με $\{n\}$ ή $\{n+1\}$.

Σε αυτή τη περίπτωση αφού και το C και το C' είναι M-κύβοι πρέπει να υπάρχει κάποιο άλλο διάστημα j για το οποίο A_j είναι ένα μονοσύνολο $\{k\}$ και A_j είναι ένα διάστημα $(l, l+1)$. Τότε $\overline{A}_j$ και A'_j είναι διακριτά έτσι ώστε τα C και C' να είναι διακριτά.

Δεύτερον σημειώνουμε ότι η συλλογή $\mathcal{E}_M$ όλων των M-κύβων είναι τοπικά πεπερασμένοι. Πράγματι αν a είναι ένα σημείο με ακέραιες συντεταγμένες τότε το σύνολο $B_\rho(a, 1)$ τέμνει μόνο 3^N διαφορετικούς κύβους όλων των διαστάσεων.

Έστω $x \in C$, όπου C είναι ένας M-κύβος. Υπάρχει μια περιοχή του X που τέμνει μόνο πεπερασμένους M-κύβους C' διαφορετικούς από το C. Αφού $C \cap C' = \emptyset$ για κάθε C', μπορούμε να διαλέξουμε $\varepsilon(x)$-περιοχή του X που δεν τέμνει κανένα M-κύβο C' διαφορετικό από το C. Επίσης, έστω $\varepsilon(x) < 1$. Τότε ορίζουμε

$$U(C) = \bigcup_{x \in C} B_\rho(x, \frac{1}{2}\varepsilon(x)).$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι αν C και C' είναι διαφορετικοί M-κύβοι, τότε και τα $U(C)$ και $U(C')$ είναι ξένα.

Βήμα 2 Δοσμένου M με $0 \leq M \leq N$ ορίζουμε $\mathcal{Q}_M$ να είναι η συλλογή όλων των συνόλων $U(C)$ όπου $C \in \mathcal{Q}_M$. Τα στοιχεία είναι ξένα και το καθένα έχει διάμετρο το πολύ 2. (Για C που έχει διάμετρο 1 και κάθε σημείο του $U(C)$ βρίσκεται μέσα στο $\frac{1}{2}\varepsilon(x) < \frac{1}{2}$ ενός σημείου x του C.) Ολοκληρώνουμε την απόδειξη όπως στο παράδειγμα 2.

□

Βιβλιογραφία

[1] J. R.Munkres, *Topology a first course*, *Englewood Cliffs,New Jersey ,1975*

[2] Παναγιώτης Τσαμάτος, *Τοπολογία*, Εκδόσεις Τζιόλα, 2009