Η ΓΕΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΟΜΑΔΑ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΠΕΤΡΟΥΔΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2015

1. Εισαγωγικές Έννοιες

Για να μελετήσει κάποιος την γενική γραμμική ομάδα και τα αποτελέσματα αυτής θα πρέπει πρώτα να γνωρίζει κάποιους βασικούς ορισμούς και θεωρήματα που θα βοηθήσουν στην κατανόηση του θέματος. Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιαστούν ορισμένοι τέτοιοι ορισμοί και θεωρήματα.

Ορισμός 1.1. Έστω ότι η G είναι μια ομάδα και έστω X ένα σύνολο. Ονομάζουμε (αριστερή) δράση ϕ της ομάδας G στο σύνολο X την συνάρτηση:

$$\phi : G \times X \to X : (g, x) \to \phi(g, x)$$

που ικανοποιεί τα δύο ακόλουθα αξιώματα (συμβολίζουμε τη $\phi(g, x)$ ως $g.x$):

1. Προσεταιριστικότητα

   $(gh).x = g.(h.x)$ για όλα τα g, h στη G και για όλα τα x στο X.

2. Ταυτοτικότητα

   $e.x = x$ για όλα τα x στο X. (Εδώ το e υποδηλώνει το μοναδιαίο στοιχείο της ομάδας G.)

Το σύνολο X ονομάζεται G-σύνολο και η ομάδα G λέμε ότι δρα στο X (από τα αριστερά).

Ορισμός 1.2. Μία απλή ομάδα είναι η μη τετριμμένη ομάδα που οι μόνες υποομάδες της είναι η τετριμμένη ομάδα και ο εαυτός της.

Ορισμός 1.3. Το normal closure μίας υποομάδας H σε μία ομάδα G, συμβολίζεται ως H^G και ορίζεται με τους παρακάτω τρόπους:

- Ως η τομή όλων των κανονικών υποομάδων της G συμπεριλαμβανομένης της H
- Ως η υποομάδα που παράγεται από όλα τα gHg^{-1} όπου το gHg^{-1} υποδηλώνει μία συζυγία της H με το g.

Ορισμός 1.4. Η υποομάδα μεταθετών μίας ομάδας ορίζεται με τους παρακάτω ισοδύναμους τρόπους:

1. Είναι η υποομάδα που παράγεται από όλους τους μεταθέτες ολόκληρης της ομάδας.

2. Είναι το normal closure που παράγεται από όλους τους μεταθέτες ολόκληρης της ομάδας.

3. Είναι η τομή όλων των αβελιανών υποομάδων πηλίκο. Με άλλα λόγια, είναι η μικρότερη κανονική υποομάδα για την οποία η ομάδα πηλίκο είναι αβελιανή.

Τέλος κλείνοντας αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε τα τρία θεωρήματα ισομορφισμών.

Θεώρημα 1.5.

1. Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισού:

   Έστω οι G και H να είναι ομάδες και έστω $\phi : G \to H$ να είναι ένας ομομορφισμός. Τότε:

   (α΄) Ο πυρήνας της ϕ είναι κανονική υποομάδα τηω G,

   (β΄) Η εικόνα της ϕ είναι υποομάδα της H, και

   (γ΄) Η εικόνα της ϕ είναι ισόμορφη με την ομάδα πηλίκο $G/ker(\phi)$ (όπου $ker(\phi)$ ο πυρήνας της ϕ.

   Ιδιαίτερα, αν η ϕ είναι επιμορφισμός τότε η H είναι ισόμορφη με το $G/ker(\phi)$.

2. Δεύτερο Θεώρημα Ισομορφισμού:

   Έστω η G να είναι ομάδα. Έστω το S να είναι μία υποομάδα της G και έστω το N να είναι μία κανονική υποομάδα της G. Τότε:

   (α΄) Το γινόμενο SN είναι υποομάδα της G,

   (β΄) Η τομή $S \cap N$ είναι μια κανονική υποομάδα της S, και

   (γ΄) Η ομάδα πυλίκο $(SN)/N$ και η $S/(S \cup N)$ είναι ισόμορφες.

3. Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισού:

   Έστω η G να είναι μία ομάδα, και η N να είναι μια κανονική υποομάδα της G. Τότε:

(α′) Αν η K είναι η υποομάδα της G τέτοια ώστε η $N \subseteq K \subseteq G$ τότε η K/N είναι μια υποομάδα της G/N.

(β′) Κάθε υποομάδα της G/N είναι της μορφής K/N, για κάποια υποομάδα K της G τέτοια ώστε $N \subseteq K \subseteq G$.

(γ′) Αν η K είναι κανονική υποομάδα της G τέτοια ώστε $N \subseteq K \subseteq G$, τότε η K/N είναι κανονική υποομάδα της G/N.

(δ′) Κάθε κανονική υποομάδα της G/N είναι της μορφής K/N, για κάποια κανονική υποομάδα K της G τέτοια ώστε $N \subseteq K \subseteq G$.

(ε′) Αν η K είναι μια κανονική υποομάδα της G τέτοια ώστε $N \subseteq K \subseteq G$, τότε η ομάδα πυλήκο $(G/N)/(K/N)$ είναι ισόμορφη της G/K.

Στην επόμενη ενότητα θα μελετήσουμε τη βασική δομή της γενικής γραμμικής ομάδας καθώς και σημαντικές υποομάδες αυτής.

2. Βασική Δομή

Έστω F σώμα και $n \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε με $M_n(F)$ το σύνολο όλων των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα F. Συχνά γράφουμε ένα πίνακα ως $M = (m_{ij})$, όπου $m_{ij} \in F$ υποδηλώνει το (i, j)-στοιχείο του πίνακα M (το στοιχείο στην i γραμμή και j στήλη). Ορίζουμε τη γενική γραμμική ομάδα $GL(n, F)$ να είναι το υποσύνολο της $M_n(F)$ αποτελούμενο απ΄ τους αντιστρέψιμους πίνακες, ή ισοδύναμα απ'ολους τους πίνακες που έχουν μη μηδενική ορίζουσα. Η $GL(n, F)$ σχηματίζει μία ομάδα υπό τον πολλαπλασιασμό: αυτό ισχύει καθώς το γινόμενο δύο αντιστρέψιμων πινάκων ειναι αντιστρέψιμος πίνακας έστω $A, B \in GL(n, F)$ έχουμε ότι $det(A)det(B) = det(AB)$ και αφού έχουμε ότι $det(A) \neq 0$ και $det(B) \neq 0$, άρα συνεπάγεται $det(AB) \neq 0$. Άρα το γινόμενο ανήκει στη $GL(n, F)$ και άρα η πράξη κλειστή. Το μοναδιαίο στοιχείο το συμβολίζουμε με I και είναι ο μοναδιαίος πίνακας, και η πράξη είναι προσεταιριστική καθώς ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστική πράξη. Τέλος, υπάρχει ο αντίστροφος και ανήκει στη $GL(n, F)$ καθώς για κάθε $A \in G$ υπάρχει ο A^{-1} με $det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$, όμως $det(A) \neq 0$ και άρα $det(A)^{-1} \neq 0$ άρα $A^{-1} \in G$.

Γενικότερα, δοσμένου ενός διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διάστασης επί του F, ορίζουμε τη γενική γραμμική ομάδα $GL(V)$ να είναι η ομάδα όλων των αντιστρέψιμων γραμμικών απεικονίσεων του V: εδώ η πράξη της ομάδας είναι σύνθεση συναρτήσεων. Αν πάρουμε $V = F^n$, τότε η ομάδα που προκύπτει είναι ισόμορφη με προφανή τρόπο με την ομάδα πινάκων $GL(n, F)$, καθώς οποιοσδήποτε διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης επί του F είναι ισόμορφος με την F^n. Δεν χάνουμε τίποτα να στρέψουμε το ενδιαφέρων μας στις ομάδες $GL(n, F)$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν το F είναι πεπερασμένο σώμα, τότε ο ισομορφισμός της F εξαρτάται από την τάξη της $|F|$, η οποία πρέπει να είναι ίση με το p^a για κάποιο p πρώτο και κάποιο $a \in \mathbb{N}$. (Αυτό το αποτέλεσμα οφείλεται στον E. H. Moore, ιδρυτής του Τμήματος Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Σικάγο, που πρώτος το ανακοίνωσε το 1893 στο πρώτο World Congress of Mathematician στο Σικάγο.) Κατά συνέπεια, αν q είναι μια δύναμη ενός πρώτου αριθμού, τότε μπορούμε να γράψουμε $GL(n, q)$ αντί για $GL(n, F)$, όπου F είναι το μοναδικό σώμα τάξης q.

Θα ξεκινήσουμε με μία αναφορά της σημαντικότητας των γενικών γραμμικών ομάδων στη θεωρία πεπερασμένων ομάδων.

Ορισμός 2.1. Ο εκθέτης μίας ομάδας είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των τάξεων των στοιχείων της.

Πρόταση 2.2. Έστω E μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα με εκθέτη p, όπου p πρώτος. Τότε $Aut(E) \cong GL(n,p)$, όπου $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|E| = p^n$

Απόδειξη. Έστω $F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ να είναι το σώμα p στοιχείων. Θέλουμε να δώσουμε στην E τη δομή ενός διανυσματικού χώρου επί του σώματος F. Ορίζουμε μια πρόσθεση στην E ως εξής $x + y = xy$. Ορίζουμε βαθμωτό πολλαπλασιασμό στην E για $a \in F$ ως εξής $a \cdot x = x^a$, όπου $a \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $a = a + p\mathbb{Z}$: αυτό είναι καλά ορισμένο καθώς το E έχει εκθέτη p. Είναι εύκολο να δείξουμε τώρα ότι το E έχει μία δομή διανυσματικού χώρου επί του F καθώς ισχύουν οι ιδιότητες του διανυσματικού χώρου:

- **Πρόσθεση:**
  $$+ : E \times E \to E$$
  έχουμε ότι για κάθε $x, y, z \in E$
  1. μεταθετικότητα: $x + y = xy = yx = y + x$
  2. προσεταιριστικότητα: $x + (y + z) = x + (yz) = x(yz) = (xy)z = (x + y)z = (x + y) + z$
  3. ύπαρξη μοναδιαίου στοιχείου: $x + 1_E = x1_E = x = 1_E x = 1_E + x$
  4. ύπαρξη αντιστρόφου: $x + x^{-1_E} = xx^{-1_E} = 1_E = x^{-1_E}x = x^{-1_E} + x$

- **Βαθμωτός πολλαπλασιασμός:**
  $$\cdot : F \times E \to E$$
  έχουμε ότι για κάθε $x, y \in E$ και για κάθε $a, b \in F$
  1. επιμεριστικότητα ως προς το a: $a \cdot (x + y) = a \cdot (xy) = (xy)^a = x^a y^a = a \cdot x + a \cdot y$
  2. επιμεριστικότητα ως προς το x: $(a+b) \cdot x = x^{a+b} = x^a x^b = a \cdot x + b \cdot x$
  3. προσεταιριστικότητα: $a \cdot (b \cdot x) = a \cdot x^b = x^{ab} = (ab) \cdot x$
  4. ύπαρξη μοναδιαίου στοιχείου: $1_F \cdot x = x^1 = x$

Τώρα προκύπτει ότι κάθε ενδομορφισμός της ομάδας E είναι και ταυτόχρονα ένας γραμμικός μετασχηματισμός του διανυσματικού χώρου E επι του F, και αντίστροφα. Πράγματι, έστω:
$f : E \to E$, Ε ομαδα και $f(x) = T(x)$. Τότε $f(xy) = T(x+y) = T(x)+T(y) = f(x)f(y)$ και $f(x^a) = T(a \cdot x) = a \cdot T(x) = f(x)^a$.
Αντίστροφα, αν $T : E \to E$ γραμμικός μετασχηματισμός, Ε διανυσματικός χώρος και $T(x) = f(x)$ τότε $f(xy) = T(x+y) = T(x)+T(y) = f(x)f(y)$ και

$(f(x))^a = aT(x) = T(ax) = f(ax)$.
Άρα,$Aut(E) \cong GL(E) \cong GL(n,p)$, όπου $n = dim_F E$. •

Αν το E είναι όπως στη παραπάνω πρόταση, και έστω $\{x_1, ..., x_n\}$ είναι μία βάση για το E επι του σώματος p στοιχείων, τότε προκύπτει ότι σαν ομάδες έχουμε $E =< x_1 > \times ... \times < x_n >$, όπου κάθε $< x_i >$ είναι κυκλική ομάδα τάξης p. Συμπεραίνουμε ότι κάθε πεπερασμένη αβελιανή ομάδα με εκθετη p πρώτο είναι ισόμορφη με ένα ευθύ γινόμενο αντιγράφων του $\mathbb{Z}_p$. Αυτές οι ομάδες συνήθεις αβελιανές p-ομάδες. Ορίζουμε τη τάξη μίας συνήθης αβελιανής p-ομάδας E να είναι n, όπου $|E| = p^n$. Παρατηρούμε ότι η $Aut(\mathbb{Z}_p) \cong GL(1,p) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ από την Πρόταση 2.2.

Πρόταση 2.3. Έστω $n \in \mathbb{N}$, και έστω q να είναι ένας πρώτος αριθμός. Τότε

$$|GL(n,q)| = \prod_{k=1}^{n}(q^n - q^{k-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q^n - 1) \cdots (q-1)$$

Απόδειξη. Για να καθοριστεί το $|GL(n,q)|$, αρκεί να μετρήσουμε τον αριθμό των $n \times n$ πινάκων που έχουν στοιχεία απ΄ το σώμα F με q στοιχεία και τον οποίων οι γραμμες είναι γραμμικώς ανεξάρτητες επί του F. Για να κατασκευάσουμε έναν τέτοιο πίνακα, πρέπει να επιλέξουμε οποιοδήποτε μη μηδενικό διάνυσμα στο F^n σαν πρώτη γραμμή: υπάρχουν $q^n - 1$ τέτοιες επιλογές. Για την δεύτερη γραμμή μπορούμε να έχουμε οποιοδήποτε διάνυσμα στο F^n εκτός από τους q γραμμικούς συνδυασμούς της πρώτης γραμμης, άρα έχουμε για την δεύτερη γραμμή $q^n - q$ επιλογές. Όμοια για $1 < k \leq n$, η k-οστή γραμμη μπορεί να είναι οποιοδήποτε διάνυσμα στο F^n εκτός απο τους q^{k-1} γαμμικούς συνδυασμούς των προηγούμενων $k-1$ γραμμών: ως εκ τούτου υπάρχουν $q^n - q^{k-1}$ επιλογές για την k-οστή γραμμή. Άρα ο δηλωμένος τύπος τώρα έπεται. •

Τώρα επιλέγουμε ένα σώμα F και κάποιο $n \in \mathbb{N}$, και γράφουμε G αντι για $GL(n,F)$.

Έστω $M \in M_n(F)$ και γράφω $M = (m_{ij})$. Η κύρια διαγώνιος του M αποτελείται από τα στοιχεία m_{ii} για $1 \leq i \leq n$. Λέμε ότι ο M είναι διαγώνιος αν τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία του εμφανίζονται στη κύρια διαγώνιο. Λέμε ότι ο M είναι άνω τριγωνικός αν όλα τα στοιχεία του M που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο, δηλαδή τα m_{ij} για τα οποία $i > j$, είναι μηδέν.

Πρόταση 2.4. Το σύνολο B που αποτελείται απ΄ όλους τους αντιστρέψιμους άνω τριγωνικούς πίνακες είναι μια υποομάδα του G, και ονομάζεται συνήθης υποομάδα Borel.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι για κάθε $M, N \in B$ το $MN \in B$. Έστω $M = (m_{ij})$, $N = (n_{ij})$ και $MN = P = (p_{ij})$. Έχουμε ότι $m_{ij} = 0$ για κάθε $j < i$ και $n_{ij} = 0$ για κάθε $j < i$ και $p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}n_{kj}$. Άρα $m_{ik}n_{kj} = 0$ για κάθε $j < k < i$ οπότε έχουμε $p_{ij} = 0$ για κάθε $j < i$, άρα ο P είναι άνω τριγωνικός αντιστρέψιμος πίνακας καθώς έχουμε ότι το $p_{ii} = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}n_{ii}$ με τα $m_{ii} \neq 0 \neq n_{ii}$ και έτσι $p_{ii} \neq 0$. Ως εκ τούτου έχουμε ότι $P \in B$. Τώρα αρκεί να δείξουμε ότι αν $M \in B$, τότε ο αντίστροφός του ο N του M στο G βρίσκεται στο B. Γράφουμε $M = (m_{ij})$ και $N = (n_{ij})$. Καθώς το M είναι άνω τριγωνικός, βλέπουμε ότι η ορίζουσα του M είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων τις κυρίας διαγωνίου του M. Για να είναι αυτή η ορίζουσα μη μηδενική πρέπει να έχουμε $m_{ii} \neq 0$ για όλα τα i. Τώρα το $MN = I$, άρα $\sum_{k=1}^{n} m_{ik}n_{kj} = \delta_{ij}$ για κάθε i και j. (Εδώ το δ_{ij} είναι το σύμβολο δέλτα του Kronecker, το οποίο παίρνει τη τιμή 1 αν $i = j$ και 0 διαφορετικά.) Παίρνοντας $i = n$ έχουμε ότι $\sum_{k=1}^{n} m_{nk}n_{kj} = m_{n1}n_{1j} + ... + m_{nn}n_{nj} = m_{nn}n_{nj} = \delta_{nj}$ οπότε έχουμε $m_{nn}n_{n1} = 0, ..., m_{nn}n_{nn} = 1$ άρα αναγκαστικά $n_{nj} = 0$ για κάθε $j < n$ και $n_{nn} \neq 0$ καθώς $m_{nk} = 0$ για κάθε $k < n$ και $m_{nn} \neq 0$. Αν τώρα πάρουμε $i = n - 1$, έχουμε $\sum_{k=1}^{n} m_{(n-1)k}n_{kj} = m_{(n-1)1}n_{1j} + ... + m_{(n-1)(n-1)}n_{(n-1)j} + m_{(n-1)n}n_{(n-1)j} = m_{(n-1)(n-1)}n_{(n-1)n} + m_{(n-1)n}n_{(n-1)j} = \delta_{(n-1)j}$ οπότε έχουμε $m_{(n-1)(n-1)}n_{(n-1)1} + m_{(n-1)n}n_{(n-1)1} = 0, ..., m_{(n-1)(n-1)}n_{(n-1)(n-1)} + m_{(n-1)n}n_{(n-1)n} = 1$ άρα έχουμε $n_{(n-1)j} = 0$ για κάθε $j < n - 1$ και $n_{(n-1)(n-1)} \neq 0$ καθώς $m_{(n-1)k} = 0$ για κάθε $k < n - 1$ και $m_{(n-1)(n-1)} \neq 0$. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία, βρίσκουμε ότι $n_{ij} = 0$ όταν $j < i$, και ως εκ τούτου ότι $N \in B$ όπως θέλαμε. •

Γενικότερα, μία υποομάδα Borel της G είναι κάθε συζυγής της συνήθους υποομάδας Borel B.

Ένας πίνακας μετάθεσης είναι ένας πίνακας στον οποίον κάθε γραμμή και στήλη έχουν ακριβώς ένα μη μηδενικό στοιχείο και όλα τα μη μηδενικά στοιχεία είναι ίσα με το 1. Για παράδειγμα, ο ταυτοτικός πίνακας είναι ένας πίνακας μετάθεσης, και στην πραγματικότητα κάθε πίνακας μετάθεσης μπορει να προέλθει από τον ταυτοτικό πίνακα με αλλαγή στηλών (ή γραμμών). Κάθε πίνακας μετάθεσης είναι ορθογώνιος και έτσι έχει έναν αντίστροφο ο οποίος είναι και πάλι πίνακας μετάθεσης, δηλαδή ο ανάστροφός του. Ειδικότερα, όλοι οι $n \times n$ πίνακες μετάθεσης ανήκουν στο G.

Πρόταση 2.5. *Το σύνολο W που αποτελείται απ΄ όλους τους πίνακες μεταθέσεων είναι μία υποομάδα της G, ονομάζεται υποομάδα Weyl.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το γινόμενο δύο πινάκων μεταθέσεων είναι πίνακας μετάθεσης. Έστω $M = m_{ij}$ και $N = n_{ij}$ να είναι πίνακες μεταθέσεων και έστω $MN = P = p_{ij}$. Για κάθε i και j βλέπουμε ότι $p_{ij} = 1$ αν υπάρχει k τέτοιο ώστε $m_{ik} = n_{kj} = 1$, και ότι $p_{ij} = 0$ αλλιώς. Δοσμένου ενός i, υπάρχει μοναδικό k τέτοιο ώστε $m_{ik} = 1$, και υπάρχει μοναδικό j τέτοιο ώστε $n_{kj} = 1$. Έτσι βλέπουμε ότι $p_{ij} = 1$ για ένα και μόνο ένα j. Όμοια, δοσμένου ενός j, υπάρχει μοναδικό k τέτοιο ώστε $n_{kj} = 1$ και υπάρχει μοναδικό i τέτοιο ώστε $m_{ik} = 1$. Άρα $p_{ij} = 1$ για ακριβώς ένα i. Ώς εκ τούτου το P είναι πίνακας μετάθεσης. •

Έστω ότι το $V_n(F)$ υποδηλώνει τον διανυσματικό χώρο n-διάστατων διανυσμάτων στήλη με στοιχεία στο F, και έστω $v_1, ..., v_n$ να είναι η συνήθης βάση. Αν πολλαπλασιάσουμε το v_i από τα αριστερά ενός $n \times n$ πίνακα M, τότε παίρνουμε την i-οστή στήλη του M. Λέμε ότι το M στέλνει το v_i στην i-οστή στήλη του M.

Πρόταση 2.6. $W \cong \Sigma_n$, όπου Σ_n είναι η ομάδα μεταθέσεων n-στοιχείων.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι κάθε πίνακας μετάθεσης στέλνει κάθε v_i σε κάποιο v_k. Έστω $X = \{1, ..., n\}$. Για κάθε $w \in W$, ορίζουμε μία συνάρτηση $\phi(w) : X \to X$ με $\phi(w)(i) = k$ για $1 \leq i \leq n$, όπου $1 \leq k \leq n$ να είναι τέτοιο ώστε $v_k = wv_i$. Αν $\phi(w)(i) = \phi(w)(j)$ για κάποιο i και j, τότε η i-οστή και j-οστή στήλη του w πρέπει να είναι ίσες: καθώς ο w είναι ένας πίνακας μεταθέσεων, αυτό απαιτεί $i = j$. Η συνάρτηση $\phi(w)$ είναι 1-1, και ως εκ τούτου και επί (καθώς X είναι ένα πεπερασμένο σύνολο), για κάθε $w \in W$. Κατα συνέπεια, έχουμε μία συνάρτηση $\phi : W \to \Sigma_n$. Αν $\phi(w) = \phi(w')$ για κάποια $w, w' \in W$, τότε έχουμε $wv_i = w'v_i$ για κάθε $1 \leq i \leq n$. Αυτό σημαίνει, η i-οστή στήλη του w και w' είναι ίσες για κάθε $1 \leq i \leq n$, το οποίο δίνει $w = w'$. Έτσι η ϕ είναι 1-1. Αν $p \in \Sigma_n$, τότε $p = \phi(w)$, όπου w είναι ο πίνακας μετάθεσης του οποίου η i-οστή στήλη είναι $v_{p(i)}$ για κάθε $1 \leq i \leq n$. Έτσι η ϕ είναι επί. Τώρα θα δείξουμε ότι είναι και ομομορφισμός, δηλαδή $\phi(ww') = \phi(w)\phi(w')$. Έχουμε $\phi(ww')(i) = j$ τέτοιο ώστε $v_j = ww'v_i$. Επίσης $\phi(w')(i) = k$ τέτοιο ώστε $v_k = w'v_i$ και $\phi(w)(k) = l$ τέτοιο ώστε $v_l = wv_k = ww'v_i$, το οποίο ισχύει για κάθε $l = j$. •

Συνήθως θα θεωρούμε έναν πίνακα μετάθεσης w ως στοιχείο της Σ_n που στέλνει το i στο j. Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

αντιστοιχεί στο $(13)(24) \in \Sigma_4$, και έτσι αν w είναι αυτός ο πίνακας τότε θα γράφουμε ότι αν $w(i) = j$, τότε για κάθε $M \in M_n(F)$, η j-οστή γραμμη του wM είναι ίση με την i-οστή γραμμή του M, και η i-οστή στήλη του Mw είναι ίση με την j-ιοστή στήλη του M.

Έστω $1 \leq i, j \leq n$ με $i \neq j$, και $a \in F$. Ορίζουμε $X_{ij}(a)$ να είναι ο $n \times n$ πίνακας του οποίου το (k, l)-στοιχείο είναι ίσο με a αν $(k, l) = (i, j)$ και ίσο με δ_{kl} για όλα τ' άλλα (k, l). Για παράδειγμα, $X_{23}(a) \in M_3(F)$ είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αυτοί οι πίνακες $X_{ij}(a)$, και οι συζυγείς τους με στοιχεία στο G, ονομάζονται transvections.

Λήμμα 2.7. Έστω $a, b \in F$ και έστω i και j με $i \neq j$. Τότε για τα transvections ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

1. Ο $X_{ij}(a)$ έχει ορίζουσα 1 και ως εκ τούτου ανήκει στην G.

2. Αν $a \neq 0$, τότε $X_{ij}(a) \in B$ αν και μόνο αν $i < j$.

3. $X_{ij}(a)X_{ij}(b) = X_{ij}(a + b)$ και ως εκ τούτου $X_{ij}(a)^{-1} = X_{ij}(-a)$.

4. $[X_{ij}(a), X_{jk}(b)] = X_{ik}(ab)$, όπου i, j, k διακριτά.

5. Αν $w \in W$, τότε $wX_{ij}(a)w^{-1} = X_{w(i)w(j)}(a)$.

6. $X_{ij}(a)$ στέλνει το v_j στο $v_j + av_i$ και σταθεροποιεί το v_k όπου $k \neq j$.

7. Αν $M \in M_n(F)$, τότε η i-οστή γραμμή του $X_{ij}(a)M$ είναι ίση με το άθροισμα της i-οστής γραμμής του M με την j-οστή γραμμή του M πολλαπλασιασμένη με a. Επιπλέον, για κάθε $k \neq i$ η k-οστή γραμμή του $X_{ij}(a)M$ είναι ίση με την k-οστή γραμμή της M.

Απόδειξη.

1. Ο $X_{ij}(a)$ είναι είτε άνω τριγωνικός είτε κάτω τριγωνικός απο την κατασκευή του, οπότε η ορίζουσα του είναι το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου του. Έστω $X_{ij}(a) = (x_{ij})$. Έχουμε ότι $x_{ii} = 1$ για κάθε i, άρα η ορίζουσά του είναι πάντα ίση με 1 και ως εκ τούτου αντιστρέφεται και άρα ανήκει στο G.

2. Αν το $a \neq 0$ και το $X_{ij} \in B$ έχουμε ότι το $X_{ij}(a)$ είναι άνω τριγωνικός και καθώς το μόνο μη μηδενικό στοιχείο του είναι το a που βρίσκεται στη θέση (i, j) έχουμε αναγκαστικά ότι το $i < j$. Αντίστροφα, αν το $i < j$ έχουμε ότι το a είναι πάνω από την κύρια διαγώνιο. Από το (1) έχουμε

ότι ο $X_{ij}(a)$ είναι αντιστρέψιμος και από τον ορισμό του έχουμε ότι όλα τα μη μηδενικά του στοιχεία βρίσκονται στην διαγώνιό του, που είναι ίσα με 1, και το a το οποίο όπως είδαμε βρίσκεται πάνω από την διαγώνιο. Άρα ο $X_{ij}(a)$ είναι ένας άνω τριγωνικός αντιστρέψιμος πίνακας και άρα ανήκει στο B.

3. Έστω $X_{ij}(a) = (x_{ij})$ και $X_{ij}(b) = (y_{ij})$ τότε το (i, j)-στοιχείο του γινομένου αυτών των δύο πινάκων θα είναι: $\sum_{k=1}^{n} x_{ik}ykj = x_{i1}y_{1j} + ... + x_{ij}y_{jj} + ... + x_{ii}yij + ... + x_{in}y_{nj} = a + b$, καθώς $x_{ii} = 1$ και $y_{ii} = 1$ για κάθε i, $x_{ij} = a$ και $y_{ij} = b$ στο στοιχείο (i, j) και όλα τα άλλα στοιχεία είναι ίσα με 0. Τέλος, θα δείξουμε ότι το $X_{ij}(a^{-1}) = X_{ij}(-a)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $X_{ij}(a)X_{ij}(-a) = I$. Το μόνο στοιχείο που θα χρειαστεί να ελένξουμε είναι το (i, j) καθώς τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα που θα προκύψει από τον πολλαπλασιασμό είναι ίσα με το 1. Άρα έχουμε $\sum_{k=1}^{n} x_{ik}x'_{kj} = x_{i1}x'_{ij} + ... + x_{ii}x'_{ij} + ... + x_{ij}x'_{jj} + ... + x_{in}x'_{nj} = 1(-a) + a1 = 0$. Άρα έχουμε το αποτέλεσμα που θέλαμε.

4. Έστω $X_{ij}(a) = (x_{ij})$, $X_{jk}(b) = (y_{jk})$, $X_{ij}(-a) = (x'_{ij})$, $X_{jk}(-b) = (y'_{jk})$ και i, j, k διακριτά. Έχουμε ότι $[X_{ij}(a), X_{jk}(b)] = X_{ij}(a)X_{jk}(b)X_{ij}(-a)X_{jk}(-b)$. Θα εξετάσουμε καθε γινόμενο ξεχωριστά. Αρκεί να δούμε τα $(i, j), (j, k), (i, k)$ στοιχεία του γινομένου καθώς στα άλλα θα έχουμε 1 στη κύρια διαγώνιο και 0 διαφορετικά.

   - Για το $X_{ij}(a)X_{jk}(b)$ έχουμε:
     (α′) Για το (i, k)-στοιχείο: $\sum_{s=1}^{n} x_{is}y_{sk} = x_{i1}y_{1k} + ... + x_{ij}y_{jk} + ... + x_{in}y_{nk} = ab$
     (β′) Για το (i, j)-στοιχείο: $\sum_{s=1}^{n} x_{is}y_{sj} = x_{i1}y_{1j} + ... + x_{ij}y_{jj} + ... + x_{in}y_{nj} = a$
     (γ′) Για το (j, k)-στοιχείο: $\sum_{s=1}^{n} x_{js}y_{sk} = x_{j1}y_{1k} + ... + x_{jj}y_{jk} + ... + x_{jn}y_{nk} = b$

     Άρα έστω $X_{ij}(a)X_{jk}(b) = (e_{ij})$ είναι ο πίνακας που έχει $e_{ii} = 1$ για κάθε i, $e_{ij} = a$ στο (i, j)-στοιχείο, $e_{jk} = b$ στο (j, k)-στοιχείο, $e_{ik} = ab$ στο (i, k)-στοιχείο και 0 διαφορετικά.

   - Για το $X_{ij}(a)X_{jk}(b)X_{ij}(-a)X_{jk}(-b)$ έχουμε:
     (α′) Για το (i, k)-στοιχείο: $\sum_{s=1}^{n} e_{is}g_{sk} = e_{i1}g_{1k} + ... + e_{ij}g_{jk} + ... + e_{ii}g_{ik} + ... + e_{ik}g_{kk} ... + e_{in}g_{nk} = ab - ab + ab = ab$
     (β′) Για το (i, j)-στοιχείο: $\sum_{s=1}^{n} e_{is}g_{sj} = e_{i1}g_{1j} + ... + e_{ij}g_{jj} + ... + e_{ii}gij + ... + e_{in}g_{nj} = a - a = 0$
     (γ′) Για το (j, k)-στοιχείο: $\sum_{s=1}^{n} e_{js}g_{sk} = e_{j1}g_{1k} + ... + e_{jj}g_{jk} + ... + e_{jk}g_{kk} + ... + e_{jn}g_{nk} = -b + b = 0$

Άρα $[X_{ij}(a), X_{jk}(b)] = X_{ik}(ab)$ όπως θέλαμε.

5. Γνωρίζουμε ότι αν ο w είναι ένας πίνακας μετάθεσης τότε αν $w(i) = j$ για κάποιο i και j έχουμε ότι η j-οστή γραμμή του $wX_{ij}(a)$ είναι ίση με την i-οστή γραμμή του $X_{ij}(a)$. Άρα έχουμε $wX_{ij}(a)w^{-1} = X_{w(i)j}(a)w^{-1}$. Επίσης έχουμε ότι ο w^{-1} είναι πίνακας μετάθεσης και τότε η i-οστή στήλη του $X_{w(i)j}(a)w^{-1}$ είναι ίση με την j-οστή στήλη του $X_{w(i)j}(a)$. Άρα έχουμε $X_{w(i)j}w^{-1} = X_{w(i)w^{-1}(i)}$. Όμως $w(j) = w^{-1}(i)$. Άρα έχουμε $X_{w(i)w^{-1}(i)} = X_{w(i)w(j)}$, όπως θέλαμε.

6. Έστω $\{v_1, ..., v_n\}$ να είναι διανύσματα γραμμή. Αρκεί να δείξουμε ότι $v_jX_{ij}(a) = v_j + av_i$ και $v_kX_{ij}(a) = v_k$ για κάθε $k \neq j$. Έστω $X_{ij}(a) = (x_{ij})$, τότε έχουμε:

   (α′) Για το v_k, με $k \neq j$: $\sum_{s=1}^{n} v_s x_{sk} = v_1x_{1k} + ... + v_kx_{kk} + ... + v_nx_{nk} = v_k$

   (β′) Για το v_j: $\sum_{s=1}^{n} v_1x_{1j} + ... + v_jx_{jj} + ... + v_ix_{ij} + ... + v_nx_{nj} = v_j + av_i$

   Άρα φτάσαμε στο αποτέλεσμα που θέλαμε.

7. Έστω $M = \begin{pmatrix} m_1 \\ . \\ . \\ . \\ m_n \end{pmatrix}$, όπου $m_1, ..., m_n$ να είναι διανύσματα γραμμή, και

έστω $X_{ij}(a) = (x_{ij})$. Άρκεί να δείξουμε ότι $X_{ij}(a)M = \begin{pmatrix} m_1 \\ . \\ . \\ . \\ m_i + am_j \\ . \\ . \\ . \\ m_n \end{pmatrix}$.

$$X_{ij}(a)M = \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^n x_{1s}m_s \\ . \\ . \\ . \\ \sum_{s=1}^n x_{is}m_s \\ . \\ . \\ . \\ \sum_{s=1}^n x_{ns}m_s \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x_{11}m_1 + ... + x_{1n}m_n \\ . \\ . \\ . \\ x_{i1}m_1 + ... + x_{ii}m_i + ... + x_{ij}m_j + ... + x_{in}m_n \\ . \\ . \\ . \\ x_{n1}m_1 + ... + x_{nn}m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ . \\ . \\ . \\ m_i + am_j \\ . \\ . \\ . \\ m_n \end{pmatrix}$$

Άρα το αποτέλεσμα είναι όπως το θέλαμε. •

Για i και j διακριτά, ορίζουμε $X_{ij} = \{X_{ij}(a) | a \in F\}$. Αυτό είναι μία υποομάδα της G από τα (1) και (3) του Λήμματος 2.7. Οι υποομάδες X_{ij} ονομάζονται ριζικές υποομάδες της G. (Αυτή η ορολογία προέρχεται από τη θεωρία των Lie αλγεβρών.)

Τώρα ερχόμαστε στο κύριο αποτέλεσμα του κεφαλαίου, στο οποίο παίρνουμε τη διάσπαση Bruhat της ομάδας G. Το ακόλουθο λήμμα περιέχει το κύριο επιχείρημα.

Λήμμα 2.8. Έστω $M \in G$. Τότε υπάρχει ένα γινόμενο b από άνω τριγωνικούς transvections τέτοιο ώστε η ακόλουθη ιδιότητα να ισχύει: Για κάθε $1 \leq i \leq n$, το bM έχει ακριβώς μία γραμμή, έστω η k-ιοστή, στην οποία τα στοιχεία στις πρώτες $i-1$ θέσεις είναι μηδέν και έχει μη μηδενικό στοιχείο στην i-οστή θέση.

Απόδειξη. Έστω $M = (m_{ij}) \in G$. Καθώς το M είναι αντιστρέψιμο, η πρώτη στήλη του M πρέπει να έχει κάποια μη μηδενικά στοιχεία: Έστω $1 \leq k_1 \leq n$ να είναι τέτοιο ώστε το $m_{k_1 1} \neq 0$ και $m_{i1} = 0$ για όλα τα $i > k_1$. Για παράδειγμα, αν έχουμε $n = 5$ και $k_1 = 3$ τότε

$$M = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

(όπου το σύμβολο $*$ συμβολίζει ένα αυθαίρετο στοιχείο). Πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά το M με transvections της μορφής $X_{ik_1}(a)$, όπου $i < k_1$, με τέτοιο τρόπο ώστε το μόνο μη μηδενικό στοιχείο στη πρώτη στήλη του πίνακα $M' = (m_{ij})$, που προέρχεται από τον παραπάνω γινόμενο, να βρίσκεται στη γραμμη k_1. Συνεχίζοντας με το παραπάνω παράδειγμα, έχουμε

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Όλοι οι transvections που χρησιμοποιούνται για την απόκτηση του M' απ΄ το M βρίσκονται στο B, και ως εκ τούτου το $M'M^{-1} \in B$. Καθώς το M' είναι και πάλι αντιστρέψιμος, η δεύτερη στήλη του M' πρέπει να έχει ένα μη μηδενικό στοιχείο σε κάποια γραμμή διαφορετική της k_1-ιοστής γραμμής. Έστω $1 \leq k_2 \leq n$ να είναι τέτοιο ώστε $k_2 \neq k_1$, $m'_{k_{2}2} \neq 0$ και $m'_{i2} = 0$ για όλα τα $i < k_2$, $i \neq k_1$. Πάλι πολλαπλασιάζουμε απ΄ τα αριστερά του M' με τους transvections της μορφής $X_{ik_2}(a)$, όπου $i < k_2$, με τέτοιο τρόπο που όλα τα στοιχεία της δεύτερης στήλης του πίνακα M'', που προέρχεται από το παραπάνω γινόμενο, είναι μηδεν εκτός απ΄ αυτά των k_1 και k_2 γραμμών. Και πάλι όλοι οι transvections που χρησιμοποιούνται για την απόκτηση του M'' απ΄ την M' βρίσκονται στη B, και έτσι έχουμε $M''M^{-1} \in B$. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία, τελικά παίρνουμε ένα πίνακα bM με τις επιθυμητές ιδιότητες, όπου $b \in B$ να είναι ένα γινόμενο των άνω τριγωνικών transvections. Για παράδειγμα, αν πάρουμε $n = 5$ και $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) = (3, 5, 4, 1, 2)$ τότε έχουμε

$$bM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

(Φυσικά, οι αριθμοί $k_1, ..., k_n$ είναι απλά $1, ..., n$ υπό μίας αναδιάταξης.) •

Θεώρημα Διάσπασης Bruhat. Η $GL(n, F)$ έχει μία διάσπαση της μορφής $G = BWB$.

Απόδειξη. Έστω $M \in G$, και ορίζουμε τους αριθμούς k_i και τον πίνακα $b \in B$ όπως δηλώθηκαν στο Λήμμα 2.8. Έστω $w \in W$ να είναι ο πίνακας μετάθεσης του οποίου η k_i-οστή στήλη είναι v_i για κάθε i. Τότε η i-οστή γραμμή του wbM είναι ίση με την k_i-οστή γραμμή του bM για κάθε i, και ως εκ τούτου ο wbM είναι άνω τριγωνικός. Έτσι $wbM \in B$, δίνοντας $M \in b^{-1}w^{-1}B \subseteq BWB$. •

Παράδειγμα. Έστω $M \in G$ και $w \in W$ με $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 10 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ και $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (3, 4, 1, 2)$. Άρα $w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Θα βρούμε όλους τους transvections για τους οποίους ο bM, όπου b είναι το γινόμενο όλων αυτών των transvections, έχει τις ιδιότητες του Λήμματος 2.8. Ακολουθώντας την δοσμένη διαδικασία έχουμε:

- Για την πρώτη στήλη το μόνο μη μηδενικό στοιχείο πρέπει να είναι αυτό στη 3 γραμμή

  1. $X_{43}(-\frac{1}{8})M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 10 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{3}{4} & 4 & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$

  2. $X_{13}(-\frac{1}{4})X_{43}(-\frac{1}{8})M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 5 & \frac{25}{4} \\ 1 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 10 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{3}{4} & 4 & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$

3. $X_{23}(-\frac{1}{8})X_{13}(-\frac{1}{4})X_{43}(-\frac{1}{8})M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 5 & \frac{25}{4} \\ 0 & \frac{11}{4} & 2 & \frac{45}{8} \\ 8 & 10 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{3}{4} & 4 & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$

- Για την δεύτερη στήλη τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία πρέπει να είναι αυτά στη 3 και 4 γραμμή

1. $X_{14}(\frac{2}{3})X_{23}(-\frac{1}{8})X_{13}(-\frac{1}{4})X_{43}(-\frac{1}{8})M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{23}{3} & \frac{99}{8} \\ 0 & \frac{11}{4} & 2 & \frac{45}{8} \\ 8 & 10 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{3}{4} & 4 & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$

2. $X_{24}(-\frac{11}{3})X_{14}(\frac{2}{3})X_{23}(-\frac{1}{8})X_{13}(-\frac{1}{4})X_{43}(-\frac{1}{8})M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{23}{3} & \frac{99}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{38}{3} & 7 \\ 8 & 10 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{3}{4} & 4 & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$

- Για την τρίτη στήλη τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία πρέπει να είναι αυτά στη 3, 4 και 1 γραμμή

1. $X_{21}(\frac{38}{23})X_{24}(-\frac{11}{3})X_{14}(\frac{2}{3})X_{23}(-\frac{1}{8})X_{13}(-\frac{1}{4})X_{43}(-\frac{1}{8})M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{23}{3} & \frac{99}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2525}{92} \\ 8 & 10 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{3}{4} & 4 & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$

Άρα, το $b = X_{21}(\frac{38}{23})X_{24}(-\frac{11}{3})X_{14}(\frac{2}{3})X_{23}(-\frac{1}{8})X_{13}(-\frac{1}{4})X_{43}(-\frac{1}{8})$ και το

$$wbM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{23}{3} & \frac{99}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2525}{92} \\ 8 & 10 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{3}{4} & 4 & -\frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{3}{4} & 4 & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{23}{3} & \frac{99}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2525}{92} \end{pmatrix}$$

και έτσι $wbM \in B$. •

Το παραπάνω Θεώρημα εκφράζει το G ως μια ένωση των διπλών συμπλόκων BwB, καθώς το w ανήκει μέσα στο W. Τώρα θα δείξουμε ότι αύτή είναι μια ένωση συνόλων ξένων μεταξύ τους. Ξανά χρειαζόμαστε πρώτα ένα λήμμα.

Λήμμα 2.9. Αν $w_1, w_2 \in G$ και $b \in B$ είναι τέτοια ώστε $w_1 b w_2 \in B$ τότε $w_2 = w_1^{-1}$.

Απόδειξη. Έστω $1 \leq j \leq n$ να δίνεται, και έστω i να είναι τέτοιο ώστε, $w_1(i) = j$. Τότε η j-οστή γραμμή του $w_1 b$ είναι ίση με την i-οστή γραμμή του

b. Έστω k να είναι τέτοιο ώστε $w_2(k) = i$, τότε η k-οστή στήλη του w_1bw_2 είναι ίση με την i-οστή στήλη του w_1b. Θεωρούμε το (i,i)-στοιχείο του b να είναι β. Βλέπουμε ότι $\beta \neq 0$ καθώς $b \in B$, και ότι το β είναι το (j,i)-στοιχείο του w_1b και ως εκ τούτου είναι επίσης το (j,k)-στοιχείο του w_1bw_2. Καθώς $w_1bw_2 \in B$, αυτό αναγκάζει $j \leq k$. Τώρα έχουμε ένα πίνακα $w_2^{-1}w_1^{-1} \in W$ ο οποίος, για κάθε $1 \leq j \leq n$, στέλνει το v_j στο v_k, όπου $j \leq k \leq n$. Ο μόνος πίνακας μετάθεσης που έχει αυτήν την ιδιότητα είναι ο ταυτοτικός πίνακας: γι' αυτό $w_2^{-1}w_1^{-1} = I$, το οποίο αποδεικνύει το αποτέλεσμα. •

Πόρισμα 2.10. Αν w και w' είναι διακριτά στοιχεία του W, τότε τα BwB και $Bw'B$ είναι σύνολα ξένα μεταξύ τους. Συνεπώς, το G είναι μία ένωση συνόλων ξένων μεταξύ τους $\cup_{w\in W} BwB$ με $|w| = n!$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $w, w' \in W$ είναι τέτοια ώστε η τομή $BwB \cap Bw'B$ να μην είναι κενή. Καθώς δύο διπλά σύμπλοκα είναι είτε ξένα μεταξύ τους είτε ίσα, έχουμε ότι $BwB = Bw'B$. Ιδιαίτερα, έχουμε $w' = bwb'$ για κάποια $b, b' \in B$, και ως εκ τούτου $w^{-1}b^{-1}w' \in B$. Από το Λήμμα 2.9, αυτό δείχνει ότι w^{-1} είναι ο αντίστροφος του w', και ως εκ τούτου $w = w'$. Αυτό αποδεικνύει τον πρώτο ισχυρισμό. Ο δεύτερος τώρα επακολουθεί από το θεώρημα διάσπασης Bruhat. •

Η ακόλουθη τεχνική παρατήρηση, την οποία θα χρειαστούμε στο επόμενο κεφάλαιο, είναι άμεσο συμπέρασμα αυτών που έχουμε κάνει.

Πόρισμα 2.11. Έστω $M \in G$ και w το μοναδικό στοιχείο του W τέτοιο ώστε $M \in BWB$. Τότε το w στέλνει το v_i στο v_k για κάθε i, όπου οι αριθμοί k_i είναι ορισμένοι όπως δηλώθηκαν στο Λήμμα 2.8. Ιδιαίτερα, αν το M στέλνει το v_1 στο $a_1v_1 + ... + a_kv_k$, όπου $a_k \neq 0$, τότε το w στέλνει το v_1 στο v_k. •

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο με ένα αποτέλεσμα το οποίο δίνει ένα μικρότερο σύνολο γεννητόρων για το G από αυτό που δίνεται από την διάσπαση Bruhat.

Λήμμα 2.12. Έστω $b \in B$. Τότε υπάρχει ένα γινόμενο t από transvections τέτοιο ώστε ο tb να είναι διαγώνιος πίνακας που τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι ίδια με του b.

Απόδειξη. Έστω $b \in B$. Υπενθυμίζουμε ότι τα στοιχεία της διαγωνίου του b είναι μη μηδενικά. Υιοθετούμε μία διαδικασία ίδια μ' αυτή που χρησιμοποιήσαμε στο Λήμμα 2.8. Προκειμένου να διατηρηθούν τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου, αρχίζουμε απ' την τελευταία στήλη αντί για την πρώτη. Πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά του b με ένα transvection $X_{in}(a)$ ώστε το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της n-οστής στήλης του νέου πίνακα να βρίσκεται στην n-οστή γραμμή. Το n-οστό στοιχείο της διαγωνίου του νέου πίνακα είναι το ίδιο με αυτό του b, και το $(n-1)$-οστό στοιχείο της διαγωνίου είναι μη μηδενικό. Τώρα πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά αυτού του πίνακα έναν transvection $X_{i(n-1)}(a)$ για να πάρουμε ένα πίνακα που έχει ένα 2×2 διαγώνιο block στη κάτω δεξιά γωνία, με τα στοιχεία της διαγωνίου αυτού του block να είναι ίσα με αυτά του αντίστοιχου block του b. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία, παίρνουμε ένα διαγώνιο πίνακα του οποίου τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του είναι ίσα με αυτά του b. •

Παράδειγμα. Έστω $b \in B$, με $b = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ εφαρμόζουμε τη παραπάνω διαδικασία για να βρούμε το γινόμενο των transvections t για τους οποίους ο tb να είναι διαγώνιος με τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του να είναι ίδια με τα αντίστοιχα του b.

- Για την 4 στήλη έχουμε:

  1. $X_{34}(-\frac{1}{2})b = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
  2. $X_{24}(-2)X_{34}(-\frac{1}{2})b = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
  3. $X_{14}(-\frac{7}{4})X_{24}(-2)X_{34}(-\frac{1}{2})b = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

- Για την 3 στήλη έχουμε:

  1. $X_{13}(-2)X_{14}(-\frac{7}{4})X_{24}(-2)X_{34}(-\frac{1}{2})b = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

- Για την 2 στήλη έχουμε:

1. $X_{12}(-\frac{5}{2})X_{13}(-2)X_{14}(-\frac{7}{4})X_{24}(-2)X_{34}(-\frac{1}{2})b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Άρα για $t = X_{12}(-\frac{5}{2})X_{13}(-2)X_{14}(-\frac{7}{4})X_{24}(-2)X_{34}(-\frac{1}{2})$ έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. •

Θεώρημα 2.13. Το G παράγεται από το σύνολο που αποτελείται από όλους τους αντιστρέψιμους διαγώνιους πίνακες και όλους τους transvections.

Απόδειξη. Καθώς το $G = BWB$ (από το θεώρημα διάσπασης Bruhat), αρκεί να δείξουμε ότι το B και το W περιέχονται στην υποομάδα του G που παράγεται από τους διαγώνιους πίνακες και τους transvections. Αυτό που προέρχεται κατευθείαν απ΄ το Λήμμα 2.12 είναι ότι το B έχει αυτή την ιδιότητα.

Καθώς $W \cong \Sigma_n$ απ΄ την Πρόταση 2.6, βλέπουμε ότι το W παράγεται από τους πίνακες μεταθέσεων που αντιστοιχούν στις αντιμεταθέσεις. Αυτοί είναι οι πίνακες που παίρνουμε απ΄ τον ταυτοτικό πίνακα με αντιμετάθεση δύο στηλών. Έστω i και j να είναι διακριτά. Πρέπει να δείξουμε ότι μπορούμε, μέσω των διαγωνίων πινάκων και των transvections, να κατασκευάσουμε το πίνακα που στέλνει το v_i στο v_j, στέλνει το v_j στο v_i, και σταθεροποιεί κάθε άλλο v_k. Βρίσκουμε ότι ο πίνακας $X_{ji}(1)X_{ij}(-1)X_{ji}(1)$ στέλνει το v_i στο v_j, στέλνει το v_j στο v_i, και σταθεροποιεί όλα τ΄ άλλα v_k. Για να πάρουμε τον πίνακα μετάθεσης που στέλνει τα v_i και v_j το ένα στο άλλο και σταθεροποιεί όλα τ΄ άλλα v_k, πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά του πίνακα $X_{ji}(1)X_{ij}(-1)X_{ji}(1)$ τον διαγώνιο πίνακα του οποίου το (i,i)-στοιχείο είναι ίσο με -1 και όλα τα άλλα μη μηδενικά στοιχεία είναι 1. Αυτό αποδεικνύει ότι το W βρίσκεται μέσα στην ομάδα που παράγεται από τους διαγώνιους πίνακες και τους transvections. •

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δείξτε ότι $GL(2,2) \cong \Sigma_3$.

ΛΥΣΗ

Για την $GL(2,2)$ έχουμε ότι $q = 2$, άρα οι πίνακες θα έχουν στοιχεία από το σώμα $F_2 = \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$. Οπότε έχουμε $GL(2,2) = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$ και $\Sigma_3 = \{1,$

$(12),(13),(23),(123),(132)\}$. Έστω $\phi : GL(2,2) \to \Sigma_3$ με $\phi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 1$, $\phi(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = (13)$, $\phi(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = (12)$, $\phi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = (23)$, $\phi(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = (123)$, $\phi(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = (132)$

- **1-1:** Η ϕ είναι 1-1 καθώς όπως ορίστικε έχουμε ότι αν $\phi(x) = \phi(y) \Leftrightarrow x = y$ για κάθε $x, y \in GL(2,2)$.
- **επί:** Αφού η $GL(2,2)$ και η Σ_3 είναι πεπερασμένα σύνολα και 1-1, είναι και επί.
- **ομομορφισμός:** Απο την επιλογή της ϕ έχουμε ότι τα στοιχεία τάξης 3 της $GL(2,2)$ αντιστοιχίζονται με αυτά της Σ_3 ταξής 3 και αντίστοιχα αυτά τα στοιχεία ταξης 2 της $GL(2,2)$ με της Σ_3. Επίσης απο την επιλογή της ϕ έχουμε ότι για κάθε $x, y \in GL(2,2)$ έχουμε $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$. Άρα η ϕ είναι ομομορφισμός ομάδων.

Άρα έχουμε $GL(2,2) \cong \Sigma_3$.

2. Δημιουργήστε ένα μονομορφισμό $\phi : GL(1,4) \to GL(2,2)$ που αντιστοιχεί στον εγκλεισμό της A_3 στην Σ_3. (Υπενθυμίζουμε ότι το σώμα F_4 έχει 4 στοιχεία και μπορεί να γραφεί ως $\{0,1,a,a^2\}$, όπου $a+1 = a^2$ και $\lambda + \lambda = 0$ για κάθε $\lambda \in F_4$.) Επιπλέον δείξτε ότι η επέκταση της ϕ σε μία συνάρτηση απ΄ το F_4 στο $M_2(F_2)$, όπου $F_2 = \{0,1\}$ είναι το σώμα 2 στοιχείων, είναι μονομορφισμός δακτυλίων.

ΛΥΣΗ

Θα φτιάξουμε έναν μονομορφισμό $\phi : GL(1,4) \to GL(2,2)$. Για την $GL(1,4)$ έχουμε $q = 4$ άρα οι πίνακες έχουν στοιχεία στο $F_4 = \{0,1,a,a^2\}$ με $a \neq 0$ και $aa^2 = 1 \Rightarrow a^2 = a^{-1}$. Άρα έχουμε ότι $GL(1,4) = \{1, a, a^2\}$. Θα δείξουμε ότι $GL(1,4) \cong A_3$. Έχουμε $A_3 = \{1, (123), (132)\}$. Έστω $f : GL(1,4) \to A_3$ με $f(1) = 1$, $f(a) = (123)$, $f(a^2) = (132)$.

- **1-1:** Η f είναι 1-1 καθώς όπως ορίστικε έχουμε ότι για κάθε $x, y \in GL(1,4)$, $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.
- **επί:** Αφού $GL(1,4)$ και A_3 είναι πεπερασμένα σύνολα και η f 1-1 άρα είναι και επί.

- **ομομορφισμός:** Όπως έχει οριστεί η f έχουμε ότι για κάθε $x, y \in GL(1,4)$, $f(xy) = f(x)f(y)$. Άρα η f είναι ομομορφισμός ομάδων.

Έχουμε ότι η $g : A_3 \to \Sigma_3$ είναι μονομορφισμός καθώς η $A_3 \leq \Sigma_3$, άρα αν πάρουμε $g(x) = x$ για κάθε $x \in A_3$ έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. Επίσης από την προηγούμενη άσκηση έχουμε $GL(2,2) \cong \Sigma_3$ μέσω μίας $h : GL(2,2) \to \Sigma_3$. Άρα η $\phi : GL(1,4) \to GL(2,2)$ μονομορφισμός, καθώς $\phi = f \circ g \circ h$. Αν πάρουμε την ταυτοτική απεικόνιση $b(x) = x$ έχουμε $F_4^* \cong GL(1,4)$, όπως επίσης αν πάρουμε την ταυτοτική απεικόνιση έστω $a(x) = x$ τότε η $a : GL(2,2) \to M_2(F_2)$ είναι μονομορφισμός καθώς $GL(2,2) \subseteq M_2(F_2)$. Άρα η $\Phi : F_4 \to M_2(F_2)$ είναι ομομορφισμός ομάδων καθώς $\Phi = b \circ \phi \circ a$. Θα δείξουμε τώρα ότι η Φ είναι και ομομορφισμός δακτυλίων. Αρκεί να δείξουμε ότι $\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$. Έχουμε ότι για κάθε $\lambda \in F_2$, $\lambda + \lambda = 0$ καθώς το F_2 είναι το $\mathbb{Z}_2$, όπως επίσης και το F_4 είναι το $\mathbb{Z}_2 / < x^2+x+1 >= \{I, 1+I, x+I, x+1+I\}$ με $< x^2+x+1 >= I$, άρα για κάθε $\lambda \in F_4$, $\lambda + \lambda = 0$. Θέτουμε το $\Phi(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Άρα έχουμε για κάθε $x, y \in F_4$, $\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$ από τον ορισμό της Φ. Ως εκ τούτου έχουμε ότι η Φ είναι ομομορφισμός δακτυλίων.

3. Δημιουργήστε έναν συγκεκριμένο μονομορφισμό από το $GL(n,4)$ στο $GL(2n,2)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ΛΥΣΗ

Έστω $f : GL(n,4) \to GL(2n,2)$ με $f(X) = \phi(x_{ij})[(i-1)n+j]$, με $x_{ij} \in X$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$, με την ϕ όπως ορίστηκε στην προηγούμενη άσκηση αντιστοιχίζοντας το x_{ij} στοιχείο του X στο $[(i-1)n+j]$ 2×2 υποπίνακα της $f(X) \in GL(2n,2)$ (για παράδειγμα αν έχουμε έναν 4×4 πίνακα τότε η f θα στείλει τη $\phi(x_{11})[(1-1)4+1] = \phi(x_{11})[1]$ στον πρώτο 2×2 υποπίνακα πάνω αριστερά). Θέτουμε την $\phi(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Θα δείξουμε ότι η f είναι μονομορφισμός ομάδων.

- **1-1:** Έχουμε $f(X) = f(Y) \Leftrightarrow \phi(x_{ij})(k) = \phi(y_{ij})(k)$ για κάθε $1 \leq k \leq n^2$ και για κάθε $1 \leq i, j \leq n$, όμως έχουμε ότι η ϕ είναι 1-1 άρα $\phi(x_{ij})(k) = \phi(y_{ij})(k) \Leftrightarrow x_{ij} = y_{ij}$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n \Leftrightarrow X = Y$, για κάθε $x_{ij} \in X$ και $y_{ij} \in Y$. Άρα η f είναι 1-1.

- **ομομορφισμός:** Έχουμε $f(XY) = \phi(x_{ik}y_{kj})(l)$ για κάθε $1 \leq i,k,j \leq n$ και για κάθε $1 \leq l \leq n^2$, όμως η ϕ είναι ομομορφισμός άρα $\phi(x_{ik}y_{kj})(l) = \phi(x_{ik})(l)\phi(y_{kj})(l) = f(X)f(Y)$.

Άρα η f είναι μονομορφισμός ομάδων.

4. Ένας πίνακας λέγεται μονόνιμος αν κάθε γραμμή και στήλη έχει ένα ακριβώς μη μηδενικό στοιχείο. Έστω N να είναι ένα υποσύνολο του $G = GL(n, F)$ το οποίο περιέχει όλους τους μονόνιμους πίνακες. Δείξτε ότι η $N \leq G$, ότι η $T = B \cap N$ είναι η υποομάδα της G που περιέχει όλους τους διαγώνιους πίνακες, ότι η $N = N_G(T)$, και ότι η $N = T \rtimes W$. Έστω G να είναι μια ομάδα. Υποθέτουμε ότι η G έχει υποομάδες τις B και N με την G να ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

   - Η G παράγεται από τις B και N.
   - Η $T = B \cap N$ είναι κανονική υποομάδα της N.
   - Η $W = N/T$ παράγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο S αντιμεταθέσεων (στοιχείων τάξης 2). Επιπλέον, για κάθε $w \in W$ επιλέγουμε κάποιο $w' \in N$ τέτοιο ώστε $w'T = w$, τότε πρέπει να έχουμε
     - $s'Bw' \subseteq Bw'B \cup Bs'w'B$ για κάθε $s \in S$ και $w \in W$,
     - $s'Bs' \nsubseteq B$ για κάθε $s \in S$.

   Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι το B και το N σχηματίζουν ένα BN-ζευγάρι του G, ή ότι το (G, B, N, S) είναι ένα Tits σύστημα (από τον Jacques Tits). Ονομάζουμε το B την Borel υποομάδα του G, και $W = N/B \cap N$ την Weyl υποομάδα που σχετίζεται με το Tits σύστημα. Η τάξη του συστήματος Tits ορίζεται να είναι $|S|$.

ΛΥΣΗ

- Για να δείξουμε ότι $N \leq G$, έχουμε ότι $N \subseteq G$ και $I \in N$ από τον ορισμό της N. Ο αντίστροφος της του $M \in N$ είναι ο πίνακας $M' = (m'_{ij})$ όπου για κάθε $m_{ij} \neq 0 \in M$, το $m'_{ji} = 1/m_{ij} \in M^{-1}$ και έτσι $MM^{-1} = I$. Για την κλειστότητα της πράξης έχουμε: έστω $M, M' \in N$ με $M = (m_{ij})$ και $M' = (m'_{ij})$. Θα δείξουμε ότι $MM' = P = p_{ij} \in N$. Έχουμε ότι το $p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}m'_{kj}$. Το $p_{ij} \neq 0$ αν $m_{ik} \neq o \neq m'_{kj}$ και $p_{ij} = 0$ διαφορετικά. Δοσμένου ενός i υπάρχει μοναδικό k τέτοιο ώστε $m_{ik} \neq 0$ και μοναδικό j τέτοιο ώστε $m'_{kj} \neq 0$. Άρα $m_{ik}m'_{kj} = p_{ij} \neq 0$ για μοναδικό i, j. Άρα $P \in N$. Οπότε το $N \leq G$.

- Για να δείξουμε ότι $T \leq G$, έχουμε ότι $T = B \cap N$, άρα το T είναι το σύνολο των αντιστρεψιμων διαγώνιων πινάκων καθώς ανήκει στο B που σημαίνει ότι είναι σύνολο αντιστρέψιμων άνω τριγωνικών πινάκων, όμως ανήκει και στο N που σημαίνει ότι είναι και μονόνιμος πίνακας, άρα υπάρχει μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο σε μια γραμμή και στήλη, το οποίο πρέπει να βρίσκεται στην διαγώνιο διότι όπως προείπαμε το $T \in B$. Ως εκ τούτου $T \subseteq G$ και $I \in T$. Έχουμε ότι για κάθε $M \in T$ ο M^{-1} είναι διαγώνιος και άρα ανήκει στο T. Για τη κλειστότητα της πράξης έχουμε ότι το γινόμενο δύο διαγώνιων πινάκων είναι διαγώνιος πίνακας, άρα $P \in T$.

- Για να δείξουμε ότι $N = N_G(T)$, έχουμε ότι $N_G(T) = \{g \in G | gT = Tg\}$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $g \in G$ με $gTg^{-1} = T$. Έστω $g \in N$ και $t \in T$ με $g = (g_{ij})$ και $t = (t_{ij})$. Το (i, j)-στοιχείο του gt είναι: $\sum_{k=1}^{n} g_{ik}t_{kj} = g_{i1}t_{1j} + ... + g_{ij}t_{jj} + ... + g_{in}t_{nj} = g_{ij}t_{jj}$. Το (i, j)-στοιχείο του tg είναι:$\sum_{k=1}^{n} t_{ik}g_{kj} = t_{i1}g_{1j} + ... + t_{ii}g_{ij} + ... + t_{in}g_{nj} = t_{ii}g_{ij}$. Άρα θέλουμε να έχουμε $gt = tg \Rightarrow g_{ij}t_{jj} = t_{ii}g_{ij}$. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει το $t_{ii} = t_{jj}$, άρα θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με έναν πίνακα ο οποίος θα έχει την ιδιότητα να μεταθέτει τα στοιχεία του πάνω στην διαγώνιο και επίσεις να τα πολλαπλασιάζει κατάλληλα ώστε να είναι ίσα. Άρα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με κατάλληλο μονικό πίνακα. Άρα έχουμε ότι για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει το $g \in N$.

- Για να δείξουμε ότι $N = T \rtimes W$ πρέπει να δείξουμε ότι το T είναι κανονική υποομάδα της N, το W είναι υποομάδα του N, το $N = TW$ και ότι $T \cap W = I$.

  (α') Έχουμε ότι $T \subseteq N$ και $I \in T$ και το T είναι ομάδα, καθώς $T \leq G$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \in N$ το $ntn^{-1} \in T$. Αυτό ισχύει καθώς $N = N_G(T)$. Άρα το T είναι κανονική υποομάδα της N.

  (β') Έχουμε ότι το $W \subseteq N$ και το W είναι ομάδα, καθώς $W \leq G$. Άρα $W \leq N$.

  (γ') Έχουμε ότι το W είναι το σύνολο των πινάκων μεταθέσεων, και ο μόνος διαγώνιος πίνακας που ανήκει στο W είναι ο I. Άρα έχουμε ότι $W \cap T = I$.

  (δ') Έστω $w \in W$ με $w(i) = j$ και $t \in T$. Έχουμε ότι $tw = n$ τέτοιο ώστε η i στήλη του n να είναι ίση με την j στήλη του t. Όμως ο t είναι διαγώνιος αντιστρέψιμος πίνακας, άρα για τον n

τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία του θα βρίσκονται σε μοναδικά i και j. Συνεπώς, έχουμε ότι $n \in N$, και για κάθε $n \in N$ υπάρχει $w \in W$ και $t \in T$ τέτοια ώστε $n = tw$. Άρα $N = TW$.

Οπότε η N είναι το ημιευθύ γινόμενο του T και W.

5. Έστω G να είναι μία ομάδα με ένα BN-ζευγάρι. Επαληθεύστε ότι, για κάθε $w \in W$, το σύνολο $Bw'B$ εξαρτάται από την επιλογή του $w' \in N$ έτσι ώστε το $w'T = w$. Δείξτε ότι έχουμε μια Bruhat διάσπαση

$$G = \bigcup_{w \in W} BwB$$

στην οποία τα σύνολα είναι ξένα μεταξύ τους, όπου BwB το παίρνουμε να σημαίνει $Bw'B$ για κάθε $w' \in N$ με το $w'T = w$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι το (G, B, N, S) είναι ένα Tits σύστημα. Θα δείξουμε ότι για κάθε $w \in W$ το $Bw'B$ εξαρτάται από την επιλογή του $w' \in N$ τέτοιο ώστε $w'T = w$. Έστω w' και w'' διακριτά στοιχεία του N, τέτοια ώστε $w'T = w_1$ και $w''T = w_2$, και τέτοια ώστε το $Bw'B \cap Bw''B$ να μην είναι κενό. Έχουμε ότι $w' = bw''b'$ για κάποια $b, b' \in B$ και ως εκ τούτου $w'^{-1}b^{-1}w'' \in B$. Από το Λήμμα 2.9 έχουμε ότι ο w'^{-1} είναι ο αντίστροφος του w''. Άρα $w' = w''$. Οπότε αποδείξαμε ότι το $Bw'B$ εξαρτάται από την επιλογή του $w' \in N$. Τώρα θα δείξουμε ότι έχουμε διάσπαση Bruhat $G = \bigcup_{w \in W} BwB$ με σύνολα ξένα μεταξύ τους, όπου το BwB το παίρνουμε να είναι $Bw'B$ για κάθε $w' \in N$ με $w'T = w$. Έχουμε για κάθε $t \in T$ και για κάθε $b \in B$ το $tb = b' \in B$, άρα $T \subseteq B$ και $TB = BT = B$. Άρα $G = \bigcup_{w \in W} BwB = Bw_1B \cup Bw_2B \cup ... = Bw_1'TB \cup Bw_2'B \cup ... = Bw_1'B \cup Bw_2'B \cup ... = \bigcup_{w' \in N} Bw'B$, για κάθε $w' \in N$ καθώς από το παραπάνω τα σύνολα είναι ξένα μεταξύ τους για κάθε $w_i' \neq w_j'$ με $i \neq j$. Άρα δείξαμε αυτό που θέλαμε.

3. Παραβολικες Υποομάδες

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα έχουμε πάλι ότι $G = GL(n, F)$ για κάποιο σώμα F και κάποιο $n \in N$, και έστω $V_n(F)$ να είναι ο διανυσματικός χώρος των n-διάστατων διανυσμάτων στηλών με στοιχεία στο F. Συχνά θα θεωρούμε ένα στοιχείο του G ως ένα πίνακα, ως προς τη συνήθη βάση $v_1, ..., v_n$ ενός αντιστρέψιμου γραμμικού μετασχηματισμού του V_n.

Μια πλήρη σήμανση στο V_n είναι μία ακολουθία υποχώρων

$$0 \subset V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_n = V_n(F)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $(V_1, ..., V_n)$ για την παραπάνω σήμανση. Καθώς χρησιμοποιούμε το $\subset$ υποδηλώνουμε γνήσιο υποσύνολο, άρα πρέπει να έχουμε $dim_F V_i = i$ για κάθε i. Η συνήθης σήμανση ορίζεται ως $V_i = Fv_1 \oplus ... \oplus Fv_i = V_{i-1} \oplus Fv_i$ για κάθε i (όπου V_0=0).

Υπάρχει μια φυσική δράση του G στο σύνολο των πλήρων σημάνσεων στο $V_n(F)$: δηλαδή, αν $(V_1, ..., V_n)$ είναι μια πλήρη σήμανση και $g \in G$, ορίζουμε $g(V_1, ..., V_n) = (gV_1, ..., gV_n)$, όπου βλέπουμε το g ως έναν αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό του $V_n(F)$. (Κάθε gV_i είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος διάστασης i, με το gV_i να διατηρεί τις σχέσεις του περιέχεσθαι ανάμεσα στα V_i, έτσι ώστε το $(gV_1, ..., gV_n)$ να είναι και αυτό μια πλήρη σήμανση.) Εύκολα φαίνεται ότι αυτός ο ορισμός δίνει μία δράση ομάδας. Τώρα, έστω $(V_1, ..., V_n)$ να είναι η συνήθης σήμανση. Θέλουμε να δείξουμε ότι κάθε πλήρη σήμανση βρίσκεται στη τροχιά της συνήθους σήμανσης και ως εκ τούτου ότι το G-σύνολο των πλήρων σημάνσεων είναι μεταβατικό. Αν $(W_1, ..., W_n)$ είναι μια πλήρη σήμανση, τότε υπάρχουν $w_1, ..., w_n \in V_n(F)$ τέτοια ώστε $w_i \in W_i - W_{i-1}$ για κάθε i (όπου ξανά $W_0 = 0$). Έστω g να είναι ο πίνακας που η i-οστή του στήλη είναι w_i για κάθε i. Τότε η g είναι αντιστρέψιμη καθώς $\{w_1, ..., w_n\}$ είναι μία βάση για το $V_n(F)$. Καθώς, $gv_i = W_i$ για κάθε i, βλέπουμε ότι $(W_1, ..., W_n) = g(V_1, ..., V_n)$ αποδεικνύοντας τον ισχυρισμό μας.

Η σταθεροποιουσα μιας πλήρους σήμανσης $(V_1, ..., V_n)$ κάτω από την δράσης της G είναι το σύνολο των $g \in G$ τέτοιο ώστε $(gV_1, ..., gV_n) = (V_1, ..., V_n)$, ή ισοδύναμα τέτοια ώστε $gV_i = V_i$ για κάθε i. Θα δείξουμε ότι η σταθεροποιούσα της συνήθους σήμανσης είναι ακριβώς η συνήθης υποομάδα Borel B της G. Έχουμε ότι το $V_i = Fv_1 \oplus ... \oplus Fv_i$ για κάθε i, με το σύνολο των v_i να είναι η συνήθης βάση της $V_n(F)$. Έστω $b \in B$ με $b = (b_{ij}) \in F$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$. Έχουμε ότι για κάθε j το bv_j, όπου το v_j είναι το διάνισμα που το στοιχείο της j θέσης του είναι ίσο με 1 και όλα τα άλλα είναι ίσα με το 0, είναι $\sum_{k=1}^{n} b_{ik}v_k = b_{i1}v_1 + ... + b_{ij}v_j + ... + b_{in}v_n = b_{ij}v_j = b_{ij}$ αν $i \leq j$ και 0 αλλιώς συνεπώς έχουμε ότι $b_{ij}v_j \in Fv_j \oplus Fv_{j-1} \oplus ... \oplus Fv_1 = V_j$. Άρα η B είναι η σταθεροποιούσα της συνήθους σήμανσης. (Αυτός ο ισχυρισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξει ότι η B είναι υποομάδα της G.) Καθώς το G-σύνολο των πλήρων σημάνσεων είναι μεταβατικό, βλεπουμε από το παρακάτω Λήμμα 3 ότι η υποομάδα $Borel$ του G, που είναι εξ ορισμού οι συζυγείς του B, είναι ακριβώς οι σταθεροποιούσες των πλήρων σημάνσεων στο $V_n(F)$. Έστω $(V_1, ..., V_n)$ να είναι η συνήθης σήμανση τότε υπάρχει $h \in G$ τέτοιο ώστε $(W_1, ..., W_n) = h(V_1, ..., V_n)$, με $(W_1, ..., W_n)$ να είναι μια πλήρης σήμανση. Έχουμε ότι οι συζυγείς της B είναι οι hBh^{-1} για κάποιο $h \in G$. Άρα έχουμε $hBh^{-1}(W_1, ..., W_n) = hBh^{-1}h(V_1, ..., V_n) = hB(V_1, ..., V_n) = h(V_1, ..., V_n) = (W_1, ..., W_n)$.

Ένας άνω τριγωνικός πίνακας λέγεται άνω unitriangular αν όλα τα στοιχεία του στην κύρια διαγώνιο είναι ίσα με 1, ή ισοδύναμα αν ειναι άνω τριγωνικός και η μόνη του ιδιοτιμή είναι η 1. Μιμούμενοι την απόδειξη της Πρότασης 2.4, μπορούμε να δείξουμε ότι το σύνολο U που περιέχει όλους τους άνω unitriangular πίνακες είναι υποομάδα του B. Έχουμε ότι ο $U \subseteq B$ και $I \in U$ από τον ορισμό της U. Έχουμε ότι το γινόμενο δύο άνω τριγωνικών πινάκων είναι άνω τριγωνικός πίνακας με την κύρια διαγώνιο του να είναι το γινόμενο των αντίστοιχων διαγωνίων των δυο ανω τριγωνικών πινάκων. Όμως για κάθε $u \in U$ τα στοιχεία της διαγωνίου του είναι 1, άρα και η διαγώνιος του γινομένου θα έχει στοιχεία της διαγωνίου ίσα με 1. Για τον αντίστροφο έχουμε ότι: για κάθε $u \in U$ υπάρχει $u^{-1} \in B$ τέτοιο ώστε $uu^{-1} = I$. Θα δείξουμε ότι $u^{-1} \in U$. Αρκεί να δείξουμε ότι τα στοιχεία της διαγωνίου του είναι ίσα με 1. Έστω $u = (u_{ij})$, $u^{-1} = (u'_{ij})$, έχουμε ότι $u_{ik}u'_{kj} = \delta_{ij}$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$. Για $i = n$ έχουμε $\sum_{k=1}^{n} u_{nk}u'_{kn} = u_{n1}u'_{1n} + ... + u_{nn}u'_{nn} = u_{nn}u'_{nn} = \delta_{nn}$, όμως $u_{nn} = 1$ άρα έχουμε ότι $u'_{nn} = 1$. Για $i = n-1$ έχουμε $\sum_{k=1}^{n} u_{(n-1)k}u'_{k(n-1)} = u_{(n-1)1}u'_{1(n-1)} + ... + u_{(n-1)(n-1)}u'_{(n-1)(n-1)} + u_{(n-1)n}u'_{n(n-1)} = u'_{(n-1)(n-1)} = \delta_{(n-1)(n-1)} = 1$, διότι $u_{(n-1)(n-1)} = 1$ και u^{-1} άνω τριγωνικός, άρα $u'_{n(n-1)} = 0$. Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία βλέπουμε ότι $u^{-1} \in U$. Άρα το U είναι υποομάδα του B. Αν με T συμβολίσουμε το υποσύνολο του G που περιέχει όλους τους διαγώνιους πίνακες, τότε εύκολα βλέπουμε ότι $T \leq B$, καθώς $T \subseteq B$, $I \in T$. Έχουμε ότι το γινόμενο δύο διαγώνιων πινάκων είναι διαγώνιος πίνακας και για κάθε $t \in T$ ο $t^{-1} \in T$ καθώς είναι ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία $t'_{ii} = \frac{1}{t_{ii}}$ για κάθε $1 \leq i \leq n$, και $U \cap T = I$.

Πρόταση 3.1. $B = U \rtimes T$.

Απόδειξη. Χρειάζεται μόνο να δείξουμε ότι $U \trianglelefteq B$ και $B = UT$. Έστω $\phi : B \to T$ να είναι μία συνάρτηση που στέλνει έναν πίνακα σε έναν διαγώνιο πίνακα με την ίδια διαγώνιο. Έχουμε ότι για κάθε $X, Y \in B$ το x_{ij} και y_{ij} αντίστοιχα είναι μη μηδενικα για κάθε $i \leq j$. Άρα το (i, i)-στοιχείο του XY είναι το

$x_{ii}y_{ii} \neq 0$ για κάθε i. Άρα ο $\phi(XY)$ ειναι ο διαγώνιος πίνακας με $x_{ii}y_{ii}$ στοιχεία της διαγωνίου. Ο $\phi(X)$ είναι ο διαγώνιος πίνακας με x_{ii} στοιχεία της διαγωνίου και ο $\phi(Y)$ αυτός με y_{ii} αντιστοιχα. Άρα έχουμε ότι $\phi(XY) = \phi(X)\phi(Y)$, οπότε η ϕ είναι ομομορφισμός, και ο πυρήνας της ϕ είναι το $ker\phi = U$, δείχνοντας έτσι ότι το $U \trianglelefteq B$. Αν το $b \in B$, τότε καθώς ο περιορισμός της ϕ στο T είναι ο ταυτοτικός πίνακας, έχουμε $b\phi(b^{-1}) \in ker\phi = U$ και ως εκ τούτου το $b \in \phi(b) \subseteq UT$: γι΄ αυτό $B = UT$. (Παρατηρούμε ότι αν $n > 1$, τότε το T δεν είναι κανονική υποομάδα του B, και ως εκ τούτου το B δεν είναι το ευθύ γινόμενο του U και του T.) •

Θεωρούμε τη δράση του U και του T στην συνήθη σήμανση $(V_1, ..., V_n)$. Ένα στοιχείο του U στέλνει κάθε v_i στο άθροισμα του v_i με κάποια στοιχεία του V_{i-1}. Αντιστρόφως, κάθε πίνακας που έχει αυτήν την ιδιότητα βρίσκεται στο U. Γι΄ αυτό, το U αποτελείται από τους πίνακες που σταθεροποιούν κάθε V_i και επάγουν τον ταυτοτικό μετασχηματισμό σε κάθε χώρο πηλίκο V_i/V_{i-1}. Από την άλλη πλευρά, το T αποτελείται ακριβώς απο τους πίνακες που σταθεροποιούν κάθε ένα από τα $Fv_i, ..., Fv_n$. Λέμε ότι το T είναι η κοινή σταθεροποιούσα του Fv_i.

Ένα στοιχείο της G λέγεται unipotent αν το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι $(X-1)^n$. Βλέπουμε, χρησιμοποιώντας τη μορφή $Jordan$, ότι κάθε unipotent στοιχείο της g είναι συζυγής ενός στοιχείου του U. Λέμε ότι μία υποομάδα του G είναι unipotent αν όλα τα στοιχεία της είναι unipotent. Για παράδειγμα, ο U είναι μια unipotent υποομάδα, και στην πραγματικότητα το U περιλαμβάνει όλα τα unipotent στοιχεία του B, αφού οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου κάθε άνω τριγωνικού πίνακα είναι τα στοιχεία τις κύριας διαγωνίου του.

Θεώρημα του Kolchin. Κάθε unipotent υποομάδα του G είναι συζυγής με μία υποομάδα του U.

Απόδειξη. Έστω H να είναι μια unipotent υποομάδα του G. Υποθέτουμε ότι η H σταθεροποιεί κάποια πλήρη σήμανση του $V_n(F)$. Τότε η H περιέχεται σε κάποια Borel υποομάδα του G, και ως εκ τούτου η H είναι συζυγής με κάποια υποομάδα του B. Καθώς όλα τα unipotent στοιχεία του B βρίσκονται στο U, βλέπουμε ότι η υποομάδα του B με την οποία είναι συζυγής η H είναι στην πραγματικότητα υποομάδα του U. Έτσι αρκεί να δείξουμε ότι η H σταθεροποιεί κάποια πλήρη σήμανση στο $V_n(F)$.

Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο n: Στην περίπτωση που $n = 1$ είναι τετριμμένο. Υποθέτουμε ότι μπορούμε να δείξουμε ότι η H σταθεροποιεί κάποιον 1-διάστασης υπόχωρο W του $V_n(F)$. Τότε η H επάγει μία ομάδα των unipotent μετασχηματισμών στο χώρο πηλίκο $V_n(F)/W$. Έχουμε ότι η H σταθεροποιεί τον W, άρα για κάθε $h_1, h_2 \in H$ και $v + W \in V_n(F)/W$ έχουμε ότι το $(h_1h_2)(v + W) = h_1(h_2v + h_2W) = h_1(v' + W) = h_1(v'' + w + W) = h_1(v''+W) = h_1v''+h_1W = v^{(3)}+W = v^{(4)}+w'+W = v^{(4)}+W \in V_n(F)/W$. Με επαγωγή, η H σταθεροποιεί κάποια πλήρη σήμανση στο $V_n(F)$ στην ομάδα πηλίκο. Καθώς η H σταθεροποιεί τον W και τον $V_n(F)/W$ ο οποίος είναι ένας $(n-1)$-διάστασης υπόχωρος με τον $V_n(F) = V_n(F) \oplus W$, η H σταθεροποιεί κάποια πλήρη σήμανση στο $V_n(F)$: παίρνοντας αυτήν την σήμανση πίσω στο $V_n(F)$ και προσθέτοντας το W, παίρνουμε μια πλήρη σήμανση στο $V_n(F)$ η οποία σταθεροποιείται από το H. Γι΄ αυτό αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει κάποιο $0 \neq v \in V_n(F)$ τέτοιο ώστε $xv = v$ για όλα τα $x \in H$. •

Τώρα προχωράμε σε μια πιο γενική περίπτωση. Μία σήμανση στο $V_n(F)$ είναι μια αύξουσα ακολουθία με μη μηδενικούς υπόχωρους στο $V_n(F)$ που τερματίζουν στην $V_n(F)$, της μορφής:

$$0 \subset W_1 \subset W_2 \subset W_{r-1} \subset W_r = V_n(F)$$

Καθώς το $\subset$ υποδηλώνει γνήσιο υποσύνολο, έχουμε ότι το $r \leq n$. Μία πλήρη σήμανση είναι απλά μια σήμανση για την οποία $r = n$. Όπως πριν, το σύνολο όλων των σημάνσεων στο $V_n(F)$ στο οποίο δρα το G είναι ένα G-σύνολο. Ωστόσο, η δράση δεν είναι μεταβατική. Πιο συγκεκριμένα, δύο σημάνσεις $(W_1, ..., W_r)$ και $(W_1', ..., W_s')$ βρίσκονται στην ίδια τροχιά, αν και μόνο αν $r = s$ και $dim_F W_i = dim_F W_i'$ για όλα τα i. Την παραπάνω συνθήκη την συνοψίζουμε λέγοντας ότι οι σημάνσεις έχουν την ίδια ακολουθιακή διάσταση.

Λέμε ότι μια υποομάδα του G είναι μία παραβολική υποομάδα αν είναι η σταθεροποιούσα κάποιας σήμανσης στο $V_n(F)$. Έστω $(W_1, ..., W_r)$ να είναι μια σήμανση, και έστω P η σταθεροποιούσα αυτής της σήμανσης. Επιλέγουμε υποχώρους Y_i έτσι ώστε $W_i = W_{i-1} \oplus Y_i$ για κάθε i. Η unipotent radical του P είναι η υποομάδα U_P του P που αποτελείται από όλους αυτούς τους πίνακες που επάγουν τον ταυτοτικό μετασχηματισμό στο W_i/W_{i-1}: Για παράδειγμα, η $U_B = U$. Η σταθεροποιούσα L_P του Y_i ($L_P \leq P$) λέγεται Levi συμπλήρωμα του U_P. Παρατηρούμε ότι ένα Levi συμπλήρωμα είναι ισόμορφο με την $GL(y_1, F) \times GL(y_2, F) \times ... \times GL(y_r, F)$, όπου $y_i = dim_F Y_i = dim_F W_i - dim_F W_{i-1}$ για κάθε i. (Ιδιαιτέρως, κάθε δύο Levi συμπληρώματα του U_P είναι ισόμορφα.) Για παράδειγμα, αν $Y_i = Fv_i$ για κάθε i, έχουμε $L_B = T$, το οποίο είναι προφανώς ισόμορφο με το ευθύ γινόμενο των αντιγράφων του $GL(1, F) \cong F^{\times}$.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα γενικεύει την Πρόταση 1 στις αυθαίρετες παραβολικές υποομάδες.

Πρόταση 3.2. Αν P είναι μια παραβολική υποομάδα του G, τότε έχουμε $P = U_P \rtimes L_P$, όπου U_P είναι η unipotent radical του P και L_P είναι ένα Levi συμπλήρωμα του U_P. Επιπλέων, $P = N_G(U_P)$.

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι το $P = U_P \rtimes L_P$. Αρκεί να δείξουμε ότι το U_P είναι κανονική υποομάδα του P και ότι το $P = U_P L_P$. Έστω $f : P \to L_P$, δηλαδή στέλνει την P στο Levi συμπλήρωμά της. Γνωρίζουμε ότι αν η P σταθεροποιεί μία σήμανση $(W_1, ..., W_r)$ με $W_i = W_{i-1} \oplus Y_i$ τότε η $L_P \cong GL(y_i, F) \times GL(y_2, F) \times \cdots \times GL(y_r, F)$ με $y_i = dim_F(Y_i)$, για κάθε $1 \leq i \leq r$. Άρα η f παίρνει την P και την αντιστοιχεί στο ευθή γινόμενο των $GL(y_i, F)$ με το $i \times i$-υποπίνακα της P να είναι ίδιο με αυτό της L_P. Θα δείξουμε ότι η f είναι ομομορφισμός, δηλαδή θα δείξουμε ότι για κάθε $p, p' \in P$ ισχύει ότι $f(p)f(p') = f(pp')$. Το $f(p)f(p')$ θα είναι το γινόμενο των υποπινάκων της L_p και $L_{p'}$. Το $pp' \in P$ άρα τα μηδενικά στοιχεία της pp' βρίσκονται στο ίδιο μέρος με αυτά της p και p' και τα μπλοκ της $L_{pp'}$ βρίσκονται στα αντιστοιχα των L_p και $L_{p'}$ τα οποία είναι είναι το γινόμενο των αντιστοιχων μπλοκ των L_p και $L_{p'}$. Άρα έχουμε $f(pp') = f(p)f(p')$ και η f ομομορφισμός. Ο πυρήνας της f, είναι όλοι εκείνοι οι πίνακες της P όπου στους αντίστοιχους υποπίνακες του Levi συμπληρώματος έχουν τον μοναδιαίο πίνακα, πάνω από αυτά αυθαίρετα στοιχεία και κάτω μηδέν, δηλαδή είναι όλοι εκείνοι οι πίνακες που ανήκουν στο U_P. Άρα έχουμε ότι το U_P είναι κανονική υποομάδα του P. Αν $p \in P$ καθώς ο περιορισμός της στο L_P είναι ο ταυτοτικός πίνακας, έχουμε ότι $pf(p^{-1}) \in kerf = U_p$ και έτσι το $p \in f(p) \subseteq U_P L_P$. Άρα έχουμε ότι το $P = U_P \rtimes L_P$. Θα δείξουμε τώρα ότι το $P = N_G(U_P)$ δηλαδή ότι αν $xux^{-1} \in U_P$ τότε το $x \in P$. Αν $xux^{-1} \in U_P$ τότε έχουμε ότι $xux^{-1} = u' \in U_P$ άρα $xu = u'x$. Γνωρίζουμε ότι το (1,1)-στοιχείο της u είναι 1 και $u_{i1} = 0$ για κάθε $i \neq 1$. Άρα έχουμε ότι $\sum_{k=1}^{n} x_{1k}uk1 = \sum_{k=1}^{n} u'_{1k}xk1 \Rightarrow x_{11} = x_{11} + u'_{12}x_{21} + ... + u'_{1n}x_{n1}$, όμως το $u \neq I$, άρα πρέπει το $x_{i1} = 0$ για κάθε $i \neq 1$. Αν συνεχίσουμε την διαδικασία για $i = 2, ..., n$ βλέπουμε ότι το $x \in P$. Άρα έχουμε ότι το $P = M_G(U_P)$.•

Με μια υποσήμανση της συνήθους σήμανσης $(V_1, ..., V_n)$, εννοούμε μία σήμανση $(W_1, ..., W_r)$ στην οποία κάθε W_i είναι ίσο με κάποιο V_j. Όπου υπάρχουν 2^{n-1} τέτοιες σημάνσεις. Μία ομάδα σκάλα είναι μία παραβολική υποομάδα του G η οποία είναι σταθεροποιούσα κάποιων υποσημάνσεων της συνήθους σήμανσης.

Η ορολογία ομάδα σκάλα προέρχεται από την μορφή των πινάκων σ΄ αυτές τις ομάδες. Για παράδειγμα, η σταθεροποιούσα της υποσήμανσης $0 \subset V_2 \subset V_3 \subset V_6$ της συνήθους σήμανσης του $V_6(F)$ περιέχει όλους του πίνακες στο

$G = GL(6, F)$ της μορφής

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

(Φανταστείτε μία σκάλα που χωρίζει τα μηδενικά στοιχεία από τα αυθαίρετα.) Η unipotent radical αυτής της ομάδας σκάλα αποτελείται από όλους τους πίνακες του G της μορφής

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και το Levi συμπλήρωμα αυτής της ομάδας σκάλα αντιστοιχεί στις κανονικές επιλογές $Y_1 = 0$, $Y_2 = Fv_2$, $Y_3 = Fv_3$ και $Y_4 = Fv_4 \oplus Fv_5 \oplus Fv_6$ αποτελούμενο από όλους τους πίνακες στο G της μορφής

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

και ως εκ τούτου είναι ισόμορφο με το $GL(2, F) \times GL(1, F) \times GL(3, F)$. Γενικά, η unipotent radical κάθε ομάδας σκάλα περιέχεται στο B.

Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις μας, βλέπουμε ότι το G-σύνολο όλων των σημάνσεων κατανεμήθηκε σε τροχιές των υποσημάνσεων της συνήθους σήμανσης, καθώς κάθε σήμανση έχει την ίδια ακολουθιακή διάσταση, και ως εκ τούτου βρίσκεται στην τροχιά, κάποιας υποσύμανσης της συνήθους σήμανσης. Γι΄ αυτό, βλέπουμε χρησιμοποιώντας το παρακάτω Λήμμα ότι οι παραβολικές υποομάδες της G είναι ακριβώς οι συζυγείς των ομάδων σκάλα.

Λήμμα 3.3. Αν X να είναι ένα G-σύνολο, τότε $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ για κάθε $g \in G$ και $x \in X$.

Απόδειξη. Ένα στοιχείο u του G σταθεροποιεί το gx αν και μόνο αν το gug^{-1} σταθεροποιεί το x το οποίο ισχύει αν και μόνο αν το u βρίσκεται στο

gG_xg^{-1}. •

Θα κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο δείχνοντας ότι υπάρχουν ακριβώς 2^{n-1} υποομάδες του G που περιέχουν την υποομάδα B των άνω τριγωνικών πινάκων. Αυτές οι υποομάδες είναι ακριβώς οι ομάδες σκάλα. Το ακόλουθο Λήμμα θα χρησιμεύσει ως την αφετερία μας στην προσπάθεια να ταξινομίσουμε τις υποομάδες που περιέχουν το B.

Λήμμα 3.4. Οι μόνοι μη μηδενικοί υπόχωροι του $V_n(F)$ που σταθεροποιεί η B (από αριστερά) είναι οι υπόχωροι $V_1, ..., V_n$ που εμφανίζονται στη συνήθη σήμανση.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι ο B σταθεροποιεί κάθε υπόχωρο V_i. Τώρα έστω V να είναι ένας μη μηδενικός υπόχωρος του $V_n(F)$ που σταθεροποιήται από το B. Καθώς έχουμε προφανώς $V \subseteq V_i$ για κάποιο i, υπάρχει ένα ελάχιστο $1 \leq k \leq n$ τέτοιο ώστε $V \subseteq V_k$ και $V \nsubseteq V_{k-1}$. Από την επιλογή του k, το V περιέχει ένα στοιχείο της μορφής $\sum_{j=1}^{k} a_j v_j$, όπου το a_j ανήκει στό F και $a_k \neq 0$. Αυτό το στοιχείο πηγαίνει στο v_k από το b^{-1}, όπου

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & a_1 & . & . & . & 0 \\ & 1 & . & . & . & a_2 & . & . & . & 0 \\ & & . & & & . & & & & . \\ & & & . & & . & & & & . \\ & & & & . & . & & & & . \\ & & & & & a_k & . & . & . & 0 \\ & & & & & & . & & & . \\ & & & & & & & . & & . \\ & & & & & & & & . & . \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Καθώς το $b^{-1} \in B$ και το B σταθεροποιεί το V, αυτό δείχνει ότι το $v_k \in V$.

Τώρα έστω το $\sum_{j=1}^{k} a_j v_j$ να είναι ένα αυθαίρετο στοιχείο του $V_k - V_{k-1}$. Αυτό το στοιχείο είναι η εικόνα του v_k υπό τον πίνακα b όπως ορίστηκε παραπάνω και ως εκ τούτου βρίσκεται στο V. Έτσι το V περιέχει το $V_k - V_{k-1}$, και ως εκ τούτου το V_k. Συμπεραίνουμε ότι το $V = V_k$. •

Θεώρημα 3.5. Οι μόνες υποομάδες του G που περιέχει το B είναι οι ομάδες σκάλα.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το $B \leq H \leq G$. Από το Λήμμα 3.3, οι μόνοι υπόχωροι του $V_n(F)$ που το H αφήνει αμετάβλητες είναι αυτοί που αποτελούν την συνήθη σήμανση $(V_1, ..., V_n)$. Υποθέτουμε ότι οι υπόχωροι του $V_n(F)$ που μένουν (αριστερά) αναλλοίωτοι από το H είναι οι $V_{a_1}, ..., V_{a_r}$, όπου $1 \leq a_1 < ... < a_r = n$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το H είναι στην πραγματικότητα ίσο με την ομάδα σκάλα που σταθεροποιεί τη σήμανση $(V_{a_1}, ..., V_{a_r})$. Αντί να δώσουμε μία επίσημη απόδειξη για την γενική περίπτωση, θα αποδείξουμε την ειδική περίπτωση όπου το $r = 1$ και $r = 2$: μετά απ΄ αυτό θα συζητήσουμε σύντομα τη γενική περίπτωση, η οποία δεν είναι εννοιολογικά δυσκολότερη από τις ειδικές περιπτώσεις αλλά μπορεί να είναι δυσχείριστη ως προς τον συμβολισμό.

Υποθέτουμε ότι οι μόνοι υπόχωροι του $V_n(F)$ που μένουν αναλλοίωτοι απ΄ το H είναι το 0 και το $V_n(F)$: θα αποδείξουμε ότι το $H = G$. Ο υπόχωρος του $V_n(F)$ που παράγεται απ΄ το $\{hv_i | h \in H\}$ μένει αναλλοίωτος απ΄ το H και ως εκ τούτου πρέπει να ισούται με όλο το $V_n(F)$. Ιδιαίτερα, υπάρχει κάποιο $h \in H$ τέτοιο ώστε το $hv_1 = a_1v_1 + ... + a_nv_n$, όπου $a_n \neq 0$. Γνωρίζουμε, απ΄ το Θεώρημα Αποσύνθεσης Bruhat ότι το $h \in BwB$ για κάποιο $w \in W$, και απ΄ το Πόρισμα 2.11 βλέπουμε ότι το w στέλνει το v_1 στο v_n. Καθώς, το $B \leq H$, αυτό το στοιχείο βρίσκεται στο H. Τώρα έστω ότι τα $1 < j \leq n$ είναι τέτοια ώστε το w να στέλνει το v_j στο v_1. Τότε το $X_{1j} \leq B \leq H$, και καθώς το $w(1) = n$ και το $w(j) = 1$, βλέπουμε απ΄ το κομμάτι (5) του Λήμματος 2.7 ότι το $X_{n1} = wX_{1j}w^{-1} \leq H$. Τώρα θέλουμε να δείξουμε ότι κάθε ριζική υποομάδα X_{ij} ανήκει στο H: καθώς οι διαγώνιοι πίνακες βρίσκονται στο B και ως εκ τούτου στο H, τότε απο το Θεώρημα 2.13 έχουμε ότι $H = G$. Ήδη γνωρίζουμε ότι το $X_{n1} \leq H$ και ότι αν το $i < j$ τότε το $X_{ij} \leq B \leq H$. Τώρα για κάθε $a \in F$ και κάθε διακριτό $1 < i, j < n$, βλέπουμε χρησιμοποιώντας το κομμάτι (4) του Λήμματος 2.7 ότι $X_{nj}(a) = [X_{n1}(a), X_{1j}(1)] \in H$, $X_{i1}(a) = [X_{in}(a), X_{n1}(1)] \in H$ και $X_{ij}(a) = [X_{i1}(a), X_{1j}(1)] \in H$. Γι΄ αυτό, το $X_{ij} \in H$ για όλα τα i, j όπως απαιτείται.

Τώρα υποθέτουμε ότι το H αφήνει αναλλοίωτο όχι μόνο το 0 και το $V_n(F)$, αλλά ακριβώς ένα ακόμα υπόχωρο, έστω V_m για κάποιο $1 \leq m < n$. Έστω P να είναι η ομάδα σκάλα που σταθεροποιεί την σήμανση $0 \subset V_m \subset V_n$. Ξέρουμε ότι το $H \leq P$, και θέλουμε να δείξουμε ότι το $H = P$. Από την Πρόταση 2, το P είναι το ημιευθύ γινόμενο της unipotent ρίζας του U_P με ένα Levi συμπλήρωμα L_P, και ήδη έχουμε παρατηρήσει ότι το $U_P \leq B$, καθώς το P είναι ομάδα σκάλα. Ως εκ τούτου αρκεί να δείξουμε ότι το $L_P \leq H$. Μπορούμε να επιλέξουμε το L_P να είναι το ευθύ γινόμενο των υποομάδων $K_1 \cong GL(m, F)$ και $K_2 \cong GL(n - m, F)$, όπου τα στοιχεία του K_1 (όμοια K_2) έχουν τα μόνα μη μηδενικά τους στοιχεία στις πρώτες m (όμοια $n - m$) γραμμές και στήλες. Χρησιμοποιόντας το θεώρημα 2.13, βλέπουμε ότι το K_1 (όμοια K_2) παράγεται απ΄ τους διαγώνιους πίνακες και τις ριζικές υποομάδες X_{ij} για διακριτά $1 \leq i, j \leq m$ (όμοια $m + 1 \leq i, j \leq n$). Οι διαγώνιοι πίνακες βρίσκονται στο B και ως εκ τούτου στο H, οπότε για να δείξουμε ότι το $L_P \leq H$, αρκεί να δείξουμε ότι αυτές οι συγκεκριμένες ριζικές υποομάδες βρίσκονται στο H. Καθώς το H σταθεροποιεί το V_m και όχι κάποιο μη μηδενικό γνήσιο υπόχωρο αυτού, βλέπουμε, έχοντας υπόψιν τον υπόχωρο που παράγεται από το $\{hv_i | h \in H\}$, ότι πρέπει να υπάρχει κάποιο $h \in H$ που στέλνει το v_1 στο $a_1 v_1 + ... + a_m v_m$ όπου το $a_m \neq 0$. Αν το $w \in W$ είναι τέτοιο ώστε το $h \in BwB$, τότε το w στέλνει το v_1 στο v_m από το Πόρισμα 2.11, και όπως στην προηγούμενη παράγραφο μπορούμε να συμπεράνουμε απ΄ αυτό ότι το $X_{m1} \in H$. Υπολογισμοί με μεταθέτες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δείξουν ότι το $X_{ij} \leq H$ για όλα τα διακριτά $1 \leq i, j \leq m$. Όμοια, έχοντας υπόψιν τον υπόχωρο που διασπάται απ΄ το $\{hv_{m+1} | h \in H\}$, βλέπουμε ότι υπάρχει κάποιο $h' \in H$ που στέλνει το v_{m+1} στο $\beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$, όπου $\beta_n \neq 0$: το Πόρισμα 1.10 μπορεί τώρα να χρησιμοποιηθεί για να δείξει ότι αν $w' \in W$ είναι τέτοιο ώστε το $h' \in Bw'B$, τότε το w' στέλνει το v_{m+1} στο v_n. (Καθώς το h σταθεροποιεί το V_m, στη σημείωση του Πορίσματος 1.10 έχουμε ότι $\{k_1, ..., k_n\} = \{1, ..., m\}$, και με λίγη σκέψη θα δούμε ότι πρέπει να έχουμε $k_{m+1} = n$.) Το ίδιο επιχείρημα όπως πριν τώρα δείχνει ότι το $X_{n(m+1)} \leq H$, από το οποίο μπορούμε να καταλήξουμε με υπολογισμούς μεταθετών ότι το $X_{ij} \leq H$ για κάθε διακριτά $m+1 \leq i, j \leq n$. Γι΄ αυτό το $H = P$.

Στη γενική περίπτωση έστω ότι το H αφήνει αμετάβλητη τη σήμανση $(V_{a_1}, ..., V_{a_r})$ των οποίων η σταθεροποιούσα είναι η ομάδα σκάλα P. Για να δείξουμε ότι $H = P$ αρκεί να δείξουμε ότι ένα Levi συμπλήρωμα L_P βρίσκεται στο H. Η ομάδα L_P είναι το ευθύ γινόμενο των r γενικών γραμμικών ομάδων, και έτσι από το Θεώριμα 2.13 αρκεί να δείξουμε ότι το H περιέχει μερικές ριζικές υποομάδες με κατάλληλη επιλογή του L_P, οι υποομάδες στην ερώτηση γίνονται όλες οι X_{ij} για διακριτά $a_{k-1} \leq i, j \leq a_k$ και κάποιο k (παίρνουμε $a_0 = 0$). Το καταφέραμε αυτό δείχνοντας πρώτα ότι κάθε $X_{a_k(a_{k-1}+1)} \in H$, και έπειτα χρησιμοποιώντας τους υπολογισμούς μεταθετών όπως παραπάνω. •

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Έστω $G = GL(n, F)$, όπου το $n \geqslant 2$.

1. Υποθέτουμε ότι το $g \in G$ και σταθεροποιεί κάποιο $v \in V_n(F)$ με $v \neq 0$ και επάγει τον ταυτοτικό μετασχηματισμό στο $V_n(F)/Fv$. Δείξτε ότι το g είναι συζυγές με ένα στοιχείο τις υποομάδας ρίζας X_{12}.

ΛΥΣΗ

Θα δείξουμε ότι το g είναι συζυγές μ΄ ένα στοιχείο της υποομάδας ρίζας X_{12}. Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία της X_{12} σταθεροποιούν κάθε v_i, εκτός το v_2 για $1 \leq i \leq n$. Για να σταθεροποιεί και το v_2 πρέπει να έχει στην δεύτερη στήλη του όλα τα στοιχεία ίσα με το μηδέν εκτός από αυτό της δεύτερης σειράς που εξ' ορισμού πρέπει να είναι ίσο με την μονάδα. Για να αλλάξουμε θέση στο μη μηδενικό του στοιχείο του πρέπει να τον πολλαπλασιάσουμε με έναν μεταθετικό πίνακα από αριστερά, όμως για να μην αλλάξη η δομή του πρέπει να τον πολλαπλασιάσουμε και από δεξιά με τον ανάστροφό του. Έχουμε ότι για κάθε $w \in W$ ο $w^t = w^{-1}$. Άρα αν διαλέξουμε ένα $w \in W$ τότε θα έχουμε ότι για κάθε $h \in X_{12}$ το $whw^{-1} \in X_{ij}$ με $j \neq 2$. Θα εξετάσουμε για ποια $w \in W$ το whw^{-1} σταθεροποιεί το $v \in V_n(F)$ και επάγει τον ταυτοτικό μετασχηματισμό στο $V_n(F)/Fv$. Έστω ότι $v = v_i$. Τότε έχουμε το $V_n(F)/Fv_i$, δηλαδή πρέπει να ισχύει ότι το $whw^{-1}v' = v' + Fv_i$ με $v' \in V_n(F)$. Για να ισχύει αυτό πρέπει να είναι το μη μηδενικό στοιχείο του whw^{-1} στην i-σειρά. Άρα έχουμε $w(1) = i$ και έτσι το whw^{-1} επάγει τον ταυτοτικό μετασχηματισμό στην $V_n(F)/Fv_i$ για κάθε $1 \leq i \leq n$. Αν το $i = 2$ τότε το $wX_{12}w^{-1} = X_{21}$ και σταθεροποιεί την v_2. Ως εκ τούτου έχουμε ότι ο $g = whw^{-1}$ με $h \in X_{12}$, $w \in W$ και $w(1) = i$.

2. Λέμε ότι μία βάση B του $V_n(F)$ ανήκει στην πλήρη σήμανση $(V_1, ..., V_n)$ αν κάθε V_i περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο του B που δεν είναι στο V_{i-1}.

   (α') Δείξτε ότι αν οι $(V_1, ..., V_n)$ και $(W_1, ..., W_n)$ είναι πλήρεις σημάνσεις στο $V_n(F)$, τότε υπάρχει μία βάση του $V_n(F)$ που ανήκει και στις δύο σημάνσεις.

   (β') Χρησιμοποιήστε το (a') για να δώσετε μία διαφορετική απόδειξη του Θεωρήματος Διάσπασης Bruhat.

ΛΥΣΗ

(α') Έστω τα $(V_1, ..., V_n)$ και $(W_1, ..., W_n)$ είναι πλήρεις σημάνσεις στο $V_n(F)$, τότε έχουμε ότι $dim(V_i) = dim(W_i)$, για κάθε $1 \leq i \leq n$. Έστω τώρα ότι $B \in (V_1, ..., V_n)$, με $B = \{v_1, ..., v_n\}$ όπου $v_i \in V_i$ και $v_i \notin V_{i-1}$. Έστω ότι ένα $B' \in (W_1, ..., W_n)$, με $B' = \{w_1, ..., w_n\}$ όπου $w_i \in W_i$ και $w_i \notin W_{i-1}$. Έχουμε ότι, καθώς ισχύει το $dim(V_i) = dim(W_i)$, υπάρχουν B και B' τέτοια ώστε το $dim(v_i) = dim(w_i)$, για κάθε $1 \leq i \leq n$. Άρα θα έχουμε ότι το $w_i = \lambda v_i$ με $\lambda \in F$. Αν το $\lambda = 1$ τότε το $w_i = v_i$ για κάθε $1 \leq i \leq n$. Οπότε το $B = B'$ με $B \in (V_1, ..., V_n)$ και $B \in (W_1, ..., W_n)$. Αν $\lambda \neq 1$ τότε το $w_i = \lambda v_i$. Άρα έχουμε ότι το $w_i \in W_i$ και έτσι $\lambda u_i \in W_i \Rightarrow u_i\lambda \in W_i \Rightarrow u_i \in W_i$. Ως εκ τούτου έχουμε ότι $B \in (V_1, ..., V_n)$ και $B \in (W_1, ..., W_n)$.

(β′) Έστω $(V_1, ..., V_n)$ μια πλήρη σήμανση. Έχουμε ότι η G δρα στην πλήρη σήμανση ως εξής: για κάθε $g \in G$ το $g(V_1, ..., V_n) = (gV_1, ..., gV_n)$ το οποίο είναι επίσης μία πλήρη σήμανση. Τώρα έχουμε ότι η B (η συνήθης υποομάδα Borel) είναι η σταθεροποιούσα της πλήρης σήμανσης, άρα ισχύει ότι $B(V_1, ..., V_n) = (V_1, ..., V_n)$ και το W είναι μία unipotent συζυγή υποομάδα του U. Ως εκ τούτου έχουμε ότι το $w(V_1, ..., V_n) = (wV_1, ..., wV_n)$ για κάθε $w \in W$. Άρα έχουμε ότι το $BWB(V_1, ..., V_n) = BW(V_1, ..., V_n) = B(wV_1, ..., wV_n) = (wV_1, ..., wV_n)$ καθώς το $w \in G$ και η δράση του G είναι μεταβατική, άρα και το $(wV_1, ..., wV_n)$ είναι μία πλήρη σήμανση και έτσι σταθεροποιήται από το B. Άρα από το κομμάτι (a') υπάρχει βάση b τέτοια ώστε $b \in G(V_1, ..., V_n)$ και $b \in BWB(V_1, ..., V_n)$, δηλαδή $b \in G$ και $b \in BWB$. Οπότε έχουμε $G = BWB$.

4. Η Ειδική Γραμμική Ομάδα

Η ειδική γραμμική ομάδα είναι η υποομάδα $SL(n, F)$ της $GL(n, F)$ που αποτελείται από όλους τους $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το F που έχουν ορίζουσα 1. Με άλλα λόγια, η $SL(n, F)$ είναι ο πυρήνας του ομομορφισμού $det : GL(n, F) \to F^\times = F - \{0\}$, και ως εκ τούτου η $SL(n, F)$ είναι κανονική υποομάδα της $GL(n, F)$.

Πρόταση 4.1. Έστω $n \in \mathbb{N}$, και έστω το q να είναι μία δύναμη ενός πρώτου. Τότε

$$|SL(n, q)| = \prod_{k=1}^{n-1}(q^{n+1} - q^k) = q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q^n - 1)\cdots(q^2 - 1)$$

Απόδειξη. Ο ομομορφισμός det είναι προφανές ότι είναι επί, και έτσι έχουμε $F^\times \cong GL(n, F)/SL(n, F)$ για κάθε σώμα F, από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών. Ιδιαίτερα, αν $|F| = q$, τότε έχουμε ότι $|GL(n, q) : SL(n, q)| = q - 1$. Το αποτέλεσμα προκύπτει από την Πρόταση 2.3.•

Δείξαμε στο Θεώρημα 2.11 ότι η $GL(n, F)$ παράγεται από τις υποομάδες ρίζες και τις διαγώνιες υποομάδες. Τώρα θα αποδείξουμε το ανάλογο αποτέλεσμα για την $SL(n, F)$.

Πρόταση 4.2. Η $SL(n, F)$ παράγεται από τις ριζικές υποομάδες X_{ij}.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι από το πρώτο κομμάτι του Λήμματος 2.7 κάθε transvection βρίσκεται στην $SL(n, F)$. Το αποτέλεσμα θα προέλθει από τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Ένα στοιχείο της $SL(n, F)$ μπορεί να πολλαπλασιαστεί από τα αριστερά με transvections για να πάρουμε έναν άνω τριγωνικό πίνακα.

2. Ένα άνω τριγωνικό στοιχείο της $SL(n, F)$ μπορεί να πολλαπλασιαστεί από τα αριστερά με transvections για να πάρουμε έναν άνω unitriangular πίνακα.

3. ένας άνω unitriangular πίνακας μπορεί να πολλαπλασιαστεί από τα αριστερά με transvections για να πάρουμε τον ταυτοτικό πίνακα.

Γνωρίζουμε ότι οι υποομάδες B και U παράγονται από τις ριζικές υποομάδες X_{ij}. Το (3) θα μας δώσει ότι το ουδέτερο στοιχείο της $SL(n, F)$ το παράγουν οι ριζικές υποομάδες, το (2) θα μας δώσει ότι οποιοσδήποτε άνω τριγωνικός πίνακας της $SL(n,F)$ παράγεται από τις ριζικές υποομάδες ως $X_{ij}u = s_u$, όπου u ένας άνω unitriangular και s_u ένας άνω τριγωνικός πίνακας της $SL(n,F)$ και τέλος η (1) θα μας δώσει ότι οποιοδήποτε άλλο στοιχείο της $SL(n,F)$ παράγεται από τις ριζικές υποομάδες ως $X_{ij}b = s$ με b ένας άνω τριγωνικός πίνας και $s \in SL(n,F)$. Άρα αρκούν οι παραπάνω ιδιότητες για να μας δείξουν ότι η $SL(n,F)$ παράγεται από τις ριζικές υποομάδες. Θα αποδείξουμε τα (1) και (2) καθώς το (3) είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 2.12.

1. Από το Λήμμα 2.8, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε από τα αριστερά κάθε στοιχείο της $SL(n,F)$ με transvections για να πάρουμε έναν πίνακα με την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε i, υπάρχει ακριβώς μία γραμμή του πίνακα στην οποία τα στοιχεία στις πρώτες $(i-1)$-στήλες είναι μηδέν και έχει ένα μη μηδενικό στοιχείο την i-ιοστή στήλη. Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε από τα αριστερά αυτόν τον πίνακα με πίνακες της μορφής $X_{ji}(1)X_{ij}(-1)X_{ji}(1)$ για να πάρουμε έναν άνω τριγωνικό πίνακα. Αυτό αποδεικνύει το (1).

Παράδειγμα. Έστω $A \in SL(n,F)$ με $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ και $(k_1,k_2,k_3,k_4) = (3,1,4,2)$ τότε έχουμε:

$$X_{43}(-\tfrac{4}{3}) \begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

$$X_{23}(-\tfrac{2}{3}) \begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{11}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

$$X_{13}(-\tfrac{9}{3}) \begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{11}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -10 & -5 & -13 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

$$X_{21}(-\tfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -10 & -5 & -13 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{11}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -10 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{11}{6} \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

$$X_{42}(-\tfrac{7}{30})\begin{pmatrix} 0 & -10 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{11}{6} \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{11}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -10 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{11}{6} \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{19}{30} \end{pmatrix}$$

$$X_{24}(3)\begin{pmatrix} 0 & -10 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{11}{6} \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{19}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -10 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{15} \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{19}{30} \end{pmatrix}$$

Άρα αν τον πολλαπλασιάσουμε από τα αριστερά με τον $X_{31}(1)X_{13}(-1)X_{31}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -10 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{15} \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{19}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{15} \\ 0 & 10 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{19}{30} \end{pmatrix}$$

και αυτό με το $X_{42}(1)X_{24}(-1)X_{42}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ και θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{15} \\ 0 & 10 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{19}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{19}{30} \\ 0 & 10 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

Τέλος, με το $X_{32}(1)X_{23}(-1)X_{32}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ και θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{19}{30} \\ 0 & 10 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & -10 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{19}{30} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

Το οποίο ανήκει στο B.

2. Έστω $a, b, c \in F$, με $ac \neq 0$. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, όταν πολλαπλασιάζεται από τα αριστερά με τον $X_{21}(-1)X_{21}(1-c)X_{21}(c) =$

$\begin{pmatrix} c & 1-c^{-1} \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$ δίνει: $\begin{pmatrix} c & 1-c^{-1} \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & bc+c-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Τώρα θεωρούμε έναν άνω τριγωνικό πίνακα στην $SL(n,F)$ έχοντας $\lambda_1,...,\lambda_n$ ως στοιχεία της κύριας διαγωνίου του. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω παρατήρηση, βρίσκουμε ότι μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε από τα αριστερά αυτόν τον πίνακα με transvections για να πάρουμε έναν άλλο άνω τριγώνικό πίνακα στην $SL(n,F)$ του οποίου τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι $\lambda_1,...,\lambda_{n-2},\lambda_{n-1}\lambda_n,1$. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία, παίρνουμε έναν άνω τριγωνικό πίνακα στην $SL(n,F)$ του οποίου τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι $\lambda_1\cdots\lambda_n,1,...,1$. Αλλά αυτός ο πίνακας έχει ορίζουσα 1, άρα πρέπει να έχουμε $\lambda_1\cdots\lambda_n=1$, και ως εκ τούτου είναι ένας άνω unitriangular πίνακας. Αυτό αποδεικνύει την (2).•

Πρόταση 4.3. Οι υποομάδες X_{ij} είναι συζυγείς στην $SL(n,F)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε δύο ριζικές υποομάδες X_{ij} και $X_{i'j'}$. Έστω w να είναι ένας πίνακας μετάθεσης που στέλνει το v_i στο $v_{i'}$ και το v_j στο $v_{j'}$. Τότε το $wX_{ij}(a)w^{-1}=X_{i'j'}(a)$ για κάθε $a\in F$ από το (5) του Λήμματος 2.7. Καθώς ο αντίστροφος του w είναι ο ανάστροφός του, βλέπουμε ότι η ορίζουσά του είναι ±1. Αν $det(w)=1$, τότε το $w\in SL(n,F)$ και τελειώσαμε. (Σημειώνουμε ότι αν το $n>3$, τότε με μεταφορά των στηλών αν είναι απαραίτητο μπορούμε πάντα να διαλέξουμε ένα w τέτοιο ώστε η $det(w)=1$.) Τώρα υποθέτουμε ότι η $det(w)=-1$ και έστω d να είναι ο πίνακας που διαφέρει από τον ταυτοτικό μόνο στο στοιχείο (1,1) έχοντας -1. Τότε το $dw\in SL(n,F)$, και $dwX_{ij}(a)(wd)^{-1}=dX_{i'j'}(a)d^{-1}=X_{i'j'}(\pm a)$ για κάθε $a\in F$, καθώς το d και το d^{-1} ανήκουν στην $SL(n,F)$ βλέπεουμε ότι τα X_{ij} είναι συζυγείς στην $SL(n,F)$.•

Έστω Z να είναι η υποομάδα του $GL(n,F)$ που αποτελείται από τα πολλαπλάσια του ταυτοτικού πίνακα με στοιχεία του $F^\times$. Τα στοιχεία του Z ονομάζονται οι (μη μηδενικοί) βαθμωτοί πίνακες. Προφανώς έχουμε ότι $Z\cong F^\times$.

Πρόταση 4.4. Το κέντρο του $GL(n,F)$ είναι το Z και το κέντρο του $SL(n,F)$ είναι το $Z\cap SL(n,F)$.

Απόδειξη. Αν το $n=1$, τότε η $GL(n,F)\cong F^\times\cong Z$ και το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο, ως εκ τούτου υποθέτουμε ότι το $n>1$. Έστω $G=GL(n,F)$ ή $SL(n,F)$. Παρατηρούμε ότι το $Z\cap G$ περιέχεται στο $Z(G)$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο της G που μετατίθεται με όλα τα στοιχεία της $SL(n,F)$ βρίσκεται στην $Z\cap G$. Έστω ότι ο $M=(m_{ij})$ να είναι ένας τέτοιος πίνακας. Έστω $1 \leq i, j \leq n$ να είναι διακριτά, και θεωρούμε τον $X_{ij}(1)$. Από την υπόθεση έχουμε ότι το $MX_{ij}(1) = MX_{ij}(1)$. Αν συγκρίνουμε τα (i, i) και τα (i, j) στοιχεία θα βρούμε τα εξής:

- **Για το** (i, j) **έχουμε:** $\sum_{k=1}^{n} m_{ik}x_{kj} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}m_{kj} \Rightarrow m_{i1}x_{1j} + ... + m_{ii}x_{ij} + ... + m_{ij}x_{jj} + ... + m_{in}x_{nj} = x_{i1}m_{1i} + ... + x_{ii}m_{ij} + ... + x_{ij}m_{jj} + ... + x_{in}m_{nj} \Rightarrow m_{ii} + m_{ij} = m_{ij} + m_{jj} \Rightarrow m_{ii} = m_{jj}$
- **Για το** (i, i) **έχουμε:** $\sum_{k=1}^{n} m_{ik}x_{ki} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}m_{ki} \Rightarrow m_{i1}x_{1i} + ... + m_{ii}x_{ii} + ... + m_{in}x_{ni} = x_{i1}m_{1i} + ... + x_{ii}m_{ii} + ... + x_{ij}m_{ji} + ... + x_{in}m_{ni} \Rightarrow m_{ii} = m_{ii} + m_{ji} \Rightarrow m_{ij} = 0$

Άρα συμπεραίνουμε ότι το $m_{ij} = m_{11}\delta_{ij}$ για κάθε i και j, και ως εκ τούτου ότι το $M \in Z \cap G$. (Ο ίδιος ισχυρισμός δείχνει ότι το σύνολο των στοιχείων του $M_n(F)$ είναι το $\{aI | a \in F\} = Z \cup \{0\}$.)•

Η ομάδα $GL(n, F)/Z$ ονομάζεται προβολική γενική γραμμική ομάδα και η ομάδα $SL(n, F)/Z \cap SL(n, F)$ ονομάζεται προβολική ειδική γραμμική ομάδα. Συμβολίζουμε αυτές τις ομάδες με $PGL(n, F)$ και $PSL(n, F)$ αντίστοιχα. (Παρατηρούμε ότι το Δεύτερο Θεώρημα Ισομορφισμών υπονοεί ότι το $PSL(n, F) \cong ZSL(n, F)/Z \leq GL(n, F)/Z = PGL(n, F)$.) Καθώς το $Z \cong F^{\times}$, έχουμε ότι το $|PGL(n, q)| = |SL(n, q)|$ για κάθε δύναμη ενός πρώτου q. Ωστόσο, για να ορίσουμε το $|PSL(n, q)|$ πρέπει να μπορέσουμε να μετρήσουμε τον αριθμό των n-οστών ριζών της μονάδας σε ένα σώμα q στοιχείων.

Πρόταση 4.5. Έστω q να είναι μία δύναμη ενός πρώτου. Τότε

$$|PSL(2, q)| = \begin{cases} q^3 - q & ,\text{αν} \quad 2|q \\ \frac{1}{2}(q^3 - q) & ,\text{αν} \quad 2 \nmid q \end{cases}$$

Απόδειξη. Κάθε πίνακας στο $Z \cap SL(2, q)$ πρέπει να είναι της μορφής aI, όπου το a είναι η τετραγωνική ρίζα της μονάδας του σώματος q στοιχείων. Ένα τέτοιο στοιχείο a είναι η ρίζα του πολυωνύμου $X^2 - 1$, το οποίο έχει δύο διακριτές ρίζες (την 1 και -1) σε κάθε σώμα του οποίου η χαρακτηριστική δεν είναι ίση με 2. Γι' αυτό, αν το $2 \nmid q$, τότε το $|Z \cap SL(2, q)| = 2$. Ωστόσο αν το $2|q$, τότε το $X^2 - 1 = (X - 1)^2$ έχει μόνο μία διακριτή ρίζα, και ως εκ τούτου το $|Z \cap SL(2, q)| = 1$. Το αποτέλεσμα τώρα προκύπτει από την Πρόταση 4.1.•

Ο κύριος στόχος μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να δείξουμε ότι η $PSL(n, F)$ είναι απλή όταν το $n \geq 2$, εκτός από όταν το $n = 2$ και το $|F| = 2$ ή 3. Αυτό το αποτέλεσμα οφείλεται στον L.E.Dickson, έναν ακόμα από τους πρώτους αρχιτέκτονες της μαθηματικής παράδοσης του Πανεπιστημίο του Chicago, που το διατύπωσε το 1896 στην διδακτορική του διατριβή για F πεπερασμένο σώμα. Το 1893 ο E.H.Moore είχε διατυπώσει το αποτέλεσμα για F πεπερασμένο σώμα και $n = 2$, ενώ το 1870 ο Camille Jordan το είχε διατυπώσει για F πεπερασμένο σώμα με τάξη πρώτο αριθμό και n αυθαίρετο. Αρχικά χρειαζόμαστε δύο Λήμματα.

Λήμμα 4.6. Αν $n \geq 2$, τότε κάθε transvection $X_{ij}(a)$ είναι ένας μεταθέτης στοιχείων του $SL(n, F)$, εκτός όταν το $n = 2$ και το $|F| = 2$ ή 3.

Απόδειξη. Αν το $n > 2$, τότε έχουμε το $X_{ij}(a) = [X_{ik}(a), X_{kj}(1)]$ από το (5) του Λήμματος 2.7, όπου k είναι διαφορετικό από τα i και j. Τώρα έστω $n = 2$. Για κάθε $\beta, \gamma \in F$ με $\beta \neq 0$, παρατηρούμε ότι ο μεταθέτης των $\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι $\begin{pmatrix} 1 & (\beta^2-1)\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Άρα, το $X_{12}(a)$ μπορεί να εκφραστεί ως μεταθέτης στην $SL(2, F)$ αν υπάρχουν $\beta \in F^{\times}$ και $\gamma \in F$ τέτοια ώστε $a = (\beta^2 - 1)\gamma$. Αν το $|F| > 3$, τότε υπάρχει πάντα κάποιο $\beta \in F^{\times}$, τέτοιο ώστε το $\beta^2 \neq 1$, και μπορούμε τότε να πάρουμε το $\gamma = a(\beta^2 - 1)^{-1}$. Η $X_{21}(a)$ είναι όμοια.$\bullet$

Παρατηρούμε ότι το Λήμμα 4.6 και η Πρόταση 4.2 μαζί υπονοούν ότι, εκτός όταν το $n = 2$ και το $|F| = 2$ ή 3, η $SL(n, F)$ είναι η υποομάδα μεταθετών του εαυτού της και κατά συνέπεια και της $GL(n, F)$.

Λήμμα 4.7. Αν το $n \geq 2$, τότε η δράση της $SL(n, F)$ σε έναν μονοδιάστατο υπόχωρο του $V_n(F)$ είναι διπλά μεταβατική.

Απόδειξη. Έστω V_1, V_2, W_1 και W_2 να είναι μονοδιάστατοι υπόχωροι του $V_n(F)$, που παράγονται αντίστοιχα από τα c_1, c_2, d_1 και d_2 ώστε $V_1 \neq V_2$ και $W_1 \neq W_2$. Τότε τα c_1 και c_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, όπως και τα d_1 και d_2, και συνεπώς μπορούμε να βρούμε $c_3, ..., c_n$ και $d_3, ..., d_n$ τέτοια ώστε τα $\{c_1, ..., c_n\}$ και $\{d_1, ..., d_n\}$ να είναι βάσεις για το $V_n(F)$. Έστω C (αντίστοιχα D) να είναι ο $n \times n$ πίνακας του οποίου η i-οστή στήλη είναι c_i (αντίστοιχα d_i) για κάθε $1 \leq i \leq n$. Προφανώς τα C και D είναι πίνακες τάξης n και ως εκ τούτου βρίσκονται στην $GL(n, F)$. Έστω $e = det(D)/det(C)$, και έστω E να είναι ο πίνακας που διαφέρει από τον ταυτοτικό μόνο στο (1,1)-στοιχείο που έχει e αντί για 1. Τότε $det(DE^{-1}C^{-1}) = det(D)det(E)^{-1}det(C)^{-1} = \frac{det(D)e^{-1}}{det(C)} = \frac{det(D)det(C)}{det(D)det(C)} = 1$, και το $DE^{-1}C^{-1}$

στέλνει το c_1 στο $e^{-1}d_1$ και το c_2 στο d_2 καθώς ο $DE^{-1}C^{-1} = \begin{pmatrix} d_1e^{-1}c_1^{-1} \\ d_2c_2^{-1} \\ . \\ . \\ . \\ d_nc_n^{-1} \end{pmatrix}$

έτσι έχουμε $(c_1, 0, ..., 0) \begin{pmatrix} d_1e^{-1}c_1^{-1} \\ d_2c_2^{-1} \\ . \\ . \\ . \\ d_nc_n^{-1} \end{pmatrix} = d_1e^{-1}$

και $(0, c_2, 0, ..., 0) \begin{pmatrix} d_1e^{-1}c_1^{-1} \\ d_2c_2^{-1} \\ . \\ . \\ . \\ d_nc_n^{-1} \end{pmatrix} = d_2$. Άρα βρήκαμε ένα στοιχείο του $SL(n, F)$ που στέλνει το V_1 στο W_1 και το V_2 στο W_2, όπως θέλαμε.•

Για να αποδείξουμε το τελικό μας θεώρημα θα χρειαστούμε ένα ακόμα Λήμμα και τρεις Προτάσεις.

Πρόταση 4.8. Έστω G να είναι μία ομάδα και έστω N να είναι κανονική υποομάδα του G. Τότε η G/N είναι αβελιανή αν και μόνο αν η G' είναι υποομάδα της N, όπου η G' είναι η ομάδα μεταθετών της G.

Απόδειξη. Για κάθε $x, y \in G$, έχουμε ότι $[xG', yG'] = [x, y]G' = G'$, κατά συνέπεια, η ομάδα μεταθετών της G/G' είναι τετριμμένη, και έτσι η G/G' είναι αβελιανή. Έστω N να είναι κανονική υποομάδα του G. Αν η G' είναι υποομάδα του N τότε από το Δεύτερο Θεώρημα Ισομορφισμών η G/N είναι ισόμορφη με μία αβελιανή ομάδα πηλίκο G/G' και ως εκ τούτου είναι αβελιανή. Αντίστροφα, αν το G/N είναι αβελιανή, τότε για κάθε $x, y \in G$ έχουμε $(xN)(yN) = (yN)(xN)$ και ως εκ τούτου η $[x, y] \in N$, το οποίο δείχνει ότι το G' είναι υποομάδα του N.•

Πρόταση 4.9. Αν στο σύνολο Q υπό την δράση του G ισχύει η μεταθετικότητα, τότε το $X \cong G/G_x$ ως G-σύνολο για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη. Έστω $x \in X$, και ορίζουμε την $\phi : G/G_x \to X$ με $\phi(gG_x) = gx$ για κάθε $g \in G$. Αν $gG_x = g'G_x$ για κάθε $g, g' \in G$, τότε το $g^{-1}g' \in G_x$ και ως εκ τούτου το $g^{-1}g'x = x$, το οποίο δίνει $gx = g'x$. Αυτό δείχνει ότι η ϕ είναι καλά ορισμένη συνάρτηση, και αντιστρέφοντας τον ισχυρισμό βλέπουμε ότι η ϕ είναι 1-1. Έχουμε ότι $u\phi(gG_x) = u(gx) = (ug)x = \phi(ugG_x) = \phi(u(gG_x))$ για κάθε $u \in G_x$ και $gG_x \in G/G_x$ το οποίο δείχνει ότι η ϕ ομομορφισμός. Για κάθε $y \in X$ υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε το $y = gx = \phi(gG_x)$ επειδή η δράση του G στο X είναι μεταβατική, το οποίο δείχνει ότι η ϕ είναι επί. Γι' αυτό, η ϕ είναι ένα G-σύνολο ισομορφισμών, όπως θέλαμε.•

Πρόταση 4.10. Έστω G να είναι μία ομάδα, έστω X να είναι ένα διπλά μεταβατικό G-σύνολο και έστω το $x \in X$. Τότε το G_x είναι μέγιστη υποομάδα του G.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 4.9, έχουμε ότι το $X \cong G/G_x$ ως G-σύνολο. Υποθέτουμε ότι το G_x δεν είναι μέγιστο, άρα $G_x < K < G$ για κάποια υποομάδα K. Τότε υπάρχει $g \in G$ και $k \in K$ τέτοιο ώστε το $g \notin K$ και $k \notin G_x$. Καθώς το G/G_x είναι διπλά μεταβατικό, υπάρχει κάποιο $u \in G$ τέτοιο ώστε το $uG_x = G_x$ και $u(kG_x) = gG_x$. Αυτό δείχνει ότι $u \in G_x$, και ως εκ τούτου το $uk \in K$. Επίσης έχουμε ότι το $g^{-1}uk \in G_x$, και κατά συνέπεια το $g \in K$. Φτάσαμε σε άτοπο, άρα η G_x είναι μέγιστη.•

Θεώρημα 4.11. Αν το $n \geq 2$, τότε η $PSL(n, F)$ είναι απλή, εκτός όταν το $n = 2$ και το $|F| = 2$ ή 3.

Απόδειξη. Έστω η $S = SL(n, F)$, και έστω το P να είναι υπόομάδα του S που σταθεροποιεί το Fv_1 υπό την δράση της S στον μονοδιάστατο υπόχωρο του $V_n(F)$. Η δράση της S στον μονοδιάστατο υπόχωρο είναι η εξής: για κάθε $n \times n$ πίνακα $s \in S$ και για κάθε $n \times 1$ μονοδιάστατα διανύσματα $v_i, v_j \in V_n(F)$ το $sv_i = v_j$. Καθώς η P σταθεροποιεί την Fv_1 θα πρέπει να έχουμε ότι για κάθε $p \in P$ το $pv_1 = av_1$ όπου το $a \in F$. Άρα έχουμε $pv_1 = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}v_k = p_{i1}v_1 + ... + p_{in}v_n = p_{i1}v_1$, ως εκ τούτου για να ισχύει ότι $pv_1 = av_1$ πρέπει το $p_{i1} = 0$ για κάθε $i \neq 1$. Από το Λήμμα 4.7 και την Πρόταση 4.10, το P είναι η μέγιστη υποομάδα του S. Έστω το K να είναι το σύνολο των άνω τριγωνικών unitriangular πινάκων των οποίων τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία εκτός της κύριας διαγωνίου βρίσκονται στην πρώτη σειρά. Θα δείξουμε ότι το K είναι αβελιανή κανονική υποομάδα του P. Έχουμε ότι για κάθε $a, b \in K$ καθώς το K είναι ομάδα, το $ab, ba \in K$, άρα γνωρίζουμε την μορφή των πινάκων. Για να δείξουμε ότι $ab = ba$ αρκεί να ελέγξουμε την πρώτη γραμμή. Θα έχουμε ότι $\sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{1k}a_{kj} \Rightarrow a_{11}b_{1j} + ... + a_{1j}b_{jj} + ... + a_{1n}b_{nj} = b_{11}a_{1j} + ... + b_{1j}a_{jj} + ... + b_{1n}a_{nj} \Rightarrow b_{1j} +_a 1j = a_{1j} + b_{1j}$ καθώς $a_{11} = b_{11} = a_{jj} = b_{jj} = 1$. Άρα η K είναι αβελιανή ομάδα. Τώρα θα δείξουμε ότι είναι κανονική υποομάδα του P, δηλαδή θα δείξουμε ότι για κάθε $p \in P$ και για κάθε $k \in K$ το $pkp^{-1} \in K$. Παρατηρούμε ότι καθώς τα στοιχεία της πρώτης στήλης κάθε πίνακα της P είναι μηδέν εκτός του πρώτου και τα αντίστοιχα της K είναι μηδέν εκτός του πρώτου που είναι ίσο με την μονάδα, και καθώς ο $(n-1)$ κάτω αριστερός υποπίνακας του K είναι ο I_{n-1} πίνακας, ο αντίστοιχος υποπίνακας της p θα πολλαπλασιαστεί με αυτό της p^{-1} και έτσι το αποτέλεσμα θα είναι ο I_{n-1} στον αντίστοιχο υποπίνακα. Για να αποδείξουμε τώρα τον ισχυρισμό μας αρκεί να δείξουμε ότι το (1,1)-στοιχείο του pkp^{-1} θα είναι ίσο με 1. Από την μορφή του p έχουμε ότι το $p_{11}p'_{11} = 1$ με $p^{-1} = (p'_{ij})$. Άρα για το (1,1)-στοιχείο του $pk = y$ έχουμε ότι $\sum_{k=1}^{n} p_{1k}k_{k1} = p_{11}k_{11}+...+p_{1n}k_{n1} = p_{11}$ και τώρα για το αντίστοιχο στοιχείο του pkp^{-1} έχουμε $\sum_{k=1}^{n} y_{1k}p'_{k1} = y_{11}p'_{11} + ... + y_{1n}p'_{n1} = y_{11}p'_{11} = p_{11}p'_{11} = 1$ όπως θέλαμε.

Έστω το N να είναι κανονική υποομάδα του S. Από το Θεώρημα αντιστοιχίας και τον ορισμό του $PSL(n, F)$, αρκεί να δείξουμε ότι το N αποτελείται από βαθμωτούς πίνακες. Αρχικά υποθέτουμε ότι το N είναι υποομάδα του P. Τότε το N σταθεροποιεί το Fv_1, και ως εκ τούτου το sNs^{-1} σταθεροποιεί το $s(Fv_1)$ για κάθε $s \in S$ από το Λήμμα 3.3. Καθώς η δράση του S στο μονοδιάστατο υπόχωρο του $V_n(F)$ είναι μεταβατική από το Λήμμα 4.7, συνεπάγεται ότι το N σταθεροποιεί κάθε μονοδιάστατο υπόχωρο του $V_n(F)$. Έχουμε δηλαδή ότι το $sNs^{-1}s(Fv_1) = sN(Fv_1) = s(Fv_1) = F(sv_1) = Fv_i$ από τη δράση του S στον μονοδιάστατο υπόχωρο του $V_n(F)$, άρα το N σταθεροποιεί κάθε Fv_i το οποίο δείχνει ότι τα στοιχεία του N είναι διαγώνιοι πίνακες. Άλλά το N επίσης σταθεροποιεί κάθε $F(v_i + v_j)$ καθώς $N(F(v_i + v_j)) = N(Fv_i) + N(Fv_j) = Fv_i + Fv_j = F(v_i + v_j)$, το οποίο δείχει ότι τα στοιχεία του N πρέπει να είναι βαθμωτοί πίνακες.

Τώρα υποθέτουμε ότι το N δεν είναι υποομάδα του P. Τότε έχουμε ότι το $P < PN \leq S$, το οποίο αναγκάζει το $PN = S$ καθώς το P είναι η μέγιστη υποομάδα του S. Έστω $\eta : S \to S/N$ να είναι η φυσική συνάρτηση. Έχουμε ότι $\eta(P) = PN/N = S/N = \eta(S)$ και $\eta(K) = KN/N = \eta(KN)$. Καθώς το K είναι κανονική υποομάδα του P συνεπάγεται ότι το $\eta(K)$ είναι κανονική υποομάδα του $\eta(P)$, και ως εκ τουτου $\eta(KN)$ είναι κανονική υποομάδα του $\eta(S)$. Το θεώρημα αντιστοιχίας τώρα δείχνει ότι το KN είναι κανονική υποομάδα του S. Παρατηρώντας ότι το K είναι η ομάδα που παράγεται από τις ριζικές υποομάδες $X_{12}, X_{13}, ..., X_{1n}$, για τους συζυγείς αυτών των ριζικών υποομάδων στο S έχουμε ότι $sX_{1i}s^{-1} = pnX_{1i}(pn)^{-1} = npX_{1i}p^{-1}n^{-1} = (ss^{-1}n)(pX_{1i}p^{-1})(n^{-1}ss^{-1}) = (sns^{-1})(pX_{1i}p^{-1})(sn^{-1}s^{-1})$. Άρα κάθε πίνακας του N μετατίθεται με κάθε άλλο πίνακα καθώς είναι διαγώνιος. Επίσης, οι $sns^{-1}, sn^{-1}s^{-1} \in N$ καθώς η N είναι κανονική υποομάδα του S και ο $pX_{1i}p^{-1} \in K$ καθώς η K είναι κανονική υποομάδα του P. Άρα έχουμε ότι το παραπάνω γινόμενο πινάκων ανήκει στο NKN. Όμως καθώς ο N είναι μεταθετικός έχουμε ότι $NKN = KNN = KN$. Οπότε έχουμε ότι οι συζυγείς κάθε τέτοια ριζικής υποομάδας βρίσκονται στην KN. Αλλά βλέπουμε μέσω της Πρότασης 4.3 ότι αυτές οι ριζικές υποομάδες συμπεριλαμβάνουν όλα τα X_{ij}. Καθώς τα X_{ij} παράγουν την S, από την Πρόταση 4.2, έχουμε ότι το $KN = S$. Από το Δεύτερο Θεώρημα Ισομορφισμών, έχουμε τώρα ότι το $S/N = KN/N \cong K/K \cap N$, και καθώς το K είναι αβελιανή συνεπάγεται ότι η S/N είναι επίσης αβελιανή. Γι' αυτό, όλοι οι μεταθέτες των στοιχείων του S βρίσκονται στο N από την Πρόταση 4.8. Συγκεκριμένα όλοι οι πίνακες $X_{ij}(a)$ βρίσκονται στο N από το Λήμμα 6. Έτσι το N περιέχει κάθε X_{ij}, και η Πρόταση 4.2 τώρα υπονοεί ότι το $N = S$, το οποίο είναι άτοπο.•

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω B να είναι η συνήθη υποομάδα Borel της $GL(n, F)$. Ορίστε όλες τις υποομάδες της $SL(n, F)$ που περιέχουν την $B \cap SL(n, F)$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι το $B_0 = B \cap SL(n, F)$ είναι όλοι οι άνω τριγωνικοί πίνακες με ορίζουσα ένα, δηλαδή αν το F είναι σώμα χαρακτηριστικής 0, τότε το $B_0 = U$ όπου το U είναι η ομάδα των άνω unitriangular πινάκων. Αν το σώμα F είναι χαρακτηριστικής μεγαλύτερης του μηδενός τότε το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου του είναι ίσο με ένα. Από το (2) της Πρότασης 4.2 έχουμε ότι κάθε άνω τριγωτικό στοιχείο της $SL(n, F)$ μπορεί να πολλαπλασιαστεί από τα αριστερά με transvections για να πάρουμε έναν άνω unitriangular πίνακα. Άρα έχουμε ότι αν $b \in B_0$, $u \in U$ και $t \in X_{ij}$ ένα γινόμενο από transvections τότε $tb = u \Rightarrow b = t^{-1}u$. Οπότε για κάθε $b \in B_0$ έχουμε ότι το $B = X_{ij}U$. Θα δείξουμε ότι η $sX_{ij}Us^{-1}$, δηλαδή κάθε συζυγής της $X_{ij}U$ στην S που περιέχει την B_0 είναι υποομάδα του S. Έχουμε ότι καθώς τα X_{ij} και U έχουν ορίζουσα 1 τότε $sX_{ij}Us^{-1} \subseteq S$. Για το μοναδιαίο στοιχείο έχουμε ότι $I \in X_{ij}$ και $I \in U$, άρα $sIIs^{-1} = ss^{-1} = I$. Άρα το $I \in sX_{ij}Us^{-1}$. Για την κλειστότητα της πράξης έχουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in X_{ij}$ και $u_1, u_2 \in U$ έχουμε ότι $sx_1u_2s^{-1}sx_2u_2s^{-1} \Rightarrow sx_1u_2x_2u_2s^{-1}$. Αρκεί να δείξουμε ότι το $x_1u_1x_2u_2 \in X_{ij}U$. Όμως καθώς το $X_{ij}U = B_0$ έχουμε ότι $x_1u_1 = b_1 \in B_0$ και $x_2u_2 = b_2 \in B_0$, άρα έχουμε $b_1b_2 \in B_0 = X_{ij}U$ καθώς το B_0 είναι ομάδα. Ως εκ τούτου η πράξη μας είναι κλειστή. Τέλος, θα δείξουμε ότι υπάρχει ο αντίστροφος κάθε στοιχείου. Έχουμε ότι $sxus^{-1}(sxus^{-1})^{-1} = sxus^{-1}su^{-1}x^{-1}s^{-1} = sxuu^{-1}x^{-1}s^{-1} = sxx^{-1}s^{-1} = ss^{-1} = I$. Άρα η $sX_{ij}Us^{-1}$ είναι υποομάδα της $SL(n, F)$ που περιέχει το B_0 και για κάθε $s \in SL(n, F)$ έχουμε ότι οι $sX_{ij}Us^{-1}$

είναι όλες οι υποομάδες της $SL(n, F)$ που περιέχουν το B_0.

2. Δείξτε ότι το $PSL(2,2) \cong \Sigma_3$ και το $PSL(2,3) \cong A_4$ και ότι αυτές οι ομάδες δεν είναι απλές.

ΛΥΣΗ

Για την $PSL(2,2)$ έχουμε ότι $|PSL(2,2)| = |SL(2,2)/Z \cap SL(2,2)| = [SL(2,2) : Z \cap SL(2,2)] = \frac{|SL(2,2)|}{|Z \cap SL(2,2)|}$. Γνωρίζουμε ότι η $Z \cong F_2^\times \cong \mathbb{Z}_2^\times = \{1\} \cong \{I\}$. Άρα έχουμε ότι το $Z \cap SL(2,2) = I$ και $|Z \cap SL(2,2)| = 1$. Από την Πρόταση 4.1 παίρνουμε ότι το $|SL(2,2)| = \prod_{k=1}^{1}(2^3 - 2^k) = 2^3 - 2 = 6$, άρα το $|PSL(2,2)| = \frac{6}{1} = 6$ και το $|\Sigma_3| = 3! = 6$. Άρα υπάρχει μία 1-1 και επί αντιστοιχία. Καθώς το $Z \cap SL(2,2) = I$ έχουμε ότι το $PSL(2,2) \cong SL(2,2)$ με την ταυτοτική απεικόνιση. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι η $f : SL(2,2) \to \Sigma_3$ είναι ομομορφισμός. Γνωρίζουμε ότι $SL(2,2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Αν θέσουμε την f να είναι $f\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 1$, $f\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = (12)$, $f\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = (13)$, $f\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = (23)$, $f\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = (123)$ και $f\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = (132)$ παρατηρούμε ότι η f είναι ομομορφισμός. Άρα έχουμε ότι η $PSL(2,2) \cong \Sigma_3$ όπως θέλαμε. Αντίστοιχα για την $PSL(2,3)$ έχουμε ότι $|PSL(2,3) = [SL(2,3) : Z \cap SL(2,3)]$. Για το Z έχουμε ότι $Z \cong F_3^\times \cong \mathbb{Z}_3^\times = \{1, 2\}$ άρα το $Z \cap SL(2,3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ και άρα $|Z \cap SL(2,3)| = 2$. Πάλι από την Πρόταση 4.1 έχουμε ότι $|SL(2,3)| = \prod_{k=1}^{1}(3^3 - 3^k) = 3^3 - 3 = 24$. Άρα η $|PSL(2,3)| = 12$ και η $|A_4| = \frac{4!}{2} = 12$. Ως εκ τούτου υπάρχει μία 1-1 και επί αντιστοιχία. Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι η $g : PSL(2,3) \to A_4$ είναι ομομορφισμός. Έχουμε ότι η $SL(2,3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Άρα παρατηρούμε ότι η $PSL(2,3) = \{sZ_0 | s \in SL(2,3)\}$ με $Z_0 = Z \cap SL(2,3)$ άρα είναι μία ομάδα που αποτελείται από δισύνολα, δηλαδή απότελείται από τα σύνολα του τύπου $\{s, -s\}$. Αν επιλέξουμε ως αντιπρόσωπο του κάθε δισυνόλου το στοιχείο $s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ τότε η $PSL(2,3) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\right.$ $\left.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.
Αν θέσουμε τώρα την g να είναι $g\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 1$, $g\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = (123)$, $g\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = (132)$, $g\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = (143)$, $g\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right] = (134)$, $g\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right] = (12)(34)$, $g\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right] = (124)$,$g\left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = (142)$, $g\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = (243)$, $g\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right] = (234)$, $g\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = (14)(23)$ και $g\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right] = (13)(24)$ βλέπουμε ότι είναι ομομορφισμός. Άρα έχουμε ότι η $PSL(2,3) \cong A_4$. Για την $PSL(2,2)$ βλέπουμε ότι το $n = 2$ και το $|F| = 2$, και για την $PSL(2,3)$ ότι το $n = 2$ και το $|F| = 3$. Από το Θεώρημα 4.11 έχουμε ότι αυτές οι ομάδες δεν είναι απλές.

3. Να δείξετε η $PSL(2,4) \cong A_5$.

ΛΥΣΗ

Για την $PSL(2,4)$ έχουμε ότι $|PSL(2,4)| = [SL(2,4) : Z \cap SL(2,4)]$. Το $Z \cong F_4^{\times} = \{1, a, a^2\}$ με $aa = a^2$ και $aa^2 = 1$ άρα ο μόνος βαθμωτός πίνακας με ορίζουσα ίση με 1 είναι ο I. Οπότε έχουμε ότι $|Z \cap SL(2,4)| = 1$ και έτσι έχουμε ότι η $PSL(2,4) \cong SL(2,4)$ μέσω της ταυτοτικής απεικόνισης. Γνωρίζουμε ότι η $SL(2,4) \leq GL(2,4)$, άρα υπάρχει μονομορφισμός μέσω μιας f η οποία είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Από την Άσκηση 2.3 έχουμε ότι η $g : GL(2,4) \to GL(4,2)$ είναι μονομορφισμός και από την Άσκηση 2.5 έχουμε ότι η $h : GL(4,2) \to A_8$ είναι ισομορφισμός. Τώρα έχουμε ότι η $A_5 \leq A_8$. Μέσω μιας ταυτοτικής απεικόνισης ϕ έχουμε ότι η $\phi : A_5 \to A_8$ είναι μονομορφισμός. Άρα η έστω η $F : PSL(2,4) \to A_5$ με $F = f \circ g \circ h \circ \phi^{-1}$ είναι ομομορφισμός. Τέλος, έχουμε ότι η $|PSL(2,4)| = |SL(2,4)| = \prod_{k=1}^{1}(4^3 - 4^k) = 4^3 - 4 = 60$

και επήσης έχουμε ότι $|A_5| = \frac{5!}{2} = 60$. Ως εκ τούτου υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία και έτσι η $PSL(2,4) \cong A_5$ όπως θέλαμε.

4. Έστω $G = GL(n, F)$. Έστω B να είναι η συνήθη υποομάδα Borel της G, έστω N να έναι η υποομάδα του G μονόνιμων πινάκων και έστω $T = B \cap N$ να είναι η υποομάδα των διαγώνιων πινάκων. Έστω $B_0 = B \cap SL(n, F)$, έστω $N_0 = N \cap SL(n, F)$ και έστω $T_0 = T \cap SL(n, F) = B_0 \cap N_0$. Δείξτε ότι το B_0 και το N_0 σχηματίζουν ένα BN-ζευγάρι του $SL(n, F)$, με την αντίστοιχη Weyl ομάδα $W_0 = N_0/T_0$ να είναι ισόμορφη με την Σ_n.

ΛΥΣΗ

- Αρχικά θα δείξουμε ότι η S παράγεται από τα B_0 και N_0. Έχουμε από το Θεώρημα Διάσπασης Bruhat ότι η $G = BWB$, άρα αντίστοιχα η $SL(n, F) = B_0 W_0 B_0$. Για το W_0 έχουμε ότι $W_0 = N_0/T_0$, όμως το $T_0 = B_0 \cap N_0$, άρα το $W_0 = N_0/N_0 \cap B_0$, οπότε το W_0 περιέχει πίνακες τις μορφής $W_0 = \{n(B_0 \cap N_0) | n \in N_0\}$. Κατά συνέπεια η $SL(n, F)$ παράγεται από το B_0 και το N_0.
- Δείχνουμε ότι το T_0 είναι κανονική υποομάδα της N_0. Άρα πρέπει να ισχύει ότι το $ntn^{-1} \in T_0$ με $n \in N_0$ και $t \in T_0$. Γνωρίζουμε ότι το $N_0 = N_{SL(n,F)}(T_0)$ καθώς το $N = N_G(T)$ άρα έχουμε ότι $ntn^{-1} = nn^{-1}t = t \in T_0$. Άρα το T_0 είναι κανονική υποομάδα του N_0.
- Έχουμε ότι το $W =< S >$, όπου $S = \{(12), (23), ..., (n-1n)\}$, όμως έχουμε ότι το W_0 είναι υποομάδα του W άρα κατά συνέπεια το $W_0 =< S >$ καθώς το $W_0 \cong \Sigma_n$. Τώρα αν $w' \in N_0$ τέτοιο ώστε το $w'T_0 = w$ τότε έχουμε:
  - Θα δείξουμε ότι $s'B_0w' \subseteq B_0w'B_0 \cup B_0s'w'B_0$. Αν το $s' = I$ τότε έχουμε ότι $B_0w' \subseteq B_0w'B_0$. Αν $s' \neq I$ τότε έχουμε ότι το $s'B_0w' = B_0s'T_0w'$ καθώς για να ισχύει ότι $s'B_0 = B_0s'$ πρέπει να έχουμε $b_{ii} = b_{jj}$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$ και για κάθε $b \in B_0$, οπότε επιλέγουμε ένα $t \in T_0$ τέτοιο ώστε $tb = b'$ έτσι ώστε να ισχύουν τα πάραπάνω για το b'. Άρα έχουμε $s'B_0w' = B_0s'T_0w'B_0 = B_0s'T_0w'T_0B_0 = B_0s'T_0wB_0 = B_0s'w'B_0$. Άρα έχουμε ότι $s'B_0w' \subseteq B_0w'B_0 \cup B_0s'w'B_0$.
  - Τέλος, θα δείξουμε ότι το $s'B_0s' \nsubseteq B_0$. Αρκεί να δείξουμε ότι το $s'bs' \notin B_0$ για κανένα $b \in B_0$. Έχουμε ότι τι (i,i)-στοιχείο του $s'b = x$ είναι $\sum_{k=1}^{n} s_{ik}b_{ki} = s_{i1}b_{1i} + ... + s_{ij}b_{ji} + ... + s_{in}b_{ni} =$

$s_{ij}b_{ji} \neq 0$ για $s_{ij} \neq 0$ και $j \leq i$. Για το (i,j)-στοιχείο του $s'bs'$ έχουμε ότι $\sum_{k=1}^{n} x_{ik}s_{kj} = x_{i1}s_{i1} + ... + x_{ii}s_{ij} + ... + x_{in}s_{nj} = x_{ii}s_{ij} = s_{ij}b_{ji}s_{ij} = y_{ij} \neq 0$ για $j \leq i$ άρα $s'bs' \notin B_0$ και άρα $s'B_0s' \nsubseteq B_0$.

Άρα το B_0N_0-ζευγάρι του $SL(n,F)$, τάξης $|S|$.