ΜΠΕΓΕΤΗΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ

# Το «$3x + 1$» ΠΡΟΒΛΗΜΑ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών

Σάμος, 26 Ιουνίου 2007

Επιβλεπων : Φελουζής Βαγγέλης

Επιτροπη

Καραχάλιος Νικόλαος

Νικολόπουλος Χρήστος

*Στη Σταυρούλα*
*και το Βαγγέλη. . .*

# Περιεχόμενα

# Πρόλογος

Σε αυτή την πτυχιακή εργασία προσπαθήσαμε να παρουσιάσουμε ένα πολύ απλό σε διατύπωση πρόβλημα, που ωστόσο παραμένει μέχρι σήμερα άλυτο, το αποκαλούμενο $3x+1$ πρόβλημα.

Το μεγαλύτερο μέρος της εργασίας είναι βασισμένο στο άρθρο του *Jeffrey C. Lagaria* με τίτλο *«The $3x+1$ Problem and its Generalizations»*.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Βαγγέλη Φελουζή για τη βοήθειά του κατά τη διάρκεια της εργασίας, τα μέλη της επιτροπής κ. Νικόλαο Καραχάλιο και κ. Χρήστο Νικολόπουλο καθώς και τον κ. Αντώνη Τσολομύτη στον οποίο οφείλει η τυπωμένη εμφάνιση της εργασίας αυτής.

**Βαγγέλης Μπεγέτης**
**Σάμος 2007**

# Κεφάλαιο 1

# Εισαγωγή

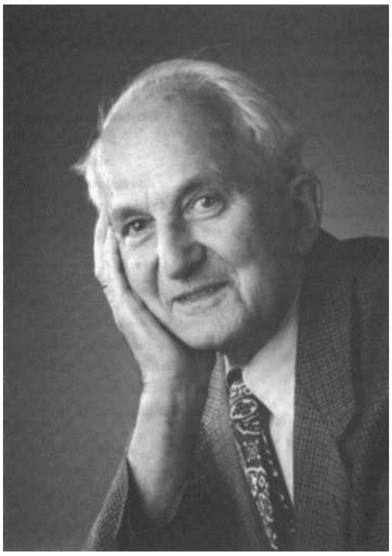
## 1.1 Ιστορία του προβλήματος

Το $3x + 1$ *πρόβλημα*, είναι γνωστό και σαν *Πρόβλημα του Collatz*, *Πρόβλημα των Συρακουσών*, *πρόβλημα του Kakutani*, *Αλγόριθμος του Hasse* και *Πρόβλημα του Ulam* και αφορά την συμπεριφορά των επαναλήψεων της συνάρτησης η οποία στέλνει τους περιττούς ακεραίους $n$ στο $3n + 1$ και τους άρτιους ακεραίους $n$ στο $\frac{n}{2}$. Η $3x + 1$ εικασία ή όπως θα την λέμε στο εξής *Εικασία του Collatz* ισχυρίζεται ότι ξεκινώντας από οποιονδήποτε ακέραιο $n$, ύστερα από συνεχείς επαναλήψεις αυτής της συνάρτησης τελικά θα καταλήξουμε στην τιμή 1.

Η Εικασία του Collatz είναι εύκολο να διατυπωθεί και πολύ δύσκολο να λυθεί. Ως προς αυτό μοιάζει με άλλα επαναληπτικά προβλήματα, για παράδειγμα αυτό των υποπολλαπλάσιων ακολουθιών (βλέπε Guy [36], Πρόβλημα $B6$) και τις διάσημες διοφαντικές εξισώσεις όπως το «Τελευταίο Θεώρημα του Fermat». Ο Paul Erdös σχολίασε όσον αφορά την δυσκολία του $3x + 1$ προβλήματος : «Τα Μαθηματικά δεν είναι ακόμη έτοιμα για τέτοια προβλήματα». Παρά αυτή την μάλλον αποκαρδιωτική δήλωση, η μελέτη του $3x + 1$ προβλήματος δεν στερείται ενδιαφέροντος και έχει δώσει κάποια ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Έχει στενή σχέση με την διοφαντική προσέγγιση του $\log_2 3$ καθώς και την κατανομή $\pmod 1$ της ακολουθίας

$$\left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^k : k = 1, 2, \ldots \right\},$$

με ερωτήματα από την εργοδική θεωρία στους δυαδικούς $\mathbb{Z}_2$ καθώς και με τη Θεωρία Πολυπλοκότητας· μια γενίκευση του προβλήματος $3x + 1$ έχει αποδειχτεί ότι δεν είναι υπολογιστικά επιλύσιμη.



Lothar Collatz

Η ακριβής προέλευση του προβλήματος $3x+1$ δεν είναι ξεκάθαρη, καθώς έχει ακουστεί από πολλές και διαφορετικές μεριές. Το πιο πιθανό είναι να οφείλεται στον Lothar Collatz καθηγητή στο Πανεπιστημίου του Αμβούργου. Ο Lothar Collatz τη δεκαετία του $'30$, όντας ακόμα φοιτητής, παρακινούμενος από τις διαλέξεις των Edmund Landau, Oskar Perron και Issai Schur ενδιαφέρθηκε για τις αριθμοθεωρητικές συναρτήσεις. Το παράλληλο ενδιαφέρον του για την θεωρία γραφημάτων τον οδήγησε στην ιδέα να απεικονίσει τέτοιες αριθμοθεωρητικές συναρτήσεις σαν γραφήματα και ερωτήματα σχετικά με τη δομή τέτοιων γραφημάτων είναι συνδεδεμένα με την συμπεριφορά των επαναλήψεων τέτοιων συναρτήσεων [25].

Στις σημειώσεις του με ημερομηνία 1η Ιουλίου 1932, θεωρεί τη συνάρτηση

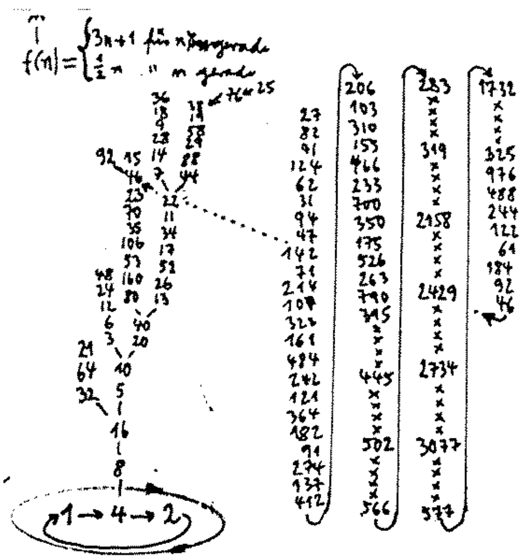
$$g(n) = \begin{cases} \frac{2}{3}n & , \text{ αν } n \equiv 0 \pmod 3 \\ \frac{4}{3}n - \frac{1}{3} & , \text{ αν } n \equiv 1 \pmod 3 \\ \frac{4}{3}n + \frac{1}{3} & , \text{ αν } n \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

η οποία δίνει την μετάθεση $P$ των φυσικών αριθμών

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 9 & 11 & 6 & \dots \end{pmatrix}.$$

Ο Collatz ενδιαφέρθηκε να μελετήσει τους κύκλους αυτής της μετάθεσης και ειδικότερα αν ο κύκλος αυτής της μετάθεσης που περιέχει το $8$ είναι πεπερασμένος ή όχι, αν δηλαδή οι επαναλήψεις $g^{(k)}(8),\ k = 1, 2, \dots$ είναι άπειρο σύνολο ή όχι [24]. Θα καλούμε την μελέτη του $g(n)$ σαν «αρχικό πρόβλημα του Collatz». Αν και ο Collatz ποτέ δεν δημοσίευσε κανένα από τα προβλήματα επανάληψης, τα κυκλοφόρησε στο διεθνές συνέδριο Μαθηματικών το $1950$ στο Cambgidge της Μασαχουσέτης ([9],[47],[62]). Οι πρώτες αναφορές σε τέτοιου είδους προβλήματα εμφανίζονται κατά τη δεκαετία του 1950 και σχετίζονται με το αρχικό πρόβλημα του Collatz. Σημειώνουμε ότι και το ερώτημα αυτό σχετικά με τη συμπεριφορά της $g^{(k)}(8),\ k = 1, 2, \dots$ παραμένει ανοικτό. Ο κύκλος που ανήκει το 8 πιστεύεται ότι είναι άπειρος.

Οποιαδήποτε κι αν είναι η ακριβής προέλευσή του, το $3x + 1$ πρόβλημα ήταν αναμφίβολα γνωστό στην Μαθηματική κοινότητα κατά την δεκαετία του $'50$. Ανακαλύφθηκε το $1952$ από τον B. Thwaites [72].




**Σχήμα 1**.Χειρόγραφο του Collatz με υπολογισμούς στο $3x + 1$ πρόβλημα. Εμφανίζεται ο κύκλος του 27.

Κατά την διάρκεια της ζωής του το $3x + 1$ πρόβλημα έχει βαφτιστεί με μια ποικιλία ονομάτων. Ο H. Hasse, έδειξε ενδιαφέρον στο $3x + 1$ πρόβλημα και συζήτησε γενικεύσεις του με πολλούς ανθρώπους με αποτέλεσμα να πάρει το όνομα « αλγόριθμος του Hasse » [40]. Το όνομα «πρόβλημα των Συρακουσών» προτάθηκε από τον Hasse κατά την διάρκεια μιας επίσκεψής του στο Πανεπιστήμιο «Συρακούσες» την δεκαετία του $'50$. Γύρω στο $1960$ ο Kakutani άκουσε το πρόβλημα, του κίνησε το ενδιαφέρον και το μετέδωσε σε κάποιους ανθρώπους. Όπως αναφέρει ο ίδιος «Για περίπου ένα μήνα όλοι στο Yale δούλεψαν πάνω σ' αυτό χωρίς κανένα αποτέλεσμα. Παρόμοιο φαινόμενο παρατηρήθηκε και όταν το ανέφερα στο Πανεπιστήμιο του Chicago. Ειπώθηκε επίσης σαν αστείο ότι αυτό το πρόβλημα ήταν μια συνωμοσία για να καθυστερήσει την Μαθηματική έρευνα στην Αμερική [45].» Έτσι απέκτησε το όνομα «πρόβλημα του Kakutani». Ο S. Ulam επίσης άκουσε το πρόβλημα και το διέδωσε στο Los Alamos και αλλού, και έτσι σε κάποιους κύκλους το πρόβλημα ήταν γνωστό σαν «πρόβλημα του Ulam» ([13],[72]).

Τα τελευταία δέκα χρόνια το $3x + 1$ πρόβλημα έχει εγκαταλείψει την «υπόγεια »ύπαρξή και εμφανίζεται με διάφορες μορφές σε βιβλία και περιοδικά, κάποιες φορές χωρίς απόδειξη σαν ένα άλυτο πρόβλημα. Βραβεία έχουν προσφερθεί για την λύση του : $\$50$ από το H. S. M. Coxeter το $1970$, αργότερα $\$500$ από τον Paul Erdös, και πιο πρόσφατα $\pounds 1000$ από τον B. Thwaites [72].

Πάνω από είκοσι άρθρα αναφέρονται στο $3x + 1$ πρόβλημα και σχετικά προβλήματα.

# Κεφάλαιο 2

# Το Πρόβλημα

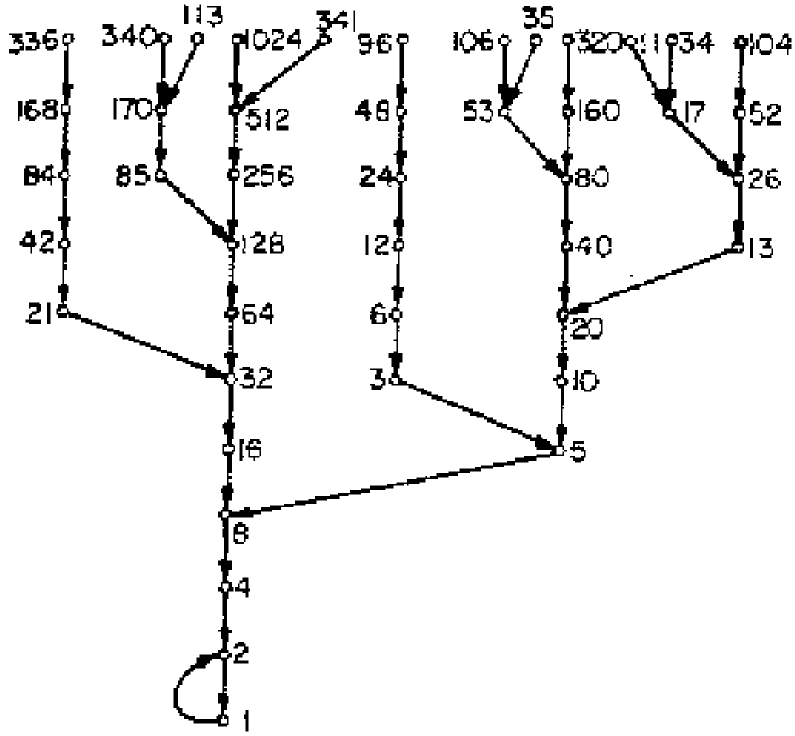
## 2.1 Το $3x + 1$ πρόβλημα

Τα γνωστά αποτελέσματα στο $3x + 1$ πρόβλημα διατυπώνονται συνήθως σε σχέση με τη συνάρτηση $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που ορίζεται ως εξής :

$$T(n) = \begin{cases} \frac{3n+1}{2} & , \text{ αν } n \equiv 1 \pmod 2 \\ \\ \frac{n}{2} & , \text{ αν } n \equiv 0 \pmod 2 \end{cases} \tag{2.1}$$

Ένας τρόπος να σκεφτεί κανείς το $3x + 1$ πρόβλημα είναι ένα άπειρο κατευθυνόμενο γράφημα του οποίου οι κορυφές είναι οι θετικοί ακέραιοι και ακμές τα ζευγάρια $(n, T(n))$. Θα καλούμε αυτό το γράφημα, το *γράφημα του Collatz* [25]. Ένα μέρος από το γράφημα του L. Collatz φαίνεται στο *σχήμα* 2.

**Ορισμός 2.1.1.** *Ένα κατευθυνόμενο γράφημα λέγεται ότι είναι* ***ασθενώς συνεκτικό*** *(weakly connected) όταν είναι συνεκτικό αν θεωρηθεί σαν μη-κατευθυνόμενο γράφημα, δηλαδή για κάθε δύο κορυφές, υπάρχει μονοπάτι από πλευρές που τις ενώνει, αγνοώντας τις κατευθύνσεις των πλευρών.*




**Σχήμα 2**. Το γράφημα του Collatz.

Η εικασία του $3x+1$ προβλήματος μπορεί να διατυπωθεί σε σχέση με το γράφημα του Collatz όπως παρακάτω.

**Το** $3x+1$**-πρόβλημα (Πρώτη μορφή)** :

Το γράφημα του Collatz του $T(n)$ στους θετικούς ακέραιους είναι ασθενές συνεκτικό.

**Ορισμός 2.1.2.** ***Τροχιά*** *(trajectory) του* $n$ *ονομάζουμε την ακολουθία των επαναλήψεων* $(n, T(n), T^2(n), T^3(n), \ldots)$.

Υπάρχουν τρεις πιθανές συμπεριφορές για τέτοιες τροχιές όταν $n > 0$.

(i) **Συγκλίνουσα τροχιά** : Υπάρχει κάποιο $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$T^{(k)}(n) = 1.$$

(ii) **Μη–τετριμμένη κυκλική τροχιά** : Η ακολουθία $T^{(k)}(n)$ τελικά γίνεται περιοδική και $T^{(k)}(n) \neq 1, \forall k \geq 1$.

(iii) **Αποκλίνουσα τροχιά** :

$$\lim_{k\to\infty} T^{(k)}(n) = \infty.$$

Η εικασία του προβλήματος $3x+1$ ισχυρίζεται ότι όλες οι τροχιές των θετικών $n$ είναι συγκλίνουσες. Προφανώς, αν $n > 1$ το $T^{(k)}(n) = 1$ δεν μπορεί να συμβεί αν δεν συμβεί πρώτα $T^{(k')}(n) < n$ για κάποιο $k' \leq k$.

**Ορισμός 2.1.3.** *Τον ελάχιστο θετικό $k$ για τον οποίο έχουμε $T^{(k)}(n) < n$ θα τον ονομάζουμε **χρόνο τερματισμού** (stopping time) $\sigma(n)$ και θα λέμε ότι $\sigma(n) = \infty$ αν τέτοιο $k$ δεν υπάρχει.*

$$\sigma(n) = \begin{cases} \min\{k : T^{(k)}(n) < n\} & , \quad \text{αν ένα τέτοιο } k \text{ υπάρχει} \\ \infty & , \quad \text{αν ένα τέτοιο } k \text{ δεν υπάρχει} \end{cases}$$

**Το $3x+1$-πρόβλημα (Δεύτερη μορφή)** :

Για κάθε φυσικό αριθμό $n > 1$ υπάρχει φυσικός $k$ ώστε $T^{(k)}(n) < n$.

**Ορισμός 2.1.4.** *Τον ελάχιστο θετικό $k$ για τον οποίο έχουμε $T^{(k)}(n) = 1$ θα τον ονομάζουμε **ολικό χρόνο τερματισμού** (total stopping time) $\sigma_\infty(n)$ και θα λέμε ότι $\sigma_\infty(n) = \infty$ αν τέτοιο $k$ δεν υπάρχει.*

Μια ενδιαφέρουσα πλευρά του προβλήματος $3x+1$ είναι η ακανόνιστη συμπεριφορά διαδοχικών επαναλήψεων $T^{(k)}(n)$. Κάποιος μπορεί να εκτιμήσει αυτή την συμπεριφορά χρησιμοποιώντας είτε τον χρόνο τερματισμού $\sigma(n)$, είτε τον ολικό χρόνο τερματισμού $\sigma_\infty(n)$, είτε τον επεκτατικό παράγοντα $s(n)$, τον οποίο ορίζουμε ως εξής :

**Ορισμός 2.1.5.**

$$s(n) = \frac{\sup_{k\geq 0} T^{(k)}(n)}{n},$$

*αν το $n$ έχει φραγμένη τροχιά και $s(n) = \infty$ αν το $n$ έχει αποκλίνουσα τροχιά.*

$$27 \to 41 \to 62 \to 31 \to 47 \to 71 \to 107 \to 161 \to 242 \to 121 \to 182 \to$$
$$91 \to 137 \to 206 \to 103 \to 155 \to 233 \to 350 \to 175 \to 263 \to 395 \to 593 \to$$
$$890 \to 445 \to 668 \to 334 \to 167 \to 251 \to 377 \to 566 \to 283 \to 425 \to$$
$$638 \to 319 \to 479 \to 719 \to 1079 \to 1619 \to 2429 \to 3644 \to 1822 \to 911 \to$$
$$1367 \to 2051 \to 3077 \to 4616 \to 2308 \to 1154 \to 577 \to 866 \to 433 \to$$
$$650 \to 325 \to 488 \to 244 \to 122 \to 61 \to 92 \to 46 \to 23 \to 35 \to 53 \to$$
$$80 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

**Σχήμα 3**. Ο κύκλος του 27 .

Για παράδειγμα το $n = 27$ απαιτεί 70 επαναλήψεις για να πάρει την τιμή 1 (Σχήμα 2), όπου η μεγαλύτερη τιμή που παίρνει το $T^{(k)}(27)$ είναι 4616 άρα

$$s(27) = \frac{\sup_{k\geq 0} T^{(k)}(27)}{27} = \frac{4616}{27} \approx 171.$$

Στον *πίνακα 1* φαίνονται αποτελέσματα για επιλεγμένες τιμές του $n$.

| $n$ | $\sigma(n)$ | $\sigma_\infty(n)$ | $s(n)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\infty$ | 2 | 2 |
| 7 | 7 | 11 | 3.7 |
| 27 | 59 | 70 | 171 |
| $2^{50}-1$ | 143 | 383 | $6.37 \times 10^8$ |
| $2^{50}$ | 1 | 50 | 1 |
| $2^{50}+1$ | 2 | 223 | 1.5 |
| $2^{500}-1$ | 1828 | 4331 | $1.11 \times 10^{88}$ |
| $2^{500}+1$ | 2 | 2204 | 1.50 |

**Πίνακας 1**.Συμπεριφορά των επαναλήψεων $T^{(k)}(n)$.

Η εικασία του προβλήματος $3x + 1$ έχει αριθμητικά ελεγχθεί για ένα μεγάλο εύρος τιμών του $n$. Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα είναι βρεθούν αποδοτικοί αλγόριθμοι ώστε να υπολογίζονται οι τιμές σε έναν υπολογιστή. Το τρέχον ρεκόρ για επαληθεύσεις της εικασίας του προβλήματος $3x + 1$ το κατέχει ο Nabuo Yoneda από το Πανεπιστήμιο του Τόκιο, ο οποίος έχει υπολογίσει όλες τις τιμές για όλα τα $n < 2^{40} \approx 1.2 \times 10^{12}$ [2].

## 2.2 Συμπεριφορά της $\sigma(n)$

Ο Riho Terras παρατήρησε ότι αν και η συμπεριφορά της συνάρτησης ολικού χρόνου τερματισμού $\sigma_\infty(n)$ είναι δύσκολο να αναλυθεί, μπορούμε να πούμε αρκετά σχετικά με την συνάρτηση $\sigma(n)$ του χρόνου τερματισμού. Ας δώσουμε πρώτα κάποιους γενικούς ορισμούς.

**Ορισμός 2.2.1.** *Έστω $A$ να είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Η* ***ανώτερη ασυμπτωτική πυκνότητα*** *του $A$ ορίζεται να είναι ο αριθμός*

$$D^*(A) = \limsup_{N\to\infty} \frac{|S \cap [1, N]|}{N}.$$

*Η* ***κατώτερη ασυμπτωτική πυκνότητα*** *του $A$ ορίζεται να είναι ο αριθμός*

$$D_*(A) = \liminf_{N\to\infty} \frac{|S \cap [1, N]|}{N}.$$

*Αν*

$$D^*(A) = D_*(A) = D(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{|A \cap [1, N]|}{N}$$

*θα λέμε ότι το $A$ έχει* ***ασυμπτωτική πυκνότητα*** *$D(A)$.*

Με $A_k$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών $n > 1$ που έχουν χρόνο τερματισμού $\sigma(n) \leq k$ και $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών με πεπερασμένο χρόνο τερματισμού. Η εικασία του Collatz είναι ισοδύναμη με το γεγονός να συμβαίνει $A = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Αν και η εικασία παραμένει ανοικτή, ο R. Terras έδειξε ότι το σύνολο $A$ είναι «μεγάλο» με την έννοια ότι έχει ασυμπτωτική πυκνότητα ίση με 1. Με άλλα λόγια, όλοι σχεδόν οι θετικοί ακέραιοι έχουν πεπερασμένο χρόνο τερματισμού. Συγκεκριμένα απέδειξε το παρακάτω θεώρημα ([67],[68]), το οποίο ανακαλύφτηκε ανεξάρτητα και από τον C. J. Everett [31].

**Θεώρημα 2.2.2.** *Το σύνολο των ακεραίων $A_k = \{n : \sigma(n) \leq k\}$ έχει οριακή ασυμπτωτική πυκνότητα $D(A_k)$, δηλαδή το όριο*

$$D(A_k) = \lim_{N\to\infty} \frac{|\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq N \ \textit{ και } \ \sigma(n) \leq k\}|}{N}$$

*υπάρχει. Επιπλέον,*

$$D\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} D(A_k) = 1$$

*δηλαδή όλοι σχεδόν οι ακέραιοι έχουν πεπερασμένο χρόνο τερματισμού.*

Η απόδειξη του Terras βασίζεται σε μια προσεκτική μελέτη των ιδιοτήτων της συνάρτησης $\sigma$. Δοσμένου ενός ακεραίου $n$, ορίζουμε μια ακολουθία $(x_i(n))_{i=0}^{\infty}$ από $0$ και $1$ ως εξής :

(2.2) $$T^{(i)}(n) \equiv x_i(n) \pmod 2,\ 0 \le i < \infty,$$

όπου $T^0(n) = n$. Με άλλα λόγια,

(2.3) $$x_i(n) = \begin{cases} 0, & \text{αν } T^{(i)}(n) \text{ είναι άρτιος} \\ \\ 1, & \text{αν } T^{(i)}(n) \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

Τα αποτελέσματα των $k$ πρώτων επαναλήψεων της συνάρτησης $T$ περιγράφονται έπ' ακριβώς από το παρακάτω δυαδικό διάνυσμα και τον αριθμό $n$

(2.4) $$\mathbf{v}_k(n) = (x_0(n), \ldots, x_{k-1}(n)).$$

Πράγματι, ας θέσουμε

(2.5) $$T^{(k)}(n) = \lambda_k(n)n + \rho_k(n).$$

Φανερά

$$\lambda_0 = 1, \quad \rho_0 = 0.$$

Αν $x_k(n) = 0$ τότε

$$T^{(k+1)}(n) = \frac{T^{(k)}(n)}{2} = \frac{1}{2}\lambda_k(n)n + \frac{1}{2}\rho_k(n) = \left(\frac{3^{x_k}}{2}\lambda_k(n)\right)n + \left(\frac{3^{x_k}}{2}\rho_k(n) + \frac{x_k}{2}\right).$$

Αν $x_k(n) = 0$ τότε

$$\begin{aligned} T^{(k+1)}(n) = \frac{3T^{(k)}(n)}{2} + \frac{1}{2} &= \frac{3}{2}\lambda_k(n)n + \left(\frac{3}{2}\rho_k(n) + \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3^{x_k}}{2}\lambda_k(n)\right)n + \left(\frac{3^{x_k}}{2}\rho_k(n) + \frac{x_k}{2}\right). \end{aligned}$$

Συνεπώς οι ακολουθίες $(\lambda_k)_k$ και $(\rho_k)_k$ ικανοποιούν τους αναδρομικούς τύπους

(2.6) $$\lambda_0 = 1, \qquad \lambda_{k+1} = \frac{3^{x_k}}{2}\lambda_k(n)$$

(2.7) $$\rho_0 = 0, \quad \rho_{k+1} = \frac{3^{x_k}}{2}\rho_k(n) + \frac{x_k}{2}.$$

απ' όπου θα έχουμε τελικά

$$\lambda_k(n) = \frac{3^{x_0(n)+\ldots+x_{k-1}(n)}}{2^k} \tag{2.8}$$

$$\rho_k(n) = \sum_{i=0}^{k-1} x_i(n) \frac{3^{x_{i+1}(n)+\ldots+x_{k-1}(n)}}{2^{k-i}}. \tag{2.9}$$

Να σημειώσουμε ότι στις εξισώσεις (2.8) και (2.9), τα $\lambda_k$ και $\rho_k$ είναι πλήρως καθορισμένα από το δυαδικό διάνυσμα $\mathbf{v} = \mathbf{v}_k(n)$ που δίνεται στην (2.4). Μερικές φορές θα το δείχνουμε γράφοντας $\lambda_k(\mathbf{v})$, $\rho_k(\mathbf{v})$, (αντί για $\lambda_k(n), \rho_k(n)$ ).

Η σχέση (2.5), δείχνει ότι απαραίτητη προϋπόθεση για να έχουμε $T^{(k)}(n) < n$ είναι

$$\lambda_k(n) < 1, \tag{2.10}$$

αφού το $\rho_k(n) \geq 0$.
Ο παρακάτω ορισμός οφείλεται στον Riho Terras [67].

**Ορισμός 2.2.3.** *Ονομάζουμε **συντελεστικό χρόνο τερματισμού** (coefficient stoping time) $\omega(n)$ τη μικρότερη τιμή του $k$ για την οποία ισχύει η (2.10) και $\omega(n) = +\infty$, αν τέτοιο $k$ δεν υπάρχει.*

Είναι άμεσο ότι

$$\omega(n) \leq \sigma(n). \tag{2.11}$$

Η συνάρτηση $\omega(n)$ παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάλυση της συμπεριφοράς της συνάρτησης χρόνου τερματισμού $\sigma(n)$, ( βλέπε Θεώρημα $2.2.6$ ). Η σχέση (2.2) εκφράζει το δυαδικό διάνυσμα $\mathbf{v} = \mathbf{v}_k(n)$ σαν συνάρτηση του $n$. Η ιδέα του Terras ήταν να αντιστρέψει την σειρά και να εκφράσει το $n$ σαν συνάρτηση του $\mathbf{v}$.

**Θεώρημα 2.2.4.** *Η συνάρτηση $Q_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ που ορίζεται από την*

$$Q_k(n) = \sum_{i=0}^{k-1} x_i(n) 2^i$$

*είναι περιοδική με περίοδο $2^k$. Η παραγόμενη συνάρτηση $\bar{Q}_k : \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ είναι μία μετάθεση και ο βαθμός[1] της είναι δύναμη του $2$.*

[1] το μήκος του μεγαλύτερου κύκλου της μετάθεσης

*Απόδειξη.* Το θεώρημα αποδεικνύεται με επαγωγή στο $k$, χρησιμοποιώντας τις επαγωγικές υποθέσεις :

i. $x_i(n)$ είναι περιοδική με περίοδο $2^{i+1}$ για $0 \leq i \leq k-1$. Στην πραγματικότητα

$$x_i(n+2^i) \equiv x_i(n) + 1 \pmod 2, \quad \text{για } 0 \leq i \leq k-1 \; . \tag{2.12}$$

ii. $Q_k(n)$ είναι περιοδική με περίοδο $2^k$.

iii. $\lambda_k(n)$ και $\rho_k(n)$ είναι περιοδικές με περίοδο $2^k$.

iv. $\bar{Q}_k$ είναι μία μετάθεση της οποίας ο βαθμός διαιρεί το $2^k$. Επίσης

$$\bar{Q}_k(n+2^{k-1}) \equiv \bar{Q}_k(n) + 2^{k-1} \pmod{2^k} \; . \tag{2.13}$$

Παραλείπουμε τις λεπτομέρειες.

□

Η κυκλική δομή και ο βαθμός των πρώτων επαναλήψεων της $\bar{Q}_k$ δίνονται στον *πίνακα 2* ( Παραλείπονται οι μονοί κύκλοι. ). Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι ο βαθμός της μετάθεσης $\bar{Q}_k$ δείχνει να είναι πολύ μικρότερος από το άνω όριο $2^k$ που αποδείχθηκε στο Θεώρημα 2.2.4.

| $k$ | $\bar{Q}_k$ | Βαθμός |
|---|---|---|
| 1 | Ταυτοτικό | 1 |
| 2 | Ταυτοτικό | 1 |
| 3 | $(1,5)$ | 2 |
| 4 | $(1,5)(2,10)(9,13)$ | 2 |
| 5 | $(1,21)(2,10)(4,20)(5,17)(7,23)(9,29,25,13)(18,26)$ | 4 |
| 6 | $(1,21)(2,42)(3,35)(4,20)(5,17,37,49)$ | |
| | $(7,23)(8,40)(9,29,25,13)(10,34)$ | |
| | $(18,58,50,26)(19,51)(27,59)(33,53)$ | |
| | $(36,52)(29,55)(41,61,57,45)$ | 4 |

**Πίνακας 2**.Κυκλική δομή και βαθμός της μετάθεσης $\bar{Q}_k$.

Το Θεώρημα 2.2.4 μας επιτρέπει να συνδέσουμε με κάθε διάνυσμα

$$\mathbf{v} = (\upsilon_0, \ldots, \upsilon_{k-1}) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$$

μήκους $k$ μια μοναδική κλάση ισοδυναμίας $S(\mathbf{v}) \pmod{2^k}$ που δίνεται από την

$$S(\mathbf{v}) = \{n : \mathbf{v} = (x_0(n), \ldots, x_{k-1}(n))\}\,.$$

Ο ακέραιος

$$n_0(\mathbf{v}) \equiv (\bar{Q}_k)^{-1} \left( \sum_{i=0}^{k-1} \upsilon_i 2^i \right) \pmod{2^k}$$

με $0 \leq n_0(\mathbf{v}) < 2^k$ είναι το ελάχιστο στοιχείο στο $S(\mathbf{v})$ και $S(\mathbf{v})$ είναι η αριθμητική ακολουθία:

$$S(\mathbf{v}) = \left\{ n_0(\mathbf{v}) + 2^k i : 0 \leq i < \infty \right\}.$$

Τώρα θα περιγράψουμε την σχέση μεταξύ ενός διανύσματος $\mathbf{v}$ και του χρόνου τερματισμού για $n \in S(\mathbf{v})$.

**Ορισμός 2.2.5.** *Ορίζουμε ένα διάνυσμα* $\mathbf{v} = (\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_{k-1})$ *μήκους* $k$ *να είναι* ***αποδεκτό*** *(admissible) αν :*

(i) $(\upsilon_0 + \ldots + \upsilon_{k-1}) \ln 3 < k \ln 2$,

(ii) $(\upsilon_0 + \ldots + \upsilon_i) \ln 3 > (i+1) \ln 2, \quad$ *όταν* $0 \leq i \leq k-2$.

Να παρατηρήσουμε ότι όλα τα αποδεκτά διανύσματα $\mathbf{v}$ μήκους $k$ έχουν

$$\upsilon_0 + \ldots + \upsilon_{k-1} = [k\theta], \tag{2.14}$$

όπου $\theta = \ln 2 / \ln 3 = (\log_2 3)^{-1} \approx .63093$ και $[x]$ σημαίνει ο μεγαλύτερος ακέραιος $\leq x$.

Το επόμενο Θεώρημα οφείλεται στον Riho Terras.

**Θεώρημα 2.2.6.**

(i) *Το σύνολο των ακεραίων με συντελεστικό χρόνο τερματισμού* $k$ *είναι ακριβώς το σύνολο των ακεραίων με κλάση ισοδυναμίας* $n \pmod{2^k}$ *για τους οποίους υπάρχει ένα αποδεκτό διάνυσμα* $\mathbf{v}$ *μήκους* $k$ *με* $n = n_0(\mathbf{v})$.

(ii) *Ας είναι* $n = n_0(\mathbf{v})$ *για κάποια διανύσματα* $\mathbf{v}$ *μήκους* $k$. *Αν το* $\mathbf{v}$ *είναι αποδεκτό, τότε όλοι οι επαρκώς μεγάλοι ακέραιοι που συγκλίνουν στο* $n \pmod{2^k}$ *έχουν χρόνο τερματισμού* $k$. *Αν το* $\mathbf{v}$ *είναι μη-αποδεκτό, τότε μόνο πεπερασμένοι ακέραιοι που συγκλίνουν στο* $n \pmod{2^k}$ *έχουν χρόνο τερματισμού* $k$.

*Απόδειξη.* Ο ισχυρισμός που κάναμε στο $(1)$ σχετικά με τον συντελεστικό χρόνο τερματισμού προκύπτει από τον ορισμό της αποδεκτότητας, γιατί αυτός ο ορισμός ισχυρίζεται ότι :

(i) $\lambda_k(\mathbf{v}) < 1$,

(ii) $\lambda_i(\mathbf{v}) > 1, \quad$ για $1 \leq i \leq k-1$.

Για να αποδείξουμε το $(2)$, πρώτα να παρατηρήσουμε ότι αν το $\mathbf{v}$ είναι αποδεκτό μήκους $k$, τότε

$$T^{(i)}(n) \geq \frac{3^{v_0+\ldots+v_{i-1}}}{2^i} n \geq n, \quad \text{για } 1 \leq i \leq k-1$$

και έτσι όλα τα στοιχεία του $S(\mathbf{v})$ έχουν χρόνο τερματισμού το λιγότερο $k$.

Τώρα ας ορίσουμε το $\epsilon_k > 0$, ως

$$\epsilon_k = 1 - \frac{3^{[k\theta]}}{2^k}, \tag{2.15}$$

όπου $\theta = (\log_2 3)^{-1}$, και να παρατηρήσουμε ότι η (2.14) συνεπάγεται ότι

$$\epsilon_k = 1 - \lambda_k(\mathbf{v}) = 1 - \frac{3^{v_0+\ldots+v_{k-1}}}{2^k}$$

για όλα τα αποδεκτά $\mathbf{v}$. Τώρα για $n \in S(\mathbf{v})$ για ένα αποδεκτό $\mathbf{v}$, η (2.5) μπορεί να ξαναγραφεί σαν

$$T^{(k)}(n) = n + (\rho_k(\mathbf{v}) - \epsilon_k n). \tag{2.16}$$

Γι' αυτό το λόγο όταν το $\mathbf{v}$ είναι αποδεκτό, τα $n$ στο $S(\mathbf{v})$ με

$$n > \epsilon_k^{-1} \rho_k(\mathbf{v}) \tag{2.17}$$

έχουν χρόνο τερματισμού $k$, και $\omega(n) = \sigma(n) = k$ σ' αυτήν την περίπτωση. Τώρα ας υποθέσουμε ότι το $\mathbf{v}$ είναι μη-αποδεκτό. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις, οι οποίες εξαρτούνται στο αν κάποια αρχικά κυκλικά τμήματα $(v_0, \ldots, v_i)$ του $\mathbf{v}$ είναι αποδεκτά.

Κανένα αρχικό κυκλικό τμήμα του $\mathbf{v}$ δεν είναι αποδεκτό αν και μόνο αν

$$(v_0 + \ldots + v_{i-1}) \log 3 > i \log 2, \quad \text{για } 1 \leq i \leq k-1 \tag{2.18}$$

και όταν η (2.18) ισχύει θα λέμε ότι το $\mathbf{v}$ είναι **πληθωρικό** *(inflating)*. Αν το $\mathbf{v}$ είναι πληθωρικό, $\lambda_k(\mathbf{v}) > 1$ έτσι ώστε $T^{(k)}(n) \geq n$ για κάθε $n$ στο $S(\mathbf{v})$ από την (2.5), έτσι ώστε κανένα στοιχείο του $S(\mathbf{v})$ να έχει χρόνο τερματισμού $k$ ή μικρότερο. Στην άλλη περίπτωση, το $\mathbf{v}$ έχει ένα αρχικό κυκλικό τμήμα $w = (v_0, v_1, \ldots, v_i)$ με $i < k-1$ το οποίο είναι αποδεκτό. Τώρα $S(\mathbf{v}) \subseteq S(w)$ και όλα τα επαρκώς μεγάλα στοιχεία του $S(w)$ έχουν χρόνο τερματισμού $i+1 < k$ από το επιχείρημα που μόλις δόθηκε. $\square$

Το Θεώρημα 2.2.6 ισχυρίζεται ότι το σύνολο των ακεραίων $I_k$ με έναν δοθέν συντελεστικό χρόνο τερματισμού $k$ είναι ένα σύνολο από αριθμητικές ακολουθίες $\pmod{2^k}$, τα οποία έχουν το άμεσο συμπέρασμα ότι το $I_k$ έχει την ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$d(I_k) = \lim_{x \to \infty} \frac{|\{n : n \leq x \text{ και } n \in I_k\}|}{x}$$

η οποία δίνεται από την

$$d(I_k) = \frac{|\{\mathbf{v} : \mathbf{v} \text{ αποδεκτό και μήκους } k\}|}{2^k}.$$

Επιπλέον το Θεώρημα 2.2.6 ισχυρίζεται ότι το σύνολο

$$S_k = \{n : n \text{ έχει χρόνο τερματισμού } k\}$$

διαφέρει από το $I_k$ σε ένα πεπερασμένο σύνολο, έτσι ώστε το $S_k$ επίσης έχει μία ασυμπτωτική συμπεριφορά η οποία είναι η ίδια με αυτή του $I_k$. Συμπερασματικά, το Θεώρημα 2.2.6 συνεπάγεται το πρώτο μέρος του Θεωρήματος 2.2.2 ,ότι το σύνολο όλων των ακεραίων με χρόνο τερματισμού το πολύ $k$ έχει μία ασυμπτωτική πυκνότητα $F(k)$ που δίνεται από την

$$F(k) = \sum_{\substack{\mathbf{v} \text{ αποδεκτό} \\ \text{μήκος}(\mathbf{v}) \leq k}} \text{βάρος}(\mathbf{v}), \tag{2.19}$$

όπου

$$\text{βάρος}(\mathbf{v}) = 2^{-\text{μήκος}(\mathbf{v})}.$$

Τώρα η σχέση 2.19 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχθεί το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 2.2.2 , και στην πραγματικότητα να αποδειχθεί το ισχυρότερο αποτέλεσμα ότι δηλαδή το $F(k)$ πλησιάζει το 1 με εκθετικό βαθμό καθώς το $k \to \infty$.

**Θεώρημα 2.2.7.** *Για όλα τα* $k \geq 1$,

$$1 - F(k) = \lim_{x\to\infty} \frac{|\{n : n \leq x \text{ και } \sigma(n) > k\}|}{x} \leq 2^{-\eta k}, \tag{2.20}$$

*όπου*

$$\eta = 1 - H(\theta) \approx .05004\ldots\ . \tag{2.21}$$

*Εδώ* $H(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$ *είναι η συνάρτηση εντροπίας (entropy function) και* $\theta = (\log_2 3)^{-1}$.

*Απόδειξη.* Ας είναι $C = C_1 \cup C_2$, όπου

$$C_1 = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} \text{ είναι αποδεκτό και μήκος}\,(\mathbf{v}) \leq k\}$$

και

$$C_2 = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} \text{ είναι πληθωρικό και μήκος}\,(\mathbf{v}) = k\}.$$

Έτσι το $C$ έχει την ιδιότητα ότι για οποιαδήποτε δυαδική λέξη $w$ μήκους $k$ υπάρχει μοναδικό $\mathbf{v} \in C$ με $\mathbf{v}$ ένα πρόθεμα του $w$. Τώρα για οποιοδήποτε $\mathbf{v}$ με μήκος$\,(\mathbf{v}) \leq k$

$$\text{βάρος}\,(\mathbf{v}) = \sum \text{βάρος}\,(w),$$

όπου το άθροισμα αφορά όλα τα $w$ μήκους $k$ για τα οποία το $\mathbf{v}$ είναι ένα πρόθεμα του $w$. Γι' αυτό το λόγο

$$\sum_{\mathbf{v}\in C} \text{βάρος}\,(\mathbf{v}) = \sum_{\text{μήκος}\,(w)=k} \text{βάρος}\,(w) = 1.$$

Από την (2.19) αυτό συνεπάγεται ότι

$$\sum_{\mathbf{v}\in C_2} \text{βάρος}\,(\mathbf{v}) = 2^{-k}|C_2| = 1 - F(k),$$

όπου το $|C_2|$ δηλώνει τον αριθμό των διανυσμάτων στο $C_2$. Το ήδη αποδεδειγμένο πρώτο μέρος του Θεωρήματος 2.2.2 δείχνει ότι

$$1 - F(k) = \lim_{x\to\infty} \frac{|\{n : n \leq x \text{ και } \sigma(n) > k\}|}{x},$$

έτσι ώστε για να αποδείξουμε την (2.20) επαρκεί να φράξουμε το $|C_2|$ από πάνω.

Τώρα ο ορισμός (2.18) ενός πληθωρικού διανύσματος συνεπάγεται ότι

$$C_2 \subseteq \left\{ \mathbf{v} : \sum_{i=0}^{k-1} \upsilon_i > k\theta \right\},$$

έτσι ώστε

$$|C_2| \leq \sum_{j>k\theta} \binom{k}{j}. \tag{2.22}$$

Το δεξί μέλος της (2.22) είναι μόνο η ουρά της διωνυμικής διανομής. Είναι εύκολα επαληθεύσιμο χρησιμοποιώντας την φόρμουλα του Stirling ότι για οποιαδήποτε σταθερά $\alpha > \frac{1}{2}$ και για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ το όριο

$$\sum_{j>k\alpha} \binom{k}{j} \leq k \binom{k}{[k\alpha]} \leq 2^{(H(\alpha)+\epsilon)+k}$$

ισχύει για όλα τα επαρκώς μεγάλα $k$. Με περισσότερη δουλειά κάποιος μπορεί να αποκομίσει την πιο ακριβή εκτίμηση (Ash[8],Λήμμα $4.7.2$) ότι για οποιοδήποτε $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\sum_{j>k\alpha} \binom{k}{j} \leq 2^{H(\alpha)k},$$

η οποία χρησιμοποιήθηκε στην (2.22) συνεπάγεται την (2.20). □

Το Θεώρημα 2.2.7 δεν μπορεί ουσιαστικά να αποδειχθεί, μπορεί να δειχθεί ότι για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ έχουμε

$$|C_2| \geq 2^{(H(\theta)-\epsilon)k}$$

για όλα τα επαρκώς μεγάλα $k$ εξαρτώμενα από το $\epsilon$. Γι' αυτό το λόγο για κάθε $\epsilon > 0$

$$1 - F(k) \geq 2^{-(\eta+\epsilon)k}$$

ισχύει για όλα τα επαρκώς μεγάλα $k$ που εξαρτώνται από το $\epsilon$.

## 2.3 Σχέση μεταξύ συντελεστικού χρόνου τερματισμού και χρόνου τερματισμού.

Το Θεώρημα 2.2.6 δείχνει ότι γενικά η συνάρτηση συντελεστικού χρόνου τερματισμού $\omega(n)$ και η συνάρτηση χρόνου τερματισμού $\sigma(n)$ είναι ίσες : Για οποιοδήποτε σταθεροποιημένο $k$ το πολύ ένα πεπερασμένο πλήθος αυτών των $n$ που έχουν συντελεστικό χρόνο τερματισμού $\omega(n) \leq k$ έχουν $\sigma(n) \neq \omega(n)$. Ο Terras [67] και αργότερα ο Garner [34] εικάσανε ότι αυτό ποτέ δεν συμβαίνει.

**ΕΙΚΑΣΙΑ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΙΚΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΥ.**
Για όλα τα $n \geq 2$, η συνάρτηση χρόνου τερματισμού $\sigma(n)$ είναι ίση με την συνάρτηση συντελεστικού χρόνου τερματισμού $\omega(n)$.

Η εικασία του συντελεστικού χρόνου τερματισμού έχει μια σημαντική συνέπια ότι αν είναι αλήθειατο σύνολο των θετικών ακεραίων με χρόνο τερματισμού $k$ θα είναι ακριβώς μία συλλογή από κλάσεις ισοδυναμίας $\pmod{2^k}$, όπως περιγράψαμε στο πρώτο μέρος του Θεωρήματος 2.2.6. Επιπλέον, η αλήθεια της εικασίας της συνάρτησης συντελεστικού χρόνου τερματισμού συνεπάγεται ότι δεν υπάρχουν μη–μηδενικοί κύκλοι.

Για να το δούμε αυτό, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας μη–μηδενικός κύκλος με περίοδο $k$ και ας είναι $n_0$ το μικρότερο στοιχείο του, και ας σημειώσουμε ότι $\sigma(n) = \infty$. Έτσι $T^{(i)}(n_0) > n_0$ για $1 \leq i \leq k-1$ και

$$T^{(k)}(n_0) = \lambda_k(n_0)n_0 + \rho_k(n_0) = n_0. \tag{2.23}$$

Τώρα $\rho_k(n_0) \neq 0$ αφού το $n_0$ δεν είναι δύναμη του 2, έτσι ώστε η (2.23) να συνεπάγεται ότι $\lambda_k(n_0) < 1$. Γι' αυτό το λόγο $\omega(n_0) \leq k$, έτσι ώστε $\omega(n_0) \neq \sigma(n_0)$.

Το αποτέλεσμα που ακολουθεί δείχνει ότι η εικασία του συντελεστικού χρόνου τερματισμού είναι σχεδόν αλήθεια. Θα το χρησιμοποιήσουμε αργότερα για να φράξουμε τον αριθμό των στοιχείων που δεν έχουν πεπερασμένο χρόνο τερματισμού.

**Θεώρημα 2.3.1.** *Υπάρχει μία αποτελεσματικά υπολογίσιμη σταθερά $k_0$, τέτοια ώστε αν το $\mathbf{v}$ είναι αποδεκτό μήκους $k \geq k_0$, τότε όλα τα στοιχεία του $S(\mathbf{v})$ έχουν χρόνο τερματισμού $k$ εκτός πιθανόν από το μικρότερο στοιχείο $n_0(\mathbf{v})$ του $S$.*

*Απόδειξη.* Τα αποτελέσματα των A. Baker και N. I. Feldman για τις γραμμικές μορφές λογαρίθμων αλγεβρικών αριθμών ([10], Θεώρημα 3.1), συνεπάγεται ότι υπάρχει μία αποτελεσματικά υπολογίσιμη απόλυτη σταθερά $c_0 > 0$ τέτοια ώστε για όλα τα $k, l \geq 1$,

$$|k \log 2 - l \log 3| \geq k^{-c_0}.$$

Συνεπώς υπάρχει μία αποτελεσματικά υπολογίσιμη απόλυτη σταθερά $c_1$ τέτοια ώστε για $k, l \geq c_1$ έχουμε

$$|2^k - 3^l| \geq \frac{1}{2} 2^k k^{-c_1},$$

και τότε από την (2.15) συνεπάγεται ότι

$$\epsilon_k \geq k^{-c_1}.$$

Αφού το $\mathbf{v}$ είναι αποδεκτό, $\upsilon_0 + \ldots + \upsilon_{k-1} \leq \theta k$, όπου $\theta = (\log_2 3)^{-1}$ από την (2.14). Άρα

$$\rho_k(\mathbf{v}) = \sum_{i=0}^{k-1} \upsilon_i \frac{3^{\upsilon_{i+1}} + \ldots + \upsilon_{k-1}}{2^{k-i}} \leq \left( \sum_{i=0}^{[k\theta]} \frac{3^i}{2^{i+1}} \right) + k(1-\theta) \left( \frac{3}{2} \right)^{\theta k} \leq k 2^{(1-\theta)k}.$$

Αλλά όλα τα στοιχεία του $S(\mathbf{v})$ εκτός από τα $n_0(\mathbf{v})$ που υπερβαίνουν το $2^k$ και

$$2^k > k^{c_1+1} 2^{(l-\theta)k} > \epsilon_k^{-1} \rho_k(\mathbf{v})$$

για όλα τα επαρκώς μεγάλα $k$, έτσι το θεώρημα προκύπτει από την (2.17). □

## 2.4 Πόσα στοιχεία δεν έχουν πεπερασμένο $\sigma(n)$ ;

Τα αποτελέσματα που δείχθηκαν μέχρι τώρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποκομίσουν ένα άνω φράγμα για τον αριθμό των στοιχείων που δεν έχουν πεπερασμένο χρόνο τερματισμού. Ας είναι

$$\pi^*(x) = |\{n : n \leq x \text{ και } \sigma(n) < \infty\}|.$$

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι το αυστηρότερο γνωστό αποτέλεσμα που αφορά το μέγεθος του «εξαιρετικού» συνόλου των $n$ με $\sigma(n) = \infty$.

**Θεώρημα 2.4.1.** *Υπάρχει μία θετική σταθερά $c_1$ τέτοια ώστε*

$$|\pi^*(x) - x| \leq c_1 x^{1-\eta}, \tag{2.24}$$

*όπου $\eta \approx .05004\ldots$ είναι η σταθερά η οποία ορίστηκε στο Θεώρημα 2.2.7 .*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι $2^{k-1} \leq x \leq 2^k$. Τότε

$$|\{n : n \leq x \text{ και } \sigma(n) = \infty\}| = |\pi^*(x) - x| \leq S_1 + S_2,$$

όπου

$$S_1 = |\{n \leq 2^k : \omega(n) \geq k+1\}|$$

και

$$S_2 = |\{n \leq 2^k : \omega(n) \leq k \text{ και } \omega(n) \neq \sigma(n)\}|.$$

Τώρα το Θεώρημα 2.2.7 δείχνει ότι

$$S_1 \leq c_2(2^k)^{1-\eta} \leq 2c_2 x^{1-\eta}, \tag{2.25}$$

και το Θεώρημα 2.3.1 δείχνει ότι

$$S_2 \leq |\{\mathbf{v} : \mathbf{v} \text{ αποδεκτό και μήκος } (\mathbf{v}) \leq k\}| + c_3,$$

όπου $c_3 = |\{n : \omega(n) \leq k_0 \text{ και } \omega(n) \neq \sigma(n)\}|$ είναι μία σταθερά από το Θεώρημα 2.2.6 . Τώρα

$$\begin{aligned} |\{\mathbf{v} : \mathbf{v} \text{ αποδεκτό μήκους } (\mathbf{v}) = i\}| &\leq |\{\mathbf{v} : v_0 + \ldots + v_{i-1} = [i\theta]\}| \\ &= \begin{pmatrix} i \\ [i\theta] \end{pmatrix} \leq c_4 2^{(1-n)i} \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το διωνυμικό θεώρημα και τον τύπο του Stirling. Γι' αυτό το λόγο

$$S_2 \leq c_5 2^{(l-\eta)k} + c_3 \leq (2c_5 + c_3)x^{1-\eta}.$$

Οπότε αυτή η ανισότητα και η (2.25) συνεπάγονται την (2.24) με $c_1 = 2c_2 + c_3 + 2c_5$.

$\square$

## 2.5 Συμπεριφορά της $\sigma_\infty(n)$

Πολύ λιγότερα είναι γνωστά για την συνάρτηση ολικού χρόνου τερματισμού παρά για την συνάρτηση χρόνου τερματισμού. Ένα φαινόμενο άμεσα αισθητό από έναν πίνακα ολικού χρόνου τερματισμού από μικρούς ακεραίους είναι η εμφάνιση από πολλά ζεύγη και τριάδες από ακεραίους που έχουν τον ίδιο πεπερασμένο ολικό χρόνο τερματισμού. Για παράδειγμα, έχουμε ότι $\sigma_\infty(20) = \sigma_\infty(21) = 6$, $\sigma_\infty(12) = \sigma_\infty(13) = 7$, $\sigma_\infty(84) = \sigma_\infty(85) = 8$, $\sigma_\infty(52) = \sigma_\infty(53) = 9$ και $\sigma_\infty(340) = \sigma_\infty(341) = 10$. Μάλιστα για μεγαλύτερες τιμές του $n$, πολλαπλάσιες συνεχόμενες τιμές εμφανίζονται με τον ίδιο ολικό χρόνο τερματισμού. Για παράδειγμα υπάρχουν 17 συνεχόμενες τιμές του $n$ με $\sigma_\infty(n) = 40$ για $7083 \leq n \leq 7099$. Ένα σχετικό φαινόμενο είναι ότι σε μικρές αποστάσεις του $n$ η συνάρτηση $\sigma_\infty(n)$ τείνει να παίρνει μόνο λίγες τιμές (C. W. Dodge [70]). Σαν παράδειγμα οι τιμές της $\sigma_\infty(n)$ για $1000 \leq n \leq 1099$ δίνονται στον *πίνακα 3*. Μόνο 19 τιμές για την $\sigma_\infty(n)$ παρατηρούνται για τις οποίες μία συχνότητα αρίθμησης δίνεται στον *πίνακα 4*. Και τα δύο αυτά φαινόμενα έχουν μία απλή εξήγηση· προκαλούνται από ενώσεις τροχιών για διαφορετικά $n$ ύστερα από λίγα βήματα. Για παράδειγμα οι τροχιές των $8k+4$ και $8k+5$ ενώνονται μετά από τρία βήματα, για όλα τα $k \geq 0$. Πιο γενικά, ο μεγάλος αριθμός των ενώσεων των αριθμών $n_1$ και $n_2$ που κλίνουν μαζί σε μέγεθος μπορεί να μεταφρασθεί στον τετριμμένο κύκλο $(1,2)$, όπως παρακάτω. Υποθέτουμε ότι τα $n_1$ και $n_2$ έχουν $\sigma_\infty(n_1) \equiv \sigma_\infty(n_2) \pmod 2$, και έστω $\sigma_\infty(n_1) = r_1 \geq \sigma_\infty(n_2) = r_2$. Οπότε οι τροχιές των $n_1$ και $n_2$ ενώνονται μετά από το πολύ $r_1 - 1$ επαναλήψεις, έκτοτε $T^{(r_1-1)}(n_1) = T^{(r_1-1)}(n_2) = 2$, έκτοτε η τροχιά του $n_2$ συνεχίζει τον κύκλο γύρω από τον τετριμμένο κύκλο. Αν επιπλέον $\lambda_{r_1-1}(n_1) = \lambda_{r_1-1}(n_2)$, το οποίο σχεδόν πάντα συμβαίνει αν τα $n_1$ και $n_2$ είναι περίπου το ίδιο μέγεθος, τότε οι τροχιές των $2^{r_1-1}k + n_1$, και $2^{r_1-1}k + n_2$ ενώνονται μετά από το πολύ $r_1 - 1$ επαναλήψεις, για $k \geq 0$. Ιδιαίτερα, $\sigma_\infty(2^{r_1-1}k + n_1) = \sigma_\infty(2^{r_1-1}k + n_2)$ ισχύει για $k \geq 1$. Σ' αυτήν την περίπτωση η αρχική ένωση των $n_1$ και $n_2$ έχει παράγει μία άπειρη αριθμητική ακολουθία $\pmod{2^{r_1-1}}$ από ενώσεις. Η βαθμιαία συσσώρευση από όλες αυτές τις αριθμητικές ακολουθίες από ενώσεις αριθμών που κλίνουν μαζί σε μέγεθος οδηγεί στα φαινόμενα που παρατηρούνται στους *πίνακες 3* και *4*.

Αν και η εικασία του προβλήματος $3x+1$ ισχυρίζεται ότι όλοι οι ακέραιοι $n$ έχουν πεπερασμένο ολικό χρόνο τερματισμού, τα ισχυρά αποτελέσματα που δείχθηκαν μέχρι εδώ, που αφορούν την πυκνότητα του συνόλου των ακεραίων με πεπερασμένο ολικό χρόνο τερματισμού, είναι πολύ πιο αδύναμα.

| | 1000 −1009 | 1010 −1019 | 1020 −1029 | 1030 −1039 | 1040 −1049 | 1050 −1059 | 1060 −1069 | 1070 −1079 | 1080 −1089 | 1090 −1099 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 72 | 42 | 34 | 80 | 23 | 23 | 80 | 18 | 31 | 31 |
| 1 | 91 | 42 | 34 | 26 | 80 | 61 | 80 | 107 | 88 | 31 |
| 2 | 72 | 72 | 42 | 80 | 80 | 53 | 80 | 23 | 31 | 23 |
| 3 | 29 | 72 | 42 | 99 | 80 | 53 | 50 | 18 | 88 | 23 |
| 4 | 45 | 26 | 10 | 80 | 23 | 53 | 23 | 18 | 31 | 23 |
| 5 | 45 | 26 | 26 | 80 | 23 | 107 | 50 | 18 | 31 | 50 |
| 6 | 45 | 34 | 26 | 80 | 80 | 23 | 23 | 23 | 88 | 61 |
| 7 | 61 | 99 | 26 | 80 | 80 | 53 | 42 | 23 | 88 | 88 |
| 8 | 72 | 34 | 80 | 42 | 23 | 23 | 18 | 34 | 15 | 61 |
| 9 | 72 | 42 | 80 | 42 | 42 | 23 | 18 | 34 | 31 | 23 |

**Πίνακας 3**.Τιμές της $\sigma_\infty(n)$ για $1000 \leq n \leq 1099$.

| $\sigma_\infty(n)$ | Συχν. | $\sigma_\infty(n)$ | Συχν. | $\sigma_\infty(n)$ | Συχν. | $\sigma_\infty(n)$ | Συχν. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 1 | 29 | 1 | 50 | 3 | 88 | 5 |
| 15 | 1 | 31 | 7 | 53 | 4 | 91 | 1 |
| 18 | 6 | 34 | 6 | 61 | 4 | 99 | 2 |
| 23 | 17 | 42 | 9 | 72 | 6 | 107 | 2 |
| 26 | 6 | 45 | 3 | 80 | 16 | | |

**Πίνακας 4**.Τιμές της $\sigma_\infty(n)$ και η συχνότητά τους για $1000 \leq n \leq 1099$.

**Θεώρημα 2.5.1.** *(Crandall). Έστω*

$$\pi_{total}(x) = |\{n : n \leq x \text{ και } \sigma_\infty(n) < \infty\}|.$$

*Τότε υπάρχει μία θετική σταθερά $c_4$ τέτοια ώστε*

$$\pi_{total}(x) > x^{c_4}$$

*για όλα τα αρκετά μεγάλα $x$.*

Υποθέτοντας ότι η εικασία του προβλήματος $3x+1$ είναι αληθής, κάποιος μπορεί να θεωρήσει το πρόβλημα να determining το αναμενόμενο μέγεθος της συνάρτησης ολικού χρόνου τερματισμού $\sigma_\infty(n)$. Ο Crandall [28] και ο Shanks [63] οδηγήθηκαν με πιθανά εφευρετικά επιχειρήματα (όπως αυτό που περιγράφθηκε πριν) να εικάσουν ότι η μέση σειρά του $\sigma_\infty(n)$ θα έπρεπε να είναι μία σταθερά πολλαπλάσια του $\ln n$, πιο συγκεκριμένα, ότι

$$\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{X}\sigma_\infty(n) \approx 2(\ln\frac{4}{3})^{-1}\ln x.$$

Μία μέτρια ποσότητα από εμπειρική απόδειξη υποστηρίζουν αυτές τις εικασίες, βλέπε [28].

## 2.6 Υπάρχουν κύκλοι με μη–μηδενική λύση ;

Μια πρώτη παρατήρηση είναι ότι προκύπτουν άλλοι κύκλοι αν επιτραπούν και οι αρνητικοί αριθμοί στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Υπάρχει ένας κύκλος με περίοδο $1$ αρχίζοντας από το $n = -1$, και υπάρχουν κύκλοι μήκους $3$ και $11$ αρχίζοντας από το $n = -5$ και $n = -17$, αντίστοιχα. Ο Böhm και ο Sontacchi [13] εικάσανε ότι αυτοί οι κύκλοι μαζί με τους κύκλους που αρχίζουν με $n = 0$ και $n = 1$ φτιάχνουν ολόκληρο το σύνολο από κύκλους που εμφανίζονται μετά από την επανάληψη της $T(n)$ εφαρμοσμένη στους ακεραίους $\mathbb{Z}$. Αρκετοί συγγραφείς έχουν προτείνει την ακόλουθη εικασία ([13],[28],[41],[67]).

**ΕΙΚΑΣΙΑ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΚΥΚΛΩΝ**:

Υπάρχει μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός από ξεχωριστούς κύκλους για την συνάρτηση $T(n)$επαναλαμβανόμενη στο πεδίο ορισμού $\mathbb{Z}$.

Κάποιος μπορεί εύκολα να δείξει ότι για οποιοδήποτε δοθέν μήκος $k$ υπάρχει μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός από ακεραίους $n$ που είναι περιοδικοί μετά από επανάληψη από την $T$ με περίοδο $k$, στην πραγματικότητα το πολύ $2^k$ τέτοιοι αριθμοί όπως παρατήρησαν ο Böhm και ο Sontacchi [13].

Για να το δούμε αυτό, αντικαθιστούμε την σχέση (2.5) στην

$$T^{(k)}(n) = n, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2.26}$$

για να πάρουμε την σχέση

$$\left(1 - \frac{3^{x_0+\ldots+x_{k-1}}}{2^k}\right) n = \frac{3^{x_0+\ldots+x_{k-1}}}{2^k} \sum_{i=0}^{k-1} x_i \frac{2^i}{3^{x_0+\ldots+x_i}}. \tag{2.27}$$

Υπάρχουν μόνο $2^k$ επιλογές για το $0-1$ διάνυσμα $\mathbf{v} = (x_0, \ldots, x_{k-1})$, και για κάθε επιλογή του $\mathbf{v}$ η σχέση (2.27) προσδιορίζει μοναδική λογική λύση $n = n(\mathbf{v})$. Συνεπώς υπάρχουν το πολύ $2^k$ λύσεις για την (2.26). Ο Böhm και ο Sontacchi επίσης παρατήρησαν ότι αυτό δίνει μία (ανεπαρκής) πεπερασμένη διαδικασία για να αποφασιστεί αν υπάρχουν κύκλοι από ένα δοθέν μήκος $k$ όπως παρακάτω : Προσδιορίζουμε τον λογικό αριθμό $n(\mathbf{v})$ για καθένα από τα $2^k$ διανύσματα, και για καθένα $n(\mathbf{v})$ το οποίο είναι ακέραιος επαληθεύουμε αν η (2.26) ισχύει.

Το επιχείρημα των Böhm και Sontacchi είναι ένα πολύ γενικό επιχείρημα που χρησιμοποιείται μόνο με το γεγονός ότι η αναγκαία συνθήκη (2.27) για ένα κύκλο έχει μία μοναδική λύση όταν οι τιμές $x_i$ είναι σταθερές. Στην πραγματικότητα, υποθετικά μπορούν περισσότερα να αποδειχθούν σχετικά με την μη–ύπαρξη από μη–μηδενικές κυκλικές τροχιές χρησιμοποιώντας ειδικά χαρακτηριστικά της αναγκαίας συνθήκης (2.27). Για παράδειγμα, αρκετοί συγγραφείς έχουν ανεξάρτητα βρει μία πολύ πιο αποτελεσματική υπολογίσιμη διαδικασία για να αποδείξουν την μη–ύπαρξη από μη–μηδενικές κυκλικές τροχιές με περίοδο $\leq k$, αυτό απαραίτητα κάνει χρήση της ανισότητας

$$(1 - \lambda_k(\mathbf{v}))\, n \leq \rho_k(\mathbf{v}),$$

που πρέπει να ισχύει για $\mathbf{v} = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ που ικανοποιούν την (2.27). Αυτή η προσέγγιση επίσης επιτρέπει σε κάποιον να ελέγξει αν είναι αληθής η εικασία του συντελεστικού χρόνου τερματισμού για όλα τα $n$ με $\omega(n) \leq k$. Το βασικό αποτέλεσμα είναι όπως ακολουθεί.

**Θεώρημα 2.6.1.** *(Terras). Για καθένα $k$ υπάρχει ένα πεπερασμένο φράγμα $M(k)$ που δίνεται από την*

$$M(k) = \max\{\epsilon_i^{-1} \rho_i(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \ \text{αποδεκτό, μήκος}(\mathbf{v}) = i \leq k\} \tag{2.28}$$

*τέτοιο ώστε $\omega(n) \leq k$ να συνεπάγεται ότι $\omega(n) = \sigma(n)$ όποτε $n \geq M(k)$. Συνεπώς :*

(i) *Αν $\sigma(n) < \infty$ για όλα τα $n \leq M(k)$, τότε δεν υπάρχουν μη-μηδενικοί κύκλοι μήκους $\leq k$.*

(ii) *Αν $\omega(n) = \sigma(n)$ για όλα τα $n \leq M(k)$, τότε $\omega(n) \leq k$ συνεπάγεται ότι $\omega(n) = \sigma(n)$.*

*Απόδειξη.* Η ύπαρξη του φράγματος $M(k)$ είναι άμεσο επακόλουθο της (2.17), και το $(2)$ είναι άμεσο επακόλουθο από αυτό το γεγονός.

Για να αποδείξουμε το $(1)$, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας μη–μηδενικός κύκλος μήκους $k$. Παρατηρούμε αργότερα ότι αν το $n_0$ είναι το μικρότερο στοιχείο σε έναν απλό περιοδικό μη–μηδενικό κύκλο μήκους $\leq k$, τότε $\omega(n_0) = i \leq k$ και $\sigma(n_0) = \infty$. Έτσι το πρώτο μέρος του θεωρήματος συνεπάγεται ότι $n_0 \leq M(k)$. Αυτό αντιφάσκει την υπόθεση του $(1)$. □

Το Θεώρημα 2.6.1 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε την μη-ύπαρξη μη–μηδενικών κύκλων με μικρή περίοδο, βρίσκοντας άνω φράγματα για το $M(K)$ και ελέγχοντας ότι η συνθήκη $(1)$ ισχύει. Αυτή η προσέγγιση έχει γίνει από τους Crandall [28], Garner [34], Schuppar [64] και Terras [67]. Για την εκτίμηση του $M(k)$, κάποιος μπορεί να δείξει ότι οι ποσότητες $\rho_i(\mathbf{v})$ δεν είναι ποτέ μεγάλες, έτσι ώστε το μέγεθος του $M(k)$ είναι ουσιωδώς καθορισμένο από το πόσο μεγάλο το

$$\epsilon_i^{-1} = \left(1 - \frac{3^{[i\theta]}}{2^i}\right)^{-1}$$

μπορεί να γίνει.

Οι χειρότερες περιπτώσεις εμφανίζονται όταν το $3^{[i\theta]}$ είναι μία κοντινή προσέγγιση στο $2^i$, δηλαδή όταν $i/[i\theta]$ είναι μία καλή λογική προσέγγιση στο $\phi = \log_2 3$. Η καλύτερη λογική προσέγγιση στο $\phi$ δίνεται από το συγκλίνον $p_k/q_k$ του συνεχούς κλάσματος επέκτασης του

$$\phi = [1; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, 1, 55, 1, 4, 3 \ldots] \,.$$

Ο Crandall [28] χρησιμοποιεί γενικές ιδιότητες της συνεχούς κλασματικής επέκτασης για να δείξει το παρακάτω ποσοτικό αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 2.6.2.** *(Crandall). Έστω $n_0$ το μικρότερο στοιχείο μιας απλής περιοδικής τροχιάς με περίοδο $k$. Τότε*

$$k > \frac{3}{2} \min\left(q_j, \frac{2n_0}{q_j + q_{j+1}}\right), \tag{2.29}$$

*όπου $p_i/q_j$ είναι οποιαδήποτε σύγκλιση της συνεχούς κλασματικής επέκτασης του $\log_2 3$ με $j \geq 4$.*

Σαν εφαρμογή, χρησιμοποιήστε το φράγμα του Yoneda [2] ότι $n_0 > 2^{40}$ και διαλέξτε $j = 13$ στην (2.29), παρατηρώντας ότι $q_{13} = 190737$ και $q_{14} = 10590737$, για να καταλήξετε ότι δεν υπάρχουν μη–μηδενικοί κύκλοι με περίοδο μικρότεροι από $275,000$.

Επιπλέον πληροφορίες σχετικά με την μη–ύπαρξη των μη–μηδενικών κυκλικών τροχιών μπορούν να παρατηρηθούν αναπτύσσοντας την αναγκαία συνθήκη (2.27) σαν μία μη–εκθετική διοφαντική εξίσωση. Ο Davidson [29] καλεί μία απλή περιοδική τροχιά με περίοδο $k$ περιφερειακή τροχιά, αν υπάρχει μία τιμή $i$ για την οποία

$$n_0 < T(n_0) < \cdots < T^{(i)}(n_0)$$

και

$$T^{(i)}(n_0) > T^{(i+1)}(n_0) > \cdots > T^{(k)}(n_0) = n_0,$$

δηλαδή το αναλογικό διάνυσμα $\mathbf{v}_k(n_0) = (x_0(n_0), \ldots, x_{k-1}(n_0))$ έχει την ειδική μορφή

$$x_j(n_0) = \begin{cases} 1 & , \text{όταν } \ 0 \leq j \leq [k\theta] - 1 \\ \\ 0 & , \text{όταν } \ [k\theta] \leq j \leq k - 1 \end{cases} \tag{2.30}$$

όπου $\theta = (\log_2 3)^{-1}$. Ο κύκλος που αρχίζει με $n_0 = 1$ είναι μία περιφερειακή τροχιά. Ο Davidson παρατήρησε ότι κάθε λύση στην εκθετική διοφαντική εξίσωση

$$(2^{a+b} - 3^b)h = 2^a - 1, \quad a \geq 1 \tag{2.31}$$

αντιστοιχεί σε μία περιφερειακή τροχιά μήκους $k = a + b$ με $[k\theta] = b$ και $n_0 = 2^b h - 1$, και αντίστροφα.

Η εξίσωση (2.31) είναι η αναγκαία συνθήκη (2.27) εξειδικευμένη στο διάνυσμα (2.30). Ο R. Steiner [64] έδειξε ότι $(a, b, h) = 1, 1, 1$ είναι η μόνη λύση της (2.31), έτσι απέδειξε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 2.6.3.** *(Steiner). Ο μόνος κύκλος που είναι περιφερειακή τροχιά είναι ο μηδενικός κύκλος.*

*Απόδειξη.* Η μέθοδος του Steiner είναι να δείξει πρώτα ότι κάθε λύση της (2.31) με $a \geq 4$ έχει την ιδιότητα ότι το $(a+b)/b$ είναι μία σύγκλιση στην συνεχής κλασματική επέκταση $\log_2 3$, έτσι η (2.31) συνεπάγεται ότι

$$0 < \left| \frac{a+b}{b} - \log_2 3 \right| \leq \frac{1}{b \ln 2(2^b - 1)}. \tag{2.32}$$

Έλεγξε ότι αυτή η λογική προσέγγιση $(a+b)/b$ είναι τόσο καλή που αθετεί τους αποτελεσματικούς υπολογισμούς του A. Baker [[28],p.45] για γραμμικές μορφές σε λογάριθμους από αλγεβρικούς αριθμούς αν $b > 10^{199}$. Τελικώς έλεγξε ότι η (2.32) αποτυγχάνει να ισχύει για όλα όπου $b < 10^{199}$ υπολογίζοντας τις συγκλίσεις των συνεχών κλασμάτων του $\log_2 3$ πάνω από το $10^{199}$. $\square$

Το πιο αξιοσημείωτο γεγονός σχετικά με το Θεώρημα 2.6.3 είναι η αδυναμία του αποτελέσματός του συγκρινόμενο με τη δύναμη των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν στην απόδειξή του. Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.3 έχει την αξία ότι δείχνει ότι η εικασία του συντελεστικού χρόνου τερματισμού ισχύει για το άπειρο σύνολο των αποδεκτών διανυσμάτων $\mathbf{v}$ της σχέσης (2.30).

## 2.7 Υπάρχουν αποκλίνουσες τροχιές ;

Αρκετοί συγγραφείς έχουν παρατηρήσει ότι πιθανές επιχειρηματολογίες εισηγούνται ότι δεν υπάρχουν αποκλίνουσες τροχιές.

**ΕΙΚΑΣΙΑ ΑΠΟΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΤΡΟΧΙΩΝ**:
Η συνάρτηση $T : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ δεν έχει αποκλίνουσες τροχιές, δηλαδή δεν υπάρχει ακέραιος $n_0$ για τον οποίο

$$\lim_{k\to\infty} \left| T^{(k)}(n_0) \right| = \infty. \tag{2.33}$$

Αν μία αποκλίνουσα τροχιά $\left\{ T^{(k)}(n_0) :\ 0 \leq k < \infty \right\}$ υπάρχει, δεν μπορεί να ισοκατανεμηθεί $\pmod 2$. Μάλιστα αν κάποιος ορίσει

$$N^*(k) = \left| \left\{ j : j \leq k \quad \text{και} \quad T^{(j)}(n_0) \equiv 1 \pmod 2 \right\} \right|$$

τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι η συνθήκη (2.33) συνεπάγεται ότι

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{N^*(k)}{k} \geq (\log_2 3)^{-1} \approx .63097. \tag{2.34}$$

Το Θεώρημα 2.4.1 περιορίζει την πιθανή συμπεριφορά των αποκλινουσών τροχιών. Μάλιστα, συνδεόμενο με οποιαδήποτε αποκλίνουσα τροχιά

$$D = \left\{T^{(k)}(n_0) : k \geq 1\right\}$$

είναι το άπειρο σύνολο

$$U_D = \left\{n : n \in D \;\text{ και }\; T^{(k)}(n) > n \;\; \forall k \geq 1\right\}.$$

Αφού $\sigma(n) = \infty$ για όλα τα $n \in U_D$, το Θεώρημα 2.4.1 συνεπάγεται ότι

$$|\{n \in U_D : n \leq x\}| \leq c_1 x^{1-\eta}, \tag{2.35}$$

όπου $\eta \approx .05004$. Πρόχειρα μιλώντας, η (2.35) ισχυρίζεται ότι τα στοιχεία μιας αποκλίνουσας τροχιάς δεν μπορούν να πάνε στο άπειρο«πολύ αργά».

## 2.8 Σχέσεις του $3x + 1$ με την εργοδική θεωρία

Η μελέτη της γενικής συμπεριφοράς των επαναλήψεων των μετρίσιμων διατηρητέων συναρτήσεων σε έναν ποσοτικό χώρο καλείται εργοδική θεωρία. Το $3x + 1$ πρόβλημα έχει μερικές ενδιαφέρουσες διασυνδέσεις με την εργοδική θεωρία, επειδή η συνάρτηση $T(n)$ εκτείνεται σε μία μετρίσιμη διατηρητέα συνάρτηση στους δυαδικούς ακεραίους $\mathbb{Z}_2$ ορισμένα με προσοχή στην δυαδική ποσότητα. Για να εξηγήσουμε αυτό, χρειαζόμαστε κάποια βασικά γεγονότα σχετικά με τους δυαδικούς ακεραίους $\mathbb{Z}_2$, [14], [50]. Οι δυαδικοί ακέραιοι $\mathbb{Z}_2$ υπάρχουν για όλες τις σειρές

$$a = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \ldots, \quad \text{με } \; a_i = 0 \; \text{ ή } \; 1,$$

όπου τα $\{a_i : 0 \leq i \leq \infty\}$ καλούνται τα δυαδικά ψηφία του $a$. Κάποιος μπορεί να ορίσει μια σχέση ισοδυναμίας $\pmod{2^k}$ στο $\mathbb{Z}_2$ με $a \equiv \beta \pmod{2^k}$ αν τα πρώτα $k$ δυαδικά ψηφία του $a$ και $\beta$ συμφωνούν. Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{Z}_2$ δίνονται από τις :

$$X = a + \beta \Leftrightarrow X \pmod{2^k} \equiv a \pmod{2^k} + \beta \pmod{2^k}, \quad \text{για όλα τα } k,$$

$$X = a\cdot\beta \Leftrightarrow X \pmod{2^k} \equiv a \pmod{2^k}\cdot\beta \pmod{2^k}, \quad \text{για όλα τα } k.$$

Η δυαδική εκτίμηση $|\ |_2$ στο $\mathbb{Z}_2$ δίνεται σαν $|0|_2 = 0$ και για $a \neq 0$ από την σχέση $|a|_2 = 2^{-k}$, όπου $a_k$ είναι το πρώτο μη-μηδενικό δυαδικό στοιχείο του $a$. Η εκτίμηση $|\ |_2$ επιφέρει μία μετρική $d$ στο $\mathbb{Z}_2$ που ορίζεται από την

$$d(a,\beta) = |a-\beta|_2 .$$

Σαν τοπολογικός χώρος, ο $\mathbb{Z}_2$ είναι συμπαγής και πλήρης με σεβασμό στην μετρική $d$, μία βάση από ανοιχτά σύνολα για αυτήν την τοπολογία δίνεται από τους δυαδικούς δίσκους με ακτίνα $2^{-k}$ γύρω από το $a$:

$$B_k(a) = \left\{\beta \in \mathbb{Z}_2 : a \equiv \beta \pmod{2^k}\right\}.$$

Τελικά κάποιος μπορεί σύμφωνα να ορίσει την δυαδική ποσότητα $\mu_2$ στον $\mathbb{Z}_2$ έτσι ώστε

$$\mu_2(B_k(a)) = 2^{-k},$$

συγκεκριμένα $\mu_2(Z_2) = 1$. Οι ακέραιοι $\mathbb{Z}$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{Z}_2$, για παράδειγμα

$$-1 = 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2^2 + \ldots$$

Τώρα κάποιος μπορεί να εκτείνει τον ορισμό της συνάρτησης $T:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ που δίνεται από την (2.3) στο $T:\mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_2$ από την

$$T(a) = \begin{cases} \frac{a}{2} & , \text{ αν } a \equiv 0 \pmod 2 \\ \\ \frac{3a+1}{2} & , \text{ αν } a \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

Θα χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες βασικές αρχές της εργοδικής θεωρίας εξειδικευμένα στον μετρίσιμο χώρο $\mathbb{Z}_2$ με την ποσότητα $\mu_2$.

**Πρόταση 2.8.1.** *Μία μετρίσιμη διατηρητέα συνάρτηση $H:\mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_2$ είναι εργοδική αν τα μοναδικά $\mu_2$ μετρίσιμα σύνολα E για τα οποία $H^{-1}=E$ είναι $\mathbb{Z}_2$ και το κενό σύνολο, δηλαδή μία τέτοια συνάρτηση κάνει τόσο καλή δουλειά σε ανακατεμένα σημεία μέσα στο χώρο που δεν έχει μη-μηδενικά $\mu_2$ σταθερά σύνολα.*

Μπορεί να δειχθεί ότι μία ισοδύναμη συνθήκη για την εργοδικότητα είναι ότι

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mu_2(H^{-j}(B_k(a))\cap B_l(\beta)) = \mu_2(B_k(a))\mu_2(B_l(\beta)) = 2^{-(k+l)},$$

για όλα τα $a, \beta \in \mathbb{Z}_2$ και για όλους τους ακεραίους $k, l \geq 0$. Αυτή η συνθήκη διαδοχικά είναι ισοδύναμη με τον ισχυρισμό ότι για σχεδόν όλα τα $a \in \mathbb{Z}_2$ η ακολουθία των επαναλήψεων

$$\left\{H^i(a) : i = 0, 1, 2, \ldots\right\}$$

είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη $\pmod{2^k}$ για όλα τα $k \geq 1$.

**Πρόταση 2.8.2.** *Μία συνάρτηση $H : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ είναι* ***ισχυρά αναμειγνύουσα*** *(strongly mixing) αν*

$$\lim_{N\to\infty} \mu_2(H^{-N}(B_k(a)) \cap B_l(\beta)) = 2^{-(k+l)}$$

*για όλα τα $a, \beta \in \mathbb{Z}_2$ και για όλα τα $k, l \geq 0$.*

Οι ισχυρά ααναμειγνύουσες συναρτήσεις είναι εργοδικές.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι μία ειδική περίπτωση ενός αποτελέσματος των K. P. Matthews και A. M. Watts [51].

**Θεώρημα 2.8.3.** *Η συνάρτηση $T$ είναι ένας μετασχηματισμός του $\mathbb{Z}_2$ ο οποίος διατηρεί το μέτρο και είναι ισχυρά αναμειγνύων. Συνεπώς είναι εργοδικός, και γι' αυτό το λόγο για σχεδόν όλα τα $a \in \mathbb{Z}_2$ η ακολουθία*

$$\{T(i)(a) : i = 0, 1, 2, \ldots\}$$

*είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη $\pmod{2^k}$ για όλα τα $k \geq 1$.*

Το Θεώρημα 2.8.3 δεν συνεπάγεται τίποτα για την συμπεριφορά της $T$ στο σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$ γιατί είναι μία ποσότητα $0$ υποσύνολο του $\mathbb{Z}_2$. Στην πραγματικότητα, η τροχιά $\left\{T^{(i)}(n) : i = 0, 1, 2, \ldots\right\}$ οποιουδήποτε ακεραίου $n$ δεν μπορεί ποτέ να έχει την ιδιότητα του συμπεράσματος του Θεωρήματος 2.8.3 , για το αν η τροχιά είναι τελικά περιοδική με περίοδο $k$, δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη $\pmod{2^{k-1}}$, καθώς αν είναι μία αποκλίνουσα τροχιά, αυτό δεν μπορεί ακόμα να είναι μη–κατανεμημένο $\pmod 2$ από την (2.34). Συνεπώς αυτή η σύνδεση του προβλήματος $3x + 1$ με την εργοδική θεωρία δεν δείχνει να αποδίδει στο πρόβλημα $3x + 1$.

Υπάρχει, ωστόσο, άλλη μία σύνδεση του προβλήματος $3x + 1$ με την εργοδική θεωρία του $\mathbb{Z}_2$ η οποία φαίνεται περισσότερο γόνιμη στο πρόβλημα $3x + 1$. Για κάθε $a \in \mathbb{Z}_2$ ορίζουμε τις $0 - 1$ μεταβλητές $x_i$ από την

$$T^{(i)}(a) \equiv x_i \pmod 2.$$

Τώρα ορίζουμε την συνάρτηση $Q_\infty : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ από την $Q_\infty(a) = \beta$, όπου

$$\beta = x_0 + x_1 2 + x_2 2^2 + \dots \tag{2.36}$$

Η τιμή $Q_\infty(a)$ έτσι, κωδικοποιεί την συμπεριφορά όλων των επαναλήψεων του $a$ κάτω από την $T$.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα έχει παρατηρηθεί από πολλούς, συμπεριλαμβανομένων των R. Terras και C. Pomerance, αλλά δεν έχει σαφώς καθοριστεί από πριν.

**Θεώρημα 2.8.4.** *Η αντιστοίχιση $Q_\infty : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ είναι μία συνεχής, $1-1$, επί και μετρίσιμη διατηρητέα αντιστοίχιση στους δυαδικούς ακεραίους $\mathbb{Z}_2$.*

*Απόδειξη.* Αυτό είναι ουσιαστικά ένα συμπέρασμα του Θεωρήματος 2.2.4. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $Q_\infty(a) \equiv \bar{Q}_n(a) \pmod{2^n}$. Για κάθε $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_2$, αν $|a_1 - a_2| \le 2^{-n}$, τότε $a_1 \equiv a_2 \pmod{2^n}$, έτσι

$$Q_\infty(a_1) \equiv \bar{Q}_n(a_1) \equiv \bar{Q}_n(a_2) \equiv Q_\infty(a_2) \pmod{2^n},$$

έτσι ώστε οι $|Q_\infty(a_1) - Q_\infty(a_2)| \le 2^{-n}$ και $Q_\infty$ να είναι συνεχής. Αν $a_1 \neq a_2$, τότε $a_1 \not\equiv a_2 \pmod{2^n}$ για κάποιο $n$, έτσι ώστε

$$Q_\infty(a_1) \equiv \bar{Q}_n(a_1) \not\equiv \bar{Q}_n(a_2) \equiv Q_\infty(a_2) \pmod{2^n}$$

και η $Q_\infty$ είναι $1-1$. Για να δούμε ότι η $Q_\infty$ είναι επί , δοθέντος ενός $a$ κάποιος μπορεί να βρει ένα $\beta_n$ τέτοιο ώστε

$$\bar{Q}_n(\beta_n) \equiv a \pmod{2^n},$$

αφού η $\bar{Q}_n$ είναι μία μετάθεση. Τότε $|Q_\infty(\beta_n) - a|_2 \le 2^{-n}$. Τώρα η $\{\beta_n\}$ σχηματίζει μία Cauchy ακολουθία στην δυαδική μετρική και ο $\mathbb{Z}_2$ είναι συμπαγής, γι' αυτό το λόγο η οριακή τιμή $\beta$ του $\{\beta_n\}$ ικανοποιεί την $Q_\infty(\beta) = a$. Τώρα η ${Q_\infty}^{-1}$ είναι ορισμένη και η $Q_\infty(a) \equiv \bar{Q}^{-1}(a) \pmod{2^n}$ συνεπάγεται ότι η ${Q_\infty}^{-1}$ είναι συνεχής. □

Το $3x+1$ πρόβλημα μπορεί να αναδιαμορφωθεί με όρους της συνάρτησης $Q_\infty$ όπως παρακάτω.

**ΕΙΚΑΣΙΑ ΤΟΥ $3X + 1$ (ΤΡΙΤΗ ΜΟΡΦΗ)**:

Έστω $\mathbb{N}^+$ το σύνολο των θετικών ακεραίων. Τότε $Q_\infty(\mathbb{N}^+) \subseteq \frac{1}{3}\mathbb{Z}$. Στην πραγματικότητα $Q_\infty(\mathbb{N}^+) \subseteq \frac{1}{3}\mathbb{Z} - \mathbb{Z}$.

Για παράδειγμα $Q_\infty(1) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{2n} = -\frac{1}{3}$, $Q_\infty(2) = -\frac{2}{3}$ και $Q_\infty = -\frac{20}{3}$.

Η συμπεριφορά της συνάρτησης $Q_\infty$ κάτω από επαναλήψεις έχει από μόνο της ενδιαφέρον. Έστω $\mathbb{Q}_2$ το σύνολο όλων των λογικών αριθμών που έχουν περιττό παρονομαστή, έτσι ώστε $\mathbb{Q}_2 \subseteq Z_2$. Το σύνολο $\mathbb{Q}_2$ συμφωνεί σε ακριβώς αυτούς τους δυαδικούς ακεραίους των οποίων η δυαδική επέκταση είναι πεπερασμένη ή τελικά περιοδική. Η εικασία των πεπερασμένων κύκλων είναι ισοδύναμη με τον ισχυρισμό ότι υπάρχει ένας πεπερασμένος περιττός ακέραιος $M$ τέτοιος ώστε

$$Q_\infty(\mathbb{Z}) \subseteq \frac{1}{M}\mathbb{Z}.$$

Στην πραγματικότητα κάποιος μπορεί να πάρει την $M = \prod(2^l - 1)$, όπου το γινόμενο τρέχει γύρω από όλους του ακεραίους $l$ για τους οποίους υπάρχει ένα ελάχιστο μήκος $l$. Σαν υπόθεση για επιπλέον δουλειά παραθέτουμε την παρακάτω εικασία.

**ΕΙΚΑΣΙΑ ΤΗΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑΣ**:

$$Q_\infty(\mathbb{Q}_2) = \mathbb{Q}_2.$$

Για παράδειγμα, κάποιος μπορεί να υπολογίσει ότι

$$Q_\infty(10) = -\frac{26}{3},\ Q_\infty(-\frac{26}{3}) = -54,\ Q_\infty(-54) = -\frac{82}{7},\ Q_\infty(-\frac{82}{7}) = \frac{;}{15}.$$

Μπορεί να δειχθεί ότι αν το $n$ έχει αποκλίνουσα τροχιά, η ακολουθία

$$(x_0(n), x_1(n), x_2(n), \ldots)$$

δεν μπορεί να είναι τελικά περιοδική. Σαν συμπέρασμα η αλήθεια της εικασίας της περιοδικότητας συνεπάγεται την αλήθεια της εικασίας των αποκλινουσών τροχιών.

Το Θεώρημα 2.2.4 έχει ένα περίεργο συμπέρασμα που αφορά τα σταθερά σημεία των επαναλήψεων της $Q_\infty$.

**Θεώρημα 2.8.5.** *Ας υποθέσουμε ότι η $k$ επανάληψη $Q_\infty^{(k)}$ της $Q_\infty$ έχει ένα σταθερό σημείο $a \in \mathbb{Z}_2$ το οποίο δεν είναι σταθερό σημείο για άλλη επανάληψη $Q_\infty^{(l)}$ για $1 \le l < k$. Τότε το $k$ είναι μία δύναμη του 2.*

*Απόδειξη.* Από την υπόθεση $Q_\infty^{(k)}(a) = a$ και $Q_\infty^{(l)}(a) = a_l \neq a$, για $1 \le l < k$. Όλα τα $a_l$ είναι ξεχωριστά για $0 \le l \le k$, αφού $Q_\infty^{(l_1)}(a) = Q_\infty^{(l_2)}(a)$ συνεπάγεται ότι $Q_\infty^{(l_1 - l_2)} = a$, αφού η $Q_\infty$ είναι $1-1$ και επί. Συνεπώς κάποιος μπορεί να διαλέξει ένα $m$ αρκετά μεγάλο έτσι ώστε όλες οι υπόλοιπες κλάσεις $a_l \pmod{2^m}$ να είναι ξεχωριστές, για $0 \le l \le k$, όπου $a_0 = a$. Τώρα η δράση της $Q_\infty \pmod{2^m}$ είναι ακριβώς αυτή της μετάθεσης $\bar{Q}_m$, έτσι

$$\bar{Q}_m^{(l)}(a \pmod{2^m}) \equiv a_l \pmod{2^m}$$

για $0 \le k < k$. Συγκεκριμένα η

$$(a_0 \pmod{2^m}, a_1 \pmod{2^m}, \ldots, a_{k-1} \pmod{2^m})$$

φτιάχνει έναν απλό κύκλο της μετάθεσης $\bar{Q}_m$, έτσι το $k$ είναι μία δύναμη του 2 από το Θεώρημα 2.2.4. □

# Κεφάλαιο 3

# Γενικεύσεις και συμπεράσματα

## 3.1 Γενικεύσεις του προβλήματος $3x + 1$

Το πρόβλημα $3x + 1$ μπορεί να γενικευτεί θεωρώντας άλλες συναρτήσεις $U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ορισμένες στους φυσικούς αριθμούς $\mathbb{N}$ που είναι όμοια στην συνάρτηση $T$. Οι συναρτήσεις που θεωρούμε να είναι όμοιες στην $T$ είναι οι περιοδικές γραμμικές συναρτήσεις, οι οποίες είναι εκείνες οι συναρτήσεις $U$ για τις οποίες υπάρχει ένα πεπερασμένο $d$ τέτοιο ώστε η συνάρτηση $U$ όταν περιοριστεί σε οποιαδήποτε κλάση ισοδυναμίας $k \pmod d$ είναι γραμμική. Μερικοί λόγοι για να μελετήσει κανείς γενικεύσεις του προβλήματος $3x + 1$ είναι ότι αυτές μπορούν να αποκαλύψουν φαινόμενα, μπορούν να δείξουν τα όρια αξιοπιστίας γνωστών αποτελεσμάτων και μπορούν να οδηγήσουν σε απλούστερες και πιο σπουδαίες αποδείξεις. Στην συνέχεια θα παραθέσουμε τρεις κατευθύνσεις των γενικεύσεων του προβλήματος $3x + 1$. Αυτές έχουν να κάνουν με αλγοριθμικά ερωτήματα αποφάσεως, με την ύπαρξη του χρόνου τερματισμού για σχεδόν όλους τους ακεραίους και με τα κλασματικά μέρη του $(3/2)^k$.

## 3.2 Αλγοριθμικά προβλήματα αποφάσεως

Ο J. H. Conway [26] απέδειξε το αξιοσημείωτο αποτέλεσμα ότι μία απλή γενίκευση του προβλήματος $3x+1$ είναι αλγοριθμικά αναποφάσιστη. Θεώρησε την κλάση $F$ από περιοδικές με ξεχωριστά βήματα γραμμικές συναρτήσεις

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που έχουν την δομή

$$g(n) = \frac{1}{(k,d)} n, \quad \text{αν } n = k \pmod{d}, \quad \text{για } 0 \leq k \leq d-1 \tag{3.1}$$

καθορισμένη από τους μη–αρνητικούς ακεραίους $(d, a_0, \ldots, a_{d-1})$. Αυτές είναι ακριβώς οι συναρτήσεις $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοιες ώστε η $g(n)/n$ είναι περιοδική.

**Θεώρημα 3.2.1.** *(Conway). Για κάθε μερικώς περιοδική συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα υποσύνολο $D$ των φυσικών αριθμών $N$ υπάρχει μία συνάρτηση $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοια ώστε:*

(i) *$g(n)/n$ είναι περιοδική $\pmod{d}$ για κάποιο $d$ και παίρνει λογικές τιμές.*

(ii) *Υπάρχει μία επανάληψη $k \geq 1$ τέτοια ώστε $g^{(k)}(2^m) = 2^j$ για κάποιο $j$ αν και μόνο αν το $m \in D$.*

(iii) *$g^{(k)}(2^m) = 2^{f(m)}$ για το ελάχιστο $k \geq 1$ τέτοιο ώστε $g^{(k)}(2^m)$ είναι μία δύναμη του $2$.*

Η απόδειξη του (Conway) στην πράξη δίνει κατ' αρχήν μία διαδικασία για σαφή κατασκευή τέτοιας συνάρτησης $g$ που να δίνει μία περιγραφή της μηχανής Turing[1] που υπολογίζει την $f$. Έφερε σε πέρας αυτήν την διαδικασία για να βρει μία συνάρτηση $g$ που να είναι συνδεδεμένη σε μία ειδική μερικώς περιοδική συνάρτηση $f$ που να έχει την ιδιότητα $f(2^{p_n}) = 2^{p_{n+1}}$, όπου $p_n$ είναι ο $n^{\text{ος}}$ πρώτος, κάτι που περιγράφεται στον Guy [37].

Επιλέγοντας μία ειδική μερικώς περιοδική συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού δεν είναι ένα περιοδικό υποσύνολο του $N$, για παράδειγμα μία συνάρτηση $f_0$ που κωδικοποιεί το αναποτελεσματικό πρόβλημα για τις μηχανές Turing, παρατηρούμε το ακόλουθο πόρισμα του Θεωρήματος 3.2.1 .

**Θεώρημα 3.2.2.** *(Conway). Υπάρχει μία ειδική, ρητή, κατασκευαστική συνάρτηση $g_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοια ώστε το $g_0(n)/n$ είναι περιοδικό $\pmod{d}$ για ένα πεπερασμένο $d$ και παίρνει ρητές τιμές, για τις οποίες δεν υπάρχει μηχανή Turing τέτοια ώστε, όταν δίνεται ένα $n$, πάντα αποφασίζει σε ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων αν κάποια επανάληψη $g_0^{(k)}(n)$ με $k \geq 1$ είναι μία δύναμη του $2$.*

[1] η απόδειξη του Conway χρησιμοποιεί τις μηχανές Minsky, οι οποίες έχουν την ίδια υπολογιστική ισχύ σαν αυτές του Turing.

## 3.3 Ύπαρξη της $\sigma(n)$ για σχεδόν όλους τους ακεραίους

Αρκετοί συγγραφείς έχουν εξετάσει την ακτίνα της ισχύος του αποτελέσματος ότι η $T(n)$ έχει έναν πεπερασμένο χρόνο τερματισμού για σχεδόν όλους τους ακεραίους $n$ θεωρώντας πιο γενικές κλάσεις από περιοδικές γραμμικές συναρτήσεις. Μία τέτοια κλάση $G$ συμφωνεί με όλες τις συναρτήσεις $U = U(m, d, R)$ η οποία δίνεται από την

(3.2)
$$U(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{d}\,, & \text{αν } n \equiv 0 \pmod d \\ \\ \dfrac{mn-r}{d}\,, & \text{αν } n \not\equiv 0 \pmod d,\ r \in R,\ mn \equiv r \pmod d. \end{cases}$$

όπου τα $m$ και $d$ είναι θετικοί ακέραιοι με $(m, d) = 1$ και

$$R = \{r_i : r_i \equiv i \pmod d,\ \ 1 \le i \le d-1\}$$

είναι ένα σταθερό σύνολο από κλάσεις υπολοίπων που αντιπροσωπεύουν τις μη–μηδενικές κλάσεις υπολοίπων $\pmod d$. Η $3x + 1$ συνάρτηση $T$ είναι μέσα στην κλάση $G$. Ο H. Möller [54] έχει τελείως χαρακτηρίσει τις συναρτήσεις $U = U(m, d, R)$ στο σύνολο $G$ το οποίο έχει πεπερασμένο χρόνο τερματισμού για σχεδόν όλους τους ακεραίους $n$. Έδειξε ότι είναι ακριβώς αυτές οι συναρτήσεις για τις οποίες

$$m < d^{d/(d-1)}. \tag{3.3}$$

Ο E. Heppner [41] απέδειξε την ακόλουθη ποσοτική εκδοχή αυτού του αποτελέσματος, γενικεύοντας ως εκ τούτου το Θεώρημα 2.2.7.

**Θεώρημα 3.3.1.** *(Heppner). Έστω $U = U(m, d, R)$ μία συνάρτηση στην κλάση $G$.*

(i) *Αν $m < d^{d/(d-1)}$, τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\delta_1, \delta_2 > 0$ τέτοιοι ώστε για $N = [\log x/\log d]$ έχουμε*
$\left|\left\{n : n \le x \text{ και } U^{(N)}(n) > nx^{-\delta_1}\right\}\right| = O(x^{1-\delta_2})$ *όταν $x \to \infty$.*

(ii) *Αν $m > d^{d/(d-1)}$, τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\delta_3, \delta_4 > 0$ τέτοιοι ώστε για $N = [\log x/\log d]$ έχουμε $\left|\left\{n : n \le x \text{ και } U^{(N)}(n) < nx^{\delta_3}\right\}\right| = O(x^{1-\delta_4})$ όταν $x \to \infty$.*

Ο J. P. Allouche [1] έχει επιπλέον οξύνει το Θεώρημα 3.3.1 και οι Matthews και Watts [51] [52], το έχουν επεκτείνει σε μία μεγαλύτερη κλάση από συναρτήσεις.

Είναι ένα μέτρο της δυσκολίας του προβλήματος σ' αυτήν την περιοχή ότι ακόμα και η ακόλουθη φανερά ασθενέστερη εικασία παραμένει χωρίς απόδειξη.

**ΕΙΚΑΣΙΑ ΥΠΑΡΞΗΣ**:

Έστω $U$ μία συνάρτηση στην κλάση $G$. Τότε :

(i) Η $U$ έχει τουλάχιστον μία απλά περιοδική τροχιά αν $m < d^{d/(d-1)}$,

(ii) Η $U$ έχει τουλάχιστον μία αποκλίνουσα τροχιά αν $m > d^{d/(d-1)}$.

## 3.4 Κλασματικά μέρη του $(3/2)^k$

Προσπάθειες για την κατανόηση της διανομής $\pmod 1$ της ακολουθίας

$$\left\{(3/2)^k : 1 \leq k < \infty\right\}$$

έχει αποκαλύψει έμμεσες συνδέσεις με τις εργοδοθεωρικές όψεις μιας γενίκευσης του προβλήματος $3x+1$. Με $\{x\}$ θα συμβολίζουμε το **κλασματικό μέρος** ενός πραγματικού αριθμού $x$ δηλαδή $\{x\} = x - [x]$.

**Ορισμός 3.4.1.** *Μια ακολουθία $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ αριθμών θα λέγεται **ισοκατανεμημένη** ή **ομοιόμορφα κατανεμημένη** $\pmod 1$ αν για οποιουσδήποτε αριθμούς $0 \leq a < b \leq 1$ ισχύει*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\{\{x_k\} : 1 \leq k \leq N\} \cap [a, b]}{N} = b - a$$

**ΕΙΚΑΣΙΑ** :

Η ακολουθία $(3/2)^k$ είναι ισοκατανεμημένη $\pmod 1$.

Μία προσέγγιση σε αυτό το πρόβλημα είναι να καθορίσουμε τι είδους $\pmod 1$ διανομή μπορεί να εμφανιστεί για τις ακολουθίες

$$\left\{(3/2)^k\xi : 1 \leq k < \infty\right\},$$

όπου το $\xi$ είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός. Σε αυτήν την κατεύθυνση ο K. Mahler [49] θεώρησε το πρόβλημα του αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\xi$, τους οποίους καλεί *αριθμούς* $Z$, που να έχουν την ιδιότητα

$$0 \leq \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^k \xi\right\} \leq \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.4}$$

όπου $\{x\} = x - [x]$ είναι το κλασματικό μέρος του $x$. Έδειξε ότι το σύνολο των *αριθμών* $Z$ είναι μετρίσιμο, δείχνοντας ότι υπάρχει το πολύ ένας αριθμός $Z$ σε κάθε διάστημα $[n, n+1)$, για $n = 1, 2, 3, \ldots$ Προχώρησε στο να δείξει ότι απαραίτητη προϋπόθεση για την ύπαρξη ενός αριθμού $Z$ στο διάστημα $[n, n+1)$ είναι ότι η τροχιά $(n, W(n), W^{(2)}(n), \ldots)$ του $n$ παραγόμενη από την περιοδική γραμμική συνάρτηση

$$W(n) = \begin{cases} \frac{3n}{2} & , \text{ αν } n \equiv 0 \pmod 2 \\ \frac{3n+1}{2} & , \text{ αν } n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases} \tag{3.5}$$

ικανοποιεί την

$$W^{(k)}(n) \not\equiv 3 \pmod 4, \quad 1 \leq k < \infty. \tag{3.6}$$

Ο Mahler κατέληξε από αυτό ότι είναι απίθανο να υπάρχουν αριθμοί $Z$. Αυτό υποστηρίχθηκε από την ακόλουθη επιχειρηματολογία.

Η συνάρτηση $W$ ίσως να μπορούσε να μεταφρασθεί σαν μία δράση στους δυαδικούς ακεραίους από την (3.5), και έχει ιδιότητες ακριβώς ανάλογες στις ιδιότητες της $T$ που δίνεται από το Θεώρημα 2.8.3. Συγκεκριμένα, για σχεδόν όλους τους δυαδικούς ακεραίους $a$ η ακολουθία των επαναλήψεων

$(a, W(a), W^{(2)}(a), \ldots)$ έχει απείρως πολλές τιμές $k$ με $W^{(k)}(a) \equiv 3 \pmod 4$. Έτσι αν ένας δοθέν $n \in \mathbb{Z}$ συμπεριφέρεται σαν σχεδόν όλους τους δυαδικούς ακεραίους $a$, τότε η (3.6) δεν θα ισχύει για $n$. Να σημειώσουμε ότι είναι πιθανόν όλες οι τροχιές $(n, W(n), W^{(2)}(n), \ldots)$ για $n \geq 1$ να είναι σταθερές διανομές $\pmod{2^k}$ για όλα τα $k$, αντίθετα προς την συμπεριφορά της συνάρτησης $T(n)$.

Παρενθετικά, αναφέρουμε ότι η πιθανή διανομή $\pmod 1$ της

$$\left\{(3/2)^k \xi : 1 \leq k < \infty\right\}$$

για πραγματικά $\xi$ έχει μία πολύπλοκη δομή (βλέπε G. Choquet[16]-[22] και A. D. Pollington [57], [58]). Συγκεκριμένα, ο Pollington [58] απέδειξε ότι υπάρχουν υπεραριθμήσιμοι πραγματικοί αριθμοί $\xi$ τέτοιοι ώστε

$$\frac{1}{25} \leq \left\{ \left( \frac{3}{2} \right)^k \xi \right\} \leq \frac{24}{25}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

σε αντίθεση με τον πολύ αριθμήσιμο πλήθος των λύσεων $\xi$ της (3.4).

## 3.5 Συμπέρασμα

Γιατί το πρόβλημα $3x+1$ είναι τόσο δύσκολο; Η δυσκολία του προβλήματος $3x+1$ φαίνεται συνδεδεμένη με το γεγονός ότι είναι μια ντετερμινιστική διαδικασία που προσομοιώνει «τυχαία» συμπεριφορά. Αντιμετωπίζουμε αυτό το δίλημμα. Απ' τη μια μεριά, στο σημείο ότι το πρόβλημα έχει δομή, μπορούμε να το αναλύσουμε, εν' τούτοις είναι ακριβώς αυτή η δομή που φαίνεται να μας εμποδίζει να αποδεικνύουμε ότι συμπεριφέρεται «τυχαία». Από την άλλη μεριά, στο βαθμό που το πρόβλημα είναι χωρίς δομή και «τυχαίο», δεν έχουμε τίποτα να αναλύσουμε και συνεπώς δεν μπορούμε αυστηρά να αποδείξουμε κάτι. Βεβαίως παραμένει η πιθανότητα ότι κάποιος θα βρει κάποια κρυμμένη τάξη στο $3x+1$ πρόβλημα η οποία επιτρέπει κάποιες εικασίες να μπορέσουν να αποδειχθούν ή να απορριφθούν. Οι υπαρκτές γενικές μέθοδοι στην θεωρία αριθμών και στην εργοδική θεωρία δεν φαίνεται να αγγίζουν το $3x+1$ πρόβλημα, μ' αυτήν τη λογική φαίνεται «ανυπότακτο» για την ώρα. Αν το $3x+1$ πρόβλημα είναι τόσο ανυπότακτο, γιατί κάποιος να ασχοληθεί μαζί του; Μια απάντηση δίνεται από το ακόλουθο απόφθεγμα:«Κανένα πρόβλημα δεν είναι τόσο ανυπότακτο όταν κάτι ενδιαφέρον μπορεί να ειπωθεί γι' αυτό.» Η μελέτη του προβλήματος $3x + 1$ έχει επιφέρει έναν αριθμό από ενδιαφέροντα φαινόμενα. Ίσως περισσότερη μελέτη του προβλήματος, να ανταμειφθεί από την ανακάλυψη από άλλα καινούρια φαινόμενα. Βοηθά επίσης σαν δοκιμασία επιδόσεων στο να μετρήσουμε την πρόοδο των γενικών μαθηματικών θεωριών. Για παράδειγμα, μελλοντικές αναπτύξεις στην λύση εκθετικών διοφαντικών εξισώσεων ίσως να οδηγήσει στην ανάλυση της εικασίας των πεπερασμένων κύκλων.

# Βιβλιογραφία


[1] J.-P. Allouche , *Sur la conjecture de "Syracuse-Kakutani-Collatz"*, Séminaire de Théorie des Nombres, 1978-1979. Exp. No. 9,15, pp., CNRS, Talence (France) 1979.MR 81g:10014.

[2] Shiro Ando, *γράμμα στον* J.C.Lagarias, Φεβ. 18, 1983. αναφέρει ότι ο καθηγητής Nabuo Yoneda (Τμήμα Επιστήμης της Επικοινωνίας, Πανεπιστήμιο Tokyo) έχει επαληθεύσει την εικασία $3x + 1$ για όλους τους $n < 2^{40} = 1.2 \times 10^{12}$.

[3] R. V. Andrec, *Modern Abstract Algebra*, Holt, Reinhart, and Winston, 1971.

[4] Anon., *The* $3x + 1$ *problem.* Popular Computing, 1( April 1973 ) 1-2.

[5] Anon., $3x + 1$ (continued), Popular Computing, 1 ( July 1973 ) 6-7.

[6] Anon., $3x + 1$ strings, Popular Computing, 2 ( April 1973 ) 12-13.

[7] Anon., $3x + 1$ once again, Popular Computing, 3 ( April 1975 ) 4-5.

[8] R. Ash, *Information Theory*, Interscience Publishers, Wiley, New York, 1965.

[9] A. O. L. Atkin, *Comment on Problem 63-13,* SIAM Review, 8 (1966) 234-236

[10] A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge Univ. Press, 1975.

[11] M. Beeler, W. Gosper, R. Schroeppel, HAKMEM, Memo 239, Artificial Intelligence Laboratory, M.I.T. 1972, p. 64.Παρουσιάζει κάποια

αριθμητικά αποτελέσματα για κύκλους του $3x + 1$ και σχετικά προβλήματα.

[12] J. Blazewicz and A. Pettorossi, *Collatz's Conjecture and Binary Sequences*, Institute of Control Engineering, Technical University of Poznan, Poznan, Poland (preprint) March 1983.

[13] C. Böhm and G. Sontacchi, *On the existence of cycles of given length in integer sequences like $x_{n+1} = x_n/2$ if $x_n$ even, and $x_{n+1} = 3x + 1$ otherwise*, Atti Accard. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 64 (1978) 260-264, MR 83h.10030.

[14] Z. I. Borevich and I. R. Shafarevich, *Number Theory*, Academic Press, New York, 1966.

[15] M. J. Bruce, *Crazy roller coaster*, Math. Teacher, 71 (January 1978) 45-49.

[16] G. Choquet, *Répartition des nombres $k(3/2)^n$ ; measures et ensembles associés,* C. R. Acad. Sci. Paris, 290 (31 mars 1980) 575-580.

[17] G. Choquet , *Algorithmes adaptés aux suites $(k\theta^n)$ et aux chaines associées*, C. R. Acad. Sci. Paris, 290 (28 avril 1980) 719-724.

[18] G. Choquet, $\theta$-Jeux récursifs et application aux suites $(k\theta^n)$ ; solénoides de $II^Z$, C. R. Acad. Sci. Paris, 290 (19 mai 1980) 863-868.

[19] G. Choquet, *Construction effective de suites $(k(3/2)^n)$. Etude des mesures $(3/2)$-stables*, C. R. Acad. Sci. Paris, 291 (15 septembre 1980) 69-74.

[20] G. Choquet, *Les fermés $(3/2)$-stables de II ; structure des fermés dénombrables; applications arithmétiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, 291 (29 septembre 1980) 239-244.

[21] G. Choquet, $\theta$-fermés; $\theta$-chaines et $\theta$-cycles (pour $\theta = 3/2$), C. R. Acad. Sci. Paris, 292 (5 janvier 1981) 5-10.

[22] G. Choquet, $\theta$-fermés et dimension de Haudorff. Conjectures de travail. Arithmétique des $\theta$-cycles (ou $\theta = 3/2$), C. R. Acad. Sci. Paris, 292

(9 février 1981) 339-344. See especially Conjecture D, which arises from a generalization of the problem considered by Mahler [49]; cf.(3.4) in the text.

[23] L. Collatz, letters to R. Terras, 7 May 1976 and 2 Sept. 1976.

[24] L. Collatz , letter to L. Garner, 17 March 1980. In none of these letters does L. Collatz actually state that he proposed the $3x + 1$ problem.

[25] L. Collatz , *Verzweigungsdiagramme und Hypergraphen*, International Series for Numerical Mathematics, vol. 38, Birkhäuser, 1977. This paper remarks on the use of graphical representations to study iteration problems, as in Fig. 1 in the text. It does not discuss the $3x + 1$ problem.

[26] J. H. Conway, *Unpredictable Iterations*, Proc. 1972 Number Theory Conference, University of Colorado, Boulder, Colorado (1972) 49-52.

[27] H. S. M. Coxeter, *Cyclic Sequences and Frieze Patterns* (The Fourth Felix Behrend Memorial Lecture),1970. In this lecture Coxeter offered a $ 50 prize for a proof of the $3x + 1$ Conjecture and $ 100 for a counterexample, according to C. W. Trigg [70].

[28] R. E. Crandall, *On the "$3x + 1$" problem*, Math. Comp.,32 (1978) 1281-1292.

[29] J. L. Davidson, *Some Comments on an Iteration Problem*, Proc, 6th Manitoba Conf. on Numerical Mathematics (1976) 155-159.

[30] R. Dunn, On Ulam's Problem, Dept. of Computer Science Report #CU-CS-011-73, University of Coloredo, Boulder, January 1973. Reports on computer programs to test the $3x + 1$ Conjecture and to calculate the densities $F(k)$ in (2.19) for $k \leq 21$.

[31] C. J. Everett, *Iteration of the number theoretic function* $f(2n) = n,\ f(2n + 1) = 3n + 2$, Adv. Math., 25 (1977) 42-45.

[32] A. S. Fraenkel, *private communication* 1981.

[33] M. Gardner, *Mathematical Games,* Scientific American, 226 (June 1972) 114-118.

[34] L. E. Garner, *On the Collatz* $3n+1$ *algorithm*, Proc. Amer. Math. Soc., 82 (1981) 19-22.

[35] F. Gruenberger, $3x+1$ *revisited*, Popular Computing, 7 (Oct. 1979) 3-13.

[36] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 1981 (Problem E16).

[37] R. K. Guy , *Don't try to solve these problems!*, this MONTHLY, 90 (1983) 35-41.

[38] R. K. Guy , *Conway's prime producing machine*, Math. Mag., 56 (1983) 26-33.

[39] P. Halmos, *Lectures on Ergodic Theory*, Math. Soc. of Japan, Tokyo, 1956 (Reprint: Chelsea, New York).

[40] H. Hasse, *Unsolved Problems in Elementary Number Theory*, Lectures at U. Maine (Orono), Spring 1975, dittoed notes, pp. 23-33. He states (p.23) that Thompson has proved the Finite Cycles Conjecture, a result I am unable to verify.

[41] E. Heppner, *Eine Bemerkung zum Hasse-Syracuse Algorithmus*, Archiv. Math., 31(1978) 317-320, MR 80d. 10007.

[42] I. N. Herstein and I. Kaplansky, *Matters Mathematical*, 2nd ed., Chelsea, New York, 1978, 44-45. They call the problem the Syracuse algorithm.

[43] *D. Hofstadter, Gödel, Escher, Bach*, Basic Books, New York, 1979. Brings the $3x+1$ problem to a wide audience by stating it on pp. 400-402.

[44] S. D. Isard and A. M. Zwicky, *Three open questions in the theory of one-symbol Smullyan systems*, SIGACT News (1969) 11-14. They propose the problem: Let $f(n) = n/3$ if $n \equiv 0 \pmod 3$ and let $g(n) = 2n+1$. Can all numbers $n \equiv 0$ or $1 \pmod 3$ be reduced to $1$ by a series of operations $f$ and $g$? See [70], p. 148.

[45] S. Kakutani, *private communication* 1981.

[46] David Kay, Undergraduate Research Project no. 2, Pi Mu Eprilon J. (1972) 338.

[47] M. S. Klamkin, *Problem 63-12*, SIAM Review, 5 (1963) 275-276. States the problem: Consider the permutation $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ defined by $f(3n) = 2n,\ f(3n-1) = 4n-1,\ f(3n-2) = 4n-3$. Does $n = 8$ have an infinite trajectory? How many finite cycles are there for $f$? This function was the original one proposed by L. Collatz in 1932 [24].

[48] G. M. Leigh and K. R. Matthews, *A generalization of the Syracuse algorithm* to $F_q[x]$, preprint.

[49] K. Mahler, *An unsolved problem on the powers of* $3/2$, J. Austral. Math. Soc., 8 (1986) 313-321. The problem Mahler studies was originally proposed by Prof. Saburo Uchiyama (Tsukuba Univ.), according to S. Ando [2]. It arose indirectly in connection with the function $g(k)$ of Waring's problem, see G. H. Harding and E. M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers (4th ed.), Oxford Univ. Press, 1960, Theorem 393ff.

[50] K. Mahler, *P-adic numbers and their functions*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1976.

[51] K. R. Matthews and A. M. Watts, *A generalization of Hasse's generalization of the Syracuse algorithm*, Acta. Arith., 43 (1983) 75-83.

[52] K. R. Matthews and A. M. Watts , *A Markov approach to the generalized Syracuse algorithm*, preprint.

[53] K. R. Matthews and A. M. Watts , *Some invariant probability measures on the polyadic numbers*, preprint.

[54] H. Möller, *Über Hasses Verallgemeinerung des Syracuse-Algorithmus (Kakutani's Problem),* Acta Arith., 34 (1978) 219-226. This paper claims A. Fraenkel cheked that $f^{(k)}(n) = 1$ for all $n \leq 2^{50}$, a result in error [32]. In a note added in proof it asserts the proofs of Terras [67] are faulty. They seem essentially correct to me, and Terras[68] supplies elided details.

[55] J. Nievergelt, J. Farrar, and E. M. Reingold, *Computer Approaches to Mathematical Problems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974,

211-217. They discuss the problem of cheking the $3x + 1$ Conjecture for a given $n$ and give some interesting empirical observations.

[56] C. Stanley Ogilvy, *Tomorrow's Math*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1972, 103.

[57] A. D. Pollington, *Intervals Constructions in the Theory of Numbers*, Thesis, University of London, 1980. See especially Chapter 5, which contains results related to Mahler's problem [49].

[58] A. D. Pollington, Progressions arithmétiques géneralisées et le probléme des $(3/2)^n$, C. R. Acad. Sci. Paris, 292 (16 fevrier 1981) 383-384.

[59] L. Ratzan, *Some work on an unsolved palindromic algorithm,* Pi Mu Epsilon J., 5 (Fall 1973) 463-466.

[60] D. A. Rawsthorne, *Imitation of an Iteration*, preprint.

[61] B. Schuppar, *Kettenbrüche und der* $3a + 1$ *Algorithmus*, preprint.

[62] D. Shanks, *Comments on Problem 63-13*, SIAM Review, 7 (1965) 284-286. Gives the result of a computer search on Collatz' original problem (see[9],[47]), and a heuristic concerning lengths of finite cycles.

[63] D. Shanks , *Western Number Theory Conference Problem 1975* #5 (R. Guy, ed.) (mimeographed sheets). States a conjecture on the average size of the total stopping time function.

[64] R. P. Steiner, *A theorem on the Syracuse Problem*, Proc. 7th Manitoba Conference on Numarical Mathematics-1977, Winnipeg (1978) 553-559.

[65] R. P. Steiner , *On the "Qx+1 Problem"*, Q odd, Fibonacci Quart., 19 (1981) 285-288.

[66] R. P. Steiner , *On the "Qx+1 Problem"*, Q odd II, Fibonacci Quart., 19 (1981) 293-296.

[67] R. Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arith. 30 (1976) 241-252.

[68] R. Terras, *On the existence of a density*, Acta Arith., 35 (1979) 101-102.

[69] R. Tijdeman, *Det Kongelige Norske Videnskabers Selskak*, Shrifter, 16, 1972.

[70] C. W. Trigg, C. W. Dodge and L. F. Meyers, *Comments on Problem 133*, Eureka (now Crux Mathematicorum) 2, no. 7 (August-September 1976) 144-150. Problem 133 is the $3x + 1$ problem, proposed by K. S. Williams, who said he was shown it by one of his students. C. W. Trigg gives a good history of the problem.

[71] M. Vaughan-Lee, letter to L. Garner, Aug.10, 1981. Michael Vaughan-Lee (Oxford U.) has verified the $3x+1$ Conjecture for $n < 2^{32} \cong 4.5\times10^9$ on a Sinclair 2X81 Microcomputer.

[72] C. Williams, B. Thwaites, A. van der Pooten, W. Edwards, and L. Williams, *Ulam's Conjecture continued again, 1000 pounds for proof. Rumored proof disclaimed.* References, PPC Calculator J., 9 (Sept. 1982) 23-24. Gives some history of the problem. B. Thwaites states he originated the $3x + 1$ problem in 1952 and affers 1000 pounds for a proof of the $3x + 1$ Conjecture.

[73] M. Yamada, A convergence proof about an integral sequence, Fibonacci Quart., 18 (1980) 231-242. The proofs in this paper are incorrect, see MR 82d:10026.