ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πτυχιακή Εργασία

Μπίτσκα Μάρθα

Κυματικές Εξισώσεις *και* Εξισώσεις Διάχυσης.

Επιβλέπων Καθηγητής
Καραγάλιος Νικόλαος

Σάμος
Ιούνιος 2009

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Πίνακας Περιεχομένων 02
Μέρος Ι. Μοντέλα Διαφορικών Εξισώσεων 04
Κεφάλαιο 1. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις 04
1.1. Εισαγωγή στις έννοιες 04
1.2. Συστήματα με περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταβλητές 04
1.3. Γραμμικότητα και μη γραμμικότητα 05
1.4. Επαλληλία 06
Κεφάλαιο 2. Εξισώσεις διάχυσης 07
2.1. Νόμοι διατήρησης 07
2.2. Νόμοι διατήρησης σε πολλές διαστάσεις 09
2.3. Καταστατικές εξισώσεις 10
2.4. Η εξίσωση της θερμότητας 12
Κεφάλαιο 3. Εξισώσεις ισορροπίας 14
3.1. Η εξίσωση του Laplace 14
3.2. Ολοκληρωτικές ταυτότητες 15
3.3. Βασικές ιδιότητες 16
Κεφάλαιο 4. Αναπτύγματα σε ιδιοσυναρτήσεις 17
4.1. Εισαγωγή 17
4.2. Το πρόβλημα των ιδιοτιμών για διαφορικούς τελεστές 17
4.3. Η μέθοδος του Fourier 20
Κεφάλαιο 5. Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί 21
5.1. Μετασχηματισμοί Laplace 21
5.2. Μετασχηματισμοί Fourier 23
Μέρος ΙΙ. Κυματικά φαινόμενα σε συνεχή μέσα 26
Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή 26
Κεφάλαιο 2. Κυματική διάδοση 26
2.1. Κύματα 26
2.2. Γραμμικά κύματα 28
2.3. Μη γραμμικά κύματα 29
2.4. Η εξίσωση του Burgers 31
2.5. Η εξίσωση των Korteweq – de Vries 32
2.6. Νόμοι διατήρησης 33
2.7. Σχεδόν γραμμικές εξισώσεις 34
Κεφάλαιο 3. Μαθηματικά Μοντέλα Συνεχών Μέσων 37
3.1. Εισαγωγή 37

3.2. Κινηματική ... 38
3.3. Διατήρηση της μάζας ... 40
3.4. Διατήρηση της ορμής ... 42
3.5. Θερμοδυναμική και διατήρηση της ενέργειας ... 44
3.6. Η ακουστική προσέγγιση ... 46
3.7. Ελαστικά κύματα στα στερεά ... 47
Κεφάλαιο 4. Κυματική Εξίσωση ... 49
4.1. Ο τύπος του D' Alembert ... 49
4.2. Σκέδαση και αντίστροφα προβλήματα ... 51
Κεφάλαιο 5. Δυναμική των αερίων ... 51
5.1. Νόμοι διατήρησης ... 51
5.2. Η μέθοδος του Riemann ... 53
5.3. Οι συνθήκες των Rankine – Hugoniot ... 54
Κεφάλαιο 6. Κίνηση των ρευστών στον $\mathbb{R}^3$ ... 56
6.1. Κινηματική ... 56
6.2. Δυναμική ... 58
6.3. Ενέργεια ... 61

<u>*Μέρος Ι*</u>: <u>*Μοντέλα Διαφορικών Εξισώσεων*</u>

<u>*Κεφάλαιο 1*</u>*: Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις.*

1.1 Εισαγωγή στις έννοιες

Ορισμός: *Μία εξίσωση που περιέχει μία ή περισσότερες άγνωστες συναρτήσεις και τις παραγώγους τους μέχρι μια ορισμένης τάξεως ονομάζεται διαφορική εξίσωση. Όταν οι άγνωστες συναρτήσεις είναι μίας μεταβλητής, τότε η εξίσωση ονομάζεται συνήθης διαφορική εξίσωση. Όταν οι άγνωστες συναρτήσεις είναι πολλών μεταβλητών, τότε η εξίσωση ονομάζεται μερική διαφορική εξίσωση.*

Η μελέτη πολλών φυσικών, τεχνικών, ακόμη και λογικών προβλημάτων οδηγεί συχνά σε διαφορικές εξισώσεις η μελέτη των μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι μία από τις θεμελιώσεις περιοχές των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Μερικές διαφορικές εξισώσεις εμφανίζονται σε όλες σχεδόν τις φυσικές και μαθηματικές επιστήμες, η δε μελέτη τους παραδοσιακά ασχολείται κυρίως με : (i) τη διερεύνηση της ύπαρξης και της μοναδικότητας των λύσεών της, (ii) την ευστάθεια των λύσεών τους σε μικρές διαταραχές, (iii) μεθόδους κατασκευής λύσεων.

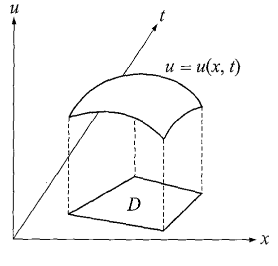
1.2 Συστήματα με περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταβλητές.

Πολλά φυσικά προβλήματα δεν είναι δυνατό να περιγραφούν από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, γιατί η κατάσταση του συστήματός τους εξαρτάται από περισσότερες της μίας ανεξάρτητες μεταβλητές.

Γενικά, μία *μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης* για μία συνάρτηση $u = u(x,t)$ δύο ανεξάρτητων μεταβλητών x,t είναι μία εξίσωση της μορφής

(1) $$G(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt}) = 0,$$

για (x,t) σε κάποιο χωρίο D του $\mathbb{R}^2$. Μία λύση της (1) είναι μία συνάρτηση $u = u(x,t)$ στο D, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς x και t στο D, η οποία όταν αντικατασταθεί στην (1) μας δίνει μία ταυτότητα στο D. Η λύση u της (1) παριστάνει στον τρισδιάστατο χώρο x,t,u μία λεία επιφάνεια ορισμένη στο διδιάστατο χωρίο D του επιπέδου x,t (Σχ. 1). Εδώ υποθέτουμε ότι το x είναι μία χωρική μεταβλητή, ενώ το t είναι ο χρόνος. Το χωρίο D του $\mathbb{R}^2$ στο οποίο ορίζεται το πρόβλημα, θα αναφέρεται ως χώρο – χρονικό χωρίο και τα προβλήματα που περιέχουν το χρόνο t ως ανεξάρτητη μεταβλητή λέγονται *προβλήματα εξέλιξης*. Προβλήματα στα οποία οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι δύο χωρικές συντεταγμένες, για παράδειγμα x και y, λέγονται *προβλήματα ισορροπίας* ή *προβλήματα σταθερής* (ή *μόνιμης*) *κατάστασης*.



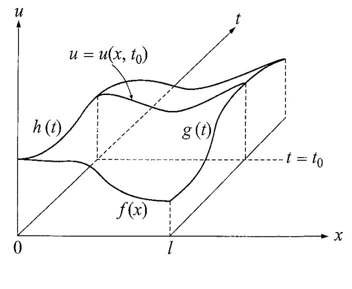
Μία διαφορική εξίσωση, όπως η (1), έχει άπειρες λύσεις. Όπως η γενική λύση μίας συνήθους διαφορικής εξίσωσης εξαρτάται από αυθαίρετες σταθερές, έτσι και η γενική λύση μίας μερικής διαφορικής εξίσωσης εξαρτάται από αυθαίρετες συναρτήσεις.

Σχ. 1. Η επιφάνεια της λύσης $u=u(x,t)$ στο χώρο x,t,u.

Παράδειγμα 2.1. Θεωρούμε την απλή μερική διαφορική εξίσωση $u_{tx}=tx$. Ολοκληρώνοντας ως προς x έχουμε ότι $u_t=\frac{1}{2}tx^2+f(t)$, όπου η f είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση. Ολοκληρώνοντας ως προς t βρίσκουμε τη γενική λύση $u=\frac{1}{4}t^2x^2+g(t)+h(x)$, όπου η h είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση και η $g(t)=\int f(t)dt$ είναι επίσης αυθαίρετη. Επομένως, η γενική λύση εξαρτάται από δύο αυθαίρετες συναρτήσεις μίας μεταβλητής. Οποιαδήποτε επιλογή ενός ζεύγους συναρτήσεων g και h θα μας δώσει μία λύση.

Στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις οι σταθερές που προκύπτουν από την ολοκλήρωση προσδιορίζονται από αρχικές ή συνοριακές συνθήκες, οι οποίες κατ' αυτό τον τρόπο μας δίνουν μία μοναδική λύση. Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις συνήθως συνοδεύονται από αρχικές ή συνοριακές συνθήκες μέσω των οποίων επιλέγεται μία από τις πολλές λύσεις τους. Μία συνθήκη που ισχύει για $t=0$ σε κάποιο διάστημα του άξονα των x λέγεται *αρχική συνθήκη*. Μία συνθήκη που δίνεται πάνω σε οποιαδήποτε άλλη καμπύλη στο επίπεδο x,t λέγεται *συνοριακή συνθήκη*. Ως αρχικές ή συνοριακές συνθήκες μπορούμε να δώσουμε τιμές της λύσης u ή των παραγώγων της ή και συνδυασμών τους πάνω στις δεδομένες αυτές καμπύλες του επιπέδου x,t. Προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων που συνοδεύονται από βοηθητικές συνθήκες λέγονται *προβλήματα αρχικών ή/και συνοριακών τιμών*.

Παράδειγμα 2.2. Η ροή της θερμότητας σε μία ράβδο μήκους l περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση $u_t-ku_{xx}=0$, $t>0$, $0<x<l$, όπου k είναι μία φυσική σταθερά και $u=u(x,t)$ είναι η θερμοκρασία της ράβδου στη θέση x κατά τη χρονική στιγμή t. Μία βοηθητική συνθήκη της μορφής $u(x,0)=f(x)$, $0<x<l$, είναι μία αρχική συνθήκη διότι ισχύει για $t=0$. Η $f(x)$ παριστάνει την αρχική κατανομή της θερμοκρασίας κατά μήκος της ράβδου. Συνθήκες της μορφής $u(0,t)=h(t)$, $u(l,t)=g(t)$, $t>0$, είναι συνοριακές συνθήκες και οι συναρτήσεις $h(t)$ και $g(t)$ παριστάνουν δεδομένες τιμές της θερμοκρασίας που ισχύουν για $t>0$ στα άκρα $x=0$, $x=l$, αντίστοιχα (Σχ. 2). Από φυσική διαίσθηση συμπεραίνουμε ότι η μερική διαφορική εξίσωση έχει μία μοναδική λύση κάτω από αυτές τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Γραφικά, η επιφάνεια που παριστάνει τη λύση θα έχει τις f,g και h ως σύνορο.



Σχ. 2. Η επιφάνεια της θερμοκρασίας $u(x,t)$ φράσσεται από την αρχική κατανομή θερμοκρασίας $f(x)$ και τις θερμοκρασίες στο σύνορο $h(t)$ και $g(t)$, για $x=0$ και $x=l$. Επίσης, διακρίνεται το στιγμιότυπο $u(x,t_0)$ της λύσης κατά τη χρονική στιγμή t_0

Συχνά είναι δύσκολο να βρούμε τη γενική λύση μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης. Έτσι, για να λύσουμε ένα πρόβλημα αρχικών ή/και συνοριακών τιμών, σπανίως υπολογίζουμε πρώτα τη γενική λύση και μετά τις αυθαίρετες συναρτήσεις από τα αρχικά και συνοριακά δεδομένα. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την περίπτωση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, όπου πρώτα βρίσκουμε τη γενική λύση και μετά προσδιορίζουμε τις αυθαίρετες σταθερές από τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

1.3 Γραμμικότητα και μη γραμμικότητα

Ο διαχωρισμός των μερικών και των συνήθων διαφορικών εξισώσεων σε γραμμικές και μη γραμμικές είναι σημαντικός. Εκτός από το γεγονός ότι οι γραμμικές εξισώσεις γενικά λύνονται ευκολότερα, το σύνολο των λύσεών τους έχει μία αλγεβρική δομή, δηλαδή το άθροισμα δύο λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής εξίσωσης είναι και αυτό λύση, όπως επίσης κάθε σταθερό πολλαπλάσιο μίας λύσης. Στις μη γραμμικές εξισώσεις δεν ισχύει η αρχή της πρόσθεσης ή της επαλληλίας των λύσεων. Η αρχή της επαλληλίας των λύσεων των γραμμικών εξισώσεων πολύ συχνά μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε λύσεις που μπορούν να ικανοποιήσουν διάφορες συνοριακές ή αρχικές συνθήκες. Μάλιστα, η παρατήρηση αυτή αποτελεί τη βάση της μεθόδου *Fourier* ή μεθόδου αναπτυγμάτων σε ιδιοσυναρτήσεις για γραμμικές εξισώσεις. Οι γραμμικές εξισώσεις μπορούν επίσης να λυθούν με τη χρήση μεθόδων μετασχηματισμών, όπως είναι οι μετασχηματισμοί *Laplace* και *Fourier*.

Για να διατυπώσουμε σαφέστερα τις έννοιες αυτές, θεωρούμε ότι η μερική διαφορική εξίσωση (1) ορίζει ένα διαφορικό τελεστή L που δρα στην άγνωστη συνάρτηση $u(x,t)$ και γράφουμε την (1) στη μορφή $Lu(x,t) = f(x,t)$, $(x,t) \in D$, ή, παραλείποντας τις ανεξάρτητες μεταβλητές, στη μορφή:

(2) $$Lu = f \,, \ (x,t) \in D.$$

Στην (2) όλοι οι όροι στους οποίους υπάρχει η u έχουν μεταφερθεί στο αριστερό μέλος και συγχωνευθεί στον όρο Lu. Στο δεύτερο μέλος, η f είναι γνωστή συνάρτηση. Αν $f = 0$ στο D, τότε η (2) λέγεται *ομογενής*, ενώ αν η f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν, τότε η (2) είναι *μη ομογενής*. Η εξίσωση της θερμότητας $u_t - ku_{xx} = 0$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $Lu = 0$, όπου L είναι ο διαφορικός τελεστής (με μερικές παραγώγους) $\frac{d}{dt} - k\frac{d^2}{dx^2}$ και είναι προφανώς ομογενής. Η μερική διαφορική εξίσωση $uu_t + 2txu - \sin tx = 0$, γράφεται ως $Lu = \sin tx$, όπου ο διαφορικός τελεστής L ορίζεται από τη σχέση $Lu = uu_t + 2txu$. Η εξίσωση αυτή είναι μη ομογενής. Η έννοια της γραμμικότητας εξαρτάται από τον τελεστή L στην (2). Λέμε ότι η μερική διαφορική εξίσωση (2) είναι *γραμμική* αν ο L έχει τις ιδιότητες:

i) $L(u + w) = Lu + Lw$,

ii) $L(cu) = cLu$,

όπου οι u και w είναι συναρτήσεις και η c είναι σταθερά. Αν η (2) δεν είναι γραμμική, τότε λέγεται *μη γραμμική*.

1.4 Επαλληλία

Έστω $Lu = 0$ μια ομογενής, γραμμική εξίσωση και έστω ότι οι συναρτήσεις u_1 και u_2 είναι λύσεις της. Τότε προφανώς έπεται ότι και η $u_1 + u_2$ είναι λύση, αφού $L(u_1 + u_2) = Lu_1 + Lu_2 = 0 + 0 = 0$. Επίσης, και η cu_1 είναι λύση, αφού $L(cu_1) = cLu_1 = c \cdot 0 = 0$. Μία απλή επαγωγική απόδειξη δείχνει ότι αν $u_1, \ldots, u_n$ είναι λύσεις της εξίσωσης $Lu = 0$ και $c_1, \ldots, c_n$ είναι σταθερές, τότε ο γραμμικός συνδυασμός $c_1u_1 + \ldots + c_nu_n$ είναι επίσης λύση. Αυτή είναι *η αρχή της επαλληλίας* για γραμμικές, ομογενείς εξισώσεις. Υπό ορισμένες προϋποθέσεις για τη σύγκλιση, η αρχή της επαλληλίας μπορεί να επεκταθεί και σε σειρές συναρτήσεων $c_1u_1 + c_2u_2 + \dots$.

Παράδειγμα 4.1. Θεωρούμε την εξίσωση της θερμότητας:

(3) $$u_t - ku_{xx} = 0\,,\ t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^1.$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}^1$ η συνάρτηση $u(x,t,a) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x-a)^2}{4kt}}$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^1$, είναι λύση της (3). Η λύση αυτή λέγεται *θεμελιώδης λύση*. Εφαρμόζοντας φορμαλιστικά (φορμαλιστικός λέγεται ένας υπολογισμός που δεν είναι πλήρως αυστηρός, αλλά που μπορεί συνήθως να επαληθευτεί υπό ορισμένες συνθήκες) την αρχή της επαλληλίας, παίρνουμε το ολοκλήρωμα $u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(a) \dfrac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x-a)^2}{4kt}} da$, όπου $c(a)$ είναι κάποια συνάρτηση. Αν η c είναι συνεχής και φραγμένη, μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι δυνατό να παραγωγίσουμε μέσα στο ολοκλήρωμα και επομένως ότι η u είναι λύση.

<u>Κεφάλαιο 2</u>: Εξισώσεις διάχυσης.

2.1 Νόμοι διατήρησης.

Ορισμός: *Με τον όρο νόμοι διατήρησης εννοούμε νόμους ισοζυγίου, δηλαδή εξισώσεις που εκφράζουν το γεγονός ότι διατηρείται το ισοζύγιο μίας ποσότητας καθ' όλη τη διάρκεια μιας διαδικασίας.*

Για παράδειγμα, ο πρώτος νόμος (αξίωμα) της θερμοδυναμικής μας λέει ότι η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ενός δεδομένου συστήματος είναι ίση με (ή εξισορροπείται) από την ολική θερμότητα που προσφέρεται στο σύστημα συν το έργο που παράγεται. Έτσι, ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής είναι στην πραγματικότητα ένας νόμος ισοζυγίου της ενέργειας ή ένας νόμος διατήρησης της ενέργειας. Για ένα άλλο παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη ροή ενός ρευστού σε ένα χωρίο που περιέχει χημικές ενώσεις οι οποίες αντιδρούν μεταξύ τους. Ο ρυθμός (ταχύτητα) με τον οποίο μεταβάλλεται η ολική ποσότητα μιας συγκεκριμένης χημικής ένωσης που βρίσκεται στο χωρίο αυτό, πρέπει να ισούται με το ρυθμό με τον οποίο η ένωση αυτή εισέρχεται στο χωρίο μείον το ρυθμό με τον οποίο εξέρχεται, συν το ρυθμό με τον οποίο η ένωση αυτή δημιουργείται ή αναλώνεται εξαιτίας των χημικών αντιδράσεων. Αυτή είναι η φραστική διατύπωση ενός νόμου διατήρησης για την ποσότητα της δεδομένης χημικής ένωσης. Ανάλογοι νόμοι ισοζυγίου ή διατήρησης υπάρχουν σε όλες τις επιστήμες. Στις βιοεπιστήμες, για παράδειγμα, ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού ενός συγκεκριμένου είδους ζώων σε κάποιον ορισμένο χώρο πρέπει να ισούται με το ρυθμό των γεννήσεων μείον το ρυθμό των θανάτων συν το ρυθμό της μετανάστευσης προς ή από το χώρο αυτό.

Μαθηματικά, οι νόμοι διατήρησης εκφράζονται συνήθως ως διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες θεωρούνται πλέον ως εξισώσεις που διέπουν το φαινόμενο ή *εξισώσεις κίνησης* της συγκεκριμένης διαδικασίας και υπαγορεύουν τον τρόπο με τον οποίο η διαδικασία αυτή εξελίσσεται χρονικά.

Θεωρούμε ένα μέγεθος $u=u(x,t)$ το οποίο εξαρτάται από μία χωρική μεταβλητή $x\in\mathbb{R}^1$ και από το χρόνο $t>0$. Υποθέτουμε ότι το u παριστάνει την πυκνότητα ή συγκέντρωση κάποιας ποσότητας και εκφράζεται σε μονάδες αυτής της ποσότητας ανά μονάδα όγκου. Ο θεμελιώδης νόμος διατήρησης για το μέγεθος u είναι: Για κάθε διάστημα I έχουμε

Ο συνολικός χρόνος μεταβολής της ολικής ποσότητας στο I
= συνολικός ρυθμός με τον οποίο η ποσότητα ρέει μέσα στο I
+ ρυθμός με τον οποίο η ποσότητα παράγεται μέσα στο I.

Αν θεωρήσουμε $\phi(x,t)$ τη ροή της u στο σημείο x κατά τη χρονική στιγμή t, και $f(x,t,u)$ τη συνάρτηση πηγής που δηλώνει το ρυθμό με τον οποίο η u αναπαράγεται (‘η καταστρέφεται) στο σημείο (διατομή) χ κατά τη χρονική στιγμή t, ανά μονάδα όγκου, διαιρώντας όλους τους όρους δια της σταθερής διατομής Α ενός κυλινδρικού σωλήνα, έχουμε:

(1) $$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx=\phi(a,t)-\phi(b,t)+\int_a^b f(x,t,u)\,dx.$$

Συνοπτικά, η (1) μας λέει ότι ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται στο I πρέπει να ισούται με το συνολικό ρυθμό με τον οποίο η u ρέει μέσα στο I συν το ρυθμό παραγωγής της u από πηγές στο I. Η εξίσωση (1) λέγεται *νόμος διατήρησης σε ολοκληρωτική μορφή* και ισχύει ακόμη και αν οι u,ϕ και f δεν είναι ομαλές (δηλαδή συνεχώς παραγωγίσιμες) συναρτήσεις.

Αν θέσουμε ορισμένες περιοριστικές συνθήκες πάνω στην τριάδα u,ϕ και f, η (1) μπορεί να μετασχηματιστεί σε μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Για να κάνουμε αυτό το μετασχηματισμό χρειαζόμαστε δύο αποτελέσματα από τη στοιχειώδη θεωρία ολοκλήρωσης: (i) Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού και (ii) πως παραγωγίζουμε ένα ολοκλήρωμα ως προς μια παράμετρο της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Ακριβέστερα:

i) $\int_a^b \phi_x(x,t)dx=\phi(b,t)-\phi(a,t)$

ii) $\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx=\int_a^b u_t(x,t)\,dx$.

Τα δύο αυτά αποτελέσματα ισχύουν αν οι ϕ και u είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις του $\mathbb{R}^2$. Επομένως, αν υποθέσουμε ότι οι u και ϕ είναι ομαλές και ότι η f είναι συνεχής, τότε οι εξισώσεις (i) και (ii) συνεπάγονται ότι ο νόμος διατήρησης (1) γράφεται στη μορφή:

(2) $$\int_a^b\left[u_t(x,t)+\phi_x(x,t)-f(x,t,u)\right]dx=0 \text{ για κάθε διάστημα } \mathrm{I}=[a,b].$$

Επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι συνεχής συνάρτηση του x και η (2) ισχύει για κάθε διάστημα ολοκλήρωσης I, προκύπτει ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι ταυτοτικά μηδέν, δηλαδή ισχύει η:

(3) $$u_t+\phi_x=f(x,t,u),\ x\in\mathbb{R}^1,\ t>0.$$

Η εξίσωση (3) είναι μια μερική διαφορική εξίσωση που συσχετίζει την πυκνότητα $u=u(x,t)$ με τη ροή $\phi=\phi(x,t)$. Και οι δύο συναρτήσεις θεωρούνται ως άγνωστοι, ενώ η συνάρτηση πηγής f θεωρείται δεδομένη. Η εξίσωση (3) είναι ένας *νόμος διατήρησης σε διαφορική μορφή*, σε αντίθεση με την ολοκληρωτική μορφή (1). Ο όρος ϕ_x λέγεται *όρος ροής* διότι προκύπτει από την κίνηση, ή μεταφορά, της u διαμέσου της διατομής στο x. Η συνάρτηση πηγής f ονομάζεται μερικές φορές *όρος αντίδρασης* (κυρίως σε προβλήματα χημείας) ή *όρος αύξησης* ή *αλληλεπίδρασης* (σε προβλήματα βιολογίας). Η εξίσωση (3) ονομάζεται συνήθως νόμος διατήρησης όταν δεν υπάρχει ο όρος f της πηγής. Αν υπάρχει f θα λέμε ότι η (3) είναι ένας νόμος διατήρησης με πηγές (θα διασαφηνίζουμε πάντα σε ποια από τις δύο περιπτώσεις αναφερόμαστε). Τέλος, έχουμε ορίσει τη ροή ϕ ως συνάρτηση των x και t, πολλές φορές όμως συμβαίνει αυτή η εξάρτηση από τη χωρική και τη χρονική μεταβλητή να εμφανίζεται μέσω εξάρτησης της ϕ από την u ή τις παραγώγους της u.

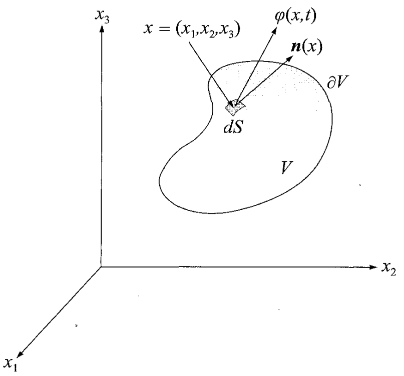
2.2 Νόμοι διατήρησης σε πολλές διαστάσεις

Μελετούμε την περίπτωση του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$. Συμβολίζουμε με $x=(x_1,x_2,x_3)$ ένα σημείο του $\mathbb{R}^3$ και υποθέτουμε ότι η $u=u(x,t)$ είναι μία βαθμωτή συνάρτηση πυκνότητας που περιγράφει το ποσό ανά μονάδα όγκου κάποιου μεγέθους που μας ενδιαφέρει και το οποίο κατανέμεται σε κάποιο χωρίο του $\mathbb{R}^3$. Έστω V ένα αυθαίρετο υποχωρίο του χωρίου αυτού. Υποθέτουμε ότι το V έχει λείο σύνορο το οποίο συμβολίζουμε με ∂V. Τότε προκύπτει, όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση, ότι το συνολικό ποσό του μεγέθους μέσα στο V δίνεται από το τριπλό ολοκλήρωμα:

$$\text{Συνολικό ποσό στο } V=\int_V u(x,t)\,dx,$$

όπου το $dx=dx_1dx_2dx_3$ παριστάνει το στοιχείο όγκου στο $\mathbb{R}^3$. Γνωρίζουμε ότι ο χρονικός ρυθμός μεταβολής της συνολικής ποσότητας στο V του μεγέθους που εξετάζουμε ισούται με το ρυθμό παραγωγής του μεγέθους μέσα στο V λόγω πηγών συν το συνολικό ρυθμό με τον οποίο διέρχεται το μέγεθος δια του συνόρου ∂V. Αν με $f(x,t,u)$ συμβολίζουμε τον όρο πηγής, τότε έχουμε ότι:

$$\text{Ο ρυθμός παραγωγής της } u \text{ λόγω πηγών } =\int_V f(x,t,u)\,dx.$$



Σχ. 3. Το χωρίο V με σύνορο ∂V, το στοιχείο επιφάνειας dS με εξωτερική μοναδιαία κάθετο $\vec{n}$ και διάνυσμα ροής $\vec{\phi}$.

Στις τρεις διαστάσεις η ροή μπορεί να λαμβάνει χώρα σε οποιαδήποτε κατεύθυνση, οπότε θα την περιγράφουμε με μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{\phi}(x,t)$. Αν με $\vec{n}(x)$ συμβολίσουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια ∂V με φορά προς τα έξω (Σχ. 3), τότε η συνολική ροή προς τα έξω του μεγέθους u διαμέσου του συνόρου ∂V θα δίνεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\text{Συνολική ροή μέσω του } \partial V=\int_{\partial V}\vec{\phi}(x,t)\cdot\vec{n}(x)\,dS,$$

όπου με dS συμβολίζουμε το στοιχείο επιφανείας του ∂V. Τελικά, ο νόμος διατήρησης ή ισοζυγίου για το u δίνεται από τη σχέση:

(4) $$\frac{d}{dt}\int_V u\,dx=-\int_{\partial V}\vec{\phi}\cdot\vec{n}\,dS+\int_V f\,dx.$$

Το αρνητικό πρόσημο στον όρο ροής εμφανίζεται γιατί η ροή προς τα έξω ελαττώνει το ρυθμό μεταβολής της u στο V.

Η ολοκληρωτική μορφή του νόμου διατήρησης (4) μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως τοπική συνθήκη, δηλαδή ως μερική διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ) υπό την προϋπόθεση ότι οι u και $\vec{\phi}$ είναι αρκετά ομαλές συναρτήσεις. Στην περίπτωση αυτή το επιφανειακό ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί ως ολοκλήρωμα πάνω στο V με χρήση του *θεωρήματος της απόκλισης* (ή *θεωρήματος του Gauss*). Το θεώρημα της απόκλισης εμπεριέχεται στην ισότητα

(5) $$\int_V div\vec{\phi}\,dx = \int_{\partial V} \vec{\phi}\cdot\vec{n}\,dS,$$

όπου div είναι ο τελεστής απόκλισης. Χρησιμοποιώντας την (5) και περνώντας την παράγωγο μέσα στο ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της (4), καταλήγουμε στη σχέση: $\int_V u_t dx = -\int_V div\vec{\phi}\,dx + \int f dx$. Λόγω της αυθαίρετης επιλογής του V παίρνουμε τη διαφορική μορφή του νόμου διατήρησης:

(6) $$u_t + div\vec{\phi} = f\left(x,t,u\right),\ x\in V,\ t>0.$$

Η εξίσωση (6) είναι το τρισδιάστατο ανάλογο της εξίσωσης (3) που περιέγραφε το νόμο διατήρησης στη μία διάσταση.

2.3 Καταστατικές εξισώσεις.

Επειδή η εξίσωση (3) (ή η (6)) είναι μια ΜΔΕ με δύο άγνωστες ποσότητες (την πυκνότητα u και τη ροή ϕ), παρατηρούμε ότι απαιτείται μια ακόμα εξίσωση ώστε να έχουμε ένα καλώς ορισμένο σύστημα. Συχνά, η επιπλέον αυτή εξίσωση βασίζεται σε υποθέσεις σχετικά με τις φυσικές ιδιότητες του μέσου, που προκύπτουν εμπειρικά. Εξισώσεις που περιγράφουν τέτοιες υποθέσεις λέγονται *καταστατικές εξισώσεις* ή *εξισώσεις κατάστασης*. Επομένως, οι καταστατικές εξισώσεις διαφέρουν από το βασικό νόμο διατήρησης. Ο δεύτερος είναι ένας θεμελιώδης φυσικός νόμος που συνδέει την πυκνότητα u με τη ροή ϕ, ενώ μια καταστατική εξίσωση είναι συνήθως μια προσεγγιστική εξίσωση που εκφράζει μία εμπειρική σχέση.

Παράδειγμα 3.1. (Η εξίσωση διάχυσης). Αρχικά, ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν πηγές $\left(f=0\right)$ και ότι ισχύει ο βασικός νόμος διατήρησης στη μία διάσταση:

(7) $$u_t + \phi_x = 0,\ x\in\mathbb{R}^1,\ t>0.$$

Σε πολλά προβλήματα φυσικής παρατηρείται ότι το ποσό του υλικού που περιγράφεται από την πυκνότητα u, το οποίο ρέει διαμέσου μιας διατομής x κατά τη χρονική στιγμή t, είναι ανάλογο της κλίσης της πυκνότητας u_x (Γράφουμε $\phi\left(x,t\right)\propto u_x\left(x,t\right)$). Αν $u_x>0$, τότε $\phi<0$ (έχουμε ροή προς τα αριστερά), ενώ αν $u_x<0$, τότε $\phi>0$ (έχουμε ροή προς τα δεξιά) (Σχ. 4). Υποθέτουμε ότι ισχύει η βασική καταστατική εξίσωση

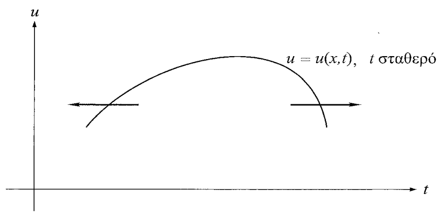
(8) $$\phi\left(x,t\right) = -Du_x\left(x,t\right),$$

που είναι γνωστή ως *νόμος του* $Fick$. Η θετική σταθερά αναλογίας D λέγεται *σταθερά διάχυσης* και έχει διαστάσεις $\left[D\right]=$μήκος²/χρόνος. Ο νόμος του $Fick$ περιγράφει με ακρίβεια τη συμπεριφορά πολλών φυσικών και βιολογικών συστημάτων.

Οι εξισώσεις (7) και (8) αποτελούν ένα ζεύγος ΜΔΕ για τους αγνώστους u και ϕ. Συνδυάζοντάς τις, εύκολα καταλήγουμε στη γραμμική ΜΔΕ δεύτερης τάξης

(9) $$u_t - Du_{xx} = 0,$$

για την άγνωστη πυκνότητα $u = u(x,t)$. Η εξίσωση (9) ονομάζεται *εξίσωση διάχυσης* και περιγράφει συστήματα στα οποία έχουμε διατήρηση και στα οποία η ροή καθορίζεται από το νόμο του $Fick$. Παρατηρούμε ότι ο νόμος του $Fick$ φαίνεται να υπονοεί ότι έχουμε διαρροή (διάχυση) του υλικού σε γειτονικές περιοχές εξαιτίας της κλίσης της συγκέντρωσης. Ο όρος Du_{xx} στην εξίσωση (9) λέγεται *όρος διάχυσης*.



Σχ. 4. Χρονικό στιγμιότυπο της κατανομής πυκνότητας $u(x,t)$ που περιγράφει το νόμο του $Fick$. Τα βέλη υποδηλώνουν την κατεύθυνση ροής, από υψηλότερες σε χαμηλότερες συγκεντρώσεις. Λέμε ότι η ροή ακολουθεί την κλίση.

Η σταθερά διάχυσης D ορίζει ένα χαρακτηριστικό χρόνο αναφοράς T για τη διαδικασία. Αν L είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος (π.χ. το μήκος του δοχείου), τότε η ποσότητα $T = \frac{L^2}{D}$ είναι η μοναδική σταθερά στη διαδικασία που έχει μονάδες χρόνου και μας δίνει ένα μέτρο του χρόνου που απαιτείται ώστε να εμφανιστούν ευδιάκριτες μεταβολές στη συγκέντρωση.

Παράδειγμα 3.2. (Η κλασική εξίσωση της θερμότητας) Έστω η u είναι πυκνότητα ενέργειας (δηλαδή μια ποσότητα με διαστάσεις ενέργειας ανά μονάδα όγκου). Τότε η εξίσωση της διάχυσης περιγράφει τη διάχυση της ενέργειας σε ένα μονοδιάστατο μέσο. Για παράδειγμα, σε ομογενές μέσο *πυκνότητας* ρ και *ειδικής θερμότητας* (υπό σταθερό όγκο) C, η πυκνότητα ενέργειας δίνεται από τη σχέση $u(x,t) = C\rho T(x,t)$, όπου T είναι η *θερμοκρασία*. Υπενθυμίζουμε ότι $[C] = \text{ενέργεια}/(\text{μάζα} \cdot \text{θερμοκρασία})$ και $[\rho] = \text{μάζα}/\text{όγκος}$. Στην περίπτωση αυτή ο νόμος διατήρησης μπορεί να γραφεί ως: $C\rho T_t + \phi_x = 0$. Για την αγωγή θερμότητας ο νόμος του $Fick$ είναι της μορφής

(10) $$\phi = -KT_x(x,t),$$

όπου K είναι ο *συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας* που μετριέται σε μονάδες ενέργειας ανά μονάδα μάζας ανά μονάδα χρόνου, ανά βαθμό θερμοκρασίας. Στο πλαίσιο της θεωρίας της αγωγής της θερμότητας ο νόμος του $Fick$ ονομάζεται *νόμος της θερμικής αγωγιμότητας του* $Fourier$. Επομένως, προκύπτει ότι η θερμοκρασία T ικανοποιεί τη ΜΔΕ $C\rho T_t - KT_{xx} = 0$, ή:

(11) $$T_t - kT_{xx} = 0,\ k = \frac{K}{C\rho}.$$

Η εξίσωση (11) λέγεται *εξίσωση της θερμότητας* και η σταθερά k λέγεται συντελεστής θερμικής διάχυσης. Επομένως ο συντελεστής θερμικής διάχυσης είναι το ανάλογο της σταθεράς διάχυσης σε προβλήματα ροής θερμότητας και η εξίσωση της θερμότητας είναι ακριβώς η εξίσωση διάχυσης. Εδώ υποθέσαμε ότι οι φυσικές παράμετροι C, K και ρ είναι σταθερές. Όμως οι ποσότητες αυτές θα ήταν δυνατό να εξαρτώνται και από τη θερμοκρασία T, οπότε η εξίσωση θα ήταν μη γραμμική.

Παράδειγμα 3.3. (Εξίσωση αντίδρασης – διάχυσης) Αν στο πρόβλημα υπάρχουν πηγές $(f \neq 0)$ και ο νόμος διατήρησης $u_t + \phi(x) = f(x,t,u)$ συνδυαστεί με το νόμο του $Fick$ (3.2), προκύπτει η εξίσωση $u_t - Du_{xx} = f(x,t,u)$, που ονομάζεται *εξίσωση αντίδρασης – διάχυσης*. Οι εξισώσεις αντίδρασης – διάχυσης μπορεί να μην είναι γραμμικές αν ο όρος πηγής f (ή όρος αντίδρασης) είναι μη γραμμικός ως προς u. Οι εξισώσεις αυτές παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον για τη μη γραμμική ανάλυση και για τις εφαρμογές, κυρίως σε προβλήματα ανάφλεξης και σε βιολογικά συστήματα.

Παράδειγμα 3.4. (Η εξίσωση του $Fisher$) Πολλές φορές κατά τη μελέτη προβλημάτων στοιχειώδους δυναμικής πληθυσμών γίνεται η παραδοχή ότι ο πληθυσμός διέπεται από το λογιστικό νόμο, ο οποίος μας λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής ενός πληθυσμού $u = u(t)$ δίνεται από τον τύπο $\frac{du}{dt} = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right)$, όπου $r > 0$ είναι ο *ρυθμός αύξησης* και $K > 0$ είναι η *φέρουσα ικανότητα.*

Υποθέτουμε ότι η u παριστάνει πυκνότητα πληθυσμού (δηλαδή πληθυσμό ανά μονάδα όγκου) και εξαρτάται και από μια χωρική μεταβλητή x εκτός από το χρόνο t (δηλαδή $u = u(x,t)$). Τότε, μπορούμε να διατυπώσουμε το νόμο διατήρησης $u_t + \phi_x = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right)$, όπου $f = f(u) = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right)$ είναι η υποτιθέμενη τοπική συνάρτηση πηγής και ϕ είναι η συνάρτηση ροής του πληθυσμού. Αν υποθέσουμε ότι για τη ροή ισχύει ο νόμος του $Fick$ έχουμε:

(12) $$u_t - Du_{xx} = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right).$$

Η εξίσωση αντίδρασης – διάχυσης (12) είναι γνωστή ως *εξίσωση του* $Fisher$.

2.4 Η εξίσωση της θερμότητας.

Θεωρούμε μία ράβδο μήκους l και σταθερής διατομής εμβαδού A. Από το παράδειγμα 3.2 έχουμε ότι η θερμοκρασία $u = u(x,t)$ (συμβολίζουμε με u την εξαρτημένη μεταβλητή αντί για T) πληροί τη μονοδιάστατη εξίσωση της θερμότητας

(13) $$u_t - ku_{xx} = 0,\ 0 < x < l,\ t > 0,$$

όπου k είναι ο συντελεστής θερμικής διάχυσης.

Μια βοηθητική συνθήκη για τη θερμοκρασία της ράβδου κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ λέγεται *αρχική συνθήκη* και έχει τη μορφή

(14) $$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < l,$$

όπου $f(x)$ είναι η δεδομένη αρχική κατανομή της θερμοκρασίας. Βοηθητικές συνθήκες που δίνονται στα άκρα $x = 0$ και $x = l$ λέγονται *συνοριακές συνθήκες*. Αν είναι γνωστή η θερμοκρασία στα άκρα της ράβδου, τότε οι συνοριακές συνθήκες γράφονται στη μορφή

(15) $$u(0,t) = g(t),\ u(l,t) = h(t),\ t > 0,$$

όπου g και h είναι δεδομένες συναρτήσεις. Είναι επίσης δυνατό να έχουμε και άλλου είδους συνοριακές συνθήκες. Για παράδειγμα, έστω ότι το ένα άκρο $x = 0$ της ράβδου είναι θερμικά μονωμένο έτσι ώστε να μην μπορεί να περνά η θερμότητα. Αυτό σημαίνει, από το νόμο του *Fourier*, ότι η θερμική ροή στο $x=0$ είναι μηδέν, ή:

(16) $$u_x(0,t)=0,\ t>0.$$

Η συνθήκη (16) ονομάζεται συνοριακή συνθήκη *μονωμένου άκρου*. Ένας άλλος τύπος συνοριακής συνθήκης δίνεται από το νόμο της ψύξης του Νεύτωνα $-Ku_x(0,t)=\alpha\left(u(0,t)-\psi(t)\right)$, $t>0$, που ορίζει ότι η ροή της θερμότητας είναι ανάλογη της διαφοράς της θερμοκρασίας στο άκρο της ράβδου και της θερμοκρασίας ψ του περιβάλλοντος.

Ανακεφαλαιώνοντας, με τον όρο πρόβλημα *αρχικών – συνοριακών τιμών* για την εξίσωση της αγωγής της θερμότητας, εννοούμε ένα πρόβλημα στο οποίο μας ζητείται να επιλύσουμε κάποια μορφή της εξίσωσης της θερμότητας υπό αρχικές και (πιθανώς και) συνοριακές συνθήκες.

Θεώρημα 4.1. *Το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών* $u_t-ku_{xx}=0$, $0<x<l$, $0<t<T$,

(17) $$u(x,0)=f(x),\ 0<x<l$$

$u(0,t)=g(t)$, $u(l,t)=h(t)$, $0<t<T$, *όπου* $f\in C[0,l]$ *και* $g,h\in C[0,T]$, *έχει μοναδική λύση* $u(x,t)$ *στο ορθογώνιο* $R: 0\le x\le l, 0\le t\le T$, *για κάθε* $T>0$.

Απόδειξη Θεωρήματος 4.1. (Μοναδικότητα της λύσης) Υποθέτουμε ότι η λύση δεν είναι μοναδική και ότι, για παράδειγμα, το πρόβλημα (17) έχει δύο διαφορετικές λύσεις $u_1(x,t)$ και $u_2(x,t)$. Τότε, η διαφορά τους $w(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ πρέπει να πληροί το πρόβλημα αρχικών – συνοριακών συνθηκών:

(18) $$w_t-kw_{xx}=0,\ 0<x<l,\ 0<t<T$$

(19) $$w(x,0)=0,\ 0<x<l$$

(20) $$w(0,t)=w(l,t)=0,\ 0<t<T.$$

Αν δείξουμε ότι $w(x,t)\equiv 0$ στο R, τότε $u_1(x,t)=u_2(x,t)$ στο R, που είναι άτοπο. Για το σκοπό αυτό ορίζουμε το ολοκλήρωμα της ενέργειας ως:

(21) $$E(t)=\int_0^l w^2(x,t)\,dx.$$

Προφανώς $E(t)\ge 0$ και $E(0)=0$. Επιπλέον,

$E'(t)=\int_0^l 2ww_t dx=2k\int_0^l ww_{xx}dx=2kww_x\,|_0^l-2k\int_0^l w_x^2 dx$, όπου πήραμε την τελευταία ισότητα ολοκληρώνοντας κατά μέρη. Λόγω της (20) ο συνοριακός όρος μηδενίζεται, οπότε: $E'(t)=-2k\int_0^l w_x^2(x,t)\,dx\le 0$. Επομένως η $E(t)$ είναι φθίνουσα και, λόγω των σχέσεων $E(t)\ge 0$ και $E(0)=0$, συμπεραίνουμε ότι $E(t)=0$. Συνεπώς, η ολοκληρωτέα συνάρτηση στο ολοκλήρωμα (21) είναι μηδέν ταυτοτικά για $0\le x\le l, 0\le t\le T$, αφού η w είναι συνεχής και ως προς τα δύο ορίσματά της. Άρα $w\equiv 0$ στο R και αποδείχτηκε το μέρος του θεωρήματος που αφορά τη μοναδικότητα.

Εκτός από τα ερωτήματα ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων, είναι επίσης σημαντική η διερεύνηση της συνεχούς εξάρτησης της λύσης από τα αρχικά και συνοριακά δεδομένα. Η ιδιότητα αυτή λέγεται *ευστάθεια*. Από φυσικής πλευράς είναι λογικό να αναμένεται ότι φυσικές μεταβολές στην αρχική θερμοκρασία ή στις θερμοκρασίες των άκρων δε θα πρέπει να προκαλέσουν μεγάλες μεταβολές στην κατανομή της θερμοκρασίας στο εσωτερικό της ράβδου. Το μαθηματικό μοντέλο θα πρέπει να είναι ανάλογα ευσταθές, δηλαδή να έχει την ιδιότητα ότι μικρές μεταβολές στα βοηθητικά δεδομένα θα πρέπει να οδηγούν σε μικρές μόνο μεταβολές της λύσης. Μια διαφορετική διατύπωση είναι ότι η λύση πρέπει να είναι ευσταθής σε μικρές διαταραχές των αρχικών ή συνοριακών δεδομένων.

Αν ένα δεδομένο πρόβλημα αρχικών – συνοριακών συνθηκών ικανοποιεί τις τρεις συνθήκες ((i) υπάρχει μία λύση, (ii) η λύση είναι μοναδική, (iii) η λύση είναι ευσταθής), τότε λέμε ότι το πρόβλημα *τίθεται καλώς* (ή είναι *καλά διατυπωμένο* ή είναι *καλά τοποθετημένο*).

Κεφάλαιο 3: Εξισώσεις ισορροπίας.

3.1 Η εξίσωση του Laplace.

Ο βασικός νόμος διάχυσης σε ένα χωρίο *V* δίνεται από την εξίσωση

(1) $$u_t + div\vec{\phi} = f(x,t,u),\ x \in V, t > 0,$$

όπου $\vec{\phi}$ είναι η διανυσματική συνάρτηση ροής και $x = (x_1, x_2, x_3)$ ένα σημείο του $\mathbb{R}^3$. Για να πάρουμε μια καταστατική εξίσωση, υποθέτουμε ότι ισχύει ο νόμος του *Fick* στις τρεις διαστάσεις, δηλαδή ότι $\vec{\phi} = -Dgradu$, όπου D είναι η σταθερά διάχυσης. Επομένως, η ροή είναι κατά την κατεύθυνση της αρνητικής κλίσης του u, που είναι η κατεύθυνση της πιο γρήγορης μεταβολής. Ανακαλώντας τη διανυσματική ταυτότητα $divgrad = \Delta$, όπου $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ είναι η *Λαπλασιανή*, μπορούμε να γράψουμε την τρισδιάστατη εξίσωση διάχυσης (1) ως:

(2) $$u_t - D\Delta u = f(x,t,u),\ x \in V, t > 0.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι στο χωρίο V δεν υπάρχουν πηγές (δηλαδή $f \equiv 0$). Τότε, μπορούμε να αναζητήσουμε *λύσεις ισορροπίας* (ή *μόνιμες λύσεις*) της (2), δηλαδή λύσεις $u = u(x)$ που εξαρτώνται μόνο από τη θέση x και όχι από το χρόνο. Τέτοιου τύπου λύσεις θα πρέπει να ικανοποιούν την *εξίσωση του* *Laplace*:

(3) $$\Delta u = 0,\ x \in V.$$

Αν υπάρχουν και πηγές που εξαρτώνται μόνο από τη θέση, δηλαδή $f = f(x)$, τότε οι λύσεις ισορροπίας ικανοποιούν την *εξίσωση του* *Poisson*:

(4) $$\Delta u = F(x),\ x \in V, \text{ όπου } F \equiv -\frac{f}{D}.$$

Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν ως όρια για μεγάλες τιμές του χρόνου (ή ασυμπτωτικά όρια) της εξίσωσης διάχυσης Ακόμη, η εξίσωση του *Laplace* είναι σημαντική στη μηχανική των ρευστών, καθώς και σε πολλούς άλλους τομείς των εφαρμογών. Οι λύσεις της εξίσωσης του *Laplace* λέγονται *αρμονικές συναρτήσεις*.

Εφοδιάζουμε την (3), ή την (4), με μια συνοριακή συνθήκη τύπου *Dirichlet*, δηλαδή του τύπου:

(5) $$u = g(x),\ x \in \partial V,$$

όπου η g είναι δεδομένη συνάρτηση, ή με μια συνθήκη για την κάθετη παράγωγο της u στο σύνορο. Η κατευθυνόμενη παράγωγος της u κατά τη διεύθυνση ενός μοναδιαίου διανύσματος $\vec{n}$ δίνεται από τη σχέση $\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{n} \cdot gradu$. Η κάθετη παράγωγος σε ένα σημείο του συνόρου ∂V είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος της u κατά την κατεύθυνση της εξωτερικής μοναδιαίας καθέτου στο σύνορο στο σημείο αυτό (αποτελεί ένα μέτρο του πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η u κατά την κατεύθυνση αυτή). Άρα, σύμφωνα με το νόμο του $Fick$, μετρά τη ροή διαμέσου του συνόρου στο σημείο αυτό. Μια τέτοια συνθήκη που καθορίζει τη ροή διαμέσου του συνόρου, δηλαδή μια συνθήκη της μορφής

(6)
$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x),\ x \in \partial V,$$

λέγεται συνοριακή συνθήκη $Neumann$. Αν στην (6) $g(x) = 0$, τότε λέμε ότι το σύνορο είναι *μονωμένο*. Σημαντικές επίσης είναι οι μικτές συνοριακές συνθήκες της μορφής $\alpha(x)u(x) + \beta(x)\frac{\partial u}{\partial n} = \gamma(x),\quad x \in \partial V$, όπου α, β και γ είναι δεδομένες συναρτήσεις. Το πρόβλημα της επίλυσης της εξίσωσης του $Laplace$ (ή του $Poisson$) με τη συνθήκη (5) ονομάζεται *πρόβλημα* $Dirichlet$, ενώ με τη συνθήκη (6) ονομάζεται *πρόβλημα* $Neumann$.

3.2 Ολοκληρωτικές ταυτότητες.

Υπάρχουν διάφορες σημαντικές διανυσματικές ολοκληρωτικές ταυτότητες, οι οποίες είναι χρήσιμες για την ανάλυση των ιδιοτήτων της εξίσωσης του $Laplace$. Στην πιο θεμελιώδη του μορφή, το θεώρημα της απόκλισης αναφέρεται σε παραγώγιση κατά κατεύθυνση μίας μόνο συνιστώσας, δηλαδή

(7)
$$\int_V \frac{\partial u}{\partial x_k} dx = \int_{\partial V} u n_k dS,$$

όπου η u είναι μια βαθμωτή συνάρτηση και n_k είναι η k- οστή συνιστώσα του εξωτερικού μοναδιαίου κάθετου διανύσματος $\vec{n}$. Από την (7) προκύπτει ο σημαντικός τύπος της *ολοκλήρωσης κατά μέρη*:

(8)
$$\int_V w \frac{\partial u}{\partial x_k} dx = -\int_V u \frac{\partial w}{\partial x_k} dx + \int_{\partial V} u w n_k dS.$$

Ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά μέρη (8) κάνει ό,τι ακριβώς και ο αντίστοιχος στη μία διάσταση: παίρνει παραγώγους από τον έναν όρο του ολοκληρώματος και τις εφαρμόζει στον άλλο και, κατά τη διαδικασία αυτή, δημιουργεί και ένα συνοριακό όρο. Από το θεώρημα της απόκλισης προκύπτουν οι ιδιαίτερα χρήσιμοι *τύποι του* $Green$:

(9)
$$\int_V \left(u\Delta u + gradu \cdot gradw\right) dx = \int_{\partial V} u \frac{\partial w}{\partial n} dS,$$

(10)
$$\int_V u\Delta w dx = \int_V w\Delta u dx + \int_{\partial V}\left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS.$$

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη (10) και ως τύπο ολοκλήρωσης κατά μέρη για τη Λαπλασιανή.

Γενικά, υποθέτουμε ότι όλες οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στο κλειστό χωρίο που αποτελείται από το V και το σύνορό του ∂V και έχουν τόσες συνεχείς μερικές παραγώγους στο V όσες εμφανίζονται στο συγκεκριμένο τύπο. Συνήθως, θα υποθέτουμε ότι το V είναι ένα φραγμένο χωρίο με «καλό» σύνορο (π.χ. λείο) και ότι το V δεν περιέχει κανένα μέρος του συνόρου του (δηλαδή ότι είναι ανοικτό χωρίο). Ορίζουμε την κλειστότητα του V, συμβολικά $\overline{V}$, ως $\overline{V} = V \bigcup \partial V$. Γράφοντας $u \in C^1\left(\overline{V}\right)$ θα εννοούμε ότι η u και οι πρώτες μερικές παράγωγοί της είναι συνεχείς στο V και μπορούν να επεκταθούν κατά συνεχή τρόπο στο σύνορο του V. Γράφοντας $u \in C^2\left(\overline{V}\right)$ εννοούμε ότι η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης στο V. Σε πολλά θεωρήματα θα απαιτείται $u \in C^1\left(\overline{V}\right) \bigcap C^2\left(V\right)$, δηλαδή η u να είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο V και η u και οι πρώτες παράγωγοί της να μπορούν να επεκταθούν συνεχώς στο $\overline{V}$.

Σε ορισμένες εφαρμογές είναι καλύτερα να εργαζόμαστε σε κυλινδρικές ή σε σφαιρικές συντεταγμένες. Οι συντεταγμένες αυτές ορίζονται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \qquad (r,\theta,z \text{ οι κυλινδρικές συντεταγμένες}) \\ z &= z \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} x &= r\sin\phi\cos\theta \\ y &= r\sin\phi\sin\theta \qquad (r,\phi,\theta \text{ οι σφαιρικές συντεταγμένες}) \\ z &= r\cos\phi, \end{aligned}$$

όπου θ είναι η πολική γωνία και ϕ είναι το αζιμούθιο. Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας μπορούμε να γράψουμε τη Λαπλασιανή σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες ως $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz}$ (κυλινδρικές), και

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u_r\right) + \frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi u_\phi\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}u_{\theta\theta} \text{ (σφαιρικές).}$$

3.3 Βασικές ιδιότητες.

Θεώρημα 3.1. *Έστω h συνεχής συνάρτηση στο ∂V και f συνεχής στο $\overline{V}$. Αν το πρόβλημα Dirichlet $\Delta u = f$, $x \in V$ και $u = h$, $x \in \partial V$, έχει λύση $u \in C^1\left(\overline{V}\right) \bigcap C^2\left(V\right)$, τότε αυτή είναι μοναδική.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο τέτοιες λύσεις, u_1 και u_2. Στην περίπτωση αυτή, $\Delta u_1 = 0$, $x \in V$ και $u_1 = h$, $x \in \partial V$, και $\Delta u_2 = 0$, $x \in V$ και $u_2 = h$, $x \in \partial V$. Άρα, η διαφορά του προβλήματος $w \equiv u_1 - u_2$ θα είναι λύση του ομογενούς προβλήματος: $\Delta w = 0$, $x \in V$ και $w = 0$, $x \in \partial V$. Τώρα, παίρνουμε $u = w$ στον τύπο του *Green* (9), οπότε έχουμε ότι: $\int_V gradw \cdot gradwdx = 0$. Συνεπώς, $gradw = 0$ και άρα $w =$ σταθ. Στο V. Επειδή όμως η w είναι συνεχής στο $\overline{V}$ και μηδέν στο σύνορο, θα πρέπει $u_1 - u_2 = w = 0$ στο $\overline{V}$, δηλαδή $u_1 = u_2$.

Θεώρημα 3.2. *Έστω g συνεχής στο ∂V και f συνεχής στο $\overline{V}$. Αν το πρόβλημα Neumann $\Delta u = f$, $x \in V$ και $\frac{\partial u}{\partial n} = g$, $x \in \partial V$, έχει μια λύση $u \in C^1\left(\overline{V}\right) \bigcap C^2\left(V\right)$, τότε αναγκαστικά:*

(11) $$\int_V f dx = \int_{\partial V} g dS.$$

Η απόδειξη είναι άμεση αν θέσουμε $w=1$ στον τύπο του *Green* (10). Η (11) έχει την ακόλουθη φυσική ερμηνεία: Σε μια μόνιμη κατάσταση (κατάσταση ισορροπίας) η ροή (π.χ. της θερμότητας) διαμέσου του συνόρου εξισορροπείται από το συνολικό ποσό θερμότητας που δημιουργείται στο χωρίο από τις πηγές.

Κεφάλαιο 4: Αναπτύγματα σε ιδιοσυναρτήσεις.

4.1 Εισαγωγή.

Δεδομένου ενός $n \times n$ πίνακα Α αναζητούμε αριθμούς λ για τους οποίους η εξίσωση

(1) $\mathrm{A}\vec{u} = \lambda \vec{u}$

να έχει μια μη τετριμμένη λύση $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. Οι τιμές του λ για τις οποίες υπάρχει μια τέτοια λύση $\vec{u}$ λέγονται ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες λύσεις $\vec{u}$ λέγονται ιδιοδιανύσματα. Οι ιδιοτιμές μπορεί να είναι είτε πραγματικοί είτε μιγαδικοί αριθμοί.

Από τη θεωρία πινάκων γνωρίζουμε ότι υπάρχουν n ιδιοτιμές (όχι αναγκαστικά διαφορετικές μεταξύ τους). Υποθέτουμε ότι ο πίνακας Α είναι πραγματικός και συμμετρικός ($\mathrm{A} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$, όπου με Τ συμβολίζουμε τον ανάστροφο ενός πίνακα) και έχει n πραγματικές, διαφορετικές ανά δύο ιδιοτιμές $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Σε κάθε ιδιοτιμή λ_i αντιστοιχεί ένα ιδιοδιάνυσμα $\vec{e}_i$ και το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Επιπλέον, επειδή ο πίνακας Α είναι συμμετρικός, τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα ανά δύο, δηλαδή $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ για $i \neq j$. Μπορούμε να εξασφαλίσουμε κάθε ιδιοδιάνυσμα να έχει μέτρο ένα, δηλαδή $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$, διαιρώντας το ιδιοδιάνυσμα με το μέτρο του. Επομένως, τα ιδιοδιανύσματα αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, οπότε κάθε διάνυσμα $\vec{u}$ του $\mathbb{R}^n$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{e}_i$, δηλαδή: $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{e}_i$. Τα c_i είναι οι συντεταγμένες του $\vec{u}$ ως προς αυτή την ορθοκανονική βάση. Το c_i δίνεται από τον τύπο $c_i = \vec{u} \cdot \vec{e}_i$, δηλαδή είναι η προβολή του $\vec{u}$ στο $i-$οστό ιδιοδιάνυσμα.

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα μας βοηθούν να λύσουμε άλλα προβλήματα που έχουν σχέση με τον πίνακα αυτό. Κάτι ανάλογο συμβαίνει και για μερικές διαφορικές εξισώσεις: οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις ενός διαφορικού τελεστή μας βοηθούν στην επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται με αυτόν τον τελεστή.

4.2 Το πρόβλημα των ιδιοτιμών για διαφορικούς τελεστές.

Έστω X το σύνολο των συναρτήσεων $\phi \in C^2[a,b]$ (δηλαδή των συναρτήσεων που είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο διάστημα $a \leq x \leq b$), που επιπλέον πληρούν τις συνοριακές συνθήκες $\phi(a) = \phi(b) = 0$, και έστω Α ένας διαφορικός τελεστής που δρα σε κάθε συνάρτηση ϕ του X και δίνει μια νέα συνάρτηση $\mathrm{A}\phi$. Για παράδειγμα, ο Α μπορεί να είναι ο τελεστής δευτέρας παραγώγου $\frac{d^2}{dx^2}$, οπότε θεωρούμε το πρόβλημα: $\frac{d^2}{dx^2}\phi = \lambda\phi, \quad a < x < b$, $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Το πρόβλημα αυτό είναι ένα παράδειγμα προβλήματος ιδιοτιμών διαφορικού τελεστή. Ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε τις τιμές του λ για τις οποίες έχει λύση. Γενικά αν Α είναι ένας διαφορικός τελεστής, η διαφορική εξίσωση

(2) $\quad \mathrm{A}\phi = \lambda\phi$

υπό ορισμένες συνοριακές συνθήκες για την ϕ, είναι ένα *πρόβλημα ιδιοτιμών διαφορικού τελεστή*. Ένας αριθμός λ θα λέγεται ιδιοτιμή του Α αν υπάρχει μη τετριμμένη λύση ϕ της (2) (που πληροί επίσης τις δεδομένες συνοριακές συνθήκες). Αυτή η συνάρτηση ϕ λέγεται *ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή* λ.

Πολύ συχνά, σε στοιχειώδεις διαφορικές εξισώσεις και στις εφαρμογές τους, εμφανίζεται μια κλάση διαφορικών τελεστών, οι λεγόμενοι τελεστές *Sturm – Liouville*. Ένας τελεστής *Sturm – Liouville* Α είναι ένας διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης του οποίου η δράση σε μια συνάρτηση ϕ ορίζεται ως: $\mathrm{A}\phi \equiv -\left(p(x)\phi'\right)' + q(x)\phi(x)$, όπου η παραγώγιση είναι ως προς x. Το πεδίο ορισμού του τελεστή Α θα είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $\phi = \phi(x)$ στον $C^2[a,b]$ που πληρούν τις γενικές συνοριακές συνθήκες $\alpha_1\phi(a) + \alpha_2\phi'(a) = 0$, $\beta_1\phi(b) + \beta_2\phi'(b) = 0$, όπου $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ και $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$, ώστε να αποκλειστούν τετριμμένες συνοριακές συνθήκες. Οι γνωστές συναρτήσεις p και q, καθώς και η παράγωγος p', είναι συνεχεία στο $[a,b]$ και υποθέτουμε ότι η p δε μηδενίζεται στο κλειστό διάστημα $[a,b]$. Τότε, το αντίστοιχο πρόβλημα, το λεγόμενο *κανονικό πρόβλημα Sturm – Liouville*, είναι το εξής:

(3) $\quad -\left(p(x)\phi'\right)' + q(x)\phi = \lambda\phi, \; a \le x \le b$

(4) $\quad \alpha_1\phi(a) + \alpha_2\phi'(a) = 0, \; \beta_1\phi(b) + \beta_2\phi'(b) = 0$.

Σε μερικές περιπτώσεις το κανονικό πρόβλημα *Sturm – Liouville* γράφεται στην αφηρημένη μορφή

(5) $\quad \mathrm{A}\phi = \lambda\phi$

όπου, θεωρούμε ότι οι συνοριακές συνθήκες συμπεριλαμβάνονται στο πεδίο ορισμού του Α. Ο Α είναι ένας *γραμμικός τελεστής*, αφού ισχύει ότι $\mathrm{A}(\phi + \psi) = \mathrm{A}\phi + \mathrm{A}\psi$ και $\mathrm{A}(c\phi) = c\mathrm{A}\phi$, όπου οι ϕ και ψ είναι συναρτήσεις και το c είναι σταθερά.

Συχνά είναι δυνατόν η συνάρτηση p να μηδενίζεται σε κάποιο σημείο του $[a,b]$ ή το $[a,b]$ να είναι άπειρο. Τότε, το πρόβλημα *Sturm – Liouville* λέγεται *μη κανονικό* ή *ιδιόμορφο.*

Για το κανονικό πρόβλημα *Sturm – Liouville* (4) - (5) είναι γνωστά πολλά αποτελέσματα. Για παράδειγμα, ο διαφορικός τελεστής Α έχει άπειρο πλήθος πραγματικών ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων. Στην περίπτωση πεπερασμένων διαστάσεων (στο αλγεβρικό πρόβλημα ιδιοτιμών) τα ιδιοδιανύσματα ενός συμμετρικού πίνακα αποτελούσαν βάση για το χώρο $\mathbb{R}^n$, με την έννοια ότι ήταν γραμμικά ανεξάρτητα και ότι κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ γραφόταν κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων. Αντίστοιχου τύπου αποτελέσματα ισχύουν και για τους τελεστές *Sturm – Liouville*. Κάθε αρκετά «καλή» συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων ενός προβλήματος *Sturm – Liouville*. Οι ιδιοσυναρτήσεις αποτελούν βάση ενός χώρου άπειρης διάστασης.

Ορισμός: *Αν* ϕ *και* ψ *είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο* $[a,b]$, *τότε ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο των* ϕ *και* ψ *τον πραγματικό αριθμό:* $(\phi,\psi)\equiv\int_a^b\phi(x)\psi(x)dx$.

Η *νόρμα* της ϕ ορίζεται ως $\|\phi\|:=\sqrt{(\phi,\phi)}$. Αν εφοδιάσουμε το χώρο συναρτήσεων $C^2[a,b]$ με τη νόρμα αυτή, τότε παίρνουμε ένα γραμμικό χώρο με νόρμα. Η νόρμα είναι ένα μέτρο του μεγέθους μιας συνάρτησης και το εσωτερικό γινόμενο είναι το ανάλογο στο χώρο των συναρτήσεων του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^n$. Κάθε συνάρτηση $\phi\neq 0$ μπορεί να μετατραπεί σε μια άλλη με νόρμα ένα, αρκεί να διαιρέσουμε δια της νόρμας της, δηλαδή η $\upsilon=\dfrac{\phi}{\|\phi\|}$ έχει $\|\upsilon\|=1$. Θα λέμε ότι οι συναρτήσεις ϕ και ψ είναι ορθογώνιες στο $[a,b]$ αν $(\phi,\psi)=0$. Ένα σύνολο που αποτελείται από ανά δύο ορθογώνιες συναρτήσεις που η καθεμιά έχει νόρμα θα λέγεται *ορθοκανονικό σύνολο*. Αν για μια συνάρτηση ϕ έχουμε ότι $\|\phi\|<\infty$, τότε θα λέμε ότι η ϕ είναι *τετραγωνικά ολοκληρώσιμη* στο $[a,b]$. Το σύνολο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a,b]$ συμβολίζεται με $L^2[a,b]$. Ο χώρος των συναρτήσεων $C^2[a,b]$ είναι υποσύνολο του $L^2[a,b]$. Για να αναπτύξουμε μια συνάρτηση σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων απαιτείται να έχουμε κάποια έννοια σύγκλισης. Θα λέμε ότι μια σειρά τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\phi_n(x)$ *συγκλίνει στην* $\phi(x)$ στον $L^2[a,b]$, όταν $\|\phi-\sum_{n=1}^{N}a_n\phi_n\|\to 0$, καθώς $N\to\infty$, που σημαίνει ότι: $\int_a^b\left(\phi(x)-\sum_{n=1}^{N}a_n\phi_n(x)\right)^2dx\to 0$, καθώς $N\to\infty$. Αυτός ο τύπος σύγκλισης διαφέρει από την ομοιόμορφη και από την κατά σημείο σύγκλιση. Η ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[a,b]$ εξασφαλίζει και την $L^2[a,b]$ και την κατά σημείο σύγκλιση. Αντιθέτως, η σύγκλιση στον $L^2[a,b]$ δεν εξασφαλίζει ούτε κατά σημείο ούτε ομοιόμορφη σύγκλιση.

Θεώρημα: *Για το κανονικό πρόβλημα* Sturm – Liouville *(3) – (4) ισχύουν τα εξής:*

(i) Υπάρχει άπειρο πλήθος ιδιοτιμών λ_n, $n=1,2,\ldots$, *οι οποίες είναι πραγματικές και τέτοιες ώστε* $\lim_{n\to\infty}|\lambda_n|=\infty$.

(ii) Οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνιες.

(iii) Το σύνολο των ορθοκανονικών ιδιοσυναρτήσεων $\phi_1,\phi_2,\phi_3,\ldots$ *είναι «πλήρες» υπό την έννοια ότι κάθε τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση* f *μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως*

(6) $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\phi_n(x),$$

όπου η σειρά συγκλίνει στην f *στον* $L^2[a,b]$ *και οι συντελεστές* f_n *δίνονται από τους τύπους:*

(7) $$f_n=(f,\phi_n),\ n=1,2,\ldots$$

Απόδειξη (β): Αν λ_1 και λ_2 είναι δύο διαφορετικές ιδιοτιμές και ϕ,ψ αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις, τότε θα ισχύει ότι:

$$-(p\phi')'+q\phi=\lambda_1\phi$$

$$-(p\psi')'+q\psi=\lambda_2\psi$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με ψ, τη δεύτερη με ϕ, αφαιρούμε κατά μέλη και ολοκληρώνουμε, οπότε καταλήγουμε στη σχέση: $\int_a^b \left(\phi\left(p\psi'\right)' - \psi\left(p\phi'\right)'\right)dx = \left(\lambda_1 - \lambda_2\right)\left(\phi,\psi\right)$. Ολοκληρώνουμε και τους δύο όρους στο αριστερό μέλος κατά μέρη και παίρνουμε: $p\left(\phi\psi' - \psi\phi'\right)\big|_a^b = \left(\lambda_1 - \lambda_2\right)\left(\phi,\psi\right)$. Όμως και οι δύο συναρτήσεις ϕ και ψ ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες (4) κι έτσι μετά από ορισμένες πράξεις δείχνουμε ότι ο συνοριακός όρος είναι μηδέν, οπότε έχουμε ότι $0 = \left(\lambda_1 - \lambda_2\right)\left(\phi,\psi\right)$. Επειδή οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές ανά δύο, θα έχουμε ως αποτέλεσμα την ορθογωνιότητα $\left(\phi,\psi\right) = 0$.

Η σειρά στη σχέση (6) *ονομάζεται γενικευμένη σειρά* ***Fourier*** της f και τα f_n που δίνονται από τους τύπους (7) λέγονται *συντελεστές* ***Fourier***. Αν η f είναι κατά τμήματα λεία (δηλαδή είναι κατά τμήματα συνεχής με κατά τμήματα συνεχή παράγωγο) τότε η (6) συγκλίνει κατά σημείο στην $f\left(x\right)$, αν η f είναι συνεχής στο x, ενώ συγκλίνει κατά σημείο στη μέση τιμή των ορίων από αριστερά και από δεξιά της f στο x (δηλαδή στο $\frac{1}{2}\left[f\left(x^+\right) + f\left(x^-\right)\right]$) αν η f δεν είναι συνεχής στο x. Σε μια περιοχή ενός σημείου ασυνέχειας της f μπορεί να μην είναι δυνατό να προσεγγίσουμε την f ικανοποιητικά με ένα πεπερασμένο πλήθος όρων της σειράς. Το φαινόμενο αυτό λέγεται φαινόμενο του ***Gibbs***.

4.3 Η μέθοδος του Fourier.

Η βασική μέθοδος κατασκευής λύσεων ΜΔΕ σε πεπερασμένα χωρία ως προς τις χωρικές μεταβλητές ονομάζεται *μέθοδος του* ***Fourier*** ή *μέθοδος αναπτυγμάτων σε ιδιοσυναρτήσεις*. Συχνά τη συναντάμε και με την ονομασία *χωρισμός των μεταβλητών*. Η φιλοσοφία της μεθόδου είναι ότι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών συνδέεται με ένα πρόβλημα ***Sturm – Liouville*** ιδιοσυναρτήσεων και μετά από σειρά πράξεων καταλήγει στη λύση του προβλήματος, της οποίας ο πρώτος όρος καλείται *λύση ελεύθερου χώρου* και ο δεύτερος *ειδική λύση* ή *λύση του μη ομογενούς συστήματος*.

Παράδειγμα 3.1. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών – συνοριακών τιμών

(8) $u_t = u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$,

(9) $u\left(0,t\right) = 0$, $u\left(l,t\right) = 0$, $t > 0$,

(10) $u\left(x,0\right) = f\left(x\right)$, $0 < x < l$,

που περιγράφει τη ροή θερμότητας σε μια ράβδο μήκους l, τα άκρα της οποίας διατηρούνται σε μηδενική θερμοκρασία. Η συνάρτηση f ορίζει την αρχική κατανομή θερμοκρασίας. Λόγω αλλαγής μεταβλητών (που υποθέτουμε ότι έχει γίνει), μπορούμε να πάρουμε τη σταθερά διάχυσης k ίση με τη μονάδα. Εδώ το αντίστοιχο πρόβλημα ***Sturm – Liouville*** είναι το

(11) $\phi'' = \lambda\phi$, $0 < x < l$, $\phi\left(0\right) = \phi\left(l\right) = 0$.

Οι ιδιοτιμές και οι ορθοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις είναι: $\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}$, $\phi_n = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \ldots$ Η λύση του προβλήματος δίνεται από τη σειρά:

$u(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l f(\xi)\sin\frac{n\pi x}{l}d\xi\right)e^{-\left(\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}\right)}\sin\frac{n\pi x}{l}$. Υποθέτοντας ότι επιτρέπεται εναλλαγή αθροίσματος και ολοκληρώματος, μπορούμε να γράψουμε τη λύση στη μορφή: $u(x,t)=\int_0^l\left(\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}\right)}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)f(\xi)d\xi$.

Η μέθοδος *Fourier* εφαρμόζεται εξίσου καλά και σε ΜΔΕ της μορφής $u_{tt}=-\left(p(x)u_x\right)_x+q(x)u+F(x,t)$, όπου εδώ στο αριστερό μέλος υπάρχει μια παράγωγος δεύτερης τάξης ως προς το χρόνο.

Κεφάλαιο 5: Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί.

5.1 Μετασχηματισμοί Laplace.

Οι μετασχηματισμοί *Laplace* συνήθως συναντώνται σε εισαγωγικά μαθήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, ως τεχνική επίλυσης γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές.

Αν $u=u(t)$ είναι μια κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση για $t\geq 0$, η οποία δεν αυξάνεται πολύ γρήγορα, τότε ο μετασχηματισμός *Laplace* της u ορίζεται ως:

(1) $$(Lu)(s)\equiv U(s)=\int_0^{\infty}u(t)e^{-st}dt.$$

Ο μετασχηματισμός *Laplace* είναι παράδειγμα ολοκληρωτικού μετασχηματισμού. Απεικονίζει μια δεδομένη συνάρτηση $u(t)$ που ορίζεται στο πεδίο του χρόνου, σε μια νέα συνάρτηση $U(s)$ στο επονομαζόμενο πεδίο του μετασχηματισμού. Η U και η s λέγονται μεταβλητές του μετασχηματισμού. Ο μετασχηματισμός είναι γραμμικός αφού $L(c_1u_1+c_2u_2)=c_1Lu_1+c_2Lu_2$ όπου c_1,c_2 σταθερές. Αν ο μετασχηματισμός $U(s)$ είναι γνωστός, η $u(t)$ λέγεται *αντίστροφος μετασχηματισμός* της $U(s)$ και συμβολικά γράφουμε $L^{-1}U=u$.

Η σημασία του μετασχηματισμού *Laplace*, όπως και άλλων μετασχηματισμών, έγκειται στο γεγονός ότι μετατρέπει παραγωγίσεις σε πολλαπλασιασμούς. Πράγματι, έχουμε:

(2) $$(Lu')(s)=sU(s)-u(0)$$

(3) $$(Lu'')(s)=s^2U(s)-su(0)-u'(0)$$

Οι τύποι (2) και (3) αποδεικνύονται άμεσα με παραγοντική ολοκλήρωση.

Παράδειγμα 5.1. Να χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός *Laplace* για την επίλυση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών – συνοριακών τιμών για την εξίσωση διάχυσης. Έστω $u=u(x,t)$ η συγκέντρωση ενός χημικού ρυπαντή και έστω $x>0$ μια ημιάπειρη περιοχή που αρχικά δεν περιέχει ρυπαντή. Για χρόνους $t>0$ επιβάλλουμε σταθερή μοναδιαία συγκέντρωση στο σύνορο $x=0$ και θέλουμε να δούμε πώς διαχέεται ο ρυπαντής στην εν λόγω περιοχή. Υποθέτοντας ότι η σταθερά διάχυσης είναι μοναδιαία (με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών), παίρνουμε το μαθηματικό μοντέλο:

$$u_t - u_{xx} = 0\,,\ x>0\,,\ t>0\,,$$
$$u(x,0)=0\,,\ x>0\,,$$
$$u(0,t)=1,\ t>0\,,$$
$$u(x,t)\ \text{φραγμένη.}$$

Αν πάρουμε μετασχηματισμό *Laplace*, η μερική διαφορική εξίσωση δίνει: $sU(x,s)-U_{xx}(x,s)=0$. Αυτή είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση με το x ως ανεξάρτητη μεταβλητή και έχει λύση: $U(x,s)=a(s)e^{-\sqrt{s}x}+b(s)e^{\sqrt{s}x}$. Επειδή αναζητούμε φραγμένες λύσεις πρέπει να θέσουμε $b(s)=0$. Τότε: $U(x,s)=a(s)e^{-\sqrt{s}x}$. Μετασχηματίζοντας κατά *Laplace* τη συνοριακή συνθήκη, παίρνουμε $U(0,s)=\frac{1}{s}$. (έχουμε χρησιμοποιήσει ότι $L(1)=\frac{1}{s}$). Συνεπώς, $a(s)=\frac{1}{s}$ και η λύση στο πεδίο μετασχηματισμού είναι: $U(x,s)=\frac{1}{s}e^{-\sqrt{s}x}$.

Θεώρημα 5.1. *Έστω u και υ κατά τμήματα συνεχείς για $t\geq 0$ και εκθετικής τάξης. Τότε: $L(u*\upsilon)(s)=U(s)V(s)$, όπου $(u*\upsilon)(t)\equiv\int_0^t u(t-y)\upsilon(y)\,dy$ Είναι η συνέλιξη των u και υ και $U=Lu, V=L\upsilon$.*

Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός *Laplace* είναι προσθετικός αλλά όχι πολλαπλασιαστικός. Δηλαδή, ο μετασχηματισμός *Laplace* ενός γινομένου δεν είναι γινόμενο των μετασχηματισμών *Laplace*. Το θεώρημα συνέλιξης μας λέει ποιας συνάρτησης το μετασχηματισμό πρέπει να πάρουμε (της συνέλιξης) ώστε το αποτέλεσμα να είναι το γινόμενο των μετασχηματισμών *Laplace* δύο συναρτήσεων.

Μετασχηματισμοί Laplace:

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s},\quad s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\quad s>a$
t^n, n: θετικός ακέραιος	$\frac{n!}{s^{n+1}},\quad s>0$
$\sin at$ και $\cos at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$ και $\frac{s}{s^2+a^2},\quad s>0$
$\sinh at$ και $\cosh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$ και $\frac{s}{s^2-a^2},\quad s>\lvert a\rvert$
$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\quad s>a$
$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2},\quad s>a$
$t^n\exp(at)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\quad s>a$
$H(t-a)$	$\frac{1}{s}\exp(-as)$
$\delta(t-a)$	$\exp(-as)$
$H(t-a)f(t-a)$	$F(s)\exp(-as)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$\operatorname{erf}\sqrt{t}$	$\frac{1}{s}\frac{1}{\sqrt{1+s}},\quad s>0$
$\frac{e^{-(a^2/4t)}}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}\exp(-a\sqrt{s}),\quad s>0$
$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{s}\exp(-a\sqrt{s}),\quad s>0$
$\frac{ae^{-(a^2/4t)}}{2t^{3/2}}$	$\sqrt{\pi}\exp(-a\sqrt{s}),\quad s>0$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$

5.2 Μετασχηματισμοί Fourier.

Ο μετασχηματισμός *Fourier* είναι ένας άλλος ολοκληρωτικός μετασχηματισμός με ιδιότητες ανάλογες με εκείνες του μετασχηματισμού *Laplace* κατά το ότι οι παράγωγοι γίνονται πολλαπλασιασμοί στο πεδίο μετασχηματισμού. Έτσι, ο μετασχηματισμός *Fourier*, όπως ο μετασχηματισμός *Laplace*, είναι χρήσιμος ως υπολογιστικό εργαλείο για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων.

Ο μετασχηματισμός *Fourier* μιας συνάρτησης $u = u(x), x \in \mathbb{R}^1$, ορίζεται από την εξίσωση:

(4) $$(Fu)(\xi) \equiv \hat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{i\xi x} dx .$$

Αν η u είναι απολύτως ολοκληρώσιμη (δηλαδή $\int_{-\infty}^{\infty} |u|\, dx < \infty$), τότε είναι εμφανές ότι υπάρχει ο $\hat{u}$.

Ορισμός: *Έστω $f(\varepsilon)$ και $g(\varepsilon)$ συναρτήσεις ορισμένες σε μια περιοχή του $\varepsilon = 0$ (η οποία μπορεί να μην περιέχει το 0). Θα γράφουμε:*

(5) $$f(\varepsilon) = o\big(g(\varepsilon)\big) \text{ καθώς } \varepsilon \to 0$$

αν $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left| \dfrac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \right| = 0$ *και θα γράφουμε*

(6) $$f(\varepsilon) = O\big(g(\varepsilon)\big) \text{ καθώς } \varepsilon \to 0$$

αν υπάρχει θετική σταθερά M τέτοια ώστε $|f(\varepsilon)| \le M |g(\varepsilon)|$ για κάθε ε σε μια περιοχή του μηδενός (η οποία δεν περιέχει κατ' ανάγκη το μηδέν).

Το όριο $\varepsilon \to 0$ μπορεί να αντικατασταθεί από ένα πλευρικό όριο ή από το $\varepsilon \to \varepsilon_0$, όπου ε_0 είναι οποιοσδήποτε πεπερασμένος αριθμός ή το $\pm\infty$, αρκεί φυσικά τα πεδία ορισμού των f και g να ορίζονται κατάλληλα. Αν ισχύει η (6), θα λέμε ότι η f είναι της τάξης *όμικρον μικρό* του g, καθώς $\varepsilon \to 0$, και αν ισχύει η (7) θα λέμε ότι η f είναι της τάξης *όμικρον κεφαλαίο* του g καθώς, $\varepsilon \to 0$.

Αν συμβολίσουμε με C^∞ το σύνολο των συναρτήσεων που έχουν συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης στο $\mathbb{R}^1$, τότε χρησιμοποιώντας το συμβολισμό τάξης μεγέθους «όμικρον κεφαλαίο», έχουμε: $S = \left\{ u \in C^\infty : \left| \dfrac{d^k u}{dxk} \right| = O\left(\dfrac{1}{|x|^N} \right) \text{ καθώς } |x| \to \infty,\ k = 0,1,2,\dots, \text{ για κάθε ακέραιο N } \right\}$. Το σύνολο S λέγεται κλάση του *Schwartz*. Μπορεί να δειχθεί ότι αν $u \in S$, τότε $\hat{u} \in S$.

Μια βασική ιδιότητα του μετασχηματισμού *Fourier* είναι ότι

(7) $$\left(Fu^k\right)(\xi) = (-i\xi)^k \hat{u}(\xi),\ u \in S ,$$

που επιβεβαιώνει το αρχικό μας σχόλιο ότι οι παράγωγοι μετατρέπονται σε πολλαπλασιασμούς (επί έναν παράγοντα $-(i\xi)^k$). Μια από τις καλές ιδιότητες του μετασχηματισμού *Fourier* είναι η απλή μορφή του τύπου αντιστροφής ή αντίστροφου μετασχηματισμού:

(8) $$\left(F^{-1}\hat{u}\right)(x) \equiv u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi .$$

Θεώρημα 5.2: *Αν* $u \in S$, *τότε* $\hat{u} \in S$ *και* $F\left(F^{-1}\hat{u}\right) = \hat{u},\ F^{-1}(Fu) = u$.

Για τους μετασχηματισμούς *Fourier* ισχύει και μια συνελικτική σχέση. Αν $u, \upsilon \in S$, ορίζουμε τη συνέλιξή τους, που ανήκει στην κλάση S , ως: $(u * \upsilon)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x-y)\upsilon(y)dy$. Τότε έχουμε το ακόλουθο θεώρημα συνέλιξης:

Θεώρημα 5.3: *Αν* $u \in S$, *τότε*: $F(u * \upsilon)(\xi) = \hat{u}(\xi)\hat{\upsilon}(\xi)$.

Απόδειξη: Προκύπτει από την εναλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης στις ακόλουθες ισότητες:

$$F(u * \upsilon) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} u(x-y)\upsilon(y)dy\right)e^{i\xi x}\partial x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x-y)\upsilon(y)e^{i\xi x}dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(r)\upsilon(y)e^{i\xi r}e^{i\xi y}drdy = \int_{-\infty}^{\infty} u(r)e^{i\xi r}dr\int_{-\infty}^{\infty} \upsilon(y)e^{i\xi y}dy = \hat{u}(\xi)\hat{\upsilon}(\xi).$$

Από το Θεώρημα 5.2 έπεται άμεσα ότι $(u * \upsilon)(x) = F^{-1}\left(\hat{u}(\xi)\hat{\upsilon}(\xi)\right)$.

Μια στρατηγική κατά την εφαρμογή των μεθόδων μετασχηματισμού για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων είναι η φορμαλιστική, να θεωρούμε δηλαδή ότι ισχύουν όλες οι αναγκαίες υποθέσεις έτσι ώστε να πάρουμε κάποιο αποτέλεσμα (π.χ. να θεωρούμε ότι όλα τα δεδομένα μας ανήκουν στην κλάση S). Όταν βρεθεί μια λύση, επιχειρεί κανείς να επιβεβαιώσει ότι πρόκειται πράγματι για λύση του προβλήματος. Συχνά, μπορεί να αποδειχτεί ότι η λύση που βρέθηκε υπάρχει και υπό ασθενέστερες συνθήκες από τις απαιτούμενες για την εφαρμογή της μεθόδου του μετασχηματισμού.

Παράδειγμα: Έστω $f \in S$. Να προσδιοριστεί $u \in S$ έτσι ώστε $u'' - u = f(x),\ x \in \mathbb{R}^1$. Μετασχηματίζοντας τη διαφορική εξίσωση, παίρνουμε $(-i\xi)^2\hat{u} - \hat{u} = \hat{f}$ ή $\hat{u}(\xi) = -\frac{1}{1+\xi^2}\hat{f}(\xi)$.
Στο πεδίο μετασχηματισμού, η λύση είναι γινόμενο μετασχηματισμών και έτσι εφαρμόζουμε το θεώρημα συνέλιξης. Έχουμε:
$F\left(\frac{1}{2}e^{-|x|}\right) = \frac{1}{1+\xi^2}$. Συνεπώς, $u(x) = -\frac{1}{2}e^{-|x|} * f(x) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}f(y)dy$.

Η γενική στρατηγική σε αυτό το παράδειγμα ήταν να εργαστούμε στην κλάση του *Schwartz* . Η λύση που βρήκαμε υπάρχει, αν υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις μας πληρούν λιγότερο περιοριστικές συνθήκες.

Θεώρημα 5.4: *Ισχύει ότι*: $\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$ (*σχέση του Plancherel*).

Απόδειξη: Από το θεώρημα συνέλιξης έχουμε $u * \upsilon = F^{-1}(\hat{u}\hat{\upsilon})$, ή:

$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\upsilon(y-x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(\xi)\hat{\upsilon}(\xi)e^{-i\xi y}d\xi$. Θέτοντας $y = 0$, παίρνουμε:

(9) $$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\upsilon(-x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(\xi)\hat{\upsilon}(\xi)d\xi .$$

Αν θέσουμε $\upsilon(-x)=\overline{u(x)}$, τότε το αριστερό μέλος της (5.10) γίνεται $\int_{-\infty}^{\infty}\left|u(x)\right|^2$. Όμως: $\hat{\upsilon}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\upsilon(x)e^{i\xi x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\upsilon(-x)e^{-i\xi x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{u(x)}e^{-i\xi x}dx=\overline{\int_{-\infty}^{\infty}u(x)e^{i\xi x}dx}=\overline{\hat{u}(\xi)}$. Συνεπώς, το δεξιό μέλος της (9) είναι $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi$, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη.

Μέρος ΙΙ: Κυματικά φαινόμενα σε συνεχή μέσα.

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

Δύο θεμελιώδεις φυσικές διεργασίες είναι η διάχυση και η κυματική διάδοση. Στο παρόν κεφάλαιο θα διερευνήσουμε κυματικά φαινόμενα και θα διατυπώσουμε εξισώσεις που περιγράφουν τη διάδοση κυμάτων, αρχικά ως απλά μαθηματικά μοντέλα και, κατόπιν, στη μηχανική των συνεχών μέσων. Οι εξισώσεις εξέλιξης που διέπουν τα κυματικά φαινόμενα είναι υπερβολικές και διαφέρουν ουσιαστικά από τις παραβολικές εξισώσεις της διάχυσης και από τις ελλειπτικές εξισώσεις των καταστάσεων ισορροπίας.

Κεφάλαιο 2: Κυματική διάδοση

2.1 Κύματα.

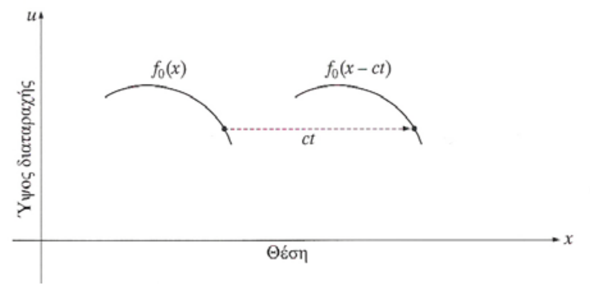
Με τη λέξη *κύμα* εννοούμε ένα αναγνωρίσιμο σήμα ή διαταραχή, που διαδίδεται με την πάροδο του χρόνου σε ένα μέσο, μεταφέροντας ενέργεια. Μερικά παραδείγματα γνωστά σε όλους μας είναι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, τα κύματα επιφανείας στο νερό, τα ηχητικά κύματα, καθώς και τα ελαστικά κύματα στα στερεά που δημιουργούνται, π.χ., σε ένα σεισμό. Ένα κύμα δεν μεταφέρει αναγκαστικά ύλη. Αυτό που διαδίδεται είναι η διαταραχή, η οποία μεταφέρει ενέργεια.

Ένα απλό μαθηματικό μοντέλο κύματος είναι η συνάρτηση

(1) $$u(x,t) = f(x-ct),$$

η οποία παριστάνει ένα *τρέχον κύμα* που κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα c, διατηρώντας το σχήμα του. Η μεταβλητή x παριστάνει τη θέση στην ευθεία, η t το χρόνο και η u την ένταση της διαταραχής. Όταν $t=0$, το σχήμα της διαταραχής είναι $u=f(x)$. Σε $t>0$ μονάδες χρόνου, η διαταραχή έχει κινηθεί προς τα δεξιά κατά ct μονάδες μήκους (Σχ. 1). Είναι ιδιαίτερα σημαντικό το γεγονός ότι το κύμα, το οποίο περιγράφει η (1), κινείται χωρίς να παραμορφώνεται, δηλαδή διατηρώντας το σχήμα του. Την ιδιότητα αυτή δεν την έχουν όλα τα κύματα. Είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα των γραμμικών κυμάτων, δηλαδή των μορφών κυμάτων που είναι λύσεις γραμμικών Μ.Δ.Ε. Αντίθετα, κύματα που, π.χ., αλλάζουν σχήμα και «σπάζουν», χαρακτηρίζουν μη γραμμικά φαινόμενα. Για να βρούμε μια Μ.Δ.Ε. της οποίας η λύση δίνεται από κάποια συνάρτηση της μορφής (1), υπολογίζουμε τις παραγώγους u_t και u_x και έχουμε: $u_t = -cf'(x-ct)$, $u_x = f'(x-ct)$. Συνεπώς:

(2) $$u_t + cu_x = 0$$



Σχ. 1. Τρέχον κύμα που κινείται προς τα δεξιά.

Η εξίσωση (2) είναι μια γραμμική Μ.Δ.Ε. πρώτης τάξης, η οποία αποτελεί την απλούστερη κυματική εξίσωση. Λέγεται *εξίσωση μεταφοράς* και η γενική λύση της είναι η (1), όπου f αυθαίρετη συνάρτηση. Η ονομασία της προέρχεται από το γεγονός ότι η (2) περιγράφει, π.χ., τι θα συμβεί αν μια υγρή χρωστική ουσία εισαχθεί σε ένα ρεύμα νερού που ρέει με ταχύτητα c:

Το χρωματισμένο υλικό θα μεταφερθεί κατά την κατεύθυνση της ροής χωρίς να παραμορφωθεί. Αντίστοιχα, ένα τρέχον κύμα της μορφής $u = f(x+ct)$ κινείται προς τα αριστερά και αποτελεί λύση της Μ.Δ.Ε. $u_t - cu_x = 0$.

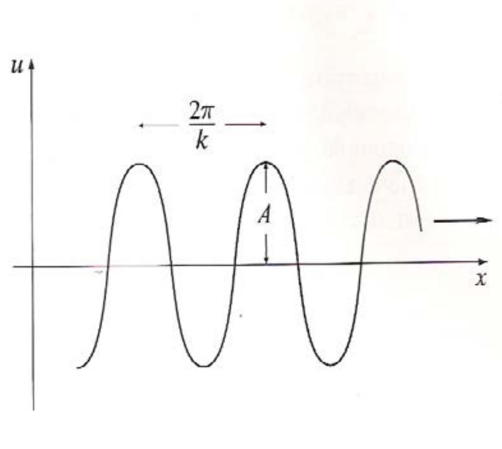
Άλλα κύματα που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε πολλές εφαρμογές είναι τα περιοδικά ή ημιτονοειδή κύματα. Είναι τρέχοντα κύματα που παριστάνονται από συναρτήσεις της μορφής

(3) $$u = \mathrm{A}\cos(kx - \omega t)$$

(Σχ. 2). Ο θετικός αριθμός A είναι το *πλάτος* του κύματος, ο k είναι ο *κυματαριθμός* (δηλαδή το πλήθος των ταλαντώσεων που παρατηρούμε ανά 2π μονάδες μήκους σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t) και ω είναι η *κυκλική συχνότητα* (το πλήθος των ταλαντώσεων που παρατηρούμε ανά 2π μονάδες χρόνου σε κάποια θέση x). Ο αριθμός $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ είναι το *μήκος κύματος* και ο $P = \frac{2\pi}{\omega}$ είναι η (*χρονική*) *περίοδος*. Το μήκος κύματος μετρά την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών του κύματος, ενώ η περίοδος είναι το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να παρατηρήσουμε, σε κάποια σταθερή θέση x, να επαναλαμβάνεται η ίδια τιμή της u. Αν γράψουμε την (3) ως $u = \mathrm{A}\cos k\left(x - \frac{\omega}{k}t\right)$, παρατηρούμε ότι η (3) παριστάνει ένα τρέχον κύμα που κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα $c = \frac{\omega}{k}$. Ο αριθμός αυτός λέγεται *ταχύτητα φάσης* και παριστάνει την ταχύτητα με την οποία θα πρέπει να κινείται ένας παρατηρητής για να παραμένει πάντα στο ίδιο σημείο σχετικά με το κύμα. Στους υπολογισμούς χρησιμοποιείται συχνά, αντί της (3), η μιγαδική εκθετική μορφή

(4) $$u = e^{i(kx - \omega t)}.$$

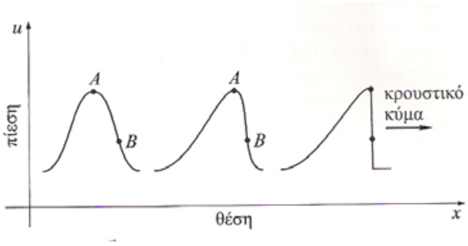
Οι υπολογισμοί παραγώγων είναι ευκολότεροι αν έχουμε τη μορφή αυτή: κάνοντας χρήση του τύπου του *Euler* $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, μπορούμε, παίρνοντας πραγματικά ή φανταστικά μέρη, να ανακτήσουμε πραγματικές λύσεις. Κύματα της μορφής (3) (ή (4)) είναι και πάλι χαρακτηριστικά γραμμικών φαινομένων και γραμμικών εξισώσεων.



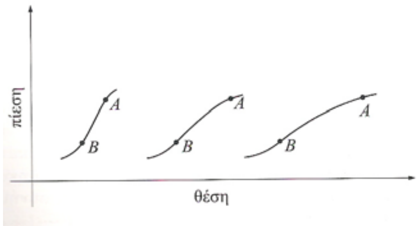
Σχ. 2. Περιοδικό κύμα.

Δεν είναι βέβαια αληθές ότι όλα τα κύματα διαδίδονται έτσι ώστε η μορφή τους να παραμένει αναλλοίωτη: τα κύματα στην επιφάνεια της θάλασσας είναι το προφανές αντιπαράδειγμα. Λιγότερο γνωστά, πιθανώς, αλλά εξίσου κοινά στη φύση είναι τα κύματα τάσης ή τα κύματα πίεσης που διαδίδονται στα στερεά ή τα αέρια, αντίστοιχα. Ένα κύμα τάσης που διαδίδεται σε ένα μέσο θα παραμορφωθεί σταδιακά και το μέτωπό του θα τείνει να γίνει κατακόρυφο μέχρις ότου το κύμα τελικά γίνει μια ασυνεχής διαταραχή, ένα «κρουστικό (ωστικό) κύμα».

Ο ίδιος μηχανισμός που προκαλεί τη δημιουργία κρουστικών κυμάτων, δηλαδή το γεγονός ότι διαταραχές με υψηλότερη πίεση διαδίδονται με μεγαλύτερη ταχύτητα, προκαλεί και τη δημιουργία των κυμάτων *αραίωσης* ή *εκτόνωσης*, τα οποία ελαττώνουν την πίεση.



Σχ. 3. Παραμόρφωση κύματος και δημιουργία κρουστικού κύματος.



Σχ. 4. Στιγμιότυπα κύματος εκτόνωσης.

Υπάρχει και ένα τρίτο κυματικό φαινόμενο, σημαντικό για ορισμένα φυσικά προβλήματα, συγκεκριμένα το φαινόμενο της *διασποράς* (ή *διασκεδασμού*). Σε αυτόν τον τύπο κύματος η ταχύτητα διάδοσης εξαρτάται από το μήκος κύματος της διαδιδόμενης διαταραχής. Έτσι, για παράδειγμα, κύματα μεγάλου μήκους διαδίδονται γρηγορότερα από κύματα με μικρότερο μήκος. Ένας παρατηρητής, λοιπόν, σε μια θέση x_0, θα δει ένα διαφορετικό κυματικό φαινόμενο να εξελίσσεται στο χρόνο από ό,τι ένας παρατηρητής σε μια διαφορετική θέση x_1. Η διάδοση κυμάτων με διασπορά περιγράφεται από γραμμικές και από μη γραμμικές εξισώσεις.

2.2 Γραμμικά κύματα.

Έστω η *εξίσωση μεταφοράς*

(5) $$u_t + cu_x = 0,\ x \in \mathbb{R}^1,\ t > 0,$$

της οποίας η γενική λύση είναι ένα τρέχον κύμα που κινείται προς τα δεξιά

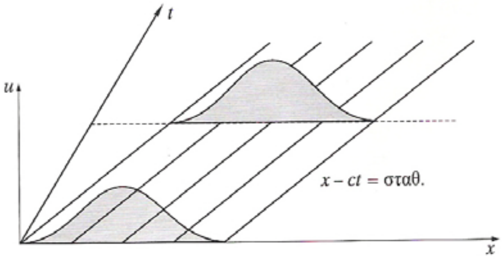
(6) $$u = f(x - ct)$$

με σταθερή ταχύτητα c. Η συνάρτηση f είναι αυθαίρετη. Αν επιβάλουμε την αρχική συνθήκη

(7) $$u(x,0) = \phi(x),\ x \in \mathbb{R}^1,$$

τότε έχουμε $f(x) = \phi(x)$ και έτσι η λύση προβλήματος αρχικών τιμών (5) και (7) είναι η:

(8) $$u(x,t) = \phi(x - ct).$$



Σχ. 5. Λύση της $u_t + cu_x = 0, c > 0$.

Οι ευθείες $x - ct =$ σταθ. Παίζουν ένα ιδιάζοντα ρόλο στο πρόβλημα. Κατά μήκος αυτών των γραμμών η αρχική συνθήκη διαδίδεται με σταθερή τιμή. Μπορούμε να τις θεωρήσουμε ως γραμμές στο επίπεδο x,t κατά μήκος των οποίων διαδίδονται σήματα (Σχ. 5). Επιπλέον, κατά μήκος αυτών των γραμμών η μερική διαφορική εξίσωση (5) ανάγεται στη συνήθη διαφορική εξίσωση $\dfrac{du}{dt} = 0$.

Δηλαδή, αν C είναι η καμπύλη $x = ct + k$ για κάποια σταθερά k, τότε η κατά κατεύθυνση παράγωγος της u στην κατεύθυνση της εφαπτομένης της καμπύλης δίνεται από τη σχέση $\frac{du}{dt}(x(t),t) = u_x(x(t),t)\frac{dx}{dt} + u_t(x(t),t) = u_x(x(t),t)c + u_t(x(t),t)$, δηλαδή το αριστερό μέλος της (5) υπολογισμένο στο σημείο $(x(t),t)$ της C. Η οικογένεια των ευθειών $x - ct = k$ (k σταθερά) λέγεται οικογένεια των *χαρακτηριστικών καμπυλών* για την εξίσωση (5). Σημειωτέον ότι η ταχύτητα c είναι ο αντίστροφος της κλίσης των ευθειών αυτών στο σύστημα συντεταγμένων (x,t).

Αντικαθιστούμε στην (5) τη σταθερά c με μια συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών x και t, δηλαδή θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

(9)
$$u_t + c(x,t)u_x = 0,\ x \in \mathbb{R}^1,\ t > 0,$$
$$u(x,0) = \phi(x),\ x \in \mathbb{R}^1,$$

όπου $c(x,t)$ δεδομένη συνάρτηση. Έστω C η οικογένεια των καμπυλών που ορίζονται από τη διαφορική εξίσωση:

(10)
$$\frac{dx}{dt} = c(x,t).$$

Τότε, κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης της οικογένειας C έχουμε: $\frac{du}{dt} = u_x\frac{dx}{dt} + u_t = u_x c(x,t) + u_t = 0$. Συνεπώς, η u είναι σταθερά πάνω σε κάθε τέτοια καμπύλη. Οι καμπύλες που ορίζονται από τη (10) λέγονται *χαρακτηριστικές καμπύλες* (ή απλώς *χαρακτηριστικές*) του προβλήματος (9).

2.3 Μη γραμμικά κύματα.

Θεωρούμε την εξίσωση:

(11)
$$u_t + c(u)u_x = 0,\ x \in \mathbb{R}^1,\ t > 0,$$

όπου $c'(u) > 0$, με αρχική συνθήκη:

(12)
$$u(x,0) = \phi(x),\ x \in \mathbb{R}^1.$$

Ορίζουμε τις χαρακτηριστικές καμπύλες ως λύσεις της διαφορικής εξίσωσης:

(13)
$$\frac{dx}{dt} = c(u).$$

Κατά μήκος μιας τέτοιας καμπύλης $x = x(t)$, ισχύει: $\frac{du}{dt}(x(t),t) = u_x(x(t),t)c(u(x(t),t)) + u_t(x(t),t) = 0$. Στη μη γραμμική περίπτωση όμως, η ταχύτητα των χαρακτηριστικών, δηλαδή η συνάρτηση $\frac{dx}{dt}$ που ορίζεται από τη (13), εξαρτάται από την τιμή της u πάνω στην καμπύλη. Για να βρούμε την εξίσωση της χαρακτηριστικής C που περνά από το σημείο (x,t), παρατηρούμε ότι η ταχύτητά της είναι $\frac{dx}{dt} = c(u(\xi,0)) = c(\phi(\xi))$

(Σχ. 6). Ο τύπος αυτός προκύπτει αν θεωρήσουμε τη (13) στο σημείο $(\xi,0)$. Συνεπώς, ολοκληρώνοντας έχουμε

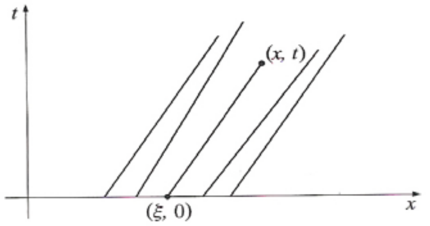
(14) $$x = c\big(\phi(\xi)\big)t + \xi,$$

που είναι η ζητούμενη εξίσωση της χαρακτηριστικής C. Η εξίσωση (14) ορίζει τη συνάρτηση $\xi = \xi(x,t)$ πεπλεγμένα. Ως συνάρτηση των x και t. Συνεπώς, η λύση $u(x,t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών (11) και (12) δίνεται από τον τύπο:

(15) $$u(x,t) = \phi(\xi),$$

όπου η ξ ορίζεται από τη (14).

Για γενικές αρχικές συνθήκες, το πρόβλημα αρχικών τιμών (11) - (12) μπορεί να έχει λύση μόνο μέχρι κάποια (πεπερασμένη) χρονική στιγμή t_b, που λέγεται *χρόνος θραύσεως*.

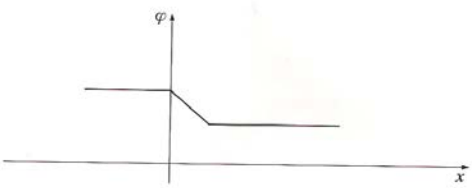


Σχ. 6. Χαρακτηριστικές της $u_t + c(u)u_x = 0$

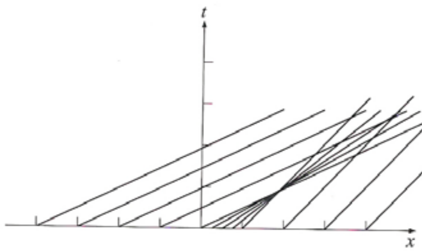
Για να δούμε τι συμβαίνει σε προβλήματα με πεπερασμένα χωρικά διαστήματα, αρκεί να μελετήσουμε την απλή εξίσωση μεταφοράς $u_t + cu_x = 0$, $0 < x < 1$, $t > 0$, $c > 0$, με αρχική συνθήκη: $u(x,0) = f(x)$, $0 < x < 1$. Στο διάστημα $(-\infty,\infty)$ η λύση του προβλήματος παριστάνει το τρέχον κύμα που μεταδίδεται προς μια κατεύθυνση (δεξιά) και δίνεται από τον τύπο $u = f(x - ct)$. Όταν έχουμε πεπερασμένο διάστημα (Σχ. 10), επειδή η u δίνεται από την αρχική συνθήκη στο ευθύγραμμο τμήμα $t = 0$, $0 < x < 1$, δεν μπορούμε να επιβάλουμε αυθαίρετα κάποια συνοριακή συνθήκη στο τμήμα A του συνόρου $x = 1$. Συνοριακές τιμές μπορούν να δοθούν όμως πάνω στη γραμμή $x = 0$. Τα δεδομένα αυτά θα μεταφερθούν κατά μήκος των χαρακτηριστικών στο τμήμα B του συνόρου $x = 1$. Συνεπώς, δεν μπορούμε να επιβάλουμε αυθαίρετα συνοριακές συνθήκες στο B. Είναι σαφές λοιπόν ότι το πρόβλημα

$$\begin{aligned}
&u_t + cu_x = 0,\ 0 < x < 1,\ t > 0,\ c > 0 \\
&u(x,0) = f(x),\ 0 < x < 1 \\
&u(0,t) = g(t),\ t > 0
\end{aligned}$$

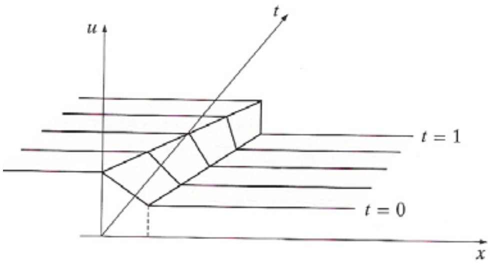
είναι καλά διατυπωμένο, δηλαδή έχει μοναδική λύση. Δεν υπάρχουν στο παράδειγμά μας χαρακτηριστικές με αρνητική κλίση, δεν υπάρχουν δηλαδή κύματα που διαδίδονται προς τα αριστερά. Συνεπώς δεν υπάρχουν ούτε κύματα που ανακλώνται από το σύνορο $x = 1$.



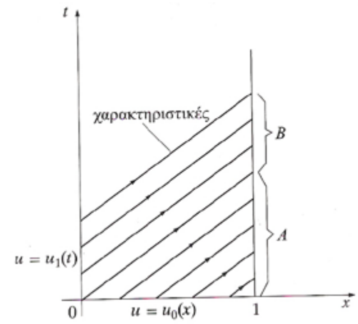
Σχ. 7. Αρχική μορφή κύματος.



Σχ. 8. Διάγραμμα χαρακτηριστικών.



Σχ. 9. Επιφάνεια της λύσης.



Σχ. 10. Διάγραμμα χαρακτηριστικών.

2.4 Η εξίσωση του Burgers.

Η εξίσωση μεταφοράς:

(16) $$u_t + cu_x = 0$$

μεταφέρει με ταχύτητα c μια αρχική διαταραχή (ένα αρχικό σχήμα), διατηρώντας επακριβώς το σχήμα της. Από την άλλη μεριά, η μη γραμμική εξίσωση

(17) $$u_t + uu_x = 0$$

μεταδίδει σήματα παραμορφώνοντας την αρχική μορφή τους. Δηλαδή, ο μη γραμμικός όρος μεταφοράς uu_x προκαλεί είτε κάποιο κρουστικό φαινόμενο είτε κάποιο φαινόμενο εκτόνωσης. Επίσης, η την εξίσωση της θερμότητας:

(18) $$u_t - vu_{xx} = 0,\ v > 0,$$

περιέχει τον όρο διάχυσης $-vu_{xx}$. Πολλές φορές μπορούμε να καταλάβουμε καλύτερα τη φύση των διαφόρων όρων σε μια εξίσωση εξέλιξης αν επιχειρήσουμε να βρούμε είτε λύσεις της μορφής τρέχοντος κύματος, δηλαδή της μορφής

(19) $$u = f\left(x - ct\right)$$

είτε άλλοτε, μιγαδικές εκθετικές λύσεις της μορφής

(20) $$u = \mathrm{A}e^{i(kx-\omega t)},$$

όπου A το πλάτος, k ο κυματαριθμός και ω η συχνότητα.

Παράδειγμα: Θεωρήστε τη Μ.Δ.Ε.

(21) $$u_t + cu_x - vu_{xx} = 0,\ c, v > 0,$$

που περιέχει το γραμμικό όρο μεταφοράς cu_x και τον όρο διάχυσης $-vu_{xx}$. Αντικαθιστώντας την (20) στην (21) και απλοποιώντας, βρίσκουμε ότι πρέπει να ισχύει η σχέση: $\omega = ck - ivk^2$. Συνεπώς, για κάθε k η εξίσωση (21) επιδέχεται λύσεις της μορφής: $u = \mathrm{A}e^{-vk^2t}e^{ik(x-ct)}$. Ο παράγοντας $e^{ik(x-ct)}$ παριστάνει ένα αρμονικό τρέχον κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά με κυματαριθμό k, ενώ ο όρος $\mathrm{A}e^{-vk^2t}$ είναι το πλάτος αυτού του κύματος, το οποίο φθίνει καθώς ο χρόνος αυξάνεται. Καταλήγουμε σε δύο ποιοτικά συμπεράσματα:

(i) Κύματα με σταθερό μήκος κύματος $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ (δηλαδή με k σταθερό) αποσβένονται εκθετικά καθώς ο συντελεστής v αυξάνεται. Συνεπώς, η σταθερά v αποτελεί ένα μέτρο του μεγέθους της διάχυσης (απόσβεσης) του προβλήματος.

(ii) Για σταθερό v, η απόσβεση αυξάνεται με το k. Κύματα με μικρότερο μήκος κύματος φθίνουν γρηγορότερα από ό,τι κύματα μεγαλύτερου μήκους κύματος.

Η μη γραμμική εξίσωση:

(22) $$u_t + uu_x - vu_{xx} = 0, \ v > 0,$$

είναι γνωστή ως *εξίσωση του Burgers*. Ο όρος uu_x προκαλεί φαινόμενο κρουστικού κύματος, δηλαδή ωθεί το κύμα σε θραύση, ενώ ο όρος $-vu_{xx}$ είναι όρος διάχυσης.

2.5 Η εξίσωση των Korteweg-de Vries

Υπάρχει και ένα άλλο φαινόμενο, η *διασπορά* (ή *διασκεδασμός*) που παίζει σημαντικό ρόλο σε πολλές φυσικές διεργασίες. Συστήματα με διασπορά χαρακτηρίζονται από Μ.Δ.Ε. που επιδέχονται λύσεις της μορφής (20), όπου η συχνότητα ω δίδεται από μια *πραγματική* συνάρτηση του κυματαριθμού k, δηλαδή: $\omega = \omega(k)$. Η σχέση αυτή καλείται *σχέση* (ή *εξίσωση*) *διασποράς*. Όταν η $\omega(k)$ είναι μιγαδική, λέμε ότι η σχέση (20) δίνει ένα «κύμα διάχυσης».

Παράδειγμα: Θεωρήστε τη Μ.Δ.Ε.

(23) $$u_{tt} + \gamma u_{xxxx} = 0, \ \gamma > 0,$$

η οποία προκύπτει κατά τη μελέτη εγκάρσιων ελαστικών ταλαντώσεων των δοκών. Αντικαθιστώντας την (20) στην (23) παίρνουμε τη σχέση διασποράς: $\omega = \pm\sqrt{\gamma}k^2$. Συμπεραίνουμε ότι η (23) επιδέχεται λύσεις του τύπου των κυμάτων με διασπορά (ή διασπειρόμενων κυμάτων).

Στην περίπτωση διασπειρόμενων κυμάτων η ταχύτητα φάσης δίδεται από την παράσταση: $\frac{\omega(k)}{k}$. Αυτή είναι η ταχύτητα με την οποία πρέπει να κινείται ένας παρατηρητής για να βρίσκεται πάντα, π.χ., στην κορυφή του κύματος. Για να χαρακτηρίσουμε ένα κύμα διασπειρόμενο, επιβάλλουμε επιπλέον να ισχύει ότι η ταχύτητα φάσης $\frac{\omega(k)}{k}$ δεν είναι σταθερή, αλλά μεταβάλλεται με το k. Αυτό σημαίνει ότι κύματα με διαφορετικό μήκος κύματος (δηλαδή με διαφορετικό κυματαριθμό) θα διαδοθούν με διαφορετική ταχύτητα (ο ακριβής ορισμός είναι ότι ένα *διασπειρόμενο κύμα* έχει $\omega(k)$ πραγματική με $\omega''(k) \neq 0$). Το πιο γνωστό παράδειγμα διασπειρόμενων κυμάτων είναι τα κύματα επιφανείας στη θάλασσα ή στο νερό, γενικά. Άλλα γνωστά μας φυσικά συστήματα με διασπορά είναι οι ελαστικές ταλαντώσεις δοκών και η διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε διηλεκτρικά μέσα.

Παράδειγμα: Η ανάλυση μικρών (κανονικών) διαταραχών των εξισώσεων που διέπουν τη διάδοση κυμάτων μεγάλου μήκους κύματος σε ρηχό νερό οδηγεί σε μια ακόμη θεμελιώδη εξίσωση των εφαρμοσμένων μαθηματικών, την *εξίσωση των* $Korteweg - de \ Vries$ (*εξίσωση* **KdV** για συντομία):

(24) $$u_t + uu_x + ku_{xxx} = 0\,,\ k > 0\,,$$

η οποία αποτελεί εξίσωση – μοντέλο για την περιγραφή μη γραμμικών φαινομένων με διασπορά. Ο όρος uu_x τείνει να προκαλέσει ασυνέχεια των λύσεων (κρουστικό κύμα). Στην εξίσωση του *Burgers* η τάση αυτή εξισορροπείται από τον όρο διάχυσης $-vu_{xx}$, με αποτέλεσμα τη δημιουργία των λύσεων με δομή κρουστικού κύματος. Εδώ, ο όρος αυτός αντικαθίσταται από τον ku_{xxx}, τον οποίο μπορούμε να ερμηνεύσουμε ως όρο διασποράς.

2.6 Νόμοι διατήρησης.

Θεωρούμε τη Μ.Δ.Ε. πρώτης τάξης

(25) $$u_t + F(u)_x = 0\,,\ x \in \mathbb{R}^1,\ t > 0\,,$$

όπου η F είναι μια δεδομένη, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής. Μια εξίσωση της μορφής (25) λέγεται *νόμος διατήρησης* για τον εξής λόγο: αν ολοκληρώσουμε την (25) ως προς x από $x = a$ έως $x = b$, παίρνουμε:

(26) $$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx + \int_a^b F(u)_x\, dx = 0\,.$$

Από το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού έχουμε $\int_a^b F(u)_x\, dx = F(u(b,t)) - F(u(a,t))$, και η (26) γράφεται ως:

(27) $$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx = F(u(a,t)) - F(u(b.t))\,.$$

Αν η u παριστάνει το μέγεθος μιας φυσικής ποσότητας ανά μονάδα μήκους, το αριστερό μέλος της (27) είναι ο ρυθμός μεταβολής ως προς το χρόνο (ταχύτητα μεταβολής) της συνολικής ποσότητας στο διάστημα $[a,b]$. Αν υποθέσουμε ότι η $F(u(x,t))$ παριστάνει την «παροχή» (ή συνάρτηση ροής) της ποσότητας u στο σημείο x, δηλαδή το ποσό της u το οποίο διέρχεται από το x ανά μονάδα χρόνου (με θετικό πρόσημο αν η ροή είναι προς τα δεξιά), τότε η (27) δηλώνει ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνολικής ποσότητας u στο $[a,b]$ είναι ίσος με την παροχή (εισροή) στο άκρο $x = a$ μείον την παροχή (εκροή) από το άκρο $x = b$. Συνεπώς, η (27) είναι μια διατύπωση της διατήρησης της ποσότητας u. Αν η συνάρτηση u είναι αρκετά ομαλή, για παράδειγμα ανήκει στην κλάση C^1, τότε τα βήματα από την (25) μέχρι την (27) είναι δυνατό να αντιστραφούν, οπότε και η σχέση (25) μπορεί επίσης να θεωρηθεί νόμος διατήρησης, αφού είναι ισοδύναμη με την (27). Είναι σημαντικό όμως να παρατηρήσουμε ότι η (27) ισχύει ακόμα και αν η u δεν είναι ομαλή (C^1) συνάρτηση. Ονομάζουμε την (27) *ολοκληρωτική μορφή* και την (25) *διαφορική μορφή* του νόμου διατήρησης. Μια ομαλή λύση της (25) ονομάζεται και *κλασική λύση*.

Παράδειγμα: Η μη γραμμική εξίσωση – μοντέλο $u_t + uu_x = 0$ μπορεί να γραφεί στη μορφή νόμου διατήρησης $u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right) = 0$, όπου η συνάρτηση ροής είναι $F(u) = \frac{1}{2}u^2$.

2.7 Σχεδόν γραμμικές εξισώσεις.

Έστω η «σχεδόν γραμμική» κυματική εξίσωση

(28) $$a(x,t,u)u_x + b(x,t,u)u_t = c(x,t,u).$$

Υποθέτουμε ότι $a,b,c \in C^1(D)$, όπου D είναι κάποιο ανοικτό, συνεκτικό σύνολο στον $\mathbb{R}^3$ και ότι $a^2+b^2+c^2 \neq 0$. Ασχολούμαστε πρώτα με το *πρόβλημα αρχικών τιμών*. Θεωρούμε το πρόβλημα:

(29) $$a(x,t,u)u_x + u_t = c(x,t,u),\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^1$$

(30) $$u(x,0)=f(x),\ x\in\mathbb{R}^1.$$

Ζητάμε να προσδιορίσουμε τις χαρακτηριστικές καμπύλες. Κατά μήκος των καμπυλών της οικογένειας που ορίζεται από την εξίσωση

(31) $$\frac{dx}{dt}=a(x,t,u)$$

η Μ.Δ.Ε. (29) ανάγεται στη συνήθη διαφορική εξίσωση:

(32) $$\frac{du}{dt}=c(x,t,u).$$

Η u δεν είναι σταθερή πάνω στις χαρακτηριστικές (31). Η αρχική συνθήκη (30) γράφεται ως:

(33) $$x=\xi,\quad u=f(\xi),\ \text{για}\ t=0.$$

Οι εξισώσεις (31) και (32) παριστάνουν ένα μη αυτόνομο σύστημα δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων για τις συναρτήσεις x και u με αρχικές συνθήκες (33). Η γενική λύση του συστήματος των εξισώσεων (31) και (32) περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές και είναι της μορφής: $x=F(t;c_1,c_2)$, $u=G(t;c_1,c_2)$. Οι σταθερές μπορούν να υπολογιστούν από την αρχική συνθήκη (33) συναρτήσει του ξ ως $c_1=c_1(\xi)$ και $c_2=c_2(\xi)$. Συνεπώς, η λύση του προβλήματος (29) – (30) δίνεται, σε πεπλεγμένη μορφή, από τους τύπους:

(34) $$x=F(t;c_1(\xi),c_2(\xi))$$

(35) $$u=G(t;c_1(\xi),c_2(\xi))$$

Θεωρητικά, λοιπόν, θα μπορούσαμε να λύσουμε τη (34) ως προς ξ συναρτήσει των x και t, να αντικαταστήσουμε στη (35) και να πάρουμε μια παράσταση της u συναρτήσει των x και t.

Παράδειγμα: Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

(36) $$u_t + uu_x + u = 0,\ x\in\mathbb{R}^1,\ t>0$$
$$u(x,0)=-\frac{x}{2},\ x\in\mathbb{R}^1.$$

Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα

(37) $$\frac{du}{dt}=-u,\ \frac{dx}{dt}=u,$$

με αρχικές συνθήκες: $x=\xi$, $u=-\dfrac{\xi}{2}$, για $t=0$. Η γενική λύση του (37) προσδιορίζεται λοιπόν από τις σχέσεις: $x=-c_1e^{-t}+c_2$, $u=c_1e^{-t}$. Οι αρχικές συνθήκες δίνουν: $x=\dfrac{\xi}{2}+\dfrac{\xi}{2}e^{-t}$, $u=-\dfrac{\xi}{2}e^{-t}$. Άρα, $\xi=\dfrac{2x}{1+e^{-t}}$ και η συνάρτηση $u(x,t)=-\dfrac{xe^{-t}}{1+e^{-t}}$ είναι λύση του προβλήματος (36) για κάθε $t\geq 0$, $x\in\mathbb{R}^1$.

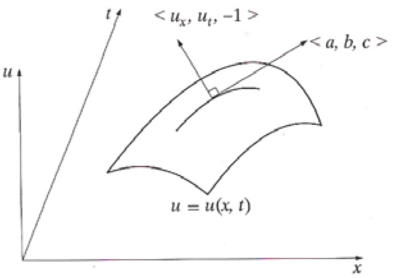
Αν η $u=u(x,t)$ είναι μια *ολοκληρωτική επιφάνεια* (λύση) της (28), τότε το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια σε ένα δεδομένο σημείο, δηλαδή το διάνυσμα $\langle u_x,u_t,-1\rangle$, είναι κάθετο προς το διάνυσμα $\langle a,b,c\rangle$ σε αυτό το σημείο. Άρα, το διάνυσμα $\langle a,b,c\rangle$ εφάπτεται της επιφάνειας και, συνεπώς, μια ολοκληρωτική επιφάνεια της (28) σχηματίζεται από τις *ολοκληρωτικές καμπύλες* του διανυσματικού πεδίου $\langle a,b,c\rangle$. Οι ολοκληρωτικές αυτές καμπύλες είναι λύσεις του συστήματος των Σ.Δ.Ε.

(38) $$\frac{dx}{d\xi}=a(x,t,u),\ \frac{dt}{d\xi}=b(x,t,u),\ \frac{du}{d\xi}=c(x,t,u),$$

όπου ξ μια παράμετρος κατά μήκος της καμπύλης (Σχ. 11). Παραλείποντας την παράμετρο ξ, γράφουμε τις εξισώσεις (38) στη μορφή:

(39) $$\frac{dx}{a(x,t,u)}=\frac{dt}{b(x,t,u)}=\frac{du}{c(x,t,u)}.$$

Το σύστημα (38) ή (39) λέγεται *χαρακτηριστικό σύστημα* της Μ.Δ.Ε. (28).



Σχ. 11. Ολοκληρωτική επιφάνεια.

Μια σχέση της μορφής $\phi(x,t,u)=$σταθ. λέγεται (*πρώτο*) *ολοκλήρωμα* του συστήματος (39), αν η συνάρτηση $\phi(x,t,u)$ έχει σταθερή τιμή πάνω σε μια ολοκληρωτική καμπύλη του (39).

Λήμμα 1.1: *Υποθέστε ότι $\phi,\psi\in C^1(D)$ και ότι οι σχέσεις*

(40) $$\phi(x,t,u)=c_1,\ \psi(x,t,u)=c_2$$

ορίζουν δύο ολοκληρώματα του συστήματος (39), για τα οποία ισχύει η συνθήκη ανεξαρτησίας $\mathbf{grad}\vec{\phi}\times\mathbf{grad}\vec{\psi}\neq\vec{0}$. Αν η C είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του (39) στο D, τότε υπάρχουν τιμές των σταθερών c_1 και c_2, τέτοιες ώστε η τομή των δύο επιφανειών (40) να είναι η καμπύλη C.

Απόδειξη: Έστω P_0 ένα σημείο της C. Ορίζουμε $c_1=\phi(P_0)$ και $c_2=\psi(P_0)$. Έστω C' η τομή των δύο επιφανειών που δίνονται από τις εξισώσεις (40) γι' αυτές τις τιμές των σταθερών c_1,c_2. Επειδή το διάνυσμα $\langle a,b,c\rangle$ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα της C' σε κάθε σημείο της, η C' είναι ολοκληρωτική καμπύλη του (39). Συνεπώς , η C και η C' είναι ολοκληρωτικές καμπύλες που έχουν ένα κοινό σημείο P_0. Λόγω του θεωρήματος μοναδικότητας των λύσεων Σ.Δ.Ε. πρέπει λοιπόν η C και η C' να συμπίπτουν. (Η συνθήκη ανεξαρτησίας εξασφαλίζει ότι τα διανύσματα $grad\vec{\phi}$ και $grad\vec{\psi}$ δεν είναι παράλληλα και, συνεπώς, ότι οι επιφάνειες (40) τέμνονται).

Από το Λήμμα 1.1 έπεται ότι οι ολοκληρωτικές καμπύλες του (39) συνιστούν μια διπαραμετρική οικογένεια καμπυλών, οι οποίες είναι τομές των επιφανειών $\phi = c_1$, $\psi = c_2$, όπου ϕ και ψ ανεξάρτητα ολοκληρώματα του (39).

Λήμμα 1.2: *Αν η $\phi(x,t,u) \in C^1(D)$ είναι ολοκλήρωμα του (39), τότε ισχύει ότι*

(41)
$$a\phi_x + b\phi_t + c\phi_u = 0.$$

Επιπλέον, αν $\phi_u \neq 0$, η συνάρτηση $u = u(x,t)$, που ορίζεται από τη σχέση $\phi(x,t,u) = 0$, είναι λύση της (28).

Απόδειξη: Πάνω σε μια ολοκληρωτική καμπύλη $(x(\xi), y(\xi), u(\xi))$ έχουμε $\phi(x(\xi), y(\xi), u(\xi)) = k$, όπου k σταθερά. Παραγωγίζοντας ως προς ξ παίρνουμε $\dfrac{d\phi}{d\xi} = a\phi_x + b\phi_t + c\phi_u = 0$, δηλαδή την (41). Επειδή $\phi(x,t,u) = 0$ είναι δυνατόν να λυθεί τοπικά ως προς u, ορίζοντας συνεπώς το u ως συνάρτηση των x,t. Παραγωγίζοντας με τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε $\phi_x + \phi_u u_x = 0$, $\phi_t + \phi_u u_t = 0$, από τις οποίες, λόγω της (41), προκύπτει ότι η $u = u(x,t)$ είναι λύση της Μ.Δ.Ε. (28).

Θεώρημα: *Έστω ότι $\phi(x,t,u), \psi(x,t,u) \in C^1(D)$ είναι δύο ανεξάρτητα ολοκληρώματα του συστήματος (39) με $\phi_u^2 + \psi_u^2 \neq 0$ στο D. Τότε, η γενική λύση της (28) δίνεται από τη σχέση*

(42)
$$H\left(\phi(x,t,u), \psi(x,t,u)\right) = 0$$

όπου η H είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση δύο μεταβλητών.

Απόδειξη: Από το Λήμμα 1.2 έχουμε $a\phi_x + b\phi_t + c\phi_u = 0$ και $a\psi_x + b\psi_t + c\psi_u = 0$. Έστω ότι η $f(x,t,u) = 0$ ορίζει μια ολοκληρωτική επιφάνεια της (28). Τότε ισχύει ότι: $af_x + bf_t + cf_u = 0$. Επειδή $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, έπεται ότι:

$$\det\begin{bmatrix} \phi_x & \phi_t & \phi_u \\ \psi_x & \psi_t & \psi_u \\ f_x & f_t & f_u \end{bmatrix} = 0$$

Άρα, οι ϕ, ψ και f δεν είναι ανεξάρτητες συναρτήσεις, δηλαδή έχουμε $f = H(\phi, \psi)$ για κάποια συνάρτηση H.

Το θεώρημα αυτό μας λέει ότι η ολοκληρωτική επιφάνεια (42) προσδιορίζεται από μια μονοπαραμετρική υπο – οικογένεια ολοκληρωτικών καμπυλών που αντιστοιχούν σε σταθερές c_1 και c_2 που συνδέονται από τη σχέση

(43)
$$H(c_1, c_2) = 0,$$

όπου $\phi = c_1$ και $\psi = c_2$. Με τα παραπάνω υπ' όψιν, είναι εύκολο να δούμε πώς μπορούμε, θεωρητικά, να επιλύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

(44) $$a(x,t,u)u_x + b(x,t,u)u_t = c(x,t,u),\ t>0,\ x\in \mathbb{R}^1$$
$$u(x,0) = f(x),\ x\in \mathbb{R}^1$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με τις εξισώσεις $\dfrac{dx}{a}=\dfrac{dt}{b}=\dfrac{du}{c}$, με αρχικές συνθήκες: $x=\xi$, $t=0$, $u=f(\xi)$, $\xi\in\mathbb{R}^1$. Αν δύο ανεξάρτητα ολοκληρώματα δίνονται από τις σχέσεις $\phi=c_1$ και $\psi=c_2$, τότε οι παράμετροι c_1 και c_2 προσδιορίζονται από τις εξισώσεις: $c_1=\phi(\xi,0,f(\xi))$, $c_2=\psi(\xi,0,f(\xi))$. Απαλείφοντας το ξ από τις δύο αυτές σχέσεις, παίρνουμε μια σχέση της μορφής (52), η οποία μας ορίζει τη συνάρτηση H.

Θεώρημα: *Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών (44) με a,b,c συνεχώς παραγωγίσιμες στον $\mathbb{R}^3$ και f συνεχώς παραγωγίσιμη στον $\mathbb{R}^1$. Αν $b(x_0,0,f(x_0))\neq 0$ για κάποιο $x_0\in\mathbb{R}^1$, τότε υπάρχει μοναδική λύση $u=u(x,t)$ του (44) σε μια περιοχή του $(x_0,0)$.*

Από το θεώρημα αυτό έπεται αμέσως ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών (29) – (30) έχει μοναδική λύση σε μια περιοχή του άξονα των x, υπό την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις a,c,f ανήκουν στην κλάση C^1. Είναι εύκολο να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά τη συνθήκη $b(x_0,0,f(x_0))\neq 0$: Εξασφαλίζει ότι το διανυσματικό πεδίο $\langle a,b,c\rangle$ έχει μη μηδενική συνιστώσα στην κατεύθυνση t στο σημείο $P_0=(x_0,0,f(x_0))$. Άρα, η ολοκληρωτική επιφάνεια διά του σημείου P_0, η οποία πρέπει να περιέχει την ολοκληρωτική καμπύλη, ορίζεται για $t>0$. Διαφορετικά, αν δηλαδή $b(x_0,0,f(x_0))=0$, η ολοκληρωτική καμπύλη που περνά από το σημείο P_0, μπορεί να μην ορίζεται για $t>0$, γιατί η εφαπτομένη της στο P_0 έχει μηδενική συνιστώσα στην κατεύθυνση t.

Κεφάλαιο 3: Μαθηματικά Μοντέλα Συνεχών Μέσων

3.1 Εισαγωγή

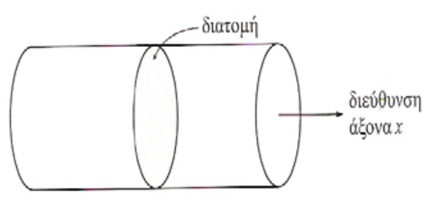
Η Μηχανική των Συνεχών Μέσων ή «Μηχανική του συνεχούς» (μηχανική των ρευστών, θεωρία ελαστικότητας, δυναμική των αερίων κλπ.) είναι η μελέτη της κίνησης, από κινηματική και δυναμική άποψη, συνεχών συστημάτων σωματιδίων, όπως ρευστών, στερεών και αέριων μέσων. Από αυτή τη μελέτη προκύπτουν ορισμένες από τις σπουδαιότερες μερικές διαφορικές εξισώσεις της Μαθηματικής Φυσικής, καθώς και πολλές τεχνικές των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Για παράδειγμα, η θεωρία ιδιόμορφων διαταραχών προήλθε από τη μελέτη της ροής του αέρα γύρω από πτέρυγα αεροπλάνου, πολλά δε προβλήματα της θεωρίας διακλαδώσεων προέκυψαν από τη μηχανική των ρευστών. Η Μηχανική του συνεχούς αποτελεί, περισσότερο από κάθε άλλη περιοχή της φυσικής ή της τεχνολογίας, «παράδειγμα» πεδίου εφαρμογών για τις τεχνικές και τα μοντέλα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.

Οι «εξισώσεις πεδίου», δηλαδή οι εξισώσεις που διέπουν τη Μηχανική του συνεχούς, αποτελούν ένα σύστημα μη γραμμικών Μ.Δ.Ε. με αγνώστους μεγέθη όπως η πυκνότητα, η πίεση, η μετατόπιση, η ταχύτητα των σωματιδίων κοκ., που περιγράφουν την κατάσταση του συνεχούς μέσου σε κάθε χρονική στιγμή. Προκύπτουν, όπως στην περίπτωση της εξίσωσης της θερμότητας, από *νόμους (αρχές) διατήρησης,* όπως οι αρχές διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας, καθώς και από διάφορες υποθέσεις που αφορούν τη σύσταση του συνεχούς μέσου, τις λεγόμενες *καταστατικές εξισώσεις*. Υπο ορισμένες προϋποθέσεις, για παράδειγμα, σε προβλήματα κυματισμών, όταν το πλάτος των κυμάτων είναι μικρό, οι εξισώσεις αυτές ανάγονται σε απλούστερες Μ.Δ.Ε., όπως π.χ. στη γραμμική κυματική εξίσωση.

Οι εξισώσεις βασίζονται στη θεμελιώδη υπόθεση ότι το υλικό που εξετάζουμε είναι *συνεχές,* δηλαδή ότι δεν λαμβάνουμε υπ' όψιν την υφή του (μοριακή, ατομική) όσο λεπτό διαμερισμό του και αν θεωρήσουμε. Η υπόθεση αυτή οδηγεί σε μοντέλα στα οποία τα φυσικά μεγέθη (π.χ. τα μεγέθη της ροής του ρευστού) ορίζονται σημειακά, π.χ. ως συνεχείς συναρτήσεις των χωρικών μεταβλητών και του χρόνου. Η μοριακή δομή της ύλης δεν παίζει ρόλο στο μοντέλο του συνεχούς μέσου, το οποίο αναμένεται ότι δεν θα ισχύει όταν οι διαστάσεις του χωρίου που μας ενδιαφέρει είναι της τάξης μιας χαρακτηριστικής μέσης απόστασης μεταξύ μορίων. Για τα αέρια, το χαρακτηριστικό αυτό μήκος είναι της τάξης των 10^{-7} m, που είναι η μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων, ενώ για τα υγρά είναι της τάξης των 10^{-10} m, δηλαδή ένα μικρό πολλαπλάσιο της μέσης απόστασης μεταξύ των μορίων. Έτσι, το μοντέλο του συνεχούς μέσου παραβιάζεται μόνο σε ακραίες περιπτώσεις ροών.

3.2 Κινηματική

Το φυσικό υπόβαθρο στο οποίο θα εφαρμόσουμε τις γενικές ιδέες της κινηματικής είναι ένα μονοδιάστατο συνεχές μέσο, το οποίο μπορούμε να φανταστούμε ότι είναι ένα ρευστό που ρέει σε κυλινδρικό σωλήνα. Το ρευστό μπορεί να είναι υγρό ή αέριο. Υποθέτουμε ότι τα τοιχώματα του σωλήνα δεν επηρεάζουν τη ροή, ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης κάθε επίπεδη διατομή του μέσου κάθετη προς τον άξονα συμμετρίας του κυλινδρικού σωλήνα (εγκάρσια διατομή) παραμένει επίπεδη και κάθετη προς τον άξονα καθώς κινείται κατά μήκος του σωλήνα και, τέλος, ότι όλες οι ποσότητες ροής δεν μεταβάλλονται μέσα σε κάθε διατομή. Αυτή ακριβώς η τελευταία υπόθεση, δηλαδή ότι η μόνη δυνατή μεταβολή είναι κατά μήκος του άξονα των x, χαρακτηρίζει την κίνηση ως μονοδιάστατη (Σχ. 12).



Σχ. 12. Μονοδιάστατο συνεχές μέσο.

Η μεταβλητή x είναι η συντεταγμένη ενός σταθεροποιημένου σημείου στο χώρο, η δε παράσταση των συναρτήσεων πεδίου ή διαφόρων φυσικών εξαρτημένων μεταβλητών (π.χ. θερμοκρασίας, πυκνότητας, πίεσης κλπ.) ως συναρτήσεων των x και t αποτελεί την κατά *Euler* περιγραφή της ροής.

Παραστάσεις συναρτήσει του χρόνου t και της υλικής συντεταγμένης h δίνουν την περιγραφή της ροής σε υλικές συντεταγμένες, που λέγεται και κατά *Lagrange* περιγραφή. Θα χρησιμοποιούμε πεζά γράμματα για τα μεγέθη σε περιγραφή *Euler* και κεφαλαία για την περιγραφή τους κατά *Lagrange*. Έτσι, συμβολίζουμε με $f(x,t)$ την τιμή ενός φυσικού μεγέθους σε συντεταγμένες *Euler* και $F(x,t)$ την αντίστοιχη τιμή σε συντεταγμένες *Lagrange*.

Έστω τώρα I το διάστημα που παριστάνει ένα μονοδιάστατο χωρίο κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου, μέσα στο οποίο βρίσκεται και κινείται το ρευστό. Κατά τη χρονική στιγμή $t=0$ καθορίζουμε κάθε σωματίδιο που βρίσκεται στο I (σε ένα μονοδιάστατο συνεχές μέσο ο όρος *σωματίδιο* είναι συνώνυμος με τον όρο *διατομή*. Θα χρησιμοποιούμε τους δύο αυτούς όρους εναλλακτικά) μέσω της κατά *Lagrange* συντεταγμένης του h, έτσι ώστε $x=h$ όταν $t=0$, όπου x η κατά *Euler* συντεταγμένη των σημείων του I ως προς σταθερό σύστημα συντεταγμένων. Με τον όρο *κίνηση ρευστού* ή *ροή* εννοούμε μια απεικόνιση $\phi: I\times[0,t_1]\to I$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, η οποία ορίζεται από τη σχέση

(1) $$x=\phi(h,t)$$

και η οποία, για κάθε $t\in[0,t_1]$, είναι αντιστρέψιμη στο πεδίο τιμών της I. Αντί του ϕ στην (1) χρησιμοποιούμε μερικές φορές το σύμβολο x και γράφουμε

(2) $$x=x(h,t).$$

Η διπλή χρήση του x για το συμβολισμό της χωρικής μεταβλητής και της συνάρτησης του δεύτερου μέλους της (1) είναι συνήθης και συχνά προτιμάται αντί της (2), εκτός αν ο συμβολισμός αυτός μπορεί να δημιουργήσει σύγχυση. Η εξίσωση (2) λοιπόν δίνει τη θέση x (σε κατά *Euler* συντεταγμένες) του σωματιδίου (διατομής) h κατά τη χρονική στιγμή t. Για σταθερό $h=h_0$ η καμπύλη $x=x(h_0,t)$, $0\le t\le t_1$, είναι η *τροχιά* του σωματιδίου h_0.

Οι υποθέσεις μας για την αντιστρεψιμότητα της ϕ μας εξασφαλίζουν ότι μπορούμε να επιλύσουμε τη (2) ως προς h και να πάρουμε μια σχέση της μορφής

(3) $$h=h(x,t)$$

που προσδιορίζει το σωματίδιο h, το οποίο βρίσκεται στη θέση x κατά τη χρονική στιγμή t. Επειδή οι συναρτήσεις $x(\cdot,t)$ και $h(\cdot,t)$ είναι μεταξύ τους αντίστροφες, έχουμε

(4) $$x=x\big(h(x,t),t\big)$$

και

(5) $$h=h\big(x(h,t),t\big).$$

Συνεπώς, αν η $f(x,t)$ παριστάνει ένα φυσικό μέγεθος σε κατά *Euler* περιγραφή, ο τύπος

(6) $$F(h,t)=f\big(x(h,t),t\big)$$

μας δίνει την περιγραφή F του μεγέθους αυτού κατά *Lagrange*. Αντιστρόφως, αν είναι γνωστή η κατά *Lagrange* περιγραφή $F(h,t)$, η σχέση

(7) $$f(x,t)=F\big(h(x,t),t\big)$$

δίνει την κατά *Euler* περιγραφή. Το ζευγάρι των εξισώσεων (6) και (7) έχει μία «δυική» ερμηνεία από φυσική άποψη. Για παράδειγμα η (7) λέει ότι η κατά *Euler* μέτρηση f ενός μεγέθους που κάνει κάποιος παρατηρητής στο σημείο x κατά τη χρονική στιγμή t συμπίπτει με τη μέτρηση F του ίδιου μεγέθους που κάνει ένας παρατηρητής ο οποίος κινείται με το σωματίδιο h, κατά τη χρονική στιγμή t κατά την οποία το h βρίσκεται στη θέση x.

Ορίζουμε την ταχύτητα ενός σωματιδίου (διατομής) h ως το ρυθμό μεταβολής της θέσης του ως προς το χρόνο, δηλαδή ως $V(h,t)=x_t(h,t)$. Συνεπώς, η κατά *Euler* μορφή της ταχύτητας ορίζεται από τον τύπο $\upsilon(x,t)=V\big(h(x,t),t\big)$, ο οποίος δίνει την ταχύτητα της διατομής που βρίσκεται κατά τη χρονική στιγμή t στη θέση x. Επίσης, η *επιτάχυνση* της διατομής h δίνεται από τον τύπο $A(h,t)=V_t(h,t)=x_{tt}(h,t)$. Άρα η επιτάχυνση της διατομής, η οποία κατά τη χρονική στιγμή t βρίσκεται στη θέση x, δίδεται σε κατά *Euler* περιγραφή από τον τύπο:

(8) $$a(x,t)=V_t(h(x,t),t)=V_t(h,t)\big|_{h(x,t)}.$$

Από την $F_t(h,t)=f_t(x(h,t),t)+f_x(x(h,t),t)x_t(h,t)$, όπου για παράδειγμα με $f_x(x(h,t),t)$ συμβολίζουμε την $f_x(x,t)$ υπολογισμένη στο σημείο $x=x(h,t)$, έχουμε, συνεπώς, $a(x,t)=\upsilon_t(x,t)+\upsilon(x,t)\upsilon_x(x,t)$. Ο ρυθμός μεταβολής ως προς τον χρόνο (ή «ταχύτητα» μεταβολής) μιας φυσικής ποσότητας από τη σκοπιά του σωματιδίου (διατομής) h το οποίο βρίσκεται στη θέση x κατά τη χρονική στιγμή t (όπως, για παράδειγμα στο δεύτερο μέλος της (8)), λέγεται *υλική παράγωγος* αυτής της ποσότητας. Συγκεκριμένα, η υλική παράγωγος (ή «παράγωγος λόγω μεταφοράς») της $f(x,t)$ ορίζεται ως

(9) $$\frac{Df}{Dt}(x,t)\equiv F_t(h(x,t),t)=F_t(h,t)\big|_{h=h(x,t)},$$

όπου στο δεύτερο μέλος εννοούμε ότι πρώτα παίρνουμε τη παράγωγο $\frac{\partial}{\partial t}$ και μετά δίνουμε στην πρώτη μεταβλητή της συνάρτησης που προκύπτει την τιμή $h(x,t)$. Η ποσότητα $\left(\frac{Df}{Dt}\right)(x,t)$ παριστάνει συνεπώς τη μερική παράγωγο ως προς t της συνάρτησης F, υπολογισμένη στη χρονική στιγμή t και στη διατομή h που κατά τη χρονική στιγμή t διέρχεται από τη θέση x. Από την (9) εύκολα έπεται ότι:

(10) $$\frac{Df}{Dt}=f_t+\upsilon f_x.$$

Συνεπώς, σε κατά *Euler* συντεταγμένες η επιτάχυνση δίνεται από τον τύπο $a=\frac{D\upsilon}{Dt}$.

Μια εξίσωση για το ρυθμό μεταβολής ως προς το χρόνο της Ιακωβιανής της απεικόνισης ϕ που ορίζει τη ροή. Η *Ιακωβιανή* ορίζεται ως $J(h,t)\equiv x_h(h,t)$. Συνεπώς, $J_t(h,t)=\frac{\partial}{\partial h}x_t(h,t)=V_h(h,t)=\upsilon_x(x(h,t),t)x_h(h,t)$ ή

(11) $$J_t(h,t)=\upsilon_x(x(h,t),t)J(h,t).$$

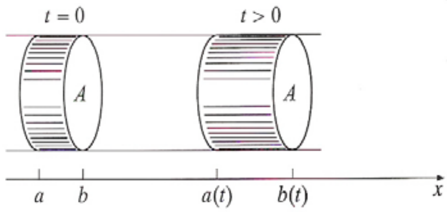
Η εξίσωση (11) είναι γνωστή ως τύπος («ανάπτυγμα») του *Euler*. Για να πάρουμε την κατά *Euler* μορφή της, θέτουμε $h=h(x,t)$ και έχουμε $\frac{Dj}{Dt}(x,t)=\upsilon_x(x,t)j(x,t)$, όπου $j(x,t)=J(h(x,t),t)$.

3.3 Διατήρηση της μάζας.

Οι *εξισώσεις πεδίου* εκφράζουν τη διατήρηση της μάζας, της ορμής και της ενέργειας και είναι «καθολικές», με την έννοια ότι ισχύουν για κάθε μέσο. Ο τρόπος που θα βρούμε τις εξισώσεις πεδίου βασίζεται σε μια κατά *Lagrange* (ή «υλική») προσέγγιση του προβλήματος.

Αρχικά ζητούμε το πώς θα εκφράσουμε αναλυτικά το γεγονός ότι η ποσότητα της μάζας που βρίσκεται σε ένα οποιοδήποτε τμήμα του κυλίνδρου (διάστημα του άξονα των x) κατά τη χρονική στιγμή $t=0$, δε μεταβάλλεται καθώς το τμήμα αυτό του υλικού κινείται για $t>0$. Κατά τη χρονική στιγμή $t=0$ θεωρούμε ένα οποιοδήποτε τμήμα του ρευστού μεταξύ $x=a$ και $x=b$ (Σχ. 13) και υποθέτουμε ότι μετά από χρόνο t το ρευστό έχει βρεθεί στο χωρίο μεταξύ $x=a(t)\equiv x(a,t)$ και $x=b(t)\equiv x(b,t)$. Αν με $\rho(x,t)$ παραστήσουμε την κατά *Euler* πυκνότητα του ρευστού, τότε η μάζα του μεταξύ $a(t)$ και $b(t)$ είναι ίση με $\int_{a(t)}^{b(t)}\rho(x,t)\mathrm{A}dx$. Η υπόθεση της διατήρησης της μάζας συνεπάγεται λοιπόν ότι:

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)}\rho(x,t)\,dx=0. \tag{12}$$



Σχ. 13.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του *Leibniz* για την παραγώγιση ολοκληρωμάτων με μεταβλητά όρια ολοκλήρωσης, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε απευθείας το αριστερό μέλος της (12). Προτιμάμε όμως μια μέθοδο που γενικεύεται εύκολα σε περισσότερες διαστάσεις και είναι πιο κοντά στο πνεύμα των τεχνικών της δυναμικής των ρευστών. Κάνουμε την αλλαγή των μεταβλητών $x=x(h,t)$ στη (12). Τότε $dx=J(h,t)dh$ και η (12) γίνεται

$$\frac{d}{dt}\int_{a}^{b}\Delta(h,t)\,J(h,t)\,dh=0, \tag{13}$$

όπου η κατά *Lagrange* πυκνότητα, που ορίζεται ως $\Delta(h,t)=\rho(x(h,t),t)$. Παρατηρούμε ότι τώρα το ολοκλήρωμα έχει σταθερά όρια και, συνεπώς, ότι μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης στη (13), επειδή οι συναρτήσεις Δ και J είναι συνεχώς παραγωγίσιμες. Επομένως, $\int_a^b(\Delta J_t+J\Delta_t)dh=\int_a^b\left[\Delta(h,t)\upsilon_x(x(h,t),t)+\Delta_t(h,t)\right]Jdh=0$, όπου χρησιμοποιήσαμε τον τύπο του *Euler* (11). Επειδή τα a και b είναι αυθαίρετα και η J διάφορη του μηδενός, συμπεραίνουμε ότι

$$\Delta_t(h,t)+\Delta(h,t)\upsilon_x(x(h,t),t)=0, \tag{14}$$

από την οποία παίρνουμε:

$$\Delta_t+\frac{\Delta}{J}V_h=0, \tag{15}$$

που είναι η *εξίσωση της διατήρησης της μάζας* στη μορφή *Lagrange*. Η κατά *Euler* μορφή μπορεί να προκύψει απευθείας από τη (14) με την αντικατάσταση $h=h(x,t)$. Έχουμε

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\upsilon_x=0 \tag{16}$$

ή

$$\rho_t+\upsilon\rho_x+\rho\upsilon_x=0. \tag{17}$$

Η εξίσωση (16) ή (17) είναι γνωστή και ως *εξίσωση συνέχειας* και αποτελεί μια από τις θεμελιώδεις εξισώσεις της μονοδιάστατης κίνησης των συνεχών μέσων. Είναι μια μη γραμμική Μ.Δ.Ε. πρώτης τάξης ως προς την πυκνότητα ρ και την ταχύτητα υ. Η κίνηση του ρευστού λέγεται *ασυμπίεστη* αν $\frac{D\rho}{Dt}=0$ ή $\Delta_t = 0$, και μόνιμη αν οι συναρτήσεις ρ και υ είναι ανεξάρτητες του t.

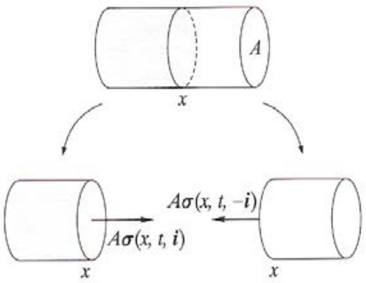
3.4 Διατήρηση της ορμής.

Στη Μηχανική του υλικού σημείου, ένα σημείο μάζας m και ταχύτητας $\vec{v}$ έχει ορμή $m\vec{v}$. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μας λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής ως προς t της ορμής του υλικού σημείου είναι ίσος με τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο υλικό σημείο. Η γενίκευση του νόμου αυτού στα μονοδιάστατα συνεχή μέσα είναι η υπόθεση ότι ισχύει η αρχή της διατήρησης της ορμής, δηλαδή ότι ο ρυθμός μεταβολής ως προς t της ορμής οποιουδήποτε τμήματος του ρευστού είναι ίσος προς το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό. Η ορμή που έχει κατά τη χρονική στιγμή t ένα τμήμα του ρευστού που καταλαμβάνει το διάστημα $a(t)\le x\le b(t)$, και έχει πυκνότητα $\rho(x,t)$, ορίζεται ως το διάνυσμα $\vec{i}\mathrm{A}\int_{a(t)}^{b(t)}\rho(x,t)\upsilon(x,t)dx$, όπου $\vec{i}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση του άξονα των x, $\upsilon(x,t)$ είναι η ταχύτητα και A το εμβαδόν της διατομής του κυλίνδρου.

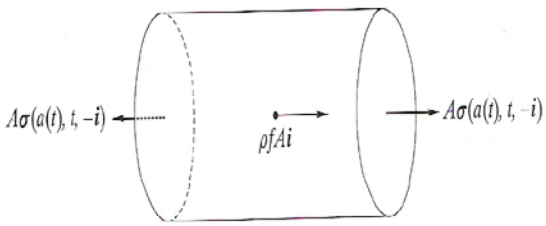
Η επακριβής περιγραφή των δυνάμεων οι οποίες ασκούνται πάνω σε ένα υλικό χωρίο ενός συνεχούς μέσου ήταν αποτέλεσμα ιδεών που προήλθαν από τα έργα του Νεύτωνα, του *Euler* και του *Cauchy*. Βασικά, υπάρχουν δύο τύποι δυνάμεων που ασκούνται πάνω σε ένα υλικό χωρίο, οι δυνάμεις πεδίου (ή σώματος) και οι δυνάμεις επιφανείας.

Δυνάμεις πεδίου (ή *σώματος*) είναι, για παράδειγμα, οι δυνάμεις βαρύτητας ή οι δυνάμεις που οφείλονται σε ηλεκτρικά ή μαγνητικά πεδία. Υποθέτουμε ότι τέτοιες δυνάμεις ασκούνται σε κάθε διατομή του υλικού χωρίου και δύνονται από τη διανυσματική συνάρτηση: $\vec{f}(x,t)=f(x,t)\vec{i}$. Οι μονάδες της f είναι μονάδες δύναμης ανά μονάδα μάζας. Συνεπώς, η ολική δύναμη πεδίου που ασκείται στο χωρίο $a(t)\le x\le b(t)$ δίνεται από το διάνυσμα: $\vec{i}\mathrm{A}\int_{a(t)}^{b(t)}\rho(x,t)f(x,t)dx$.

Οι *δυνάμεις επιφανείας* (δυνάμεις πίεσης και διατμητικές δυνάμεις) ασκούνται στο σύνορο του χωρίου και οφείλονται στο υπόλοιπο συνεχές μέσο. Συγκεκριμένα, στη μονοδιάστατη περίπτωση, θεωρούμε μια διατομή η οποία, κατά τη χρονική στιγμή t, βρίσκεται στη θέση x. Με $\vec{\sigma}(x,t,\vec{i})$ συμβολίζουμε τη δύναμη ανά μονάδα επιφανείας που ασκείται στο υλικό πάνω στην αρνητική (αριστερή) όψη της διατομής και που οφείλεται στο υλικό που βρίσκεται από τη θετική (δεξιά) πλευρά της διατομής. Παρομοίως, το διάνυσμα $\vec{\sigma}(x,t,-\vec{i})$ συμβολίζει τη δύναμη ανά μονάδα επιφανείας που ασκείται πάνω στο υλικό στη δεξιά όψη της διατομής από το υλικό στα αριστερά της.



Σχ. 14.



Σχ. 15. Δυνάμεις σε ένα στοιχείο του ρευστού.

Το τρίτο όρισμα της $\vec{\sigma}$, εδώ το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{i}$ ή $-\vec{i}$, είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κατεύθυνση της εξωτερικής καθέτου προς την επιφάνεια όπου ασκείται η δύναμη. Τα διανύσματα $\vec{\sigma}\left(x,t,\vec{i}\right)$ και $\vec{\sigma}\left(x,t,\overline{-i}\right)$ λέγονται *διανύσματα τάσης* (Σχ. 14).

Μπορούμε πλέον να γράψουμε μια ποσοτική σχέση για το ισοζύγιο της ορμής στο υλικό χωρίο $a(t) \leq x \leq b(t)$:

$$\text{(18)} \qquad \vec{i}\frac{d}{dt}\mathrm{A}\int_{a(t)}^{b(t)} \rho(x,t)\upsilon(x,t)\,dx = \vec{i}\mathrm{A}\int_{a(t)}^{b(t)} \rho(x,t)\, f(x,t)dx + \mathrm{A}\vec{\sigma}\left(b(t),t,\vec{i}\right) + \mathrm{A}\vec{\sigma}\left(a(t),t,-\vec{i}\right)$$

Η εξίσωση αυτή εκφράζει την αρχή ότι ο ρυθμός μεταβολής, ως προς t, της ορμής του υλικού χωρίου $\left[a(t),b(t)\right]$ ισούται προς την ολική δύναμη πεδίου συν τις δυνάμεις επιφανείας που ασκούνται στο $\left[a(t),b(t)\right]$ (Σχ. 15). Λόγω της εξίσωσης διατήρησης της μάζας (16), έχουμε ότι η (18) γράφεται ως:

$$\text{(19)} \qquad \vec{i}\int_{a(t)}^{b(t)}\left(\rho\frac{D\upsilon}{Dt} - \rho f\right)dx = \vec{\sigma}\left(b(t),t,\vec{i}\right) + \vec{\sigma}\left(a(t),t,-\vec{i}\right).$$

Λήμμα 4.1: *Η αρχή διατήρησης της ορμής (19) συνεπάγεται ότι για οποιαδήποτε διατομή* x, *θα ισχύει:*

$$\textit{(20)} \qquad \vec{\sigma}\left(x,t,-\vec{i}\right) = -\vec{\sigma}\left(x,t,\vec{i}\right).$$

Απόδειξη: Έστω x_0 μια οποιαδήποτε διατομή τέτοια ώστε $a(t) \leq x_0 \leq b(t)$. Εφαρμόζοντας την εξίσωση (19) στο χωρίο μεταξύ των διατομών $a(t)$ και x_0 και στο χωρίο μεταξύ x_0 και $b(t)$, παίρνουμε: $\vec{i}\int_{a(t)}^{x_0}\left[\rho\frac{D\upsilon}{Dt} - \rho f\right]dx = \vec{\sigma}\left(x_0,t,\vec{i}\right) + \vec{\sigma}\left(a(t),t,-\vec{i}\right)$ και $\vec{i}\int_{x_0}^{b(t)}\left[\rho\frac{D\upsilon}{Dt} - \rho f\right]dx = \vec{\sigma}\left(b(t),t,\vec{i}\right) + \vec{\sigma}\left(x_0,t,-\vec{i}\right)$. Προσθέτοντας τις δύο αυτές εξισώσεις κατά μέλη και αφαιρώντας κατά μέλη από την (19), καταλήγουμε στην εξίσωση $\vec{\sigma}\left(x_0,t,\vec{i}\right) + \vec{\sigma}\left(x_0,t,-\vec{i}\right) = 0$, η οποία δίνει την (19) επειδή η x_0 είχε επιλεγεί αυθαίρετα.

Το αποτέλεσμα αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε μια *συνιστώσα τάσης* $\sigma(x,t)$ μέσω της εξίσωσης: $\vec{\sigma}\left(x,t,\vec{i}\right) = \sigma(x,t)\vec{i}$. Με αυτό το συμβολισμό η (19) γίνεται: $\int_{a(t)}^{b(t)}\left(\rho\frac{D\upsilon}{Dt} - \rho f\right)dx = \sigma\left(b(t),t\right) - \sigma\left(a(t),t\right) = \int_{a(t)}^{b(t)}\sigma_x(x,t)\,dx$. Επειδή το διάστημα $\left[a(t),b(t)\right]$ ήταν αυθαίρετο, έχουμε

(21) $$\rho \frac{D\upsilon}{Dt} = \rho f + \sigma_x ,$$

η οποία είναι η κατά *Euler* μορφή της Μ.Δ.Ε. που εκφράζει την αρχή διατήρησης της ορμής. Ορίζοντας την *πίεση* p από την εξίσωση $p(x,t) = -\sigma(x,t)$, γράφουμε την (21) στη συνήθη μορφή της, δηλαδή ως

(22) $$\upsilon_t + \upsilon \upsilon_x + \frac{1}{\rho} p_x = f .$$

3.5 Θερμοδυναμική και διατήρηση της ενέργειας.

Έχουμε δει ότι οι εξισώσεις της κίνησης ενός μονοδιάστατου συνεχούς μέσου, χωρίς δυνάμεις πεδίου, σε περιγραφή *Euler* είναι:

(23) $$\rho_t + \upsilon \rho_x + \rho \upsilon_x = 0$$

(24) $$\upsilon_t + \upsilon \upsilon_x + \frac{1}{\rho} p_x = 0 ,$$

δηλαδή ένα σύστημα δύο μη γραμμικών Μ.Δ.Ε. ως προς τους τρεις αγνώστους ρ, υ και p. Μας χρειάζεται και μια τρίτη εξίσωση, στην οποία οι φυσικές ιδιότητες του συγκεκριμένου μέσου θα πρέπει να παίξουν κάποιο ρόλο. Τέτοιες ιδιότητες δεν έχουν ληφθεί υπ' όψιν στη διατύπωση των εξισώσεων (23) και (24), οι οποίες είναι τελείως γενικές και ισχύουν για κάθε συνεχές μέσο. Εξισώσεις που χαρακτηρίζουν ιδιότητες του συγκεκριμένου μέσου είναι γνωστές ως *καταστατικές εξισώσεις*. Οι καταστατικές εξισώσεις δίνουν σχέσεις μεταξύ μακροσκοπικά παρατηρήσιμων ιδιοτήτων και μεγεθών που χαρακτηρίζουν την εσωτερική σύσταση του υλικού, και συνήθως εκφράζονται μέσω *θερμοδυναμικών μεταβλητών*, όπως η πυκνότητα, η ενέργεια, η εντροπία, η θερμοκρασία κοκ.

Μια ρεαλιστική καταστατική εξίσωση συνήθως εισάγει και κάποια άλλη, άγνωστη μεταβλητή στο πρόβλημα, όπως για παράδειγμα τη θερμοκρασία, την εσωτερική ενέργεια ή την εντροπία. Συνεπώς, χρειάζεται και άλλη μια εξίσωση, η οποία θα προέλθει από τη *διατήρηση της ενέργειας*. Έτσι, το πλήρες σύστημα των εξισώσεων πεδίου, που περιγράφει μια γενική ροή, συνήθως αποτελείται από τις εξισώσεις διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας, καθώς και από μία ή περισσότερες καταστατικές εξισώσεις.

Η διατύπωση της αρχής της διατήρησης της ενέργειας προϋποθέτει την εισαγωγή ορισμένων βασικών εννοιών της κλασικής θερμοδυναμικής. Η κλασική θερμοδυναμική μελετά σχέσεις μεταξύ καταστάσεων θερμοδυναμικής ισορροπίας σε ομογενή υλικά και διατυπώνει νόμους για τις μεταβολές αυτών των καταστάσεων. Υποθέτει ότι οι μεταβολές λαμβάνουν χώρα με αργό ρυθμό, έτσι ώστε σε κάθε χρονική στιγμή να θεωρούνται αμελητέες οι παράγωγοι των θερμοδυναμικών μεγεθών ως προς τις χωρικές μεταβλητές. Δηλαδή, οι μεταβολές γίνονται με τη μορφή μιας ακολουθίας ομογενών καταστάσεων ισορροπίας. Αν και η κίνηση ενός ρευστού μπορεί να μη φαίνεται καθόλου αργή, έχει ελεγχθεί πειραματικά ότι τα συνήθη αποτελέσματα της κλασικής θερμοδυναμικής μπορούν να εφαρμοστούν υπό τον όρο ότι θα θεωρήσουμε ότι ισχύει κατά τη χρονική στιγμή t μια *τοπική θερμοδυναμική κατάσταση*, δηλαδή αν υποθέσουμε ότι τα θερμοδυναμικά μεγέθη, όπως θερμοκρασία, πίεση κοκ, είναι συναρτήσεις του x και του t και ότι οι θερμοδυναμικές εξισώσεις ισχύουν *τοπικά*.

Μια συνήθης διατύπωση του πρώτου θερμοδυναμικού αξιώματος είναι ότι η ενέργεια διατηρείται, αν ληφθεί υπ' όψιν και η θερμότητα. Έτσι, το πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα αποτελεί περιληπτική διατύπωση της αρχής της διατήρησης της ενέργειας. Πιο συγκεκριμένα, το πρώτο αξίωμα περιγράφει το τι θα συμβεί όταν προσθέσουμε ένα μικρό ποσό θερμότητας σε ένα υλικό σώμα μοναδιαίας μάζας έτσι ώστε σε κάθε βήμα αυτής της διαδικασίας να υπάρχουν συνθήκες θερμοδυναμικής ισορροπίας. Ένα μέρος της ενέργειας θα μετατραπεί σε έργο $pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$ που θα παραχθεί όταν ο «ειδικός όγκος» $\frac{1}{\rho}$ μεταβληθεί κατά $d\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Το υπόλοιπο θα καταναλωθεί για να αυξηθεί η εσωτερική ενέργεια e κατά de. Η ακριβής σχέση γράφεται ως

(25) $$q = de + pd\left(\rho^{-1}\right),$$

όπου q είναι η προστιθέμενη θερμότητα. Για μια διαδικασία θερμοδυναμικής ισορροπίας, η (25) αποτελεί τη διατύπωση του *πρώτου θερμοδυναμικού αξιώματος*. Γενικά, η διαφορική μορφή q δεν είναι τέλειο διαφορικό, δηλαδή δεν υπάρχει κάποια συνάρτηση «κατάστασης» Q έτσι ώστε $q = dQ$. Αν $q = 0$, η διαδικασία λέγεται *αδιαβατική*.

Υπάρχουν και άλλες καταστατικές εξισώσεις που έχουν προταθεί για να περιγράψουν διάφορα άλλα φαινόμενα:

- Η *καταστατική εξίσωση του* ***Abel*** ή του ***Clausius*** $p\left(\frac{1}{\rho} - \alpha\right) = R\theta$, α σταθερά, εισάγει μια σταθερά α με σκοπό να ληφθεί υπ' όψιν το μέγεθος των μορίων του υλικού.
- Η *καταστατική εξίσωση του* ***van der Waals*** $\left(p + \beta\rho^2\right)\left(\frac{1}{\rho} - \alpha\right) = R\theta$, α, β σταθερές, περιέχει τον όρο $\beta\rho^2$ για να περιγράψει ακριβέστερα τις δυνάμεις μεταξύ των μορίων.
- Η *εξίσωση του* ***Tait*** $\frac{p + \mathrm{B}}{p} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\overline{\gamma}}$, όπου B και $\overline{\gamma}$ σταθερές, έχει χρησιμοποιηθεί ως μοντέλο της συμπεριφοράς υγρών μέσων υπό μεγάλη πίεση.

Έστω $\left[a(t), b(t)\right]$ ένα μονοδιάστατο υλικό χωρίο με εμβαδό διατομής A. Ορίζουμε την κινητική ενέργεια του ρευστού στο χωρίο ως $\mathrm{A}\int_{a(t)}^{b(t)} \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 dx$ και την εσωτερική ενέργεια ως $\mathrm{A}\int_{a(t)}^{b(t)} \frac{1}{2}\rho e dx$. Υποθέτουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής ως προς t της συνολικής ενέργειας είναι ίσος με την ισχύ του έργου που παράγουν οι δυνάμεις που ασκούνται στο χωρίο συν την παροχή θερμότητας στο χωρίο. Υπάρχουν δύο δυνάμεις, η δύναμη πεδίου $f\left(x,t\right)$ που ασκείται σε κάθε διατομή (σημείο) του χωρίου και η τάση $\sigma\left(x,t\right)$ που ασκείται στα δύο άκρα. Επειδή το γινόμενο δύναμης επί ταχύτητα μας δίνει την ισχύ του έργου που παράγει η δύναμη, έχουμε ότι η ολική ισχύς είναι ίση με $\mathrm{A}\int_{a(t)}^{b(t)} \rho f\upsilon dx - \mathrm{A}\sigma\left(a(t),t\right)\upsilon\left(a(t),t\right) + \mathrm{A}\sigma\left(b(t),t\right)\upsilon\left(b(t),t\right)$. Η παροχή θερμότητας στο χωρίο είναι ίση με $\mathrm{A}\phi\left(a(t),t\right) - \mathrm{A}\phi\left(b(t),t\right)$ όπου $\phi\left(x,t\right)$ η συνάρτηση ροής της θερμότητας με μονάδες ενέργειας ανά μονάδα εμβαδού επιφανείας ανά μονάδα χρόνου. Δεχόμαστε λοιπόν αξιωματικά το νόμο διατήρησης της ενέργειας:

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)}\left(\frac{1}{2}\rho\upsilon^2+\rho e\right)dx=$$
$$=\int_{a(t)}^{b(t)}\rho f\upsilon dx-\sigma\big(a(t),t\big)\upsilon\big(a(t),t\big)+\sigma\big(b(t),t\big)\upsilon\big(b(t),t\big)+\phi\big(a(t),t\big)-\phi\big(b(t),t\big)$$

ή

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)}\left(\frac{1}{2}\rho\upsilon^2+\rho e\right)dx=\int_{a(t)}^{b(t)}\left(\rho f\upsilon+(\sigma\upsilon)_x-\phi_x\right)dx.$$

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις μέσα στα ολοκληρώματα είναι αρκετά ομαλές και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το διάστημα $\left[a(t),b(t)\right]$ είναι αυθαίρετο, παίρνουμε την εξής κατά *Euler* διαφορική μορφή της αρχής διατήρησης της ενέργειας:

(26) $$\frac{\rho}{2}\frac{D\upsilon^2}{Dt}+\rho\frac{De}{Dt}=\rho f\upsilon+(\sigma\upsilon)_x-\phi_x.$$

3.6 Η ακουστική προσέγγιση.

Οι εξισώσεις που διέπουν την αδιαβατική ροή ενός αερίου είναι μη γραμμικές και δεν μπορούν γενικά να επιλυθούν αναλυτικά. Σε ειδικές περιπτώσεις όμως μπορούμε να βρούμε αναλυτικές λύσεις. Η απλούστερη περίπτωση είναι η *Ακουστική*, στην οποία υποθέτουμε ότι οι αποκλίσεις των μεγεθών της ροής από μια σταθερή κατάσταση ισορροπίας $\upsilon=0$, $\rho=\rho_0$, $p=p_0$ είναι μικρές. Γι' αυτό το λόγο ξεκινάμε από τις ισεντροπικές εξισώσεις

(27) $$\rho_t+\upsilon\rho_x+\rho\upsilon_x=0$$

(28) $$\rho\upsilon_t+\rho\upsilon\upsilon_x+p_x=0$$

με βαροτροπική καταστατική εξίσωση: $p=F(\rho)$ (μία εξίσωση λέγεται *βαροτροπική* αν παριστάνει την πίεση συναρτήσει μόνο από της πυκνότητας). Στην ακουστική συνήθως εισάγουμε τη *συμπύκνωση* δ, η οποία ορίζεται ως $\delta\equiv\dfrac{\rho-\rho_0}{\rho_0}$, και παριστάνει τη σχετική μεταβολή της πυκνότητας ως προς τη σταθερή πυκνότητα ισορροπίας ρ_0. Υποθέτουμε ότι τα μεγέθη υ,δ και όλες οι μερικές παράγωγοί τους είναι απολύτως μικρά σε σχέση με τη μονάδα. Αναπτύσσοντας την καταστατική εξίσωση σε σειρά *Taylor* περί τη ρ_0 έχουμε:

$$p=F(\rho_0)+F'(\rho_0)(\rho-\rho_0)+\frac{1}{2}F''(\rho_0)(\rho-\rho_0)^2+\mathrm{O}\left((\rho-\rho_0)^3\right)=$$
$$=F(\rho_0)+\rho_0F'(\rho_0)\delta+\frac{1}{2}\rho_0^2F''(\rho_0)\delta^2+\mathrm{O}(\delta^3).$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε: $p_x=\rho_0F'(\rho_0)\delta_x+\mathrm{O}(\delta^2)$ και αντικαθιστώντας στις (27) και (28), έχουμε:

$$\delta_t+\upsilon\delta_x+(1+\delta)\upsilon_x=0$$
$$(1+\delta)\upsilon_t+(1+\delta)\upsilon\upsilon_x+F'(\rho_0)\delta_x+\mathrm{O}(\delta^2)=0$$

Παραλείποντας γινόμενα μικρών όρων παίρνουμε τις παρακάτω *γραμμικοποιημένες εξισώσεις* για τις μικρές αποκλίσεις δ και υ:

(29) $$\delta_t + \upsilon_x = 0$$

(30) $$\upsilon_t + F'(\rho_0)\delta_x = 0.$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι γνωστές ως *εξισώσεις της ακουστική προσέγγισης*. Η απαλοιφή του υ από τις (29) – (30) δίνει

(31) $$\delta_{tt} - c_0^2 \delta_{xx} = 0,$$

όπου

(32) $$c_0^2 = F'(\rho_0).$$

Η εξίσωση (31), μια γραμμική Μ.Δ.Ε. δεύτερης τάξης, είναι γνωστή ως *κυματική εξίσωση*. Η (θετική) ποσότητα c_0 που ορίζεται από την (32) είναι η ταχύτητα μετάδοσης των ηχητικών κυμάτων. Στην περίπτωση τέλειου αερίου έχουμε $p = F(\rho) = k\rho^{\gamma}$, και ο τύπος $c_0 = \sqrt{\dfrac{\gamma p_0}{\rho_0}}$ δίνει την ταχύτητα με την οποία διαδίδονται σε ένα τέλειο αέριο σήματα (διαταραχές) μικρού πλάτους. Απαλείφοντας τη συμπύκνωση δ από τις (27) και (30) παρατηρούμε ότι και η ταχύτητα υ (μικρού πλάτους επίσης) πληροί και αυτή την κυματική εξίσωση.

Η επιστήμη της ακουστικής είναι η μελέτη των κινήσεων των ρευστών, οι οποίες σχετίζονται με τη διάδοση του ήχου. Η βασική της εξίσωση είναι η κυματική εξίσωση την οποία εδώ πήραμε ως προσέγγιση των εξισώσεων της βαροτροπικής ροής που περιγράφει τη διάδοση σημάτων μικρού πλάτους.

3.7 Ελαστικά κύματα στα στερεά.

Μια άλλη περιοχή εφαρμογών των νόμων διατήρησης σε ένα συνεχές μέσο είναι η Μηχανική του Στερεού Σώματος. Στα στερεά γράφουμε τις βασικές εξισώσεις ως:

(33) $$\rho_t + \upsilon\rho_x + \rho\upsilon_x = 0$$

(34) $$\upsilon_t + \upsilon\upsilon_x = f + \frac{1}{\rho}\sigma_x.$$

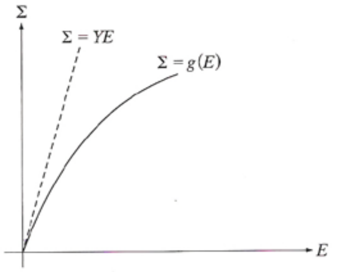
Το φυσικό μας μοντέλο είναι μια κυλινδρική ράβδος, η οποία εκτελεί διαμήκεις ταλαντώσεις. Ζητείται να περιγράψουμε την κίνηση των επιπέδων εγκάρσιων διατομών της ράβδου. Στην περίπτωση αυτή, η καταστατική εξίσωση θα είναι κάποια σχέση μεταξύ της παραμόρφωσης (θλιπτικής ή εφελκυστικής), την οποία υφίσταται η ράβδος κατά μήκος του άξονά της και της τάσης η οποία την προκαλεί. Για αν ορίσουμε την παραμόρφωση, θεωρούμε κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ ένα μικρό τμήμα της ράβδου μεταξύ των διατομών h και $h + \Delta h$. Έστω ότι κατά τη χρονική στιγμή $t > 0$ το τμήμα αυτό του υλικού καταλαμβάνει το διάστημα μεταξύ $x(h,t)$ και $x(h + \Delta h, t)$. Η *σχετική επιμήκυνση* είναι η σχετική μεταβολή του μήκους του διαστήματος και δίνεται από την παράσταση:

$$\text{Σχετικη επιμηκυνση} = \frac{\text{τρεχον μηκος - αρχικο μηκος}}{\text{αρχικο μηκος}} =$$

$$= \frac{\left(x\left(h+\Delta h,t\right)-x\left(h,t\right)\right)-\Delta h}{\Delta h} = \frac{\partial x}{\partial h}\left(h,t\right)-1+\mathrm{O}\left(\Delta h\right).$$

Ορίζουμε την *παραμόρφωση* Ε ως την προσέγγιση πρώτης τάξης της σχετικής επιμήκυνσης που δίνεται από τον τύπο: $\mathrm{E} = \frac{\partial x}{\partial h}\left(h,t\right)-1$. Αν με $U\left(h,t\right)$ συμβολίσουμε τη *μετατόπιση* της διατομής h κατά τη χρονική στιγμή t, τότε $x\left(h,t\right)=h+U\left(h,t\right)$ και

(35) $$\mathrm{E} = \frac{\partial U}{\partial h}\left(h,t\right).$$



Σχ. 16. Τάση ως συνάρτηση της παραμόρφωσης.

Η καταστατική εξίσωση εδώ είναι ένας τύπος που μας δίνει την κατά ***Lagrange*** τάση $\Sigma\left(h,t\right)$ ως συνάρτηση της παραμόρφωσης $\mathrm{E}\left(h,t\right)$. Γενικά, η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής έχει τη μορφή της καμπύλης που έχει σχεδιαστεί με συνεχή γραμμή στο Σχήμα 16 αν όμως ενδιαφερόμαστε μόνο για μικρές παραμορφώσεις, τότε μπορούμε να προσεγγίσουμε την καμπύλη με μια ευθεία, την εφαπτομένη της στο 0 (με διακεκομμένη γραμμή στο Σχ. 6.28), η οποία έχει εξίσωση

(36) $$\Sigma\left(h,t\right)=\Upsilon\left(h\right)\mathrm{E}\left(h,t\right).$$

Ο παράγοντας $\Upsilon\left(h\right)$ λέγεται *μέτρο του* ***Young*** ή *μέτρο ακαμψίας*, η δε γραμμική σχέση τάσης – παραμόρφωσης (36) είναι ο *νόμος του* ***Hooke*** της ελαστικότητας. (Υποθέτουμε ότι η Y δεν εξαρτάται από το χρόνο t. Υλικά για τα οποία η Y εξαρτάται και από το χρόνο λέμε ότι έχουν *μνήμη*). Σε μεταβλητές ***Euler*** η (36) γράφεται στη μορφή

(37) $$\sigma\left(x,t\right)=y\left(x,t\right)\varepsilon\left(x,t\right),$$

όπου $\sigma\left(x,t\right)=\Sigma\left(h\left(x,t\right),t\right)$, $y\left(x,t\right)=\Upsilon\left(h\left(x,t\right)\right)$ και $\varepsilon\left(x,t\right)=\mathrm{E}\left(h\left(x,t\right),t\right)$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\left.\frac{\partial U}{\partial h}\right|_{h=h(x,t)}=\frac{u_x}{1-u_x}$, όπου u η κατά ***Euler*** μετατόπιση, μπορούμε να γράψουμε την καταστατική εξίσωση (37) ως:

(38) $$\sigma\left(x,t\right)=y\left(x,t\right)\frac{u_x\left(x,t\right)}{1-u_x\left(x,t\right)}.$$

Απαλείφοντας τώρα το σ από την εξίσωση διατήρησης της ορμής (34) παίρνουμε:

(39) $$\rho\upsilon_t+\rho\upsilon\upsilon_x=\rho f+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{yu_x}{1-u_x}\right).$$

Συνεπώς, υποθέτοντας ότι ισχύει η καταστατική εξίσωση (36), καταλήξαμε σε δύο εξισώσεις, την (33) και την (39), για τους τρεις αγνώστους υ,u και ρ. Η τρίτη εξίσωση είναι η σχέση

(40) $$\upsilon = \frac{Du}{Dt} = u_t + \upsilon u_x ,$$

που ισχύει λόγω του ορισμού των u, υ και της υλικής παραγώγου.

Κεφάλαιο 4: Κυματική εξίσωση.

4.1 Ο τύπος του D' Alembert.

Θεώρημα 1: *Στο πρόβλημα αρχικών τιμών για την κυματική εξίσωση:*

(1) $$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 ,\ x \in R^1 ,\ t > 0$$
$$u(x,0) = F(x),\ u_t(x,0) = G(x),\ x \in R^1 ,$$

όπου F, G είναι δεδομένες συναρτήσεις, έστω $F \in C^2(R^1)$ και $G \in C^1(R^1)$. Στην περίπτωση αυτή, η λύση του δίνεται από τον τύπο

(2) $$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(F(x+ct) + F(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(y)\,dy .$$

Απόδειξη: Ο τύπος (2) προκύπτει αμέσως, αν εφαρμόσουμε τις αρχικές συνθήκες για να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις f και g στην εξίσωση

(3) $$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct) .$$

Έχουμε:

(4) $$u(x,0) = f(x) + g(x) = F(x)$$

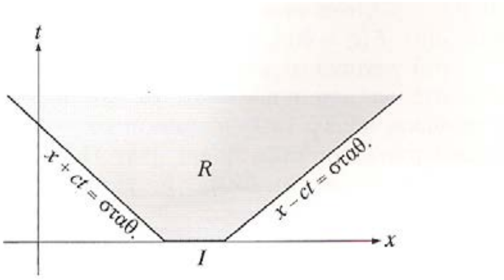
(5) $$u_t(x,0) = cf'(x) - cg'(x) = G(x) .$$

Διαιρώντας στην (5) και τα δύο μέλη δια c και ολοκληρώνοντας ως προς x, έχουμε

(6) $$f(x) - g(x) = \frac{1}{c}\int_0^x G(y)\,dy + \mathrm{A} ,$$

όπου Α σταθερά ολοκλήρωσης. Προσθέτοντας και αφαιρώντας κατά μέλη τις (4) και (6) παίρνουμε τις δύο εξισώσεις $f(x) = \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x G(y)\,dy + \frac{1}{2}\mathrm{A}$ και $g(x) = \frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x G(y)\,dy - \frac{1}{2}\mathrm{A}$, από τις οποίες, λόγω της (3), έπεται η (2). Επειδή $F \in C^2$ και $G \in C^1$ έχουμε ότι $u \in C^2$ και ότι η u πληροί την κυματική εξίσωση.

Αν τα αρχικά δεδομένα F και G του προβλήματος (1) έχουν *φορέα* μέσα σε ένα διάστημα I του άξονα των x (δηλαδή αν οι F και G είναι μηδέν εκτός του I), τότε η περιοχή R των επιπέδων x, t στην οποία η λύση u επηρεάζεται από τις τιμές των δεδομένων στο I λέγεται σύνολο επιρροής του I (Σχ. 17). Η περιοχή αυτή έχει ως πλάγια σύνορα τις δύο χαρακτηριστικές $x + ct =$ σταθ. και $x - ct =$ σταθ. που ξεκινούν από το αριστερό και το δεξιό άκρο του I, αντίστοιχα.



Σχ. 17. Σύνολο επιρροής R του διαστήματος I.

Ένα σήμα με φορά στο I δεν μπορεί ποτέ να επηρεάσει τη λύση σε σημεία έξω από το R. Αυτό μπορούμε να το διατυπώσουμε ισοδύναμα ως εξής: Αν τα αρχικά δεδομένα έχουν φορέα το I, τότε η λύση έχει φορέα το R. Οι προτάσεις αυτές είναι άμεσες συνέπειες του τύπου (2).

Λήμμα 1. *Έστω ότι η $u(x,t)$ είναι κλάσης C^3 για $t>0$ και $x\in R^1$. Στην περίπτωση αυτή, η u πληροί την κυματική εξίσωση $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$ αν και μόνο αν η u είναι λύση της εξίσωσης διαφορών*

(7) $$u(x-ck,t-h)+u(x+ck,t+h)=u(x-ch,t-k)+u(x+ch,t+k),$$

για κάθε $h,k>0$.

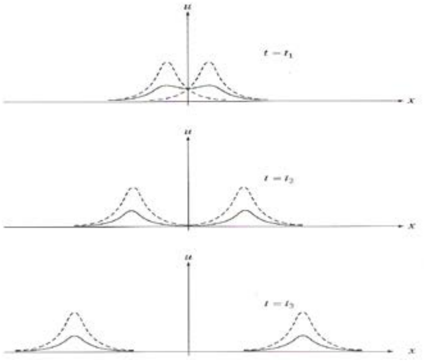
Απόδειξη. Το αναγκαίο έπεται αμέσως από το γεγονός ότι η γενική λύση της κυματική εξίσωσης δίνεται από την παράσταση (3) και από το ότι τα τρέχοντα κύματα $f(x+ct)$ και $g(x-ct)$, που κινούνται προς δύο αντίθετες κατευθύνσεις, πληρούν την εξίσωση διαφορών. Αντίστροφα, αν η u είναι λύση της εξίσωσης διαφορών (7), θέτουμε $h=0$, προσθέτουμε $-2u(x,t)$ και στα δύο μέλη και διαιρούμε δια c^2k^2, οπότε παίρνουμε:

(8) $$\frac{u(x-ck,t)+u(x+ck,t)-2u(x,t)}{c^2k^2}=\frac{u(x,t-k)+u(x,t+k)-2u(x,t)}{c^2k^2}.$$

Από το θεώρημα του *Taylor*:

$$u(x\pm ck,t)=u(x,t)\pm u_x(x,t)ck+\frac{1}{2}u_{xx}(x,t)c^2k^2+o(k^2)$$
$$u(x,t\pm k)=u(x,t)\pm u_t(x,t)k+\frac{1}{2}u_{tt}(x,t)k^2+o(k^2).$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στη (8) έχουμε: $u_{xx}(x,t)=\frac{1}{c^2}u_{tt}(x,t)+\frac{o(k^2)}{k^2}$. παίρνοντας όρια καθώς $k\to 0$, βλέπουμε ότι η u πληροί την $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$. Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.



Σχ. 18. Χρονικά στιγμιότυπα που δείχνουν την $u(x,t)$ (συνεχής γραμμή) ως μέσο όρο της $F(x+ct)$ και $F(x-ct)$ (διακεκομμένη γραμμή).

4.2 Σκέδαση και αντίστροφα προβλήματα.

Με τον όρο *πρόβλημα σκέδαση* εννοούμε το εξής: ας θεωρήσουμε ένα μέσο στο οποίο υπάρχει ένα αντικείμενο, ο *σκεδαστής*. Προς την κατεύθυνση του σκεδαστή στέλνουμε ένα *προσπίπτον κύμα*, το οποίο αλληλεπιδρά με το σκεδαστή και παράγει ένα ανακλώμενο κύμα και ένα *διερχόμενο* (ή «διαθλώμενο») *κύμα* (Σχ. 19). Το *ευθύ πρόβλημα της σκέδασης* είναι το πρόβλημα του προσδιορισμού των ιδιοτήτων του ανακλώμενου και του διερχόμενου κύματος (π.χ. πλάτους, κυμαριθμού, συχνότητας κλπ), υπό την προϋπόθεση ότι είναι γνωστές οι ιδιότητες του προσπίπτοντος κύματος και του σκεδαστή. Το *αντίστροφο πρόβλημα της σκέδασης* είναι το πρόβλημα του προσδιορισμού των ιδιοτήτων του σκεδαστή, αν είναι γνωστές οι ιδιότητες των τριών τύπων κυμάτων. Αντίστροφα προβλήματα εμφανίζονται πολύ συχνά σε διάφορες εφαρμογές της Φυσικής. Για παράδειγμα, στη θεωρία του ραντάρ ή του σόναρ γνωρίζουμε τις ιδιότητες του προσπίπτοντος κύματος και χρησιμοποιούμε μετρήσεις των ιδιοτήτων του ανακλώμενου κύματος για να ανιχνεύσουμε την ύπαρξη ή τα χαρακτηριστικά ενός αεροπλάνου ή ενός υποβρυχίου αντικειμένου. Στην τομογραφία χρησιμοποιούμε ακτίνες Χ ή ηχητικά κύματα για να προσδιορίσουμε την ύπαρξη ή τη σύσταση ενός όγκου, ανιχνεύοντας, για παράδειγμα, μεταβολές της πυκνότητας. Στην περίπτωση αυτή μας είναι γνωστά και τα τρία είδη κυμάτων, το προσπίπτον, το ανακλώμενο και το διερχόμενο. Σε γεωφυσικές διερευνήσεις του υπεδάφους προκαλούμε μια έκρηξη στην επιφάνεια της Γης, παράγοντας ελαστικά κύματα.

Σχ. 19.

Η μελέτη των κυμάτων που ανακλώνται από διάφορα στρώματα του υπεδάφους μπορεί να μας υποδείξει την ύπαρξη κοιτασμάτων πετρελαίου ή κάποιου άλλου σχηματισμού που παρουσιάζει ενδιαφέρον από γεωλογικής πλευράς. Λόγω όλων αυτών των εφαρμογών, η θεωρία της αντίστροφης σκέδασης είναι περιοχή μεγάλου ερευνητικού ενδιαφέροντος στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.

Κεφάλαιο 5: Δυναμική των αερίων.

5.1 Νόμοι Διατήρησης.

Φανταζόμαστε ότι ένα ρευστό κινείται κατά μήκος ενός κυλινδρικού σωλήνα με σταθερό εμβαδό διατομής A, έτσι ώστε τα μεγέθη της ροής να μη μεταβάλλονται μέσα σε μια διατομή. Σταθεροποιούμε δύο διατομές $x=a$ και $x=b$ (Σχ. 20). η πρώτη αρχή, της διατήρησης της μάζας, σημαίνει απλώς ότι η μάζα δεν καταστρέφεται ούτε δημιουργείται εκ του μηδενός, δηλαδή ότι ο ρυθμός μεταβολής ως προς το χρόνο της συνολικής μάζας στο διάστημα $[a,b]$ είναι ίσος με την εισροή ή παροχή μάζας (=ποσότητα μάζας ανά μονάδα χρόνου) στο σημείο $x=a$ μείον την παροχή μάζας (εκροή) στο σημείο $x=b$. Γράφουμε

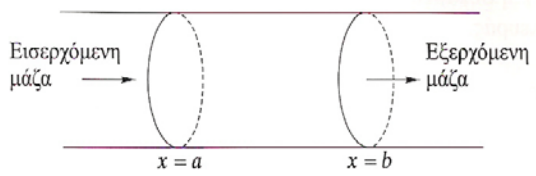
(1) $$\frac{d}{dt}\int_a^b \mathrm{A}\rho(x,t)\,dx = \mathrm{A}\rho(a,t)\upsilon(a,t) - \mathrm{A}\rho(b,t)\upsilon(b,t),$$

όπου $\rho(x,t)$ είναι η πυκνότητα και $\upsilon(x,t)$ η ταχύτητα του ρευστού. Παρατηρούμε ότι η ποσότητα $\mathrm{A}\rho(x,t)\upsilon(x,t)$ παριστάνει τη μάζα του ρευστού, η οποία διέρχεται κατά τη χρονική στιγμή t από τη διατομή x ανά μονάδα χρόνου, δηλαδή την παροχή μάζας δια της διατομής x κατά τη χρονική στιγμή t. Η εξίσωση (1) μπορεί να γραφεί και ως:

$\int_a^b \rho_t(x,t)\,dx = -\int_a^b \left(\rho(x,t)\upsilon(x,t)\right)_x dx$. Συνεπώς, επειδή το διάστημα $[a,b]$ είχε επιλεγεί αυθαίρετα, έχουμε ότι

(2) $$\rho_t + (\rho\upsilon)_x = 0,$$

η οποία είναι η εξίσωση της συνέχειας, η Μ.Δ.Ε. που εκφράζει την αρχή διατήρησης της μάζας.



Σχ. 20.

Ο νόμος της διατήρησης της ορμής μας λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής στο διάστημα $[a,b]$ πρέπει να ισούται με τη διαφορά της παροχής της ορμής στα άκρα του διαστήματος , δηλαδή με τη διαφορά των όρων μεταφοράς της ορμής προς και από το διάστημα $[a,b]$ στα σημεία $x=a$ και $x=b$, συν την ποσότητα της ορμής που δημιουργείται στο $[a,b]$ λόγω της τάσης (πίεσης) p που ασκείται στο ρευστό στα σημεία a και b. Σε μαθηματική γλώσσα:

(3) $$\frac{d}{dt}\int_a^b \mathrm{A}\rho(x,t)\upsilon(x,t)\,dx = \mathrm{A}\rho(a,t)\upsilon^2(a,t) - \mathrm{A}\rho(b,t)\upsilon^2(b,t) + \mathrm{A}p(a,t) - \mathrm{A}p(b,t).$$

(Δε λάβαμε υπ' όψιν δυνάμεις πεδίου). Ο όρος $\mathrm{A}\rho(x,t)\upsilon^2(x,t)$παριστάνει την ορμή η οποία διέρχεται κατά τη χρονική στιγμή t από τη διατομή x ανά μονάδα χρόνου, δηλαδή την παροχή ορμής δια της διατομής x. Χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού παίρνουμε από την (3): $\int_a^b \left(\rho(x,t)\upsilon(x,t)\right)_t dx = -\int_a^b \left(\rho(x,t)\upsilon^2(x,t) + p(x,t)\right)_x dx$. Επειδή το διάστημα $[a,b]$ είχε επιλεγεί τυχαία, έχουμε

(4) $$(\rho\upsilon)_t + \left(\rho\upsilon^2 + p\right)_x = 0,$$

η οποία είναι Μ.Δ.Ε. που εκφράζει την αρχή διατήρησης της ορμής. Και οι δύο εξισώσεις (2) και (4) είναι της μορφής $\frac{\partial}{\partial t}[...] + \frac{\partial}{\partial x}[...] = 0$, δηλαδή είναι σε μορφή *νόμου διατήρησης.*

Στους απλούστερους υπολογισμούς της δυναμικής των αερίων υποθέτουμε ότι οι Μ.Δ.Ε. (2) και (4) συμπληρώνονται από τη βαροτροπική εξίσωση κατάστασης

(5) $$p = f(\rho), \ f'(\rho) > 0,$$

σύμφωνα με την οποία η πίεση είναι δεδομένη συνάρτηση μίας μεταβλητής μόνο, της πυκνότητας. Παράδειγμα τέτοιας ροής είναι η ισεντροπική ροή των τέλειων αερίων. Ακολουθώντας το συμβολισμό της ακουστικής εισάγουμε την τοπική ταχύτητα του ήχου, που δίνεται από τον τύπο

(6) $$c^2 = f'(\rho),$$

οπότε οι (2) και (4) μπορούν να γραφούν ως:

(7) $$p_t + \upsilon p_x + c^2 \rho \upsilon_x = 0\,,$$

(8) $$\rho \upsilon_t + \rho \upsilon \upsilon_x + p_x = 0\,.$$

Για να πάρουμε την (7) χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις $p_x = c^2 \rho_x$ και $p_t = c^2 \rho_t$ στη (2). Χρησιμοποιήσαμε επίσης τη (2) για να αντικαταστήσουμε την παράγωγο ρ_t στην (4) και να καταλήξουμε στην (8). Παρατηρούμε έτσι ότι η (8) συμπίπτει με την εξίσωση διατήρησης της ορμής.

5.2 Η μέθοδος του Riemann.

Η λεγόμενη *μέθοδος του* ***Riemann*** αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα τεχνικής που εφαρμόζεται και σε πολυπλοκότερα προβλήματα της δυναμικής των αερίων. Υποθέτουμε ότι σε ένα ημιάπειρο $(x > 0)$ τμήμα του σωλήνα βρίσκεται αρχικά αέριο στην κατάσταση ισορροπίας

(9) $$\upsilon = 0\,,\ \rho = \rho_0\,,\ p = p_0\,,\ c = c_0$$

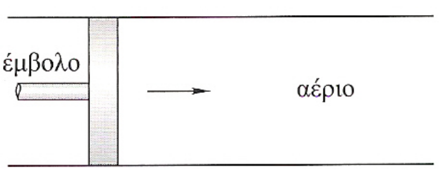
με καταστατική εξίσωση:

(10) $$p = k\rho^{\gamma}\,,\ k > 0\,,\ \gamma > 1\,.$$

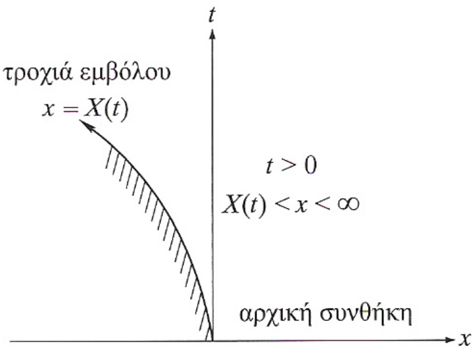
Η κίνηση του αερίου προκαλείται από ένα έμβολο, το οποίο βρίσκεται αρχικά στη θέση $x = 0$ και αποσύρεται αργά προς τα αριστερά, με τροχιά

(11) $$x = \mathrm{X}(t)\,,\ \mathrm{X}'(t) < 0\,,\ \mathrm{X}''(t) < 0\,,$$

όπου X δεδομένη συνάρτηση τέτοια ώστε $\mathrm{X}(0) = \mathrm{X}'(0) = 0$ (Σχ. 21).



Σχ. 21.



Σχ. 22.

Το πρόβλημά μας είναι να υπολογίσουμε τις υ, p, c και ρ για $t > 0$ και $\mathrm{X}(t) < x < \infty$. Μπορεί και να θεωρηθεί ως πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών όπου οι αρχικές συνθήκες (9) δίνονται στο θετικό ημιάξονα των x και όπου η υ δίνεται (ίση με την ταχύτητα του εμβόλου) πάνω στην καμπύλη της τροχιάς του εμβόλου (Σχ. 22).

Προσπαθούμε τώρα να προσδιορίσουμε χαρακτηριστικές καμπύλες πάνω στις οποίες οι Μ.Δ.Ε. ανάγονται σε απλούστερες εξισώσεις. Γι' αυτό το σκοπό πολλαπλασιάζουμε την $\rho \upsilon_t + \rho \upsilon \upsilon_x + p_x = 0$ επί c, κατόπιν προσθέτουμε και αφαιρούμε κατά μέλη από την $p_t + \upsilon p_x + c^2 \rho \upsilon_x = 0$ την εξίσωση που προκύπτει, και καταλήγουμε στις δύο εξισώσεις:

(12) $$p_t + (\upsilon + c)\, p_x + \rho c\left(\upsilon_t + (\upsilon + c)\upsilon_x\right) = 0\,,$$

(13) $$p_t + (\upsilon - c)\, p_x - \rho c\left(\upsilon_t + (\upsilon - c)\upsilon_x\right) = 0\,.$$

Μετά από σειρά πράξεων στις οικογένειες καμπυλών C^+ και C^- που ορίζονται από τις $C^+ : \dfrac{dx}{dt} = \upsilon + c$, $C^- : \dfrac{dx}{dt} = \upsilon - c$, έχουμε τις:

(14) $$\int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho + \upsilon = \text{σταθ. σε κάθε χαρακτηριστική } C^+$$

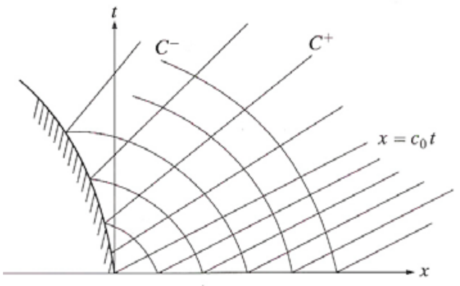
(15) $$\int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho - \upsilon = \text{σταθ. σε κάθε χαρακτηριστική } C^-\,.$$

Οι παραστάσεις στα αριστερά μέλη των εξισώσεων (14) και (15) λέγονται *αναλλοίωτες του* *Riemann*. Είναι ποσότητες οι οποίες είναι σταθερές πάνω σε κάθε μία χαρακτηριστική των οικογενειών C^+ και C^-, αντίστοιχα. Επειδή η καταστατική εξίσωση δίνεται από τη (10), έχουμε: $c^2 = k\gamma\rho^{\gamma-1}$. Άρα $\int \dfrac{c(\rho)}{\rho} d\rho = \dfrac{2c}{\gamma-1} + \text{σταθ.}$ Συνεπώς οι αναλλοίωτες του *Riemann* γράφονται ως:

(16) $$r_+ \equiv \frac{2c}{\gamma-1} + \upsilon = \text{σταθ. στις } C^+$$

(17) $$r_- \equiv \frac{2c}{\gamma-1} - \upsilon = \text{σταθ. στις } C^-\,.$$

Η ταχύτητα $\upsilon + c$ μιας χαρακτηριστικής C^+ είναι σταθερή και, συνεπώς, οι χαρακτηριστικές είναι ευθείες. Οι χαρακτηριστικές C^+ που ξεκινούν από τον άξονα των x έχουν ταχύτητα c_0 (επειδή $\upsilon = 0$ για $t = 0, x > 0$) και μεταφέρουν τη σταθερή κατάσταση ισορροπίας $\upsilon = 0$, $c = c_0$, $p = p_0$, $\rho = \rho_0$ στην περιοχή όπου $x > c_0 t$.



Σχ. 23. Χαρακτηριστικές C^+ και C^-.

Συνεπώς, έχουμε σταθερή κατάσταση στο επίπεδο x, t μπροστά από το «σήμα» $x = c_o t$, το οποίο ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται με ταχύτητα c_0 προς τα δεξιά. Το σήμα αυτό σηματοδοτεί την έναρξη της κίνησης του εμβόλου.

Ποιοτικά, φανταζόμαστε ότι οι χαρακτηριστικές C^- μεταφέρουν τις τιμές της αναλλοίωτης $r_- = \dfrac{2c}{\gamma-1} - \upsilon$ από την περιοχή $x > c_0 t$, όπου η λύση είναι σταθερή, προς την περιοχή της ροής πίσω από αυτήν. Όταν μία από τις δύο αναλλοίωτες του *Riemann* είναι σταθερή παντού, λέμε ότι η λύση, στην περιοχή που δεν είναι σταθερή, έχει τη μορφή *απλού κύματος*.

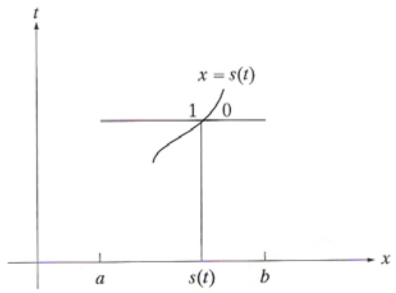
5.3 Οι συνθήκες των Rankine – Hugoniot.

Η ολοκληρωτική μορφή του νόμου διατήρησης της μάζας, δηλαδή η εξίσωση

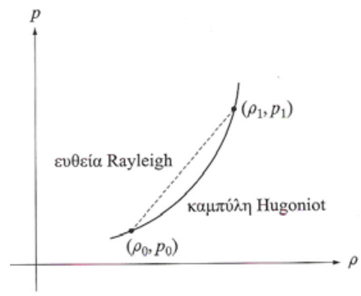
(18) $$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)\,dx = -\rho(x,t)\upsilon(x,t)\Big|_a^b,$$

ισχύει ακόμη και όταν οι συναρτήσεις ρ και υ δεν είναι ομαλές. Έστω $x = s(t)$ μια λεία καμπύλη στο επίπεδο x,t, η οποία τέμνει το διάστημα $a \le x \le b$ κατά τη χρονική στιγμή t (Σχ. 24) και έστω ότι οι συναρτήσεις υ, ρ και p έχουν ασυνέχειες πρώτου είδους πάνω στην καμπύλη αυτή. Εκτός της καμπύλης $x = s(t)$ υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις υ, ρ και p είναι κλάσης C^1, με πεπερασμένα όρια καθώς $x \to s(t)^{\pm}$. Από τον κανόνα του *Leibniz* έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)\,dx = \frac{d}{dt}\int_a^{s(t)} \rho(x,t)\,dx + \frac{d}{dt}\int_{s(t)}^b \rho(x,t)dx =$$
$$= \int_a^{s(t)} \rho_t(x,t)\,dx + \rho\left(s(t)^-,t\right)s'(t) + \int_{s(t)}^b \rho_t(x,t)\,dx - \rho\left(s(t)^+,t\right)s'(t).$$



Σχ. 24.



Σχ. 25. Διάγραμμα *Hugoniot* ρ, p.

Όταν πάρουμε τα όρια $a \to s(t)^-$, $b \to s(t)^+$, τα δύο ολοκληρώματα του δεύτερου μέλους αυτής της εξίσωσης τείνουν στο μηδέν. Άρα, από την (18) έπεται ότι:

(19) $$\left(\rho\left(s(t)^-,t\right) - \rho\left(s(t)^+,t\right)\right)s'(t) = -\rho(x,t)\upsilon(x,t)\Big|_{s(t)^-}^{s(t)^+}.$$

Αν συμβολίσουμε τα πλευρικά όρια των ρ και υ, καθώς από δεξιά και αριστερά, με κάτω δείκτη μηδέν και ένα, αντίστοιχα, έτσι ώστε, για παράδειγμα, $\rho_0 = \lim\limits_{x \to s(t)^+} \rho(x,t)$, $\rho_1 = \lim\limits_{x \to s(t)^-} \rho(x,t)$, τότε μπορούμε να γράψουμε την (19) ως:

(20) $$(\rho \; - \rho_0)s'(t) = \rho_1\upsilon_1 - \rho_0\upsilon_0.$$

Με παρόμοιο τρόπο παίρνουμε τη συνθήκη

(21) $$(\rho_1\upsilon_1 - \rho_0\upsilon_0)s'(t) = \rho_1\upsilon_1^2 + p_1 - \rho_0\upsilon_0^2 - p_0$$

από την ολοκληρωτική μορφή (3) του νόμου διατήρησης της ορμής. Οι δύο συνθήκες (20) και (21) είναι γνωστές ως συνθήκες (ασυνέχειας) των *Rankine – Hugoniot*. Συσχετίζουν τις τιμές ρ_0, υ_0, p_0 των μεγεθών της ροής μπροστά από την ασυνέχεια με την ταχύτητα s' της ασυνέχειας και με τις τιμές των ρ_1, υ_1 και p_1 πίσω από την ασυνέχεια. Αν μπροστά από την ασυνέχεια έχουμε κατάσταση ηρεμίας, δηλαδή αν $\upsilon_0 = 0$ και ρ_0, p_0 γνωστές, τότε οι συνθήκες των *Rankine – Hugoniot* δίνουν

(22) $$(\rho_1 - \rho_0)s' = \rho_1\upsilon_1,$$

(23) $$\rho_1 \upsilon_1 s' = \rho_1 \upsilon_1^2 + p_1 - p_0,$$

οι οποίες μαζί με την καταστατική εξίσωση

(24) $$p_1 = f(\rho_1)$$

αποτελούν τρεις εξισώσεις για τον προσδιορισμό των τεσσάρων αγνώστων ρ_1, υ_1, p_1 και $s'(t)$. Αν γνωρίζουμε οποιαδήποτε από αυτές τις ποσότητες, μπορούμε συνεπώς να προσδιορίσουμε τις υπόλοιπες τρεις.

<u>Κεφάλαιο 6</u>: Κίνηση των ρευστών στον $\mathbb{R}^3$.

6.1 Κινηματική.

Θεώρημα 5.1. *Υπό κατάλληλες προϋποθέσεις, αν γνωρίζουμε το διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων* $\vec{v}(\vec{x},t)$, *μπορούμε να προσδιορίσουμε τις τροχιές των σωματιδίων, και αντίστροφα.*

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα το αντίστροφο. Αν γνωρίζουμε όλες τις τροχιές των σωματιδίων (δηλαδή τη συνάρτηση της κίνησης του ρευστού), τότε γνωρίζουμε τη συνάρτηση $\vec{x} = \vec{x}(\vec{h},t)$ για $\vec{h} \in \Omega_0$, $t \in \mathrm{I}$. Συνεπώς, μπορούμε να προσδιορίσουμε την $\vec{h} = \vec{h}(\vec{x},t)$, να υπολογίσουμε την ταχύτητα ως $\vec{V}(\vec{h},t) = \vec{x}_t(\vec{h},t)$, οπότε $\vec{v}(\vec{x},t) = V(\vec{h}(\vec{x},t),t)$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι μας δίνεται η $\vec{v}(\vec{x},t)$. Εξ' ορισμού $\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(\vec{h},t) = \vec{v}(\vec{x}(\vec{h},t),t)$ ή

(1) $$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{v}(\vec{x},t),$$

παραλείποντας την παράμετρο $\vec{h}$ στο όρισμα του $\vec{x}$. Η (1) παριστάνει ένα σύστημα Σ.Δ.Ε. πρώτης τάξης για την άγνωστη συνάρτηση $\vec{x}(t)$, την οποία συνεπώς μπορούμε να προσδιορίσουμε λύνοντας το σύστημα με αρχική συνθήκη $\vec{x} = \vec{h}$ για $t = 0$, εφόσον η συνάρτηση $\vec{v}$ και η αρχική συνθήκη $\vec{h}$ είναι τέτοιες ώστε να υπάρχει μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για $t \in \mathrm{I}$.

Είναι ενδιαφέρον να κάνουμε διάκριση μεταξύ των τροχιών των σωματιδίων και των λεγόμενων *ροϊκών γραμμών* της ροής. Οι ροϊκές γραμμές είναι ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου $\vec{v}(\vec{x},t_0)$, όπου t_0 μια αυθαίρετη αλλά σταθερή χρονική στιγμή. Συνεπώς, οι ροϊκές γραμμές είναι οι λύσεις του συστήματος

(2) $$\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} = \vec{v}(\vec{x},t_0),$$

όπου $\vec{x} = \vec{x}(s)$ και s μια παράμετρος κατά μήκος των ροϊκών γραμμών. Αν η $\vec{v}$ είναι ανεξάρτητη του t, τότε η ροή λέγεται *μόνιμη* και οι ροϊκές γραμμές συμπίπτουν με τις τροχιές των σωματιδίων. Σε μια μη μόνιμη ροή οι δύο οικογένειες καμπυλών γενικά δε συμπίπτουν.

Όπως στη μονοδιάστατη περίπτωση, ορίζουμε την *παράγωγο λόγω μεταφοράς* ή *υλική παράγωγο* ως $\frac{Df}{Dt}(\vec{x},t) \equiv F_t\left(\vec{h},t\right)\Big|_{\vec{h}=\vec{h}(\vec{x},t)}$, όπου f και F είναι, αντίστοιχα, η κατά *Euler* και η κατά *Lagrange* παράσταση της ίδιας ποσότητας.

Θεώρημα 2. *Σε κατά Lagrange και κατά Euler μορφή, αντίστοιχα, έχουμε* $J_t\left(\vec{h},t\right) = J\left(\vec{h},t\right) div\vec{v}\left(\vec{x},t\right)\Big|_{\vec{h}}$, $\frac{Dj}{Dt}(\vec{x},t) = j(\vec{x},t)\, div\vec{v}(\vec{x},t)$, *όπου* $j(\vec{x},t) = J\left(\vec{h}(\vec{x},t),t\right)$.

Θεώρημα Gauss (Θεώρημα της απόκλισης). *Για ένα συνεχώς παραγωγίσιμο διανυσματικό πεδίο* $\vec{f}(\vec{x})$ *σε ένα (κατάλληλο) χωρίο* Ω *ισχύει η σχέση*

(3)
$$\int_\Omega div\vec{f}dx = \int_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\vec{n}d\tau,$$

όπου $\vec{n}$ *είναι η εξωτερική μοναδιαία κάθετος στην επιφάνεια* $\partial\Omega$, $d\tau$ *το στοιχείο του εμβαδού της επιφάνειας,* $\int_{\partial\Omega}$ *το επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω στο σύνορο* $\partial\Omega$.

Θεώρημα 3 (Θεώρημα Μεταφοράς). *Έστω* $g = g(\vec{x},t)$ *μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε ισχύει ότι:*

(4)
$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} gdx = \int_{\Omega_t}\left(\frac{Dg}{Dt} + gdiv\vec{v}\right)dx.$$

Απόδειξη. Το χωρίο ολοκλήρωσης Ω_t στο ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους της (4) εξαρτάται από το χρόνο t και συνεπώς δεν μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης. Μια όμως αλλαγή χωρικών μεταβλητών, από κατά *Euler* μορφή $\vec{x}$ σε κατά *Lagrange* $\vec{h}$, θα μετασχηματίσει το ολοκλήρωμα στο χωρίο Ω_t σε ένα ολοκλήρωμα πάνω στο σταθερό χωρίο Ω_0 που δεν εξαρτάται από το t. Τότε μπορούμε να παραγωγίσουμε μέσα στο ολοκλήρωμα και να συνεχίσουμε τον υπολογισμό. Θέτοντας λοιπόν $\vec{x} = \vec{x}\left(\vec{h},t\right)$, έχουμε $\int_{\Omega_t} g(\vec{x},t)dx = \int_{\Omega_0} G\left(\vec{h},t\right) J\left(\vec{h},t\right)dh$, λόγω του γνωστού τύπου της αλλαγής μεταβλητών σε ένα πολλαπλό ολοκλήρωμα, στο οποίο υπεισέρχεται η Ιακωβιανή που πολλαπλασιάζει το νέο στοιχείο όγκου. Χρησιμοποιώντας τώρα το Θεώρημα 2 έχουμε $\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} gdx = \int_{\Omega_0}\frac{\partial}{\partial t}(GJ)dh = \int_{\Omega_0}\left(G_t + Gdiv\,\vec{v}\big|_{\vec{x}=\vec{x}(\vec{h},t)}\right)Jdh = \int_{\Omega_t}\left(\frac{Dg}{Dt} + gdiv\vec{v}\right)dx$, όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό, δηλαδή επιστρέψαμε σε κατά *Euler* συντεταγμένες, και χρησιμοποιήσαμε επίσης την $\frac{Df}{Dt}(\vec{x},t) = f_t(\vec{x},t) + \vec{v}(\vec{x},t)\cdot\overrightarrow{grad}f(\vec{x},t)$.

Πόρισμα 1. *Έχουμε*

(5)
$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} gdx = \int_{\Omega_t} g_t dx + \int_{\partial\Omega_t} g\vec{v}\cdot\vec{n}d\tau,$$

όπου $\vec{n}$ *η μοναδιαία εξωτερική κάθετος στην επιφάνεια* $\partial\Omega_t$.

Απόδειξη. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση στο δεύτερο μέλος της (4) είναι η: $\frac{Dg}{Dt} + gdiv\vec{v} = g_t + divg\vec{v}$. Έτσι, $\int_{\Omega_t}\left(\frac{Dg}{Dt} + gdiv\vec{v}\right)dx = \int_{\Omega_t} g_t dx + \int_{\Omega_t} divg\vec{v}dx$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του *Gauss* (3) παίρνουμε $\int_{\Omega_t} div g\vec{v} dx = \int_{\partial\Omega_t} g\vec{v}\cdot\vec{n} d\tau$ και το συμπέρασμα του πορίσματος έπεται.

Το ολοκλήρωμα $\int_{\partial\Omega_t} g\vec{v}\cdot\vec{n} d\tau$ παριστάνει τη *ροή* της g (ακριβέστερα του διανυσματικού πεδίου $g\vec{v}$) δια μέσου της επιφάνειας $\partial\Omega_t$. Υποθέτουμε ότι το υλικό χωρίο Ω_t αποτελείται από τα ίδια σωματίδια, δηλαδή περιέχει ακριβώς την ίδια μάζα ρευστού καθώς κινείται. Τότε ισχύει η εξίσωση $\int_{\Omega_t} \rho(\vec{x},t) dx = \int_{\Omega_0} \rho(\vec{x},0) dx$, όπου $\rho(\vec{x},t)$ είναι η κατά *Euler* συνάρτηση πυκνότητας. Συνεπώς, $\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho(\vec{x},t) dx = 0$, οπότε το Θεώρημα 3 (με $g = \rho$) δίνει

(6)
$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho div\vec{v} = 0,$$

επειδή το χωρίο Ω_t έχει επιλεγεί αυθαίρετα. Η Μ.Δ.Ε. (6) είναι πρώτης τάξης, λέγεται *εξίσωση της συνέχειας* και αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση της αρχής της διατήρησης της μάζας. Μις σημαντική περίπτωση ροών είναι εκείνη κατά την οποία ένα οποιοδήποτε υλικό χωρίο διατηρεί τον όγκο του σταθερό. Λέμε τότε ότι η ροή $\phi_t : \Omega_0 \to \Omega_t$ είναι *ασυμπίεστη* και έχουμε ότι: $\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} dx = 0$ για κάθε Ω_0.

Θεώρημα 4. *Οι εξής προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

i) *Η ροή* ϕ_t *είναι ασυμπίεστη.*

ii) $div\vec{v} = 0$

iii) $\Delta_t = 0$*, όπου* $\Delta(\vec{h},t) = \rho\left(x(\vec{h},t),t\right)$ *είναι η κατά* **Lagrange** *πυκνότητα.*

iv) $\frac{D\rho}{Dt} = 0$.

Απόδειξη. Εξ' ορισμού η *(iii)* είναι ισοδύναμη με την *(iv)*, ενώ η *(ii)* και η *(iv)* είναι ισοδύναμες λόγω της αρχής διατήρησης της μάζας (6). Τέλος, εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταφοράς (4) με $g = 1$, βλέπουμε ότι οι *(i)* και *(ii)* είναι ισοδύναμες.

6.2 Δυναμική.

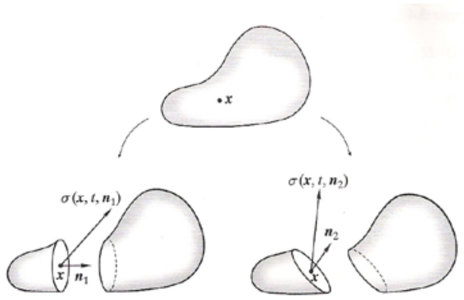
Σε κάθε σημείο $\vec{x}$ του συνόρου $\partial\Omega_t$ υποθέτουμε ότι ορίζεται ένα διανυσματικό μέγεθος $\vec{\sigma}(\vec{x},t;\vec{n})$, που λέγεται *διάνυσμα τάσης* ή *τάση* και παριστάνει τη δύναμη ανά μονάδα επιφανείας, η οποία ασκείται στο σημείο $\vec{x}$ κατά τη χρονική στιγμή t από το υλικό του μέσου που βρίσκεται εκτός του Ω_t. Το διάνυσμα αυτό εξαρτάται επίσης και από την εξωτερική μοναδιαία κάθετο $\vec{n}$ στην επιφάνεια, δηλαδή τον «προσανατολισμό» της επιφάνειας $\partial\Omega_t$ στο σημείο $\vec{x}$. Συνεπώς, η τάση πάνω σε δύο διαφορετικές επιφάνειες που διέρχονται από το $\vec{x}$ θα είναι γενικά διαφορετική (Σχ. 26). Θεωρούμε ότι διάνυσμα $\vec{n}$ έχει κατεύθυνση προς την πλευρά του υλικού που προκαλεί την τάση. Συνεπώς, η συνολική δύναμη επιφανείας που ασκείται στο χωρίο Ω_t δίδεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα: $\int_{\partial\Omega_t} \vec{\sigma}(\vec{x},t;\vec{n}) d\tau$. Δεχόμαστε τώρα ότι ισχύει η *αρχή της διατήρησης της ορμής* (ή *αρχή των τάσεων του* **Cauchy**), δηλαδή ότι για κάθε υλικό χωρίο Ω_t ισχύει η εξίσωση:

$$(7) \qquad \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho\vec{v}dx = \int_{\Omega_t} \rho \vec{f}dx + \int_{\partial\Omega_t} \vec{\sigma}(\vec{x},t;\vec{n})d\tau .$$

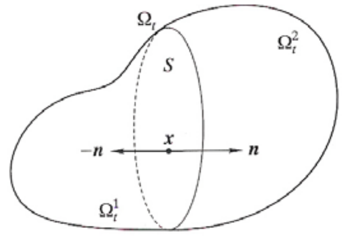
Η εξίσωση (7) δηλώνει ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνολικής ορμής του ρευστού στο Ω_t είναι ίσος με τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο Ω_t. Επειδή $\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho\vec{v}dx = \int_{\Omega_t} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dx$, μπορούμε να γράψουμε την (7) ως:

$$(8) \qquad \int_{\Omega_t} \rho\left(\frac{D\vec{v}}{Dt} - \vec{f}\right)dx = \int_{\partial\Omega_t} \vec{\sigma}(\vec{x},t;\vec{n})d\tau .$$

Σε ένα σημείο $\vec{x}$ του ρευστού που βρίσκεται πάνω σε μια επιφάνεια $\partial\Omega_t$, η οποία έχει στο $\vec{x}$ μοναδιαία εξωτερική κάθετο $\vec{n}$, η τάση που ασκείται στο ρευστό εκτός του Ω_t είναι ίση σε μέτρο και αντίθετη σε κατεύθυνση από την τάση που ασκείται στο εσωτερικό λόγω του ρευστού έξω από το Ω_t.



Σχ. 26. Το διάνυσμα τάσης $\vec{\sigma}$ εξαρτάται από τη μοναδιαία κάθετο $\vec{n}$ της επιφάνειας.



Σχ. 27.

Θεώρημα 5 (Δράση – Αντίδραση).

$$(9) \qquad \vec{\sigma}(\vec{x},t;-\vec{n}) = -\vec{\sigma}(\vec{x},t;\vec{n}) .$$

Απόδειξη. Έστω υλικό χωρίο Ω_t. Χωρίζουμε το Ω_t σε δύο υποχωρία Ω_t^1 και Ω_t^2 με μια διεπιφάνεια S, η οποία διέρχεται από το σημείο $\vec{x}$ (Σχ. 27). Εφαρμόζοντας την (8) στο Ω_t^1 και στο Ω_t^2 έχουμε αντίστοιχα:

$$(10) \qquad \int_{\Omega_t^1} \rho\left(\frac{D\vec{v}}{Dt} - \vec{f}\right)dx = \int_{\partial\Omega_t^1} \vec{\sigma}d\tau$$

$$(11) \qquad \int_{\Omega_t^2} \rho\left(\frac{D\vec{v}}{Dt} - \vec{f}\right)dx = \int_{\partial\Omega_t^2} \vec{\sigma}d\tau .$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (10) και (11) και αφαιρώντας από το άθροισμα τη (8), έχουμε $\vec{0} = \int_S \left(\vec{\sigma}(\vec{x},t;\vec{n}) + \vec{\sigma}(\vec{x},t;-\vec{n})\right)d\tau$, όπου $\vec{n}$ η εξωτερική μοναδιαία κάθετος στο σύνορο του Ω_t^1. Η ολοκληρωτική μορφή του θεωρήματος της μέσης τιμής συνεπάγεται ότι για $i = 1,2,3$ ισχύουν οι σχέσεις

$$(12) \qquad \left[\sigma_i\left(\vec{z}^{(i)},t;\vec{n}_1^{(i)}\right) + \sigma_i\left(\vec{z}^{(i)},t;-\vec{n}_1^{(i)}\right)\right] = 0 ,$$

όπου $\vec{z}^{(i)}$ σημεία της S και $\vec{n}_1^{(i)}$ η μοναδιαία κάθετος στην S προς το εξωτερικό του Ω_t^1 υπολογισμένη στο σημείο $\vec{z}^{(i)}$. Έστω $\vec{x} \in S$ και $\vec{n}$ η μοναδιαία κάθετος στην S στο $\vec{x}$ προς το εξωτερικό του Ω_t^1. Εφαρμόζοντας τη (12) σε κατάλληλη ακολουθία χωρίων $\{\Omega_{t,m}\}$ με διεπιφάνειες $\{S_m\}$ υποσύνολα της S που περιέχουν το $\vec{x}$ έτσι ώστε ο όγκος του $\Omega_{t,m}$ και το εμβαδόν της S_m να τείνουν στο μηδέν, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι αντίστοιχες ακολουθίες $\vec{z}_m^{(i)}$ και $\vec{n}_{1,m}^{(i)}$ τείνουν αντίστοιχα στα $\vec{x}$ και $\vec{n}$, οπότε η (12) μας δίνει το ζητούμενο αποτέλεσμα. Το διάνυσμα τάσης $\vec{\sigma}(\vec{x},t;\vec{n})$ εξαρτάται με ένα συγκεκριμένο τρόπο από τη μοναδιαία κάθετο $\vec{n}$.

Θεώρημα 6. $(Cauchy)$ *Αν* $\vec{\sigma}_i(\vec{x},t;\vec{n})$, $i=1,2,3$ *είναι οι τρεις συνιστώσες του διανύσματος τάσης* $\vec{\sigma}(\vec{x},t;\vec{n})$ *και* $\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)$, *τότε υπάρχουν συναρτήσεις* $\sigma_{ji}=\sigma_{ji}(\vec{x},t)$ *τέτοιες ώστε:*

(13) $$\sigma_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ji} n_j .$$

Μάλιστα, ισχύει ότι

(14) $$\sigma_{ji}(\vec{x},t) = \sigma_i(\vec{x},t;\vec{e}_j),$$

όπου με $\vec{e}_j$, $j=1,2,3$, *συμβολίζουμε τα μοναδιαία διανύσματα στις κατευθύνσεις των αξόνων* x_1,x_2,x_3, *αντίστοιχα.*

Οι εννέα ποσότητες σ_{ji} είναι οι συνιστώσες του τανυστή τάσης. Εξ' ορισμού, η σ_{ji} είναι η i- στή συνιστώσα του διανύσματος τάσης στην έδρα του τετραέδρου με μοναδιαία εξωτερική κάθετο $\vec{e}_j$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 6 μπορούμε να γράψουμε την αρχή διατήρησης της ορμής (8) σε μορφή συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων. Ο υπολογισμός αυτός διευκολύνεται αν υιοθετήσουμε μια σύμβαση συμβολισμού βάσει της οποίας δε γράφουμε τα σύμβολα Σ των αθροισμάτων σε πολύπλοκες παραστάσεις. Η πρακτική αυτή λέγεται *σύμβαση αθροίσματος* και υποθέτει ότι παίρνουμε αθροίσματα των όρων που έχουν επαναλαμβανόμενους δείκτες. Έτσι, $a_i b_{ij}$ σημαίνει $\sum_i a_i b_{ij}$ και $a_i b_{ij} c_j$ σημαίνει $\sum_i \sum_j a_i b_{ij} c_j$.

Θεώρημα 7. *Η αρχή των τάσεων του* Cauchy *(7) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή*

(15) $$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_1} \rho\upsilon_i dx + \int_{\partial\Omega_1} \rho\upsilon_i\upsilon_j n_j d\tau = \int_{\Omega_1} \rho f_i dx + \int_{\partial\Omega_1} \sigma_i d\tau,$$

όπου Ω_1 *οποιοδήποτε χωρίο του* R^3.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 1 με $g \equiv \rho\upsilon_i$ παίρνουμε: $\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho\upsilon_i dx = \int_{\Omega_t} (\rho\upsilon_i)_t\, dx + \int_{\partial\Omega_t} \rho\upsilon_i\upsilon_j n_j d\tau$. Συνεπώς, $\int_{\Omega_t} \rho \frac{D\upsilon_i}{Dt} dx = \int_{\Omega_t} (\rho\upsilon_i)_t\, dx + \int_{\partial\Omega_t} \rho\upsilon_i\upsilon_j n_j d\tau$. Έστω τώρα Ω_1 το χωρίο το οποίο συμπίπτει με το Ω_t όταν $t=t_1$. Τότε $\int_{\Omega_1} \rho \frac{D\upsilon_i}{Dt} dx = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_1} \rho\upsilon_i dx + \int_{\partial\Omega_t} \rho\upsilon_i\upsilon_j n_j d\tau$. Χρησιμοποιώντας ότι $\int_{\Omega_t} \rho\left(\frac{D\upsilon_i}{Dt} - f_i\right) dx = \int_{\partial\Omega_t} \sigma_i d\tau$, παίρνουμε τελικά την (15).

6.3 Ενέργεια.

Για ένα ρευστό (αέριο ή υγρό) που βρίσκεται σε ηρεμία είναι σαφές ότι το διάνυσμα τάσης $\vec{\sigma}$, σε ένα σημείο πάνω σε μια ιδεατή επιφάνεια μέσα στο ρευστό είναι πάντα κάθετο προς την επιφάνεια, δηλαδή είναι παράλληλο προς τη μοναδιαία κάθετο $\vec{n}$ (ή $-\vec{n}$). Αυτό δεν είναι αληθές στην περίπτωση των στερεών μέσων, τα οποία μπορούν να υποστηρίζουν πολύπλοκες εντατικές καταστάσεις με διατμητικές ή εφαπτομενικές τάσεις, χωρίς να κινούνται. Η ιδιότητα της καθετότητας του διανύσματος τάσης ισχύει και για ρευστά σε κατάσταση ομοιόμορφης κίνησης, στα οποία δηλαδή η ταχύτητα είναι σταθερή για κάποιο χρονικό διάστημα. Μια από τις απλούστερες κλάσεις γενικότερων ροών στις οποίες ισχύει η αρχή της καθετότητας, δηλαδή η εξίσωση

$$\vec{\sigma}(\vec{x},t;\vec{n}) = -p(\vec{x},t)\vec{n}, \tag{16}$$

είναι οι λεγόμενες *άτριβες* ροές (ή ροές ρευστών χωρίς ιξώδες). Σε αυτές, η τάση σε μια επιφάνεια είναι παράλληλη προς το κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας. Ο συντελεστής p είναι η *πίεση*. Η παραδοχή ότι το ρευστό δεν έχει ιξώδες (δηλαδή δεν έχει εσωτερικές τριβές), είναι εξαιρετικά χρήσιμη στις τεχνολογικές εφαρμογές, γιατί σε πολλές περιπτώσεις ροών πραγματικών ρευστών ισχύει κατά προσέγγιση η σχέση (16) και γιατί οι υπολογισμοί είναι πολύ απλούστεροι όταν χρησιμοποιούμε την (16) και όχι πολυπλοκότερες καταστατικές εξισώσεις. Ένα *ιδανικό* (ή *ιδεώδες*) ρευστό είναι ένα ρευστό χωρίς ιξώδες, του οποίου η ροή είναι *ασυμπίεστη*.

Από την εξίσωση (16) μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις συνιστώσες σ_{ij} του τανυστή των τάσεων. Έχουμε:

$$\sigma_{ij} = -p(\vec{x},t)\delta_{ij}, \tag{17}$$

όπου το δ_{ij} είναι το σύμβολο του «δέλτα του Kronecker», το οποίο ορίζεται ως $\delta_{ij}=1$ αν $i=j$ και $\delta_{ij}=0$ αν $i\neq j$. Επειδή ισχύει ότι $\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(p(\vec{x},t)\delta_{ij}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}p(\vec{x},t)$, μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις *Cauchy*: $\rho\frac{D\upsilon_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial}{dx_j}\sigma_{ji}, i=1,2,3$, ως $\rho\frac{D\upsilon_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}$, $i=1,2,3$, ή σε διανυσματική μορφή, ως:

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{f} - \overrightarrow{grad}\,p. \tag{18}$$

Η σχέση (18) λέγεται *εξίσωση* (ή *εξισώσεις*) του *Euler*.

Θεώρημα 8. *Αν οι συναρτήσεις μέσα στα ολοκληρώματα στην εξίσωση*

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}\cdot\vec{v}+\rho e\right)dx = \int_{\Omega_t}\rho\vec{f}\cdot\vec{v}dx + \int_{\partial\Omega_t}\vec{\sigma}\cdot\vec{v}d\theta - \int_{\partial\Omega_t}\vec{q}\cdot\vec{n}d\tau, \tag{19}$$

όπου το Ω_t είναι ένα οποιοδήποτε υλικό χωρίο με σύνορο $\partial\Omega_t$, του οποίου η εξωτερική μοναδιαία κάθετος συμβολίζεται με $\vec{n}$, και όπου το διάνυσμα $\vec{q}$ παριστάνει την πυκνότητα της ροής της θερμότητας, είναι αρκετά ομαλές, έχουμε:

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}+e\right) = \rho\vec{f}\cdot\vec{v} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ji}\upsilon_i\right) - div\vec{q}. \tag{20}$$

Θεώρημα 9. *Ο ρυθμός μεταβολής της εσωτερικής ενέργειας δίνεται από την εξίσωση:*

(21) $$\rho \frac{De}{Dt} = -div\vec{q} + \sigma_{ji} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j}.$$

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις διατήρησης της ορμής $\rho \frac{D\upsilon_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ji}, i = 1,2,3$, επί υ_i και αθροίζοντας ως προς $i, i = 1,2,3$, παίρνουμε: $\frac{\rho}{2}\frac{D}{Dt}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = \rho f_i \upsilon_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ji}\upsilon_i\right) - \sigma_{ji}\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j}$. Αφαιρώντας από την (20) παίρνουμε την (21).

<u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</u>

Ιστορική αναδρομή: Κάποιες Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις.

«Η Φιλοσοφία (της φύσης) είναι γραμμένη σ' εκείνο το μεγάλο βιβλίο που βρίσκεται συνεχώς μπροστά στα μάτια μας – εννοώ το σύμπαν – δεν μπορούμε όμως να το κατανοήσουμε χωρίς να μάθουμε πρώτα τη γλώσσα και χωρίς να συλλάβουμε την έννοια των συμβόλων της. Το βιβλίο είναι στη γλώσσα των Μαθηματικών και τα σύμβολα είναι τρίγωνα, κύκλοι και άλλα γεωμετρικά σχήματα, χωρίς τη βοήθεια των οποίων είναι αδύνατο να καταλάβουμε έστω και μία λέξη απ' αυτό, χωρίς αυτά περιφερόμαστε μάταια μέσα σ' ένα σκοτεινό λαβύρινθο». *ΓΑΛΙΛΑΙΟΣ*

Αυτό το απόσπασμα είναι χαρακτηριστικό της πίστης, που ήταν πολύ διαδεδομένη τον καιρό του Γαλιλαίου, ότι πολλά από τα μυστικά της φύσης ήταν δυνατό να αναχθούν στα Μαθηματικά. Στα τέλη του δεκάτου εβδόμου αιώνα αυτή η αντίληψη ενισχύθηκε δραματικά όταν ο Νεύτων χρησιμοποίησε το νόμο της βαρύτητας και το νέο Απειροστικό Λογισμό για αν αποδείξει τους τρεις νόμους του *Kepler* για την κίνηση των ουράνιων σωμάτων. Η επιρροή αυτής της φιλοσοφίας των Μαθηματικών ήταν τεράστια και πολλοί μαθηματικοί προσπαθούσαν να «μαθηματικοποιήσουν» τη φύση. Ο βαθμός στον οποίο έχουν σήμερα διαποτιστεί από τα μαθηματικά οι φυσικές επιστήμες (και όλο και περισσότερο οι οικονομικές, κοινωνικές και ανθρωπιστικές επιστήμες) είναι ένα κριτήριο της επιτυχίας αυτών των προσπαθειών. Αντίστοιχα, οι προσπάθειες μαθηματικοποίησης της φύσης οδήγησαν συχνά σε νέες μαθηματικές ανακαλύψεις.

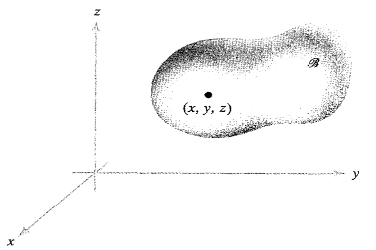
Μία σύντομη περιγραφή τριών από τις διασημότερες μερικές διαφορικές εξισώσεις: την εξίσωση της θερμότητας, την εξίσωση του δυναμικού (ή εξίσωση του *Laplace*) και την κυματική εξίσωση, παραθέτουμε παρακάτω.

Η εξίσωση της θερμότητας. Στις αρχές του δεκάτου ενάτου αιώνα ο Γάλλος μαθηματικός *Joseph Fourier* (1768 – 1830) ασχολήθηκε με τη μελέτη της θερμότητας. Η διάδοση της θερμότητας είχε προφανείς εφαρμογές σε προβλήματα τόσο της βιομηχανίας όσο και της επιστήμης: η καλύτερη κατανόησή της θα μπορούσε, για παράδειγμα, να κάνει πιο αποτελεσματική την τήξη των μετάλλων και θα επέτρεπε στους επιστήμονες να προσδιορίσουν τη θερμοκρασία ενός σώματος αν δινόταν η θερμοκρασία στο σύνορό του, και επομένως να βρουν προσεγγιστικά τη θερμοκρασία στο εσωτερικό της Γης.

Έστω ένα ομοιογενές σώμα $B \subset \mathbb{R}^3$ (Σχήμα), το οποίο παριστάνεται από κάποιο χωρίο στον τρισδιάστατο χώρο. Με $T(x,y,z,t)$ συμβολίζουμε τη θερμοκρασία του σώματος στο σημείο (x,y,z) τη χρονική στιγμή t. Ο *Fourier* απέδειξε ότι η T πρέπει να ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση (*εξίσωση της θερμότητας*),

(I) $$k\left(\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{d^2T}{dy^2}+\frac{d^2T}{dz^2}\right)=\frac{dT}{dt},$$

όπου k είναι μία σταθερά που η τιμή της εξαρτάται από την αγωγιμότητα του υλικού από το οποίο είναι φτιαγμένο το σώμα.



Ο *Fourier* χρησιμοποίησε αυτή την εξίσωση για να λύσει προβλήματα διάδοσης της θερμότητας. Μάλιστα, οι έρευνές του πάνω στις λύσεις της εξίσωσης (I) τον οδήγησαν στην ανακάλυψη μιας καινούριας μαθηματικής έννοιας, των (σημερινών) σειρών *Fourier*.

Η εξίσωση του δυναμικού. Το δυναμικό βαρύτητας V (συχνά λέγεται και δυναμικό του Νεύτωνα) μιας μάζας m στο σημείο (x, y, z), που προκαλείται από μία σημειακή μάζα M τοποθετημένη στην αρχή των αξόνων, δίνεται από την $V = -G\dfrac{Mm}{r}$, όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Το δυναμικό V ικανοποιεί την εξίσωση

(II)
$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

παντού, εκτός από την αρχή των αξόνων. Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή σαν *η εξίσωση του Laplace*. Ο *Pierre Simon de Laplace* (1749 – 1827) δούλευε πάνω στη βαρυτική έλξη μη σημειακών μαζών και ήταν ο πρώτος που συσχέτισε την εξίσωση (II) με τη βαρυτική έλξη. Έδωσε αποδείξεις (που αργότερα αποδείχθηκαν λανθασμένες) για το γεγονός ότι η εξίσωση αυτή ίσχυε για κάθε σώμα και κάθε σημείο, μέσα ή έξω από το σώμα. Όμως ο *Laplace* δεν ήταν ο πρώτος άνθρωπος που έγραψε την εξίσωση (II). Η εξίσωση του δυναμικού εμφανίστηκε για πρώτη φορά σε ένα από τα σημαντικότερα έργα του *Euler* το 1752, τις «Αρχές της κίνησης των ρευστών», όπου χρησιμοποιήθηκε σε σχέση με την κίνηση των (ασυμπίεστων) ρευστών. Ο *Euler* σημείωνε ότι δεν είχε καμία ιδέα για το πώς μπορούσε να λυθεί η εξίσωση αυτή. Αργότερα ο *Poisson* έδειξε ότι αν το (x, y, z) βρίσκεται σο εσωτερικό ενός σώματος, τότε το V ικανοποιεί την εξίσωση

(III)
$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\rho$$

όπου ρ η πυκνότητα του σώματος. Η εξίσωση (III) λέγεται σήμερα *εξίσωση του Poisson*. Ο *Poisson* επίσης πρώτος υπέδειξε τη σημασία αυτής της εξίσωσης για προβλήματα σχετικά με ηλεκτρικά πεδία. Παρατηρούμε ότι αν η θερμοκρασία T μένει σταθερή στο χρόνο, τότε η εξίσωση της θερμότητας ανάγεται στην εξίσωση του *Laplace*.

Οι εξισώσεις του *Laplace* και του *Poisson* είναι θεμελιώδεις σε πολλούς κλάδους, εκτός από τη μηχανική των ρευστών, τα πεδία βαρύτητας και τα ηλεκτροστατικά πεδία. Για παράδειγμα, χρησιμοποιούνται στη μελέτη των μεμβρανών και των υγρών κρυστάλλων.

Η κυματική εξίσωση. Η γραμμική κυματική εξίσωση στο χώρο έχει τη μορφή

(IV)
$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dz^2} = c^2 \frac{d^2 f}{dt^2}$$

Η μονοδιάστατη κυματική εξίσωση

(V)
$$\frac{d^2 f}{dx^2} = c^2 \frac{d^2 f}{dt^2}$$

χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1727 από τον *John Bernoulli* και αρκετά χρόνια αργότερα από τον *Jean Le Rond d' Alembert* στην προσπάθειά του να εξηγήσει την κίνηση μίας παλλόμενης χορδής (για παράδειγμα μίας χορδής βιολιού). Η εξίσωση (IV) αποδείχτηκε χρήσιμη στη μελέτη των παλλόμενων σωμάτων και την ελαστικότητα και εμφανίστηκε στη μελέτη της διάδοσης της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας και των ηχητικών κυμάτων.