Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών

Προπτυχιακή εργασία:

"Μια εισαγωγή στις μερικές διαφορικές εξισώσεις της μαθηματικής φυσικής"

Ελεάνα Ζήκα
Α.Μ.: 311/2006027
Επιβλέπων καθηγητής: Χουσιάδας Κωνσταντίνος

Σάμος, Νοέμβριος 2010

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Χουσιάδα Κωνσταντίνο για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με αυτό το θέμα στην προπτυχιακή μου εργασία και για την υποστήριξη που μου παρείχε καθ΄ όλη την διάρκεια της συγγραφής αυτής.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου, στο οποίο ήρθα για πρώτη φορά σε επαφή με τις έννοιες που αναπτύσσονται εδώ καθώς και με τα γνωστικά αντικείμενα που διδάχτηκα για την επιστήμη των Μαθηματικών από πολλούς καθηγητές του Πανεπιστημίου.

Ελεάνα Ζήκα
Οκτώβριος 2010

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η μελέτη των μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι μία από τις θεμελιώδεις περιοχές των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Ασχολείται κυρίως με:

- Την διερεύνηση της ύπαρξης και της μοναδικότητας των λύσεων τους
- Την ευστάθεια των λύσεων τους σε μικρές διαταραχές
- Μεθόδους κατασκευής λύσεων

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε κυρίως με τις μεθόδους κατασκευής των λύσεων. Στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε τις μερικές διαφορικές εξισώσεις τόσο από την πλευρά των εφαρμογών τους όσο και των μεθόδων επίλυσης τους.

Μερική διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ), είναι κάθε εξίσωση, που περικλείει (άγνωστη) συνάρτηση δύο ή περισσότερων μεταβλητών και μερικές παραγωγούς αυτή πρώτης ή ανώτερης τάξης. Ενδεικτικά αναφέρουμε μερικές από τις πιο γνωστές μερικές διαφορικές εξισώσεις:

1. Εξίσωση Δυναμικού (Laplace): $\nabla^2 u(x) = 0, x \in D \subseteq \mathbb{R}^N, N \geq 2$
2. Εξίσωση θερμότητας σε μια διάσταση: $u_t(x,t) = a^{-2} u_{xx}(x,t), t > 0, x \in D \subseteq \mathbb{R}, a > 0$
3. Κυματική εξίσωση σε δύο διαστάσεις:
   $u_{tt}(x,y,t) = c^{-2}(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)), t > 0, (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, c > 0$
4. Εξίσωση Laplace στις 3 διαστάσεις και σε σφαιρικές συντεταγμένες:
   $$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi} + \frac{\cot\phi}{r^2}u_\phi + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}u_{\theta\theta} = 0, (r,\phi,\theta) \in (0,r_0)\times(0,2\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$

Το πεδίο ορισμού D θεωρείτε ως ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N, N \geq 1$.

Τάξη μιας ΜΔΕ, είναι η τάξη της μεγαλύτερης μερικής παραγωγού που παρουσιάζεται στην εξίσωση.

Βαθμός μιας ΜΔΕ, είναι η δύναμη στην οποία είναι υψωμένη η μεγαλύτερη τάξης παράγωγος.

Γραμμική ΜΔΕ, είναι εκείνη η εξίσωση της οποίας όλοι οι όροι είναι πρώτου βαθμού ως προς την άγνωστη συνάρτηση και τις παραγωγούς αυτής.

Ομογενής γραμμική ΜΔΕ, είναι η εξίσωση της οποίας κάθε Όρος περιέχει, είτε την άγνωστη συνάρτηση ή κάποια από τις μερικές παραγώγους αυτής.

Για την μελέτη των μερικών διαφορικών εξισώσεων υπάρχουν πολλές μέθοδοι και τεχνικές, οι σημαντικότερες από τις οποίες μπορούν να θεωρηθούν πως είναι οι:

1. Χωρισμός μεταβλητών
2. Αλλαγή συστήματος Συντεταγμένων (πολικές, σφαιρικές, κυλινδρικές)
3. Ανάπτυγμα ιδιοσυναρτήσεων
4. Ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί (μετασχηματισμοί Fourier, Laplace, Hankel-Legendre, Hermite,Jacobi, Hilbert)
5. Ολοκληρωτικές Εξισώσεις- Συναρτήσεις Green
6. Μέθοδος Διαταραχών
7. Αριθμητικές Μέθοδοι

Στο πεδίο των διαφορικών εξισώσεων, ένα Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (ΠΣΤ) αποτελείται από μια διαφορική εξίσωση (ή ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων) που υπακούει σε συγκεκριμένους περιορισμούς, στα σύνορα ενός χωρίου όπου ορίζεται το πρόβλημα, οι οποίοι ονομάζονται συνοριακές συνθήκες. Η λύση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών συνίσταται στη εύρεση λύσης των διαφορικών αυτών εξισώσεων, η οποία να υπακούει στις συνοριακές συνθήκες. Προβλήματα συνοριακών τιμών απαντώνται σε διάφορους κλάδους της Φυσικής, όπου προβλήματα περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις που υπακούουν σε συνοριακές συνθήκες. Για να είναι χρήσιμο σε εφαρμογές, ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών πρέπει να είναι «καλώς τοποθετημένο». Αυτό σημαίνει ότι με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, πρέπει να υπάρχει μια μοναδική λύση, η οποία να εξαρτάται με τρόπο συνεχή από τα δεδομένα καθώς και από τις παραμέτρους του προβλήματος.

Μεγάλος όγκος θεωρητικής δουλειάς, στο πεδίο των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (Μ.Δ.Ε), αφορά στην επίλυση Π.Σ.Τ που ανακύπτουν από επιστημονικές και τεχνολογικές εφαρμογές, και οι οποίες συνιστούν από μαθηματική άποψη προβλήματα «καλώς τοποθετημένα».

Μεταξύ των πρώτων προβλημάτων συνοριακών τιμών που μελετήθηκαν είναι το πρόβλημα του Dirichlet, που αφορά στην εύρεση συναρτήσεων οι οποίες αποτελούν λύση της εξίσωσης Laplace, του Ηλεκτρομαγνητισμού, η λύση του οποίου δόθηκε μέσω της γνωστής ως «αρχή του Dirichlet». Από τα παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι η γνώση επίλυσης προβλημάτων συνοριακών τιμών είναι σημαντική και απαραίτητη για την επίλυση πλήθους προβλημάτων της φυσικής και ιδιαίτερα της Μηχανικής.

Εκτός των προβλημάτων που ήδη αναφέρθηκαν παραπάνω, η μεθοδολογία αυτή είναι χρήσιμη για την επίλυση προβλημάτων αντοχής των κατασκευών και πρόβλεψης της αστοχίας τους.

Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να διατυπώσουμε μια διάκριση μεταξύ ενός προβλήματος αρχικών τιμών και ενός προβλήματος συνοριακών τιμών:

Το Πρόβλημα των Αρχικών Τιμών και το Πρόβλημα των Συνοριακών Τιμών:

Η διαφορά μεταξύ ενός προβλήματος αρχικών τιμών και ενός προβλήματος συνοριακών τιμών είναι ότι ένα Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ) ορίζεται με συνθήκες που προσδιορίζουν την εξαρτημένη μεταβλητή της εξίσωσης, $u(x,t)$ (και των παραγώγων της), στο κάτω άκρο ενός χρονικού διαστήματος, $t \in [a,b]$ δηλαδή στην αρχική τιμή του χρόνου $t=a$. Από την άλλη μεριά, ένα Π.Σ.Τ έχει τις συνθήκες του καθορισμένες στα άκρα μιας χωρικής, ανεξάρτητης μεταβλητής του προβλήματος. Για παράδειγμα, αν οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι ο χρόνος, $t \geq 0$ και ο χώρος $x \in \mathbb{R}$ που μεταβάλλεται στο κλειστό διάστημα $[0,L]$ σε ένα Π.Α.Τ. καθορίζονται οι τιμές της $u(x,t)$ και των παραγώγων της για όλα τα $x \in [0,L]$ τη χρονική στιγμή $t=0$, ενώ σε ένα Π.Σ.Τ οι τιμές της $u(x,t)$ καθορίζονται στο x=0 και x=L , για όλα τα $t \geq 0$.

Υπάρχουν και Π.Α.Σ.Τ, για παράδειγμα, αν μελετάμε τη θερμοκρασία μιας ράβδου σιδήρου, της οποίας το ένα άκρο έχει (για κάθε $t \geq 0$) θερμοκρασία ίση με T_1 ενώ το άλλο άκρο έχει (για κάθε $t \geq 0$) θερμοκρασία ίση με T_2, αυτό αποτελεί ένα Π.Σ.Τ. Αντίθετα, αν έχουμε αρχικά επιβάλλει στη ράβδο θερμοκρασία $u(x,0) = f(x)$ και εξετάζουμε την μετέπειτα εξέλιξη της θερμοκρασίας της, $u(x,t)$ αυτό συνιστά ένα Π.Α.Τ.

Τύποι Προβλημάτων Συνοριακών Τιμών:

Αν σε ένα σύνορο δίνεται η τιμή της παραγώγου της εξαρτημένης μεταβλητής του προβλήματος, τότε η συνθήκη ονομάζεται συνθήκη Neumann. Για παράδειγμα, εάν στο ένα άκρο μιας σιδερένιας ράβδου, $x = 0$, υπάρχει ένας θερμαντήρας, ο οποίος προσφέρει θερμότητα στη ράβδο με ρυθμό

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = g(t)$ αυτό θα αποτελούσε μία συνθήκη Neumann.

Αν στο σύνορο είναι γνωστή η ίδια η τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής, τότε αυτό λέγεται συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet. Για παράδειγμα, εάν στο άκρο x=0 μιας ράβδου η θερμοκρασία είναι πάντα $u(0,t) = 0$, τότε αυτό αποτελεί μια συνθήκη τύπου Dirichlet.

Αν το πρόβλημα προσδιορίζεται από ένα συνδυασμό συνοριακών τιμών για την συνάρτηση $u(x,t)$ και αρχικών συνθηκών της μορφής $u(x,0) = f(x)$,το πρόβλημα καλείται γενικά και τύπου Cauchy.

Μια άλλη διάκριση των Π.Σ.Τ είναι αυτή που γίνεται με βάση τον τύπο του διαφορικού τελεστή που το περιγράφει. Για παράδειγμα, για ένα ελλειπτικό τελεστή αναφερόμαστε σε ελλειπτικά Π.Σ.Τ (όπως π.χ. συμβαίνει με τον τελεστή Laplace), ενώ υπερβολικό τελεστή έχουμε στα λεγόμενα υπερβολικά Π.Σ.Τ (όπως είναι η εξίσωση κύματος). Αυτές οι κατηγορίες στη συνέχεια υποδιαιρούνται σε γραμμικά και μη γραμμικά Προβλήματα Συνοριακών Τιμών.

Δομή της εργασίας

Στην εργασία αυτή θα ασχολούμαι με την μελέτη των συνοριακών προβλημάτων και τους τρόπους επίλυσης τους. Πιο αναλυτικά:

Στο **$1^{ο}$ κεφάλαιο,** θα ασχοληθούμε με μοντέλα διαφορικών εξισώσεων, εξισώσεις διάχυσης, τους νόμους διατήρησης, τις καταστατικές εξισώσεις , καθώς και την εξίσωση θερμότητας. Επιπλέον, θα αναλύσουμε εξισώσεις ισορροπίας, την εξίσωση Laplace, όπως και διάφορες ολοκληρωτικές ταυτότητες μαζί με τις βασικές τους ταυτότητες. Ακόμα, θα γίνει αναφορά στην μέθοδο Fourier και στους ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς (Laplace, Fourier).

Στο **$2^{ο}$ κεφάλαιο,** θα αναλύσουμε τις ολοκληρωτικές εξισώσεις και τις συναρτήσεις Green, κάνοντας αναφορά στις εξισώσεις Volterra, και Fred Holm. Τέλος, θα εισάγουμε την έννοια των κατανομών καθώς και την επίλυση διαφορικών εξισώσεων βάσει αυτών και θα λύσουμε διάφορα ελλειπτικά προβλήματα.

Στο **$3^{ο}$ κεφάλαιο,** θα αναλύσουμε διάφορα κυματικά φαινόμενα σε συνεχή μέσα (εξίσωση Burgers, Korteweg-de Vries, τύπος D'Alembert) και θα κάνουμε αναφορά στην δυναμική των αερίων (μέθοδος Riemann), καθώς και στην κίνηση των ρευστών στον $\mathbb{R}^3$.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι στο τέλος κάθε κεφαλαίου θα παραθέσουμε κάποιες λυμένες ασκήσεις βασισμένες σε όσα έχουμε αναλύσει.

Στο **$4^{ο}$ κεφάλαιο,** θα κάνουμε μια μικρή αναφορά στην αρχή Duhamel, και στην μέθοδο Huygens.

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου θα παραθέσουμε κάποιες ασκήσεις που αφορούν τα όσα αναφέρθηκαν στην θεωρία.

Κεφάλαιο 1

1.1 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Μια ΣΔΕ δεύτερης τάξης είναι μια εξίσωση της μορφής $F(t, y, \dot{y}, \ddot{y}) = 0$, όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή t ανήκει σε ένα διάστημα I. Μια λύση της εξίσωσης αυτής είναι μια συνάρτηση y(t) δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο I, τέτοια ώστε να ικανοποιεί την ταυτότητα $F(t, y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t)) = 0, \forall t \in I$. Η λύση y είναι μια συνάρτηση που παριστάνει την κατάσταση του συστήματος και η διαφορική εξίσωση είναι μια εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη αυτής της κατάστασης στο χρόνο.

Πολλά προβλήματα όμως δεν είναι δυνατόν να περιγραφούν από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις γιατί η κατάσταση του συστήματος εξαρτάται από περισσότερες από μια μεταβλητές (χρόνο και χώρο). Για παράδειγμα, η θερμοκρασία u μιας ράβδου μήκους l εξαρτάται από την θέση x στη ράβδο και το χρόνο t που έχει παρέλθει από την χρονική στιγμή κατά την οποία εφαρμόστηκαν οι αρχικές συνθήκες.

Γενικά, μια ΜΔΕ δεύτερης τάξης για μια συνάρτηση $u = u(x,t)$ δυο ανεξάρτητων μεταβλητών x,t, είναι μια εξίσωση της μορφής

$$G(x,t,u,u_x u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = 0 \qquad \textbf{(1.1)}$$

για (x,t) σε κάποιο χωρίο D του $\mathbb{R}^2$. Μια λύση της (1,1) είναι μια συνάρτηση $u = u(x,t)$ στο D, δυο φόρες συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς x και t στο D, η οποία αν αντικατασταθεί στην (1.1) μας δίνει μια ταυτότητα στον D. Το χωρίο D θα αναφέρεται ως χώροχρονικό χωρίο, ενώ τα προβλήματα που περιέχουν ως ανεξάρτητη μεταβλητή το t, λέγονται *προβλήματα εξέλιξης*. Προβλήματα στα οποία υπάρχουν δυο χωρικές συντεταγμένες x, y θα ονομάζονται *προβλήματα ισορροπίας ή προβλήματα μόνιμης κατάστασης*.

Συνήθως τα φαινόμενα, τα οποία περιγράφονται από μια μερική διαφορική εξίσωση επιβάλλουν κάποιους πρόσθετους περιορισμούς, που πρέπει να ικανοποιεί η λύση. Οι περιορισμοί αυτοί χωρίζονται στις ακόλουθες μεγάλες κατηγορίες:

Α. Αρχικές συνθήκες ή συνθήκες Cauchy.

Τιμές της άγνωστης συνάρτησης $u(x,t)$,πιθανόν και της $u_t(x,t)$, όπου $0 < t < \infty$, δίνονται στο σημείο $t = 0$, δηλαδή την αρχή μελέτης του εξεταζομένου φαινομένου. Για παράδειγμα, το ακόλουθο πρόβλημα αποτελεί ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ),

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}(x,t) = \nabla^2 u(x,t), x \in D, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), x \in D \\ u_t(x,0) = g(x), x \in D \end{array} \right\}$$

όπου $D \times (0,\infty)$ είναι το πεδίο ορισμού της $u(x,t)$ και $f(x), g(x)$ οι δοσμένες συναρτήσεις στο $D \subseteq \mathbb{R}^N, N \geq 1$.

Β. Συνθήκες Dirichlet ή Συνοριακές

Εδώ η άγνωστη συνάρτηση $u(x,t)$ έχει προκαθοριστεί στο σύνορο ∂D του πεδίου ορισμού του D,

$$\begin{Bmatrix} u_{tt}(x,t)=\nabla^2 u(x,t), x\in D, t>0 \\ u(x,t)=f(x,t), x\in \partial D, t>0 \end{Bmatrix}$$

με $f(x)$ ορισμένη στο $\partial D\times(0,+\infty)$ και $D\subseteq \mathbb{R}^N, N\geq 2$.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η μερική διαφορική της μορφής (1.1), μπορεί να γενικευθεί προς πολλές κατευθύνσεις. Όπως θα δούμε υπάρχουν τρεις θεμελιώδεις τύποι μερικών διαφορικών εξισώσεων- αυτές που περιγράφουν φαινόμενα διάχυσης, *(παραβολικού τύπου)*, αυτές που περιγράφουν κυματικά φαινόμενα *(υπερβολικού τύπου)* και αυτές που περιγράφουν φαινόμενα καταστάσεων ισορροπίας *(ελλειπτικού τύπου)*.

Γραμμικότητα και μη γραμμικότητα

Θεωρούμε ότι η μερικη εξίσωση (1.1) ορίζει έναν διαφορικό τελεστή L που δρα στην άγνωστη συνάρτηση $u(x,t)$ και γράφουμε την (1) ως

$$Lu(x,t)=f(x,t),(x,t)\in D \text{ ή } Lu=f,(x,t)\in D \qquad \textbf{(1.2)}$$

Υποθέτουμε ότι η f στο δεύτερο μέλος είναι γνωστή συνάρτηση. Αν $f=0$ στο D, τότε η (1.2) λέγεται *ομογενής*, αλλιώς *μη-ομογενής*. Η εξίσωση της θερμότητας, $u_t=ku_{xx}$ μπορεί να γραφτεί στην μορφή $Lu=0$, όπου L είναι ο διαφορικός τελεστής με μερικές παραγωγούς $\frac{\partial}{\partial t}-k\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ και είναι ομογενής. Η ΜΔΕ $uu_t+2txu-\sin(tx)=0$ γράφεται και ως $Lu=\sin(tx)$, όπου ο διαφορικός τελεστής L ορίζεται από την σχέση $Lu=uu_t+2txu$. Η εξίσωση αυτή προφανώς είναι μη ομογενής. Θα λέμε ότι η ΜΔΕ (1.2) είναι *γραμμική* αν ο τελεστής L έχει τις ιδιότητες:

(i) $L(u+w)=Lu+Lw$ και

(ii) $L(cu)=cLu$, όπου u, w είναι συναρτήσεις και η c σταθερά. Εάν η (1.2) δεν είναι γραμμική, τότε λέγεται *μη-γραμμική*.

Παράδειγμα 1: Η εξίσωση θερμότητας είναι γραμμική. Πράγματι,

$$\begin{aligned} L(u+w) &= (u+w)_t-k(u+w)_{xx} \\ &= u_t+w_t-ku_{xx}-kw_{xx} \\ &= Lu+Lw \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} L(cu) &= (cu)_t-k(cu)_{xx} \\ &= cu_t-cku_{xx} \\ &= cLu \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2: Η διαφορική της μορφής $uu_t + 2txu = \sin(tx)$, είναι μη γραμμική, αφού,

$$\begin{aligned} L(u+w) &= (u+w)(u+w)_t + 2tx(u+w) \\ &= uu_t + wu_t + uw_t + ww_t + 2txu + 2txw \end{aligned}$$

ενώ

$$Lu + Lw = uu_t + 2txu + ww_t + 2txw \neq L(u+w)$$

Γενικότερα μπορούμε να γράψουμε μια εξίσωση δεύτερης τάξης στην μορφή:

$$\boxed{a(x,t)u_{tt} + b(x,t)u_{xt} + c(x,t)u_{xx} + d(x,t)u_t + e(x,t)u_x + g(x,t)u = f(x,t),(x,t) \in D} \quad \mathbf{(1.3)}$$

όπου a,b,c,d,e,g,f είναι δεδομένες συναρτήσεις συνεχείς στο D. Εάν κάποιος από τους συντελεστές $a,.....,g$ εξαρτάται από την u, θα λέμε ότι η εξίσωση είναι *σχεδόν γραμμική*.

Θα λέμε ότι η (1.3) είναι *υπερβολική, παραβολική ή ελλειπτική* σε ένα χωριό D αν η παράσταση $b(x,t)^2 - 4a(x,t)c(x,t)$ είναι θετική, μηδέν ή αρνητική, αντίστοιχα, στο χωρίο αυτό. Για παράδειγμα, η εξίσωση θερμότητας $u_t - ku_{xx} = 0$ έχει $b^2 - 4ac = 0$, άρα είναι παραβολική σε όλο τον χώρο $\mathbb{R}^2$.

Επαλληλία

Έστω $Lu = 0$ μια ομογενής γραμμική εξίσωση και έστω u_1, u_2 δυο συναρτήσεις που αποτελούν λύσεις της. Τότε, προφανως $u_1 + u_2$ είναι λύση της, όπως και η cu_1. Μέσω επαγωγικής απόδειξης μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι ο γραμμικός συνδυασμός $c_1u_1 + ... + c_nu_n$ είναι επίσης λύση. Αυτή είναι η *αρχή της επαλληλίας* για γραμμικές, μη ομογενείς εξισώσεις.

Έστω τώρα $u(x,t,a)$ μια οικογένεια λύσεων στο χωρίο D, όπου α μια πραγματική μεταβλητή που ανήκει στο διάστημα Γ. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι η $u(x,t,a)$ είναι λύση της εξίσωσης $Lu = 0$, για κάθε $a \in \Gamma$. Κατασκευάζουμε τότε, *φορμαλιστικά*, την συνάρτηση

$$u(x,t) = \int_\Gamma c(a)u(x,t,a)da$$

όπου $c(a)$ είναι μια συνάρτηση που παριστάνει ένα συνεχές σύνολο συντελεστών, το ανάλογο των $c_1, c_2, ...c_n$.θα έχουμε τις ισότητες

$$Lu = L\int_\Gamma c(a)u(x,t,a)da = \int_\Gamma c(a)Lu(x,t,a)da = \int_\Gamma c(a)0da = 0$$

με την u να είναι η λύση της $Lu = 0$.

Ασκήσεις

1. Βρείτε με ολοκλήρωση την γενική λύση των παρακάτω μερικών διαφορικών εξισώσεων και εκφράστε την μέσω αυθαίρετων συναρτήσεων:

(α) $u_x = 3xt + 4$

ΛΥΣΗ:

Ολοκληρώνουμε ως προς x και παίρνουμε: $\boxed{u = \frac{3}{2}x^2t + 4x + f(t)}$, όπου $f(t)$ μια αυθαίρετη συνάρτηση.

(β) $u_{xx} = 6xy$

ΛΥΣΗ:

Ολοκληρώνουμε μια φορά ως προς x και παίρνουμε: $u_x = \frac{6}{2}x^2 y + f(y)$, όπου $f(y)$ μια αυθαίρετη συνάρτηση δεύτερη ολοκλήρωση ως προς x έχουμε:

$\int u_x dx = \int (3x^2 y + f(y))dx \Rightarrow \boxed{u(x,y) \equiv u = x^3 y + xf(y) + g(y)}$, όπου $g(y)$ μια δεύτερη αυθαίρετη συνάρτηση.

(γ) $u_{xy} + \frac{1}{x}u_y = y\frac{1}{x^2}$

ΛΥΣΗ:

Θέτουμε $u_y = w$ και η αρχική εξίσωση γίνεται:

$$w_x + \frac{1}{x}w = y\frac{1}{x^2} \Rightarrow xw_x + w = y\frac{1}{x} \Rightarrow xw_x + (x)'w = \frac{y}{x} \Rightarrow [xw]_x = \frac{y}{x}.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x και θεωρώντας το y ως παράμετρο προκύπτει:

$\int [xw]_x dx = \int \frac{y}{x}dx \Rightarrow xw = y\ln|x| + f(y) \Rightarrow w(x,t) = \frac{y\ln|x| + f(y)}{x}$, όπου $f(y)$ αυθαίρετη σταθερά. Αντικαθιστώντας στην αρχική, η λύση θα πάρει την τελική της μορφή ως:

$u_y = \frac{y\ln|x| + f(y)}{x}$ και ολοκληρώνοντας ως προς y, με παράμετρο x, θα έχουμε:

$$\int u_y dy = \frac{1}{x}\int (y\ln|x| + f(y))dy + g(x)$$

$$\to u(x,y) = \frac{1}{x}\int y\ln|x|\,dy + \frac{1}{x}\int f(y)dy + g(x)$$

$$\to \boxed{u(x,y) = \frac{y^2\ln|x|}{2x} + \frac{1}{x}\int f(y)dy + g(x)}$$

όπου $f(y), g(x)$ αυθαίρετες σταθερές.

(δ) $u_{yx} + u_x = 1$

ΛΥΣΗ:

Η αρχική εξίσωση, γίνεται: $u_{yx} + u_x = 1 \Rightarrow u_{xy} + u_x = 1$ και ολοκληρώνοντας ως προς x, θεωρώντας ως παράμετρο το y, έχουμε:

$$\int u_{xy}dx + \int u_x dx = \int 1dx \Rightarrow u_y + u = x + f(y) \qquad \textbf{(1.4)}$$

όπου $f(y)$ μια αυθαίρετη σταθερά.

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί μια ΣΔΕ πρώτης τάξης ως προς u. Επιλύοντας την <u>ομογενή</u> της θα έχουμε: $u_y + u = 0 \Rightarrow u_y = -u$ και η λύση της θα είναι $u_0 = h(x)e^{-y}$ με $h(x)$ αυθαίρετη συνάρτηση ως προς x. Η μερική λύση θα έχει την μορφή: $u_1 = h(x,y)e^{-y}$ και με αντικατάσταση στην (1.4), παίρνουμε:

$$(u_1)_y + u_1 = x + f(y)$$
$$\Rightarrow \left(he^{-y}\right)_y + he^{-y} = x + f(y)$$
$$\Rightarrow hye^{-y} - he^{-y} + he^{-y} = x + f(y) \text{ ,όπου } h \equiv h(x,y)$$
$$\Rightarrow hye^{-y} = x + f(y)$$
$$\Rightarrow hy = (x + f(y))e^{y}$$

Ολοκληρώνοντας ως προς y, παίρνουμε:

$$\int hydy = \int xe^{y}dy + \int f(y)e^{y}dy \Rightarrow \boxed{h \equiv h(x,y) = xe^{y} + F(y)},$$

όπου $F(y) = \int f(y)e^{y}dy$ αυθαίρετη συνάρτηση ως προς y.

Αντικαθιστώντας στην μερική λύση της u_1:

$$u_1 = (xe^{y} + F(y))e^{-y} \Rightarrow u_1 = x + F(y)e^{-y}.$$

Επομένως, η γενική λύση της εξίσωσης, θα είναι:

$$u(x,y) = u_0(x,y) + u_1(x,y) \rightarrow \boxed{u(x,y) = h(x)e^{-y} + x + F(y)e^{-y}}$$

2. Να βρείτε χωρία όπου οι παρακάτω εξισώσεις είναι υπερβολικές, ελλειπτικές ή παραβολικές.

ΛΥΣΗ:

(i)Αναζητάμε χωρίο όπου η $tu_{tt} + u_{xx} = 0$ είναι υπερβολική, ελλειπτική, ή παραβολική.

Βάσει θεωρίας η γενική μορφή της γραμμικής ΜΔΕ δεύτερης τάξεως είναι:

$$a(x,t)u_{tt} + b(x,t)u_{xt} + c(x,t)u_{xx} + d(x,t)u_t + e(x,t)u_x + g(x,t)u = f(x,t) \quad \textbf{(1.5)}$$

όπου a,b,c,d,e,g,f συνεχείς στο χωρίο D.

Για να ελέγξουμε αν είναι υπερβολική, ελλειπτική, ή παραβολική, ελέγχουμε την ποσότητα

$$b^2(x,t) - 4a(x,t)c(x,t)$$

αν είναι θετική , αρνητική ή μηδέν.

Ισχύει: $b^2(x,t) - 4a(x,t)c(x,t) = 0 - 4t - 1 = -4t \Rightarrow \begin{cases} > 0, t < 0 \\ < 0, t > 0 \\ = 0, t = 0 \end{cases}$

Οπότε είναι:

- υπερβολική, όταν $(x,t) \in \mathbb{R} x(-\infty,0)$ (θετική)
- παραβολικά, όταν $(x,t) \in \mathbb{R} x\{0\}$ (μηδέν)
- ελλειπτική, όταν $(x,t) \in \mathbb{R} x(0,+\infty)$ (αρνητική)

(ii) Για την εξίσωση:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,\ u = u(x,t)$$

Ομοίως $a(x,t) = 1$, $c(x,t) = -1$, $b(x,t) = 0$, και άρα έχουμε:

$$b^2(x,t) - 4a(x,t)c(x,t) = 0 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 > 0,$$

Επομένως, η εξίσωση είναι υπερβολική στο $(x,t) \in \mathbb{R} x\mathbb{R}$

(iii) Για την εξίσωση:

$$u_{tt}+(1+x^2)u_x-u_t=e^t\,,\ u=u(x,t)$$

Εδώ $a(x,t)=1$, $e(x,t)=(1+x^2)$, $d(x,t)=-1$ και $f(x,t)=e^t$ και άρα έχουμε:

$$b^2(x,t)-4a(x,t)c(x,t)=0-4\cdot 1\cdot 0=0$$

Επομένως, η εξίσωση είναι παραβολική στο $(x,t)\in$ ¨ x¨

(iv) Η εξίσωση

$$u_{xx}-u_{yy}=f(x,y),\ u=u(x,t)$$

Εδώ $a(x,y)u_{yy}+b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{xx}+d(x,y)u_y+e(x,y)u_x+g(x,y)u=f(x,y)$

οπότε $c(x,y)=1$, $a(x,y)=1$ και $b(x,y)=0$. Άρα έχουμε

$$b^2(x,y)-4a(x,y)c(x,y)=0-4=-4<0\,.$$

Άρα η εξίσωση είναι ελλειπτική στο $(x,y)\in$ ¨ x¨

3. Με εισαγωγή των πολικών συντεταγμένων $\left\{\begin{matrix} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{matrix}\right\}$ να βρείτε την γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης: $yu_x-xu_y=0$.

ΛΥΣΗ:

Υπολογίζοντας τις ποσότητες u_x και u_y, από τον κανόνα της αλυσίδας θα έχουμε:

$$\left\{\begin{matrix} u_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial x} \\ u_y=\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{matrix}\right\}$$

Όπου οι μερικές παραγωγοί των r, θ ως προς x και y, θα είναι:

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial r}=\dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial r}\dfrac{\partial}{\partial y}=\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta}=\dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial \theta}\dfrac{\partial}{\partial y}=-r\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial x}+r\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial y} \end{matrix}\right\}$$

Με την χρήση πινάκων και της Ιακωβιανής, J, θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix},\ \text{όπου}\ J=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\ \text{με ορίζουσα}$$

$\det(\underline{\underline{J}})=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r\neq 0$.

Οπότε προκύπτει:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial r} & \sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial\theta} & r\cos\theta\end{vmatrix}=\frac{1}{r}[r\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}]=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\cos\theta & \frac{\partial}{\partial r} \\ -r\sin\theta & \frac{\partial}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\frac{1}{r}[\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}]=\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}$$

Άρα έχουμε:

$$r\sin\theta\{\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\}=r\cos\theta\{\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sin\theta\cdot\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\sin^2\theta\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\sin\theta\cdot\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{r}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\frac{\partial u}{\partial\theta}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u=u(r)$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση θα έχουμε:

$$\frac{\partial u}{\partial y}+u=x+f(y)\Rightarrow e^y\frac{\partial u}{\partial y}+e^y u=e^y(x+f(y))$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial y}(e^y u)=e^y(x+f(y))\Rightarrow e^y u=\int e^y(x+f(y))dy+g(x)$$

Λύνοντας ως προς u έχουμε

$$u(x,y)=e^{-y}\int e^y(x+f(y))dy+e^{-y}g(x)$$

$$\Rightarrow u(x,y)=xe^{-y}e^y+e^{-y}\int e^y f(y)dy+e^{-y}g(x)$$

$$\Rightarrow\boxed{u(x,y)=x+e^{-y}g(x)+e^{-y}\int e^y f(y)dy}$$

4. Να εξετάσετε την γραμμικότητα ή μη των παρακάτω εξισώσεων:

(i) $u_t u_{tt}+3tu=0$

Θεωρούμε τον τελεστή $L(u)=u_t u_{tt}+3tu$ και έτσι η μερική διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφεί ως $L(u)=0$. Εξετάζοντας την γραμμικότητα της θα πάρουμε:

$$\begin{aligned}L(u+w)&=(u+w)_t(u+w)_{tt}+3t(u+w)\\&=(u_t+w_t)(u_{tt}+w_{tt})+3tu+3tw\\&=u_t u_{tt}+u_t w_{tt}+3tu+w_t u_{tt}+w_t w_{tt}+3tw\end{aligned}$$

και

$Lu + Lw = u_t u_{tt} + 3tu + w_t w_{tt} + 3tw$ και έτσι $L(u+w) \neq Lu + Lw$, και άρα δεν είναι γραμμική.

(ii) $u_{tt} - u_{xx} = 0$

Θεωρούμε, ομοίως και εδώ τον τελεστή $Lu = u_{tt} - u_{xx}$ και ελέγχουμε αν ο $Lu = 0$ είναι γραμμικός:

$$\begin{aligned} L(u+w) &= (u+w)_{tt} - (u+w)_{xx} \\ &= u_{tt} + w_{tt} - u_{xx} - w_{xx} \\ &= (u_{tt} - u_{xx}) + (w_{tt} - w_{xx}) \\ &= Lu + Lw \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} L(cu) &= (cu)_{tt} - (cu)_{xx} \\ &= cu_{tt} - cu_{xx} \qquad , \ \forall c \in R \\ &= cL(u) \end{aligned}$$

Επομένως, ισχύουν οι συνθήκες γραμμικότητας.

(iii) $e^t u_{tx} - x^2 u = \cos t$

Ομοίως, θεωρούμε τον τελεστή $Lu = e^t u_{tx} - x^2 u$ και εξετάζουμε αν ο $Lu = \cos t$ ικανοποιεί τις συνθήκες γραμμικότητας. Έχουμε:

$$\begin{aligned} L(u+w) &= e^t (u+w)_{tx} - x^2 (u+w) \\ &= e^t (u_{tx} + w_{tx}) - x^2 u - x^2 w \\ &= Lu + Lw \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} L(cu) &= e^t (cu)_{tx} - x^2 (cu) \\ &= e^t cu_{tx} - x^2 (cu) \qquad , \ \forall c \in R \\ &= c(e^t u_{tx} - x^2 u) \\ &= cLu \end{aligned}$$

και είναι γραμμική.

(iv) $u_{tx} + u^2 = \sin x$

Ομοίως, θεωρούμε $Lu = u_{tx} + u^2$ και εξετάζοντας την γραμμικότητα του τελεστή $Lu = \sin x$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} L(u+w) &= (u+w)_{tx} + (u+w)^2 \\ &= u_{tx} + w_{tx} + u^2 + w^2 + 2tu \end{aligned}$$

$$Lu + Lw = u_{tx} + u^2 + w_{tx} + w^2$$

οπότε $L(u+w) \neq Lu + Lw$ και όχι γραμμική.

5. Βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης $u_t = u_{xx}$ που είναι της μορφής $u(x,t) = U(z)$, όπου $z = \frac{x}{\sqrt{t}}$.

ΛΥΣΗ:

Υπολογίζουμε τις ποσότητες u_t, u_x, u_{xx} για την μορφή που μας δίνει το πρόβλημα, επομένως θα έχουμε:

$$u_t(x,t) = U'(z)(\frac{x}{\sqrt{t}})_t = xU'(z)(t^{-\frac{1}{2}})_t = xU'(z)t^{-1-\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}xU'(z) = -\frac{x}{2\sqrt{t^3}}U'(z)$$

$$u_x(x,t) = U'(z)(\frac{x}{\sqrt{t}})_x = \frac{U'(z)}{\sqrt{t}} \quad \text{και} \quad u_{xx}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}U''(z)(\frac{x}{\sqrt{t}})_x = \frac{U''(z)}{t}.$$

Αντικαθιστώντας στη αρχική μας εξίσωση, προκύπτει:

$$-\frac{x}{2\sqrt{t^3}}U'(z) = \frac{1}{t}U''(z) \Rightarrow \frac{x}{2\sqrt{t^3}}U'(z) + \frac{1}{t}U''(z) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t}U''(z) + \frac{x}{2\sqrt{t^2 t}}U'(z) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{U''(z) + \frac{z}{2}U'(z) = 0}$$

η οποία είναι μια γραμμική ΣΔΕ δεύτερης τάξης. Για να την λύσουμε θέτουμε $w(z) = U'(z)$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$w'(z) + \frac{z}{2}w(z) = 0, \qquad \textbf{(1.5)}$$

με ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(z) = e^{\int \frac{z}{2}dz} = e^{\frac{z^2}{4}}$. Πολλαπλασιάζοντας και τα 2 μέλη της εξίσωσης (1.5) με $\mu(z)$ προκύπτει:

$$w'(z)e^{\frac{z^2}{4}} + \frac{z}{2}w(z)e^{\frac{z^2}{4}} = 0 \Rightarrow w'(z)e^{\frac{z^2}{4}} + w(z)(e^{\frac{z^2}{4}})' = 0 \Rightarrow \frac{d}{dz}[e^{\frac{z^2}{4}} \cdot w(z)] = 0 \Rightarrow w(z) = C_1 e^{-\frac{z^2}{4}}$$

όπου C_1 είναι μία σταθερά.

Τελικά καταλήγουμε στην λύση της μορφής:

$$U'(z) = C_1 e^{-\frac{z^2}{4}} \Rightarrow \boxed{U(z) = C_1 \int e^{-\frac{z^2}{4}} dz + C_2}$$

όπου C_2 είναι μία δεύτερη σταθερά.

1.2 Εξισώσεις Διάχυσης

Νόμοι διατήρησης

Είναι εξισώσεις που εκφράζουν το γεγονός ότι διατηρείται το ισοζύγιο μιας ποσότητας καθ όλη την διάρκεια μιας διαδικασίας. Για παράδειγμα έχουμε τον πρώτο θερμοδυναμική νόμο, βάσει του οποίου *η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ενός δεδομένου συστήματος είναι ίση με την ολική θερμότητα που προσφέρεται στο σύστημα συν το έργο που παράγεται.* Ανάλογοι νόμοι διατήρησης υπάρχουν και στις βιοεπιστήμες, όπως είναι για τον ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού ενός συγκεκριμένου είδους ζώων σε κάποιον ορισμένο χώρο ο οποίος ισούται με τον ρυθμό των γεννήσεων μείον τον ρυθμό των θανάτων συν το ρυθμό μετανάστευσης προς η από αυτό.

Μαθηματικά, οι νόμοι διατήρησης εκφράζονται ως εξισώσεις οι οποίες θεωρούνται πλέον ως εξισώσεις που διέπουν το φαινόμενο ή εξισώσεις κίνησης της συγκεκριμένης διαδικασίας και υπαγορεύουν τον τρόπο με τον οποίο η διαδικασία αυτή εξελίσσεται χρονικά.

Εδώ θα αναλύσουμε τον νόμο διατήρησης σε μια διάσταση. Θεωρούμε, λοιπόν το μέγεθος $u = u(x,t)$ το οποίο εξαρτάται από μια χωρική μεταβλητή $x \in R^1$ και από τον χρόνο $t > 0$. Υποθέτουμε ότι u παριστάνει την πυκνότητα ή στην συγκέντρωση κάποιας ποσότητας και εκφράζεται σε μονάδες αυτής της ποσότητας ανά μονάδα όγκου. Η ποσότητα αυτή θα μπορούσε να αποτελέσει έναν πληθυσμό, μια μάζα, ή και ενέργεια. Το *u* μεταβάλλεται μόνο ως προς μια κατεύθυνση (χωρική) την οποία θα συμβολίζουμε με x. Επιπλέον φανταζόμαστε ότι το *u* κατανέμεται σε έναν σωλήνα σταθερής διατομής και εμβαδού A και υποθέτουμε ότι το *u* είναι σταθερό σε κάθε διατομή του σωλήνα και ότι μεταβάλλεται μόνο κατά την κατεύθυνση *x*. Θεωρούμε τώρα ένα αυθαίρετο τμήμα του σωλήνα, το οποίο παριστάνουμε με το διάστημα $I = [a,b]$. Τότε η <u>συνολική τιμή της ποσότητας</u> μέσα στο *I* κατά την χρονική στιγμή *t* θα είναι

$$I = \int_a^b u(x,t)Adx\,.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι μέσα στο σωλήνα έχουμε κίνηση της ποσότητας αυτής κατά την διεύθυνση του άξονα. Ορίζουμε ως *ροή (ή συνάρτηση ροής)* της *u* στο σημείο *x*, κατά την στιγμή *t*, την βαθμωτή συνάρτηση *φ(x,t)* που παριστάνει το ποσό της *u* που διέρχεται από την διατομή του σωλήνα στο σημείο *x* κατά την χρονική στιγμή *t*, ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας. Θα θεωρούμε ότι το *φ* είναι θετικό αν η ροη είναι κατά τη θετική φορά του άξονα και αρνητικό αν είναι κατά την αρνητική. Επομένως, την στιγμή *t*, ο <u>συνολικός ρυθμός ροής του μεγέθους *u* προς το εσωτερικό *I*</u> θα είναι ίσος με τον ρυθμό που το μέγεθος εισέρχεται στο *x=a* μείον τον ρυθμό με τον όποιο εξέρχεται *x=b*. Δηλαδή,

$$I = \mathrm{A}\phi(a,t) - A\phi(b,t)$$

Τέλος η ποσότητα *u* μπορεί να παράγεται ή να καταστρέφεται μέσα στο *I* εξαιτίας κάποιας εσωτερικής ή εξωτερικής αιτίας ή πηγής. Συμβολίζοντας με *f(x,t,u)* την *συνάρτηση πηγής* , αυτή θα εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο η *ui αναπαράγεται ή καταστρέφεται* στο σημείο *x* κατά την στιγμή *t*, ανά μονάδα όγκου. Δεδομένης της *f* υπολογίζουμε τον <u>συνολικό ρυθμό παραγωγής</u> του *u* στο *I* με ολοκλήρωση:

$$\int_a^b f(x,t,u(x,t))Adx\,.$$

Βάσει νόμου διατήρησης , για κάθε διάστημα *I* θα ισχύει:

«Ο χρονικός ρυθμός μεταβολής της ολικής ποσότητας στο I=(συνολικός ρυθμός με τον οποίο η ποσότητα ρέει μέσα στο I)+(Ρυθμός με τον οποίο η ποσότητα παράγεται μέσα στο I)». Δηλαδή,

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = \phi(a,t) - \phi(b,t) + \int_a^b f(x,t,u)dx \quad \textbf{(1.6)}$$

Η (1.6), ονομάζεται νόμος διατήρησης σε ολοκληρωτική μορφή και ισχύει ακόμη και αν οι u,φ και f δεν είναι ομαλές συναρτήσεις.

Εφαρμόζοντας το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού,

$$\left\{\begin{array}{l} \int_a^b \phi_x(x,t)dx = \phi(b,t) - \phi(a,t) \\ \frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = \int_a^b u_t(x,t)dx \end{array}\right\}$$

και υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις *u,φ* είναι ομαλές και η *f* είναι συνεχής, το παραπάνω σύστημα εξισώσεων, μέσω και του νόμου διατήρησης (1) θα μας δώσει:

$$\int_a^b [u_t(x,t) + \phi_x(x,t) - f(x,t,u)]dx = 0, \forall I = [a,b] \quad \textbf{(1.7)}$$

Επειδή η (1.7) ισχύει για κάθε διάστημα ολοκλήρωσης *I*, μπορεί να γραφτεί και στην μορφή:

$$u_t + \phi_x = f(x,t,u), x \in R^1, t > 0 \quad \textbf{(1.8)}$$

Η εξίσωση (1.8) είναι μια Μ.Δ.Ε. η οποία αποτελεί ένα *νόμο διατήρησης σε διαφορική μορφή*. Ο Όρος ϕ_x λέγεται όρος ροής και η συνάρτηση *f όρος αντίδρασης ή όρος αύξησης ή αλληλεπίδρασης*. Αξίζει να σημειώσουμε ότι όταν στην εξίσωση υπάρχει η συνάρτηση *f* τότε η (1.8) θα αποτελεί ένα νόμο διατήρησης με πηγές.

Νόμοι διατήρησης σε πολλές διαστάσεις

Στον χώρο R^3, συμβολίζουμε με $x = (x_1, x_2, x_3)$ ένα σημείο του και υποθέτουμε ότι η $u = u(x,t)$ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση πυκνότητας που περιγράφει το ποσό ανά μονάδα όγκου κάποιου μεγέθους που μας ενδιαφέρει και το οποίο κατανέμεται σε κάποιο χωρίο του R^3. Έστω *V* το χωρίο αυτό και το σύνορο του ∂V . Τότε:

(Συνολικό πόσο στο *V*)= $\int_V u(x,t)dx$

όπου $dx = dx_1 dx_2 dx_3$ είναι ο στοιχειώδης όγκος στον R^3.

Εάν με $f(x,t,u)$ συμβολίσουμε τον *όρο πηγής* , τότε θα έχουμε:

(Ρυθμός παραγωγής της *u* λόγω πηγών)= $\int_V f(x,t,u)dx$

Επειδή στις τρεις διαστάσεις η ροή λαμβάνει χώρα σε οποιαδήποτε κατεύθυνση, θα την περιγράψουμε με μια διανυσματική συνάρτηση $\boldsymbol{\varphi}(x,t)$. Αν με **n(x)** συμβολίσουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια ∂V με φορά προς τα έξω, τότε η συνολική ροή θα δίνεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int_{\partial V} \boldsymbol{\varphi}(x,t)\mathbf{n}(x)dS$, όπου *dS* είναι η στοιχειώδης επιφάνεια του συνόρου ∂V . Τελικά, συνδυάζοντας τον νόμο διατήρησης για το *u* θα πάρουμε:

$$\frac{d}{dt}\int_V u dx = -\int_{\partial V} \boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{n}dS + \int_V f dx \quad \textbf{(1.9)}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η ροη προς τα έξω ελαττώνει το ρυθμό μεταβολής της *u* στο *V*.

Κάνοντας χρήση του *θεωρήματος απόκλισης (ή Gauss)*

$$\int_V \nabla\phi dx = \int_{\partial V} \phi \mathbf{n} dS \qquad \textbf{(1.10)}$$

όπου *div* είναι ο τελεστής απόκλισης, η (1.9), γίνεται:

$$\int_V u_t dx = -\int_V div\phi dx + \int fdx$$

και λόγω της αυθαίρετης επιλογής του *V*, καταλήγουμε στην διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$\boxed{u_t + div\phi = f(x,t,u), x \in V, t > 0} \qquad \textbf{(1.11)}$$

η οποία αποτελεί το τρισδιάστατο ανάλογο της (1.8) που αποδείξαμε παραπάνω.

Καταστατικές εξισώσεις

Εξισώσεις που περιγράφουν υποθέσεις που βασίζονται στις φυσικές ιδιότητες του μέσου, ονομάζονται *καταστατικές εξισώσεις ή εξισώσεις κατάστασης*.

Παράδειγμα 1. (Εξίσωση Διάχυσης)

Υποθέτουμε ότι $f = 0$ και ότι ισχύει ο νόμος διατήρησης στη μια διάσταση

$$u_t + \phi_x = 0, x \in R^1, t > 0 \qquad \textbf{(1.11)}$$

και έστω ότι ισχύει η βασική καταστατική εξίσωση (*νόμος του Fick)*

$$\phi(x,t) = -Du_x(x,t) \qquad \textbf{(1.12)}$$

Η σταθερά *D* ονομάζεται *σταθερά διάχυσης*. Οι εξισώσεις (1.11) και (1.12) αποτελούν ένα ζεύγος ΜΔΕ για τους αγνώστους *φ* και *u*. Συνδυάζοντας τες καταλήγουμε στον τύπο

$$\boxed{u_t - Du_{xx} = 0} \qquad \textbf{(1.13)}$$

για την άγνωστη πυκνότητα *u*, ο όποιος αποτελεί την *εξίσωση διάχυσης* και περιγράφει συστήματα στα οποία έχουμε διατήρηση και στα οποία η ροή καθορίζεται από τον νόμο του Fick. Ο Όρος Du_{xx}, λέγεται *Όρος διάχυσης*.

Παράδειγμα 2: (Εξίσωση θερμότητας)

Σε ένα ομογενές μέσο *πυκνότητας ρ* και *ειδικής θερμότητας C* η πυκνότητα ενέργειας δίνεται από την σχέση $u(x,t) = C\rho T(x,t)$, όπου T είναι η *θερμοκρασία.* Στην περίπτωση αυτή ο νόμος διατήρησης είναι $C\rho T_t + \phi_x = 0$ και ο νόμος του Fick είναι της μορφής $\phi = -KT_x(x,t)$ (10), όπου K είναι ο *συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας*. Έτσι προκύπτει ότι η θερμοκρασία T ικανοποιεί την ΜΔΕ:

$$\boxed{C\rho T_t - KT_{xx} = 0 \Rightarrow T_t - kT_{xx} = 0, k = \frac{K}{C\rho}} \qquad \textbf{(1.14)}$$

Η εξίσωση (1.14) ονομάζεται εξίσωση θερμότητας και η σταθερά k, συντελεστής θερμικής διάχυσης.

Παράδειγμα 3: (Αντίδρασης-Διάχυσης)

Για $f \neq 0$ (υπάρχουν πηγές) και ο νόμος διατήρησης είναι:

$$u_t + \phi_x = f(x,t,u)$$

και σε συνδυασμό με τον νόμο του Fick (1.12), προκύπτει η εξίσωση:

$$\boxed{u_t - Du_{xx} = f(x,t,u)}$$

η οποία αποτελεί την εξίσωση αντίδρασης- διάχυσης.

Η Εξίσωση της θερμότητας

Θεωρούμε ράβδο μήκους l και σταθερής διατομής εμβαδού A. Η θερμοκρασία θα ικανοποιεί την μονοδιάστατη εξίσωση θερμότητας

$$u_t - ku_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0$$

όπου k ο συντελεστής θερμικής διάχυσης. Μια ***αρχική συνθήκη*** στο σημείο *t=0* θα είναι της μορφής

$$u(x,0) = f(x), 0 < x < l$$

όπου *f(x)* είναι η δεδομένη αρχική κατανομή της θερμοκρασίας. Οι ***συνοριακές συνθήκες*** θα ορίζονται

$$u(0,t) = g(t) \qquad u(l,t) = h(t), t > 0$$

όπου g και h είναι δεδομένες συναρτήσεις. Αξίζει να σημειωθεί ότι, υποθέτοντας πως το ένα άκρο της ράβδου είναι θερμικά μονωμένο, οι συνοριακές συνθήκες θα πάρουν την μορφή:

$$u_x(0,t) = 0, t > 0$$

η οποία είναι γνωστή ως *συνθήκη μονωμένου άκρου.*

Ανακεφαλαιώνοντας, με τον όρο *πρόβλημα αρχικών- συνοριακών τιμών* για την εξίσωση θερμότητας, εννοούμε ένα πρόβλημα στο όποιο μας ζητείται να λύσουμε κάποια μορφή της εξίσωσης θερμότητας, κάτω από κάποιες αρχικές-συνοριακές συνθήκες. Σε μερικές περιπτώσεις βέβαια απαιτείται οι βοηθητικές συνθήκες να δίνονται με τέτοιο τρόπο ώστε η λύση του προβλήματος να είναι μοναδική. Για τον λόγο αυτό, διατυπώνουμε το παρακάτω θεώρημα μοναδικότητας της λύσης:

«Το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\left\{\begin{array}{l} u_t - ku_{xx} = 0, 0 < x < l, 0 < t < T \\ u(x,0) = f(x), 0 < x < l \\ u(0,t) = g(t), 0 < t < T \\ u(l,t) = h(t), 0 < t < T \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1.13)}$$

όπου $f \in C[0,l]$ και $g,h \in C[0,T]$, έχει μοναδική λύση u(x,t) στο ορθογώνιο $R: 0 \le x \le l, 0 \le t \le T, \forall T > 0$ ».

Εκτός από τα ερωτήματα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης είναι σημαντική η διερεύνηση της συνεχούς εξάρτησης της λύσης από τα αρχικά και συνοριακά δεδομένα. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται *ευστάθεια λύσης*.

Εάν λοιπόν, ένα πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών ικανοποιεί τις τρεις αυτές ιδιότητες:

(ι) ύπαρξης,

(ιι) μοναδικότητας, και

(ιιι) ευστάθειας,

θα λέγεται ότι το πρόβλημα αυτό είναι καλά τοποθετημένο ή καλά διατυπωμένο.

Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της ενέργειας $E(t)=\int_0^l w^2(x,t)dx$, με

$$E(t)\geq 0 \kappa\alpha\iota E(0)=0 \qquad \textbf{(1.14)}$$

για να αποδείξετε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$\left\{\begin{array}{l} u_t=ku_{xx}, 0<x<l, 0<t<T \\ \left.\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u_x(0,l)=g(t) \end{cases}\right\} 0<t<T \\ u(x,0)=f(x), 0<x<l \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1.15)}$$

όπου $k>0$, έχει μοναδική λύση για κάθε Τ>0.

ΛΥΣΗ:

Υποθέτουμε ότι η λύση δεν είναι μοναδική, όποτε θα υπάρχουν $u_1(x,t)$ και $u_2(x,t)$ με $u_1(x,t)\neq u_2(x,t)$ που να την ικανοποιούν. Θέτουμε τη διαφορά τους

$$w(x,t):=u_1(x,t)-u_2(x,t)$$

η οποία θα ικανοποιεί το (1.15) εφόσον αυτό είναι γραμμικό. Οπότε θα δημιουργηθεί ένα ισοδύναμο πρόβλημα (1.16) της μορφής:

$$\left\{\begin{array}{l} w_t=kw_{xx}, 0<x<l, 0<t<T \\ \left.\begin{cases} w_x(0,t)=u_{1_x}(0,t)-u_{2x}(0,t)=0 \\ w_x(l,t)=g(t)-g(t)=0 \end{cases}\right\} 0<t<T \\ w(x,0)=0, 0<x<l \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1.16)}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι w=0.

Για την απόδειξη αυτή θα εισάγουμε το ολοκλήρωμα ενέργειας που μας δίνεται και υπολογίζοντας την παράγωγο θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}'(t) &= \int_0^l 2w(x,t)w_t(x,t)dx = 2kw(x,t)w_x(x,t)|_0^l - 2k\int_0^l w^2{}_x(x,t)dx = \\ &= 2kw(x,l)w_x(x,l)-2kw(x,0)w_x(x,0)-2k\int_0^l w^2{}_x(x,t)dx = \\ &= -2k\int_0^l w^2{}_x(x,t)dx \end{aligned}$$

για k>0.

Άρα η συνάρτηση ενέργειας θα είναι φθίνουσα και λόγω (1.14), $\boxed{E(t)=0}$ και συνεπώς $\int_0^l w^2{}_x dx=0 \Rightarrow w(x,t)=0 \Rightarrow \boxed{u_1(x,t)=u_2(x,t)}$,δηλαδή η λύση θα είναι μοναδική.

2. Μια ομογενής ράβδος (ρ,C,K σταθερές) έχει επιφάνεια διατομής A(x), 0<x<l. Υποθέστε ότι η μεταβολή της A(x) ως συνάρτηση του x είναι μικρή, έτσι ώστε να ισχύει η υπόθεση ότι η θερμοκρασία παραμένει σταθερή σε κάθε διατομή. Υποθέστε επίσης ότι δεν υπάρχουν πηγές και ότι η συνάρτηση ροής είναι ίση με $-Ku_x(x,t)$. Από έναν κατάλληλο νόμο διατήρησης βρείτε μια διαφορική εξίσωση για τη θερμοκρασία $u(x,t)$ στην οποία να λαμβάνεται υπόψη και η μεταβολή της επιφάνειας διατομής της ράβδου.

ΛΥΣΗ:

Στο πρόβλημα δεν υπάρχουν πηγές όποτε $f\equiv 0$ και για την συνάρτηση ροής $\phi(x,t)$ θα έχουμε: $\phi(x,t)=-Ku_x(x,t)$. Αναζητάμε ένα νόμο διατήρησης για την $u(x,t)$ έτσι ώστε να κατασκευάσουμε μια μερική διαφορική εξίσωση.

Έχουμε (ρ, C, K: σταθερές), με ρ: πυκνότητα, C: ειδική θερμότητα και K: συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας. Θεωρούμε πάνω στη ράβδο ένα τυχαίο διάστημα I=[α,b] με $0\le a \prec b\le 1$.

Τότε:

$$[\text{‘συνολικό ποσό θερμότητας της ράβδου’}]=\int_{\alpha}^{b}\rho Cu(x,t)\cdot A(x)dx \qquad \textbf{(1.17)}$$

και για τη ροή θερμότητας στο άκρο α: $\phi(a,t)\cdot A(a)$, ενώ για το άκρο b: $\phi(b,t)\cdot A(b)$. Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της ροής θερμότητας στο χωριό I θα είναι:

$$\phi(a,t)A(a)-\phi(b,t)A(b) \qquad \textbf{(1.18)}$$

Επειδή δεν υπάρχουν πηγές, από τον νόμο διατήρησης για το u, σε κάθε διάστημα I θα ισχύει:

[‘ρυθμος μεταβολης συνολικής ποσότητας στο I’]=[‘ρυθμό μεταβολής στο I’]

ή

$$\frac{d}{dt}\int_a^b A(x)\rho Cu(x,t)dx=\int_a^b\phi(a,t)A(a)dx-\int_a^b\phi(b,t)A(b)dx=$$

$$=\int_a^b A\rho Cu_t(x,t)dx=-\int_a^b\frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)\phi(x,t)\right]dx=$$

$$=-\int_a^b(A'(x)\phi(x,t)+A(x)\phi_x(x,t))dx=$$

$$\underline{\underline{\phi=-Ku_x}}\int_a^b A\rho Cu_t(x,t)dx=-\int_a^b A'(x)(-Ku_x(x,t))dx-\int_a^b A(x)(-Ku_{xx}(x,t))dx.$$

$$\Rightarrow\int_a^b A\rho Cu_t(x,t)dx-\int_a^b A'(x)(Ku_x(x,t))dx-\int_a^b A(x)(Ku_{xx}(x,t))dx=0$$

και επειδή το I είναι τυχαίο διάστημα πάνω στη ράβδο και η συνάρτηση u(x,t) είναι ομαλή, η παραπάνω ποσότητα γίνεται:

$$A\rho Cu_t(x,t)-KA'(x)u_x(x,t)-KA(x)u_{xx}(x,t)=0$$

$$\Rightarrow A\rho Cu_t(x,t)=K[A'(x)u_x+A(x)u_{xx}]$$

$$\Rightarrow\boxed{[\rho CA(x)]u_t(x,t)=[KA'(x)]u_x(x,t)+[KA(x)]u_{xx}(x,t)}$$

η οποία αποτελεί την ζητούμενη μορφή διαφορικής εξίσωσης για την θερμοκρασία u(x,t) , με A: διατομή της ράβδου και (ρ,C,K:σταθερές).

3. Μετατρέψτε το πρόβλημα αρχικών – συνοριακών τιμών σε ένα πρόβλημα με ομογενείς συνοριακές συνθήκες:

$$\left\{\begin{array}{l} u_t - u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = g(t) \\ u(l,t) = h(t) \end{array}\right\}, \begin{array}{l} 0 < x < l, t > 0 \\ 0 < x < l \\ t > 0 \end{array}$$

ΛΥΣΗ:

Θέλουμε με κατάλληλο μετασχηματισμό να μετατρέψουμε τις μη-ομογενείς συνοριακές συνθήκες σε ομογενείς. Για το λόγο αυτό θα εισάγουμε έναν κατάλληλο μετασχηματισμό, δημιουργώντας ένα πρόβλημα ομογενών συνοριακών τιμών ισοδύναμο με το αρχικό.

Θέτουμε:

$$u(x,t) = w(x,t) - v(x,t) \Rightarrow w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$$

Όπου $v(x,t) = \frac{A(t) - B(t)}{l} x + B(t)$, με A(t), B(t) αυθαίρετες συναρτήσεις ως προς την μεταβλητή t.

Τότε το αρχικό μας πρόβλημα μετασχηματίζεται στο:

$$\left\{\begin{array}{l} w(x,t) = u(x,t) - [\frac{A(t) - B(t)}{l} x + B(t)] \\ w(0,t) = u(0,t) - B(t) \\ w(l,t) = u(l,t) - A(t) \\ w(x,0) = u(x,0) - v(x,0) = \tilde{f}(x) \end{array}\right\} \text{ όπου } \tilde{f}(x) = f(x) - [\frac{A(0) - B(0)}{l} x + B(0)]$$

Ισχύει από συνοριακές συνθήκες ότι $\left\{\begin{array}{l} u(0,t) = B(t) \\ u(l,t) = A(t) \end{array}\right\}$ οπότε τελικά το πρόβλημα γίνεται:

$$\left\{\begin{array}{l} w(x,t) = u(x,t) - v(x,t) \\ w(0,t) = 0 \\ w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = \tilde{f}(x) \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1.19)}$$

Παραγωγίζοντας: $\left\{\begin{array}{l} u_t = w_t - v_t = w_t - \left[\frac{A'(t) - B'(t)}{l} x + B'(t)\right] \\ u_x = w_x - v_x = w_x - \left[\frac{A(t) - B(t)}{l}\right] \\ u_{xx} = w_{xx} \end{array}\right\}$

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση θα έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} w_t - w_{xx} = \dfrac{A'(t)-B'(t)}{l}x + B'(t) \\ w(0,t) = 0 \\ w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = \tilde{f}(x) \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} 0 < x < l \\ t > 0 \end{array}\right\}$$

4. Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\left\{\begin{array}{l} u_t - ku_{xx} = q(x), 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = A, t > 0 \\ u_x(l,t) = B, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), 0 < x < l \end{array}\right\}$$

Να βρεθεί κατάλληλη συνθήκη που να πληροί τα δεδομένα και έτσι ώστε να υπάρχει ανεξάρτητη λύση.

ΛΥΣΗ:

Δίνοντας μια φυσική ερμηνεία για το παραπάνω πρόβλημα αρχικών τιμών, παρατηρούμε ότι η ύπαρξη της συνάρτησης *q(x)* μας πληροφορεί ότι στο πρόβλημα υπάρχουν *πηγές* , ενώ η θερμική ροή στο *x=0* είναι *A* και στο *x=l*, είναι *B*. Ακόμα, στην εξίσωση θερμότητας θέτουμε $\phi(x,t) = -ku_x$, η οποία παριστάνει την *ροή θερμότητας στο σημείο x την στιγμή t*. Για τα άκρα θα έχουμε:

$$\phi(0,t) = -ku_x(0,t) = -kA$$
$$\phi(l,t) = -ku_x(l,t) = -kB$$

Θέλουμε η λύση *u(x,t)* να είναι χρονικά ανεξάρτητη, δηλαδή $u_t(x,t) = 0$. Επομένως, από τον νόμο διατήρησης σε ολοκληρωτική μορφή, θα πάρουμε:

$$\int_0^l u_t(x,t)dx = \phi(0,t) - \phi(l,t) + \int_0^l q(x)dx$$
$$\Rightarrow \int_0^l u_t(x,t)dx = -\int_0^l \phi(x,t)dx + \int_0^l q(x)dx$$
$$\Rightarrow \int_0^l 0dx = -kA + kB + \int_0^l q(x)dx$$
$$\Rightarrow k(A-B) = \int_0^l q(x)dx$$
$$\Rightarrow \boxed{A - B = \frac{1}{k}\int_0^l q(x)dx}$$

η οποία αποτελεί την ζητούμενη συνθήκη.

5. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$\left\{\begin{array}{l} u_t - ku_{xx} = 0, x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = 1, t > 0 \\ u(+\infty, t) = 0, t > 0 \\ u(x,0) = 0, x > 0 \end{array}\right\}$$

για την εξίσωση θερμότητας, υποθέτοντας ότι η λύση είναι της μορφής $u(x,t) = Y(z), z = \dfrac{x}{\sqrt{kt}}$.

ΛΥΣΗ:

Υποθέτοντας ότι η λύση είναι στην παραπάνω μορφή, υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους στο t και x και παίρνουμε:

$$u_t(x,t) = Y'(z)\left(\frac{x}{\sqrt{kt}}\right)_t = Y'(z)\left(xkt^{-1/2}\right)_t$$

$$\Rightarrow u_t(x,t) = xY'(z)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{kt^{3/2}}$$

$$\Rightarrow u_t(x,t) = -\frac{1}{2}xY'(z)\frac{1}{\sqrt{kt^2kt}}$$

$$\Rightarrow u_t(x,t) = -\frac{1}{2}xY'(z)\frac{1}{\sqrt{kt}}\frac{1}{kt}$$

$$\Rightarrow u_t(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{Y'(z)}{kt}\frac{x}{\sqrt{kt}}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_t(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{Y'(z)}{kt}z}$$

Ακόμα,

$$\left\{\begin{array}{l} u_x(x,t) = Y'(z)\left(\dfrac{x}{\sqrt{kt}}\right)_x = \dfrac{Y'(z)}{\sqrt{kt}}(x)_x = \dfrac{1}{\sqrt{kt}}Y'(z) \\ \\ u_{xx}(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{kt}}Y''(z)\left(\dfrac{x}{\sqrt{kt}}\right)_{xx} = \dfrac{Y''(z)}{kt}(x)_{xx} = \dfrac{Y''(z)}{kt} \end{array}\right\}$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$-\frac{1}{2kt}Y'(z)z = k\frac{Y''(z)}{kt} \Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{kt}}Y'(z)x = kY''(z)$$

$$\Rightarrow -Y'(z)\frac{z}{2} - kY''(z) = 0$$

$$\Rightarrow kY''(z) + \frac{z}{2}Y'(z) = 0$$

η οποία είναι μια ΣΔΕ $2^{ης}$ τάξης. Για την επίλυση της, θέτουμε $Y'(z) = a(z)$ και θα πάρει την μορφή:

$$ka'(z)+\frac{z}{2}a(z)=0 \Leftrightarrow ka'+\frac{z}{2}a=0 \Leftrightarrow ka'=-\frac{z}{2}a$$
$$\Leftrightarrow k\frac{da}{dz}=-\frac{z}{2}a \Leftrightarrow 2kda=-zadz$$
$$\Leftrightarrow 2k\ln a=-\frac{z^2}{2}+c_0 \Leftrightarrow \ln a=-\frac{z^2}{4k}+c_0 \qquad ,$$
$$\Leftrightarrow a(z)=Ce^{-\frac{z^2}{4k}}$$
$$\Leftrightarrow Y'(z)=Ce^{-\frac{z^2}{4k}}$$

όπου $C=e^{c_0}$ σταθερά ολοκλήρωσης

Ολοκληρώνοντας ως προς z έχουμε: $Y(z)=\int Ce^{-\frac{z^2}{4k}}dz+C_1 \Rightarrow \boxed{Y(z)=C\int e^{-\frac{z^2}{4k}}dz+C_1}$ η λύση που ζητάμε.

1.3 Εξισώσεις Ισορροπίας

Η εξίσωση Laplace

Είναι μια από τις βασικότερες εξισώσεις ισορροπίας ελλειπτικού τύπου. Παρακάτω θα αναλύσουμε την εξίσωση αυτή στις τρεις διαστάσεις.

Θεωρούμε τον βασικό νόμο διάχυσης σε ένα χωριό V

$$u_t+div\phi=f(x,t,u), x\in V, t>0 \qquad \textbf{(1.20)}$$

με φ διανυσματική συνάρτηση ροής και $x=(x_1,x_2,x_3)$ ένα σημείο του R^3. Υποθέτουμε ότι ισχύει ο νομός του Fick σε τρεις διαστάσεις, $\phi=-Dgradu$, όπου D η σταθερά διάχυσης και θεωρώντας $divgrad=\Delta$, όπου $\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2}$ η *Λαπλασιανη,* η εξίσωση (1.20) γίνεται:

$$u_t-D\Delta u=f(x,t,u), x\in V, t>0 \qquad \textbf{(1.21)}$$

Υποθέτοντας ότι στο χωριό δεν υπάρχουν πηγές, *f=0*, αναζητάμε *λύσεις ισορροπίας* $u=u(x)$ που εξαρτώνται μόνο από το x και όχι από τον χρόνο t. Τέτοιου είδους λύσεις ικανοποιούν *την εξίσωση Laplace,*

$$\Delta u=0, x\in V \qquad \textbf{(1.22)}$$

Εάν υπάρχουν πηγές, τότε οι λύσεις ισορροπίας ικανοποιούν *την εξίσωση Poisson:*

$$\Delta u=F(x), x\in V \text{, όπου } F\equiv-\frac{f}{D} \qquad \textbf{(1.23)}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η εξίσωση Laplace είναι σημαντική στην μηχανική των ρευστών, καθώς και σε πολλούς άλλους τομείς εφαρμογών. Οι λύσεις της εξίσωσης αυτής ονομάζονται *αρμόνικες συναρτήσεις.*

Προκύπτει εύκολα το ερώτημα για το τι είδους συνοριακές συνθήκες θα χρησιμοποιήσουμε για την επίλυση της εξίσωσης. Από τα παραπάνω φαίνεται ότι χρειάζονται μόνο συνθήκες στο σύνορο ∂V του χωρίου, οι οποίες είναι *τύπου Dirichlet:*

$$u=g(x), x\in\partial V \qquad \textbf{(1.24)}$$

όπου g μια δεδομένη συνάρτηση. Υπάρχει και η περίπτωση η συνθήκη να αφορά την κάθετη παράγωγο της *u* στο σύνορο, η οποία θα ονομάζεται *συνοριακή συνθήκη Neumann*,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x), x \in \partial V \qquad \textbf{(1.25)}$$

όπου **n** είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που δίνεται από τον τύπο $\frac{\partial u}{\partial n} = \mathbf{n} grad u$. Εάν *g(x)=0* τότε το άκρο ονομάζεται *μονωμένο.*

Ολοκληρωτικές Ταυτότητες

Σε πολλές εφαρμογές η επίλυση ενός προβλήματος διευκολύνεται από την χρήση των κυλινδρικών και σφαιρικών συντεταγμένων. Αυτές θα δίνονται από τους τύπους

$\left\{\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{matrix}\right\}$ για τις κυλινδρικές και $\left\{\begin{matrix} x = r\sin\phi\cos\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = r\cos\phi \end{matrix}\right\}$ για τις σφαιρικές, όπου θ είναι η πολική γωνία και φ είναι η *αζιμούθια γωνία.* Με εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας, μπορούμε να γράψουμε την Λαπλασιανή σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες, αντίστοιχα, ως:

$$\left\{ \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} \right\} \text{ και}$$

$$\left\{ \Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi u_\phi) + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}u_{\theta\theta} \right\}$$

Βασικές ιδιότητες

<u>*Θεώρημα 1:*</u> Έστω *h* συνεχής συνάρτηση στο ∂V και *f* συνεχής στο ∇. Αν το πρόβλημα *Dirichlet* έχει λύση $u \in C^1(\nabla) \cap C^2(\nabla)$, τότε αυτή θα είναι *μοναδική*.

<u>*Θεώρημα 2:*</u> Έστω *g* συνεχής στο ∂V και *f* συνεχής στο ∇. Εάν το πρόβλημα Neumann

$$\{\Delta u = f, x \in V\} \text{ και } \left\{\frac{\partial u}{\partial n} = g, x \in \partial V\right\}$$

έχει μια λύση $u \in C^1(\nabla) \cap C^2(\nabla)$, τότε αναγκαστικά:

$$\int_V f dx = \int_{\partial V} g dS .$$

Ασκήσεις

1. Αποδείξτε την σχέση $\int_V w\frac{\partial u}{\partial x_k}dx = -\int_V u\frac{\partial w}{\partial x_k}dx + \int_{\partial V} uwn_k dS$, κάνοντας χρήση του τύπου

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial x_k}dx = \int_{\partial V} un_k dS \qquad \textbf{(1.26)}$$

όπου u είναι η βαθμωτή συνάρτηση και n_k είναι η k-οστή συνιστώσα του εξωτερικού μοναδιαίου κάθετου διανύσματος **n**.

ΛΥΣΗ

Από τον τύπο (1.26) πολλαπλασιάζοντας και τα 2 μέλη με w, και ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, θα έχουμε:

$$\int_V w(\frac{\partial u}{\partial x_k})dx = \int_{\partial V} w(un_k)dS \Rightarrow \int_V \frac{\partial (uw)}{\partial x_k}dx = \int_V \frac{\partial u}{\partial x_k}wdx + \int_V u\frac{\partial w}{\partial x_k}dx \qquad \textbf{(1.27)}$$

Από τις (1.26) και (1.27), προκύπτει:

$$\int_V w\frac{\partial u}{\partial x_k}dx + \int_V u\frac{\partial w}{\partial x_k}dx = \int_{\partial V} wun_k dS \quad \Rightarrow \quad \int_V w\frac{\partial u}{\partial x_k}dx = -\int_V u\frac{\partial w}{\partial x_k}dx + \int_{\partial V} wun_k dS$$

και αποδείχτηκε το ζητούμενο.

2. Κάνοντας χρήση του θεωρήματος απόκλισης να αποδείξετε τους τύπους Green:

$$\begin{Bmatrix} \int_V (u\nabla^2 w + \nabla u \cdot \nabla w)dx = \int_{\partial V} u\frac{\partial w}{\partial n}dS \\ \\ \int_V u\nabla^2 w dx = \int_V w\nabla^2 u dx + \int_{\partial V} (u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n})dS \end{Bmatrix}$$

ΛΥΣΗ:

Για τον πρώτο τύπο, από το θεώρημα απόκλισης θα έχουμε:

$$\int_{\partial V} u\frac{\partial w}{\partial n}dS = \int_{\partial V} u\mathbf{n}\cdot\nabla w dS =$$

$$= \int_V \nabla\cdot(u\cdot\nabla w)dx =$$

$$= \int_V \{u\cdot\nabla\cdot\left\{\nabla w + \nabla w\cdot\left(\nabla\cdot\mathbf{u}\right)\right\}\}dx =$$

$$= \int_V \{u\nabla^2 w + \nabla u\cdot\nabla w\}dx$$

όπου ∇^2 η Λαπλασιανη, με $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2} = \nabla\cdot\nabla$ και div ο τελεστής απόκλισης για το θεώρημα.

Με παρόμοιο τρόπο, για τον δεύτερο τύπο Green θα έχουμε:

$$\int_{\partial V} (u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n})dS = \int_{\partial V} \{un\cdot grad(w) - wn\cdot grad(u)\}dS =$$
$$= \int_{\partial V} n\{u\cdot grad(w) - w\cdot grad(u)\}dS =$$
$$= \int_V div(u\cdot grad(w) - w\cdot grad(u))dx =$$
$$= \int_V [grad(u)\cdot grad(w) + u\cdot div(grad(w)) - grad(w)\cdot grad(u) - w\cdot div(grad(u))]dx$$
$$= \int_V (grad(u)\cdot grad(w) + u\Delta w - grad(w)\cdot grad(u) - w\Delta u)dx =$$
$$= \int_V u\Delta w dx - \int_V w\Delta u dx$$

όπου Δ η Λαπλασιανη. Επομένως,

$$\int_{\partial V} (u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n})dS + \int_V w\Delta u dx = \int_V u\Delta w dx$$

και αποδείχτηκε το ζητούμενο.

3. Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών για την τρισδιάστατη εξίσωση θερμότητας

$$\begin{cases} u_t - k\Delta u = \rho(x,t), x\in V\subset \mathbb{R}^3, t>0 \\ u(x,t) = g(x,t), x\in\partial V, t>0 \\ u(x,0) = f(x), x\in V\subset\mathbb{R}^3 \end{cases} \qquad \textbf{(1.28)}$$

Όπου οι ρ,g και f είναι συνεχείς. Αποδείξτε με την μέθοδο της ενέργειας ότι η λύση είναι μοναδική, υποθέτοντας εύλογες συνθήκες ομαλότητας για την u.

ΛΥΣΗ:

Για να αποδείξουμε ότι η λύση είναι μοναδική, υποθέτουμε ότι θα υπάρχουν 2 λύσεις διαφορετικές μεταξύ τους, έστω $u_1(x,t)$ και $u_2(x,t)$. Θέτουμε τότε μια νέα συνάρτηση $w(x,t) \equiv u_1(x,t) - u_2(x,t)$, η οποία θα πρέπει να ικανοποιεί το (1.28).

Έτσι θα έχουμε:

$$\left\{\begin{aligned} & w_t - k\Delta w = 0, x \in V \subset \mathbb{R}^3 \\ & w(x,t) = 0, x \in \partial V \\ & w(x,0) = 0, x \in V \subset \mathbb{R}^3 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(1.29)}$$

Ορίζουμε το ολοκλήρωμα ενέργειας ως $E(t) := \int_V w^2(x,t)dx$ το οποίο είναι μη-αρνητικό, δηλαδή $E(t) \geq 0$ και $E(0) = 0$.

Επιπλέον,

$$E'(t) = \int_V 2ww_t dx = \int_V 2wk\Delta w dx = 2k\int_V w\Delta w dx = 2kw\Delta w\big|_V - 2k\int_V w_x{}^2 dx$$

$$\Rightarrow E'(t) = -2k\int_V w_x{}^2 dx$$

$$\Rightarrow E'(t) < 0$$

Δηλαδή η E(t) είναι φθίνουσα και λόγω των σχέσεων $E(t) \geq 0, E(0) = 0$ συμπεραίνουμε ότι E(t)=0. Επομένως, $w \equiv 0$ στο V και τότε $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ και άρα η λύση είναι μοναδική.

4. Έστω q > 0 και συνεχής στο $\nabla \subset \mathbb{R}^3$, f συνεχής στο ∇ και g συνεχής στο ∂V. Αποδείξτε ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\left\{\begin{aligned} & \Delta u - q(x)u = f(x), x \in V \\ & \frac{\partial u}{\partial n} = g(x), x \in \partial V \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(1.30)}$$

μπορεί να έχει το πολύ μία λύση στο σύνολο $C^1(\nabla) \cap C^2(V)$.

ΛΥΣΗ:

Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα έχει 2 λύσεις διαφορετικές, τις $u_1(x,t) = u_1$ και $u_2(x,t) = u_2$. Τότε ορίζουμε τον μετασχηματισμό $w(x,t) = u_1 - u_2$ και το οποίο θα πρέπει να ικανοποιεί το πρόβλημα (1.30).

Θα έχουμε:

$$\left\{\begin{aligned} & \Delta w - q(x)w = 0, x \in V \\ & \frac{\partial w}{\partial n} = 0, x \in \partial V \end{aligned}\right\}$$

Οπότε:

$$\Delta w = q(x)w \Rightarrow \int_V \Delta w dx = \int_V q(x)wdx \xrightarrow{\Delta w = ngrad(w)} \int_{\partial V} ngrad(w)ds = \int_V q(x)wdx$$

$$\Rightarrow \int_{\partial V} \frac{\partial w}{\partial n} ds = \int_V q(x)wdx \quad \Rightarrow \quad \int_V q(x)wdx = 0, x \in \partial V$$

Επειδή q(x)>0 και συνεχής στο ∇ θα έχουμε: $w(x,t) \equiv 0 \Rightarrow u_1(x,t) = u_2(x,t)$ και έτσι η λύση θα είναι μοναδική!!

1.4 Αναπτύγματα σε ιδιοσυναρτήσεις

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την επίλυση προβλήματος με την μέθοδο Fourier. Εισάγοντας την εξίσωση της μορφής $Au = \lambda u$ **(1)**, όπου $u \in R^n$ μια τετριμμένη λύση. Οι τιμές του λ για τις οποίες θα υπάρχει τέτοια λύση **u** ονομάζονται *ιδιοτιμές* και οι αντίστοιχες λύσεις **u**, *ιδιοδιανύσματα.*

Θεωρούμε δυο ιδιοδιανύσματα κάθετα ανά δυο $e_i e_j = 1, i \neq j$ και καθένα από αυτά έχει μέτρο $e_i e_i = 1$, αποτελώντας βάση του R^n και έτσι κάθε ιδιοδιανισμα **u** μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των:

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$$

με $c_i = e_i u$ οι συντεταγμένες του **u** ως προς την ορθοκανονική βάση.

Χρησιμοποιούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανυσματα για την επίλυση προβλημάτων:

$$Au = \mu u + f \quad \textbf{(*)}$$

όπου f είναι δεδομένο διάνυσμα και η μ γνωστή σταθερά διαφορετική από τις ιδιοτιμές του πίνακα A. Για την f μέσω ιδιοσυναρτήσεων θα έχουμε

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$$

όπου $f_i = f e_i$ γνωστοί συντελεστές. Αντικαθιστώντας στην (*) θα έχουμε:

$$A(\sum_{i=1}^{n} c_i e_i) = \mu \sum_{i=1}^{n} c_i e_i + \sum_{i=1}^{n} f_i e_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i A e_i = \sum_{i=1}^{n} (\mu c_i + f_i) e_i$$

$$\xrightarrow{Ae_i = \lambda_i e_i} \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (\mu c_i + f_i) e_i$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων e_i, βρίσκουμε ότι $c_i \lambda_i = \mu c_i + f_i, i = 1,...,n$. Λύνοντας ως προς τους αγνώστους συντελεστές c_i, έχουμε ότι:

$$c_i = \frac{f_i}{\lambda_\iota - \mu}, \iota = 1,...,n$$

Και έτσι η λύση της (*) θα μας δώσει: $\boxed{u = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{\lambda_i - \mu_i} e_i}$.

Ανάλογη διαδικασία ακλουθούμε και στην περίπτωση των διαφορικών τελεστών για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Για παράδειγμα, θεωρούμε τον διαφορικό τελεστή A της δεύτερης παραγώγου $\frac{d^2}{dx^2}$ και το πρόβλημα ιδιωτιών παίρνει την μορφή:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dx^2}\phi = \lambda\phi, a < x < b \\ \phi(a) = \phi(b) = 0 \end{array} \right\}$$

και θα ονομάζεται πρόβλημα ιδιοτιμών διαφορικού τελεστή.

Χαρακτηριστική περίπτωση διαφορικών τελεστών είναι οι τελεστές *Sturm-Liouville*. Ένας τελεστής Sturm-Liouville *A* είναι ένας διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης του όποιου η δράση σε μια συνάρτηση φ ορίζεται ως:

$$\mathrm{A}\phi \equiv -(p(x)\phi')' + q(x)\phi(x)$$

Το πεδίο ορισμού του τελεστή *A* θα είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων φ=*φ(x)* στον $C^2[a,b]$ που πληρούν τις συνοριακές συνθήκες

$$a_1\phi(\alpha) + a_2\phi'(\alpha) = 0, \quad \beta_1\phi(b) + \beta_2\phi'(b) = 0$$

όπου $a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} \neq 0$ και $\beta_1^{\ 2} + \beta_2^{\ 2} \neq 0$. Οι συναρτήσεις *p,q* καθώς και οι παράγωγοι τους είναι συνεχείς στο κλειστό διάστημα *[α,b]*. Τότε το πρόβλημα ονομάζεται *κανονικό πρόβλημα Sturm-Liouville:*

$$\left.\begin{cases} -(p(x)\phi')' + q(x)\phi = \lambda\phi, \alpha \le x \le b \\ a_1\phi(\alpha) + a_2\phi'(\alpha) = 0 \\ \beta_1\phi(b) + \beta_2\phi'(b) = 0 \end{cases}\right\} \textbf{(S-L)}$$

Ο τελεστής *A* ονομάζεται γραμμικός, αφού ικανοποιεί τις ιδιότητες γραμμικότητας. Όταν η συνάρτηση *p* μηδενίζεται σε κάποιο σημείο του *[α,b]* ή το *[a,b]* είναι άπειρο, το πρόβλημα ονομάζεται *μη-κανονικό ή ιδιόμορφο.*

Ορίζουμε ως *εσωτερικό γινόμενο* δυο συναρτήσεων *φ, ψ* τον πραγματικό αριθμό.

$$(\phi,\psi) \equiv \int_\alpha^b \phi(x)\psi(x)dx$$

με νόρμα τον αριθμό $\|\phi\| := \sqrt{(\phi,\phi)}$.

- Εάν κάθε συνάρτηση *φ* την διαιρέσουμε με την νόρμα της θα πάρουμε μια άλλη νόρμα της μορφής $\upsilon = \dfrac{\phi}{\|\phi\|}, \|\upsilon\| = 1$. Θα λέμε ότι οι συναρτήσεις *φ,ψ* είναι *ορθογώνιες* στο διάστημα [α,b], όταν *(φ,ψ)=0.*
- Εάν για μια συνάρτηση *φ* έχουμε $\|\phi\| < \infty$, τότε θα λέμε ότι η *φ* είναι *τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο [α,b]*. Το σύνολο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων θα συμβολίζεται με $L^2[a,b]$.
- Θα λέμε ότι μια σειρά τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x)$ συγκλίνει στην φ(x) στον $L^2[a,b]$, όταν $\left\|\phi - \sum_{n=1}^{N} a_n\phi_n\right\| \to 0$, καθώς $N \to \infty$, δηλαδή:

$$\boxed{\int_a^b \left(\phi(x) - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n\phi_n(x)\right)^2 dx \xrightarrow{N\to\infty} 0}$$

Διατυπώνουμε το εξής θεώρημα για το πρόβλημα *Sturm-Liouville*:

« (1) Υπάρχει άπειρο πλήθος ιδιοτιμών $\lambda_n, n = 1, 2, \ldots$ οι οποίες είναι πραγματικές και τέτοιες ώστε $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$.

(2) Οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνιες.

(3) Το σύνολο των ορθοκανονικών ιδιοσυναρτήσεων $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots$ είναι πλήρες υπό την έννοια ότι κάθε τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση f μπορεί να γραφτεί κατά μο-

ναδικό τρόπο ως $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\phi_n(x)$, όπου η σειρά συγκλίνει στην f στον $L^2[a,b]$ και οι συντελεστές δίνονται από τους τύπους $f_n=(f,\phi_n), n=1,2,...$»

Η μέθοδος Fourier

Στη μέθοδο αυτή υποθέτουμε ότι η λύση *u(x,t),* γράφεται στην μορφή

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\phi_n(x) \qquad \textbf{(1.31)}$$

όπου οι συντελεστές $c_n(t)$ είναι άγνωστοι.

Ο πρώτος τύπος προβλήματος που θα εξετάσουμε έχει την γενική μορφή

$$\left\{\begin{array}{l} u_t=-(p(x)u_x)+q(x)u+F(x,t), a<x<b, t>0 \\ a_1u(a,t)+a_2u_x(a,t)=0, t>0 \\ \beta_1u(b,t)+\beta_2u_x(b,t)=0, t>0 \\ u(x,0)=f(x), a<x<b \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1.32)}$$

Για την επίλυση του προβλήματος, υποθέτουμε ότι το (1.32) γράφεται στην μορφή $\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{A\phi(x)}{\phi(x)}$. Ο μόνος τρόπος να ισχύει αυτή η ισότητα είναι και τα δυο μέλη της να είναι ίσα με μια σταθερά, έστω *λ*. Τότε θα πρέπει να ισχύει ότι $A\phi(x)=\lambda\phi(x)$ που είναι η διαφορική εξίσωση Sturm-Liouville. Αντικαθιστώντας την $u(x,t)=T(t)\phi(x)$ στις συνοριακές συνθήκες του (**) θα καταλήξουμε στις συνοριακές συνθήκες της μορφής

$$\left\{\begin{array}{l} a_1\phi(\alpha)+a_2\phi'(\alpha)=0 \\ \beta_1\phi(b)+\beta_2\phi'(b)=0 \end{array}\right\}.$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ: Αρχικά υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτησεις του προβλήματος. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η λύση είναι της μορφής $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\phi_n(x)$, όπου οι συντελεστές $c_n(t)$ πρέπει να προσδιοριστούν κατάλληλα. Υποθέτουμε ακόμα ότι ο δεδομένος όρος πηγής F μπορεί να γράφει στην μορφή αναπτύγματος ιδιοσυναρτήσεων, δηλαδή ότι $F(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\phi_n(x)$, όπου $F_n(t)$ είναι οι συντελεστές Fourier της F που δίνονται από τον τύπο $F_n(t)=\int_a^b F(x,t)\phi_n(x)dx$. Αντικαθιστώντας τώρα στην (1.32) θα πάρουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c'_n(t)\phi_n(x) = A(\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\phi_n(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\phi_n(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) A\phi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\phi_n(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\lambda_n\phi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\phi_n(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n c_n(t) + F_n(t))\phi_n(x)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ιδιοσυναρτησεων, καταλήγουμε στις ακόλουθες ΣΔΕ για τους αγνώστους συντελεστές $c_n(t)$:

$$c'_n(t) = \lambda_n c_n(t) + F_n(t), n = 1, 2, ...$$

η οποία είναι πρώτης τάξης και δίνει λύση της μορφής:

$$c_n(t) = c_n(0)e^{\lambda_n t} + \int_0^t e^{\lambda_n(t-\tau)} F_n(\tau)d\tau, n = 1, 2, ...$$

Θέτουμε *t=0* στην (1.31) και από την αρχική συνθήκη θα πάρουμε:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0)\phi_n(x)$$

Επομένως τα $c_n(0)$ είναι οι συντελεστές Fourier της συνάρτησης f(x) και δίνονται από τον τύπο:

$$c_n(0) = (f, \phi_n)$$

Συνεπώς η λύση θα είναι της μορφής:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left((f,\phi_n)e^{\lambda_n t} + \int_0^t e^{\lambda_n(t-\tau)} F_n(\tau)d\tau \right)\phi_n(x)}$$

Παράδειγμα 1: Θεωρείστε το ΠΑΣΤ:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = u_{xx}, 0 < x < l \\ u(0,t) = 0, t > 0 \\ u(l,t) = 0, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), 0 < x < l \end{array} \right\}$$

το οποίο περιγράφει την ροή θερμότητας σε μια ράβδο μήκους *l*, τα άκρα της οποίας διατηρούνται σε μηδενική θερμοκρασία. Η συνάρτηση *f* ορίζει την αρχική κατανομή θερμοκρασίας. Λόγω αλλαγής μεταβλητών, μπορούμε να πάρουμε την σταθερά διάχυσης *k* ίση με την μονάδα. Εδώ το αντίστοιχο πρόβλημα S-L, είναι το

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi'' = \lambda\phi, 0 < x < l \\ \phi(0) = \phi(l) = 0 \end{array} \right\}$$

Οι ιδιοτιμές του και οι ορθοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις του θα είναι:

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}, \phi_n = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, ...$$

Βάσει των παραπάνω, μετά από αντικατάσταση, η λύση του προβλήματος θα γίνει:

$$\boxed{u(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)f(\xi)d\xi}$$

Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιείστε την μέθοδο Fourier για να βρείτε την λύση του ακόλουθου προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\left\{\begin{array}{l}-u''+a^2u=f(x), 0<x<\pi\\ u(0)=u(\pi)=0\end{array}\right\} \qquad \textbf{(1.33)}$$

Όπου η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$.

ΛΥΣΗ:

Θα αναπτύξουμε τις λύσεις ως προς τις ιδιοσυναρτήσεις του Sturm-Liouville:

$$\left\{\begin{array}{l}\phi''+\lambda\phi=0\\ \phi(0)=\phi(l)=0\end{array}\right\}$$

Δηλαδή η γενική λύση του προβλήματος θα έχει την μορφή

$$\phi(x)=C_1\cos(x\sqrt{\lambda})+C_2\sin(x\sqrt{\lambda})$$

Και από τις συνθήκες θα προκύπτει ότι $\phi(0)=0\to C_1=0$ οπότε η λύση θα έχει την μορφή $\phi(x)=C_2\sin(x\sqrt{\lambda})$ από όπου $\phi(l)=0\xrightarrow{C_2\neq 0}l\sqrt{\lambda}=n\pi\to\lambda_n=\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}, n=0,1,...$ οι ιδιοτιμές του προβλήματος, οι οποίες αντιστοιχούν στις ιδιοσυναρτήσεις της μορφής

$$\phi_n=C_n\sin(\frac{xn\pi}{l}), n=0,1,...$$

Θεωρούμε τώρα $Au=\lambda u$, όπου $Au\equiv -u''+a^2u$ και από Fourier θα έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l}-u''+(a^2-\lambda)u=0, 0<x<\pi\\ u(0)=u(\pi)=0\end{array}\right\} \qquad \textbf{(1.34)}$$

ένα πρόβλημα ισοδύναμο με το αρχικό (1.33). Αναζητάμε την λύση του (1.34):

Θεωρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της εξίσωσης $w^2+(\lambda-a^2)=0\Rightarrow w=\pm\sqrt{i(\lambda-a^2)}$ και έτσι η γενική λύση του προβλήματος θα είναι της μορφής: $u(x)=C_1\sin(x\sqrt{\lambda-a^2})+C_2\cos(x\sqrt{\lambda-a^2})$ και από τις συνοριακές συνθήκες επαληθεύοντας θα έχουμε: $u(0)=C_2\cos(0)=C_2\Rightarrow\boxed{C_2=0}$ οπότε η u(x) γίνεται $u(x)=C_1\sin(x\sqrt{\lambda-a^2})$ και από την δεύτερη συνοριακή συνθήκη στο π, προκύπτει

$$\begin{aligned}&u(\pi)=0\Rightarrow C_1\sin(\pi\sqrt{\lambda-a^2})=0\xrightarrow{C_1\neq 0}\sin(\pi\sqrt{\lambda-a^2})=0\\ &\Rightarrow\pi\sqrt{\lambda-a^2}=n\pi, n=1,2,...\\ &\Rightarrow\sqrt{\lambda-a^2}=n\\ &\Rightarrow\lambda-a^2=n^2\\ &\Rightarrow\lambda=n^2+a^2\\ &\Rightarrow\lambda_n=n^2+a^2\end{aligned}$$

οι ιδιοτιμές του προβλήματος.

Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις θα είναι: $\boxed{u_n(x) = C_n \sin(xn), n = 1, 2, ...}$

Επομένως η λύση μέσω ιδιοσυναρτήσεων θα είναι της μορφής:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(xn)$$

Υπολογίζοντας τις παραγώγους θα έχουμε:

$$\left\{ \begin{aligned} u' &= \sum_{n=1}^{\infty} nC_n \cos(xn) \\ u'' &= -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin(xn) \end{aligned} \right\}$$

και αντικαθιστώντας στην αρχική μας εξίσωση θα έχουμε:

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 C_n \sin(nx) + a^2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx) = f(x)$. Κάνοντας χρήση ιδιοσυναρτήσεων για την συνάρτηση f ισχύει $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(xn)$, όποτε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} n^2 C_n \sin(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} a^2 C_n \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(nx) \\ &\Rightarrow n^2 C_n \sin(nx) + a^2 C_n \sin(nx) = f_n \sin(nx) \\ &\Rightarrow (n^2 + a^2) C_n = f_n \\ &\Rightarrow C_n = \frac{f_n}{n^2 + a^2} \end{aligned}$$

όπου $f_n = \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$ αφού η f είναι συνεχής στο [0,π].

Η λύση τώρα θα πάρει την μορφή

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n^2 + a^2} \sin(nx) \Rightarrow \boxed{u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx}{n^2 + a^2} \sin(nx)}$$

2. Δίνονται τα παρακάτω προβλήματα Sturm-Liouville και αναζητάμε τρόπο επίλυσης τους και εύρεση της λύσης τους:

(α) $\begin{cases} -\varphi'' = \lambda\varphi, \; 0 < x < l \\ \varphi'(0) = \varphi'(l) = 0 \end{cases}$

ΛΥΣΗ:

Το πρόβλημα SL γίνεται:

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0 \\ \varphi'(0) = \varphi'(l) = 0 \end{cases}$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι : $\alpha^2+\lambda=0 \Rightarrow \alpha=\pm i\sqrt{\lambda}$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι για τις περιπτώσεις $\lambda \le 0$, το πρόβλημα θα έχει μοναδική λύση την $\phi=0$. Διακρίνουμε την περίπτωση όπου $\lambda>0$: οπότε η γενική λύση είναι της μορφής:

$$\varphi(x)=C_1\sin(x\sqrt{\lambda})+C_2\cos(x\sqrt{\lambda})$$

τότε αναζητούμε C_1, C_2 .

$$\varphi'(x)=C_1\sqrt{\lambda}\cos(x\sqrt{\lambda})+C_2\sqrt{\lambda}(-\sin(x\sqrt{\lambda})) \Rightarrow \varphi'(0)=C_1\sqrt{\lambda}=0 \Rightarrow C_1=0$$

οπότε:

$$\varphi(x)=C_2\cos(x\sqrt{\lambda})$$

και

$$\begin{aligned}
&\varphi'(x)=-C_2\sqrt{\lambda}\sin(x\sqrt{\lambda}) \Rightarrow \\
&\varphi'(l)=0 \Rightarrow \\
&-C_2\sqrt{\lambda}\sin(l\sqrt{\lambda})=0 \overset{C_2\neq 0}{\Rightarrow} \\
&\sin(l\sqrt{\lambda})=0 \Rightarrow \\
&l\sqrt{\lambda}=n\pi, \quad n=0,1,2,\ldots \Rightarrow \\
&\boxed{\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2}, \ n=0,1,2,\ldots}
\end{aligned}$$

οι ιδιοτιμές που αντιστοιχούν σε μη-τετριμμένη λύση, με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις:

$$\varphi_n=C_n\cos(x\sqrt{\lambda}) \Rightarrow \varphi_n=C_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad n=0,1,\ldots$$

(β) $\begin{cases} -\varphi''=\lambda\varphi, \ 0<x<1 \\ \varphi'(0)=\varphi'(1)=0 \end{cases}$

ΛΥΣΗ:

Το πρόβλημα είναι της μορφής $\varphi''+\lambda\varphi=0$ με γενική λύση της μορφής:

$$\varphi(x)=C_1\cos(x\sqrt{\lambda})+C_2\sin(x\sqrt{\lambda})$$

και από συνθήκη προκύπτει:

$$\varphi(0)=0 \Rightarrow C_1\cos(x\sqrt{\lambda})=0 \Rightarrow C_1=0$$

οπότε $\varphi(x)=C_2\sin(x\sqrt{\lambda})$ με παράγωγο $\varphi'(x)=C_2\sqrt{\lambda}\cos(x\sqrt{\lambda})$.

Επίσης,

$$\varphi(1)-\varphi'(1)=0 \text{ και}$$

$$C_2\sin(\sqrt{\lambda})-C_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda})=0 \Rightarrow C_2\left[\sin(\sqrt{\lambda})-\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda})\right]=0$$

Θεωρούμε $C_2 \neq 0$,γιατί αλλιώς η λύση θα ήταν μη τετριμμένη, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\cos\sqrt{\lambda}}=\sqrt{\lambda} \Rightarrow \tan\sqrt{\lambda}=\sqrt{\lambda}$$

(δ) $\begin{cases} -\varphi''-2\beta\varphi'=\lambda\varphi, \ 0<x<l \\ \varphi'(0)=\varphi'(l)=0, \ \beta>0 \end{cases}$

ΛΥΣΗ:

Το πρόβλημα είναι της μορφής $-\varphi''-2\beta\varphi'-\lambda\varphi=0 \Rightarrow \varphi''+2\beta\varphi'+\lambda\varphi=0$, έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο :

$$\alpha^2+2\beta\alpha+\lambda=0$$

$$\Delta=4\beta^2-4\lambda=4(\beta^2-\lambda)$$

$$\alpha_{1,2}=\frac{-2\beta\pm i2\sqrt{\beta^2-\lambda}}{2}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=-\beta+i\sqrt{\beta^2-\lambda}\\ \alpha_2=-\beta-i\sqrt{\beta^2-\lambda}\end{cases}$$

όπου: $\beta^2-\lambda<0\Rightarrow\lambda>\beta^2$, οπότε οι λύσεις είναι μιγαδικές.

Η γενική λύση θα είναι της μορφής:

$$\varphi(x)=C_1e^{-\beta x}\cos(x\sqrt{\beta^2-\lambda})+C_2e^{-\beta x}\sin(x\sqrt{\beta^2-\lambda})$$

και από συνθήκη:

$$\varphi(0)=0\Rightarrow C_1e^{-0}\cos(0)+C_2e^{-0}\sin(0)=0\Rightarrow C_1=0$$

οπότε:

$$\varphi(x)=C_2e^{-\beta x}\sin(x\sqrt{\beta^2-\lambda})$$

θεωρούμε $C_2\neq 0$ και για $x=l$:

$$\varphi(l)=0\Rightarrow C_2e^{-\beta l}\sin(l\sqrt{\beta^2-\lambda})=0\Rightarrow\begin{cases}\acute{\eta} \ e^{-\beta l}=0\\ \acute{\eta} \ \sin(l\sqrt{\beta^2-\lambda})=0\end{cases}$$

από όπου:

$$\sin(l\sqrt{\beta^2-\lambda})=0\Rightarrow$$

$$l\sqrt{\beta^2-\lambda}=n\pi, \quad n=0,1,...\Rightarrow\beta^2-\lambda=\frac{n^2\pi^2}{l^2}\Rightarrow$$

$$\beta^2-\frac{n^2\pi^2}{l^2}=\lambda, \quad n=0,1,...\Rightarrow\lambda=\boxed{\lambda_n=\beta^2-\frac{n^2\pi^2}{l^2}=\lambda, \quad n=0,1,...}$$

Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις:

$$\varphi_n(x)=C_2e^{-\beta x}\sin\left(x\sqrt{\beta^2-\beta^2+\frac{n^2\pi^2}{l^2}}\right)\Rightarrow$$

$$\varphi_n(x)=C_2e^{-\beta x}\sin\left(x\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{l^2}}\right)\Rightarrow$$

$$\varphi_n(x)=C_2e^{-\beta x}\sin\left(x\frac{n\pi}{l}\right), \quad n=0,1,...$$

(ε) $\begin{cases} -(x^2\varphi')' = \lambda\varphi, \ 0 < x < l \\ \varphi(1) = \varphi(l) = 0 \end{cases}$

ΛΥΣΗ:

Το πρόβλημα SL θα είναι:

$$-(x^2\varphi''+2x\varphi') = \lambda\varphi \Rightarrow$$
$$-x^2\varphi''-2x\varphi') = \lambda\varphi \Rightarrow \qquad \textbf{(1.35)}$$
$$-x^2\varphi''-2x\varphi'-\lambda\varphi = 0$$

Επειδή είναι της μορφής:

$$(\alpha x+\beta)^2 y''(x) + A(\alpha x+\beta)y'(x) + B(\alpha x+\beta)y(x) = f(x) = 0$$

δηλαδή Euler, επιδιώκουμε με κατάλληλο μετασχηματισμό να την ανάγουμε σε διαφορική $2^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές. Θέτουμε $\alpha x+\beta = e^t \overset{\alpha\neq 0}{\Rightarrow} x = \dfrac{e^t-\beta}{\alpha}$, $y(x) = u(t)$ και παραγωγίζοντας κατάλληλα, αντικαθιστούμε και λύνουμε.

Θέτουμε:

$$x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$$

και τότε:

$$y(x) = y(e^t) = Y(t) \qquad \textbf{(1.36)}$$

με

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dx} = \frac{dY}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = Y'e^{-t} \Rightarrow y' = Y'e^{-t}$$

και

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2Y}{dx^2} = \frac{d(Y'e^{-t})}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} =$$
$$= Y''e^{-t} - Y'e^{-t})'e^{-t} =$$
$$= Y''e^{-2t} - Y'e^{-2t} =$$
$$= (Y''-Y')e^{-2t} \Rightarrow$$
$$y''(x) = (Y''-Y')e^{-2t}$$

Αντικαθιστούμε στην αρχική, όπου $\varphi'' \equiv y''$ και $\varphi' \equiv y'$, οπότε :

$$(1.35) \overset{(1.36)}{\Rightarrow} \quad e^{2t}(Y''-Y')e^{-2t} + 2e^tY'e^{-t} + \lambda Y = 0 \Rightarrow$$
$$Y''-Y'+2Y'+\lambda Y = 0 \Rightarrow Y''+Y'+\lambda Y = 0$$

η οποία είναι ΣΔΕ $2^{ης}$ τάξης με χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\alpha^2+\alpha+\lambda = 0$$
$$\Delta = 1-4\lambda < 0, \quad (\lambda > 0)$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-1\pm i\sqrt{1-4\lambda}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{1-4\lambda}}{2} \\ \alpha_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{1-4\lambda}}{2} \end{cases}$$

οπότε η γενική λύση είναι της μορφής:

$$Y(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos(x\frac{\sqrt{1-4\lambda}}{2}) + C_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin(x\frac{\sqrt{1-4\lambda}}{2})$$

Για $Y(1) = Y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$, οπότε:

$$Y(x) = C_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin(\frac{x}{2}\sqrt{1-4\lambda}) \qquad \textbf{(1.37)}$$

και για $x = e, y(e) = Y(1) = 0$ και για $C_2 \neq 0$, τότε:

$$Y(1) = C_2 e^{\frac{1}{2}} \sin(\frac{\sqrt{1-4\lambda}}{2}) = 0 \Rightarrow \sin(\frac{\sqrt{1-4\lambda}}{2}) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{1-4\lambda}}{2} = n\pi, \quad (n = 0,1,...) \Rightarrow$$

$$\sqrt{1-4\lambda} = 2n\pi \Rightarrow 1-4\lambda = 4n^2\pi^2 \Rightarrow \boxed{\lambda = \lambda_n = \frac{1}{4} - n^2\pi^2, \quad (n = 0,1,...)}$$

οι ζητούμενες ιδιοτιμές. Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις:

$$(1.37) \Rightarrow Y_n(x) = C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin(\frac{x}{2}\sqrt{1-1+4\pi^2 n^2})$$

$$Y_n(x) = C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin(\frac{x}{2}\sqrt{4\pi^2 n^2}) \quad \Rightarrow \quad Y_n(x) = C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin(x\pi n), \quad n = 0,1,...$$

δηλαδή:

$$\boxed{y_n(x) = C_n \sin(\pi n e^t), \quad n = 0,1,...}$$

3. Θεωρούμε το πρόβλημα Sturm-Liouville και αναζητούμε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτησεις του. Έστω:

$$\left\{\begin{array}{l} -\phi''(x) = \lambda\phi(x), -l < x < l \\ \phi(-l) = \phi(l) \\ \phi'(-l) = \phi(l) \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1.38)}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της εξίσωσης είναι $\alpha^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\sqrt{-\lambda} \\ \alpha_2 = \sqrt{-\lambda} \end{cases}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις για το *λ:*

(i) $\lambda < 0 \Rightarrow \lambda = -\kappa^2, \kappa > 0$

Τότε $\alpha^2 - \kappa^2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \kappa^2 \Rightarrow \alpha = \pm\kappa$ και η γενική λύση θα είναι την μορφής:

$$\phi(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

με παράγωγο $\phi'(x) = Ake^{kx} - Bke^{-kx}$ και από τις συνθήκες περιοδικότητας της (1.38) παίρνουμε τις σχέσεις:

$$\left\{\begin{array}{l} Ae^{kl}+Be^{-kl}=Ae^{-kl}+Be^{kl} \\ Ake^{kl}-Bke^{-kl}=Ake^{-kl}-Bke^{kl} \end{array}\right\} \xrightarrow{k>0} \left\{\begin{array}{l} (e^{kl}-e^{-kl})A=B(e^{kl}-e^{-kl}) \\ (e^{kl}-e^{-kl})A=B(e^{-kl}-e^{kl}) \end{array}\right\}$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} A=B \\ e^{kl}-e^{-kl}=e^{-kl}-e^{kl} \end{array}\right\} \to 2e^{kl}=2e^{-kl}$$

$$\to e^{kl}=\frac{1}{e^{kl}}$$

$$\to e^{2kl}=1$$

$$\to 2kl=0$$

$$\to k=0$$

το οποίο είναι άτοπο, λόγω υπόθεσης για το k. Έτσι $\boxed{\phi(x)\equiv 0}$, τετριμμένη λύση.

(ii)$\lambda=0$ και τότε $\phi''(x)=0\to\phi'(x)=A, A\in R\to\phi(x)=A+Bx, A,B\in R$ και επαληθεύοντας τις συνθήκες του (Ι), παίρνουμε:

$$A+Bl=A-Bl\Rightarrow 2Bl=0\Rightarrow B=0$$

και τότε η γενική λύση γίνεται $\boxed{\phi_0(x)=A_0}$. Οπότε η $\boxed{\lambda_0=0}$ αποτελεί ιδιοτιμη του προβλήματος (1.38).

(iii) $\lambda>0\to\lambda=k^2, k>0$ και τότε η γενική λύση του προβλήματος γίνεται:

$$\left\{\begin{array}{l} \phi(x)=A\cos(kx)+B\sin(kx) \\ \phi'(x)=-Ak\sin(kx)+Bk\cos(kx) \end{array}\right\}$$

και από τις συνθήκες, προκύπτει:

$$\left\{\begin{array}{l} A\cos(kl)+B\sin(kl)=A\cos(-kl)+B\sin(-kl) \\ -Ak\sin(kl)+Bk\cos(kl)=-Ak\sin(-kl)+Bk\cos(-kl) \end{array}\right\}$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} 2B\sin(kl)=0 \\ 2A\sin(kl)=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{|A|+|B|\neq 0} \sin(kl)=0$$

$$\to kl=n\pi, n\in\mathbb{N}$$

$$\to k=\frac{n\pi}{l}, n\in\mathbb{N}$$

και οι ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στο (1.38), είναι $\boxed{\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2}, n\in\mathbb{N}}$ και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι

$$\boxed{\phi_n(x)=A_n\cos(\frac{n\pi x}{l})+B_n\sin(\frac{n\pi x}{l}), A_n, B_n\neq 0, n\in\mathbb{N}}.$$

4. Το πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Laplace στον μοναδιαίο δίσκο:

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta u(r,\theta)=0\\ u(1,\theta)=f(\theta)\end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} r<1, -\pi<\theta<\pi\\ -\pi<\theta<\pi\end{array}$$

ΛΥΣΗ:

Η Λαπλασιανη σε πολικές συντεταγμένες, είναι:

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta u=u_{rr}+\dfrac{1}{u}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\\ u(1,\theta)=f(\theta)\end{array}\right\} \qquad \textbf{(1.39)} \qquad \begin{array}{l}0<r<1, -\pi<\theta<\pi\\ -\pi<\theta<\pi\end{array}$$

Και οι συνοριακές συνθήκες: $\left\{\begin{array}{l}u(r,\pi)=u(r,-\pi)\\ u_\theta(r,\pi)=u_\theta(r,-\pi)\end{array}\right\} \quad 0<r\le 1$

Αναζητάμε μια μη-τετριμμένη λύση της μορφής:

$$u(r,\theta)=F(r)G(\theta)\neq 0$$

Θα κάνουμε χρήση των συμβολισμών: $\cdot\equiv\dfrac{d}{d\theta}$ και $'\equiv\dfrac{d}{dr}$ για τις παραγωγούς των συναρτήσεων G και F, αντίστοιχα.

Κάνοντας αντικατάσταση στον τύπο (1) για την συνάρτηση u(r,θ) θα έχουμε:

$$F''(r)G(\theta)+\frac{1}{r}F'(r)G(\theta)+\frac{1}{r^2}F(r)\ddot{G}(\theta)=0$$

$$\Rightarrow r^2F''(r)G(\theta)+rF'(r)G(\theta)+F(r)\ddot{G}(\theta)=0$$

$$\Rightarrow \left[r^2F''(r)+rF'(r)\right]G(\theta)+F(r)\ddot{G}(\theta)=0$$

$$\Rightarrow \frac{\left[r^2F''(r)+rF'(r)\right]}{F(r)}=-\frac{\ddot{G}(\theta)}{G(\theta)}$$

Τότε $\exists\lambda\in\mathbf{R}$ τέτοιο ώστε:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{r^2F''(r)+rF'(r)}{F(r)}=\lambda \\ \\ \ddot{G}(\theta)=-\lambda G(\theta) \\ \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r^2F''(r)+rF'(r)=\lambda F(r) \\ \\ \ddot{G}(\theta)+\lambda G(\theta)=0 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1.40)}$$

Για τις συνοριακές συνθήκες, θα ισχύει:

$$\left\{\begin{array}{l} F(r)G(\pi)=F(r)G(-\pi) \\ F(r)\dot{G}(\pi)=F(r)\dot{G}(-\pi) \end{array}\right\} \xrightarrow{F(r)\neq 0} \left\{\begin{array}{l} G(\pi)=G(-\pi) \\ \dot{G}(\pi)=\dot{G}(-\pi) \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1.41)}$$

Από την (1.41) και την δεύτερη εξίσωση του (1.40), προκύπτει το πρόβλημα Sturm-Liouville με την μορφή:

$$\left\{\begin{array}{l} \ddot{G}(\theta)+\lambda G(\theta)=0, -\pi<\theta<\pi \\ G(\pi)=G(-\pi) \\ \dot{G}(\pi)=\dot{G}(-\pi) \end{array}\right\} (S-L)$$

το οποίο αποτελεί ένα πρόβλημα ιδιωτιών ως προς θ. Λύνοντας το υπολογίσουμε την χαρακτηριστική εξίσωση να είναι:

$$a^2+\lambda=0 \Rightarrow a^2=-\lambda \Rightarrow \alpha=\left\{\begin{smallmatrix} -\lambda i \\ \lambda i \end{smallmatrix}\right.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις για το λ:

(i) λ=0, τότε α=0 και προκύπτει από (S-L):

$$\ddot{G}(\theta)=0 \Rightarrow \dot{G}(\theta)=\mathrm{B} \Rightarrow G(\theta)=\mathrm{A}\theta+\mathrm{B}$$

για γενική λύση της συνάρτησης G.

Επαληθεύοντας για τις συνοριακές συνθήκες, έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} G(\pi)=G(-\pi) \\ \dot{G}(\pi)=\dot{G}(-\pi) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}\pi+\mathrm{B}=-\mathrm{A}\pi+\mathrm{B} \\ \mathrm{B}=\mathrm{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \{2\mathrm{A}\pi=0\} \xrightarrow{\pi\neq 0} \{\mathrm{A}=0\}$$

Επομένως,

$$G(\theta)=B\neq 0$$

και η ιδιοτιμή λ=0 αποτελεί λύση του προβλήματος, με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση

$$G_0(\theta)=B_0\neq 0$$

(ii) λ<0: θέτουμε $\lambda=-\kappa^2$, για κάποιο κ>0 και τότε η χαρακτηριστική εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$\alpha^2=\kappa^2 \Rightarrow \alpha=\pm\kappa$$

Και η γενική λύση θα πάρει την μορφή:

$$\begin{Bmatrix} G(\theta) = C_1 e^{\kappa\theta} + C_2 e^{-\kappa\theta} \\ \dot{G}(\theta) = C_1 \kappa e^{\kappa\theta} - \kappa C_2 e^{-\kappa\theta} \end{Bmatrix}$$

Ενώ οι συνοριακές συνθήκες θα γίνουν:

$$\begin{Bmatrix} G(\pi) = G(-\pi) \Rightarrow C_1 e^{\kappa\pi} + C_2 e^{-\kappa\pi} = C_1 e^{-\kappa\pi} + C_2 e^{\kappa\pi} \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow C_1\left(e^{\kappa\pi} - e^{-\kappa\pi}\right) = C_2(e^{\kappa\pi} - e^{-\kappa\pi}) \end{Bmatrix}$$

και

$$\begin{Bmatrix} \dot{G}(\pi) = \dot{G}(-\pi) \Rightarrow C_1 \kappa e^{\kappa\pi} - C_2 \kappa e^{-\kappa\pi} = C_1 \kappa e^{-\kappa\pi} - C_2 \kappa e^{\kappa\pi} \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow C_1 \kappa(e^{\kappa\pi} - e^{-\kappa\pi}) = C_2 \kappa(e^{-\kappa\pi} - e^{\kappa\pi}) \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow C_1 \kappa(e^{\kappa\pi} - e^{-\kappa\pi}) = C_1 \kappa(e^{-\kappa\pi} - e^{\kappa\pi}) \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow (e^{\kappa\pi} - e^{-\kappa\pi}) = (e^{-\kappa\pi} - e^{\kappa\pi}) \\ \\ \Rightarrow 2e^{\kappa\pi} = 2e^{-\kappa\pi} \\ \\ \Rightarrow \kappa\pi = -\kappa\pi \\ \\ \Rightarrow \kappa = 0 \end{Bmatrix}$$

το όποιο είναι άτοπο εφόσον κ>0. Επομένως για λ<0, $G(\theta) \equiv 0$ η οποία δεν είναι μη τετριμμένη λύση και έτσι δεν υπάρχουν κατάλληλες ιδιοτιμές στην περίπτωση αυτή.

(iii) λ>0 και θέτουμε $\lambda = \kappa^2$, για κάποιο κ>0 και η χαρακτηριστική εξίσωση παίρνει την μορφή

$$\alpha^2 = -\kappa^2 \Rightarrow \alpha = \pm i\kappa$$

και η γενική λύση της εξίσωσης θα είναι:

$$\begin{Bmatrix} G(\theta) = D_1 \cos(\kappa\theta) + D_2 \sin(\kappa\theta) \\ \dot{G}(\theta) = -D_1 \kappa \sin(\kappa\theta) + D_2 \kappa \cos(\kappa\theta) \end{Bmatrix}$$

Ενώ οι συνοριακές συνθήκες θα πάρουν την μορφή:

$$\left\{\begin{array}{l} G(\pi) = G(-\pi) \Rightarrow D_1 \cos(\kappa\pi) + D_2 \sin(\kappa\pi) = D_1 \cos(\kappa\pi) - D_2 \sin(\kappa\pi) \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow 2D_2 \sin(\kappa\pi) = 0 \\ \\ \xrightarrow{D_2 \neq 0} \sin(\kappa\pi) = 0 \\ \\ \Rightarrow \kappa\pi = n\pi, n \in \mathbb{N} \\ \\ \Rightarrow \kappa = n, n \in \mathbb{N} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{G}(\pi) = G(-\pi) \Rightarrow -D_1\kappa \sin(\kappa\pi) + D_2\kappa \cos(\kappa\pi) = D_1\kappa \sin(\kappa\pi) + D_2\kappa \cos(\kappa\pi) \\ \\ \Rightarrow 2D_1 \sin(\kappa\pi) = 0 \\ \\ \xrightarrow{D_1 \neq 0} \sin(\kappa\pi) = 0 \\ \\ \Rightarrow \kappa\pi = n\pi, n \in \mathbb{N} \\ \\ \Rightarrow \kappa = n, n \in \mathbb{N} \end{array}\right\}$$

Και τότε υπάρχει μη τετριμμένη λύση για λ<0, η:

$$\lambda_n = n^2, n \in \mathbb{N}$$

η οποία αποτελεί και μια ακόμα ιδιοτιμη για το πρόβλημα που αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση:

$$G_n(\theta) = D_1 \cos(n\theta) + D_2 \sin(n\theta), \left|D_1\right| + \left|D_2\right| \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

Υπολογίζουμε τώρα τις κατάλληλες ιδιοτιμες για την συνάρτηση F(r):
Από το (1.40) θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} r^2 F_0''(r) + rF_0'(r) - \lambda_0 F_0(r) = 0 \\ \Rightarrow r^2 F_0''(r) + rF_0'(r) = 0 \end{array}\right. \quad \text{για } \lambda_0 = 0$$

Έτσι προκύπτει μια ΣΔΕ δεύτερης τάξης η οποία λύνεται με την μέθοδο Euler-Cauchy, θέτοντας $r = e^s \Rightarrow s = \ln(r), r > 0$ και υπολογίζοντας τις παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης, θα έχουμε αντίστοιχα:

$$F_0' \equiv \frac{dF_0(r)}{dr} = \frac{d\tilde{F}_0(s)}{ds}\frac{ds}{dr} = \frac{1}{r}\tilde{F}_0'(s) = e^{-s}\tilde{F}_0'(s)$$

$$F_0'' \equiv \frac{d^2F_0(r)}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\tilde{F}_0'(s)\right\} = \frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\right\}\tilde{F}_0'(s) + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{\tilde{F}_0'(s)\right\} =$$

$$= \frac{d}{ds}\left\{e^{-s}\right\}\frac{ds}{dr}\tilde{F}_0'(s) + \frac{1}{r}\frac{d}{ds}\tilde{F}_0'(s)\frac{ds}{dr} =$$

$$= -e^{-s}\frac{1}{r}\tilde{F}_0'(s) + \frac{1}{r^2}\tilde{F}_0''(s) =$$

$$= -e^{-s}e^{-s}\tilde{F}_0'(s) + e^{-2s}\tilde{F}_0''(s) =$$

$$= -e^{-2s}\tilde{F}_0'(s) + e^{-2s}\tilde{F}_0''(s)$$

Και αντικαθιστώντας θα έχουμε:

$$e^{2s}\left[e^{-2s}\tilde{F}_0''(s) - e^{-2s}\tilde{F}_0'(s)\right] + e^{s}e^{-s}\tilde{F}_0'(s) = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{F}_0''(s) - \tilde{F}_0'(s) + \tilde{F}_0'(s) = 0$$
$$\Rightarrow \tilde{F}_0''(s) = 0$$
$$\Rightarrow \tilde{F}_0'(s) = M$$
$$\Rightarrow F_0(s) = Kr + M$$

με K, M πραγματικοί αριθμοί.

Αντικαθιστώντας όπου s=ln(r), θα έχουμε:

$$F_0(\ln(r)) = K(\ln(r)) + M$$
$$\Rightarrow F_0(r) = K(\ln(r)) + M$$

και επειδή $r \in [0,1]$ ο όρος ln(r) για r=0 δεν ορίζεται, οπότε θα θεωρήσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας $K \equiv 0$ και τότε θα έχουμε την λύση

$F_0(r) = M \neq 0$, για την ιδιοτιμη λ_0 =0.

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε την λύση της συνάρτησης F(r) για την ιδιοτιμη $\lambda_n = n^2, n \in \mathbb{N}$, όποτε και προκύπτει:

$$r^2F_n''(r) + rF_n'(r) - \lambda_n F_n(r) = 0 \Rightarrow r^2F_n''(r) + rF_n'(r) - n^2F_n(r) = 0$$

Και με την μέθοδο Euler-Cauchy, εφαρμόζουμε και εδώ τον μετασχηματισμό

$$r = e^s \Rightarrow s = \ln(r), r > 0$$

Και θα προκύψει:

$$e^{2s}\left\{-e^{-2s}\tilde{F}_n'(s)+e^{-2s}\tilde{F}_n''(s)\right\}+e^{-s}\left\{e^{-s}\tilde{F}_n'(s)\right\}-n^2\tilde{F}_n(s)=0$$
$$\Rightarrow -\tilde{F}_n'(s)+\tilde{F}_n''(s)+\tilde{F}_n'(s)-n^2\tilde{F}_n(s)=0$$
$$\Rightarrow \tilde{F}_n''(s)-n^2\tilde{F}_n(s)=0$$

η οποία έχει χαρακτηριστική εξίσωση της μορφής $t^2-n^2=0\Rightarrow t=\pm n, n\in\mathbb{N}$ και έτσι έ-χουμε:

$$\left.\begin{cases}\tilde{F}_n(s)=B_ne^{ns}+C_ne^{-ns}, n\in\mathbb{N}\\ \\ \rightarrow \boxed{F_n(r)=B_nr^n+C_nr^{-n}}\end{cases}\right\}\quad |C_n|+|B_n|\neq 0, n\in\mathbb{N}$$

Και επειδή το $r\in[0,1]$, θα ορίζεται για r=0 οπότε στον όρο r^{-n} θα δημιουργείται πρόβλημα. Για τον λόγο αυτό και χωρίς βλάβη της γενικότητας θα θεωρήσουμε $C_n\equiv 0$ και τότε η γενική λύση θα πάρει την μορφή:

$$\boxed{F_n(r)=B_nr^n, B_n\neq 0, n\in\mathbb{N}}$$

Από όλα τα παραπάνω, η λύση του αρχικού μας προβλήματος θα έχει την μορφή:

$$\begin{Bmatrix}u_0(r,\theta)=F_0(r)G_0(\theta)\\ u_n(r,\theta)=F_n(r)G_n(\theta)\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}u_0(r,\theta)=B_oM\\ u_n(r,\theta)=B_nr^n\left\{D_1\cos(n\theta)+D_2\sin(n\theta)\right\}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}u_0(r,\theta)=\tilde{B}_o\\ u_n(r,\theta)=\left\{\tilde{D}_1\cos(n\theta)+\tilde{D}_2\sin(n\theta)\right\}\end{Bmatrix}$$

όπου $\tilde{B}_0\equiv B_0M,\quad \tilde{D}_1\equiv B_nD_1r^n,\quad \tilde{D}_2\equiv B_nD_2r^n$

Τελειώνοντας υπολογίζουμε την λύση ολόκληρου του προβλήματος φορμαλιστικά:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(r,\theta)=u_0(r,\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(r,\theta)$$
$$\Rightarrow u(r,\theta)=\tilde{B}_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\tilde{D}_1r^n\cos(n\theta)+\tilde{D}_2r^n\sin(n\theta)\right\}$$

Και από αρχική συνθήκη, αντικαθιστούμε:

$$\boxed{u(1,\theta)=f(\theta)=\tilde{B}_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\tilde{D}_1\cos(n\theta)+\tilde{D}_2\sin(n\theta)\right\}}$$

5. Λύστε με την μέθοδο Fourier τα παρακάτω προβλήματα:

$$\textbf{(α)}\begin{Bmatrix} u_t = u_{xx}, 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), 0 < x < l \end{Bmatrix}$$

ΛΥΣΗ:

Στην μέθοδο επίλυσης του προβλήματος (α) αναζητάμε μη-τετριμμένες λύσεις, τέτοιες ώστε $u(x,t) = F(x)G(t) \neq 0$. Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους στο t και x θα έχουμε:

$$u_t = F(x)\dot{G}(t)$$
$$u_x = F'(x)G(t) \Rightarrow u_{xx} = F''(x)G(t)$$

όπου ο δηλώνει την μερική παράγωγο ως προς x και η τελεία την μερική παράγωγο ως προς t. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση θα προκύψει

$F(x)\dot{G}(t) = F''(x)G(t) \Leftrightarrow \dfrac{F''(x)}{F(x)} = \dfrac{\dot{G}(t)}{G(t)}, \forall x \in (0,l), t > 0$ και τότε θα υπάρχει ένας αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\begin{Bmatrix} \dot{G}(t) = \lambda G(t) \\ F''(x) = \lambda F(x) \end{Bmatrix}$ και οι μερικές παράγωγοι στο σύνορο θα γίνουν:

$\begin{Bmatrix} u_x(0,t) = F'(0)G(t) = 0 \Rightarrow F'(0) = 0 \\ u_x(l,t) = F'(l)G(t) = 0 \Rightarrow F'(l) = 0 \end{Bmatrix}$. Με τον τρόπο αυτό θα προκύψει το παρακάτω πρόβλημα Sturm-Liouville: $\begin{Bmatrix} F''(x) - \lambda F(x) = 0, 0 < x < l \\ F'(0) = F'(l) = 0 \end{Bmatrix}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $\lambda = 0$ όποτε $F''(x) = 0$ και η λύση θα έχει την μορφή $F(x) = Ax + B$ και από τις αρχικές συνθήκες $\begin{Bmatrix} F'(x) = A \\ F'(0) = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{F(x) \equiv B_0}$.

(ii) $\lambda > 0$ και θέτουμε για κάποιο κ>0, $\lambda = \kappa^2$. Τότε η λύση θα έχει την μορφή $F(x) = Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}$, παραγωγίζοντας $F'(x) = A\kappa e^{\kappa x} - B\kappa e^{-\kappa x}$ και από τις συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{Bmatrix} F'(0) = \kappa A - \kappa B = 0 \\ F'(l) = \kappa A e^{\kappa l} - \kappa B e^{-\kappa l} = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} A - B = 0 \\ Ae^{\kappa l} - Be^{-\kappa l} = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} A = B \\ B(e^{\kappa l} - e^{-\kappa l}) = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left\{ e^{2\kappa l} - 1 = 0 \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ 2\kappa l = 0 \right\} \Rightarrow \boxed{\kappa = 0}$$

πράγμα άτοπο, αφού κ>0.

(iii) $\lambda < 0$ και θέτουμε για κάποιο κ>0, $\lambda = -\kappa^2$. Τότε η λύση θα έχει την μορφή $F(x) = A\cos(\kappa x) + B\sin(\kappa x)$, παραγωγίζοντας $F'(x) = -\kappa A\sin(\kappa x) + B\kappa\cos(\kappa x)$ και από τις συνοριακές προκύπτει:

$$\begin{Bmatrix} F'(0)=0 \\ F'(l)=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \kappa B=0 \\ -\kappa A\sin(\kappa l)=0 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\kappa\neq 0} \begin{Bmatrix} B=0 \\ \sin(\kappa l)=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \kappa l = n\pi, n\in\mathbb{N} \Rightarrow \boxed{\kappa=\frac{n\pi}{l}, n\in\mathbb{N}}$$

η οποία αποτελεί μια μη-τετριμμένη λύση που ικανοποιεί το πρόβλημα. Έτσι οι ιδιοτιμές που έχουμε θα είναι: $\boxed{\lambda_n=-\kappa_n{}^2=-\frac{n^2\pi^2}{l^2}, n\in\mathbb{N}}$ με αντίστοιχες ιδιοσυναρτησεις της μορφής: $\boxed{F_n(x)=A_n\cos(\kappa_n x)=A_n\cos(\frac{n\pi x}{l})}$.

Συνοψίζοντας, οι ιδιοτιμες και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτησεις που ικανοποιούν το πρόβλημα S-L θα είναι: $\begin{Bmatrix} \lambda_0=0\rightarrow F_0(x)=A_0 \\ \lambda_n=-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\rightarrow F_n(x)=A_n\cos(\frac{n\pi x}{l}) \end{Bmatrix}$.

Για την συνάρτηση G(t) με τις παραπάνω ιδιοτιμες και ιδιοσυναρτησεις προκύπτει:

$$\begin{Bmatrix} \dot{G}_0(t)-\lambda_0 G_0(t)=0\Rightarrow \dot{G}_0(t)=0\Rightarrow \boxed{G_0(t)=C_0\neq 0} \\ \dot{G}_n(t)-\lambda_n G_n(t)=0\Rightarrow \dot{G}_0(t)-\lambda_0 G_0(t)=0\Rightarrow \dot{G}_0(t)=0\Rightarrow \boxed{G_0(t)=C_0\neq 0} \\ \dot{G}_n(t)-\lambda_n G_n(t)=0\Rightarrow \dot{G}_n(t)+\frac{n^2\pi^2}{l^2}G_n(t)=0\Rightarrow \boxed{G_n(t)=C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}, n\in\mathbb{N}} \end{Bmatrix}$$

Αναζητάμε το C_n οπότε θα έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} u_0(x,t)=F_0(x)G_0(t)=\tilde{A}_0 \\ u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)=\tilde{A}_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}\cos(\frac{n\pi x}{l}) \end{Bmatrix} \text{ όπου } \begin{Bmatrix} \tilde{A}_0=A_0C_0 \\ \tilde{A}_n=A_nC_n \end{Bmatrix}.$$

Η φορμαλιστική λύση του αρχικού μας προβλήματος (Π) θα είναι:

$$u(x,t)=u_0(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\tilde{A}_0+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}\cos(\frac{n\pi x}{l}).$$

Από αρχική συνθήκη, για t=0 θα έχουμε:

$$u(x,0)=\tilde{A}_0+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_n e^0\cos(\frac{n\pi x}{l})=\tilde{A}_0+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_n\cos(\frac{n\pi x}{l})\Rightarrow \tilde{A}_0+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_n\cos(\frac{n\pi x}{l})=f(x)(*)$$

Ολοκληρώνοντας από 0 έως l τα 2 μελή προκύπτει:

$$\int_0^l f(x)dx=\int_0^l \tilde{A}_0 dx+\int_0^l\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_n\cos(\frac{n\pi x}{l})dx=\tilde{A}_0 l+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_n\int_0^l\cos(\frac{n\pi x}{l})dx=\tilde{A}_0 l$$

Οπότε

$$\boxed{\tilde{A}_0=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)dx}.$$

Για τον υπολογισμό των συντελεστών $\tilde{A}_n$, θα θεωρήσουμε $m \in \mathbb{N}$ σταθερό και αυθαίρετο συντελεστή. Πολλαπλασιάζουμε και τα 2 μέλη της (1.31) με $\cos(\frac{m\pi x}{l})$ και ολοκληρώνουμε ως προς x στο διάστημα [0,l]. Τότε προκύπτει από την (*):

$$\int_0^l f(x)\cos(\frac{m\pi x}{l})dx = \int_0^l \tilde{A}_0 \cos(\frac{m\pi x}{l})dx + \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \cos(\frac{m\pi x}{l})\cos(\frac{\pi n x}{l})dx$$

$$\Rightarrow \int_0^l f(x)\cos(\frac{m\pi x}{l})dx = \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \cos(\frac{m\pi x}{l})\cos(\frac{n\pi x}{l})dx$$

και από τον τύπο $\int_0^l \cos(\frac{n\pi x}{l})\cos(\frac{m\pi x}{l})dx = {}^{0, m\neq n}_{\frac{l}{2}, m=n}, m,n \in \mathbb{N}$ η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\boxed{\tilde{A}_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos(\frac{m\pi x}{l})dx, m \in \mathbb{N}}.$$

Επομένως, η u(x,t) με τα $\tilde{A}_0, \tilde{A}_n$ που υπολογιστήκαν μας δίνουν την λύση του δοθέντος προβλήματος αρχικών τιμών, μέσω της μεθόδου Fourier.

6. Αποδείξτε ότι οι ιδιοτιμές του προβλήματος Sturm-Liouville είναι θετικές. Έχουμε έτσι το πρόβλημα της μορφής:

$$\left\{\begin{array}{l} -(p(x)\phi')' + q(x)\phi = \lambda\phi, a \le x \le b \\ \alpha_1\phi(a) + \alpha_2\phi'(a) = 0 \\ \beta_1\phi(b) + \beta_2\phi'(b) = 0 \end{array}\right\}$$

για το οποίο p, q>0. Θέτοντας $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ το πρόβλημα θα πάρει την μορφή:

$$\left\{\begin{array}{l} -(p(x)\phi')' + q(x) = \lambda\phi \\ \phi'(a) = \phi'(b) = 0 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1.42)}$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με φ και ολοκληρώνοντας από το a έως το b, έχουμε:

$$-\int_a^b (p\phi')'\phi dx + \int_a^b q(x)\phi^2 dx = \int_a^b \lambda\phi^2 dx$$

$$\Rightarrow -\left\{ p\phi'\phi\Big|_a^b - \int_a^b p\phi'\phi' dx \right\} + \int_a^b q\phi^2 dx = \int_a^b \lambda\phi^2 dx$$

$$\Rightarrow -\left\{ p(b)\phi'(b)\phi(b) - p(a)\phi'(a)\phi(a) - \int_a^b p(\phi')^2 dx \right\} + \int_a^b q(x)\phi^2 dx = \lambda\int_a^b \phi^2 dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b p(\phi')^2 dx + \int_a^b q(x)\phi^2 dx = \lambda\int_a^b \phi^2 dx$$

και επειδή p, q>0, τότε αναγκαστικά όλες οι ιδιοτιμές λ είναι θετικές.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι ισχύει το ίδιο και για την περίπτωση που $\alpha_2 = \beta_2 = 0$.

1.5 Ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμοί Laplace

Έστω *u=u(t)* μια κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση για $t \geq 0$, η οποία δεν αυξάνεται πολύ γρήγορα, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της *u* ορίζεται ως:

$$(Lu)(s) \equiv U(s) = \int_0^\infty u(t)e^{-st}dt \qquad \textbf{(1.43)}$$

Η *U* και *s* λέγονται μεταβλητές μετασχηματισμού. Ο μετασχηματισμός είναι γραμμικός αφού ικανοποιεί τις δυο συνθήκες γραμμικότητας που έχουν αναφερθεί. Εάν ο μετασχηματισμός *U(s)* είναι γνωστός, η *u(t)* λέγεται *αντίστροφος μετασχηματισμός* της *U(s)* και συμβολικά γράφουμε $L^{-1}U = u$.

Η σημασία του μετασχηματισμού Laplace, έγκειται στο ότι μετατρέπει παραγωγίσεις σε πολλαπλασιασμούς. Πράγματι έχουμε ότι:

$$\left\{\begin{aligned} &(Lu')(s) = sU(s) - u(0) \\ &(Lu'')(s) = s^2U(s) - su(0) - u'(0) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(1.44)}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ: Μετασχηματίζω μια ΣΔΕ *u(t)* ως προς *U(s)* στο πεδίο μετασχηματισμού. Λύνουμε την *U(s)* και βρίσκουμε με αντίστροφη την *u(t)*.

Εάν η άγνωστη συνάρτηση είναι δυο μεταβλητών, *u=u(x,t)*, η διαδικασία είναι η ιδία με παραπάνω με την μονή διάφορα ότι μετασχηματίζουμε ως προς *t*, αφήνοντας την μεταβλητή *x* ανεπηρέαστη. Τότε παίρνουμε:

$$(Lu)(x,s) \equiv U(x,s) = \int_0^\infty u(x,t)e^{-st}dt \qquad \textbf{(1.45)}$$

με τις μερικές παραγώγους να παίρνουν την μορφή:

$$\left\{\begin{aligned} &(Lu_t)(x,s) = sU(x,s) - u(x,0) \\ &(Lu_x)(x,s) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}u(x,t)e^{-st}dt = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty u(x,t)e^{-st}dt = U_x(x,s) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(1.46)}$$

Σημειώνεται ότι ο τύπος υπολογισμού της *αντιστροφής συνάρτησης,* δίνεται από την σχέση:

$$u(t) = (L^{-1}U)(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} U(s)e^{st}ds \qquad \textbf{(1.47)}$$

Ένα άλλο αποτέλεσμα που είναι χρήσιμο σε υπολογισμούς είναι το *θεώρημα συνέλιξης*:

«Έστω *u, v* κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις για $t \geq 0$ και εκθετικής τάξης. Τότε:

$$L(u*v)(s) = U(s)V(s)$$

όπου

$$(u*v)(t) \equiv \int_0^t u(t-y)u(y)dy$$

είναι η *συνέλιξη των u, v* και $U = Lu, V = Lv$.

Μετασχηματισμοί Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης *u=u(x),* $x \in R^1$, ορίζεται από την εξίσωση:

$$(Fu)(\xi) \equiv \hat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{i\xi x} dx \qquad \textbf{(1.48)}$$

Για να υπάρχει ο μετασχηματισμός αυτός, απαραίτητη είναι η προϋπόθεση η συνάρτηση *u* να είναι *απολύτως ολοκληρώσιμη,* $\int_{-\infty}^{\infty} |u|\, dx < \infty$.

Μια βασική ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier, είναι ότι:

$$(Fu^{(k)})(\xi) = (-i\xi)^k \hat{u}(\xi), u \in S \qquad \textbf{(1.49)}$$

όπου *S* είναι το σύνολο των συναρτήσεων που φθίνουν ταχέως στον R^1 και που έχουν συνεχείς παραγωγούς κάθε τάξης. Εάν έχουμε δυο μεταβλητές, *u=u(x,t)*, η μεταβλητή *t* συμπεριφέρεται ως παράμετρος, και ορίζουμε:

$$(Fu)(\xi,t) \equiv \hat{u}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{i\xi x} dx$$

και για τις μερικές παραγώγους θα έχουμε:

$$(Fu_x)(\xi,t) = (-i\xi)\hat{u}(\xi,t)$$
$$(Fu_{xx})(\xi,t) = (-i\xi)^2 \hat{u}(\xi,t)$$
$$(Fu_t)(\xi,t) = \hat{u}_t(\xi,t)$$

Όπως και στον μετασχηματισμό Laplace, ο *αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier* της *u,* θα είναι:

$$(F^{-1}\hat{u})(x) \equiv u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi \qquad \textbf{(1.50)}$$

Παράδειγμα: Υπολογίστε τον μετασχηματισμό της $\hat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{i\xi x} dx$.

ΛΥΣΗ:

Παραγωγίζουμε ως προς *ξ* και ολοκληρώνουμε παραγοντικά:

$$\hat{u}'(\xi) = i \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ax^2} e^{i\xi x} dx = -\frac{i}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{i\xi x} dx = -\frac{\xi}{2a} \hat{u}(\xi)$$

η οποία είναι μια ΔΕ πρώτης τάξης ως προς $\hat{u}$. Χωρίζοντας τις μεταβλητές και ολοκληρώνοντας, παίρνουμε την γενική λύση:

$$\hat{u}(\xi) = c e^{\frac{-\xi^2}{4\alpha}}$$

Η σταθερά *c* προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη στο σημείο 0, όποτε, $\hat{u}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Συνεπώς θα έχουμε: $\boxed{F(e^{-ax^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}}$.

Θα ισχύει και εδώ το *θεώρημα συνέλιξης για τις συναρτήσεις* που θα είναι της μορφής:

« $\boxed{F(u*v)(\xi) = \hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi)}$, για $u, v \in S$ »

Ισχύει ακόμα, $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi}$

Ασκήσεις

1. Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace μετατρέπει τις παραγωγίσεις σε πολλαπλασιασμούς. Βάσει αυτού, έχουμε τους τύπους:

$$\left\{\begin{aligned}&(Lu')(s)=sU(s)-u(0)\\&(Lu'')(s)=s^2U(s)-su(0)-u'(0)\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(1.51) \& (1.52)}$$

οι οποίοι αποδεικνύονται με παραγοντική ολοκλήρωση. Για τον τύπο (1.51), μέσω ορισμού του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$(Lu)(s)\equiv U(s)=\int_0^\infty u(t)e^{-st}dt$$

$$\to (Lu')(s)=\int_0^\infty u'(t)e^{-st}dt$$

και τότε από παραγοντική ολοκλήρωση, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}(Lu')(s)&=u(t)e^{-st}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty -su(t)e^{-st}dt\\&=u(\infty)e^{-s\infty}-u(0)e^0+\int_0^\infty su(t)e^{-st}dt\\&=-u(0)+\int_0^\infty su(t)e^{-st}dt\\&=-u(0)+sU(s)\end{aligned}$$

και με παρόμοιο τρόπο για την (1.52), έχουμε:

$$\begin{aligned}(Lu'')(s)&=\int_0^\infty u''(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty (u'(t))'e^{-st}dt\\&=u'(t)e^{-st}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty su'(t)e^{-st}dt\\&=u'(\infty)e^{-s\infty}-u'(0)e^0+s\int_0^\infty u'(t)e^{-st}dt\\&=-u'(0)+s\left[(Lu')(s)\right]\\&=-u'(0)+s\left[sU(s)-u(0)\right]\\&=-u'(0)+s^2U(s)-su(0)\end{aligned}$$

και αποδείχτηκαν.

2. Να υπολογίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της $e^{-a|\xi|},\alpha>0$.

ΛΥΣΗ:

Βάσει θεωρίας θα ισχύει ότι:

$$F(e^{-a|\xi|})(k)=\int_{-\infty}^\infty e^{-a|\xi|}e^{-2\pi ik\xi}d\xi=\int_{-\infty}^0 e^{-2\pi ik\xi}e^{2\xi\pi a}d\xi+\int_0^\infty e^{-2\pi ik\xi}e^{-2\pi a\xi}d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^\infty\left[\cos(2\pi k\xi)-i\sin(2\pi k\xi)\right]e^{2a\pi\xi}d\xi+\int_0^\infty\left[\cos(2\pi k\xi)-i\sin(2\pi k\xi)\right]e^{-2\pi a\xi}d\xi$$

$$\underline{\underline{u=-\xi,du=-d\xi}}\int_0^\infty\left[\cos(2\pi ku)+i\sin(2\pi ku)\right]e^{-2\pi au}du+\int_0^\infty\left[\cos(2\pi ku)-i\sin(2\pi ku)\right]e^{-2\pi au}du$$

$$=2\int_0^\infty\left[\cos(2\pi ku)\right]e^{-2\pi au}du$$

το οποίο μέσα από τον πίνακα μετασχηματισμού Laplace, γίνεται:

$$\boxed{F(e^{-a|\xi|})(k)=\left(\frac{a}{x^2+a^2}\right)\frac{1}{\pi}=\frac{a}{\pi}\frac{1}{x^2+a^2},\, a>0}$$

3. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης:

$$u(x)=\begin{cases} e^{-ax}, x>0 \\ 0, x\le 0\end{cases}$$

ΛΥΣΗ:

Έστω α>0 και ο μετασχηματισμός Fourier μας δίνει:

$$\Im\{f(x)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-ax}e^{-iwx}dx==\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-(a+iw)x}dx$$

$$\Rightarrow \Im\{f(x)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-(a+iw)x}}{-(a+iw)}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{-1}{-(a+iw)}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+iw)}$$

Έστω α<0, ο μετασχηματισμός Fourier θα δώσει:

$$\Im\{f(x)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{ax}e^{-iwx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a-iw)}.$$

4. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός $\Im\{xe^{-ax^2}\}$.

ΛΥΣΗ:

Θέτουμε $f(x)=xe^{-ax^2}$, συνάρτηση συνεχής, με όριο $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. Η παραγωγός της ως προς x θα είναι: $f'(x)=e^{-ax^2}+x(-2ax)e^{-ax^2}=e^{-ax^2}(1-2ax^2)$. Γνωρίζουμε ότι:

$$\Im\{f'(x)\}=iw\Im\{f(x)\}\quad (1)$$

Τότε θα έχουμε:

$$\Im\{xe^{-ax^2}\}=\Im\{-\frac{1}{2}(e^{-x^2})'\}=-\frac{1}{2}\Im\{(e^{-x^2})'\}\underset{=}{(1)}-\frac{1}{2}iw\Im\{e^{-x^2}\}=-\frac{iw}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{w^w}{4}}.$$

Κεφάλαιο 2

2.1 Ολοκληρωτικές εξισώσεις

Είναι μια εξίσωση στην οποία η άγνωστη συνάρτηση εμφανίζεται μέσα στο ολοκλήρωμα. Οι εξισώσεις που θα αναλυθούν παρακάτω θα είναι, η εξίσωση *Fredholmι* και *Volterra, αντίστοιχα*:

$$\int_{\alpha}^{b} k(x,y)u(y)dy + a(x)u(x) = f(x), a \le x \le b \qquad \textbf{(2.1)}$$

$$\int_{a}^{x} k(x,y)u(y)dy + a(x)u(x) = f(x), a \le x \le b \qquad \textbf{(2.2)}$$

Οι συναρτήσεις *a, f* είναι δεδομένες, ενώ η *u* είναι άγνωστη. Η συνάρτηση *k* ονομάζεται *πυρήνας* και είναι συνεχής στο διάστημα $a \le x \le b, a \le y \le b$.

Εάν $f \equiv 0$,η εξίσωση λέγεται ομογενής, διαφορετικά μη-ομογενής.

Εάν $a \equiv 0$, η εξίσωση λέγεται πρώτου είδους, αλλιώς δευτέρου είδους.

Εάν *k(x,y)=k(y,x)*, ο πυρήνας ονομάζεται *συμμετρικός.*

Εισάγοντας διαφορικό τελεστή, η εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$(Ku)(x) = \int_{a}^{b} k(x,y)u(y)dy \qquad \textbf{(2.3)}$$

και η (2.1) γράφεται ως $Ku + au = f$ (2.4). Ένας αριθμός μ θα ονομάζεται *ιδιοτιμη* του ολοκληρωτικού τελεστή *K*, αν $Ku = \mu u$ (2.5).

Το σύνολο των ιδιοτιμών θα ονομάζεται *φάσμα του K*, ενώ *πολλαπλότητα* μιας ιδιοτιμής είναι η διάσταση του χώρου συναρτήσεων που παράγεται από τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτησεις.

Ορίζουμε ως *εσωτερικό γινόμενο* των συναρτήσεων *u, v*:

$$(u,v) = \int_{a}^{b} u(x)\overline{v}(x)dx$$

όπου η παύλα ορίζει την μιγαδική συζυγή της συνάρτησης *v*. Εάν *(u,v)=0*, θα λέμε ότι οι συναρτήσεις είναι *ορθογώνιες*. Ορίζουμε την *νόρμα* ως

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)} = \left(\int_{a}^{b} |u(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} < \infty .$$

Εξισώσεις Volterra

Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών μπορεί να αναδιατυπωθεί για μια ΣΔΕ στην ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης Volterra. Θεωρούμε το ΠΑΤ

$$\left\{\begin{matrix} u' = f(x,u) \\ u(x_0) = u_0 \end{matrix}\right\} \qquad \textbf{(2.6)}$$

με *f* συνεχής. Ένα *u=u(x)* είναι μια λύσης της τότε για κάθε *x* θα έχουμε:

$$u'(x) = f(x,u(x))$$

Αντικαθιστώντας το *x* με *y* και ολοκληρώνοντας από το x_0 έως το *x* παίρνουμε

$$\int_{x_0}^{x} u'(y)dy = \int_{x_0}^{x} f(y,u(y))dy \Rightarrow \boxed{u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(y,u(y))dy} \qquad \textbf{(2.7)}$$

Η εξίσωση (2.7) αποτελεί την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra ως προς *u* η οποία είναι ισοδύναμη με το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.6).

Παράδειγμα: Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών δεύτερης τάξης:

$$\left\{\begin{matrix} u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), x > a \\ u(a) = u_0 \\ u'(a) = u_1 \end{matrix}\right\} \text{(ΠΑΤ)}$$

Λύνουμε ως προς u'' και ολοκληρώνουμε από το *α* έως το *x*:

$$u'(x) - u_1 = -\int_a^x p(y)u'(y)dy - \int_a^x (q(y)u(y) - f(y))dy$$

και με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$u'(x) - u_1 = -p(x)u(x) - \int_a^x [(q(y) - p'(y)u(y) - f(y)]dy + p(a)u_0$$

$$\Rightarrow u(x) - u_0 = -\int_a^x p(y)u(y)dy + (p(a)u_0 + u_1)(x-a) - \int_a^x \int_a^s [(q(y) - p'(y))u(y) - f(y)]dyds$$

$$\xrightarrow{\int_a^x \int_a^s f(y)dyds = \int_a^x f(y)(x-y)dy}$$

$$\rightarrow u(x) = -\int_a^x \{p(y) + (x-y)[q(y) - p'(y)]\}u(y)dy + \int_a^x (x-y)f(y)dy + (p(a)u_0 + u_1)(x-a) + u_0$$

Η τελευταία αυτή εξίσωση είναι της μορφής $u(x) = \int_a^x k(x,y)u(y)dy + F(x)$, η οποία είναι μια ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δευτέρου είδους.

Ένας άλλος τρόπος επίλυσης είναι με προσέγγιση μέσω επαναληπτικής μεθόδου σταθερού σημείου. Ξεκινώντας από μια αρχική προσέγγιση $\phi_0(x)$, παράγουμε ακολουθία προσεγγίσεων $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots$, ως:

$$\phi_{n+1}(x) = u_0 + \int_0^x f(y, \phi_n(y))dy, n = 0,1,...$$

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται *μέθοδος Picard*.

Για την εξίσωση Volterra της μορφής

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, y)u(y)dy$$

έχουμε μια ανάλογη επαναληπτική διαδικασία. Γράφουμε την εξίσωση υπό την μορφή τελεστών και γίνεται:

$$Ku(x) = \int_a^x k(x, y)u(y)dy$$

όπου K είναι ο διαφορικός τελεστής Volterra. Θεωρούμε ότι η $u_0 = u_0(x)$ είναι δεδομένη και ορίζουμε την ακολουθία διαδοχικών προσεγγίσεων $u_n(x)$, ως εξής:

$$\boxed{u_{n+1} = f + \lambda K u_n, n = 0,1,...}$$

- **Εξισώσεις Fredholm για διαχωρίσιμους πυρήνες**

Με τον όρο διαχωρίσιμους εννοούμε ότι ο πυρήνας *k(x,y)* είναι πεπερασμένο άθροισμα γινόμενων συναρτήσεων του *x* επί της συναρτήσεις του *y*.

Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση της μορφής

$Ku - \lambda u = f$ **(2.8)**

όπου *λ* παράμετρος, *f* δεδομένη συνεχής συνάρτηση και ο *K* ο τελεστής, με πυρήνα της μορφής:

$k(x, y) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\beta_j(y)$ **(2.9)**

όπου a_j, β_j συνεχείς συναρτήσεις με πραγματικές τιμές. Ένας πυρήνας αυτής της μορφής ονομάζεται *διαχωρίσιμος ή εκφυλισμένος*. Με αντικατάσταση του πυρήνα στην εξίσωση (2.8), παίρνουμε:

$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\int_a^b u(y)\beta_j(y)dy - \lambda u(x) = f(x)$ **(2.10)**

Με την χρήση του εσωτερικού γινόμενου, γίνεται:

$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)c_j - \lambda u(x) = f(x)$, όπου $c_j(u, \beta_j), j = 1, 2, ...$ **(2.11)**

Πολλαπλασιάζουμε την (2.10) με $\beta_j(x)$ και ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\sum_{j=1}^{n} (\beta_j, a_j)c_j - \lambda c_i = (f, \beta_i), i = 1, 2, ...$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν ένα σύστημα *n* γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους $c_1, c_2, ...c_n$. Εισάγοντας το άγνωστο διάνυσμα στήλη $\mathbf{c} = (c_1, c_2, ...c_n)^T$, το διάνυσμα στήλη $\mathbf{F} = ((f, \beta_1), ..., (f, \beta_n))^T$ και τον πίνακα συντελεστών **A** με στοιχειά (β_i, a_j), μπορούμε να γράψουμε το προηγούμενο σύστημα σε γλωσσά πινάκων. Έτσι, η επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (8), ανάγεται στο σύστημα

$(A - \lambda I)\mathbf{c} = F$ **(2.12)**.

Ο προσδιορισμός των **c** θα δώσει τα c_j και συνεπώς η (2.11) μπορεί να χρησιμοποιεί για την εύρεση της λύσης της *u(x)* της διαχωρίσιμης εξίσωσης (2.8).

Έτσι, θεωρούμε πρώτα την εξίσωση (2.8) για $\lambda \neq 0$. Σε αυτή την περίπτωση

$$u(x) = \frac{1}{\lambda}\left(-f(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x)c_j \right) \qquad \textbf{(2.13)}$$

όπου τα c_j προσδιορίζονται πω την (2.12).

- Εάν η $\det(A-\lambda I) \neq 0$, δηλαδή το λ είναι ιδιοτιμή του πινάκα *A*, τότε η (2.12) έχει μοναδική λύσης **c.**
- Εαν $\det(A-\lambda I) = 0$, τότε η (2.12) δεν έχει λύσης ή έχει άπειρες λύσεις πράγμα που εξαρτάται από το αν το F ανήκει στο πεδίο τιμών του πινάκα *A-λI.*
- Εάν *f=0* τότε η (2.8) ανάγεται στο πρόβλημα ιδιωτισμών *Ku=λu* , για τον τελεστή *K*.

Συνοψίζουμε τα όσα ισχύουν στα παρακάτω θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Έστω η εξίσωση της μορφής $Ku - \lambda u = f$, με πυρήνα $k(x,y) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\beta_j(y)$ και $\lambda \neq 0$ ο πίνακας $A \equiv ((\beta_i, a_j))$. Εάν το λ δεν είναι ιδιοτιμή του Α, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση που δίνεται από τον τύπο (2.13), διαφορετικά η εξίσωση δεν έχει λύση ή έχει άπειρες λύσεις.

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του τελεστή:

$$Ku(x) = \int_0^1 (1-3xy)u(y)dy$$

Εδώ ο πυρήνας είναι διαχωρίσιμος με $a_1(x) = 1, a_2(x) = -3x, \beta_1(y) = 1, \beta_2(y) = y$. Ο πίνακας *A* θα είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

με ορίζουσα $\det(A-\lambda I) = \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0$ και έτσι οι ιδιοτιμές είναι οι $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. Ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην θετική ιδιοτιμή, είναι $\mathbf{c} = (3,1)^T$, ενώ το αντίστοιχα για την αρνητική θα είναι $(1,1)^T$. Τότε οι ιδιοσυναρτήσεις που προκύπτουν από τα παραπάνω θα είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x) = 2(3a_1(x) + a_2(x)) = 6(1-x) \\ u(x) = -2(a_1(x) + a_2(x)) = -2(1-3x) \end{array} \right\}$$

Όμως οι ιδιοσυναρτήσεις είναι μοναδικές μόνον ως προς το σταθερό πολλαπλάσιο, και έτσι οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές είναι οι $u(x) = a(1-x)$ και $u(x) = b(1-3x)$, για α, β αυθαίρετες σταθερές. Θα θεωρήσουμε τότε την μη ομογενή εξίσωση $\int_0^1 (1-3xy)u(y)dy - \lambda u(x) = f(x)$, η οποία βάσει θεωρήματος θα είναι μοναδική αν $\lambda \neq \pm\frac{1}{2}$.

Για τους πυρήνες, ορίζουμε την ιδιότητα *συμμετρίας* $\boxed{(Ku,v)=(u,Kv)}$.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να τονίσουμε ότι η ύπαρξη ιδιοσυναρτήσεων καθιστά δυνατή την επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων με την χρήση αναπτυγμάτων ως προς τις ιδιοσυναρτήσεις. Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$Ku-\lambda u=f \qquad \textbf{(2.14)}$$

όπου ο πυρήνας *K* είναι πραγματικός, συμμετρικός και συνεχής και η *f* μια συνεχής δεδομένη συνάρτηση. Αναπτύσσοντας τις *f* και *u* ως προς τις ιδιοσυναρτήσεις του *K*, στη μορφή

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k\phi_k(x) \text{ και } u(x)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k\phi_k(x)$$

όπου οι f_k είναι γνωστοί και δίνονται από τον τύπο $f_k=(f,\phi_k), k=1,2,\ldots$, ενώ οι u_k είναι άγνωστοι και πρόκειται να προσδιοριστούν. Με αντικατάσταση των αναπτυγμάτων στην (2.14) θα πάρουμε

$$K\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\phi_k\right)-\lambda\sum_{k=1}^{\infty} u_k\phi_k=\sum_{k=1}^{\infty} f_k\phi_k$$

$$\Rightarrow K\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\phi_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k K\phi_k=\sum_{k=1}^{\infty} u_k\mu_k\phi_k$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές των ϕ_κ, παίρνουμε:

$$(\mu_k-\lambda)u_k=f_k, k=1,2,\ldots \qquad \textbf{(2.15)}.$$

Συνεπώς, αν το *λ* δεν είναι ιδιοτιμή, έχουμε την λύση της μορφής

$$\boxed{u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{\mu_k-\lambda}\phi_k(x)}$$

Εάν $\lambda=\mu_m$, για κάποιο συγκεκριμένο *m*, τότε για να βρούμε λύση θα πρέπει να έχουμε $f_m=(f,\phi_m)=0$, δηλαδή η *f* να είναι ορθογώνια στην ϕ_m. Σε αυτή την περίπτωση η u_m είναι αυθαίρετη και βρίσκουμε άπειρες λύσεις της (2.14) που δίνονται από

$$\boxed{u(x)=c\phi_m(x)+\sum_{k=1,k\neq m}^{\infty}\frac{f_k}{\mu_k-\lambda}\phi_\kappa(x)}$$

όπου *c* αυθαίρετη σταθερά.

Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε τον κανόνα Leibniz

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)}F(x,y)dy=\int_{a(x)}^{b(x)}F_x(x,y)dy+F(x,b(x))b'(x)-F(x,a(x))a'(x)$$

για την παραγώγιση ενός ολοκληρώματος ως προς μια παράμετρο που εμφανίζεται στην υπό ολοκλήρωση συνάρτηση και στα όρια ολοκλήρωσης.

ΛΥΣΗ:

Για την απόδειξη του κανόνα, θέτουμε:

$$f(x,a,b)\equiv\int_{a(x)}^{b(x)}F(x,y)dy \qquad \textbf{(2.15)}$$

και κάνοντας χρήση του κανόνα της αλυσίδας, προκύπτει:

$$\frac{d}{dx}f(x,a(x),b(x))=\frac{\partial}{\partial x}f(x,a,b)+\frac{\partial}{\partial a}f(x,a,b)\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial b}f(x,a,b)\frac{\partial b}{\partial x}$$

$$=f_x(x,a,b)+a'(x)\frac{\partial}{\partial a}f(x,a,b)+b'(x)\frac{\partial}{\partial b}f(x,a,b)$$

$$\underset{=\!=}{(1)}\int_{a(x)}^{b(x)}F_x(x,y)dy+b'(x)\frac{\partial}{\partial b}\int_{a(x)}^{b(x)}F(x,y)dy+a'(x)\frac{\partial}{\partial a}\int_{a(x)}^{b(x)}F(x,y)dy$$

$$=\int_{a(x)}^{b(x)}F_x(x,y)dy+b'(x)F(x,b(x))-a'(x)F(x,a(x))$$

και αποδείχτηκε.

2. Λύνουμε την παρακάτω εξίσωση ως ολοκληρωτική εξίσωση Volterra. Θεωρούμε έτσι το (ΠΑΤ) της μορφής:

$$\left\{\begin{matrix} u''-\lambda u=f(x),x>0 \\ u(0)=1 \\ u'(0)=0 \end{matrix}\right\} \text{ (ΠΑΤ)}$$

Η ζητούμενη διατύπωση της εξίσωσης με την μορφή Volterra θα πρέπει να έχει την μορφή:

$$\int_a^x k(x,y)u(y)dy+a(x)u(x)=f(x),a\le x\le b$$

ΛΥΣΗ:

Λύνουμε ως προς u'' την εξίσωση και προκύπτει:

$$u''=f(x)+\lambda u,x>0$$

Ολοκληρώνουμε από το 0 ως το *x*, οπότε:

$$\int_0^x u''(y)dy=\int_0^x f(y)dy+\lambda\int_0^x u(y)dy$$

$$\Rightarrow u'(x)-u'(0)=\int_0^x f(y)dy+\lambda\int_0^x u(y)dy$$

$$\Rightarrow u'(x)=\int_0^x f(y)dy+\lambda\int_0^x u(y)dy$$

Ολοκληρώνοντας πάλι θα πάρουμε:

$$\int_0^x u'(y)dy=\int_0^x\int_0^s f(y)dyds+\lambda\int_0^x\int_0^s u(y)dyds$$

$$\Rightarrow u(x)-u(0)=\int_0^x\int_0^s f(y)dyds+\lambda\int_0^x\int_0^s u(y)dyds$$

$$\Rightarrow u(x)-1=\int_0^x\int_0^s f(y)dyds+\lambda\int_0^x\int_0^s u(y)dyds$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x)=1+\int_0^x\int_0^s f(y)dyds+\lambda\int_0^x\int_0^s u(y)dyds}$$

Κάνοντας χρήση παραγοντικής ολοκλήρωσης για την συνάρτηση *f*, η οποία είναι συνεχής για *x>0*, έχουμε: $\int_0^x\int_0^s f(y)dyds=\int_0^x f(y)(x-y)dy$ και αντικαθιστώντας στην λύση παραπάνω παίρνουμε τελικά:

$$u(x) = \int_0^x f(y)(x-y)dy + \lambda \int_0^x u(y)(x-y)dy + 1$$

$$\Rightarrow u(x) = \int_0^x (x-y)\left[f(y) + \lambda u(y) \right] dy + 1$$

$$\Rightarrow u(x) = \int_0^x \left[(x-y)\lambda \right] u(y)dy + \left\{ \int_0^x f(y)(x-y)dy + 1 \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x) = \int_0^x k(x,y)u(y)dy + F(x)}$$

η οποία είναι η ζητούμενη ολοκληρωτική εξίσωση με την μορφή Volterra.

3. Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\left\{ \begin{matrix} u'' + \lambda u = 0, 0 < x < l \\ u(0) = u(l) = 0 \end{matrix} \right\}$$

Λύνουμε την εξίσωση ως προς u'' και ολοκληρώνουμε στο διάστημα 0 μέχρι *l:*

$$\int_0^x u''(y)dy = -\lambda \int_0^x u(y)dy \Rightarrow u'(x) - u'(0) = -\lambda \int_0^x u(y)dy$$

$$\Rightarrow u'(x) = -\lambda \int_0^x u(y)dy + u'(0)$$

$$\Rightarrow \int_0^x u'(y)dy = -\lambda \int_0^x \int_0^s u(y)dyds + \int_0^x u'(0)dy$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x) = -\lambda \int_0^x \int_0^s u(y)dyds + u_0 x}$$

και επειδή η *u* είναι συνεχής για *x>0*, θα έχουμε:

$$\int_0^x \int_0^s u(y)dyds = \int_0^x u(y)(x-y)dy$$

και αντικαθιστώντας παραπάνω, παίρνουμε την μορφή:

$$u(x) = -\lambda \int_0^x u(y)(x-y)dy + u_0 x$$

$$\Rightarrow \int_0^x \lambda u(y)(x-y)dy + u(x) = u_0 x$$

$$\xrightarrow{\lambda \neq 0} \int_0^x u(y)(x-y)dy + \frac{1}{\lambda}u(x) = \frac{1}{\lambda}u_0 x$$

$$\int_0^x k(x,y)u(y)dy + \frac{1}{\lambda}u(x) = f(x)$$

όπου $k(x,y) = x - y$ και $f(x) = \frac{u_0}{\lambda}x$.

2.2 Συναρτήσεις Green

Είναι ο πυρήνας ενός ολοκληρωτικού τελεστή, ο οποίος παριστάνει τον αντίστροφο ενός διαφορικού τελεστή, ενώ από φυσικής ερμηνείας, είναι η απόκριση ενός συστήματος όταν σε αυτό εφαρμόσουμε μια μοναδιαία σημειακή πηγή.

Θεωρούμε το πρόβλημα Sturm-Liouville της μορφής

$$\left\{\begin{array}{l} Au \equiv (-pu')'+qu = f, a < x < b \\ B_1u(a) \equiv \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \\ B_2 u(b) \equiv \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(2.16)}$$

όπου *A* ο διαφορικός τελεστής Sturm-Liouville.

Ορίζοντας τον *αντίστροφο τελεστή* ενός συστήματος $Lu = f$, με **u, f** διανύσματα και **L** τετραγωνικά αντιστρέψιμο πινάκα, μπορούμε να βρούμε την λύσης $u = L^{-1} f$, με L^{-1} τον αντίστροφο πινάκα του *L*. Έτσι ο L^{-1} αποτελεί και τον αντίστροφο τελεστή του *L* που δίνεται από τον τύπο

$$(L^{-1} f)(x) = \int_a^b g(x,\xi) f(\xi) d\xi \qquad \textbf{(2.17)}$$

με πυρήνα *g*. Αν υπάρχει ο αντίστροφος τελεστής L^{-1} του τελεστή *L*, τότε ο πυρήνας *g(x,ξ)* στην (2.17) λέγεται *συνάρτηση Green* που αντιστοιχεί στον *L*.

Θα διατυπώσουμε τώρα ένα θεώρημα το όποιο δίνει ακριβώς μια παράσταση της συνάρτησης Green: «Θεωρούμε ένα πρόβλημα Sturm-Liouville της μορφής (2.16) και υποθέτουμε ότι λ=0 δεν είναι ιδιοτιμη του τελεστή L. Τότε θα υπάρχει ο αντίστροφος τελεστής L^{-1} που δίνεται από την σχέση (2.17), όπου

$$g(x,\xi) = \begin{cases} -\frac{u_1(x)u_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}, x<\xi \\ -\frac{u_1(\xi)u_2(x)}{p(\xi)W(\xi)}, x>\xi \end{cases} \qquad \textbf{(2.18)}.$$

Εδώ οι u_1, u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $Au = -(pu')'+qu = 0$ με $B_1u_1(\alpha) = 0$ και $B_2u_2(b) = 0$ και $W = u_1u_2' - u_1'u_2$ είναι η ορίζουσα Wronski.»

Σημειώνουμε ακόμα ότι όταν γνωρίζουμε την συνάρτησης Green *g*, τότε μπορούμε να γράψουμε την μοναδική λύση του μη-ομογενούς προβλήματος (2.16) στην μορφή:

$$u(x) = \int_a^b g(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

και με χρήση της συνάρτησης *Heaviside H(x),* $H(x) = \begin{cases} 0, x<0 \\ 1, x\geq 0 \end{cases}$. Πράγματι, έχουμε:

$$g(x,\xi) = -\frac{1}{p(\xi)W(\xi)}[H(x-\xi)u_1(\xi)u_2(x) + H(\xi - x)u_1(x)u_2(\xi)] \qquad \textbf{(2.19)}$$

Τέλος, σημειώνουμε ότι η παράγωγος της συνάρτησης *g* παρουσιάζει *άλμα* στην θέση *x=ξ* , τον τύπο:

$$g'(\xi^+,\xi) - g'(\xi^-,\xi) = -\frac{1}{p(\xi)}.$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\begin{Bmatrix} -u'' = f(x), 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{Bmatrix}$$

Εδώ $Au = -u''$, και οι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης *Au=0* είναι γραμμικές συναρτήσεις της μορφής $u(x) = ax + b$, όπου a , b είναι σταθερές. Επομένως, έστω ότι $u_1(x) = ax$ και $u_2(x) = b(1-x)$, έτσι ώστε η u_1 να πληροί την συνοριακή συνθήκη στο αριστερό άκρο του διαστήματος και η u_2 την συνθήκη στο δεξιό. Επίσης, *p=1* και η ορίζουσα *Wronski* είναι $W = -ab$. Άρα, σύμφωνα με την (2.19), η συνάρτησης Green δίνεται από την σχέση

$$g(x,\xi) = \xi(1-x)H(x-\xi) + x(1-\xi)H(\xi - x)$$

και η λύση του δοθέντος προβλήματος θα δίνεται από την σχέση

$$u(x) = \int_0^1 g(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

Παράδειγμα 2: Να κατασκευάσετε την συνάρτηση Green του τελεστή

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + k^2, k > 0$$

στο διάστημα $-\infty < x < \infty$ με συνοριακές συνθήκες $y(-\infty) = y(\infty) = 0$.

ΛΥΣΗ:

Παρατηρούμε ότι λόγω του άπειρου διαστήματος και του γεγονότος ότι ο *L* είναι διαφορικός τελεστής με *σταθερούς συντελεστές*, η εξίσωση

$$LG = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) G(x,x') = \delta(x - x')$$

παραμένει αμετάβλητη στις μετατοπίσεις $x \to x + a, x' \to x' + a$ και επομένως η λύση της θα πρέπει να έχει την ίδια ιδιότητα. Να ικανοποιεί, δηλαδή, την

$$G(x + a, x' + a) = G(x,x')$$

το οποίο μπορεί να συμβαίνει, για κάθε *α*, μόνο όταν η $G(x,x')$ εξαρτάται αποκλειστικά από την διαφορά *x-x'*. Στην τωρινή περίπτωση λοιπόν θα είναι $G(x,x') = G(x-x')$ και το πρακτικό όφελος από αυτή την διαπίστωση είναι ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση Green για *x'=0* και μετά όπου *x* να θέσουμε $x - x'$. Με αυτό το σκεπτικό κατά νου θα έχουμε

$$\begin{Bmatrix} -G_L'' + k^2 G_L = 0, G_L(-\infty) = 0 \\ -G_R'' + k^2 G_R = 0, G_R(+\infty) = 0 \\ G_L(0) = G_R(0), G_R'(0) - G_L'(0) = -1 \end{Bmatrix}$$

όπου η πρώτη εξίσωση αφορά τα *x<0*, ενώ η δεύτερη τα *x>0*, αντίστοιχα και οι δύο ανεξάρτητες λύσεις θα είναι $\exp(\pm kx)$. Όμως, μια και εμείς ενδιαφερόμαστε για λύσεις που μηδενίζονται στο $\pm\infty$, στην αριστερή περιοχή θα κρατήσουμε μόνο το εκθετικό $\exp(kx)$ που σβήνει για $x \to -\infty$, και στη δεξιά περιοχή μόνο το $\exp(-kx)$ που σβήνει στο $x \to +\infty$. Έτσι θα έχουμε

$$G_L(x) = Ae^{kx} \text{ και } G_R(x) = Be^{-kx}$$

και με εφαρμογή στις συνθήκες στο *x=0* θα πάρουμε

$$G_L(0) = G_R(0) \Rightarrow A = B$$

$$G'_R(0) - G'_L(0) = -1 \Rightarrow -kB - kA = -1 \Rightarrow \boxed{A = B = \frac{1}{2k}}$$

και επομένως θα είναι

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2k} e^{kx}, x<0 \\ \frac{1}{2k} e^{-kx}, x>0 \end{cases} \Rightarrow G(x) = \frac{1}{2k} e^{-k|x|}$$

και γενικά $\boxed{G(x,x') = G(x-x') = \frac{1}{2k} e^{-k|x-x'|}}$.

Παράδειγμα 3: Να λυθεί με την μέθοδο της συνάρτησης Green, η μη ομογενής εξίσωση

$$(\frac{d^2}{dx^2} + k^2) y(x) = f(x) \qquad \textbf{(2.20)}$$

με συνοριακή συνθήκη εξερχόμενου κύματος στο $\pm\infty$. Ζητάμε δηλαδή να είναι

$$\lim_{x\to\infty} y(x) \sim e^{ikx} \text{ και } \lim_{x\to-\infty} y(x) \sim e^{-ikx}$$

το οποίο σημαίνει ότι στο $+\infty$ θα υπάρχει μόνο το κύμα $\exp(ikx)$ που κινείται προς τα δεξιά και στο $-\infty$ το κύμα $\exp(-ikx)$ που πάει προς τα αριστερά.

ΛΥΣΗ:

Προχωρώντας στην επίλυση, δεχόμαστε ότι, η στο όριο $x \to \pm\infty$ η (2.20) θα παίρνει την ασυμπτωτική μορφή

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right) y_\infty = 0$$

με αντίστοιχες ασυμπτωτικές λύσει τα επίπεδα κύματα

$$y_\infty \sim e^{\pm ikx} \qquad \textbf{(2.21)}$$

Οι συνοριακές μας απαιτήσεις δεν μπορεί να είναι τίποτα άλλο παρά κάποιος περιορισμός πάνω σε αυτές τις, προκαθορισμένες από την εξίσωση, ασυμπτωτικές συμπεριφορές. Σε προβλήματα *κυματικής σκέδασης* ο περιορισμός που αναδύεται αυτόματα από τη φυσική ερμηνεία της λύσης είναι ακριβώς η συνθήκη *εξερχόμενου κύματος*. Πρόκειται, προφανώς, για περιοριστική συνθήκη, αφού σε κάθε πλευρά του άξονα η λύση μπορεί να έχει μια οποιαδήποτε από τις συμπεριφορές (2.21) και εμείς της ζητάμε να κρατήσει μόνο την μία.

Εξετάζοντας την εξίσωση του προηγούμενου παραδείγματος

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right) y = f(x)$$

και μελετώντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά της στο $\pm\infty$, θα είναι

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right) y_\infty = 0 \Rightarrow y_\infty \sim e^{\pm kx}$$

Κατασκευάζοντας τώρα την συνάρτηση Green του συγκεκριμένου προβλήματος, η σχετική εξίσωση θα είναι

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right) G(x) = \delta(x) + \textit{(συνοριακή συνθήκη εξερχόμενου κύματος)}$$

με δεξιά και αριστερή λύση $\begin{Bmatrix} G_R(x) = Ae^{ikx} \\ G_L(x) = Ae^{-ikx} \end{Bmatrix}$ και συνθήκη συνέχειας $G_L(0) = G_R(0)$ και συνθήκη ασυνέχειας $G'_R(0) - G'_L(0) = 1$. Εφαρμόζοντας τα παίρνουμε

$$Aik - A(-ik) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2ik}$$

με τελικό αποτέλεσμα $G(x) = \frac{1}{2ik} e^{ik|x|} \Rightarrow G(x - x') = \frac{1}{2ik} e^{ik|x-x'|}$.

Παράδειγμα 4:

Έστω ότι δίνεται το παρακάτω πρόβλημα:

$$\begin{Bmatrix} Lu = u' + u = f(x) \\ u(0) = 0 \\ u(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{Bmatrix}$$

και ζητείται να βρεθεί η συνάρτηση Green για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ΛΥΣΗ:

- Για $x \neq s, Lg(x,s) = 0$, θα έχουμε

$$g(x,s) = C_1(s)\cos(x) + C_2(s)\sin(x).$$

- Για $x < s$ και για $s \neq 0, Lg(x,s) = 0$, έχουμε

$$g(0,s) = C_1\cos(0) + C_2\sin(0) = 0$$
$$\Rightarrow C_1(s) = 0$$

- Για $x > s, s \neq \frac{\pi}{2}$, έχουμε

$$g(\frac{\pi}{2}, s) = C_1(s)\cos(\frac{\pi}{2}) + C_2(s)\sin(\frac{\pi}{2}) = 0$$
$$\Rightarrow C_2(s) = 0$$

Συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα καταλήγουμε στον τύπο:

$$g(x,s) = \begin{cases} \alpha(s)\sin x, x<s \\ \beta(s)\cos x, x>s \end{cases}$$

Θα προσδιορίσουμε τώρα τις ποσότητες *α(s), β(s):*

Επειδή η *g* είναι συνεχής στο *(x,s)* θα έχουμε $\alpha(s)\sin(s) = \beta(s)\cos(s)$ και λόγω της ασυνέχειας της παραγώγου της συνάρτησης θα πάρουμε:

$$\beta(s)(-\sin s) - \alpha(s)\cos s = \frac{1}{1} = 1$$

δηλαδή έχουμε $\begin{Bmatrix} \alpha(s) = -\cos s \\ \beta(s) = -\sin s \end{Bmatrix}$. Συνεπώς η ζητούμενη συνάρτηση Green του προβλήματος είναι :

$$\boxed{g(x,s) = \begin{cases} -\cos s \sin x, x<s \\ -\sin s \cos x, x>s \end{cases}}$$

Φυσική ερμηνεία της συνάρτησης Green

Για την μελέτη αυτή θα θεωρήσουμε ένα πρόβλημα ροής θερμότητας σε κατάσταση ισορροπίας με εξίσωση $u_t - u_{xx} = f(x)$, όπου *f* είναι η πηγή θερμότητας, κατανεμημένη κατά το μήκος της ράβδου. Αν υποθέσουμε ότι η ράβδος είναι μοναδιαίου μήκους και τα άκρα της παραμένουν σε θερμοκρασία μηδέν βαθμών κελσίου, τότε η κατανομή θερμοκρασίας σε κατάσταση ισορροπίας *u=u(x)* πληροί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\left\{\begin{matrix} -u'' = f(x), 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Υποθέτουμε ότι η *f* είναι μια ιδεατή πηγή θερμότητας μοναδιαίας έντασης η οποία δρα σε ένα σημείο *x=ξ* του *(0,1)*, και την συμβολίζουμε $f \equiv \delta(x,\xi)$, με ιδιότητες

$\delta(x,\xi)=0$, *για* $x \neq \xi$ *και* $\int_0^1 \delta(x,\xi)dx = 1$.

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την ροή θερμότητας σε κατάσταση ισορροπίας δίνεται από τον τύπο:

$$-u'' = \delta(x,\xi) \qquad \textbf{(2.22)}$$

και για $x \neq \xi$ έχουμε $-u'' = 0$, η οποία έχει λύσεις της μορφής *u=Ax+B*. Συνεπώς, για να ικανοποιούνται και οι συνοριακές συνθήκες επιλέγουμε

$$\left\{\begin{matrix} u = Ax, x < \xi \\ u = B(1-x), x > \xi \end{matrix}\right\}$$

Για να προσδιορίσουμε τα *A, B* χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η θερμοκρασία πρέπει να είναι συνεχής στο σημείο *x=ξ*, και έτσι καταλήγουμε στην εξίσωση *Aξ=B(1-ξ).* Ολοκληρώνοντας την συμβολική διαφορική εξίσωση (2.22) στο διάστημα $[\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon]$, παίρνουμε:

$$-\int_{\xi-2}^{\xi+\varepsilon} u''(x)dx = \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \delta(x,\xi)dx$$

και επειδή υποθέσαμε ότι η πηγή θερμότητας είναι μοναδιαία, το δεύτερο μέλος είναι μονάδα. Εφαρμόζουμε στο αριστερό μέλος το θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού και βρίσκουμε ότι:

$$-u'(\xi+\varepsilon) + u'(\xi-\varepsilon) = 1$$

και για $\varepsilon \to 0$ και πολλαπλασιάζοντας με -1 παίρνουμε τελικά $u'(\xi^+) - u'(\xi^-) = -1$, η οποία αποτελεί την συνθήκη για το άλμα της παραγώγου στο σημείο *x=ξ.* Η τελευταία συνθήκη επιβάλλει να ισχύει *–B-A=-1* και λύνοντας το σύστημα εξισώσεων βρίσκουμε *A=1-ξ* και *B=ξ.*

Επομένως, η θερμοκρασία σε κατάσταση ισορροπίας που θα έχει η ράβδος, λόγω μιας σημειακής πηγής στο *x=ξ,* είναι:

$$\left\{\begin{matrix} u = (1-\xi)x, x < \xi \\ u = \xi(1-x), x > \xi \end{matrix}\right\}$$

ή

$$\boxed{u(x,\xi) = \xi(1-x)H(x-\xi) + x(1-\xi)H(\xi-x)}$$

Όλα αυτά μας δίνουν την φυσική ερμηνεία για την συνάρτηση Green (την απόκριση του συστήματος σε σημειακή πηγή).

Παράδειγμα: (Αιτιώδης συνάρτηση Green)

Θεωρούμε το πρόβλημα $\begin{cases} Au \equiv -(pu')' + qu = f(t), t>0 \\ u(0)=u'(0)=0 \end{cases}$ και υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις *q, p, p'* είναι συνεχείς για $t \geq 0$ και ότι *p>0*. Η αιτιώδης συνάρτηση Green είναι η λύσης του παραπάνω προβλήματος όταν η *f* είναι μια μοναδιαία ώθηση που ασκείται σε χρόνο *τα*, δηλαδή όταν $f(t)=\delta(t,\tau)$. Οπότε θα έχουμε $Ag(t,\tau)=\delta(t,\tau)$, όπου η συνάρτηση *g* παριστάνει την αιτιώδη συνάρτηση Green. Επειδή τα αρχικά δεδομένα μας είναι μηδέν, η απόκριση του συστήματος θα είναι μηδενική μέχρι την στιγμή *τα*, επομένως $g(t,\tau)=0, t<\tau$. Για *t>τ* ζητάμε να ισχύει $Ag(t,\tau)=0$ και απαιτούμε η *g* να είναι συνεχής για *t=τ,* ή $g(\tau^+,\tau)=0$. Για την στιγμή $t=\tau$, που είναι η στιγμή κατά την οποία δίνεται ώθηση, απαιτούμε η *g* να παρουσιάζει ένα άλμα στην παράγωγο, μεγέθους:

$$g'(\tau^+,\tau) = -\frac{1}{p(\tau)}.$$

Η συνθήκη συνέχειας, άλματος και το γεγονός ότι η *g* ικανοποιεί την ομογενή διαφορική εξίσωση, επαρκούν για τον προσδιορισμό της $g(t,\tau), t>\tau$.

Στην συνέχεια θα παραθέσουμε ένα <u>θεώρημα</u> που αφορά την περίπτωση το πρόβλημα να έχει μη τετριμμένη λύση:

«Θεωρούμε ότι υπάρχει μια μη τετριμμένη λύση φ του ομογενούς προβλήματος $L\phi=0$. Τότε το (Π) έχει λύση αν και μόνο αν $(\phi, f) \equiv \int_a^b \phi f dx = 0$.»

Παραπάνω έγινε λόγος για την λύση του προβλήματος, μέσω ιδιοσυναρτήσεων. Έτσι και εδώ θα υποθέσουμε ότι η λύση του (2.16) δίνεται μέσω ιδιοσυναρτήσεων ως

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

όπου οι σταθερές c_n θα προσδιοριστούν. Η δεδομένη συνάρτηση *f* μέσω ιδιοσυναρτήσεων γίνεται $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n(x)$, με $f_n = \int_a^b f(\xi)\phi_n(\xi)d\xi$. Αντικαθιστώντας στις εκφράσεις θα πάρουμε $L\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\phi_n(x)$.

Όμως

$$L\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n L(\phi_n(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\lambda_n\phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\phi_n(x)$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές των ανεξάρτητων ιδιοσυναρτήσεων θα πάρουμε

$$c_n = \frac{f_n}{\lambda_n} = \frac{1}{\lambda_n}\int_a^b f(\xi)\phi_n(\xi)d\xi$$

οπότε τελικά η λύση παίρνει την μορφή:

$$\boxed{u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}\left(\int_a^b f(\xi)\phi_n(\xi)d\xi\right)\phi_n(x)}$$

Αλλάζοντας το άθροισμα με το ολοκλήρωμα, καταλήγουμε στην σχέση

$$u(x) = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\phi_n(\xi)}{\lambda_n}\right) f(\xi)d\xi$$

από όπου έχουμε $g(x,\xi)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\phi_n(x)\phi_n(\xi)}{\lambda_n}$, η οποία παριστάνει την συνάρτηση Green ως προς τις ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις και ονομάζεται *διγραμμικό ανάπτυγμα.*

2.3 Κατανομές

Κατά την έναρξη αυτής της παραγράφου θα δώσουμε κάποιους ορισμούς:
Θεωρούμε *K* ένα σύνολο πραγματικών αριθμών.

- Ένας αριθμός *c* θα ονομάζεται *οριακό σημείου του K*, εάν κάθε ανοιχτό διάστημα που περιέχει το *c*, όσο μικρό και αν είναι, θα περιέχει τουλάχιστον και ένα σημείο του *K*.
- *Κλειστότητα ενός συνόλου,* $\overline{K}$, είναι το σύνολο *K* μαζί με τα οριακά του σημεία.
- Ένα σύνολο *K* θα ονομάζεται *κλειστό*, όταν θα περιέχει όλα του τα οριακά σημεία.
- *Φορέας* μιας συνάρτησης *φ* είναι το σύνολο των σημείων στα οποία η συνάρτηση δεν μηδενίζεται, μαζί με τα οριακά σημεία του συνόλου αυτού, $\sup p\phi=\{x\,|\,\phi(x)\neq 0\}$.
- Με *(α,b)* θα συμβολίζουμε το ανοικτό διάστημα και με $C^{\infty}(a,b)$, το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων του *(α,b)* των οποίων οι παράγωγοι κάθε τάξης υπάρχουν και είναι συνεχείς στο διάστημα αυτό, και των οποίων ο φορέας είναι ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του *(a,b)*. Τέτοιες συναρτήσεις ονομάζονται *συναρτήσεις δοκιμής.*
- Μια συνάρτηση ονομάζεται *τοπικά ολοκληρώσιμη* στο (α,b), όταν $\int_c^d |f(x)|\,dx<\infty$, για κάθε υποδιάστημα *[c,d]* του *(a,b).*
- Μια συνάρτηση θα έχει *ασθενή παράγωγο*, όταν:

έστω $u=u(x)$ μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση στο (a,b) και $f=f(x)$ η παράγωγος της, δηλαδή $u'=f$. Τότε πολλαπλασιάζοντας και τα 2 μέλη της με συνάρτηση δοκιμής και ολοκληρώνοντας από το α ως το b, θα πάρουμε

$$\int_a^b u'\phi dx=\int_a^b f\phi dx$$

$$\Rightarrow -\int_a^b u\phi' dx=\int_a^b f\phi dx \qquad \textbf{(2.23)}$$

και για να ισχύει το παραπάνω αρκεί η *u* να είναι ολοκληρώσιμη. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε την (2.23) ως την βάση για να ορίσουμε μια παράγωγο μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης. Επομένως, καταλήγουμε στον ορισμό ότι *εάν οι u, f είναι τοπικά ολοκληρώσιμες, θα λέμε ότι η f είναι η ασθενής παράγωγος της u στο (α,b), και θα ισχύει η (2.23) για κάθε* $\phi\in C_0^{\infty}(a,b)$.

Παράδειγμα 1: Έστω ότι $u(x)=|x|$ και $f(x)=H(x)-H(-x)$ στο διάστημα (-1,1), με H να είναι η συνάρτηση Heaviside. Η συνάρτηση u δεν είναι παραγωγίσιμη με την συνήθη έννοια στο *x=0*. Όμως $u'=f$ με την ασθενή έννοια στο (-1,1), επειδή

$$-\int_{-1}^{1}|x|\phi(x)dx=\int_{-1}^{0}x\phi'(x)dx-\int_{0}^{1}x\phi'(x)dx=-\int_{-1}^{0}\phi(x)dx+\int_{0}^{1}\phi(x)dx \quad , \quad \forall\phi\in C_0^{\infty}(-1,1)$$

$$=\int_{-1}^{0}-H(-x)\phi(x)dx+\int_{0}^{1}H(x)\phi(x)dx=-\int_{-1}^{0}\phi(x)dx+\int_{0}^{1}\phi(x)dx$$

οπότε ισχύει η (2.23) και επαληθεύτηκε η ασθενής έννοια της συνάρτησης.

Παράδειγμα 2: Θεωρούμε το διάστημα (-1,1) και την συνάρτηση $u(x)=H(x)$. Για να βρούμε την ασθενή έννοια της παραγώγου της συνάρτησης *u*, θα υποθέσουμε αρχικά ότι $u'=f$ ασθενώς. Τότε από την (2.23) θα έχουμε:

$$-\int_{-1}^{1}H(x)\phi'(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)\phi(x)dx, \quad \forall\phi\in C_0^{\infty}(-1,1)$$

Το αριστερό μέλος θα γίνει:

$$-\int_{0}^{1}H(x)\phi(x)dx=-\int_{0}^{1}\phi'(x)dx=\phi(0)$$

και θα απαιτήσουμε

$$\int_{-1}^{1}f(x)\phi(x)dx=\phi(0), \text{ για κάθε } \phi\in C_0^{\infty}(-1,1) \qquad \textbf{(2.24)}.$$

Επειδή όμως δεν υπάρχει τέτοια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση *f* θα θεωρήσουμε την συνάρτηση δοκιμής $\phi_a(x)=\exp\left(\frac{-a^2}{\left(a^2-x^2\right)}\right)$, για $|x|<a<1$ και $\phi_a(x)=0$, διαφορετικά.

Τότε θα έχουμε:

$$e^{-1}=\phi_a(0)=\int_{-a}^{a}f(x)\exp\left(-\frac{a^2}{a^2-x^2}\right)dx\le e^{-1}\int_{-a}^{a}|f(x)|dx,$$

όπου όταν το $a\to 0$ καταλήγουμε στην αντίφαση $e^{-1}\le 0$. Άρα η ασθενής παράγωγος της συνάρτησης βήματος του Heaviside δεν μπορεί να είναι μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Κεφάλαιο 3

3.1 Κυματικά φαινόμενα

Κυματική Διάδοση

Με τον όρο *κύμα* εννοούμε μια διαταραχή που διαδίδεται με την πάροδο του χρόνου σε ένα μέσο, μεταφέροντας ενέργεια. Στην παράγραφο αυτή θα αναλύσουμε εξισώσει που αναφέρονται σε κυματικά φαινόμενα και θα επισημάνουμε βασικά χαρακτηριστικά που συναντάμε κατά την μελέτη της διάδοσης των κυμάτων.

Ένα απλό μαθηματικό μοντέλο κύματος είναι η συνάρτηση:

$$u(x,t) = f(x-ct) \tag{3.1}$$

η οποία παριστάνει ένα τρέχον κύμα που κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα *c*, διατηρώντας το σχήμα του. Η μεταβλητή *x* παριστάνει τη θέση στην ευθεία, η *t* τον χρόνο και *u* την ένταση της διαταραχής. Όταν *t=0* το σχήμα της διαταραχής είναι $u = f(x)$ και σε *t>0* μονάδες χρόνου, η διαταραχή έχει κινηθεί προς τα δεξιά κατά *ct* μονάδες μήκους. Η βασική ιδιότητα αυτού του κύματος είναι ότι διατηρεί το σχήμα του γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με ιδιότητες άλλων κυμάτων.

Προσπαθώντας να βρούμε μια ΜΔΕ της οποίας η λύση να δίνεται από μια συνάρτηση της μορφής (3.1), υπολογίζουμε τις παραγώγους της συνάρτησης ως προς *t, x* και έχουμε:

$$\left\{\begin{matrix} u_t = -cf'(x-ct) \\ u_x = f'(x-ct) \end{matrix}\right\}$$

Συνεπώς προκύπτει:

$$u_t + cu_x = 0 \tag{3.2}$$

είναι η λεγόμενη *εξίσωση μεταφοράς* και η γενική λύση της είναι της μορφής (3.1).

Αντίστοιχη μορφή εξίσωσης έχουμε και για ένα κύμα που μεταφέρεται προς τα αριστερά, με εξίσωση και γενική λύση της μορφής:

$$u_t - cu_x = 0 \text{ και } u = f(x+ct)$$

Άλλα κύματα που παρουσιάζουν ενδιαφέρον είναι τα περιοδικά κύματα της μορφής

$$u = A\cos(kx - \omega t) \tag{3.3}$$

όπου *A* το *πλάτος* του κύματος, *k* ο *κυματάριθμος(πλήθος ταλαντώσεων ανά 2π μονάδες μήκους, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t)* και *ω* η *κυκλική συχνότητα(το πλήθος ταλαντώσεων ανά 2π μονάδες χρόνου σε κάποια θέση x)*

Ο αριθμός $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$, ονομάζεται *μήκος κύματος,* το οποίο μετρά την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών κύματος.

Μπορούμε τώρα να γράψουμε την εξίσωση (3.3) με την μορφή

$$u = A\cos k\left(x - \frac{\omega}{k}t\right)$$

με $c = \dfrac{\omega}{k}$ *ταχύτητα φάσης* και είναι η ταχύτητα με την οποία θα πρέπει να κινείται ένας παρατηρητής για να παραμένει το κύμα στο ίδιο πάντα σημείο. Πολλές φορές χρησιμοποιούμε για τους υπολογισμούς, η μιγαδική εκθετική μορφή της (3.3):

$$u = \exp(i(kx - \omega t)) \tag{3.4}$$

Υπάρχουν 3 είδη κυμάτων: αυτά που διαδίδονται χωρίς αλλαγή σχήματος και με σταθερή ταχύτητα, εκείνα που παραμορφώνονται λόγω του ότι η ταχύτητα διάδοσης τους εξαρτάται από το πλάτος του κύματος και εκείνα που τα περιγράφει το φαινόμενο *διασκελισμού*, στα οποί η ταχύτητα διάδοσης εξαρτάται από το μήκος κύματος της διαδιδόμενης διαταραχής. Η διάδοση των κυμάτων με διασπορά περιγράφεται από γραμμικές και μη γραμμικές εξισώσεις, τις οποίες θα αναλύσουμε παρακάτω.

Γραμμικά κύματα

Για την προηγούμενη εξίσωση μεταφοράς εισάγουμε την αρχική συνθήκη της μορφής

$$u(x,0)=\phi(x), x\in R^1 \qquad \textbf{(3.5)}$$

και τότε το πρόβλημα που παίρνουμε θα έχει την μορφή

$$\begin{Bmatrix} u_t + cu_x = 0, x\in R^1, t>0 \\ u(x,0)=\phi(x), x\in R^1 \end{Bmatrix}$$

με γενική λύση της μορφή $u = f(x-ct)$ και θέτοντας για $f(x)=\phi(x)$ η λύση του προβλήματος γίνεται:

$$u(x,t)=\phi(x-ct) \qquad \textbf{(3.6)}$$

Οι ευθείες *x-ct* είναι ιδιαίτερης σημασίας γιατί κατά μήκος αυτών των γραμμών η αρχική συνθήκη διαδίδεται με σταθερή τιμή. Εάν θεωρήσουμε ότι *C* είναι η καμπύλη της μορφής *x=ct+k* για κάποια σταθερά *k*, τότε η κατευθυνόμενη παράγωγος της *u* στην κατεύθυνση της εφαπτομένης της καμπύλης δίνεται από την σχέση

$$\frac{du}{dt}(x(t),t)=u_x(x(t),t)\frac{dx}{dt}+u_t(x(t),t)=u_x(x(t),t)c+u_t(x(t),t)$$

Η οικογένεια των ευθειών *x-ct=k*, ονομάζεται *οικογένεια χαρακτηριστικών καμπυλών* για την αρχική εξίσωση και σημειώνεται ότι η ταχύτητα *c* είναι ο αντίστροφος της κλίσης των ευθειών αυτών στο σύστημα συντεταγμένων (*x,t).*

Κάνοντας την (3.2) πιο πολύπλοκη, θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής

$$\begin{Bmatrix} u_t + c(x,t)u_x = 0, x\in R^1 \\ u(x,0)=\phi(x), x\in R^1 \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(3.7)}$$

όπου *c(x,t)* μια δεδομένη σταθερή συνάρτηση. Οι χαρακτηριστικές καμπύλης στην περίπτωση αυτή θα δίνονται από την σχέση της μορφής

$$\frac{dx}{dt}=c(x,t) \qquad \textbf{(3.8)}$$

Τότε κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης της οικογενείας *C* έχουμε:

$$\frac{du}{dt}=u_x\frac{dx}{dt}+u_t=u_xc(x,t)+u_t=0$$

Η (3.8) αποτελεί την εξίσωση οικογένειας χαρακτηριστικών καμπυλών για το πρόβλημα (3.7).

Παράδειγμα 1: Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{Bmatrix} u_t + 2tu_x = 0, x\in R^1, t>0 \\ u(x,,0)=\exp(-x^2), x\in R^1 \end{Bmatrix}$$

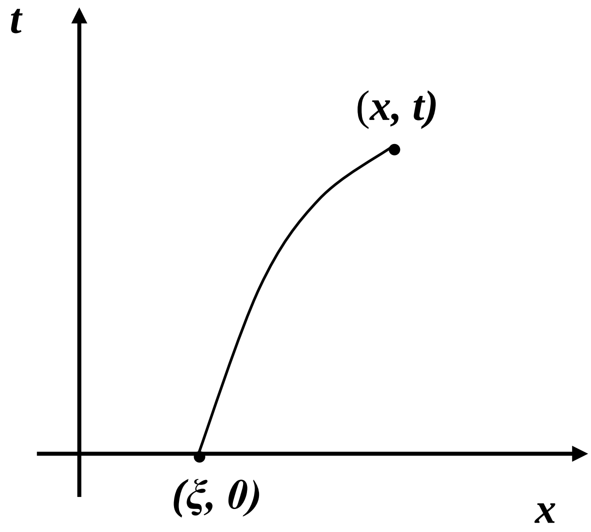
Οι χαρακτηριστικές καμπύλες θα δίνονται από $\frac{dx}{dt} = 2t$ και δίνει την οικογένεια παραβολών

$$x = t^2 + k, k : \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha$$

Θεωρώ ένα σημείο *(x,t)* με *t>0*. Τότε η εξίσωση που περνάει από το σημείο αυτό τέμνει τον άξονα των *x* σε κάποιο σημείο *(ξ,0)* και έχει εξίσωση της μορφής $x = t^2 + \xi$ **(Σχήμα 3.1)** και επειδή η *u* έχει σταθερή τιμή πάνω σε αυτή την καμπύλη, η εξίσωση

$$u(x,t) = \exp(-\xi^2) = \exp(-(x-t^2)^2)$$

θα αποτελεί την μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.



Σχήμα 3.1 Χαρακτηριστική εξίσωση $x = t^2 + \xi$

Μη γραμμικά κύματα

Στην μελέτη τέτοιου είδους κυμάτων θα εισάγουμε ένα μη γραμμικό όρο στην εξίσωση, παίρνοντας:

$$u_t + c(u)u_x = 0, x \in R^1, t > 0 \qquad \textbf{(3.9)}$$

με $c'(u) > 0$ και αρχική συνθήκη της μορφής

$$u(x,0) = \phi(x), x \in R^1 \qquad \textbf{(3.10)}$$

Οι χαρακτηριστικές καμπύλες θα είναι της μορφής

$$\frac{dx}{dt} = c(u) \qquad \textbf{(3.11)}$$

και κατά μήκος μιας τέτοιας καμπύλης *x=x(t)*, ισχύει:

$$\frac{du}{dt}(x(t),t) = u_x(x(t),t)c(u(x(t),t)) + u_t(x(t),t) = 0$$

με *u* να είναι σταθερή κατά μήκος των χαρακτηριστικών καμπυλών.

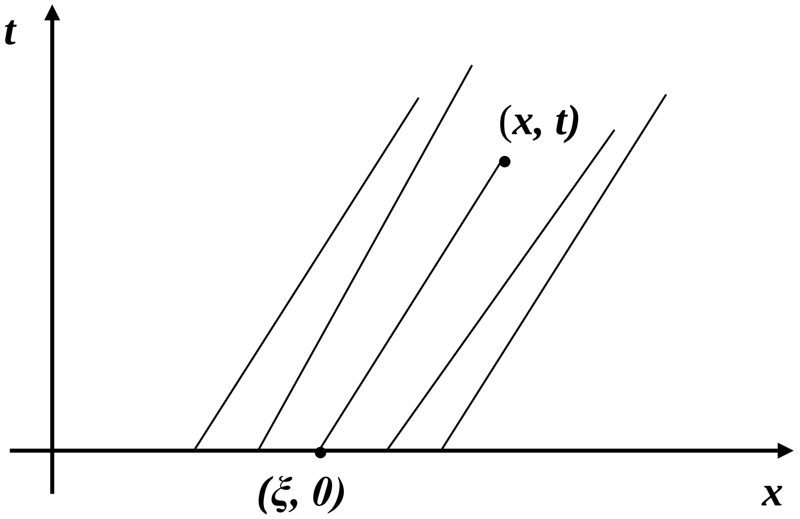
Παρατηρούμε ότι, στην μη γραμμική περίπτωση, η ταχύτητα των χαρακτηριστικών, δηλαδή η συνάρτηση που ορίζεται από την (3.11), εξαρτάται από την τιμή της *u* πάνω στην καμπύλη. Έτσι, για να βρούμε την εξίσωση της χαρακτηριστικής που περνάει από το σημείο *(x,t)* παρατηρούμε ότι η ταχύτητα της είναι

$$\frac{dx}{dt} = c(u(\xi,0)) = c(\phi(\xi))$$

και ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$x = c(\phi(\xi))t + \xi \tag{3.12}$$

που είναι η ζητούμενη εξίσωση της χαρακτηριστικής *C*. **(Σχήμα 3.2)**



Σχήμα 3.2 Χαρακτηριστικές εξισώσεις της $u_t + c(u)u_x = 0, x \in R^1, t > 0$

Η παραπάνω εξίσωση ορίζει την συνάρτηση *ξ=ξ(x,t)* πεπλεγμένα ως συνάρτηση των *x, t* και η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών δίνεται από τον τύπο

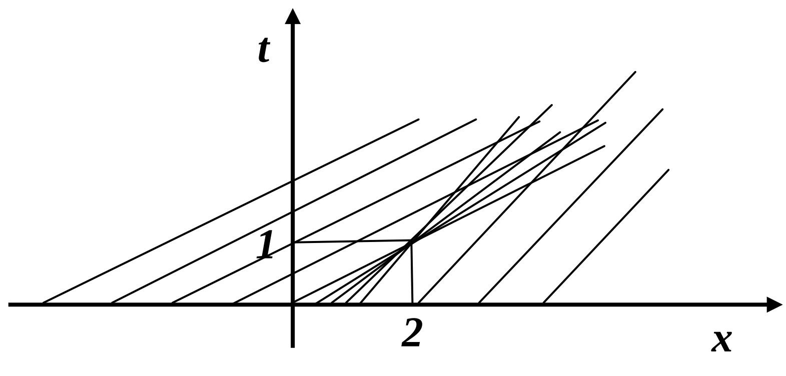
$$u(x,t) = \phi(\xi)$$

με *ξ* όπως ορίζεται από την (3.12).

Παράδειγμα 2: Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής

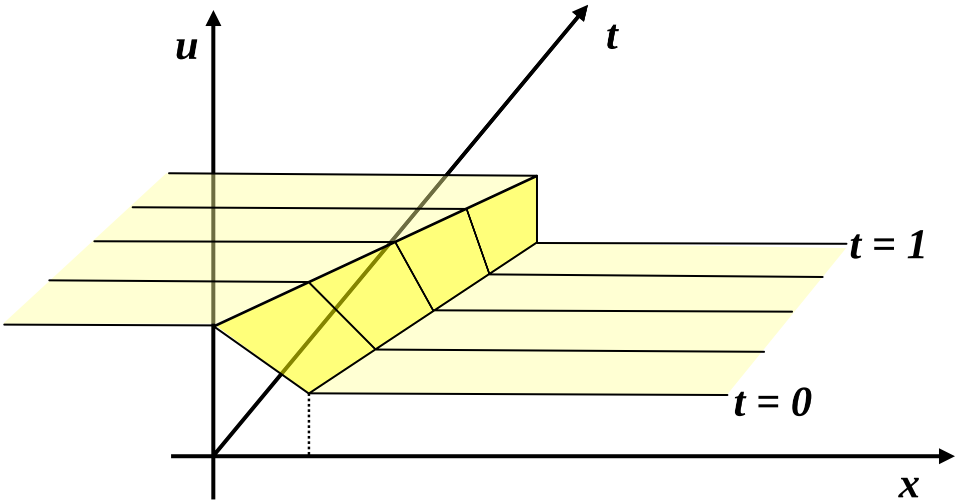
$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + uu_x = 0, x \in R^1, t > 0 \\ \phi(x) \equiv u(x,0) = \left\{ \begin{array}{c} 2, x < 0 \\ 2 - x, x \in [0,1] \\ 1, x > 1 \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

Εδώ *c(u)=u* και οι χαρακτηριστικές είναι ευθείες που ξεκινούν από το σημείο *(ξ,0)* με ταχύτητα $c(\phi(\xi)) = \phi(\xi)$. **(Σχήμα 3.3)**



Σχήμα 3.3 Χαρακτηριστικές εξισώσεις

Για $\xi<0$ οι χαρακτηριστικές έχουν ταχύτητα 2, ενώ για $\xi>1$ ταχύτητα 1. Για $0 \le \xi \le 1$, η ταχύτητα θα είναι $2-\xi$ και θα τέμνονται στο σημείο *(2,1)*. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει λύση για $t>1$, διότι μετά την στιγμή αυτή οι χαρακτηριστικές τέμνονται και μεταφέρουν διαφορετικές τιμές της *u*. Το **Σχήμα 3.4** δείχνει διαδοχικά τα στιγμιότυπα των κυματικών μορφών που προκύπτουν, και πώς η λύση γίνεται ολοένα και πιο "απότομη".



Σχήμα 3.4 Επιφάνεια λύσης

Όταν $t=1$ το κύμα «σπάζει». Για να βρούμε την λύση για $t<1$, παρατηρούμε ότι $u(x,t)=2$, για $x<2t$ και $u(x,t)=1$ για $x>t+1$. Για $2t \le x \le t+1$ η εξίσωση (3.12) γίνεται:

$$x=(2-\xi)t+\xi \Rightarrow \xi=\frac{x-2t}{1-t}$$

και έτσι η γενική λύση είναι

$$\boxed{u(x,t)=\frac{2-x}{1-t}, 2t \le x \le t+1, t<1}$$

Παράδειγμα 3:

Έστω το πρόβλημα $\left\{\begin{matrix} u_t+uu_x+au^2=0, t, a>0, x\in R^1 \\ u(x,0)=1 \end{matrix}\right\}$, το οποίο, βάσει θεωρίας, θα είναι ισοδύναμο με το σύστημα εξισώσεων της μορφής:

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{dx}{dt}=u \\ \dfrac{du}{dt}=-au^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \dfrac{dx}{dt}=u \\ \dfrac{du}{u^2}=-adt \end{matrix}\right\} \qquad \begin{matrix} (3.13) \\ (3.14) \end{matrix}$$

Λύνοντας την (3.14) μέσω της μεθόδου χωριζομένων μεταβλητών, θα πάρουμε:

$$-\frac{1}{u}=-at+C_1 \Rightarrow u=\frac{1}{at-C_1} \qquad (3.15)$$

και τότε η (3.13) μέσω της (3.15), γίνεται:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{at-C_1}\Rightarrow dx=\frac{dt}{at-C_1}\Rightarrow x=\frac{\ln(at-C_1)}{a}$$

με αντίστοιχες αρχικές συνθήκες $x=\xi, u=1$.

Υπολογίζουμε την ποσότητα C_1 (από τις αρχικές συνθήκες):

$u(x,0)=-\frac{1}{C_1}=1\Rightarrow \boxed{C_1=-1}$ και θα έχουμε $u=\frac{1}{at+1}\Leftrightarrow \boxed{u(x,t)=(at+1)^{-1}}$, η οποία είναι μια μορφή της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών.

Παράδειγμα 4:

Έχουμε $\left\{\begin{matrix} u_t+xu_x=0 \\ u(x,0)=\exp(-x) \end{matrix}\right\}$, με χαρακτηριστικές καμπύλες της μορφής

$$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{1}\Rightarrow \ln(x)=t+\xi\Rightarrow \xi=\ln(x)-t$$

Έτσι παίρνουμε:

$$\left\{\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial\xi} \\ \frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\xi}=-\frac{\partial}{\partial\xi} \end{matrix}\right\}$$

και αντικαθιστώντας $\frac{\partial u}{\partial t}+x\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial\xi}+x\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$, με $u(x,0)=\exp(-x)$, οπότε

$$u(\xi)=\exp(-\exp(\xi))\Rightarrow u(\xi)=\exp(-\exp(\ln(x)-t))$$

$$\Rightarrow u(\xi)=\exp\left[-\exp(\ln x)\exp(-t)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t)=\exp(-xe^{-t})}$$

η ζητούμενη λύση.

Παράδειγμα 5:

Έχουμε $\left\{\begin{matrix} u_t-x^2u_x=0 \\ u(x,0)=x+1 \end{matrix}\right\}$ με χαρακτηριστικές καμπύλες της μορφής:

$$\frac{dx}{-x^2t}=\frac{dt}{1}\Rightarrow -\frac{dx}{x^2}=tdt\Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{2}t^2+\xi\Rightarrow \xi=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}t^2$$

και για *t=0 & ξ=1/x*, έχουμε $u(\xi,0)=\frac{1}{\xi}+1$. Άρα προκύπτει $\left\{\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\xi}=-t\frac{\partial}{\partial\xi} \\ \frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}=-\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial\xi} \end{matrix}\right\}$

οπότε $-t\frac{\partial u}{\partial\xi}-x^2t(-\frac{1}{x^2})\frac{\partial u}{\partial\xi}=-t\frac{\partial u}{\partial\xi}+t\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$ και έτσι η λύση θα είναι:

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}t^2}+1}$$

Χρόνος θραύσεως

Γενικά το πρόβλημα (3.9), (3.10) μπορεί να έχει λύση μόνο μέχρι κάποια χρονική στιγμή t_b, που ονομάζεται *χρόνος θραύσεως*. Υποθέτουμε ακόμα ότι εκτός από $c'(u) > 0$, ισχύει

$$\phi(x) \geq 0, \phi'(x) < 0$$

για την αρχική συνθήκη *φ*. Κατά τον χρόνο θραύσεως η κλίση u_x απειρίζεται. Λύνοντας την (3.12) ως προς ξ και παραγωγίζοντας ως προς *x*, έχουμε:

$$\xi_x = \frac{1}{1 + c'(\phi(\xi))\phi'(\xi)t}$$

και η λύση του προβλήματος παίρνει την μορφή:

$$u_x = \frac{\phi'(\xi)}{1 + c'(\phi(\xi))\phi'(\xi)t}$$

Έτσι η ‘καταστροφή’ της λύσης θα συμβεί την χρονική στιγμή εκείνη κατά την οποία ο παρονομαστής της παραπάνω έκφρασης μηδενιστεί. Συνεπώς παίρνουμε:

$$\boxed{t_b = \min \frac{-1}{\phi'(\xi)c'(\phi(\xi))}, t_b \geq 0}$$

Άσκηση

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{u_t + uu_x + u = 0, x \in R^1, t > 0} \\ \mathrm{u(x,0) = -2x, x \in R^1} \end{Bmatrix}$$

Προσδιορίστε τον *χρόνο θραύσεως* $\mathrm{t_b}$, κατά τον οποίο συμβαίνει «καταστροφή» της κλίσης της λύσης και πέραν του οποίου δεν υπάρχει συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

ΛΥΣΗ:

Έχουμε την εξίσωση στη μορφή:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial t} + u = 0, \quad u(x, t = 0) = -2x}$$

Επιλύω: $\begin{Bmatrix} \frac{du}{dt} = -u, \frac{dx}{dt} = u \end{Bmatrix}$ με αρχικές συνθήκες $t = 0, \quad \xi = x, \quad u = -2\xi$.

Η γενική λύση αυτού του συστήματος είναι:

$$x = -c_1 e^{-t} + c_2, \quad u = c_1 e^{-t}$$

Η συνοριακή συνθήκη δίνει: $\xi = -c_1 + c_2, \quad -2\xi = c_1$ άρα

$$c_1 = -2\xi, \quad c_2 = -\xi$$

Επομένως η μερική λύση είναι:

$$\begin{Bmatrix} x = 2\xi e^{-t} - \xi \\ u = -2\xi e^{-t} \end{Bmatrix}$$

Η πρώτη από τις παραπάνω δίνει $\xi = \dfrac{1}{2e^{-t}-1}$ η οποία αν αντικατασταθεί στην δεύτερη δίνει την τελική λύση:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{2xe^{-t}}{1-2e^{-t}}}$$

η οποία αποτελεί την λύση του δοθέντος προβλήματος αρχικών τιμών.

Η κλίση της λύσης είναι $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2e^{-t}}{1-2e^{-t}}$ και η καταστροφή της οποίας συμβαίνει στον μικρότερο χρόνο, t_b για τον οποίο μηδενίζεται ο παρονομαστής. Εύκολα προκύπτει ότι

$$\boxed{t_b = \ln(2)}$$

,ο ζητούμενος χρόνος θραύσεως.

Θα διερευνήσουμε τώρα προβλήματα σε πεπερασμένα χωρικά διαστήματα. Για να αναδείξουμε καλύτερα τα βασικά προβλήματα, αρκεί να μελετήσουμε την απλή εξίσωση μεταφορά:

$$\left\{\begin{matrix} u_t + cu_x = 0, 0 < x < 1, t > 0, c > 0 \\ u(x,0) = f(x), 0 < x < 1 \end{matrix}\right\}$$

Στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ η λύση του προβλήματος παριστάνει το κύμα που μεταδίδεται προς μία κατεύθυνση και δίνεται από τον τύπο $u = f(x-ct)$. Σε πεπερασμένο διάστημα το πρόβλημα παίρνει την μορφή:

$$\left\{\begin{matrix} u_t + cu_x = 0, 0 < x < 1, t > 0, c > 0 \\ u(x,0) = f(x), 0 < x < 1 \\ u(0,t) = g(t), t > 0 \end{matrix}\right\}$$

το οποίο έχει μοναδική λύση. Στην περίπτωση αυτή σημειώνουμε ότι δεν υπάρχουν κύματα που να διαδίδονται προς τα αριστερά. Το γενικό, λοιπόν συμπέρασμα είναι ότι απαιτείται προσοχή στην διατύπωση προβλημάτων συνοριακών συνθηκών για κυματικές εξισώσεις που περιγράφουν διάδοση κυμάτων προς μία κατεύθυνση, όπως είναι οι κυματικές εξισώσεις που μελετήσαμε μέχρι τώρα. Η αμφίδρομη διάδοση κυμάτων έχει να κάνει με ΜΔΕ δεύτερης τάξης, υπερβολικού τύπου.

Εξίσωση Burgers

Στην παράγραφο αυτή θα παραθέσουμε κάποια παραδείγματα για την κατανόηση της εξίσωσης Burgers.

Παράδειγμα 1: Έστω η ΜΔΕ της μορφής

$$u_t + cu_x + vu_{xx} = 0, c, v > 0 \qquad \textbf{(3.16)}$$

που περιέχει τον γραμμικό όρο μεταφοράς cu_x και τον όρο διάχυσης $-vu_{xx}$. Αντικαθιστούμε την λύση της μορφής $u = A\exp(i(kx-\omega t))$ στην (3.16) και απλοποιώντας βρίσκουμε:

$$\omega = ck - ivk^2$$

και έτσι για κάθε k η (3.16) έχει λύσεις της μορφής

$$u = A\exp(-vk^2 t)\exp(ik(x-ct))$$

όπου ο όρος $\exp(ik(x-ct))$ παριστάνει αρμονικό κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά με κυματάριθμο k, ενώ ο όρος $A\exp(-vk^2 t)$ είναι το πλάτος αυτού του κύματος, το οποίο φθίνει καθώς ο χρόνος αυξάνεται.

Καταλήγουμε έτσι σε 2 συμπεράσματα:

1. Κύματα με σταθερό μήκος κύματος $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$ αποσβένονται εκθετικά καθώς ο συντελεστής v αυξάνεται.
2. Για σταθερό v, η απόσβεση αυξάνεται με το k. Κύματα με μικρότερο μήκος κύματος φθίνουν γρηγορότερα από ότι κύματα μεγαλύτερου μήκους κύματος.

Παράδειγμα 2: Έστω η μη γραμμική εξίσωση της μορφής

$$u_t + uu_x - vu_{xx} = 0, v > 0 \qquad \textbf{(3.17)}$$

η οποία είναι γνωστή ως εξίσωση *Burgers*. Ο όρος uu_x προκαλεί φαινόμενο κρουστικού κύματος, δηλαδή ωθεί το κύμα σε θραύση, ενώ ο όρος $-vu_{xx}$ είναι ο όρος διάχυσης.

Προσπαθούμε να βρούμε λύσεις της μορφής

$$u = f(x-ct)$$

οπότε παραγωγίζοντας κατάλληλα και αντικαθιστώντας στην (3.17) προκύπτει:

$$-cf'(s) + f(s)f'(s) - vf''(s) = 0$$

όπου s=x-ct. Παρατηρούμε ότι $ff' = \frac{1}{2}(\frac{d}{ds})f^2$ και ολοκληρώνοντας ως προς s την παραπάνω εξίσωση έχουμε:

$$-cf + \frac{1}{2}f^2 - vf' = B$$

όπου B η σταθερά ολοκλήρωσης. Συνεπώς,

$$\frac{df}{ds} = \frac{1}{2v}(f-f_1)(f-f_2) \qquad \textbf{(3.18)}$$

όπου $f_1 = c - \sqrt{c^2+2B}$, $f_2 = c + \sqrt{c^2+2B}$. Υποθέτουμε ότι $c^2 > -2B$, άρα $f_2 > f_1$. Χωρίζοντας τις μεταβλητές και ολοκληρώνοντας ξανά έχουμε:

$$\frac{s}{2v} = \int \frac{df}{(f-f_1)(f-f_2)} = \frac{1}{f_2-f_1}\ln\frac{f_2-f}{f-f_1}, \; f_1 < f < f_2$$

Επιλύοντας την τελευταία σχέση ως προς f παίρνουμε:

$$f(s) = \frac{f_2 + f_1 e^{Ks}}{1+e^{Ks}} \qquad \textbf{(3.19)}$$

όπου $K = \frac{1}{2v}(f_2 - f_1) > 0$. Έτσι η αντίστοιχη λύση του κύματος θα είναι της μορφής:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f_2 + f_1 e^{K(x-ct)}}{1+e^{K(x-ct)}}}$$

όπου η ταχύτητα c προσδιορίζεται από τους τύπους που ορίζουν οι ποσότητες f_1, f_2 και είναι ίση με:

$$c = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$$

Η λύση αυτής της εξίσωσης του Burgers μοιάζει με κρουστικό κύμα και ονομάζεται *λύση με δομή κρουστικού κύματος* που συνδέει τις σταθερές ασυμπτωτικές καταστάσεις f_1, f_2. Οι λύσεις της εξίσωσης, χωρίς τον όρο νu_{xx} θα έτειναν να σπάσουν, δημιουργώντας ασυνέχειες τύπου κρουστικού κύματος. Η παρουσία του όρου διάχυσης $-\nu u_{xx}$, εμποδίζει την θραύση του κύματος. Το αποτέλεσμα είναι μια λύση ισορροπίας που οφείλεται στον ανταγωνισμό των δύο αυτών όρων και η οποία προσεγγίζει το τι πραγματικά συμβαίνει σε ένα πραγματικό κρουστικό κύμα στην στενή περιοχή όπου η κλίση είναι πολύ απότομη.

Η εξίσωση KdV (Korteweg-de Vries)

Σε αυτή την περίπτωση εξετάζουμε το φαινόμενο της *διασποράς*. Συστήματα με διασπορά χαρακτηρίζονται από ΜΔΕ που έχουν λύσεις της μορφής

$$u = A\exp(i(kx - \omega t))$$

όπου η ω δίνεται από μια πραγματική συνάρτηση του κυματάριθμου k, δηλαδή:

$$\omega = \omega(k)$$

Η σχέση αυτή ονομάζεται *σχέση διασποράς.*

Κάνοντας λόγο για την εξίσωση *KdV,* με την μαθηματική έννοια εννοούμε ένα μαθηματικό μοντέλο κυμάτων σε ρηχή επιφάνεια νερού. Αξίζει να σημειωθεί ότι, αποτελεί μια γραμμική εξίσωση της οποίας οι λύσεις μπορούν να βρεθούν εύκολα με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού. Η μαθηματική θεωρία πίσω από την εξίσωση KdV είναι πλούσια και ενδιαφέρουσα, και, με την ευρεία έννοια, είναι ένα από τα θέματα της μαθηματικής έρευνας.

Ορίζοντας την μαθηματικά, μπορούμε να πούμε ότι η εξίσωση *KdV* είναι της μορφής

$$u_t + uu_x + ku_{xxx} = 0, k > 0 \qquad \textbf{(3.20)}$$

Ο όρος uu_x τείνει να προκαλέσει ασυνέχεια των λύσεων. Σε αντίθεση με την εξίσωση Burgers όπου υπάρχει ο όρος $-\nu u_{xx}$, εδώ αντικαθίσταται από τον όρο ku_{xxx}, τον οποίο μπορούμε να ερμηνεύσουμε ως όρο διασποράς. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως με τον προσδιορισμό της λύσης της μορφής τρέχοντος κύματος για την εξίσωση Burgers, υποθέτουμε ότι ζητάμε λύση της (3.20) της μορφής:

$$u = f(s), s = x - ct \qquad \textbf{(3.21)}$$

όπου η κυματομορφή *f* και η ταχύτητα *c* του κύματος θα πρέπει να προσδιοριστούν. Αντικαθιστώντας την (3.21) στην (3.20), κάνοντας τους κατάλληλους μετασχηματισμούς, παίρνουμε:

$$-cf' + \frac{1}{2}\frac{d}{ds}f^2 + kf''' = 0$$

$$\Rightarrow -cf' + \frac{1}{2}f^2 + kf'' = A$$

όπου *A* σταθερά. Πολλαπλασιάζοντας και τα 2 μέλη με *f’* και ολοκληρώνοντας ξανά, παίρνουμε:

$$-\frac{c}{2}f^2 + \frac{1}{6}f^3 + \frac{1}{2}k(f')^2 = Af + B$$

όπου *B σταθερά.* Μπορούμε να γράψουμε έτσι:

$$\frac{df}{ds} = \pm\sqrt{\frac{1}{3k}\phi(f)^{1/2}}, \text{ όπου } \phi(f) = -f^3 + 3cf^2 + 6Af + 6B \qquad \textbf{(3.22)}$$

Θεωρούμε ότι η *φ* έχει πραγματικές ρίζες τέτοιες ώστε *γ=β<α, για α, β, γ λύσεις της φ*. Τότε οι λύσεις της θα αποτελούν μια οικογένεια λύσεων γνωστή ως *σολιτόνια*. Τότε η (3.22) θα γίνει:

$$\frac{ds}{\sqrt{3k}} = \frac{df}{(f-\gamma)\sqrt{a-f}} \qquad \textbf{(3.23)}$$

Θέτουμε $f = \gamma + (\alpha - \gamma)\sec h^2 w$ και τότε η παράγωγος θα γίνει

$$df = -2(\alpha-\gamma)\sec h^2 w \tanh w dw$$

και με αντικατάσταση στην (3.23) θα πάρουμε:

$$\frac{ds}{\sqrt{3k}} = \frac{-2(a-\gamma)\sec h^2 w \tanh w dw}{(\alpha-\gamma)\sec h^2 w\sqrt{(a-\gamma)-(\alpha-\gamma)\sec h^2 w}} = \frac{-2dw}{\sqrt{\alpha-\gamma}}$$

και με μια ολοκλήρωση παίρνουμε:

$$w = -\sqrt{\frac{a-\gamma}{12k}}s$$

και μια λύση της εξίσωσης θα έχει την μορφή

$$\boxed{f(s) = \gamma + (\alpha-\gamma)\sec h^2\left(\sqrt{\frac{a-\gamma}{12k}}s\right)} \qquad \textbf{(3.24)}$$

Προφανώς $f(s)\xrightarrow{s\to\pm\infty}\gamma$. Εκφράζοντας τις ρίζες *α, γ* συναρτήσει των αρχικών παραμέτρων, παίρνουμε:

$$\phi(f) = -f^3 + 3cf^2 + 6Af + 6B = (f-\gamma)^2(\alpha - f)$$

$$\Rightarrow \phi(f) = -f^3 + (a+2\gamma)f^2 + (-2a\gamma-\gamma^2)f + \gamma^2\alpha$$

και εξισώνοντας με την (3.22), προκύπτει ότι η ταχύτητα του κύματος θα είναι

$$3c = a + 2\gamma \Rightarrow \boxed{c = \frac{a+2\gamma}{3}}$$

οπότε η γενική λύση μπορεί να γραφτεί με την μορφή:

$$\boxed{u(x,t) = \gamma + \mathrm{A}\sec h^2\left(\sqrt{\frac{\mathrm{A}}{12k}}\left(x - \left[\gamma + \frac{\mathrm{A}}{3}\right]t\right)\right), \mathrm{A} \equiv \alpha - \gamma}$$

3.2 Νόμοι Διατήρησης

Θεωρούμε την ΜΔΕ της μορφής

$$u_t + F(u)_x = 0, x \in R^1, t > 0 \qquad \textbf{(3.25)}$$

,όπου *f* μια δεδομένη συνάρτηση, συνεχώς παραγωγίσιμη και πραγματική. Μια τέτοια εξίσωση αποτελεί ένα *νόμο διατήρησης*, γιατί: αν ολοκληρώσουμε την (3.25) ως προς *x*, από *x=a μέχρι x=b*, παίρνουμε:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx + \int_a^b F(u)_x dx = 0 \qquad \textbf{(3.26)}$$

Από το θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού, παίρνουμε:

$$\int_a^b F(u)_x dx = F(u(b,t)) - F(u(a,t))$$

και η (3.26) γράφεται στην μορφή

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = F(u(a,t)) - F(u(b,t)) \qquad \textbf{(3.27)}$$

Εάν υποθέσουμε ότι η *F(u(x,t))* παριστάνει την 'παροχή' της ποσότητας *u* στο σημείο *x*, δηλαδή το ποσό της *u* το οποίο διέρχεται από το *x* ανά μονάδα χρόνου τότε η (3.27) δηλώνει τον ρυθμό μεταβολής της συνολικής ποσότητας *u* στο *[a,b]* είναι ίσος με την εισροή στο άκρο *x=a*, μείον την εκροή στο σημείο *x=b*. Συνεπώς η (3.27) είναι μια διατύπωση της διατήρησης της ποσότητας *u*. Ονομάζουμε την (3.27) *ολοκληρωτική μορφή* και την (3.25) *διαφορική μορφή του νόμου διατήρησης*. Μια ομαλή λύση της (3.27), ονομάζεται *κλασική λύση*.

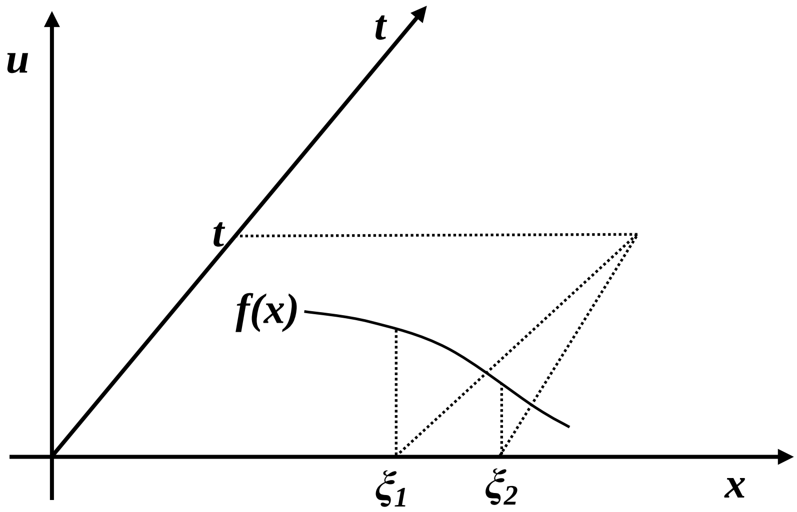
Από την (3.25) μπορούμε να πάρουμε την μορφή της εξίσωσης ως:

$$u_t + c(u)u_x = 0$$

$$c(u) = F'(x)$$

Έχουμε δείξει ότι η λύση *u* είναι σταθερή πάνω στις χαρακτηριστικές καμπύλες $\frac{dx}{dt} = c(u)$.

Υποθέτουμε ότι $c'(u) > 0$ και $f'(x) < 0$ δύο σημεία ξ_1, ξ_2 με $\xi_1 < \xi_2$ πάνω στον άξονα *x*. Για τις ταχύτητες (κλίση στο επίπεδο t,x) είναι $c(f(\xi_1)) > c(f(\xi_2))$ και τότε οι χαρακτηριστικές θα τέμνονται. **(Σχήμα 3.5)**

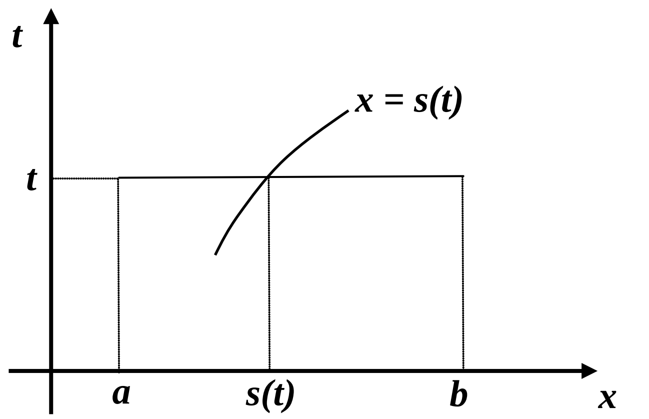


Σχήμα 3.5

Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα έχει ομαλή λύση μόνο μέχρι τη στιγμή t_b (χρόνος θραύσεως), ενώ για χρόνους μεγαλύτερους του χρόνου θραύσεως, η λύση παρουσιάζει ασυνέχεια. Θα προσπαθήσουμε, λοιπόν να προσδιορίσουμε κάποιες συνθήκες κάτω από τις οποίες θα ισχύει η ασυνέχεια:

Μελετώντας το **Σχήμα 3.6** παρατηρούμε ότι για ένα διάστημα $a \le x \le b$, η συνάρτηση *x=s(t)* παίρνει τιμή στο διάστημα αυτό, και ορίζουμε τα όρια δεξιά και αριστερά αντίστοιχα ως

$$u_0 = \lim_{x \to s(t)^+} u(x,t) \qquad u_1 = \lim_{x \to s(t)^-} u(x,t)$$



Σχήμα 3.6

Από νόμο διατήρησης και κανόνα Leibniz προκύπτει

$$F(u(a,t))-F(u(b,t))=\frac{d}{dt}\int_a^{s(t)}u(x,t)dx+\frac{d}{dt}\int_{s(t)}^{b}u(x,t)dx$$

$$=\int_a^{s(t)}u(x,t)dx+u_1\frac{ds}{dt}+\int_{s(t)}^{b}u_t(x,t)dx-u_0\frac{ds}{dt}$$

και επειδή η u_t είναι φραγμένη στο διάστημα *[a,s(t)] και [s(t),b],* τα ολοκληρώματα τείνουν στο μηδέν καθώς $a\to s(t)^-, b\to s(t)^+$.

Συνεπώς καταλήγουμε :

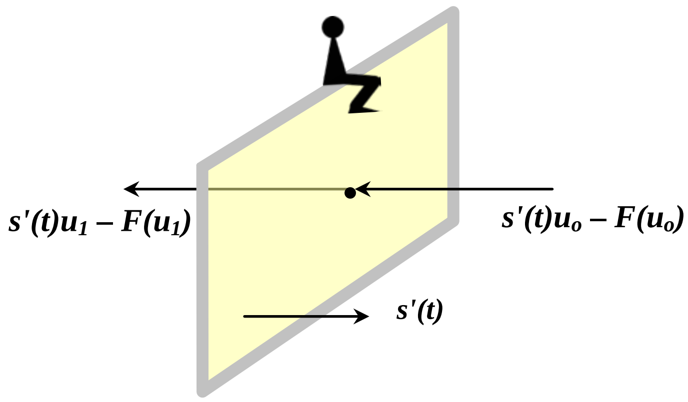
$$\boxed{F(u_1)-F(u_0)=(u_1-u_0)\frac{ds}{dt}}$$

η οποία αποτελεί την *συνθήκη ασυνέχειας μεταξύ τιμών της u και την συνάρτησης F(u), μπρος και πίσω από την ασυνέχεια, καθώς και της ταχύτητας* $\frac{ds}{dt}$ *της ασυνέχειας.*

Ένας άλλος τρόπος εύρεσης την συνθήκης ασυνέχειας είναι μέσω παρατηρητή ο οποίος κινείται ακολουθώντας την ασυνέχεια και παρατηρώντας την *u(x,t)*. Παραθέτοντας το παρακάτω **Σχήμα 3.7** υποθέτουμε ότι σε κάθε χρονική στιγμή το ποσό της *u* που βλέπει ο παρατηρητής να εισέρχεται σε μια φανταστική τομή κάθετη στον άξονα των *x*, θα είναι ίσο με το ποσό που εξέρχεται. Εκφράζοντας το παραπάνω μέσω συναρτήσεων παίρνουμε:

$$s'(t)u_0-F(u_0)=s'(t)u_1-F(u_1)$$

από την οποία προκύπτει η *συνθήκη ασυνέχειας όπως παραπάνω.*



Σχήμα 3.7

Σχεδόν Γραμμικές Εξισώσεις

Στην παράγραφο αυτή θα κάνουμε μια αναφορά στις σχεδόν γραμμικές εξισώσεις και θα προσπαθήσουμε μέσα από γνωστές διαδικασίες να βρούμε μια γενική λύση τους, ορίζοντας και κάποιες αρχικές συνθήκες.

Μια σχεδόν γραμμική εξίσωση θα είναι της μορφής:

$$a(x,t,u)u_x + b(x,t,u)u_t = c(x,t,u) \qquad \textbf{(3.28)}$$

και απλοποιώντας τα πράγματα μπορούμε να θεωρήσουμε ένα πρόβλημα:

$$\left\{\begin{array}{l} a(x,t,u)u_x + u_t = c(x,t,u), x \in R^1, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), x \in R^1 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.29)}$$

Εδώ οι χαρακτηριστικές καμπύλες θα δίνονται από τον τύπο :

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t,u)$$

και για την ταχύτητα $\frac{du}{dt} = c(x,t,u)$ γεγονός που δείχνει ότι δεν είναι σταθερή πάνω στις χαρακτηριστικές. Για την αρχική συνθήκη θεωρούμε *x=ξ, u=f(ξ) για t=0*. Η γενική λύση του συστήματος για 2 αυθαίρετες σταθερές c_1, c_2 θα δίνεται από

$$x = F(t, c_1, c_2)$$

$$u = G(t, c_1, c_2)$$

και συναρτήσει του *ξ* $\left\{\begin{array}{l} x = F(t, c_1(\xi), c_2(\xi)) \\ u = G(t, c_1(\xi), c_2(\xi)) \end{array}\right\}$. Θεωρητικά λύνοντας ως προς *ξ* την πρώτη συναρτήσει των *x,t* και αντικαθιστώντας στην δεύτερη, θα πάρουμε μια αναπαράσταση της συνάρτησης *u* ως προς *x, t.*

Παράδειγμα: Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\left\{\begin{array}{l} u_t + uu_x + u = 0, x \in R^1, t > 0 \\ u(x,0) = -\dfrac{x}{2}, x \in R^1 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.30)}$$

Βάσει των παραπάνω για τις χαρακτηριστικές και την ταχύτητα θα έχουμε:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u \\ \frac{du}{dt} &= -u \end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

,με αρχικές συνθήκες της μορφής

$$\left\{\begin{aligned} x &= \xi \\ u &= -\frac{\xi}{2} \end{aligned}\right\} \text{ για } t=0 \tag{3.32}$$

Λύνοντας το σύστημα (3.31) έχουμε:

$$\frac{du}{dt} = -u \Rightarrow \frac{du}{-u} = dt \Rightarrow \int -\frac{1}{u} du = \int dt \Rightarrow -\ln u = t + c_1$$

$$\Rightarrow \ln u = -t - c_1 \Rightarrow u = \widehat{c}_1 e^{-t}, \widehat{c}_1 = e^{-c_1}$$

και

$$\frac{dx}{dt} = \widehat{c}_1 e^{-t} \Rightarrow dx = \widehat{c}_1 e^{-t} dt \Rightarrow \int dx = \widehat{c}_1 \int e^{-t} dt \Rightarrow x = -\widehat{c}_1 e^{-t} + c_2$$

όπου $c_1, c_2, \widehat{c}_1$ σταθερές ολοκλήρωσης. Από τις αρχικές συνθήκες (3.32) και συναρτήσει του ξ θα πάρουμε για $t=0$

$$\left\{\begin{aligned} \widehat{c}_1 &= -\frac{\xi}{2} \\ c_2 &= \frac{\xi}{2} \end{aligned}\right\}$$

και αντικαθιστώντας στις λύσεις για τα x, u παίρνουμε την λύση με την μορφή:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} e^{-t} \\ u &= -\frac{\xi}{2} e^{-t} \end{aligned}\right\}$$

Λύνοντας την πρώτη ως προς ξ *έχουμε* $\xi = \dfrac{2x}{1+e^{-t}}$ και αντικαθιστώντας στην δεύτερη βρίσκουμε την λύση του προβλήματος να είναι

$$\boxed{u(x,t) = -\frac{xe^{-t}}{1+e^{-t}}, \forall t \geq 0, x \in R^1}.$$

3.3 Μηχανική Συνεχών Μέσων

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την κίνηση συνεχών σωμάτων σωματιδίων, όπως είναι τα ρευστά, τα στερεά και τα αέρια μέσα. Σε κάθε περίπτωση θα ορίσουμε τις «εξισώσεις πεδίου» που διέπουν την Μηχανική του μέσου, οι οποίες θα αποτελούνται από *νόμους διατήρησης(μάζας, ορμής, ενέργειας)*, καθώς και από *καταστατικές εξισώσεις(υποθέσεις για την σύσταση του μέσου)*. Για την εξέταση των μέσων αυτών θα υποθέτουμε ότι το υλικό που εξετάζεται κάθε φορά είναι *συνεχές(δεν λαμβάνουμε υπόψη την υφή του –μοριακή, ατομική- όσο λεπτό διαμερισμό και αν πάρουμε).*

Κινηματική ροή

Για την μελέτη αυτή θα δώσουμε ένα παράδειγμα μέτρησης της θερμοκρασίας του νερού σε ένα ποτάμι. Θα χρησιμοποιούμε 2 τρόπους:

1. Θεωρώντας ένα σημείο αναφοράς $x=0$ θα ‘βυθίσουμε’ ένα θερμόμετρο και θα κάνουμε την μέτρηση της θερμοκρασίας $\theta(x,t)$ στην σταθερή αυτή θέση x. Η συντεταγμένη x ονομάζεται *Euler-ιανη συντεταγμένη*.
2. Με το να βρισκόμαστε σε μια βάρκα και αυτή να μας παρασύρει στο ποτάμι θα κάνουμε μέτρηση της θερμοκρασίας $\Theta(h,t)$ για το σωματίδιο h *την στιγμή* t. Σε αυτή την περίπτωση η συντεταγμένη h ονομάζεται *συντεταγμένη Lagrange*.

Με τον τρόπο αυτό θα συμβολίσουμε με $f(x,t)$, $F(x,t)$ τις τιμές σε συντεταγμένες Euler, Lagrange, αντίστοιχα.

Για την *μελέτη* καθορίζουμε ένα τυχαίο Ι, την χρονική στιγμή $t=0$ στο οποίο βρίσκεται το σωματίδιο. Μέσω της Λαγκρασιανής συντεταγμένης θα έχουμε

$$x = h, t = 0 \qquad \textbf{(3.33)}$$

όπου x η συντεταγμένη Euler. Η κίνηση του ρευστού θα δίνεται μέσω της απεικόνισης

$\phi : I \times [0,t_1] \to I$ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, με

$$x = \phi(h,t), \text{ για κάθε } t \in [0,t_1] \qquad \textbf{(3.34)}$$

και η *(3.34) μέσω της (3.33)* θα γίνει

$$\boxed{x = x(h,t)}$$

η οποία θα δίνει την θέση x του σωματιδίου h την στιγμή t. Αξίζει να σημειωθεί ότι η φ είναι αντιστρέψιμη και για τον λόγο αυτό μπορούμε να επιλύσουμε την *(3.34)* ως προς h παίρνοντας:

$$h = h(x,t)$$

η οποία προσδιορίζει το σωματίδιο h, στην θέση x την στιγμή t. Επειδή οι $x(\cdot,t), h(\cdot,t)$ είναι μεταξύ τους αντιστρέψιμες μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{Bmatrix} x = x(h(x,t),t) \\ h = h(x(h,t),t) \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(3.35)}$$

οπότε για την τιμή των συναρτήσεων σε περιγραφή Euler & Lagrange θα πάρουμε:

$$\begin{Bmatrix} f(x,t) = F(h(x,t),t) \\ F(h,t) = f(x(h,t),t) \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(3.36)}$$

γεγονός που μας λέει ότι η μέτρηση της τιμής f ενός μεγέθους που κάνει κάποιος στο σημείο x την στιγμή t, είναι ίση με την τιμή F του ίδιου μεγέθους που κάνει κάποιος που κινείται με το σωματίδιο h που βρίσκεται την στιγμή t στην θέση x.

Κάνοντας χρήση του κανόνα παραγώγισης σύνθετων συναρτήσεων, υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους των f, F να συνδέονται μέσω του τύπου:

$$F_h(h,t) \equiv \frac{d}{dh} F(h,t) = \frac{d}{dh} f(x(h,t),t) = \frac{\partial f(x(h,t),t)}{\partial x} \frac{\partial x(h,t)}{\partial h} + \frac{\partial f(x(h,t),t)}{\partial t}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow F_h(h,t) = f_x(x(h,t),t)\, x_h(h,t)$$

και

$$F_t(h,t) \equiv \frac{d}{dt} F(h,t) = \frac{d}{dt} f(x(h,t),t) = \frac{\partial f(x(h,t),t)}{\partial x} \frac{\partial x(h,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(x(h,t),t)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow F_t(h,t) = f_x(x(h,t),t)\, x_t(h,t) + f_t(x(h,t),t)$$

Ορίζουμε τώρα την *ταχύτητα* του σωματιδίου διατομής *h* ως προς την θέση του στο χρόνο *t*, ως:

$$V(h,t) = x_t(h,t)$$

και στην μορφή Euler, γίνεται:

$$u(x,t) = V(h(x,t),t)$$

η ταχύτητα της διατομής που βρίσκεται την στιγμή *t* στην θέση *x*.

Για την *επιτάχυνση*, έχουμε:

$$A(h,t) = V_t(h,t) = x_{tt}(h,t)$$

και σε μορφή Euler:

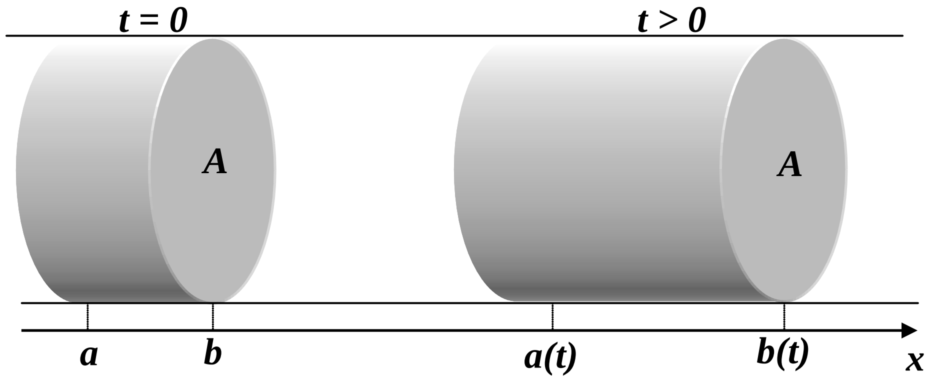
$$a(x,t) = V_t(h(x,t),t) = V_t(h,t)\big|_{h(x,t)}$$

Διατήρηση μάζας

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ποσότητα μάζας μέσα σε οποιοδήποτε τμήμα του κυλίνδρου κατά την χρονική στιγμή *t=0*, δεν μεταβάλλεται καθώς το τμήμα αυτό του υλικού κινείται για *t>0*.. 'Διαλέγουμε' ένα τυχαίο τμήμα του κυλίνδρου *x=a, x=b* **(Σχήμα 3.8)** και υποθέτουμε ότι μετά από χρόνο *t>0* θα βρισκόμαστε στο χωρίο μεταξύ $x = a(t) \equiv x(a,t)$ και $x = b(t) \equiv x(b,t)$. Έστω $\rho(x,t)$ η πυκνότητα σε Euler μορφή, τότε η μάζα μεταξύ αυτών των σημείων θα είναι:

$$\int_{a(t)}^{b(t)} \rho(x,t) A dx$$

με A να εκφράζει την σταθερή διατομή του κυλίνδρου.



Σχήμα 3.8

Από τον νόμο διατήρησης μάζας προκύπτει:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} \rho(x,t) dx = 0} \qquad \textit{(3.37)}$$

Ορίζοντας την *Ιακωβιανή* ως $J(h,t) \equiv x_h(h,t)$ και την *Λαγκρασιανή πυκνότητα ως* $\Delta(h,t) = \rho(x(h,t),t)$, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών *x=x(h,t)* στην *(3.37)* παίρνουμε:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \Delta(h,t)J(h,t)dh = 0 \qquad \textbf{(3.38)}$$

Εφαρμόζοντας την παραγώγιση ως προς *t* παίρνουμε:

$$\int_a^b \left(\Delta J_t + J\Delta_t\right) dh = \int_a^b \left[\Delta(h,t)u_x(x(h,t),t) + \Delta_t(h,t)\right] Jdh = 0\,, \qquad \textbf{(3.39)}$$

όπου

$$J_t(h,t) = \frac{\partial}{\partial h}x_t(h,t) = V_h(h,t) = u_x(x(h,t),t)x_h(h,t) \Rightarrow J_t(h,t) = u_x(x(h,t),t)J(h,t)$$

ο *τύπος Euler*.

Επειδή τα σημεία α,b είναι αυθαίρετα η (3.39) γίνεται:

$$\Delta_t(h,t) + \Delta(h,t)u_x(x(h,t),t) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_t + \frac{\Delta}{J}V_h = 0}$$

η *εξίσωση διατήρησης μάζας στην μορφή Lagrange.* Αντικαθιστώντας όπου *h=h(x,t)*, παίρνουμε την μορφή Euler:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho u_x = 0$$

Εάν η κίνηση του ρευστού είναι *ασυμπίεστη* έχουμε:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0, \Delta_t = 0$$

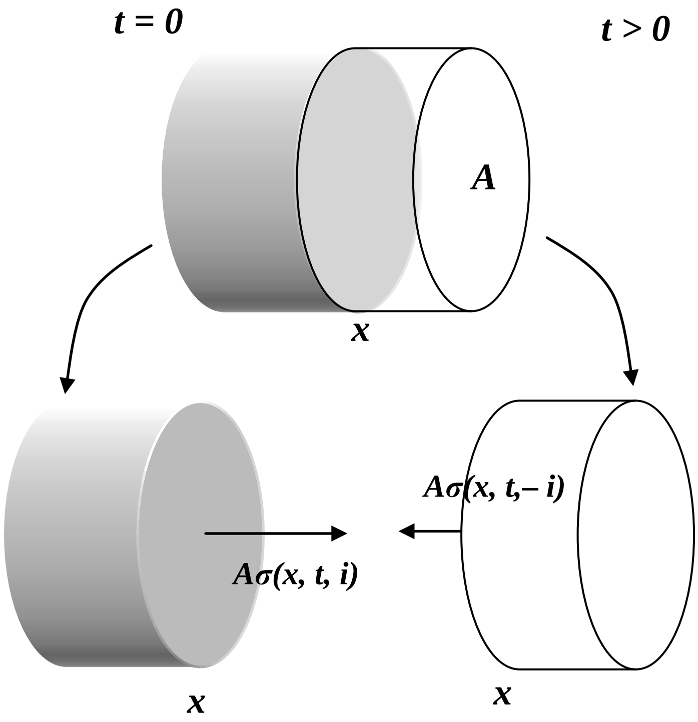
και *μόνιμη* αν οι συναρτήσεις *ρ και u* είναι ανεξάρτητες του *t.*

Διατήρηση ορμής

Για την διατήρηση ορμής σε χρόνο *t* σε ένα τυχαίο τμήμα του ρευστού $a(t) \le x \le b(t)$ με πυκνότητα *ρ(x,t)* ορίζουμε:

$$iA\int_{a(t)}^{b(t)} \rho(x,t)u(x,t)dx$$

με **i** το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα προς την θετική κατεύθυνση του άξονα των x, u(x,t) η ταχύτητα και A το εμβαδόν διατομής του κυλίνδρου. Ορίζουμε τα διανύσματα τάσης $\sigma(x,t,i)$ και $\sigma(x,t,-i)$, που εκφράζουν την δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας που ασκείται στο υλικό κατά την αρνητική (αριστερή) και θετική (δεξιά) όψη της διατομής, αντίστοιχα. **(Σχήμα 3.9)**



Σχήμα 3.9

Για το ισοζύγιο ορμής θα έχουμε τον τύπο:

$$i\frac{d}{dt}A\int_{a(t)}^{b(t)} \rho(x,t)u(x,t)dx = iA\int_{a(t)}^{b(t)} \rho(x,t)f(x,t)dx + A\sigma(b(t),t,i) + A\sigma(a(t),t,-i)$$

που εκφράζει ότι ο ρυθμός μεταβολής ως προς t της ορμής του υλικού χωρίου $[a(t),b(t)]$ ισούται με την ολική δύναμη του πεδίου συν τις δυνάμεις επιφάνειας που ασκούνται στο χωρίο αυτό.

Μετασχηματίζουμε τώρα σε lagrang-ιανες μεταβλητές μέσω του τύπου Euler, ως:

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} \rho u dx = \frac{d}{dt}\int_a^b \Delta V J dh = \int_a^b \left(J\frac{\partial}{\partial t}(\Delta V) + \Delta V J_t \right) dh = \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial t}(\Delta V) + \Delta V u_x \right] J dh$$

$$= \int_{a(t)}^{b(t)} [\frac{D}{Dt}(\rho u) + \rho u u_x] dx$$

και η τελευταία ποσότητα γίνεται:

$$\frac{D}{Dt}(\rho u) = \rho \frac{Du}{Dt} + u\frac{D\rho}{Dt} = \rho \frac{Du}{Dt} - u\rho u_x$$

και τότε παίρνουμε την τελική σχέση:

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} \rho u dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \rho \frac{Du}{Dt} dx$$

και το *ισοζύγιο μάζας θα πάρει την μορφή:*

$$\boxed{i\int_{a(t)}^{b(t)} \left(\rho \frac{Du}{Dt} - \rho f \right) dx = \sigma(b(t),t,i) + \sigma(a(t),t,-i)}$$

$$\xrightarrow{\sigma(x,t,-i)=-\sigma(x,t,i)} \int_{a(t)}^{b(t)} \left(\rho \frac{Du}{Dt} - \rho f \right) dx = \sigma(b(t),t) + \sigma(a(t),t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \sigma_x(x,t)dx$$

Και επειδή το διάστημα $[a(t),b(t)]$ είναι αυθαίρετο η ποσότητα μέσα στο ολοκλήρωμα, γίνεται:

$$\boxed{\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f + \sigma_x}$$

η έκφραση της διατήρησης της ορμής σε μορφή Euler.

Θερμοδυναμική

Βάσει των όσων έχουμε πει, η κίνηση ενός μέσου χαρακτηρίζεται από εξισώσεις οι οποίες προέρχονται από *νόμους διατήρησης*, όπως αναλύσαμε παραπάνω, αλλά και από *καταστατικές εξισώσεις* που χαρακτηρίζουν τις ιδιότητες του μέσου που παίρνει μέρος στην κίνηση αυτή. Αυτές εκφράζονται συνήθως μέσω θερμοδυναμικών μεταβλητών, όπως πυκνότητα, ενέργεια, εντροπία, θερμοκρασία, κτλ.

Παράδειγμα καταστατικής αποτελεί η εξάρτηση της πίεσης από την πυκνότητα

$$p = F(\rho)$$

με $F'(\rho) > 0$, η οποία είναι γνωστή ως *βαροτροπική εξίσωση*. Βάσει αυτής μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση κίνησης

$$u_t + uu_x + \frac{1}{\rho} p_x = 0$$

με την μορφή $u_t + uu_x + \frac{F'(\rho)}{\rho}\rho_x = 0$. Οι δύο παραπάνω εξισώσεις αποτελούν ένα πλήρες σύστημα εξισώσεων με αγνώστους *ρ, u*.

Γενικά ένα πλήρες σύστημα εξισώσεων πεδίου, που περιγράφει μια γενική ροή, αποτελείται από εξισώσεις διατήρησης μάζας, ενέργειας, ορμής, καθώς και από καταστατικές εξισώσεις.

Δίνοντας ένα παράδειγμα, θεωρούμε ένα δοχείο με αέριο και P, Δ, Θ, η πίεση, η πυκνότητα και η θερμοκρασία του, αντίστοιχα. Θεωρούμε την εξίσωση

$$\frac{\mathrm{P}}{\Delta} = R\Theta \xrightarrow[\tau o\pi\iota\kappa\alpha]{\forall x,t} \frac{p}{\rho} = R\theta$$

με R *χαρακτηριστική αερίου.*

Θα διατυπώσουμε τώρα το 1^o αξίωμα θερμοδυναμικού νόμου για την διατήρηση ενάργειας, βάσει του οποίου, η ενέργεια διατηρείται, λαμβάνοντας υπόψη μας την θερμότητα. Γενικά περιγράφει το τι θα συμβεί αν προσθέσουμε ένα μικρό ποσό θερμότητας σε σώμα μοναδιαίας μάζας έτσι ώστε σε κάθε βήμα της διαδικασίας να υπάρχει ισορροπία.

Έτσι ένα μέρος της ενέργειας θα μετατραπεί σε έργο $pd(1/\rho)$, me *1/ρ , 'ειδικό όγκο',* και το υπόλοιπο θα καταναλωθεί για να αυξηθεί η εσωτερική ενέργεια *e* κατά *de.* Γράφουμε:

$$q = de + pd(1/\rho)$$

με *q* την προστιθέμενη θερμότητα. Αν *q=0* η κατάσταση ονομάζεται *αδιαβατική.*

Άλλες καταστατικές εξισώσεις, είναι:

- *Εξίσωση Abel:* $p\left(\frac{1}{\rho}-\alpha\right)=R\theta$, *με α σταθερά.*
- *Εξίσωση Van Der Waals:* $\left(p+\beta\rho^2\right)\left(\frac{1}{\rho}-\alpha\right)=R\theta$, *με α, β σταθερές.*
- Εξίσωση Tait: $\frac{p+B}{p}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\bar{\gamma}}$, όπου B, $\bar{\gamma}$ σταθερές.

Διατήρηση ενέργειας

Θα διατυπώσουμε τώρα την ΜΔΕ η οποία εκφράζει την διατήρησης ενέργειας σε ένα μονοδιάστατο υλικό χωρίο $[a(t),b(t)]$, διατομής *A*. Ορίζουμε:

- Κινητική ενέργεια: $A\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{1}{2}\rho u^2 dx$
- Εσωτερική ενέργεια: $A\int_{a(t)}^{b(t)}\rho e dx$

Πάνω στο χωρίο ασκούνται 2 ειδών δυνάμεις:

1. η δύναμη πεδίου *f(x,t)* που ασκείται σε κάθε διατομή του χωρίου και
2. η τάση *σ(x,t)* που ασκείται στα δύο άκρα.

Βάσει του νόμου διατήρησης, ο ρυθμός μεταβολής της συνολικής ενέργειας θα είναι ίσος με την συνολική ισχύ του έργου που παράγουν οι παραπάνω δυνάμεις, συν την συνολική παροχή θερμότητας που δίνεται μέσω του τύπου $A\phi(a(t),t)-A\phi(b(t),t)$, όπου *φ(x,t)* είναι η συνάρτηση ροής της θερμότητας. Προκύπτει έτσι:

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)}\left(\frac{1}{2}\rho u^2+\rho e\right)dx=\int_{a(t)}^{b(t)}\rho fudx-\sigma(a(t),t)u(a(t),t)+\sigma(b(t),t)u(b(t),t)+\phi(a(t),t)-\phi(b(t),t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)}\left(\frac{1}{2}\rho u^2+\rho e\right)dx=\int_{a(t)}^{b(t)}\left(\rho fu+(\sigma u)_x-\phi_x\right)dx}$$

Επειδή έχουμε υποθέσει ότι το χωρίο είναι αυθαίρετο, η ποσότητα μέσα στο ολοκλήρωμα θα πάρει την μορφή Euler ως:

$$\frac{\rho}{2}\frac{Du^2}{Dt}+\rho\frac{De}{Dt}=\rho fu+(\sigma u)_x-\phi_x$$

3.4 Η κυματική εξίσωση

Ο τύπος D'Alembert

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την κυματική εξίσωση και τις διάφορες μορφές λύσης της. Έστω έτσι η εξίσωση της μορφής

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad \textbf{(3.40)}$$

η οποία έχει γενική λύση που δίνεται από τον τύπο D'Alembert:

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct) \qquad \textbf{(3.41)}$$

όπου *f, g* αυθαίρετες συναρτήσεις C^2. Η παραπάνω μορφή λύσης αποτελεί επαλληλία κυμάτων που διαδίδονται το ένα δεξιά και το άλλο αριστερά με την ίδια ταχύτητα *c*. Έτσι δημιουργούμε το αρχικό πρόβλημα τιμών για την κυματική εξίσωση:

$$\left\{\begin{array}{l} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, x \in R^1 \\ u(x,0) = F(x), x \in R^1 \\ u_t(x,0) = G(x), x \in R^1 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.42)}$$

όπου οι *F, G* είναι δεδομένες συναρτήσεις.

Θα εφαρμόσουμε τώρα μια μέθοδο επίλυσης μέσω της οποίας θα βρούμε μια γενική λύση για το παραπάνω πρόβλημα αρχικών τιμών. Αρχικά, εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες για να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις *f και g* στην εξίσωση (3.41). Έτσι:

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = F(x) \qquad \textbf{(3.43)}$$

και

$$u_t(x,0) = cf'(x) - cg'(x) = G(x) \qquad \textbf{(3.44)}$$

Διαιρώντας την τελευταία με *c* και ολοκληρώνοντας ως προς *x* παίρνουμε:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{c}\int_0^x G(y)dy + A \qquad \textbf{(3.45)}$$

για *A* σταθερά ολοκλήρωσης.

Τότε αφαιρώντας κατά μέλη τις (δ) και (ε1) προκύπτει:

$$2g(x) = F(x) - \frac{1}{c}\int_0^x G(y)dy - A$$

$$\Rightarrow \boxed{g(x) = \frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x G(y)dy - \frac{A}{2}}$$

ενώ προσθέτοντας τες, παίρνουμε αντίστοιχα την:

$$2f(x) = F(x) + \frac{1}{c}\int_0^x G(y)dy + A$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x G(y)dy + \frac{A}{2}}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην (3.41), παίρνουμε:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}F(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^x G(y)dy + \frac{A}{2} + \frac{1}{2}F(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^x G(y)dy - \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\big(F(x+ct) + F(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(y)dy}$$

που αποτελεί και την γενική λύση για την συνάρτηση u.

Μπορούμε τώρα να μελετήσουμε το πώς συμπεριφέρεται η λύση μας για ένα δεδομένο σημείο (x_0, t_0). Από τον τύπο D' Alembert παίρνουμε:

$$u(x_0,t_0)=\frac{1}{2}\big(F(x_0-ct_0)+F(x_0+ct_0)\big)+\frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0}G(y)dy$$

και θεωρούμε το διάστημα $J=[x_0-ct_0, x_0+ct_0]$ το *διάστημα εξάρτησης της u στο δοσμένο αυτό σημείο* (x_0,t_0).

Παράδειγμα 1: Θεωρούμε την κυματική εξίσωση $u_{tt}=c^2u_{xx}$ και οι συνθήκες $\begin{Bmatrix} u(x,0)=e^x \\ u_t(x,0)=\sin x \end{Bmatrix}$. Για την επίλυση της κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών σε $\begin{Bmatrix} z=x-ct \\ w=x+ct \end{Bmatrix}$ και τότε $u(x,t)=\hat{u}(z,w)$ και από τον τύπο D'Alembert η εξίσωση θα πάρει την μορφή $u(x,t)=\frac{1}{2}\{f(x-ct)+f(x+ct)\}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds$, όπου $\begin{Bmatrix} f(x)=e^x \\ g(x)=\sin x \end{Bmatrix}$. Αντικαθιστώντας κατάλληλα θα πάρουμε:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left\{e^{x-ct}+e^{x+ct}\right\}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+xt}\sin(s)ds=\frac{1}{2}\left\{e^xe^{-ct}+e^xe^{ct}\right\}+\frac{1}{2c}\left[-\cos(s)\right]_{x-ct}^{x+ct}$$

$$=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2c}(-\cos(x+ct)+\cos(x-ct))$$

Εδώ θα κάνουμε χρήση των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

$$\begin{Bmatrix} \cos(x+ct)=\cos x\cos(ct)-\sin x\sin(ct) \\ \cos(x-ct)=\cos x\cos(ct)+\sin x\sin(ct) \end{Bmatrix}$$

και αντικαθιστώντας παραπάνω θα πάρουμε:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2c}\big(-\cos x\cos(ct)+\sin x\sin(ct)+\cos x\cos(ct)+\sin x\sin(ct)\big)$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2c}2\sin x\sin(ct)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2c}\sin x\sin(ct)}$$

Παράδειγμα 2:

Θεωρούμε την κυματική εξίσωση της μορφής

$$u_{tt}=c^2u_{xx} \qquad \textbf{(3.46)}.$$

Εισάγουμε τον μετασχηματισμό $\begin{Bmatrix} \xi=x-ct \\ n=x+ct \end{Bmatrix}$ και τότε η λύση της εξίσωσης παίρνει την μορφή $u(x,t)=u(\frac{\xi+n}{2},\frac{n-\xi}{2c})=\Phi(\xi,n)$.

Εισάγουμε τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial n}{\partial x}\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial n}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial n}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial n}\right)=\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial n}+\frac{\partial^2}{\partial n^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial n}{\partial t}\frac{\partial}{\partial n}=(-c)\frac{\partial}{\partial \xi}+(c)\frac{\partial}{\partial n}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\left[(-c)\frac{\partial}{\partial \xi}+(c)\frac{\partial}{\partial n}\right]\left[(-c)\frac{\partial}{\partial \xi}+(c)\frac{\partial}{\partial n}\right]=c^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}-2c^2\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial n}+c^2\frac{\partial^2}{\partial n^2}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (3.46) οπότε παίρνουμε:

$$c^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}-2c^2\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial n}+c^2\frac{\partial^2}{\partial n^2}=c^2\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial n}+\frac{\partial^2}{\partial n^2}\right]$$

$$\Rightarrow -4c^2\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial n}=0$$

$$\xrightarrow{c\neq 0}\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial n}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_{n\xi}=0}$$

Έτσι η εξίσωση (3.46) μέσω του παραπάνω μετασχηματισμού, μετασχηματίστηκε στην παραπάνω ΜΔΕ.

Παράδειγμα 3:

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\left\{\begin{array}{l} u_{tt}=u_{xx}, 0<x<\pi, t>0 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, t>0 \\ u(x,0)=0, 0<x<\pi \\ u_t(x,0)=4\sin x, 0<x<\pi \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.47)}.$$

Επιλύοντας το θα κάνουμε χρήση του τύπου D'Alembert και η γενική λύση θα είναι της μορφής

$$u(x,t)=f(x+t)+g(x-t) \qquad \textbf{(3.48)}$$

με αρχικές συνθήκες που να ικανοποιούν

$$\left\{\begin{array}{l} u(x,0)=f(x)+g(x)=0 \\ u_t(x,0)=f\,'(x)-g\,'(x)=4\sin x \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.49) \& (3.50)}$$

αντίστοιχα, ενώ οι συνοριακές να ικανοποιούν:

$$\left\{\begin{array}{l} u(0,t)=f(t)+g(-t)=0 \\ u(\pi,t)=f(\pi+t)+g(\pi-t) \end{array}\right\}$$

Ολοκληρώνοντας την (3.50) ως προς *t*, παίρνουμε:

$$f(x)-g(x)=\int_0^{\pi}4\sin x dx+A$$

$$\to f(x)-g(x)=4\left[-\cos x\right]_0^{\pi}+A \qquad \textbf{(3.51)}$$

$$\to f(x)-g(x)=4(1+1)+A$$

$$\to f(x)-g(x)=8+A$$

Προσθαφαιρώντας τις (3.49)και (3.51) παίρνουμε:

$$2f(x)=8+A\to \boxed{f(x)=4+\frac{A}{2}}$$

$$2g(x)=-8-A\to \boxed{g(x)=-4-\frac{A}{2}}$$

Τότε η γενική λύση (3.48) θα πάρει την μορφή:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}4\sin(y)dy=2\int_{x-t}^{x+t}\sin(y)dy=2\left[-\cos y\right]_{x-t}^{x+t}$$

$$\boxed{u(x,t)=2\left[-\cos(x+t)+\cos(x+t)\right]}$$

Παράδειγμα 4:

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\left\{\begin{array}{l} u_{tt}=u_{xx}, x\in R^1, t>0 \\ u(x,0)=\sin x, x\in R^1 \\ u_t(x,0)=1, x\in R^1 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.52)}$$

το οποίο λύνεται με την μέθοδο D'Alembert. Έτσι η γενική λύση θα έχει την μορφή:

$$u(x,t)=f(x+t)+g(x-t) \qquad \textbf{(3.53)}$$

με συνθήκες που να την επαληθεύουν δίνοντας:

$$\left\{\begin{array}{l} u(x,0)=f(x)+g(x)=\sin x \\ u_t(x,0)=f'(x)-g'(x)=1 \end{array}\right\} \textbf{ (3.54) \& (3.55),}$$

αντίστοιχα.

Ολοκληρώνουμε την (3.55) ως προς *t*, παίρνοντας:

$$u(x,0)=f(x)+g(x)=\int 1dx+A\to u(x,0)=x+A \qquad \textbf{(3.56)}$$

όπου *A* η σταθερά ολοκλήρωσης. Προσθαφαιρώντας τις (3.56) και (3.54), έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} 2f(x)=\sin x+x+A \\ 2g(x)=\sin x-x-A \end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{\sin x+x+A}{2} \\ g(x)=\dfrac{\sin x-x-A}{2} \end{array}\right\}$$

και η (3.48) γίνεται τελικά:

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}\left\{\sin(x+t)+\sin(x-t)\right\}+x, x\in R^1, t>0}$$

Παράδειγμα 5:

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\left\{\begin{array}{l} u_{tt}=c^2u_{xx}, 0<x<1, t>0 \\ u(x,0)=F(x), 0<x<1 \\ u_t(x,0)=G(x), 0<x<1 \\ u(0,t)=a(t), t>0 \\ u(1,t)=b(t), t>0 \end{array}\right\}. \qquad \textbf{(3.57)}$$

Θέλουμε να μετασχηματίσουμε το πρόβλημα σε ένα ισοδύναμο με ομογενείς συνοριακές συνθήκες.

Εισάγουμε τον μετασχηματισμό: $w(x,t) = u(x,t) - a(t) - [b(t) - a(t)]x$ και αντικαθιστώντας στην (3.57), γίνεται:

$$\begin{Bmatrix} w_{tt} = c^2 w_{xx} - \left[(b'(t) - a'(t))x + a'(t)\right] \\ w(x,0) = F(x) - \left[(b(0) - a(0))x + a(0)\right] \\ w_t(x,0) = G(x) - \left[\left(b'(0) - a'(0)\right)x + a'(0)\right] \\ w(0,t) = 0 \\ w(1,t) = 0 \end{Bmatrix}$$

το οποίο αντιστοιχεί σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα με το (3.57) αλλά με ομογενείς συνοριακές συνθήκες.

Σκέδαση και αντίστροφα προβλήματα

Θα κάνουμε τώρα μια αναφορά της μαθηματικής θεωρίας της διάδοσης κυμάτων. Δίνουμε αρχικά τον ορισμό του *προβλήματος σκέδασης:* Έχουμε ένα μέσο και τον σκεδαστή (αντικείμενο). Στέλνουμε σε αυτό ένα *προσπίπτων κύμα*, το όποιο αλληλεπιδρά με τον σκεδαστη και σαν αποτέλεσμα, παράγει δύο άλλα κύματα, το *ανακλώμενο* και το *διερχόμενο.* Το πρόβλημα σκέδασης χωρίζεται σε δύο είδη προβλημάτων:

1. Ευθύ πρόβλημα: Σε αυτό γίνεται ο προσδιορισμός των ιδιοτήτων του ανακλώμενου και του διερχόμενου κύματος. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι να γνωρίζουμε τις ιδιότητες του σκεδαστη και του προσπίπτοντος κύματος.
2. Αντίστροφο πρόβλημα: Εδώ προσδιορίζουμε τις ιδιότητες του σκεδαστη, γνωρίζοντας τις ιδιότητες των τριών κυμάτων (προσπίπτοντος, ανακλώμενου και διερχόμενου)

Θα μελετήσουμε τώρα ένα **αντίστροφο πρόβλημα για την κυματική εξίσωση:** Έστω μια ράβδος άπειρου μήκους $-\infty < x < \infty$,που αποτελείται από δύο ομογενή υλικά που χωρίζονται μεταξύ τους από μια επίπεδη διεπιφάνεια στο *x=0*. Στην περιοχή I, έχουμε τις ποσότητες ρ_1, y_1, c_1, όπου y_1 είναι το *μέτρο ακαμψίας,* ρ_1 η πυκνότητα και c_1 η ταχύτητα. Αντίστοιχα στην περιοχή II έχουμε αντίστοιχα τις ποσότητες: ρ_2, y_2, c_2. Θεωρούμε ότι οι ταχύτητες είναι ίσες και δίνονται από τον γενικό τύπο $c_1 = c_2 = c = \dfrac{y}{\rho}$. Διατυπώνοντας το πρόβλημα θα πούμε ότι, ο παρατηρητής που είναι στην θέση $x = -\infty$ στέλνει ένα κύμα (προσπίπτων) της μορφής $\exp(i(x - c_1 t))$. Πέφτοντας πάνω στην διεπιφάνεια, χωρίζεται σε ανακλώμενο και διερχόμενο. Απαραίτητη προϋπόθεση για να υπολογίσουμε τις ιδιότητες του υλικού στην περιοχή II, είναι να γνωρίζουμε τις αντίστοιχες ιδιότητες στην περιοχή I. Το **Σχήμα 3.10** δίνει την διατύπωση του παραπάνω αντίστροφου προβλήματος σκέδασης. Έχουμε την εξίσωση κύματος

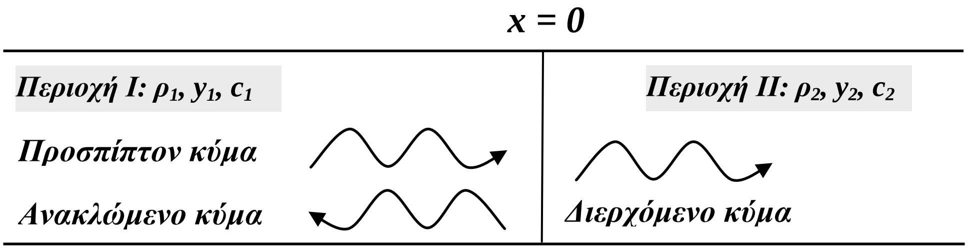
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

και αφού τα δύο υλικά είναι ομογενή θα ισχύει η συνθήκη:

$$u_1(0^-, t) = u_2(0^+, t), t \geq 0 .$$

Υποθέτοντας ακόμα ότι η *τάση* στην διεπιφάνεια είναι συνεχής, προκύπτει και η συνθήκη:

$$y_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(0^-, t) = y_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(0^+, t), t \geq 0 .$$



Σχήμα 3.10

Οι δύο παραπάνω συνθήκες ονομάζονται *συνθήκες διεπιφάνειας.* Θα πρέπει να βρούμε λύσεις u_1, u_2 οι οποίες θα ικανοποιούν τις συνθήκες διεπιφάνειας. Υποθέτουμε ότι η u_1 είναι επαλληλία του προσπίπτοντος και ανακλώμενου και η u_2 του διερχόμενου. Έτσι θα έχουν την μορφή:

$$\begin{Bmatrix} u_1 = \exp(i(x-c_1t)) + A\exp(i\alpha(x+c_1t)) \\ u_2 = B\exp(i\beta(x-c_2t)) \end{Bmatrix}$$

τα *A, B* είναι τα πλάτη και *α, β* οι κυματάριθμοι των κυμάτων. Για τις ταχύτητες θα ισχύει ότι και παραπάνω. Εφαρμόζοντας την πρώτη συνθήκη διεπιφάνειας για τις παραπάνω λύσεις, θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} &\exp(-c_1t) + A\exp(i\alpha c_1t) = B\exp(-i\beta c_2t) \\ &\Rightarrow -c_1t + Ai\alpha c_1t = -Bi\beta c_2t \\ &\Rightarrow c_1 - A\alpha c_1 i = B\beta c_2 i \\ &\Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = -1 \\ \beta = \dfrac{c_1}{c_2} \\ B = 1 + A \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας, θα πάρουμε τελικά:

$$\begin{Bmatrix} u_1 = \exp[i(x-c_1t)] + A\exp[-i(x+c_1t)] \\ u_2 = (1+A)\exp\left[i\dfrac{c_1}{c_2}(x-c_2t)\right] \end{Bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας και την δεύτερη συνθήκη διεπιφάνειας παίρνουμε:

$$y_1(1-A) = y_2(1+A)\frac{c_1}{c_2}$$

Ανάλογα με το ποιες ιδιότητες γνωρίζουμε, μπορούμε να υπολογίσουμε τις ιδιότητες του κάθε κύματος.

Σημειώνεται ότι το *ευθύ πρόβλημα* έχει μοναδική λύση.

Κεφάλαιο 4

4.1 Σφαιρικά Μέσα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε την μέθοδο σφαιρικών μέσων για την εύρεση της λύσης ενός προβλήματος αρχικών τιμών στον R^n. Υποθέτουμε λοιπόν ότι έχουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής:

$$\left\{\begin{array}{l} u(x,t)=0, x\in R^n, t>0 \\ u(x,0)=f(x), x\in R^n \\ u_t(x,0)=g(x), x\in R^n \end{array}\right\} \qquad \textbf{(4.0)}$$

όπου τα αρχικά δεδομένα *f*, *g* θεωρούνται ομαλά.

Σφαιρικό μέσο της *u* στο σημείο (x,t) ως προς την ακτίνα *r*, ορίζουμε να είναι το ολοκλήρωμα της μορφής:

$$M_u(x,r,t)=\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\oint\!\!\!\oint_{S(x,r)} u(y,t)ds(y) \qquad \textbf{(4.1)}$$

όπου ω_n είναι το εμβαδόν της μοναδιαίας σφαίρας και *r* η ακτίνα σφαίρας, κέντρου *x*. Εισάγοντας το τοπικό σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων με κέντρο *x*, έχουμε $y=x+r\overline{\xi}, |\,\overline{\xi}\,|=1$ και η (4.1) γράφεται:

$$M_u(x,r,t)=\frac{1}{\omega_n}\oint\!\!\!\oint_{S(x,1)} u(x+r\overline{\xi},t)ds(\overline{\xi}) \qquad \textbf{(4.2).}$$

Εάν η M_u είναι γνωστή, τότε:

$$M_u(x,0,t)=u(x,t) \qquad \textbf{(4.3)}$$

Αποδεικνύεται ότι η M_u ικανοποιεί την εξίσωση ***Euler-Poisson-Darboux***

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)M_u(x,r,t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}M_u(x,r,t) \qquad \textbf{(4.4)}$$

όπου *n* είναι η διάσταση του χώρου.

Οι αρχικές συνθήκες της (4.0), μέσω της (4.3) μετασχηματίζονται στις συνθήκες

$$\left\{\begin{array}{l} M_u(x,r,0)=M_f(x,r) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}M_u(x,r,0)=M_g(x,r) \end{array}\right\} \qquad \textbf{(4.5)}$$

Στην περίπτωση που η διάσταση του χώρου είναι 3, το πρόβλημα αρχικών τιμών (4.0) επιλύεται πιο εύκολα. Αντικαθιστώντας όπου *n* το 3 η (4.4) γίνεται:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)M_u(x,r,t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}M_u(x,r,t)$$

και πολλαπλασιάζοντας με *r*, οδηγούμαστε στην εξίσωση

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(rM_u\right)=c^2\left(r\frac{\partial^2}{\partial r^2}M_u+2\frac{\partial}{\partial r}M_u\right)=c^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(rM_u\right) \qquad \textbf{(4.6)}$$

και η συνάρτηση $rM_u(x,r,t)$ θα ικανοποιεί την μονοδιάστατη κυματική εξίσωση με αρχικές τιμές

$$\left\{ rM_u(x,r,0) = rM_f(x,r) \right\} \text{ και } \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(rM_u(x,r,0) \right) = rM_g(x,r) \right\} \quad \textbf{(4.7)}$$

Η εξίσωση (4.6) και οι συνθήκες (4.7), αποτελούν ένα πρόβλημα αρχικών τιμών του οποίου η λύση εκφράζεται από τον τύπο *D'Alembert*

$$rM_u(x,r,t) = \frac{1}{2}\left[(r+ct)M_f(x,r+ct) + (r-ct)M_f(x,r-ct) \right] + \frac{1}{2c}\int_{ct-r}^{ct+r} \rho M_g(x,\rho)d\rho$$

$$\Rightarrow M_u(x,r,t) = \frac{1}{2r}\left[(ct+r)M_f(x,ct+r) + (ct-r)M_f(x,ct-r) \right] + \frac{1}{2rc}\int_{ct-r}^{ct+r} \rho M_g(x,\rho)d\rho \quad \textbf{(4.8)}$$

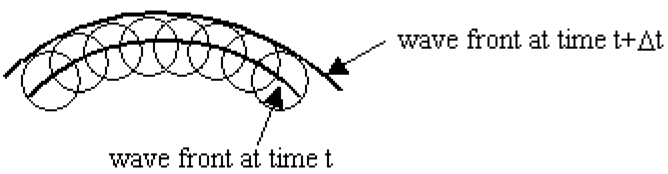
$$\xrightarrow{r\to 0} \boxed{u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\oiint_{S(x,ct)} g(y)dS(y) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\oiint_{S(x,ct)} f(y)dS(y) \right)}$$

Ο τύπος (4.8) είναι γνωστός ως ***τύπος Kirchhoff.*** Παρατηρούμε και ότι η λύση $u(x,t)$ εξαρτάται μόνο από τα δεδομένα στο σύνορο και όχι από τα δεδομένα στο εσωτερικό της σφαίρας $S(x,ct)$. Η ιδιότητα αυτή είναι χαρακτηριστική όχι μόνο του χώρου R^3, αλλά και κάθε χώρου R^{2n+1}, *n=1,2,…* ενώ δεν ισχύει για χώρους με άρτιο αριθμό διαστάσεων, καθώς και για την περίπτωση *n=1*. Το τελευταίο αυτό φαινόμενο αποτελεί την ***αρχή του Huygens.***

4.2 Αρχή του Huygens

Εισαγωγή

Το 1678 ο φυσικός Christian Huygens (1629-1695) έγραψε για την κυματική θεωρία του φωτός, επισημαίνοντας ότι η μορφή της διάδοσης ενός κύματος του φωτός, ανά πάσα στιγμή είναι σύμφωνη με την συμπεριφορά των σφαιρικών κυματίδιων που προέρχονται από κάθε σημείο του μετώπου ανά πάσα στιγμή (με την προϋπόθεση ότι τα κυματίδια έχουν την ίδια ταχύτητα με το συνολικό κύμα). Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της ιδέας, γνωστή σήμερα ως «Αρχή Huygens», παρουσιάζεται παρακάτω:



Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζεται η διάδοση του κύματος προς τα «Εμπρός», σε μια χρονική στιγμή *t* και η κίνηση του μετά από χρόνο *Δt*. Για παράδειγμα, αν ανάψουμε μια λάμπα για ένα δευτερόλεπτο, κάποιος που είδε το λαμπτήρα από ένα μίλι μακριά, θα το δει αναμμένο για ακριβώς ένα δευτερόλεπτο. Ακόμα, πετώντας μια πέτρα στην επιφάνεια μια ήρεμης λίμνης, θα παρατηρήσουμε ότι αρχίζει να δημιουργείται ένα «ίχνος» το οποίο σιγά εξασθενεί οδηγώντας πάλι την επιφάνεια στην πλήρη ηρεμία. Στην πραγματικότητα, όμως το ίχνος που παραμένει μετά την δημιουργία της διαταραχής φθίνει λόγω τριβών οι οποίες δεν λαμβάνονται υπόψη στην κυματική εξίσωση και συνεπώς δεν είναι ενσωματωμένες στο αντίστοιχο μαθηματικό πρότυπο. Αξίζει να σημειωθεί, ότι αν δεν υπήρχε η «Αρχή του Huygens», η ηχητική επικοινωνία μεταξύ των ανθρώπων θα ήταν αδύνατη.

Αφήνοντας κατά μέρος αυτούς τους συλλογισμούς θα επανεξετάζουμε την μαθηματική έννοια της «Αρχής Huygens ». Η συνήθης κυματική εξίσωση για ένα βαθμωτό πεδίο $(x_1, x_2, ..., x_n, t)$ για *n* διαστήματα και στη μία διάσταση, είναι της μορφής:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2{}^2} + ... + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_n{}^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Εάν θεωρήσουμε ένα συμμετρικό κύμα, θα έχουμε $\psi = \psi(r, t)$, όπου

$$r^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + ... + x_n{}^2$$

και παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{r} \text{ και } \frac{\partial^2 r}{\partial x_j{}^2} = \frac{r^2 - x_j{}^2}{r^3}$$

για κάθε j-δείκτη από 1 έως n. Επομένως,:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial r}{\partial x_j} \right)^2 = 1 \text{ και } \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial x_j{}^2} = \frac{n-1}{r}$$

Επιστρέφοντας στην βασική εξίσωση κύματος, και υποθέτοντας ότι η συνάρτηση ψ είναι αυστηρά μια συνάρτηση του r και t, έχουμε τις μερικές παραγώγους της μορφής:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_j} \text{ και } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j{}^2} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x_j{}^2} + \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial r}$$

και το δεύτερο στοιχείο στην τελευταία εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial r \partial x_j} + \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2 \partial x_j}$$

Δεδομένου ότι:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial r \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial r}{\partial r} \right) = 0$$

η προηγούμενη μερική παράγωγος, γίνεται:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial x_j} = \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$$

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη έκφραση για τη δεύτερη μερική παράγωγο της ψ ως προς x_j, θα έχουμε:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j{}^2} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x_j{}^2} + \left(\frac{\partial r}{\partial x_j} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$$

Αθροίζοντας όλα αυτά από *j=1 ;έως n* παίρνουμε:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j{}^2} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial x_j{}^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial r}{\partial x_j{}^2} \right)^2 = \left(\frac{n-1}{r} \right) \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$$

Λόγω συμμετρίας της κυματικής εξίσωσης σε *n- διαστάσεις,* γράφεται ως:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \left(\frac{n-1}{r} \right) \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Ορίζουμε τώρα μια καινούργια συνάρτηση της μορφής $\phi(r,t)=r^k\psi(r,t)$, όπου k μια σταθερά. Η μερική παράγωγος της ως προς r θα είναι:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=r^k\frac{\partial\psi}{\partial r}+kr^{k-1}\psi$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}=r^k\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+2kr^{k-1}\frac{\partial\psi}{\partial r}+k(k-1)r^{k-2}\psi$$

Αν θέσουμε $k=\dfrac{n-1}{2}$, και διαιρώντας με την ποσότητα r^k, έχουμε:

$$\frac{1}{r^{(n-1)/2}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\left(\frac{n-1}{r}\right)\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}\psi$$

$$\Rightarrow\frac{1}{r^{(n-1)/2}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}-\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

Πολλαπλασιάσουμε με το $r^k=r^{\frac{n-1}{2}}$ και η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}-\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

Εάν *n=1* (μία διάσταση), η παραπάνω εξίσωση θα πάρει την γνωστή μορφή:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

η οποία από τον τύπο *D'Alembert* θα έχει γενική λύση της μορφής:

$$\psi(r,t)=f(r-t)+g(r+t)$$

με *f, g* αυθαίρετες συναρτήσεις.

Εάν *n=3*, αναγόμαστε στις τρεις διαστάσεις και η γενική λύση της εξίσωσης για $\phi=r\psi$, θα γίνει:

$$\psi(r,t)=\frac{f(r-t)}{r}+\frac{g(r+t)}{r}$$

Το γεγονός ότι αυτή η λύση διαιρείται με *r* σημαίνει ότι το μέγεθος του κύματος τείνει να μειώνεται όσο αυξάνεται η r. Εστιάζοντας στην "καθυστερημένη" συνιστώσα του κύματος, $\dfrac{f(r-t)}{r}$, το γεγονός ότι η παράμετρος του χρόνου t εμφανίζεται μόνο στη διαφορά $r-t$, σημαίνει ότι το εξασθενημένο κύμα διαδίδεται στο χρόνο με ταχύτητα φάσης 1, διότι για κάθε σταθερή φάση β έχουμε $r-t=\beta$ και έτσι το μέγεθος $\dfrac{dr}{dt}$ γι 'αυτό το σημείο της φάσης, είναι 1. Επομένως, αν f έχει μόνο ένα παλμό, θα διαδώσει προς τα έξω αποτέλεσμα με ταχύτητα 1.

Αποδεικνύεται ότι η «Αρχή Huygens» ισχύει μόνο στην μία διάσταση και για *n = 3, 5, 7 ..*, ή σε οποιοδήποτε μονό αριθμό διάστασης του χώρου, και όχι για οποιονδήποτε ζυγό αριθμό διάστασης του χώρου. Για να καταλάβουμε γιατί, επιστρέφουμε στην εξίσωση της μορφής:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\left(\frac{n-1}{r}\right)\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

όπου θα εξετάσουμε μια λύση της μορφής $\psi(r,t)=f(r)g(t)$.

Αντικαθιστώντας την έκφραση στην παραπάνω εξίσωση, θα πάρουμε:

$$g\frac{d^2f}{dr^2}+\left(\frac{n-1}{r}\right)g\frac{df}{dr}=f\frac{d^2g}{dt^2}$$

και διαιρώντας με την ποσότητα *fg*, θα πάρουμε:

$$\frac{1}{f}\frac{d^2f}{dr^2}+\left(\frac{n-1}{r}\right)\frac{1}{f}\frac{df}{dr}=\frac{1}{gc^2}\frac{d^2g}{dt^2}$$

όπου το αριστερό μέλος είναι μόνο με την παράμετρο *r*, ενώ το δεξί με την *t*. Οπότε θεωρούμε κατάλληλη παράμετρο *κ*, για την οποία θα ισχύει:

$$\frac{1}{f}\frac{d^2f}{dr^2}+\left(\frac{n-1}{r}\right)\frac{1}{f}\frac{df}{dr}=\kappa \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{gc^2}\frac{d^2g}{dt^2}=\kappa$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης, μπορεί να ξαναγραφεί με τη μορφή:

$$r\frac{d^2f}{dr^2}+(n-1)\frac{df}{dr}+rf=0$$

Πολλαπλασιάζοντας την με την παράμετρο *r*, θα πάρει την μορφή της εξίσωσης Bessel.

Για την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης υποθέτουμε μια σειρά λύσεων της μορφής:

$$f(r)=c_0r^q+c_1r^{q+1}+c_2r^{q+2}+\dots$$

για κάποιον *q* ακέραιο αριθμό (που μπορεί να είναι θετικός, αρνητικός ή μηδέν), τέτοια ώστε το c_0 είναι μη-μηδενικό. Η πρώτη παράγωγος της έκφρασης, θα είναι:

$$\frac{df}{dr}=qc_0r^{q-1}+(q+1)c_1r^q+(q+2)c_2r^{q+1}+\dots$$

Και η δεύτερη:

$$\frac{d^2f}{dr^2}=q(q-1)c_0r^{q-2}+(q+1)qc_1r^{q-1}+(q+2)(q+1)c_2r^q+\dots$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις στην διαφορική εξίσωση και εξισώνοντας τις δυνάμεις του *r*, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}0&=c_0\left[q(q-1)+(n-1)q\right]r^{q-1}+c_1\left[(q+1)q+(n-1)(q+1)\right]r^q+\\&+\left[\{(q+2)(q+1)+(n-1)(q+2)\}c_2+c_0\right]r^{q+1}+\\&+\left[\{(q+3)(q+2)+(n-1)(q+3)\}c_3+c_1\right]r^{q+2}+\dots\end{aligned}$$

Ο συντελεστής κάθε δύναμης του r πρέπει να εξαφανιστεί, και δεδομένου ότι το c_0 είναι μη-μηδενικό, η έκφραση για τον πρώτο συντελεστή συνεπάγεται $q(q-2+n)=0$. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να έχουμε είτε *q = 0* ή *q = 2-n*. Αν *q = 0* τότε ο συντελεστής του r^q θα ισούται με $c_1(n-1)$, οπότε είτε *n = 1* ή $c_1=0$. Από την άλλη πλευρά, αν *q = 2-n*, τότε ο συντελεστής του r^q ισούται με $c_1(3-n)$, οπότε είτε *n = 3* ή πάλι $c_1=0$. Έχουμε ήδη δει ότι η αρχική διαφορική εξίσωση έχει μια ιδιαίτερα απλή αναλυτική λύση, όταν n (ο αριθμός των διαστάσεων) ισούται είτε με 1 είτε με 3, οπότε δεν χρειάζεται να το εξετάσουμε ξανά. Για όλες τις άλλες τιμή του *n*, θα πρέπει να έχουμε $c_1=0$.

Τώρα, εξετάζοντας τους συντελεστές του υψηλότερων δυνάμεων του *r*, θα δούμε ότι σε γενικές γραμμές ο συντελεστής του r^{q+m} είναι της μορφής:

$$\left[\{(q+m+1)(q+m)+(n-1)(q+m+1)\}c_{m+1}+c_{m-1}\right]$$

Για *q = 0*, και θέτοντας το γενικό συντελεστή στο μηδέν, λύνοντας για c_{m+1}, παίρνουμε:

$$c_{m+1} = -\frac{c_{m-1}}{(m+1)(m+n-1)}$$

για m = 0, 1, 2, ... Αφού το c_0 είναι ο πρώτος μη-μηδενικός συντελεστής, προκύπτει ότι *c-1* είναι μηδέν και, συνεπώς $c_1 = 0$. Επιπλέον, απλοποιώντας την παραπάνω έκφραση, βλέπουμε ότι όλοι οι c_j συντελεστές για περιττούς δείκτες *j*, πρέπει να χαθούν. Από την άλλη πλευρά, οι συντελεστές των ζυγών δεικτών, δίνονται από τις εκφράσεις:

$$c_2 = c_0\frac{-1}{2n}, c_4 = c_2\frac{-1}{4(n+2)}, c_6 = c_4\frac{-1}{6(n+4)}$$

κοκ.

Παρατηρούμε ότι αν *n=1,* οι παρονομαστές είναι $1\cdot 2, 3\cdot 4, 5\cdot 6, \ldots$ *κοκ.*, ο μη-μηδενικός συντελεστής της λύσης μπορεί να γραφτεί ως:

$$c_{2j} = c_0\frac{(-1)^j}{(2j)!}$$

δίνοντας την λύση της μορφής:

$$f(r) = c_0\left(1 - \frac{1}{2!}r^2 + \frac{1}{4!}r^4 - \ldots\right)$$

ή αλλιώς $\boxed{f(r) = c_0\cos(r)}$.

Ομοίως, εάν *n = 3* οι παρονομαστές θα είναι της μορφής $2\cdot 3, 4\cdot 5, 6\cdot 7, \ldots$ και ο μη-μηδενικός συντελεστής παίρνει την μορφή:

$$c_{2j} = c_0\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}$$

με λύση:

$$f(r) = \frac{c_0}{r}\left(r - \frac{1}{3!}r^3 + \frac{1}{5!}r^5 - \ldots\right)$$

ή αλλιώς $\boxed{f(r) = c_0\sin\frac{(r)}{r}}$.

Γενικά για αυθαίρετο θετικό ακέραιο *n*, ο συντελεστής c_{2j} είναι της μορφής:

$$c_{2j} = c_0\frac{(-1)^j}{(2)(4)(6)\ldots(2j)[(n)(n+2)\ldots(n+2(j-1))]} \quad \textbf{(1)}$$

Παρατηρούμε ότι για *n=1* ,οι παράγοντες στην αγκύλη είναι περιττοί ακέραιοι. Ομοίως, και για *n=3*. Για παράδειγμα, για *n=7* ο συντελεστής c_{12} είναι της μορφής:

$$c_{12} = c_0\frac{(-1)^6}{(2)(4)[(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)](15)(17)}$$

Εκμεταλλευόμενοι αυτό το γεγονός, μπορούμε να εκφράσουμε το γενικό συντελεστή (για αρκετά μεγάλο *j*) με περιττό *n> 3,* στη μορφή:

$$c_{2j} = \frac{c_0(n-1)!}{2^{(n-3)/2}\left(\frac{n-3}{2}\right)!}\frac{1}{(2j+3)(2j+5)\ldots(2j+n-2)}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}$$

Αντίθετα, εάν ο αριθμός των διαστάσεων του χώρου είναι ζυγός, μπορούμε να ξαναγράψουμε την (1), με τη μορφή:

$$c_{2j} = c_0 \frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)!}{2^{2j} j! \left(\frac{n}{2}-1+j\right)!}(-1)^j$$

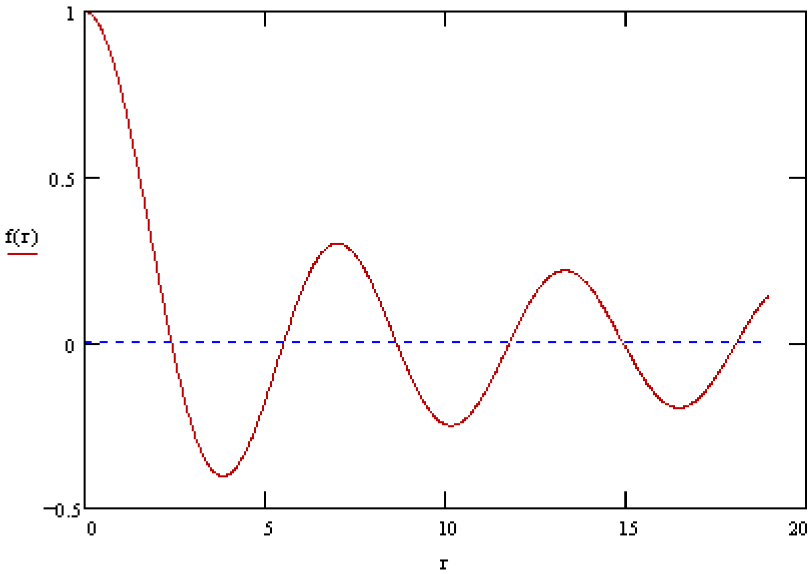
Για παράδειγμα, στην περίπτωση *n = 2* (δηλαδή, δύο χωρικές διαστάσεις) έχουμε τους συντελεστές:

$$c_{2j} = c_0 \frac{(-1/4)^j}{(j!)^2}$$

Αυτό δίνει τη συνάρτηση:

$$f(r) = c_0\left[1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{r^2}{4}\right) + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{r^2}{4}\right)^2 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{r^2}{4}\right)^3 + \ldots\right]$$

Αυτή είναι η συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης και η οποία μπορεί να συμβολιστεί και με J_0. Ένα σχήμα της συνάρτησης αυτής φαίνεται παρακάτω:



Παρατηρούμε ότι για θετικά *r*, η συνάρτηση Bessel $J_0(r)$ μπορεί να εκφραστεί ως:

$$J_0(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(\cosh(\theta)r)d\theta$$

Πολλαπλασιάζοντας με την χρονική λύση $g(t) = \sin(ct)$, παίρνουμε:

$$\psi(r,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [\cos(\cosh(\theta)r - ct) - \cos(\cosh(\theta)r + ct)]d\theta$$

Ως εκ τούτου, αντί η λύση να είναι καθαρά μια συνάρτηση του $r \pm ct$, όπως στην περίπτωση των περιττών διαστάσεων, παρατηρούμε ότι αποτελεί λύση των συναρτήσεων της μορφής $\cosh(\theta)r \pm ct$. Κάθε τιμή της θ αντιστοιχεί στην ταχύτητα διάδοσης $\frac{c}{\cosh(\theta)}$, οπότε οι ταχύτητες που προκύπτουν από το *c* τείνουν στο μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση κύματος σε καμία περίπτωση δεν σχετίζεται μόνο με τη λειτουργία κυμάτων στον «κώνο του φωτός», αλλά με τη συνάρτηση κύματος σε κάθε περίπτωση μέσα στον κώνο αυτό.

Παρατηρήσεις πάνω στην αρχή του Huygens:

1: Η ταχύτητα c με την οποία διαδίδεται μια διαταραχή μπορεί να μεταβάλλεται με τη θέση στο χώρο , ακόμα και με το χρόνο. Δηλαδή η αρχή αυτή εφαρμόζεται τόσο σε ομογενή μέσα (c: σταθερή) όσο και σε ανομοιογενή μέσα, είτε αυτά είναι χρονικά μεταβαλλόμενα (c = c (x ,t) = c (x, y , z ,t)), είτε χρονικά αμετάβλητα
(c = c (x) = c (x, y , z)).

2: Η αρχή του Huygens, όπως διατυπώθηκε ανωτέρω, εφαρμόζεται στην περίπτωση κυματικής διάδοσης στο πεδίο του χρόνου. Η αρχή εξακολουθεί να ισχύει και στο πεδίο συχνοτήτων (περίπτωση περιοδικής κυματικής κίνησης), υπό την προϋπόθεση ότι θα αντικαταστήσουμε το ***μέτωπο κύματος*** (έννοια που έχει σαφές νόημα στο πεδίο του χρόνου) (πρόβλημα αρχικών τιμών) με την ***ισοφασική επιφάνεια*** (έννοια που έχει σαφές νόημα στο πεδίο συχνοτήτων). Βλ. σχετικά και εδάφιο 2.1.3. Η επέκταση της αρχής στο πεδίο συχνοτήτων (περιοδικά κύματα) έγινε από τον Fresnel το 1818, ο οποίος, για την εργασία του αυτή βραβεύθηκε από τη Γαλλική Ακαδημία Επιστημών. Και ο Fresnel (όπως και ο Huygens) αναφερόταν στη μελέτη της διάδοσης του φωτός στα πλαίσια της υπόθεσης του αιθέρα. Λόγω της συμβολής του Fresnel, η αρχή ονομάζεται συχνά και ***αρχή των Huygens-Fresnel***.

3: Οι μικρές σφαίρες που θεωρούμε (σχεδιάζουμε) με κέντρα πάνω στη στιγμιαία θέση του μετώπου κύματος ονομάζονται ***κυματίδια*** (wavelets). Κάθε κυματίδιο είναι ένα (υποθετικό) δευτερογενές κύμα, το οποίο υποτίθεται ότι "εκπέμπεται" από το αντίστοιχο σημείο του μετώπου κύματος. Με βάση αυτή τη θεώρηση, η αρχή του Huygens μπορεί να διατυπωθεί συνοπτικά ως εξής:

«Η κυματική διαταραχή διαδίδεται στο χώρο ως εάν κάθε σημείο του (στιγμιαίου) μετώπου κύματος ήταν μια (υποθετική) δευτερογενής πηγή κύματος. Το κάθε κυματίδιο διαδίδεται με την τοπική ταχύτητα διάδοσης.»

4.3 Αρχή του Duhamel

Το μη ομογενές πρόβλημα και η αρχή του Duhamel

Η αρχή του Duhamel δίνει μια μέθοδο επίλυσης του μη ομογενούς προβλήματος, αντίστοιχη με την μέθοδο Lagrange για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Έστω λοιπόν το μη ομογενές πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\left\{\begin{array}{l} u(x,t) = F(x,t), x \in R^n, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), x \in R^n \\ u_t(x,0) = g(x), x \in R^n \end{array}\right\} \qquad \textbf{(4.9)}$$

Όπως έχουμε αναφέρει η επίλυση του επιταχύνεται με την μέθοδο των σφαιρικών μέσων. Εάν $u_1(x,t)$ είναι η λύση αυτού του προβλήματος και θέσουμε

$w(x,t) = u(x,t) - u_1(x,t)$, τότε η $w(x,t)$ ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής:

$$\left\{\begin{array}{l} w(x,t) = F(x,t), x \in R^n, t > 0 \\ w(x,0) = 0, x \in R^n \\ w_t(x,0) = 0, x \in R^n \end{array}\right\} \qquad \textbf{(4.10)}$$

, δηλαδή μετασχηματίστηκε σε ένα πρόβλημα με ομογενείς αρχικές συνθήκες. Σύμφωνα με την αρχή του Duhamel αναζητούμε τη λύση της εξίσωσης του (4.10) σαν μια συνεχή επαλληλία λύσεων ενός ειδικού παραμετρικοποιημένου προβλήματος με μια συνεχή παράμετρο *τα* που μεταβάλλεται στο διάστημα [0,t]. Έστω ότι η λύση του (4.10) είναι της μορφής $w(x,t)=\int_0^t v(x,t,\tau)d\tau$, όπου $v(x,t,\tau)$, για κάθε $\tau\geq 0$ είναι η λύση του ομογενούς προβλήματος

$$\left\{\begin{array}{l} v(x,t,\tau)=0, x\in R^n, t\geq\tau \\ v(x,\tau,\tau)=0, x\in R^n \\ v_t(x,\tau,\tau)=F(x,\tau), x\in R^n \end{array}\right\} \qquad \textbf{(4.11)}$$

οι οποίες περιγράφουν μια οικογένεια προβλημάτων αρχικών τιμών ως προς την παράμετρο *τ.* Τώρα επιλύουμε το πρόβλημα (4.11) με αρχικές συνθήκες που να αναφέρονται στην αρχή του χρόνου *t=0* και όχι τη χρονική στιγμή *t=τ,* κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού μετατόπισης $z(x,t,\tau)=v(x,t+\tau,\tau)$, το πρόβλημα αποκτά την μορφή:

$$\left\{\begin{array}{l} z(x,t,\tau)=0, x\in R^n, t>0 \\ z(x,,0,\tau)=0, x\in R^n \\ z_t(x,0,\tau)=F(x,\tau), x\in R^n \end{array}\right\} \qquad \textbf{(4.12)}$$

Η λύση του προβλήματος αυτού δίνεται από τον τύπο Kirchhoff, ως

$$z(x,t,\tau)=\frac{1}{4\pi c^2 t}\oiint_{S(x,ct)} F(y,\tau)dS(y)$$

και έτσι η λύση όλου του (4.10) δίνεται από την σχέση

$$\boxed{w(x,t)=\int_0^t z(x,t-\tau,\tau)d\tau=\frac{1}{4\pi c^2}\int_0^t\frac{1}{t-\tau}\oiint_{S(x,c(t-\tau))} F(y,\tau)dS(y)d\tau}$$

μέσω της οποίας επιλύουμε το αρχικό μη ομογενές πρόβλημα (4.9).

Συνοψίζοντας τα βήματα που ακολουθήσαμε για την χρήση της μεθόδου Duhamel, παρατηρούμε ότι:

- Κάναμε αντικατάσταση του (ΠΑΤ) τη στιγμή *t=0* με την μονοπαραμετρική οικογένεια προβλημάτων (ΠΑΤ3), όπου οι αρχικές συνθήκες περιγράφονται την στιγμή *t=τ.*
- Η λύση του αρχικού προβλήματος δίνεται από το συνεχές ολοκλήρωμα των λύσεων των προβλημάτων της οικογένειας, που αντιστοιχούν στις τιμές της παραμέτρου $\tau\in[0,t]$.
- Το βασικό σημείο της μεθόδου είναι ότι το αρχικό πρόβλημα (ΠΑΤ) είναι μη ομογενές χωρίς αρχικά δεδομένα, ενώ τα υπόλοιπα είναι ομογενή (δεν περιέχουν πηγές), αλλά έχουν μη μηδενικές αρχικές ταχύτητες.
- Με λίγα λόγια, η αρχή του Duhamel αντικαθιστά την επίδραση των πηγών με αρχικές ταχύτητες που δρουν κάθε χρονική στιγμή. Αυτή η συνεχής εμφάνιση των αρχικών ταχυτήτων αποτυγχάνεται μέσω της οικογένειας προβλημάτων (ΠΑΤ2) όπου η παράμετρος *τα* καθορίζει τη χρονική στιγμή κατά την οποία το αντίστοιχο πρόβλημα θεωρεί σαν αρχική. Για τον λόγο αυτό το πεδίο εξάρτησης του (x,t) δεν είναι η σφαίρα $\{y:|y-x|\leq ct\}$, αλλά ο κώνος $\bigcup_{0\leq s<t}\{y:|y-x|\leq c(t-s)\}$.

- Για κάποιο σταθερό σημείο z χώρου, η επίδραση των πηγών στη λύση u στο σημείο (x,t) εξαρτάται από την δραστηριότητα της πηγής στη θέση z κατά το χρονικό διάστημα $[0,\tau]$. Το πώς συμπεριφέρεται η πηγή στο σημείο z μετά το χρόνο τ δεν επηρεάζει την λύση στο (x,t), γιατί η πληροφορία από το z δεν προλαβαίνει να φτάσει στο x σε χρόνο μικρότερο από $(t\text{-}\tau)$. Η συμπεριφορά αυτή αποτελεί και το βασικό χαρακτηριστικό που βρίσκεται πίσω από την αρχή Duhamel.

Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία, αρχικά αναφερθήκαμε στην έννοια των μερικών διαφορικών εξισώσεων, λύνοντας παράλληλα και διάφορα προβλήματα πάνω σε αυτές. Κάναμε λόγο για τις εξισώσεις διάχυσης και ορίσαμε τους νόμους διατήρησης σε μία και σε πολλές διαστάσεις. Ακόμα, μιλήσαμε για την μέθοδο Fourier, δίνοντας παράλληλα και κάποια παραδείγματα..

Αναλύσαμε, επίσης τις έννοιες προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών, και μελετήσαμε προβλήματα Sturm-Liouville και συναρτήσεις Green. Τέλος, αναφερθήκαμε στην έννοια των κατανομών και στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων μέσω αυτών.

Κάναμε, ακόμα αναφορά και σε κυματικά φαινόμενα, δίνοντας τους απαραίτητους ορισμούς και αναλύοντας κάποια προβλήματα. Δώσαμε τον ορισμό της κυματικής εξίσωσης και εισάγαμε τον ορισμό του τύπου D’Alembert, καθώς και εφαρμογές πάνω σε αυτόν.

Τελειώνοντας, κάναμε μια μικρή αναφορά στα σφαιρικά μέσα και στις αρχές του Duhamel και του Huygens.

Από την ανάλυση όλων αυτών προέκυψαν αρκετά ενδιαφέροντα συμπεράσματα. Ας καταγράψουμε, λοιπόν, συνοπτικά τα βασικά θέματα με τα οποία ασχοληθήκαμε, επισημαίνοντας και τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε σε κάθε περίπτωση:

- Στην απλούστερη του μορφή ένα Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ) ορίζεται από μια συνήθη διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

μαζί με μια συνθήκη της μορφής $y(t_0) = y_0$, η οποία ονομάζεται αρχική συνθήκη.

- Ένα Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (Π.Σ.Τ) ενός συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων, είναι εκείνο για το οποίο η λύση προσδιορίζεται σε περισσότερα από ένα σημεία του πεδίου ορισμού μιας χωρικής ανεξάρτητης μεταβλητής $x \in R$, σε αντίθεση με ένα Π.Α.Τ το οποίο ορίζεται αρχικά σε ένα σημείο του χώρου.
- Η λύση ενός Π.Α.Τ μπορεί να βρεθεί από τη γενική λύση, αν ζητήσουμε να ικανοποιεί η γενική λύση τις αρχικές συνθήκες. Τονίζουμε ότι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης πρέπει να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες και όχι η λύση της αντίστοιχης ομογενούς. Στην περίπτωση βέβαια που η δεδομένη διαφορική εξίσωση είναι ομογενής, η γενική λύση και η λύση της ομογενούς ταυτίζονται.
- Για να λύσουμε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών βρίσκουμε πρώτα την γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης και στη συνέχεια, απαιτούμε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες. Η γνώση επίλυσης Π.Σ.Τ είναι σημαντική και απαραίτητη για την επίλυση πλήθους προβλημάτων της Φυσικής και της Μηχανικής.
- Στα Μαθηματικά και στις εφαρμογές αυτών, η κλασική εξίσωση Sturm-Liouville, που εισήχθη από τους μαθηματικούς Jacques Charles Francois Sturm (1803-1855) και Joseph Liouville (1809-1882), είναι μια πολύ χρήσιμη γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης της μορφής:☐

$$Ly=-\frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy}{dx}]q(x)y=\lambda\omega\left(x\right)y$$

όπου y είναι μια συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x και το L καλείται τελεστής Sturm-Liouville. Οι *p(x)>0, q(x), ω(x)>0* είναι συνεχείς στο [a,b], ενώ η συνάρτηση ω(x) καλείται συνάρτηση βάρους ή συνάρτηση πυκνότητας..

- Σε ένα ομαλό Π.Σ.Τ **Sturm-Liouville** οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και απλές, δηλαδή σε κάθε ιδιοτιμή δεν αντιστοιχούν περισσότερες της μίας ιδιοσυναρτήσεις.

- Η **συνάρτηση Green** ικανοποιεί συγκεκριμένες συνθήκες ανάλογα με το είδος προβλήματος αρχικής και συνοριακής τιμής, οι οποίες μας βοηθούν για τον προσδιορισμό της και για την επίλυση των αντίστοιχων προβλημάτων.
- Οι **διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους** χρησιμοποιούνται στην μαθηματική διατύπωση και στη λύση προβλημάτων που περιέχουν συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Τέτοια προβλήματα είναι: η μετάδοση του ήχου ή της θερμότητας, οι εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού, η ελαστικότητα και η ροή ρευστών.
- Μια μεγάλη πλειοψηφία φυσικών προβλημάτων μπορούν, άλλοτε με ακρίβεια και άλλοτε προσεγγιστικά, να περιγραφούν από την κυματική εξίσωση, την εξίσωση Laplace ή την εξίσωση της θερμότητας.
- Η **εξίσωση της θερμότητας** χρησιμοποιείται για τον καθορισμό του τρόπου μεταβολής της θερμοκρασίας u συναρτήσει του χρόνου. Για παράδειγμα, μπορεί να περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η θερμοκρασία συναρτήσει του χρόνου κατά μήκος μιας μεταλλικής ράβδου.
- Εάν η ροή της θερμότητας δεν εξαρτάται από το χρόνο, τότε καλείται ροή θερμότητας σταθερής κατάστασης. Εάν $u_t=0$, η εξίσωση της θερμότητας ανάγεται στην **εξίσωση του Laplace** $\nabla^2 u = 0$.Η εξίσωση της θερμότητας εξάγεται μέσω των σχέσεων που βασίζονται στο **νόμο του Fourier** και τη **διατήρηση της ενέργειας.**
- Υπάρχουν διαφορικές εξισώσεις, που ικανοποιούνται μόνο από γενικευμένες συναρτήσεις χωρίς να έχουν καμία κλασική λύση. Οι πιο κοινές και πιο ενδιαφέρουσες από αυτές τις διαφορικές εξισώσεις είναι του τύπου:

$$Lu = \delta(x - \xi)$$

από τις οποίες προέρχονται οι συναρτήσεις Green.

- Η **αρχή του Hyugens** αναφέρεται στην κυματική θεωρία του φωτός, βάσει της οποίας καθημερινά παραδείγματα (ηχητική επικοινωνία ανθρώπων) θα ήταν αδύνατη. Ακόμα, αυτή η άποψη της διάδοσης κυμάτων ,μας βοηθάει να καταλάβουμε καλύτερα ποικίλα φαινόμενα κυμάτων, όπως η διάθλαση.
- Η αρχή του Duhamel δίνει μια μέθοδο επίλυσης του μη ομογενούς προβλήματος, αντίστοιχη με την μέθοδο Lagrange για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Παράρτημα

Α. Λαπλασιανή σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Για την Λαπλασιανη έχουμε: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, όπου $u = u(x, y, z)$ και σε κυλινδρικές συντεταγμένες θα ισχύει:

$$\begin{array}{lcl} x = r\cos\theta & & r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = r\sin\theta & \text{οι οποίες δίνουν:} & \theta = \arctan(y/x) \\ z = z & & z = z \end{array}$$

Οι μερικές παραγωγούς πρώτης τάξης, είναι:

$$\frac{\partial}{\partial x} = (\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r} + (-\frac{\sin\theta}{r})\frac{\partial}{\partial \theta} + 0\frac{\partial}{\partial z} = (\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r} + (-\frac{\sin\theta}{r})\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = (\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r} + (\frac{\cos\theta}{r})\frac{\partial}{\partial \theta} + 0\frac{\partial}{\partial z} = (\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r} + (\frac{\cos\theta}{r})\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0\frac{\partial}{\partial r} + 0\frac{\partial}{\partial \theta} + 1\frac{\partial}{\partial z}$$

και οι μερικές παραγωγούς δεύτερης τάξης, είναι:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} = \left[(\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r} - (\frac{\sin\theta}{r})\frac{\partial}{\partial \theta}\right]\left[(\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r} - (\frac{\sin\theta}{r})\frac{\partial}{\partial \theta}\right]$$

$$= (\cos^2\theta)\frac{\partial^2}{\partial r^2} - (\frac{\cos\theta\sin\theta}{r})\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} - (\frac{\cos\theta\sin\theta}{r})\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r} + (\frac{\sin\theta}{r^2})\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$= (\cos^2\theta)\frac{\partial^2}{\partial r^2} - (2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r})\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(\frac{\sin\theta}{r^2})\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω ποσότητες, θα έχουμε:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\frac{\partial^2}{\partial r^2}+(\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{r^2})\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$=u_{rr}+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=u_{rr}+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}}$$

Β. Λαπλασιανή σε σφαιρικές συντεταγμένες

Για την Λαπλασιανη έχουμε: $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$, όπου $u=u(x,y,z)$ και σε σφαιρικές συντεταγμένες, έχουμε:

$$\begin{aligned} x&=r\sin\theta\cos\phi\\ y&=r\sin\theta\sin\phi\\ z&=r\cos\theta \end{aligned}\quad \text{, οι οποίες δίνουν:}\quad \begin{aligned} r&=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ \theta&=\arctan(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z})\\ \phi&=\arctan(\frac{y}{x}) \end{aligned}$$

Οι μερικές παραγωγούς πρώτης τάξης, είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}&=(\sin\theta\cos\phi)\frac{\partial}{\partial r}+(\frac{\cos\theta\cos\phi}{r})\frac{\partial}{\partial\theta}+(-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta})\frac{\partial}{\partial\phi}\\ \frac{\partial}{\partial y}&=(\sin\theta\sin\phi)\frac{\partial}{\partial r}+(\frac{\cos\theta\sin\phi}{r})\frac{\partial}{\partial\theta}+(\frac{\cos\phi}{r\sin\theta})\frac{\partial}{\partial\phi}\\ \frac{\partial}{\partial z}&=(\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}+(-\frac{\sin\theta}{r})\frac{\partial}{\partial\theta}+0\frac{\partial}{\partial\phi} \end{aligned}$$

και οι μερικές παραγωγούς δεύτερης τάξης, είναι:

- $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}=$$

$$=\left[(\sin\theta\cos\phi)\frac{\partial}{\partial r}+(\frac{\cos\theta\cos\phi}{r})\frac{\partial}{\partial\theta}-(\frac{\sin\phi}{r\sin\theta})\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\left[(\sin\theta\cos\phi)\frac{\partial}{\partial r}+(\frac{\cos\theta\cos\phi}{r})\frac{\partial}{\partial\theta}-(\frac{\sin\phi}{r\sin\theta})\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

$$=(\sin^2\theta\cos^2\phi)\frac{\partial^2}{\partial r^2}+(\frac{\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi}{r})\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}-(\frac{\sin\theta\cos\phi\sin\phi}{r\sin\theta})\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi}$$

$$+(\frac{\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi}{r})\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}+(\frac{\cos^2\theta\cos^2\phi}{r^2})\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-(\frac{\cos\theta\cos\phi\sin\phi}{r^2\sin\theta})\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi}$$

$$-(\frac{\sin\theta\cos\phi\sin\phi}{r\sin\theta})\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial r}-(\frac{\cos\theta\cos\phi\sin\phi}{r^2\sin\theta})\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta}+(\frac{\sin^2\phi}{r^2\sin^2\theta})\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$=(\sin^2\theta\cos^2\phi)\frac{\partial^2}{\partial r^2}+(2\frac{\cos\theta\sin\theta\cos^2\phi}{r})\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}-(2\frac{\sin\phi\sin\theta\cos\phi}{r\sin\theta})\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi}$$

$$+(\frac{\cos^2\theta\cos^2\phi}{r^2})\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-(2\frac{\sin\phi\cos\theta\cos\phi}{r^2\sin\theta})\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta}+(\frac{\sin^2\phi}{r^2\sin^2\theta})\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

- $$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\left[(\sin\theta\sin\phi)\frac{\partial}{\partial r}+(\frac{\cos\theta\sin\phi}{r})\frac{\partial}{\partial\theta}+(\frac{\cos\phi}{r\sin\theta})\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\left[(\sin\theta\sin\phi)\frac{\partial}{\partial r}+(\frac{\cos\theta\sin\phi}{r})\frac{\partial}{\partial\theta}+(\frac{\cos\phi}{r\sin\theta})\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

$$=(\sin^2\theta\sin^2\phi)\frac{\partial^2}{\partial r^2}+(\frac{\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi}{r})\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+(\frac{\sin\theta\cos\phi\sin\phi}{r\sin\theta})\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi}$$

$$+(\frac{\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi}{r})\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}+(\frac{\cos^2\theta\sin^2\phi}{r^2})\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+(\frac{\cos\theta\cos\phi\sin\phi}{r^2\sin\theta})\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi}$$

$$+(\frac{\sin\theta\cos\phi\sin\phi}{r\sin\theta})\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial r}+(\frac{\cos\theta\cos\phi\sin\phi}{r^2\sin\theta})\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta}+(\frac{\cos^2\phi}{r^2\sin^2\theta})\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

- $$\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\left[(\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}-(\frac{\sin\theta}{r})\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\left[(\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}-(\frac{\sin\theta}{r})\frac{\partial}{\partial\theta}\right]=$$

$$=(\cos^2\theta)\frac{\partial^2}{\partial r^2}-(\frac{\sin\theta\cos\theta}{r})\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}-(\frac{\sin\theta\cos\theta}{r})\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}+(\frac{\sin^2\theta}{r^2})\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}=$$

$$=(\cos^2\theta)\frac{\partial^2}{\partial r^2}-2(\frac{\sin\theta\cos\theta}{r})\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+(\frac{\sin^2\theta}{r^2})\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

Προσθέτοντας τις ποσότητες μεταξύ τους καταλήγουμε στον τύπο:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\left(\sin^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\theta\sin^2\phi+\cos^2\theta\right)\frac{\partial^2}{\partial r^2}+$$

$$+\left(\frac{\cos^2\theta\cos^2\phi+\cos^2\theta\sin^2\phi+\sin^2\theta}{r^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\left(\frac{\sin^2\phi\cos^2\phi}{r^2\sin^2\theta}\right)\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+$$

$$+\left(\frac{2\cos\theta\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi-2\sin\theta\cos\theta}{r}\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}=$$

$$=\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}=$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$\Rightarrow\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}}$$

Βιβλιογραφία

1. J. David Logan "Εφαρμοσμένα Μαθηματικά", Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
2. Στέφανος Τραχανάς "Μερικές διαφορικές Εξισώσεις", Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
3. http://www.mathpages.com/home/kmath614/kmath614.htm
4. http://www.mathpages.com/home/kmath242/kmath242.htm
5. Γ. Δάσιος & Κ. Κυριάκη "Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις", Εκδόσεις Γ. Δάσιος