Ζαφείρης Γρηγοριάδης

Κβαντικός Λογισμός

Πτυχιακή Εργασία

Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών
Σάμος 27 Μαΐου 2015

Εισηγητής: Φελουζής Ευάγγελος

Επιτροπή

Μιχαήλ Ανούσης

Παναγιώτης Νάστου

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Φελουζή Ευάγγελο για τη συνεργασία του καθ'ολη τη διάρκεια της παρούσας διπλωματικής εργασίας.
Ευχαριστώ επίσης τους κ.κ. Μιχαήλ Ανούση και Παναγιώτη Νάστου οι οποίοι είχαν την καλή διάθεση να συμμετέχουν στην εξεταστική επιτροπή.
Ευχαριστώ, επίσης, θερμά την Σταματία Τσομπανίδη της οποίας η βοήθεια και η συμπαράσταση ήταν χρήσιμες και πολύτιμες.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Ας θεωρήσουμε την παρακάτω έκφραση:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Καθώς x τείνει στο x_0, το όριο, εάν υπάρχει, δίνει τον γνώστο ορισμό της παραγώγου $\frac{df}{dx}$ της συνάρτησης $f(x)$ στο $x = x_0$. Όμως, εάν πάρουμε $x = qx_0$ ή $x = x_0 + h$, όπου q είναι ένας σταθερός αριθμός διάφορος του 1, και h ένας σταθερός αριθμός διάφορος του 0, και δεν παίρνουμε το όριο, εισερχόμαστε στον συναρπαστικό κόσμο του κβαντικού λογισμού. Οι αντίστοιχες εκφράσεις είναι οι ορισμοί της q-παραγώγου και της h-παραγώγου της $f(x)$. Ξεκινώντας με αυτούς τους δύο ορισμούς, αναπτύσουμε σε αυτή την εργασία δύο είδη κβαντικού λογισμού, τον q-λογισμό και τον h-λογισμό.
Κατά τη διάρκεια της ανάπτυξης του κβαντικού λογισμού σύμφωνα με τις μεθόδους του συνήθη λογισμού, ανακαλύπτουμε πολλούς σημαντικούς συμβολισμούς και πολλά σημαντικά αποτελέσματα στη συνδυαστική, στη θεωρία αριθμών και σε άλλα πεδία των μαθηματικών.
Για παράδειγμα, η q-παράγωγος του x^n είναι $[n]x^{n-1}$, όπου

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

είναι το q-ανάλογο του n (με την έννοια ότι το n είναι το όριο του $[n]$ καθώς $q \to 1$). Στη συνέχεια, στην αναζήτηση του q-αναλόγου του διωνυμικού, το οποίο είναι μία συνάρτηση, $(x - a)_q^n$ η οποία «συμπεριφέρεται» σε σχέση με την q-παράγωγο με τον ίδιο τρόπο όπως η $(x-a)^n$ «συμπεριφέρεται» σε σχέση με τη συνήθη παράγωγο, ανακαλύπτουμε τη συνάρτηση

$$(x - a)_q^n = (x - a)(x - qa) \cdots (x - q^{n-1}a).$$

Η ποσότητα $(1 - a)_q^n$ παίζει τον πιο θεμελιώδη ρόλο στη συνδυαστική, και δυστηχώς ο ο συνήθης συμβολισμός $(a : q)_n$ γι' αυτή την ποσότητα δεν τον προτιμάμε.

Έχοντας το q-διωνυμικό, πρόκειται να αποδείξουμε το q-ανάλογο του τύπου του Taylor. Αξιοσημείωτο είναι ότι, ο τύπος του Taylor περικλείει πολλά αποτελέσματα του 18ου και 19ου αιώνα των μαθηματικών: Οι ταυτότητες του Euler για τις q-εκθετικές συναρτήσεις, ο q-διωνυμικός τύπος του Gauss, και ο τύπος του Heine για την q-υπεργεωμετρική συνάρτηση.
Φυσικα, ο τύπος του Gauss,

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} a^j x^{n-j}$$

είναι η πηγή όλων των σημαντικών q-διωνυμικών συντελεστών

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[j]![n-j]!}, \quad \textit{όπου } [k]! = [1][2]\cdots[k].$$

Θα μελετήσουμε αυτούς τους συντελεστές με λεπτομέρεια: συγκεκριμένα, θα τους εξηγήσουμε σε όρους της γεωμετρίας πάνω σε πεπερασμένα σώματα.
Οι ταυτότητες του Euler μας οδηγούν στο να ανακαλύψουμε την ταυτότητα του τριπλού γινομένου του Jacobi και ο τύπος του Heine μας οδηγει στον αξιοσημείωτο τύπο του γινομένου του Ramanujan.
Έχοντας αποδείξει όλους αυτούς τους τύπους, πρόκειται να συγκεντρώσουμε όλο το φάσμα των εφαρμογών, ανακαλύπτοντας ξανά κάποια από τα διάσημα αποτελέσματα του 18ου και 19ου αιώνα των μαθηματικών: τον επαναλαμβανόμενο τύπο του Euler για την κλασσική συνάρτηση διαμέρισης, τον τύπο του Gauss για τον αριθμό των αθροισμάτων δύο τετράγωνων, τον τύπο του Jacobi για τον αριθμό των αθροισμάτων τεσσάρων τετράγωνων, κτλ. Οι ειδικές περιπτώσεις των δύο τελευταίων αποτελεσμάτων είναι, φυσικά, το Θεώρημα του Fermat ότι ένας περιττός πρώτος p μπορεί να αναπαρασταθεί ως το άθροισμα δύο τετραγώνων ακεραίων εάν και μόνο αν το $p-1$ διαιρείται από το 4, και το Θεώρημα του Lagrange ότι κάθε θετικός ακέραιος είναι το άθροισμα τεσσάρων τετραγώνων ακεραίων.
Επιστρέφοντας στον q-λογισμό, όπως και στον συνήθη λογισμό, αφού μελετήσουμε τις ιδιότητες της q-παραγώγου πρόκειται να μελετήσουμε την q-αντιπαράγωγο και το ορισμένο q-ολοκλήρωμα. Το τελευταίο εισήχθη απο τον F.H.Jackson στις αρχές του 20ου αιώνα.Ήταν ο πρώτος που ανέπτυξε τον q-λογισμό με συστηματικό τρόπο.
Θα τελειώσουμε την επεξεργασία του q-λογισμού με την μελέτη των q-αναλόγων των κλασσικών Γάμμα και Βήτα συναρτήσεων του Euler.
Παρά την φαινομενική ομοιότητα με τον q-λογισμό, ο h-λογισμός είναι κάπως διαφορετικός. Είναι πραγματικά ο λογισμός των πεπερασμένων διαφορών, αλλά μία πιο συστηματική αναλογία με τον κλασικό λογισμό τον καθιστά πιο διαφανή. Για παράδειγμα, ο h-τύπος του Taylor δεν είναι τίποτα άλλο από τον

τύπο παρεμβολής του Newton, και η h-ολοκλήρωση κατά μέρη είναι απλά ο μετασχηματισμός του Abel. Το ορισμένο h-ολοκλήρωμα είναι ένα άθροισμα Riemann, ώστε το Θεμελιώδες Θεώρημα του h-Λογισμού μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε πεπερασμένα αθροίσματα.

Αυτό το κάνουμε για αθροίσματα νιοστών δυνάμεων, χρησιμοποιώντας το $(h = 1)$-ολοκλήρωμα της x^n. Αυτό μας οδηγεί φυσικά στους αριθμούς Bernoulli και στα πολυώνυμα Bernoulli. Στενά συνδεδεμένος είναι ο τύπος Euler-Maclaurin, ο οποίος θα συζητηθεί στο τέλος της εργασίας.

Κεφάλαιο 1

q-παράγωγος και h-παράγωγος

Όπως έχει αναφερθεί στην εισαγωγή, θα αναπτύξουμε δύο τύπους του κβαντικού λογισμού, τον q-λογισμό και τον h-λογισμό. Ξεκινάμε με την έννοια του κβαντικού διαφορικού.

Ορισμός 1.1. Θεωρούμε μια αυθαίρετη συνάρτηση $f(x)$. Το *q-διαφορικό* της $f(x)$ είναι

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x) \tag{1.1}$$

και το *h-διαφορικό* της είναι

$$d_h f(x) = f(x+h) - f(x) \tag{1.2}$$

Συγκεκριμένα, $d_q x = (q-1)x$ και $d_h x = h$. Μία ενδιαφέρουσα διαφορά των κβαντικών διαφορικών από τα συνήθη είναι η έλλειψη συμμετρίας στο διαφορικό του γινομένου των δύο συναρτήσεων. Επειδή

$$\begin{aligned} d_q(f(x)g(x)) &= f(qx)g(qx) - f(x)g(x) \\ &= f(qx)g(qx) - f(qx)g(x) + f(qx)g(x) - f(x)g(x), \end{aligned}$$

έχουμε

$$d_q(f(x)g(x)) = f(qx)d_q g(x) + g(x)d_q f(x), \tag{1.3}$$

ομοίως,

$$d_h(f(x)g(x)) = f(x+h)d_h g(x) + g(x)d_h f(x). \tag{1.4}$$

Με αυτά τα δύο κβαντικά διαφορικά μπορούμε να ορίσουμε τις αντίστοιχες κβαντικές παραγωγούς.

Ορισμός 1.2. *Οι ακόλουθες δύο εκφράσεις,*

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} \tag{1.5}$$

$$D_h f(x) = \frac{d_h f(x)}{d_h x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.6}$$

ονομάζονται η q-παράγωγος και h-παράγωγος, αντίστοιχα, της συνάρτησης $f(x)$.

Σημειώστε ότι

$$\lim_{q\to 1} D_q f(x) = \lim_{h\to 0} D_h f(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

εάν $f(x)$ είναι διαφορίσιμη. Ο συμβολισμός του Leibnitz $\frac{df(x)}{dx}$, μία αναλογία δύο 'απειροστών', είναι μάλλον συγκεχυμένη, αφού η έννοια του διαφορικού $df(x)$ απαιτεί μία ιδιαίτερη εξήγηση. Σε αντίθεση, οι έννοιες των q- και h-διαφορικών είναι προφανείς, και οι q- και h-παράγωγοι είναι απλές σχέσεις. Είναι σαφές ότι, όπως με την συνήθη παράγωγο, η 'συμπεριφορά' από τη λήψη της q- ή h-παραγώγου μίας συνάρτησης είναι ένας γραμμικός τελεστής.Με άλλα λόγια, D_q και D_h έχουν την ιδιότητα ότι για κάθε σταθερές a και b,

$$D_q(af(x) + bg(x)) = aD_q f(x) + bD_q g(x)$$

$$D_h(af(x) + bg(x)) = aD_h f(x) + bD_h g(x)$$

Παράδειγμα 1. Θα υπολογίσουμε την q-παράγωγο και την h-παράγωγο της $f(x) = x^n$, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος. Εξ' ορισμού,

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{q-1} x^{n-1}, \tag{1.7}$$

και

$$D_h x^n = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h + \cdots + h^{n-1}. \tag{1.8}$$

Επειδή το κλάσμα $\frac{q^n-1}{q-1}$ εμφανίζεται αρκετά συχνά, ας εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό,

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q-1} = q^{n-1} + \cdots + 1 \tag{1.9}$$

για κάθε θετικό ακέραιο n. Αυτό είναι το q-*ανάλογο του* n.Τότε η (1.7) γίνεται

$$D_q x^n = [n] x^{n-1}, \tag{1.10}$$

το οποίο μοιάζει με τη συνήθη παράγωγο της x^n. Καθώς $q \to 1$, έχουμε

$$[n] = q^{n-1} + \cdots + 1 \to 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

Όπως θα δούμε ξανά και ξανά, το $[n]$ παίζει τον ίδιο ρόλο στον q-λογισμό όπως ο ακέραιος n στον συνήθη λογισμό.
Από την άλλη, η έκφραση της $D_h x^n$ είναι πιο πολύπλοκη. Είναι σωστό να πούμε ότι η x^n είναι μία καλή συνάρτηση στον q-λογισμό αλλά όχι στον h-λογισμό. Προς το παρόν, θα εστιάσουμε στον q-λογισμό. Ο h-λογισμός θα συζητηθεί στα τελευταία κεφάλαια του βιβλίου.

Ας υπολογίσουμε την q-παράγωγο του γινομένου και του πηλίκου της $f(x)$ και της $g(x)$. Από την (1.3) έχουμε

$$D_q(f(x)g(x)) = \frac{d_q(f(x)g(x))}{(q-1)x} = \frac{f(qx)d_q g(x) + g(x)d_q f(x)}{(q-1)x},$$

και ως εκ τούτου,

$$D_q(f(x)g(x)) = f(qx)D_q g(x) + g(x)D_q f(x). \tag{1.11}$$

Λόγω συμμετρίας, μπορούμε να εναλλάσσουμε την f και την g, και παίρνουμε

$$D_q(f(x)g(x)) = f(x)D_q g(x) + g(qx)D_q f(x), \tag{1.12}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με την (1.11).
Εάν εφαρμόσουμε την (1.11) για να διαφορίσουμε την

$$g(x)\cdot \frac{f(x)}{g(x)} = f(x),$$

παίρνουμε

$$g(qx)D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) + \frac{f(x)}{g(x)}D_q g(x) = D_q f(x),$$

έτσι έχουμε,

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_q f(x) - f(x)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}. \tag{1.13}$$

Ωστόσο, αν χρησιμοποιήσουμε την (1.12) παίρνουμε

$$g(x)D_q(\frac{f(x)}{g(x)}) + \frac{f(qx)}{g(qx)}D_q g(x) = D_q f(x),$$

έτσι έχουμε,

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(qx)D_qf(x) - f(qx)D_qg(x)}{g(x)g(qx)}. \tag{1.14}$$

Οι τύποι (1.13) και (1.14) είναι και οι δύο έγκυροι, αλλά ο ένας είναι πιο χρήσιμος από τον άλλο κάτω από ιδιαίτερες περιστάσεις.
Μετά την εξαγωγή του κανόνα του γινομένου και του κανόνα του πηλίκου της q-διαφόρισης, στη συνέχεια μπορεί κανείς να αναρωτηθεί για μια κβαντική εκδοχή του κανόνα της αλυσίδας. Ωστόσο, *δεν υπάρχει ένας γενικός κανόνας της αλυσίδας για q-παραγώγους.* Μία εξαίρεση είναι η παραγώγιση μίας συνάρτησης της μορφής $f(u(x))$, όπου $u = u(x) = ax^{\beta}$ με a,β να είναι σταθερές. Για να δούμε πως λειτουργεί ο κανόνας της αλυσίδας, θεωρούμε

$$\begin{aligned} D_q[f(u(x))] = D_q[f(ax^{\beta})] &= \frac{f(aq^{\beta}x^{\beta}) - f(ax^{\beta})}{qx - x} \\ &= \frac{f(aq^{\beta}x^{\beta}) - f(ax^{\beta})}{aq^{\beta}x^{\beta} - ax^{\beta}} \cdot \frac{aq^{\beta}x^{\beta} - ax^{\beta}}{qx - x} \\ &= \frac{f(q^{\beta}) - f(u)}{q^{\beta} - u} \cdot \frac{u(qx) - u(x)}{qx - x} \end{aligned}$$

έτσι καταλήγουμε,

$$D_qf(u(x)) = (D_{q^{\beta}}f)(u(x)) \cdot D_qu(x). \tag{1.15}$$

Από την άλλη, αν για παράδειγμα η $u(x) = x + x^2$ ή $u(x) = \sin x$, η ποσότητα $u(qx)$ δεν μπορεί να εκφραστεί σε όρους της u με απλό τρόπο, άρα είναι απίθανο να έχουμε ένα γενικό κανόνα της αλυσίδας.
Τελειώνουμε αυτή την ενότητα με μία συζήτηση γιατί τα γράμματα h και q χρησιμοποιούνται ως παράμετροι. Το γράμμα q έχει πολλές σημασίες:

- το πρώτο γράμμα της αγγλικής λέξης «κβαντικός» (quantum)
- το γράμμα που χρησιμοποιείται συνήθως για να υποδηλώσει τον αριθμό των στοιχείων σ’ενα πεπερασμένο σώμα

Το γράμμα h χρησιμοποιείται ως υπενθύμιση της σταθεράς του Planck, η οποία είναι η πιο σημαντική θεμελιωδές φυσική σταθερά στη κβαντομηχανική (φυσική του μικρόκοσμου). Αν κάποιος πάρει το «κλασσικό» όριο καθώς $q \to 1$ ή $h \to 0$, και οι δύο κβαντικοί παράμετροι σχετίζονται με τη σχέση $q = e^h$.

Κεφάλαιο 2

Γενικευμένος Τύπος του Taylor για πολυώνυμα

Στον συνήθη λογισμό, μία συνάρτηση, $f(x)$ που έχει παραγώγους όλων των τάξεων είναι *αναλυτική* στο σημείο $x = a$ εάν αυτή μπορεί να εκφραστεί ως μία δυναμοσειρά γύρω από το $x = a$. Το θεώρημα του Taylor μας λέει ότι η δυναμοσειρά ειναι

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}. \tag{2.1}$$

Το ανάπτυγμα Taylor μίας αναλυτικής συνάρτησης συχνά μας επιτρέπει να επεκτείνουμε τον ορισμό της συνάρτησης σ'ενα μεγαλύτερο και πιο ενδιαφέρον πεδίο ορισμού. Για παράδειγμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα Taylor της e^x για να ορίσουμε τα εκθετικά των μιγαδικών αριθμών και των τετραγωνικών πινάκων. Θα θέλαμε να διατυπώσουμε ένα q-ανάλογο του τύπου του Taylor. Αλλά πριν το κάνουμε αυτό, πρώτα ας θεωρήσουμε μία πιο γενική κατάσταση.

Θεώρημα 2.1. *Έστω a να είναι ένας αριθμός, D ένας γραμμικός τελεστής στο χώρο των πολυωνύμων, και $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots\}$ μια ακολουθία πολυωνύμων που ικανοποιούν τρεις συνθήκες:*

(a) $P_0(a) = 1$ *και* $P_n(a) = 0$ *για* $n \geq 1$

(b) $degP_n = n$

(c) $DP_n(x) = P_{n-1}(x)$ *για κάθε* $n \geq 1$, *και* $D(1) = 0$.

Τότε, για κάθε πολυώνυμο $f(x)$ βαθμού N, έχει τον ακόλουθο γενικευμένο τύπο Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} (D^n f)(a) P_n(x). \tag{2.2}$$

Απόδειξη. Έστω V ο χώρος των πολυωνύμων βαθμού όχι μεγαλύτερου του N, ώστε $\dim V = N+1$. Τα πολυώνυμα $\{P_0(x), P_1(x), \ldots, P_N(x)\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα επειδή, από τη συνθήκη (*b*), οι βαθμοί τους αυξάνονται γνησίως. Ως εκ τούτου αυτά αποτελούν μία βάση για τον V, κάθε πολυώνυμο $f(x) \in V$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k P_k(x) \tag{2.3}$$

για κάποιες μοναδικές σταθερές c_k. Βάζοντας όπου $x = a$ και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη (*a*), κάποιος παίρνει $c_0 = f(a)$. Τότε, εφαρμόζουμε το γραμμικό τελεστή D n φορές και στις δύο πλευρές της παραπάνω εξίσωσης, όπου $1 \leqslant n \leqslant N$. Χρησιμοποιώντας τις (*b*) και (*c*), παίρνουμε

$$(D^n f)(x) = \sum_{k=n}^{N} c_k P_k(x) = \sum_{k=n}^{N} c_k P_{k-n}(x).$$

Ξανά, τοποθετώντας όπου $q = a$ και χρησιμοποιώντας (*a*), παίρνουμε

$$c_n = (D^n f)(a), \qquad 0 \leqslant n \leqslant N,$$

και η (2.3) γίνεται η (2.2). □

Παράδειγμα 2. *Εάν*

$$D = \frac{d}{dx}, \qquad P_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!},$$

τότε και οι τρεις συνθήκες ικανοποιούνται, και το θεώρημα δίνει το ανάπτυγμα Taylor γύρω απο το a ενός πολυωνύμου.

Είναι εύκολο να δούμε ότι δεδομένου D, η ακολουθία των πολυωνύμων ικανοποιώντας τις συνθήκες (*a*),(*b*) και (*c*) του θεωρήματος 2.1, εάν αυτή υπάρχει, είναι μοναδικά ορισμένη. Επιπλέον, εάν D είναι ένας γραμμικός τελεστής ο οποίος αντιστοιχίζει το χώρο των πολυωνύμων βαθμού n στον χώρο των πολυωνύμων βαθμού $n-1$, μια τέτοια ακολουθία πάντα υπάρχει.

Κεφάλαιο 3

Το q-ανάλογο της $(x-a)^n$ και οι q-παράγωγοι των διωνυμικών

Όπως τονίσαμε στο Κεφάλαιο 1, D_q είναι μία γραμμική απεικόνιση στο χώρο των πολυωνύμων. Θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα (2.1) για $D \equiv D_q$. Θα χρειαστούμε γιάυτό το ακόλουθο q-ανάλογο του $n!$:

$$[n]! = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad n = 0 \\ [n] \times [n-1] \times \cdots \times [1] & \text{αν} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{3.1}$$

Τώρα ας κατασκευάσουμε την ακολουθία των πολυωνύμων $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots\}$ που ικανοποιεί τις τρεις συνθήκες του Θεωρήματος (2.1) σε σχέση με το $D \equiv D_q$. Εάν $a = 0$, μπορούμε να διαλέξουμε

$$P_n(x) = \frac{x^n}{[n]!} \tag{3.2}$$

επειδή (a) $P_0(0) = 1$, $P_n(0) = 0$ για $n \geq 1$, (b) $\deg P_n = n$, και η (c) χρησιμοποιώντας την (1.10), για $n \geq 1$,

$$D_q P_n(x) = \frac{D_q x^n}{[n]!} = \frac{[n]x^{n-1}}{[n]!} = \frac{x^{n-1}}{[n-1]!} = P_{n-1}(x)$$

.

Εάν $a \neq 0$, $P_n(x)$ δεν είναι απλά $\frac{(x-a)^n}{[n]!}$, για παράδειγμα, $\frac{D_q(x-a)^2}{[2]!} \neq (x-a)$. Ας βρούμε τα πρώτα $P_n(x)$ και να προσπαθήσουμε να συμπεράνουμε ένα γενικό τύπο.

Έχουμε

$$P_0(x) = 1.$$

Αφού $D_q P_1(x) = 1$ και $P_1(a) = 0$, πρέπει να έχουμε

$$P_1(x) = x - a$$

Αφού $D_q P_2(x) = x - a$ και $P_2(a) = 0$, πρέπει να έχουμε

$$P_2(x) = \frac{x^2}{[2]} - ax - \frac{a^2}{[2]} + a^2 = \frac{(x-a)(x-qa)}{[2]}$$

Όμοια,

$$P_3(x) = \frac{(x-a)(x-qa)(x-q^2a)}{[2][3]}$$

κ.ο.κ. Μία λογική εικασία θα είναι

$$P_n(x) = \frac{(x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{n-1}a)}{[n]!}, \tag{3.3}$$

το οποίο συμφωνεί με την (3.2) όταν $a = 0$. Πριν επαληθεύσουμε την εγκυρότητα της συνθήκης (c) για το Θεώρημα (2.1), ας εισάγουμε κάποιους συμβολισμούς.

Ορισμός 3.1. *Το q-ανάλογο της $(x-a)^n$ είναι το πολυώνυμο*

$$(x-a)_q^n = \begin{cases} 1 & \textit{αν} \quad n = 0 \\ (x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{n-1}a) & \textit{αν} \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

Πρόταση 3.2. *Για $n \geq 1$,*

$$D_q(x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1}. \tag{3.5}$$

Απόδειξη. Ο τύπος είναι προφανώς αληθής για $n = 1$. Ας υποθέσουμε $D_q(x-a)_q^k$ για κάποιο ακέραιο k. Σύμφωνα με τον ορισμό, $(x-a)_q^{k+1} = (x-a)_q^k(x-q^ka)$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του γινομένου(1.12),

$$\begin{aligned} D_q(x-a)_q^{k+1} &= (x-a)_q^k + (qx - q^ka)D_q(x-a)_q^k \\ &= (x-a)_q^k + q(x-q^{k-1}a)\cdot [k](x-a)_q^{k-1} \\ &= (1+q[k])(x-a)_q^k = [k+1](x-a)_q^k. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, η πρόταση έχει αποδειχθεί με επαγωγή στο n. □

Έτσι, $D_q P_n = P_{n-1}$ είναι ένα άμεσο αποτέλεσμα της παραπάνω πρότασης. Τώρα ας εξετάσουμε κάποιες άλλες ιδιότητες του πολυωνύμου $(x-a)_q^n$. Γενικά, $(x-a)_q^{m+n} \neq (x-a)_q^m (x-a)_q^n$. Αντί αυτού,

$$\begin{aligned}(x-a)_q^{m+n} &= (x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{m-1}a)(x-q^m a)(x-q^{m+1}a) \\ &\quad \times\cdots(x-q^{m+n-1}a) \\ &= ((x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{m-1}a)) \\ &\quad \times((x-q^m a)(x-q(q^m a))\cdots(x-q^{n-1}(q^m a))),\end{aligned}$$

το οποίο δίνει

$$(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n. \tag{3.6}$$

Αντικαθιστώντας m με $-n$, μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό της (3.4) σε όλους τους ακέραιους ορίζοντας

$$(x-a)_q^{-n} = \frac{1}{(x-q^{-n}a)_q^n}, \tag{3.7}$$

για κάθε θετικό ακέραιο n. Οι ακόλουθες δύο προτάσεις δείχνουν ότι αυτό δίνει πράγματι μια καλή επέκταση.

Πρόταση 3.3. *Για κάθε δύο ακέραιους m και n, (3.6) είναι αληθής.*

Απόδειξη. Η περίπτωση όπου $m > 0$ και $n > 0$ έχει ήδη αποδειχθεί, και η περίπτωση όπου ένα από τα m και n είναι μηδέν είναι εύκολο. Πρώτα ας θεωρήσουμε $m = -m' < 0$ και $n > 0$. Τότε,

$$\begin{aligned}(x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n &= (x-a)_q^{-m'} (x-q^{-m'}a)_q^n \\ &\overset{\text{από (3.7)}}{=} \frac{(x-q^{-m'}a)_q^n}{(x-q^{-m'}a)_q^{m'}} \\ &\overset{\text{από (3.6)}}{=} \begin{cases} (x-q^{m'}(q^{-m'}a))_q^{n-m'} & \text{αν} \quad n \geq m' \\ \dfrac{1}{(x-q^n(q^{-m'}a))_q^{m'-n}} & \text{αν} \quad n < m' \end{cases} \\ &\overset{\text{από (3.7)}}{=} (x-a)_q^{n-m'} = (x-a)_q^{n+m}.\end{aligned}$$

Εάν $m \geq 0$ και $n = -n' < 0$, τότε

$$
\begin{aligned}
(x-a)_q^m(x-q^m a)_q^n &= (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^{-n'} \\
&\overset{\text{από (3.7)}}{=} \frac{(x-a)_q^m}{(x-q^{m-n'}a)_q^{n'}} \\
&\overset{\text{από (3.6)}}{=} \begin{cases} \dfrac{(x-a)_q^{m-n'}(x-q^{m-n'}a)_q^{n'}}{(x-q^{m-n'}a)_q^{n'}} & m \geq n \\ \dfrac{(x-a)_q^m}{(x-q^{m-n'}a)_q^{n'-m}(x-q^{n'-m}(q^{m-n'}a))_q^m} & m < n \end{cases} \\
&= \begin{cases} (x-a)_q^{m-n'} & \text{αν} \quad m \geq n \\ \dfrac{1}{(x-q^{m-n'}a)_q^{n'-m}} & \text{αν} \quad m < n \end{cases} \\
&= (x-a)_q^{m-n'} = (x-a)_q^{m+n}.
\end{aligned}
$$

Τέλος, εάν $m = -m' < 0$ και $n = -n' < 0$,

$$
\begin{aligned}
(x-a)_q^m(x-q^m a)_q^n &= (x-a)_q^{-m'}(x-q^{-m'}a)_q^{-n'} \\
&= \frac{1}{(x-q^{-m'}a)_q^{m'}(x-q^{-n'-m'}a)_q^{n'}} \\
&= \frac{1}{(x-q^{-n'-m'}a)_q^{n'}(x-q^{n'}(q^{-m'-n'}a))_q^{m'}} \\
&= \frac{1}{(x-q^{-n'-m'}a)_q^{n'+m'}} \\
&= (x-a)_q^{-m'-n'} = (x-a)_q^{m+n}
\end{aligned}
$$

Επιπλέον, (3.6) είναι αληθής για κάθε ακέραιους m και n. □

Θα θέλαμε να δούμε ότι η Πρόταση(3.2) είναι αληθής για κάθε ακέραιο n. Αλλά πριν αποδείξουμε αυτό, πρέπει να επεκτείνουμε τον ορισμό του $[n]$ στην (1.9).

Ορισμός 3.4. *Για κάθε αριθμό a,*

$$
[a] = \frac{1-q^a}{1-q}. \tag{3.8}
$$

Πρόταση 3.5. *Για κάθε ακέραιο n,*

$$D_q(x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1}.$$

Απόδειξη. Σημειώστε ότι $[0] = 0$, έτσι η (3.8) είναι αληθής για $n = 0$. Εάν $n = -n' < 0$, χρησιμοποιώντας τις (1.13) και (3.7) έχουμε

$$\begin{aligned}
D_q(x-a)_q^n &= D_q\left(\frac{1}{(x-q^{-n'}a)_q^{n'}}\right)\\
&= -\frac{D_q(x-q^{-n'}a)_q^{n'}}{(x-q^{-n'}a)_q^{n'}(qx-q^{-n'}a)_q^{n'}}\\
&= -\frac{[n'](x-q^{-n'}a)_q^{n'-1}}{q^{n'}(x-q^{-n'}a)_q^{n'}(x-q^{-n'-1}a)_q^{n'}}\\
&= \frac{1-q^{n'}}{q-1}\frac{q^{-n'}}{(x-q^{-1}a)(x-q^{-n'-1}a)_q^{n'}}\\
&= \frac{q^{-n'}-1}{q-1}\frac{1}{(x-q^{-n'-1}a)_q^{n'+1}}\\
&= \frac{q^n-1}{q-1}(x-a)_q^{n-1},
\end{aligned}$$

όπως θέλαμε. □

Η Πρόταση (3.5) δεν μπορεί να εφαρμοστεί απευθείας για να βρει τις q-παραγώγους των

$$\frac{1}{(x-a)_q^n}, \quad (a-x)_q^n, \quad \frac{1}{(a-x)_q^n},$$

επειδή, για παράδειγμα, $(a-x)_q^n \neq (-1)^n(x-a)_q^n$. Αντί αυτού, για $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
(a-x)_q^n &= (a-x)(a-qx)(a-q^2x)\cdots(a-q^{n-1}x)\\
&= (a-x)\cdot q(q^{-1}a-x)\cdot q^2(q^{-2}a-x)\cdots q^{n-1}(q^{-n+1}a-x)\\
&= (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}(x-q^{-n+1}a)\cdots(x-q^{-2}a)(x-q^{-1}a)(x-a),
\end{aligned}$$

ή

(3.9) $$(a-x)_q^n = (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}(x-q^{-n+1}a)_q^n.$$

Προφανώς, (3.9) είναι αληθής για $n=0$, και είναι απλό να επαληθεύσουμε ότι είναι αληθής για $n<0$. Ας τελειώσουμε αυτή την ενότητα βρίσκοντας την q-παράγωγο των παραπάνω τρειών συναρτήσεων. Από την (3.7), έχουμε

$$D_q \frac{1}{(x-a)_q^n} = D_q \frac{1}{(x-q^{-n}(q^n a))_q^n} = D_q (x-q^n a)_q^{-n}.$$

Χρησιμοποιώντας την (3.9) δύο φορές, έχουμε

$$\begin{aligned} D_q(a-x)_q^n &= (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot [n](x-q^{-n+1}a)_q^{n-1} \\ &= -[n]q^{n-1} \cdot (-1)^{n-1} q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (x-q^{-n+2}(q^{-1}a))_q^{n-1} \\ &= -[n]q^{n-1}(q^{-1}a-x)_q^{n-1} = -[n](a-qx)_q^{n-1}. \end{aligned}$$

Τελικά, χρησιμοποιούμε τον κανόνα του πηλίκου (1.13) και παίρνουμε

$$D_q \frac{1}{(a-x)_q^n} = -\frac{-[n](a-qx)_q^{n-1}}{(a-x)_q^n (a-qx)_q^n} = \frac{[n]}{(a-x)_q^n (a-q^{n+1}x)}$$

Συμπεραίνουμε, για κάθε ακέραιο n, έχουμε

$$D_q \frac{1}{(x-a)_q^n} = [-n](x-q^n a)_q^{-n-1}, \tag{3.10}$$

$$D_q(a-x)_q^n = -[n](a-qx)_q^{n-1}, \tag{3.11}$$

$$D_q \frac{1}{(a-x)_q^n} = \frac{[n]}{(a-x)_q^{n+1}}. \tag{3.12}$$

Κεφάλαιο 4

q-τύπος του Taylor για πολυώνυμα

Όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενη ενότητα, η $P_n(x) = \frac{(x-a)_q^n}{[n]!}$ ικανοποιεί τις τρεις απαιτήσεις του Θεωρήματος 2.1 σε σχέση με τον γραμμικό τελεστή D_q. Επομένως, τώρα θα πάρουμε την q-εκδοχή του τύπου του Taylor.

Θεώρημα 4.1. *Για κάθε πολυώνυμο $f(x)$ βαθμού N και κάθε αριθμό c, έχουμε το ακόλουθο q-ανάπτυγμα Taylor:*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} (D_q^j f)(c) \frac{(x-c)_q^j}{[j]!}. \tag{4.1}$$

Παράδειγμα 3. *Θεωρούμε την $f(x) = x^n$ και $c = 1$, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος.*

Για $j \leqslant n$, έχουμε

$$\begin{aligned} (D_q^j f)(x) &= [n]x^{n-1} = [n][n-1]x^{n-2} = \cdots \\ &= [n][n-1]\cdots[n-j+1]x^{n-j} \end{aligned} \tag{4.2}$$

έτσι έχουμε,

$$(D_q^j f)(1) = [n][n-1]\cdots[n-j+1] \tag{4.3}$$

Ο q-τύπος του Taylor για την x^n γύρω από το σημείο $c = 1$ δίνει

$$x^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{[n]\cdots[n-j+1]}{[j]!}(x-1)_q^j = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (x-1)_q^j, \tag{4.4}$$

όπου

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n][n-1]\cdots[n-j+1]}{[j]!} = \frac{[n]!}{[j]![n-j]!} \tag{4.5}$$

ονομάζονται q-*διωνυμικοί συντελεστές*. Θα δώσουμε μία καλή συνδυαστική ερμηνεία της εξίσωσης (4.4) στο κεφάλαιο 7.

Σημειώστε ότι, καθώς $q \to 1$, οι q- διωνυμικοί συντελεστές μετατρέπονται στους συνήθεις διωνυμικούς συντελεστές και η (4.4) γίνεται ένα αποτέλεσμα του συνήθη διωνυμικού τύπου. Οι ιδιότητες των q-διωνυμικών συντελεστών θα εξεταστούν στα επόμενα δύο κεφάλαια.

Κεφάλαιο 5

Διωνυμικός τύπος του Gauss και ο μη αντιμεταθετικός διωνυμικός τύπος

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε δύο διωνυμικούς τύπους που συμπεριλαμβάνουν q-διωνυμικούς συντελεστές. Πρώτα ας θεωρήσουμε ένα όμοιο παράδειγμα με αυτό που δώθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Παράδειγμα 4. *Έστω n να είναι ένας μη-αρνητικός ακέραιος και a ένας αριθμός.Ας επεκτείνουμε την $f(x) = (x+a)_q^n$ γύρω από το $x = 0$ χρησιμοποιώντας τον q-τύπο του Taylor. Όπως και στην (4.2), για $j \leqslant n$ έχουμε*

$$(D_q^j f)(x) = [n][n-1]\cdots[n-j+1](x+a)_q^{n-j}. \tag{5.1}$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$(x+a)_q^m = (x+a)(x+qa)\cdots(x+q^{m-1}a),$$

ωστόσο, για $x = 0$, το δεξί μέλος δίνει $(a)(qa)\cdots(q^{m-1}a) = q^{\frac{m(m-1)}{2}}a^m$. Εφαρμόζωντας αυτό στην σχέση (5.1) θα πάρουμε για $j \leqslant n$,

$$(D_q^j f)(0) = [n][n-1]\cdots[n-j+1]q^{\frac{(n-j)(n-j-1)}{2}}a^{n-j}. \tag{5.2}$$

Έτσι,ο q-τύπος του Taylor δίνει

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{\frac{(n-j)(n-j-1)}{2}}a^{n-j}x^j. \tag{5.3}$$

Μπορούμε να βελτιώσουμε την έκφραση λιγάκι εάν αντικαταστήσουμε το j με το $n-j$. Από τον ορισμό των q-διωνυμικών συντελεστών (4.5), έχουμε, παρόμοια *με τους συνήθεις διωνυμικούς συντελεστές,*

$$\begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[j]![n-j]!} = \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Ωστόσο, η (5.3) είναι ισοδύναμη με την

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{\frac{j(j-1)}{2}} a^j x^{n-j}. \tag{5.5}$$

Ο τύπος (5.5) λέγεται διωνυμικός τύπος του Gauss, που θα είναι χρήσιμος στα επόμενα κεφάλαια.
Τώρα αλλάζουμε θέμα. 'Οπως όλοι γνωρίζουμε, ο πολλαπλασιασμός των πραγματικών αριθμών είναι αντιμεταθετικός, δηλαδή, $xy = yx$. *Ωστόσο, όταν μας ανησυχεί ένας γενικότερος πολλαπλασιασμός, όπως ο πολλαπλασιασμός πινάκων ή σύνθεση χώρων, η αντιμεταθετικότητα δεν μπορεί να ισχύει. Θεωρούμε το ακόλουθο παράδειγμα.*

Παράδειγμα 5. *'Εστω* $\hat{x}$ *και* $\hat{M}_q$ *να είναι οι γραμμικές απεικονίσεις στο χώρο των πολυωνύμων των οποίων οι πράξεις σ'ενα πολυώνυμο* $f(x)$ *είναι*

$$\hat{x}[f(x)] = xf(x), \qquad \hat{M}_q[f(x)] = f(qx) \tag{5.6}$$

Τότε για κάθε $f(x)$ *έχουμε*

$$\hat{M}_q\hat{x}[f(x)] = \hat{M}_q[xf(x)] = qxf(qx) = q\hat{x}\hat{M}_q[f(x)],$$

έτσι

$$\hat{M}_q\hat{x} = q\hat{x}\hat{M}_q \tag{5.7}$$

Το θεώρημα (5.1) παρακάτω εισάγει ένα μη αντιμεταθετικό διωνυμικό τύπο που περιέχει δύο στοιχεία που ικανοποιούν μία ειδική σχέση εναλλαγής όπως η σχέση (5.7).

Θεώρημα 5.1. *Εάν* $yx = qxy$, *όπου* q *είναι ένας αριθμός που μετατίθεται και με το* x *και με το* y, *τότε*

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j}. \tag{5.8}$$

Απόδειξη. Η αποδειξή μας θα γίνει με επαγωγή στο n. Η εξίσωση (5.8) είναι προφανώς αληθής για $n = 1$. Σημειώστε ότι $y^k x = qy^{k-1}xy = q^2y^{k-2}xy^2 = \ldots = q^k xy^k$, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n(x+y) = \left(\sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j}\right)(x+y) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j} x + \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j (q^{n-j} x y^{n-j}) + \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} q^{n-j+1} \begin{bmatrix} n \\ j-1 \end{bmatrix} x^j y^{n-j+1} + \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j+1} \\
&= y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left(q^{n-j+1} \begin{bmatrix} n \\ j-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\right) x^j y^{n-j+1} + x^{n+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n+1-j},
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον q-κανόνα του Pascal (6.3), όπου θα συζητηθεί στο επόμενο κεφάλαιο. Το θεώρημα έχει έτσι αποδειχθεί. □

Κεφάλαιο 6

Ιδιότητες των q-Διωνυμικών Συντελεστών

Ας εξετάσουμε κάποιες ιδιότητες των q-διωνυμικών συντελεστών, που έχουν οριστεί στην (4.5), με n και j να είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι και $n \geq j$. Επειδή θα ξαναπάρουμε τους συνήθεις διωνυμικούς συντελεστές εάν πάρουμε $q \to 1$, περιμένουμε τα q-αναλογά τους να έχουν παρόμοιες ιδιότητες. Πρώτα, όπως έχουμε σημειώσει στην (5.4),

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[j]![n-j]!} = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

ακολουθεί ακριβώς το κλασσικό αποτέλεσμα. Ωστόσο, η αντιστοίχιση είναι πιο λεπτή για άλλη ταυτότητα των διωνυμικών συντελεστών, ο κανόνας του Pascal:

$$\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1.$$

Για παράδειγμα,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + q \neq 2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 6.1. *Υπάρχουν δύο q-κανόνες του Pascal, ονομαστικά,*

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

και

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}, \tag{6.3}$$

όπου $1 \leqslant j \leqslant n-1$.

Απόδειξη. Επειδή για κάθε $1 \leqslant j \leqslant n-1$,

$$\begin{aligned}[n] &= 1 + q + \cdots + q^{n-1} \\ &= (1 + q + \cdots + q^{j-1}) + q^j(1 + q + \cdots + q^{n-j-1}) \\ &= [j] + q^j[n-j],\end{aligned}$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} &= \frac{[n]!}{[j]![n-j]!} = \frac{[n-1]![n]}{[j]![n-j]!} \\ &= \frac{[n-1]!([j] + q^j[n-j])}{[j]![n-j]!} \\ &= \frac{[n-1]!}{[j-1]![n-j]!} + q^j \frac{[n-1]!}{[j]![n-j-1]!} \\ &= \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix},\end{aligned}$$

το οποίο είναι η (6.2). Η συμμετρική ιδιότητα των συντελεστών (6.1) μας δίνει την άλλη ταυτότητα, επειδή

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ n-j-1 \end{bmatrix} + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ n-j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 6.2. *Κάθε q-διωνυμικός συντελεστής είναι ένα πολυώνυμο του q βαθμού $j(n-j)$, με το 1 ως ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου.*

Απόδειξη. Για κάθε μη-αρνητικό ακέραιο n,

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1,$$

το οποίο είναι φυσικά ένα πολυώνυμο. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 6.1 και με επαγωγή στο n, για κάθε $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ είναι το άθροισμα των δύο πολυωνύμων, έτσι είναι το ίδιο ένα πολυώνυμο.

Από τους ορισμούς (4.5) και (1.9), η σαφής έκφραση ενός q-διωνυμικού συντελεστή είναι

(6.4) $$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)\cdots(q^{n-j+1} - 1)}{(q^j - 1)(q^{j-1} - 1)\cdots(q - 1)}.$$

Και ο αριθμητής και ο παρανομαστής της (6.4) είναι πολυώνυμα του q με μεγαλύτερο συντελεστή το 1, άρα και το πηλίκο τους. Τέλος, ο βαθμός του $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ στο q είναι η διαφορά των βαθμών του αριθμητή και του παρανομαστή, η οποία είναι $[n + (n-1) + \cdots + (n-j+1)] - [j + (j-1) + \cdots + 1] = (n-j) + (n-j) + \cdots + (n-j) = j(n-j)$. □

Ένα άλλο γεγονός που μπορούμε να συμπεράνουμε από την αναλυτική έκφραση (6.4) του q-διωνυμικού συντελεστή. Γνωρίζοντας ότι αυτό είναι ένα πολυώνυμο του q βαθμού $j(n-j)$, ας αφήσουμε

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 q + \cdots \quad &+ a_{j(n-j)-1} q^{j(n-j)-1} + a_{j(n-j)} q^{j(n-j)} \\ &= \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)\cdots(q^{n-j+1})}{(q^j - 1)(q^{j-1} - 1)\cdots(q - 1)} \end{aligned}$$

Εάν αντικαταστήσουμε q με $\frac{1}{q}$ και πολλαπλασιάσουμε και τις δύο πλευρές με $q^{j(n-j)}$, είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι το δεξί μέλος δεν θα αλλάξει, ενώ το αριστερό μέλος,

$$a_0 q^{j(n-j)} + a_1 q^{j(n-j)-1} + \cdots + a_{j(n-j)-1} q + a_{j(n-j)},$$

έχει η ακολουθία των συντελεστών a_i δεδομένου ότι αντιστρέφεται. Συγκρίνωντας συντελεστές, παρατηρούμε ότι οι συντελεστές στην πολυωνυμική έκφραση του $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ είναι συμμετρικοί, δηλαδή, $a_i = a_{j(n-j)-i}$. Όπως και στους συνήθεις διωνυμικούς συντελεστές, οι q- διωνυμικοί συντελεστές έχουν συνδυαστικές ερμηνείες. Εδώ είναι μία απαύτές, και άλλη μία θα δωθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 6.3. *Έστω $A_n = 1, 2, \ldots, n$ και έστω $A_{n,j}$ να είναι η συλλογή όλων των υποσυνόλων του A_n με j στοιχεία, $0 \leqslant j \leqslant n$. Τότε*

(6.5) $$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \sum_{S \in A_{n,j}} q^{w(S) - \frac{j(j+1)}{2}}, \quad \textit{όπου } w(S) = \sum_{s \in S} s.$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το Θεώρημα με επαγωγή στο n. Πρώτα, θεωρούμε $n = 1, j = 0$. Για $j = 0$, $A_{1,0} = \varnothing$ και $w(\varnothing) = 0$. Έτσι, το δεξί μέλος της (6.5) ισούται με τη μονάδα, το οποίο συμφωνεί με το αριστερό μέλος. Για $j = 1$,

το μόνο στοιχείο του $A_{1,1}$ είναι $A_1 = 1$, και $w(1) = 1$. Ξανά, το δεξί μέλος ισούται με τη μονάδα και συμφωνεί με το αριστερό μέλος.
Υποθέτουμε ότι (6.5) ισχύει για $1 \leqslant n \leqslant m-1$, όπου $m \geq 2$, και θεωρούμε $n = m$. Η περίπτωση $j = 0$ είναι όμοια για $n = 1$ όπου έχει περιγραφεί παραπάνω. Για $j \geq 1$ γράφουμε $A_{m,j} = B \cup B'$, όπου $B = \{S \in A_{m,j} | m \notin S\}$ και $B' = \{S \in A_{m,j} | m \notin S\}$. Τα σύνολα στο B είναι όλα τα υποσύνολα του A_{m-1} με j-στοιχεία, δηλαδή, $B = A_{m-1,j}$. Τα σύνολα στο B′ το καθένα με το στοιχείο «m» να έχει αφαιρεθεί είναι όλα τα υποσύνολα του A_{m-1} με $(j-1)$-στοιχεία. Ως εκ τούτου, το δεξί μέλος της (6.5) γίνεται

$$\begin{aligned} &\sum_{S \in B} q^{w(S) - \frac{j(j+1)}{2}} + \sum_{S \in B'} q^{w(S) - \frac{j(j+1)}{2}} \\ &= \sum_{S \in A_{m-1,j}} q^{w(S) - \frac{j(j+1)}{2}} + \sum_{S \in A_{m-1,j-1}} q^{(w(S)+m) - \frac{j(j+1)}{2}} \\ &= \sum_{S \in A_{m-1,j}} q^{w(S) - \frac{j(j+1)}{2}} + \sum_{S \in A_{m-1,j-1}} q^{w(S) - \frac{j(j-1)}{2}} \cdot q^{m-j} \\ &= \begin{bmatrix} m-1 \\ j \end{bmatrix} + q^{m-j} \begin{bmatrix} m-1 \\ j-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Η τελευταία γραμμή προκύπτει από έναν από τους q-κανόνες του Pascal(6.3). Με επαγωγή στο j, (6.5) είναι αληθής για $0 \leqslant j \leqslant m$. Τελικά, η επαγωγή στο n ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Για μελλοντική χρήση, σημειώστε ότι ο ορισμός του q-διωνυμικού συντελεστή μπορεί να γενικευτεί με έναν τρόπο όμοιο με το αντιστοιχό του, χρησιμοποιώντας την (3.8):

(6.6)
$$\begin{bmatrix} a \\ j \end{bmatrix} = \frac{[a][a-1]\cdots[a-j+1]}{[j]!},$$

όπου a είναι κάθε αριθμός και j είναι ένας μη-αρνητικός ακέραιος.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα το Θεώρημα 6.3 θα πάρουμε την περίπτωση όπου $n = 3$ και $j = 2$. Άρα έχουμε το σύνολο $A_3 = 1, 2, 3$ τότε θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \sum_{S \in A_{3,2}} q^{w(S) - \frac{2(2+1)}{2}}, \quad \textit{όπου } w(S) = \sum_{s \in S} s.$$

Από την σχέση (4.5) έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{[3]!}{[2]![1]!} = \frac{(q^3-1)(q^2-1)}{(q^2-1)(q-1)} = \frac{(q^3-1)}{(q-1)} = 1 + q^2 + q.$$

Τώρα θέτουμε $S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{1, 3\}$, $S_3 = \{2, 3\}$ να είναι όλα τα υποσύνολα του A_3 με 2 στοιχεία. Άρα έχουμε

$$w(S_1) = 1 + 2 = 3, w(S_2) = 1 + 3 = 4, w(S_3) = 2 + 3 = 5$$

και από το Θεώρημα θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 + q^2 + q = \sum_{S \in A_{3,2}} q^{w(S) - \frac{2(2+1)}{2}}, \quad \textit{όπου } w(S) = \sum_{s \in S} s.$$

Το άθροισμα ισούται με

$$\sum_{S \in A_{3,2}} q^{w(S) - \frac{2(2+1)}{2}} = q^{3-3} + q^{5-3} + q^{4-3} = 1 + q^2 + q.$$

Άρα ισχύει για $n = 3$.

Κεφάλαιο 7

q-Διωνυμικοί Συντελεστές και Γραμμική Άλγεβρα πάνω σε πεπερασμένα σώματα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξηγήσουμε μία σημαντική συνδυαστική ερμηνεία των q-διωνυμικών συντελεστών.

Θεώρημα 7.1. *Εάν q είναι η τάξη ενός πεπερασμένου σώματος F_q (ως εκ τούτου, ο αριθμός q είναι πρώτος), τότε*

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \text{ο αριθμός των υποχώρων διάστασης } j \text{ στον διανυσματικό χώρο } F_q^n \text{ διάστασης } n. \tag{7.1}$$

Πριν αποδείξουμε το Θεώρημα, ας κάνουμε μια πολύ σύντομη ανασκόπηση κάποιων βασικών εννοιών της γραμμικής άλγεβρας. Μία συλλογή διανυσμάτων σε έναν διανυσματικό χώρο V πάνω σε ένα σώμα F είναι ένας υπόχωρος εάν αυτός περιέχει το μηδενικό διάνυσμα και είναι κλειστός ως προς τη διανυσματική πρόσθεση και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Η διάσταση ενός υπόχωρου, εάν είναι πεπερασμένος, δίνεται από τον αριθμό των διανυσμάτων σε μία βάση για τον υπόχωρο, η οποία είναι μία συλλογή γραμμικών ανεξάρτητων διανυσμάτων τα οποία παράγουν ολόκληρο τον υπόχωρο. Ο μοναδικός υπόχωρος διάστασης μηδέν είναι 0. Ένας υπόχωρος διάστασης ένα παράγεται από ένα μη-μηδενικό διάνυσμα, $\{au | u \neq 0, a \in F\}$, ένας υπόχωρος διάστασης δύο παράγεται από δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, $\{au_1 + bu_2 | u_1, u_2 \text{ γραμμικώς ανεξάρτητα}, a, b \in F\}$, και πάει λέγοντας. Ο διανυσματικός χώρος F_q^n αποτελείται απο n-άδες, ή n-διανυσματικές συνιστώσες,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

όπου κάθε a_i είναι ένα στοιχείο του πεπερασμένου σώματος F_q. Επειδή $|F_q| = q$, υπάρχουν q^n τέτοιες n-άδες, ή $|F_q^n| = q^n$.

Απόδειξη. του Θεωρήματος 7.1 Έστω $V = F_q^n$. Για $j = 0$, $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1$ και υπάρχει μόνο ένας μη-μηδενικός υπόχωρος του V, οπότε αυτή η περίπτωση έχει αποδειχθεί. Για $j \geq 1$, για να αποκτήσουμε έναν υπόχωρο διάστασης j, επιλέγουμε j γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον V για να σχηματίσουμε μία βάση. Το πρώτο, u_1, μπορεί να είναι ένα από τα $q^n - 1$ μη-μηδενικά διανύσματα. Το δεύτερο,u_2, δεν μπορεί να είναι οποιοδήποτε διάνυσμα στον υπόχωρο που παράγεται απο το u_1. Επειδή ένας υπόχωρος διάστασης ένα έχει q στοιχεία, υπάρχουν $q^n - q$ επιλογές για την δεύτερη βάση διανυσμάτων. Τότε, ο αριθμός των επιλογών για την τρίτη, u_3, είναι $q^n - q^2$, επειδή αυτό δεν μπορεί να είναι στον υπόχωρο διάστασης δύο που παράγεται απο τα u_1 και u_2, το οποίο έχει q^2 στοιχεία. Γενικά, μετά την συλλογη της i-στής διανυσματικής βάσης, ο αριθμός των διανυσμάτων στον υπόχωρο που παράγεται από τις πρώτες i διανυσματικές βάσεις είναι q^i, και έχουν μείνει $q^n - q^i$ επιλογές για την $(i + 1)$-στή. Άρα, έχουμε

$$(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{j-1}) \tag{7.2}$$

διαφορετικές επιλογές για να διαλέξουμε j γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα στον F_q^n.
Ωστόσο, πολλές από αυτές τις j-άδες παράγουν τον ίδιο υπόχωρο. Θα πρέπει να διαιρέσουμε την έκφραση (7.2) με τον αριθμό των διαφορετικών πιθανών τρόπων της βάσης ενός συγκεκριμένου υπόχωρου διάστασης j. Αλλά αυτό είναι κατούσίαν ο ίδιος αριθμός στην (7.2), με το n να έχει αντικατασταθεί από το j. Άρα, ο αριθμός των διαφορετικών υπόχωρων διάστασης j είναι

$$\frac{(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{j-1})}{(q^j - 1)(q^j - q)(q^j - q^2) \cdots (q^j - q^{j-1})}$$

$$= \frac{q \cdot q^2 \cdots q^{j-1} \cdot (q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-j+1} - 1)}{q \cdot q^2 \cdots q^{j-1} \cdot (q^j - 1)(q^{j-1} - 1) \cdots (q - 1)}$$

$$= \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix},$$

σύμφωνα με την σχέση (6.4). □

Όπως ο κανόνας του Pascal, πολλές ταυτότητες που περιλαμβάνουν διωνυμικούς συντελεστές έχουν τα q-αναλογά τους. Φανταστείτε ότι έχουμε $m+n$ μπάλες, και τις τοποθετούμε σε δύο ομάδες, μία με m και μία με n από αυτές.

Κάθε τρόπος να διαλέξουμε k μπάλες από όλες τις $m+n$ από αυτές αντιστοιχούν σε ένα προς ένα τρόπο να διαλέξουμε j μπάλες από την ομάδα με τις m μπάλες και διαλέγοντας $k-j$ μπάλες από την ομάδα με τις n μπάλες, με το j να τρέχει από 0 έως k. Άρα, έχουμε την ακόλουθη ταυτότητα των διωνυμικών συντελεστών:

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}. \tag{7.3}$$

Παράδειγμα 6. Για να αποκτήσουμε ένα q-ανάλογο της ταυτότητας (7.3) χρησιμοποιώντας τη συνδυαστική αναπαράσταση των q-διωνυμικών συντελεστών όπως έχουν αναφερθεί στο Θεώρημα 7.1.

Έστω $V = F_q^{m+n}$ και έστω $V_m \subset V$ να είναι ένας σταθερός υπόχωρος με $\dim V_m = m$. Θα θέλαμε να αποκτήσουμε μία ταυτότητα για να μετράμε των αριθμών των υπόχωρων διάστασης k στον V με δύο τρόπους. Πρώτα, από το Θεώρημα 7.1, ξέρουμε ότι αυτός ο αριθμός ισούται με $\left[{m+n \atop k}\right]$. Από την άλλη, έστω W να είναι ένας υπόχωρος διάστασης k του V. Ως η τομή των δύο υποχώρων, $W \cap V_m$ είναι επίσης ένας υπόχωρος, διάστασης j, το οποίο είναι ανάμεσα στο 0 και k. Ας θεωρήσουμε κάθε W καθώς επεκτείνεται από ένα υπόχωρο διάστασης j του V_m. Υποθέτουμε ότι ένας υπόχωρος $W' \subset V_m$, $\dim W' = j$, έχει επιλεγεί. Τώρα προσθέτουμε $k-j$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $(u_1, u_2, \ldots, u_{k-j})$ στον W' για να σχηματίσουμε W: το u_1 μπορεί να επιλεγεί από τα $q^{m+n} - q^m$ διανύσματα που δεν είναι στον V_m, το u_2 μπορεί να επιλεγεί από τα $q^{m+n} - q^{m+1}$ διανύσματα που δεν είναι στον υπόχωρο που παραγέται απο τα V_m και u_1, κ.τ.λ. Από το ίδιο επιχείρημα όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.1, υπάρχουν

$$(q^{m+n} - q^m)(q^{m+n} - q^{m+1}) \cdots (q^{m+n} - q^{m+k-j-1}) \tag{7.4}$$

διαφορετικούς τρόπους να προσθέσουμε $k-j$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα στον W'. Ξανά, πρέπει να μετρήσουμε τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να επεκτείνουμε τον W' σε ένα μόνο W. Επειδή $\dim W = k$ και $\dim W' = j$, ο αριθμός είναι

$$(q^k - q^j)(q^k - q^{j+1}) \cdots (q^k - q^{k-1}), \tag{7.5}$$

σύμφωνα με παρόμοια επιχειρήματα. Επιπλέον, ο αριθμός των διαφορετικών

W που λαμβάνεται με την επέκταση από ένα δοσμένο W' είναι

$$\frac{(q^{m+n}-q^m)(q^{m+n}-q^{m+1})\cdots(q^{m+n}-q^{m+k-j-1})}{(q^k-q^j)(q^k-q^{j+1})\cdots(q^k-q^{k-1})}$$

$$=\frac{q^m\cdot q^{m+1}\cdots q^{m+k-j-1}\cdot(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+j+1}-1)}{q^j\cdot q^{j+1}\cdots q^{k-1}\cdot(q^{k-j}-1)(q^{k-j-1}-1)\cdots(q-1)}$$

$$=q^{(k-j)(m-j)}\begin{bmatrix}n\\k-j\end{bmatrix}.$$

Επειδή υπάρχουν $\left[\begin{smallmatrix}m\\j\end{smallmatrix}\right]$ διαφορετικές επιλογές για τον W' και κάθε δύο απάυτές παράγουν ξεχωριστό W, έχουμε την ταυτότητα

$$\begin{bmatrix}m+n\\k\end{bmatrix}=\sum_{j=0}^{k}q^{(k-j)(m-j)}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\k-j\end{bmatrix}, \tag{7.6}$$

το οποίο είναι το q-ανάλογο της (7.3).

Παράδειγμα 7. *Ανακαλώντας απο την (4.4) το q-ανάπτυγμα Taylor της $f(x)=x^n$ γύρω από το $x=1$:*

$$x^n=\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}(x-1)_q^j.$$

Όπως υποσχεθήκαμε νωρίτερα, θα αποδείξουμε αυτό το ανάπτυγμα χρησιμοποιώντας συνδυαστικά επιχειρήματα. Η στρατηγική μας είναι να δείξουμε ότι η ταυτότητα ισχύει εάν $x=q^m$, όπου m είναι κάθε θετικός ακέραιος. Επειδή και οι δύο πλευρές της ταυτότητας είναι πολυώνυμα, ισότητα σε απείρα σημεία εξασφαλίζει ισότητα σε όλα τα σημεία. (Εάν f,g είναι πολυώνυμα και $f(x)=g(x)$ για άπειρες τιμές του x, το πολυώνυμο $h(x)=f(x)-g(x)$ έχει άπειρα μηδέν, το οποίο είναι πιθανό μόνο αν h είναι ταυτοτικά μηδέν.)
Έστω n,m να είναι θετικοί ακέραιοι και S το σύνολο όλων των γραμμικών μετασχηματισμών από το $A=F_q^n$ στο $B=F_q^m$. Υποθέτουμε ότι $e_1,\ldots,e_n$ είναι μία βάση για τον A. Επειδή, δεδομένου ότι κάθε $T\in S$, $T(e_k)$ μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα q^m διανύσματα στον B, για κάθε $1\leqslant k\leqslant n$, και μαζί καθορίζουν μοναδικά τον T, ο αριθμός των στοιχείων $|S|$ του S είναι $(q^m)^n$, το οποίο είναι το αριστερό μέρος της (4.4) όπου $x=q^m$. Από την άλλη, μπορούμε να γράψουμε

$$|S|=\sum_{j=0}^{n}(\textit{ο αριθμός των στοιχείων του S βαθμού } j)$$

Επιθυμούμε να δείξουμε ότι το j-στό άθροισμα είναι $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}(q^m - 1)^j_q$. Σημειώστε ότι ο βαθμός του T δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από m, το οποίει συμφωνεί με το γεγονός ότι $(q^m - 1)^j_q = 0$ όταν $j > m$. Άρα, θεωρούμε μόνο $j \leqslant m$.
Εδώ χρησιμοποιούμε κάποια γεγονότα από τους γραμμικούς μετασχηματισμούς. Ότι ο T έχει βαθμό j σημαίνει ότι $W = T(A) \subset B$ είναι ένας υπόχωρος διάστασης j, και ο A μπορεί να διασπαστεί ως ένα ευθύ άθροισμα δύο υποχώρων, $A = V \oplus K$, όπου $\dim V = j$ και $\dim K = n-j$, τέτοιος ώστε ο T απεικονίζει τον V πάνω στον W με ένα προς ένα τρόπο αναπαράστασης ως ένα άθροισμα δύο διανυσμάτων με μοναδικό τρόπο, όπου το ένα είναι στον V και το άλλο στον K. (Για να δούμε γιατί μία τέτοια διάσπαση είναι πιθανή, επιλέγουμε $u_1, \cdots, u_j$ στον A τέτοια ώστε οι εικόνες τους να σχηματίζουν μία βάση για τον W. Η γραμμική ανεξαρτησία των εικόνων τους συνεπάγεται τη δικιά τους γραμμική ανεξαρτησία. Έστω V να είναι ο χώρος που παράγεται από το u_i. Για κάθε $u \in A$, $T(u) \in W$. Επειδή $T(u_i)$ είναι μία βάση για τον W, $T(u) = \sum a_i T(u_i)$ για κάποια u_i. Έστω $u' = \sum a_i u_i$. Τότε, $u' \in V$ και $T(u - u') = 0$: άρα $u - u' \in K$. Ότι ο K είναι ένας υπόχωρος είναι εύκολο να το δείξουμε. Επειδή $T(V) = W$ και μαζί οι V και W περιέχουν q^j διανύσματα, ο T είναι ένα προς ένα στον V, και το u' είναι το μόνο διάνυσμα στον V τέτοιο ώστε $T(u) = T(u')$, υπονοεί την μοναδικότητα της διάσπασης.)
Από άλλη άποψη, θα προσδιορίσουμε τον T διαλέγοντας υποχώρους $V \subset A$ και $W \subset B$ και ο τρόπος να αντιστοιχίζεται ο V πάνω στον W. Από το Θεώρημα 7.1, ο αριθμός των επιλογών για τον V και τον W είναι $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}$. Τώρα, υποθέτουμε V και W δοσμένα, και έστω $u_1, \ldots, u_j$ να είναι μία βαση για τον V. Έχοντας κατα νου ότι T είναι ένα προς ένα, γνωρίζουμε ότι $T(u_1)$ μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα $q^j - 1$ μη μηδενικά διανύσματα στον W, $T(u_2)$ μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα $q^j - q$ μη μηδενικά διανύσματα στον W όχι όμως στα στοιχεία που παράγει η $T(u_1)$, $T(u_3)$ μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα $q^j - q^2$ μη μηδενικά διανύσματα στον W όχι όμως στα στοιχεία που παράγει η $T(u_1)$ και η $T(u_2)$, και παεί λέγοντας. Άρα, υπάρχουν $(q^j - 1)(q^j - q) \cdots (q^j - q^{j-1})$ τρόποι να απεικονίσουμε τον V πάνω στον W αμφιμονοσήμαντα. Επομένως, ο αριθμός των στοιχέιων του S βαθμού j είναι

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}\prod_{i=0}^{j-1}(q^j - q^i) \overset{\text{από (6.4)}}{=} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\prod_{i=0}^{j-1}\left(\frac{q^{m-i} - 1}{q^{j-i} - 1}\right)\prod_{i=0}^{j-1}(q^j - q^i)$$
$$= \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\prod_{i=0}^{j-1}(q^m - q^i) = \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}(q^m - 1)^j_q,$$

όπως, θέλουμε.

Το Θεώρημα 7.1 επίσης μας λέει ότι ο συνολικός αριθμός των υπόχωρων του διανυσματικού χώρου F_q^n δίνεται από

$$G_n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}, \tag{7.7}$$

το οποίο ονομάζεται *ο n-οστός αριθμός Galois*. Εάν οι q-διωνυμικοί συντελεστές αντικαταστηθούν από τους συνήθεις, το άθροισμα είναι ακριβώς 2^n. Ωστόσο, η περίπτωση του q-λογισμου δεν είναι εύκολο να υπολογιστεί ακριβώς. Αντί αυτού, οι αριθμοί Galois μπορούν να υπολογιστούν αναδρομικά, όπως δείχτηκε απο τους Goldman και Rota.

Πρόταση 7.2. *Οι αριθμοί Galois ικανοποιούν την ακόλουθη αναδρομική σχέση:*

$$G_{n+1} = 2G_n + (q^n - 1)G_{n-1}, \tag{7.8}$$

με $G_0 = 1$ *και* $G_1 = 2$.

Απόδειξη. Έστω $P_n(x) = (x-1)_q^n$. Το κόλπο που πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε είναι να ορίσουμε μία γραμμική συνάρτηση L στο χώρο των πολυωνύμων τέτοια ώστε

$$L\{P_n(x)\} = 1 \tag{7.9}$$

για κάθε μη-αρνητικό ακέραιο n. Όπως μία γραμμική συνάρτηση υπάρχει επειδή τα πολυώνυμα $(x-a)_q^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (για διαφορετικό n). Εάν εφαρμόσουμε την L και στις δύο πλευρές της (4.4), έχουμε

$$L\{x^n\} = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} L\{P_j(x)\} = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = G_n. \tag{7.10}$$

Για να εκμεταλλευτούμε την γραμμική ιδιότητα της L, σημειώνουμε ότι $P_{n+1}(x) = (x-q^n)P_n x = xP_n(x) - q^n P_n(x)$, άρα

$$L\{xP_n(x)\} = L\{P_{n+1}(x)\} + q^n L\{P_n(x)\}1 + q^n. \tag{7.11}$$

Από την άλλη, από $D_q P_n(x) = [n]P_{n-1}(x)$, έχουμε

$$1 + q^n = 2L\{P_n(x)\} + (q-1)L\{D_q P_n(x)\}. \tag{7.12}$$

Εξισώνοντας τις (7.11) και (7.12), παίρνουμε

$$L\{xP_n(x)\} = 2L\{P_n(x)\} + (q-1)L\{D_q P_n(x)\}, \tag{7.13}$$

το οποίο είναι αληθές για κάθε $n \geq 0$. Επειδή κάθε πολυώνυμο μπορεί να εκφραστεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός της $P_n(x)$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $P_n(x)$ στην (7.13) με κάθε πολυώνυμο. Ιδίως, εάν αντικαταστήσουμε αυτό με την x^n, παίρνουμε

$$\begin{aligned} L\{x^{n+1}\} &= 2L\{x^n\} + (q-1)L\{[n]x^{n-1}\} \\ &= 2L\{x^n\} + (q^n-1)L\{x^{n-1}\} \end{aligned}$$

σύμφωνα με την (7.10), αυτό αποδεικνύει την (7.8). □

Επιπλέον, εάν διαλέξουμε άλλη γραμμική συνάρτηση L' τέτοια ώστε $L\{P_n\} = t^n$, θα πάρουμε τον ακόλουθο αναδρομικό τύπο με παρόμοιο τρόπο:

$$L'\{x^{n+1}\} = (t+1)L'\{x^n\} + t(q^n-1)L'\{x^{n-1}\}.$$

Και αν ορίσουμε την ακολουθία

$$f_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} t^j$$

των πολυωνύμων του t, έχουμε $f_n(t) = L'x^n$, και άρα

$$f_{n+1}(t) = (t+1)f_n(t) + (q^n-1)tf_{n-1}(t), \quad n \geq 1.$$

Σημειώστε ότι $G_n = f_n(1)$ και βάζοντας $t = 1$ παραπάνω ξαναπαίρνω την Πρόταση 7.2.
Όταν $t = -1$, η αναδρομική σχέση είναι ιδιαίτερα απλή:

$$f_{n+1}(-1) = (1-q^n)f_{n-1}(-1), \quad n \geq 1,$$

Επειδή $f_0(-1) = 1$ και $f_1(-1) = 0$, έχουμε

$$\sum_{j=0}^{2m} (-1)^j \begin{bmatrix} 2m \\ j \end{bmatrix} = (1-q^{2m-1})(1-q^{2m-3}\cdots(1-q)), \tag{7.14}$$

και

$$\sum_{j=0}^{2m+1} (-1)^j \begin{bmatrix} 2m+1 \\ j \end{bmatrix} = 0 \tag{7.15}$$

για κάθε $m \geq 0$. Αυτές οι δύο ταυτότητες ανακαλύφθηκαν πρώτα από τον Gauss. Η σημερινή απόδειξη οφείλεται στους Goldman και Rota.

Κεφάλαιο 8

Ο q-τύπος του Taylor για τυπικές δυναμοσειρές και ο διωνυμικός τύπος του Heine

Θα ξεκινήσουμε να εφαρμόζουμε ότι έχουμε μάθει τόσο καιρό, ειδικότερα τον q-τύπο του Taylor (4.1), για να μελετήσουμε ταυτότητες που περιέχουν άπειρα αθροίσματα και γινόμενα. Για να το κάνουμε αυτό, πρέπει πρώτα να παρατηρήσουμε ότι ο γενικευμένος τύπος του Taylor (2.2) γύρω από το $a = 0$, και ο τύπος του Taylor (4.1) για $c = 0$, δεν εφαρμόζεται μόνο στα πολυώνυμα, αλλά επίσης στις τυπικές δυναμοσειρές. Μία τυπική δυναμοσειρά, της μορφής

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

μπορούμε να το σκεφτούμε σαν πολυώνυμα άπειρου βαθμού. Είναι «τυπική» επειδή συχνά δεν ανησυχούμε σχετικά με το αν η σειρά συγκλίνει ή όχι, και μπορούμε να κάνουμε πράξεις (για παράδειγμα, να διαφορίσουμε) πάνω στις σειρές τυπικά. Θα πρέπει να υποθέσουμε a και c να είναι μηδέν ώστε να αποφύγουμε τα προβλήματα απόκλισης. Φυσικά, $f(0) = c_0$ εξ' ορισμού.
Η q-παράγωγος των τυπικών δυναμοσειρών $f(x)$ είναι, φυσικά, $D_q f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}[k]c_k x^{k-1}$. Άρα έχουμε

$$[k]c_k = (D_q^k f(x))(0).$$

Αυτό ακολουθεί, ειδικότερα, ότι αν δύο τυπικές δυναμοσειρές συγκλίνουν σε κάποια «γειτονιά» του 0 στην ίδια συνάρτηση, τότε αυτές είναι ίσες.

Θεώρημα 8.1. *Υποθέτουμε D να είναι ένας γραμμικός τελεστής στον χώρο των τυπικών δυναμοσειρών και $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots\}$ είναι μία ακολουθία* *πολυωνύμων τέτοια ώστε οι τρεις συνθήκες του Θεωρήματος 2.1 ικανοποιούνται για $a = 0$. Τότε, κάθε τυπική δυναμοσειρά $f(x)$ μπορεί να εκφραστεί ως γενικευμένη σειρά Taylor (2.2) γύρω από το $x = 0$.*

Πόρισμα 8.2. *Κάθε τυπική δυναμοσειρά $f(x)$ μπορεί να εκφραστεί ως μία q-σειρά Taylor (4.1) γύρω απο το $x = 0$.*

Απόδειξη. του Θεωρήματος 8.1 Είναι εύκολο να δούμε ότι με επαγωγή στο n ότι στην περίπτωση $a = 0$ οι τρεις συνθήκες του Θεωρήματος 2.1 συνεπάγονται ότι $P_n(x) = a_k x^k$, όπου οι a_k είναι μη-μηδενικοί αριθμοί. Άρα για κάθε τυπική δυναμοσειρά $f(x)$, έχουμε

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j P_j(x)$$

για κάποιες σταθερές c_j. Εφαρμόζοντας το D k φορές και βάζοντας όπου $x = 0$ δίνει $c_k = (D^k f)(0)$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παράδειγμα 8. *Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)_q^n}$. Χρησιμοποιώντας τη διχοτόμηση, μπορούμε να δούμε ότι η $f(x)$ είναι μία τυπική δυναμοσειρά. Ας επεκτείνουμε την $f(x)$ χρησιμοποιώντας τον q-τύπο του Taylor γύρω από το $x = 0$. Από την (3.12), έχουμε*

$$D_q f(x) = D_q \frac{1}{(1-x)_q^n} = \frac{[n]}{(1-x)_q^{n+1}},$$

και, με επαγωγή,

$$D_q^j f(x) = \frac{[n][n+1]\cdots[n+j-1]}{(1-x)_q^{n+j}}.$$

Άρα, $(D_q^j f)(0) = [n][n+1]\cdots[n+j-1]$ για κάθε $j \geq 1$, και επιπλέον,

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[n][n+1]\cdots[n+j-1]}{[j]!} x^j, \tag{8.1}$$

το οποίο είναι το q-ανάλογο του αναπτύγματος του Taylor της $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^n}$ στον συνήθη λογισμό. Ο τύπος (8.1) ονομάζεται ο διωνυμικός τύπος του Heine.

Κεφάλαιο 9

Οι δύο ταυτότητες του Euler και οι δύο q-εκθετικές συναρτήσεις

Τώρα έχουμε δύο διωνυμικούς τύπους, ονομαστικά είναι ο τύπος του Gauss (5.5) (με το x και το a να έχουν αντικατασταθεί απο το 1 και το x αντίστοιχα)

$$(1+x)_q^n = \sum_{j=0}^{n} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j,$$

και ο τύπος του Heine (8.1)

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[n][n+1]\cdots[n+j-1]}{[j]!} x^j.$$

Τι θα γίνει αν αφήσουμε το $n \to \infty$ και στους δύο τύπους·Στον συνήθη λογισμό, δηλαδή για , $q = 1$, η απάντηση δεν είναι πολύ ενδιαφέρον. Αυτό είναι είτε απείρως μεγάλο είτε απείρως μικρό, ανάλογα με την τιμή του x. Ωστόσο, αυτό είναι διαφορετικό στον κβαντικό λογισμό, επειδή, για παράδειγμα, όταν $|q| < 1$, το άπειρο γινόμενο $(1+x)_q^\infty = (1+x)(1+qx)\cdots$ συγκλίνουν σε κάποιο πεπερασμένο όριο. Επιπλέον, εάν υποθέσουμε $|q| < 1$, έχουμε

(9.1) $$\lim_{n\to\infty}[n] = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-j+1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}.$$

Έτσι έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}. \tag{9.2}$$

Έτσι, τα q-ανάλογα των ακεραίων και των διωνυμικών συντελεστών συμπεριφέρονται με διαφορετικό τρόπο όταν n είναι μεγάλο σε σύγκριση με τα συνήθη αντίστοιχα τους. Εάν εφαρμόσουμε την (9.1) και την (9.2) στους διωνυμικούς τύπους του Gauss και του Heine, παίρνουμε, ότι καθώς $n \to \infty$, οι ακόλουθες δύο ταυτότητες των τυπικών δυναμοσειρών του x(υποθέτοντας ότι $|q| < 1$):

$$(1+x)_q^\infty = \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}, \tag{9.3}$$

$$\frac{1}{(1-x)_q^\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}. \tag{9.4}$$

Οι δύο παραπάνω ταυτότητες σχετίζουν άπειρα αθροίσματα σε άπειρα γινόμενα. Αυτές δεν έχουν κλασσικά ανάλογα επειδή κάθε όρος στα αθροίσματα δεν έχει νόημα όταν $q = 1$. Ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι, οι δύο ταυτότητες ανακαλύφθηκαν απο τον Euler, ο οποίος έζησε πριν από τον Gauss και τον Heine. Θα ονομάσουμε τις (9.3) και (9.4) η πρώτη και η δεύτερη ταυτότητα του Euler, αντίστοιχα, ή E_1 και E_2.
Ας μελετήσουμε την E_2 πιο προσεκτικά. Θεωρούμε

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{1\left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)\cdots\left(\frac{1-q^j}{1-q}\right)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{[j]!}, \end{aligned} \tag{9.5}$$

το οποίο μοιάζει με το ανάπτυγμα Taylor της κλασικής εκθετικής συνάρτησης:

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!}. \tag{9.6}$$

Ορισμός 9.1. *Ένα q-ανάλογο της κλασικής εκθετικής συνάρησης e^x είναι*

$$e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!}. \tag{9.7}$$

Τότε, από τις (9.4) και (9.5), έχουμε αμέσως ότι

$$e_q^{\frac{x}{(1-q)}} = \frac{1}{(1-x)_q^\infty}, \tag{9.8}$$

ή

$$e_q^x = \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^\infty}. \tag{9.9}$$

Ανάλογα, μπορούμε να ορίσουμε άλλη q-εκθετική συνάρτηση χρησιμοποιώντας την E_1.

Ορισμός 9.2. *Άλλο q-ανάλογο της κλασσικής εκθετικής συνάρτησης είναι*

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{x^j}{[j]!} = (1+(1-q)x)_q^\infty. \tag{9.10}$$

Ας μελετήσουμε μερικές ιδιότητες των q-διωνυμικών συντελεστών. Η κλασική εκθετική συνάρτηση είναι αμετάβλητη υπό τη διαφόριση. Τα q-αναλογά τους έχουν παρόμοια συμπεριφορά. Επειδή

$$D_q e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D_q x^j}{[j]!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[j]x^{j-1}}{[j]!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{[j-1]!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!}$$

και,

$$\begin{aligned} D_q E_q^x &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{D_q x^j}{[j]!} = \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{[j]x^{j-1}}{[j]!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{(j-1)(j-2)}{2}} q^{j-1} \frac{x^{j-1}}{[j-1]!} = \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{q^j x^j}{[j]!}, \end{aligned}$$

έχουμε

$$D_q e_q^x = e_q^x \quad \textit{και} \quad D_q E_q^x = E_q^{qx}. \tag{9.11}$$

Σημειώστε ότι η παράγωγος της E_q^{qx} δεν είναι ακριβώς η ίδια. Τα αποτελέσματα στην (9.11) μπορούν να αποκτηθούν αφήνοντας το $n \to \infty$ στην

$$D_q \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^n} = \frac{(1-q)[n]}{(1-(1-q)x)_q^{n+1}}.$$

Τι συμβαίνει με το γινόμενο $e_q^x e_q^y$· Γενικά, $e_q^x e_q^y \neq e_q^{x+y}$. Αλλά η προσθετική ιδιότητα των εκθετικών ισχύει εάν x και y ικανοποιεί την αντιμεταθετική σχέση που έχει αναφερθεί στο Κεφάλαιο 5, δηλαδη, $yx = qxy$. Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε

$$\begin{aligned} e_q^x e_q^y &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{[k]!}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^j y^k}{[j]![k]!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[j+k]!}{[j]![k]!} \cdot \frac{x^j y^k}{[j+k]!}. \end{aligned}$$

Εάν αλλάξουμε μεταβλητές απο j και k στις j και $n = n + k$, τότε για μία συγκεκριμένη τιμή του n, το j τρέχει απο το 0 στο n. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.1, έχουμε

$$e_q^x e_q^y = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j}\right)\frac{1}{[n]!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{[n]!}.$$

Άρα, έχουμε

(9.12) $$e_q^x e_q^y = e_q^{x+y} \quad \textit{εάν } yx = qxy.$$

Λόγω της αντιμεταθετικής σχέσης, τα x και y δεν είναι συμμετρικά, και $e_q^x e_q^y \neq e_q^y e_q^x$.

Επίσης, οι q-εκθετικές συναρτήσεις είναι στενά συνδεδεμένες. Από τις (9.9) και (9.10). μπορούμε να δούμε ότι

(9.13) $$e_q^x E_q^x = 1,$$

και, χρησιμοποιώντας τις (9.3) και (9.4), παίρνουμε

$$\begin{aligned} e_{\frac{1}{q}}^x &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{q}\right)^j x^j}{\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{q^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q^j}\right)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{(1-q)^j x^j}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}, \end{aligned}$$

και έτσι έχουμε

(9.14) $$e_{\frac{1}{q}}^x = E_q^x.$$

Κεφάλαιο 10

q-Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Τα q-ανάλογα των ημιτονικών και συνημιτονικών συναρτήσεων μπορούν να οριστούν ανάλογα με τις γνωστές εκφράσεις του Euler σε όρους της εκθετικής συναρτησής τους.

Ορισμός 10.1. *Οι q-τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι*

$$\sin_q x = \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i}, \quad \mathrm{Sin}_q x = \frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i}, \tag{10.1}$$

$$\cos_q x = \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2}, \quad \mathrm{Cos}_q x = \frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2}. \tag{10.2}$$

Από την (9.14) έχουμε $\mathrm{Sin}_q x = \sin_{\frac{1}{q}} x$ και $\mathrm{Cos}_q x = \cos_{\frac{1}{q}} x$. Επίσης, χρησιμοποιώντας την (9.13), παίρνουμε

$$\cos_q x \mathrm{Cos}_q x = \frac{e_q^{ix} E_q^{ix} + e_q^{-ix} E_q^{-ix} + 2}{4}$$

και

$$\sin_q x \mathrm{Sin}_q x = \frac{e_q^{ix} E_q^{ix} + e_q^{-ix} E_q^{-ix} - 2}{4}$$

Άρα, έχουμε

$$\cos_q x \mathrm{Cos}_q x + \sin_q x \mathrm{Sin}_q x = 1, \tag{10.3}$$

το οποίο είναι το q-ανάλογο της ταυτότητας $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Ο αναγνώστης καλείται να προσπαθήσει να βρει τα q-ανάλογα των άλλων τριγωνομετρικών τύπων. Για να βρούμε τις παραγώγους των q-τριγωνομετρικών συναρτήσεων, εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας (1.15), όπου $u(x) = ix$, και χρησιμοποιούμε την (9.11). Τότε, παίρνουμε

$$D_q \sin_q x = \cos_q x, \quad D_q \mathrm{Sin}_q x = \mathrm{Cos}_q x, \tag{10.4}$$

$$D_q \cos_q x = -\sin_q x, \quad D_q \mathrm{Cos}_q x = -\mathrm{Sin}_q x. \tag{10.5}$$

Κεφάλαιο 11

Η Ταυτότητα του Τριπλού Γινομένου του Jacobi

Υπενθυμίζουμε ότι οι δύο ταυτότητες του Euler, οι (9.3) και (9.4), σχετίζουν άπειρα γινόμενα και άπειρα αθροίσματα. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα τις χρησιμοποιήσουμε αυτές για να αποδείξουμε μία σημαντική ταυτότητα που ανακαλύφθηκε πρώτα από τον Jacobi. Αρκετές ενδιαφέρουσες εφαρμογές αυτής της ταυτότητας στην θεωρία αριθμών θα εξεταστούν στα επόμενα κεφάλαια.

Θεώρημα 11.1. *Εάν* $|q| < 1$, *έχουμε*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z)(1+q^{2n-1}z^{-1}), \tag{11.1}$$

η οποία είναι η ταυτότητα του τριπλού γινομένου του Jacobi.

Απόδειξη. **(G.E. Andrews)** Ξεκινάμε με την E_1:

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1+q^n x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{j(j-1)}{2}} x^j}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}. \tag{11.2}$$

Εάν αντικαταστήσουμε το q με το q^2, και το x με το zq, παίρνουμε

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{2n-1}z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1+q^{2n+1}z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j^2} z^j}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2j})}.$$

Το γινόμενο στον παρανομαστή κάθε όρου του αθροίσματος μπορεί να αφαιρεθεί πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές με

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}),$$

δίνοντας

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(q^{j^2}z^j\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n+2j+2})\right). \tag{11.3}$$

Σημειώστε ότι το άθροισμα στα δεξιά αρχίζει από το $-\infty$ αντί για μηδέν.Το άθροισμα είναι αμετάβλητο επειδή $(1-q^{2n+2j+2})=0$ για κάποια $n\geq 0$ εάν j είναι αρνητικός. Από την άλλη, χρησιμοποιούμε την (11.2) ξανά, αντικαθιστώντας τον δείκτη j με το k, το q με το q^2, και τότε το x με το $-q^{2j+2}$, παίρνουμε

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n+2j+2}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k q^{k^2+2kj+k}}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})}.$$

Τοποθετόντας αυτό στην (11.3) μας δίνει

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+\ q^{2n-1}z) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k q^{(j+k)^2+k}z^j}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})}\\ &\overset{\text{θέτουμε } j=j-k}{=} \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{j^2}z^j(-qz^{-1})^k}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})},\end{aligned} \tag{11.4}$$

όπου η τελευταία γραμμή έχει βγει μετατοπίζοντας το δείκτη j με το $j-k$. Τώρα χρησιμοποιούμε την E_2 με το q να έχει αντικατασταθεί με το q^2 και τότε το x με το $-qz^{-1}$ να παίρνουμε

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+q^{2n-1}z^{-1})} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-qz^{-1})^k}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})}. \tag{11.5}$$

Επιπλέον, απο τις (11.4) και (11.5), έχουμε

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(q^{j^2}z^j\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+q^{2n-1}z^{-1})}\right),$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με την (11.1). □

Κεφάλαιο 12

Η κλασσική συνάρτηση διαμέρισης και ο τύπος γινομένου του Euler

Με διάφορες αντικαταστάσεις του q και του z, η ταυτότητα του τριπλού γινομένου του Jacobi δίνει ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Για παράδειγμα, εάν βάλουμε όπου $q = q^{\frac{3}{2}}$ και το $z = -q^{-\frac{1}{2}}$ στην (11.1), παίρνουμε

$$\sum_{n\in Z}(-1)^n q^{\frac{(3n^2-n)}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{3n})(1-q^{3n-2})(1-q^{3n-1}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n), \tag{12.1}$$

το οποίο είναι *ο κανόνας γινομένου του Euler*. Αποδείξαμε ότι αυτό ισχύει όταν $|q| < 1$. Αυτό συνεπάγεται επίσης ότι ισχύει μία ισότητα των τυπικών δυναμοσειρών του q (βλέπε Κεφάλαιο 8). Ο τύπος αυτός μπορεί να γραφτεί χρησιμοποιώντας τον κανόνα γινομένου του Euler ως εξής

$$\varphi(q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$$

όπως

$$\varphi(q) = \sum_{n\in Z}(-1)^n q^{e_n}, \tag{12.2}$$

όπου

$$e_n = \frac{3n^2-n}{2} \tag{12.3}$$

ονομάζονται *πεντάγωνοι αριθμοί.* Ο αναγνώστης προτρέπεται να πολλαπλασιάσει τα πρώτα στοιχεία του κανόνα γινομένου του Euler για να ανακαλύψουμε το εκπληκτικό γεγονός ότι πράγματι ο e_n-οστός συντελεστής είναι $(-1)^n$ και όλοι οι άλλοι συντελεστές είναι μηδέν.

Ορισμός 12.1. *Η κλασική συνάρτηση διαμέρισης* $p(n)$ ορίζεται στο σύνολο των ακεραίων αφήνοντας το $p(n)$ να είναι ο αριθμός των τρόπων να διαχωρίσουμε το n σε ένα άθροισμα θετικών ακεραίων(δεν μετράμε τη σειρα των όρων της πρόσθεσης) εάν $n > 0$, $p(n) = 0$ εάν $n < 0$, και $p(0) = 1$.

Για παράδειγμα, $p(1) = 1$ επειδή ο μόνος τρόπος να γράψουμε το 1 σαν άθροισμα είναι $1 = 1$, $p(2) = 2$ επειδή $2 = 2 = 1 + 1$,$p(3) = 3$ επειδή $3 = 3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$, $p(4) = 5$ επειδή $4 = 4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$, και πάει λέγοντας. Αυτή η αργή ανάπτυξη του $p(n)$ για μικρές τιμές του n είναι παραπλανητική, επειδή στην πραγματικότητα, κάποιος γνωρίζει ότι

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}} \quad \textit{καθώς } n \to \infty.$$

Άρα ο χρόνος που χρειάζεται για να απαριθμήσουμε όλους τις διαμερίσεις του n μεγαλώνει εκθετικά σε σχέση με το n.
Η ακόλουθη Πρόταση μας δείχνει πως η $\varphi(q)$ σχετίζεται με τα χωρίσματα των ακεραίων.

Πρόταση 12.2. *Καθεμία έχει την ακόλουθη ισότητα των τυπικών δυναμοσειρών στο* q*:*

$$\frac{1}{\varphi(q)} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n. \tag{12.4}$$

Απόδειξη. Αυτό το γνωστό επιχείρημα θα το χρησιμοποιούμε συχνά στα επόμενα κεφάλαια. Υποθέτοντας ότι $|q| < 1$ και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα των γεωμετρικών σειρών(δηλαδή $(1 + q + q^2 + \ldots) = \dfrac{1}{(1-q)}$), έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi(q)} &= \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots} \\
&= (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots)(1 + q^2 + q^4 + q^6 + \cdots) \\
&\quad \times (1 + q^3 + q^6 + q^9 + \cdots)\cdots .
\end{aligned}$$

Σημειώστε ότι οι εκθέτες του q στον n-οστό παράγοντα είναι όλα τα μηαρνητικά ακέραια πολλαπλάσια του n. Εάν επεκτείνουμε το γινόμενο στο δεξί μέλος σε μία δυναμοσειρά, κάθε όρος είναι της μορφής $q^{n_1}q^{2n_2}q^{3n_3}\cdots q^{1n_1+2n_2+3n_3+\cdots}$, όπου n_i είναι όλοι μη-αρνητικοί ακέραιοι. Ο q^n όρος αποκτιέται εάν $n = 1n_1+2n_2+3n_3+\cdots$, για κάποια n_i, και κάθε q^n όρος αντιστοιχεί σε έναν τρόπο να εκφράσουμε το n σαν άθροισμα θετικών ακεραίων, δηλαδή, το άθροισμα των 1 n_1, 2 n_2, 3 n_3 και πάει λέγοντας. Επίσης, ένας τρόπος να διαχωρίσουμε το n θα συνεισφέρει ένα νέο q^n όρο. Επιπλέον, ο συντελεστής του q^n, ή ο αριθμός των q^n όρων, είναι ακριβώς ο αριθμός των τρόπων να διαχωρίσουμε το n σε ένα άθροισμα θετικών ακεραίων. □

Με την παραπάνω ερμηνεία της $\varphi(q)$, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ταυτότητα του γινομένου του Euler για να πάρουμε μία σχέση ανάμεσα στους αριθμούς $p(n)$. Αυτή η σχέση διευκρινίζεται στο ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 12.3. *Για κάθε θετικό ακέραιο n έχουμε*

$$\begin{aligned} p(n) = \;& p(n-e_1)+p(n-e_{-1})-p(n-e_2)-p(n-e_{-2}) \\ & +p(n-e_3)+p(n-e_{-3})+\cdots, \end{aligned} \tag{12.5}$$

όπου οι e_n είναι οι πεντάγωνοι αριθμοί που έχουν οριστεί απο τη σχέση (12.3).

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις (12.2) και (12.4), έχουμε

$$1 = \left(\sum_{j\in Z}(-1)^j q^{e_j}\right)\left(\sum_{k\in Z} p(k)q^k\right) = \sum_{k,j\in Z} p(k)(-1)^j q^{e_j+k}. \tag{12.6}$$

Όταν αναπτύξουμε το γινόμενο, παίρνουμε τον $(-1)^j p(k)q^n$ όρο εάν $n = e_j+k$ για κάποιους ακέραιους j και k. Άρα, για $n>0$, παίρνουμε

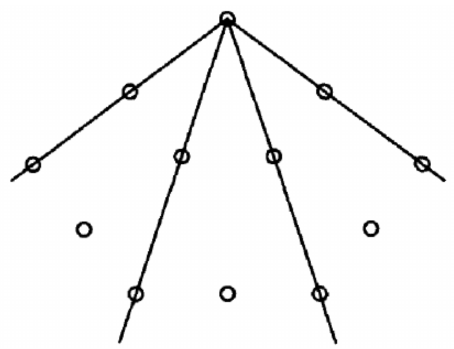
$$\begin{aligned} 0 = \;& p(n-e_0)-p(n-e_1)-p(n-e_{-1})+p(n-e_2)+p(n-e_{-2}) \\ & -p(n-e_3)-p(n-e_{-3})+\cdots, \end{aligned} \tag{12.7}$$

(Το παραπάνω αποτέλεσμα βγαίνει αν δούμε και τις δύο πλευρές της (12.6) σαν πολυώνυμα του q και δεδομένου ότι για $k=0$ και $j=0$ το δεξί μέλος της (12.6) ισούται με $p(0)=1$, τότε καταλήγουμε στην παραπάνω ισότητα (12.7).)

όπου εξισώνουμε τους συντελεστές και στις δύο πλευρές. Επειδή $e_0 = 0$, η απόδειξη είναι ολοκληρωμένη. □

Ο τύπος (12.5) είναι ένας βολικός αναδρομικός τύπος για ένα γρήγορο υπολογισμό της $p(n)$. Για παράδειγμα, $p(5) = p(4)+p(3)-p(0) = 5+3-1 = 7$, $p(6) = p(5)+p(4)-p(1) = 11$, κ.τ.λ. Ο χρόνος που χρειαζόμαστε να αξιολογήσουμε τη $p(n)$ χρησιμοποιώντας ττον τύπο (12.5) μεγαλώνει αργά σε σχέση

με το n, το οποίο είναι, φυσικά, πολύ λιγότερο απ'οτι απαιτούμε να αξιολογήσουμε όλους τις διαμερίσεις του n.
Όπως υπαινίσσεται και το όνομά τους, οι πεντάγωνοι αριθμοί e_n έχουν μία γεωμετρική ερμηνεία. Αυτό περιγράφεται στο ακόλουθο σχήμα:



Τα πεντάγωνα που είναι παρόμοια με κάθε άλλο πο μπορούμε να σχεδιάσουμε ενώνοντας τις n-οστές κορυφές για κάθε ακτίνα. Ο αριθμός των κορυφών που περικλείονται από τα πεντάγωνα (υπολογίζονται αυτοί που είναι στις άκρες) είναι οι πεντάγωνοι αριθμοί. Για παράδειγμα, το πρώτο μη-τετριμμένο πεντάγωνο περιέχει $e_2 = 5$κορυφές και το δεύτερο $e_3 = 12$ κορυφές. Ο γενικός τύπος για τα e_n υπό αυτή την ερμηνεία μπορεί να αποδειχτεί με επαγωγή στην σχέση (12.3).
Τώρα που έχουμε τους πεντάγωνους αριθμούς, μπορούμε να ορίσουμε τους m-γωνους αριθμούς για κάθε $m \geq 3$ με τον ίδιο τρόπο. Οι δύο πιο συνηθισμένοι τύποι των πολύγωνων αριθμών είναι *οι τρίγωνοι αριθμοί*,

$$\triangle_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

και, φυσικά, τους *τετράγωνους αριθμούς*,

$$\square_n = n^2.$$

Γενικά, μπορούμε να συμπεράνουμε γεωμετρικά τον τύπο για τον n-οστό m-γωνο αριθμό:

$$m_n = (m-2)\triangle_{n-1} + n = \frac{n(mn-2n-m+4)}{2}.$$

Οι ταυτότητες για τους τρίγωνους και τετράγωνους αριθμούς παρόμοια με τον τύπο του γινομένου του Euler μπορεί να προέλθει από την ταυτότητα του τριπλού γινομένου του Jacobi. Και οι δύο ταυτότητες που δίνονται παρακάτω ανακαλύφθηκαν απο τον Gauss (πριν ο Jacobi ανακαλύψει την δικιά του ταυτότητα του τριπλού γινομένου).

Πρόταση 12.4.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{\triangle_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n})}{(1-q^{2n-1})}. \tag{12.8}$$

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας και το q και το z με το $q^{\frac{1}{2}}$ στην (11.1). Παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n\in Z} q^{\triangle_n} &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+q^n)(1+q^{n-1}) \\ &= 2\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^n).\end{aligned}$$

(Το 2 στην τελευταία ισότητα είναι ο πρώτος όρος του $1+q^{n-1}$, για $n=1$, οπότε μετά γίνεται $1+q^n$ και το 2 βγαίνει έξω από το γινόμενο.)
Παρατηρούμε ότι $\triangle_n = \triangle_{-n-1}$, και το άθροισμα απο το $n=0$ έως το ∞ είναι το ίδιο με το να ξεκινάει από $n=-1$ έως το $-\infty$. Άρα, έχουμε

$$\sum_{n\in Z} q^{\triangle_n} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^n). \tag{12.9}$$

Επειδή

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^{2n}}{1-q^n} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2n-1}}, \tag{12.10}$$

το επιθυμητό αποτέλεσμα έχει αποκτηθεί. □

Πρόταση 12.5.

$$\sum_{n\in Z}(-q)^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^n}{1+q^n} \tag{12.11}$$

Απόδειξη. Εάν θέσουμε $z=-1$ στην σχέση (11.1), έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n\in Z}(-q)^{n^2} &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})(1-q^{2n-1}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-q^{2n-1}) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^n}{1+q^n},\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την (12.10) στην τελευταία ισότητα. □

Οι ταυτότητες (12.8) και (12.11) θα είναι χρήσιμες αργότερα όταν όταν θα μελετήσουμε το διαχωρισμό ενός ακεραίου ως ένα άθροισμα τρίγωνων αριθμών ή τετράγωνων αριθμών. Πριν συνεχίσουμε, η συνδυαστική ερμηνεία της (12.10) αξίζει ένα σχόλιο.
Το γινόμενο στο αριστερό μέρος της (12.10) είναι

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots .$$

Ο q^n όρος εμφανίζεται στο ανάπτυγμα εάν $n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, όπου a_i είναι διακριτά. Χρησιμοποιώντας παρόμοιο επιχείρημα με αυτό που χρησιμοποιήσαμε στην Απόδειξη της Πρότασης 12.2, ο συντελεστής του q^n είναι ο αριθμός των τρόπων να γράψουμε το n ως ένα άθροισμα διακριτών θετικών ακεραίων. Από την άλλη, το γινόμενο στην άλλη πλευρά ισούται

$$(1+q+q^2+q^3+\cdots)(1+q^3+q^6+q^9+\cdots)(1+q^5+q^{10}+q^{15}+\cdots)\cdots .$$

Κάθε q^n όρος αντιστοιχεί σε έναν τρόπο έκφρασης του n ως ένα άθροισμα περιττών αριθμών. Επιπλέον, (12.10) λέει ότι ο αριθμός των τρόπων να διαχωρίσουμε το n σε διακριτούς θετικούς αριθμούς είναι το ίδιο με τον αριθμό των τρόπων να διαχωρίσουμε το n σε περιττούς αριθμούς.
Για να ολοκληρώσουμε το κεφάλαιο, θα διακόψουμε για λίγο τη συζητησή μας για τον q-λογισμό εισάγοντας μία σημαντική συνάρτηση στην θεωρία αριθμών η οποία μοιράζεται με το $p(n)$ την ίδια αναδρομική σχέση (12.5).

Θεώρημα 12.6. *Για κάθε μη-μηδενικό ακέραιο n, ορίζουμε την συνάρτηση*

$$d(n) = \begin{cases} \text{το άθροισμα των θετικών διαιρετών του } n, & \text{αν} \quad n > 0, \\ 0 & \text{αν} \quad n < 0. \end{cases}$$

Τότε, για $n > 0$ έχουμε

$$d(n) = d(n-e_1) + d(n-e_{-1}) - d(n-e_2) - d(n-e_{-2}) + \cdots , \tag{12.12}$$

όπου παίρνουμε $d(0) = n$ εάν μπεί στο δεξί μέλος.

Απόδειξη. Ορίζουμε την γενική συνάρτηση

$$D(q) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) q^n.$$

Αντιστρέφοντας τη σειρά της πρόσθεσης. έχουμε

$$
\begin{aligned}
D(q) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m|n} mq^n = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{m|n} mq^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m|n} m(q^m + q^{2m} + q^{3m} + \cdots) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m|n} \frac{mq^m}{1-q^m} \\
&= -q\sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{dq}\log(1-q^m) = -q\frac{d}{dq}\log\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m) \\
&= \frac{-q\frac{d}{dq}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)},
\end{aligned}
$$

ή

$$D(q)\varphi(q) = -q\frac{d}{dq}\varphi(q).$$

Χρησιμοποιώντας την (12.2), έχουμε

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} d(j)q^j\right)\left(\sum_{k\in Z}(-1)^k q^{e_k}\right) = \sum_{m\in Z}(-1)^{m+1}e_m q^{e_m}.$$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές του q^n και στις δύο πλευρές, έχουμε

$$\sum_{k\in Z}(-1)^k d(n-e_k) = \begin{cases} (-1)^{m+1}e_m & \text{αν} \quad n = e_m \textit{ για κάποια } m \in Z, \\ 0 & \textit{αλλιώς}, \end{cases}$$

το οποίο είναι το ίδιο με την (12.12), επειδή $j = n - e_k \geq 1$ και η $d(n)$ ορίζεται να είναι μηδέν για κάθε αρνητικό ακέραιο n. □

Παρατηρήσεις 12.7.

(i) $\sum_{m|n} mq^n = \sum_{m|n} m(q^m + q^{2m} + q^{3m} + \cdots)$, διότι, αφού το $m|n$ αυτό σημαίνει ότι το n είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του m και επειδή $m, n \geq 1$ ισχύει η παρατήρηση (i)

(ii) $\dfrac{mq^m}{1-q^m} = -q\frac{d}{dq}\log(1-q^m)$, ισχύει διότι το δεξί μέλος γίνεται

$$-q\frac{d}{dq}\log(1-q^m) = -q\frac{(1-q^m)'}{1-q^m} = -q\frac{-mq^{m-1}}{1-q^m} = \frac{mq^m}{1-q^m}.$$

Άρα ισχύει και η παρατήρηση (ii).

Κεφάλαιο 13

Οι q-υπεργεωμετρικές συναρτήσεις και ο τύπος του Heine

Για περαιτέρω μελέτη των άπειρων αθροισμάτων και των άπειρων γινομένων θα θέλαμε να εισάγουμε τις *υπεργεωμετρικές σειρές*. Μία κλασσική υπεργεωμετρική σειρά ορίζεται όπως ακολουθεί.

Ορισμός 13.1. *Η $F(x)$ είναι μία υπεργεωμετρική σειρά εάν*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{13.1}$$

όπου

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = R(n), \quad c_0 = 1, \tag{13.2}$$

και R είναι μία κλασματική συνάρτηση της οποίας ο παρανομαστής δεν μηδενίζεται στους μη-αρνητικούς ακεραίους.

Εάν $R(t)$ είναι δοσμένο, οι συντελεστές c_n προσδιορίζονται αμέσως:

$$c_n = R(0)R(1)\cdots R(n-1).$$

Για παράδειγμα, εάν $R(t) \equiv 1$, τότε $c_n = 1$ για όλα τα n, και η $F(x)$ είναι μία γεωμετρική σειρά. Ανακαλώντας το t εάν είναι απαραίτητο, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε την $R(t)$ τον εξής όρο, μέχρι ένα σταθερό συντελεστή:

$$R(t) = \frac{(t+a_1)(t+a_2)\cdots(t+a_r)}{(t+b_1)(t+b_2)\cdots(t+b_s)(t+1)}, \tag{13.3}$$

όπου $a_i \neq b_j$, και b_j δεν είναι θετικοί ακέραιοι, για όλα τα $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant s$.
Ένας συμβολισμός που εισήχθη από τον Gauss συνοψίζει την απαραίτητη πληροφορία μίας γενικής υπεργεωμετρικής σειράς. Εάν η $F(x)$ έχει οριστεί από τις (13.1) και (13.2), και $R(t)$ έχει τη μορφή (13.3), κάποιος γράφει

$$F(x) = {}_rF_s \left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s \end{matrix} ; x \right], \tag{13.4}$$

το οποίο, όταν εκφραστεί ρητά, είναι

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1(a_1+1)\cdots(a_1+n-1)\cdots a_r(a_r+1)\cdots(a_r+n-1)}{b_1(b_1+1)\cdots(b_1+n-1)\cdots b_s(b_s+1)\cdots(b_s+n-1)} \frac{x^n}{n!}. \tag{13.5}$$

Για παράδειγμα,

$${}_0F_0[x] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

και

$${}_1F_0 \left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix} ; x \right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!} x^n = \frac{1}{(1-x)^a}.$$

Άρα, οι υπεργεωμετρικές σειρές είναι ένας γενικός τύπος σειρών, για τις οποίες αρκετές σειρές, όπως οι γεωμετρικές, οι διωνυμικές, και οι εκθετικές, είναι ειδικές περιπτώσεις. Το q-ανάλογο της υπεργεωμετρικής σειράς ανακαλύφθηκε πρώτα από τον Heine.

Ορισμός 13.2. *Η Φ(x) είναι μία q- υπεργεωμετρική σειρά εάν*

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{13.6}$$

όπου

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = R(q^n), \quad c_0 = 1, \tag{13.7}$$

και $R(t)$ είναι μία κλασματική συνάρτηση της οποίας ο παρανομαστής δεν μηδενίζεται στα $t = 1, q, q^2, \ldots$.

Όμοια, έχουμε, για $n \geq 1$,

$$c_n = R(1)R(q)\cdots R(q^{n-1}). \tag{13.8}$$

Κατά συνθήκη, η κλασματική συνάρτηση R θεωρείται σε μια μικρή μορφή:

$$R(t) = \frac{(a_1 - t^{-1}) \cdots (a_r - t^{-1})}{(b_1 - t^{-1}) \cdots (b_s - t^{-1})(q - t^{-1})}. \tag{13.9}$$

Εδώ, $a_i \neq b_j$ και κάθε b_j δεν είναι ένα από τα $1, q^{-1}, q^{-2}, \ldots$. Τότε, επειδή

$$\prod_{j=0}^{n-1} (a - q^{-j}) = \prod_{j=0}^{n-1} (-q^{-j})(1 - q^j a) = (-1)^n q^{-\frac{n(n-1)}{2}} (1-a)_q^n, \tag{13.10}$$

έχουμε

$$c_n = (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2} s-r+1} \frac{(1-a_1)_q^n \cdots (1-a_r)_q^n}{(1-b_1)_q^n \cdots (1-b_s)_q^n} \frac{1}{(1-q)_q^n}. \tag{13.11}$$

Οι q-υπεργεωμετρικές σειρές επίσης έχουν ένα συμβολισμό όμοιο με την (13.4):

$$\Phi(x) = {}_r\Phi_s \left[\begin{array}{c} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s \end{array} ;q \ ;x \right] \tag{13.12}$$

Για παράδειγμα, από τις (9.3),(9.4),(9.8) και την (9.10) έχουμε

$$ {}_0\Phi_0 \left[\begin{array}{c} - \\ - \end{array} ;q \ ;x \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-q)_q^n} x^n = (1-x)_q^{\infty} = E_q^{\frac{x}{(q-1)}} \tag{13.13}$$

και

$$ {}_1\Phi_0 \left[\begin{array}{c} 0 \\ - \end{array} ;q \ ;x \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q)_q^n} x^n = \frac{1}{(1-x)_q^{\infty}} = e_q^{\frac{x}{(1-q)}}. \tag{13.14}$$

Ας μελετήσουμε την επόμενη απλή q-υπεργεωμετρική σειρά, δηλαδή,

$$ {}_1\Phi_0 \left[\ a \ ;q \ ;x \ \right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a)_q^n}{(1-q)_q^n} x^n. \tag{13.15}$$

Εδώ γράφουμε το ${}_1\Phi_0 \left[\begin{array}{c} a \\ - \end{array} ;q \ ;x \right]$ ως ${}_1\Phi_0 \left[\ a \ ;q \ ;x \ \right]$ για απλότητα. Εάν $a = q^N$, όπου N είναι ένας θετικός ακέραιος, έχουμε

$$\begin{aligned} {}_1\Phi_0 \left[\ q^N \ ;q \ ;x \ \right] &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^N) \cdots (1-q^{N+n-1})}{(1-q) \cdots (1-q^{n-1})} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[N] \cdots [N+n-1]}{[n]!} x^n. \end{aligned}$$

Εφαρμόζωντας το στον διωνυμικό τύπο του Heine(8.1), έχουμε

$$ {}_1\Phi_0 \left[\, q^N \quad ; q \; ; x \, \right] = \frac{1}{(1-x)_q^N}. \tag{13.16} $$

αυτό το αποτέλεσμα μας εμπνέει με το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 13.3. *Για κάθε a, καθε μία έχει τον ακόλουθο τύπο του Heine:*

$$ {}_1\Phi_0 \left[\, a \quad ; q \; ; x \, \right] = \frac{(1-ax)_q^\infty}{(1-x)_q^\infty}. \tag{13.17} $$

Απόδειξη. Πρώτα, η (13.17) είναι αληθής εάν $a = q^N$, επειδή

$$ \frac{(1-q^N x)_q^\infty}{(1-x)_q^\infty} = \frac{(1-q^N x)(1-q^{N+1}x)\cdots}{(1-x)(1-qx)\cdots} = \frac{1}{(1-x)_q^N}, $$

το οποίο είναι ίσο με την ${}_1\Phi_0 \left[\, a \quad ; q \; ; x \, \right]$ από την (13.16). Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, εφαρμόζουμε ένα πολύ χρήσιμο επιχείρημα. Τώρα, και οι δύο πλευρές στην (13.17) μπορούν να εκφραστούν ως άπειρες σειρές με τους συντελεστές να είναι κλασματικές συναρτήσεις του a, δηλαδή,

$$ {}_1\Phi_0 \left[\, a \quad ; q \; ; x \, \right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a) x^n, \qquad \frac{(1-ax)_q^\infty}{(1-x)_q^\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n(a) x^n. $$

Ξέρουμε από πάνω ότι για κάθε n, $c_n = c'_n$ σε άπειρες διαφορετικές τιμές του a, ονομαστικά, $a = q^N$, όπου N είναι ένας θετικός ακέραιος. Με άλλα λόγια, $c_n - c'_n$ είναι μία κλασματική σχέση του a με άπειρα μηδέν. Όπως μία κλασματική σχέση πρέπει να είναι ταυτοτικά μηδέν, επειδή ο αριθμός των μηδέν μίας κλασματικής σχέσης δεν μπορεί να υπερβαίνει το βαθμό του πολυωνύμου που είναι στον αριθμητή του. Επομένως, $c_n = c'_n$ για κάθε n, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Κεφάλαιο 14

Περισσότερα πάνω στον τύπο του Heine και το Γενικό Διωνυμικό

Εμπνευσμένοι από τις (13.16) και (13.17), είναι φυσικό να γενικεύσουμε τον συμβολισμό του q-διωνυμικού με τον ακόλουθο τρόπο.

Ορισμός 14.1. *Για κάθε αριθμό a, ορίζουμε*

$$(1+x)_q^a = \frac{(1+x)_q^\infty}{(1+q^a x)_q^\infty} \tag{14.1}$$

Προφανώς, ο ορισμός συμπίπτει με τον γενικό που έχει δοθεί από την σχέση (3.4) όπου a είναι ένας θετικός ακέραιος, και επίσης με τον ορισμό που έχει δωθεί από την (3.7) όταν a είναι ένας αρνητικός αριθμός. Το γεγονός ότι αυτό είναι μία κατάλληλη γενίκευση που ικανοποιείται από τις δύο ακόλουθες δύο προτάσεις, οι οποίες είναι γενικεύσεις της Πρότασης 3.2 και της εξίσωσης (3.11).

Πρόταση 14.2. *Για κάθε δύο αριθμούς a και β, έχουμε*

$$(1+x)_q^a (1+q^a x)_q^\beta = (1+x)_q^{a+\beta} \tag{14.2}$$

Απόδειξη. Η Πρόταση ακολουθεί ακριβώς από τον ορισμό, επειδή

$$\frac{(1+x)_q^\infty}{(1+q^a x)_q^\infty}\frac{(1+q^a x)_q^\infty}{(1+q^{a+\beta} x)_q^\infty} = \frac{(1+x)_q^\infty}{(1+q^{a+\beta} x)_q^\infty}.$$

□

Πρόταση 14.3. *Για κάθε αριθμό a, έχουμε*

$$D_q(1+x)_q^a = [a](1+qx)_q^{a-1}. \tag{14.3}$$

Απόδειξη. Εξ' ορισμού, έχουμε

$$\begin{aligned} D_q\left(\frac{(1+x)_q^\infty}{(1+q^a x)_q^\infty}\right) &= \left(\frac{(1+qx)_q^\infty}{(1+q^{a+1}x)_q^\infty} - \frac{(1+x)_q^\infty}{(1+q^a x)_q^\infty}\right)\frac{1}{(q-1)x} \\ &= \frac{(1+qx)_q^\infty}{(1+q^a x)_q^\infty}\frac{(1+q^a x)-(1+x)}{(q-1)x} \\ &= (1+qx)_q^{a-1}\frac{q^a-1}{q-1}. \end{aligned}$$

Με τον ορισμό του $[a]$ που έχει δοθεί από την (3.8), η απόδειξη είναι ολοκληρωμένη. □

Η Πρόταση (14.3) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη σειρά Taylor της $(1+x)_q^a$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας (1.15), παίρνουμε

$$\begin{aligned} D_q^j(1+x)_q^a &= D_q^{j-1}[a](1+qx)_q^{a-1} \\ &= D_q^{j-2}[a]\cdot q[a-1](1+q^2x)_q^{a-2} \\ &= D_q^{j-3}[a]\cdot q[a-1]\cdot q^2[a-2](1+q^3x)_q^{a-3} \\ &\;\;\vdots \\ &= [a]\cdot q[a-1]\cdot q^2[a-2]\cdots q^{j-1}(1+q^jx)_q^{a-j}, \end{aligned}$$

και έτσι $D_q^j(1+x)_q^a|_{x=0} = q^{\frac{j(j-1)}{2}}[a][a-1]\cdots[a-j+1]$. Επιπλέον, έχουμε

$$\begin{aligned} (1+x)_q^a &= \sum_{j=0}^\infty \frac{q^{\frac{j(j-1)}{2}}[a][a-1]\cdots[a-j+1]x^j}{[j]!} \\ &= \sum_{j=0}^\infty \begin{bmatrix} a \\ j \end{bmatrix} q^{\frac{j(j-1)}{2}} x^j, \end{aligned} \tag{14.4}$$

το οποίο γενικεύει τον διωνυμικό τύπο του Gauss (5.5).

Πρόταση 14.4. *Για κάθε αριθμό a, έχουμε*

$$D_q\left(\frac{1}{(1-x)_q^a}\right) = \frac{[a]}{(1-x)_q^{a+1}}. \tag{14.5}$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της q-παραγώγου, έχουμε

$$
\begin{aligned}
D_q\left(\frac{1}{(1-x)_q^a}\right) &= D_q\left(\frac{(1-q^a x)_q^\infty}{(1-x)_q^\infty}\right)\\
&= \left(\frac{(1-q^{a+1}x)_q^\infty}{(1-qx)_q^\infty} - \frac{(1-q^a x)_q^\infty}{(1-x)_q^\infty}\right)\frac{1}{(q-1)x}\\
&= \frac{(1-q^{a+1}x)_q^\infty}{(1-x)_q^\infty}\frac{(1-x)-(1-q^a x)}{(q-1)x}\\
&= \frac{1}{(1-x)_q^{a+1}}\frac{q^a-1}{q-1},
\end{aligned}
$$

όπως θέλαμε. $\square$

Χρησιμοποιώντας αυτή την πρόταση και επαγωγή. μπορεί κάποιος εύκολα να δει ότι

$$
D_q^j\left(\frac{1}{(1-x)_q^a}\right)\Bigg|_{x=0} = [a][a+1]\cdots[a+j-1]. \tag{14.6}
$$

Άρα, έχουμε το ανάπτυγμα Taylor

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)_q^a} &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{[a][a+1]\cdots[a+j-1]x^j}{[j]!}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(1-q^a)(1-q^{a+1})\cdots(1-q^{a+j-1})x^j}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(1-q^a)_q^j x^j}{(1-q)_q^j}.
\end{aligned}
$$

Από την (13.15) και όπου q^a βάλουμε το a, ξαναπαίρνουμε τον τύπο του Heine (13.17).

Κεφάλαιο 15

Ο Τύπος Γινομένου του Ramanujan

Σε αυτό το κεφάλαιο, εφαρμόζουμε τον τύπο του Heine να αποδείξουμε μία αξιοσημείωτη ταυτότητα που ανακαλύφθηκε από τον Ινδό μαθηματικό Ramanujan. Αυτή η ταυτότητα μετατρέπει μία q-υπεργεωμετρική σειρά σε ένα άπειρο γινόμενο, και αυτό έχει πολλές ενδιαφέρουσες εφαρμογές στην Θεωρία Αριθμών, οι οποίες θα συζητηθούν στα επόμενα κεφάλαια.

Προκειμένου να αποδείξουμε τον τύπο του Ramanujan θα χρειαστούμε μερικά στοιχειώδει γεγονότα από τη θεωρία των μιγαδικών αναλυτικών συναρτήσεων. Μία τυπική δυναμοσειρά στο z η οποία συγκλίνει σε έναν ανοικτό δίσκο $D_\varepsilon = \{z : |z| < \varepsilon\}$ στο μιγαδικό επίπεδο για κάποιο $\varepsilon > 0$ λέγεται μία αναλυτική συνάρτηση στο δίσκο D_ε. Φυσικά, όλα τα πολυώνυμα του z με αυθαίρετους μιγαδικούς συντελεστές είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο D_∞. Ένα λιγότερο προφανές παράδειγμα μίας αναλυτικής συνάρτησης στο D_∞ είναι $(1+z)_q^\infty$. Αυτό προκύπτει από την (9.3) εφαρμόζωντας το κριτήριο λόγου. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός και το γινόμενο αναλυτικών συναρτήσεων είναι αναλυτική συνάρτηση: επίσης, εάν $f(z)$ είναι αναλυτική, τότε και η $\dfrac{1}{f(z)}$ είναι αναλυτική, υπό την προυπόθεση ότι η $f(z)$ δεν μηδενίζεται στο D_ε.

Μία σειρά $\sum_{n=1}^\infty f_n(z)$ μίας αναλυτικής συνάρτησης στο D_ε συγκλίνει σε μία αναλυτική συνάρτηση στο D_ε εάν για κάθε n, $|f_n(z)| \leqslant M_n$, στο D_ε για κάποια M_n τέτοια ώστε το $\sum_n M_n$ να συγκλίνει. Στην πραγματικότητα, οι συντελεστές στο ανάπτυγμα της σειράς $f_n(z) = \sum_{m=0}^\infty a_{nm} z^m$ μπορεί να εκφραστεί σαν

$$a_{nm} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f_n(z)}{z^{m+1}} dz, \quad n \geq 1,\ m \geq 0,$$

όπου το ολοκλήρωμα ορίζεται πάνω στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων με ακτίνα r, $0 < r < \varepsilon$. Κάποιος μπορεί εύκολα να συμπεράνει από τον τύπο ότι $|a_{nm}| \leqslant M_n r^{-m}$, ή επειδή το r μπορεί να είναι αυθαίρετα κοντά στο ε, $|a_{nm}| \leqslant M_n \varepsilon^{-m}$. Για κάθε m ορίζουμε το $a_m = \sum_n a_{nm}$, η οποία είναι μία συγκλίνουσα ακολουθία επειδή $|a_m| \leqslant \sum_n |a_{nm}| \leqslant M\varepsilon^{-m}$ όπου $M = \sum_n M_n$. Τότε, η τυπική δυναμοσειρά $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ πραγματικά ορίζει μία αναλυτική συνάρτηση στο D_ε, επειδή

$$|f(z)| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} |a_m||z^m| \leqslant M \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right)^m,$$

και η τελευταία σειρά συγκλίνει για κάθε $|z| < \varepsilon$. Η ίδια εκτίμηση ότι η $|a_{nm}| < M\varepsilon^{-m}$ δείχνει ότι η $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ συγκλίνει στην $f(z)$ στο D_ε. Οι αναλυτικές συναρτήσεις έχουν μία ιδιότητα παρόμοια με αυτή των πολυωνύμων: Εάν μία αναλυτική συνάρτηση $f(z)$ έχει ένα άπειρο αριθμό ριζών στο D_ε, έστω οι $\{z_1, z_2, \ldots\}$, τέτοιες ώστε $\lim_{i\to\infty} z_i = 0$, τότε η $f(z)$ είναι ταυτοτικά μηδέν.(Η απαίτηση ότι το $\lim_{i\to\infty} z_i = 0$ είναι κρίσιμη, επειδή υπάρχουν μη μηδενικές αναλυτικές συναρτήσεις που διαθέτουν άπειρες ρίζες, για παράδειγμα, όλες οι ρίζες της $e^z - 1$ είναι οι $2\pi i n$, όπου n είναι κάθε ακέραιος.) Ας μελετήσουμε τώρα τον τύπο του Ramanujan.

Θεώρημα 15.1 (Ο Τύπος Γινομένου του Ramanujan). *Στο πεδίο ορισμού*

$$|q| < 1, \quad |a| > |q|, \quad |b| < 1 \quad \textit{και} \quad \left|\frac{b}{a}\right| < |x| < 1, \tag{15.1}$$

έχουμε την ακόλουθη ισότητα των συναρτήσεων των a, b, q, x:

$$\begin{aligned} {}_1\Psi_1\,[\,a,\ b;\ q;\ x\,] :\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1-a)_q^n}{(1-b)_q^n} x^n \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{bq^n}{a}\right)\left(1-q^{n+1}\right)\left(1-\frac{q^{n+1}}{ax}\right)\left(1-axq^n\right)}{\left(1-bq^n\right)\left(1-\frac{q^{n+1}}{a}\right)\left(1-\frac{bq^n}{ax}\right)\left(1-xq^n\right)}. \end{aligned} \tag{15.2}$$

Απόδειξη. **(M.E.H. Ismail)** Η στρατηγική είναι πρώτα να δείξουμε ότι και οι δύο πλευρές της (15.2) είναι αναλυτικές συναρτήσεις του b (όταν τα a, q και x είναι «φιξαρισμένα») στο μη κενό πεδίο ορισμού από την (15.1) (για παράδειγμα, $|b| < \min\{1, |ax|\}$), και μετά να αποδείξουμε την ισότητα για $b = q^M, q^{M+1}, q^{M+2}, \ldots$, με το M να είναι ένας αρκετά μεγάλος αριθμός. Ως εκ τούτου, η διαφορά των δύο πλευρών της (15.2) είναι μία αναλυτική συνάρτηση του b που περιέχει μία άπειρη ακολουθία ριζών οι οποίες συγκλίνουν στο

μηδέν, και επομένως πρέπει να είναι μηδέν ταυτοτικά.
Συμβολίζουμε με $f_n(b)$ τον n-οστό όρο στη σειρά στην (15.2). Για να δούμε ότι η σειρά συγκλίνει σε μία αναλυτική συνάρτηση του b, αυτή ικανοποιεί όπως σημειώσαμε παραπάνω, για να δείξουμε ότι η $f_n(b)$ είναι αναλυτική για κάθε $n \in Z$ και καθώς το $n \to \infty$, $|f_n(b)| < M_\pm c_\pm^{|n|}$ για κάποια $0 < c_\pm < 1$ και θετικές σταθερές $M_\pm$. Εάν $n > 0$, τότε $(1-b)_q^n$ είναι ένα πολυώνυμο του b το οποίο δεν μηδενίζεται στο πεδίο ορισμού, επειδή $|b|, |q| < 1$, έτσι δείχνουμε την αναλυτικότητα της $f_n(b)$. Επειδή καθώς $n \to \infty$,

$$\left|\frac{f_{n+1}(b)}{f_n(b)}\right| = \left|\frac{(1-q^n a)x}{1-q^n b}\right| \to |x| < 1,$$

έχουμε $|f_{n+1}(b)| < c_+|f_n(b)|$ για κάθε $c_+ \in (|x|, 1)$ όταν n είναι αρκετά μεγάλο, το οποίο συνεπάγεται ότι $|f_n(b)| < M_+ c_+^n$ για κάποια M_+ και όλα τα n που είναι αρκετά μεγάλα. Όμοια, για $n < 0$ έχουμε από την (3.7) ότι $\frac{1}{(1-b)_q^n} = (1-q^n b)_q^{|n|}$ είναι ένα πολυώνυμο, και έτσι είναι αναλυτική. Έχουμε

$$\left|\frac{f_{-n-1}(b)}{f_{-n}(b)}\right| = \left|\frac{1-q^{-n-1}b}{(1-q^{-n-1}a)x}\right| \to \left|\frac{b}{ax}\right| < 1$$

καθώς $n \to -\infty$, και το παραπάνω επιχείρημα μπορεί να εφαρμοστεί ξανά.
Για την πλευρά του γινομένου, βλέπουμε ότι οι παράγοντες στον παρανομαστή δεν μηδενίζονται στο καθορισμένο πεδίο ορισμού και κάθε παράγοντας είναι είτε ανεξάρτητος του b είτε είναι της μορφής $(1+cb)_q^\infty$, όπου c είναι είναι ανεξάρτητο του b. Όπως είπαμε και πιο πριν, η $f(z) = (1+z)_q^\infty$ είναι αναλυτική στο D_∞. Επειδή τα γινόμενα των αναλυτικών συναρτήσεων και οι αντίστροφες των αναλυτικών συναρτήσεων που δεν μηδενίζονται είναι επίσης αναλυτικές, το κλάσμα παραπάνω είναι επίσης αναλυτική στο καθορισμένο πεδίο ορισμου.
Τώρα θα εφαρμόσουμε την αντικατάσταση $b = q^M$, όπου το M είναι τόσο μεγάλο ώστε το b να βρίσκεται μέσα στο καθορισμένο πεδίο ορισμου. Σημειώνουμε ότι

$$\frac{1}{(1-q^M)_q^n} = \frac{1}{(1-q^M)_q^{-n'}} = (1-q^{M-n'})_q^{n'} = 0$$

Το παραπάνω ισχύει διότι, αφού $-n' \leqslant -M \Rightarrow n' \geq M \Rightarrow M - n' \leqslant 0$. Θέτω $k = M - n'$, άρα το $k = 0, -1, -2, ...$

Άρα έχουμε,

$$\begin{aligned}(1-q^{M-n'})_q^{n'} &= (1-q^{M-n'})(1-q^{M-n'+1})\cdots(1-q^{M-n'+n'-1})\\ &= (1-q^{M-n'})(1-q^{M-n'+1})\cdots(1-q^{M-1})\\ &= (1-q^{k})(1-q^{k+1})\cdots(1-q^{k+n'-1}) = 0\end{aligned}$$

Εάν $n=-n'\leqslant -M$, βλέπουμε ότι το δεξί μέλος(LHS) της (15.2) γίνεται

$$\begin{aligned}\sum_{n\in Z}\frac{(1-a)_q^n}{(1-q^M)_q^n}x^n &= \sum_{n=-M+1}^{\infty}\frac{(1-a)_q^n}{(1-q^M)_q^n}x^n\\ &= x^{1-M}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-a)_q^{n+1-M}}{(1-q^M)_q^{n+1-M}}x^n\\ &= x^{1-M}\frac{(1-a)_q^{1-M}}{(1-q^M)_q^{1-M}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{1-M}a)_q^n}{(1-q)_q^n}x^n\\ &= x^{1-M}\frac{(1-a)_q^{1-M}}{(1-q^M)_q^{1-M}}\,{}_1\Phi_0\left[\;q^{1-M}\quad a\quad ;q\;\;;x\;\right]\end{aligned}$$

(Στην πρώτη ισότητα το άθροισμα ξεκινάει από $-M+1$ μέχρι το ∞ διότι έχουμε αποδείξει παραπάνω ότι για τις τιμές που είναι μικρότερες από ή ίσες με $-M$ το άθροισμα ισούται με μηδέν.)
όπου έχουμε εφαρμόσει την (14.2) με $\alpha=1-M$ και $\beta=n$. Από τον τύπο του Heine (13.17), έχουμε

$$\begin{aligned}LHS &= x^{1-M}\frac{(1-a)_q^{1-M}}{(1-q^M)_q^{1-M}}\frac{(1-q^{1-M}ax)_q^{\infty}}{(1-x)_q^{\infty}}\\ &= x^{1-M}\frac{(1-q)_q^{M-1}}{(1-q^{1-M}a)_q^{M-1}}\frac{(1-q^{1-M}ax)_q^{\infty}}{(1-x)_q^{\infty}},\end{aligned}\tag{15.3}$$

όπου στην τελευταία ισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει την (3.7). Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, ξεκινάμε συγκρίνωντας τις δύο πλευρές της (15.2). Θέτωντας $b=q^M$ στην πλευρά του γινομένου, έχουμε

$$\begin{aligned}RHS &= \frac{(1-q^Ma^{-1})_q^{\infty}(1-q)_q^{\infty}(1-qa^{-1}x^{-1})_q^{\infty}(1-ax)_q^{\infty}}{(1-q^M)_q^{\infty}(1-qa^{-1})_q^{\infty}(1-q^Ma^{-1}x^{-1})_q^{\infty}(1-x)_q^{\infty}}\\ &\overset{(14.1)}{=} \frac{(1-q)_q^{M-1}}{(1-qa^{-1})_q^{M-1}}\frac{(1-qa^{-1}x^{-1})_q^{M-1}(1-ax)_q^{\infty}}{(1-x)_q^{\infty}}.\end{aligned}\tag{15.4}$$

Συγκρίνοντας τις (15.3) και (15.4), βλέπουμε ότι το μόνο που μένει να δείξουμε είναι

$$x^{1-M}\frac{(1-q^{1-M}ax)_q^{\infty}}{(1-q^{1-M}a)_q^{M-1}} = \frac{(1-qa^{-1}x^{-1})_q^{M-1}(1-ax)_q^{\infty}}{(1-qa^{-1})_q^{M-1}},$$

ή, ισοδύναμα

$$\begin{aligned}\frac{(1-qa^{-1})_q^{M-1}}{(1-q^{1-M}a)_q^{M-1}} &= \frac{(1-qa^{-1}x^{-1})_q^{M-1}(1-ax)_q^{\infty}}{(1-q^{1-M}ax)_q^{\infty}}x^{M-1}\\ &\overset{(14.1)}{=} \frac{(1-qa^{-1}x^{-1})_q^{M-1}}{(1-q^{1-M}ax)_q^{M-1}}x^{M-1}.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος είναι ανεξάρτητο του x, και οι δύο πλευρές «συμφωνούν» όταν $x = 1$. Επομένως, ελπίζουμε ότι το δεξί μέλος είναι επίσης ανεξάρτητο του x. Επεκτείνωντας το δεξί μέλος, έχουμε

$$\begin{aligned}&\frac{(1-qa^{-1}x^{-1})(1-q^2a^{-1}x^{-1})\cdots(1-q^{M-1}a^{-1}x^{-1})x^{M-1}}{(1-q^{1-M}ax)(1-q^{2-M}ax)\cdots(1-q^{-1}ax)}\\ &= \frac{1-qa^{-1}x^{-1}}{1-q^{-1}ax}\frac{1-q^2a^{-1}x^{-1}}{1-q^{-2}ax}\cdots\frac{1-q^{M-1}a^{-1}x^{-1}}{1-q^{1-M}ax}x^{M-1}\\ &= \left(-\frac{q}{ax}\right)\left(-\frac{q^2}{ax}\right)\cdots\left(-\frac{q^{M-1}}{ax}\right)x^{M-1},\end{aligned}$$

το οποίο είναι ανεξάρτητο του x, όπως θέλαμε.
(Αν κάνουμε πράξεις και στο αριστερό μέλος που είναι επίσης ανεξάρτητο του x θα καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.) □

Η ταυτότητα γινομένου του Ramanujan περιέχει 4 μεταβλητές, τις q, a, b, και x. Μία από τις σημαντικές ειδικές περιπτώσεις είναι για $a = y$ και $b = qy$. Το πεδίο ορισμού της σύγκλισης γίνεται

(15.5) $$|q| < |x| < 1 \quad \text{και} \quad |q| < |y| < |q|^{-1},$$

το οποίο είναι μη κενό. Το αριστερό μέλος της (15.2) γίνεται

$$LHS = \sum_{n\in Z}\frac{(1-y)_q^n}{(1-qy)_q^n}x^n = \sum_{n\in Z}\frac{1-y}{1-q^ny}x^n,$$

επειδή $(1-y)_q^n(1-qy)_q^n = (1-y)_q^{n+1} = (1-y)(1-qy)_q^n$ για κάθε ακέραιο n. Εάν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού του y σε $|q| < |y| < 1$, έχουμε $|q^ny| < 1$ εάν

$n \geq 0$ και $|q^n y^{-1}| < 1$ εάν $n \geq 1$, και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα της γεωμετρικής σειράς $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a\lambda^n = a + a\lambda + a\lambda^2 + \cdots = \frac{a}{1-\lambda}\right)$ (1) παίρνουμε

$$\begin{aligned} LHS &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-y)x^n}{1-q^n y} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(1-y)x^n}{1-q^n y} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-y)x^n}{1-q^n y} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-y)x^n q^n y^{-1}}{1-q^n y^{-1}} \\ &= (1-y)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} x^n (q^n y)^m - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} x^{-n}(q^n y^{-1})^m\right). \end{aligned}$$

Από την άλλη, η πλευρά του γινομένου γίνεται

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^{n+1})^2(1-x^{-1}y^{-1}q^{n+1})(1-xyq^n)}{(1-yq^{n+1})(1-x^{-1}q^{n+1})(1-y^{-1}q^{n+1})(1-xq^n)}.$$

Διαιρώντας και τις δύο πλευρές με το $1-y$, έχουμε
(15.6)

$$\begin{aligned} &\sum_{m,n=0}^{\infty} q^{mn}x^n y^m - \sum_{m,n=1}^{\infty} q^{mn}x^{-n}y^{-m} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)^2(1-x^{-1}y^{-1}q^n)(1-xyq^{n-1})}{(1-xq^{n-1})(1-x^{-1}q^n)(1-x^{-1}q^n)(1-yq^{n-1})(1-y^{-1}q^n)}. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, στο πεδίο ορισμού $|q| < |z| < 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=0}^{\infty} q^{mn} z^{m+n} &- \sum_{m,n=1}^{\infty} q^{mn} z^{-m-n} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)^2(1-z^{-2}q^n)(1-z^2q^{n-1})}{(1-zq^{n-1})^2(1-z^{-1}q^n)^2} \end{aligned} \tag{15.7}$$

εάν θέσουμε $x = y = z$. Μπορούμε περαιτέρω να τραβήξουμε τους όρους με $m = 0$ ή $n = 0$ έξω από το πρώτο άθροισμα. Επειδή το άθροισμα αυτών των όρων είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{m=0}^{\infty} z^m - 1 = 2\sum_{n=0}^{\infty} z^n - 1 = 2\frac{1}{1-z} - 1 = \frac{1+z}{1-z},$$

(Αφαιρώ έναν άσσο από τα δύο αθροίσματα ώστε να έχω τελικά έναν άσσο, ο οποίος είναι αυτός που προκύπτει από το πρώτο άθροισμα στην σχέση(15.7) για $m = 0$ και $n = 0$.) Εάν πολλαπλασιάσουμε και τις δύο πλευρές της (15.7) με $\frac{1-z}{1+z} = \frac{(1-z)^2}{1-z^2}$, έχουμε στο ίδιο πεδίο ορισμού

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1-z}{1+z} & \sum_{m,n=1}^{\infty} q^{mn}(z^{m+n} - z^{-m-n}) \\ & = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)^2(1-z^{-2}q^n)(1-z^2q^n)}{(1-zq^n)^2(1-z^{-1}q^n)^2}. \end{aligned} \tag{15.8}$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα είναι σημαντικά για τη συζητησή μας στις αριθμοθεωρητικές εφαρμογές στα επόμενα δύο κεφάλαια.

Κεφάλαιο 16

Αναλυτικοί Τύποι για τα Αθροίσματα δύο και τεσσάρων τετραγώνων

Ένα από τα πιο παλιά προβλήματα στη Θεωρία Αριθμών αφορά τη διαμέριση ενός ακεραίου σε άθροισμα τετραγώνων. Ένα διάσημο αποτέλεσμα, που πρώτα αποδείχθηκε από τον Lagrange, είναι ότι κάθε θετικός ακέραιος είναι ένα άθροισμα τεσσάρων τετραγώνων. Σε αυτό το κεφάλαιο, δεν θα αποδείξουμε μόνο αυτό το θεώρημα, αλλά επίσης θα βρούμε αναλυτικούς τύπους του Gauss και του Jacobi για τον αριθμό των διαμερίσεων ενός ακεραίου σε άθροισμα δύο και τεσσάρων τετραγώνων.
Πρώτα, ας υποδηλώσουμε τον αριθμό των τρόπων να εκφράσουμε το N ως ένα άθροισμα m ακεραίων τετραγώνων, μετρώντας τη σειρά, με το $\Box_m(N)$. Για παράδειγμα, $\Box_2(5) = 8$, επειδή συνολικά τα οχτώ διατεταγμένα ζευγάρια, $(\pm 1, \pm 2)$, $(\pm 2, \pm 1)$, έχουν το άθροισμα των τετραγώνων τους ίσο με 5. Εάν ορίσουμε την τυπική δυναμοσειρά

$$\Box(q) = \sum_{n \in Z} q^{n^2}, \tag{16.1}$$

τότε έχουμε

$$\Box_m(N) = \textit{οι σιντελεστές του } q^N \textit{ στο } \Box(q)^m. \tag{16.2}$$

Για να καταλάβουμε αυτό, φανταζόμαστε ότι επεκτείνουμε την δυναμοσειρά στην (16.1):

$$\Box(q)^m = (\cdots + q^9 + q^4 + q + 1 + q + q^4 + q^9 + \cdots)^m.$$

Στα προκύπτοντα αποτελέσματα, κάθε q^N όρος αντιστοιχεί έναν ένα προς ένα τρόπο σε μία m-άδα $(a_1, \ldots, a_m)$, με $N = a_1^2 + \cdots + a_m^2$. Άρα, ο αριθμός που εμφανίζονται τα q^N είναι ο αριθμός των τρόπων να εκφράσουμε το N σαν άθροισμα τετραγώνων των m ακεραίων. Για $m = 4$, έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 16.1. *Για κάθε θετικό ακέραιο N έχουμε*

$$\begin{aligned} \square_4(N) \; &= 8 \times \text{ (το άθροισμα των θετικών διαιρετών του } N \\ &\quad \text{τα οποία δεν είναι πολλαπλάσια του } 4). \end{aligned} \tag{16.3}$$

Μία άμεση συνέπεια του Θεωρήματος είναι ότι κάθε θετικός ακέραιος είναι ένα άθροισμα τεσσάρων τετραγώνων, επειδή 1 είναι ένας διαιρέτης κάθε ακέραιου και το 1 δεν είναι πολλαπλάσιο του 4. Για παράδειγμα, $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2$, $97 = 8^2 + 5^2 + 2^2 + 2^2$.

Απόδειξη. του Θεωρήματος 16.1 Θεωρούμε την (15.8) και αφήνουμε το $z \to -1$ στις δύο πλευρές.
Από την (12.11) έχουμε

$$\lim_{z\to -1} RHS = \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^n}{1+q^n} \right)^4 = \square(-q)^4.$$

Γράφωντας το αριστερό μέλος σαν

$$1 + (1-z) \sum_{m,n=1}^{\infty} q^{mn} \frac{z^{m+n} - z^{-m-n}}{1+z}$$

και εφαρμόζωντας τον κανόνα του L'Hospital, έχουμε

$$\lim_{z\to -1} LHS = 1 + 4 \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{m+n-1} (m+n) q^{mn}.$$

Λόγω συμμετρίας

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{m+n-1} m q^{mn} = \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{m+n-1} n q^{mn},$$

οπότε γράφουμε το αριστερό μέλος ως

$$\begin{aligned} LHS \; &= 1 + 8 \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{m-1} m (-q^m)^n \\ &= 1 + 8 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m q^m}{1+q^m} = 1 + 8 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(-q)^m}{1+q^m}. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα για τις δύο πλευρές και αντικαθιστώντας q με το $-q$, έχουμε

$$\square(q)^4 = 1 + 8\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m}{1+(-q)^m}. \tag{16.4}$$

Επειδή

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m}{1+(-q)^m} = \sum_{\substack{m\geq 1 \\ m \text{ περιττός}}} \frac{mq^m}{1-q^m} + \sum_{\substack{m\geq 1 \\ m \text{ άρτιος}}} \frac{mq^m}{1+q^m}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2kq^{2k}}{1+q^{2k}} &= \sum_{k=1}^{\infty} 2k(q^{2k} - q^{4k} + q^{6k} - q^{8k} + \cdots) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 2k(q^{2k} + q^{4k} + q^{6k} + q^{8k} + \cdots) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\infty} 4k(q^{4k} + q^{8k} + \cdots) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2kq^{2k}}{1-q^{2k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4kq^{4k}}{1-q^{4k}},
\end{aligned}$$

έχουμε

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m}{1+(-q)^m} = \sum_{\substack{m\geq 1 \\ 4\nmid m}} \frac{mq^m}{1-q^m} = \sum_{\substack{m\geq 1 \\ 4\nmid m}} \sum_{n=1}^{\infty} mq^{mn}.$$

Ως εκ τούτου έχουμε,

$$\square(q)^4 = 1 + \sum_{m\geq 1} \sum_{n=1}^{\infty} mq^{mn}. \tag{16.5}$$

Επιπλέον, για κάθε $N \geq 1$, οι συντελεστές του q^N στο $\square(q)^4$ δίνεται από $8\sum m$, όπου $mn = N$ για κάποιο θετικό ακέραιο n και το 4 δεν διαιρεί το m. Με άλλα λόγια, $\square_4(N)$ ισούται με 8 φορές το άθροισμα των διαιρετών του N που δεν διαιρείται με το 4. $\square$

Το αποτέλεσμα ότι κάθε ακέραιος είναι ένα άθροισμα τεσσάρων ακεραίων είναι το καλύτερο δυνατό, επειδή δεν είναι κάθε ακέραιος άθροισμα τριών τετραγώνων, για παράδειγμα, το 7. Ωστόσο, μπορούμε ακόμα να πούμε κάτι σχετικά για τον αριθμό των τρόπων όπου ένας ακέραιος μπορεί να εκφραστεί σαν ένα άθροισμα δύο τετραγώνων, δηλαδή, $\square_2(N)$.

Θεώρημα 16.2. *Για κάθε θετικό ακέραιο έχουμε*

$$\begin{aligned}\square_2(N) &= 4 \times \text{ (το πλήθος των θετικών διαιρετών του } N \\ &\qquad \text{που ισούνται με } 1 \text{ modulo } 4) \\ &\quad -4 \times \text{ (το πλήθος των θετικών διαιρετών του } N \\ &\qquad \text{που ισούνται με } 3 \text{ modulo } 4).\end{aligned} \tag{16.6}$$

Απόδειξη. Αυτή τη φορά, αφήνουμε το z να τείνει στο $i = \sqrt{-1}$ στην (15.8). Για το δεξί μέλος, έχουμε

$$RHS = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)^2(1+q^n)^2}{(1+iq^n)^2(1-iq^n)^2} = \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^{2n}}{1+q^{2n}}\right)^2 = \square(-q^2)^2.$$

Το αριστερό μέρος γίνεται

$$LHS = 1 - i \sum_{m,n=1}^{\infty} q^{mn}(i^{m+n} - (-i)^{m+n}).$$

Επειδή $(-i)^{m+n} = i^{m+n}$ εάν $m+n$ είναι άρτιος, και $(-i)^{m+n} = -i^{m+n}$ εάν $m+n$ είναι περιττός, δηλαδή, m και n έχουν διαφορετικές ισοτιμίες, έχουμε

$$LHS = 1 - 2i \sum_{\substack{m\geq 1 \\ m \text{ περιττός}}} \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ άρτιος}}} q^{mn} i^{m+n} - 2i \sum_{\substack{m\geq 1 \\ m \text{ άρτιος}}} \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ περιττός}}} q^{mn} i^{m+n}.$$

Τα δύο αθροίσματα είναι πανομοιότυπα, επειδή καθένα από αυτά είναι συμμετρικό ως προς m και n. Αντικαθιστώντας το q^2 με το $-q$ και στις δύο πλευρές, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\square(q)^2 &= 1 - 4 \sum_{\substack{m\geq 1 \\ m \text{ περιττός}}} \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ άρτιος}}} (-q)^{\frac{mn}{2}} i^{m+n+1} \\ &= 1 - 4 \sum_{\substack{m\geq 1 \\ m \text{ περιττός}}} \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ άρτιος}}} (-1)^{\frac{(m+1)}{2}} q^{\frac{mn}{2}}.\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι:

$$(-1)^{\frac{mn}{2}} i^{m+n+1} = i^{mn} i^{m+n+1} = i^{(m+1)(n+1)} = \left(i^{(n+1)}\right)^{(m+1)} = (\pm i)^{(m+1)} = i^{m+1}$$

και χρησιμοποιήσαμε ότι $i^k = \pm i$ για k περιττό.
Θέτωντας $n = 2k$, παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\square(q)^2 = 1 + 4 \sum_{\substack{m\geq 1 \\ m \text{ περιττός}}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{\frac{(m-1)}{2}} q^{mk}. \tag{16.7}$$

Ας εξετάσουμε το δεξί μέλος της (16.7). Για κάθε $N \geq 1$, ο $4q^N$ όρος προκύπτει για κάθε περιττό m το οποίο διαιρεί το N και συγκλίνει στο 1 modulo 4, ώστε $\frac{(m-1)}{2}$ είναι άρτιος. Όμοια, ο $(-4q^N)$ όρος προκύπτει για κάθε περιττό m το οποίο διαιρεί το N και συγκλίνει στο 3 modulo 4, ώστε $\frac{(m-1)}{2}$ είναι περιττός. Ως εκ τούτου, ο συντελεστής του q^N δίνεται από το δεξί μέλος της (16.6), όπως θέλαμε. □

Πόρισμα 16.3. ***Το Θεώρημα του Fermat***. *Ένας πρώτος περιττός αριθμός p μπορεί να αναπαρασταθεί σαν ένα άθροισμα δύο τετραγώνων αν και μόνο εάν $p \equiv 1 \ mod \ 4$, και η αναπαράσταση είναι μοναδική.*

Απόδειξη. Ένας πρώτος p έχει δύο διαιρέτες, το 1 και το p. Εάν $p \equiv 1 \ mod \ 4$, και τα δύο συγλίνουν στο 1 modulo 4. Από το Θεώρημα 16.2, $\square_2(p) = 8$. Υποθέτουμε ότι $p = a^2 + b^2$. Καθένα από τα 8 διατεταγμένα ζευγάρια $(\pm a, \pm b)$, $(\pm b, \pm a)$ το άθροισμα των τετραγώνων τους ισούται με p. Επίσης, αυτά τα 8 ζευγάρια είναι διακριτά, επειδή το p είναι περιττός συνεπάγεται $|a| \neq |b|$. Ως εκ τούτου, αυτές είναι όλες οι πιθανές περιπτώσεις, και η αναπαράσταση είναι μοναδική μέχρι και το πρόσημο και τη σειρά. Εάν $p \equiv -1 \ mod \ 4$, το Θεώρημα 16.2 μας λέει ότι $\square_2(p) = 0$. □

Στο κεφάλαιο αυτό παρατίθονται οι αναλυτικοί τύποι για το άθροισμα δύο και τεσσάρων τετραγώνων, ενδιαφέρον όμως παρουσιάζουν και οι αναλυτικοί τύποι για το άθροισμα των έξι και οκτώ τετραγώνων, οι οποίοι παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Θεώρημα 16.4.

$$\begin{aligned} \square_6(n) &= 4\left(\sum_{\substack{d|n \\ d\equiv 3(\ mod\ 4)}} d^2 - \sum_{\substack{d|n \\ d\equiv 1(\ mod\ 4)}} d^2\right) \\ &\quad +16\left(\sum_{\substack{d|n \\ \frac{k}{d}\equiv 1(\ mod\ 4)}} d^2 - \sum_{\substack{d|n \\ \frac{k}{d}\equiv 3(\ mod\ 4)}} d^2\right) \end{aligned} \tag{16.8}$$

Απόδειξη. **(S.H. Chan)** Αντικαθιστώντας τα a, b με y, yq, αντίστοιχα, στον τύπο του Ramanujan (15.2), παίρνουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{nx^n}{1-yq^n} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^{n+1})^2(1-\dfrac{q^{n+1}}{yx})(1-yxq^n)}{(1-yq^{n+1})(1-\dfrac{q^{n+1}}{y})(1-xq^n)(1-\dfrac{q^{n+1}}{x})} \tag{16.9}$$

όπου $|q| < |x| < 1$. Παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος της (16.9) είναι συμμετρικό ως προς x και y. Ως εκ τούτου,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{1-yq^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{y^n}{1-xq^n}. \tag{16.10}$$

Διαφορίζοντας και τις δύο πλευρές της (16.9) ως προς x και πολλαπλασιάζοντας με x, βρίσκουμε ότι:
(16.11)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{nx^n}{1-yq^n} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^{n+1})^2(1-\frac{q^{n+1}}{yx})(1-yxq^n)}{(1-yq^{n+1})(1-\frac{q^{n+1}}{y})(1-xq^n)(1-\frac{q^{n+1}}{x})}$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{xyq^n}{1-xyq^n} + \frac{\frac{q^{n+1}}{xy}}{1-\frac{q^{n+1}}{xy}} + \frac{xq^n}{1-xq^n} - \frac{\frac{q^{n+1}}{x}}{1-\frac{q^{n+1}}{x}}\right)$$

Εναλλάσοντας το x και το y στην (16.10) και αφαιρόντας το αποτέλεσμα αυτό από την (16.10) συμπεραίνουμε ότι
(16.12)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{nx^n}{1-yq^n} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{ny^n}{1-xq^n} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^{n+1})^2(1-\frac{q^{n+1}}{yx})(1-yxq^n)}{(1-yq^{n+1})(1-\frac{q^{n+1}}{y})(1-xq^n)(1-\frac{q^{n+1}}{x})}$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{xq^n}{1-xq^n} - \frac{\frac{q^{n+1}}{x}}{1-\frac{q^{n+1}}{x}} - \frac{yq^n}{1-yq^n} + \frac{\frac{q^{n+1}}{y}}{1-\frac{q^{n+1}}{y}}\right)$$

όπου $|q| < |x|,\ |y| < 1$. Αφήνοντας το $y \to -x$ στην (16.11) και απλοποιώντας, βρίσκουμε ότι
(16.13)

$$LHS: = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{nx^n}{1+xq^n} - \frac{n(-x)^n}{1-xq^n}\right) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1+x^2q^n)(1+\frac{q}{x^2}q^n)(1-q^{n+1})^2}{(1-x^2q^{2n})(1-\frac{q^2}{x^2}q^{2n})}$$
$$\times 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{nq^n}{1-x^2q^{2n}} - \frac{\frac{q^{n+1}}{x}}{1-\frac{q^{2n+2}}{x^2}}\right) =: RHS$$

Απλοποιώντας, βλέπουμε ότι:
(16.14)

$$RHS = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1+x^2q^n)(1+\frac{q}{x^2}q^n)(1-q^{n+1})^2}{(1-x^2q^{2n})(1-\frac{q^2}{x^2}q^{2n})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2xq^n}{1-x^2q^{2n}}$$

$$= 2x \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1+x^2q^n)(1+\frac{q}{x^2}q^n)(1-q^{n+1})^2}{(1-x^2q^{2n})(1-\frac{q^2}{x^2}q^{2n})} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1+x^2q^{2n+1})(1-\frac{q}{x^2}q^{2n})(1-q^{2n+2})^2}{(1-x^2q^{2n})(1-\frac{q^2}{x^2}q^{2n})(1-q^{2n+1})^2}$$

$$= 2x(1+x^2) \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1+x^2q^{n+1})(1+\frac{q}{x^2}q^n)(1+x^2q^{2n+1})(1-\frac{q^2}{x^2}q^{2n})(1-q^{2n+2})^4}{(1-x^2q^{2n})^2(1-\frac{q^2}{x^2}q^{2n})^2},$$

όπου στην δεύτερη ισότητα εφαρμόσαμε την (16.9) με τα x, y, q να έχουν αντικατασταθεί με τα q, x^2, q^2, αντίστοιχα. Επίσης, μένει να αποδείξουμε ότι:

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1+x^2q^n)(1-q^{n+1})^2(1-q^{2n+2})^2}{(1-q^{2n+1})^2} = (1+x^2) \prod_{n=0}^{\infty} (1+x^2q^{n+1})(1-q^{2n+2})^4$$

Ξεκινάμε από το αριστερό μέλος και κάνοντας πράξεις θα φτάσουμε στο δεξί, άρα έχουμε,

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1+x^2q^n)(1-q^{n+1})^2(1-q^{2n+2})^2}{(1-q^{2n+1})^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)(1-q)^2(1-q^2)^2}{(1-q)^2} \frac{(1+x^2q)(1-q^2)^2(1-q^4)^2}{(1-q^3)^2} \frac{(1+x^2q^2)(1-q^3)^2(1-q^6)^2}{(1-q^5)^2} \cdots$$

$$= (1+x^2)(1+x^2q)(1-q^2)^4(1+x^2q^2)(1-q^4)^4 \cdots$$

$$= (1+x^2) \prod_{n=0}^{\infty} (1+x^2q^{n+1})(1-q^{2n+2})^4.$$

Απλοποιώντας το δεξί μέλος της (16.13) προκύπτει

$$LHS = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx^n}{1+xq^n} - \frac{n(-x)^n}{1-xq^n} + \frac{-nx^{-n}}{1+xq^{-n}} - \frac{-n(-x)^{-n}}{1-xq^{-n}}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(nx^n - \frac{nx^{n+1}q^n}{1+xq^n} - n(-x)^n + \frac{n(-x)^{n+1}q^n}{1-xq^n} - \frac{nx^{-n-1}q^n}{1+\dfrac{q^n}{x}} + \frac{n(-x)^{-n-1}q^n}{1-\dfrac{q^n}{x}}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n(1-(-1)^n)$$

$$+ \sum_{n=1,m=0}^{\infty}\left((-1)^{m+1}nx^{n+m+1}q^{mn+n} + (-1)^{n+1}nx^{n+m+1}q^{mn+n}\right)$$

$$+ \sum_{n=1,m=0}^{\infty}\left((-1)^{m+1}nx^{-n-m-1}q^{mn+n} + (-1)^{n+1}nx^{-n-m-1}q^{mn+n}\right)$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n-1} + \sum_{n,m=1}^{\infty}\left((-1)^m - (-1)^n\right)n(x^{n+m} - x^{-n-m})q^{mn}.$$

Σημειώνοντας ότι τα αθροίσματα εξαφανίζονται όταν τα m και n είναι ίδια, συμπεραίνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
LHS &= 2\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n-1} \\
&+2\sum_{n,m=1}^{\infty}(2n-1)\left(x^{2n+2m-1}+x^{-2n-2m+1}\right)q^{(2n-1)2m} \\
&-2\sum_{n,m=1}^{\infty}2n\left(x^{2n+2m-1}+x^{-2n-2m+1}\right)q^{(2m-1)2n} \\
&= \frac{2x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}+2\sum_{n,m=1}^{\infty}(2n-1-2m) \\
&\quad\times\left(x^{2n+2m-1}+x^{-2n-2m+1}\right)q^{(2n-1)2m} \\
&= \frac{2x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}+2x(1+x^2)\sum_{n,m=1}^{\infty}(2n-1-2m)x^{-2n-2m} \\
&\quad\times(1-x^2+\cdots+x^{4n+4m-4})q^{(2n-1)2m}
\end{aligned}
\tag{16.15}
$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε και το δεξί μέλος και το αριστερό μέλος με $\dfrac{2}{(x(1+x^2))}$ και αφήνουμε το $x \to i$. Πρώτα, από την (16.14) βρίσκουμε ότι:

(16.16)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to i}\frac{2RHS}{x(1+x^2)} &= \prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{n+1})^2(1+q^{2n+1})^2(1-q^{2n+2})^4}{(1+q^{2n+2})^4} \\
&= \prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{4n+2})^2(1-q^{2n+2})^6}{(1+q^{2n+2})^4} \overset{(12.10)}{=} \prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{2n+2})^6}{(1+q^{2n+2})^6}
\end{aligned}
$$

Για να αποδείξουμε την δεύτερη ισότητα αναπτύσσουμε το γινόμενο στον αριθμητή στο αριστερό μέλος για να φτάσουμε στο γινόμενο στον αριθμητή στο δεξιό μέλος:

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{n+1})^2(1+q^{2n+1})^2(1-q^{2n+2})^4$$

$$=(1-q)^2(1+q)^2(1-q^2)^4(1-q^2)^2(1+q^3)^2(1-q^4)^4\cdots$$

$$=(1-q^2)^2(1-q^6)^2(1-q^2)^6\cdots=\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{4n+2})^2(1-q^{2n+2})^6$$

Δεύτερον, από την (16.15) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{x\to i}\frac{2LHS}{x(1+x^2)} &= 1+4\sum_{n,m=1}^{\infty}(2n-2m-1)(-1)^{n+m}\\ &\quad\times(2n-1+2m)q^{(2n-1)2m}\\ &= 1+4\sum_{n,m=1}^{\infty}((2n-1)^2-4m^2)(-1)^n(-q^2)^{(2n-1)m}\\ &= 1+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n-1)^2\sum_{m=1}^{\infty}(-q^2)^{(2n-1)m}\\ &\quad+16\sum_{m=1}^{\infty}m^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(-q^2)^{(2n-1)m}\\ &= 1+4\sum_{k=1}^{\infty}(-q^2)^k\sum_{(2n-1)|k}(-1)^n(2n-1)^2\\ &\quad+16\sum_{k=1}^{\infty}(-q^2)^k\sum_{(2n-1)m=k}(-1)^{n+1}m^2.\end{aligned} \tag{16.17}$$

Τώρα βάζοντας τις (16.16) και (16.17) μέσα στην (16.13) συμπεραίνουμε ότι:

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{2n+2})^6}{(1+q^{2n+2})^6} = 1+4\sum_{k=1}^{\infty}(-q^2)^k\sum_{(2n-1)|k}(-1)^n(2n-1)^2$$
$$+16\sum_{k=1}^{\infty}(-q^2)^k\sum_{(2n-1)m=k}(-1)^{n+1}m^2.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του $(-q^2)^n$, $n \geq 1$, και στις δύο πλευρές παραπάνω, ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Θεωρούμε τη συνάρτηση

(16.18) $$F(z) := \prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1+z)(1+zq^{n+1})(1+\dfrac{q^{n+1}}{z})(1-q^{n+1})^2}{(1-z)(1-zq^{n+1})(1-\dfrac{q^{n+1}}{z})(1+q^{n+1})^2},$$

Λήμμα 16.5. *Για* $|q| < |z| < \dfrac{1}{|q|}$ *και* $z \neq 1$,

(16.19) $$F(z) = \frac{1+z}{1-z} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n(z^{-n}-z^n)}{1+q^n}.$$

Απόδειξη. Στον τύπο του Ramanujan (15.2), θέτουμε $a = b = -1$, αντικαθιστούμε το q^2 με το q και το x με το $\sqrt{q}z$. Τότε βρίσκουμε ότι, για $1 < |z| < \dfrac{1}{|q|}$,

(16.20)
$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^nz^n}{1+q^n} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-n}}{1+q^n} = \prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{n+1})^2(1+zq^{n+1})(1+\dfrac{q^n}{z})}{(1+q^{n+1})^2(1-zq^{n+1})(1-\dfrac{q^n}{z})}$$
$$= -\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1+z)(1+zq^{n+1})(1+\dfrac{q^{n+1}}{z})(1-q^{n+1})^2}{(1-z)(1-zq^{n+1})(1-\dfrac{q^{n+1}}{z})(1+q^{n+1})^2} = -F(z).$$

Αλλά, για $1 < |z|$,

$$\begin{aligned} 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-n}}{1+q^n} &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(z^{-n}-\frac{q^n z^{-n}}{1+q^n}\right) \\ &= 1+2\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n z^{-n}}{1+q^n} \\ &= \frac{z+1}{z-1}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n z^{-n}}{1+q^n}. \end{aligned} \tag{16.21}$$

Τοποθετώντας την (16.21) μέσα στην (16.20), πολλαπλασιάζοντας με -1, και χρησιμοποιώντας την αναλυτική συνέχεια, ολοκληρώνουμε την απόδειξη της (16.19) για $|q| < |z| < \dfrac{1}{|q|}$ και $z \neq 1$. □

Θεώρημα 16.6. *Για* $|q| < |z| < \dfrac{1}{|q|}$ *και* $z \neq 1$,

$$F^2(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}nq^n}{1-q^n} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}(z^n+z^{-n}). \tag{16.22}$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε τετραγωνίζοντας την και τις δύο πλευρές της (16.19), και χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες ταυτότητες

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)(z^{-n}-z^n) = (z^n+z^{-n}) + 2\sum_{k=1}^{n-1}(z^k+z^{-k}) + 2, \tag{16.23}$$

$$(z^{-n}-z^n)(z^{-m}-z^m) = (z^{n+m}-z^{-n-m}) - (z^{n-m}-z^{m-n}). \tag{16.24}$$

Αυτό ακολουθεί από τις (16.19),(16.23), και (16.24) ότι

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1+z}{1-z}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n(z^{-n}-z^n)}{1+q^n}\right)^2 \\ &\qquad = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}C_n(z^n+z^{-n}), \end{aligned} \tag{16.25}$$

όπου οι σταθερές $C_n,\ n \geq 0$, είναι ανεξάρτητες του x. Τώρα εφαρμόζοντας αναλυτικά τις (16.23) και (16.24) μέσα στο ανάπτυγμα του αριστερού μέρους της (16.25), βρίσκουμε ότι

(16.26)

$$\left(\frac{1+z}{1-z} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n(z^{-n}-z^n)}{1+q^n}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^n}\left((z^n+z^{-n}) + 2\sum_{k=1}^{n-1}(z^k+z^{-k}) + 2\right)$$

$$+ 4\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^n}\frac{q^m}{1+q^m}\left((z^{n+m}+z^{-n-m}) - (z^{n-m}+z^{m-n})\right).$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του $(z^n + z^{-n})$ στα δεξί μέλη των (16.25) και (16.26), βρίσκουμε ότι

(16.27)

$$\begin{aligned} C_n &= 4\frac{q^n}{1+q^n} + 8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{n+m}}{1+q^{n+m}} + 4\sum_{m=1}^{n-1}\frac{q^n}{(1+q^m)(1+q^{n-m})} \\ &\quad -8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m q^{n+m}}{(1+q^m)(1+q^{n+m})}. \end{aligned}$$

Για να απλοποιήσουμε, ξαναγράφουμε καθένα από τα τρία αθροίσματα στην (16.27) και καταλήγουμε ότι

(16.28)

$$\begin{aligned} C_n &= 4\frac{q^n}{1+q^n} + 8\frac{q^n}{1-q^n}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{q^{n+m}}{q^n(1+q^{n+m})} - \frac{q^{n+m}}{1+q^{n+m}}\right) \\ &\quad +4\frac{q^n}{1-q^n}\sum_{m=1}^{n-1}\left(1 - \frac{q^m}{1+q^m} - \frac{q^{n-m}}{1+q^{n-m}}\right) \\ &\quad -8\frac{q^n}{1-q^n}\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{q^m}{1+q^m} + \frac{q^{n+m}}{q^n(1+q^{n+m})}\right). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη ποσότητα στο πρώτο άθροισμα στο δεξί μέλος ακυρώνει τη δεύτερη ποσότητα στο τρίτο άθροισμα στο δεξί μέλος παραπάνω. Μετά τη «διαγραφή», βρίσκουμε ότι η (16.28) περιορίζεται απλά στην

(16.29)

$$\begin{aligned} C_n &= 4\frac{q^n}{1+q^n} + 4(n-1)\frac{q^n}{1-q^n} + 8\frac{q^n}{1-q^n}\frac{q^n}{1+q^n} \\ &= 4n\frac{q^n}{1-q^n}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος της (16.25) μηδενίζεται στο $z = -1$. Θέτοντας $z = -1$ στην (16.25), γρήγορα βρίσκουμε ότι

$$C_0 = 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n q^n}{1-q^n}. \tag{16.30}$$

Βάζοντας τις (16.29) και (16.30) στην (16.25), ολοκληρώνουμε την απόδειξη της (16.22). □

Θεώρημα 16.7. *Έχουμε*

$$\square(q)^8 = 1 + 16\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^n}{1-(-q)^n}. \tag{16.31}$$

Απόδειξη. Ξαναγράφουμε την (16.22) στη μορφή

$$F^2(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n q^n}{1-q^n}(z^n + z^{-n} - 2(-1)^n). \tag{16.32}$$

Διαιρούμε και τις δύο πλευρές της (16.31) με $(1+z)^2$ και αφήνουμε το z να πάει στο -1. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του L'Hospital, βρίσκουμε ότι

$$\lim_{z \to -1} \frac{z^n + z^{-n} - 2(-1)^n}{(1+z)^2} = (-1)^n n^2. \tag{16.33}$$

Αφήνοντας το $z \to -1$ στην (16.32), χρησιμοποιώντας την (16.33), χρησιμοποιώντας τον ορισμό (16.18) στο αριστερό μέλος της (16.32), καταλήγουμε ότι

$$\square(q)^8 = 1 + 16\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3 q^n}{1-q^n}. \tag{16.34}$$

Αντικαθιστώντας το q με το $-q$ στην (16.34), συμπεραίνουμε την (16.31) ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Θεώρημα 16.8. *Για κάθε θετικό ακέραιο* n,

$$\square_8(n) = 16(-1)^n \sum_{d|n} (-1)^d d^3. \tag{16.35}$$

Απόδειξη. Από την (16.31),

$$\begin{aligned} \square(q)^8 &= 1 + 16\sum_{d=1}^{\infty} \frac{d^3 q^d}{1-(-q)^d} \\ &= 1 + 16\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} d^3 q^d (-q)^{dm} = 1 + 16\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sum_{d|n}(-1)^d d^3 q^n, \end{aligned}$$

όπου τοποθετήσαμε $n = d(m+1)$. Το επιθυμητό αποτέλεσμα ακολουθεί εξισώνοντας τους συντελεστές του q^n, $n \geq 1$, και στις δύο πλευρές παραπάνω. $\square$

Κεφάλαιο 17

Αναλυτικοί Τύποι για τα Αθροίσματα δύο και τεσσάρων τρίγωνων αριθμών

Εκτός από τις διαμερίσεις σε τετράγωνους αριθμούς, ο τύπος γινομένου του Ramanujan μπορεί επίσης να εφαρμοστεί για να μελετήσουμε τις διαμερίσεις σε αθροίσματα δύο και τεσσάρων τρίγωνων αριθμών. Ας υπενθυμίσουμε τον ορισμό του n-οστού τρίγωνου αριθμού, που έχουμε εισάγει στο Κεφάλαιο 12:

$$\triangle_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Επειδή $\triangle_{-n-1} = \triangle_n$, η δίπλευρη ακολουθία $\{\triangle_n\}_{n\in Z}$, είναι συμμετρική, και θα περιορίσουμε τον ορισμό των «τρίγωνων αριθμών» για $n \geq 0$ μόνο. Όπως και στην περίπτωση των τετράγωνων αριθμών, ορίζουμε παρακάτω, όμοια, την δυναμοσειρά:

$$\triangle(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\triangle_n}.$$

(Σε αντίθεση με (16.1), το άθροισμα αφορά τους μη αρνητικούς ακέραιους μόνο.)Τότε, ο αριθμός των τρόπων να εκφράσουμε το N σαν ένα άθροισμα m τρίγωνων αριθμών, μετρώντας τη σειρά των προσθετέων, είναι ίσο με το συντελεστή του q^N στη δυναμοσειρά $\triangle(q)^m$, και συμβολίζεται από $\triangle_m(N)$. Το λογικό είναι να είναι όμοιο με τα αθροίσματα των τετράγωνων αριθμών.

Θεώρημα 17.1. *Για κάθε θετικό ακέραιο έχουμε*

$$\begin{aligned} \triangle_2(N) &= \text{(το πλήθος των θετικών διαιρετών του } 4N+1 \\ &\qquad \text{που ισούνται με } 1 \text{ modulo } 4) \\ &\quad - \text{(το πλήθος των θετικών διαιρετών του } 4N+1 \\ &\qquad \text{που ισούνται με } 3 \text{ modulo } 4). \end{aligned} \tag{17.1}$$

Απόδειξη. Εάν αντικαταστήσουμε το q με το $-q$ και το z με το $-\sqrt{q}$ στην (15.7), όπου $0 < q < 1$, έχουμε, από την (12.8),

$$\begin{aligned}
RHS &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n q^n)^2(1-(-1)^n q^{n-1})(1+(-1)^n q^n)}{(1-(-1)^n q^{n-\frac{1}{2}})^2(1+(-1)^n q^{n-\frac{1}{2}})^2} \\
&= 2\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n q^n)^2(1+(-1)^n q^n)^2}{(1-(-1)^n q^{n-\frac{1}{2}})^2(1+(-1)^n q^{n-\frac{1}{2}})^2} \\
&= 2\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n})^2}{(1-q^{2n-1})^2} = 2\triangle(q)^2,
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
LHS &= \sum_{m,n=0}^{\infty} (-1)^{mn+m+n} q^{mn+\frac{m+n}{2}} - \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{mn-m-n} q^{mn-\frac{m+n}{2}} \\
&= \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{mn-1} q^{mn-\frac{m+n}{2}} - \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{mn-m-n} q^{mn-\frac{m+n}{2}},
\end{aligned}$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει το m με το $m-1$ και το n με το $n-1$ στο πρώτο άθροισμα. Όταν $m+n$ είναι περιττός, οι αντίστοιχοι όροι στα δύο αθροίσματα αλληλεξουδετερώνονται. Ως εκ τούτου, έχουμε

$$\begin{aligned}
LHS &= 2\sum_{\substack{m,n\geq 1\\ m+n \text{ άρτιος}}} (-1)^{mn-1} q^{mn-\frac{m+n}{2}} \\
&= 2\sum_{\substack{m,n\geq 1\\ m,n \text{ περιττοί}}} q^{mn-\frac{m+n}{2}} - 2\sum_{\substack{m,n\geq 1\\ m,n \text{ άρτιοι}}} q^{mn-\frac{m+n}{2}},
\end{aligned}$$

και επιπλέον,

$$\triangle(q)^2 = \sum_{\substack{m,n\geq 1\\ m,n \text{ περιττοί}}} q^{mn-\frac{m+n}{2}} - \sum_{\substack{m,n\geq 1\\ m,n \text{ άρτιοι}}} q^{mn-\frac{m+n}{2}}. \tag{17.2}$$

Ένας $\pm q^N$ όρος εμφανίζεται στο δεξί μέλος αν και μόνο εάν $N = mn - \dfrac{m+n}{2}$, ή $4N+1 = (2m-1)(2n-1)$, για κάποια $m > 0$ και $n > 0$ που είναι και τα δύο άρτιοι ή και τα δύο περιττοί. Εάν είναι και τα δύο περιττοί, $2m-1 \equiv 1 \ mod\ 4$, και, εάν είναι και τα δύο άρτιοι, $2m-1 \equiv 3 \ mod\ 4$. Ως εκ τούτου, κάθε συντελεστής του $4N+1$ που ισούται με $1 \ mod\ 4$ μας δίνει $+1$, και κάθε συντελεστής του $4N+1$ που ισούται με $3 \ mod\ 4$ μας δίνει -1, στο συντελεστή του q^N. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Συγξεκριμένα, όταν $4N + 1$ είναι ένας πρώτος αριθμός, έχουμε το ακόλουθο Πόρισμα.

Πόρισμα 17.2. *Εάν N είναι ένας θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε ο $4N + 1$ να είναι ένας πρώτος αριθμός, τότε ο N μπορεί να αναπαρασταθεί μοναδικά σαν ένα άθροισμα δύο διακριτών τρίγωνων αριθμών, ώστε να είναι σε θεση να αναδιατάξουμε τα αθροίσματα.*

Απόδειξη. Είναι ξεκάθαρο ότι αν $4N + 1$ είναι πρώτος, όλοι οι διαιρέτες του $4N + 1$ είναι ο 1 και ο $4N + 1$, που συγκλίνουν και οι δύο στο $1 \; mod \; 4$, και το Θεώρημα 17.1 συνεπάγεται ότι $\triangle_2(N) = 2 - 0 = 2$. Ως συνέπεια του ορισμού οι συντελεστές του $\triangle(q)^m$, $\triangle_m$ μετράει κάθε αναδιάταξη των διακριτων προσθετέων. Ως εκ τούτου, $\triangle_2(N) = 2$ συνεπάγεται ότι όλοι οι πιθανοί τρόποι να αναπαραστήσουμε το N σαν ένα άθροισμα δύο τρίγωνων αριθμών είναι είτε

$$N = \triangle_k + \triangle_l = \triangle_l + \triangle_k, \quad k \neq l,$$

ή

$$N = \triangle_k + \triangle_k = \triangle_l + \triangle_l, \quad k \neq l.$$

Η δεύτερη περίπτωση είναι προφανώς άκυρη επειδή η ακολουθία $\{\triangle_n\}_{n \geq 0}$ είναι γνησίως αύξουσα. Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. Ένας άλλος τρόπος για να απορίψουμε την δεύτερη περίπτωση είναι να σημειώσουμε ότι $N = 2\triangle_k$ που συνεπάγεται ότι $4N + 1 = (2k + 1)^2$, το οποίο δεν είναι πρώτος. $\square$

Παραδείγματα του Πορίσματος είναι $7 = 1 + 6, 13 = 3 + 10$, και $43 = 15 + 28$. Άλλο Θεώρημα αφορά τις διαμερίσεις σε τέσσερις τρίγωνους αριθμούς.

Θεώρημα 17.3. *Για κάθε θετικό ακέραιο N έχουμε*

$$\triangle_4(N) = \text{το άθροισμα όλων των διαιρετών του } 2N + 1 \tag{17.3}$$

Απόδειξη. Εάν διαιρέσουμε και τις δύο πλευρές της (15.7) με $1 - qz^{-2}$, αντικαθιστούμε q με το q^2, και αφήνουμε το z να πάει στο q, έχουμε

$$RHS = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2n})^2(1 - q^{2n})(1 - q^{2n})}{(1 - q^{2n-1})^2(1 - q^{2n-1})^2} = \triangle(q)^4,$$

από (12.8). Επειδή το δεξί μέλος είναι πεπερασμένο, έτσι και το αριστερό μέλος πρέπει να είναι. Επιπλέον, θα εφαρμόσουμε τον κανόνα του L'Hospital:

$$\begin{aligned}
LHS &= \lim_{z\to q}\frac{1}{1-q^2z^{-2}}\left(\sum_{m,n=0}^{\infty}q^{2mn}z^{m+n}-\sum_{m,n=1}^{\infty}q^{2mn}z^{-m-n}\right)\\
&= \frac{1}{2q^{-1}}\left(\sum_{m,n=0}^{\infty}(m+n)q^{2mn+m+n-1}+\sum_{m,n=1}^{\infty}(m+n)q^{2mn-m-n-1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{m,n=1}^{\infty}(m+n-2)q^{2mn-m-n}+\sum_{m,n=1}^{\infty}(m+n)q^{2mn-m-n}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{m,n=1}^{\infty}(2m+2n-2)q^{2mn-m-n}\right)\\
&= \sum_{m,n=1}^{\infty}(m+n-1)q^{2mn-m-n}.
\end{aligned}$$

Επειδή όμως η έκφραση είναι συμμετρική ως προς m και n, μπορούμε να ξαναγράψουμε το αριστερό μέλος και να πάρουμε

$$\triangle(q)^4=\sum_{m,n=1}^{\infty}(2m-1)q^{2mn-m-n}.$$

Θέτωντας $k=2m-1$ και $l=2n-1$, παίρνουμε

$$\triangle(q)^4=\sum_{\substack{k,l\geq 1\\ k,l\ \text{περιττοί}}}kq^{\frac{(kl-1)}{2}}. \tag{17.4}$$

Ο q^N όρος εμφανίζεται στο άθροισμα αν και μόνο εάν $N=\frac{(kl-1)}{2}$, ή $2N+1=kl$, για κάποιους περιττούς αριθμούς k και l. Επειδή κάθε διαιρέτης του $2N+1$ είναι περιττός, ο συντελεστής του q^N είναι

$$\sum_{k|2N+1}k$$

. □

Κεφάλαιο 18

q-Αντιπαράγωγος

Μετά τη μελέτη διάφορων εφαρμογών, ας επιστρέψουμε στον q-λογισμό. Τόσο καιρό, μιλήσαμε σχετικά για τον κβαντικό διαφορισμό μόνο. Τι συμβαίνει με την κβαντική ολοκλήρωση· Ας θεωρήσουμε την q-αντιπαράγωγο.

Ορισμός 18.1. *Η συνάρτηση $F(x)$ είναι μία q-αντιπαράγωγος της $f(x)$ αν $D_qF(x) = f(x)$. Αυτό συμβολίζεται με*

$$\int f(x)d_qx \tag{18.1}$$

Σημειώστε ότι λέμε μία q-αντιπαράγωγο αντί για την q-αντιπαράγωγο, επειδή, όπως και στον συνήθη λογισμό, μία αντιπαράγωγος δεν είναι μοναδική. Στον συνήθη λογισμό, η μοναδικότητα εξαρτάται από την πρόσθεση μίας σταθεράς, επειδή η παράγωγος μίας συνάρτησης μηδενίζεται αν και μόνο αν αυτή είναι σταθερή. Η συνθήκη στον κβαντικό λογισμό είναι πιο λεπτή. $D_q\varphi(x) = 0$ αν και μόνο αν $\varphi(qx) = \varphi(x)$, το οποίο δεν συνεπάγεται απαραίτητα ότι η φ είναι σταθερά. Προσθέτωντας μία τέτοια συνάρτηση φ δεν μεταβάλλει την q-παράγωγο της συνάρτησης. Ωστόσο, εάν απαιτήσουμε η φ να είναι μία τυπική δυναμοσειρά, η συνθήκη $\varphi(qx) = \varphi(x)$ συνεπάγεται $q^nc_n = c_n$ για κάποιο n, όπου c_n είναι ο συντελεστής του x^n. Αυτό είναι πιθανό όταν $c_n = 0$ για κάθε $n \geq 1$, δηλαδή, η φ είναι σταθερά. Επιπλέον, εάν

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

είναι μία τυπική δυναμοσειρά, τότε ανάμεσα στις τυπικές δυναμοσειρές, $f(x)$ έχει μία μοναδική q-αντιπαράγωγο που έχει και σταθερό όρο, η οποία είναι

$$\int f(x)d_qx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_nx^{n+1}}{[n+1]} + C. \tag{18.2}$$

Εάν η $f(x)$ είναι μία γενική συνάρτηση, μπορούμε να ενισχύσουμε την μοναδικότητα επιβάλλοντας κάποιους περιορισμούς στην q-αντιπαράγωγο. Θεωρούμε ξανά την συνάρτηση $\varphi(x)$, η οποία έχει μία μηδενική q-αντιπαράγωγο. Η συνθήκη $\varphi(qx) = \varphi(x)$ είναι όμοια με αυτής της περιοδικής συνάρτησης, αλλά η περίοδος είναι μικρότερη καθώς το x είναι κοντά στο 0. Για να το δούμε αυτό, υποθέτουμε $q = 0.1$. Τότε παραδείγματα περιόδων είναι $(.1, 1], (.01, 1], (.001, 01]$, κ.τ.λ. Εάν το γράφημα της φ στο $(.1, 1]$ είναι μία ευθεία αλλά όχι οριζόντια γραμμή, μέσα στις περιόδους κοντά στο 0, το γράφημα έχει το ίδιο σχήμα, αλλά αυτό γίνεται απότομο και απότομο, κάνοντας την φ ασυνεχή στο $x = 0$. Η γενική ιδέα περιέχεται στην επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 18.2. *Έστω $0 < q < 1$. Τότε, αφού προσθέσουμε μία σταθερά, κάθε συνάρτηση $f(x)$ έχει το πολύ μία q-αντιπαράγωγο η οποία είναι συνεχής στο $x = 0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε F_1 και F_2 δύο q-αντιπαραγώγοι της f οι οποίοι είναι συνεχείς στο 0. Έστω $\varphi = F_1 - F_2$. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο 0, και έχει την ιδιότητα $\varphi(qx) = \varphi(x)$ για κάθε x, επειδή $D_q\varphi = 0$. Για κάποιο $A > 0$, έστω

$$m = inf\{\varphi(x)|qA \leqslant x \leqslant A\},$$

$$M = sup\{\varphi(x)|qA \leqslant x \leqslant A\},$$

το οποίο μπορεί να είναι άπειρο εάν η φ δεν είναι φραγμένη από πάνω ή από κάτω.

Υποθέτωντας $m < M$, τουλάχιστον ένα από τα $\varphi(0) \neq m$ και $\varphi(0) \neq M$ είναι αληθή. Υποθέτουμε ότι $\varphi(0) \neq m$. Από τη συνέχεια στο $x = 0$, δεδομένου ενός $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό, μπορούμε πάντα να βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$m + \varepsilon \notin \varphi(0, \delta).$$

Από την άλλη πλευρά, $q^N A < \delta$ για κάποια αρκετά μεγάλα N. Επειδή $\varphi(qx) = \varphi(x)$, έχουμε

$$m + \varepsilon \in (m, M) \subset \varphi[qA, A] = \varphi[q^{N+1}A, q^N A] \subset \varphi(0, \delta),$$

καταλήγωντας σε αντίθεση. Επιπλέον, $m = M$ και η φ είναι σταθερή στο $[qA, A]$, το οποίο σημαίνει ότι αυτή είναι σταθερή παντού. □

Η Πρόταση μας λέει ότι η μοναδικότητα της q-αντιπαραγώγου έχει ουσιαστικά βελτιωθεί απαιτώντας συνέχεια στο $x = 0$. Το πρόβλημα ύπαρξης θα συζητηθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Ολοκληρώνουμε αυτό το κεφάλαιο με τον ακόλουθο τύπο για την αλλαγή μεταβλητής $u = u(x) = ax^{\beta}$, όπου α και β είναι σταθερές. Υποθέτουμε ότι η $F(x)$ είναι μία q-αντιπαράγωγος της $f(x)$. Τότε

$$\int f(u)d_q u = F(u) = F(u(x)).$$

Έχουμε για κάθε q', χρησιμοποιώντας την (1.15),

$$\begin{aligned} F(u(x)) &= \int D_{q'} F(u(x)) d_{q'} x \\ &= \int (D_{q'^{\beta}} F)(u(x)) \cdot D_{q'} u(x) d_{q'} x \\ &= \int (D_{q'^{\beta}} F)(u(x)) d_{q'} u(x). \end{aligned}$$

Θέτωντας $q' = q^{\frac{1}{\beta}}$, έχουμε $D_{q'^{\beta}} F = D_q F = f$, και έτσι παίρνουμε

$$\int f(u)d_q u = \int f(u(x)) d_{q^{\frac{1}{\beta}}} u(x). \tag{18.3}$$

Αυτός ο τύπος σημαίνει ότι η $f(u(x))D_{q^{\frac{1}{\beta}}} u(x)$ είναι μία από τις q-αντιπαραγώγους της $f(u)$.

Κεφάλαιο 19

Ολοκλήρωμα Jackson

Υποθέτουμε την $f(x)$ μία αυθαίρετη συνάρτηση. Για να κατασκευάσουμε την q-αντιπαραγωγό της $F(x)$, υπενθυμίζουμε τον τελεστή $\hat{M}_q$, πού έχει οριστεί ως $\hat{M}_q(F(x)) = F(qx)$ στο Κεφάλαιο 5. Τότε έχουμε από τον ορισμό της q-παραγώγου:

$$\frac{1}{(q-1)x}(\hat{M}_q - 1)F(x) = \frac{F(qx) - F(x)}{(q-1)x} = f(x). \tag{19.1}$$

Σημειώστε ότι η σειρά είναι σημαντική, επειδή οι τελεστές δεν αντιμετατίθενται. Τότε μπορούμε *τυπικά* να γράψουμε την q-αντιπαράγωγο σαν

$$F(x) = \frac{1}{1-\hat{M}_q}((1-q)xf(x)) = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} \hat{M}_q^j(xf(x)),$$

χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της γεωμετρικής σειράς, και άρα παίρνουμε

$$\int f(x)d_qx = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x). \tag{19.2}$$

Η σειρά αυτή ονομάζεται *το ολοκλήρωμα Jackson* της $f(x)$. Από τον ορισμό εύκολα παίρνουμε ένα πιο γενικό τύπο:

$$\begin{aligned}\int f(x)D_q g(x)d_qx &= (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)D_q g(q^j x)\\ &= (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)\frac{g(q^j x) - g(q^{j+1}x)}{(1-q)q^j x},\end{aligned}$$

ή

$$\int f(x)D_q g(x)d_qx = \sum_{j=0}^{\infty} f(q^j x)\left(g(q^j x) - g(q^{j+1}x)\right). \tag{19.3}$$

Εμείς έχουμε απλώς πάρει την (19.2) φορμαλιστικά, και έχουμε ακόμα να εξετάσουμε κάτω από ποιές προυποθέσεις αυτό πραγματικά συγκλίνει σε μία q-αντιπαράγωγο. Το παρακάτω Θεώρημα μας δίνει μία επαρκή συνθήκη για αυτό.

Θεώρημα 19.1. *Υποθέτουμε ότι $0 < q < 1$. Εάν $|f(x)x^a|$ είναι φραγμένη στο διάστημα $(0, A]$ για κάποια $0 \leqslant a < 1$, τότε το ολοκλήρωμα Jackson που έχει οριστεί από τη (19.2) συγκλίνει σε μία συνάρτηση $F(x)$ στο διάστημα $(0, A]$, η οποία είναι μία q-αντιπαράγωγος της $f(x)$. Επιπλέον, η $F(x)$ είναι συνεχής στο $x = 0$ με $F(0) = 0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $|f(x)x^a| < M$ στο $(0, A]$. Για κάθε $0 < x \leqslant A$, $j \geq 0$,

$$|q^j f(q^j x)| < M(q^j x)^{-a}.$$

Έτσι, για κάθε $0 < x \leqslant A$, έχουμε

$$|q^j f(q^j x)| < Mq^j (q^j x)^{-a} = Mx^{-a}(q^{1-a})^j. \tag{19.4}$$

Επειδή $1 - a > 0$ και $0 < q < 1$, βλέπουμε ότι η σειρά ' από μία συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά. Ως εκ τούτου, το δεξί μέλος της (19.2) συγκλίνει σημειακά σε κάποια συνάρτηση $F(x)$. Αυτό προκύπτει άμεσα από την (19.2) ότι $F(0) = 0$. Το γεγονός ότι η $F(x)$ είναι συνεχής στο $x = 0$, δηλαδή, η $F(x)$ τείνει στο μηδέν καθώς το $x \to 0$, είναι ξεκάθαρο ότι εάν θεωρήσουμε, χρησιμοποιώντας την (19.4),

$$\left|(1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)\right| < \frac{M(1-q)x^{1-a}}{1-q^{1-a}}, \quad 0 < x \leqslant A.$$

Για να επαληθεύσουμε ότι η $F(x)$ είναι μία q-αντιπαράγωγος, θα το παραγωγίσουμε αυτό:

$$\begin{aligned} D_q F(x) &= \frac{1}{(1-q)x}\left((1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) - (1-q)qx\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^{j+1}x)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) - \sum_{j=0}^{\infty} q^{j+1} f(q^{j+1}x) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) - \sum_{j=1}^{\infty} q^j f(q^j x) = f(x). \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι εάν $x \in (0, A]$ και $0 < q < 1$, τότε $qx \in (0, A]$, και η q-διαφόριση είναι έγκυρη. □

Από την Πρόταση 18.2, εάν οι προυποθέσεις του Θεωρήματος 19.1 ικανοποιούνται, το ολοκλήρωμα Jackson μας δίνει μία μοναδική q-αντιπαράγωγο η οποία είναι συνεχής στο $x = 0$, προσθέτωντας μία σταθερά. Από την άλλη, εάν γνωρίζουμε ότι η $F(x)$ είναι μία q-αντιπαράγωγος της $f(x)$ και $F(x)$ είναι συνεχής στο $x = 0$, η $F(x)$ πρέπει να δίνεται, προσθέτωντας μία σταθερά, από τον τύπο του Jackson(19.2), επειδή ένα μερικό άθροισμα του ολοκληρώματος Jackson είναι

$$\begin{aligned}(1-q)x\sum_{j=0}^{N} q^j f(q^j x) &= (1-q)x\sum_{j=0}^{N} q^j D_q F(t)|_{t=q^j x}\\ &= (1-q)x\sum_{j=0}^{N} q^j \left(\frac{F(q^j x) - F(q^{j+1}x)}{(1-q)q^j x}\right)\\ &= \sum_{j=0}^{N} \left(F(q^j x) - F(q^{j+1}x)\right) = F(x) - F(q^{N+1}x),\end{aligned}$$

το οποίο τείνει στο $F(x) - F(0)$ καθώς $N \to \infty$, από τη συνέχεια της $F(x)$ στο $x = 0$.
Για να δούμε ένα παράδειγμα όπου το ολοκλήρωμα Jackson αποτυγχάνει, θεωρούμε την $f(x) = \frac{1}{x}$. Επειδή

$$D_q \log x = \frac{\log(qx) - \log(x)}{(q-1)x} = \frac{\log q}{q-1}\frac{1}{x}, \tag{19.5}$$

έχουμε

$$\int \frac{1}{x} d_q x = \frac{q-1}{\log q} \log x. \tag{19.6}$$

Ωστόσο, ο τύπος του Jackson δίνει

$$\int \frac{1}{x} d_q x = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} 1 = \infty.$$

Ο τύπος αποτυγχάνει επειδή η $f(x)x^a$ δεν είναι φραγμένη για κάθε $0 \leqslant a < 1$. Σημειώνουμε ότι η $\log x$ δεν είναι συνεχής στο $x = 0$.
Τώρα εφαρμόζουμε τον τύπο του Jackson για να ορίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Ορισμός 19.2. *Υποθέτουμε ότι $0 < a < b$. Το ορισμένο q-ολοκλήρωμα δίνεται από*

$$\int_0^b f(x) d_q x = (1-q)b\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j b) \tag{19.7}$$

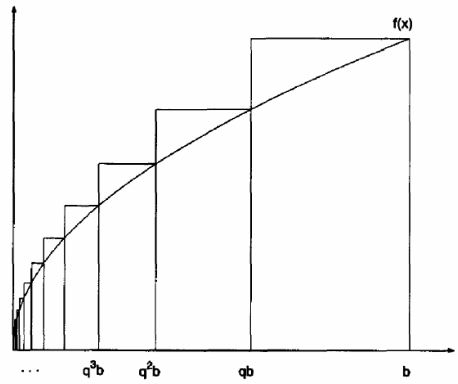
και

$$\int_a^b f(x)d_qx = \int_0^b f(x)d_qx - \int_0^a f(x)d_qx. \tag{19.8}$$

Όπως πριν (βλέπε 19.3), παίρνουμε από την (19.7) ένα πιο γενικό τύπο:

$$\int_0^b f(x)d_{q(x)} = \sum_{j=0}^{\infty} f(q^j b)\left(g(q^j b) - g(q^{j+1}b)\right). \tag{19.9}$$

Σημειώστε ότι ο ορισμός ταιριάζει στην πραγματικότητα ότι το ολοκλήρωμα Jackson μηδενίζεται για $x = 0$. Γεωμετρικά, το ολοκλήρωμα στην (19.7) αντιστοιχεί στην περιοχή της ένωσης πεπερασμένου αριθμού ορθογωνίων παραλληλογράμμων, όπως φαίνεται παρακάτω.



Στο διάστημα $[\varepsilon, b]$, όπου ε είναι ένας μικρός θετικός αριθμός, το άθροισμα αποτελείται από αρκετούς πεπερασμένους όρους, και στην πραγματικότητα είναι ένα άθροισμα Riemann. Ωστόσο, καθώς $q \to 1$, το πλάτος των ορθογώνιων παραλληλογράμμων προσεγγίζει το μηδέν, και το άθροισμα τείνει στο ολοκλήρωμα Riemann στο $[\varepsilon, b]$. Επειδή το ε είναι αυθαίρετο, έχουμε, υπό την προϋπόθεση ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\varepsilon, b]$,

$$\lim_{q\to 1} \int_0^b f(x)d_qx = \int_0^b f(x)dx. \tag{19.10}$$

Δεν μπορούμε να αποκτήσουμε ένα καλό ορισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος απλά αφήνοντας το $b \to \infty$ στην (19.7). Αντί αυτού, επειδή

$$\begin{aligned}\int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)d_qx &= \int_0^{q^j} f(x)d_qx - \int_0^{q^{j+1}} f(x)d_qx \\ &= (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^{j+k} f(q^{j+k}) - (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^{j+k+1} f(q^{j+k+1}),\end{aligned}$$

και έτσι έχουμε

$$\int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)d_qx = (1-q)q^j f(q^j), \tag{19.11}$$

αυτό είναι φυσικό να ορίσουμε το γενικευμένο q-ολοκλήρωμα όπως ακολουθεί.

Ορισμός 19.3. *Το γενικευμένο q-ολοκλήρωμα της $f(x)$ στο $[0,\infty)$ ορίζεται να είναι*

$$\int_0^{\infty} f(x)d_qx = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)d_qx \tag{19.12}$$

εάν $0 < q < 1$, ή

$$\int_0^{\infty} f(x)d_qx = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{q^j}^{q^{j+1}} f(x)d_qx$$

εάν $q > 1$.

Πρόταση 19.4. *Το γενικευμένο q-ολοκλήρωμα που έχει οριστεί παραπάνω συγκλίνει εάν $x^a f(x)$ εάν είναι φραγμένη σε μία γειτονιά του $x = 0$ για κάποιο $a < 1$ και για αρκετά μεγάλο x για κάποιο $a > 1$.*

Απόδειξη. Από την (19.11), έχουμε

$$\int_0^{\infty} f(x)d_qx = |1-q| \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j f(q^j). \tag{19.13}$$

Επειδή το άθροισμα

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j f(q^j) = \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j) + \sum_{j=1}^{\infty} q^{-j} f(q^{-j})$$

παραμένει αμετάβλητο εάν αντικαταστήσουμε το q με το q^{-1}, αυτό επαρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση του $q < 1$. Η σύγκλιση του πρώτου αθροίσματος έχει αποδειχθεί από το Θεώρημα 19.1. Για το δεύτερο άθροισμα, υποθέτουμε για μεγάλο x έχουμε $|x^a f(x)| < M$ όπου $a > 1$ και $M > 0$. Τότε, έχουμε για αρκετά μεγάλα j,

$$|q^{-j} f(q^{-j})| = q^{j(a-1)} |q^{-ja} f(q^{-j})| < M q^{j(a-1)}.$$

Ωστόσο το δεύτερο άθροισμα είναι επίσης φραγμένο από μία συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά, και έτσι συγκλίνει. □

Τώρα ας συζητήσουμε την αλλάγη μεταβλητής $u = u(x) = ax^\beta$ στα ορισμένα ολοκληρώματα. Εάν το ολοκλήρωμα Jackson μίας συνάρτησης συγκλίνει, ο τύπος του Jackson μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παράγει ξανά την (18.3). Πράγματι, θεωρούμε το δεξί μέλος του:

$$\begin{aligned} RHS &= \sum_{j=0}^{\infty} f(u(q^{\frac{j}{\beta}} x)) \left(u(q^{\frac{j}{\beta}} x) - u(q^{\frac{(j+1)}{\beta}} x) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} f(aq^j x^\beta) \left(aq^j x^\beta - aq^{j+1} x^\beta \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} f(q^j u)(q^j u - q^{j+1} u) = (1-q) u \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j u) \overset{(19.2)}{=} LHS, \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την (19.3). Αντικαθιστώντας το x με a και b παραπάνω, κάποιος παίρνει ότι

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(u) d_q u = \int_a^b f(u(x)) d_{q^{\frac{1}{\beta}}} u(x). \tag{19.14}$$

Με τον τύπο των Newton-Leibnitz(20.1) που έχει εισαχθεί στο επόμενο Κεφάλαιο, (19.14) μπορεί να δειχθεί απευθείας, επειδή και οι δύο πλευρές του ισούνται με $F(u(b)) - F(u(a))$, όπου η F είναι μία q-αντιπαράγωγος της f που είναι συνεχής στο $x = 0$. Επειδή η (20.1) είναι αληθής για γενικευμένα ολοκληρώματα, βλέπουμε ότι εάν $a, \beta > 0$, ώστε $u(+\infty) = +\infty$, (19.14) είναι επίσης αληθής για $b = \infty$. Ιδίως, έχουμε για $a > 0$, $\beta = 1$,

$$\int_0^\infty f(ax) d_q x = \frac{1}{a} \int_0^\infty f(x) d_q x. \tag{19.15}$$

Κεφάλαιο 20

Το Θεμελιώδες Θεώρημα του q-Λογισμού και η Ολοκλήρωση κατά μέρη

Στον συνήθη λογισμό, μία παράγωγος έχει οριστεί ως το όριο ενός λόγου, και ένα ορισμένο ολοκλήρωμα ως το όριο ενός άπειρου αθροίσματος. Αυτή η λεπτή και συναρπαστική σχέση τους δίνεται από τον τύπο των Newton-Leibniz, που επίσης λέγεται το Θεμελιώδες Θεώρημα του λογισμού. Σε αντίθεση, επειδή η εισαγωγή του ορισμένου q-ολοκληρώματος έχει υποκινηθεί από μία αντιπαράγωγο, η σχέση μεταξύ της q-παραγώγου και του ορισμένου q-ολοκληρώματος είναι πιο προφανής. Ανάλογα με την συνηθισμένη περίπτωση, έχουμε το ακόλουθο *Θεμελιώδες Θεώρημα* ή τον *τύπο των Newton-Leibniz*, για τον q-λογισμό.

Θεώρημα 20.1 (***Θεμελιώδες Θεώρημα του q-λογισμού***)**.** *Εάν η $F(x)$ είναι μία αντιπαράγωγος της $f(x)$ και η $F(x)$ είναι συνεχής στο $x = 0$, έχουμε*

$$\int_a^b f(x) d_q x = F(b) - F(a), \tag{20.1}$$

όπου $0 \leqslant a < b \leqslant \infty$.

Απόδειξη. Όπως σημειώθηκε και στο προηγούμενο Κεφάλαιο, επειδή η $F(x)$ είναι συνεχής στο $x = 0$, η $F(x)$ δίνεται από τον τύπο του Jackson, προσθέτωντας μία σταθερά, δηλαδή,

$$F(x) = (1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) + F(0).$$

Επειδή από τον ορισμό

$$\int_0^a f(x)d_qx = (1-q)a\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j a),$$

έχουμε

$$\int_0^a f(x)d_qx = F(a) - F(0).$$

Όμοια, έχουμε, για πεπερασμένο b,

$$\int_0^b f(x)d_qx = F(b) - F(0),$$

και έτσι

$$\int_a^b f(x)d_qx = \int_0^b f(x)d_qx - \int_0^a f(x)d_qx = F(b) - F(a).$$

Θέτωντας $a = q^{j+1}$(ή q^j) και $b = q^j$(ή q^{j+1}), όπου $0 < q < 1$ (ή $q > 1$), και θεωρώντας τον ορισμό του γενικευμένου q-ολοκληρώματος (19.12), βλέπουμε ότι η (20.1) είναι αληθής για $b = \infty$ εάν το $\lim_{x\to\infty} F(x)$ υπάρχει. □

Πόρισμα 20.2. *Εάν η $f'(x)$ υπάρχει σε μία γειτονιά του $x = 0$ και είναι συνεχής στο $x = 0$, όπου η $f'(x)$ υποδηλώνει τη συνήθη παράγωγο της $f(x)$, έχουμε*

$$\int_a^b D_q f(x)d_qx = f(b) - f(a). \tag{20.2}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του L'Hospital, παίρνουμε

$$\lim_{x\to 0} D_q f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} = \lim_{x\to 0}\frac{qf'(qx) - f'(x)}{q-1} = f'(0).$$

Ως εκ τούτου η $D_q f(x)$ μπορεί να γίνει συνεχής στο $x = 0$ εάν ορίσουμε $(D_q f)(0) = f'(0)$, και η (20.2) ακολουθεί από το Θεώρημα. □

Μία σημαντική διαφορά μεταξύ του ορισμένου q-ολοκληρώματος και του αντίστοιχου συνηθισμένου του είναι ότι ακόμα και εάν ολοκληρώσουμε μία συνάρτηση σε ένα διάστημα της μορφής $[1, 2]$, πρέπει να ανησυχούμε για τη συμπεριφορά της στο $x = 0$. Αυτό έχει να κάνει με τον ορισμό του ορισμένου q-ολοκληρώματος και τη συνθήκη για τη σύγκλιση του ολοκληρώματος Jackson.

Τώρα υποθέτουμε ότι οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι δύο συναρτήσεις των οποίων οι παράγωγοι τους υπάρχουν σε μία γειτονιά του $x = 0$ και είναι συνεχείς στο $x = 0$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του γινομένου(1.12), έχουμε

$$D_q\left(f(x)g(x)\right) = f(x)\left(D_q g(x)\right) + g(qx)\left(D_f(x)\right).$$

Επειδή το γινόμενο διαφορίσιμων συναρτήσεων είναι επίσης διαφορίσιμη στο συνήθη λογισμό, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 20.2 για να πάρουμε

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f(x)\left(D_q g(x)\right) d_q x + \int_a^b g(qx)\left(D_f(x)\right) d_q x,$$

ή

$$\int_a^b f(x) d_q g(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(qx) d_q f(x), \tag{20.3}$$

το οποίο είναι ο τύπος της q-ολοκλήρωσης κατά παράγοντες. Σημειώνουμε ότι για $b = \infty$ επιτρέπεται επίσης.
Η ολοκλήρωση κατά παράγοντες μπορεί να εφαρμοστεί για να πάρουμε τον τύπο του Taylor με τον όρο υπολοίπου του Cauchy.

Θεώρημα 20.3. *Υποθέτουμε ότι η $D_q^j f(x)$ είναι συνεχής στο $x = 0$ για κάθε $j \leqslant n+1$. Τότε, έχουμε ένα q-ανάλογο του τύπου του Taylor με το υπόλοιπο Cauchy:*

$$f(b) = \sum_{j=0}^{n} \left(D_q^j f\right)(a) \frac{(b-a)_q^j}{[j]!} + \frac{1}{[n]!} \int_a^b D_q^{n+1} f(x)(b-qx)_q^n d_q x. \tag{20.4}$$

Απόδειξη. Επειδή η $D_q f(x)$ είναι συνεχής στο $x = 0$, από το Θεώρημα 20.1 έχουμε

$$f(b) - f(a) = \int_a^b D_q f(x) d_q x = -\int_a^b D_q f(x) d_q(b-x),$$

το οποίο αποδεικνύει την (20.4) στην περίπτωση όπου $n = 0$. Υποθέτουμε ότι η (20.4) ισχύει για $n - 1$:

$$f(b) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(D_q^j f\right)(a) \frac{(b-a)_q^j}{[j]!} + \frac{1}{[n-1]!} \int_a^b D_q^n f(x)(b-qx)_q^{n-1} d_q x.$$

Χρησιμοποιώντας την (3.11) και εφαρμόζωντας την q-ολοκλήρωση κατά παράγοντες (20.3), παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b D_q^n f(x)(b-qx)_q^{n-1} d_q x &= -\frac{1}{[n]}\int_a^b D_q^n f(x)(b-x)_q^n d_q x \\ &= D_q^n f(a)\frac{(b-a)_q^n}{[n]} \\ &\quad +\frac{1}{[n]}\int_a^b (b-qx)_q^n D_q^{n+1} f(x) d_q x,\end{aligned}$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί με επαγωγή. $\square$

Κεφάλαιο 21

q-Γάμμα και q-Βήτα Συναρτήσεις

Αρκετές σημαντικές συναρτήσεις στην ανάλυση είναι ορισμένες σαν όρια πεπερασμένων ολοκληρωμάτων.Οι ακόλουθες δύο συναρτήσεις, που εισήχθαν από τον Euler,

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx, \quad t > 0, \tag{21.1}$$

$$\mathrm{B}(t,s) = \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{s-1}dx, \quad s,t > 0, \tag{21.2}$$

ονομάζονται οι *γάμμα* και οι *βήτα συναρτήσεις* αντίστοιχα, είναι τα πιο σημαντικά παραδείγματα. Μερικές από τις ιδιοτητές τους δίνονται παρακάτω:

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t), \tag{21.3}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{εάν } n \text{ είναι ένας θετικός ακέραιος}, \tag{21.4}$$

$$\mathrm{B} = \frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)}. \tag{21.5}$$

Συγκεκριμένα, η (21.4) μας λέει ότι η γάμμα συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ως μία γενλικευση των παραγοντικών. Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε τα q-ανάλογα αυτών των δύο συναρτήσεων και τις ποικίλες ιδιοτητές τους, συμπεριλαμβάνοντας τα q-ανάλογα των (21.3) - (21.5). Θα υποθέσουμε ότι $0 < q < 1$.

Ορισμός 21.1. *Για κάθε $t > 0$,*

$$\Gamma_q(t) = \int_0^\infty x^{t-1}E_q^{-qx}d_qx \tag{21.6}$$

ονομάζεται η q-γάμμα συνάρτηση.

Πρώτα σημειώνουμε ότι από την (9.10), $E_q^0 = 1$, και από την (9.7) και την (9.13), $E_q^{-\infty} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{e_q^x} = 0$. Χρησιμοποιώντας την (9.11) και την q-ολοκλήρωση κατά παράγοντες (20.3), έχουμε

$$\int_0^\infty x^t E_q^{-qx} d_q x = -\int_0^\infty x^t E_q^{-x} d_q x = [t] \int_0^\infty x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x,$$

και ως εκ τούτου,

$$\Gamma_q(t+1) = [t]\Gamma_q(t), \tag{21.7}$$

για κάθε $t > 0$. Επειδή

$$\Gamma_q(1) = \int_0^\infty E_q^{-qx} d_q x = E_q^0 - E_q^{-\infty} = 1,$$

έχουμε για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n,

$$\Gamma_q(n+1) = [n]!. \tag{21.8}$$

Για να μελετήσουμε την γάμμα συνάρτηση για $t \notin N$, είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε μία φαινομενικά πιο περίπλοκη συνάρτηση.

Ορισμός 21.2. *Για κάθε $t, s > 0$,*

$$\mathrm{B}_q(t,s) = \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{s-1} d_q x \tag{21.9}$$

ονομάζεται η q-βήτα συνάρτηση.

Από τον ορισμό του αόριστου και του γενικευμένου ολοκληρώματος, (19.7) και (19.12), έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_q(t,\infty) &\overset{(19.7)}{=} (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} q^j (q^j a)^{t-1}(1-q^{j+1})_q^\infty \\
&= (1-q)\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j (q^j a)^{t-1}(1-q^{j+1})_q^\infty \\
&\overset{(19.11),(19.12)}{=} \int_0^\infty x^{t-1}(1-qx)_q^\infty d_q x,
\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $(1-q^{j+1})_q^\infty = 0$ για κάθε αρνητικό ακέραιο j. Η σχέση μεταξύ των $\Gamma_q(t)$ και $\mathrm{B}_q(t,s)$ αποκαλύφθηκε από τον τύπο $E_q^x = (1+(1-q)x)_q^\infty$. Έτσι έχουμε

$$\mathrm{B}_q(t,\infty) = \int_0^\infty x^{t-1} E_q^{-\frac{qx}{(1-q)}} d_q x,$$

και εκτελώντας την αλλαγή μεταβλητής $x = (1-q)y$(19.15), παίρνουμε

$$\mathrm{B}_q(t,\infty) = (1-q)^t \int_0^\infty y^{t-1} E_q^{-qy} d_q y,$$

ή

$$\Gamma_q(t) = \frac{\mathrm{B}_q(t,\infty)}{(1-q)^t}. \tag{21.10}$$

Εισάγοντας άλλη μεταβλητή s φαίνεται να γίνεται ένα βήμα προς τα πίσω με την πρώτη ματιά. Ωστόσο, αυτό στην πραγματικότητα αυξάνει την ελευθερία να διαχειριστούμε τις συναρτήσεις και να απλοποιήσουμε το πρόβλημα.

Πρόταση 21.3. *(α) Εάν $t > 0$ και n είναι ένας θετικός ακέραιος, έχουμε*

$$B_q(t,n) = \frac{(1-q)(1-q)_q^{n-1}}{(1-q^t)_q^n}. \tag{21.11}$$

(β) Για κάθε $t, s > 0$, έχουμε

$$B_q(t,s) = \frac{(1-q)(1-q)_q^\infty (1-q^{t+s})_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty (1-q^s)_q^\infty}. \tag{21.12}$$

Απόδειξη. (α) Εμείς πρώτα εξάγουμε δύο επαναληπτικές σχέσεις για την $\mathrm{B}_q(t,s)$. Πρώτα, χρησιμοποιώντας την (3.11) και την q-ολοκλήρωση κατά παράγοντες, έχουμε, για κάθε $t > 1$, $s > 0$,

$$\mathrm{B}_q(t,s) = -\frac{1}{[s]} \int_0^1 x^{t-1} d_q (1-x)_q^s = \frac{[t-1]}{[s]} \int_0^1 x^{t-2} (1-qx)_q^s d_q x,$$

και ως εκ τούτου

$$\mathrm{B}_q(t,s) = \frac{[t-1]}{[s]} \mathrm{B}_q(t-1,s-1). \tag{21.13}$$

Από την άλλη, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_q(t,n+1) &= \int_0^1 x^{t-1} (1-qx)_q^{n-1} (1-q^n x) d_q x \\ &= \int_0^1 x^{t-1} (1-qx)_q^{n-1} d_q x - q^n \int_0^1 x^t (1-qx)_q^{n-1} d_q x, \end{aligned}$$

και έτσι

$$\mathrm{B}_q(t,n+1) = \mathrm{B}_q(t,n) - q^n \mathrm{B}_q(t+1,n). \tag{21.14}$$

Συνδυάζοντας τις (21.13) και (21.14), παίρνουμε

$$\mathrm{B}_q(t, n+1) = \mathrm{B}_q(t, n) - \frac{q^n[t]}{[n]}\mathrm{B}_q(t, n+1),$$

ή

$$\mathrm{B}_q(t, n+1) = \frac{1-q^n}{1-q^{t+n}}\mathrm{B}_q(t, n), \tag{21.15}$$

για κάθε $t > 0$ και θετικό ακέραιο n. Επειδή

$$\mathrm{B}_q(t, 1) = \int_0^1 x^{t-1} d_q x = \frac{1}{[t]},$$

έχουμε

$$\mathrm{B}_q(t, n) = \frac{(1-q^{n-1}\cdots(1-q))}{(1-q^{t+n-1})\cdots(1-q^{t+1})[t]} = \frac{(1-q)(1-q)_q^{n-1}}{(1-q^t)_q^n},$$

Αποδεικνύουμε την πρώτη ισότητα:

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_q(t, n) &= \frac{1-q^{n-1}}{1-q^{t+n-1}}\mathrm{B}_q(t, n-1) = \cdots \\
&= \frac{(1-q^{n-1})\cdots}{(1-q^{t+n-1})\cdots}\mathrm{B}_q(t, 2) \\
&= \frac{(1-q^{n-1})\cdots(1-q)}{(1-q^{t+n-1})\cdots(1-q^{t+1})}\mathrm{B}_q(t, 1) \\
&= \frac{(1-q^{n-1}\cdots(1-q))}{(1-q^{t+n-1})\cdots(1-q^{t+1})[t]}
\end{aligned}$$

όπως θέλαμε. (β) Θα χρησιμοποιήσουμε ένα επιχείρημα όμοιο με αυτό που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 13.1. Από το μέρος (α), επειδή

$$(1-q)_q^{n-1} = \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q^n)_q^\infty} \quad \text{και} \quad \frac{1}{(1-q^t)_q^n} = \frac{(1-q^{t+n})_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty},$$

η (21.12) είναι αληθής για $s = 1, 2, 3, \ldots$. Γράφουμε το δεξί μέλος της (21.12) σαν

$$\int_0^1 \frac{x^{t-1}(1-qx)_q^\infty}{(1-ax)_q^\infty} d_q x$$

και το δεξί μέλος του σαν

$$\frac{(1-q)(1-q)_q^\infty(1-aq^t)_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty(1-a)_q^\infty},$$

όπου $a = q^s$. Τότε, και οι δύο πλευρές είναι τυπικές δυναμοσειρές του q. Οι αντίστοιχοι συντελεστές τους είναι ίσοι για άπειρες τιμές του a, δηλαδή για, $a = q, q^2, q^3, \ldots$. Ωστόσο, επειδή όλοι οι συντελεστές είναι πολυώνυμα του a και διακριτά πολυώνυμα μπορούν να συμπίπτουν μόνο σε πεπερασμένα αρκετά σημεία, οι δύο σειρές έχουν εντελώς ίδιους συντελεστές, και η ισότητα είναι εξακριβωμένη. □

Το μέρος (α) της Πρότασης μας δίνει μία ρητή έκφραση για την q-γάμμα συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας την (21.10) και αφήνωντας το $n \to \infty$ στην (21.11), παίρνουμε

(21.16) $$\Gamma_q(t) = \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q)_q^{t-1}(1-q^t)_q^\infty}.$$

Το μέρος (β) μας δείχνει ότι η q-βήτα συνάρτηση είναι συμμετρική ως προς t και s, δηλαδή, $\mathrm{B}(t,s) = \mathrm{B}(s,t)$, το οποίο δεν είναι προφανής απλά κοιτώντας την (21.9). Συγρίνωντας τις (21.12) και (21.16), επίσης παίρνουμε μία έκφραση για την q-βήτα συνάρτηση σε όρους της q-γάμμα συνάρτησης όμοια με την (21.5):

(21.17) $$\mathrm{B}_q(t,s) = \frac{\Gamma_q(t)\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)}.$$

Αποδεικνύουμε την (21.17):

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma_q(t)\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)} &= \frac{\dfrac{(1-q)_q^\infty}{(1-q)^{t-1}(1-q^t)_q^\infty}\dfrac{(1-q)_q^\infty}{(1-q)^{s-1}(1-q^s)_q^\infty}}{\dfrac{(1-q)_q^\infty}{(1-q)^{t+s-1}(1-q^{t+s})_q^\infty}} \\
&= \frac{(1-q)_q^\infty(1-q)_q^\infty(1-q)^{t+s-1}(1-q^{t+s})_q^\infty}{(1-q)_q^\infty(1-q)^{t-1}(1-q^t)_q^\infty(1-q)^{s-1}(1-q^s)_q^\infty} \\
&= \frac{(1-q)(1-q)_q^\infty(1-q^{t+s})_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty(1-q^s)_q^\infty} = \mathrm{B}_q(t,s).
\end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την συζητησή μας για τις q-γάμμα και q-βήτα συναρτήσεις.

Κεφάλαιο 22

h-Παράγωγος και h-Ολοκλήρωμα

Έχουμε μελετήσει αρκετά μόνο τον q-λογισμό. Τώρα επιστρέφουμε στον h-λογισμό. Πρώτα, ας ανακαλέσουμε από το Κεφάλαιο 1 μία άλλη κβαντική παράγωγο που χαρακτηρίζεται από μία πρόσθετη παράμετρο h, την h-παράγωγο:

$$D_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

όπου $h \neq 0$. Ας ξεκινήσουμε αναπτύσσοντας τις ιδιότητες του h-λογισμού με ανάλογο τρόπο που κάναμε για τον q-λογισμό, και να συζητήσουμε τις εφαρμογές τους στα επόμενα κεφάλαια.
Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε τους κανόνες του γινομένου και του πηλίκου για την h-διαφόριση:

$$D_h\left(f(x)g(x)\right) = f(x)D_h g(x) + g(x+h)D_h f(x), \tag{22.1}$$

$$D_h\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_h f(x) - f(x)D_h g(x)}{g(x)g(x+h)}. \tag{22.2}$$

Ο πρώτος τύπος βγαίνει από την (1.4), και ο δεύτερος βγαίνει εύκολα από το πρώτο. Η ομοιότητα στο κανόνα του γινομένου υποδηλώνει ότι το h-διωνυμικό έχει οριστεί με έναν παρόμοιο τρόπο.

Ορισμός 22.1. *Το h-ανάλογο ενός διωνυμικού $(x-a)^n$ είναι*

$$(x-a)_h^n = (x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-(n-1)h) \tag{22.3}$$

όταν $n \geq 1$, και $(x-a)_h^0 = 1$.

Για να επαληθεύσουμε ότι αυτό είναι ένας επαρκές ορισμός του h-διωνυμικού, θεωρούμε

$$\begin{aligned} D_h(x-a)_h^n &= \frac{1}{h}((x-a+h)(x-a)\cdots(x-a-(n-2)h) \\ &\quad -(x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-(n-1)h)) \\ &= (x-a)\cdots(x-a-(n-2)h)\frac{(x-a+h)-(x-a-(n-1)h)}{h}. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, έχουμε

$$D_h(x-a)_h^n = n(x-a)_h^{n-1}. \tag{22.4}$$

Σημειώνουμε ότι το h-ανάλογο ενός ακεραίου n είναι το ίδιο το n, και $(x-0)_h^n \neq x^n$. Με την (22.4) από πάνω, η ακολουθία των πολυωνύμων $\{(x-a)_h^n\}$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 2.1 ως προς το γραμμικό τελεστή $D \equiv D_h$. Επιπλέον, έχουμε το ακόλουθο h-τύπο του Taylor για ένα πολυώνυμο $f(x)$ βαθμού N:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(D_h^j f)(a)\frac{(x-a)_h^j}{j!}. \tag{22.5}$$

Παράδειγμα 9. *Ο h-τύπος του Taylor για την $f(x) = (x+b)^N$, για $a = 0$, δίνει:*

$$(x+b)^N = \sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j} b_h^{N-j} x_h^j.$$

Τα ακόλουθα γεγονότα ορίζονται χωρίς απόδειξη. Οι αποδείξεις είναι παρόμοιες με αυτές που έχουν δοθεί για τις q-εκδοχές τους:

$$(x-a)_h^{m+n} = (x-a)_h^n (x-a-nh)_h^m, \tag{22.6}$$

$$D_h(a-x)_h^n = -n(a-h-x)_h^{n-1}, \tag{22.7}$$

$$D_h\frac{1}{(x-a)_h^n} = -\frac{n}{(x+h-a)_h^{n+1}}, \tag{22.8}$$

$$D_h\frac{1}{(a-h)_h^n} = \frac{n}{(a-x)_h^{n+1}}. \tag{22.9}$$

Οι τύποι παραπάνω μπορούν να επεκταθούν σε όλους τους ακεραίους εάν ορίσουμε

$$(x-a)_h^{-n} = \frac{1}{(x-a+nh)_h^n}, \tag{22.10}$$

όπως υπαγορεύεται από την (22.6).
Μέτα, ας συζητήσουμε την $f(x) = e_h^x$, το h-ανάλογο της εκθετικής συνάρτησης. Τρεις ιδιότητες τις οποίες η $f(x)$ πρέπει να έχει είναι:(1)$f(0) = 1$, (2) $D_h f(x) = f(x)$ για κάθε x, και (3) η $f(x)$ να επιδέχεται το h-Taylor ανάπτυγμα(22.5) γύρω από το $x = 0$(με $N = \infty$) για μικρά h. Στην πραγματικότητα, οι τρεις αυτές ιδιότητες χαρακτηρίζουν μοναδικά την $f(x)$, επειδή με τις (1) και (2), γνωρίζουμε ότι $(D_h^j f)(0) = 1$ για κάθε $j = 0, 1, \ldots$. Από την (22.5) με $a = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x-0)_h^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x(x-h)\cdots(x-(j-1)h)}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\frac{x}{h}(\frac{x}{h}-1)\cdots(\frac{x}{h}-j+1))h^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\frac{x}{h}}{j} h^j = (1+h)^{\frac{x}{h}}, \end{aligned}$$

και ως εκ τούτου, από το κλασσικό ανάπτυγμα Taylor ενός διωνυμικού, έχουμε

$$e_h^x = (1+h)^{\frac{x}{h}}. \tag{22.11}$$

Συγκεκριμένα, $e_1^x = 2^x$. Επίσης, καθώς $h \to 0$, η βάση του $(1+h)^{\frac{x}{h}}$ προσεγγίζει το e, όπως περιμέναμε. Σημειώστε ότι

$$D_h e_h^{ax} = \frac{(1+h)^{\frac{a(x+h)}{h}} - (1+h)^{\frac{ax}{h}}}{h} = \frac{(1+h)^a - 1}{h}(1+h)^{\frac{ax}{h}}$$

και ως εκ τούτου

$$D_h e_h^{ax} = [a]_{1+h} e_h^{ax}, \tag{22.12}$$

το οποίο είναι ένα παράδειγμα όπου ο κανόνας της αλυσίδας αποτυγχάνει.
Εάν $D_h F(x) = f(x)$, τότε η $F(x)$ είναι μία h-αντιπαράγωγος της $f(x)$ και συμβολίζεται με

$$\int f(x) d_h x.$$

Το ορισμένο h-ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης από το $x = a$ στο $x = b$, όπου a και b διαφέρει από ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του h, που ορίζεται ως ένα πεπερασμένο άθροισμα:

Ορισμός 22.2. *Εάν $b-a \in hZ$, ορίζουμε το ορισμένο h-ολοκλήρωμα να είναι*
(22.13)
$$\int_a^b f(x)d_hx = \begin{cases} h\left(f(a)+f(a+h)+\cdots+f(b-h)\right) & \text{αν} \quad a<b \\ 0 & \text{αν} \quad a=b \\ -h\left(f(b)+f(b+h)+\cdots+f(a-h)\right) & \text{αν} \quad a>b \end{cases}$$

Με αυτό τον ορισμό, το ορισμένο h-ολοκλήρωμα είναι ένα άθροισμα Riemann της $f(x)$ στο διάστημα $[a,b]$, το οποίο είναι διαχωρισμένο σε υποδιαστήματα ίσου πλάτους. Το ακόλουθο Θεώρημα δικαιολογεί την (22.13) ως ένα κατάλληλο ορισμό για το h-ολοκλήρωμα.

Θεώρημα 22.3 (***Θεμελιώδες Θεώρημα του h-λογισμού***)**.** *Εάν η $F(x)$ είναι μία h-αντιπαράγωγος της $f(x)$ και $b-a \in hZ$, έχουμε*

$$\int_a^b f(x)d_hx = F(b)-F(a). \tag{22.14}$$

Απόδειξη. Εάν $b>a$, τότε από τον ορισμό έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)d_hx &= h\sum_{j=0}^{\frac{(b-a)}{h}-1} f(a+jh) = h\sum_{j=0}^{\frac{(b-a)}{h}-1} D_hF(x)|_{x=a+jh} \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{(b-a)}{h}-1} \left(F(a+(j+1)h)-F(a+jh)\right) = F(b)-F(a),\end{aligned}$$

όπως θέλαμε. Η περίπτωση $b<a$ είναι παρόμοια, και η τελευταία περίπτωση, $b=a$, είναι τετριμμένη. □

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 22.3 για $D_h(F(x)g(x))$ και χρησιμοποιώντας την (22.1), παίρνουμε την h-εκδοχή της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες:

$$\int_a^b f(x)d_hg(x) = f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b g(x+h)d_hf(x), \tag{22.15}$$

όπου(υποθέτωντας $a<b$)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)d_hg(x) &= \int_a^b f(x)D_hg(x)d_hx \\ &= h\sum_{j=0}^{\frac{(b-a)}{h}-1} f(a+jh)(D_hg)(a+jh) \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{(b-a)}{h}-1} f(a+jh)\left(g(a+jh+h)-g(a+jh)\right).\end{aligned}$$

Παίρνουμε $h = 1$ και a,b να είναι ακέραιοι, με $a < b$. Για μία συνάρτηση $\varphi(x)$ ορίζουμε

$$f(x) = \varphi(0) + \varphi(1) + \cdots + \varphi(x-1),$$

όπου x είναι ένας θετικός ακέραιος. Με άλλα λόγια, $D_1 f(x) = \varphi(x)$. Επίσης, αντικαθιστώ το $j + a$ με το j και αλλάζω την «αρίθμηση» από $j = 0$ σε $j = a$. Άρα από την (22.15), παίρνουμε

$$\sum_{j=a}^{b-1} \varphi(j) g(j+1) = g(b) f(b) - g(a) f(a) - \sum_{j=a}^{b-1} f(j)(g(j+1) - g(j)). \tag{22.16}$$

Αυτός ο τύπος είναι γνωστός ως *ο μετασχηματισμός του Abel*. Άλλος χρήσιμος τύπος μπορεί να αποκτηθεί εφαρμόζωντας κατέπανάληψη την h-ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Εάν $x - a \in hZ$, τότε χρησιμοποιώντας τις (22.7) και (22.15), έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \int_a^x D_h f(t) d_h t = -\int_a^x D_h f(t) d_h (x-t) \\ &= (D_h f)(a)(x-a) + \int_a^x (x-h-t) D_h^2 f(t) d_h t \\ &= (D_h f)(a)(x-a) - \frac{1}{2} \int_a^x D_h^2 f(t) d_h (x-t)_h^2 \\ &= (D_h f)(a)(x-a) \\ &\qquad + \frac{1}{2}(D_h^2 f)(a)(x-a)_h^2 - \frac{1}{6} \int_a^x D_h^3 f(t) d_h (x-t)_h^3 \end{aligned}$$

και πάει λέγοντας, και ως εκ τούτου για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(D_h^j f)(a)}{j!}(x-a)_h^j - \frac{1}{(n+1)!} \int_a^x D_h^{n+1} f(t) d_h (x-t)_h^{n+1}, \tag{22.17}$$

ή

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(D_h^j f)(a)}{j!}(x-a)_h^j + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t-h)_h^n D_h^{n+1} f(t) d_h t. \tag{22.18}$$

Αυτός ο τύπος είναι *ο τύπος παρεμβολής του Newton*. Όπως έχουμε δει, από την πλευρά του h-λογισμού, αυτός είναι ο h-τύπος του Taylor με υπόλοιπο.

Υποθέτουμε $h > 0$. Από την (22.13), η απόλυτη τιμή του υπολοίπου φράζεται από

$$\frac{1}{n!}|x-a|^{n+1}\max_{[a,x]}|D_h^{n+1}f|. \tag{22.19}$$

Για να αποδείξουμε ότι το υπόλοιπο φράζεται χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι:$|\int_a^x f^{(n+1)}(\xi)d\xi| \leqslant \int_a^x |f^{(n+1)}(\xi)|d\xi \leqslant \max_{\xi\in[a,b]}|f^{(n+1)}(\xi)|(x-a)$, όπου το ξ ανήκει στο κλειστό διάστημα που ορίζουν τα a, x. Χωρίς βλάβη της γενικότητας $I = [a, x]$.
Για να δούμε γιατί η (22.18) λέγεται τύπος παρεμβολής, έστω $x = a + mh$, όπου m είναι ένας θετικός ακέραιος. Το ολοκλήρωμα στην (22.18) τότε ισούται

$$\sum_{j=0}^{m-1}((a+mh)-(a+jh)-h)_h^n\,D_h^{n+1}f(a+jh)$$

από την (22.13). Επειδή η συνάρτηση $g(t) = (a + mh - t - h)_h^n$ μηδενίζεται όταν $t = a + (m-1)h, a + (m-2)h, \ldots, a + (m-n)h$, το υπόλοιπο μηδενίζεται όταν m είναι ένας ακέραιος ανάμεσα στο 1 και το n. Το ολοκλήρωμα προφανώς μηδενίζεται όταν $m = 0$. Αυτό δείχνει ότι το πεπερασμένο άθροισμα στην (22.18) είναι ακριβώς ίσο με την $f(x)$ σε $n + 1$ ισαπέχοντα σημεία $x = a, a + h, a + 2h, \ldots, a + nh$. Επιπλέον το άθροισμα, όταν θεωρηθεί σαν μία συνάρτηση του x, είναι στην πραγματικότητα πολυώνυμο παρεμβολής βαθμού n το οποίο προσεγγίζει μία αυθαίρετη συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $[a, b = a + nh]$. Ο λάθος όρος μπορεί να εκτιμηθεί χρησιμοποιώντας την (22.19).
Λόγω της ομοιότητας ανάμεσα στις (22.18) και (20.4), μία παρόμοια συζήτηση είναι έγκυρη για την q-εκδοχή, δηλαδή, το άθροισμα στο δεξί μέλος της (20.4) μπορούμε να το εκλάβουμε ως ένα πολυώνυμο παρεμβολής το οποίο είναι ακριβής για $a, qa, \ldots, q^n a$.

Κεφάλαιο 23

Πολυώνυμα Bernoulli και Αριθμοί Bernoulli

Σε αυτό το Κεφάλαιο, εισάγουμε μία ακολουθία πολυωνύμων που είναι στενά συνδεδεμένη με την h-αντιπαράγωγο των πολυωνύμων και έχει πολλές σημαντικές εφαρμογές.

Ορισμός 23.1. *Στο ανάπτυγμα Taylor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n = \frac{ze^{zx}}{e^z - 1}, \tag{23.1}$$

όπου $B_n(x)$ είναι πολυώνυμα του x, για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n. Είναι γνωστά ως Πολυώνυμα Bernoulli.

Εάν διαφορίσουμε και τις δύο πλευρές της (23.1) ως προς x, παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B'_n(x)}{n!} z^n = z\frac{ze^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^{n+1}.$$

Εξισώνοντας του συντελεστές του z^n, όπου $n \geq 1$, παίρνουμε

$$B'_n(x) = nB_{n-1}(x). \tag{23.2}$$

Μαζί με το γεγονός ότι $B_0(x) = 1$, το οποίο μπορούμε να το πάρουμε αφήνοντας το z να πάει στο μηδέν και στις δύο πλευρές της (23.1), αυτό ακολουθεί ότι ο βαθμός του $B_n(x)$ είναι n και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι μονάδα. Χρησιμοποιώντας την (23.2), μπορούμε να προσδιορίσουμε τα $B_n(x)$ ένα προς ένα, υπό την προυπόθεση ότι οι σταθεροί όροι είναι γνωστοί.

Ορισμός 23.2. *Για $n \geq 0$, $b_n = B_n(0)$ λέγονται αριθμοί Bernoulli.*

Βάζοντας όπου $x = 0$ στην (23.1), παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n = \frac{z}{e^z - 1}. \tag{23.3}$$

Άρα χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor έχουμε

$$\frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \frac{z^3}{24} + \cdots},$$

θα χρησιμοποιήσουμε μακρά διαίρεση για να βρούμε τους αριθμούς Bernoulli. Ωστόσο, θα θέλαμε να προσδιορίσουμε τα b_n και $B_n(x)$ με έναν πιο εύκολο και πιο συστηματικό τρόπο. Για να το καταφέρουμε αυτό, χρειαζόμαστε τις ακόλουθες προτάσεις.

Πρόταση 23.3. *Για κάθε $n \geq 1$,*

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}. \tag{23.4}$$

Απόδειξη. Συγκρίνοντας τους συντελεστές του z^n στην

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1)}{n!} z^n - \frac{B_n x}{n!} z^n = \frac{ze^{z(x+1)} - ze^{zx}}{e^z - 1} = ze^{zx} = \frac{d}{dx} e^{zx},$$

όπου

$$e^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n z^n}{n!},$$

έχουμε

$$B_n(x+1) - B_n(x) = \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1},$$

όπως θέλαμε. □

Πρόταση 23.4. *Για κάθε $n \geq 0$,*

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b_j x^{n-j}. \tag{23.5}$$

Απόδειξη. Έστω

$$F_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b_j x^{n-j}.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι (1)$F_n(0) = b_n$ για $n \geq 0$ και (2)$F_n'(x) = nF_{n-1}(x)$ για κάθε $n \geq 1$, επειδή αυτές οι δύο ιδιότητες χαρακτηρίζουν μοναδικά την

$B_n(x)$. Η πρώτη ιδιότητα είναι προφανής. Όσο για την δεύτερη ιδιότητα, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι για $n > j \geq 0$,

$$(n-j)\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j-1)!} = n\binom{n-1}{j}.$$

έχουμε για $n \geq 1$,

$$\frac{d}{dx}F_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}(n-j)b_j x^{n-1-j} = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}b_j x^{n-1-j},$$

όπως θέλαμε. □

Βάζοντας $x = 1$ στην (23.5), έχουμε

$$B_n(1) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}b_j = b_n + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}b_j, \quad n \geq 1.$$

Ωστόσο, για κάθε $n \geq 2$, έχουμε $B_n(1) = b_n$, το οποίο ακολουθεί από την (23.4) με $x = 0$. Επιπλέον, παίρνουμε τον τύπο

$$\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}b_j = 0, \quad n \geq 2. \tag{23.6}$$

Αυτός ο τύπος μας επιτρέπει να υπολογίζουμε τους αριθμούς Bernoulli επαγωγικά. Οι πρώτοι από αυτούς είναι

$$b_0 = 1,\ b_1 = -\frac{1}{2},\ b_2 = \frac{1}{6},\ b_3 = 0,\ b_4 = -\frac{1}{30},\ b_5 = 0,\ b_6 = \frac{1}{42}. \tag{23.7}$$

Είναι δελεαστικόνα πούμε ότι $|b_n| \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Ωστόσο, εάν θεωρήσουμε κάποιους άλλους αριθμούς στην ακολουθία,

$$b_8 = -\frac{1}{30},\ b_{10} = \frac{5}{66},\ b_{12} = -\frac{691}{2730},\ b_{14} = \frac{7}{6},$$
$$b_{16} = -\frac{3617}{510},\ b_{18} = \frac{43867}{798},\ b_{20} = -\frac{174611}{330},$$

παρατηρούμε ότι οι τιμές τους γενικά αυξάνουν με εναλλακτικό πρόσημο. Μία σημαντική ιδιότητα των αριθμών Bernoulli είναι ότι $b_n = 0$ για περιττά $n \geq 3$, το οποίο ακολουθεί από το γεγονός ότι η συνάρτηση

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n - b_1 z = \frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\frac{e^z+1}{e^z-1}$$

είναι άρτια, δηλαδή, $f(-z) = f(z)$. (Οι συντελεστές του t^n στο ανάπτυγμα Taylor γύρω από το μηδέν για κάθε άρτια συνάρτηση $g(t)$ μηδενίζεται για όλα τα περιττά n, επειδή εάν η g είναι άρτια, $g^{(n)}(t) = (-1)^n g^{(n)}(-t)$ για κάθε n και $g^{(n)}(0) = -g^{(n)}(0)$ για κάθε περιττό n.)

Ένας ενδιαφέρον τύπος που περιλαμβάνει τους αριθμούς Bernoulli που μπορούν να αποκτηθούν βάζοντας $x = -1$ μέσα στις (23.4) και (23.5), το οποίο μας δίνει

$$b_n + n(-1)^n = B_n(-1) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b_j (-1)^{n-j},$$

ή

$$n = 1 + \frac{n}{2} + \sum_{j=2}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} b_j.$$

Αντικαθιστώντας το j με το $j+1$ και το n με το $n+1$, στην παραπάνω σχέση, παίρνουμε:

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} b_j \frac{b_{j+1}}{j+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}. \tag{23.8}$$

Απόδειξη της (23.8): Αφού αντικαθιστήσουμε στην εξίσωση που έχουμε και κάνουμε πράξεις θα βγάλουμε την σχέση (23.8),

$$\begin{aligned}
n+1 &= 1 + \frac{n+1}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} \binom{n+1}{j+1} b_{j+1} \\
\left(-\frac{1}{n+1}\right) \frac{n-1}{2} &= -\left(-\frac{1}{n+1}\right) \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{n+1}{j+1} b_{j+1} \\
\frac{1-n}{2(n+1)} &= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} b_j \frac{b_{j+1}}{j+1} \\
\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} &= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} b_j \frac{b_{j+1}}{j+1}.
\end{aligned}$$

□

$\Big($Στη δεύτερη γραμμή έχουμε πολλαπλασιάσει και τα δύο μέλη με $-\frac{1}{n+1}\Big)$

Πρόταση 23.5. *Για κάθε $n \geq 1$,*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} B_j(x) = n x^{n-1}. \tag{23.9}$$

Απόδειξη. Η περίπτωση όπου $n = 1$ είναι προφανής. Εάν υποθέσουμε ότι η (23.9) ισχύει για $k \geq 1$, έχουμε, από την (23.2),

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}B_j(x) &= \sum_{j=1}^{k} j\binom{k+1}{j}B_{j-1}(x) \\
&= (k+1)\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j-1}B_{j-1}(x) \\
&= (k+1)\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}B_j(x) \\
&= (k+1)kx^{k-1} = (k+1)\frac{d}{dx}x^k,
\end{aligned}$$

ή

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}B_j(x) = (k+1)x^k + C,$$

για κάποια σταθερά C. Βάζοντας $x = 0$ και χρησιμοποιώντας την (23.6) δείχνουμε ότι $C = 0$. Ως εκ τούτου, η (23.9) είναι αληθής για κάθε θετικό ακέραιο. □

Όπως έχουμε αναφέρει παραπάνω, ο τύπος (23.2) και η γνώση των αριθμών Bernoulli μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε το πολυώνυμα Bernoulli επαγωγικά. Τα πρώτα έξι από αυτά δίνονται παρακάτω:

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1, \\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\
B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x.
\end{aligned}$$

Κεφάλαιο 24

Αθροίσματα Δυνάμεων

Τώρα στρεφόμαστε στην σχέση ανάμεσα στα πολυώνυμα Bernoulli και τον h-λογισμό. Από την Πρόταση 23.1, έχουμε

$$D_1 B_n(x) = B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1},$$

ή

$$n \int x^{n-1} d_1 x = B_n(x), \tag{24.1}$$

όπου D_1 είναι η h-παράγωγος με $h = 1$ και $\int f(x) d_1 x$ συμβολίζει την h-αντιπαράγωγο με $h = 1$. Εφαρμόζοντας το Θεμελιώδες Θεώρημα του h-λογισμού(22.14), έχουμε για ένα μη αρνητικό ακέραιο n,

$$a^n + (a+1)^n + \cdots + (b-1)^n \overset{(22.13)}{=} \int_a^b x^n d_1 x \overset{(22.14)}{=} \frac{B_{n+1}(b) - B_{n+1}(a)}{n+1}, \tag{24.2}$$

όπου $a < b$ και $b - a \in Z$. Εάν ξαναγράψουμε το δεξί μέλος χρησιμοποιώντας την (23.5) και αφήνοντας $a = 0$, $b = M + 1$, παίρνουμε

$$\sum_{k=0}^{M} k^n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} (M+1)^{n+1-j} b_j. \tag{24.3}$$

Εφόσον οι αριθμοί Bernoulli είναι γνωστοί, καποιός μπορεί να χρησιμοποιήσει την (24.3) εύκολα για να βρει τύπους για τα αθροίσματα ακεραίων δυνάμεων.

Για παράδειγμα, για $n = 2$, η (24.3) γίνεται

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{M} k^2 &= \frac{1}{3}\left(\binom{3}{0}(M+1)^3 b_0 + \binom{3}{1}(M+1)^2 b_1 + \binom{3}{2}(M+1) b_2\right) \\
&= \frac{1}{3}\left((M+1)^3 - \frac{3}{2}(M+1)^2 + \frac{1}{2}(M+1)\right) = \frac{M(M+1)(2M+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Για $n = 3$, έχουμε

$$\sum_{k=1}^{M} k^3 = \frac{1}{4}\left((M+1)^4 - 2(M+1)^3 + (M+1)^2\right) = \left(\frac{M(M+1)}{2}\right)^2.$$

Αυτή είναι μία ενδιαφέρουσα σύμπτωση ότι για κάθε θετικό ακέραιο M,

$$1^3 + 2^3 + \cdots + M^3 = (1 + 2 + \cdots + M)^2.$$

Επίσης, η (24.3) αποκαλύπτει το γενικό γεγονός ότι ο τύπος για $1^n + 2^n + \cdots + M^n$ είναι ένα πολυώνυμο του M βαθμού $n + 1$. Αυτό το πολυώνυμο, για κάθε θετικό ακέραιο n, περιέχει το παράγοντα $M(M+1)$, επειδή το δεξί μέλος της (24.3) προφανώς μηδενίζεται για $M = -1$ και, από την (23.6), επίσης μηδενίζεται για $M = 0$.

Κεφάλαιο 25

Ο Τύπος των Euler-Maclaurin

Στον q-λογισμό, ο τύπος του Jackson (19.2) παρέχει ένα τρόπο να υπολογίσουμε ρητά την q-αντιπαράγωγο κάθε συνάρτησης. Υπενθυμίζουμε ότι ο τύπος του Jackson συμπεραίνεται τυπικά χρησιμοποιώντας τελεστές. Θα κάνουμε το ίδιο πράγμα για την h-αντιπάραγωγο σε αυτό το κεφάλαιο.
Υποθέτουμε ότι $D_h F(x) = f(x)$. Χρησιμοποιώντας τον συνήθη τύπο του Taylor, έχουμε

$$F(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(x)h^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n D^n}{n!} \right) F(x),$$

και ως εκ τούτου, τυπικά,

$$F(x+h) = e^{hD} F(x), \tag{25.1}$$

όπου $D \equiv \frac{d}{dx}$. Έτσι, έχουμε

$$f(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{e^{hD} - 1}{h} F(x),$$

ή

$$F(x) = \frac{hD}{e^{hD} - 1} \int f(x)dx. \tag{25.2}$$

Από τον ορισμό των αριθμών Bernoulli (23.3), έχουμε

$$\frac{hD}{e^{hD} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} (hD)^n,$$

και ως εκ τούτου

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} (hD)^n \int f(x)dx.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $b_n = 0$ εάν n είναι περιττός και $n \geq 3$, εξάγουμε *τον τύπο των Euler - Maclaurin*

$$F(x) = \int f(x)dx - \frac{h}{2}f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}h^{2n}}{(2n)!} f^{(2n-1)}(x). \tag{25.3}$$

Σημειώστε ότι το συνηθισμένο ολοκλήρωμα και η συνηθισμένη παράγωγος εμπλέκονται στην (25.3). Υποθέτουμε ότι $h = 1$ και $b - a \in N$. Χρησιμοποιώντας το Θεμελιώδες Θεώρημα του h-λογισμού, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=a}^{b-1} f(n) &\overset{(22.13)+(22.14)}{=} \int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}\left(f(b) - f(a)\right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!}\left(f^{(2n-1)}(b) - f^{(2n-1)}(a)\right). \end{aligned} \tag{25.4}$$

Εάν η f αυξάνει πιο γρήγορα ως προς x με όλες τις παραγώγους να προσεγγίζουν το μηδέν καθώς $x \to \infty$, έχουμε

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) = \int_a^{\infty} f(x)dx + \frac{1}{2}f(a) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} f^{(2n-1)}(a). \tag{25.5}$$

Προκειμένου να δικαιολογηθεί η τυπική παράγωγος αυτών των τύπων, ας θεωρήσουμε κάποια παραδείγματα. Εάν $f(x) = x^s$, όπου s είναι ένας θετικός ακέραιος, η (25.4) γίνεται

$$\begin{aligned} \sum_{n=a}^{b-1} n^s &= \frac{b^{s+1} - a^{s+1}}{s+1} - \frac{b^s - a^s}{2} \\ &\quad + \sum_{m=2}^{s+1} \frac{b_m}{m!} s(s-1)\cdots(s-m+2)(b^{s-m+1} - a^{s-m+1}) \\ &= \frac{1}{s+1}\left(x^{s+1} - \frac{s+1}{2}x^s + \sum_{m=2}^{s+1}\binom{s+1}{m} b_m x^{s+1-m}\right)\Bigg|_{x=a}^{x=b}, \end{aligned}$$

[Επαληθεύουμε την προηγούμενη σχέση όσο αφορά το κομμάτι του αθροίσματος: $\binom{s+1}{m}\frac{1}{s+1} = \frac{(s+1)!}{m!(s+1-m)!}\frac{1}{s+1} = \frac{s!}{m!(s+1-m)!} =$
$= \frac{(s+2-m)\cdots s}{m!}$]

το οποίο, από την (23.5), είναι απλά $\frac{1}{s+1}(B_{s+1}(b) - B_{s+1}(a))$. Έχουμε μόλις ανακτήσει τον τύπο (24.2) από το προηγούμενο κεφάλαιο. Καθώς ένα δεύτερο παράδειγμα, θεωρούμε την (25.5) με $f(x) = e^{-x}$ και $a = 0$. Το αριστερό μέλος είναι μία γεωμετρική σειρά,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-1})^n = \frac{1}{1-e^{-1}},$$

το οποίο συμφωνεί με το δεξί μέλος,

$$1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} = \frac{-1}{e^{-1}-1},$$

(Το αριστερό μέλος της προηγούμενης σχέσης ισούται με $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!}(-1)^n = b_0 - b_1 + b_2 + b_4 + b_6 + \cdots$)
όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την (23.3) με $z = -1$. Ως εκ τούτου, ο τύπος των Euler-Maclaurin έχει περισσότερα από απλές τυπικές τιμές, τουλάχιστον για συναρτήσεις που μειώνονται γρήγορα στο άπειρο, όπως η $f(x) = e^{-x}$.
Για τους τύπους (25.4) και (25.5), ωστόσο και τα δεξί και τα αριστερά μέλη περιέχουν αθροίσματα, τα οποία στο δεξί μέλος συγκλίνουν πιο γρήγορα απ'οτι αυτά στο αριστερό μέλος. Σε αυτή την περίπτωση, οι τύποι παρέχουν αποτελεσματικούς τρόπους για να εκτιμήσουμε πεπερασμένα και άπειρα αθροίσματα. Ωστόσο, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί πώς να εφαρμόσουμε αυτούς τους τύπους για να εκτιμήσουμε ένα άθροισμα, επειδή, όπως έχουμε συζητήσει στο Κεφάλαιο 23, $|b_{2n}|$ αυξάνει επαόριστον ως προς n. Θεωρούμε την $f(x) = x^{-2}$. Επειδή $f^{(n)}(x) = (-1)^n 2 \cdot 3 \cdots (n+1)x^{-n-2}$, έχουμε

$$\sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{a^{2n+1}}. \tag{25.6}$$

Θα δούμε ότι οι σειρές στο δεξί μέλος συγκλίνουν πιο γρήγορα, αλλά σε αρκετά μεγάλα n, η $|b_{2n}|$ γίνεται πιο κυρίαρχη πάνω από το a^{2n}, και το μερικό άθροισμα αναπηδά πάνω και κάτω όλο και πιο δραστικά. Προκειμένου να δούμε πόσο καλά ένα ορισμένο μερικό άθροισμα προσεγγίζει την πραγματική τιμή, θα θέλαμε να παράξουμε ένα τύπο όμοιο με την (25.4), αλλά με το άπειρο άθροισμα στο δεξί μέλος να αντικαταστημένο από το N-ιοστό μερικό άθροισμα, s_N, συν έναν επιπλέον όρο υπολοίπου, R_N.
Ξεκινάμε, γράφοντας το δεξί μέλος της (25.4) ως

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} \left(h^{(k)}(b) - h^{(k)}(a)\right),$$

όπου $h(x) = \int f(x)dx$. Υποθέτουμε $a \in Z$ και $b = a+1$. Θεωρούμε το N-ιοστό μερικό άθροισμα,

$$s_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{B_k(0)}{k!} \left(h^{(k)}(a+1) - h^{(k)}(a)\right),$$

όπου N είναι ένας θετικός ακέραιος. Εάν θέσουμε $g(x) = \dfrac{B_N(x)}{N!}$, έχουμε $g^{(N-k)}(x) = \dfrac{B_k(x)}{k!}$ από την (23.2). Από την Πρόταση 23.3, έχουμε $B_k(1) = B_k(0)$ για $k \neq 1$ και $B_1(1) = B_1(0) + 1$. Ως εκ τούτου

$$\begin{aligned} s_N &= \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{B_k(0)}{k!} h^{(k)}(a+1) - \frac{B_k(1)}{k!} h^{(k)}(a)\right) + h'(a) \\ &= \sum_{k=0}^{N} \left(g^{(N-k)}(0) h^{(k)}(a+1) - g^{(N-k)}(1) h^{(k)}(a)\right) + h'(a) \\ &= h'(a) - \sum_{k=0}^{N} g^{(N-k)}(x) h^{(k)}(a+1-x)\Big|_{x=0}^{x=1}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Για $\underline{k=1}$ έχουμε ότι στο δεξί μέλος στη πρώτη σειρά το αποτέλεσμα είναι $-B_1(1)h'(a) = -B_1(0)h'(a) - h'(a)$ οπότε προσθέτω το $h'(a)$ ώστε να πάρω το αρχικό N-ιοστό μερικό άθροισμα!
Επειδή η συνάρτηση

$$G(x) = \sum_{k=0}^{N} g^{(N-k)}(x) h^{(k)}(a+1-x)$$

έχει πολύ απλή παράγωγο,

$$\begin{aligned} G'(x) &= \sum_{k=0}^{N} g^{(N-k+1)}(x)h^{(k)}(a+1-x) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{N} g^{(N-k)}(x)h^{(k+1)}(a+1-x) \\ &= \sum_{k=0}^{N} g^{(N-k+1)}(x)h^{(k)}(a+1-x) \\ &- \quad \sum_{k=1}^{N+1} g^{(N-k+1)}(x)h^{(k)}(a+1-x) \\ &= g^{(N+1)}(x)h(a+1-x) - g(x)h^{(N+1)}(a+1-x) \\ &= -g(x)h^{(N+1)}(a+1-x), \end{aligned}$$

όπου $g^{(N+1)}(x) = 0$ επειδή $\deg g = \deg B_N = N$, έχουμε

$$s_N = h'(a) - G(1) + G(0) \overset{\Theta.\Theta.\mathrm{A}.\Lambda}{=} h'(a) + \int_0^1 g(x)h^{(N+1)}(a+1-x)dx,$$

ή

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(a+1) - f^{(k-1)}(a)\right) = f(a) + \int_0^1 \frac{B_N(x)}{N!} f^{(N)}(a+1-x)dx,$$

εάν συμβολίσουμε το $\int f(x)dx$ με $f^{(-1)}(x)$. Εκτελούμε την αλλαγή μεταβλητής $x = a+1-t$ μέσα στο ολοκλήρωμα, παίρνουμε

$$\begin{aligned} f(a) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(a+1) - f^{(k-1)}(a)\right) \\ &\quad - \int_a^{a+1} \frac{B_N(\{1-t\})}{N!} f^{(N)}(t)dt, \end{aligned}$$

όπου $\{y\} \in [0,1)$ υποδηλώνει το κλασματικό μέρος ενός πραγματικού αριθμού y. Στην πραγματικότητα, επειδή a είναι ένας ακέραιος, για $a < t < a+1$

έχουμε $-a < 1-t < -a+1$ και έτσι $\{1-t\} = a+1-t$ (Προσθέτω το a ώστε το $\{1-t\} = a+1-t$ να ανήκει στο διάστημα $[0,1)$). Τελικά, αντικαθιστώντας το a με τα $a+1$, $a+2$, ..., $b-1$ και αθροίζοντας όλα αυτά παίρνουμε

(25.7)
$$\sum_{n=a}^{b-1} f(n) = \sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)\right) - \int_a^b \frac{B_N(\{1-t\})}{N!} f^{(N)}(t)dt,$$

ή, με $N = 2m+1$,

(25.8)
$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b-1} f(n) &= \int_a^b f(t)dt - \frac{1}{2}\left(f(b) - f(a)\right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m} \frac{b_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right) \\ &\quad - \int_a^b \frac{B_{2m+1}(\{1-t\})}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(t)dt,\end{aligned}$$

το οποίο είναι *ο τύπος των Euler-Maclaurin με υπόλοιπο*. Εάν η f και οι παραγωγοί της μηδενίζονται στο άπειρο, έχουμε

(25.9)
$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{\infty} f(n) &= \int_a^{\infty} f(t)dt + \frac{1}{2}f(a) - \sum_{k=1}^{m} \frac{b_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(a) \\ &\quad - \int_a^{\infty} \frac{B_{2m+1}(\{1-t\})}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(t)dt.\end{aligned}$$

Οι τύποι (25.8) και (25.9) μας λέει ότι το λάθος όσο αφορά την προσέγγιση των αθροισμάτων στο αριστερό μέλος από το s_{2m+1} δίνεται από τον όρο υπολοίπου,

(25.10)
$$R_{2m+1} = \int_a^b \frac{B_{2m+1}(\{1-t\})}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(t)dt \quad (b \leqslant \infty).$$

Για να εκτιμήσουμε το μεγεθός του, χρειαζόμαστε ένα πάνω φράγμα της $B_{2m+1}(x)$ στο διάστημα $[0,1]$. Από τον ορισμό των πολυωνύμων Bernoulli (23.1), έχουμε

(25.11)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(a)}{n!} z^n = \frac{ze^{az}}{e^z - 1},$$

για κάθε $0 \leqslant a \leqslant 1$. Είναι γνωστό από τη μιγαδική ανάλυση ότι η ακτίνα σύγκλισης μίας δυναμοσειράς μίας συνάρτησης $f(z)$ γύρω από το $z = 0$ δίνεται από την απόσταση στο μιγαδικό επίπεδο από την αρχή των αξόνων στο πλησιέστερο σημείο όπου η $f(z)$ δεν ορίζεται. Τώρα, όλα τα σημεία όπου η $(e^z - 1)^{-1}$ δεν ορίζεται είναι $2\pi ni$, όπου n είναι ένας ακέραιος, ως εκ τούτου τα πλησιέστερα κοντά στην αρχή των αξόνων είναι τα $\pm 2\pi i$. Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς στην (25.11) είναι 2π.

Από την άλλη, ένα άλλο γεγονός από την ανάλυση μας λέει ότι εάν η R είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum a_n x^n$, τότε το πάνω όριο των τιμών $(|a_n|R^n)^{\frac{1}{n}} = R|a_n|^{\frac{1}{n}}$ είναι μονάδα, δηλαδή, $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ τελικά φραγμένη από το $\dfrac{1}{R}$, αλλά όχι από μικρότερους αριθμούς. (Κάποιος θα μπορούσε να επαληθεύσει το γεγονός θεωρώντας τη γεωμετρική σειρά $\sum a_n x^n$, όπου $R = \frac{1}{|a|}$). Αυτό σημαίνει ότι καθώς το n πάει στο ∞, έχουμε

$$\left(\frac{|B_n(a)|}{n!}\right)^{\dfrac{1}{n}} \sim \frac{1}{2\pi},$$

ή

$$\frac{|B_n(a)|}{n!} \sim \frac{1}{(2\pi)^n}.$$

Ως εκ τούτου, ακολουθώντας από την (25.10), το απαιτούμενο φράγμα της $|R_{2m+1}|$ έχει μέγεθος όμοιο με

$$\frac{1}{(2\pi)^{2m+1}} \int_a^b |f^{(2m+1)}(t)|dt.$$

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι στη συζητησή μας για το μεγεθός της $|R_{2m+1}|$ εδώ δεν είναι αυστηρά ένα. Ωστόσο, το παραπάνω αποτέλεσμα είναι έγκυρο, επειδή στην πραγματικότητα, είναι γνωστό για $0 \leqslant a \leqslant 1$,

$$\frac{|B_{2m+1}(a)|}{(2m+1)!} < \frac{4e^{2\pi}}{(2\pi)^{2m+1}}. \tag{25.12}$$

Επιπλέον, έχουμε

$$|R_{2m+1}| < \frac{4e^{2\pi}}{(2\pi)^{2m+1}} \int_a^b |f^{(2m+1)}(t)|dt. \tag{25.13}$$

Για παράδειγμα, με $f(x) = e^{-x}$, $a = 0$, και $b = \infty$, (25.13) μας λέει ότι $|R_{2m+1}| < \dfrac{4e^{2\pi}}{(2\pi)^{2m+1}}$ πάει στο μηδέν πολύ γρήγορα, και είδαμε νωρίτερα στο Κεφάλαιο ότι οι σειρές Euler-Maclaurin συγκλίνουν.

Μετά, ας θεωρήσουμε την $f(x) = x^{-2}$, $b = \infty$ ξανά. Υποθέτουμε ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \tag{25.14}$$

και το κάνουμε αυτό πρώτα προσθέτωντας ένα μεγάλο αριθμό όρων, ας πούμε 1000. Η ουρά του αθροίσματος μπορεί να εκτιμηθεί χρησιμοποιώντας ολοκληρώματα, δηλαδή,

$$0.001 = \int_{1000}^{\infty} \frac{dx}{x^2} < \sum_{n=1000}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \int_{999}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 0.001001\ldots$$

Βλέπουμε ότι η πρώτη μας μέθοδο μας δίνει μία ακριβή απάντηση μόνο για το έκτο δεκαδικό ψηφίο. Τι θα γίνει εάν πάμε πιο πέρα και χρησιμοποιήσουμε την (25.9) για να προσεγγίσουμε την ουρά· Από την (25.13), έχουμε την ανισότητα

$$|R_{2m+1}| < \frac{4e^{2\pi}(2m+1)!}{1000(2000\pi)^{2m+1}}.$$

Συγκεκριμένα, έχουμε

$$|R_3| < 10^{-10}, \qquad |R_5| < 10^{-16}, \qquad |R_7| < 10^{-23}.$$

Αυτό σημαίνει ότι μερικοί παραπάνω υπολογισμοί αυξάνουν «τερατωδώς» την ακρίβεια των δικών μας προσεγγίσεων.
Αυτό είναι δελεαστικό να συμπεράνουμε ότι οι περισσότεροι όροι που υπολογίσαμε, οι πιο ακριβείς είναι μία εκτίμηση που παίρνουμε. Ωστόσο, ο λόγος

$$\left|\frac{R_{2m+1}}{R_{2m-1}}\right| \sim \frac{2m(2m+1)}{(2000\pi)^2}$$

τελικά υπερβαίνει τη μονάδα. Όταν το m είναι μικρό, $|R_{2m+1}|$ μειώνεται γρήγορα και τα μερικά αθροίσματα φαίνεται να συγκλίνουν, μέχρι το $m \approx 1000\pi$, η τιμή του $|R_{2m+1}|$ ελαχιστοποιείται, και πέραν αυτού, και τα μερικά αθροίσματα αναπηδά όλο και πιο ακμαία μακριά από την πραγματική τιμή. Γενικά, εάν η ουρά ξεκινάει από το $n = a$, $|R_{2m+1}|$ ελαχιστοποιείται όταν $m \approx \pi a$.
Η ακριβή τιμή του αθροίσματος (25.14) ανακαλύφθηκε από τον Euler να είναι ίσο με $\frac{\pi^2}{6}$. Υπάρχουν αρκετοί τρόποι να το αποδείξουμε αυτό, ένας απ' αυτούς κάνει χρήση μιγαδικής ανάλυσης και άλλοι περιλαμβάνουν τις σειρές Fourier. Και οι δύο από αυτές μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε την ακριβή τιμή $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^s})$, όπου s είναι ένας άρτιος θετικός ακέραιος: αποδεικνύεται ότι ισούται με $2^{s-1}\pi^s\frac{b_s}{s!}$. Ωστόσο, δεν υπάρχει όμοια κλειστή μορφή που να έχει ανακαλυφθεί για τα αθροίσματα όταν s είναι περιττός.
Συμπερασματικά θεωρούμε δύο άλλα απλά παραδείγματα του τύπου των Euler-Maclaurin (25.8), με $a = 1$, $m = 1$.

Παράδειγμα 10. $f(x) = \dfrac{1}{x}$. *Τότε έχουμε:*

$$\sum_{n=1}^{b} \frac{1}{n} = \log b + R(b), \quad \text{όπου} \quad \lim_{b\to\infty} R(b) = c. \tag{25.15}$$

Ο αριθμός c λέγεται η σταθερά του Euler.

Παράδειγμα 11. $f(x) = \log x$. *Τότε έχουμε:*

$$\log(b-1)! = \int_1^b \log t dt - \frac{1}{2}\log b + R_1(b), \quad \text{όπου} \quad \lim_{b\to\infty} R_1(b) = C. \tag{25.16}$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, παίρνουμε

$$\int_1^b \log t dt = b(\log b - 1) + 1.$$

Ως εκ τούτου, προσθέτωντας το $\log b$ και στις δύο πλευρές της (25.16), παίρνουμε:

$$\log b! = \log \sqrt{b}\left(\frac{b}{e}\right)^b + R_1(b).$$

Επιπλέον,

$$b! \sim e^C \sqrt{b}\left(\frac{b}{e}\right)^b \quad \text{καθώς} \quad b \to \infty. \tag{25.17}$$

Επιπλέον υπολογισμοί δείχνουν ότι $e^C = \sqrt{2\pi}$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ο διάσημος τύπος του Stirling.

Κεφάλαιο 26

Συμμετρικός Κβαντικός Λογισμός

Τα q- και h-διαφορικά μπορούν να γίνουν «συμμετρικά» με τον ακόλουθο τρόπο,

$$\tilde{d}_q f(x) = f(qx) - f(q^{-1}x), \tag{26.1}$$

$$\tilde{d}_h g(x) = g(x+h) - g(x-h), \tag{26.2}$$

όπου, $q \neq 1$ και $h \neq 0$. Οι ορισμοί των αντίστοιχων παραγώγων προκύπτουν προφανώς:

$$\tilde{D}_q f(x) = \frac{\tilde{d}_q f(x)}{\tilde{d}_q x} = \frac{f(qx) - f(q^{-1}x)}{(q - q^{-1}x)}, \tag{26.3}$$

$$\tilde{D}_h g(x) = \frac{\tilde{d}_h g(x)}{\tilde{d}_h x} = \frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h}. \tag{26.4}$$

Πρόκειται να αναρωτηθούμε προσεχώς μόνο με τον q-συμμετρικό λογισμό, επειδή αυτός είναι σημαντικός για τη θεωρία κάποιων αλγεβρικών αντικειμένων που ονομάζονται *κβαντικές ομάδες*.

Οι συμμετρικοί κανόνες του q-γινομένου και του q-πηλίκου είναι

$$\begin{aligned}\tilde{D}_q(f(x)g(x)) &= f(qx)\tilde{D}_q g(x) + g(q^{-1}x)\tilde{D}_q f(x) \\ &= f(q^{-1}x)\tilde{D}_q g(x) + g(qx)\tilde{D}_q f(x),\end{aligned} \tag{26.5}$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{g(qx)\tilde{D}_q f(x) - f(qx)\tilde{D}_q g(x)}{g(qx)g(q^{-1}x)} \\ &= \frac{g(q^{-1}x)\tilde{D}_q f(x) - f(q^{-1}x)\tilde{D}_q g(x)}{g(qx)g(q^{-1}x)}.\end{aligned} \tag{26.6}$$

Για κάθε αριθμό a, έχουμε

$$\tilde{D}_q x^a = [a]^\sim x^{a-1}, \tag{26.7}$$

όπου

$$[a]^\sim = \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}. \tag{26.8}$$

Πρόταση 26.1. *Για κάθε θετικό ακέραιο n, εάν ορίσουμε*

$$(x-a)^n_{\tilde{q}} = (x - q^{n-1}a)(x - q^{n-3}a)(x - q^{n-5}a)\cdots(x - q^{-n+1}a), \tag{26.9}$$

και $(x-a)^0_{\tilde{q}} = 1$, έχουμε

$$\tilde{D}_q (x-a)^n_q = [n]^\sim (x-a)^{n-1}_{\tilde{q}}. \tag{26.10}$$

Απόδειξη. Η περίπτωση $n = 1$ είναι τετριμμένη. Σημειώνουμε ότι για κάθε $n > 1$, $(x-a)^{n+1}_{\tilde{q}} = (x-qa)^n_{\tilde{q}}(x-q^{-n}a)$. Έτσι, από την (26.5) και με επαγωγή στο n, έχουμε

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_q (x-a)^{n+1}_{\tilde{q}} &= (qx-qa)^n_{\tilde{q}} + [n]^\sim (x-qa)^{n-1}_{\tilde{q}}(q^{-1}x - q^{-n}a) \\
&= q^n (x-a)^n_{\tilde{q}} + q^{-1}[n]^\sim (x-qa)^{n-1}_{\tilde{q}}(x - q^{-n+1}a) \\
&= (q^n + q^{-1}[n]^\sim)(x-a)^n_{\tilde{q}} = [n+1]^\sim (x-a)^n_{\tilde{q}},
\end{aligned}$$

όπως θέλαμε. □

Σημειώνουμε ότι $\deg(x-a)^n_{\tilde{q}} = n$ για κάθε n, και οι πρώτοι τρεις από αυτούς είναι

$$\begin{gathered}
(q-a)^1_{\tilde{q}} = (q-a), \\
(q-a)^2_{\tilde{q}} = (x-qa)(x-q^{-1}a), \\
(q-a)^3_{\tilde{q}} = (x-q^{-2}a)(x-a)(x-q^{-2}a).
\end{gathered}$$

Ωστόσο, εάν $a \neq 0$, $(q-a)^n_{\tilde{q}}$ δεν μηδενίζεται στο $x = a$ όταν n είναι άρτιος, και έτσι τα πολυώνυμα $P_n(x) = \frac{(q-a)^n_{\tilde{q}}}{[n]^\sim !}$ δεν ικανοποιεί όλες τις συνθήκες του γενικευμένου τύπου του Taylor (Θεώρημα 2.1). (Θα αναφερθούμε στην (26.23) για την οικογένεια των πλουωνύμων η οποία ικανοποιεί το Θεώρημα 2.1.) Για $a = 0$, το ανάπτυγμα Taylor μίας δυναμοσειράς είναι

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (\tilde{D}^j_q f)(0) \frac{x^j}{[j]^\sim !}. \tag{26.11}$$

Θεωρούμε την $f(x) = (x+a)^n_{\tilde q}$. Επειδή $(\tilde D_q^j f)(0) = [n]^\sim [n-1]^\sim \cdots [n-j+1]^\sim \times (0+a)^{n-j}_{\tilde q} = \left(\frac{[n]^\sim !}{[n-j]^\sim !}\right) a^{n-j}$ για $j \leqslant n$ και $\tilde D_q^j f(q) = 0$ για $j > n$, έχουμε

$$(x+a)^n_{\tilde q} = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^\sim a^{n-j} x^j, \tag{26.12}$$

όπου

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^\sim = \frac{[n]^\sim !}{[j]^\sim ! [n-j]^\sim !}. \tag{26.13}$$

Η εξίσωση (26.12) είναι το $\tilde q$-ανάλογο του διωνυμικού τύπου του Gauss (5.5). Θα θέλαμε επίσης να πάρουμε ένα $\tilde q$-ανάλογο του διωνυμικού τύπου του Heine (8.1). Ας θεωρήσουμε την $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^n_{\tilde q}}$. Επειδή

$$\begin{aligned} (1-x)^n_{\tilde q} &= (1-q^{n-1}x)(1-q^{n-3}x)\cdots(1-q^{-n+1}x) \\ &= q^{n-1}(q^{1-n}-x) \times q^{n-3}(q^{3-n}-x)\cdots q^{1-n}(q^{n-1}-x), \end{aligned}$$

ή

$$(1-x)^n_{\tilde q} = (-1)^n (x-1)^n_{\tilde q}, \tag{26.14}$$

έχουμε

$$\tilde D_q (1-x)^n_{\tilde q} = (-1)^n [n]^\sim (x-1)^{n-1}_{\tilde q} = -[n]^\sim (1-x)^{n-1}_{\tilde q},$$

και, από (26.6),

$$\tilde D_q g(x) = \frac{[n]^\sim (1-x)^{n-1}_{\tilde q}}{(1-qx)^n_{\tilde q}(1-q^{-1}x)^n_{\tilde q}} = \frac{[n]^\sim}{(1-x)^{n+1}_{\tilde q}}. \tag{26.15}$$

Επιπλέον, για κάθε $j \geq 0$, έχουμε $(\tilde D_q^j g)(0) = [n]^\sim \cdots [n+j-1]^\sim$, και

$$\frac{1}{(1-x)^n_{\tilde q}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[n]^\sim \cdots [n+j-1]^\sim}{[j]^\sim} x^j, \tag{26.16}$$

η οποία είναι όμοια με την (8.1).

Ας γυρίσουμε τώρα στην ολοκλήρωση. Για να παράξουμε ένα σαφή τύπο για την $\tilde q$-αντιπαράγωγο μίας αυθαίρετης συνάρτησης $f(x)$, θα μας ξανά απασχολήσει μία τυπική προσέγγιση χρησιμοποιώντας τελεστές. Υποθέτουμε ότι η $F(x)$ είναι μία $\tilde{q}$-αντιπαράγωγος της $f(x)$. Χρησιμοποιώντας το τελεστή $\hat{M}_q$ όπως έχει οριστεί στην (5.6), έχουμε

$$(\hat{M}_q - \hat{M}_{q^{-1}})F(x) = F(qx) - F(q^{-1}x) = (q - q^{-1})xf(x).$$

Επειδή

$$\hat{M}_q \hat{M}_{q^{-1}} g(x) = \hat{M}_{q^{-1}} \hat{M}_q g(x) = g(x)$$

για κάθε $g(x)$, είναι φυσικό να γράψουμε $\hat{M}_{q^{-1}} = (\hat{M}_q)^{-1}$. Έτσι, έχουμε

$$\left(\hat{M}_q - \frac{1}{\hat{M}_q}\right) F(x) = (q - q^{-1})xf(x),$$

ή

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\hat{M}_q}{1 - \hat{M}_q^2}(q^{-1} - q)xf(x) \\ &= (q^{-1} - q)(\hat{M}_q + \hat{M}_q^3 + \hat{M}_q^5 + \cdots)xf(x). \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, έχουμε

$$F(x) = x(q^{-1} - q) \sum_{n=1,3,\ldots} q^n f(q^n x). \tag{26.17}$$

Είναι απλό να ελέγξουμε ότι εάν το δεξί μέλος της (26.17) συγκλίνει, αυτό μας δίνει μία $\tilde{q}$-αντιπαράγωγο της $f(x)$, και αυτή η αντιπαράγωγος μηδενίζεται για $x = 0$. Συνεπώς, υπό την προυπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει, το ορισμένο $\tilde{q}$-ολοκλήρωμα δίνεται από

$$\int_0^a f(x)\tilde{d}_q x = a(q^{-1} - q) \sum_{n=1,3,\ldots} q^n f(q^n a). \tag{26.18}$$

Το πρόβλημα της μοναδικότητας στηρίζεται στη φύση των λύσεων στη συναρτησιακή εξίσωση $\tilde{D}_q G(x) = 0$. Αυτή η εξίσωση συνεπάγεται ότι $G(qx) = G(q^{-1}x)$, ή $G(x) = G(q^{2n}x)$ για κάθε x και ακέραιο n. Εάν απαιτήσουμε η $G(x)$ να είναι συνεχής στο μηδέν, τότε η $G(x)$ θα είναι αυθαίρετα κοντά στο $G(0)$: έτσι η $G(x)$ είναι σταθερά. Επιπλέον, όπως και στον q-λογισμό, η συνέχεια στο $x = 0$ υποχρεώνει την $\tilde{q}$-αντιπαράγωγο να είναι μοναδικά καθορισμένη μέχρι ένα σταθερό προσθετέο.

Εάν ορίσουμε

$$\int_a^b f(x)\tilde{d}_q x = \int_0^b f(x)\tilde{d}_q x - \int_0^a f(x)\tilde{d}_q x,$$

έχουμε, συγκεκριμένα

$$\begin{aligned}\int_{q^{m+1}}^{q^{m-1}} f(x)\tilde{d}_q x &= (q^{-1}-q)\Big(\sum_{n=1,3,\ldots} q^{n+m-1} f(q^{n+m-1}) \\ &\quad - \sum_{n=1,3,\ldots} q^{n+m-1} f(q^{n+m-1})\Big) \\ &= (q^{-1}-q) q^m f(q^m).\end{aligned}$$

Είναι φυσικό να ορίσουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} f(x)\tilde{d}_q x &= \sum_{m=\pm1,\pm3,\ldots} \int_{q^{m+1}}^{q^{m-1}} f(x)\tilde{d}_q x \\ &= (q^{-1}-q) \sum_{m=\pm1,\pm3,\ldots} q^m f(q^m).\end{aligned} \tag{26.19}$$

Τελειώνουμε με μία σύντομη συζήτηση πιο γενικών κβαντικών λογισμών. Συναντήσαμε μέχρι στιγμή τρεις διαφορετικούς κβαντικούς λογισμούς, δηλαδή, τον q-λογισμό, τον h-λογισμό, και τον q-συμμετρικό λογισμό. Ο πιο γενικός ορισμός ενός κβαντικού διαφορικού θα ήταν

$$df(x) = f(qx+h) - f(q'x+h').$$

Όμοιες θεωρίες αποτελούνται από τις αντίστοιχες παραγώγους, τύπους του Taylor και αντιπαραγώγους που έτσι μπορούν να αναπτυχθούν. Ούτως ώστε η παράγωγος $Df(x) = \frac{df(x)}{dx}$, είναι καλά ορισμένη, θα υποθέσουμε ότι είτε $q \neq q'$ ή $h \neq h'$. Μία οικογένεια πολυωνύμων $\{P_n\}_{n\geq 0}$ που ικανοποιεί τις τρεις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.1 πάντα υπάρχει, επειδή κάθε πολυώνυμο είναι δυνατό να προκύψει από το άλλο ξεκινώντας από $n = 0$. Γενικά, αυτά τα πολυώνυμα έχουν την ακόλουθη έκφραση:

$$P_n(x) = c_n(x-a)(x-a_2)\cdots(x-a_n), \tag{26.20}$$

όπου $a_2, a_3, \ldots$ είναι συναρτήσεις του a, q, q', h, h'. Συγκρίνοντας τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων στο $DP_n(x)$ και στο $P_{n-1}(x)$, είναι εύκολο να δούμε ότι $\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{1}{[n]}$, όπου ορίζουμε

$$[n] = \frac{(q^n - q'^n)}{(q-q')} \text{ εάν } q \neq q' \text{ και } [n] = nq^{n-1} \text{ εάν } q = q'.$$

Θέτωντας $[n]! = [1]\cdots[n]$ για ένα θετικό ακέραιο n, και $[0]! = 1$, έχουμε

$$c_n = \frac{1}{[n]!}, \qquad n \geq 0.$$

Ωστόσο, η γενική έκφραση του a_n είναι αρκετά πολύπλοκη για να την γράψουμε αναλυτικά. Τώρα, συγκρίνουμε τους συντελεστές του x^{n-1} στο $dP_n(x)$ και στο $P_{n-1}(x)dx$. Αυτό μας επιτρέπει να συμπεράνουμε τον ακόλουθο αναδρομικό τύπο για το $s_n = a + a_2 + \cdots + a_n, n \geq 2$:

(26.21)
$$\begin{aligned} s_n &= \frac{[n]}{[n-1]} s_{n-1} \\ &+ \left(\frac{n(q^{n-1}h - q'^{n-1}h')}{q^{n-1} - q'^{n-1}} - \frac{[n](h-h')}{q^{n-1} - q'^{n-1}} \right) \quad \text{εάν; } q \neq q', \end{aligned}$$

(26.22)
$$s_n = \frac{n}{n-1} q s_{n-1} + \frac{1}{2} n(h+h') \quad \text{εάν; } q = q'.$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι γενικά, ακόμα και οι a_2 και οι a_3 έχουν «άσχημες» εκφράσεις. Η αναδρομική σχέση είναι πιο απλή όταν $h = h'$. Σε αυτή την περίπτωση, η (26.21) γίνεται

$$s_n = \frac{[n]}{[n-1]} s_{n-1} + nh, \quad n \geq 2,$$

το οποίο, μαζί με την αρχική συνθήκη $s_1 = a$, δίνει τη λύση

$$s_n = (a-h)[n] + h[n] \left(\frac{1}{[1]} + \frac{2}{[2]} + \cdots + \frac{n}{[n]} \right), \quad n \geq 1.$$

(Επαληθεύουμε τους παραπάνω τύπους για $n = 2$: $s_2 = \frac{[2]}{[1]} a + 2h = [2]a + 2h$ το οποίο είναι ίσο με $s_2 = (a-h)[2] + h[2] \left(\frac{1}{[1]} + \frac{2}{[2]} \right) = [2]a - [2]h + [2]h + 2h = [2]a + 2h$.) Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned} a_n &= s_n - s_{n-1} \\ &= (a-h)([n] - [n-1]) + nh \\ &\quad + h([n] - [n-1]) \left(\frac{1}{[1]} + \cdots + \frac{n-1}{[n-1]} \right), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Συγκεκριμένα, για τον q-συμμετρικό λογισμό, δηλαδή, $h = 0$, $q' = q^{-1}$, έχουμε

$$a_n = ([n]^{\sim} - [n-1]^{\sim})a = (q^{n-1} - q^{n-2} + q^{n-3} - \cdots + q^{1-n})a, \quad n \geq 1.$$

(Για να πάμε από το δεύτερο μέλος στο τρίτο χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα της γεωμετρικής σειράς: $[n]^{\sim} = \dfrac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} = \dfrac{q^{n-1} - q^{-n-1}}{1 - q^{-2}} = q^{n-1} - q^{-n-1} + q^{n-3} - q^{-n-3} + \cdots$, όμοια το $[n-1]^{\sim} = q^{n-2} - q^{-n} + q^{n-4} - q^{-n-2} + \cdots$, άρα $[n]^{\sim} - [n-1]^{\sim} = q^{n-1} - q^{n-2} + q^{n-3} - \cdots + q^{1-n}$)

Με άλλα λόγια, η ακολουθία πολυωνύμων για το q-συμμετρικό λογισμό η οποία ικανοποιεί το γενικευμένο τύπο Taylor του δίνεται από:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{[n]^{\sim}!}(x-a)\,(x-(q-1+q^{-1})a)\cdots \\ &\quad \times (x-(q^{n-1}-q^{n-2}+q^{n-3}-\cdots+q^{1-n})a)\,. \end{aligned} \tag{26.23}$$

Παράρτημα

Μία λίστα των q-Αντιπαραγώγων

$$\int x^a d_q x = \frac{x^{a+1}}{[a+1]} \quad (a \neq 1)$$

$$\int \frac{d_q x}{x} = \frac{q-1}{\log q} \log x$$

$$\int (x-a)_q^a d_q x = \frac{(x-a)_q^{a+1}}{[a+1]} \quad (a \neq 1)$$

$$\int (a-x)_q^a d_q x = -\frac{q(a-q^{-1}x)_q^{a+1}}{[a+1]} \quad (a \neq 1)$$

$$\int \frac{d_q x}{(x-a)_q^a} = \frac{1}{q[1-a](x-qa)_q^{a-1}} \quad (a \neq 1)$$

$$\int \frac{d_q x}{(a-x)_q^a} = \frac{1}{[a-1](a-x)_q^{a-1}} \quad (a \neq 1)$$

$$\int e_q^{ax} d_q x = \frac{1}{a} e_q^{ax}$$

$$\int E_q^{ax} d_q x = \frac{q}{a} e_q^{-ax}$$

$$\int \cos_q(ax) d_q x = \frac{1}{a} \sin_q(ax)$$

$$\int \sin_q(ax) d_q x = -\frac{1}{a} \cos_q(ax)$$

$$\int Cos_q(ax) d_q x = \frac{q}{a} Sin_q(q^{-1}ax)$$

$$\int Sin_q(ax) d_q x = -\frac{q}{a} Cos_q(ax)$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\int_a^b f(x)d_q g(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(qx)d_q f(x)$$

Αλλαγή Μεταβλητής:

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)d_q u = \int_a^b f(u(x))d_{q^{\frac{1}{\beta}}} u(x) \qquad \text{όπου} \;\; u(x) = \alpha x^{\beta}$$

Βιβλιογραφία

[1] V. Kac and P. Cheung, *Quantum Calculus*, Springer , 2002

[2] Bruce C. Berndt, *Number Theory in the Spirit of Ramanujan*, American Mathematical Society (A.M.S.), 2006