ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

"Κατανομές με βαριές ουρές στα αναλογιστικά μαθηματικά"

Πτυχιακή Εργασία

Γονιδάκη Μαρία
Α.Μ.: 2000083

Φεβρουάριος 2005

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Για τα περισσότερα από τα προβλήματα που αντιμετωπίζονται στα ασφαλιστικά μαθηματικά, η θεωρία κινδύνου παρέχει την ουσιώδη μαθηματική βάση. Στα βασικά μοντέλα της θεωρίας κινδύνου, ο διαχωρισμός μεταξύ μικρών και μεγάλων αποζημιώσεων είναι σχετικός. Η μοντελοποίηση ακραίων γεγονότων συμπληρώνεται διαρκώς με αρχή το κλασικό μοντέλο κινδύνου.

Η στοχαστική μοντελοποίηση διαδικασιών αποζημιώσεων ξεκινά το 1903 με την εργασία του Filip Lundberg, που έθεσε τα θεμέλια της αναλογιστικής θεωρίας κινδύνου. Ο Lundberg κατανόησε ότι οι διαδικασίες Poisson δεν αφορούν τις ασφάλειες ζωής και με έναν χρονικό μετασχηματισμό, τον ονομαζόμενο «λειτουργικό χρόνο» περιόρισε την ανάλυσή του στις ομογενείς διαδικασίες Poisson. Η ανακάλυψη αυτή είναι όμοια με την αναγνώριση από τον Bachelier, το 1900, ότι το κλειδί των οικονομικών μοντέλων βρίσκεται στη κίνηση Brown.

Τις ιδέες του Lundberg ενσωμάτωσε ο Harald Cramer και η σχολή του στη Στοκχόλμη στη θεωρία κινδύνου των στοχαστικών διαδικασιών, με την οποία ετέθησαν οι βάσεις των ασφαλιστικών μαθηματικών και της θεωρίας των πιθανοτήτων. Το βασικό μοντέλο, που προέκυψε απ' αυτές τις πρώτες εργασίες αναφέρεται σαν Κλασικό μοντέλο κινδύνου ή "Μοντέλο των Cramér – Lundberg". Το μοντέλο αυτό δίνει ασυμπτωτικό τύπο της πιθανότητας χρεοκοπίας καθώς $x \to \infty$.

Έκτοτε, διάφορες προσεγγιστικές μέθοδοι δίνουν αποτελέσματα με υποθέσεις μικρών ή μεγάλων αποζημιώσεων και διάφορες συναρτήσεις κατανομής των αποζημιώσεων. Οι κατανομές των μεγάλων αποζημιώσεων έχουν ασυνήθιστες και ενδιαφέρουσες ιδιότητες και η μελέτη τους άρχισε το 1964 με την ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα μελέτη του Chistyakov. Στην κατηγορία των μικρών αποζημιώσεων ανήκουν οι εκθετικές κατανομές, ενώ στην κατηγορία των μεγάλων αποζημιώσεων ανήκουν οι κατανομές που δεν έχουν πεπερασμένη εκθετική ροπή.

Η παρούσα μελέτη πραγματεύεται δύο από τις σημαντικότερες ιδιότητες των κατανομών με βαριές ουρές, που είναι η ισοδυναμία μέγιστου αθροίσματος και η συνέλιξη κλειστότητας και τις ασυμπτωτικές της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Η πτυχιακή μου εργασία, όπως τελικά διαμορφώθηκε, είναι αποτέλεσμα μιας σημαντικής βιβλιογραφίας, που χρησιμοποίησα, και μιας ανεκτίμητης βοήθειας που μου προσέφερε ο επιβλέπων Καθηγητής μου κ. Κωνσταντινίδης Δημήτριος, προς τον οποίο νιώθω την ανάγκη να εκφράσω τις μεγάλες μου ευχαριστίες.

Καρλόβασι, Φεβρουάριος 2005

Μαρία Γονιδάκη

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Η Πιθανότητα χρεοκοπίας - Το πρόβλημα της χρεοκοπίας

Η βασική έννοια που θα μελετήσουμε είναι η στοχαστική διαδικασία, που παράγεται από αποζημιώσεις σε ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλιστηρίων συμβολαίων. Αυτή η διαδικασία μελετάται σε σχέση με το χαρτοφυλάκιο ως σύνολο και όχι σε σχέση με τις ατομικές πολιτικές που συγκροτούν το χαρτοφυλάκιο. Ένα τυπικό τέτοιο μοντέλο περιγράφει τις δυναμικές του πλεονάσματος μιας ασφαλιστικής εταιρίας.

Οποιαδήποτε ασφαλιστική εταιρία ιδρύεται με σκοπό να αντιμετωπίσει το ρίσκο των πελατών της και να τους βοηθήσει να ξεπεράσουν ανεπιθύμητες συνέπειες από διάφορα ατυχήματα, που συμβαίνουν τυχαία, δια μέσου κάλυψης των αποζημιώσεών τους. Σε αντάλλαγμα, οι πελάτες πληρώνουν ασφάλιστρα στην ασφαλιστική εταιρία, προκειμένου να εξασφαλίσουν τη φερεγγυότητά της και τη δημιουργία ενός επιθυμητού αποθέματος. Το ασφάλιστρο συνήθως υπερβαίνει το μέσο κόστος των αποζημιώσεων, για να εξασφαλίζεται μια θετική επιβάρυνση ασφαλείας. Τα ασφαλιστικά μοντέλα προσδιορίζουν τη σχέση ανάμεσα στα χαρακτηριστικά μεγέθη που εμφανίζονται, έτσι ώστε να αποτελούν το εργαλείο καθορισμού ορθών ασφαλίστρων, για κάθε διαφορετικό κίνδυνο.

Υποθέτουμε ότι μια ασφαλιστική εταιρία ιδρύεται με ένα συγκεκριμένο αρχικό κεφάλαιο $x \geq 0$ και το συνολικό ασφάλιστρο εισοδήματος που φθάνει από τους πελάτες της μέσα στο χρονικό διάστημα $[0,t]$ ισούται με $I(t)$. Το $I(t)$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση του t. Είναι πιθανό ότι είναι μια τυχαία συνάρτηση. Έστω $N(t)$ ότι είναι ο συνολικός αριθμός αποζημιώσεων που εμφανίζονται μέσα στο χρόνο $[0,t]$. Έστω $\{T_k\}$ η ακολουθία των χρόνων εμφάνισης αποζημιώσεων και το μέγεθος της κ αποζημίωσης συμβολίζεται με Z_k. Τότε το συνολικό ποσό χρημάτων που πληρώνει η ασφαλιστική εταιρία μέχρι το χρόνο t είναι

$$D(t) = \sum_{k \leq N(t)} Z_k \tag{1.1}$$

Τόσο η $\{T_k\}$ όσο και η $\{Z_k\}$ είναι ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών.

Κάποιες φορές, θα αναφερθούμε στους χρόνους μεταξύ διαδοχικών αποζημιώσεων

$$\theta_\kappa = \mathrm{T}_\kappa - \mathrm{T}_{\kappa-1} \tag{1.2}$$

όπου θεωρούμε $T_0 = 0$.

Ας υποθέσουμε ότι όλα τα Z_k είναι μη αρνητικά.

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ποσότητες, η διαδικασία πλεονάσματος R_t μπορεί να οριστεί με την ακόλουθη εξίσωση ισορροπίας:

$$R_t = x + I(t) - D(t) \tag{1.3}$$

Καθώς μερικές ποσότητες που περιλαμβάνονται στην (1.3) είναι τυχαίες, η διαδικασία R_t είναι στοχαστική. Ας θεωρήσουμε τις τροχιές αυτών των στοχαστικών διαδικασιών ως συνεχείς προς τα άνω συναρτήσεις του χρόνου.

Η διαφορά $I(t) - D(t)$ καλείται τυχαία επιβάρυνση ασφαλείας.

Η σχετική επιβάρυνση ασφαλείας ορίζεται ως:

$$\rho = \lim_{t\to\infty} \frac{E\big(I(t) - D(t)\big)}{ED(t)} \tag{1.4}$$

εφόσον το παραπάνω όριο υπάρχει. Η σημασία της σχετικής επιβάρυνσης ασφαλείας είναι προφανής. Αυτό είναι το μέσο εισόδημα της ασφαλιστικής εταιρίας για κάθε μονάδα αποζημίωσης. Εάν το ρ είναι κοντά στο 0, τότε η ασφαλιστική εταιρία έχει μεγάλη πιθανότητα να χρεοκοπήσει. Εάν το ρ είναι μεγάλο, τότε η ασφαλιστική εταιρία είναι πολύ επικερδής, αλλά είναι μη ελκυστική για τους πελάτες εξαιτίας των υψηλών ασφαλίστρων. Εμείς θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου η σχετική επιβάρυνση ασφαλείας υπάρχει και είναι θετική.

Η διαδικασία κινδύνου R(t) ικανοποιεί τη συνθήκη θετικής επιβάρυνσης ασφαλείας εάν ρ>0. Αυτό αποτελεί τη συνθήκη θετικής επιβάρυνσης ασφαλείας. Η συνθήκη αυτή σημαίνει ότι η διαδικασία του πλεονάσματος έχει θετική ροπή, η οποία αντανακλά τον επικερδή χαρακτήρα της ασφαλιστικής εταιρίας.

Η διαδικασία R(t) περιλαμβάνει όλη την πληροφορία, που χρειαζόμαστε για να εκτιμήσουμε το ασφαλιστικό έργο.

Θα ασχοληθούμε όμως, επίσης, με μια άλλη σημαντική συνάρτηση, η οποία καλείται πιθανότητα χρεοκοπίας. Έστω,

$$\Psi\left(x,t\right)=P\left(\inf_{0\le u\le t}R\left(u\right)<0/R\left(0\right)=x\right) \tag{1.5}$$

η πιθανότητα το πλεόνασμα να πέσει σε μια αρνητική τιμή μέσα στο διάστημα $\left[0,t\right]$. Ένα τέτοιο ενδεχόμενο θεωρείται ως χρεοκοπία. Η συνάρτηση Ψ(x,t) ονομάζεται πιθανότητα χρεοκοπίας πεπερασμένου χρόνου.

Παραπέρα, η πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο ορίζεται ως:

$$\Psi\left(x\right)=P\left(\inf_{0\le u<\infty}R\left(u\right)<0/R\left(0\right)=x\right) \tag{1.6}$$

Είναι προφανές, ότι η Ψ(x,t) είναι πιο χρήσιμη από την Ψ(x). Αλλά η μελέτη της είναι αρκετά πιο δύσκολη, γι' αυτό καταφεύγουμε στην Ψ(x). Εξαιτίας αυτού, ονομάζουμε την Ψ(x) πιθανότητα χρεοκοπίας.

Ας θεωρήσουμε τον τυχαίο χρόνο

$$\tau=\inf\left\{t:R(t)<0\right\} \tag{1.7}$$

Με βάση την τυχαία μεταβλητή τ, οι πιθανότητες χρεοκοπίας παίρνουν μια πολύ απλή μορφή:

$$\begin{aligned}\Psi(x,t)&=P(\tau\le t)\\ \Psi(x)&=P(\tau<\infty)\end{aligned} \tag{1.8}$$

Γενικά η τ δεν είναι πλήρης τυχαία μεταβλητή, με την έννοια ότι μπορεί να πάρει την τιμή άπειρο με θετική πιθανότητα. Διαισθητικά, κάτω από την υπόθεση θετικής επιβάρυνσης ασφαλείας, το πλεόνασμα R(t) πηγαίνει στο άπειρο και είναι πιθανό η χρεοκοπία να μη συμβεί.

Θα ήταν λάθος να αντιμετωπίσουμε την Ψ(x) ως την ποσότητα που υποδηλώνει την πραγματική πιθανότητα χρεοκοπίας, για μια ασφαλιστική εταιρία, επειδή το μοντέλο κινδύνου είναι ατελές και δεν αντανακλά όλους τους παράγοντες της πραγματικότητας. Αλλά η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι μια βολική χαρακτηριστική συνάρτηση, η οποία είναι ευαίσθητη σε σχέση με όλες τις παραμέτρους του μοντέλου κινδύνου και επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη σύγκριση διαφορετικών μοντέλων.

1.2. Κλασικό μοντέλο κινδύνου

Ας υποθέσουμε ότι η $N(t)$ διαμορφώνεται σαν μια διαδικασία Poisson με ένταση λ. Αυτό σημαίνει ότι οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αποζημιώσεων συγκροτούν μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, τέτοια ώστε:

$$A(u) = P(\theta_1 \le u) = 1 - \exp(-\lambda u) \tag{1.9}$$

Σ' αυτή την περίπτωση, η τυχαία μεταβλητή $N(t)$ έχει την κατανομή Poisson:

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t) \tag{1.10}$$

Υποθέτουμε ότι $\{Z_k\}_{k \ge 1}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών που έχουν κοινή συνάρτηση κατανομής:

$$B(u) = P(Z_1 \le u) \tag{1.11}$$

Σε ότι αφορά τη συνάρτηση κατανομής B(u), δεν επιβάλουμε κανένα ιδιαίτερο περιορισμό, πέραν του ότι $\sup_{u \prec 0} B(u) = 0$ και $B(0) \prec 1$, υποδηλώνοντας ότι οι αποζημιώσεις είναι μη αρνητικές και μη εκφυλισμένες στο 0.

Ας δηλώσουμε τις εκθετικές ροπές της Z_1 ως

$$b_s = EZ_1^s = \int_0^\infty u^s dB(u), s \succ 0 \tag{1.12}$$

Υποθέτουμε ότι ο ρυθμός ασφαλίστρου είναι σταθερός, το οποίο σημαίνει ότι

$$I(t) = ct, c \succ 0 \tag{1.13}$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα συνθέτουν το κλασικό μοντέλο κινδύνου.

Γι' αυτό το μοντέλο, τα μεγέθη των αποζημιώσεων υπολογίζονται μέσα στο χρονικό διάστημα $[0,t]$. Ο μέσος του D(t) υπολογίζεται ως

$$ED(t) = EN(t)EZ_1 = \lambda b_1 t \qquad (1.14)$$

Έτσι, για το κλασικό μοντέλο κινδύνου $E(R(t)) = x + ct - \lambda b_1 t$.

Οι ανωτέρω σχέσεις δίνουν μια πρώτη εικόνα του ρυθμού του ασφαλίστρου.

Η σχετική επιβάρυνση ασφαλείας στο κλασικό μοντέλο κινδύνου είναι

$$\rho = \lim_{t\to\infty} \frac{E(I(t) - D(t))}{E(D(t))} = \frac{ct - \lambda b_1 t}{\lambda b_1 t} = \frac{c}{\lambda b_1} - 1 \qquad (1.15)$$

Άρα, υποθέτουμε

$$c \succ \lambda b_1 \qquad (1.16)$$

1.2.1. Μαθηματική ανάλυση του κλασικού μοντέλου κινδύνου.

1.2.1.1. Συνελικτική εξίσωση του κλασικού μοντέλου κινδύνου

Οι τιμές του πλεονάσματος ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις

$$R_0 = x; \quad R_{n+1} = R_n + c\theta_{n+1} - Z_{n+1}, \quad n \ge 0 .$$

Εφόσον η χρεοκοπία συμβαίνει μόνο στους χρόνους T_n, η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να γραφτεί στη μορφή,

$$\Psi(x) = P\left(\inf_n R_n < 0 / R_0 = x\right).$$

Προφανώς, $\inf_n R_n < 0$ εάν $Z_1 - c\theta_1 > x$ (σ’αυτή την περίπτωση, η χρεοκοπία συμβαίνει στο χρόνο T_1).

Εάν $Z_1 - c\theta_1 \le x$, τότε $R_1 = x + c\theta_1 - Z_1 \ge 0$

και λόγω της Μαρκοβιανής ιδιότητας, $R_2, R_3, \ldots$ και, επομένως, τα $\inf{}_n R_n$ εξαρτώνται μόνο από την R_1. Σημειώνουμε επίσης, ότι οι ακολουθίες $\{\theta_n\} \kappa\alpha\iota \{Z_n\}$ αποτελούνται από ομοιόμορφα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές και επομένως

$$P\left(\inf_{n\geq 1} R_n < 0 / R_1 = y\right) = \Psi(y).$$

Κρατώντας αυτό κατά νου και ορίζοντας Ψ(x)=1 για αρνητικά x, φτάνουμε, με τη βοήθεια του τύπου ολικής πιθανότητας, στις εξισώσεις

$$\begin{aligned}\Psi(\mathrm{x}) &= EP\left(\inf_{n\geq 1} R_n < 0 / R_0 = x, \theta_1, Z_1\right)\\ &= EP\left(\inf_{n\geq 1} R_n < 0 / R_1 = x + c\theta_1 - Z_1\right)\\ &= E\Psi\left(x + ct - z\right).\end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\Psi(x) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \Psi\left(x + c\theta_1 - Z_1\right) dB(z) \right) dA(t).$$

Αν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι $A(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$, τότε θα έχουμε

$$\Psi(x) = \frac{\lambda}{c} \int_x^\infty e^{\frac{\lambda(x-u)}{c}} \left(\int_0^\infty \Psi(u - z)\, dB(z) \right) du \tag{1.17}$$

Η έκφραση (1.17) δείχνει ότι η Ψ(x) είναι διαφορίσιμη ως προς x. Παίρνοντας την παράγωγο κι απ’ τις δύο πλευρές στην (1.17), αμέσως λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned}\Psi^{(1)}(x) &= \frac{\lambda}{c} \int_x^\infty \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda(x-u)}{c}} \left(\int_0^\infty \Psi(u - z)\, dB(z) \right) du - -\frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda(x-u)}{c}} \left(\int_0^\infty \Psi(x - z)\, dB(z) \right) = \\ &= \frac{\lambda}{c}\Psi(x) - \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \Psi(x - z) dB(z) = \\ &= \frac{\lambda}{c}\left[\Psi(x) - \int_0^\infty \Psi(x - z)\, dB(z) \right]\end{aligned}$$

κι αν ολοκληρώσουμε την παραπάνω σχέση καταλήγουμε στην

$$\Psi(x) - \Psi(0) = \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^x \Psi(u)\, du - \int_0^x \left(\int_0^\infty \Psi(u - z)\, dB(z) \right) du \right] \tag{1.18}$$

Θεωρούμε το διπλό ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (1.18).

$$I \equiv \int_0^x \left(\int_0^\infty \Psi(u-z)\, dB(z) \right) du \tag{1.19}$$

Αλλάζοντας ολοκληρώματα (θεώρημα Fubini) και μεταβλητές από $(u-z)$ σε v, φτάνουμε στο

$$I = \int_0^\infty \left(\int_{-z}^{x-z} \Psi(v)\, dv \right) dB(z) \tag{1.20}$$

Το διπλό ολοκλήρωμα στην (1.20) το παίρνουμε στο σύνολο

$$\begin{aligned} D &= \{(z,v) : 0 \le z < \infty, -z \le v \le x-z\} \\ &= \{(z,v) : 0 \le v \le x, 0 \le z \le x-v\} \cup \{(z,v) : v \le 0, -v \le z \le x-v\} \end{aligned}$$

το οποίο είναι η ένωση δύο υποσυνόλων. Εξαιτίας αυτού

$$\begin{aligned} I &= \int_0^x \Psi(v) \left(\int_0^{x-v} dB(z) \right) dv + \int_{-\infty}^0 \Psi(v) \left(\int_{-v}^{x-v} dB(z) \right) dv \\ &= \int_0^x \Psi(v) B(x-v)\, dv + \int_{-\infty}^0 \Psi(v) \big(B(x-v) - B(-v) \big) du \end{aligned}$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα θέτουμε $u=-v$.
Για $v=-\infty \Rightarrow u=\infty$
Για $v=0 \Rightarrow u=0$ και συνεχίζοντας έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^x \Psi(v) B(x-v)\, dv + \int_0^\infty \Psi(-u) \big[B(x+u) - B(u) \big] du \\ &= \int_0^x \Psi(v) B(x-v)\, dv + \int_0^\infty \big(1 - B(u)\big) du - \int_0^\infty \big(1 - B(u+x)\big) du \\ &= \int_0^x \Psi(u) B(x-u)\, du + \int_0^x \big(1 - B(u)\big) du \end{aligned}$$

Άρα $I = \int_0^x \Psi(u) B(x-u)\, du + \int_0^x \big(1 - B(u)\big) du$ (1.21)

Τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

1.2.1.2. Λήμμα 1 (Kalashnikov)

Για ένα κλασικό μοντέλο κινδύνου ισχύει

$$\Psi(x)-\Psi(0)=\frac{\lambda}{c}\left(\int_0^x \Psi(u)\,du-\int_0^x \Psi(u)B(x-u)\,du-\int_0^x \left(1-B(u)\right)du\right) \quad (1.22)$$

Απόδειξη

Ενσωματώνοντας την (1.21) στην (1.18), έχουμε

$$\Psi(x)-\Psi(0)=\frac{\lambda}{c}\left(\int_0^x \Psi(u)\,du-\int_0^x \Psi(u)B(x-u)\,du-\int_0^x \left(1-B(u)\right)du\right)$$

από την οποία αμέσως συνάγεται η (1.22).

Το κλασικό μοντέλο κινδύνου διαφέρει από το S. Andersen μοντέλο στο γεγονός ότι, ενώ στο κλασικό μοντέλο κινδύνου οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αποζημιώσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή, στο S. Andersen μοντέλο οι χρόνοι αυτοί δεν ακολουθούν εκθετική κατανομή, αλλά έχουν μια αυθαίρετη μορφή (μη εκφυλισμένη στο 0). Η αντίστοιχη ακολουθία των χρόνων $\{T_k\}_{k\geq 1}$ καλείται ανανεωτική διαδικασία.

1.2.1.3. Θεώρημα 1 (Kalashnikov)

Εάν για το S. Andersen μοντέλο $\rho>0$, τότε $\lim_{x\to\infty}\Psi(x)=0$.

Η απόδειξη βρίσκεται στις σημειώσεις του Kalashnikov.

Από το Θεώρημα 1 προκύπτει ότι $\Psi(x)\to 0$, όταν $x\to\infty$.

Από την (1.22) και την (1.15) έχουμε

$$\Psi(0)=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \left(1-B(u)\right)du=\frac{\lambda b_1}{c}=\frac{1}{1+\rho} \quad (1.23)$$

Συνδυάζοντας αυτό το αποτέλεσμα με το Λήμμα 1, φτάνουμε στην ακόλουθο θεώρημα.

1.2.1.4. Θεώρημα 2 (Kalashnikov)

Εάν ισχύει η συνθήκη θετικού περιθωρίου επιβάρυνσης, τότε για την κλασική διαδικασία κινδύνου, η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση συνέλιξης

$$\Psi(x) = \frac{\lambda}{c}\int_0^x \Psi(x-u)\left(1-B(u)\right)du + \frac{\lambda}{c}\int_x^\infty \left(1-B(u)\right)du \tag{1.24}$$

Εφόσον η εξίσωση (1.24) είναι μια εξίσωση συνέλιξης, είναι φυσικό να εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό Laplace προκειμένου να τη λύσουμε. Έστω,

$$\Psi_L(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\Psi(x)dx$$

$$B_L(s) = \int_0^\infty e^{-sx}B(x)dx$$

οι μετασχηματισμοί των Ψ και Β αντίστοιχα.

1.2.1.5. Θεώρημα 3 (Kalashnikov)

Κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2

$$\Psi_L(s) = \frac{\lambda}{c}\frac{b_1 - \left(\frac{1}{s} - B_L(s)\right)}{c - \lambda\left(\frac{1}{s} - B_L(s)\right)}$$

<u>Απόδειξη</u>

Ξεκινάμε από τη συνελικτική εξίσωση

$$\Psi(x) = \frac{\lambda}{c}\int_0^x \Psi(x-u)\left[1-B(u)\right]du + \frac{\lambda}{c}\int_x^\infty \left[1-B(u)\right]du$$

Πολλαπλασιάζουμε με e^{-sx} και ολοκληρώνουμε, οπότε προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace.

$$\Psi_L(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\Psi(x)dx = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\int_0^x e^{-sx}\Psi(x-u)\left[1-B(u)\right]dudx +$$

$$+\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\int_x^\infty e^{-sx}\left[1-B(u)\right]dudx = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\int_0^x e^{-s(x-u)}\Psi(x-u)\left[1-B(u)\right]e^{-su}dudx +$$

$$+\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\int_x^\infty e^{-sx}\left[1-B(u)\right]dudx = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \left[1-B(u)\right]e^{-su}\int_u^\infty \Psi(x-u)e^{-s(x-u)}dxdu +$$

$$+\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \left[1-B(u)\right]\int_0^u e^{-sx}dxdu$$

$$=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\left[1-B(u)\right]\cdot e^{-su}\int_0^\infty\Psi(y)\cdot e^{-sy}dydu+\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\left[1-B(u)\right]\cdot\frac{1}{s}\cdot\left(1-e^{-su}\right)du=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\Psi_L(s)\int_0^\infty\left[1-B(u)\right]\cdot e^{-su}du+\frac{\lambda}{cs}\int_0^\infty\left[1-B(u)\right]du-\frac{\lambda}{cs}\int_0^\infty e^{-su}\left[1-B(u)\right]du=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\Psi_L(s)\left[\int_0^\infty e^{-su}du-B_L(s)\right]+\frac{\lambda b_1}{sc}-\frac{\lambda}{cs}\left[\int_0^\infty e^{-su}du-B_L(s)\right]$$

$$\Psi_L(s)=\frac{\lambda}{c}\Psi_L(s)\left[\frac{1}{s}-B_L(s)\right]+\frac{\lambda b_1}{c}-\frac{\lambda}{cs}\left[\frac{1}{s}-B_L(s)\right]$$

$$\Psi_L(s)=\frac{\lambda}{c}\Psi_L(s)\left[\frac{1}{s}-B_L(s)\right]+\frac{\lambda b_1}{c}-\frac{\lambda}{cs}\frac{1}{s}+\frac{\lambda}{cs}B_L(s)$$

$$\Psi_L(s)\left[1-\frac{\lambda}{c}\left(\frac{1}{s}-B_L(s)\right)\right]=\frac{\lambda}{cs}\left(b_1-\frac{1}{s}+B_L(s)\right)$$

$$\Psi_L(s)=\frac{\frac{\lambda}{cs}\left(b_1-\frac{1}{s}+B_L(s)\right)}{1-\frac{\lambda}{c}\left(\frac{1}{s}-B_L(s)\right)}=\frac{\frac{\lambda}{cs}b_1-\frac{\lambda}{cs}\frac{1}{s}+\frac{\lambda}{cs}B_L(s)}{1-\frac{\lambda}{cs}+\frac{\lambda}{c}B_L(s)}$$

$$=\frac{\frac{\lambda sb_1}{cs}\frac{1}{s}-\frac{\lambda}{cs}\frac{1}{s}+\frac{\lambda}{cs}\frac{1}{s}B_L(s)}{\frac{cs-\lambda+\lambda sB_L(s)}{cs}}=\frac{\frac{\lambda sb_1-\lambda+\lambda\mathrm{B}_L(s)}{css}}{\frac{cs-\lambda+\lambda sB_L(s)}{cs}}$$

$$=\frac{1}{s}\frac{\lambda sb_1-\lambda+\lambda B_L(s)}{cs-\lambda+\lambda sB_L(s)}=\frac{1}{s}\frac{\lambda b_1-\frac{\lambda}{s}+\frac{\lambda}{s}B_L(s)}{c-\frac{\lambda}{s}+\lambda B_L(s)}$$

$$=\frac{1}{s}\frac{\lambda\left(b_1-\frac{1}{s}+\lambda B_L(s)\right)}{c-\lambda\left(\frac{1}{s}-B_L(s)\right)}=\frac{\lambda}{s}\frac{b_1-\left(\frac{1}{s}-B_L(s)\right)}{c-\lambda\left(\frac{1}{s}-B_L(s)\right)}$$

Άρα $\Psi_L(s)=\dfrac{\lambda}{s}\dfrac{b_1-\left(\frac{1}{s}-B_L(s)\right)}{c-\lambda\left(\frac{1}{s}-B_L(s)\right)}$

1.3. Διαταραγμένο μοντέλο κινδύνου

Θα περιγράψουμε τις διαδικασίες κινδύνου διαταραγμένες από μια ευσταθή κίνηση Lévy (a-stable Lévy motion). Ας ξεκινήσουμε με μερικές βασικές έννοιες.

1.3.1. Ισοδύναμοι ορισμοί μιας ευσταθούς κατανομής

Η θεωρία ευσταθών κατανομών μονοδιάστατων μεταβλητών κυρίως αναπτύχθηκε στις δεκαετίες 1920 και 1930 από τους Paul Lévy και Yakovlevich Khinchine. Αναπτύχθηκε επίσης με λεπτομέρεια από τους Gnedenko και Kolmogorov (1954) και Feller (1971) και είναι το αντικείμενο μιας πιο πρόσφατης μονογραφίας του Zolotarev (1986).

Δίνουμε τέσσερις ισοδύναμους ορισμούς μιας ευσταθούς κατανομής.

Ορισμός 1. Μια τυχαία μεταβλητή X λέγεται ότι έχει ευσταθή κατανομή εάν για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς A και B, υπάρχει ένας θετικός αριθμός C και ένας πραγματικός αριθμός D τέτοιοι ώστε

$$AX_1 + BX_2 \overset{d}{=} CX + D, \tag{1.26}$$

όπου X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες αντιγραφές της X και όπου "$\overset{d}{=}$" υποδηλώνει την ισότητα κατά κατανομή.

Σημειώνουμε ότι μια τυχαία μεταβλητή συγκεντρωμένη σε ένα σημείο είναι πάντα ευσταθής. Αυτή η εκφυλισμένη περίπτωση δεν είναι ιδιαίτερου ενδιαφέροντος και, εκτός εάν δηλώνεται με σαφήνεια, πάντα θα θεωρούμε ότι η X είναι μη εκφυλισμένη. Μια τυχαία μεταβλητή X καλείται αυστηρά ευσταθής εάν η (1.26) ισχύει για D=0. Μια ευσταθής τυχαία μεταβλητή καλείται συμμετρικά ευσταθής εάν η κατανομή της είναι συμμετρική, που σημαίνει, εάν η X και η –X έχουν την ίδια κατανομή. Μια συμμετρική ευσταθής τυχαία μεταβλητή είναι φανερά αυστηρά ευσταθής.

Ορισμός 2. (ισοδύναμος με τον ορισμό 1). Μια τυχαία μεταβλητή X λέγεται ότι έχει ευσταθή κατανομή εάν για οποιοδήποτε $n \geq 2$, υπάρχει ένας θετικός αριθμός C_n και ένας πραγματικός αριθμός D_n τέτοιοι ώστε

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \overset{d}{=} C_n X + D_n \tag{1.27}$$

όπου $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι ανεξάρτητα αντίγραφα της X .

Ορισμός 3. (ισοδύναμος με τους ορισμούς 1 και 2). Μια τυχαία μεταβλητή X λέγεται ότι έχει ευσταθή κατανομή, εάν αποτελεί πεδίο έλξης, για παράδειγμα, εάν υπάρχει μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $Y_1, Y_2, ...$ και ακολουθίες τυχαίων αριθμών $\{d_n\}$ και πραγματικών αριθμών $\{a_n\}$, τέτοιες ώστε

$$\frac{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n}{d_n} + a_n \overset{d}{\Rightarrow} X \tag{1.28}$$

όταν το n τείνει στο άπειρο.

Ο συμβολισμός $\overset{d}{\Rightarrow}$ υποδηλώνει σύγκλιση κατά κατανομή.

Ορισμός 4. (ισοδύναμος με ορισμούς 1, 2 και 3). Μια τυχαία μεταβλητή X λέγεται ότι έχει ευσταθή κατανομή εάν υπάρχουν παράμετροι $0 < a \leq 2$, $\sigma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$, και μ πραγματικό τέτοιο ώστε η χαρακτηριστική της συνάρτηση έχει την ακόλουθη μορφή:

$$E \exp i\theta X = \{ \begin{matrix} \exp\{-\sigma^{\alpha} |\theta|^{\alpha} (1 - \iota\beta(sign\theta) \tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu\vartheta\} \varepsilon\alpha\nu\alpha \neq 1 \\ \exp\{-\sigma|\theta|(1 - \iota\beta\frac{2}{\pi}(sign\theta)\ln|\theta|)\} \varepsilon\alpha\nu\alpha \neq 1 \end{matrix} \tag{1.29}$$

Η παράμετρος α λέγεται δείκτης ευστάθειας και
signθ=1 εάν θ>0, signθ=0 εάν θ=0, signθ=-1 εάν θ<0.

Οι παράμετροι σ, β και μ είναι μοναδικοί για κάθε ευσταθή τυχαία μεταβλητή.

1.3.2. Διαδικασίες κινδύνου διαταραγμένες από μια ευσταθή κίνηση Lévy.

Πρώτοι οι Dufresne και Gerber (1991) επέκτειναν το παραπάνω κλασικό μοντέλο Poisson της θεωρίας κινδύνου προσθέτοντας έναν όρο διαταραχής στη σύνθετη διαδικασία Poisson. Ο όρος της διαταραχής εκφράζει μια επιπρόσθετη αβεβαιότητα πέραν των συνολικών αποζημιώσεων. Εδώ η διαταραχή παριστάνεται από μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής σε μορφή δύναμης. Αρχικά έχουν μελετηθεί αρκετό καιρό πριν οι κανονικές (Gaussian) κατανομές και η χρησιμότητά τους στη στοχαστική μοντελοποίηση της διαταραχής με την κίνηση Brown είναι ευρέως αποδεκτή. Παρόλα αυτά, δεν καλύπτουν μεγάλες διακυμάνσεις και μερικές φορές δεν είναι επαρκείς για τη μοντελοποίηση περιπτώσεων μεγάλης αστάθειας. Για αυτό αντί διαταραχής ενός όρου κίνησης Brown προσθέτουμε διαταραχή ενός όρου ευσταθούς κίνησης Lévy στην κλασική διαδικασία κινδύνου. Μια ευσταθής κίνηση Lévy είναι μια στοχαστική διαδικασία, της οποίας οι κατανομές πεπερασμένων διαστάσεων είναι ευσταθείς. Οι ουρές των ευσταθών κατανομών με δείκτη α<2 φθίνουν σύμφωνα με συνάρτηση σε μορφή δύναμηs. Ο ρυθμός που φθίνουν εξαρτάται από την παράμετρο α η οποία παίρνει τιμές ανάμεσα στο 0 και 2. Όσο μικρότερο το α, τόσο αργότερη η μείωση της ουράς και έτσι τόσο πιο βαριές οι ουρές. Επιτρέπουμε στην ευσταθή κίνηση Lévy να έχει άλματα (ασυνέχειες) μόνο προς τα κάτω. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί επιλέγοντας κατάλληλα την παράμετρο λοξότητας β.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας στο διαταραγμένο μοντέλο κινδύνου από ευσταθή κίνηση Lévy θα μελετηθεί αργότερα στο Κεφάλαιο 5.

1.4. Βασικοί ορισμοί

- Όλες οι κατανομές, που θα μας απασχολήσουν έχουν φορέα το διάστημα $[0,+\infty)$.

- $f(x) \sim g(x)$ σημαίνει $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

- $a(x)=o(b(x))$, για $x\to x_0$ σημαίνει $\lim_{x\to x_0}\frac{a(x)}{b(x)}=0$

- $a(x)=O(b(x))$, για $x\to x_0$ σημαίνει $\lim_{x\to x_0}\frac{a(x)}{b(x)}\prec\infty$

- Η ουρά μιας κατανομής F ορίζεται ως $\overline{F}(x)=1-F(x)$

- Η κατανομή ολοκληρωμένης ουράς της F ορίζεται ως

$$F_e=\frac{\int_0^x \overline{F}(y)dy}{\int_0^\infty \overline{F}(y)dy},$$

εάν $0\prec \overline{F}(y)dy\prec\infty$.

2. ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΕΛΑΦΡΩΝ ΚΑΙ ΒΑΡΙΩΝ ΟΥΡΩΝ

2.1. Μικρές και μεγάλες αποζημιώσεις

Έστω $\varepsilon \succ 0$. Ορίζουμε $b^{\varepsilon} = E\exp(\varepsilon Z_1) = \int_0^{\infty} \exp(\varepsilon u)dB(u)$ (2.1)
την εκθετική ροπή της B, αν υπάρχει.

Λέμε ότι έχουμε μικρές αποζημιώσεις (ελαφρές ουρές αποζημιώσεων),

αν υπάρχει ένα $\varepsilon \succ 0$ τέτοιο ώστε $b^{\varepsilon} \prec \infty$ (2.2)

Στην αντίθετη περίπτωση θεωρούμε τις αποζημιώσεις μεγάλες.

2.2. Μερικές γνωστές κατανομές μικρών αποζημιώσεων

2.2.1. Εκθετική συνάρτηση κατανομής

$$B(u) = 1 - \exp(-\mu u) \tag{2.3}$$

και $b_s = \dfrac{\Gamma(s+1)}{\mu^s}, s \geq 0$ (2.4)

όπου $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} z^{t-1}e^{-z}dz$

Η εκθετική συνάρτηση κατανομής έχει πεπερασμένες εκθετικές ροπές για κάθε $0 \prec \varepsilon \prec \mu$.

2.2.2. Μια διακριτή μίξη εκθετικών κατανομών

$$B(u) = \sum_{k \geq 1} p_k (1 - \exp(\mu_k u)) \tag{2.5}$$

όπου p_k θετικοί αριθμοί των οποίων το άθροισμα ισούται με 1 και μ_k θετικός.

Είναι $b_s = \Gamma(s+1) \sum_{k \succ 1} \dfrac{p_k}{\mu_k^s} \ \mu_k \ p_k$ (2.6)

όπου p_k είναι η πιθανότητα μια αποζημίωση να ανήκει στην κ-οστή ομάδα και μ_k η παράμετρος της κ-οστής εκθετικής κατανομής.
Μια μίξη εκθετικών κατανομών έχει πεπερασμένες εκθετικές ροπές, εάν $\underline{\mu} = \inf_k \mu_k \succ 0$. Σ' αυτή τη περίπτωση $b^{\varepsilon} \prec \infty$, εάν $0 \prec \varepsilon \prec \underline{\mu}$.

2.2.3. Μια αυθαίρετη μίξη εκθετικών κατανομών

Έστω η αυθαίρετη κατανομή G, που ορίζεται στο $(0,\infty)$ και χρησιμοποιείται για τη μίξη εκθετικών κατανομών.

$$B(u) = \int_0^\infty (1 - \exp(-\mu u)) dG(\mu) \quad \text{(κατανομή γάμμα) και} \tag{2.7}$$

$$b_s = \Gamma(s+1)\int_0^\infty \frac{dG(\mu)}{\mu^s} \tag{2.8}$$

Για $\underline{\mu} = \sup\{\mu : G(\mu) = 0\}$ είναι $b^\varepsilon \prec \infty$, εάν $0 \prec \varepsilon \prec \underline{\mu}$.

2.2.4. Κατανομή Weibull

Λέμε ότι τα μεγέθη αποζημιώσεων ακολουθούν μια Weibull κατανομή, αν για μερικά $\beta \succ 0$ και $\mu \succ 0$

$$B(u) = 1 - \exp(-(\mu u)^\beta) \quad \text{και} \tag{2.9}$$

$$b_s = \frac{\Gamma(1 + \frac{s}{\beta})}{\mu^s}, s \geq 0 \tag{2.10}$$

Για $\beta = 1$ η κατανομή Weibull μεταπίπτει σε μια εκθετική κατανομή και $b^\varepsilon \prec \infty$, εάν $0 \prec \varepsilon \prec \mu$.

Για $\beta \succ 1$ έχουμε $b^\varepsilon \prec \infty$ για κάθε $\varepsilon \succ 0$.

Όμως, για $\beta \prec 1$ έχουμε $b^\varepsilon = \infty$, για κάθε $\varepsilon \succ 0$ οπότε έχουμε βαριές ουρές.

2.3. Κλάσεις κατανομών με βαριές ουρές

Εάν μια συνάρτηση κατανομής F δεν έχει πεπερασμένη εκθετική ροπή, τότε ανήκει στην παρακάτω κλάση κατανομών

$$K = \left\{F : \int_0^\infty e^{\varepsilon u} dF(u) = \infty, \text{ για κάθε } \varepsilon \succ 0\right\} \tag{2.11}$$

Ισοδύναμα μπορεί να γραφεί

$$F \in K \Leftrightarrow \lim_{u\to\infty} e^{\varepsilon u}\overline{F}(u) = \infty, \text{ για κάθε } \varepsilon \succ 0 \quad (2.12)$$

Παρακάτω περιγράφονται άλλες στενότερες κλάσεις κατανομών με βαριές ουρές, εκ των οποίων μια μόνον, η S, ονομάζεται υποεκθετική. Ουσιαστικά όλες οι κατανομές με βαριές ουρές είναι υποεκθετικές.

Παρακάτω περιγράφονται οι σημαντικότερες κλάσεις κατανομών με βαριές ουρές.

2.3.1. Κλάση R (της κανονικής μεταβολής)

Η συνάρτηση κατανομής F ανήκει στην R αν και μόνον αν

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = y^{-a}, \text{ για κάποια } \alpha \geq 0 \text{ και κάθε } y \succ 0 \quad (2.13)$$

2.3.2. Κλάση C (της σταθερής μεταβολής)

Η συνάρτηση κατανομής F ανήκει στη C αν και μόνον αν

$$\lim_{y\uparrow 1}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1 \quad (2.14)$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{y\uparrow 1}\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1 \quad (2.15)$$

2.3.3. Κλάση D (της κυριαρχούσας μεταβολής)

Η συνάρτηση κατανομής F ανήκει στην D αν και μόνον αν

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} \prec \infty, \text{ για κάθε } 0 < y < 1 \quad (2.16)$$

2.3.4. Κλάση S (υποεκθετική)

Η συνάρτηση κατανομής F ανήκει στην S αν και μόνον αν

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} = n, \text{ για κάθε } n \geq 2 \quad (2.17)$$

και όπου F^{n*} σημαίνει τη n-οστή συνέλιξη της F.

2.3.5. Κλάση L (της μακράς ουράς)

Η συνάρτηση κατανομής F ανήκει στην L αν και μόνον αν

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}=1, \text{ για κάθε } y>0 \tag{2.18}$$

2.3.6. Κλάση A

Η συνάρτηση κατανομής F ανήκει στην A αν και μόνον αν $F\in S$ και

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(\upsilon x)}{\overline{F}(x)}\prec 1, \text{ για κάποια } \upsilon\succ 1 \tag{2.19}$$

2.3.7. Κατανομή Pareto

Έστω, για θετικά k και t,

$$B(u)=\begin{cases} 0, u\le k \\ 1-(k/u)^t, u\succ k \end{cases} \tag{2.20}$$

Αυτή είναι μια κατανομή Pareto τάξης t. Οι εκθετικές στιγμές αυτής της κατανομής έχουν τη μορφή

$$b_s=\frac{tk^s}{t-s}, 0<s<t \tag{2.21}$$

Οι εκθετικές ροπές αυτής της κατανομής δεν υπάρχουν εάν $s\ge t$.

2.3.8. Κατανομή Lognormal

Έστω μ$\in(-\infty,\infty)$ και $\sigma^2>0$ ότι έχουν συγκεκριμένες τιμές. Δηλώνουμε με $N(\mu,\sigma^2)$ μια τυχαία μεταβλητή, η οποία έχει μια κανονική κατανομή με μέσο μ και διακύμανση σ^2. Λέμε ότι μια τυχαία μεταβλητή έχει την κατανομή lognormal, εάν $\ln Z\overset{d}{=}N(\mu,\sigma^2)$, για κάποιες σταθερές μ και σ^2. Ισοδύναμα,

$$B(u)=\int_{-\infty}^{\ln u}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dz \tag{2.22}$$

Αυτή η κατανομή έχει πυκνότητα

$$b(u)=\frac{dB(u)}{du}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma u}\exp\left(-\frac{(\ln u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Η κατανομή lognormal (2.13) έχει όλες τις εκθετικές ροπές και

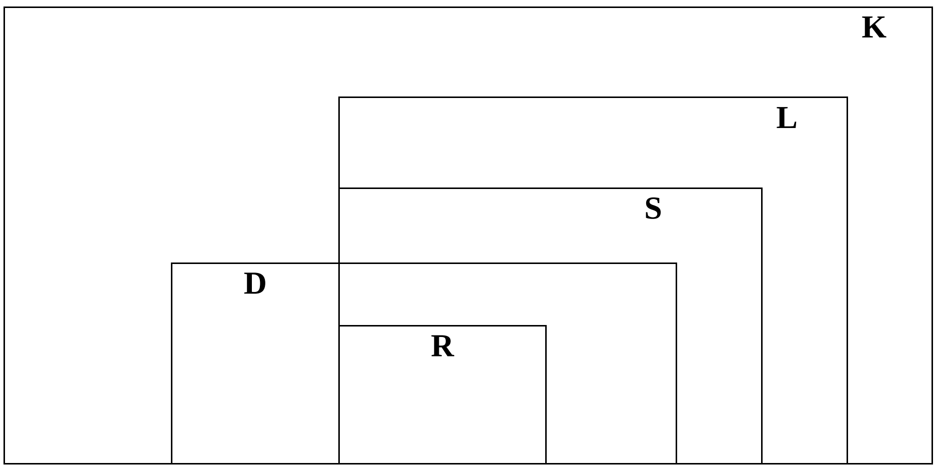
$$b_n=\exp\left(n\mu+\frac{n^2\sigma^2}{2}\right), n\geq 1 \tag{2.23}$$

2.4. Οι σημαντικότερες ιδιότητες των κατανομών με βαριές ουρές

Οι ανωτέρω κλάσεις ικανοποιούν τις σχέσεις

$$R\subset C\subset D\cap L\subset S\subset L\subset K \tag{2.24}$$

Μια απεικόνιση των ανωτέρω κλάσεων φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Απεικόνιση κλάσεων κατανομών

Άλλες σημαντικές ιδιότητες των κατανομών με βαριές ουρές είναι η ισοδυναμία μέγιστου αθροίσματος και η κλειστότητα ως προς τη συνέλιξη, για τις οποίες δίδονται ορισμένα αποτελέσματα στα επόμενα κεφάλαια.

Η ικανοποίηση ή μη των δύο τελευταίων ιδιοτήτων από τις ανωτέρω κλάσεις κατανομών αποτυπώνεται στον παρακάτω πίνακα, όπου Ν σημαίνει ΝΑΙ και Ο σημαίνει ΟΧΙ:

	R	C	$D \cap L$	S	L	D
Ισοδυναμία μέγιστου αθροίσματος:	N	N	N	O	O	O
Κλειστότητα ως προς τη συνέλιξη:	N	N	N	O	N	N

2.5. Μια ικανή συνθήκη για υποεκθετικότητα

Εάν $\limsup_{x\to\infty} \dfrac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} \le 2$ (2.25)

τότε $F \in S$.

<u>Απόδειξη</u>

Καθώς η F συμβολίζει τη συνάρτηση κατανομής μιας θετικής τυχαίας μεταβλητής προκύπτει ότι $F^{2*}(x) \le F^2(x) \kappa\alpha\iota \overline{F^{2*}}(x) \ge \overline{F^2}(x)$.

Εξήγηση των παραπάνω σχέσεων.

$$F^{2*}(x) = P\{X_1 + X_2 \le x\}$$
$$F^2(x) = P\{X_1 \le x\} P\{X_2 \le x\}$$
$$\{X_1 + X_2 \le x\} \subset \left\{X_1 \le \frac{x}{2} \cap X_2 \le \frac{x}{2}\right\} \subset \{X_1 \le x\} \cap \{X_2 \le x\}$$
$$\Rightarrow P\{X_1 + X_2 \le x\} \le P\{X_1 \le x\} P\{X_2 \le x\}$$
$$\Rightarrow F^{2*}(x) \le F^2(x)$$
$$-F^{2*}(x) \ge -F^2(x) \Rightarrow -F^{2*}(x) \ge -F^2(x)$$
$$1 - F^{2*}(x) \ge 1 - F^2(x) \Rightarrow \overline{F^{2*}}(x) \ge \overline{F^2}(x)$$

Επομένως

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} \ge 2$$

Γνωρίζουμε ότι

$$F^{2*}(x) \le F^2(x) \Rightarrow -F^{2*}(x) \ge -F^2(x)$$
$$1 - F^{2*}(x) \ge 1 - F^2(x) \Rightarrow \overline{F^{2*}}(x) \ge \overline{F^2}(x) \Rightarrow$$
$$\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} \ge \frac{\overline{F^2}(x)}{\overline{F}(x)}$$

$$\sigma\tau\alpha\nu x \to \infty \overline{F}(x) \to 0, \overline{F^2}(x) \to 0$$

$$\frac{\overline{F^2}(x)}{\overline{F}(x)} = \frac{1-F^2(x)}{1-F(x)}$$

$$\sigma\tau\alpha\nu x \to \infty \Rightarrow F(x) \to 1$$

$$\frac{\overline{F^2}(x)}{\overline{F}(x)} \to 1+1 = 2\gamma\iota\alpha x \to \infty$$

$$\mathrm{A}\rho\alpha \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} \ge \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^2}(x)}{\overline{F}(x)} = 2$$

Εισάγοντας –n+n στο I_1 και σημειώνοντας ότι $\left(\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x-t)} - n\right)$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό για $0 \le t \le x-y$ και y αρκετά μεγάλο, ακολουθεί ότι

$$I_1(x) = (n+o(1)) \int_0^{x-y} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t).$$

Τώρα,

$$\int_0^{x-y} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) = \frac{F(x) - F^{2*}(x)}{\overline{F}(x)} - \int_{x-y}^{x} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t)$$

$$= \frac{F(x) - F^{2*}(x)}{\overline{F}(x)} - J(x,y)$$

$$= (1+o(1)) - J(x,y),$$

$$o\pi o\upsilon J(x,y) \le (F(x) - F(x-y)) / \overline{F}(x) \to 0 o\tau\alpha\nu x \to \infty.$$

$$\mathrm{E}\pi o\mu\varepsilon\nu\omega\varsigma \lim_{x\to\infty} I_1(x) = n$$

Εφόσον $\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x-t)}$ είναι φραγμένο για $x-y \le t \le x$ και $\lim_{x\to\infty} I_2(x) = 0$ η απόδειξη συμπληρώθηκε.

3. ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

3.1. Ορισμοί

Οι κατανομές F_1, F_2 λέμε ότι είναι ισοδύναμες μεγίστου αθροίσματος και γράφεται $F_1 \sim_M F_2$, εάν

$$\overline{F_1 * F_2}(x) \sim \overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x) \qquad (3.1)$$

Εάν δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 έχουν κατανομές F_1, F_2 αντίστοιχα, τότε $F_1 \sim_M F_2$ είναι ισοδύναμο με

$$\Pr\{X_1 + X_2 \geq x\} \sim \Pr\{\max\{X_1, X_2\} \geq x\} \qquad (3.2)$$

Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα της ουράς του αθροίσματος των δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών τείνει ασυμπτωτικά στην πιθανότητα του μεγίστου των δύο τυχαίων μεταβλητών. Η ενδιαφέρουσα αυτή ιδιότητα χρησιμοποιείται στην μοντελοποίηση ακραίων φαινομένων και στη περιγραφή των κατανομών με βαριές ουρές.

Συγκεκριμένα αν $F \sim_M F$ τότε η F ανήκει στη κλάση των υποεκθετικών κατανομών.

Η ισοδυναμία μεγίστου αθροίσματος ισχύει για κατανομές από την κλάση R, δηλαδή

αν $F_1 \in R \kappa\alpha\iota F_2 \in R$ τότε $\overline{F_1 * F_2}(x) \sim \overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x)$,

ενώ δεν ισχύει στη κλάση S, βλέπε αντιπαράδειγμα στο Leslie (1989).

Προφανώς δεν ισχύει στη κλάση L, καθόσον $S \subset L$.

Ακόμη, δεν ισχύει στη κλάση D. Είναι γνωστό ότι $D \not\subset S \kappa\alpha\iota S \not\subset D$. Έτσι για οποιοδήποτε $F \in D$ αλλά $F \notin S$ δεν ισχύει $\overline{F * F}(x) \sim 2\overline{F}(x)$.

3.2. Θεώρημα 4 Tang(2004)

Εάν $F_1 \in D \cap L$ και $F_2 \in D \cap L$, τότε
$F_1 * F_2 \in D \cap L$ και

$$\overline{F_1 * F_2}(x) \sim \overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x) \qquad (3.3)$$

<u>Απόδειξη</u>

Γνωρίζουμε ότι η κλάση D είναι κλειστή ως προς τη συνέλιξη και μαζί με τη συνέλιξη ως προς την κλειστότητα της κλάσης L, είναι σαφές ότι η κλάση κατανομών $D \cap L$ είναι κλειστή ως προς τη συνέλιξη. Επομένως το μόνο που χρειάζεται να αποδείξουμε είναι την ισοδυναμία μέγιστου αθροίσματος στην κλάση κατανομών $D \cap L$. Η απόδειξη ανάγεται στην ταυτότητα (4.1) από τον Omey (1994).

$$0 \le F_1(\mathrm{x}) F_2(\mathrm{x}) - F_1 * F_2(\mathrm{x}) = I_1 + I_2 + I_3 \tag{3.4}$$

όπου

$$I_1 = \int_{0^-}^{x/2} (\overline{F_1}(x-y) - \overline{F_1}(x)) dF_2(y)$$

$$I_2 = \int_{0^-}^{x/2} (\overline{F_2}(x-y) - \overline{F_2}(x)) dF_1(y)$$

$$I_3 = (\overline{F_1}(\frac{x}{2}) - \overline{F_1}(x))(\overline{F_2}(\frac{x}{2}) - \overline{F_2}(\mathrm{x}))$$

Παρακάτω παραθέτουμε την απόδειξη της σχέσης (3.4)
Ξεκινάμε από το I_2 και κάνοντας κάποιες πράξεις φτάνουμε στο πιο κάτω αποτέλεσμα.

$$I_2 = \int_0^{x/2} \left(\overline{F_2}(x-y) - \overline{F_2}(x)\right) dF_1(y)$$

$$= \int_0^{x/2} \overline{F_2}(x-y) dF_1(y) - \int_0^{x/2} \overline{F_2}(x) dF_1(y)$$

$$= \int_0^{x/2} \int_{x-y}^{\infty} dF_2(z) dF_1(y) - \int_0^{x/2} \int_x^{\infty} dF_2(z) dF_1(y)$$

$$= \int_0^{x/2} \left[\int_{x-y}^{\infty} dF_2(z) dF_1(y) - \int_x^{\infty} dF_2(z) dF_1(y) \right]$$

$$= \int_0^{x/2} \int_{x-y}^{x} dF_2(z) dF_1(y)$$

Άρα $\quad x-y \le z \le x$

$\qquad 0 < y < x/2$

Ολοκληρώνοντας πρώτα ως προς y (θεωρούμε κάθετη που διαπερνά το χωρίο κατά τη διεύθυνση αύξησης του y) έχουμε

$-z+x \le y \le x/2$ (εδώ y είναι η εξαρτημένη μεταβλητή, δηλαδή

$x/2 \le z \le x$ λύνουμε την ευθεία $z=-y+x$ ως προς y, οπότε $y=-z+x$)

Άρα, $I_2 = \int_{x/2}^{x}\int_{-z+x}^{x/2} dF_1(y)dF_2(z)$

Σε μια πιο απλή μορφή το I_2 γίνεται:

$$I_2 = \int_{x/2}^{x}\int_{-z+x}^{x/2} dF_1(y)dF_2(z) = \int_{x/2}^{x}[\ F_1(x/2) - F_1(-z+x)\ ]\,dF_2(z)$$

$$= \int_{x/2}^{x}[\ F_1(x/2) - F_1(-z+x) + 1 - 1\ ]\,dF_2(z)$$

$$= \int_{x/2}^{x}[(1-F_1(-z+x)\ ) - (1-F_1(x/2)\ ]dF_2(z)$$

$$= \int_{x/2}^{x}[\overline{F_1}\ (-z+x) - \overline{F_1}(x/2)\ \ ]\,dF_2(z)$$

Επομένως, $I_2 = \int_{x/2}^{x}[\overline{F_1}\ (-z+x) - \overline{F_1}(x/2)\ \ ]\,dF_2(z)$

Στη συνέχεια προσθέτουμε τα I_1 και I_2.

$$I_1 + I_2 = \int_0^{x/2}\overline{F_1}(x-y)dF_2(y) - \int_0^{x/2}\overline{F_1}(x)dF_2(y) + \int_{x/2}^{x}\overline{F_1}(x-y)dF_2(y) - \int_{x/2}^{x}\overline{F_1}(x/2)dF_2(y)$$

$$= \int_0^{x/2}[1-F_1(x-y)-1+F_1(x)\ \ ]dF_2(y)\ + \int_{x/2}^{x}[1-F_1(x-y)-1+F_1(x/2)\ ]dF_2(y)$$

$$= \int_0^{x/2} F_1(x)dF_2(y) - \int_0^{x/2} F_1(x-y)dF_2(y) + \int_{x/2}^{x} F_1(\frac{x}{2})dF_2(y) - \int_{x/2}^{x} F_1(x-y)dF_2(y)$$

$$= F_1(x)\int_0^{x/2} dF_2(y) - \int_0^{x/2} F_1(x-y)dF_2(y) + F_1(\frac{x}{2})\int_{x/2}^{x} dF_2(y) - \int_{x/2}^{x} F_1(x-y)dF_2(y)$$

$$= \quad F_1(x)F_2(\frac{x}{2}) + F_1(\frac{x}{2})[F_2(x) - F_2(\frac{x}{2})] - \int_0^{x} F_1(x-y)dF_2(y)$$

Άρα, $I_1 + I_2 = F_1(x)F_2(\frac{x}{2}) + F_1(\frac{x}{2})[F_2(x) - F_2(\frac{x}{2})] - F_1 * F_2$

Τέλος προσθέτουμε τα I_1, I_2, I_3, για να φτάσουμε στη σχέση

$I_1 + I_2 + I_3 = F_1(x)F_2(x) - F_1 * F_2$

$$I_1 + I_2 + I_3 = F_1(x)F_2(\frac{x}{2}) + F_1(\frac{x}{2})\left[F_2(x) - F_2(\frac{x}{2})\right] - F_1 * F_2 + \left[\overline{F_1}(\frac{x}{2}) - \overline{F_1}(x)\right]\left[\overline{F_2}(\frac{x}{2}) - \overline{F_2}(x)\right]$$

$$= F_1(x)F_2\left(\frac{x}{2}\right) + F_1\left(\frac{x}{2}\right)F_2(x) - F_1\left(\frac{x}{2}\right)F_2\left(\frac{x}{2}\right) - F_1 * F_2$$
$$+\left[1 - F_1\left(\frac{x}{2}\right) - 1 + F_1(x)\right]\left[1 - F_2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 + F_2(x)\right]$$

$$= F_1(x)F_2\left(\frac{x}{2}\right) + F_1\left(\frac{x}{2}\right)F_2(x) - F_1\left(\frac{x}{2}\right)F_2\left(\frac{x}{2}\right) - F_1 * F_2 +$$
$$+\left[F_1(x) - F_1\left(\frac{x}{2}\right)\right]\left[F_2(x) - F_2\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$
$$= F_1(x)F_2\left(\frac{x}{2}\right) + F_1\left(\frac{x}{2}\right)F_2(x) - F_1\left(\frac{x}{2}\right)F_2\left(\frac{x}{2}\right) - F_1 * F_2 +$$
$$+F_1(x)F_2(x) - F_1(x)F_2\left(\frac{x}{2}\right) - F_1\left(\frac{x}{2}\right)F_2(x) + F_1\left(\frac{x}{2}\right)F_2\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$= F_1(x)F_2(x) - F_1 * F_2$$

Εδώ τελειώνει η απόδειξη της σχέσης $I_1 + I_2 + I_3 = F_1(x)F_2(x) - F_1 * F_2$

Επειδή $F_1 \in D$ είναι φανερό ότι ο λόγος $\dfrac{\overline{F_1}(x-y) - \overline{F_1}(x)}{\overline{F}_1(x)}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένος για όλα τα $0 \le y \le \frac{x}{2} \kappa\alpha\iota x \ge 0.$ Για τον παραπάνω ισχυρισμό δίνουμε μια εξήγηση.

$$0 \le \frac{y}{\frac{x}{2}} \le 1 \Rightarrow 0 \le \frac{y}{x} \le \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \ge -\frac{y}{x} \ge -\frac{1}{2}$$

$$1 \ge \frac{x-y}{x} \ge \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \le x\frac{x-y}{x} \le 1 \tag{3.5}$$

$$x-y = x\left(1-\frac{y}{x}\right) = xz \Rightarrow x-y = xz \tag{3.6}$$

Η (3.5) λόγω της (3.6) γίνεται $\frac{1}{2} \le \frac{xz}{x} \le 1 \Rightarrow z \in \left(\frac{1}{2},1\right)$

Επομένως $\frac{\overline{F_1}(x-y)-\overline{F_1}(x)}{\overline{F_1}(x)} = \frac{\overline{F_1}(x-y)}{\overline{F_1}(x)} - 1 = \frac{\overline{F_1}(xz)}{\overline{F_1}(x)} - 1$

Επειδή $F_1 \in D \lim_{x\to\infty} \sup \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} < \infty$

Άρα $\lim_{x\to\infty} \sup\left(\frac{\overline{F_1}(xz)}{\overline{F_1}(x)} - 1\right) < \infty$

Άρα ο λόγος $\frac{\overline{F_1}(x-y)-\overline{F_1}(x)}{\overline{F_1}(x)}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένος.

Επομένως χρησιμοποιώντας το θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης και τη συνθήκη ότι $F_1 \in L$ παίρνουμε

$$\lim_{x\to\infty} \frac{I_1}{\overline{F_1}(x)} = \int_0^\infty \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F_1}(x-y)-\overline{F_1}(x)}{\overline{F_1}(x)}\, dF_2(y) = 0$$

$F_1 \in L \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1$ για κάθε y>0

Παρόμοια έχουμε $\lim_{x\to\infty} \frac{I_2}{\overline{F_2}(x)} = 0$

Επίσης, επειδή $F_1 \in D$ έχουμε $I_3 = o\left(\overline{F_1}(x)\right)$

Αυτό το αποδεικνύουμε αμέσως παρακάτω.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{I_3}{\overline{F_1}(x)}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\overline{F_1}(\frac{x}{2})-\overline{F_1}(x)}{\overline{F_1}(x)}\right]\left[\overline{F_2}(\frac{x}{2})-\overline{F_2}(x)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\overline{F_1}(x-\frac{x}{2})-\overline{F_1}(x)}{\overline{F_1}(x)}\right]\left[\overline{F_2}(\frac{x}{2})-\overline{F_2}(x)\right]$$

Επειδή $F_1 \in L$ ισχύει $\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F_1}(x-\frac{x}{2})}{\overline{F_1}(x)}=1$ και συνεπάγεται

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F_1}(x-\frac{x}{2})-\overline{F_1}(x)}{\overline{F_1}(x)}=0$$

Άρα $\lim_{x\to\infty}\frac{I_3}{\overline{F_1}(x)}=0$

Άρα $I_3=o\left(\overline{F_1}(x)\right)$

Αντικαθιστώντας αυτά τα αποτελέσματα στην (3.4) έχουμε ότι:

$$F_1(x)F_2(x)-F_1*F_2(x)=I_1+I_2+I_3$$
$$-F_1*F_2(x)=-F_1(x)F_2(x)+I_1+I_2+I_3$$
$$1-F_1*F_2(x)=1-F_1(x)F_2(x)+I_1+I_2+I_3$$
$$\overline{F_1*F_2}(x)=1-F_1(x)F_2(x)+o\left(\overline{F_1}(x)+\overline{F_2}(x)\right)\sim\overline{F_1}(x)+\overline{F_2}(x)$$

Για την τελευταία σχέση αρκεί να παρατηρήσουμε ότι:

$$\frac{1-F_1(x)F_2(x)}{\overline{F_1}(x)+\overline{F_2}(x)}+\frac{o\left(\overline{F_1}(x)+\overline{F_2}(x)\right)}{\overline{F_1}(x)+\overline{F_2}(x)}\xrightarrow[x\to\infty]{}1$$
$$\frac{1-F_1(x)F_2(x)}{\overline{F_1}(x)+\overline{F_2}(x)}\xrightarrow[x\to\infty]{}1$$
$$\frac{1-F_1(x)F_2(x)}{1-F_1(x)+1-F_2(x)}\xrightarrow[x\to\infty]{}1$$
$$\frac{1-F_1(x)F_2(x)}{2-F_1(x)-F_2(x)}\xrightarrow[x\to\infty]{}1$$

$$1-F_1(x)F_2(x)\underset{x\to\infty}{\to}2-F_1(x)-F_2(x)$$
$$1+F_1(x)+F_2(x)-F_1(x)F_2(x)\underset{x\to\infty}{\to}2$$
$$-1+F_1(x)+F_2(x)-F_1(x)F_2(x)\underset{x\to\infty}{\to}0$$
$$-\big(1-F_1(x)\big)\big(1-F_2(x)\big)\underset{x\to\infty}{\to}0$$

που προφανώς ισχύει.

Άρα, $\overline{F_1 * F_2}(x) \sim \overline{F_1}(x)+\overline{F_2}(x)$, δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία μέγιστου αθροίσματος για την κλάση κατανομών $D \cap L$. Εδώ τελειώνει η απόδειξη του Θεωρήματος 4 (Tang 2004)

4. ΚΛΕΙΣΤΟΤΗΤΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ

4.1. Ορισμός

Λέμε πως μια κλάση κατανομών H είναι κλειστή ως προς τη συνέλιξη αν για $F_1 \in H$ και $F_2 \in H$ ισχύει

$$F_1 * F_2 \in H \tag{4.1}$$

Η κλάση R είναι κλειστή ως προς τη συνέλιξη, δηλαδή

αν $F_1 \in R \kappa\alpha\iota F_2 \in R$, τότε $F_1 * F_2 \in R$,

ενώ η κλάση S δεν είναι κλειστή ως προς τη συνέλιξη.

4.2. Η κλάση D είναι κλειστή ως προς τη συνέλιξη.

Πρόταση

Αν $F_1 \in D$ και $F_2 \in D$ τότε

$$F_1 * F_2 \in D \tag{4.2}$$

Απόδειξη

Αρχικά αποδεικνύουμε ότι

$$\overline{F_1 * F_2}(x) \le \overline{F_1}(\frac{x}{2}) + \overline{F_2}(\frac{x}{2}), \quad x \ge 0 \tag{4.3}$$

$$\overline{F_1}(\frac{x}{2}) + \overline{F_2}(\frac{x}{2}) = P\left[X_1 \succ \frac{x}{2}\right] + P\left[X_2 \succ \frac{x}{2}\right] \ge P\left[X_1 \succ \frac{x}{2}\right] + P\left[X_1 \succ \frac{x}{2}\right] - P\left[X_1 \succ \frac{x}{2}, X_2 \succ \frac{x}{2}\right] =$$

$$P\left\{\left[X_1 \succ \frac{x}{2}\right] \cup \left[X_2 \succ \frac{x}{2}\right]\right\} \ge P\left[X_1 \succ \frac{x}{2}, X_2 \succ \frac{x}{2}\right] = P\left[X_1 + X_2 \succ \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right] = \overline{F_1 * F_2}(x)$$

Επομένως η (4.3) ισχύει.

Πρόταση

$$\overline{F_1 * F_2}(x) \ge \frac{1}{2}\left[\overline{F_1}(x) + F_2(x)\right], \quad x \ge 0 \tag{4.4}$$

Απόδειξη

$$2\overline{F_1 * F_2}(x) = 2P\left[X_1 + X_2 \ge x\right] = P\left[X_1 + X_2 \ge x\right] + P\left[X_1 + X_2 \ge x\right] =$$

$$= P[X_1 \geq x - X_2] + P[X_2 \geq x - X_1] \geq P[X_1 \geq x] + P[X_2 \geq x] =$$
$$= \overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x)$$

Επομένως η (4.4) ισχύει.

Ακόμη, $\overline{F_1 * F_2}(x) \geq \overline{F_1}(x)$, $x \geq 0$, καθόσον $P[X_1 + X_2 \geq x] \geq P[X_1 \geq x]$ και $\overline{F_1 * F_2}(x) \geq \overline{F_2}(x)$, $x \geq 0$, καθόσον $P[X_1 + X_2 \geq x] \geq P[X_2 \geq x]$.

Από τις ανισότητες (4.3) και (4.4) και την υπόθεση ότι $F_1 \in D$ και $F_2 \in D$ λαμβάνουμε

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F_1 * F_2}(\frac{x}{2})}{\overline{F_1 * F_2}(x)} \leq 2 \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F_1}(\frac{x}{4}) + \overline{F_2}(\frac{x}{4})}{\overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x)} \leq 2 \left[\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F_1}(\frac{x}{4})}{\overline{F_1}(x)} + \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F_2}(\frac{x}{4})}{\overline{F_2}(x)} \right] \prec \infty$$

το οποίο σημαίνει ότι $F_1 * F_2 \in D$. Έτσι αποδείξαμε την πρόταση.

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε a>0, b>0, c>o και d>0 ισχύει

$$\frac{a+b}{c+d} \leq \max\left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right\} \qquad (4.5)$$

ιδιότητα που εφαρμόσαμε παραπάνω.

Πράγματι, έστω ότι $\frac{b}{d} \prec \frac{a}{c}$, τότε $\frac{a+b}{c+d} = \frac{\frac{a}{d} + \frac{b}{d}}{\frac{c}{d} + 1} \leq \frac{\frac{a}{d} + \frac{a}{c}}{\frac{c}{d} + \frac{c}{c}} = \frac{a(\frac{1}{d} + \frac{1}{c})}{c(\frac{1}{d} + \frac{1}{c})} = \frac{a}{c}$

Παρατήρηση:

Ισχύει $D \cap L \subset S \subset L$.

Η κλειστότητα ως προς τη συνέλιξη της κλάσης D μαζί με την κλειστότητα ως προς τη συνέλιξη της κλάσης L υποδηλώνει ότι και η $D \cap L$ είναι κλειστή ως προς τη συνέλιξη.

4.3. Η κλάση C είναι κλειστή ως προς τη συνέλιξη.

Πρόταση

Αν $F_1 \in C$ και $F_2 \in C$ τότε

$F_1 * F_2 \in C$ και (4.6)

$\overline{F_1 * F_2}(x) \sim \overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x)$ (4.7)

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $F = F_1 * F_2$.

Από $C \subset D \cap L$ και το θεώρημα 4 Tang(2004) (βλέπεTang(2004)) λαμβάνουμε την (4.7) και για κάθε $l \in (0,1)$ ισχύει

$$\overline{F}(lx) \sim \overline{F_1}(lx) + \overline{F_2}(lx) \tag{4.8}$$

Από τις (4.8) και (4.5) έχουμε

$$\lim_{x\to\infty} sup \frac{\overline{F}(lx)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x\to\infty}\sup \frac{\overline{F_1}(lx) + \overline{F_2}(lx)}{\overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x)} \le \lim_{x\to\infty} \sup \max\left\{ \frac{\overline{F_1}(lx)}{\overline{F_1}(x)}, \frac{\overline{F_2}(lx)}{\overline{F_2}(x)} \right\}$$

Από την ανωτέρω και τον ορισμό της κλάσης C λαμβάνουμε

$$1 \le \lim_{l \uparrow 1} \inf \lim_{x\to\infty}\sup \frac{\overline{F}(lx)}{\overline{F}(x)} \le \lim_{l \uparrow 1}\sup \lim_{x\to\infty}\sup \frac{\overline{F}(lx)}{\overline{F}(x)}$$

$$\le \lim_{l \uparrow 1}\sup \lim_{x\to\infty}\sup \max\left\{ \frac{\overline{F_1}(lx)}{\overline{F_1}(x)}, \frac{\overline{F_2}(lx)}{\overline{F_2}(x)} \right\}$$

$$= \max\left\{ \lim_{l \uparrow 1}\sup \lim_{x\to\infty}\sup \frac{\overline{F_1}(lx)}{\overline{F_1}(x)}, \lim_{l \uparrow 1}\sup \lim_{x\to\infty}\sup \frac{\overline{F_2}(lx)}{\overline{F_2}(x)} \right\} = 1$$

η οποία υποδηλώνει ότι $\lim_{l \uparrow 1} \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(lx)}{\overline{F}(x)} = 1$ $\lim_{l \uparrow 1} \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(lx)}{\overline{F}(x)} = 1$.

Άρα η $F \in C$.

5. ΟΥΡΕΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΕΛΙΞΕΩΝ

5.1. Ορισμός σύνθετης γεωμετρικής συνάρτησης κατανομή

Μια κατανομή L_F ονομάζεται σύνθετη γεωμετρική, αν είναι της μορφής

$$L_F = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n F^{*n}(x), x \geq 0, \text{ όπου } 0 \prec \rho \prec 1 \quad (5.1)$$

Η σύνθετη γεωμετρική συνάρτηση κατανομής είναι μια από τις σημαντικότερες σύνθετες κατανομές. Είναι γνωστό ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας στο σύνθετο μοντέλο κινδύνου Poisson εκφράζεται σαν ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Έστω W ότι είναι η συνέλιξη της L_F με μια κατανομή G στο $[0,\infty)$, για παράδειγμα,

$$W(x) = L_F * G(x) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n F^{n*} * G(x) \quad (5.2)$$

Η σύνθετη γεωμετρική συνέλιξη είναι επίσης μια ενδιαφέρουσα κατανομή σε πολλά μοντέλα εφαρμοσμένων πιθανοτήτων, όπως αξιοπιστία, σταθερότητα, ουρές, θεωρία κινδύνου κ.λ.π.

Μια ειδική μορφή της (5.2) που εμφανίζεται στη θεωρία κινδύνου και στη θεωρία ουρών αναμονής είναι η σύνθετη γεωμετρική συνέλιξη με την ακόλουθη μορφή

$$R(x) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n H^{n*} * G^{(n+1)*}(x) \quad (5.3)$$

5.2. Θεώρημα 5 Tang(2004)

Θεωρούμε τη σύνθετη γεωμετρική συνέλιξη (5.2)

a) Εάν $F \in D \cap L$ και $G \in D \cap L$, τότε $W \in D \cap L$ και

$$\overline{W}(x) \sim \frac{\rho}{1-\rho}\overline{F}(x) + \overline{G}(x) \quad (5.4)$$

b) Εάν $F \in R \kappa\alpha\iota G \in R$, τότε $W \in R$ και η (5.4) ισχύει.

c) Εάν $F \in C \kappa\alpha\iota G \in C$, τότε $W \in C$ και η (5.4) ισχύει.

d) Εάν $F \in A \kappa\alpha\iota G \in A$, τότε $W \in A$ και η (5.4) ισχύει.

<u>Απόδειξη</u>

a) Γνωρίζουμε ότι $W(x) = L_F * G(x) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n F^{n*} * G(x)$

Αλλά

$$\overline{L_F}(x) = 1-(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n F^{n*}(x)$$
$$=(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n - (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n F^{n*}(x)$$
$$=(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\left(1-F^{n*}(x)\right)$$
$$=(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\overline{F^{n*}}(x) \sim (1-\rho)\overline{F}(x)\frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}\overline{F}(x)$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει από την πρόταση 1.1c στο Tang και Cai (2004), που είναι:

Αν $F \in S, \{p_n, n = 0,1,2,...\}$ είναι μια μετρήσιμη κατανομή και υπάρχει

$\varepsilon \succ 0$ έτσι ώστε $\sum_{n=0}^{\infty}(1+\varepsilon)^n p_n \prec \infty$, τότε $\sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{n*} \in S$ και

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \overline{F^{n*}}(x) \sim \overline{F}(x)\sum_{n=1}^{\infty} n p_n$$

Αντίστοιχα έχουμε ότι

$$(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\overline{F^{n*}}(x) \sim (1-\rho)\overline{F}(x)\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n$$

Εφόσον $F \in D \cap L \subset S$, από την πρόταση που αναφέραμε, έχουμε ότι $L_F \in S$ και $\overline{L_F}(x) \sim \frac{\rho}{1-\rho}\overline{F}(x)$, το οποίο υποδηλώνει ότι, $L_F \in D \cap L$ εφόσον η $D \cap L$ είναι κλειστή ως προς την ισοδυναμία ουρών.

Έτσι από το γεγονός ότι $W = L_F * G$ και το Θεώρημα 4 Tang(2004) ισχύει ότι

$$\overline{W}(x) \sim \frac{\rho}{1-\rho}\overline{F}(x) + \overline{G}(x).$$

b) Γνωρίζουμε ότι $F \in R \subset D \cap L \subset S$. Επομένως $L_F \in S$ και ισχύει ότι

$$\overline{L_F}(x) \sim \frac{\rho}{1-\rho}\overline{F}(x).$$

Μένει να δείξουμε ότι η R είναι κλειστή ως προς την ισοδυναμία ουρών.

Υποθέτουμε ότι F και G είναι συναρτήσεις κατανομών με φορέα το $(0,\infty)$.

Εάν $F \in R$ τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\overline{G}(xy)}{\overline{G}(x)} = y^{-a}$.

Πράγματι,

$F \in R$ σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = y^{-a}$, για κάποιο $a \succ 0$ και οποιοδήποτε $y \succ 0$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} = c$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{G}(xy)}{\overline{F}(xy)} = c$$

Διαιρώντας τις ανωτέρω σχέσεις κατά μέλη έχουμε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{G}(x)}{\overline{G}(xy)}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\overline{G}(xy)}{\overline{G}(x)}\frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(xy)} = 1$$

Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{G}(xy)}{\overline{G}(x)} = y^{-a}$$

Είναι,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{G}(xy)}{\overline{G}(x)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\overline{G}(xy)}{\overline{G}(x)}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}\frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(xy)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\overline{G}(xy)}{\overline{G}(x)}\frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(xy)}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}=y^{-a}$$

Τέλος,

$$W=L_F*G,$$
$$\overline{W}(x)\sim\overline{L_F}(x)+\overline{G}(x)$$

c) Γνωρίζουμε ότι $F\in C\subset D\cap L\subset S$, επομένως $L_F\in S$ και

$$\overline{L_F}(x)\sim\frac{\rho}{1-\rho}\overline{F}(x),$$

το οποίο υποδηλώνει ότι $L_F\in C$, εφόσον όμως η C είναι κλειστή ως προς την ισοδυναμία ουρών.

Αποδεικνύουμε την κλειστότητα της C ως προς την ισοδυναμία ουρών.

Υποθέτουμε ότι $F\kappa\alpha\iota G$ είναι συναρτήσεις κατανομών στο $(0,\infty)$.

Εάν $F\in C\kappa\alpha\iota\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)}=c\in(0,\infty),\tau o\tau\varepsilon G\in C$.

Πράγματι,

$F\in C$ σημαίνει ότι

$$\lim_{y\uparrow1}\lim_{x\to\infty}\sup\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}=1$$

Αλλά έχουμε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)}=c$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{G}(xy)}{\overline{F}(xy)}=c$$

Διαιρώντας τις ανωτέρω σχέσεις κατά μέλη έχουμε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{G}(x)}{\overline{G}(xy)}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}=1$$

Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{y\uparrow 1}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{G}(xy)}{\overline{G}(x)}=1$$

Είναι,

$$\lim_{y\uparrow 1}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{G}(xy)}{\overline{G}(x)}=\lim_{y\uparrow 1}\limsup_{x\to\infty}\left[\frac{\overline{G}(xy)}{\overline{G}(x)}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}\frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(xy)}\right]$$
$$=\lim_{y\uparrow 1}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(xy)}=1$$

Από το γεγονός ότι $W=L_F*G(x)$ και το Θεώρημα 4 (Tang) θα ισχύει ότι

$$\overline{W}(x)\sim\overline{L_F}(x)+\overline{G}(x).$$

d) Εφόσον $F\in A\subset S$ και λόγω της πρότασης 1.1c στο Tang και Cai (2004) θα έχουμε ότι

$$L_F\in S\kappa\alpha\iota\overline{L_F}(x)\sim\frac{\rho}{1-\rho}\overline{F}(x),$$

το οποίο υποδηλώνει ότι $L_F\in A$, εφόσον η A είναι κλειστή ως προς την ισοδυναμία ουρών.

Αποδεικνύουμε την κλειστότητα της A ως προς την ισοδυναμία ουρών.

Υποθέτουμε ότι $F\kappa\alpha\iota G$ είναι συναρτήσεις κατανομών στο $(0,\infty)$. Εάν

$$F\in A \text{ και } \lim_{x\to\infty}\frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)}=c\in(0,\infty)$$

τότε $G\in A$.

Πράγματι,

$F \in A$ σημαίνει ότι $\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} \prec 1$, για κάποια y>1

Αλλά,

$$\frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} \underset{x\to\infty}{\to} c$$

$$\frac{\overline{G}(xy)}{\overline{F}(xy)} \underset{x\to\infty}{\to} c$$

Διαιρώντας τις ανωτέρω σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{\overline{G}(x)}{\overline{G}(xy)} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} \underset{x\to\infty}{\to} 1$$

Θα δείξουμε ότι,

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(xy)}{\overline{G}(x)} \prec 1$$

Είναι,

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(xy)}{\overline{G}(x)} = \limsup_{x\to\infty} \left[\frac{\overline{G}(xy)}{\overline{G}(x)} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(xy)} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} \right] = \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} \prec 1$$

5.3. Θεώρημα 6 Tang (2004)

Θεωρήστε τις σύνθετες γεωμετρικές συνελίξεις (5.2) και (5.3). Εάν

$H \in D \cap L$ και $G \in D \cap L$, τότε

$R \in D \cap L$

και

$$\overline{R}(x) \sim \frac{\rho}{1-\rho}\overline{H}(x) + \frac{1}{1-\rho}\overline{G}(x) \qquad (5.5)$$

<u>Απόδειξη</u>

Επειδή $H \in D \cap L$ και $G \in D \cap L$, έχουμε ότι $K = H * G \in D \cap L$, εφόσον η $D \cap L$ είναι κλειστή κάτω από συνελίξεις.

Έτσι από τα Θεωρήματα 5 Tang (2004) και 4 Tang (2004), έχουμε

$R \in D \cap L$ και

$$\overline{R}(x) \sim \frac{\rho}{1-\rho}\overline{K}(x) + \overline{G}(x) \sim \frac{\rho}{1-\rho}\left(\overline{H}(x) + \overline{G}(x)\right) + \overline{G}(x)$$

η οποία υποδηλώνει την (5.5)

6. ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΣΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΔΙΑΤΑΡΑΧΗ ΑΠΟ ΜΙΑ ΕΥΣΤΑΘΗ ΚΙΝΗΣΗ LÉVY

6.1. Ορισμός

Από το paper Furrer (1998) έχουμε τον ακόλουθο ορισμό της ευσταθούς κίνησης Lévy:

Μια στοχαστική διαδικασία $Y_a = \left(Y_a(t) : t \geq 0\right)$ καλείται ευσταθής κίνηση Lévy εάν

i) $Y_a(0) = 0$

ιι) Y_a έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις

iii) $Y_a(t) - Y_a(s) \sim S_a\left((t-s)^{1/a}, \beta, 0\right)$
για οποιοδήποτε $0 \leq s < t < \infty$ και για κάποια $0 < a \leq 2, |\beta| \leq 1$.

Ας γυρίσουμε στην κλασική διαδικασία κινδύνου $R = (R(t) : t \geq 0)$, που δίνεται από

$$R(t) = x + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k \,, \tag{6.1}$$

όπου $x \geq 0, N = (N(t) : t \geq 0)$ είναι μια ομογενής διαδικασία Poisson με ένταση λ, $(Z_k : k \in N)$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ομοιόμορφα κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών ανεξάρτητων του N με συνάρτηση κατανομής F στο $[0,\infty]$ και με πεπερασμένη μέση τιμή μ. Το επιτόκιο ασφαλίστρου c δίνεται από τη σχέση $c = (1+\theta)\lambda\mu$,όπου η σχετική επιβάρυνση ασφαλείας είναι θετική.

Τώρα θεωρούμε τη διαδικασία.

$Q(t) = R(t) + nY_a(t)$, όπου το R δίνεται στην (6.1). Συνεπώς

$$Q(t) = x + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k + nY_a(t), t \geq 0 \tag{6.2}$$

Εδώ η είναι ένας θετικός αριθμός και Y_a είναι μια ευσταθής κίνηση Lévy με $1<a<2$ και β=-1, ανεξάρτητα του R. Η συνθήκη β=-1 εξασφαλίζει ότι δεν υπάρχουν προς τα πάνω άλματα της Y_a και η συνθήκη $a>1$ είναι απαραίτητη, για να έχουμε πεπερασμένη μέση τιμή. Από την άποψη της μοντελοποίησης , κάποιος θα μπορούσε να θεωρήσει τα προς τα κάτω άλματα της Y_a ως συγκεκριμένες επιπλέον πληρωμές περιλαμβάνοντας είτε την πλευρά του εισοδήματος είτε την πλευρά πληρωμής της αποζημίωσης.

Η συνάρτηση

$$\Psi(x)=P\left[\inf_{t\geq 0} Q(t)<0/Q(0)=x\right], x\geq 0 \tag{6.3}$$

είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Κάτω από τις παραπάνω υποθέσεις, η διαδικασία $\left(Q(t)-x:t\geq 0\right)$ ανήκει στην κλάση των ομογενών διαδικασιών με ανεξάρτητες προσαυξήσεις, χωρίς θετικά άλματα.

Όταν α=2, $\left\{Y_\alpha(t), t\geq 0\right\}$ είναι μια τυπική κίνηση Brown. Σ' αυτή την περίπτωση οι Dufresne και Gerber (1991) έδειξαν ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να εκφραστεί ως

$$\Psi(x)=(1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\overline{F_e^{n*}*E^{(n+1)*}}(x),$$

όπου $\rho=\dfrac{\lambda\mu}{c}$ και $E(x)=1-\exp\left\{\dfrac{-x}{n^2}\right\}$ είναι μια εκθετική συνάρτηση κατανομής. Επιπλέον ο Veraverbeke (1993) απέδειξε σ' αυτήν την περίπτωση ότι εάν $F_e\in S$, τότε

$$\Psi(x)\sim\frac{\rho}{1-\rho}\overline{F_e}(x)$$

το οποίο υποδηλώνει ότι η επίδραση του όρου διαταραχής $nY_a(t)$ είναι ασυμπτωτικά αμελητέα.

Στο Furrer (1998) μελετήθηκε η περίπτωση όπου 1<α<2. Όπως θα δούμε στο αμέσως επόμενο θεώρημα του Furrer η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να εκφραστεί ως

$$\Psi(x) = (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n \overline{F_I^{\,n*} * U^{(n+1)*}}(x)$$

όπου $U(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\overline{U}(x) = 1 - U(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{c}{n^a}\right)^n}{\Gamma\left(1+(\alpha-1)n\right)}x^{(a-1)n}$$

6.2. Θεώρημα 7 Furrer (1998)

Θεωρούμε μια κλασική διαδικασία κινδύνου, διαταραγμένη από μια ευσταθή κίνηση Lévy με $1 < a < 2$ και παράμετρο λοξότητας β=-1

$$Q(t) = x + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k + Y_a(t), t \geq 0,$$

όπου $x \geq 0, c = (1+\theta)\lambda\mu, \mathrm{N}(t) : t \geq 0$ είναι μια ομογενής διαδικασία Poisson με ένταση λ, $(Z_k : k \in N)$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με συνάρτηση κατανομής F στο $[0,\infty]$ και μέσο μ. Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας Ψ(x) που ορίζεται στην (6.3) ικανοποιεί την

$$1 - \Psi(x) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n \left(F_I^{\,n*} * U^{(n+1)*}\right)(x), \tag{6.4}$$

όπου $\rho = \dfrac{\lambda\mu}{c}, F_I(x) = \dfrac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)dy \kappa\alpha\iota \overline{U}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-cx^{\tilde{a}}\right)^n / \Gamma(1+\tilde{\alpha}\, n)$

με $\tilde{a} = a - 1$

Για την απόδειξη βλέπε στο paper Furrer (1998).

6.3. Λήμμα 2 Furrer (1998)

Έστω X~$S_{\tilde{a}}(1,1,0)$ με δείκτη $0 < \tilde{a} < 1$. Τότε για $c > 0, s \geq 0$ έχουμε

i) $\hat{u}(s) = \dfrac{c}{c + s^{\tilde{a}}} = \int_0^{\infty} e^{-sy}u(y)dy$, όπου

$$u(y)=\int_0^{\infty}\frac{g\left(y/u^{\frac{1}{\tilde{a}}};\tilde{a},1\right)}{u^{\frac{1}{\tilde{a}}}}ce^{-cu}du$$

ii) $U(x)=\int_0^x u(y)dy=1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-c)^n}{\Gamma\left(1+\tilde{\alpha}\,n\right)}x^{\tilde{a}n}=1-E_{\tilde{a}}\left(-cx^{\tilde{a}}\right),$

όπου

$$E_{\sigma}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\Gamma(1+\sigma n)},\sigma>0.$$

iii) Η κατανομή U έχει κανονικά μεταβαλλόμενη ουρά:

$$\overline{U}(x)\sim\frac{1}{c\Gamma(1-\tilde{a})}x^{-\tilde{a}},x\to\infty$$

iv) Για $0\leq\delta<\tilde{\alpha}$ έχουμε

$$\int_0^{\infty}x^{\delta}u(x)dx=\frac{\Gamma\left(1+\delta/\tilde{\alpha}\right)\Gamma(1-\delta/\tilde{\alpha}}{c^{\delta/\tilde{\alpha}}\Gamma(1-\delta)}.$$

Για την απόδειξη του λήμματος βλέπε στο paper Furrer (1998).

Μας ενδιαφέρει να δούμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της πιθανότητας χρεοκοπίας , δηλαδή όταν το x παίρνει μεγάλες τιμές.

Σημειώνουμε ότι μπορούμε να γράψουμε: $\phi(x)=1-\psi(x)=K*U(x)$, όπου K είναι η συνάρτηση κατανομής του τυχαίου γεωμετρικού αθροίσματος $X_1+X_2+...+X_n$, τα X_i έχουν κατανομή F_I και το N είναι γεωμετρικά κατανεμημένο με παράμετρο 1-ρ. Χονδρικά μιλώντας η συμπεριφορά της ουράς της φ σχετίζεται με την ουρά που φθίνουν τα K και U.

6.4. Θεώρημα 8 Tang (2004)

Αν $1 \prec a \prec 2$ και $F_e \in D \cap L$, τότε

$$\psi(x) \sim \frac{\rho}{1-\rho}\overline{F_e}(x) + \frac{1}{c(1-\rho)\Gamma(2-\alpha)} x^{-\alpha+1} \tag{6.5}$$

<u>Απόδειξη</u>

Από το Λήμμα 2(iii) γνωρίζουμε ότι η κατανομή $U \in R$, έχει κανονικά μεταβαλλόμενη ουρά και

$$\overline{U}(x) \sim \frac{1}{c\Gamma(2-\alpha)} x^{-\alpha+1} \tag{6.6}$$

Έτσι η (6.5) προκύπτει από την $R \subset D \cap L$, το Θεώρημα 6 και την (6.6).

Παρατηρούμε ότι το ανωτέρω θεώρημα γενικεύει το Θεώρημα 5 του Furrer (1998), στο οποίο αποδεικνύεται ότι η (6.5) ισχύει όταν $F_e \in R$, που είναι υποσύνολο της $D \cap L$.

7. ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στην ασφάλιση και την οικονομία τα ακραία γεγονότα, όπως οι μεγάλες αποζημιώσεις ασφάλισης, οι μεγάλες ανατροπές στα οικονομικά δεδομένα, οι ραγδαίες μεταβολές των αξιών στα χρηματιστήρια, η διαχείριση κινδύνων κ.α. παίζουν συνεχώς σημαντικότερο ρόλο. Οι παράμετροι πρόβλεψής των δεν είναι εύκολη υπόθεση. Σημειώνεται ότι, ακραία φαινόμενα έχουμε τόσο σε ζημίες όσο και σε κέρδη. Στις περιπτώσεις όμως των ζημιών, τα αποτελέσματα είναι πολλές φορές καταστροφικά. Η συνάρτηση πυκνότητας Κέρδους-Ζημίας που σχετίζεται με την τιμή του κινδύνου δίνει στα άκρα της τις απώλειες (αριστερά) και τα κέρδη (δεξιά) στις περιπτώσεις των βαριών ουρών.

Η παρακίνηση για μαθηματική μοντελοποίηση στην ασφάλιση και την οικονομία έρχεται από το πεδίο των εφαρμογών. Έχοντας υπόψη τα μαθηματικά μοντέλα της ασφάλισης και της οικονομίας το καίριο ζήτημα το οποίο τίθεται είναι ποιες κατανομές και στοχαστικές διαδικασίες περιγράφουν ακραία γεγονότα σ' αυτά τα μοντέλα. Αυτό σημαίνει ότι ερευνούμε τις κατάλληλες μαθηματικές μεθόδους, που εξηγούν την εμφάνιση των ακραίων γεγονότων με μικρή σχετικά πιθανότητα, που όμως έχουν σημαντική επιρροή στη συμπεριφορά ολόκληρου του μοντέλου. Στην ασφάλιση, όπου έχει περιγραφεί η οικογένεια των κλάσεων των υποεκθετικών κατανομών, έχει υπάρξει σημαντική πρόοδος και το πεδίο περαιτέρω κατηγοριοποίησής των και μελέτης των ιδιοτήτων τους εμφανίζεται ιδιαίτερα ενδιαφέρον Στην εργασία μελετήθηκαν ιδιότητες, που αφορούν τις διάφορες κλάσεις υποεκθετικών κατανομών και γι' αυτές στη συνέχεια γίνεται σχετική συμπερασματολογία.

Σαν παράδειγμα, έστω ότι ενδιαφερόμαστε για την εσωτερική σχέση των ατομικών μεγεθών αποζημίωσης X_i και του συνολικού ποσού αποζημίωσης $D(t)=\sum X_i$, που είναι ανεξάρτητες, ομοιόμορφα κατανεμημένες. Η κύρια κλάση των κατανομών μεγάλων αποζημιώσεων περιγράφεται από τις υποεκθετικές κατανομές.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο κινδύνου παίρνει τη μορφή $\Psi(x)=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\Psi(x+c\theta_1-\mathrm{Z}_1)dB(z)\right)dA(t)$ και ο υπολογισμός της είναι αρκετά απλός.

Προσθέτοντας έναν όρο διαταραχής στο κλασικό μοντέλο προκύπτει μια επιπρόσθετη αβεβαιότητα πέραν των συνολικών αποζημιώσεων ή του ασφαλίστρου εισοδήματος. Ο όρος αυτός στην περίπτωση μιας ευσταθούς κίνησης Lévy λαμβάνει υπόψη μεγάλες διακυμάνσεις και περιπτώσεις υψηλών αποζημιώσεων. Για την εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας στο μοντέλο κινδύνου, που διαταράσσεται από μια τέτοια κίνηση, είναι αναγκαίες δύο σημαντικές ιδιότητες των κατανομών με βαριές ουρές, η ισοδυναμία μέγιστου αθροίσματος και η συνέλιξη ως προς την κλειστότητα.

Όπως αποδείξαμε στο θεώρημα 6.3, η πιθανότητα χρεοκοπίας στην περίπτωση μιας κατανομής F, που ανήκει στην κλάση $D \cap L$ και έχουμε προσθέσει τον όρο διαταραχής είναι:

$$\psi(x) \sim \frac{\rho}{1-\rho}\overline{F_e}(x) + \frac{1}{c(1-\rho)\Gamma(2-\alpha)} x^{-\alpha+1}$$

Οι διάφορες κλάσεις των κατανομών με βαριές ουρές συνεχώς αυξάνουν (βλ. Κατανομή Α, στην Εισαγωγή) και η μελέτη κάθε μιας απ' αυτές, αλλά και της αλληλεξάρτησής τους, έχει σύγχρονο επιστημονικό ενδιαφέρον και ιδιαίτερο ενδιαφέρον στο πεδίο των εφαρμογών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Jun Cai and Qihe Tang (2004) On max-sum-equivalence and convolution closure of heavy-tailed distributions and their applications. J. Appl. Probab. 41, 117- 130.

2. Vladimir Kalashnikov (1998) Mathematical Methods In The Ruin Probability Theory (Lecture Notes)

3. Paul Embrechts, Claudia Klüppelberg, Thomas Mikocsh (1997) Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer

4. Dimitrios Konstantinides, Qihe Tang, Gurami Tsitsiashvili (2002) Estimates for the Ruin Probability in the Classical Risk Model with Constant Interest Force in the Presence of Heavy Tails

5. J. R. Leslie (1989) On the non-closure under convolution of the subexponential family. J. Appl. Prob. **26**, 58-66

6. Omey, E. (1994) On the difference between the product and the convolution product of distribution functions. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **55**(69), 111-145.

7. Furrer H. J. (1998) Risk Processes Perturbed by α-stable Lévy Motion. Scand. Actuarial J. 1:59-74.

8. William Feller (1971) An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume II, 2nd Edition. Jhon Wiley & Sons, New York.

9. Gennady Samorodnitsky, Murad S. Taqqu (1994). Stable Non-Gaussian Random Processes. Chapman & Hall, New York.

10. Veraverbeke, N. (1993) Asymptotic estimates for the probability of ruin in a Poisson model with diffusion. Insurance Math. Econom. 13, 57-62

11. Dufresne, F. and Gerber, H.U. (1991) Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by a diffusion. Insurance Math. Economy. 10, 51-59